

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M. Ing.

PAR
LALONDE, Sébastien

MODÉLISATION DE LA PROPAGATION DES FISSURES DANS LES
ENGRENAGES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRES

MONTRÉAL, LE 7 FÉVRIER 2008

À la première fissure dans l'idéal, tout le réel s'y engouffre.

Jean Rostand

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE

M. Raynald Guilbault Ph.D., directeur de mémoire
Département de génie de mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Hakim Bouzid Ph.D., président du jury
Département de génie de mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Jacques Lanteigne Ph.D., membre du jury
Institut de Recherche d'Hydro-Québec (IREQ)

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 30 JANVIER 2008

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier l'École de Technologie Supérieure (ÉTS) et le Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) pour leurs appuis financiers qui m'ont permis de me consacrer entièrement à la réalisation de ce projet de maîtrise.

Aussi, je voudrais souligner la participation de certains membres du personnel de soutien de l'ÉTS, M. Serge Plamondon et M. Alexandre Vignault, qui de par leur assistance technique ont contribué au succès du volet expérimental de ce projet.

Surtout, j'aimerais exprimer ma sincère reconnaissance envers le directeur de ce mémoire, M. Raynald Guilbault, qui en m'offrant l'opportunité de réaliser ce projet d'étude, m'a permis de vivre une expérience très enrichissante à bien des niveaux. Ses judicieux conseils et son soutien constant tout au long du projet, ont aussi contribué grandement à mon apprentissage durant mon passage à la maîtrise.

Enfin, pour vos encouragements et votre support inconditionnel, Gérald, Liette, Sylvain et Mélanie, je vous remercie infiniment; sans vous, rien de tout cela n'aurait été possible.

MODÉLISATION DE LA PROPAGATION DES FISSURES DANS LES ENGRENAGES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRES

LALONDE, Sébastien

RÉSUMÉ

La fatigue en flexion est responsable de plus de 30% des défaillances des systèmes d'engrenage et par conséquent, engendre des pertes substantielles. Il devient donc essentiel de bien comprendre ce phénomène afin d'en minimiser les impacts souvent néfastes.

Ce projet d'étude propose donc la modélisation de la fatigue en flexion des engrenages basée sur les concepts d'endommagement et de la mécanique de la rupture. Visant le développement d'une méthode d'analyse systématique et complète du problème, une approche générale a été adoptée pour ainsi traiter les phases d'initiation et de propagation de la fissuration.

Le modèle a été réalisé par la Méthode des Équations Intégrales de Frontières (MEIF) qui s'est avérée très efficace. Outre l'élaboration d'un outil d'analyse définissant les bases de l'étude du phénomène, deux contributions importantes découlent de cette recherche. 1 - Le développement d'une nouvelle technique de modélisation des fissures pour la MEIF; 2 - L'introduction d'un nouveau critère d'initiation de fissure, basé sur une combinaison vectorielle du cisaillement et de la tension.

Une validation par comparaison à des mesures expérimentales, tirées d'essais de fatigue réalisés dans le cadre de ce projet, a permis de conclure à une excellente précision du modèle au plan de la propagation. Du côté de l'initiation, les résultats ont démontré que l'approche proposée était cohérente avec les observations.

Mots clés : engrenage, fatigue, mécanique de la rupture, modélisation numérique, initiation de fissure, propagation de fissure.

MODELING OF CRACK PROPAGATION IN GEARS USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

LALONDE, Sébastien

ABSTRACT

Bending fatigue is responsible for more than 30% of gear system failures and consequently, generates substantial losses. It is therefore essential to perfectly understand this phenomenon in order to minimize its baneful impacts.

This study therefore proposes the modeling of gear bending fatigue based on damage mechanics and fracture mechanics. Aiming to develop a systematic method to analyze completely the problem, a general approach was adopted to treat initiation and propagation phases of cracking.

The model was developed with the Boundary Element Method (BEM) which has proved to be very effective. In addition to the development of a tool analysis defining the basic rules of gear bending fatigue study, two important contributions emerge from this research. 1 - The development of a new crack modeling technique for the BEM; 2 - The introduction of a new criterion for crack initiation based on a vectorial combination of shear and tension forces.

A validation by comparisons to experimental measurements, derived from fatigue tests carried out within the framework of this project, has confirmed that the model is accurate for the prediction of crack propagation. Whereas for crack initiation, results have shown that the proposed approach was coherent with the observations.

Keywords : gear, fatigue, fracture mechanics, numerical modeling, crack initiation, crack propagation.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	4
1.1 Notions de base du fonctionnement des engrenages.....	4
1.2 Fatigue des engrenages.....	5
1.2.1 Fatigue de contact.....	5
1.2.2 Fatigue en flexion.....	7
1.3 Initiation des fissures.....	10
1.3.1 Région critique.....	10
1.3.2 Durée de vie en fatigue initiation.....	11
1.3.3 Longueur initiale.....	12
1.3.4 Orientation initiale.....	14
1.4 Propagation des fissures.....	15
1.4.1 Sollicitation des fissures.....	15
1.4.2 Point critique.....	16
1.5 Facteurs influençant la fatigue des engrenages.....	16
1.5.1 Traitements de surface.....	16
1.5.2 Contraintes résiduelles.....	17
1.5.3 Fermeture des lèvres de la fissure.....	18
1.5.4 Rugosité des surfaces.....	18
1.5.5 Zone de contact.....	18
1.5.6 Géométrie des roues.....	19
1.5.7 Vitesse de rotation.....	19
1.6 Application des théories de la mécanique de la rupture.....	20
1.6.1 Modes de rupture en fatigue en flexion.....	20
1.6.1.1 Mode I vs. Mode II.....	21
1.6.2 Hypothèses générales liées à la MREL.....	21
1.6.3 Facteur d'intensité de contrainte (FIC).....	22
1.6.3.1 Calcul du facteur d'intensité de contrainte.....	24
1.6.3.2 Facteur d'intensité de contrainte équivalent.....	28
1.6.3.3 Facteur d'intensité de contrainte efficace.....	28
1.6.4 Modèle de propagation des fissures.....	30
1.6.4.1 Lois de propagation.....	31
1.6.4.2 Orientation de la propagation des fissures.....	32
1.6.4.3 Propagation des fissures dans l'engrènement.....	32
1.7 Modélisation numérique de la propagation des fissures.....	33
1.7.1 Dimension, géométrie et conditions frontière du modèle.....	33
1.7.2 Méthodes numériques.....	34

1.7.2.1	Méthode des éléments finis	35
1.7.2.2	Méthode des équations intégrales de frontières	36
1.7.3	Évaluation du facteur d'intensité de contrainte	38
1.7.4	Évaluation de l'avancement de fissure	39
1.7.5	Paramètres de discrétisation	40
CHAPITRE 2 CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE.....		42
2.1	Cadre théorique	42
2.2	Problématique.....	45
2.3	Objectifs de la recherche	46
2.4	Hypothèses générales d'analyse.....	47
2.5	Structure de la recherche	48
2.5.1	Modélisation numérique.....	48
2.5.2	Initiation des fissures.....	49
2.5.3	Propagation des fissures	50
2.5.4	Comparaison à des mesures expérimentales	50
CHAPITRE 3 MODÉLISATION NUMÉRIQUE.....		52
3.1	Évaluation du facteur d'intensité de contrainte.....	52
3.1.1	Extrapolation des déplacements	53
3.1.1.1	Calcul en un point.....	53
3.1.1.2	Calcul en deux points.....	53
3.1.1.3	Minimisation de l'erreur	54
3.1.1.4	Calcul par la méthode des moindres carrés	55
3.1.2	Extrapolation des contraintes	55
3.1.3	Intégrale J	56
3.1.3.1	Mode I.....	56
3.1.3.2	Décomposition de l'intégrale.....	57
3.1.4	Soustraction de la singularité	59
3.2	Formulation et particularités des méthodes numériques	60
3.2.1	Méthode des éléments finis (MEF)	60
3.2.2	Méthode des équations intégrales de frontières (MEIF)	61
3.2.2.1	Particularités de la MEIF	63
3.3	Modèles 2D sans fissure.....	66
3.3.1	Modèle MEF	66
3.3.1.1	Stratégie de modélisation.....	66
3.3.1.2	Discrétisation de la géométrie	67
3.3.2	Modèle MEIF	70
3.3.2.1	Stratégie de modélisation.....	70
3.3.2.2	Discrétisation de la géométrie	70
3.3.3	Comparaison des modèles MEF et MEIF sans fissure.....	72
3.4	Modèles 2D avec fissure	74
3.4.1	Modèle MEF	74

3.4.1.1	Stratégie de modélisation.....	74
3.4.1.2	Éléments singuliers.....	75
3.4.1.3	Discrétisation de la géométrie fissurée.....	77
3.4.2	Modèle MEIF.....	79
3.4.2.1	Méthode de sous-structuration du domaine.....	79
3.4.2.2	Méthode de la discontinuité des déplacements.....	81
3.4.2.3	Méthode de la formulation mixte.....	83
3.4.2.4	Méthode de séparation finie des lèvres de la fissure.....	85
3.4.2.5	Comparaison des techniques de modélisation.....	87
3.4.2.6	Discrétisation de la géométrie fissurée par la sous-structuration.....	89
3.5	Application de la méthode de séparation finie des lèvres de la fissure.....	93
3.5.1	Modélisation de la fissure.....	93
3.5.2	Intégration presque singulière.....	94
3.5.2.1	Augmentation du nombre de points de Gauss.....	95
3.5.2.2	Subdivision des éléments.....	95
3.5.2.3	Soustraction de la singularité.....	97
3.5.2.4	Approximation de la variation singulière du Jacobien.....	99
3.5.3	Applicabilité des éléments singuliers.....	101
3.5.4	Paramètres de discrétisation.....	103
3.5.5	Validation de la méthode de séparation finie.....	107
3.5.6	Application de la méthode aux engrenages.....	112
3.6	Comparaison des modèles MEF et MEIF avec fissure.....	112
3.6.1	Application aux géométries simples.....	112
3.6.2	Application aux engrenages.....	114
3.7	Application du calcul des facteurs d'intensité de contrainte.....	116
3.8	Conclusion.....	119
CHAPITRE 4 INITIATION DES FISSURES.....		121
4.1	Fatigue des engrenages.....	121
4.1.1	Chargement multiaxial.....	121
4.1.2	Chargement proportionnel.....	122
4.1.3	Contrainte moyenne.....	124
4.1.4	Concentration de contrainte.....	124
4.1.5	Fatigue endurance.....	124
4.1.6	Amorce des fissures.....	125
4.1.6.1	Région critique.....	126
4.1.6.2	Position critique dans l'engrènement.....	126
4.1.6.3	Longueur initiale (a_0).....	127
4.1.6.4	Orientation initiale (θ_0).....	128
4.1.6.5	Durée de vie résiduelle en initiation (N_i).....	128
4.2	Types de critère en fatigue multiaxiale.....	128
4.2.1	Approche basée sur la contrainte.....	129
4.2.2	Approche basée sur la déformation.....	129
4.2.3	Approche basée sur l'énergie de déformation.....	130

4.2.4	Approche basée sur le plan critique	131
4.2.5	Approche basée sur la distance critique	131
4.3	Application du critère d'initiation	135
4.3.1	Implantation de la méthode de la ligne critique	135
4.3.2	Estimation de la fissure initiale d'une roue d'engrenage	136
4.4	Conclusion	139
CHAPITRE 5 PROPAGATION DES FISSURES		141
5.1	Concepts d'analyse en propagation de fissure	141
5.1.1	État plan de contraintes et état plan de déformations	141
5.1.2	Applicabilité de la MREL	142
5.1.3	Résistance résiduelle et longueur de fissure critique (a_c)	143
5.1.4	Propagation des fissures en mode mixte (K_{eq})	144
5.1.5	Plasticité induite en bout de fissure (K_{eff})	145
5.2	Lois de propagation	145
5.2.1	Modèle de Paris	146
5.2.2	Modèle de Walker	146
5.2.3	Modèle de Forman	146
5.2.4	Modèle de Forman-Newman-de Koning	147
5.2.5	Modèle de Collipriest	148
5.2.6	Modèle de Kato et al.	148
5.2.7	Comparaison des lois de propagation	149
5.3	Durée de vie résiduelle en propagation (N_p)	151
5.4	Critère d'orientation de la propagation (θ_p)	151
5.4.1	Approche basée sur la contrainte principale en tension	151
5.4.2	Approche basée sur la densité d'énergie de déformation minimale	152
5.4.3	Approche basée sur le relâchement de l'énergie de déformation	153
5.4.4	Comparaison des critères	154
5.5	Application du modèle numérique à la propagation de fissures	155
5.5.1	Paramètres de discrétisation	155
5.5.2	Variation des facteurs d'intensité de contrainte	156
5.5.3	Modélisation de la propagation	158
5.5.3.1	Méthode de la position critique de l'engrènement	158
5.5.3.2	Méthode des incréments pondérés	159
5.5.3.3	Comparaison des méthodes	160
5.5.3.4	Effet de l'orientation initiale de la fissure	161
5.6	Conclusion	161
CHAPITRE 6 COMPARAISONS AVEC MESURES EXPÉRIMENTALES		163
6.1	Définition de l'approche expérimentale	163
6.1.1	Préparation des échantillons	164
6.1.2	Caractéristiques générales du chargement	164
6.1.3	Propriétés du matériau	165

6.1.4	Description du montage	166
6.1.4.1	Équipements d'essais de fatigue.....	166
6.1.4.2	Gabarit de montage.....	167
6.1.4.3	Échantillons de type Brugger.....	168
6.1.4.4	Échantillons avec trou ellipsoïde	169
6.1.4.5	Application du chargement.....	170
6.2	Résultats expérimentaux comparés aux simulations numériques	171
6.2.1	Initiation des fissures.....	171
6.2.2	Propagation des fissures	179
6.3	Conclusion.....	183
	CONCLUSION.....	185
	RECOMMANDATIONS	189
	ANNEXE I MÉTHODES NUMÉRIQUES.....	191
	ANNEXE II CALCULS RELATIFS À LA GÉOMÉTRIE DES ENGRENAGES.....	197
	ANNEXE III ÉTUDES DE CONVERGENCE DES MAILLAGES	200
	ANNEXE IV DESSINS DE DÉTAIL DU MONTAGE EXPÉRIMENTAL	222
	ANNEXE V RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX VS. NUMÉRIQUES	238
	LISTE DE RÉFÉRENCES	245

LISTE DES TABLEAUX

		Page
Tableau 1.1	Longueurs a_0 pour la modélisation de la fatigue en flexion des engrenages	14
Tableau 1.2	Paramètres des modèles de propagation des fissures des engrenages.....	41
Tableau 3.1	Comparaison des méthodes de modélisation des fissures par la MEIF	88
Tableau 3.2	K_I/K_{I^*} d'une plaque rectangulaire avec éléments réguliers et singuliers...	102
Tableau 3.3	Configurations de maillage avec modélisation en ellipse et en pointe	104
Tableau 3.4	K_I/K_{I^*} pour une plaque rectangulaire fissurée sur un côté.....	105
Tableau 3.5	K_I/K_{I^*} pour différents rapports α/δ	106
Tableau 3.6	K_I/K_{I^*} pour différentes séparations finies (δ)	107
Tableau 3.7	β_I pour une plaque rectangulaire avec fissure oblique en traction	109
Tableau 3.8	β_{II} pour une plaque rectangulaire avec fissure oblique en traction	109
Tableau 3.9	β_I et β_{II} d'une plaque rectangulaire avec fissure oblique en flexion	110
Tableau 3.10	β_I d'une plaque rectangulaire fissurée avec trou circulaire	111
Tableau 3.11	β_{II} d'une plaque rectangulaire fissurée avec trou circulaire	111
Tableau 3.12	Comparaison de β_I et β_{II} normalisés d'une plaque rectangulaire	113
Tableau 3.13	Nombre de DDL relatif requis pour une plaque rectangulaire fissurée	114

Tableau 3.14	Comparaison des modèles pour β_I et β_{II} d'une roue d'engrenage	114
Tableau 4.1	Résultats des critères d'initiation pour une roue d'engrenage	137
Tableau 6.1	Composition chimique de l'aluminium 6061-T6 (%)	165
Tableau 6.2	Propriétés mécaniques de l'aluminium 6061-T6	166
Tableau 6.3	Caractéristiques du chargement des essais de fatigue	171
Tableau 6.4	Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon Brugger Roue	176
Tableau 6.5	Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon avec ellipse à 0°	176

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Caractéristiques géométriques des roues (a) et des engrenages (b).4
Figure 1.2	Mouvement relatif d'une paire de dents en contact.6
Figure 1.3	Endommagement par piqûres (a) et par écaillage (b).7
Figure 1.4	Rupture en flexion d'une roue à denture droite (a) et spirale (b).8
Figure 1.5	Représentation schématique de la vie en fatigue d'un élément mécanique.9
Figure 1.6	Exemple d'initiation artificielle d'une fissure en flexion.....10
Figure 1.7	Représentation schématique de la vie en fatigue selon Wöhler et French.12
Figure 1.8	Contrainte limite en fonction de la longueur de la fissure.13
Figure 1.9	Orientation de la fissure initiale.15
Figure 1.10	Modes de rupture : a) mode I, b) mode II, c) mode III.20
Figure 1.11	État de contrainte en bout de fissure.23
Figure 1.12	Transformation par la méthode du potentiel complexe.....25
Figure 1.13	Analyse des contraintes par un système équivalent.26
Figure 1.14	Configurations possibles de l'ouverture de fissure.29
Figure 1.15	Schématisation du taux de propagation en fonction de ΔK31
Figure 1.16	Configuration à une dent (a) et trois dents (b) d'engrenage.....34

Figure 1.17	Exemple de maillage 2D pour la MEF.....	35
Figure 1.18	Exemple de maillage 2D pour la MEIF.	36
Figure 1.19	Plan d'analyse en front de fissure d'un modèle 3D.	39
Figure 1.20	Exemple de propagation d'un front de fissure d'un modèle 3D.	40
Figure 2.1	Schématisation du processus d'élaboration du modèle.....	48
Figure 3.1	Extrapolation des déplacements en deux points.....	54
Figure 3.2	Contour indépendant de l'intégrale J	56
Figure 3.3	Contour indépendant de la décomposition de l'intégrale J	58
Figure 3.4	Configuration du calcul des FIC par soustraction de la singularité.	60
Figure 3.5	Discrétisation d'une dent d'engrenage par éléments finis.	68
Figure 3.6	Écart relatif des maillages d'éléments finis sur σ_{eq}	68
Figure 3.7	Maillage d'éléments finis pour une roue non fissurée.	69
Figure 3.8	Écart relatif des maillages d'éléments de frontières sur σ_{eq}	71
Figure 3.9	Maillage d'éléments de frontières pour une roue non fissurée.	71
Figure 3.10	Distribution de σ_{eq} en fonction de la position relative au congé de la dent.	72
Figure 3.11	Sous-structuration des surfaces pour la MEF.....	74
Figure 3.12	Construction d'un élément singulier quart de point quadrilatéral.....	75
Figure 3.13	Construction d'un élément singulier quart de point triangulaire.....	76

Figure 3.14	Types de discrétisation en bout de fissure.....	76
Figure 3.15	K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (MEF).....	77
Figure 3.16	Maillage d'éléments finis pour une roue fissurée.	78
Figure 3.17	Méthode de sous-structuration du domaine.	80
Figure 3.18	Méthode de discontinuité des déplacements.	82
Figure 3.19	Méthode de la formulation mixte.	84
Figure 3.20	Méthode de séparation finie des lèvres de la fissure.	86
Figure 3.21	Configuration de l'interface pour la méthode de sous-structuration.	90
Figure 3.22	Construction d'un élément singulier quart de point unidimensionnel.	91
Figure 3.23	K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (MEIF).	92
Figure 3.24	Maillage d'éléments frontières par sous-structuration d'une roue fissurée. ..	93
Figure 3.25	Modélisation du bout de fissure en ellipse (a) et en pointe (b).	94
Figure 3.26	Situation d'intégration presque singulière.....	94
Figure 3.27	Configurations de subdivision des éléments.	97
Figure 3.28	Subdivision des éléments singuliers.....	100
Figure 3.29	Plaque rectangulaire avec fissure horizontale sur un côté.....	101
Figure 3.30	Variation de K_I normalisé pour les éléments réguliers (a) et EQP (b).	103
Figure 3.31	Configuration type du maillage de la fissure.	104

Figure 3.32	Variation de K_I normalisé pour les modèles en ellipse (a) et en pointe (b).....	106
Figure 3.33	Plaque rectangulaire avec fissure oblique en traction (a) et en flexion (b).	108
Figure 3.34	Plaque rectangulaire avec trou circulaire et fissures débouchantes.	110
Figure 3.35	Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/w = 0.6$	113
Figure 3.36	Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/m = 0.1$	115
Figure 3.37	Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/m = 0.5$	115
Figure 3.38	Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/m = 1$	116
Figure 3.39	Variation de β_I et β_{II} pour une plaque rectangulaire en traction.....	117
Figure 3.40	Variation de β_I et β_{II} pour une plaque rectangulaire en flexion.....	117
Figure 4.1	Variation de l'état de contrainte durant le cycle d'engrènement.	122
Figure 4.2	Variation de σ_y/σ_1 (a) et σ_z/σ_1 (b) durant le cycle d'engrènement.	123
Figure 4.3	Variation de $\theta_{\sigma 13}$ durant le cycle d'engrènement.....	123
Figure 4.4	Mécanisme d'intrusion-extrusion en surface.	125
Figure 4.5	σ_{eq} en fonction des positions relatives au congé et de l'engrènement.	126
Figure 4.6	Schématisation de σ_{eff} selon L_{Cr} (a) et Pt_{Cr} (b).	132
Figure 4.7	Application du principe de la distance L_0 à l'approche du plan critique.....	133
Figure 4.8	Comparaison des critères d'initiation.....	137

Figure 4.9	Variation de θ_0 (a) et r_0 (b) en fonction de la distance critique L_0	138
Figure 4.10	Variation de θ_0 (a) et r_0 (b) en fonction du rapport τ_c/σ_c	139
Figure 5.1	Définition de la largeur « F » d'une roue d'engrenage.	142
Figure 5.2	Schématisme du rayon de plasticité « r_p » et de la distance « d ».	143
Figure 5.3	Diagramme de résistance résiduelle.	144
Figure 5.4	Comparaison des lois de propagation.	150
Figure 5.5	Comparaison des critères de propagation.	154
Figure 5.6	Effet de l'incrément « da » sur la trajectoire de la fissure.	156
Figure 5.7	Configurations de la dent fissurée.	156
Figure 5.8	K_I (a) et K_{II} (b) normalisés selon la position de l'engrènement.	157
Figure 5.9	Rapport K_{II}/K_I en fonction de la position de l'engrènement.	158
Figure 5.10	Schématisme de la méthode des incréments pondérés.	159
Figure 5.11	Comparaison des techniques de modélisation de la propagation.	160
Figure 5.12	Effet de l'orientation initiale de la fissure.	161
Figure 6.1	Comparaison d'une dent d'engrenage (a) à un échantillon Bruggen (b).	164
Figure 6.2	Banc d'essai de fatigue en traction.	167
Figure 6.3	Gabarit de montage pour essais de fatigue en flexion.	167
Figure 6.4	Configuration des échantillons de type Bruggen.	168

Figure 6.5	Montage des essais de fatigue en traction.	169
Figure 6.6	Configuration des échantillons avec trou ellipsoïde.	170
Figure 6.7	Systèmes de coordonnées des échantillons.	172
Figure 6.8	Comparaison des résultats pour les échantillons de type Brugger.	173
Figure 6.9	Comparaison des résultats pour les échantillons avec trou ellipsoïde.	174
Figure 6.10	Comparaison des résultats selon θ_0	175
Figure 6.11	Initiation de fissure échantillon Brugger Roue A.	177
Figure 6.12	Initiation de fissure échantillon Brugger Roue B.	177
Figure 6.13	Initiation de fissure échantillon avec ellipse à 0° A.	178
Figure 6.14	Initiation de fissure échantillon avec ellipse à 0° B.	178
Figure 6.15	Propagation de fissure échantillon Brugger Roue A.	179
Figure 6.16	Propagation de fissure échantillon Brugger Roue B.	180
Figure 6.17	Propagation de fissure échantillon Brugger R = 10 mm A.	180
Figure 6.18	Propagation de fissure échantillon Brugger R = 10 mm B.	181
Figure 6.19	Propagation de fissure échantillon Brugger R = 7.5 mm A.	181
Figure 6.20	Propagation de fissure échantillon Brugger R = 7.5 mm B.	182
Figure 6.21	Propagation de fissure échantillon Brugger R = 5 mm A.	182
Figure 6.22	Propagation de fissure échantillon Brugger R = 5 mm B.	183

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

Alphabet latin

a	Longueur d'une fissure
a_{th}	Longueur de fissure au seuil de propagation
a_0	Longueur de fissure initiale
a_c	Longueur de fissure critique
b	Constante de rigidité d'un matériau
c	Constante de ductilité d'un matériau
D_t	Critère d'endommagement en tension
D_s	Critère d'endommagement en cisaillement
$D_{L,cr}$	Critère d'endommagement avec le principe de la distance critique
$D_{Pt,cr}$	Critère d'endommagement avec le principe du point critique
$D_{\sigma_{max}}$	Critère d'endommagement avec le principe de la tension maximale
$D_{\tau_{max}}$	Critère d'endommagement avec le principe du cisaillement maximale
E	Module d'élasticité
F	Largeur de la denture d'une roue d'engrenage
G	Module de cisaillement
\mathcal{G}	Taux de relâchement d'énergie potentielle
\mathcal{G}_{max}	Critère du taux de relâchement d'énergie potentielle maximal

h	Taille d'un élément
h_i	Taille d'un sous-élément
h_s	Taille d'un élément au début d'une fissure
h_t	Taille d'un élément en bout de fissure
H	Dureté de surface
J	Intégrale de contour en J
J_I	Intégrale de contour en J en mode I
J_{II}	Intégrale de contour en J en mode II
K	Facteur d'intensité de contrainte
K_t	Facteur de concentration de contrainte
K_{Ic}	Ténacité d'un matériau
ΔK_{th}	Variation du facteur d'intensité de contrainte au seuil de propagation
ΔK	Variation du facteur d'intensité de contrainte pour un cycle
K_I	Facteur d'intensité de contrainte en mode I
K_{II}	Facteur d'intensité de contrainte en mode II
K_{III}	Facteur d'intensité de contrainte en mode III
K_{eq}	Facteur d'intensité de contrainte équivalent
ΔK_{eq}	Variation du facteur d'intensité de contrainte équivalent
K_{eff}	Facteur d'intensité de contrainte efficace
ΔK_{eff}	Variation du facteur d'intensité de contrainte efficace pour un cycle

ΔK_c	Variation du facteur d'intensité de contrainte en région instable
m	Module (mm)
m_b	Rapport de la hauteur d'une dent sur l'épaisseur de la jante (backup ratio)
n	Nombre de dents d'une roue d'engrenage
N	Nombre de cycles
N_f	Nombre de cycles à la rupture
N_i	Nombre de cycles en initiation de fissure
N_p	Nombre de cycles en propagation de fissure
N_e	Nombre de cycles avant la limite d'endurance
N_u	Nombre de cycles à la rupture en mode quasi statique
P	Pas diamétral (po^{-1})
r_f	Rayon au congé d'une dent d'engrenage
r_p	Rayon de plasticité en bout de fissure
R	Rapport de chargement ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$ ou K_{min}/K_{max})
R_b	Rayon de base
R_c	Rapport de conduite
R_p	Rayon primitif
S_e	Contrainte de limite d'endurance
S_{er}	Contrainte de limite d'endurance en chargement complètement renversé
S_{min}	Critère de la densité d'énergie de déformation minimale

S_u	Contrainte ultime en tension
S_y	Contrainte d'écoulement
t	Traction
T_m	Couple moteur
u	Déplacement
w	Densité d'énergie de déformation
W	Force transmise à l'engrènement
W_t	Force tangentielle transmise à l'engrènement
W_r	Force radiale transmise à l'engrènement
W_a	Force axiale transmise à l'engrènement
Y_N	Facteur de cycle de vie en fatigue de l'AGMA

Alphabet grec

β	Facteur de forme
γ_a	Amplitude de déformation en cisaillement
Γ	Contour d'un domaine d'analyse
δ	Valeur de la séparation finie des lèvres d'une fissure
ϵ_{plane}	État de déformation plane
ϵ_a	Amplitude de déformation normale
ϵ_{el}	Déformation élastique

ϵ_{pl}	Déformation plastique
ϵ_f^*	Déformation normale effective à la rupture
$\Delta\epsilon$	Variation de déformation totale pour un cycle
θ_p	Orientation de la propagation
θ_0	Orientation initiale de la fissure
$\theta_{\sigma\theta\theta\max}$	Orientation de la contrainte tangentielle maximale
σ_a	Contrainte d'amplitude
σ_m	Contrainte moyenne
σ_{plane}	État de contrainte plane
$\sigma_{\theta\theta\max}$	Critère de la contrainte tangentielle maximale
σ_f^*	Contrainte normale effective à la rupture
σ_{\max}	Contrainte normale maximale
$\Delta\sigma$	Variation de contrainte pour un cycle
ν	Coefficient de Poisson
φ	Angle de pression au cercle primitif
ψ	Fonctions d'interpolation des éléments
Ω	Domaine d'analyse

Acronymes

AGMA American Gear Manufacturers Association

CTOD	Crack Tip Opening Displacement
DBEM	Dual Boundary Element Method
DDL	Degré De Liberté
DDM	Displacement Discontinuity Method
EQP	Élément singulier Quart de Point
ESDU	Engineering Science Data Unit
ETQP	Élément singulier de Traction Quart de Point
FIC	Facteur d'Intensité de Contrainte
ISO	Organisation internationale de normalisation
MEF	Méthode des Éléments Finis
MEIF	Méthode des Équations Intégrales de Frontières
MREL	Mécanique de la Rupture en Élasticité Linéaire
RMS	Root Mean Square

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

UNITÉS GÉOMÉTRIQUES

Longueur

μm	micromètre
mm	millimètre
m	mètre
po	pouce

UNITÉS MÉCANIQUES

Angle plan

rad	radian
°	degré

UNITÉS DE TEMPS

Moment d'une force

Nm	Newton mètre
----	--------------

Contrainte, pression

MPa	mégaPascal
-----	------------

Fréquence

Hz	Hertz
----	-------

Force

N	Newton
---	--------

INTRODUCTION

L'importance de la rupture par propagation de fissure de fatigue dans la défaillance des structures et composantes mécaniques, n'est plus à faire. En effet, des études faites aux États-Unis (Reed et al., 1983) ainsi qu'en Europe (Faria, 1991) ont démontré que les pertes économiques engendrées par ce phénomène atteignaient près de 4% du produit intérieur brut des pays industrialisés. Cela est sans compter les incidences majeures en matière de sécurité publique où bien souvent les ruptures brusques ont des conséquences fatales. Toutefois, selon Milne (1994), en appliquant adéquatement les connaissances actuelles en mécanique de la rupture, il serait possible, à moyen terme, de réduire près de la moitié de ces coûts. Il est donc économiquement et socialement indispensable de poursuivre les développements scientifiques en cette matière.

Les engrenages, composantes maîtresses de plusieurs systèmes et mécanismes, n'échappent pas aux risques de rupture en fatigue. Ce phénomène est d'autant plus important dans le contexte industriel d'aujourd'hui, où la quête constante d'optimisation nécessite l'utilisation de ces éléments de machine à des niveaux de sollicitation près des limites critiques. Il devient donc primordial de bien maîtriser leurs comportements sous l'effet de charges plus ou moins élevées afin d'éviter les bris inattendus aux conséquences désastreuses.

Puisque les dents d'engrenage subissent tour à tour la charge d'une puissance transmise, leur état de contrainte varie de façon cyclique, expliquant ainsi leur défaillance en fatigue à un niveau de chargement bien au-dessous de la limite d'élasticité du matériau. Plus particulièrement, la rupture des engrenages résulte fréquemment d'une propagation de fissures en racine de dent engendrée par la fatigue en flexion de celle-ci (Alban, 1984; Errichello et Muller, 2001; Fernandes, 1996). Cependant, de par la géométrie et la nature du fonctionnement des engrenages, l'analyse du phénomène est relativement complexe et peu d'outils sont disponibles pour traiter directement ce problème.

Ce projet de recherche s'adresse spécifiquement au problème en proposant la modélisation numérique de la fatigue en flexion des engrenages. En adoptant principalement une approche phénoménologique, la représentation virtuelle du phénomène sera élaborée à une échelle macroscopique à partir des théories de la Mécanique de la Rupture en Élasticité Linéaire (MREL).

L'ensemble de cette étude constitue les prémisses d'un projet de recherche d'envergure visant le développement d'un modèle tridimensionnel sophistiqué incluant la majorité des aspects du fonctionnement des engrenages influençant le phénomène (défauts de fabrication et de montage, vibration, frottement, ...). Donc, l'objectif principal du présent projet, est de définir les bases d'un modèle numérique simple permettant d'analyser efficacement la progression des fissures dans les engrenages, et ce, de l'initiation jusqu'au seuil critique. L'étude permettra également de définir les possibilités ainsi que les limites d'un tel modèle tout en soulignant les aspects à aborder dans de futurs travaux de recherche. En raison du degré de complexité de la géométrie de certains types d'engrenage (ex. : denture hélicoïdale, spirale) et le caractère général de l'étude, celle-ci se limitera au cas des engrenages cylindriques à denture droite.

Par ailleurs, les tâches importantes de ce travail seront principalement d'établir la position initiation et de faciliter l'utilisation de la méthode des éléments frontières pour le calcul de propagation avec le développement d'une technique novatrice de modélisation des fissures.

Le mémoire est composé de six sections. Le premier chapitre comporte une revue de la littérature abordant tant les aspects physiques de la rupture des engrenages que ceux liés à sa modélisation. La définition précise de la problématique ainsi que la méthodologie adoptée pour ce projet selon un cadre théorique approprié, seront présentées au deuxième chapitre.

Les quatre sections suivantes englobent le cœur du travail. Le chapitre 3 présente l'élaboration et le choix des méthodes numériques appliquées au modèle. Une partie importante de ce chapitre sera consacrée au développement de la nouvelle méthode de

modélisation des fissures. Les chapitres 4 et 5, traitent respectivement de la modélisation de l'initiation et de la propagation des fissures. Il faut mentionner que le chapitre 4 proposera une contribution significative au domaine avec l'élaboration d'un nouveau critère d'initiation. Enfin, au chapitre 6, des résultats obtenus à partir du modèle numérique seront comparés à des données expérimentales, permettant ainsi d'évaluer sa performance réelle tout en montrant l'étendue des possibilités d'un tel outil numérique.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre propose une revue de la littérature sur le sujet permettant de cerner les concepts et les méthodes d'analyse de la fatigue des engrenages. Quelques notions de base seront présentées. Ensuite, les aspects physiques de la fatigue seront abordés. Suivra l'application de la mécanique de la rupture à l'analyse en propagation de fissures. Enfin, un survol des méthodes numériques courantes pour la modélisation du phénomène sera présenté.

1.1 Notions de base du fonctionnement des engrenages

Avant d'aborder directement le sujet, il convient de rappeler quelques notions des engrenages cylindriques droits. À la base, un engrenage est un assemblage de roues dentées (pignon et roue) servant à transmettre une puissance. La géométrie des roues (Figure 1.1) se définit par le nombre de dents (n), l'angle de pression (φ) et le module (m). Les dents sont décrites par des profils conjugués en développante de cercle selon φ qui permettent le maintien constant du rapport de transmission. L'action des profils l'un sur l'autre peut se comparer à deux cylindres en contact dont la ligne d'action passe par le rayon primitif (R_p) et est tangente au rayon de base (R_b) des deux roues (Figure 1.1b).

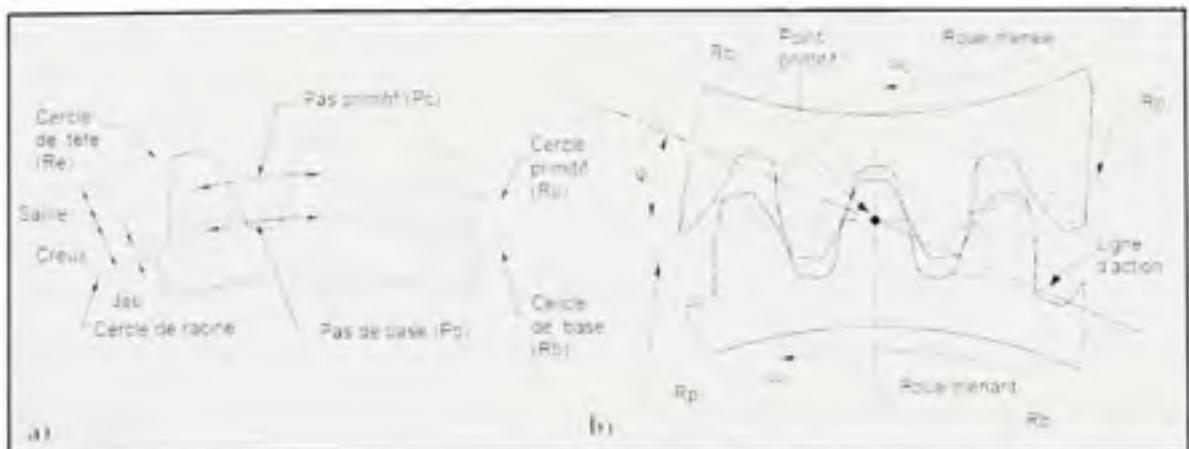


Figure 1.1 *Caractéristiques géométriques des roues (a) et des engrenages (b).*

La force transmise (W) varie selon le nombre de paires de dents en contact. Les contraintes induites par W créent deux zones critiques. La première, située au point de contact, engendre la détérioration des profils. L'autre, se situe au congé du côté actif sollicité en tension où des concentrations de contrainte (K_t) de l'ordre de 1.4 à 2.5 sont observées (Pilkey et Peterson, 1997).

1.2 Fatigue des engrenages

Les trois modes de défaillance les plus fréquents sont, par ordre d'importance : la fatigue, les impacts et l'usure (Alban, 1985). Plus particulièrement, la rupture en fatigue des systèmes d'engrenage peut être de différentes natures :

- La fatigue en flexion;
- La fatigue de contact par glissement (slidding);
- La fatigue de contact par roulement (rolling);
- La fatigue thermique;
- La fatigue des autres composantes du système de transmission (arbre, roulement, ...).

Une analyse de 1500 défaillances d'engrenage a montré que la fatigue en flexion est la plus fréquente avec une proportion de 32% (Alban, 1984). Cependant, sous certaines conditions, le contact peut devenir plus important que la flexion (Kader, Nigam et Grover, 1998).

1.2.1 Fatigue de contact

Habituellement, la fatigue de contact est liée à l'endommagement surfacique de deux corps en contact répétitif (Suresh, 1998) qui se traduit, pour les engrenages, par le mouvement de roulement et de glissement¹ des dents l'une sur l'autre dans l'engrènement (Figure 1.2).

¹ Dans l'engrènement, il y a glissement lorsque le point de contact n'est pas situé sur le cercle primitif et celui-ci change de direction lorsque le point de contact traverse le point primitif.

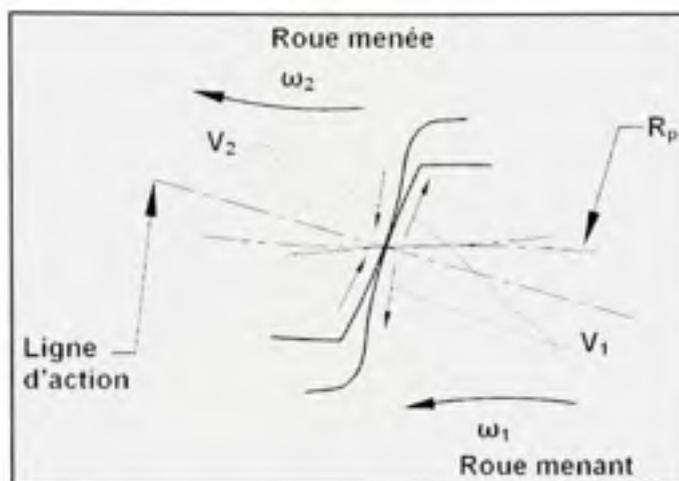


Figure 1.2 *Mouvement relatif d'une paire de dents en contact.*

Ce mouvement génère des forces normales et tangentielles qui induisent des contraintes en compression et en cisaillement au point de contact. Selon l'importance relative des forces, la fatigue de contact se manifeste sous différentes formes (Aslantas et Tasgetiren, 2004) :

- Piqûre de surface (pitting);
- Écaillage (spalling);
- Fissuration.

Pour un système lubrifié et constitué de roues de qualité, les contraintes en cisaillement seront plus importantes sous la surface (Abersek et Flaker, 2004). Par conséquent, la nucléation des fissures s'effectue généralement sous la surface où le cisaillement est maximal (Cavallaro et al., 1995). La propagation des microfissures en direction de la surface occasionne des pertes de matière communément appelées « piqûres » (pitting) (Figure 1.3a). Le diamètre des piqûres varie de 150 à 500 μm (Aslantas et Tasgetiren, 2004). Les piqûres peuvent progresser, arrachant ainsi des morceaux beaucoup plus gros à la surface. Ce phénomène est appelé « écaillage » (spalling) (Figure 1.3b). Les creux ainsi formés, génèrent d'importants concentrateurs de contrainte favorables à une fissuration à travers la dent.

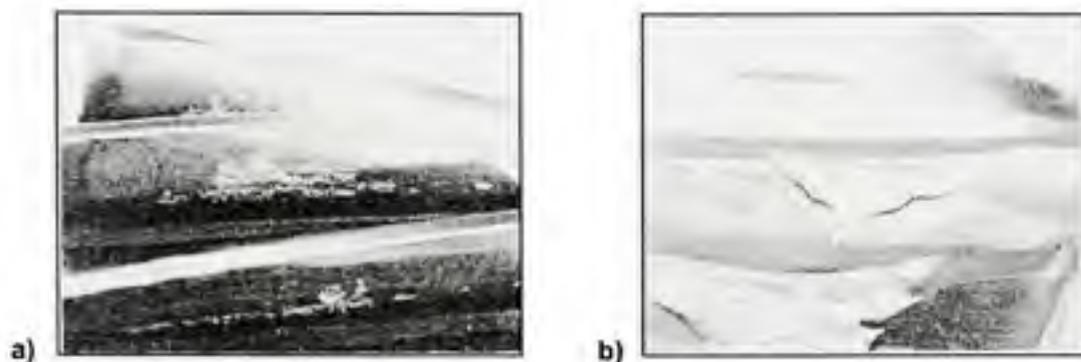


Figure 1.3 Endommagement par piqûres (a) et par écaillage (b).
 (Tiré de ASM International. Handbook Committee., 2002)

Source : Ces figures ont été tirées d'un document de ASM International Handbook Committee, intitulé : *Failure of gears* et faisant partie du Volume 11 : *Failure Analysis and Prevention*. Celles-ci ont été reproduites avec la permission de ASM International[®]. Tous droits réservés. www.asminternational.org. Le titre et le commentaire originaux de la Figure 1.3a sont : *Helical-gear tooth. Pitting initiated along and immediately above the pitchline. In some areas, the progression has been continuous.* Celui de la Figure 1.3b est : *Spiral bevel gear teeth. Original pitting low on the active profile gives initiation to a fast and extensive progression of spalling over the top face and down the back profile. This is often called the cyclone effect.*

Selon Alban (1985), trois zones sont propices à la fatigue de contact : la ligne de contact primitive, les régions immédiatement au-dessus et en dessous de cette ligne et le point de contact le plus près de la racine des dents où une seule paire de dents est en action. Glodez et al. (1997) précisent que c'est surtout cette dernière qui est importante et explique que c'est l'endroit où la combinaison des forces normales et tangentielles est la plus élevée, puisque la dent supporte seule la charge W et que le glissement y est encore important (Glodez, Ren et Fajdiga, 2001). Par ailleurs, la proximité de cette zone à la région en tension combinée au phénomène d'écaillage, occasionne des défauts susceptibles d'atteindre la partie sollicitée en flexion. Il n'est donc pas rare d'observer la rupture d'engrenage par la fatigue en flexion initiée par un défaut de contact (Das et al., 2005; Jha et Diwakar, 2002).

1.2.2 Fatigue en flexion

Alban (1984) et Fernandes (1996) ont décrit qualitativement ce type d'endommagement. Selon leurs observations, l'initiation des fissures de flexion se situe dans le congé des dents du côté actif où les contraintes cycliques en tension y sont maximales. Ensuite, la

progression de ces fissures se fait en direction d'un point de contrainte nulle qui, selon les auteurs, est localisé initialement près du rayon de racine au centre de la dent. D'après Alban, cette trajectoire est la direction offrant le moins de résistance à la propagation. Par la suite, ce point se déplace jusqu'à ce qu'il atteigne le congé de l'autre côté de la dent (Figure 1.4).

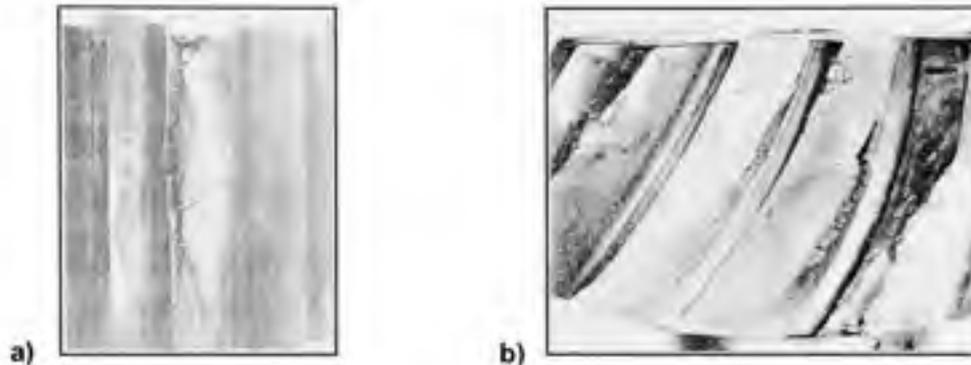


Figure 1.4 Rupture en flexion d'une roue à denture droite (a) et spirale (b).
(Tiré de ASM International. Handbook Committee., 2002)

Source : Ces figures ont été tirées d'un document de ASM International Handbook Committee, intitulé : *Failure of gears* et faisant partie du Volume 11 : *Failure Analysis and Prevention*. Celles-ci ont été reproduites avec la permission de ASM International®. Tous droits réservés. www.asminternational.org. Le titre et le commentaire originaux de la Figure 1.4a sont : *Spur pinion. Tooth-bending fatigue with origin at root radius of loaded side at one end of the tooth*. Celui de la Figure 1.4b est : *Spiral bevel pinion showing classic tooth-bending fatigue. The origin is at midlength of the root radius on the concave (loaded) side*.

Tout au long de la progression des fissures, la rigidité en flexion de la dent diminue. Ce qui tend à surcharger les dents adjacentes et favorise l'initiation de fissures dans celles-ci (Alban, 1984). C'est pourquoi, avec la fatigue en flexion, il y a régulièrement rupture de plusieurs dents successives. Cette fatigue est causée par soit une mauvaise conception, un montage incorrect, des défauts de matériau ou des surcharges (Fernandes, 1996). Cette description est surtout valable pour les roues pleines dont le corps principal a une bonne rigidité. Cependant, dans certains cas le poids des systèmes mécaniques devant être optimisé (ex. : moteurs d'avions, transmissions d'hélicoptères), justifie l'utilisation de roues à jante mince. Or, lorsqu'une fissure s'initie en flexion, selon l'épaisseur de la jante, celle-ci peut bifurquer vers le moyeu (Kramberger et al., 2004; Lewicki et Ballarini, 1997) et engendrer la perte complète du système (Shaniavski et Skvortsov, 1999).

Le processus complet de la rupture par la fatigue en flexion peut se diviser en deux parties, soit l'initiation de la fissure et sa propagation jusqu'à la rupture (éq.(1.1)).

$$N_f = N_i + N_p \quad (1.1)$$

Où N_f est le nombre de cycles total à la rupture, N_i celui à l'initiation et N_p celui en propagation. En général, N_i est plus élevé que N_p , mais les traitements de surface affectent le comportement en fatigue. Pour des engrenages grenailés, N_p peut représenter de 15 à 30% de N_f (Nicoletto, 1993) et de 30 à 40% pour ceux carburés (Blarasin, Guagliano et Vergani, 1997). De plus, un engrenage soumis à un faible chargement aura la majorité de sa vie en service en phase initiation. Tandis qu'à des niveaux de charges élevées, la phase de propagation sera plus significative (Figure 1.5) (Glodez, Sraml et Kramberger, 2002).

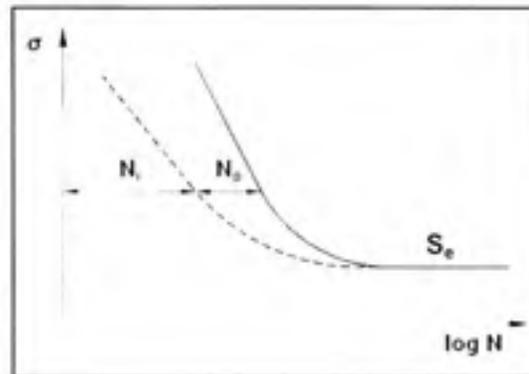


Figure 1.5 Représentation schématique de la vie en fatigue d'un élément mécanique.
(Adapté de Glodez, Sraml et Kramberger, 2002)

Bien que N_f puisse se subdiviser de façon plus précise (ex. : déformation plastique, nucléation, propagation de fissures courtes, ...) (Shang, Yao et Wang, 1998), la caractérisation de l'endommagement du début à la transition des fissures courtes/longues n'est pas bien définie. Et comme les engrenages nécessitent une résistance en fatigue endurance ($N_f > 10^5$ cycles), les phénomènes transitoires sont donc de faibles durées par rapport à N_f . Alors, la majorité des études valident l'équation (1.1). Par contre, cela impose la définition d'un critère de transition entre l'initiation et la propagation.

1.3 Initiation des fissures

L'analyse en propagation de fissures nécessite la configuration de départ de celles-ci (grandeur, orientation et position). Dépendamment de la géométrie des roues, Lewicki (2002) a montré que ces paramètres étaient importants dans la propagation.

1.3.1 Région critique

Peu d'études se sont attardées à la nature exacte de l'initiation des fissures par la fatigue en flexion selon les mécanismes d'endommagement (ex. : dislocations, plans critiques, cumul de dommage, ...). Malgré cela, la majorité des modèles utilisent le point de tension maximale comme site d'initiation. Aussi, les études expérimentales, s'intéressant davantage à la propagation (Lewicki et Ballarini, 1997; Lewicki, 2002; Spievak et al., 2001), initient le défaut artificiellement à une position arbitraire afin d'accélérer le processus (Figure 1.6).



Figure 1.6 *Exemple d'initiation artificielle d'une fissure en flexion.*

Glodez et al. (2002) affirment que l'initiation se produit en surface et de ce fait soulignent l'importance de l'état de celle-ci. Par contre, des études menées sur des roues en acier carburées et/ou grenillées ont montré que l'initiation en flexion s'effectuait presque toujours sous la surface entre 18 et 300 μm (Cavallaro et al., 1995; Hidayetoglu, 2001).

1.3.2 Durée de vie en fatigue initiation

Les normes telle l'AGMA, n'offrent pas de moyen pour estimer N_i , mais proposent plutôt un facteur pour N_f basé sur les courbes S-N (Shigley, Mischke et Budynas, 2004). Des auteurs (Glodez, Sraml et Kramberger, 2002; Kramberger et al., 2004) ont évalué N_i par la relation de Coffin-Manson éq.(1.2) incluant les déformations élastiques (ϵ_{el}) et plastiques (ϵ_{pl})

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\Delta \epsilon_{el}}{2} + \frac{\Delta \epsilon_{pl}}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} \cdot (2N_i)^b + \epsilon_f' \cdot (2N_i)^c \quad (1.2)$$

où σ_f' et ϵ_f' sont la contrainte et la déformation efficaces à la rupture, b et c les constantes de rigidité et de ductilité, E le module d'élasticité et $\Delta \epsilon$ la variation de déformation totale. Mais la contrainte moyenne (σ_m) et K_t ne semblent pas être considérés. Aussi, les courbes S-N obtenues de l'équation (1.2) ne sont valables qu'en rupture complète (c.-à-d. $N_i + N_p$) (Suresh, 1998). Considérant la fatigue endurance des engrenages, Jelaska et al. (2003) ont plutôt adopté une relation du type Basquin éq.(1.3) basée sur la contrainte où ϵ_{pl} est négligée.

$$\frac{\Delta \sigma}{2} = \sigma_a = \sigma_f' \cdot (2N_i)^b \quad (1.3)$$

Dans l'équation (1.3) $\Delta \sigma$ représente la variation de la contrainte appliquée. L'approche de Jelaska utilise la courbe d'endommagement critique de French² qui permet de séparer les périodes d'initiation et de propagation (Figure 1.7) selon une longueur de fissure critique.

² H.J. French a proposé, en 1933, une courbe d'endommagement permettant de définir la vie en fatigue d'une structure selon une longueur critique de fissure, contrairement à la rupture complète pour les courbes S-N traditionnelles. Les détails de la définition de cette courbe sont présentés dans le volume 19 de l'ASM Handbooks, « *Fatigue and fracture* » (ASM International. Handbook Committee., 2002).

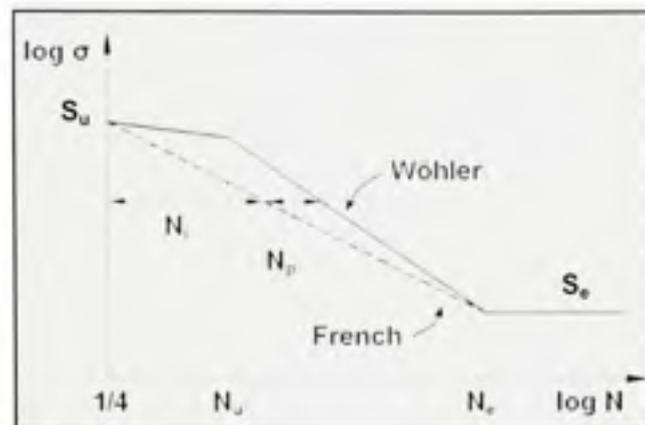


Figure 1.7 Représentation schématique de la vie en fatigue selon Wöhler et French.
(Adapté de Jelaska, 2000)

En supposant que la courbe d'initiation passe par le point de vie infinie (N_e) et $N = 1/4$ à S_u , Jelaska a pu trouver N_i (éq.(1.4)). Même si la méthode n'inclut pas σ_m et K_t , les détails de son développement (Jelaska, 2000) permettent de croire qu'il est possible de les intégrer.

$$N_i = N_e \cdot \left(\frac{S_e}{\sigma_a} \right)^{\log(4N_e) / \log(S_u/S_e)} \quad (1.4)$$

1.3.3 Longueur initiale

Selon l'échelle d'observation, l'importance d'une fissure initiale peut varier. En métallurgie, elle sera associée à la nucléation des microfissures. Tandis qu'en ingénierie, ce sera lorsque la fissure sera détectable (Suresh, 1998). Lukas et Kunz (2003) affirment plutôt que l'initiation marque la fin du processus de nucléation et qu'il s'agit d'une zone de transition d'un système gouverné par la plasticité des déformations à un autre régi par la mécanique de la rupture. Aussi, ils estiment préférable de définir le point de transition par un paramètre géométrique telle la longueur de fissure (a_0). Celle-ci peut être définie, pour un chargement donné, comme la longueur limite pour laquelle la fissure ne se propagera pas. Ce concept est bien illustré par un diagramme Kitagawa-Takahashi (Figure 1.8).

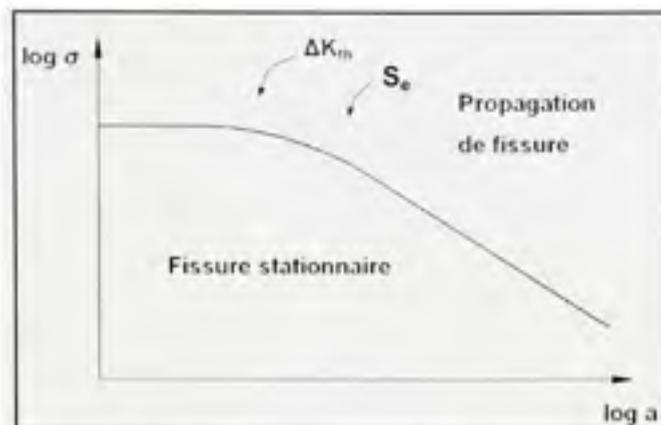


Figure 1.8 *Contrainte limite en fonction de la longueur de la fissure.*

La Figure 1.8 fait intervenir la variation seuil du facteur d'intensité de contrainte (ΔK_{th}) qui selon la norme ASTM E 647 correspond à la valeur asymptotique où le taux de propagation d'une fissure (da/dN) tend vers zéro. Or, en connaissant les valeurs de ΔK_{th} et S_e , il est possible d'obtenir la longueur seuil de la fissure (a_{th}) par la relation (1.5) (Dowling, 1999).

$$a_{th} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\Delta K_{th}}{2\sigma_e} \right)^2 \quad (1.5)$$

Celle-ci n'est valable qu'en chargement complètement renversé (c.-à-d. $R = -1$). Dans leur étude, Jelaska et al. (2003) et Glodez et al. (2002) ont associé la valeur a_0 à a_{th} et ont considéré que a_{th} représentait le seuil d'applicabilité de la MREL. Cela est assez juste pour les matériaux rigides, mais pour ceux qui le sont moins, un défaut de grandeur a_{th} peut présenter le comportement non linéaire des fissures courtes (Dowling, 1999). Kato (1993) et Inoue (1995) ont plutôt utilisé la valeur de a_{th} comme critère d'amorce de propagation permettant de déterminer si une fissure de longueur a_0 se propage macroscopiquement.

Cependant, certains préfèrent une définition plutôt qualitative en fonction de la taille des grains ou de l'échelle d'analyse (Bhattacharya et Ellingwood, 1998). Lorsque a_0 est définie de cette manière, celle-ci est de l'ordre du millimètre (Socie, 1993; You et Lee, 1996). C'est dans cette optique que Blarasin et al. (1997) et Lewicki et al. (2002) ont considéré des

longueurs pour a_0 de 0.1 mm et 0.26 mm. Flasker et al. (1995) ont même fixé a_0 à 0.8mm, correspondant à l'épaisseur de la surface durcie de la roue, car lors d'essais expérimentaux ils ont constaté que lors de l'initiation, la fissuration se produisait de manière instantanée à travers la surface fragile. Le Tableau 1.1 présente quelques valeurs de a_0 appliquées dans différentes études.

Tableau 1.1

Longueurs a_0 pour la modélisation de la fatigue en flexion des engrenages

Référence	a_0 (mm)	Méthodologie	Caractéristiques des roues
Jelaska (2003)	0.1	a_{0s}	acier 42CrMo4 trempé
Jelaska (2005)	0.2	a_{0s} avec $\Delta K_{th, eff}$	acier AISI 4142
Glodez (2002)	0.1	a_{0s}	acier 42CrMo4 trempé
Blarasin (1997)	0.1	arbitraire	acier 18CrMo4 et carburée
Guagliano (2001a)	0.05	expérimental	acier 18CrMo4
Lewicki (2002)	0.26	arbitraire	non spécifié
Lewicki (1997)	0.2032	arbitraire	acier AISI 9310
Flasker (1995)	0.8	épaisseur surface durcie	acier trempé en surface
Pehan (1995)	0.2	arbitraire	acier 20MnCr5
Abersek (2004)	-	a_{0s}	acier AISI 4130 et nitrurée
Ural (2005)	1.27	arbitraire	acier AISI 9310
Kato (1993)	0.004 - 0.02	a_{0s} expérimental	acier SCM415 et carburée
Inoue (1995)	0.04 - 0.15	a_{0s} expérimental	acier SCM415, carburée et grenillée
Kramberger (2004)	0.2	arbitraire	acier 42CrMo4

1.3.4 Orientation initiale

La majorité des études portant sur la propagation des fissures en flexion considèrent que celles-ci s'initient perpendiculairement à la surface (Figure 1.9) (Blarasin, Guagliano et Vergani, 1997; Jelaska, Glodez et Podrug, 2003; Kramberger et al., 2004; Lewicki et al., 2002; Pehan, Hellen et Flasker, 1995; Spievak et al., 2001). Cette hypothèse réfère à une propagation perpendiculaire à la contrainte principale en tension qui, en surface, est tangente au contour externe. Mais, cette approche néglige la nucléation par les bandes de glissement persistantes (Suresh, 1998), qui ont sûrement un impact sur l'orientation initiale.

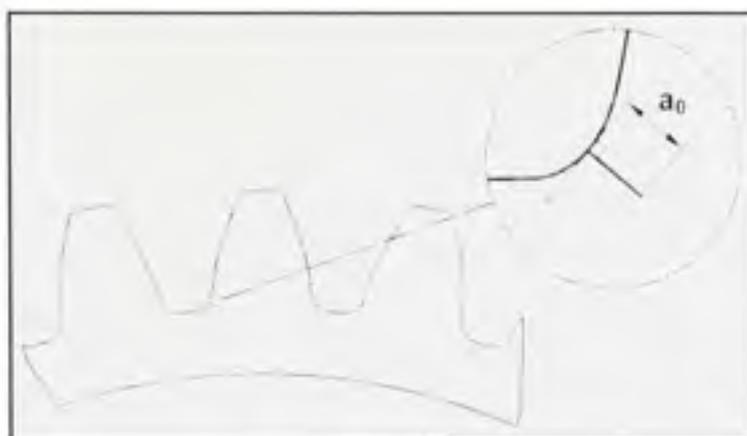


Figure 1.9 *Orientation de la fissure initiale.*

Seul Jelaska (2005) a proposé l'approche des plans critiques en présentant deux critères, soit un (D_t) basé sur l'amplitude de la déformation normale (ϵ_a) et un autre (D_s) sur celle en cisaillement (γ_a). Pour trouver l'orientation de la fissure initiale (θ_0), l'auteur a déterminé l'orientation du tenseur des contraintes, en surface, pour lequel D_t ou D_s est maximal. Cependant, Jelaska n'indique pas quel critère est le plus approprié pour les engrenages.

1.4 Propagation des fissures

Bien que la propagation des fissures macroscopiques ne représente souvent qu'une petite fraction de N_f (voir Figure 1.5), la manière dont elles progresseront peut avoir des impacts significatifs. C'est ce qui explique que plusieurs études (Flasker, Glodez et Pehan, 1995; Guagliano et Vergani, 2001a; Lewicki, 2002; Spievak et al., 2001) mettent l'emphase sur la prédiction de la trajectoire des fissures plutôt que sur le temps qu'elles mettent pour la parcourir.

1.4.1 Sollicitation des fissures

Puisque les contraintes en tension prédominent en racine des dents, les fissures sont surtout sollicitées en ouverture et c'est principalement selon la normale à ces contraintes qu'elles se propagent. Par contre, la composante tangentielle du chargement (W_t) génère du cisaillement qui tend à faire bifurquer légèrement la fissure (Nicoletto, 1993).

1.4.2 Point critique

L'amplitude et la direction de la charge d'une dent varient dans l'engrènement selon le nombre de paires de dents en contact et le point de contact. Conséquemment, cela affecte les niveaux de contrainte en racine des dents. Lewicki (2002) a analysé cet aspect sur la trajectoire des fissures. En considérant le point de contact le plus haut lorsqu'une seule paire de dents est en action, il a réussi à estimer avec une bonne précision la trajectoire. Selon Lewicki, cette position constitue le point critique qui caractérise la propagation d'une fissure (avancement et direction). Jelaska et al. (2005) ont comparé numériquement les résultats de deux simulations : l'une utilisant plusieurs points de contact de l'engrènement et l'autre ne considérant que le point critique. Les simulations ont révélé des trajectoires très similaires.

Spievak et al. (2001) ont plutôt subdivisé le cycle d'engrènement en un nombre fini de positions leur permettant de calculer de façon incrémentale l'avancement de la fissure en fonction de la variation de l'état de contrainte ponctuel. De cette façon, les auteurs considèrent la contribution de chaque état de chargement dans la progression de la fissure.

1.5 Facteurs influençant la fatigue des engrenages

Les engrenages sont souvent soumis à des conditions de fonctionnement extrêmes où différents phénomènes interagissent et peuvent influencer sur l'évolution de l'endommagement. Aussi, les traitements appliqués aux roues leur permettant de supporter les charges de fonctionnement, peuvent également avoir des effets significatifs sur la vie en fatigue.

1.5.1 Traitements de surface

Les fissures s'initiant en surface ou très près, il est courant d'appliquer des traitements aux roues en vue de modifier leurs propriétés mécaniques. Deux moyens souvent employés sont les traitements thermiques superficiels (ex. : induction) et ceux thermochimiques (ex. : carburation, nitruration). La modification de la microstructure des roues par trempe

d'induction peut atteindre une profondeur de 2 à 3 mm (Korsunsky et al., 2002). Cependant, une induction excessive engendrant la trempe complète de la dent lui enlèvera toute ténacité (Alban, 1985). À l'inverse, un temps d'induction trop court produira une trempe superficielle incomplète et ainsi créera des zones de discontinuité propices à l'initiation de fissures (Alban, 1985). Aussi, le durcissement occasionné par les trempes fragilise le matériau, ce qui favorise la propagation des fissures une fois initiées (Inoue et Kato, 1995).

En contrepartie, les traitements thermochimiques créent des surfaces durcies plus minces, affectant moins la ductilité de la structure interne. Mais, un traitement trop long entraîne la décarburation des surfaces qui durant la trempe occasionne des contraintes résiduelles en tension néfastes en fatigue (Boniardi, D'Errico et Tagliabue, 2006). De plus, la décarburation crée une couche non martensitique constituée d'inclusions, de joints de grains et de particules oxydées agissant comme concentrateurs de contrainte et génèrent des microfissures susceptibles d'être propagées en flexion (Masuyama et al., 2002). Néanmoins, les contraintes résiduelles en compression induites par les gradients de dilatation thermique des interfaces, ont des effets bénéfiques sur la fatigue (Kato et al., 1993).

1.5.2 Contraintes résiduelles

Des études ont montré que l'addition de contraintes résiduelles en compression au niveau du congé des dents, pouvait grandement améliorer leur résistance en fatigue (Benedetti et al., 2002; Inoue et Kato, 1995; Shaw et al., 2003). Le procédé utilisé pour induire ce type de contrainte, est le grenailage où la surface est martelée de particules dures pour ainsi la déformer plastiquement. Alors, une contrainte permanente en compression est induite, ce qui diminue, pour le cas des engrenages, les effets de la contrainte en tension générée par la flexion. Shaw (2003) a démontré que dans certains cas, il était possible d'augmenter de 75% la vie en fatigue des roues. Kato et Inoue (1995) ont par ailleurs remarqué que l'ajout de contraintes résiduelles en compression permettait de retarder le processus de propagation d'une fissure en augmentant la valeur seuil a_{th} de plusieurs micromètres (μm).

1.5.3 Fermeture des lèvres de la fissure

Le phénomène de fermeture des lèvres de la fissure est directement relié à la plasticité en bout de fissure. Guagliano et al. (2001a) ont étudié numériquement la propagation des fissures en considérant l'effet de fermeture pour différentes lois de propagation. Le constat général des auteurs est que ce phénomène n'est significatif que pour une faible charge appliquée sur les dents, permettant ainsi aux lèvres de se refermer. Dans l'étude, cette charge était inférieure ou égale à environ 57% de la charge ultime, ce qui semble tout de même appréciable. Par contre, à la connaissance de l'auteur, aucune étude expérimentale n'a couvert directement cet aspect des engrenages et donc aucune mesure concrète du phénomène n'est disponible.

1.5.4 Rugosité des surfaces

L'état des surfaces sollicitées affecte aussi le comportement en fatigue. Une rugosité plus ou moins élevée crée des creux agissant comme concentrateur de contrainte facilitant l'initiation de fissures. Eyercioglu et al. (1997) ont étudié expérimentalement l'influence de cet aspect sur la résistance en flexion des engrenages cylindriques droits, en comparant les performances en fatigue de roues ayant des rugosités en racine de dent variant de 3 à 8 μm RMS (Root Mean Square) et des creux (Peak-to-Valley) allant 25 à 65 μm . Leurs résultats ont démontré une amélioration de la durée de vie en fatigue d'environ 8 millions de cycles avec les engrenages ayant un fini de surface supérieur. En termes de limite d'endurance (S_e), cela s'est traduit par une augmentation de 65 MPa, soit de 523 MPa à 588 MPa.

1.5.5 Zone de contact

Les erreurs de géométrie et de montage qu'admettent les systèmes de transmission affectent particulièrement la ligne de contact entre les dents. De tels défauts engendrent une distribution non uniforme de la charge sur l'épaisseur des dents et crée des concentrations de charge qui augmentent localement la contrainte. Glodez (1998) a évalué expérimentalement l'effet de ce facteur sur la propagation des fissures en comparant un

engrenage exempt de toute erreur et un autre où la zone de contact était effective sur un peu plus de la moitié de l'épaisseur de la roue. Les résultats ont révélé une propagation plus rapide de la fissure pour le cas de la zone de contact réduite. De plus, la trajectoire de la fissure était non symétrique comparativement à celle du contact uniforme.

1.5.6 Géométrie des roues

Lewicki (2002) a analysé numériquement les aspects géométriques des roues à jante mince en relation avec la propagation des fissures en flexion. En faisant varier simultanément le nombre de dents (n), le module (m) et le rayon primitif (R_p) tout en respectant le rapport « hauteur dent / épaisseur jante » (backup ratio) (m_b), Lewicki a démontré qu'en augmentant les dimensions des dents, leur rigidité s'accroît par rapport à la jante. Ainsi, la trajectoire offrant le moins de résistance à la propagation devient celle passant par la jante. En augmentant l'angle de pression (ϕ), le même effet est constaté, puisque cela occasionne un élargissement de la base des dents qui les rigidifie. Concernant la forme du congé, celle-ci a un effet sur la concentration des contraintes lorsque la roue n'est pas fissurée. Un rayon (r_f) moyen plus important réduit le niveau de contrainte et améliorera la résistance en fatigue.

1.5.7 Vitesse de rotation

Pour la plupart des systèmes de transmission, l'effet des forces centrifuges sur la propagation des fissures peut être négligé, car les vitesses de rotation (ω) n'engendrent pas d'accélération suffisamment importantes. Par contre, dans les cas de ω élevées (ex. : moteurs d'avion), Lewicki (2001) a montré que ces forces avaient un effet considérable. D'après ses résultats, ω commence à avoir un effet marqué à 10000 tpm (tours par minute) où la fissure bifurque et passe à travers la jante³. Aussi, ω est plus ou moins significative selon le couple transmis. À 7500 tpm et 123 Nm, la trajectoire passe sous la dent, tandis qu'à 61 Nm elle est à travers la jante. La position initiale de la fissure est aussi importante, car dans le haut du congé, la fissure se dirige à travers la dent peu importe ω .

³ L'engrenage sur lequel Lewicki a fait ses essais était composé de roues ayant les spécifications suivantes : m : 3.175 mm, ϕ : 20°, n : 28 dents et m_b : 0.5.

1.6 Application des théories de la mécanique de la rupture

Les sections précédentes ont abordé qualitativement le phénomène de fissuration en fatigue en flexion. La présente section abordera plutôt les façons d'appliquer les théories de la mécanique de la rupture en vue de caractériser quantitativement la propagation des fissures.

1.6.1 Modes de rupture en fatigue en flexion

Le chargement des engrenages cylindriques droits induit une contrainte en tension générée par la flexion à la racine des dents du côté actif. Il y a aussi du cisaillement produit par la composante tangentielle de la force transmise (W_t). Enfin, la compression produite par la composante radiale (W_r) étant faible, car l'angle de pression (φ) dépasse rarement 30° , est souvent négligée. Donc, en considérant uniquement les contraintes en tension et en cisaillement, deux modes de rupture sont mis en évidence : le mode I et II (Figure 1.10).

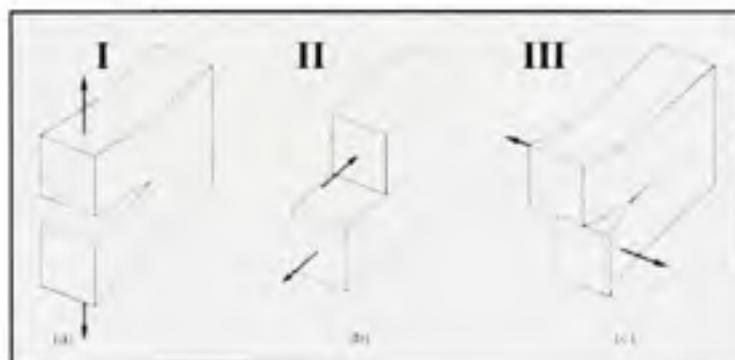


Figure 1.10 Modes de rupture : a) mode I, b) mode II, c) mode III.

Le mode III est rarement considéré, car le chargement des engrenages cylindriques droits est bidimensionnel. Mais aussi, parce que pour les engrenages hélicoïdaux et autres induisant une force axiale (W_a), le cisaillement des plans transversaux sollicite peu les fissures en mode III. Spievak (2001) a évalué les Facteurs d'Intensité de Contrainte (FIC) d'un engrenage conique spiral et a montré que le mode III représentait, au plus, 18% des FIC en mode I et II. Cependant, la forme de la fissure (ex. : fissure coins) pourrait modifier

l'importance relative des modes, mais l'effet serait de courte durée puisqu'une fissure s'oriente toujours selon le mode I quand celui-ci prédomine.

1.6.1.1 Mode I vs. Mode II

Des deux principaux modes liés à la flexion, le mode I est celui qui est, de loin, le plus important. Nicoletto (1993) stipule que le FIC en mode II (K_{II}) vaut en général moins de 10% de celui en mode I (K_I) pour une longueur de fissure inférieure à la moitié du module (m). De son côté, Glodez (2002) a évalué K_I et K_{II} de l'initiation à la propagation instable pour plusieurs points de contact. Pour tous les cas, K_{II} était inférieur à 5% de K_I . Par contre, d'autres obtiennent des rapports K_{II}/K_I un peu plus élevés (20 à 30%) (Lewicki et al., 2002; Spievak et al., 2001). Mais, la plupart s'entendent pour affirmer que la propagation en fatigue en flexion est principalement caractérisée par K_I et que K_{II} a plutôt un effet sur son orientation.

1.6.2 Hypothèses générales liées à la MREL

L'étude de la propagation des fissures par les principes de la mécanique de la rupture implique plusieurs hypothèses. La première, suppose une faible zone plastique en bout de fissure par rapport à sa longueur, afin de valider l'applicabilité des théories de la MREL. Pour respecter cette hypothèse, plusieurs ont imposé une longueur seuil de fissure initiale (a_{th}) déterminée par l'équation (1.5) (voir Tableau 1.1.). Pehan et al. (1997) ont plutôt intégré un critère sur le rapport du rayon de la zone plastique (r_p) en bout de fissure sur la longueur de celle-ci (a). Ce rapport (r_p/a) se devait d'être inférieur à 0.4 pour confirmer la validité de la MREL. Le calcul de r_p était basé sur l'approximation d'Irwin (éq.(1.6)),

$$r_p(\sigma_{crack}) = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\frac{K}{S_y} \right)^2 \quad r_p(\sigma_{crack}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{K}{S_y} \right)^2 \quad (1.6)$$

où S_y est la contrainte d'écoulement. Cependant, de manière générale, l'applicabilité de la MREL est justifiée lorsque toute distance entre le contour de la composante et le bout de la fissure dépasse par un facteur de 8 la valeur de r_p (Dowling, 1999), ce qui représente une valeur 3.2 fois plus grande que celle de Pehan et al. (1997). Il faut aussi définir si la situation est en état plan de contrainte (σ_{plane}) ou de déformation (ε_{plane}). Pour les engrenages, les dents sont habituellement plus petites ou égales à l'épaisseur des roues. Alors, localement, le problème est en ε_{plane} . Néanmoins, voici la condition géométrique justifiant l'hypothèse (Dowling, 1999) :

$$t \geq \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{K}{S_y} \right)^2 \quad (1.7)$$

où « t » représente l'épaisseur de la pièce. Selon Dowling (1999), il faut aussi que les distances entre le contour et le bout de la fissure, soient comparables à « t » et par conséquent, doivent respecter la relation (1.7). Cependant, Anderson (2005) affirme qu'il n'est pas nécessaire de respecter ce critère pour atteindre la condition de ε_{plane} , et qu'il s'agit plutôt de conditions à respecter lors de tests de ténacité (c.-à-d. K_{Ic}). Par ailleurs, Hertzberg (1996) suggère que l'état de σ_{plane} est valide pour $r_p/t \geq 1$ et que l'état de ε_{plane} l'est pour $r_p/t \leq 0.1$. Aussi, puisque que K_{II} est largement inférieur à K_I , certaines études le négligent complètement (Guagliano et Vergani, 2001b; Pehan et al., 1997). Glodez (2002) a plutôt négligé l'effet de K_{II} par rapport au point critique d'instabilité en ne considérant que la ténacité en mode I (K_{Ic}).

1.6.3 Facteur d'intensité de contrainte (FIC)

Le paramètre clé permettant de prédire le comportement d'une fissure sous l'effet d'un chargement est le facteur d'intensité de contrainte, désigné par la variable K . Il représente une mesure de l'intensité du champ de contrainte en bout de fissure (Figure 1.11), décrit selon un système de coordonnées polaires ($r; \theta$) et les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} (éq.(1.8)). Ce champ de contraintes présente une singularité de l'ordre $1/\sqrt{r}$. Il faut préciser qu'en σ_{plane} , σ_{zz} est nulle et que pour les situations bidimensionnelles, K_{III} est aussi nul (c.-à-d. $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$).

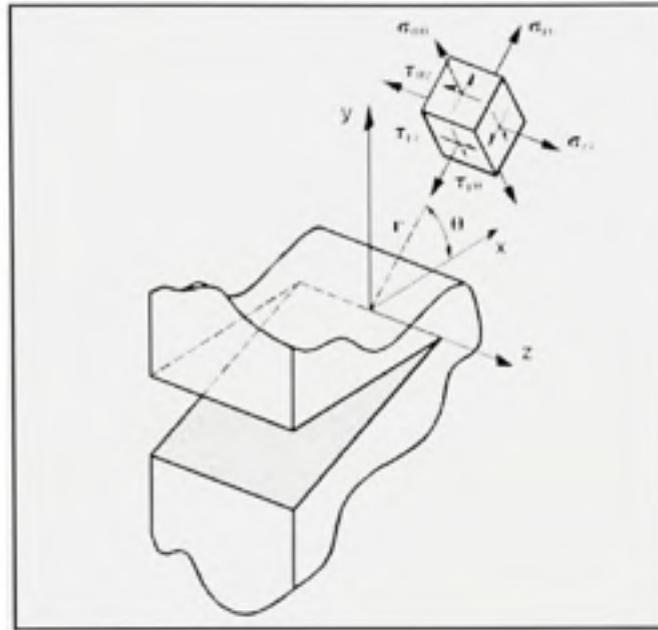


Figure 1.11 État de contrainte en bout de fissure.

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
 \tau_{rz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 \tau_{\theta z} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Dans l'équation (1.8), « r » est la distance par rapport au bout de la fissure et θ est l'angle mesuré à partir de l'axe définissant celle-ci. Aussi, ν est le coefficient de Poisson du matériau. Avec ces équations de contraintes et la loi de Hooke, il est possible d'obtenir le champ de déplacement (éq.(1.9)) où $\mu = G$ et $\kappa = 3 - 4\nu$ en $\varepsilon_{\text{plane}}$ et $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ en σ_{plane} .

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ u_z &= \frac{K_{III}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

1.6.3.1 Calcul du facteur d'intensité de contrainte

En élasticité linéaire, différentes approches permettent d'évaluer le FIC, mais dans sa forme générale, le FIC est décrit par la relation qui suit :

$$K = \beta \sigma \sqrt{a\pi} \quad (1.10)$$

où β est un facteur de forme et σ la contrainte appliquée loin de la fissure. Des solutions analytiques permettent le calcul direct de K pour des formes simples. Mais la géométrie des engrenages ne permet pas cette approche et nécessite des techniques alternatives.

1.6.3.1.1 Méthode d'extrapolation des déplacements

Cette méthode réfère au champ de contraintes en bout de fissure et aux déplacements qui s'y rapportent. Habituellement, elle est appliquée par des outils numériques arrivant à fournir les déplacements de géométries complexes telle celle des engrenages (Blarasin, Guagliano et Vergani, 1997; Glodez, Sraml et Kramberger, 2002; Jelaska, Glodez et Podrug, 2003; Kato et al., 1993; Lewicki, 2002; Pehan et al., 1997; Sfakiotakis et Anifantis, 2002; Sfakiotakis, Katsareas et Anifantis, 1997; Spievak et al., 2001). Avec les équations des déplacements (éq. (1.9)), K_I , K_{II} , K_{III} peuvent être isolés lorsque le rayon « r » tend vers 0. Pour K_I et K_{II} , cela revient à évaluer les équations (1.11) où $\Delta u_i = u_{i(\theta=\pi)} - u_{i(\theta=-\pi)}$.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta u_y \cdot \mu}{(\kappa + 1)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x \cdot \mu}{(\kappa + 1)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (1.11)$$

1.6.3.1.2 Méthode des fonctions de poids

Les fonctions de poids sont également utilisées pour la fatigue des engrenages (Abersek et Flaker, 1994; Blarasin, Guagliano et Vergani, 1997; Guagliano et Vergani, 2001b; Nicoletto, 1993). Cette méthode consiste à définir une fonction $m(x,a)$ pour une configuration de la géométrie à analyser dont les FIC et le déplacement des lèvres sont connus. Cette fonction étant indépendante du chargement, peut être appliquée à un autre état de contrainte pour ainsi définir les FIC d'une autre situation. Voici la forme générale pour K_I et K_{II} :

$$K_I = \int_0^a \sigma(x) \cdot m_I(x,a) dx \quad K_{II} = \int_0^a \tau(x) \cdot m_{II}(x,a) dx \quad (1.12)$$

$\sigma(x)$ et $\tau(x)$ sont la distribution de la contrainte normale et de cisaillement au site virtuel de la fissure dans le corps non fissuré. Cette méthode permet d'obtenir rapidement les valeurs des FIC une fois $m(x,a)$ définie. Pour appliquer cette méthode aux engrenages, Nicoletto (1993) a utilisé les fonctions de poids d'une poutre de largeur finie, fissurée sur le côté. Pour obtenir les distributions $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ compatibles, il a utilisé la méthode des potentiels complexes consistant à projeter dans un plan complexe (z) la géométrie de la dent, puis à la transformer dans un plan de référence (ζ) où elle est simplifiée (Figure 1.12).

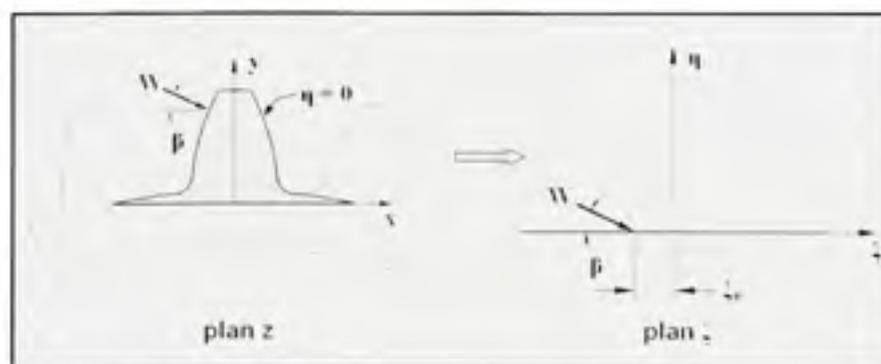


Figure 1.12 Transformation par la méthode du potentiel complexe.
(Adapté de Nicoletto, 1993)

Par contre, la fonction de transfert entre les domaines peut s'avérer complexe et doit être redéfinie chaque fois que la géométrie est modifiée. Les résultats de Nicoletto n'ont pas été validés ou comparés à d'autres analyses similaires, rendant ainsi, difficile l'appréciation du modèle. Abersek et Flaker (1994) ont plutôt calculé la distribution $\sigma(x)$ avec les équations de la résistance des matériaux s'appliquant à une poutre encastrée (Figure 1.13).

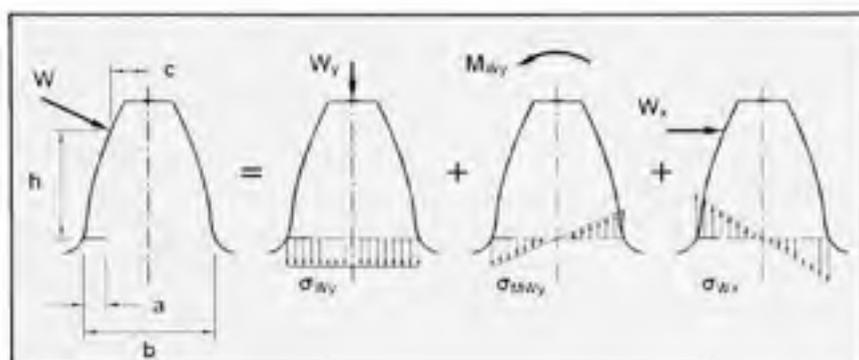


Figure 1.13 *Analyse des contraintes par un système équivalent.*

Le cisaillement induit par la force W_x , n'a pas été considéré, négligeant ainsi K_{II} . Aussi, la fissure était posée perpendiculaire à l'axe de la dent et la fonction de poids était dérivée de la géométrie d'un échantillon standard d'essai de fatigue. Malgré tout, de bonnes corrélations ont été obtenues pour des rapports « a/b » (Figure 1.13) inférieurs à 0.4. Selon les auteurs, la divergence des ratios « a/b » élevés est liée aux simplifications géométriques.

Il est possible d'obtenir la distribution de contraintes par méthodes numériques. Par contre, aucune fonction de poids analytique n'est associée aux engrenages. Or, Guagliano et al. (2001b) ont utilisé une solution de référence des FIC calculée par éléments finis pour définir « $m(x, a)$ ». Mais celle-ci doit être redéfinie pour tous changements géométriques.

1.6.3.1.3 Méthode des itérations alternées

Daniewicz et al. (1994) ont appliqué la méthode des itérations alternées de Schwarz-Neumann au calcul des FIC qui consiste à considérer deux domaines : un semi-infini ($\Omega_{\text{semi-infini}}$) dont les FIC sont voulus et un autre infini (Ω_{infini}) où K_I et K_{II} sont connus. La

procédure débute par le calcul des contraintes au site virtuel de la fissure dans $\Omega_{\text{semi-infini}}$ non fissuré, puis à les appliquer au Ω_{infini} contenant la fissure. La solution du système ainsi formé dans Ω_{infini} donnera lieu à des tractions résiduelles sur les lèvres de la fissure. Or, en appliquant ces tractions au $\Omega_{\text{semi-infini}}$ non fissuré cela créera des contraintes additionnelles. Avec ces contraintes, le processus est répété à nouveau, et ce, jusqu'à ce que les tractions soient négligeables. Daniewicz et al. (1994) ont utilisé la solution analytique complexe, obtenue de cette méthode, pour une plaque semi-infinie contenant une fissure débouchante. Puis, avec la méthode des potentiels complexes (voir Figure 1.12) ils ont transformé la géométrie de la dent en une forme compatible.

1.6.3.1.4 Méthode du taux de relâchement d'énergie potentielle

Une autre alternative au calcul du FIC, est de relier celui-ci au taux de relâchement d'énergie potentielle (\mathcal{G}) qui s'exprime par l'équation (1.13)

$$\mathcal{G} = \frac{dU_p}{da} = \frac{K_I^2}{E'} \quad (1.13)$$

où dU_p est la variation d'énergie potentielle, da l'incrément de la fissure et E' , le module élastique efficace qui vaut E en σ_{plane} et $E/(1-\nu^2)$ en $\varepsilon_{\text{plane}}$. Pehan et al. (1995; 1995; 1997) ont appliqué cette méthode au cas des engrenages où la valeur dU_p a été obtenue par la méthode d'extension virtuelle qui consiste à évaluer localement (région fissurée) la variation de la rigidité due à une variation virtuelle de la fissure « da ». L'approche a aussi été employée par Kramberger et al. (2004) et Lewicki et al. (2002) qui ont utilisé l'intégrale J

$$J = \int_{\Gamma} \left(w \cdot dy - t_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} \cdot d\Gamma \right) \quad (1.14)$$

où t_i et u_i sont les composantes du vecteur de traction et de déplacement et w la densité d'énergie de déformation. L'intégrale J représente aussi la variation d'énergie potentielle et, tout comme \mathcal{G} , peut être associée à K_I (eq.(1.15)).

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad (1.15)$$

1.6.3.2 Facteur d'intensité de contrainte équivalent

La majorité des lois de propagation ne considèrent que K_I et négligent les autres modes. Or, pour considérer la mixité des modes des engrenages, certains auteurs ont combiné K_I et K_{II} en un FIC équivalent (K_{eq}). Glodez (2002) et Jelaska (2003) ont proposé la forme suivante :

$$K_{eq} = \sqrt{(K_I^2 + K_{II}^2) \cdot (1 - \nu^2)} \quad (1.16)$$

Cependant, aucune explication n'est fournie quant à la provenance de cette équation ou sur quelles hypothèses celle-ci est basée. Dans une autre étude, Jelaska (2005) utilise une formulation pour K_{eq} (ég.(1.17)) basée sur la contrainte tangentielle maximale ($\sigma_{\theta\theta\max}$)

$$K_{eq} = \cos^2 \frac{\theta_{\sigma\theta\max}}{2} \cdot \left(K_I \cos \frac{\theta_{\sigma\theta\max}}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta_{\sigma\theta\max}}{2} \right) \quad (1.17)$$

où $\theta_{\sigma\theta\max}$ est l'angle pour lequel $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale. Même si Jelaska ne justifie pas l'utilisation de cette formulation pour K_{eq} , des résultats expérimentaux provenant de d'autres études, ont démontré qu'elle arrivait à prédire, avec une bonne précision, le point de rupture fragile des fissures sollicitées en mode mixte (Broek, 1986). Par ailleurs, plusieurs autres modèles existants pourraient être appliqués au problème des engrenages et s'avérer efficaces (Qian et Fatemi, 1996).

1.6.3.3 Facteur d'intensité de contrainte efficace

Le calcul des FIC peut aussi être modifié afin de tenir compte des contraintes résiduelles en utilisant une relation de superposition de la forme de l'équation (1.18).

$$K_{eff} = K + K_r \quad (1.18)$$

Où K est dû aux charges appliquées et K_r aux contraintes résiduelles. Cette méthode est comparable à celle de Pehan (1997) consistant à inclure les contraintes résiduelles en appliquant une charge thermique équivalente. Guagliano (2001a) a, de plus, considéré l'effet de la fermeture des lèvres tendant à diminuer la valeur des FIC, par un paramètre U .

$$\Delta K_{eff,c} = U \cdot \Delta K_{eff} = U \cdot (\Delta K + K_r) \quad (1.19)$$

De façon générale, le paramètre U peut être défini par la relation suivante :

$$U = \frac{K_{max} - K_{op}}{K_{max} - K_{min}} \quad \text{ou} \quad U = \frac{K_{eff,max} - K_{op}}{K_{eff,max} - K_{eff,min}} \quad (1.20)$$

où K_{op} est le FIC minimal pour l'ouverture des lèvres de la fissure. Pour certains matériaux, des valeurs de U en fonction du rapport R sont disponibles. Pour calculer $\Delta K_{eff,c}$, Guagliano (2001a) a considéré trois situations (Figure 1.14), soit lorsque la fissure est complètement fermée (a), partiellement fermée (b) et complètement ouverte (c).

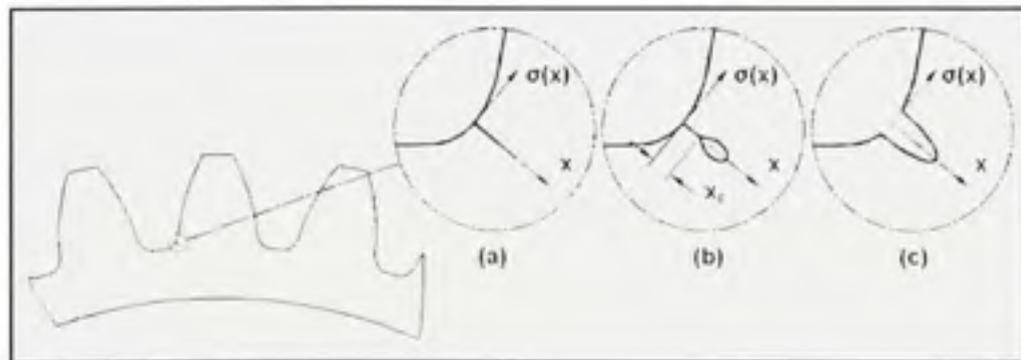


Figure 1.14 Configurations possibles de l'ouverture de fissure.

Pour chaque situation, la méthode des fonctions de poids a été utilisée de la façon suivante :

$$K_{eff} = \int_x^a (\sigma(x) + \sigma_r(x)) \cdot m(x, a) dx \quad (1.21)$$

où $\sigma_r(x)$ représente les contraintes résiduelles, $\sigma(x)$ l'état de contrainte durant l'engrènement et x_c le point de contact des lèvres. Dans les situations « a » et « c », x_c vaut respectivement 0 et a. Autrement, x_c est défini par un processus itératif où la solution exacte est obtenue lorsque le CTOD (Crack Tip Opening Displacement) est supérieur à 0 dans la région ouverte et que les contraintes de contacts sont négatives dans la région fermée. Spievak et al. (2001) ont plutôt utilisé directement la valeur de K_{op} en négligeant le contact des lèvres.

$$\Delta K_{eff,c} = \Delta K - K_{op} \quad (1.22)$$

Le facteur K_{op} a été estimé en fonction de R, σ_y et σ_{max} avec une méthode proposée par Newman (1984) où l'état de ϵ_{plane} a été supposé. Enfin, Jelaska (2005) a appliqué un modèle basé sur le concept de fermeture partielle de la fissure (éq.(1.23)). Celui-ci permet de tenir compte de la plasticité, de l'oxydation et de la rugosité des lèvres de la fissure

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) g \right] \quad (1.23)$$

où « g » est un paramètre de transition près de ΔK_{th} . Aussi, Jelaska a évalué K_{op} en considérant l'épaisseur de la plasticité induite à l'amorce de la propagation estimée par un polynôme élaboré par Newman et al. (2003) en fonction du ratio R. Cependant, Jelaska n'explique et ne démontre pas concrètement en quoi cette méthode est applicable aux engrenages.

1.6.4 Modèle de propagation des fissures

Afin de prédire la vitesse et la direction de la propagation des fissures, il est possible de lier le taux de propagation (da/dN) à la variation ΔK , comme le montre la Figure 1.15.

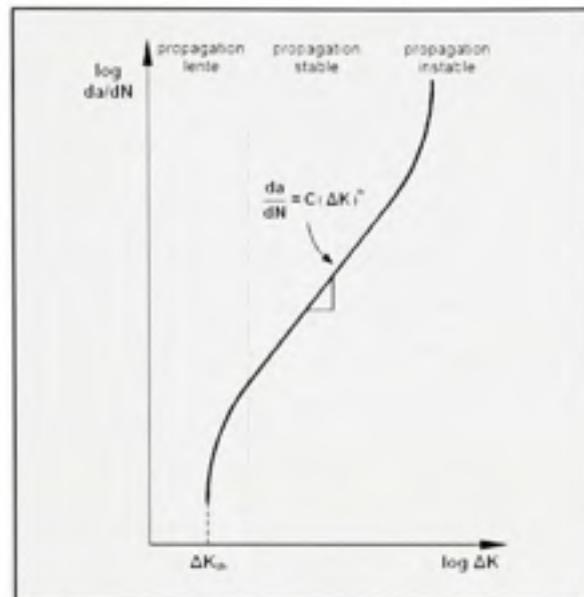


Figure 1.15 Schématisation du taux de propagation en fonction de ΔK .

1.6.4.1 Lois de propagation

La loi générale de Paris (équ.(1.24)) est largement utilisée dans le cas des engrenages (Flasker, Glodez et Pehan, 1995; Glodez, Sraml et Kramberger, 2002; Jelaska, Glodez et Podrug, 2003; Kramberger et al., 2004; Spievak et al., 2001)

$$\frac{da}{dN} = C [\Delta K]^n \quad (1.24)$$

où C et n sont liés au matériau. Avec cette règle, N_p peut être défini en propagation stable (voir Figure 1.15) avant que la fissure n'atteigne une longueur critique (a_c).

$$N_p = \int_0^N dN = \frac{1}{C} \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{[\Delta K(a)]^n} \quad (1.25)$$

La longueur a_0 correspond aux valeurs définies à la section 1.3.3. D'autres modèles incluent divers aspects du chargement cyclique, mais peuvent aussi estimer da/dN en propagation lente et instable (voir Figure 1.15). Entre autres, Guagliano et al. (2001a) ont appliqué la loi

de Collipriest qui considère σ_m et la propagation près de ΔK_{th} et de K_{lc} . Afin de considérer les effets des contraintes résiduelles, Kato et al. (1993) ont élaboré une loi basée sur la distribution de la dureté de surface (H) des roues permettant d'évaluer ΔK_{th} , K_{lc} , n, et C. Le modèle décrit aussi la propagation lente et instable, mais les mesures de H nécessaires à la définition de sa distribution présentent un inconvénient aux analyses à caractère général, souvent basées sur l'utilisation de paramètres standardisés. Ce modèle a été repris par quelques études (Blarasin, Guagliano et Vergani, 1997; Guagliano et Vergani, 2001a; 2001b; Inoue et Kato, 1995; Lewicki et Ballarini, 1997) et a donné des résultats intéressants.

1.6.4.2 Orientation de la propagation des fissures

La direction d'avancement de la fissure se définit par le critère de la $\sigma_{\theta\theta}$ maximale ($\sigma_{\theta\theta\max}$), selon la plupart des études traitant des engrenages (Flasker, Glodez et Pehan, 1995; Glodez, Sraml et Kramberger, 2002; Jelaska, Glodez et Podrug, 2003; Lewicki et al., 2002; Spievak et al., 2001). Ce critère stipule que la propagation s'effectue dans la direction de la $\sigma_{\theta\theta}$ maximale d'un système de coordonnées centré en bout de fissure. En dérivant $\sigma_{\theta\theta}$ (éq.(1.8)) par rapport à θ et en posant $d\sigma_{\theta\theta}/d\theta = 0$, l'angle où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale est obtenu (éq. (1.26)).

$$\theta_{\sigma_{\theta\theta\max}} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (1.26)$$

Il existe aussi d'autres approches permettant de prédire l'orientation des fissures (Qian et Fatemi, 1996). Cependant, aucune d'elles ne semble avoir été appliquée aux engrenages.

1.6.4.3 Propagation des fissures dans l'engrènement

Bien que ΔK_I et ΔK_{II} soient non proportionnels⁴, la majorité des études considèrent seulement l'état maximal (c.-à-d. K_{\max}) dans l'application des lois de propagation (Flasker, Glodez et Pehan, 1995; Glodez, Sraml et Kramberger, 2002; Guagliano et Vergani, 2001a;

⁴ Un chargement mixte est dit non proportionnel si les variations des composantes du chargement ne sont pas en phase (c.-à-d. K_{II}/K_I ou $\tau/\sigma \neq \text{cste}$).

Jelaska, Glodez et Podrug, 2003; Kato et al., 1993; Kramberger et al., 2004; Lewicki, 2002; Pehan et al., 1997). Habituellement, K_{\max} est obtenu au point le plus haut en contact unique. L'approche de Spievak et al. (2001) considère plutôt l'évolution du chargement en discrétisant le cycle en un nombre fini de points de contact. Donc, entre chaque état de contact « $i-1 ; i$ », un incrément de fissure da_i est calculé par la relation ci-dessous.

$$da_{(i-1,i)} = \frac{K_{(i)} - K_{(i-1)}}{K_{\max}} \cdot da \quad (1.27)$$

Où K_{\max} est le FIC maximal rencontré durant tout le cycle d'engrènement et « da », la valeur prédéfinie de l'avancement de la fissure. L'orientation est aussi calculée pour chaque incrément où Spievak et al. (2001) ont utilisé le critère $\sigma_{\theta\theta\max}$ (éq.(1.26)).

1.7 Modélisation numérique de la propagation des fissures

Les sections précédentes ont passé en revue les caractéristiques de la fatigue en flexion des engrenages ainsi que les moyens fournis par la MREL pour son analyse. Cette section présente plutôt les méthodes utilisées pour modéliser numériquement ce phénomène.

1.7.1 Dimension, géométrie et conditions frontière du modèle

La réalisation d'un modèle numérique demande en premier lieu, de définir selon quelles dimensions (2D ou 3D) il sera créé. Plusieurs ont adopté une modélisation bidimensionnelle (2D) puisque l'étude portait sur des roues minces à denture droite ou ne comportant pas d'asymétries significatives selon l'épaisseur (voir Tableau 1.2). Tandis que pour les roues ayant d'importantes asymétries au niveau de la denture, du chargement ou de la fissure, les modèles tridimensionnels (3D) se sont avérés préférables (voir Tableau 1.2).

Afin d'accélérer les calculs, il est d'usage de simplifier la géométrie. Glodez (2002), Jelaska (2003), Flaker (1995) et Pehan (1995; 1997) ont représenté la géométrie d'une roue par une seule dent encastrée (Figure 1.16a). Tandis que Jelaska (2005) et Sfakiotakis (2002) ont plutôt utilisé un modèle comportant trois dents (Figure 1.16b).

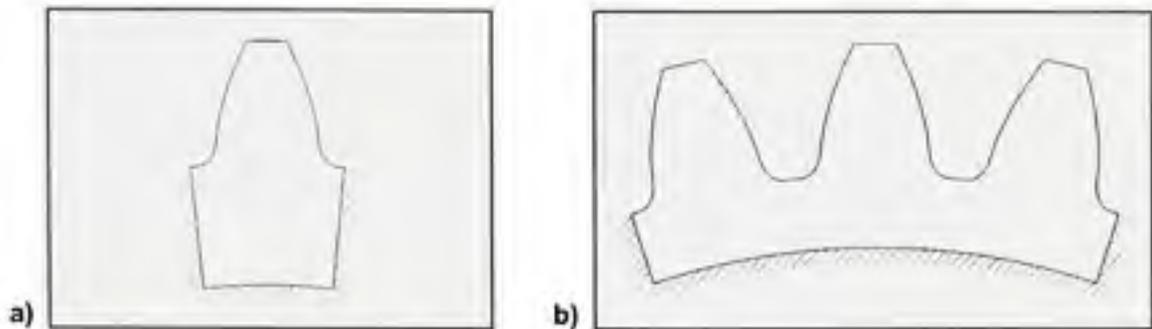


Figure 1.16 Configuration à une dent (a) et trois dents (b) d'engrenage.

Cependant, une seule étude a comparé les deux modèles (Pehan et al., 1997) et a montré qu'avec une dent, les contraintes étaient supérieures d'environ 10% à celles obtenues d'un modèle à trois dents. Lorsque le corps de la roue n'est pas uniforme ou est peu rigide, il devient préférable de créer un modèle plus représentatif. Dans leurs études des roues à jante mince, Lewicki et al. (1997) et Kramberger et al. (2004) ont modélisé la totalité des roues. Spievak et al. (2001) et Ural et al. (2005) ont également considéré le corps des roues pour un engrenage conique à denture spirale, mais en modélisant seulement trois dents.

Concernant l'application des charges, la majorité des études adoptent la même hypothèse : la charge est concentrée en un point de contact en 2D et en une ligne de contact pour les cas 3D. Des études ont analysé le contact par les théories de Hertz afin de définir avec plus de précision la distribution des forces (Sfakiotakis et Anifantis, 2002; Spievak et al., 2001; Ural et al., 2005). Cependant, l'analyse est très coûteuse en temps et selon Lewicki (2002), l'approche n'est pas nécessaire tant que la fissure n'entre pas dans la zone de contact.

1.7.2 Méthodes numériques

Lorsque les paramètres physiques (c.-à-d. la géométrie et les conditions frontières) sont définis, il suffit d'appliquer une méthode permettant de résoudre le problème. En mécanique de la rupture, deux méthodes très utilisées sont la Méthode des Éléments Finis (MEF) et la Méthode des Équations Intégrales de Frontières (MEIF) (Liebowitz et al., 1995).

1.7.2.1 Méthode des éléments finis

En élasticité statique linéaire, la MEF est construite selon une formulation variationnelle du travail virtuel (éq.(1.28)) pour un domaine Ω et son contour Γ où « f_v » et « f_s » représentent les forces volumiques et surfaciques.

$$\int_{\Omega} \sigma_y \delta \varepsilon_y d\Omega = \int_{\Omega} (f_v)_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} (f_s)_i \delta u_i d\Gamma \quad (1.28)$$

Pour résoudre l'équation (1.28) aux dérivées partielles, la géométrie est discrétisée en sous domaines, communément appelés « éléments », qui forment un maillage (Figure 1.17). Ces éléments, sont définis par des nœuds pour lesquels les équations d'équilibre sont générées.

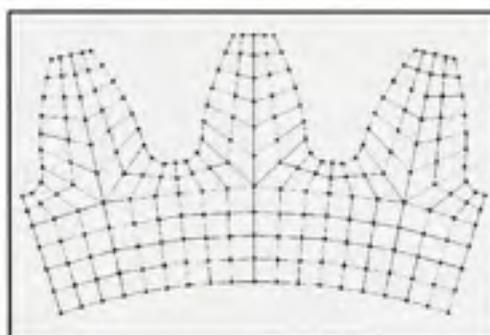


Figure 1.17 Exemple de maillage 2D pour la MEF.

Avec une formulation en déplacement (u_i), les éléments sont intégrés par interpolation. Il en résulte un système matriciel (éq.(1.29)) composé des équations des nœuds où $[K]$ est la matrice de rigidité, $\{F\}$ le vecteur des forces et $\{u\}$ celui des déplacements.

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (1.29)$$

Il s'agit ensuite de résoudre ce système pour obtenir les déplacements. Les contraintes et déformations s'obtiennent en dérivant la solution, réduisant ainsi d'un degré leur précision par rapport à $\{u\}$. De par sa simplicité de mise en œuvre et le grand nombre de logiciels commerciaux, la MEF est très utilisée dans la fatigue des engrenages (voir Tableau 1.2).

1.7.2.2 Méthode des équations intégrales de frontières

De son côté, l'application de la MEIF⁵ en élasticité linéaire s'effectue par l'intermédiaire d'une méthode directe fondée sur le théorème de réciprocité de Betti⁶ (éq.(1.30))

$$\int_{\Gamma} t_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Omega \quad (1.30)$$

où « t » représente les tractions, « u » les déplacements et « f » les forces volumiques. Comme « f » est souvent négligée en MREL, la formulation peut donc se réduire ainsi :

$$\int_{\Gamma} t_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Gamma \quad (1.31)$$

où seul le contour du domaine (Γ) intervient, ce qui est un avantage marqué sur la MEF puisqu'il est seulement nécessaire de discrétiser la frontière du domaine (Ω) (Figure 1.18).

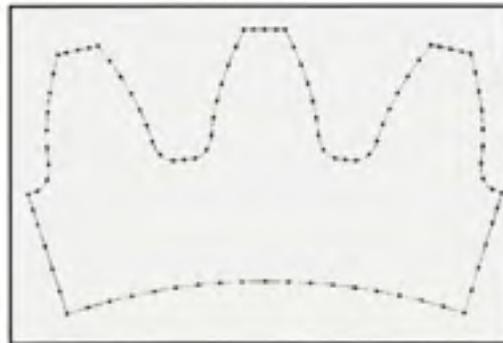


Figure 1.18 Exemple de maillage 2D pour la MEIF.

Pour résoudre l'équation (1.31), il faut considérer deux systèmes (c.-à-d. a et b). Le premier (a) étant celui du modèle où t^a et u^a sont à déterminer et le second (b), un système où t^b et u^b

⁵ La MEIF est aussi connue sous le nom de « Méthode des éléments de frontières ».

⁶ Ce théorème stipule que le travail fait par les forces d'un système « a » sur les déplacements d'un système « b » est le même que celui engendré par les forces du système « b » sur les déplacements du système « a ».

sont connus et valides pour toute géométrie. Un tel système est donné par la solution fondamentale de Kelvin d'un point Q du contour (Γ) pour une charge unitaire appliquée en un point P du domaine (Ω). La formulation de l'équation (1.31) s'exprime alors par éq.(1.32).

$$u_i(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P,Q)u_j(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(P,Q)t_j(Q)d\Gamma \quad (1.32)$$

L'équation (1.32) est « l'identité de Somigliana en déplacement » où T_{ij} et U_{ij} sont les tenseurs de tractions et de déplacements de la solution de Kelvin. Γ est ensuite discrétisée en éléments formés de nœuds qui, aussi, ont leurs équations d'équilibre (Figure 1.18). Pour chaque élément, l'équation (1.32) est intégrée par interpolation et ce, pour chaque point « P » du système (c.-à-d. les nœuds) ce qui génère un système d'équations matriciel (éq.(1.33))

$$[A] \cdot \{u\} = [B] \cdot \{t\} \quad (1.33)$$

où $[A]$ est la matrice des coefficients de l'intégration de la partie gauche de éq.(1.32) et $[B]$ celle de la partie droite. Les vecteurs $\{u\}$ et $\{t\}$ représentent les déplacements et les tractions des nœuds. Même si le calcul des contraintes pour Ω est long, les valeurs obtenues sont par contre exactes (Becker, 1992). En effet, en appliquant la dérivée de l'équation (1.32) pour un point P à l'intérieur de Ω (éq.(1.34)), il n'y a aucune approximation et le champ de contraintes étant continu, permet une meilleure précision pour les gradients élevés.

$$\sigma_{ij}(P) + \int_{\Gamma} S_{kij}(P,Q)u_k(Q)d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(P,Q)t_k(Q)d\Gamma \quad (1.34)$$

Dans l'expression (1.34), S_{kij} et D_{kij} sont les tenseurs de contraintes et de déformations de la solution fondamentale en contrainte. Néanmoins, la MEIF est encore bien méconnue, en partie parce que très peu de logiciels commerciaux sont disponibles. Les aspects mathématiques de la MEIF semblants peu familiers (ex. : singularités, discontinuités) nuisent aussi à sa popularité. En conséquence, peu d'études ont utilisé la MEIF (voir Tableau 1.2).

1.7.3 Évaluation du facteur d'intensité de contrainte

Puisque la MEF et la MEIF fournissent directement les déplacements, la méthode d'extrapolation de ceux-ci est privilégiée pour le calcul des FIC. En raison des gradients élevés en bout de fissure, la convergence des résultats n'est pas garantie. Il est alors conseillé d'analyser la solution sur plusieurs nœuds près de la fissure, et ainsi définir les FIC selon une courbe tendance excluant les points de divergence (Anderson, 2005). Il est cependant possible d'introduire artificiellement la singularité $1/\sqrt{r}$. Entre autres, par des éléments singuliers « Élément Quart de Point » (EQP)⁷ situés en bout de fissure. Plusieurs auteurs ont utilisé ces éléments dans l'étude de la fatigue des engrenages (voir Tableau 1.2).

Une alternative à la méthode précédente, est l'approche du taux de relâchement d'énergie potentielle (voir section 1.6.3.1.4) qui permet d'évaluer les FIC loin du bout de fissure. Ainsi, la contribution de la partie singulière à l'énergie de déformation totale est négligeable et il devient inutile de modéliser la singularité (Aliabadi et Rooke, 1992). Par contre, l'application de la méthode est plus laborieuse et nécessite un post-traitement de la solution.

L'application des méthodes de calcul des FIC présentées à la section 1.6.3.1 ne pose aucun problème en 2D. Par contre, en 3D, le front de fissure devient une courbe où il faut évaluer les FIC à plusieurs positions sur celle-ci (c.-à-d. évaluation aux nœuds). Par ailleurs, selon les équations (1.8), pour un point donné sur un front de fissure, le calcul doit se faire selon un plan d'orientation normal au front et perpendiculaire au plan définissant les lèvres de la fissure où l'axe « x' » du système local est parallèle au plan des lèvres (Figure 1.19). Cette technique a été employée dans les études modélisant tridimensionnellement la propagation des fissures des engrenages (Lewicki et al., 1998; Spievak et al., 2001; Ural et al., 2005).

⁷ Les EQP sont des éléments isoparamétriques d'ordre 2 dont leurs nœuds centraux ont été déplacés au quart de la longueur de leurs côtes, en direction de la singularité. De cette façon, l'intégration de l'élément devient singulière lorsque la position tend vers le bout de la fissure (voir sections 3.4.1.2 et 3.4.2.6.2)

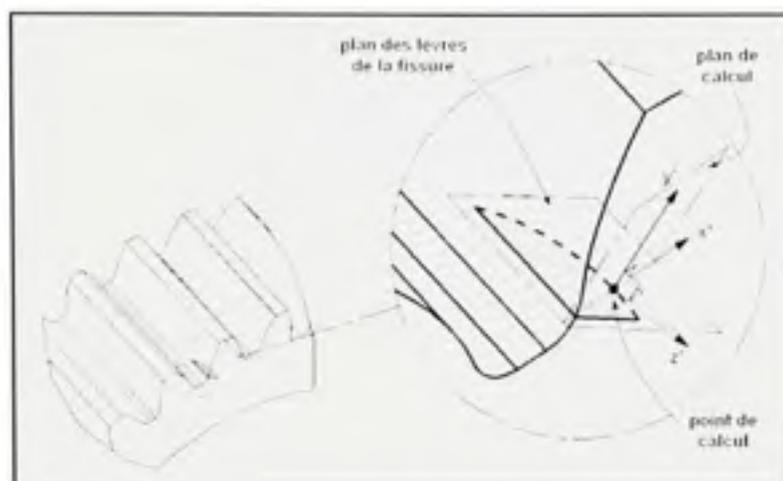


Figure 1.19 *Plan d'analyse en front de fissure d'un modèle 3D.*

Pour un point du front de fissure situé loin des bords, l'hypothèse de l'état de $\varepsilon_{\text{plane}}$ s'applique. Tandis que l'état de σ_{plane} est valable près d'une surface libre. Par contre, la zone de transition entre les deux états n'est pas bien définie, et les auteurs mentionnés précédemment ont tout simplement considéré l'état de $\varepsilon_{\text{plane}}$ sur tout le front. Spievak et al. (2001) ont justifié cette hypothèse par le fait que l'état de $\varepsilon_{\text{plane}}$ est plus conservateur (c.-à-d. K plus élevé). Toutefois, certaines études ont développés des facteurs de correction permettant de considérer cette transition (ex. : Kacianauskas et al., 2005; Nikishkov et Atluri, 1987).

1.7.4 Évaluation de l'avancement de fissure

Comme pour l'évaluation des FIC, celle de l'avancement de fissure (da) en 2D peut être effectuée directement à partir des relations de la section 1.6.4. En 3D, il s'agit de déterminer l'avancement d'un front de fissure (Figure 1.20) où un incrément « da_i » doit être défini pour chaque nœud « i » du front à partir des FIC locaux (voir section 1.7.3).

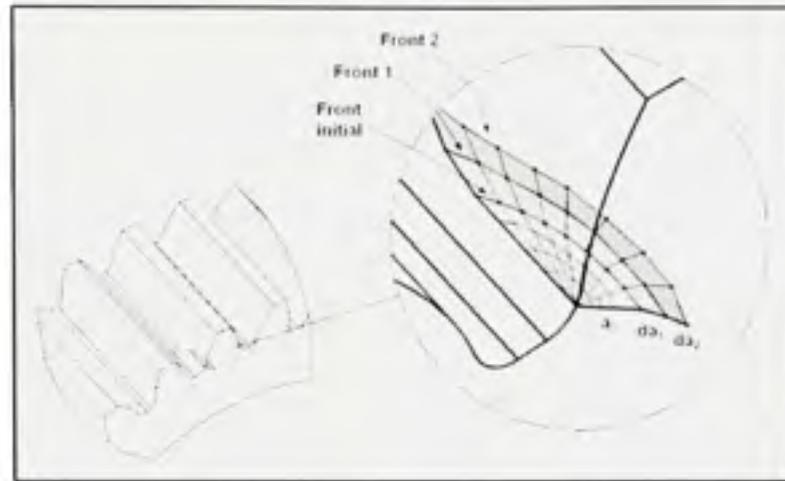


Figure 1.20 Exemple de propagation d'un front de fissure d'un modèle 3D.

Spievak (2001) et Ural (2005) ont appliqué la méthode présentée par l'équation (1.27). Tandis que Lewicki (1998) a plutôt adopté une méthode basée sur la loi de Paris (éq.(1.35))

$$da_i = da_{\max} \left(\frac{K_{I,i}}{K_{I,\max}} \right)^n \quad (1.35)$$

où $K_{I,i}$ est le FIC en mode I au nœud « i », $K_{I,\max}$ la valeur maximale de K_I trouvée sur le front de fissure, da_{\max} la valeur maximale de l'avancement prédéfinie et « n » l'exposant de la loi de Paris (éq.(1.24)). Dans les deux cas la fissure se propage selon le plan de calcul de chaque nœud (voir Figure 1.19). Aussi, à chaque avancement, le front est redéfini par une courbe polynomiale passant par les points « $a_i + da_i$ » trouvés précédemment.

1.7.5 Paramètres de discrétisation

Le Tableau 1.2 présente les paramètres de différents modèles trouvés dans la littérature. À première vue, très peu de détails précis sont fournis quant aux paramètres de modélisation. De plus, lorsque ces paramètres sont divulgués, aucune étude de convergence ou autre justification quantitative n'est présentée. Seuls Sfakiotakis (2002) et Pehan (1997) ont réalisé une analyse de convergence par rapport à la taille du maillage en bout de fissure (h_f).

Tableau 1.2

Paramètres des modèles de propagation des fissures des engrenages

Référence	Méthode	Dimension	État plan	Élément	h_r/a	da (mm)
Jelaska (2003)	MEF	2D	ε plane	Quad. singulier	≈ 0.5	0.2 - 0.4
Jelaska (2005)	MEF	2D	ε plane	Quad. singulier	-	-
Glodez (2002)	MEF	2D	ε plane	Quad. singulier	≈ 0.5	0.2 - 0.4
Blarasin (1997)	MEF	2D	ε et σ plane	Quadratique	-	-
Lewicki (2002)	MEF	2D	-	Quad. singulier	-	-
Lewicki (1997)	MEF	2D	σ plane	Quad. singulier	-	-
Flasker (1995)	MEF	3D	-	-	-	-
Pehan (1995)	MEF	2D & 3D	ε plane	-	-	0.2 - 0.5
Ural (2005)	MEF	3D	ε plane	Quadratique	-	0.1
Kramberger (2004)	MEIF	2D	ε plane	-	-	0.2
Spievak (2001)	MEIF	3D	ε plane	-	-	0.25
Sfakiotakis (2002)	MEF	2D	σ plane	Quad. singulier	0.02	N/A
Sfakiotakis (1997)	MEIF	2D	ε plane	Quad. singulier	-	N/A
Lewicki (1998)	MEIF	3D	-	-	-	1.3
Lewicki (2001)	MEF	2D	-	Quad. singulier	≈ 0.33	-
Pehan (1997)	MEF	2D & 3D	-	Lin. & Quad.	-	0.2
Lewicki (2002)	MEF	2D	σ plane	Quadratique	-	0.26

CHAPITRE 2

CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Au chapitre précédent, un portrait précis de l'état de compréhension actuelle de la propagation des fissures de fatigue en flexion des engrenages a été dressé, ainsi que les moyens de l'analyser. En première partie de ce chapitre une évaluation critique des thèmes abordés au chapitre 1 constituera le cadre théorique de ce projet. En soulevant ainsi les points forts et les lacunes du domaine, il conviendra de préciser la problématique et les objectifs de la présente étude, énoncés sommairement en introduction. Le contexte de recherche ainsi bien défini, la méthodologie à adopter dans l'atteinte des objectifs pourra être mieux choisie.

2.1 Cadre théorique

La section 1.2.2 présentait l'endommagement par fatigue en flexion selon un processus d'initiation de fissures macroscopiques (c.-à-d. ordre du mm) et de propagation de celles-ci.

Quatre paramètres caractérisent la fatigue initiation : la durée de vie N_i , la position initiale de la fissure $(x_0; y_0; z_0)$, sa longueur (a_0) et son orientation (θ_0) . Or, l'hypothèse générale d'initiation en surface, perpendiculaire, au point de tension maximale, semble issue d'observations plutôt qualitatives du phénomène. Selon Lemaitre et Desmorat (2005), à la nucléation, les microfissures suivent les plans de glissement sollicités en cisaillement, puis se propagent selon la normale à la tension pour atteindre une taille macroscopique. Donc, le critère d'endommagement devrait combiner l'effet de la tension et du cisaillement. La seule étude abordant les plans critiques (Jelaska, Podrug et Glodez, 2005), sépare l'effet de ε_a et γ_a et inclut ε_{pl} , convenant peu au régime d'endurance des engrenages où ε_{pl} est négligeable.

Concernant a_0 , les hypothèses divergent d'une étude à l'autre. Mais, l'approche basée sur une valeur seuil a_{th} paraît plus rigoureuse et scientifique de par sa signification. Il faudrait cependant, adapter l'équation (1.5) afin de considérer σ_m , tout simplement en définissant

une limite d'endurance effective. Aussi, contrairement à l'hypothèse de Jelaska (2003) et Glodez (2002), l'applicabilité de la MREL n'est pas nécessairement valide pour une fissure de longueur a_{th} , il faut donc la comparer au rayon de plasticité (r_p).

Pour le calcul de N_i , certains utilisent directement les courbes S-N, même si elles ne sont valables que pour N_f . Néanmoins, cela peut être justifiable si σ_a est près de S_c (voir Figure 1.5), car à ce niveau, N_p devient très court par rapport à N_i . L'alternative proposée par Jelaska (2003) utilisant une courbe de French pour définir N_i en fonction de a_{th} (voir section 1.3.2), semble intéressante. Par contre, cette courbe doit être définie expérimentalement (Lukas et Kunz, 1981), contrairement à l'approximation de Jelaska (2003) (voir Figure 1.7).

En ce qui concerne la propagation, la section 1.6 montrait que la MREL offre les outils nécessaires à l'analyse du phénomène où plusieurs méthodes d'évaluation des FIC ont été appliquées au cas des engrenages. Les méthodes des fonctions de poids et des itérations alternées semblent appropriées à l'analyse statique des fissures droites. Par contre, elles s'avèrent limitatives en propagation, nécessitant une reformulation pour tous changements géométriques. L'extrapolation des déplacements et le taux de relâchement d'énergie potentielle ont par contre un caractère plus général permettant l'évaluation des FIC durant la propagation sans reformulation. Cependant, la géométrie des engrenages ne permet pas l'utilisation analytique des méthodes et elles doivent donc être intégrées à des outils de calcul numérique.

Bien que la mixité des modes ait été prise en compte dans quelques études, en général, seul K_I est inclus dans le calcul de la propagation. Mais, l'effet de K_{II} n'est pas négligé en ce qui concerne l'orientation de la propagation (voir éq.(1.26)). Néanmoins, plusieurs recherches générales sur la propagation en mode mixte ont conclu d'un effet accélérateur sur da/dN par rapport à une situation en mode I uniquement (Guo, Srivatsan et Padovan, 1994; Plank et Kuhn, 1999; Qian et Fatemi, 1996; Srinivas et Vasudevan, 1993; Zhang et al., 2006). Il serait donc préférable de considérer un K_{eq} comprenant la contribution de chaque mode. Par contre, selon Plank et Kuhn (1999), l'angle de déviation (θ) peut être défini par le rapport K_I/K_{II} maximal, rejoignant ainsi l'hypothèse générale décrite au début de la section 1.6.4.3.

La fermeture des fissures a aussi été traitée par certains auteurs proposant un K_{eff} . Cependant, les modèles de Guagliano (2001a) et Jelaska (2005) considèrent des aspects (contact, oxydation et rugosité des lèvres de la fissure) qui ne sont peut-être pas significatifs pour les engrenages. Par ailleurs, Spievak (2001) n'inclut que l'effet de la plasticité avec K_{op} , ce qui semble beaucoup plus simple et justifiable, puisque l'existence d'une zone plastifiée en bout de fissure est indéniable. Il est, malgré tout, difficile de juger de la pertinence des modèles étant donné la complexité du phénomène et le peu d'études expérimentales à ce sujet.

Pour l'évaluation du taux de propagation, la loi de Paris est la plus utilisée, même si elle ne parvient pas à décrire le comportement des fissures près de ΔK_{th} et K_{Ic} . La loi de Collipriest semble préférable en permettant l'estimation de da/dN en dehors de la zone de propagation stable tout en considérant l'effet de σ_m . Puisque les roues requièrent souvent un traitement de surface, le modèle de Kato et Inoue (1993) basé sur la dureté (H), paraît tout indiqué. Ce modèle est aussi applicable en région de propagation lente et instable.

Par ailleurs, la section 1.5 a mis en relief les facteurs significatifs à l'endommagement des engrenages en flexion, permettant de saisir l'ampleur de la complexité du phénomène. De ce fait, l'analyse globale de la fatigue en flexion nécessite l'élaboration d'un outil fiable et efficace. Or, les méthodes numériques se prêtent bien à cette tâche, pouvant modéliser rapidement et avec fidélité une géométrie. À première vue, la MEF semble idéale au développement rapide d'un modèle par son accessibilité et sa facilité d'application. Par contre, la MEIF offre des avantages non négligeables à l'analyse en fatigue : réduction du maillage d'une dimension et précision accrue des champs de contraintes.

En ce qui a trait aux représentations géométriques virtuelles, celles ne considérant qu'une seule dent apparaissent peu représentatives et surestiment à la rigidité de celle-ci en négligeant les propriétés élastiques des dents adjacentes (Celik, 1999). À l'opposé, la modélisation complète des roues engendrera des temps de calcul considérables. Il convient donc, d'opter pour une solution plus optimisée. Celik (1999) a comparé les déformations de

deux modèles 2D : le premier ne considérant que trois dents et l'autre incluant, en plus, le corps de la roue. Les résultats ont montré une différence minimale de 2% entre les modèles.

L'intégration de la MREL aux méthodes numériques a révélé que les relations présentées à la section 1.6 pouvaient être appliquées, sans problèmes, aux modèles 2D. Par contre, en 3D, la transition de l'état de ε_{plane} à celui de σ_{plane} près des surfaces libres, n'est pas encore bien définie, même si quelques modèles ont déjà été proposés. Cela explique l'état de ε_{plane} généralisé des modèles 3D, induisant une inévitable erreur. Par contre, la propagation du front de fissure par incréments pondérés (éq.(1.35)) semble donner des résultats satisfaisants. En ce qui concerne les paramètres de discrétisation garants de la précision, la revue de la littérature n'a pu faire ressortir de règles générales à observer (voir Tableau 1.2).

2.2 Problématique

La fatigue en flexion des engrenages est, encore aujourd'hui, un phénomène très important des systèmes de transmission. Or, les conclusions de la section précédente montrent que l'étude de ce problème est un sujet comportant plusieurs aspects encore plus ou moins bien définis. Néanmoins, la revue de la littérature a montré que par la MREL et la modélisation numérique, l'analyse du phénomène sous différents angles devenait possible.

Cependant les modèles numériques passés en revue comportaient des divergences marquées à plusieurs niveaux: choix de la méthode numérique, hypothèses d'analyse et paramètres de discrétisation. Par conséquent, aucune approche systématique et optimale ne permet l'élaboration d'un modèle de base, capable de traiter la propagation des fissures en flexion de manière simple et efficace tout en respectant la nature même du phénomène.

Les bases d'un modèle numérique de propagation des fissures en flexion des engrenages sont donc à définir. Une modélisation construite sur des bases solides facilitera l'analyse approfondie des différents facteurs d'influence (voir section 1.5), mais aussi constituera un outil de conception fiable et efficace pour l'industrie.

2.3 Objectifs de la recherche

L'énoncé de la problématique constitue la justification principale de l'objectif premier de ce projet, cité en introduction : définir les lignes directrices d'une modélisation de base efficace, pour l'étude de la propagation des fissures de fatigue en flexion dans les engrenages, de l'initiation à la rupture. Plus spécifiquement, il s'agira, dans un premier temps, de développer un outil numérique permettant la modélisation de fissures ainsi que leur propagation. Or, de par ses avantages considérables sur la MEF, la MEIF représente le candidat idéal à la modélisation de la fatigue en flexion des engrenages. Par contre, l'application de cette méthode constituera l'une des tâches d'envergure de ce mémoire, en raison de l'absence quasi totale de logiciel commercial utilisant la MEIF. Suite à la réalisation de l'outil de modélisation et de calcul, il faudra caractériser la fatigue en flexion en phase d'initiation et de propagation à l'aide de concepts et de théories appropriées (i.e MREL, mécanique des solides, lois d'endommagement, ...). L'atteinte de ces objectifs généraux sous-tendent donc les objectifs secondaires suivants :

- Appliquer les MEIF et vérifier son efficacité;
- Définir une modélisation adéquate des fissures;
- Identifier la méthode de calcul des FIC la plus appropriée;
- Déterminer les paramètres de discrétisation optimaux;
- Choisir ou définir un critère d'initiation de fissure adéquat;
- Choisir une loi de propagation appropriée.

Comme mentionné en introduction, seules les roues d'engrenage cylindrique droit seront traitées. De plus, l'ampleur du travail à réaliser ne permettra pas d'aborder la modélisation tridimensionnelle de la propagation des fissures. Néanmoins, le développement des idées et concepts pour la modélisation 2D se fera dans l'optique d'une future transposition au cas 3D. De cette façon, il sera possible d'analyser toutes les étapes du développement du modèle et de mettre en perspective les aspects de chacune d'elle par rapport à l'ensemble.

Puisque l'objectif visé est le développement d'un outil d'analyse s'adressant à la caractérisation globale de la propagation des fissures dans les engrenages, l'approche d'analyse sera plutôt d'ordre macroscopique. Bien que les caractéristiques hétérogènes de la microstructure des matériaux ont une influence certaine dans l'évolution des fissures, surtout à la nucléation, une approche phénoménologique générale considérant un milieu continu sera adoptée. Cela semble plus approprié, puisque le but de la modélisation est d'étudier le comportement général en fatigue des engrenages et l'impact de certains facteurs sur ce dernier.

2.4 Hypothèses générales d'analyse

Avant de définir précisément les étapes d'élaboration du modèle et d'appliquer directement les techniques d'analyse numériques à la fatigue en flexion des engrenages, certaines hypothèses de base doivent être établies afin de respecter le cadre d'analyse de ce projet. Voici une liste des suppositions qui seront appliquées au cours de l'élaboration du modèle :

- Les dents des engrenages auront des profils en développante de cercle parfaits;
- Aucun jeu ne sera considéré dans le couplage des roues. Donc, l'entraxe des centres de rotation sera égale à la somme des rayons primitifs ;
- Aucun effet dynamique ne sera considéré (ex. : inertie, vibration) ;
- La rigidité d'une paire de dents sera considérée constante, donc la charge W sera répartie uniformément sur le nombre de dents en contact ;
- Les effets de proximité de la charge avec la région fissurée seront négligés, et donc l'application du chargement sera ponctuelle, par opposition à un contact Hertzien ;
- Les matériaux seront supposés isotropes sans aucune variation des propriétés en surface.
- Les effets de contact des lèvres des fissures seront négligés ;
- Les effets dynamiques de la propagation des fissures seront aussi négligés et l'avancement de celle-ci sera traité de façon quasi stationnaire ;
- Aucun effet de plasticité ne sera modélisé, sans toutefois restreindre l'application de facteurs permettant de prendre en considération cet aspect (ex. : K_{eff} , K_{op}).

Toutes ces hypothèses simplificatrices ont pour but de concentrer les efforts sur les objectifs principaux de l'étude. Par ailleurs, s'il s'avérait qu'ils aient une influence significative, tous les aspects négligés par ces suppositions pourront être ajoutés au modèle lorsque les bases de ce dernier seront bien établies.

2.5 Structure de la recherche

Afin d'atteindre les objectifs du projet, celui-ci suivra un ordre d'étape bien précis (Figure 2.1). Le tout débutera par la modélisation numérique générale. Suivra ensuite, le traitement plus spécifique de l'initiation et de la propagation des fissures. Tout au long de la construction du modèle, celui-ci sera validé, si possible, avec des cas pour lesquels les solutions sont connues. Bien que le modèle sera défini selon les règles de l'art, celui-ci sera comparé à des mesures expérimentales afin d'entrevoir sa portée. Enfin, le modèle pourra être appliqué à divers systèmes d'engrenage pour étudier leur comportement en fatigue.

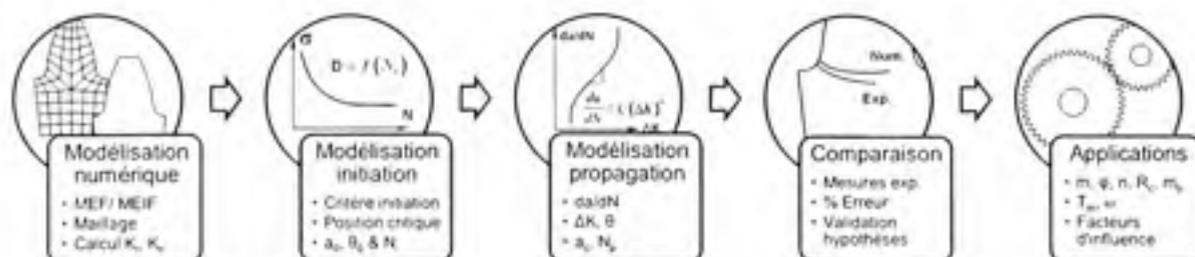


Figure 2.1 Schématisation du processus d'élaboration du modèle.

2.5.1 Modélisation numérique

Cette première partie du projet consiste en la construction des outils numériques qui permettront l'analyse du phénomène. Donc, les choix qui seront faits dans cette section auront des impacts significatifs sur la qualité du modèle.

Tel que mentionné précédemment, la MEIF sera adoptée pour le développement du modèle. Par contre, contrairement à la MEF, la MEIF pose certains problèmes à la modélisation

coplanaire des lèvres des fissures, comme il le sera démontré au chapitre 3. Pour contourner le problème, ce projet propose une toute nouvelle technique de modélisation où un écartement (δ) est imposé aux lèvres. Celle-ci devra cependant être testée et validée adéquatement avant d'être intégrée au modèle de fatigue en flexion.

La MEF sera tout de même utilisée, mais ce sera à titre d'outil de comparaison et de validation. De cette façon, il sera possible de juger facilement de la précision, de l'efficacité, de la fiabilité et de la versatilité de la MEIF.

L'application de la MEF sera réalisée avec le logiciel Ansys[®] v10.0 présentant un niveau de développement élevé et qui offre la possibilité d'automatiser la création de modèles par l'entremise de fichiers de commandes. Pour la MEIF, les rares logiciels commerciaux disponibles n'offrent pas la polyvalence d'un logiciel comme Ansys[®]. Donc, afin d'avoir un contrôle complet sur l'application de la méthode, la programmation d'un logiciel « maison » s'impose. Celui-ci sera réalisé en langage C# (C-sharp) pour plus de compatibilité avec d'autres outils numériques souvent programmés en langage C ou C++.

2.5.2 Initiation des fissures

Plusieurs lacunes ont été soulevées quant à l'initiation des fissures de fatigue en flexion. Notamment, la position $(x_0; y_0)$, la longueur (a_0) et l'orientation (θ_0) initiale de la fissure méritent d'être étudiées plus en profondeur. Or, la présente recherche permettra particulièrement de définir une méthode de calcul de la position d'initiation novatrice qui saura prédire avec plus de précision ces paramètres. Le nombre de cycles à l'initiation (N_i) nécessite aussi une investigation approfondie, mais celui-ci est difficilement estimable de façon précise. En effet, selon Lemaître et Desmorat (2005), il n'est pas rare d'obtenir des variations d'un facteur de 10 sur le nombre de cycles à la rupture (N_f) en fatigue endurance où N_i est la cause principale de cette dispersion. Par conséquent, peu d'efforts seront consacrés à ce paramètre.

Les variations de propriétés mécaniques par les traitements de surface et le grenailage ne seront pas prises en compte par souci de maintenir cette étude à un niveau général. Ces facteurs, comme tous ceux présentés à la section 1.5, pourraient être considérés dans un éventuel modèle plus sophistiqué, élaboré à partir des conclusions de cette recherche.

Pour atteindre le but visé par cette section du projet, différents critères d'initiation de nature phénoménologique seront passés en revue afin d'identifier des concepts d'analyse appropriés à la réalité des engrenages. L'approche nouvelle qui sera développée devra surtout permettre de définir les caractéristiques géométriques de la fissure initiale (c.-à-d. x_0 , y_0 , a_0 et θ_0) nécessaires à la poursuite de l'analyse en propagation. Le nombre de cycles N_i étant difficile à estimer, il sera plutôt traité de façon conventionnelle, basée sur la contrainte.

2.5.3 Propagation des fissures

Cette portion de la recherche, consistera à mettre en commun les outils numériques définis et les théories de la MREL présentées à la section 1.6. Le premier objectif de cette étape, sera d'optimiser les paramètres de discrétisation liés à la propagation (ex. : da) permettant une analyse efficace en propagation. Cela permettra de définir la loi de propagation s'adressant le mieux au cas des engrenages. La revue de la littérature a permis d'identifier quelques modèles de propagation qui seront évalués, mais d'autres lois susceptibles d'être applicables aux engrenages seront également présentées.

Le deuxième paramètre de propagation à déterminer est le critère d'orientation de celle-ci. À première vue, le critère de la $\sigma_{\theta\theta\max}$ semble bien fonctionner et Lewicki (2001; 2002) a démontré expérimentalement l'efficacité de ce dernier. Néanmoins, d'autres critères seront évalués permettant ainsi, s'il y a lieu, de justifier davantage l'hypothèse de la $\sigma_{\theta\theta\max}$.

2.5.4 Comparaison à des mesures expérimentales

À l'issue du développement du modèle, plusieurs hypothèses auront été posées. Malgré que le modèle aura été développé selon des concepts bien définis et acceptés, il conviendra tout

de même de vérifier si l'ensemble de ce dernier permet de fournir des résultats s'approchant de la réalité. C'est pourquoi des essais expérimentaux en fatigue seront réalisés afin de comparer le modèle à des mesures réelles. Ces comparaisons permettront entre autres de valider les nouvelles approches proposées pour caractériser la position d'initiation, ainsi que la propagation des fissures. Donc, le plan d'expérience visera surtout à mettre en évidence ces aspects de la fatigue en flexion.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION NUMÉRIQUE

Les conclusions de la revue de la littérature ont su mettre en évidence l'importance des méthodes numériques dans l'élaboration d'un modèle visant l'analyse en propagation de fissure. Ce chapitre présente donc la mise en oeuvre des outils d'analyse nécessaires à la modélisation du phénomène, basée sur l'utilisation de la MEIF. Par contre, l'objectif premier du chapitre concerne surtout le développement d'une approche de modélisation de fissures novatrice pour la MEIF (c.-à-d. la méthode de séparation finie (δ)), visant à contourner certaines difficultés inhérentes à la méthode.

En premier lieu, différents moyens de calculer des FIC seront présentés en détail, permettant ainsi une application plus appropriée des méthodes numériques. Ensuite, la modélisation par la MEIF sera traitée de façon exhaustive en s'attardant surtout sur le traitement des fissures où la méthode de séparation finie sera développée. Parallèlement, un modèle simple d'éléments finis sera élaboré, sans toutefois négliger la présentation de certains aspects techniques de la méthode pour fins de comparaison avec la MEIF. Enfin, les deux modèles seront comparés selon divers plans, surtout afin de valider l'application de la MEIF, mais aussi pour justifier l'adoption de cette méthode.

3.1 Évaluation du facteur d'intensité de contrainte

Cette section présente en détail les techniques d'évaluation des FIC selon le principe d'extrapolation des déplacements et celui du taux de relâchement d'énergie potentielle appliqué par l'intégrale J^{δ} . Ces méthodes ont été choisies soit pour leur facilité d'intégration, leur versatilité ou leur précision (Mukhopadhyay, Maiti et Kakodkar, 2000). L'évaluation des FIC par soustraction de la singularité sera aussi abordée, car de récents résultats ont montré l'efficacité de la méthode (De Matos et al., 2004).

⁸ La méthode utilisant le taux G nécessite l'avancement de la fissure (da) pour définir dU_p . Ceci est peu commode lorsque l'objet du calcul des FIC est de prédire la propagation. Cette méthode a donc été rejetée.

3.1.1 Extrapolation des déplacements

Plusieurs techniques d'extrapolation existent et offrent différents avantages (ex. : rapidité, précision), mais celles-ci dérivent toutes à partir de la relation (1.11). Il est important, pour cette méthode, de toujours positionner le système de coordonnées polaires ($r; \theta$) au bout de la fissure et de l'orienter selon son axe (voir Figure 1.11), afin de valider les équations du champ de déplacements (éq.(1.9)). Aussi, les nœuds juxtaposés définissant les lèvres de la fissure doivent être distribués de façon symétrique par rapport à l'axe des lèvres, afin de déterminer correctement les déplacements des lèvres Δu_y et Δu_x .

3.1.1.1 Calcul en un point

En fait, aucune extrapolation n'est réalisée par cette technique, puisqu'il s'agit de considérer un point très près du bout de la fissure dont le rayon « r » sera suffisamment petit pour être associé au point de singularité. En appliquant les équations du déplacement pour $\theta = \pi$ et $-\pi$, puis en isolant les FIC, les expressions suivantes sont obtenues :

$$K_I = \frac{\mu}{\kappa+1} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot (u_{y(\theta=\pi)} - u_{y(\theta=-\pi)}) \quad K_{II} = \frac{\mu}{\kappa+1} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot (u_{x(\theta=\pi)} - u_{x(\theta=-\pi)}) \quad (3.1)$$

L'utilisation d'un seul point permet une évaluation très rapide des FIC, mais nécessite un maillage fin pour qu'il y ait suffisamment de nœuds près du bout de la fissure. De plus, il est fréquent d'observer une certaine divergence de la solution numérique près de la singularité (Anderson, 2005). Or, avec cette technique, il est impossible de vérifier si le point d'évaluation choisi est divergent.

3.1.1.2 Calcul en deux points

Cette méthode est également très simple, elle consiste à réaliser une extrapolation linéaire à partir de deux points (i.e nœuds des éléments rattachés au bout de fissure) (Figure 3.1).

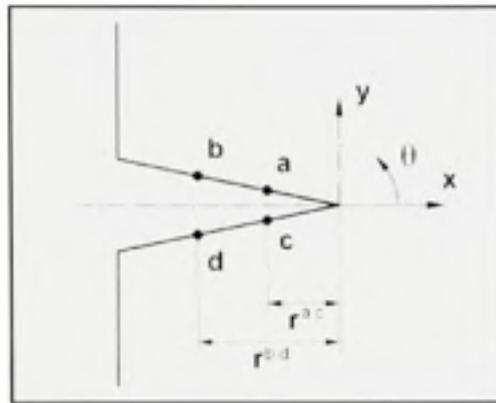


Figure 3.1 *Extrapolation des déplacements en deux points.*

Alors, à partir des informations de la Figure 3.1 et du principe d'extrapolation, K_I et K_{II} peuvent être déterminés pour $r = 0$ par la relation générale (3.2) où $\Delta u^{ij} = u^i - u^j$.

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{(\kappa + 1) \cdot (r^{b,d} - r^{a,c})} \cdot \left(\frac{r^{b,d}}{\sqrt{r^{a,c}}} \cdot \Delta u_y^{a,c} - \frac{r^{a,c}}{\sqrt{r^{b,d}}} \cdot \Delta u_y^{b,d} \right) \\
 K_{II} &= \frac{\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{(\kappa + 1) \cdot (r^{b,d} - r^{a,c})} \cdot \left(\frac{r^{b,d}}{\sqrt{r^{a,c}}} \cdot \Delta u_x^{a,c} - \frac{r^{a,c}}{\sqrt{r^{b,d}}} \cdot \Delta u_x^{b,d} \right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Normalement, cette technique est utilisée lorsque le modèle comprend des éléments singuliers où l'extrapolation ne peut se faire qu'à l'intérieur de ceux-ci, afin de tenir compte de la singularité qu'ils induisent.

3.1.1.3 Minimisation de l'erreur

Aliabadi (2002) a repris la technique de l'extrapolation sur deux points, mais l'a cependant adapté afin d'obtenir une expression minimisant le carré des erreurs entre la relation analytique et le résultat numérique des FIC (éq.(3.3)).

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{(\kappa+1)} \cdot \left(\frac{\sqrt{r^{a,c}} \cdot \Delta u_v^{a,c} + \sqrt{r^{b,d}} \cdot \Delta u_v^{b,d}}{(r^{b,d} + r^{a,c})} \right) \\
 K_{II} &= \frac{\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{(\kappa+1)} \cdot \left(\frac{\sqrt{r^{a,c}} \cdot \Delta u_v^{a,c} + \sqrt{r^{b,d}} \cdot \Delta u_v^{b,d}}{(r^{b,d} + r^{a,c})} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Très peu d'études ont utilisé cette méthode, mais Fedelinski et al. (1995), Salgado et Aliabadi (1998) ont tout de même prouvé qu'elle pouvait fournir des résultats satisfaisants.

3.1.1.4 Calcul par la méthode des moindres carrés

Cette méthode consiste à évaluer les FIC en plusieurs points près du bout de fissure, puis à définir une courbe de tendance de degré quelconque en fonction des résultats trouvés. Cela génère donc un polynôme dont l'ordonnée à l'origine (c.-à-d. $r = 0$) constitue la valeur extrapolée du FIC. La loi des moindres carrés est très utile à l'obtention de la courbe de tendance. Habituellement, la régression utilisée est linéaire, mais il est également possible de définir une courbe de degré supérieur. La technique d'application de cette méthode utilisée dans cette recherche est présentée à l'annexe I, section « Méthode des moindres carrés ».

Afin d'obtenir une meilleure précision, il est recommandé de tracer la distribution de la solution de sorte à identifier les points de divergence à exclure de l'analyse par régression (Anderson, 2005). Par contre, une telle stratégie semble peu commode dans l'étude de la propagation, puisqu'une vérification visuelle est nécessaire à chaque incrément de fissure.

3.1.2 Extrapolation des contraintes

De façon similaire à l'extrapolation des déplacements, il est possible d'extrapoler les contraintes en utilisant les équations (1.8) pour déterminer les FIC. Pour appliquer la méthode, il faut alors isoler les FIC en utilisant les équations du champ de contraintes pour $\theta = 0$, puis ensuite extrapoler la solution en fonction des limites de l'équation (3.4).

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{rr} \cdot \sqrt{2\pi r} \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{r\theta} \cdot \sqrt{2\pi r} \quad (3.4)$$

Cette méthode est très peu utilisée avec la MEF, puisque les contraintes ont un ordre de précision inférieur aux déplacements, ce qui n'est pas le cas avec la MEIF.

3.1.3 Intégrale J

L'intégrale J (eq(3.5)) est une mesure de variation d'énergie potentielle, qui en élasticité linéaire, peut être reliée directement aux FIC (éq.(1.15)).

$$J = \int_{\Gamma} \left(w \cdot dy - t_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} \cdot d\Gamma \right) \quad (3.5)$$

Cette intégrale est réalisée sur une boucle fermée (Γ) qui englobe le bout de la fissure et dont la forme est indépendante du taux de relâchement d'énergie potentielle (Figure 3.2).

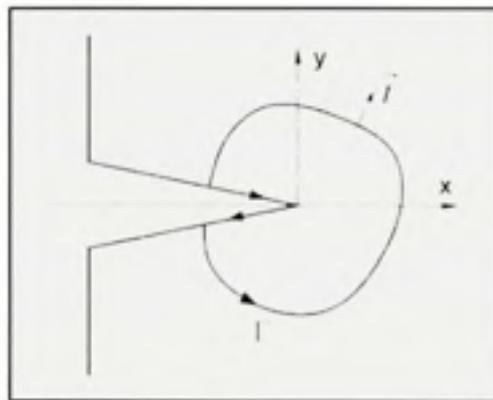


Figure 3.2 Contour indépendante de l'intégrale J.

3.1.3.1 Mode I

Dans sa forme générale (eq(3.5)), l'intégrale J caractérise le mode I où w , la densité d'énergie de déformation, est donnée en notation vectorielle par l'équation (3.6). Bien que

la MREL permette d'intégrer une plasticité localisée à la pointe de la fissure, si la boucle d'intégration (Γ) est suffisamment éloignée de celle-ci, il est raisonnable de supposer que σ_{ij} varie linéairement en fonction de ε_{ij} selon la loi de Hooke. Alors, w peut se résumer à la somme des aires des triangles de côtés $\sigma_{ij} \times \varepsilon_{ij}$ (c.-à-d. $w = \frac{1}{2} \times \sigma_{ij} \times \varepsilon_{ij}$).

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (3.6)$$

Aussi, t_i est obtenue sur le contour Γ avec la relation (3.7), où n_j sont les composantes du vecteur normal unitaire sur Γ .

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.7)$$

Puisque pour la fatigue en flexion des engrenages, les lèvres de la fissure sont des surfaces libres, t_i est nulle. De plus, si la portion des lèvres de la fissure incluse dans la boucle est parallèle à l'axe x (voir Figure 3.2), il devient alors inutile de calculer l'intégrale sur ces portions du contour. Pour le reste de Γ , l'intégrale J peut être réalisée numériquement. Dans ce projet, l'intégration par la méthode des points de Gauss a été utilisée. La différentiation des déplacements ($\partial u_i / \partial x$) nécessite également un traitement numérique où l'expression de la dérivée première d'un polynôme de Lagrange d'ordre 2 (éq.(3.8)) a été appliquée.

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot (f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) \quad (3.8)$$

3.1.3.2 Décomposition de l'intégrale

Ishikawa et al. (1980) ont décomposé l'intégrale J afin de permettre l'étude des fissures sollicitées en mode mixte (éq.(3.9)).

$$J = J_I + J_{II} \quad (3.9)$$

Pour cette technique, la formulation de l'équation (3.5) est appliquée à chaque mode où les composantes de contrainte et de déplacement sont divisées selon les modes I et II éq.(3.10).

$$J_I = \int_{\Gamma} \left(w^I \cdot dy - t_i^I \cdot \frac{\partial u_i^I}{\partial x} \right) d\Gamma \quad J_{II} = \int_{\Gamma} \left(w^{II} \cdot dy - t_i^{II} \cdot \frac{\partial u_i^{II}}{\partial x} \right) d\Gamma \quad (3.10)$$

Plus récemment, Aliabadi et Rooke (1992) ont présenté les caractéristiques de l'application de la décomposition de l'intégrale J . Notamment, le parcours d'intégration Γ doit être symétrique par rapport à l'axe de la fissure et centré sur le bout de celle-ci, puisque la décomposition nécessite l'évaluation de la solution en deux points (P , P') (Figure 3.3).

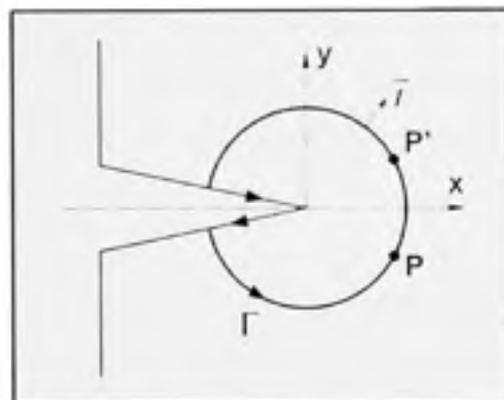


Figure 3.3 Contour indépendant de la décomposition de l'intégrale J .

Comme en mode I, l'intégration sur les lèvres de la fissure n'a pas à être réalisée et les FIC peuvent être associés à J_I et J_{II} par les relations (3.11).

$$J_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad J_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (3.11)$$

Aliabadi et Rooke (1992) ont prouvé que cette méthode était très précise avec des erreurs inférieures à 1% par rapport aux solutions analytiques. De plus, il est possible d'appliquer la méthode au cas 3D (Huber, Nickel et Kuhn, 1993; Rigby et Aliabadi, 1998). Les détails de la décomposition de l'intégrale sont présentés à l'annexe I.

3.1.4 Soustraction de la singularité

Contrairement aux techniques d'extrapolation, la singularité en bout de fissure n'est pas modélisée, mais est plutôt soustraite du champ de contraintes et traitée analytiquement. Aliababi et Rooke (1992) ont intégré la méthode à la MEIF de manière à ce que la solution en région singulière soit définie par les relations (3.12)

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \quad \vec{t} = \vec{t}' + \vec{t}'' \quad (3.12)$$

où \vec{u}' et \vec{t}' sont les vecteurs de déplacement et de traction pour le champ régulier et \vec{u}'' et \vec{t}'' les vecteurs pour le champ singulier. La portion singulière est décrite par les équations (1.8) et (1.9) qui sont ajoutées au système d'équations, ainsi les FIC deviennent des inconnus additionnels. Cette technique est plutôt fastidieuse, puisqu'elle nécessite une modification de la procédure d'assemblage du système d'équations afin d'y incorporer les équations supplémentaires de K_I et K_{II} .

De Matos et al. (2004) ont procédé autrement en soustrayant la singularité par un simple post-traitement de la solution. Leur méthode consiste à évaluer en un point P_ϵ , situé à une distance ϵ sur l'axe de la fissure, la contrainte normale (σ) et de cisaillement (τ) étant respectivement perpendiculaire et parallèle à la fissure (Figure 3.4). Ensuite avec les équations du champ de contraintes (éq.(1.8)) et selon un angle θ nul et un rayon « r » (Figure 3.4), les auteurs ont évalué K_I et K_{II} de la façon suivante :

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{2\pi r} \quad K_{II} = \tau \cdot \sqrt{2\pi r} \quad (3.13)$$

Les paramètres ϵ et r sont indépendants et doivent être ajustés en fonction du maillage. De Matos et al. (2004) ont obtenu de très bons résultats pour différentes configurations en utilisant des valeurs de $\epsilon = 0.0075 \times h_t$ et $r = 0.0011 \times h_t$, où h_t est la longueur d'un des éléments liés au bout de la fissure. Comparativement à l'intégrale J , cette méthode est beaucoup plus efficace avec un seul point de calcul, mais l'ajustement plutôt arbitraire des paramètres ϵ et r semble peu fiable.

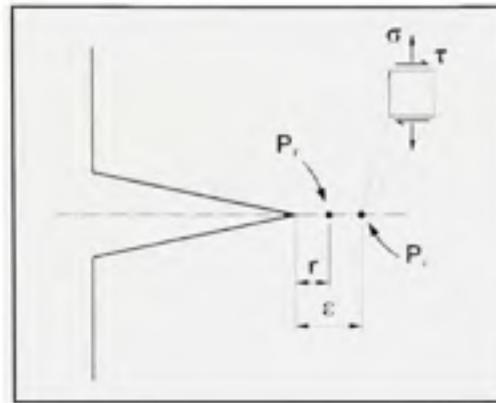


Figure 3.4 Configuration du calcul des FIC par soustraction de la singularité.

3.2 Formulation et particularités des méthodes numériques

Cette portion du chapitre présente en détail la formulation de la MEIF ainsi que les subtilités de sa mise en application. Mais tout d'abord, la formulation de la MEF sera exposée brièvement où certains aspects complémentaires à la section 1.7.2.1 seront apportés et ce, afin de saisir davantage les différences entre les deux méthodes.

3.2.1 Méthode des éléments finis (MEF)

Pour les problèmes d'élasticité statique, la MEF est dérivée des équations d'équilibre (éq.(3.14)) excluant les effets d'inertie ($\partial^2 u / \partial t^2$). En appliquant successivement la méthode des résidus pondérés, le principe du travail virtuel et l'intégration par partie, la formulation présentée à la section 1.7.2.1 est obtenue (éq.(1.28)).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (3.14)$$

Dans sa forme discrétisée en fonction des déplacements $\{u\}$ et selon chaque domaine (Ω_e) et contour (Γ_e) élémentaire, l'équation (1.28) est représentée selon la relation (3.15).

$$\sum_{e=1}^{nb\Omega} \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega \cdot \{u\} = \sum_{e=1}^{nb\Omega} \int_{\Omega_e} \psi \bar{f}_e d\Omega + \sum_{e=1}^{nb\Gamma} \int_{\Gamma_e} \psi \bar{t} d\Gamma \quad (3.15)$$

Où B est la matrice des dérivées partielles des fonctions d'interpolation (ψ), D celle contenant les propriétés élastiques du matériau et le vecteur \bar{t} contient les composantes de traction associées aux charges externes (f_e). Après l'intégration des éléments (Ω_e et Γ_e) la matrice de rigidité (K) et le vecteur de charge (F) de l'équation (1.29) sont obtenus.

3.2.2 Méthode des équations intégrales de frontières (MEIF)

En élasticité linéaire, la MEIF est aussi dérivée des équations d'équilibre (éq.(3.14)) pour lesquelles la loi de Hooke et la définition des déformations en fonction des déplacements ont été appliquées afin d'obtenir une formulation en déplacement menant à la solution fondamentale de Kelvin pour une charge unitaire. En considérant un point Q du contour (Γ) et un point de collocation P où la charge unitaire est appliquée, les déplacements (u_i) obtenus par la solution de Kelvin sont définis par la fonction tensorielle suivante :

$$u_i = U_{ij}(P, Q) \cdot \mathbf{i}_j \quad (3.16)$$

Où les composantes du tenseur U_{ij} sont données, en notation tensorielle, selon éq.(3.17)⁹.

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{1}{8\pi G \cdot (1-\nu)} \left\{ \left[(3-4\nu) \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{7}{2} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} \quad (3.17)$$

Dans cette équation, « r » représente la distance entre les points P et Q, et δ_{ij} est le delta de Kronecker. En dérivant l'expression des déplacements, puis en appliquant la loi de Hooke, les tractions (t_i) de la solution fondamentale peuvent être décrites comme suit :

$$t_i = T_{ij}(P, Q) \cdot \mathbf{i}_j \quad (3.18)$$

⁹ Plusieurs références omettent la constante « 7/2 » dans leur formulation de U_{ij} (Kane, 1994).

Les composantes de T_{ij} sont, quant à elles, définies par l'équation (3.19).

$$T_{ij}(P, Q) = \frac{-1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] - (1-2\nu) \left[\frac{\partial r}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right] \right\} \quad (3.19)$$

Où n est la normale au contour externe (Γ) au point Q . En utilisant U_{ij} et T_{ij} à titre de système complémentaire dans la relation de réciprocité de Betti (éq.(1.31)), cela conduit à l'identité de Somigliana en déplacement (éq.(1.32)). L'étape suivante est la discrétisation de la géométrie à analyser et l'application de l'identité de Somigliana à chacun des nœuds, menant ainsi à un système d'équation (éq.(1.33)) dont les inconnus sont, soit u_i ou t_i . Dans l'équation (1.33), la matrice A contient les coefficients T_{ij} et la matrice B les coefficients U_{ij} . La méthodologie d'assemblage du système d'équations adoptée dans ce projet, est celle de Kane (1994).

Pour le calcul de la solution à l'intérieur du domaine (Ω), il faut ensuite appliquer l'identité de somigliana pour un point P où la solution est requise. Pour les déplacements il s'agit de l'expression (1.32) et pour les contraintes c'est l'expression (1.34) où les tenseurs D_{kij} et S_{kij} sont définis par les relations suivantes :

$$D_{ij}(P, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r} \right) \left\{ (1-2\nu) \left[\delta_{j\mu} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{i\mu} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_\mu} \right] + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_\mu} \right\} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} S_{ij}(P, Q) = & \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \right) \left\{ n_i \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu)\delta_{jk} \right] \right. \\ & + n_j \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu)\delta_{ik} \right] + n_k \left[2(1-2\nu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - (1-4\nu)\delta_{ij} \right] \\ & \left. + 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu \left(\delta_{j\mu} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{i\mu} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

3.2.2.1 Particularités de la MEIF

Contrairement à la MEF, l'application de la MEIF n'est pas explicite et certains aspects nécessitent une attention particulière à l'obtention de résultats précis.

3.2.2.1.1 Précision de la solution

L'essentiel des difficultés rencontrées dans la mise en œuvre de la MEIF provient des singularités en $\ln(1/r)$ et $1/r$ des tenseurs U_{ij} et T_{ij} (voir éq.(3.17) et (3.19)). En effet, lorsque le point Q s'approche du point de collocation P, la distance r tend vers 0 et par conséquent U_{ij} et T_{ij} tendent vers ∞ . Or, puisque l'intégration de U_{ij} et T_{ij} est évaluée numériquement sur chaque élément par un polynôme de Legendre et la méthode des points de Gauss, cette singularité ne peut être traitée parfaitement et l'erreur d'intégration (e) augmente avec la diminution de r pour un nombre de points de Gauss fixé. Par contre, lorsque le point P n'appartient pas à l'élément contenant le point Q, il est possible de contrôler l'erreur d'intégration en variant le nombre de points de Gauss. Gao et Davies (2001) ont proposé un critère de définition du nombre de points d'intégration (m) en fonction du rapport h/r (h = longueur de l'élément), de l'erreur admissible (e) et de l'ordre de la singularité (p) éq.(3.22).

$$m = \sqrt{\frac{2}{3}p + \frac{2}{5}} \cdot \left[-\frac{1}{10} \ln\left(\frac{e}{2}\right) \right] \cdot \left[\left(\frac{8h}{3r}\right)^{\frac{1}{4}} + 1 \right] \quad (3.22)$$

En déplacement, l'ordre de la singularité la plus élevée est celle des coefficients T_{ij} , donc p vaut 1. Dans le programme d'éléments de frontières développé pour ce projet, ce critère a été appliqué à l'intégration adaptative de chaque élément pour une erreur d'intégration (e) fixe. Afin d'obtenir une bonne précision des résultats, une librairie de points d'intégration allant jusqu'à 20 points a été implantée.

Bien que ce nombre de points soit suffisant dans la majorité des cas, il est possible qu'un nombre plus élevé soit nécessaire. Dans ce cas, il est d'usage de subdiviser l'élément à intégrer. Cette technique, présentée en détail à la section 3.5.2.2, permet un niveau de précision élevé sur l'intégration d'éléments où la distance r est très petite, sans toutefois nécessiter un maillage raffiné.

3.2.2.1.2 Intégration singulière

Lorsque le point de collocation (P) appartient à l'élément intégré, il y a inévitablement coïncidence avec Q où $r = 0$. Dans ce cas, l'intégration est dite singulière. Pour les coefficients U_{ij} , où la singularité est faible, il est possible de réaliser l'intégration numérique en isolant la singularité logarithmique ($\ln(1/r)$) puis en la traitant avec des points de Gauss générés à partir du polynôme de Laguerre (Stroud et Secrest, 1966). La portion non singulière peut cependant être intégrée normalement. Les détails de cette technique sont présentés par Gao et Davies (2001).

En ce qui concerne les termes de T_{ij} , où la singularité est forte, l'intégration conduit aux valeurs principales de Cauchy. Il est cependant impossible de définir celles-ci de façon précise par l'intégration numérique. Une méthode largement employée traite indirectement le problème en utilisant le principe du mouvement de corps rigides. En appliquant un déplacement unitaire à toute la géométrie ($u_i = 1$), aucune traction ne devrait, théoriquement, être générée ($t_i = 0$). Il devient alors très facile d'isoler les coefficients T_{ij} du point de singularité et de les définir à partir des autres coefficients. Cette technique a été implantée dans le code d'éléments de frontières selon la méthodologie présentée par Kane (1994).

3.2.2.1.3 Point de discontinuité

Un autre problème lié à la formulation de la MEIF, est le traitement des points de discontinuité géométrique (c.-à-d. les coins) où la normale (\vec{n}) varie brusquement. Cela occasionne donc un dédoublement des tractions aux points de discontinuité (i.e quatre

composantes de traction: t_x^1 , t_y^1 , t_x^2 et t_y^2). Pour définir ces deux systèmes de tractions lorsque les déplacements sont imposés, Kane (1994) suggère de poser égal à 0 les tractions d'un des deux éléments associés au point de discontinuité. Cela a pour effet de négliger la contribution d'un des deux éléments dans le calcul de la solution. Beer (2001) propose plutôt de générer des équations auxiliaires au point de discontinuité, basées sur l'hypothèse que le cisaillement atteint une valeur constante en ce point (éq.(3.23)). Cette dernière approche semble plus cohérente et c'est elle qui a été implantée.

$$\frac{\partial \sigma_y^e}{\partial x^e} = 0 \quad \text{pour} \quad e = 1, 2 \quad (3.23)$$

3.2.2.1.4 Application de charge ponctuelle

Puisque la MEIF utilise le concept de traction, il est impossible de modéliser directement une charge concentrée en un point comme dans la MEF. Alors, pour représenter une force ponctuelle, une méthode simple consiste à distribuer uniformément la force (F) sur l'élément contenant le point d'application de la charge. De cette façon, les tractions à chacun des nœuds de l'élément seront définies par la relation suivante :

$$t_i = \frac{F_i}{h} \quad (3.24)$$

Par conséquent, cette technique induit une erreur de position, qui lorsque le maillage est assez grossier, peut être importante. Puisque dans ce projet, la précision des résultats est primordiale à l'atteinte des objectifs, une solution alternative s'impose. Le moyen proposé pour résoudre ce problème a été de définir une distribution des tractions de sorte que le centroïde (\bar{x}) de celle-ci corresponde au point d'application de la charge (x_{Fi}). Donc, la distribution doit respecter les conditions suivantes :

$$F_i = \int_{x_e}^{x_{e+1}} t_i \cdot \Psi dx \quad x_{Fi} = \frac{1}{F_i} \int_{x_e}^{x_{e+1}} x \cdot t_i \cdot \Psi dx \quad (3.25)$$

Dans les cas où la force est appliquée près des extrémités d'un élément, celle-ci est alors distribuée sur deux éléments. Mais, lorsque cette extrémité correspond à une discontinuité, la distribution s'effectue seulement sur l'élément, ce qui induit une petite erreur sur x_{Fi} . Pour réduire cette erreur, il faut donc que l'élément associé à la discontinuité soit de petite taille.

3.3 Modèles 2D sans fissure

Le premier volet de la modélisation numérique ne nécessite pas le traitement des fissures, puisque celui-ci est dédié à la fatigue en initiation. Cette section présente le développement du modèle sans fissure, d'abord par la MEF et ensuite avec la MEIF. Les méthodes seront aussi comparées entre elles.

3.3.1 Modèle MEF

Il faut rappeler que la MEF, dans ce projet, est un outil de validation et par conséquent, son application sera faite de façon appropriée, sans toutefois chercher à obtenir un modèle des plus optimaux.

3.3.1.1 Stratégie de modélisation

La première étape de l'élaboration d'un modèle d'éléments finis, est d'établir une stratégie de discrétisation appropriée, puisque le maillage a un impact majeur sur la précision des résultats et le temps de calcul. En pratique, trois techniques permettent d'arriver à un maillage dont les résultats convergent, tout en minimisant le nombre de nœuds. La première consiste à raffiner la taille des éléments (h) localement où les gradients sont élevés (méthode h). La deuxième, agit plutôt sur les fonctions d'interpolation en variant le degré du polynôme (p) les définissant (méthode p). Enfin, la dernière est une combinaison des deux autres (méthode h - p) où h et p sont simultanément adaptés afin d'atteindre le maillage optimal. Puisque l'erreur (e) engendrée par la solution de la MEF est décrite par

l'expression (3.26) (Reddy, 2006), où « c » est une constante du problème, il est évident que les méthodes p et h-p auront un taux de convergence plus élevé.

$$\|e\| = \|u - u_{num}\| \leq ch^{(p-1)} \quad (3.26)$$

Par contre, l'intégration de telles méthodes est plutôt complexe en comparaison à l'implantation de la méthode h (Liebowitz et al., 1995). Pour cette raison, la méthode h sera utilisée dans ce projet¹⁰. Toutefois, selon l'équation (3.26) il sera préférable de discrétiser l'ensemble du modèle par des éléments d'ordre supérieur (ex. : quadratiques).

La forme de base des éléments doit aussi être adéquate. En 2D, deux options sont possibles: éléments triangulaires et quadrilatéraux. Selon Reddy (2006), les éléments triangulaires sont idéaux pour la discrétisation de géométries complexes, mais ils peuvent induire une erreur selon leur disposition par rapport à la symétrie du problème. Un maillage plus structuré utilisant des éléments quadrilatéraux sera donc plus fiable. La qualité d'un maillage est également tributaire de l'aspect géométrique des éléments. Un élément ayant une forme disproportionnée ou distordue peut créer un phénomène de singularité lors de son intégration. Pour assurer la fiabilité du maillage, Reddy (2006) suggère de maintenir des rapports de côtés entre 0.1 et 10, et des angles inclus entre 15 et 165°.

3.3.1.2 Discrétisation de la géométrie

En appliquant ces principes de discrétisation à la géométrie des engrenages¹¹, il est possible de générer un maillage assez structuré en décomposant la surface d'une dent en 6 parties¹² puis en maillant chacune d'elle par des éléments quadratiques à 8 nœuds (Figure 3.5). Il devient alors facile de raffiner localement le maillage, sans toutefois imputer sa structuration globale.

¹⁰ Avec le logiciel Ansys®, il est possible d'appliquer la méthode p par des fonctions préprogrammées. Mais, la méthode h a tout de même été retenue afin de comparer la MEF et la MEIF sur de mêmes bases.

¹¹ Dans ce projet, la géométrie de la denture des engrenages a été définie selon les équations du taillage des roues par un outil crémaillère. Les détails de la technique sont présentés en annexe II.

¹² Cette technique de subdivision d'une dent d'engrenage a été inspirée de Litvin et Fuentes (2004).

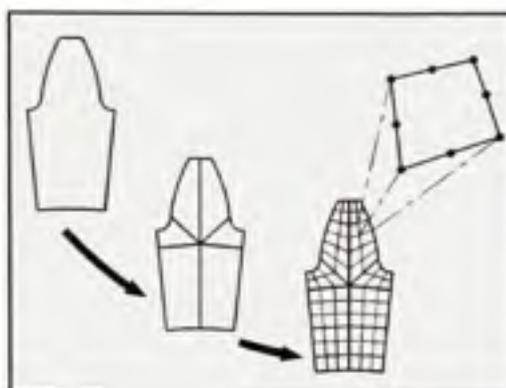


Figure 3.5 *Discretisation d'une dent d'engrenage par éléments finis.*

Cette stratégie de discrétisation a donc été appliquée et l'ajustement des paramètres du maillage a été défini de sorte à obtenir des résultats convergents dans la région d'intérêts (i.e congé des dents). Basé sur les résultats de Celik (1999), une géométrie de roue incluant 3 dents a été adoptée et une étude de convergence a permis de déterminer une discrétisation appropriée (annexe III). En fait, neuf niveaux de discrétisation ont été comparés à un modèle incluant la géométrie complète d'une roue et 907762 DDL. La Figure 3.6 montre l'écart relatif (c.-à-d. $(\sigma_{eq} - \sigma_{eq.ref.})/\sigma_{eq.ref.}$) de chaque maillage par rapport au modèle complet de la roue, selon la contrainte de Von Mises (σ_{eq}) au congé de la dent, induite par le chargement du plus haut point de contact unique de l'engrènement.

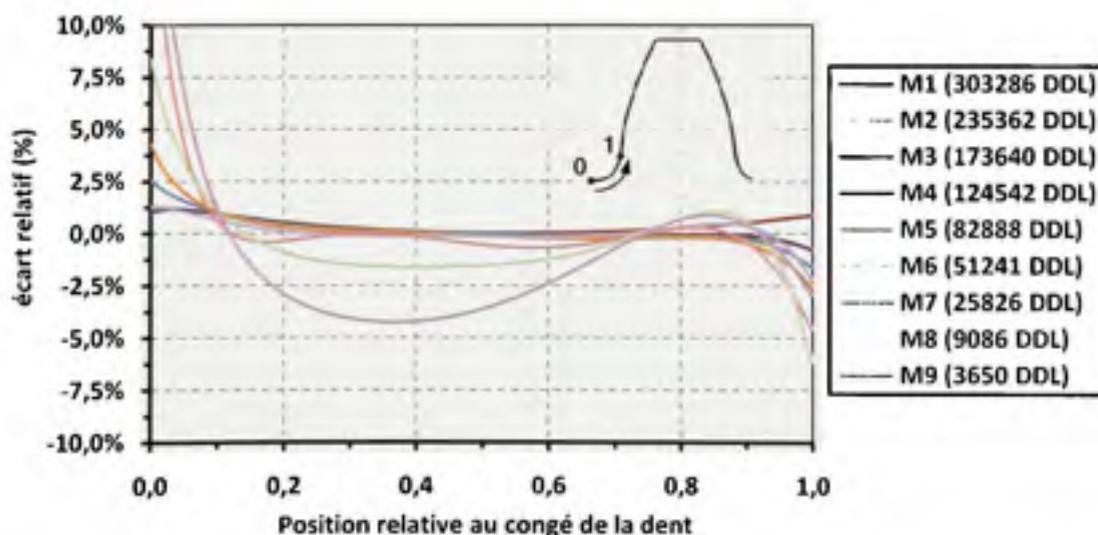


Figure 3.6 *Écart relatif des maillages d'éléments finis sur σ_{eq} .*

Ce graphe montre clairement que pour la majeure partie du congé (i.e de 0.1 à 0.9), les maillages 1 à 7 donnent de bons résultats. Afin d'assurer une précision à l'analyse en fatigue initiation, le maillage 6 a été retenu pour la modélisation puisque sur tout le profil du congé, l'écart est sous les 2% et près du point $\sigma_{eq \max}$, il est inférieur à 0.5%, ce qui semble largement suffisant. De plus, comparativement au maillage 1, celui-ci a six fois moins de DDL, ce qui réduit considérablement le temps de calcul. Le maillage retenu (Figure 3.7), nécessite une subdivision du congé de la dent principale en une trentaine d'éléments. Tandis qu'une vingtaine d'éléments sont imposés pour les congés adjacents et les profils en développante de cercle.



Figure 3.7 *Maillage d'éléments finis pour une roue non fissurée.*

Cette discrétisation paraît excessive, mais il faut tenir compte du fait que l'analyse en l'initiation de fissure requiert une définition du champ de contraintes aussi précise que possible. Il aurait néanmoins été possible d'optimiser ce maillage par une discrétisation plus graduelle, mais cette technique complique la génération automatisée du maillage et le but, ici, n'était pas d'obtenir un modèle optimal, mais plutôt un modèle aussi précis que possible, afin de valider l'application de la MEIF.

3.3.2 Modèle MEIF

Avec la MEIF, la discrétisation de la géométrie devient beaucoup plus simple puisque seul le contour (Γ) est traité. De ce fait, les conditions à respecter dans la définition des éléments sont beaucoup moins contraignantes.

3.3.2.1 Stratégie de modélisation

Contrairement à la MEF, l'erreur induite par la méthode des éléments de frontières ne peut être estimée par une relation semblable à l'équation (3.26), en raison de la formulation particulière de la méthode (Kita et Kamiya, 1994). À ce jour, il semble n'y avoir aucune expression, prouvée mathématiquement, permettant l'évaluation, à priori, de cette erreur (Kita et Kamiya, 2001). Cependant, comme pour la MEF, Rank (1989) a démontré que la méthode h-p présentait un taux de convergence exponentiel. Une telle technique serait alors préférable, mais puisque la modélisation par la MEIF a nécessité la programmation d'un logiciel complet, il a été impossible d'incorporer ce type de raffinement complexe au programme tout en respectant les délais alloués au projet. Donc, pour cette raison, l'élaboration d'une discrétisation appropriée de la géométrie des roues d'engrenage s'effectuera par la méthode h (voir section 3.3.1.1). Aussi, afin de comparer les méthodes sur de mêmes bases, des éléments quadratiques seront employés.

3.3.2.2 Discrétisation de la géométrie

L'étude de convergence qui a mené aux paramètres de discrétisation appropriés pour l'analyse des contraintes du corps de la roue non fissurée est présentée en annexe III. La Figure 3.8 présente de façon similaire à la Figure 3.6, les résultats de chacun des maillages testés par rapport à un modèle complet d'une roue, comportant 4112 DDL. Ce graphe démontre à quel point la MEIF est efficace. En effet, un maillage ne contenant que 280 DDL permet de décrire la distribution de la contrainte avec moins de 3% d'écart par rapport à la solution de référence.

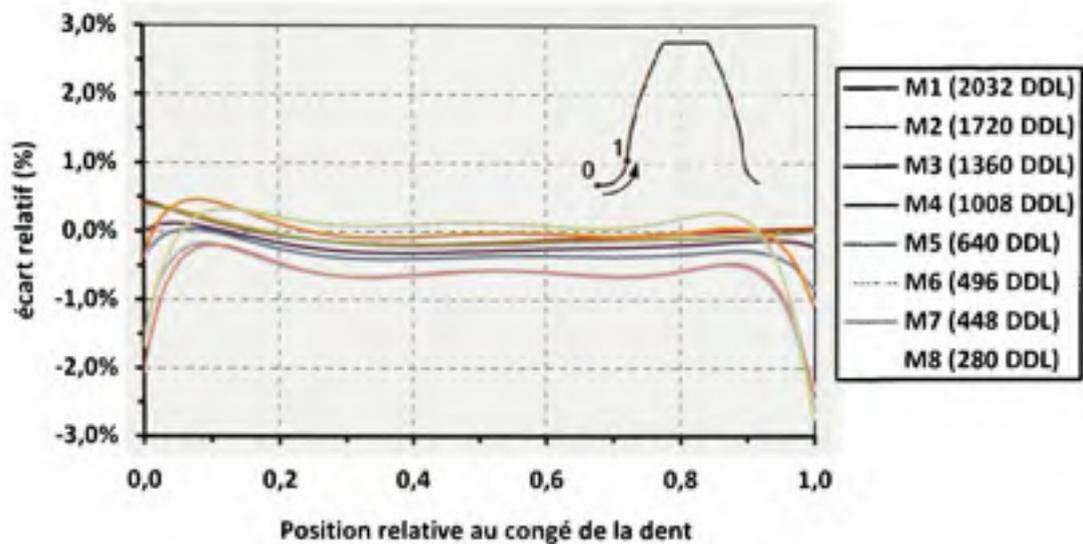


Figure 3.8 *Écart relatif des maillages d'éléments de frontières sur σ_{eq} .*

Néanmoins, afin de préserver une convergence acceptable des résultats, pour tous les cas de chargement du cycle d'engrènement, un niveau de discrétisation un peu plus élevé (c.-à-d. le maillage 5 avec 640 DDL) a été choisi avec le maillage de la Figure 3.9. Celui-ci nécessite 20 éléments pour la définition du congé de la dent principale et 15 éléments pour son profil en développante de cercle. Les dents auxiliaires sont quant à elles discrétisées par 10 éléments en racine et 5 éléments pour leur profil. Le corps de la roue est segmenté par des éléments équivalents au cinquième de l'épaisseur séparant le moyeu au rayon de racine.

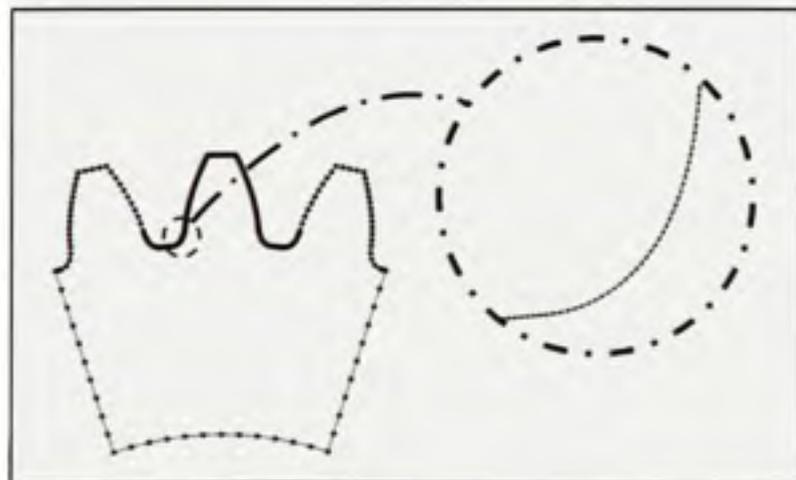


Figure 3.9 *Maillage d'éléments de frontières pour une roue non fissurée.*

3.3.3 Comparaison des modèles MEF et MEIF sans fissure

La comparaison des modèles sans fissure permettra surtout de valider le code d'éléments de frontières en ce qui a trait à l'application des forces ponctuelles. En effet, la rapidité de convergence de la MEIF et le faible nombre d'éléments nécessaire à la discrétisation, ont clairement montré que cette méthode était supérieure à la MEF pour l'analyse élastique d'un corps non fissuré. La Figure 3.10 illustre la distribution de σ_{eq} obtenue par la MEIF et la MEF, à la position critique de l'engrènement, selon la position relative au congé de la dent.

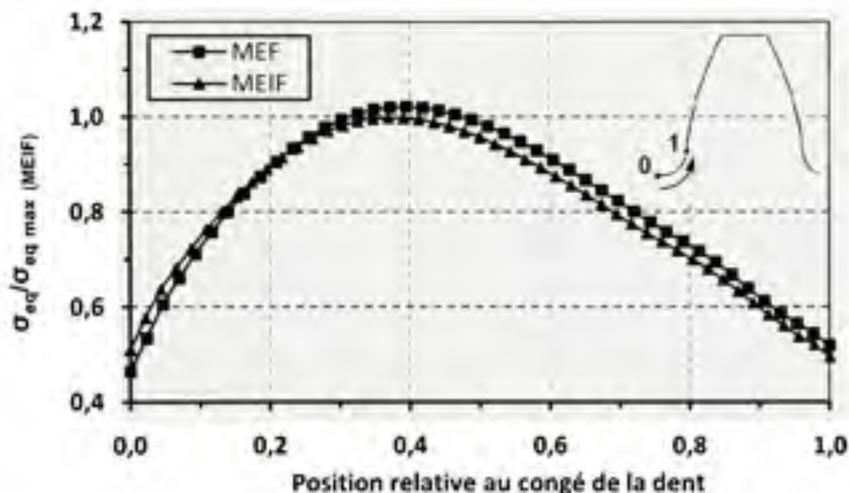


Figure 3.10 Distribution de σ_{eq} en fonction de la position relative au congé de la dent.

En comparant les courbes il est possible d'observer une bonne corrélation des modèles. Par contre, il y a tout de même un écart d'environ 2.2% entre les deux distributions. Cela est en partie causé par les caractéristiques distinctes de la MEIF et la MEF par rapport à leur formulation respective et au post-traitement de la solution. Notamment, dans le programme d'éléments de frontières, les contraintes sont évaluées directement aux nœuds où une moyenne arithmétique est appliquée lorsque ceux-ci appartiennent à plusieurs éléments. Tandis que pour la MEF, le logiciel Ansys[®] calcul plutôt les contraintes aux points d'intégration de Gauss et les reporte aux nœuds selon l'hypothèse d'une variation linéaire. Néanmoins, puisque les distributions ont sensiblement la même allure et que l'écart est assez faible, il est raisonnable de conclure à la validité du modèle d'éléments de frontières,

mais surtout à celle de la méthode d'application des charges ponctuelles, présentée à la section 3.2.2.1.4.

Il est également possible de valider le modèle d'éléments de frontières en le comparant à l'estimation de la contrainte de flexion (σ_B) proposée par l'AGMA, qui utilise le modèle de Lewis et certains facteurs de correction (éq.(3.27)) (Shigley, Mischke et Budynas, 2004) où W_t est la charge tangentielle, P le pas diamétral, F l'épaisseur de la roue. Les facteurs K_o , K_v , K_s , K_m , K_b et J sont, quant à eux, associés respectivement aux effets de surcharges, dynamiques, de grandeur, de distribution du chargement, d'épaisseur de jante et géométriques.

$$\sigma_B = W_t K_o K_v K_s K_m K_b \frac{P K_a K_b}{F J} \quad (3.27)$$

En appliquant cette équation à un pignon de 30 dents (n) couplé à une roue de 45 dents et dont le module (m) est de 4 mm, l'angle de pression (ϕ) de 20° et d'une épaisseur (F) unitaire, une contrainte de flexion (σ_B) de 620.8 MPa ¹³ est obtenue en considérant une charge transmise (W) de 1000 N. Il est à noter, que seul le facteur géométrique J a été considéré dans ce calcul (c.-à-d. $K_o = K_v = K_s = K_m = K_b = 1$). Le modèle d'éléments de frontières fournit quant à lui, une contrainte σ_B de 640.7 MPa , ce qui représente un écart de 3.2% par rapport à l'estimation de l'AGMA, ce qui est très acceptable.

La Figure 3.10 montre que la MEF donne des résultats similaires à la MEIF: donc, par rapport à l'AGMA, les deux modèles seraient équivalents. Par contre, il faut rappeler que le modèle d'éléments finis a nécessité 50% plus d'éléments pour la discrétisation du congé et 80 fois plus de DDL pour le modèle complet qu'avec la MEIF, justifiant ainsi l'utilisation de cette dernière. D'autre part, d'un point de vue physique, la distribution du chargement naturellement appliquée sur une longueur finie avec la MEIF, telle que présentée à la section 3.2.2.1.4, est plus réaliste que la simple application ponctuelle de la force habituellement utilisée avec les modèles d'éléments finis.

¹³ Cette contrainte correspond à la contrainte maximale en tension à la racine de la dent du pignon, pour le plus haut point de contact unique de l'engrènement.

3.4 Modèles 2D avec fissure

Cette deuxième étape de modélisation de la fatigue en flexion des engrenages s'adresse spécifiquement au développement des outils numériques permettant le traitement des fissures selon la MREL. Comme pour les modèles sans fissure, la MEF sera appliquée, mais l'emphase sera surtout portée sur l'utilisation de la MEIF.

3.4.1 Modèle MEF

Pour un corps fissuré, il devient beaucoup plus difficile de conserver un maillage structuré comme celui présenté précédemment. Cependant, à l'opposé de l'analyse en initiation, en propagation le point critique est connu et ponctuel (c.-à-d. le bout de fissure). Il est alors possible de concentrer le raffinement du maillage uniquement autour du point de singularité et d'augmenter la taille générale des éléments ailleurs dans le domaine.

3.4.1.1 Stratégie de modélisation

La stratégie de discrétisation adoptée dans la présente étude a été de maintenir le maillage structuré pour les dents adjacentes et d'utiliser le mailleur libre du logiciel d'éléments finis Ansys® pour la dent fissurée. Les éléments quadratiques à 8 nœuds ont été conservés. Une particularité importante du modèleur d'Ansys®, est qu'il ne permet pas la création de surface contenant des arêtes coplanaires. Alors, afin de modéliser parfaitement la fissure, le problème a été contourné par une subdivision de la dent fissurée (Figure 3.11).



Figure 3.11 *Sous-structuration des surfaces pour la MEF.*

3.4.1.2 Éléments singuliers

Les polynômes réguliers utilisés dans l'intégration des éléments ne peuvent décrire le champ de déplacements en bout de fissure variant en fonction de \sqrt{r} (éq. (1.9)). Il faut donc définir des éléments spéciaux contenant le comportement singulier. À cet effet, quelques types d'éléments sont disponibles. Certains englobent totalement le bout de la fissure où le polynôme d'interpolation induit la singularité requise (Byskov, 1970) et d'autres sont plutôt construits directement à partir des séries de Williams incluant K_I et K_{II} (Holston, 1976). Cependant, pour les deux cas, il y a incompatibilité à l'interface des éléments singuliers et réguliers, ce qui nuit à la convergence de la solution. De plus, l'implantation de ces types d'éléments peut être laborieuse. Par contre, Barsoum (1976) a démontré qu'en déplaçant simplement le nœud central d'un élément isoparamétrique d'ordre 2 au quart de la longueur de son côté, près du bout de la fissure, il était possible de reproduire numériquement la singularité \sqrt{r} . Ce type d'éléments est appelé « Élément Quart de Point » (EQP) ou « Quarter Point Element ». Pour les éléments quadrilatères, il existe deux techniques de transformation. La première consiste à déplacer les nœuds centraux de deux arêtes adjacentes vers le point de singularité comme montré à la Figure 3.12.

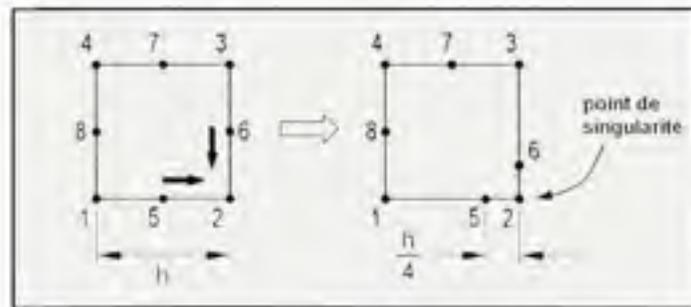


Figure 3.12 Construction d'un élément singulier quart de point quadrilatéral.

Cependant, le champ de déplacements résultant de cette transformation, n'aura la singularité \sqrt{r} que sur les arêtes où les nœuds ont été déplacés (Anderson, 2005). Pour obtenir une variation des déplacements en \sqrt{r} sur tout l'élément, il faut le déformer de sorte à faire coïncider les 3 nœuds d'une même arête et ainsi former un triangle (Figure 3.13). Cela, est préférable pour le calcul des FIC nécessitant la solution à l'intérieur du domaine.

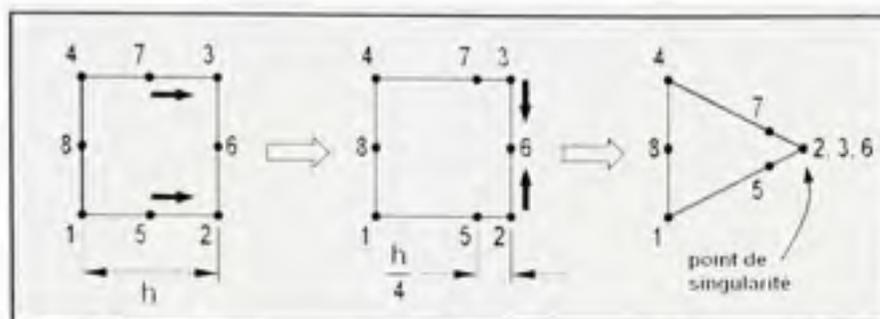


Figure 3.13 Construction d'un élément singulier quart de point triangulaire.

Selon le choix de transformation, deux types de discrétisation en bout de fissure sont possibles. La première utilise les EQP de forme quadrilatère (Figure 3.14a) et permet le maintien de la structuration du maillage, mais limite à 4, le nombre d'éléments pouvant être reliés au bout de la fissure. Néanmoins, Sfakiotakis et Anifantis (2002) ont appliqué cette technique à l'analyse des FIC d'un engrenage cylindrique droit et ont obtenu une convergence des résultats pour un rapport $h_{EQP}/a \leq 0.02$ où « h_{EQP} » est la longueur de l'élément singulier et « a » est celle de la fissure.

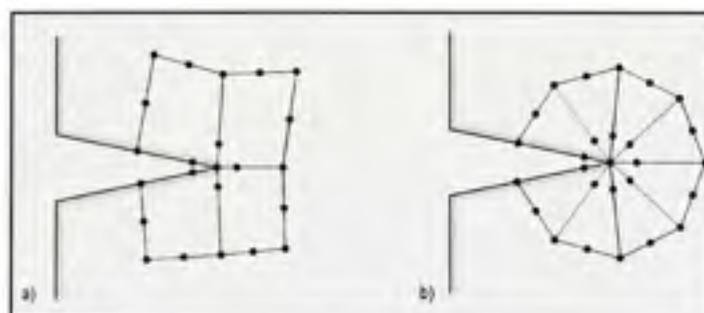


Figure 3.14 Types de discrétisation en bout de fissure.

La deuxième technique, consiste à définir une « rosette » d'éléments EQP triangulaires ayant tous leurs nœuds de singularité liés au bout de fissure (Figure 3.14b). De cette façon, un plus grand nombre d'éléments peuvent être associés directement à la modélisation singulière. Cette méthode a été utilisée pour la majeure partie des études présentées au Tableau 1.2. Afin de pouvoir utiliser l'ensemble des techniques de calcul des FIC présentées à la section 3.1, ce sont les éléments EQP triangulaires qui ont été privilégiés dans ce projet.

Tel qu'indiqué plus tôt, pour tirer profit de la singularité des éléments EQP, il est préférable d'appliquer la méthode d'extrapolation des déplacements ou des contraintes, uniquement sur ces éléments.

3.4.1.3 Discrétisation de la géométrie fissurée

À partir de la stratégie de discrétisation présentée au point 3.4.1.1 et celle du bout de fissure par des éléments singuliers, une étude de convergence a été menée (annexe III) afin de définir les paramètres du maillage permettant d'atteindre des résultats fiables. Bien que les éléments singuliers présentent des avantages marqués sur les éléments réguliers, la modélisation des fissures par ces derniers a tout de même été testée. En tout, six maillages caractérisés par le type et la taille (h_t) des éléments en bout de fissure, ont été évalués selon différentes configurations. La Figure 3.15 montre l'évolution de K_I et K_{II} normalisés en fonction de la position relative par rapport au bout de la fissure (r/a) pour une des configurations testées (c.-à-d. $a = 2.06$ mm, voir annexe III). K_I^* et K_{II}^* ont été évalués par extrapolation des déplacements en 2 points (éq.(3.2)) à partir des résultats du maillage 6 (c.-à-d. M6) jugés a priori suffisamment précis.

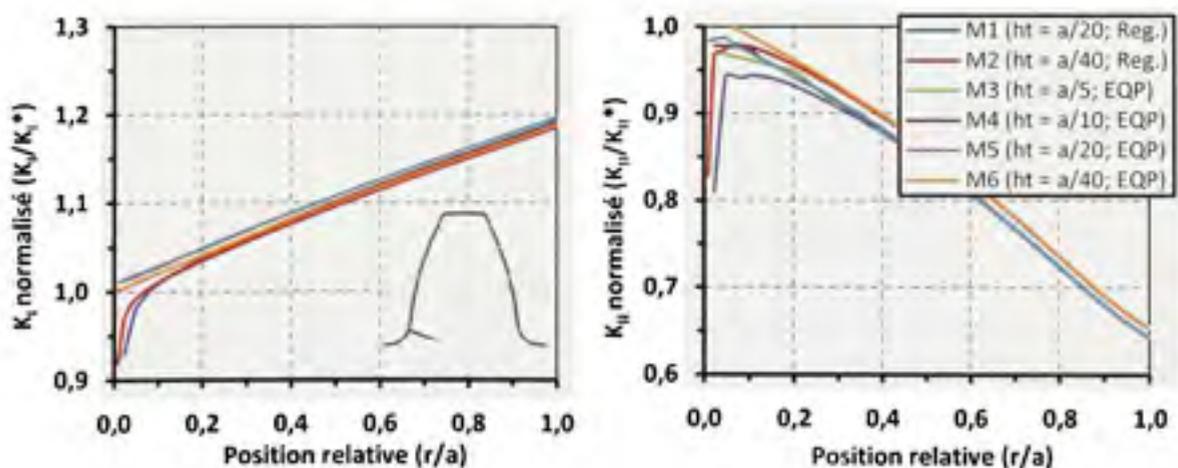


Figure 3.15 K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (MEF).

Ces résultats montrent qu'il est possible d'obtenir des solutions qui convergent avec les éléments réguliers, mais un maillage très fin est requis et le calcul des FIC n'est pas simple. En effet, puisque les éléments réguliers ne peuvent simuler la singularité en bout de fissure, les méthodes d'extrapolations utilisant la loi des moindres carrés (section 3.1.1.4) ou l'intégrale J (section 3.1.3) deviennent indispensables à l'évaluation des FIC, car la solution diverge au point de singularité, comme le montre la Figure 3.15. Or, la section 3.1 a montré que l'application de ces techniques est beaucoup plus complexe que le simple calcul en 2 points (éq.(3.2)), utilisé avec les éléments singuliers (c.-à-d. les EQP).

La discrétisation des fissures par les EQP a donc été adoptée pour son efficacité et sa facilité d'application. Le type de maillage retenu est illustré à la Figure 3.16, il correspond au maillage 5 de la Figure 3.15. Ce dernier nécessite seulement 7 à 10 éléments pour la définition des dents auxiliaires, une dizaine d'éléments pour le corps de la roue et une taille d'élément équivalente au cinquième de la longueur du congé pour la discrétisation de la dent fissurée. Aussi, la taille des EQP a été fixée à 5% de la longueur de la fissure. Un raffinement graduel du maillage est aussi nécessaire près du point de singularité afin d'éviter les changements brusques entre les éléments réguliers et singuliers. Ce maillage est beaucoup plus grossier que celui de la géométrie non fissurée en raison du fait que la région d'analyse est maintenant ponctuelle.

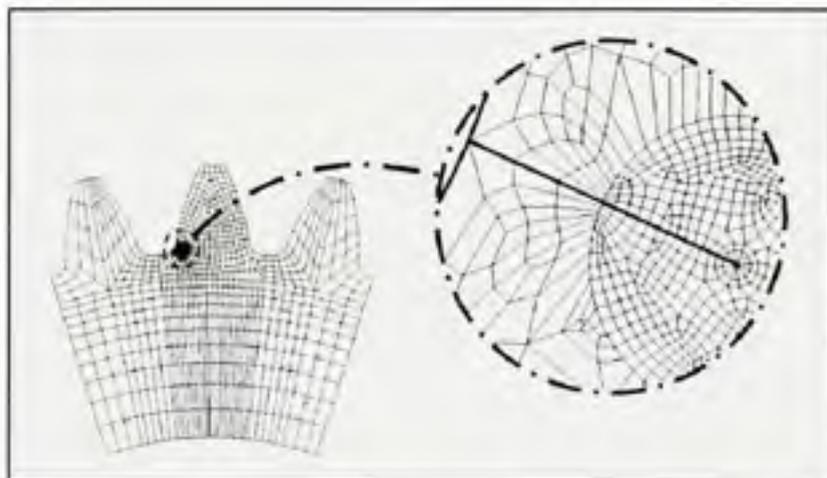


Figure 3.16 *Maillage d'éléments finis pour une roue fissurée.*

3.4.2 Modèle MEIF

L'application de la MEIF à la MREL n'est pas directe et comporte quelques difficultés. En considérant qu'une fissure se définit par deux surfaces coplanaires dont les normales respectives sont de sens opposés, Cruse (1988) a démontré que cela conduit à une dégénérescence de la MEIF où, pour un nœud situé sur la fissure, deux inconnues en déplacement apparaissent : le déplacement du nœud u_i et l'ouverture des lèvres Δu_i . Pour mieux saisir ce concept, la démonstration de la dégénérescence de la MEIF est présentée en annexe I. Pour une configuration symétrique, le problème peut aisément être contourné en ne modélisant qu'une seule lèvre de la fissure. Par contre, l'asymétrie du cas des engrenages, ne permet pas cette simplification et d'autres alternatives doivent être envisagées.

Tel qu'annoncé plus tôt, l'un des objectifs majeurs de ce travail, est d'élaborer une nouvelle technique de modélisation des fissures (c.-à-d. la méthode des séparations finies (δ)), permettant d'éviter cette dégénérescence. Pour mieux saisir la pertinence d'un tel développement, cette section passe en revue les méthodes actuelles de modélisation des fissures par la MEIF, pour ensuite présenter l'approche proposée et enfin comparer les diverses techniques entre elles, selon différents aspects.

3.4.2.1 Méthode de sous-structuration du domaine

Depuis sa première application aux cas asymétriques par Blandford et al. (1981), cette technique est l'une des plus utilisées dans l'analyse des fissures par la MEIF (Aliabadi, 1997). Cette méthode consiste à séparer la géométrie fissurée en deux sous-domaines (Ω_i) contenant chacun une lèvre de la fissure (voir Figure 3.17). Les sous-domaines sont liés entre eux par une interface traversant Ω et passant par le bout de la fissure. Il est important de mentionner que les nœuds de chaque sous-domaine associés à l'interface sont couplés par une compatibilité des déplacements et un équilibre des tractions. Par conséquent, u_i et t_i à l'interface sont tous deux des inconnues du problème.

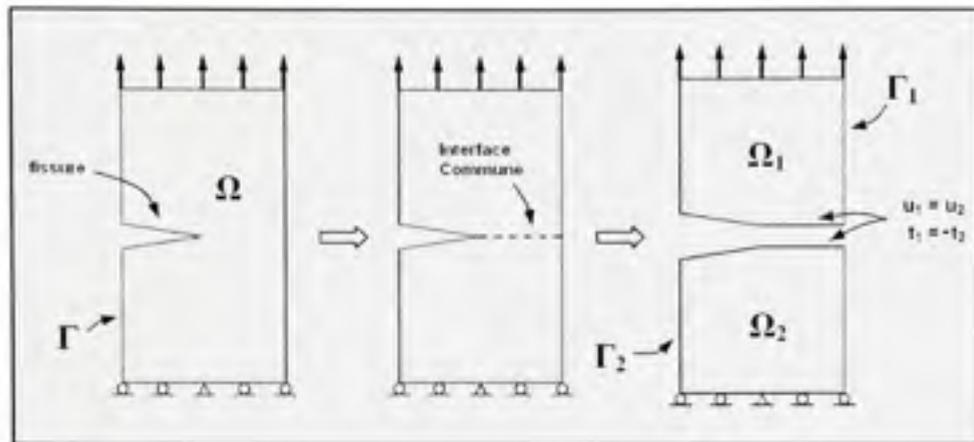


Figure 3.17 Méthode de sous-structuration du domaine.

En adoptant la méthodologie présentée par Kane (1994), le traitement d'un problème sous-structuré en deux domaines conduit à un système d'équations global ayant la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [A_{11}^1] & [A_{12}^1] & -[B_{12}^1] & [0] \\ [0] & [A_{12}^2] & [B_{12}^2] & [A_{22}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{11}^1\} \\ \{u_{12}^1\} \\ \{t_{12}^1\} \\ \{u_{22}^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{11}^1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [B_{22}^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t_{11}^1\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{t_{22}^2\} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Dans cette formulation, les exposants indiquent le numéro du sous-domaine pour lequel est défini la matrice ou le vecteur et les indices précisent s'il s'agit de termes exclusifs au sous-domaine ou s'ils sont associés à l'interface. Par exemple, la matrice $[A_{11}^1]$ contient les coefficients de traction T_{ij} des nœuds appartenant seulement à Ω_1 . Tandis que la matrice $[B_{12}^2]$ renferme plutôt les coefficients de déplacement U_{ij} des nœuds de Ω_2 situés sur l'interface. Les déplacements $\{u_{12}^1\}$ et les tractions $\{t_{12}^1\}$ de l'interface sont aussi valables pour Ω_2 en raison du couplage, mais les tractions sont cependant en sens opposé pour Ω_2 . Cette méthode offre l'avantage d'être relativement simple, en ce sens où elle est directement applicable avec la formulation standard de la MEIF. De ce fait, la sous-structuration est très fiable et permet d'analyser pratiquement tous les types de configuration de fissure.

Cette technique a été critiquée par certains (Chang et Mear, 1995; Cruse, 1988) du fait que la sélection arbitraire de l'interface et l'interpolation de la solution selon celle-ci peuvent avoir un effet dégradant sur la précision de la méthode. Cependant, aucun d'entre eux n'a vraiment prouvé ce phénomène, d'autant plus que Smith (1988) a réussi, avec cette méthode, à obtenir des valeurs de K_I et K_{II} avec moins de 1% d'erreur. Aliabadi (1997) dénote plutôt que la sous-structuration nécessite plus d'équations que nécessaire. Pourtant, de par l'expression (3.28) il serait possible de tirer profit des blocs [0] avec un « solveur » efficace (Kane, 1994). De plus, le calcul des coefficients U_{ij} et T_{ij} de chaque point de collocation P est réalisé sur un plus petit nombre d'éléments.

Par contre, la méthode est désavantageuse à l'analyse en propagation en ce sens où elle nécessite l'implantation de la génération automatique de l'interface de séparation, qui pour des géométries complexes peut être difficile à estimer. De plus, Chang et Mear (1995) soulignent qu'il pourrait devenir ardu d'utiliser la méthode pour les cas de fissures multiples. Aussi, comme le montre l'équation (3.28), la mise en œuvre de la sous-structuration nécessite un assemblage particulier des matrices, qui peut être complexe à implanter à un code d'éléments de frontières. Enfin, pour le calcul de la solution intérieure au domaine, nécessaire à l'application de l'intégrale J , il peut être fastidieux de définir le domaine d'appartenance de chaque point de calcul interne.

3.4.2.2 Méthode de la discontinuité des déplacements

Cette autre méthode est une approche indirecte, introduite par Crouch (1976) sous le nom de « Displacement Discontinuity Method » (DDM), et permet d'éviter la dégénérescence mathématique pour des surfaces coplanaires. La technique consiste à générer une équation intégrale indirecte sur la fissure en la considérant comme une seule surface (Γ_f) et sur laquelle, l'écartement des lèvres (Δu) (i.e discontinuité des déplacements) est l'inconnue. Plus précisément, il s'agit de définir une formulation intégrale en traction pour les points de collocation (P) sur la fissure (eq.(3.29)). Celle-ci permet de relier les efforts en tractions (t^f) aux lèvres de la fissure à la discontinuité des déplacements (Δu). Pour obtenir la solution sur

le contour externe (Γ), il faut de coupler l'équation en traction à l'identité de somigliana en déplacement sous sa forme dégénérée, développée en annexe I (éq.(3.30)). Il est à noter que les équations (3.29) et (3.30) ne sont valables que pour un chargement symétrique des lèvres de la fissure et que Δu est nul sur le front de la fissure. Aussi $n_i(P)$ est une composante du vecteur normal au point P .

$$t_j^f(P) = n_i(P) \cdot \left[\int_{\Gamma} D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma_f} S_{ijk}(P, Q) \Delta u_k(Q) d\Gamma_f \right] \quad (3.29)$$

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma_f} T_{ij}(P, Q) \Delta u_j(Q) d\Gamma_f \quad (3.30)$$

La Figure 3.18 schématise les concepts que suggèrent les relations (3.29) et (3.30). Donc, en résumé, il faut appliquer la formulation en traction (éq.(3.29)) pour tous points de collocation appartenant à la fissure ($P \in \Gamma_f$) et la formulation en déplacement (éq.(3.30)) est appliquée aux points du contour externe ($P \in \Gamma$).

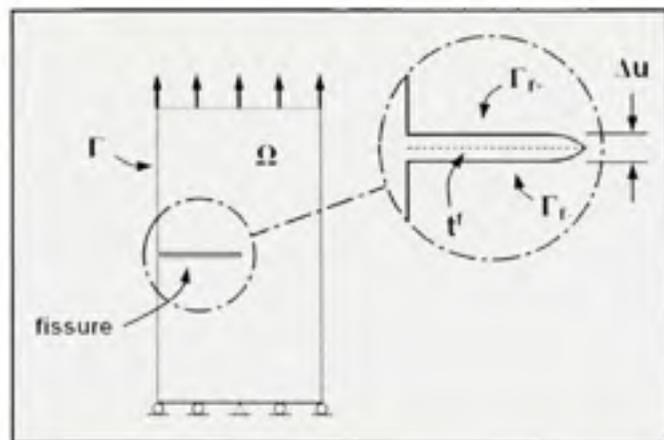


Figure 3.18 *Méthode de discontinuité des déplacements.*

Bien que la DDM permette la modélisation du problème en un seul domaine, l'hypersingularité de l'intégrale en traction introduite par le terme $1/r^2$ du tenseur S_{kij}

(*éq.(3.21)*) pose certaines difficultés de calcul. En effet, l'intégrale sur Γ_I contenant S_{kj} est impropre lorsque P appartient à $d\Gamma_I$. Il est cependant possible de traiter l'intégrale par parties finies de Hadamard où d'appliquer une intégration par partie afin de réduire l'ordre de la singularité et retrouver les valeurs principales de Cauchy (Bonnet, 1995). Néanmoins, les deux techniques nécessitent une continuité C^1 des gradients de Δu et aussi du vecteur normal (\vec{n}) au point de collocation. Cette condition peut être assurée par l'utilisation d'éléments quadratiques et discontinus¹⁴ pour la discrétisation de la fissure (Kane, 1994).

Comparativement à la sous-structuration, la DDM permet de traiter les structures fissurées avec un seul domaine (Ω), tout en fournissant directement la valeur de l'écartement des lèvres (Δu), souvent utile au calcul des FIC. Cependant, les deux formulations nécessaires à la DDM compliquent beaucoup son application, surtout du fait que la singularité de l'équation en traction impose un traitement spécial des intégrales et le recours à des éléments discontinus. Aussi, telle que présentée, la DDM ne permet pas le chargement asymétrique des lèvres de la fissure, ce qui confère un champ d'application restreint à la méthode, contrairement à la sous-structuration.

3.4.2.3 Méthode de la formulation mixte

Mieux connue sous le nom de « Dual Boundary Element Method » (DBEM), cette technique, développée par Portela, Aliabadi et Rooke (1992), permet aussi la modélisation des surfaces coplanaires dans un même domaine (Ω). L'essentiel de la méthode consiste à appliquer une formulation en déplacement (*éq.(3.31)*) aux points de collocation d'une des lèvres de la fissure (Γ_{I_1}) et une formulation en traction (*éq.(3.32)*) aux points de l'autre lèvre (Γ_{I_2}). La formulation en déplacement est aussi appliquée au reste du contour (Γ).

$$u_i(P) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_{I_1} \cup \Gamma_{I_2}} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma \cup \Gamma_{I_1} \cup \Gamma_{I_2}} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (3.31)$$

¹⁴ Les éléments discontinus sont des éléments dont les nœuds aux extrémités sont positionnés à l'intérieur de ce dernier. De cette façon, les éléments peuvent être traités individuellement lors de l'assemblage.

$$t_j(P) = n_j(P) \cdot \left(\int_{\Gamma + \Gamma_{f^+} + \Gamma_{f^-}} D_{ijk}(P, Q) t_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma + \Gamma_{f^+} + \Gamma_{f^-}} S_{ijk}(P, Q) u_k(Q) d\Gamma \right) \quad (3.32)$$

Comme pour la DDM, l'équation en traction (éq.(3.32)) est aussi hypersingulière lorsque l'intégration est effectuée sur Γ_{f^+} et Γ_{f^-} , ce qui impose donc, les mêmes contraintes (i.e continuité C^1 sur du_i/dx_i et t_i). Pour faciliter l'intégration et respecter les conditions d'intégrabilité, Portela et al. (1992) ont utilisé des éléments discontinus d'ordre 2 pour la discrétisation de Γ_{f^+} et Γ_{f^-} et des éléments semi-discontinus¹⁵ ont été employés sur Γ , aux points d'intersection entre la fissure et le contour, empêchant l'application des deux formulations pour un même point (Figure 3.19).

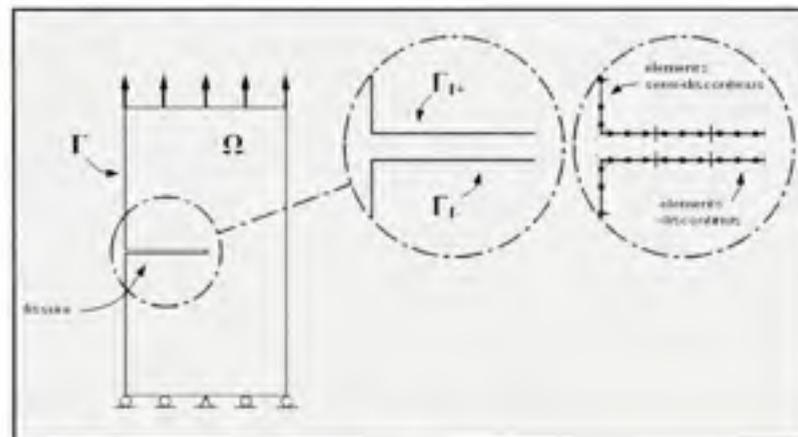


Figure 3.19 Méthode de la formulation mixte.

Une difficulté importante de la DBEM intervient pour l'intégration sur Γ_{f^+} et Γ_{f^-} où deux types de singularité sont rencontrées quand $P \rightarrow Q$: il y a la forte singularité imposée par le tenseur T_{ij} dans l'éq.(3.31) et l'hypersingularité de S_{ijk} de l'éq.(3.32)¹⁶. Ces situations conduisent respectivement aux intégrales impropres représentées en valeurs principales de Cauchy et en parties finies de Hadamard. Avec la DBEM, ces intégrales ne peuvent être

¹⁵ Similairement aux éléments discontinus, ceux semi-discontinus n'ont qu'un seul nœud de positionné à une extrémité.

¹⁶ La singularité imposée par D_{ijk} de l'éq.(3.32) poserait aussi un problème d'intégration. Mais dans le cas où les tractions sont nulles aux des lèvres de la fissure, l'intégrale incluant le tenseur de déformation s'annule sur Γ_{f^+} et Γ_{f^-} .

traitées indirectement, puisque Γ_{f^+} et Γ_{f^-} sont confondus. Pour un point P situé sur Γ_{f^+} ou Γ_{f^-} , il y a deux situations singulières : lorsque $P \rightarrow Q$ pour $Q \in \Gamma_{f^+}$ et lorsque $P \rightarrow Q$ pour $Q \in \Gamma_{f^-}$. De ce fait, il faut aborder directement les intégrales singulières. Portela et al. (1992) ont réalisé cette tâche en appliquant le principe de soustraction de la singularité (voir section 3.1.4) où le terme singulier de l'intégrale a été estimé par une série de Taylor (Aliabadi, Hall et Phemister, 1985).

La DBEM présente plusieurs similitudes avec la DDM, par contre, en appliquant une formulation différente à chacune des lèvres de la fissure, celles-ci deviennent indépendantes et un chargement asymétrique de la fissure peut donc être envisagé. Cependant, outre le fait que la formulation mixte occasionne sensiblement les mêmes contraintes d'application que la DDM, la DBEM présente un désavantage majeur : les intégrales singulières sur les lèvres de la fissure doivent être traitées directement. Cet aspect engendre plusieurs problèmes de calcul requérant des méthodes assez complexes (ex. : soustraction de la singularité) ne garantissant pas nécessairement la précision de la solution (ex. : approximation par séries de Taylor). De plus, l'utilisation des éléments discontinus et semi-discontinus cause une discontinuité de la solution qui peut compliquer l'analyse des résultats en post-traitement. Néanmoins, quelques applications de la DBEM ont démontré qu'elle pouvait fournir des résultats satisfaisants (Portela, Aliabadi et Rooke, 1992).

3.4.2.4 Méthode de séparation finie des lèvres de la fissure

La revue des différentes techniques de modélisation des fissures par la MEIF amène donc à la méthode de séparation finie des lèvres de la fissure proposée ici. Cette méthode cherche à répondre aux deux besoins suivants : 1 - traiter les problèmes de structures fissurées par un seul domaine (Ω) et 2 - utiliser une formulation simple correspondant à la forme standard de la MEIF (c.-à-d. formulation en déplacement éq.(1.32)). L'approche proposée consiste tout simplement à estimer la géométrie idéale d'une fissure (i.e surfaces coplanaires) en séparant les lèvres de celle-ci d'une valeur finie (δ) (Figure 3.20), évitant ainsi la dégénérescence de la MEIF.

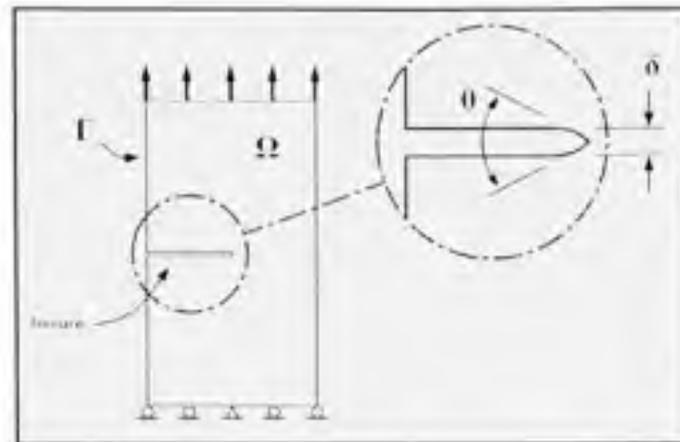


Figure 3.20 *Méthode de séparation finie des lèvres de la fissure.*

De cette façon, l'analyse peut être réalisée en un seul domaine (Ω), tout en appliquant la formulation usuelle de la MEIF (éq.(1.32)). Par contre, en faisant tendre δ vers une valeur nulle, l'intégration des tenseurs U_{ij} et T_{ij} deviendra presque singulière pour des points P et Q correspondants, positionnés respectivement sur chacune des lèvres de la fissure. Comme il l'a été démontré à la section 3.2.2.1.1, une telle situation engendrera une erreur d'intégration importante. Cependant, la méthode de subdivision des éléments, entrevue à la section 3.2.2.1.1, est la solution clé à ce problème et permettra, sans aucun doute, des valeurs d'écartement (δ) très petites sans pour autant compromettre la précision de la solution. Pour ce faire, une application efficace de la méthode de subdivision doit être élaborée, puisqu'à ce jour, la technique est encore quelque peu marginale et son développement ne semble pas être optimal (voir section 3.5.2.2).

L'idée de base de la méthode de séparation finie a déjà fait l'objet d'une étude par Cruse (1972) où ce dernier notait que ce type de modélisation introduisait artificiellement une concentration de contrainte finie en bout de fissure, contrairement à celle théoriquement infinie en fonction de $(1/\sqrt{r})$. Cruse affirme aussi que cette erreur de modélisation tend à disparaître lorsque l'angle inclus entre les éléments en bout de fissure (θ) tend vers 180° (Figure 3.20). Pour cette raison, l'auteur proposait une représentation ellipsoïde du bout de la fissure dont le rayon parallèle à l'axe de la fissure, devait être posé égale à δ .

Cependant, Cruse (1972) n'a pas réussi à obtenir des résultats concluants avec des erreurs sur K_I de l'ordre de 14%. En raison des piètres performances de la méthode, celle-ci fût abandonnée très rapidement par l'auteur. Depuis, elle semble être rejetée catégoriquement sur la base de ces résultats (Aliabadi, 1997; Mukhopadhyay, Maiti et Kakodkar, 2000; Yan, 2005) et n'a donc jamais été réanalysée. Par contre, il faut préciser que le modèle de Cruse était réalisé avec des éléments constants (c.-à-d. 1 nœud) et qu'au maximum, seulement 22 éléments ont été utilisés à la discrétisation des lèvres de la fissure. Il faut ajouter à cela, le fait qu'à l'époque, la MEIF n'était pas aussi développée qu'aujourd'hui (c.-à-d. éléments d'ordre supérieur, éléments singuliers, contrôle de l'erreur d'intégration, subdivision d'éléments, ...) de même que la précision des ordinateurs qui était, dans ces années, inférieure à celle produite par ceux d'aujourd'hui. En combinant tous ces facteurs, le portrait actuel du concept semble discutable puisque le modèle de Cruse (1972) est très loin des possibilités technologiques d'aujourd'hui.

Malgré les mauvaises performances de l'application du concept d'écartement des lèvres de la fissure de Cruse (1972), l'idée offre un potentiel très prometteur. En effet, la simplicité de la méthode permet le traitement des fissures par la MEIF de façon efficace alliant la fiabilité et la robustesse des techniques d'application de la formulation de la MEIF en déplacement (éq.(1.32), tout en bénéficiant des avantages d'une modélisation en un seul domaine (Ω). Le caractère explicite de la méthode confère aussi une meilleure accessibilité à la MEIF en MREL, celle-ci étant souvent rejetée (Anderson, 2005; Liebowitz et al., 1995), possiblement en raison des complications liées au traitement des fissures. Il ne fait alors aucun doute que le concept de séparation finie des lèvres de la fissure mérite d'être repensé et développé à nouveau.

3.4.2.5 Comparaison des techniques de modélisation

Afin de démontrer clairement les avantages de l'approche proposée, les méthodes ont été comparées entre elles selon divers critères (Tableau 3.1). Au niveau de la simplicité de formulation, la méthode de séparation finie (δ), comme la sous-structuration, est avantagée

avec une formulation uniquement en déplacement (u). Ainsi, les erreurs liées à la singularité de la formulation, d'un ordre inférieur à la DDM et la DBEM, seront plus facilement contrôlées qu'avec les formulations en traction (éq.(3.29) et éq.(3.32)) incluses dans les autres méthodes.

Tableau 3.1

Comparaison des méthodes de modélisation des fissures par la MEIF

Caractéristiques	Types de modélisation			
	Sous-Struct.	DDM	DBEM	δ
Formulation MEIF	u	$u + t$	$u + t$	u
Solution Γ_f	$u_i + t_i$	$\Delta u_i + t_i$	$u_i + t_i$	$u_i + t_i$
Singularité	r^{-1}	r^{-2}	r^{-2}	r^{-1}
Intégration Sing.	Indirecte	Indirecte	Directe	Indirecte
Nombre de Ω	$\Omega_i + \Omega_f$	Ω	Ω	Ω
Nombre de Γ	$\Gamma + \Gamma_{i*} + \Gamma_{f*} + 2\Gamma_{inter}$	$\Gamma + \Gamma_f$	$\Gamma + \Gamma_{i*} + \Gamma_{f*}$	$\Gamma + \Gamma_{i*} + \Gamma_{f*}$
Discrétisation Γ_f	Elem. Continus	Elem. Discontinus	Elem. Discontinus	Elem. Continus
Implantation	Modérée	Complexe	Complexe	Simple
Fiabilité	Élevée	Incertaine	Incertaine	?

Bien que la DDM fournisse directement l'écartement de la fissure (Δu_i) nécessaire au calcul des FIC, le déplacement indépendant des lèvres n'est pas décrit, ce qui est peu commode pour l'étude des phénomènes de contact ou la modélisation d'un chargement asymétrique des lèvres. Par conséquent, la sous-structuration, la DBEM et la séparation finie semblent préférables de par leur caractère général, d'autant plus qu'il est très facile d'évaluer Δu_i à partir de la solution u_i . Par contre, les éléments discontinus imposés par la formulation mixte (c.-à-d. DBEM) génèrent une discontinuité de la solution, ce qui est évité avec la séparation finie et la sous-structuration où les fissures peuvent être discrétisées entièrement par des éléments continus. De plus, la discrétisation par éléments discontinus nécessite plus de nœuds, comparativement à un maillage équivalent utilisant les éléments continus.

Du point de vue du nombre de domaines (Ω), même si la méthode de sous-structuration permet certains gains en temps de calcul (c.-à-d. blocs nuls [0] et moins de points de collocation par élément), la section 3.4.2.1 a montré que la définition de l'interface (Γ_{interf}) présentait plusieurs obstacles à une implantation efficace et rapide de la méthode. La DDM, la DBEM et la méthode de séparation finie s'avèrent donc avantageuses sur ce point, où un seul domaine est nécessaire à la réalisation du modèle. Par ailleurs, même si la méthode de séparation finie impose une attention particulière à la modélisation du bout de la fissure et sur la valeur de δ , cela est minime en comparaison des efforts liés à l'implantation de la double formulation nécessaire à la DDM et la DBEM. En fait, d'après le Tableau 3.1, seule la méthode de séparation finie permet une application directe de la MEIF telle que présentée au début de la section 3.2.2.

Ces comparaisons viennent appuyer fortement les recommandations énoncées à la section 3.4.2.4. En effet, les dernières observations ont mis en évidence la supériorité de la méthode de séparation finie, qui se démarque surtout par sa simplicité de mise en œuvre, mais aussi par ses avantages marqués sur la majorité des critères du Tableau 3.1. En raison du grand potentiel de la méthode, celle-ci sera donc redéveloppée entièrement à la section 3.5 selon l'approche proposée à la section 3.4.2.4. Afin de porter un jugement significatif sur les résultats qui seront obtenus, la sous-structuration des domaines sera aussi intégrée au code d'éléments de frontières à titre de méthode comparative.

3.4.2.6 Discretisation de la géométrie fissurée par la sous-structuration

De manière similaire à la MEF, les paramètres de discrétisation pour la géométrie d'une roue d'engrenage fissurée, modélisée par la MEIF et la sous-structuration, ont été définis suite à une étude de convergence présentée en annexe III. Cependant, la méthode de sous-structuration nécessite en premier lieu, la définition d'une interface liant les sous-domaines.

3.4.2.6.1 Définition de l'interface

Afin d'automatiser la création de l'interface en vue de l'analyse en propagation, celle-ci a été définie selon quelques critères précis. Principalement, une fonction d'interpolation cubique a été utilisée pour définir l'interface, puisque ce type de courbe permet la définition de conditions géométriques aux extrémités. Entre autres, le modèle impose la condition de tangence à la fissure et la perpendicularité au contour extérieur (Γ) à chacune des extrémités de l'interface (Figure 3.21).

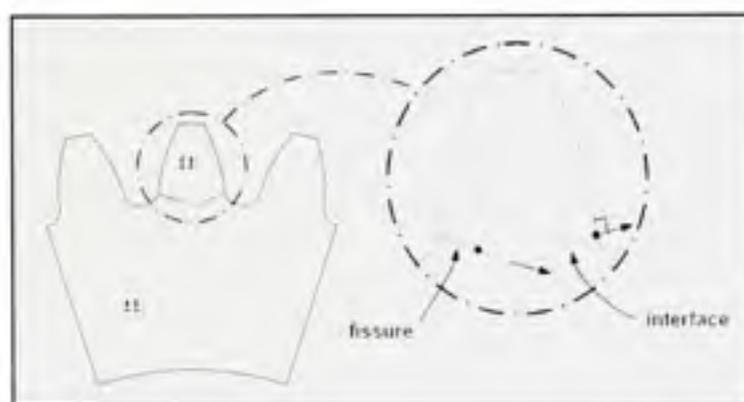


Figure 3.21 Configuration de l'interface pour la méthode de sous-structuration.

Aussi, le point d'intersection de l'interface avec Γ , a été choisi de sorte à obtenir un segment le plus court et le plus droit possible. Par contre, aucune analyse n'a été réalisée afin de déterminer si cette configuration est préférable à tout autre type d'interface. Néanmoins, il est certain que l'approche présentée minimise les effets de discontinuité ou d'autres phénomènes singuliers qui pourraient détériorer la qualité de la solution. Aussi, les conditions limites de l'interface étant toujours les mêmes, cela contribuera à conserver la fiabilité de la solution tout au long des analyses en propagation.

3.4.2.6.2 Éléments singuliers

La MEIF ne permet pas, non plus, de modéliser la singularité des déplacements \sqrt{r} en bout de fissure. Il faut donc, également, introduire cette singularité numériquement. Pour cette

tâche, les éléments EQP sont aussi largement utilisés avec la MEIF (Mukhopadhyay, Maiti et Kakodkar, 2000). En 2D, les éléments EQP pour la MEIF sont simplement générés par le déplacement du nœud central au quart de la longueur d'un élément d'ordre 2 (Figure 3.22).

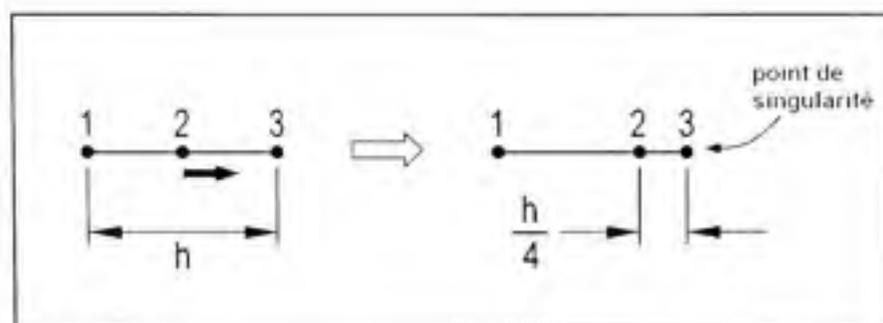


Figure 3.22 Construction d'un élément singulier quart de point unidimensionnel.

Cette modification assure la singularité en \sqrt{r} des déplacements. Cependant, la méthode de sous-structuration implique la modélisation du champ de traction singulier à l'intérieur du domaine (c.-à-d. sur l'interface). Or, pour les tractions, la singularité est plutôt en $1/\sqrt{r}$ (Blandford, Ingraffea et Liggett, 1981). Alors, pour qu'un élément EQP puisse décrire correctement cette variation singulière, il faut multiplier les fonctions d'interpolation de chaque nœud de l'élément par $\sqrt{h/r}$ lors de l'intégration des coefficients U_{ij} , où « h » est la longueur de l'élément EQP et « r » la distance du point de calcul au bout de fissure (Tan et Wang, 2003). Ces éléments sont appelés « Élément de Traction Quart de Point » (ETQP) ou « Traction Quarter Point Element ».

3.4.2.6.3 Paramètres de discrétisation

L'étude de convergence qui a conduit au maillage approprié d'une roue d'engrenage fissurée par la MEIF et la sous-structuration est présentée en annexe III. L'étude a aussi montré que les éléments EQP permettent d'obtenir efficacement une solution convergente. Par contre, avec la sous-structuration, les EQP n'arrivent pas à définir parfaitement la singularité \sqrt{r} en bout de fissure où la solution diverge quelque peu de la tendance linéaire pour les nœuds des éléments singuliers. La Figure 3.23 illustre bien ce phénomène où les valeurs normalisées de K_I et K_{II} des six maillages testés, sont tracées en fonction de la

position « r/a » pour une configuration identique à celle de la Figure 3.15. K_I^* et K_{II}^* ont été évalués par extrapolation des déplacements avec le calcul en 2 points (éq.(3.2)) et la solution du maillage 6 (M6).

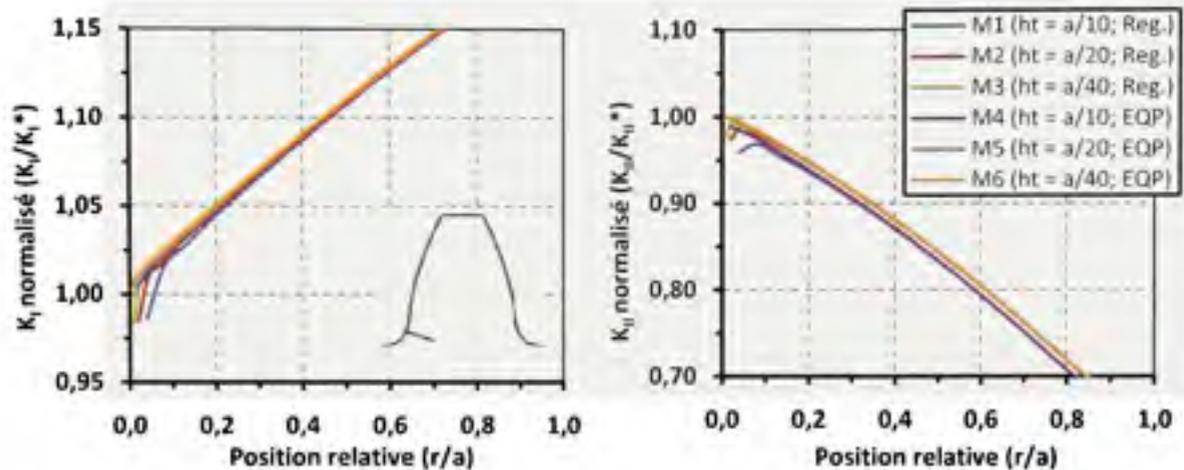


Figure 3.23 K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (MEIF).
(Méthode de sous-structuration avec éléments réguliers et singuliers)

Le comportement divergent des EQP peut également être observé dans les travaux de Hildenbrand et Kuhn (1993). Il est à noter que cette variation n'est pas très importante (ex. : 3-4%) et qu'elle tend à disparaître avec l'augmentation de la taille des éléments (ex. : $h/a \geq 0.2$). Selon Blandford et al. (1981) il est cependant préférable de maintenir les rapports h/a en bout de fissure relativement petit afin de conserver la validité de la modélisation singulière du champ de contraintes décrit par l'éq.(1.8). Néanmoins, la Figure 3.23 montre clairement que les EQP sont préférables aux éléments réguliers pour lesquels la zone divergente est plus étendue.

Alors, en fonction des résultats obtenus lors de l'étude de convergence et selon les observations précédentes, le niveau de discrétisation suivant a été adopté (Figure 3.24) : soit un rapport h/a de 0.05 en bout de fissure et de 0.1 au début. Le profil en développante de cercle et le congé de la dent principale ont été subdivisés en 10 éléments, tandis que les profils et les congés des dents adjacentes comportent 7 et 5 éléments respectivement. Le

reste du maillage est identique à celui de la géométrie non fissurée (voir section 3.3.2.2). Aussi, tous les éléments du maillage sont quadratiques (c.-à-d. 3 nœuds).

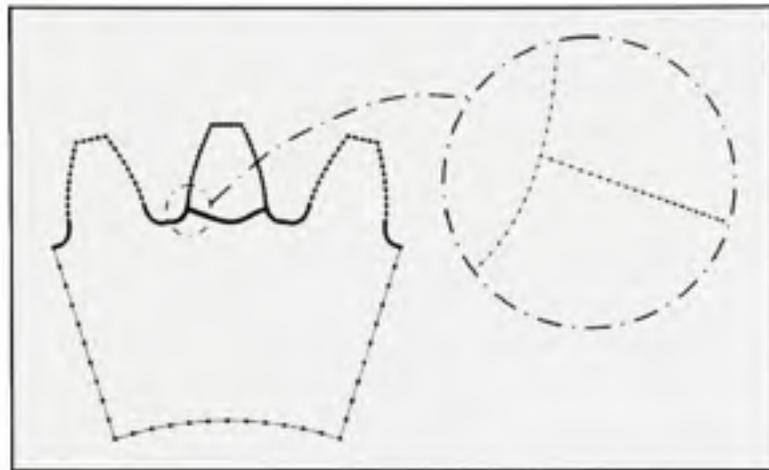


Figure 3.24 *Maillage d'éléments frontières par sous-structuration d'une roue fissurée.*

3.5 Application de la méthode de séparation finie des lèvres de la fissure

Cette section présente le développement complet de la modélisation des fissures par la méthode de séparation finie des lèvres.

3.5.1 Modélisation de la fissure

Avant d'appliquer directement la méthode, il faut préalablement définir selon quelle géométrie de base sera modélisée la fissure. Tel que mentionné à la section 3.4.2.4, Cruse (1972) a suggéré de représenter la géométrie du bout de la fissure par une forme ellipsoïde permettant de minimiser la concentration de contrainte induite par la modélisation. Par contre, la séparation des lèvres (δ) imposée par Cruse était assez importante (0.08a). Par conséquent, deux configurations seront évaluées. La première sera conforme aux recommandations apportées par Cruse (Figure 3.25a). La seconde, plus simple, consistera à définir le bout de la fissure uniquement par les éléments rattachés à celui-ci, formant ainsi une pointe (Figure 3.25b).

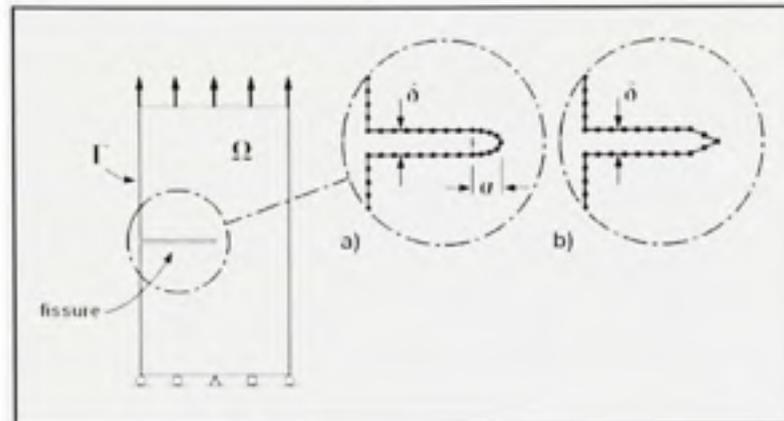


Figure 3.25 Modélisation du bout de fissure en ellipse (a) et en pointe (b).

3.5.2 Intégration presque singulière

La seule difficulté liée à l'application de la méthode de séparation finie est la presque singularité de l'équation intégrale pour les points de collocation situés sur les lèvres de la fissure, lorsque l'élément d'intégration est sur la lèvre opposée. En effet, cette situation, illustrée par la Figure 3.26, engendre une singularité lorsque r_{\min} tend vers 0 (c.-à-d. $\delta \rightarrow 0$) pour la formulation en déplacement (éq.(1.32)).

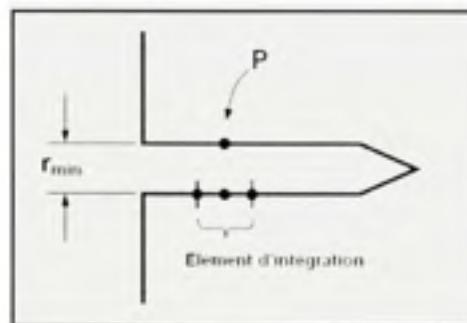


Figure 3.26 Situation d'intégration presque singulière.

Tel que décrit à la section 3.2.2.1.1, cette situation engendre d'importantes erreurs d'intégration qui ont pour conséquence de fausser la solution. Il est cependant possible de minimiser ces erreurs par différentes techniques.

3.5.2.1 Augmentation du nombre de points de Gauss

Une méthode très simple, consiste à augmenter le nombre de points de Gauss lors de l'intégration numérique en fonction d'un critère comme celui de l'expression (3.22). Cependant, le rapport « h/r » atteindra des valeurs très importantes pour la situation décrite à la Figure 3.26, impliquant donc un nombre élevé de points (m). Par exemple, pour une erreur « e » fixée à 0.0001, une taille d'élément « h » de 0.1mm et une valeur de δ de 0.001mm, le nombre de points de Gauss nécessaires serait de 67, ce qui est largement supérieur au nombre maximal, habituellement admis par les auteurs. Une alternative, est alors de définir une taille d'élément appropriée, qui par exemple serait de 0.02 mm pour $m = 20$ pts. Par contre, cela conduit nécessairement vers des modèles lourds comptant un grand nombre de noeuds. Cette technique demeure donc limitée.

3.5.2.2 Subdivision des éléments

En réponse à l'inefficacité de la méthode précédente, la subdivision des éléments règle la majeure partie des problèmes mentionnés. Cette technique consiste à subdiviser l'élément d'intégration (Γ_e) en un nombre « n » de sous-éléments (Γ_e^i), dont la taille (h_i) est définie en fonction de l'équation (3.22). Par la suite, l'intégration est réalisée sur chacun de des Γ_e^i et la valeur totale de l'intégrale correspond à la sommation des sous intégrales éq.(3.33).

$$\int_{\Gamma_e} f(x) d\Gamma_e = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_e^i} f(x) d\Gamma_e^i \quad (3.33)$$

Gao et Davies (2001) ont proposé une procédure incluant toutes les étapes nécessaires à l'application de la méthode, où la taille maximale des sous-éléments (h_{\max}) est définie par l'équation (3.34) et est maintenue constante durant toute l'intégration de l'élément. Par contre, le nombre de points d'intégration varie sur chaque sous-élément.

$$h_{\max} = \frac{3}{8} r_{\min} \left(\frac{-10 \cdot m_{\max}}{\sqrt{\frac{2}{3} p + \frac{2}{5} \cdot \ln(e/2)}} - 1 \right)^{\frac{4}{3}} \quad (3.34)$$

La méthodologie de Gao et Davies, n'est cependant pas optimale pour l'application de la méthode de séparation finie des fissures. En effet, en reprenant le cas de la section 3.5.2.1, il faudrait 5 sous-éléments, mais en faisant simplement passer la valeur de δ à 0.0001mm, le nombre de sous-éléments passerait à 52. Ce nombre important peut augmenter considérablement le temps de traitement de l'intégration. Afin de minimiser le nombre de sous-éléments et ainsi préserver l'efficacité de la MEIF, il est proposé de faire varier la taille des sous-éléments (h_i) plutôt que le nombre de points d'intégration de Gauss (m). Voici les étapes de l'approche proposée :

- 1) Définir la taille de l'élément (h_e);
- 2) Calculer la distance minimale (r_{\min}) entre le point P et l'élément et retenir la position locale sur l'élément où r_{\min} est trouvée (ξ_{\min});
- 3) Définir le nombre de points de Gauss (m) requis avec l'équation (3.22);
- 4) Si m est supérieur au nombre de points maximal disponible (m_{\max}), calculer la taille maximale d'un élément (h_{\max}) pour m_{\max} (éq.(3.34)). Cette taille correspond à la taille du premier des sous-éléments (h_1);
- 5) Positionner le sous-élément de part et d'autre de la position ξ_{\min} . Si cette dernière est située à une des extrémités de l'élément, définir le sous-élément en partant de celle-ci;
- 6) Définir les sous-éléments suivants, en calculant r_{\min}^i à partir des extrémités du sous-élément précédent, puis en évaluant la longueur maximale de ceux-ci (h_{\max}^i) avec l'équation (3.34) pour $m = m_{\max}$. Faire cette étape jusqu'à la subdivision complète;
- 7) Effectuer l'intégration sur chaque sous-élément;
- 8) Additionner l'ensemble des intégrations pour obtenir la valeur de l'intégrale sur h_e .

Cette application de la subdivision, conduit à trois configurations possibles. La première (Figure 3.27a) et la deuxième (Figure 3.27b) sont obtenues lorsque la distance minimale

(r_{\min}), est trouvée à l'une des extrémités de l'élément (c.-à-d. $\xi_{\min} = -1$ ou 1). La troisième est rencontrée lorsque ξ_{\min} se situe à l'intérieur de l'élément (Figure 3.27c).

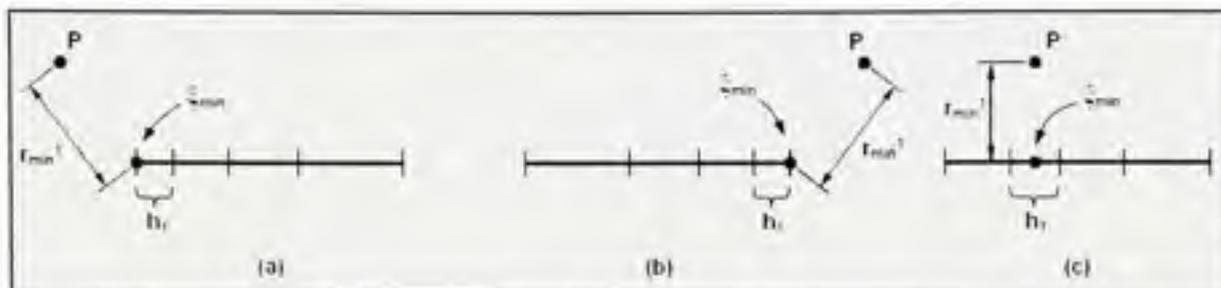


Figure 3.27 Configurations de subdivision des éléments.

En appliquant cette technique au cas précédent (i.e $e = 0.0001$, $h = 0.1\text{mm}$, $\delta = 0.0001\text{mm}$ et $m_{\max} = 20$), seulement 5 sous-éléments sont nécessaires pour ξ_{\min} située à l'intérieur de l'élément et 4 sous-éléments pour ξ_{\min} situé aux extrémités. Cela représente un nombre de subdivisions requis dix fois inférieur à celui obtenu par la procédure de Gao et Davies. La méthode présente aussi un avantage au niveau de la quantité totale de points d'intégration avec une diminution de 30% du nombre de points nécessaires pour le cas analysé.

Enfin, l'utilisation de cette méthode présente une difficulté supplémentaire quant à l'utilisation des éléments EQP. En effet, la subdivision directe supprime l'effet de la disposition des nœuds sur la variation du Jacobien qui, normalement, tend vers 0 au point de singularité. Provenant du fait qu'avec la subdivision, les nœuds virtuels sont distribués uniformément sur chaque sous-élément et ainsi, le Jacobien qui n'est plus défini selon l'élément global, mais bien sûr chaque sous-élément, ne présente plus le comportement singulier. Il devrait donc exister des façons de faire, particulières, pour un élément singulier.

3.5.2.3 Soustraction de la singularité

Une première alternative permettant l'utilisation des éléments EQP consiste à traiter l'intégrale presque singulière sur l'ensemble de l'élément et ainsi conserver la variation singulière du Jacobien. À cet effet, la technique d'intégration des fonctions fortement

singulières et hypersingulières de la DBEM offre une solution à ce problème (voir section 3.4.2.3). Il s'agit de soustraire la portion singulière ($f^s(x)$) de la fonction à intégrer ($f(x)$) (éq.(3.35)). Il est alors possible d'intégrer numériquement la partie régulière restante, alors que la portion singulière doit être traitée analytiquement (Aliabadi, 2002).

$$\int f(x)dx = \int_{\text{Num}} [f(x) - f^s(x)]dx + \int_{\text{Anal}} f^s(x)dx \quad (3.35)$$

Cette méthode nécessite une fonction $f^s(x)$ ayant la même singularité que $f(x)$, mais exprimée sous une forme plus simple permettant son intégration analytique. Pour le cas de la séparation finie, l'intégrale qui pose problème est celle contenant le tenseur T_{ij} , en admettant que les lèvres de la fissure sont des surfaces libres (i.e $t_i = 0$). L'intégrale singulière en fonction de la variable locale à l'élément (ξ) a donc la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 T_{ij}(P, Q(\xi)) \cdot \psi(\xi) \cdot J(\xi) d\xi \quad (3.36)$$

Où $J(\xi)$ est l'expression du Jacobien selon ξ et $\psi(\xi)$, celle des fonctions d'interpolation. L'intégrand de l'équation forme alors la fonction $f(\xi)$ comportant le terme singulier $1/r(\xi)$. Un moyen efficace de définir $f^s(\xi)$ de manière à ce qu'elle soit intégrable analytiquement, est d'utiliser un développement en série de Taylor autour du point de singularité, en l'occurrence ξ_{min} (Aliabadi, Hall et Phemister, 1985; Cruse et Aithal, 1993) éq.(3.37).

$$f^s(\xi) = f(\xi_{min}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n f(\xi_{min})}{d\xi^n} \cdot \frac{(\xi - \xi_{min})^n}{n!} \quad (3.37)$$

De par les propriétés multiplicatives des séries de puissance, il est possible de développer individuellement les expressions $J(\xi)$, $\psi(\xi)$, $r(\xi)$ et autres, puis de combiner les séries pour former $f^s(\xi)$. Aussi, le nombre de termes possibles pour le développement dépend de l'ordre des fonctions d'interpolation, puisque le point Q est défini selon celles-ci (Aliabadi et Hall,

1989). Par contre, le choix des termes à isoler pour former $f^s(x)$ doit être judicieux afin de pouvoir l'intégrer analytiquement. Cruse et Aithal (1993) suggèrent que T_{ij} peut être divisé en une partie régulière (T_{ij}^r) et une autre singulière (T_{ij}^s) comme suit :

$$T_{ij}(P, Q) = \underbrace{\frac{-1}{4\pi r(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right]}_{\text{Partie régulière } T_{ij}^r} + \underbrace{\frac{(1-2\nu)}{4\pi r(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r}{\partial x_i} n_j \right]}_{\text{Partie singulière } T_{ij}^s} \quad (3.38)$$

Cruse et Aithal stipulent que c'est la partie T_{ij}^s qui conduit à l'utilisation des valeurs principales de Cauchy. Alors, même si Cruse et Aithal ne l'affirment pas explicitement, il serait sûrement possible de traiter seulement T_{ij}^s par la soustraction de la singularité. Néanmoins, en raison à la forme complexe de l'intégration (éq.(3.36)), le développement analytique de $f^s(x)$ et celui de son intégration ne sont pas clairs, et très peu d'études traitent explicitement de l'application de la soustraction de la singularité pour les cas 2D d'intégration presque singulière. Or, l'élaboration des techniques d'application de la méthode dépasse le cadre d'analyse du projet, et de ce fait, la soustraction de la singularité ne sera pas utilisée. De plus, les performances de la méthode ne sont pas assurées.

3.5.2.4 Approximation de la variation singulière du Jacobien

La technique proposée ici, est une adaptation de la méthode de subdivision des éléments où la variation singulière du Jacobien est estimée par une définition appropriée des sous-éléments. En considérant un sous-élément borné par les coordonnées locales ξ_1 et ξ_3 d'un élément EQP (Figure 3.28), la méthode consiste à définir la position ξ_2 de sorte à obtenir une variation du Jacobien sur le sous-élément (J_i) correspondant à celle du Jacobien sur l'élément global (J).

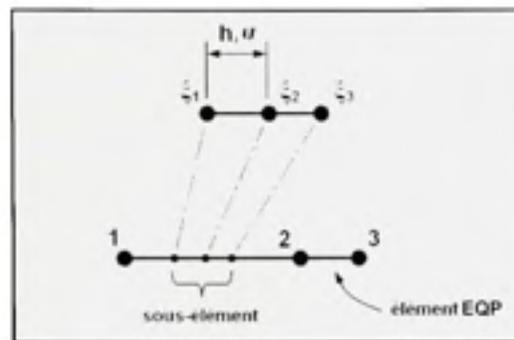


Figure 3.28 *Subdivision des éléments singuliers.*

Selon cette hypothèse, il faudra donc que ξ_2 permette de respecter l'expression (3.39) où, pour le sous-élément, ξ_1 et ξ_3 correspondent aux positions extrêmes -1 et 1.

$$\frac{J(\xi_3)}{J(\xi_1)} = \frac{J_i(1)}{J_i(-1)} = R \quad (3.39)$$

Pour appliquer la méthode, il faut en premier lieu calculer $J(\xi_3)$ et $J(\xi_1)$ sur l'élément global pour ainsi définir le rapport R . Ensuite, en considérant une longueur de sous-élément h_i et en supposant que ξ_1 soit positionné à 0, ξ_2 à $h_i\alpha$ et ξ_3 à h_i , l'expression du Jacobien sur le sous-élément (J_i) peut s'exprimer ainsi :

$$J_i(\xi) = \frac{h_i \cdot |4\alpha\xi - 2\xi - 1|}{2} \quad (3.40)$$

En appliquant l'équation (3.40) à l'expression (3.39), cette dernière devient :

$$\frac{|4\alpha - 3|}{|1 - 4\alpha|} = R \quad (3.41)$$

À partir de éq.(3.41), α se définit alors par l'équation (3.42).

$$\alpha = \frac{R+3}{4(R+1)} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{R-3}{4(R-1)} \quad (3.42)$$

Comme R et α sont toujours positifs, seule la relation de gauche de l'équation (3.42) a été considérée. Selon ce développement, il faut donc définir ξ_2 de sorte à respecter l'égalité (3.42). Dans ce projet, la position ξ_2 est obtenue par un processus itératif basé sur la méthode de Newton-Raphson. En analysant le développement précédent, deux situations extrêmes sont observées : lorsque ξ_3 vaut 1 et que le point de singularité est au nœud 3 et inversement, lorsque ξ_1 vaut -1 et que le point de singularité est au nœud 1. La première situation conduit à un rapport R de 0 et une valeur de $3/4$ pour α . Dans le deuxième cas, R vaut ∞ et en faisant la limite de éq.(3.42) pour $R \rightarrow \infty$, α vaut alors $1/4$. Donc, lorsque le sous-élément est rattaché au point de singularité, celui-ci a alors la configuration des éléments EQP où $J_i(\xi_i) \rightarrow 0$ pour ξ_i tendant vers le point de singularité. Cette technique d'approximation est relativement simple à implanter dans le programme d'éléments de frontières, c'est donc celle-ci qui est utilisée dans ce projet.

3.5.3 Applicabilité des éléments singuliers

Malgré le caractère explicite de la méthode d'approximation de la variation du Jacobien, présentée à la section 3.5.2.4, aucune technique similaire ne semble avoir été publiée dans la littérature. Alors, avant d'utiliser directement cette méthode, celle-ci doit être validée. Pour ce faire, le cas simple d'une plaque rectangulaire ayant une fissure débouchante et horizontale sur un de ses côtés a été analysé (Figure 3.29).

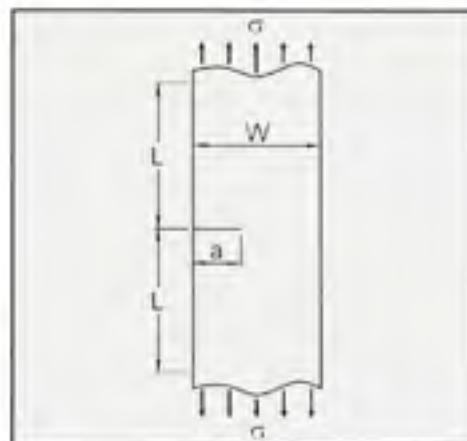


Figure 3.29 *Plaque rectangulaire avec fissure horizontale sur un côté.*

Pour cette configuration, K_I est donné par l'équation (3.43) où l'effet de L/W est pratiquement négligeable pour $L/W \geq 1.0$ (Tada, Paris et Irwin, 2000).

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \cdot \left(\frac{0.752 + 2.02 \cdot \left(\frac{a}{W}\right) + 0.37 \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \right) \quad (3.43)$$

À titre de comparaison, un modèle composé uniquement d'éléments réguliers a aussi été utilisé. La convergence des résultats a été assurée par un maillage très fin où la taille des éléments en bout de fissure (h_t) était de $a/40$ et celle du début de $a/20$. Aussi, puisque la formulation des éléments EQP n'est valide que pour des éléments rectilignes (Aliabadi et Rooke, 1992), seule la modélisation en pointe a été évaluée. L'écartement de la fissure (δ) a été fixé à $2 \times 10^{-5}w$. Le calcul de K_I a été effectué par extrapolation des déplacements et plus particulièrement par la méthode des 2 points (eq.(3.2)) pour le modèle avec éléments EQP et par régression linéaire pour celui sans élément EQP. Le Tableau 3.2 présente les valeurs normalisées de K_I obtenues pour différents rapports a/w où K_I^* est défini par l'équation (3.43).

Tableau 3.2

K_I/K_I^* d'une plaque rectangulaire avec éléments réguliers et singuliers

a/w	Régulier	Singulier	a/w	Régulier	Singulier
0.1	0.994	0.996	0.4	1.005	1.001
0.2	0.999	1.002	0.5	1.007	0.996
0.3	1.003	1.004	0.6	1.015	0.989

Les résultats du tableau précédent montrent clairement l'efficacité des éléments EQP, mais surtout que la méthode d'approximation de la variation du Jacobien fonctionne bien. La déviation est dans 5 des 6 cas analysés, inférieure à 1%. Selon la valeur de a/w , entre 10 et 12 subdivisions des éléments EQP ont été nécessaires. De plus, l'évolution de K_I en

fonction de la distance « r » pour les éléments réguliers (Figure 3.30), présente une divergence dans la solution près du bout de la fissure, ce qui complique l'évaluation des FIC lors de l'application de la régression linéaire. Tandis que pour les modèles avec éléments EQP, aucun phénomène divergent n'est observé permettant ainsi le calcul des FIC en 2 points qui est très simple, et fournit des résultats très précis.

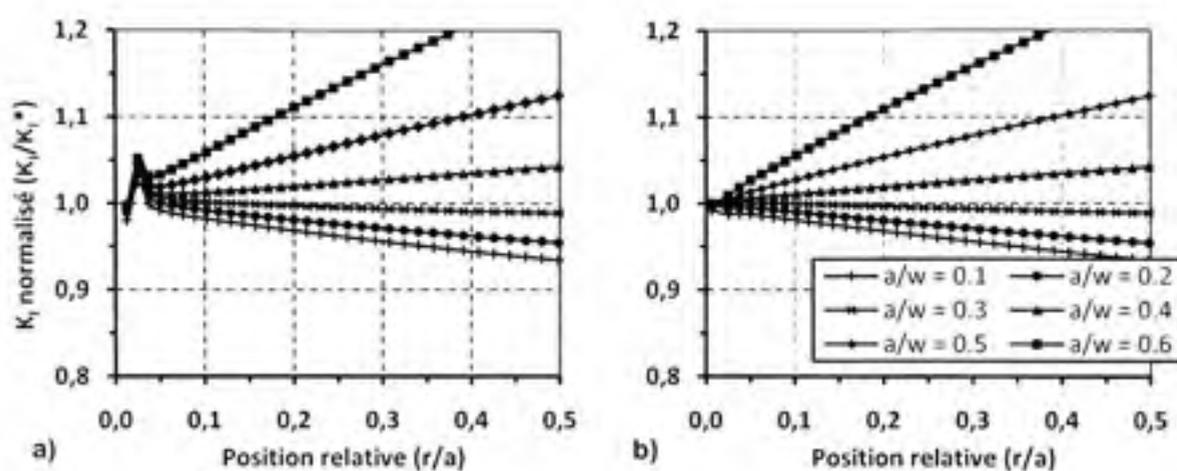


Figure 3.30 Variation de K_I normalisé pour les éléments réguliers (a) et EQP (b).

À la lumière de ces résultats, l'applicabilité des éléments EQP à la méthode de séparation finie est validée. De plus, en raison de la simplicité du calcul des FIC et de la précision des résultats, l'utilisation des éléments EQP et le calcul par extrapolation en 2 points, seront privilégiés pour le reste de la section 3.5.

3.5.4 Paramètres de discrétisation

Avant de définir la portée de la méthode de séparation finie, il faut établir une discrétisation appropriée assurant la convergence des résultats de façon efficace. Les paramètres étudiés sont la valeur de l'écartement δ et celle du rayon de l'ellipse α pour la modélisation correspondante (voir Figure 3.25a). Ensuite, la taille des éléments en bout de fissure (h_i) et au début (h_s) ont aussi été analysées. Aussi, il a été jugé utile d'appliquer un raffinement du maillage près de la fissure. Donc, celui-ci a été généré de sorte que les éléments du contour extérieur reliés aux lèvres de la fissure aient une taille égale à h_s (Figure 3.31).

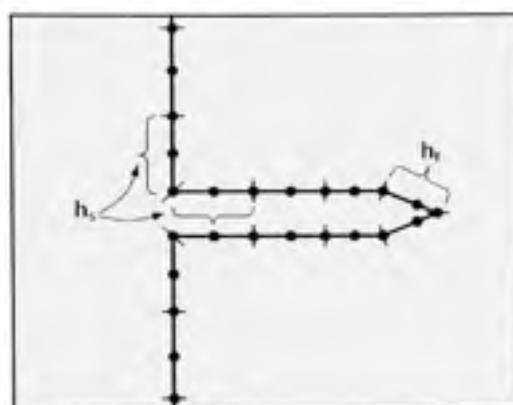


Figure 3.31 Configuration type du maillage de la fissure.

Pour quantifier la performance des différentes combinaisons de paramètres, celles-ci ont été appliquées à des cas simples où une solution analytique ou de référence est connue. Puisque les fissures de flexion des engrenages sont en surface et principalement sollicitées en mode I, la première configuration à avoir été testée, est celle de la Figure 3.29. L'analyse a pour but la définition des valeurs appropriées des paramètres h , h_s et h_t pour les deux types de modélisation (i.e ellipse et pointe). Pour la modélisation en ellipse, h_t a été défini en fonction de la séparation δ et a été limité à une valeur maximale de $h_t/\delta = 1$, afin d'avoir minimalement 2 éléments définissant l'ellipse. De plus, puisque les éléments en bout de fissure auront inévitablement une forme courbée, les éléments EQP n'ont pu être appliqués à ce type de modèle. Avec la modélisation en pointe, la valeur de h_t a été définie en fonction de « a ». Les différentes configurations de maillage analysées se retrouvent au Tableau 3.3.

Tableau 3.3

Configurations de maillage avec modélisation en ellipse et en pointe

Modélisation en ellipse						Modélisation en pointe				
#	δ/w	a/δ	h/w	h_s/a	h_t/δ	#	δ/w	h/w	h_s/a	h_t/a
E1	2×10^{-5}	2.0	0.4	0.3	1	P1	2×10^{-5}	0.4	0.4	0.2
E2	2×10^{-5}	2.0	0.4	0.2	0.5	P2	2×10^{-5}	0.4	0.2	0.1
E3	2×10^{-5}	2.0	0.4	0.1	0.25	P3	2×10^{-5}	0.4	0.1	0.05
E4	2×10^{-5}	2.0	0.2	0.05	0.125	P4	2×10^{-5}	0.2	0.05	0.025

Les valeurs normalisées K_I/K_I^* de chaque modèle sont présentées au Tableau 3.4 où la modélisation en ellipse présente de bons résultats, et ce avec tous les maillages où l'erreur est d'au plus 1.4%. Des résultats comparables sont aussi obtenus pour la modélisation en pointe et les maillages P3 et P4 où l'erreur maximale est de 1.7%. Il faut cependant spécifier que les modèles en pointe nécessitent beaucoup moins d'éléments. En comparant les maillages E2 et P3, la valeur de h_i pour P3 est 1000 fois plus grande que celle de E1.

Tableau 3.4

K_I/K_I^* pour une plaque rectangulaire fissurée sur un côté

a/w	Modélisation en ellipse				Modélisation en pointe			
	E1	E2	E3	E4	P1	P2	P3	P4
0.2	0.998	0.999	1.001	1.001	1.013	1.006	1.004	1.002
0.4	0.999	0.999	0.999	1.001	0.998	0.998	1.000	1.001
0.6	0.986	0.989	0.992	0.990	0.957	0.971	0.983	0.989

Compte tenu de la méthode de calcul de K_I et des résultats obtenus par d'autres modèles numériques pour ce genre de configuration proposés dans la littérature (De Matos et al., 2004; Portela, Aliabadi et Rooke, 1992; Smith, 1988), une erreur de 2% a été jugée acceptable. Par conséquent les paramètres des maillages P3 et E2 ont été retenus¹⁷. La Figure 3.32 illustre la variation de K_I selon la position relative « r/a » pour les modèles sélectionnés.

Comme à la Figure 3.30a, la modélisation en ellipse ne comportant pas d'élément singulier, génère une divergence près du bout de la fissure. Par contre, la taille des éléments étant très petite, l'étendue de cette divergence est minime (i.e $\approx h_i$). La modélisation en pointe présente, quant à elle, une convergence complète en bout de fissure, et ce, malgré un maillage beaucoup plus grossier.

¹⁷ Le maillage E1 aurait également été suffisant, mais E2 se prêtait mieux à l'analyse du paramètre α .

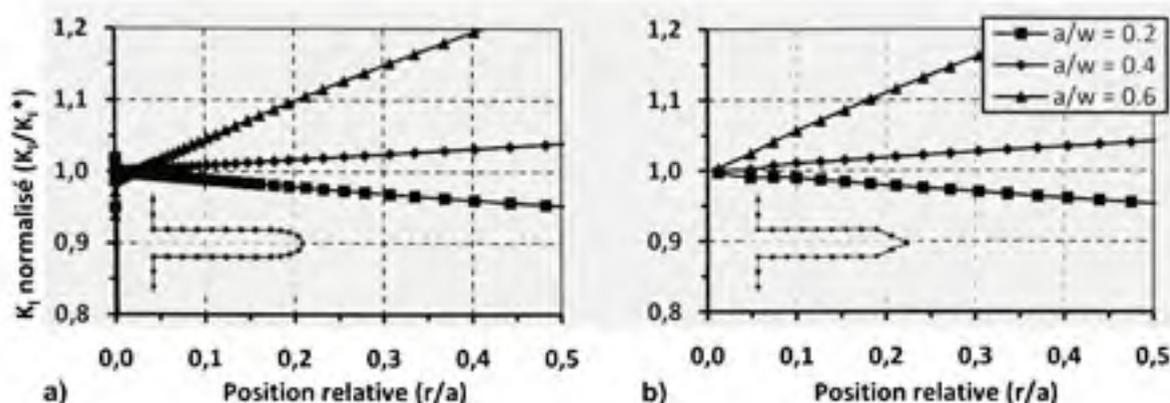


Figure 3.32 Variation de K_I normalisé pour les modèles en ellipse (a) et en pointe (b).

La deuxième analyse concerne uniquement la modélisation en ellipse puisqu'elle s'adresse à l'effet de la valeur du rayon de l'ellipse « α ». En considérant toujours la même géométrie fissurée et les paramètres du maillage E2, des valeurs de α/δ allant de 0.5 à 3 ont été appliquées. Le Tableau 3.5 dresse la liste des valeurs de K_I/K_I^* pour différents rapports α/δ .

Tableau 3.5

K_I/K_I^* pour différents rapports α/δ
(Pour une plaque rectangulaire avec fissure horizontale sur un côté)

a/w	$\alpha/\delta = 0.5$	$\alpha/\delta = 1.0$	$\alpha/\delta = 2.0$	$\alpha/\delta = 3.0$
0.2	1.001	1.001	0.999	1.000
0.4	0.999	0.999	0.999	0.999
0.6	0.993	0.993	0.989	0.991

Selon les résultats présentés, il apparaît que la variation de α/δ n'affecte pas vraiment la précision du modèle. Néanmoins, la valeur de 1 pour α/δ a été préférée, puisque dans l'ensemble elle génère une erreur minimale. Par ailleurs, Cruse (1972) suggérait aussi un rapport unitaire.

La prochaine analyse s'adresse plutôt aux limites de la méthode de séparation finie et permettra de définir la valeur minimale de δ pour laquelle les résultats demeurent précis. En reprenant les modèles en ellipse et en pointe discrétisés selon les paramètres choisis,

différentes valeurs de δ ont été appliquées. Les résultats de l'analyse sont présentés au Tableau 3.6. Il est à noter que le maillage du modèle en ellipse variait en fonction de δ , tandis que celui du modèle en pointe restait inchangé.

Tableau 3.6

K_I/K_I^* pour différentes séparations finies (δ)
(Pour une plaque rectangulaire avec fissure horizontale sur un côté)[†]

a/w	Modélisation en ellipse			Modélisation en pointe		
	$\delta = 1 \times 10^{-4}$	$\delta = 1 \times 10^{-5}$	$\delta = 1 \times 10^{-6}$	$\delta = 1 \times 10^{-4}$	$\delta = 1 \times 10^{-5}$	$\delta = 1 \times 10^{-6}$
0.1	0.995	0.995	0.993	0.998	0.998	0.999
0.2	1.001	1.000	0.999	1.004	1.004	1.004
0.3	1.001	1.001	1.001	1.004	1.004	1.005
0.4	0.999	0.998	0.999	1.000	1.000	1.001
0.5	0.996	0.996	0.992	0.992	0.992	0.993
0.6	0.993	0.989	0.986	0.983	0.983	0.987

[†] Les valeurs de δ du Tableau 3.6, sont en millimètres (mm) et la largeur de la plaque (w) est de 5 mm.

D'après ce tableau, il semble que la qualité des résultats soit assez stable malgré la diminution de δ , ce qui confirme l'efficacité de la subdivision des éléments. Par contre, pour des valeurs de δ inférieures à 1×10^{-6} mm, la solution commence à diverger aléatoirement. Il est probable que ce phénomène provienne d'un cumul d'erreur causé par les limites de précision de l'ordinateur et du nombre d'opérations arithmétiques nécessaires à l'intégration, qui devient très importants pour $\delta < 1 \times 10^{-6}$ mm. Afin d'assurer la fiabilité du modèle, tout en s'approchant de la situation idéale des surfaces coplanaires, une valeur de 1×10^{-5} mm pour δ a été adoptée dans les modèles subséquents. De plus, la modélisation en pointe offrant les mêmes performances que celle en ellipse, au niveau de la précision, mais avec beaucoup moins d'éléments, celle-ci sera donc privilégiée.

3.5.5 Validation de la méthode de séparation finie

Les analyses précédentes ont permis d'évaluer les performances de la méthode de séparation finie uniquement en mode I. Cependant, la sollicitation des fissures dans les engrenages est

en mode mixte. Il faut donc vérifier si la méthode offre toujours les mêmes performances pour cette situation. À cet effet, le cas d'une plaque rectangulaire ayant une fissure débouchante et oblique sur le côté a été analysé pour une sollicitation en traction (Figure 3.33a) et en flexion (Figure 3.33b). Puisqu'aucune solution analytique n'est connue pour ces configurations, les résultats ont été comparés à des solutions de référence fournies par Murakami (1987).

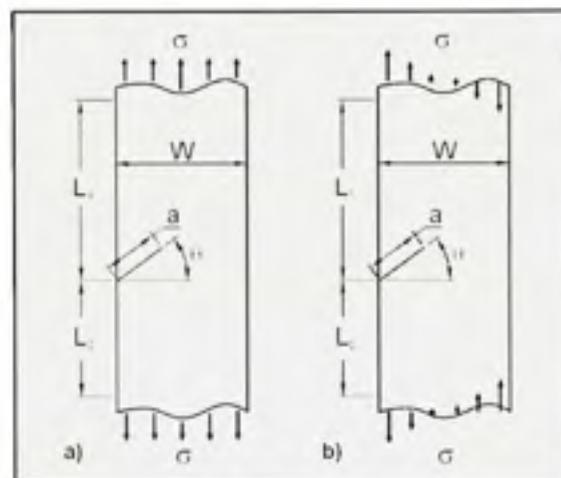


Figure 3.33 *Plaque rectangulaire avec fissure oblique en traction (a) et en flexion (b).*

Le Tableau 3.7 compare les facteurs de forme en mode I (β_I)¹⁸ calculés par la méthode de séparation finie (δ) et ceux de Murakami (1987), pour la plaque rectangulaire en traction. L'écart maximal obtenu est de 3.4% pour $\theta = 60^\circ$ et $a/w = 0.6$ où la fissure est fortement sollicitée en mode II. Cependant, pour $\theta = 30^\circ$ et 45° , l'écart est toujours inférieur à 2%. En ce qui concerne le mode II (Tableau 3.8), la méthode offre une meilleure précision avec une erreur maximale de 1.9% à $\theta = 60^\circ$ et $a/w = 0.4$.

¹⁸ Les facteurs de forme β_I et β_{II} sont définis par $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ et $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ respectivement.

Tableau 3.7

 β_I pour une plaque rectangulaire avec fissure oblique en traction

$\theta = 30^\circ (L_1 = L_2 = W)$				$\theta = 45^\circ (L_1/W = 1.5, L_2/W = 1)$				$\theta = 60^\circ (L_1 = L_2 = W)$			
a/w	δ	Ref. †	D (%)	a/w	δ	Ref. †	D (%)	a/w	δ	Ref. †	D (%)
0.2	1.078	1.100	2.00	0.3	0.880	0.879	0.11	0.2	0.487	0.500	2.6
0.4	1.531	1.550	1.23	0.4	1.013	1.011	0.20	0.4	0.581	0.600	3.2
0.6	2.513	2.550	1.45	0.6	1.448	1.436	0.84	0.6	0.831	0.860	3.4

† Les valeurs de référence β_I ont été tirées de Murakami (1987).

Tableau 3.8

 β_{II} pour une plaque rectangulaire avec fissure oblique en traction

$\theta = 30^\circ (L_1 = L_2 = W)$				$\theta = 45^\circ (L_1/W = 1.5, L_2/W = 1)$				$\theta = 60^\circ (L_1 = L_2 = W)$			
a/w	δ	Ref. †	D (%)	a/w	δ	Ref. †	D (%)	a/w	δ	Ref. †	D (%)
0.2	0.355	0.350	1.43	0.3	0.450	0.450	0.00	0.2	0.358	0.360	0.56
0.4	0.474	0.470	0.85	0.4	0.508	0.515	1.36	0.4	0.412	0.420	1.90
0.6	0.696	0.700	0.57	0.6	0.685	0.688	0.44	0.6	0.491	0.490	0.20

† Les valeurs de référence β_{II} ont été tirées de Murakami (1987).

Pour ce qui est du cas de la sollicitation en flexion (Figure 3.33b), celui-ci s'approche davantage de la situation observée dans les engrenages. Or, les valeurs calculées de β_I et β_{II} présentant des écarts maximaux de 2.7% en mode I et de 1.25% en mode II (Tableau 3.9), montre de façon indéniable que la méthode de séparation finie est aussi efficace pour cette situation.

Tableau 3.9

β_I et β_{II} d'une plaque rectangulaire avec fissure oblique en flexion
($\theta = 45^\circ$, $L_1/W = 1.5$ et $L_2/W = 1$)

β_I				β_{II}			
a/w	δ	Ref. †	D (%)	a/w	δ	Ref. †	D (%)
0.3	0.683	0.685	0.29	0.3	0.315	0.315	0.00
0.4	0.721	0.736	2.04	0.4	0.316	0.320	1.25
0.5	0.779	0.795	2.01	0.5	0.327	0.329	0.61
0.6	0.865	0.889	2.70	0.6	0.345	0.344	0.29

† Les valeurs de référence β_I et β_{II} , ont été tirées de Murakami (1987).

Les observations précédentes ont prouvé clairement que la méthode de séparation finie était directement applicable aux situations en mode mixte, et ce, pour différentes configurations de fissure et de chargement. Une autre caractéristique importante de l'état de chargement des engrenages, est la concentration de contrainte induite à la racine des dents de par leur géométrie. Afin de vérifier si la méthode demeure efficace en présence d'un phénomène de concentration de contrainte, une plaque rectangulaire ayant un trou avec deux fissures débouchantes à été modélisée (Figure 3.34). Les résultats ont été comparés à ceux de Woo et al. (1989) obtenus de façon semi-analytique (Tableau 3.10 et Tableau 3.11).

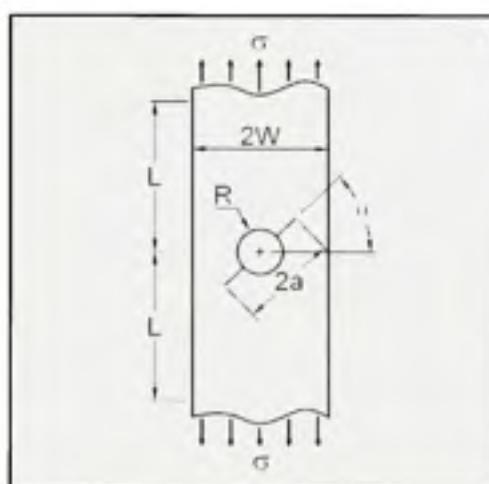


Figure 3.34 Plaque rectangulaire avec trou circulaire et fissures débouchantes.

En mode I (Tableau 3.10), une excellente corrélation est observée entre les résultats de la présente étude et ceux de la solution de référence, où l'écart est de moins de 1.5% pour la plupart des cas. La seule situation où l'écart est appréciable (c.-à-d. 6%), c'est lorsque $a/w = 0.6$ et $\theta = 60^\circ$. Un simple raffinement du maillage contribuerait sûrement à diminuer cet écart. Par contre, pour le mode II (Tableau 3.11), la correspondance des résultats est complète avec un écart maximal de 1%.

Tableau 3.10

β_I d'une plaque rectangulaire fissurée avec trou circulaire
($W = 1, L = 2$ et $R = 0.25$)

a/w	$\theta = 15^\circ$		$\theta = 30^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 60^\circ$	
	δ	Ref. †						
0.3	0.986	0.985	0.732	0.730	0.385	0.383	0.041	0.039
0.4	1.127	1.126	0.873	0.872	0.514	0.512	0.149	0.147
0.5	1.200	1.198	0.950	0.948	0.586	0.585	0.212	0.210
0.6	1.305	1.303	1.039	1.038	0.655	0.654	0.259	0.275

† Les valeurs de référence β_I ont été tirées de Woo, Wang et Cheung (1989).

Tableau 3.11

β_{II} d'une plaque rectangulaire fissurée avec trou circulaire
($W = 1, L = 2$ et $R = 0.25$)

a/w	$\theta = 15^\circ$		$\theta = 30^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 60^\circ$	
	δ	Ref. †						
0.3	0.083	0.082	0.142	0.141	0.162	0.160	0.138	0.137
0.4	0.193	0.192	0.337	0.336	0.389	0.388	0.334	0.332
0.5	0.236	0.237	0.418	0.417	0.487	0.486	0.419	0.418
0.6	0.262	0.263	0.464	0.463	0.542	0.541	0.462	0.465

† Les valeurs de référence β_{II} ont été tirées de Woo, Wang et Cheung (1989).

En résumé; 1 - la modélisation en pointe du bout de la fissure s'est avérée supérieure à la modélisation en ellipse de par sa discrétisation simple et grossière n'enlevant rien à la

précision des résultats. 2 - Avec les paramètres de discrétisation suivants : $h_t/a = 0.05$, $h_r/a = 0.1$ et $\delta = 2 \times 10^{-6} w$, un niveau de précision élevé a été atteint tout en conservant une bonne efficacité de calcul. 3 - De par les différents cas d'analyse, il a été prouvé que la méthode de séparation finie est une technique très performante et qu'elle est applicable à plusieurs situations, notamment celle des fissures de flexion des engrenages.

3.5.6 Application de la méthode aux engrenages

L'application de la méthode de séparation finie aux engrenages, se fera en appliquant les valeurs des paramètres h_t/a , h_r/a et δ définis à la section précédente. Pour le reste de la structure, les caractéristiques du maillage par la sous-structuration (section 3.4.2.6) seront conservées, puisqu'ils n'agissent pas directement sur la discrétisation de la fissure.

3.6 Comparaison des modèles MEF et MEIF avec fissure

L'évaluation des modèles pour les corps fissurés, se fera en deux temps. Tout d'abord les modèles seront appliqués à des cas simples, puis ensuite au cas d'une roue d'engrenage. Pour la MEIF, deux types de modèles seront abordés : un utilisant la méthode de sous-structuration et l'autre celle de la séparation finie; ce qui permettra de comparer directement l'approche proposée à une autre technique de modélisation des fissures par la MEIF. Aussi, les paramètres de discrétisation définis aux sections précédentes seront conservés et l'extrapolation des déplacements en 2 points sera appliquée, puisque tous les modèles contiennent des éléments EQP.

3.6.1 Application aux géométries simples

Pour cette étude, la configuration présentée à la Figure 3.33a a été reprise pour le cas où $\theta = 30^\circ$. Le Tableau 3.12 présente les valeurs relatives de β_I et β_{II} obtenues de chaque modèle et montre que la MEF et la MEIF offrent d'excellents résultats avec moins de 5% d'erreur, pour tous les cas.

Tableau 3.12

Comparaison de β_I et β_{II} normalisés d'une plaque rectangulaire
($\theta = 30^\circ$, $L_1 = L_2 = W$)

Modèles	β_I/β_I^* †			β_{II}/β_{II}^* †		
	a/w = 0.2	a/w = 0.4	a/w = 0.6	a/w = 0.2	a/w = 0.4	a/w = 0.6
MEF	0.982	0.993	0.987	0.998	0.992	0.959
MEIF (Sous-Struct.)	0.951	0.962	0.968	0.985	0.979	0.962
MEIF (δ)	0.980	0.988	0.986	1.014	1.009	0.994

† Les valeurs de référence β_I^* et β_{II}^* , ont été tirées de Murakami (1987).

Par contre, c'est le modèle d'éléments de frontières utilisant la sous-structuration qui présente les niveaux de déviation maximum où l'erreur varie de 1.5 à 4.9%, ce qui demeure, néanmoins, une bonne précision. Cette erreur est causée par la divergence de la solution en bout de fissure, telle que décrite à la section 3.4.2.6. Les deux autres modèles donnent des résultats comparables avec moins de 2% d'erreur, à l'exception de β_{II} pour le cas $a/w = 0.6$ où le modèle MEF génère une erreur de 4%. En comparant l'évolution de la solution pour le cas $a/w = 0.6$ (Figure 3.35), il est possible de constater que les trois méthodes semblent équivalentes, mais que la précision de chacune d'elle se joue à proximité du bout de la fissure.

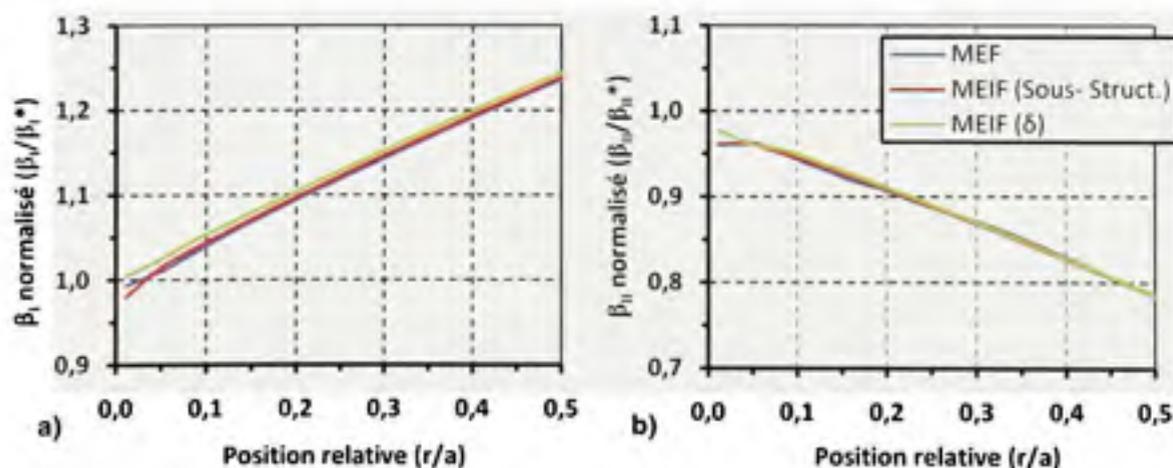


Figure 3.35 Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/w = 0.6$.

Un autre aspect permettant de départager les modèles, est le nombre de DDL de chacun (Tableau 3.13). À ce niveau, la MEIF appliquée avec la séparation finie est la plus avantageuse requérant un niveau de discrétisation 3 à 4 fois moins élevé que celui de la MEF. Pour l'analyse statique, cet avantage est moins significatif puisque la formulation de la MEIF nécessite plus de calcul par DDL que la MEF. Il faut toutefois rappeler que la MEIF nécessite beaucoup moins de nœuds que la MEF pour un niveau de précision donné. De plus, en analyse de propagation, le remaillage simple des modèles d'éléments frontières améliorera grandement le temps total de l'analyse.

Tableau 3.13

Nombre de DDL relatif requis pour une plaque rectangulaire fissurée

Modèles	Nombre de DDL relatif		
	a/w = 0.2	a/w = 0.4	a/w = 0.6
MEF	4.122	3.713	2.985
MEIF (Sous-Struct.)	1.446	1.264	1.200
MEIF (δ)	1.000	1.000	1.000

3.6.2 Application aux engrenages

Pour l'évaluation de modèles appliqués aux engrenages, les cas d'analyse employés lors des études de convergence ont été repris pour la position critique de l'engrènement (voir annexe III). Le Tableau 3.14 présente les facteurs de forme β_I et β_{II} définis en fonction de la force normale (W) appliquée à la dent.

Tableau 3.14

Comparaison des modèles pour β_I et β_{II} d'une roue d'engrenage

Modèles	β_I			β_{II}		
	a/m = 0.1	a/m = 0.5	a/m = 1	a/m = 0.1	a/m = 0.5	a/m = 1
MEF	0.502	0.363	0.431	0.0018	0.0279	0.0178
MEIF (Sous-Struct.)	0.502	0.366	0.433	0.0035	0.0253	0.0135
MEIF (δ)	0.513	0.375	0.445	0.0038	0.0250	0.0140

En ce qui concerne le mode I, les trois modèles offrent des résultats similaires avec une variation maximale de 3,2% entre eux-ci. Par contre, du côté du mode II les variations sont assez importantes entre le modèle d'éléments finis et ceux d'éléments de frontières, où un écart de plus de 50% est observé pour $a/m = 0.1$ ($m =$ module). L'amplitude réelle de ces écarts est cependant très faible par rapport à la valeur de β_I , en raison de la faible importance du mode II en rapport avec le mode I. Avec les graphes des variations de β_I et β_{II} en fonction de « r/a » (Figure 3.36, Figure 3.37 et Figure 3.38) il est également possible de voir que la solution obtenue par la MEIF et la méthode de séparation finie est relativement stable pour toutes les longueurs de fissure.

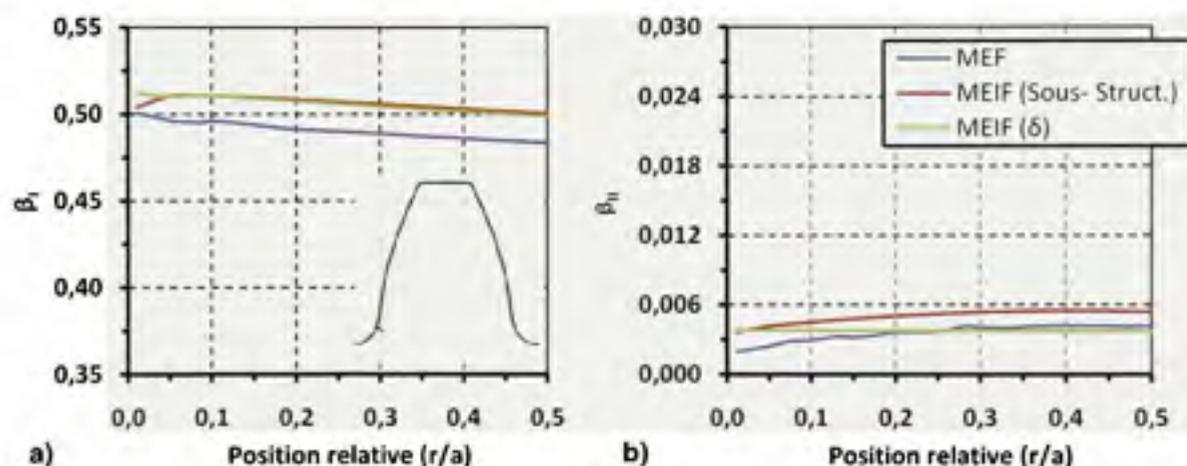


Figure 3.36 Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/m = 0.1$.

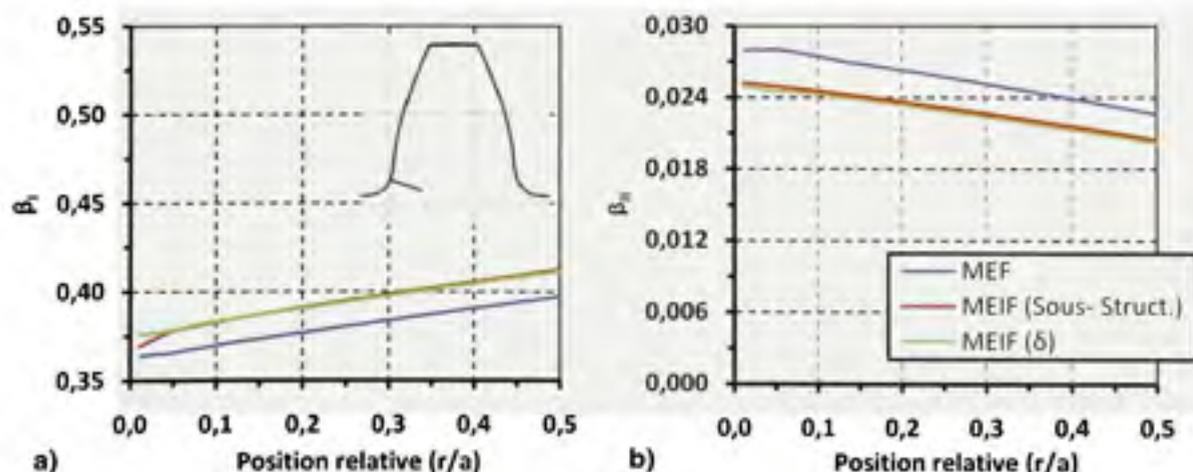


Figure 3.37 Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/m = 0.5$.

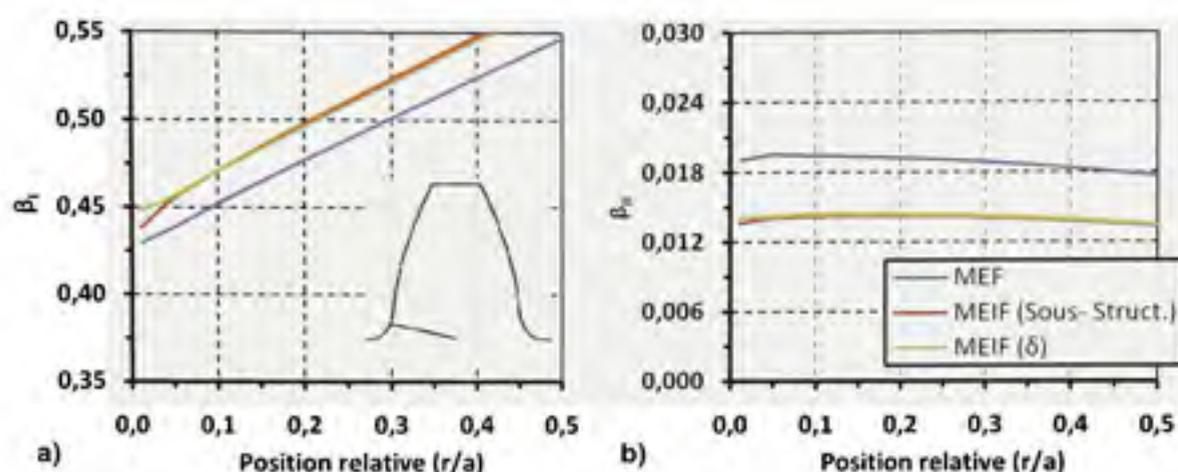


Figure 3.38 Variation de β_I et β_{II} des modèles MEF et MEIF pour $a/m = 1$.

Par contre, pour les deux autres modèles, la solution de β_{II} semble instable avec des fissures courtes (c.-à-d. $a/m = 0.1$), ce qui peut devenir problématique pour l'évaluation des critères de propagation en début d'analyse de fatigue. Cette caractéristique dénote sûrement l'incapacité de ces modèles à bien caractériser le champ de contraintes lorsque celui-ci contient de hauts gradients. Pour ce qui est de l'écart constant entre le modèle d'éléments finis et ceux d'éléments de frontières, les causes de celui-ci sont similaires à celles mentionnées lors de la comparaison des modèles sans fissure (voir section 3.3.3).

Donc, en considérant les aspects telles la précision, la fiabilité et l'efficacité, les analyses de cette section ont montré, sans aucun doute, que la MEIF utilisée conjointement avec la séparation finie des fissures était la meilleure option. En effet, la méthode conduit, de manière générale, à des résultats ayant moins de 2% d'erreur et le comportement de la solution semble toujours stable peu importe la situation. C'est aussi le type de modélisation qui nécessite le moins de DDL.

3.7 Application du calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Même si l'extrapolation des déplacements en 2 points a donné d'excellents résultats, afin d'obtenir les outils numériques les plus adéquats, les techniques d'évaluation des FIC présentées à la section 3.1 ont été testées. La solution exacte des FIC d'une roue

d'engrenage n'étant pas connue, il a été jugé préférable d'appliquer les méthodes de calcul à des géométries simples où une solution de référence existe. Donc, en reprenant les configurations en mode mixte de la Figure 3.33, il a été possible d'évaluer les performances de chacune des méthodes. La Figure 3.39 compare les résultats obtenus pour le cas en traction (Figure 3.33a) où les courbes β_I/β_I^* et β_{II}/β_{II}^* ont été tracées selon des valeurs de « a/w » de 0.2, 0.4 et 0.6. Tandis que la Figure 3.40 traite les résultats du cas en flexion (Figure 3.33b) où les valeurs « a/w » de 0.3, 0.4 et 0.6 ont été utilisées.

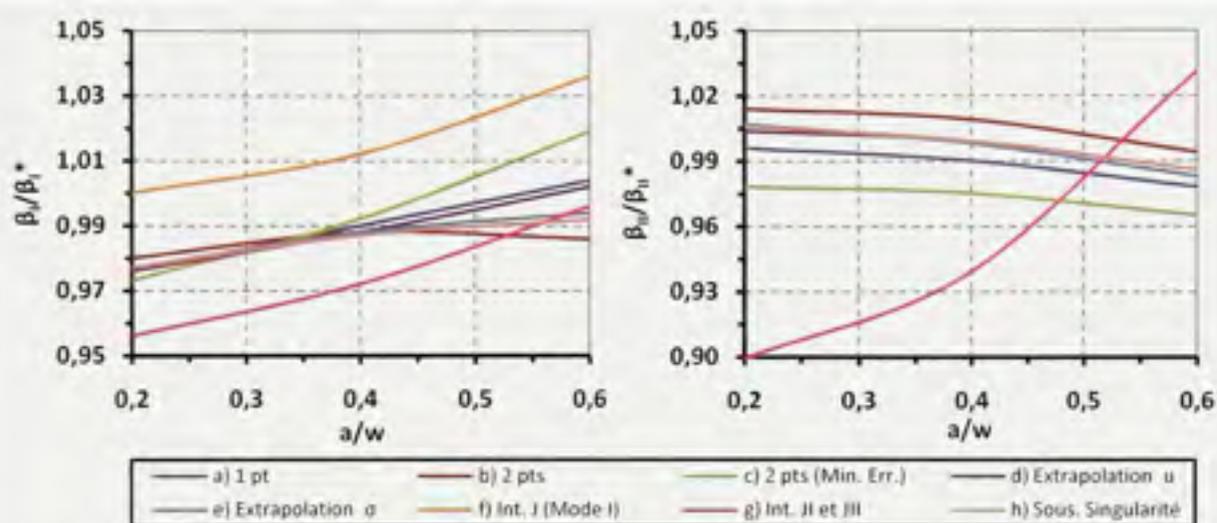


Figure 3.39 Variation de β_I et β_{II} pour une plaque rectangulaire en traction.

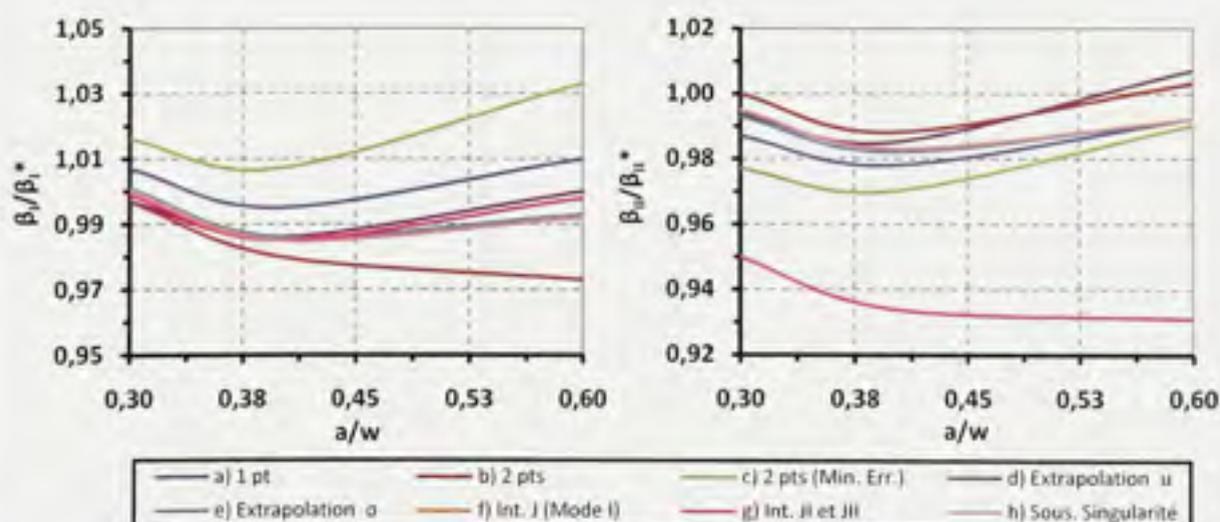


Figure 3.40 Variation de β_I et β_{II} pour une plaque rectangulaire en flexion.

Avec ces figures, il est possible de constater que les méthodes d'extrapolation des déplacements sont très précises avec une erreur moyenne variant entre 1 et 2%. De ces méthodes, le calcul en 2 points avec minimisation de l'erreur (c), est celle qui atteint le niveau d'erreur le plus élevé avec plus de 3% d'écart pour certains cas en traction et en flexion. Pour ce qui est des méthodes de calcul en 1 (a) et 2 points (b), celles-ci présentent des résultats comparables. Bien que la méthode d'extrapolation des déplacements par la loi des moindres carrés (d) soit aussi et quelques fois plus performante que les deux méthodes précédentes, elle nécessite un traitement beaucoup plus long. De plus, elle diminue l'effet des éléments singuliers en tenant compte de la solution des autres éléments de la fissure. Aussi, pour les fissures de plus petite taille (c.-à-d. $a/w = 0.2$), les effets de bord viennent perturber la solution sur les lèvres de la fissure et de ce fait, la régression d'ordre linéaire n'est plus appropriée et il faut plutôt opter pour une régression non linéaire d'ordre supérieur. Pour les cas de traction et de flexion, une régression non linéaire d'ordre 2 a été utilisée avec $a/w = 0.2$. Or, cette situation rend plutôt difficile l'implantation de cette technique d'extrapolation dans un contexte d'analyse en propagation où le calcul des FIC doit être automatisé.

En ce qui concerne l'extrapolation des contraintes par la loi des moindres carrés (e), celle-ci montre les mêmes caractéristiques que l'extrapolation des déplacements (d). Par contre, cette technique nécessite un post-traitement de la solution pour définir les contraintes à l'intérieure du domaine qui pour la MEIF, peut être assez long.

Avec la technique de soustraction de la singularité (h), les résultats sont assez précis, avec au plus 2.35% d'erreur. Cependant, les valeurs suggérées par De Matos et al. (2004) pour ϵ et r n'ont pas donné les résultats escomptés. En effet, les résultats des Figures 3.39 et 3.40 ont été obtenus en posant ϵ et r égales à $0.01h_t$. De cette façon, la méthode s'apparente au calcul en 1 point (a) pour l'extrapolation des déplacements. Aussi, avec cette configuration, la méthode a montré une bonne fiabilité en n'engendrant presque aucune variation de la solution (c.-à-d. $< 0.1\%$) pour des valeurs de ϵ et r allant de $0.0001h_t$ à $0.1h_t$. Par contre, pour des valeurs identiques de ϵ et r , aucune soustraction de singularité n'est vraiment

réalisée. Il faut noter, que sans les éléments EQP, il a été nécessaire de prendre des valeurs différentes pour ε et τ (ex. : $\varepsilon = 0.01h_t$ et $\tau = 0.04h_t$ pour le cas en flexion). Les résultats n'étaient cependant pas aussi précis, particulièrement pour le mode II avec, entre autres, 11% d'erreur pour le cas $a/w = 0.3$ en flexion.

Enfin, l'intégrale J semble être la méthode qui, dans l'ensemble, présente les pires résultats avec des erreurs de l'ordre de 10% pour le mode II. Cela est très surprenant, surtout en ce qui concerne la méthode de décomposition de l'intégrale (g) qui d'après ce qui est publié dans la littérature (De Matos et al., 2004; Portela, Aliabadi et Rooke, 1992), devrait fournir des résultats très précis avec moins de 1% d'erreur. Cette divergence dénote peut-être une mauvaise application de la méthode dans ce projet, mais à première vue tous les résultats semblent corrects¹⁹ et donc, il apparaît que l'intégrale J n'est pas appropriée pour l'analyse en mode mixte. Néanmoins, puisque cette technique nécessite un post-traitement de la solution relativement long en comparaison des autres méthodes et que ces dernières sont très précises, l'utilisation de l'intégrale J n'est plus pertinente.

Alors, en raison de sa facilité et de sa rapidité d'application, tout en étant précise, la méthode d'extrapolation des déplacements en 2 points (b) (éq.(3.2)) sera utilisée pour l'ensemble des analyses de ce projet.

3.8 Conclusion

Ce troisième chapitre a tout d'abord fait état des différentes méthodes disponibles pour le calcul des FIC et de leurs particularités techniques, afin d'orienter l'application des méthodes numériques. Ensuite, une revue détaillée de la formulation de la MEIF et de ses particularités a permis de mettre en place les outils nécessaires à son application aux

¹⁹ En appliquant l'intégrale J de façon conventionnelle et par décomposition à des cas de sollicitation en mode I uniquement (ex. : Figure 3.29), les résultats sont assez bons (c.-à-d. erreur < 3%) et identiques pour les deux méthodes. De plus, les mêmes résultats ont été obtenus pour différents contours. Cela démontre donc, que l'application de l'intégrale J semble avoir été correctement implantée. Aussi, il est à noter que, par rigueur, la valeur de δ et l'orientation des éléments en bout de fissure ont été considérés dans la définition du contour pour l'intégration; il a été observé que leur impact sur la solution, était négligeable.

engrenages (ex. : techniques d'application de charges ponctuelles, voir section 3.2.2.1.4). Ceci a conduit à un modèle 2D d'éléments de frontières, sans fissure, qui s'est avéré très précis (c.-à-d. $\approx 3\%$ d'erreur avec l'AGMA) et supérieur au modèle équivalent d'éléments finis au niveau du taux de convergence de la solution (c.-à-d. 80 fois moins de DDL qu'avec la MEF). Cela confirmait donc l'efficacité de la MEIF, tout en justifiant son application au modèle de fatigue en flexion des engrenages. Les mêmes conclusions ont été obtenues lors du développement du modèle 2D avec fissure où le calcul des FIC en 2 points (éq.(3.2)) combiné aux éléments EQP s'est avéré la méthode la plus efficace, tout en étant très précise.

Cependant, l'aspect majeur du chapitre 3 est sans contredit le développement d'une nouvelle technique de modélisation des fissures par la MEIF : la méthode de séparation finie des lèvres (section 3.5). Basée principalement sur une utilisation efficace de la subdivision des éléments, l'implantation de cette méthode s'est avérée d'une grande simplicité (c.-à-d. formulation de la MEIF en déplacement et un seul domaine (Ω)). Une approche originale d'approximation de variation singulière a même permis l'utilisation des éléments EQP, à priori inapplicables à la subdivision des éléments. Les diverses étapes d'ajustement et de validation de la méthode ont non seulement confirmé sa grande efficacité face aux méthodes habituelles (c.-à-d. sous-structuration, DDM et DBEM), mais ont aussi prouvé qu'elle était très précise avec moins de 2% d'erreur, et ce, pour des valeurs de δ aussi petites que 1×10^{-6} mm. Il s'agit ici d'une contribution importante de ce travail, qui dépasse le cadre même du projet, puisque cette technique de modélisation pourra très bien être appliquée à des structures fissurées autres que celles des engrenages.

CHAPITRE 4

INITIATION DES FISSURES

Ce chapitre traite de l'initiation de la fatigue des engrenages. Le principal objectif sera de définir un critère (D) permettant l'estimation des caractéristiques initiales des fissures (c.-à-d. x_0 , y_0 , a_0 et θ_0). Tel que mentionné à la section 2.1, le critère de tension maximale fait abstraction d'un des mécanismes les plus importants de l'initiation : la nucléation par les bandes de glissement persistantes. Or, ce projet propose plutôt d'opter pour un critère (D) où l'effet de la tension et celui du cisaillement y seront combinés et ainsi obtenir un niveau de cohérence plus élevé avec les phénomènes réels d'endommagement par fatigue. De plus, ce critère (D) devra traduire la synergie des deux composantes de chargement; le cisaillement initie le défaut et la tension fait propager ce dernier jusqu'à une taille macroscopique. Cette approche soutient donc que sans l'une ou l'autre des composantes de force, aucune fissure ne devrait théoriquement être initiée ou propagée.

4.1 Fatigue des engrenages

L'analyse de l'initiation de la fatigue suscite l'intérêt des chercheurs depuis plusieurs années, et de ce fait, une multitude de critères appuyés par différentes hypothèses et s'appliquant à des situations spécifiques, a été développée (Fatemi et Yang, 1998; You et Lee, 1996). Malheureusement, encore aucun modèle n'a été accepté de façon universelle (Wang et Yao, 2004). Il devient alors très important d'identifier et de caractériser les paramètres du cas à analyser en fatigue, afin de définir un critère d'endommagement (D) approprié.

4.1.1 Chargement multiaxial

La fatigue en flexion des engrenages comporte plusieurs composantes de chargement (voir section 1.6.1) qui dénote un caractère multiaxial. En 2D, l'état de chargement est biaxial. Les contraintes sont principalement en tension et en cisaillement. Le critère d'initiation

devra donc prendre en considération l'effet combiné des divers chargements. Les graphiques de la Figure 4.1 illustrent l'état de contrainte d'un point situé en surface à la racine d'une dent, pour tout le cycle d'engrènement²⁰.

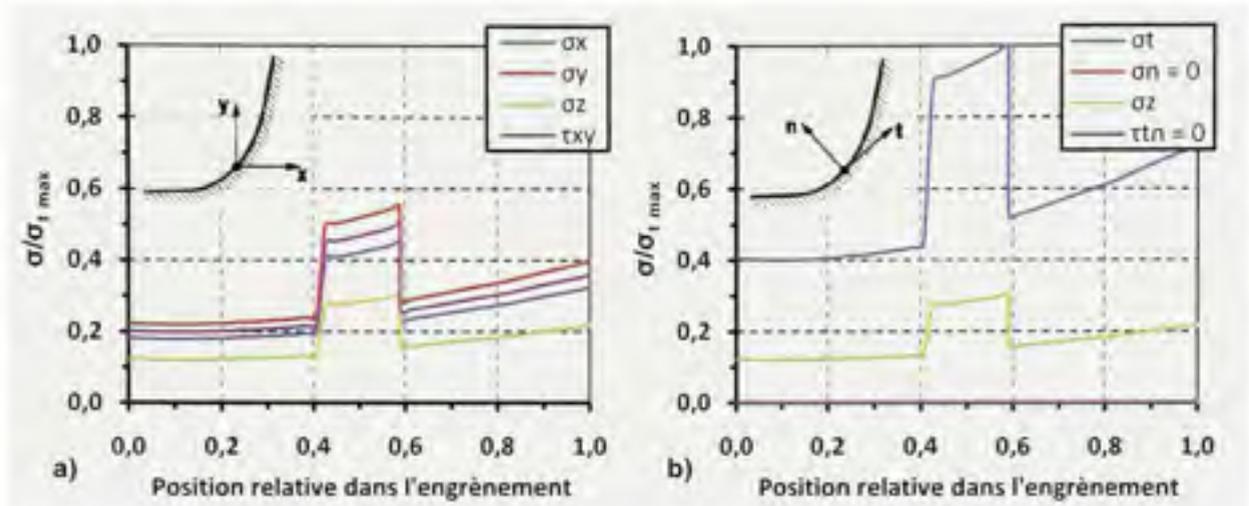


Figure 4.1 Variation de l'état de contrainte durant le cycle d'engrènement.

Ici, σ_t est non nul, puisque l'état de ϵ_{plane} a été supposé. La Figure 4.1 montre clairement la période où une seule paire de dents est en contact, ce qui a pour effet de doubler l'intensité du chargement. En orientant le tenseur de contraintes de façon tangentielle à la surface (Figure 4.1b), celui-ci correspond aux contraintes principales où σ_n et τ_{tn} sont nuls.

4.1.2 Chargement proportionnel

La proportionnalité du chargement est un aspect important en fatigue. Les chargements dits proportionnels, sont ceux qui engendrent des contraintes principales dont l'orientation et le rapport des grandeurs entre elles restent constants. Avec cette configuration, seules les conditions extrêmes (i.e σ_{max} et σ_{min}) sont nécessaires à l'analyse en fatigue. À première vue (Figure 4.1), le chargement des engrenages semble respecter ces conditions. Cependant, la section 1.3.1 a fait état d'études démontrant une initiation sous la surface des dents. Par

²⁰ Le point est celui pour lequel la contrainte principale en tension a atteint la plus grande valeur durant tout l'engrènement. La roue utilisée était composée de 30 dents (n) ayant un module (m) de 4 mm et un angle de pression (ϕ) de 20°. Celle-ci était couplée à une autre roue de 45 dents.

conséquent, les variations de contrainte sous la surface sont susceptibles d'influer sur le comportement en fatigue. Pour vérifier si les conditions de chargement proportionnel sont toujours respectées à l'intérieur de la structure, les rapports σ_2/σ_1 et σ_3/σ_1 ont été tracés à la Figure 4.2.

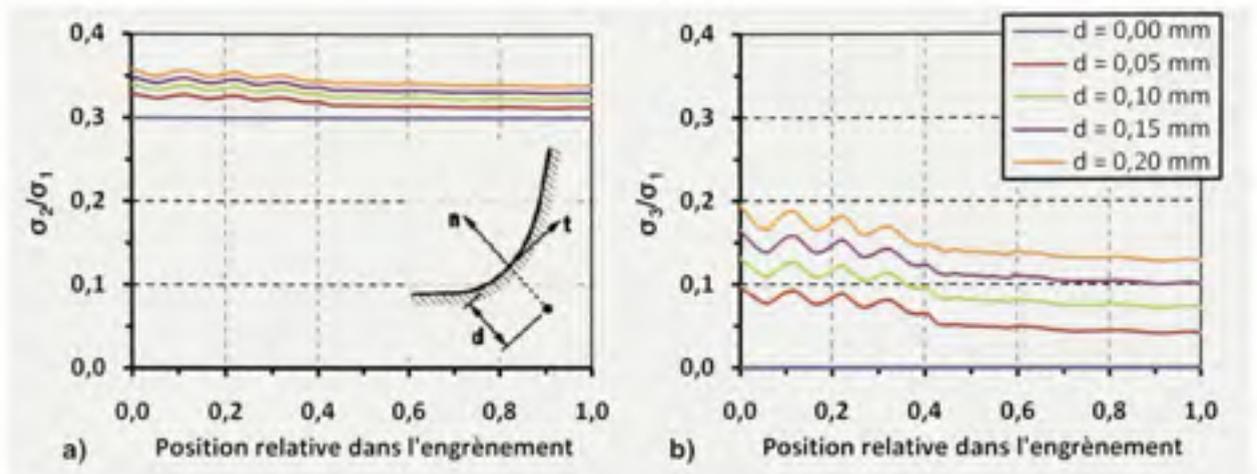


Figure 4.2 Variation de σ_2/σ_1 (a) et σ_3/σ_1 (b) durant le cycle d'engrènement.

Bien qu'il y ait une certaine variation des rapports, celle-ci est plutôt faible (c.-à-d. < 0.1). Il est donc raisonnable de conclure à un chargement proportionnel généralisé au congé de la dent. Le même constat peut être fait en analysant l'orientation des contraintes principales ($\theta_{\sigma_{13}}$) (Figure 4.3) où une variation maximale d'environ 3° est observée pour $d = 0.2$ mm.

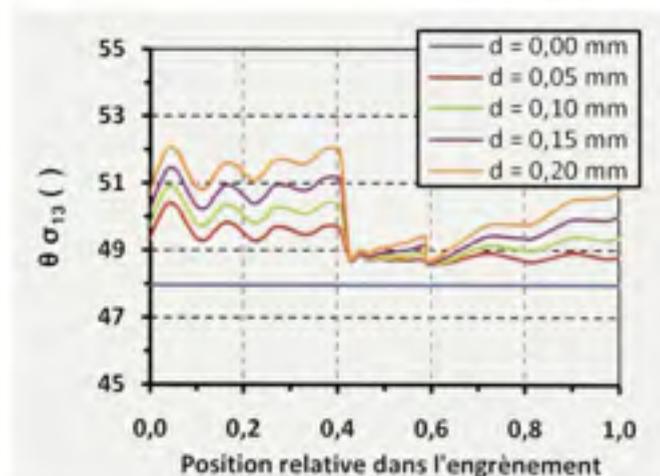


Figure 4.3 Variation de $\theta_{\sigma_{13}}$ durant le cycle d'engrènement.

4.1.3 Contrainte moyenne

La contrainte moyenne (σ_m) a aussi un effet significatif sur la vie en fatigue; celle-ci tend à réduire le nombre de cycles à la rupture (N_f) lorsque sa valeur augmente (Suresh, 1998). Pour un chargement cyclique, σ_m peut se définir ainsi :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (4.1)$$

Dans le cas d'une dent d'engrenage, σ_{\min} vaut 0 et σ_{\max} s'obtient au plus haut point de contact unique de l'engrènement. Par conséquent, le rapport de chargement R (c.-à-d. $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$) est nul. Il faut aussi spécifier, que l'effet de σ_m est assez important pour les chargements en tension-compression, mais que celui-ci est pratiquement inexistant en cisaillement (Lemaitre et Desmorat, 2005; Suresh, 1998).

4.1.4 Concentration de contrainte

Le changement de section à la racine de la dent génère d'importantes concentrations de contrainte qui réduisent aussi la durée de vie en fatigue (Suresh, 1998). L'effet de la concentration de contrainte est souvent quantifié par un facteur K_f , incluant l'intensité du concentrateur (K_t) et la sensibilité du matériau à la concentration de contrainte (q). Avec le calcul standardisé de l'AGMA, K_f est considéré par l'entremise d'un facteur géométrique (J) tenant compte de la forme de la dent et de la distribution du chargement W (Shigley, Mischke et Budynas, 2004).

4.1.5 Fatigue endurance

Le régime de fonctionnement est aussi très révélateur des caractéristiques du chargement en fatigue. Tel que mentionné à la section 1.2.2, les engrenages doivent résister à de longues périodes de fonctionnement et par conséquent, le processus d'endommagement auquel ils sont soumis est associé à la fatigue endurance où les niveaux de contrainte sont sous le seuil

d'écoulement (S_y). Le critère d'initiation devra donc, considérer uniquement les déformations élastiques (ϵ_{el}) pour caractériser le phénomène, puisqu'à l'échelle macroscopique, les déformations plastiques (ϵ_{pl}) ne pourront être quantifiées.

4.1.6 Amorce des fissures

Bien que les déformations plastiques soient négligeables, au niveau microscopique, elles engendrent le glissement et la décohésion permanente de la microstructure, produisant ainsi un mécanisme d'intrusion et d'extrusion à la surface (Lemaitre et Desmorat, 2005) (Figure 4.4). Il s'en suit généralement une nucléation de microfissures susceptibles d'être propagées sous l'effet du chargement cyclique.

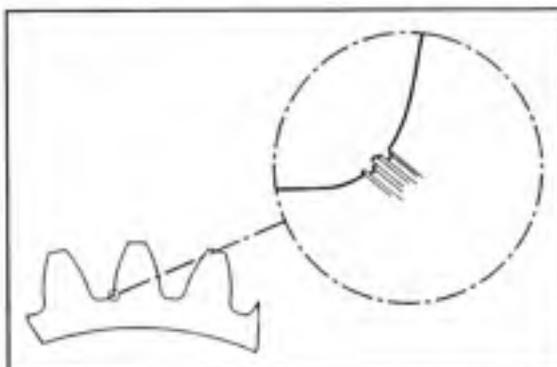


Figure 4.4 *Mécanisme d'intrusion-extrusion en surface.*

La section 1.5 a montré que plusieurs facteurs pouvaient influencer le développement des défauts. Notamment, les aspects liés au fini de surface et à l'arrangement de la microstructure, jouent un rôle de premier plan dans l'évolution des mécanismes d'endommagement. Par contre, la revue de la littérature a également montré que même en négligeant tous ces facteurs, les modèles actuels de fatigue en flexion des engrenages ne parviennent pas à représenter les concepts de base de l'initiation, illustrés à la Figure 4.4. Donc, avant même d'aborder les aspects plus complexes de l'initiation des fissures, il serait préférable de caractériser celle-ci plus simplement en fonction de la force appliquée (W). C'est pourquoi, l'hypothèse d'un matériau homogène et isotrope où y il a absence de défaut intérieur et de surface, sera considérée.

4.1.6.1 Région critique

La région critique en fatigue en flexion des engrenages, est située à la racine des dents du côté en tension. Cette région s'étend du rayon de racine jusqu'au début du profil en développante de cercle. La Figure 4.5 montre la variation de σ_{eq} ($\sigma_{Von Mises}$) en surface, selon la position relative au congé²¹ et celle de l'engrènement pour la roue de la section 4.1.1. Avec ce graphe, la région critique se précise, en se concentrant surtout dans la zone comprise en 30 et 50% de la longueur du congé.

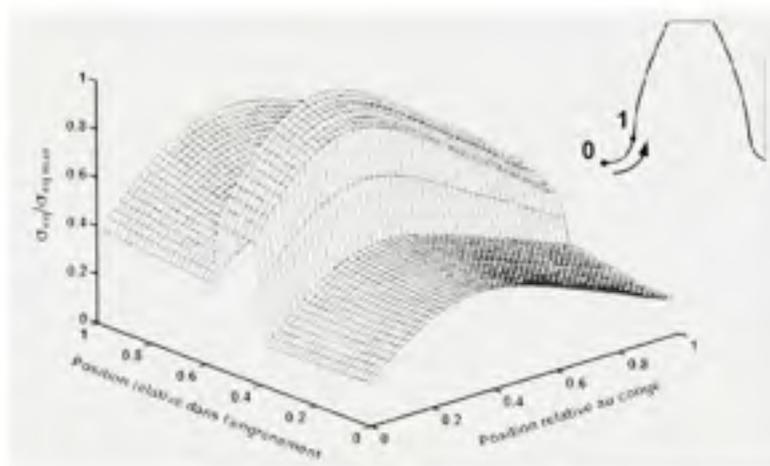


Figure 4.5 σ_{eq} en fonction des positions relatives au congé et de l'engrènement.

Il est à noter, que selon les caractéristiques de la roue (c.-à-d. m , n , φ et r_f), l'état de contrainte au congé variera et incidemment, la zone critique sera différente en grandeur et en position.

4.1.6.2 Position critique dans l'engrènement

Selon les Figures 4.1 et 4.5 et en tenant compte de la proportionnalité du chargement, la position critique de l'engrènement apparaît clairement (c.-à-d. plus haut point de contact simple). Pour le cas analysé, cette position est à 59% de l'engrènement. Il sera alors possible d'appliquer le critère D en ne considérant que l'état de contrainte de cette position.

²¹ La position relative au congé de la dent est définie à partir du rayon de racine.

4.1.6.3 Longueur initiale (a_0)

En ce qui concerne la longueur initiale de la fissure (a_0), l'approximation avec la relation (1.5) semble plus rigoureuse qu'une simple évaluation qualitative (voir section 1.3.3). Afin d'être compatibles au chargement en fatigue des engrenages, les valeurs ΔK_{th} et S_c de l'équation (1.5) devront être définies pour $R = 0$. Avec les relations de Goodman modifiée éq.(4.2)a et de Gerber éq.(4.2)b (Shigley, Mischke et Budynas, 2004), il est possible d'évaluer S_c à partir de sa valeur pour $R = -1$ (S_{cr}).

$$a) \frac{S_c}{S_{cr}} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1 \quad b) \frac{S_c}{S_{cr}} + \left(\frac{\sigma_m}{S_u} \right)^2 = 1 \quad (4.2)$$

Où S_u est la contrainte ultime en tension du matériau. Puisque σ_m est largement inférieure à la contrainte d'écoulement (S_y), l'équation de Goodman modifiée sera plus conservatrice. Une autre approche, basée sur la dissipation d'énergie causée par l'endommagement, estime a_0 de la façon suivante (Lemaître et Desmorat, 2005) :

$$a_0 \approx \frac{J_{Ic}}{\frac{S_u^2}{2E} \cdot D_c + S_u \cdot \varepsilon_r^{pl}} \quad (4.3)$$

Où J_{Ic} est la ténacité du matériau en terme d'énergie potentielle, ε_r^{pl} la déformation plastique réelle à la rupture et D_c , la valeur critique d'un critère d'endommagement propre au matériau. Cette approche offre l'avantage d'être indépendante du chargement. De plus, elle tient compte des déformations plastiques microscopiques à l'origine des fissures. Cependant les paramètres D_c et ε_r^{pl} ne sont pas simples à évaluer (Lemaître et Desmorat, 2005). Et puisque les valeurs de a_0 auxquelles conduit l'équation (4.3), sont du même ordre que celles du Tableau 1.1 évaluées avec éq.(1.5) (c.-à-d. 0.1 à 0.5mm (Lemaître et Desmorat, 2005)), la première technique d'estimation de a_0 semble plus justifiée de par sa simplicité d'intégration.

4.1.6.4 Orientation initiale (θ_0)

L'hypothèse d'une initiation perpendiculaire à la surface présentée à la section 1.3.4, suppose que la fissure s'initie selon le plan de sollicitation maximale, en l'occurrence celui de $\sigma_{I \max}$ pour le critère de tension maximale (voir Figure 1.9). Dans ce projet, une approche similaire sera utilisée. Cependant, en fonction du critère (D), le plan de sollicitation maximale ne sera pas nécessairement normal à la surface.

4.1.6.5 Durée de vie résiduelle en initiation (N_i)

Tel que mentionné à la section 2.5.2, il est très difficile d'estimer le nombre de cycles (N_i) nécessaire à l'initiation d'une fissure de taille macroscopique. D'autre part, compte tenu des caractéristiques du régime de fatigue endurance (c.-à-d. $\sigma_a \rightarrow S_e$), le nombre de cycles N_i devrait être assez près de celui à la rupture (c.-à-d. $N_f \approx N_r$) (Singh, 2002). Il est donc suggéré, dans ce projet, d'opter pour une méthode d'analyse conventionnelle utilisant les courbes S-N qui permettra d'obtenir une bonne estimation de N_i . Évidemment, si la contrainte imposée est inférieure à S_e , la durée de vie en initiation sera théoriquement infinie et il sera impossible de définir une valeur discrète pour N_i . En fait, cette hypothèse de calcul surestime quelque peu la durée de vie totale en fatigue puisque le nombre de cycles en propagation (N_p) est inclus dans N_f en utilisant les courbes S-N (voir section 2.1).

4.2 Types de critère en fatigue multiaxiale

La fatigue des engrenages étant caractérisée, il s'agit maintenant de définir un critère d'initiation (D) approprié, en fonction des hypothèses d'analyse formulées. En fatigue multiaxiale, quatre catégories de critères existent. Il y a ceux basés sur la contrainte et sur la déformation, ceux basés sur l'énergie de déformation et ceux basés sur le plan critique de sollicitation (Ellyin et Kujawski, 1993). Il existe aussi une approche basée sur la définition d'une distance critique qui depuis quelques années, suscite beaucoup d'intérêts (Susmel, 2007; Taylor, 2007).

4.2.1 Approche basée sur la contrainte

Pour les cas d'analyse générale en fatigue, cette technique est la plus courante. En fatigue multiaxiale, cette méthode représente en quelque sorte une extension des critères développés pour les cas statiques basés sur l'écoulement (c.-à-d. Tresca ou Von Mises). L'un des critères très populaires, est celui de Von Mises où il y a rupture lorsque la contrainte d'amplitude équivalente ($\sigma_{a,eq}$), atteint la limite d'endurance (S_e) (éq.(4.4)) (Ellyin, 1988).

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1})^2} = S_e \quad (4.4)$$

Il y a aussi le critère de Tresca où la rupture est caractérisée en fonction de la contrainte de cisaillement maximale (τ_{max}) orientée à 45° par rapport aux plans principaux (Suresh, 1998). Plusieurs autres critères de ce type existent, mais ils sont, pour la plupart, dérivés des deux précédents (Ellyin, 1988). De façon générale, cette approche s'applique très bien au cas de fatigue endurance et peut facilement être reliée aux courbes S-N. Par contre, aucune information sur l'orientation initiale du défaut n'est fournie lorsqu'il s'agit d'un critère de type « Von Mises ». Le critère de Tresca arrive cependant à définir un plan de sollicitation critique, mais il favorise le cisaillement au détriment de la contrainte normale en tension, nécessaire à l'ouverture et la propagation des microfissures.

4.2.2 Approche basée sur la déformation

Les critères s'appuyant sur la déformation, s'appliquent surtout dans les cas de fatigue oligocyclique (c.-à-d. $N_f < 10^4$) où les contraintes entraînent des déformations plastiques importantes. En général, cette approche utilise la relation de Coffin-Manson (éq. (1.2)) où la variation de la déformation équivalente ($\epsilon_{a,eq}$) intervient, pour les cas de fatigue multiaxiale. Cependant, puisque la fatigue en flexion des engrenages est en régime d'endurance et que les déformations plastiques y sont pratiquement nulles, ce type d'approche n'est pas approprié.

4.2.3 Approche basée sur l'énergie de déformation

Les approches précédentes présentent des modèles relativement simples. Cependant, ils ne reflètent pas le processus d'endommagement lié aux interactions contrainte/déformation (You et Lee, 1996). La méthode énergétique, quant à elle, propose une approche plus phénoménologique supposant qu'une partie de l'énergie de déformation cause un dommage irréversible menant à la rupture en fatigue. Macha et Sonsino (1999) ont subdivisé en trois catégories les différentes approches de ce type : 1 - les critères basés sur l'énergie élastique (w_{el}); 2 - ceux basés sur l'énergie plastique (w_{pl}) et 3 - ceux basés sur l'énergie totale ($w_t = w_{el} + w_{pl}$) de déformation. Pour un cycle de chargement, l'énergie de déformation (w_c) se définit par la relation générale suivante (Ellyin, 1988) :

$$w_c = \int_{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (4.5)$$

Où les composantes des tenseurs σ_{ij} et ϵ_{ij} dépendent des hypothèses posées (i.e w_{el} , w_{pl} ou w_t). Encore une fois, puisque ϵ_{pl} est négligeable dans la présente étude, seuls les critères basés sur w_{el} s'appliquent. Il existe diverses variantes dans le calcul de w_{el} , certains utilisent la densité d'énergie élastique totale, d'autres seulement la densité d'énergie de distorsion et même la densité moyenne sur un cycle (Macha et Sonsino, 1999).

À première vue, cette approche correspond à la philosophie d'analyse de ce projet, voulant une caractérisation macroscopique liée à la nature globale du phénomène. Par contre, dans sa forme de base, la méthode ne donne aucune indication sur l'orientation de la fissuration. Aussi, en ne considérant que ϵ_{el} , la pertinence de l'approche devient discutable, puisque dans bien des cas, elle correspond aux critères de Tresca ou Von Mises (Ellyin et Kujawski, 1993; Macha et Sonsino, 1999). De plus, il a été observé à travers différentes publications, que ces critères nécessitent souvent l'utilisation de paramètres d'ajustement (Ellyin et Kujawski, 1993) ou de matériau (Cui, 2002; Fatemi et Yang, 1998; Macha et Sonsino, 1999), souvent difficiles à obtenir ou peu fiables. Cette technique peut donc s'avérer difficile à appliquer (You et Lee, 1996), sans pour autant fournir la précision souhaitée.

4.2.4 Approche basée sur le plan critique

Cette approche consiste principalement à réduire l'état de contrainte multiaxial en un système uniaxial équivalent, selon une orientation où les contraintes sont critiques. Concrètement, il s'agit de combiner dans un plan, une contrainte normale (σ_n) et de cisaillement (τ_n) en surface (Karolczuk et Macha, 2005). Ce type de critère se veut une interprétation physique des mécanismes d'endommagement basée sur l'hypothèse que l'amplitude du cisaillement et de la contrainte normale en tension, dans un plan critique, sont les paramètres qui contrôlent la fatigue (Ellyin et Kujawski, 1993).

Cette méthode présente l'avantage de définir l'orientation du plan de fissuration. Cependant, l'absence de contrainte normale en surface (voir Figure 4.1b), restreint la méthode au critère $\sigma_{1\max}$ (i.e plan perpendiculaire à la surface) ou à celui du τ_{\max} (i.e plan à 45° selon $\sigma_{1\max}$). De plus, l'endommagement sous la surface y est totalement négligé. Pourtant les gradients de contrainte peuvent y être élevés et avoir une incidence sur le comportement en fatigue.

4.2.5 Approche basée sur la distance critique

Le principe de la « distance critique » (L_0), s'applique spécifiquement aux cas où il y a présence de concentration de contrainte. Contrairement aux approches précédentes, celle-ci ne considère pas l'endommagement de manière ponctuelle, mais bien sur une longueur caractéristique du matériau (c.-à-d. L_0) définie par l'équation (4.6) (Taylor, 2007), qui est identique à la formulation de a_{th} (éq.(1.5)).

$$L_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\Delta K_{th}}{2S_f} \right)^2 \quad (4.6)$$

Les fondements de cette méthode proviennent de l'hypothèse que la contrainte réelle à proximité d'un concentrateur de contrainte, n'atteint pas celle prédite par les lois de la mécanique des milieux continus (Susmel, 2007). En contrepartie, il est possible d'évaluer

une valeur représentative (σ_{eff}) de la contrainte en moyennant celle-ci sur une « ligne critique » (L_0) (éq.(4.7)).

$$\sigma_{eff}(r, \theta) = \frac{1}{2L_0} \int_0^{2L_0} \sigma(r, \theta) dr \quad (4.7)$$

La valeur moyenne peut également être estimée par l'évaluation des contraintes en un « point critique » situé à une distance $L_0/2$ (Susmel, 2007). De cette façon, l'expression de σ_{eff} devient beaucoup plus simple (éq.(4.8)).

$$\sigma_{eff}(\theta) = \sigma\left(r = \frac{L_0}{2}, \theta\right) \quad (4.8)$$

La Figure 4.6 schématise les concepts de la ligne critique (L_{Cr} , éq.(4.7)) et du point critique (Pt_{Cr} , éq.(4.8)).

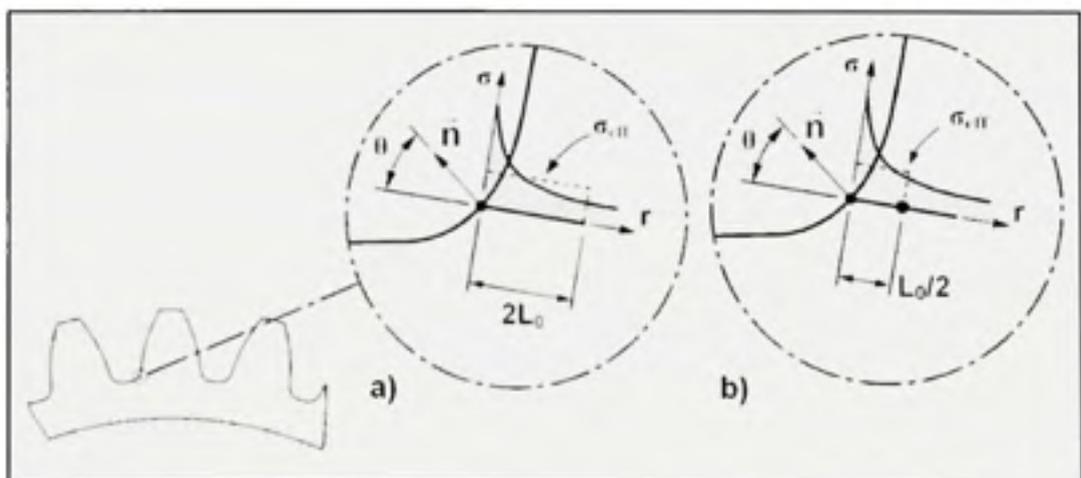


Figure 4.6 Schématisation de σ_{eff} selon L_{Cr} . (a) et Pt_{Cr} . (b).

L'application de ce concept à la fatigue endurance s'effectue simplement en posant l'égalité de l'équation (4.9), où $\sigma_{a,eff}$ est la contrainte d'amplitude effective.

$$\sigma_{a,eff} = S_e \quad (4.9)$$

En fatigue multiaxiale, la méthode peut être appliquée conjointement à l'approche du plan critique dont l'orientation (θ_0) est définie selon l'angle maximisant une combinaison de τ_n et σ_n (Figure 4.7) décrite selon une fonction $f(\sigma_n, \tau_n)$ moyennée sur L_0 .

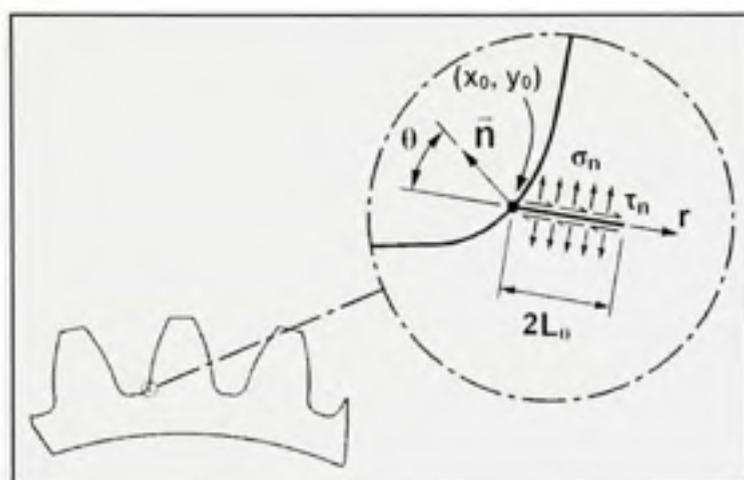


Figure 4.7 Application du principe de la distance L_0 à l'approche du plan critique.

Le critère d'initiation D peut se définir en fonction des coordonnées (x,y) à la surface et de l'inclinaison du plan d'analyse θ . En utilisant l'approche L_{Cr} , cela se traduit par l'équation (4.10) et l'équation (4.11) correspond à l'approche du Pt_{Cr} .

$$D_{L_{Cr}}(x, y, \theta) = \frac{1}{2L_0} \int_0^{2L_0} f(\sigma_n, \tau_n) dr \quad (4.10)$$

$$D_{Pt_{Cr}}(x, y, \theta) = f(\sigma_n, \tau_n) \Big|_{r=L_0} \quad (4.11)$$

Concernant $f(\sigma_n, \tau_n)$, Seweryn et Mroz (1995) ont proposé une fonction utilisant les propriétés du matériau à la rupture (c.-à-d. S_u et τ_u). Cependant, selon Taylor (2007), les propriétés du matériau en chargements cycliques (c.-à-d. S_e et τ_e (contrainte d'endurance en

cisaillement)) sont plus appropriées pour les analyses en fatigue. La fonction proposée par Seweryn et Mroz (1995) a donc été ajustée selon ces recommandations (éq.(4.12)).

$$f_*(\sigma_n, \tau_n) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{S_c}\right)^2 + \left(\frac{\tau_n}{\tau_c}\right)^2} & \text{pour } \sigma_n \geq 0 \\ \frac{|\tau_n|}{\tau_c} & \text{pour } \sigma_n < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Par contre, cette relation ne correspond pas exactement à l'hypothèse de départ voulant que σ_n et τ_n soient essentiels à l'endommagement. En effet, l'interprétation de l'équation (4.12) conduit à l'hypothèse que seulement l'une des deux composantes de contrainte (c.-à-d. σ_n ou τ_n) doit suffire à l'initiation de fissures. De plus, l'effet bénéfique des contraintes en compression est négligé par cette expression. Aussi, afin de traduire l'effet combiné de σ_n et τ_n supposé intrinsèque au processus d'initiation, la fonction $f(\sigma_n, \tau_n)$ suivante est proposée :

$$f_*(\sigma_n, \tau_n) = \frac{\sigma_n}{S_c} \cdot \frac{|\tau_n|}{\tau_c} \quad (4.13)$$

Cette nouvelle formulation permet de prendre en considération l'interrelation de nature vectorielle qui existe entre σ_n ou τ_n , contrairement à la fonction proposée par Seweryn et Mroz (1995) qui est scalaire. En appliquant l'équation (4.13) au critère D (c.-à-d. éq.(4.10) ou éq.(4.11)), l'approche de la distance critique correspond parfaitement au type de critère d'initiation proposé en début de ce chapitre, mettant à l'avant-plan l'effet des interactions entre la tension et le cisaillement. Bien que la méthode du Pt_{Cr} s'applique plus facilement, la forme de l'équation (4.10) (c.-à-d. L_{Cr}) donne plus de sens au critère, où la zone d'endommagement ayant une grandeur physique (c.-à-d. $2L_0$) semble plus réaliste.

Selon ces observations, cette approche est tout indiquée à l'analyse de la fatigue des engrenages. En fait, ce critère d'endommagement est une combinaison de l'approche basée sur la contrainte et celle du plan critique de sollicitation, adaptée aux problèmes de

concentration de contrainte. Par conséquent, il s'applique parfaitement aux cas de fatigue en régime d'endurance et permet la définition directe de toutes les caractéristiques géométriques de la fissure initiale (c.-à-d. x_0 , y_0 , a_0 , et θ_0).

4.3 Application du critère d'initiation

Suite aux conclusions de la section précédente, la méthode de la ligne critique (L_{Cr}) a été retenue à titre de critère d'endommagement. Cette section présente quelques détails de son implantation au modèle numérique, ainsi que son application à la fatigue des engrenages.

4.3.1 Implantation de la méthode de la ligne critique

Contrairement au critère de tension ou de cisaillement maximal, le calcul du point d'initiation par l'approche de la ligne critique (D_{Lcr}) n'est pas direct, puisqu'il fait intervenir deux paramètres : la position (xy) et l'angle du plan de sollicitation (θ). La procédure de calcul utilisée dans ce projet comporte deux étapes. La première consiste à évaluer le critère à chacun des nœuds de la région critique afin de déterminer celui où D_{Lcr} est maximal. Cette tâche implique la définition du plan de sollicitation critique pour chaque nœud, ce qui est réalisé par un processus itératif basé sur la méthode de Newton-Raphson, appliquée à la relation (4.14).

$$\frac{dD_{Lcr}}{d\theta} = 0 \quad \& \quad \frac{d^2D_{Lcr}}{d\theta^2} < 0 \quad (4.14)$$

Il faut mentionner que pour une position et une orientation données, le calcul intégral de D_{Lcr} est effectué par une intégration numérique utilisant la méthode des points de Gauss et que la dérivée de D_{Lcr} est estimée par un polynôme de Lagrange. La deuxième étape du calcul du point d'initiation, est de définir précisément la position critique autour du nœud où D_{Lcr} est maximal. Pour ce faire, la méthode de Newton-Raphson est également utilisée, mais cette fois-ci pour résoudre le système d'équations non linéaires éq.(4.15).

$$\begin{pmatrix} \frac{dD_{Lcr}}{d\xi} \\ \frac{dD_{Lcr}}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad \frac{d^2 D_{Lcr}}{d\xi^2}, \frac{d^2 D_{Lcr}}{d\theta^2} < 0 \quad (4.15)$$

Où ξ représente la position du point de calcul de D_{Lcr} par rapport au système de coordonnées local à l'élément auquel appartient le nœud critique. Lorsque ce nœud appartient à plus d'un élément, ceux-ci doivent tous être inclus dans le calcul. Cette procédure conduit donc au plan critique d'orientation θ_0 passant par le point ξ_0 , pouvant être transformé en coordonnées globales x_0 et y_0 .

4.3.2 Estimation de la fissure initiale d'une roue d'engrenage

Le critère D_{Lcr} a été appliqué à une roue d'acier 1045 ayant la même configuration qu'à la Figure 4.1. Les paramètres du matériau utilisés ont été tiré de Susmel (2007) puisque ceux-ci étaient donnés pour $R = 0$. Alors, en utilisant les valeurs de $S_c = 224$ MPa et $\Delta K_{th} = 6.9$ $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$, une distance critique (L_0) de 0.076 mm a été déterminée par la relation (4.6). En ce qui concerne la contrainte d'endurance en cisaillement (τ_c) pour la fonction $f(\sigma_n, \tau_n)$, celle-ci a été estimée par l'équation (4.16) se basant sur le critère de Von Mises transposé à la fatigue.

$$\tau_c \approx \frac{S_{cr}}{\sqrt{3}} \quad (4.16)$$

Aussi, τ_c a été défini à partir de la contrainte d'endurance en chargement complètement renversé ($S_{cr} = 303$ MPa (Susmel, 2007)), car σ_m affecte peu le comportement en fatigue en cisaillement (voir section 4.1.3). La valeur obtenue pour τ_c est 175 MPa. Le Tableau 4.1 présente les résultats obtenus avec D_{Lcr} appliqué avec les relations $f_t(\sigma_n, \tau_n)$ et $f_s(\sigma_n, \tau_n)$ (i.e. éq. (4.12) et (4.13)). À titre de comparaison, la méthode du Pt_{Cr} a également été appliquée, de même que les critères de tension ($D\sigma_{1max}$) et de cisaillement maximal ($D\tau_{max}$). À l'égard de la position du point d'initiation, l'ensemble des critères présente des résultats équivalents où une variation de moins de 0.05mm sur r_0 est enregistrée.

Tableau 4.1

Résultats des critères d'initiation pour une roue d'engrenage

#	Critères (D)	x_0 (mm) [†]	y_0 (mm) [†]	r_0 (mm) [†]	θ_0 (°) [†]
1	$D_{\sigma_{1max}}$	-4.340	55.184	55.354	0.0
2	$D_{\tau_{max}}$	-4.340	55.184	55.354	0.0 ± 45
3	$D_{L_{Cr.}} \& f_+(\sigma_n, \tau_n)$	-4.297	55.232	55.399	0.5
4	$D_{L_{Cr.}} \& f_-(\sigma_n, \tau_n)$	-4.316	55.210	55.378	32.9
5	$D_{P_{1Cr.}} \& f_+(\sigma_n, \tau_n)$	-4.306	55.223	55.391	0.3
6	$D_{P_{1Cr.}} \& f_-(\sigma_n, \tau_n)$	-4.297	55.235	55.402	-31.3

† - Les coordonnées x_0 , y_0 et le rayon ($r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$), sont définis à partir d'un point origine situé au centre de la roue dont l'axe y est parallèle à l'axe de la dent analysée. L'angle θ_0 est défini selon la Figure 4.7.

Du côté de l'orientation initiale de la fissure (θ_0), comme prévu la fonction $f_+(\sigma_n, \tau_n)$ ne parvient pas à faire ressortir l'interaction entre σ_n et τ_n et par conséquent, elle présente des résultats similaires au critère $D_{\sigma_{1max}}$. En contrepartie, les critères $D_{L_{Cr.}}$ et $D_{P_{1Cr.}}$ combinés à la fonction $f_-(\sigma_n, \tau_n)$, donnent les résultats escomptés en définissant un plan de sollicitation critique entre les plans extrêmes définis par σ_{1max} et τ_{max} . Cependant, le critère $D_{P_{1Cr.}}$ génère un angle θ_0 qui est à l'opposé de celui de $D_{L_{Cr.}}$. Ces observations sont illustrées à la Figure 4.8 où les critères sont identifiés par leur numéro au Tableau 4.1.

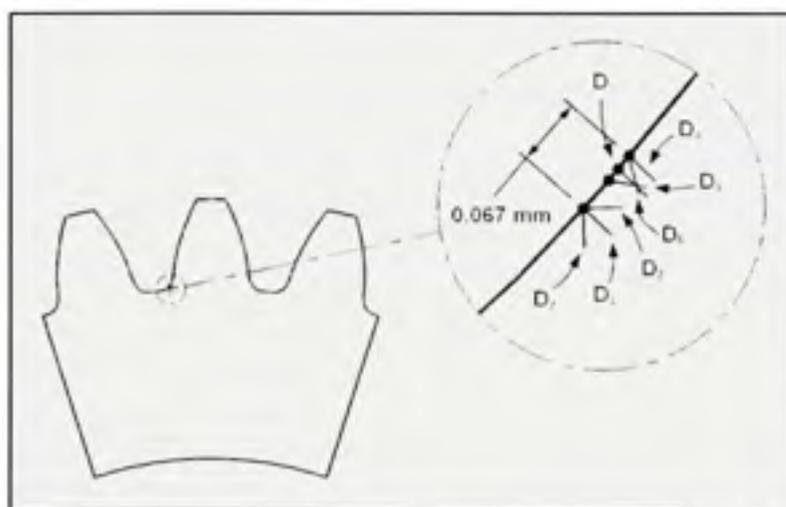


Figure 4.8 Comparaison des critères d'initiation.

L'application du critère $D_{L_{Cr}}$ peut s'avérer difficile, puisque les valeurs réelles de ΔK_{th} et τ_c sont rarement publiées. Celles-ci devront donc, souvent être estimées de manière grossière, à partir de concepts théoriques comme l'équation (4.16) ou par comparaison à des matériaux similaires. Afin d'analyser la sensibilité de $D_{L_{Cr}}$ par rapport à la variation de ces paramètres, différentes valeurs de L_0 et de τ_c ont été appliquées au cas précédent. La Figure 4.9 montre l'effet de L_0 sur l'orientation de la fissure (θ_0) et sur la position du point d'initiation en surface (r_0).

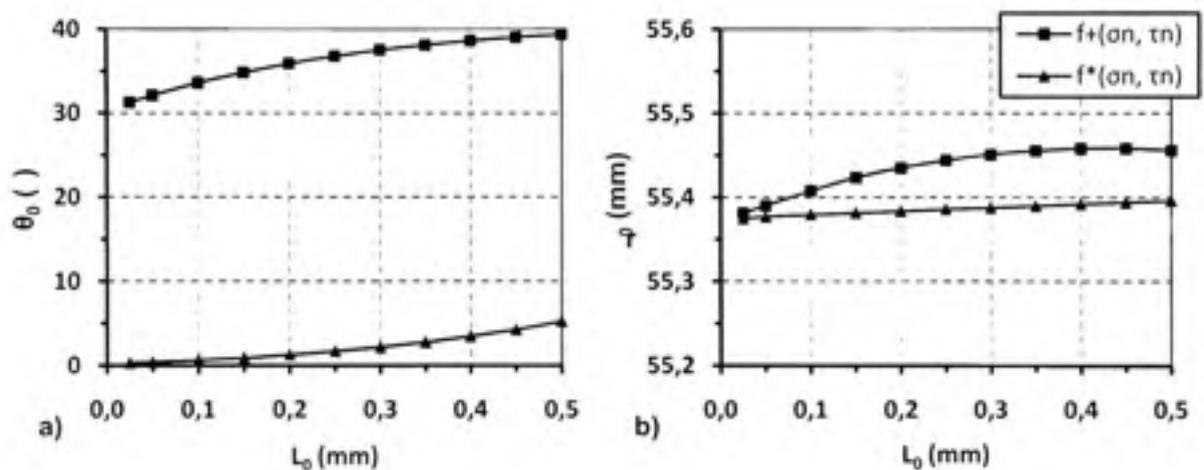


Figure 4.9 Variation de θ_0 (a) et r_0 (b) en fonction de la distance critique L_0 .

À première vue, la variation de L_0 n'engendre pas de changements majeurs par rapport aux caractéristiques de la fissure initiale. Cependant, la fonction $f(\sigma_n, \tau_n)$ semble offrir une meilleure stabilité à $D_{L_{Cr}}$, quant à la position r_0 avec une variation d'environ 0.02 mm, mais engendrent tout de même une variation substantielle de θ_0 (c.-à-d. $\approx 10^\circ$). La Figure 4.10 illustre plutôt l'effet de τ_c sur $D_{L_{Cr}}$ où L_0 a été maintenue à 0.076 mm.

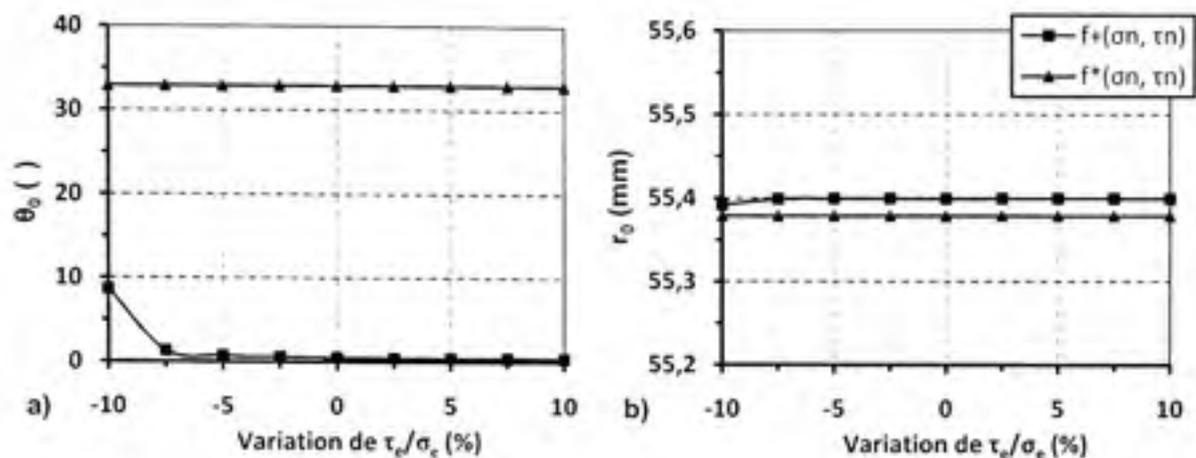


Figure 4.10 Variation de θ_0 (a) et r_0 (b) en fonction du rapport τ_n/σ_e

La variation nulle de θ_0 et r_0 pour D_{LCr} et $f_*(\sigma_n, \tau_n)$, était prévisible puisqu'en multipliant les rapports σ_n/S_e et τ_n/τ_e , les coefficients S_e et τ_e deviennent de simples constantes multiplicatives qui n'affectent en rien la variation de D_{LCr} selon x , y et θ . Par ailleurs, la variation de τ_e a également peu d'effet sur D_{LCr} associé à $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ où encore une fois, l'effet du cisaillement est difficilement traduit par ce critère. Mais, lorsque τ_e est plus faible, le rapport τ_n/τ_e devient plus important par rapport à σ_n/S_e et par conséquent, le plan critique dévie du plan normal de quelques degrés (Figure 4.10).

4.4 Conclusion

En résumé, la section 4.1 a démontré qu'en 2D, la fatigue des engrenages en flexion pouvait être caractérisée uniquement par l'état de contrainte à la position critique de l'engrènement, de par la proportionnalité du chargement. Aussi, la revue des différents types de critères d'endommagement a permis de conclure qu'en combinant l'approche basée sur la contrainte et celle du plan critique selon le principe de la distance L_0 , le critère ainsi formé (i.e D_{LCr}) constituait le candidat idéal à la fatigue multiaxiale d'endurance des engrenages. De plus, en intégrant la fonction $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ proposée à D_{LCr} , l'objectif principal de ce chapitre a été atteint en obtenant un critère d'endommagement caractérisant l'interrelation de la tension et du cisaillement où les paramètres géométriques x_0 , y_0 , θ_0 et a_0 peuvent tous être définis.

Il faut cependant préciser, qu'à ce stade de développement, le critère $D_{L,Cr}$ ne représente qu'une ébauche. Entre autres, le sens physique de $f(\sigma_n, \tau_n)$, dont la signification est plutôt qualitative pour l'instant, devra être approfondi et interprété par les principes de la mécanique des milieux continus. Néanmoins, ce critère permet une quantification objective des paramètres de la fissure initiale où les caractéristiques du matériau et du chargement sont utilisées de manière cohérente par rapport aux phénomènes d'endommagement.

CHAPITRE 5

PROPAGATION DES FISSURES

Ce chapitre est lié à la dernière étape de développement du modèle. Il couvre donc la simulation de la propagation des fissures en fatigue en flexion. La section 1.6, a montré que la MREL fournissait les outils nécessaires à la caractérisation de ce phénomène. Or, l'objectif du chapitre 5 est d'incorporer les concepts appropriés de la MREL au modèle numérique en vue de prédire la trajectoire des fissures. Pour ce faire, les règles et concepts de la MREL ainsi que les lois et critères de propagation seront passés en revue dans l'optique d'une application à la fatigue des engrenages. Ensuite, l'analyse numérique en propagation de fissure sera traitée afin de développer une modélisation adéquate.

5.1 Concepts d'analyse en propagation de fissure

La revue de la littérature a soulevé plusieurs questions quant à la façon d'appliquer la MREL à la fatigue des engrenages. Notamment, en ce qui a trait à la propagation en mode mixte, l'effet de la plasticité en bout de fissure et l'applicabilité de la MREL. Cette section présente les règles d'application de la MREL, mais aussi quelques concepts qui se prêtent bien à l'étude de la propagation des fissures de flexion des engrenages.

5.1.1 État plan de contraintes et état plan de déformations

L'étape initiale d'une analyse en propagation de fissure, est de vérifier l'état plan (c.-à-d. σ_{plane} ou ϵ_{plane}). En appliquant la règle générale de Hertzberg (1996), présentée à la section 1.6.2., les relations suivantes doivent être respectées, pour chacun des états plan :

$$\underbrace{t \geq \frac{5}{3\pi} \left(\frac{K}{S_y} \right)^2}_{\epsilon_{\text{plane}}} \Rightarrow K \leq S_y \sqrt{\frac{3\pi t}{5}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{t \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{S_y} \right)^2}_{\sigma_{\text{plane}}} \Rightarrow K \geq S_y \sqrt{2\pi t} \quad (5.1)$$

Le paramètre « t », représente la largeur des roues (habituellement « F ») (Figure 5.1). En admettant que K_{II} soit négligeable, la valeur de K des expressions (5.1) peut être associée à K_I uniquement.

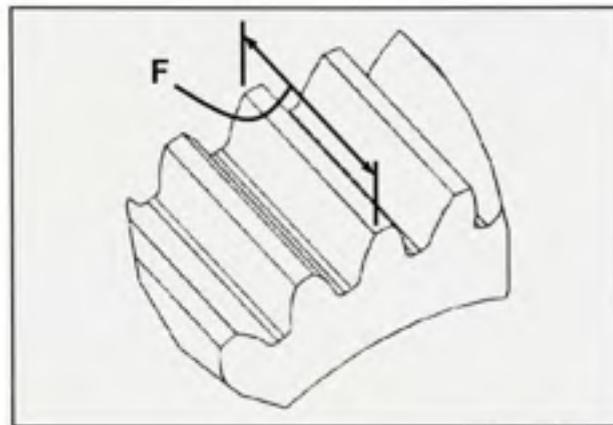


Figure 5.1 Définition de la largeur « F » d'une roue d'engrenage.

5.1.2 Applicabilité de la MREL

Suite à la vérification de l'état plan de sollicitation, il faut s'assurer de l'applicabilité de la MREL. En effet, les concepts de la MREL sont fondés sur l'hypothèse d'une faible zone plastique (r_p) en bout de fissure. Dans ce projet, la taille admissible pour r_p (Figure 5.2) a été définie selon la relation (5.2), tirée de la section 1.6.2.

$$d \geq 8 \cdot r_p \quad (5.2)$$

Où « d » représente toutes distances entre le bout de la fissure et le contour extérieur de la composante. Avec les expressions de r_p en ε_{plane} et en σ_{plane} (éq.(1.6)), lorsque K_{II} est négligé, l'équation (5.2) engendre le critère d'admissibilité suivant :

$$\underbrace{d \geq \frac{4}{3\pi} \left(\frac{K_I}{S_y} \right)^2}_{\varepsilon_{plane}} \Rightarrow K_I \leq \frac{S_y}{2} \sqrt{3\pi d} \quad \text{ou} \quad \underbrace{d \geq \frac{4}{\pi} \left(\frac{K_I}{S_y} \right)^2}_{\sigma_{plane}} \Rightarrow K_I \leq \frac{S_y}{2} \sqrt{\pi d} \quad (5.3)$$

En fatigue en flexion des engrenages, deux distances sont critiques : 1 - la longueur de la fissure (d_1) et 2 - la longueur du plus court segment entre le bout de la fissure et le côté en compression de la dent (d_2) (Figure 5.2). Lorsqu'il s'agit de roues à jante mince, il faut aussi vérifier le critère avec la distance entre la jante et le bout de la fissure.

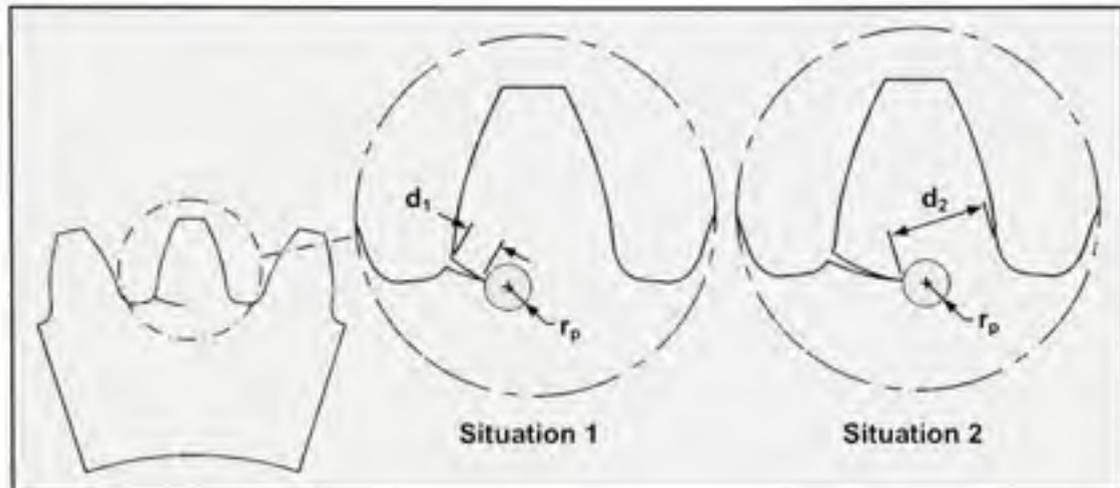


Figure 5.2 Schématisation du rayon de plasticité « r_p » et de la distance « d ».

5.1.3 Résistance résiduelle et longueur de fissure critique (a_c)

Une pratique courante en analyse de tolérance au dommage, est d'évaluer la résistance résiduelle tout au long de la progression d'une fissure. Cette technique consiste à définir la valeur critique du chargement (W_c) en fonction de la longueur de la fissure (a_c) où la propagation instable est atteinte (c.-à-d. $K = K_c$) ou encore lorsqu'il y a plastification de la section (c.-à-d. $\sigma = S_y$). En fatigue en flexion des engrenages, il est plus facile et plus conservateur de considérer qu'il y a plastification lorsque la contrainte principale en compression du côté non chargé de la dent, atteint S_y . À titre d'exemple, les paramètres de l'analyse de la section 4.3.2 sont repris, où S_y vaut 390 MPa (Susmel, 2007) et K_{lc} environ 95 MPa \sqrt{m} (Dowling, 1999)²² pour l'acier 1045. L'état de ε_{plane} a été supposé et la valeur de K_{II} a été négligée, justifiant ainsi l'utilisation de K_{lc} . La Figure 5.3 trace le diagramme de résistance résiduelle pour ce cas d'analyse où « a/m » représente le rapport de la longueur de

²² La valeur de K_{lc} pour l'acier 1045 est une estimation obtenue par extrapolation.

la fissure sur le module de la roue et « W_c/W_y » celui de la charge critique sur celle nécessaire à l'écoulement²³.

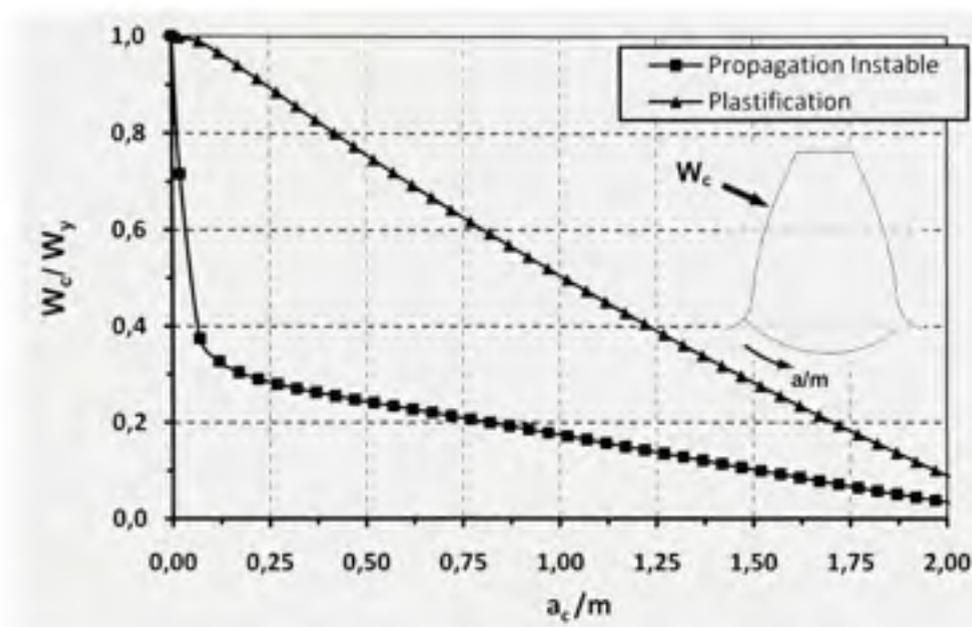


Figure 5.3 *Diagramme de résistance résiduelle.*

Ce diagramme montre que pour une fissure allant jusqu'à 2 fois la valeur du module (m), il y aura rupture fragile de la dent sans plastification du côté en compression lorsque la charge atteindra W_c , la valeur W_c associée à la propagation instable étant inférieure à W_c induisant la plastification. Avec les engrenages la charge W est constante, le diagramme de résistance résiduelle devient donc surtout utile à la définition d'une longueur de fissure critique (a_c).

5.1.4 Propagation des fissures en mode mixte (K_{eq})

Tel que mentionné à la section 2.1, la mixité des modes accélère le taux de propagation (da/dN) des fissures. Cet effet peut être considéré par l'entremise d'un FIC équivalent (K_{eq}). La section 1.6.3.2 présentait certaines formulations de K_{eq} qui ont été appliquées aux engrenages. Cependant, d'autres formulations de K_{eq} ont été publiées. Entre autres, le

²³ L'analyse en propagation, nécessaire au diagramme, a été effectuée selon la position critique de l'engrènement et le critère de propagation σ_{0max} . La fissure initiale a été définie selon $D_{L,Cc}$ et $f_c(\sigma_n, \tau_n)$.

modèle proposé par Tanaka (1974) (eq.(5.4)), semble assez populaire (Guo, Srivatsan et Padovan, 1994; Qian et Fatemi, 1996; Zhang et al., 2006).

$$K_{eq} = \left(K_I^4 + 8K_{II}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.4)$$

Cette expression de K_{eq} est basée sur l'hypothèse que la fissure se propage en fatigue lorsque la somme en valeur absolue des déplacements atteint une valeur critique dans la région plastique. De plus, il est supposé que les déformations plastiques causées par les charges en mode I et II, ne sont pas interreliées. Néanmoins, comme pour les critères d'endommagement en fatigue initiation, aucune formulation générale de K_{eq} ne semble être acceptée par tous (Guo, Srivatsan et Padovan, 1994). Il faut donc valider le choix de K_{eq} par plusieurs essais expérimentaux, ce qui ne pourra être réalisé dans ce projet.

5.1.5 Plasticité induite en bout de fissure (K_{eff})

Les contraintes résiduelles induites par la plasticité en bout de fissure, influencent aussi la vitesse de propagation des fissures. Cependant, il a été démontré au chapitre 1, que l'analyse de ce phénomène n'est pas simple et qu'il implique plusieurs aspects complexes à traiter (ex. : plasticité, frottement, oxydation, ...). Bien que divers modèles plus ou moins simples soient proposés dans la littérature pour traiter ce phénomène, l'utilisation de ceux-ci devrait être justifiée expérimentalement. Par conséquent, cet aspect de la fatigue des engrenages sera exclu du modèle développé dans cette étude.

5.2 Lois de propagation

Les sections précédentes ont montré que le taux de propagation (da/dN) était influencé par divers facteurs (ex. : mixité des modes, déformations plastiques, matériau). Or, ce projet ayant un volet expérimental restreint, il sera difficile de définir un modèle de propagation précis comprenant toutes les particularités de la fatigue en flexion des engrenages. En contrepartie, un survol général des différentes lois de propagation est proposé afin d'identifier, de façon qualitative, celles qui se prêtent le mieux au cas des engrenages.

5.2.1 Modèle de Paris

La loi de Paris, introduite à la section 1.6.4.1, est probablement le modèle de propagation le plus simple, puisqu'il nécessite seulement deux paramètres : C et n. Le désavantage majeur avec cette loi, est qu'elle ne peut être utilisée qu'en propagation stable (voir Figure 1.15). De plus, le rapport de chargement (R) n'est pas considéré avec ce modèle.

$$\frac{da}{dN} = C[\Delta K]^n \quad (5.5)$$

5.2.2 Modèle de Walker

Le modèle de Walker (éq.(5.6)) ressemble beaucoup à celui de Paris, à la différence que celui-ci tient compte du rapport R. Dans l'expression (5.6), γ est une constante du matériau au même titre que C et n qui, eux, correspondent aux constantes de la loi de Paris (éq.(5.5)). Cependant, puisque R est nul avec la fatigue en flexion des engrenages, la relation de Walker prend une forme identique à la loi de Paris.

$$\frac{da}{dN} = C \left[\frac{\Delta K}{(1-R)^{1-\gamma}} \right]^n \quad (5.6)$$

5.2.3 Modèle de Forman

La loi de Forman (éq.(5.7)) inclut aussi le rapport R, mais également la ténacité à la rupture (K_c). Avec cette forme, l'équation génère une asymptote lorsque K_{max} s'approche de K_c , ce qui permet d'estimer l'accélération de l'avancement de la fissure en propagation instable. Par contre, les constantes de matériau C et n de ce modèle, ne sont pas les mêmes que celles des modèles de Paris et Walker.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (5.7)$$

5.2.4 Modèle de Forman-Newman-de Koning

Le modèle de Forman-Newman-de Koning (FNK) (éq.(5.8)) présente une formulation beaucoup plus détaillée. À la base, il s'agit de la loi de Paris à laquelle plusieurs termes ont été greffés pour tenir compte de l'allure de la courbe da/dN en propagation lente et instable.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1-f)^n (\Delta K)^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K}\right)^p}{(1-R)^n \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_c}\right)^q} \quad (5.8)$$

Les paramètres p , q , C et n sont tous des constantes empiriques liées au matériau, où « n » prend la même valeur que dans la loi de Paris. Aussi, le terme « f » correspond à une fonction permettant d'incorporer l'effet de la fermeture de fissure (c.-à-d. $f = K_{op}/K_{max}$). Celle-ci est définie selon l'équation (5.9) (Newman, 1984).

$$f = \begin{cases} \max(R; A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + A_3 R^3) & \text{pour } R \geq 0 \\ A_0 + A_1 R & \text{pour } -2 \leq R < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Où les coefficients A_i sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_0 &= (0.825 - 0.34\alpha + 0.05\alpha^2) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi \cdot \sigma_{max}}{2 \cdot S_y}\right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ A_1 &= (0.415 - 0.071\alpha) \frac{\sigma_{max}}{S_y} \\ A_2 &= 1 - A_0 - A_1 - A_3 \\ A_3 &= 2A_0 + A_1 - 1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

α est un facteur associé à l'état plan (c.-à-d. σ_{plane} ou ε_{plane}) variant entre 1 et 3 (Newman, 1984) et le rapport σ_{max}/S_y peut être fixé à 0.3 pour la majorité des matériaux (Sander et

Richard, 2006). Comparativement aux autres modèles, celui de FNK nécessite plus de constantes empiriques dont plusieurs sont propres au modèle et donc, non standardisées. Par conséquent, ces paramètres sont rarement publiés et doivent être définis expérimentalement.

5.2.5 Modèle de Collipriest

Comme pour le modèle de FNK, celui de Collipriest (éq.(5.11)) est aussi applicable dans les régions lente et instable de la propagation. Cependant, la formulation de la loi de Collipriest est beaucoup plus simple, puisqu'elle fait intervenir seulement des paramètres standards (c.-à-d. C , n , K_{Ic} et ΔK_{th}) où C et n sont les mêmes que pour le modèle de Paris (Collipriest, 1972).

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (K_{Ic} \cdot \Delta K_{th})^{n/2} \cdot e^{\left[\ln\left(\frac{K_{Ic}}{\Delta K_{th}}\right)^{n/2} \cdot \tanh^{-1} \left[\frac{\ln\left(\frac{\Delta K^2}{(1-R)K_{Ic} \Delta K_{th}}\right)}{\ln\left(\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K_{th}}\right)} \right] \right]} \quad (5.11)$$

Pour un matériau donné, il devient alors facile d'appliquer ce modèle où les constantes empiriques sont habituellement publiées. Cependant, le modèle de Collipriest n'inclut pas l'effet de la fermeture des lèvres de la fissure, mais cet aspect pourrait très bien être incorporé en définissant un K_{eff} avec les relations présentées à la section 1.6.3.3.

5.2.6 Modèle de Kato et al.

Ce modèle (éq.(5.12)), spécifiquement développé pour la caractérisation de la fatigue des engrenages (Kato et al., 1993), est entièrement basé sur la distribution de la dureté (H).

$$\frac{da}{dN} = \begin{cases} \frac{C}{(1-\alpha^n)} \cdot (\Delta K^n - \Delta K_{th}^n) & \text{pour } \Delta K_{th} \leq \Delta K \leq \Delta K_c \\ \frac{C}{(1-\alpha^n)} \cdot \left(\frac{\Delta K^n \cdot K_{Ic}^n}{K_{Ic}^n - \Delta K^n} \right) & \text{pour } \Delta K_c \leq \Delta K \leq K_{Ic} \end{cases} \quad (5.12)$$

Où les paramètres du matériau ΔK_{th} , K_{Ic} , α , n , et C sont tous définis selon H par différentes relations semi-empiriques tirées d'observations expérimentales (Kato et al., 1993). Comme pour les deux modèles précédents, celui-ci est également applicable en propagation lente et instable. Afin de tenir compte de la variation de la dureté du matériau tout au long de la progression de la fissure, Kato et al (1993) ont aussi défini une relation permettant d'estimer celle-ci en fonction de la profondeur (d) (éq.(5.13)).

$$H = (H_2 - H_3) \cdot e^{\left[-A(d-d_2)^2\right]} + H_3 \quad (5.13)$$

$$A = \begin{cases} \frac{-1}{d_2^2} \ln\left(\frac{H_1 - H_3}{H_2 - H_3}\right) & \text{pour } d \leq d_2 \\ \frac{-1}{(d_{eff} - d_2)^2} \ln\left(\frac{550 - H_3}{H_2 - H_3}\right) & \text{pour } d > d_2 \end{cases}$$

Où H_1 est la dureté en surface, H_2 la dureté maximale dont la profondeur est notée d_2 et H_3 la dureté au cœur de la dent. d_{eff} est la profondeur effective pour laquelle H vaut 550 Hv. À première vue, ce modèle comporte tous les éléments nécessaires à l'étude complète de la propagation de fissures des engrenages. Cependant, ce modèle peut être assez contraignant, en ce sens où il nécessite l'évaluation de H pour tout changement de matériau ou de traitement de surface. De plus, il n'est pas certain que les relations semi-empiriques des paramètres ΔK_{th} , K_{Ic} , α , n , et C soient valables pour tous matériaux.

5.2.7 Comparaison des lois de propagation

Afin de mieux juger chacun des modèles de propagation, ceux-ci ont été appliqués à un aluminium 2024-T3 et un chargement non renversé (c.-à-d. $R = 0$) où l'état plan de ϵ_{plane} a été supposé. Malheureusement, le modèle de Kato et al. n'a pu être appliqué en raison des caractéristiques de son application. La Figure 5.4 présente les courbes logarithmiques da/dN obtenues de chaque modèle.

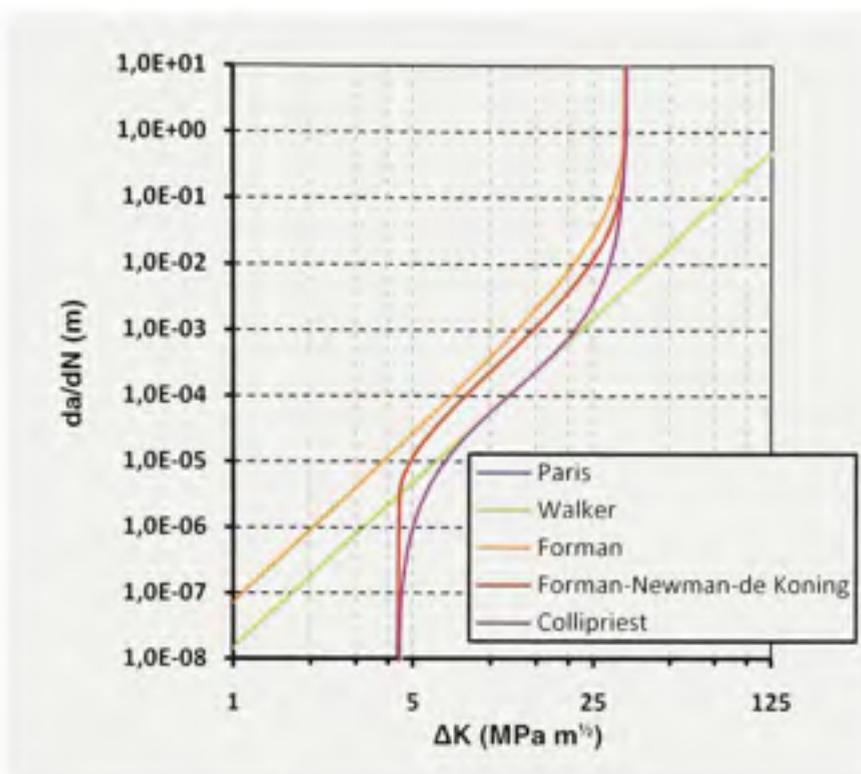


Figure 5.4 *Comparaison des lois de propagation.*

Clairement, les avantages des modèles de FNK et de Collipriest sont illustrés par ce graphe. Par contre, celui de FNK semble être plus conservateur en présentant des taux de propagation plus élevés, ce qui est surprenant étant donné que ce dernier tient compte de l'effet retardateur de la plasticité en bout de fissure. Cependant, les valeurs des constantes empiriques provenant de différentes sources, peuvent être la cause du comportement observé.

Du point de vue des engrenages, l'ordre de grandeur des fissures est souvent comparable à celui des dents et ce, même à partir de l'initiation. Par conséquent, les périodes de propagation lente et instable deviennent assez importantes par rapport à la durée de vie totale en propagation des fissures (N_p). Il devient alors essentiel de définir le comportement des fissures au début et à la fin du processus d'endommagement et donc, les modèles de FNK, Collipriest et Kato et al. semblent préférables à l'étude de la propagation des fissures de flexion dans les engrenages.

5.3 Durée de vie résiduelle en propagation (N_p)

Le calcul de la durée de vie résiduelle en propagation (N_p) correspond simplement à la sommation des incréments « dN » associés à chaque avancement de la fissure (éq.(5.14)).

$$N_p = \sum dN_i \quad (5.14)$$

Selon la notice technique ESDU (Engineering Science Data Unit) #84001, le calcul des valeurs de dN_i peut s'effectuer de la façon suivante :

$$dN_i = \frac{da}{\left(\frac{da}{dN}\right)_{moyen}} = \frac{da}{\sqrt{\left(\frac{da}{dN}\right)_i \cdot \left(\frac{da}{dN}\right)_{i+1}}} \quad (5.15)$$

Cette technique suppose donc que da/dN est constant pour l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et qu'il correspond à la moyenne géométrique de $(da/dN)_i$ et $(da/dN)_{i+1}$.

5.4 Critère d'orientation de la propagation (θ_p)

Puisque la période de propagation des fissures (N_p) est souvent faible en comparaison à la période d'initiation (N_i), l'analyse en propagation est davantage justifiée par la nécessité de caractériser la trajectoire qu'elles prendront. À cet effet, il existe différents critères permettant de définir l'orientation de la propagation (θ_p) (Bouchard, Bay et Chastel, 2003).

5.4.1 Approche basée sur la contrainte principale en tension

Il a été montré précédemment, que cette approche (éq.(5.16)) s'appliquait très bien aux engrenages (voir section 1.6.4.2 et 2.5.3). La simplicité du critère (σ_{00max}) explique qu'il soit largement utilisé, d'autant plus que plusieurs observations expérimentales ont montré sa pertinence (Qian et Fatemi, 1996).

$$\theta_p = \theta_{\sigma_{\theta \max}} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \quad (5.16)$$

5.4.2 Approche basée sur la densité d'énergie de déformation minimale

Ce deuxième critère (S_{\min}) stipule que la propagation s'effectue dans la direction où la densité d'énergie de déformation (dw/dV) est minimale. Cette dernière peut être exprimée en fonction de r et θ , par les équations (5.17) et (5.18).

$$\frac{dw}{dV} = \frac{S(\theta)}{r} = \frac{1}{r} \cdot (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} [(1 - \cos(\theta)) \cdot (\kappa - \cos(\theta))] \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin(\theta) [2 \cos(\theta) - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} [(1 - \cos(\theta)) \cdot (\kappa + 1) + (1 + \cos(\theta)) \cdot (3 \cos(\theta) - 1)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

En considérant un rayon (r) constant, les conditions mathématiques pour définir θ_p , sont les suivantes :

$$\frac{dS(\theta_p)}{d\theta} = 0 \quad \& \quad \frac{d^2S(\theta_p)}{d\theta^2} > 0 \quad (5.19)$$

En mode mixte, la solution exacte est très difficile à obtenir analytiquement. Il est alors préférable d'opter pour une méthode numérique permettant de résoudre les équations non linéaires (ex. : méthode de Newton-Raphson).

5.4.3 Approche basée sur le relâchement de l'énergie de déformation

Avec cette approche, θ_p correspond à la direction pour laquelle l'avancement de la fissure crée un taux de relâchement d'énergie potentielle maximal (\mathcal{G}_{\max}). Ce critère soutient donc l'hypothèse que le système tend vers un équilibre où l'énergie potentielle est minimale. Hussain et al. (1974) ont exprimé \mathcal{G} en fonction de θ pour un avancement de fissure infinitésimal (éq.(5.20)).

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{1}{E'} \left(\frac{2}{3 + \cos^2 \theta} \right) \cdot \left(\frac{\pi - \theta}{\pi + \theta} \right)^{3/2} \cdot \left[K_I^2 (1 + 3 \cos^2 \theta) + 4K_I K_{II} \sin 2\theta + K_{II}^2 (9 - 5 \cos^2 \theta) \right] \quad (5.20)$$

Similairement au critère précédent, les conditions à respecter pour obtenir l'angle de propagation (θ_p), sont les suivantes :

$$\frac{d\mathcal{G}(\theta_p)}{d\theta} = 0 \quad \& \quad \frac{d^2\mathcal{G}(\theta_p)}{d\theta^2} < 0 \quad (5.21)$$

Un détail important quant à l'application de ce critère concerne le signe de θ_p . En effet, puisqu'à la base \mathcal{G} est défini comme suit, en mode mixte (Zhao, 1987) :

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (5.22)$$

L'effet du sens de la sollicitation de la fissure est annulé. La règle suivante doit donc être appliquée afin de conserver cette caractéristique du chargement : lorsque K_{II} est positif, $\theta_p < 0$ et c'est l'inverse lorsque K_{II} est négatif (Shen et Lee, 1982). La forme non linéaire de \mathcal{G} présentée par l'équation (5.20) nécessite également un traitement numérique pour trouver \mathcal{G}_{\max} . Les résultats obtenus de ce critère dépendent de la formulation de \mathcal{G} et des hypothèses

qu'elle suppose. Or, plusieurs expressions de \mathcal{G} ont été proposées dans la littérature (Bouchard, Bay et Chastel, 2003; Shen et Lee, 1982), mais celle de Hussain et al. (1974) est l'une des plus simples à implanter.

5.4.4 Comparaison des critères

Les critères de propagation ont été comparés entre eux pour différents rapports K_{II}/K_I . Les courbes θ_p prédites par chaque critère sont tracées à la Figure 5.5.

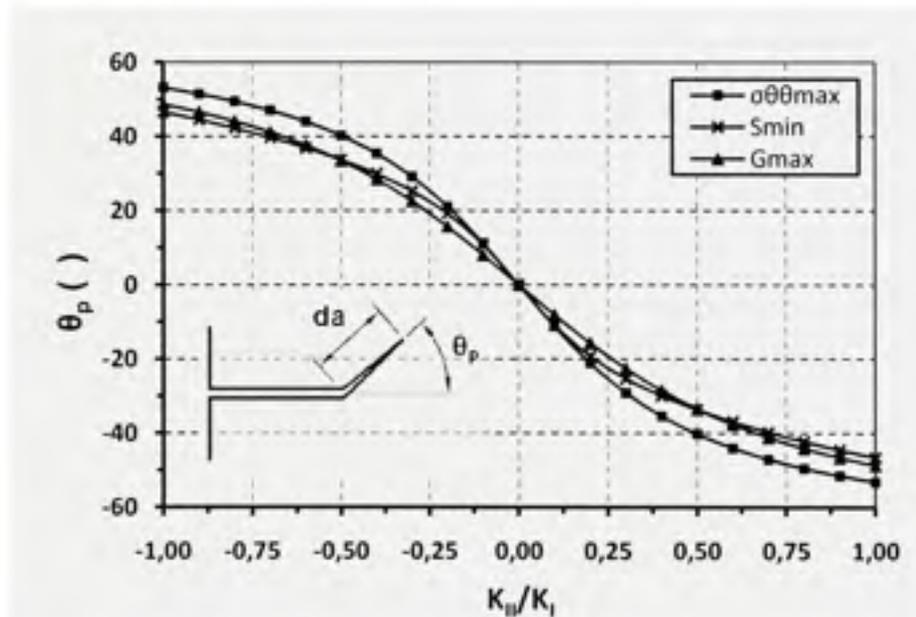


Figure 5.5 Comparaison des critères de propagation.

Ce graphe met en évidence les différences entre les critères, qui sont surtout marquées lorsque K_{II} est important par rapport à K_I . Par contre, lorsque K_{II} est faible (c.-à-d. $|K_{II}/K_I| < 0.1$), les critères semblent converger vers le même angle de propagation (θ_p) qui est 0. Or, puisqu'en fatigue en flexion des engrenages les fissures sont surtout sollicitées en mode I, il devient inutile d'utiliser des critères plus complexes tels que S_{\min} et G_{\max} . De par sa simplicité, le critère $\sigma_{\theta\theta\max}$ s'avère donc préférable. Lewicki (1996) a également tiré les mêmes conclusions.

5.5 Application du modèle numérique à la propagation de fissures

Dans cette section, les concepts de la MREL seront appliqués à l'analyse numérique de la propagation des fissures de flexion, où l'emphase sera davantage mise sur le chargement à considérer et le niveau de discrétisation à adopter.

5.5.1 Paramètres de discrétisation

Un premier aspect à considérer lors d'une analyse numérique en propagation de fissure, est la longueur d'avancement (da) à appliquer pour la simulation. Dans ce projet, il a été jugé utile de définir une valeur d'incrément « da » en fonction d'un paramètre adimensionnel, soit le rapport « da/m » où m est le module de l'engrenage. L'étude de convergence menant à une valeur appropriée de « da/m », a été réalisée selon une configuration (c.-à-d. engrenage et matériau) identique à celle utilisée à la section 4.3.2. La fissure initiale a été définie selon le critère $D_{L.Cr}$ et $f^*(\sigma_n, \tau_n)$ et seule la position critique de l'engrènement a été considérée pour cet exercice. Aussi, le critère σ_{00max} (éq.(5.16)) a été utilisé dans le calcul de θ_p .

Conformément aux recommandations du chapitre 3 par rapport à la discrétisation de la fissure, chaque segment « da » associé au bout de la fissure, a été discrétisé comme suit : $h_s = da/10$ et $h_t = da/20$. Pour les segments précédents, ceux-ci ont été subdivisés uniformément par des éléments de taille h_s . La Figure 5.6 montre les fissures obtenues des simulations pour des valeurs de « da/m » de 1/4, 3/16, 1/8 et 1/6²⁴.

D'après cette figure, il apparaît qu'un incrément d'avancement équivalent à environ 0.2m soit suffisant pour atteindre la convergence. Comparativement aux valeurs trouvées dans la littérature (c.-à-d. $da/m \approx 0.05m-0.1m$ voir Tableau 1.2) pour des modèles comparables, celui de la présente étude semble donc plus précis. Il faut noter que pour des roues à jantes minces, il faudrait réévaluer ce paramètre.

²⁴ Les valeurs respectives de « da » étaient de 1mm, 0.75mm, 0.5mm et 0.25mm.

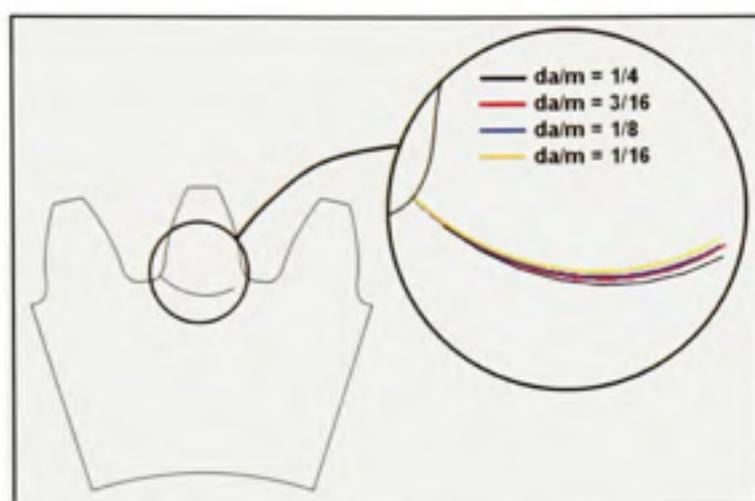


Figure 5.6 *Effet de l'incrément « da » sur la trajectoire de la fissure.*

5.5.2 Variation des facteurs d'intensité de contrainte

Deux techniques d'analyse en propagation, spécifiques aux engrenages, ont été présentées à la section 1.6.4.3 (c.-à-d. position critique de l'engrènement et incréments pondérés éq.(1.27)). Afin de justifier l'utilisation de l'une ou l'autre des méthodes, il convient de bien caractériser la variation des FIC durant l'engrènement, et ce, tout au long de la progression de la fissure. En reprenant la configuration de la Figure 5.6, cinq stades d'endommagement ont été analysés (Figure 5.7²⁵).

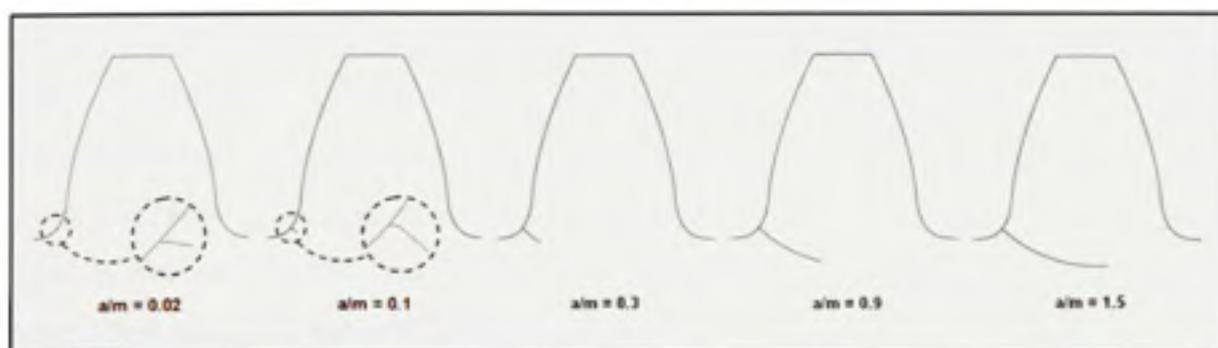


Figure 5.7 *Configurations de la dent fissurée.*

²⁵ Le rapport « a/m » correspond à celui de la longueur de la fissure (a) sur le module de la roue (m).

Les variations de K_I et K_{II} sont tracées à la Figure 5.8 selon la position relative de l'engrènement. Pour K_I (graphique a), l'allure de la variation change très peu au cours de la progression de la fissure. La position du plus haut point de contact unique est toujours celle qui enregistre la plus importante valeur de K_I . Il en est tout autrement pour K_{II} , où l'orientation du bout de la fissure semble affecter grandement ce mode de sollicitation. À l'initiation, la position critique en mode II (c.-à-d. $|K_{II}|_{\max}$) correspond à celle du mode I, mais le changement de sollicitation de la fissure engendré par sa bifurcation, amène la valeur de K_{II} à être plus importante à la fin de l'engrènement.

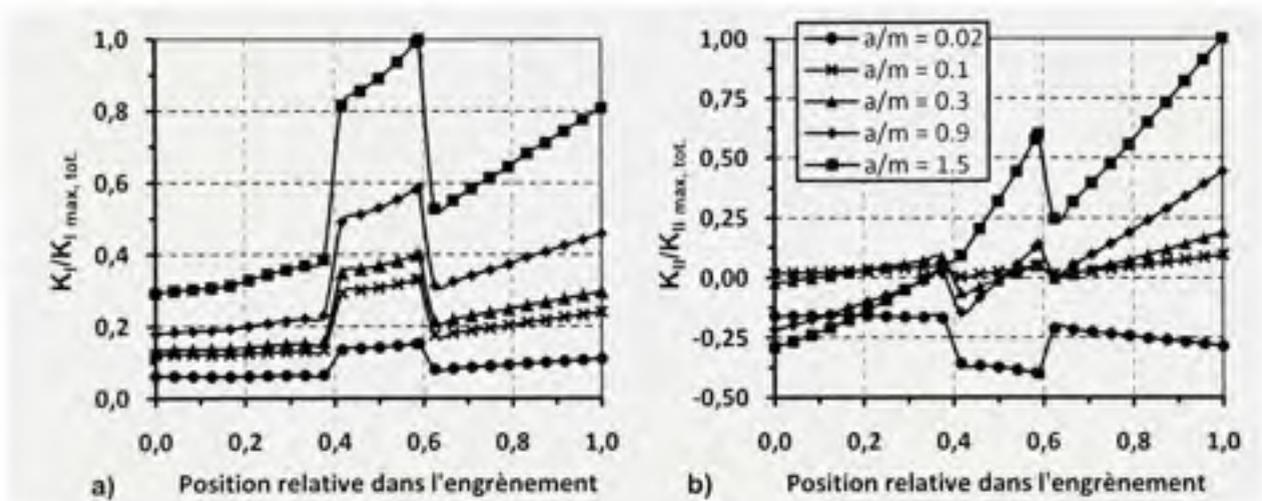


Figure 5.8 K_I (a) et K_{II} (b) normalisés selon la position de l'engrènement.

L'importance relative des modes permet également de bien caractériser le chargement. La Figure 5.9 montre la variation du rapport K_{II}/K_I pour tout l'engrènement où, mise à part la situation initiale (c.-à-d. $a/m = 0.02$), celui-ci ne dépasse pas 20% en valeur absolue. À la position critique de l'engrènement (c.-à-d. à $K_{I, \max}$), K_{II}/K_I est encore plus faible, avec une valeur maximale de -8% pour $a/m = 1.5$. Cela justifie donc l'utilisation du critère de propagation $\sigma_{00, \max}$, tel que conclu à la section 5.4.4.

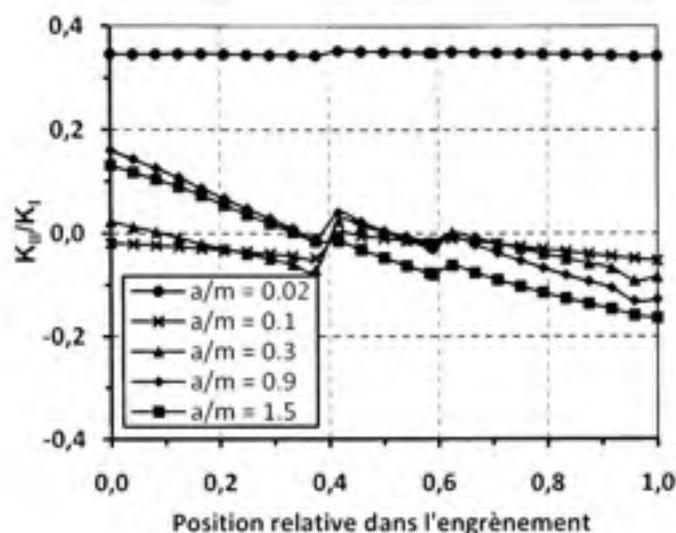


Figure 5.9 Rapport K_{II}/K_I en selon la position de l'engrènement.

D'après ces observations, l'hypothèse d'un chargement uniquement en mode I pour le calcul de da/dN semble justifiée, et par conséquent, il paraît moins pertinent d'évaluer un K_{eq} induisant plusieurs suppositions souvent discutables. En ce qui a trait à la trajectoire de la fissure, la variation du rapport K_{II}/K_I qui tend à augmenter selon la longueur de la fissure (voir Figure 5.9) a peut-être un effet non négligeable sur celle-ci.

5.5.3 Modélisation de la propagation

À partir des constatations de la section précédente, la modélisation de la propagation des fissures par la méthode de la position critique de l'engrènement et celle des incréments pondérés, doivent être testées. Les résultats obtenus permettront d'établir quel type de modélisation est préférable à l'étude de la fatigue en flexion des engrenages.

5.5.3.1 Méthode de la position critique de l'engrènement

Introduite à la section 1.6.4.3, cette technique est très simple, elle consiste à modéliser la propagation de la fissure en considérant seulement le chargement où K_I est maximal. La Figure 5.8a a montré que $K_{I,max}$ était toujours obtenu à la position critique de l'engrènement, soit au plus haut point de contact unique. Il est donc supposé que la propagation des fissures

de flexion est uniquement gouvernée par l'état de sollicitation maximal en mode I. L'avantage principal de cette méthode est qu'un seul cas de chargement doit être évalué.

5.5.3.2 Méthode des incréments pondérés

La méthode des incréments pondérés, correspond à la méthode utilisée par Spievak et al. (2001) et Ural et al. (2005) (voir section 1.6.4.3). Cette méthode nécessite une subdivision du cycle d'engrènement en un nombre fini de cas de chargement pour lesquels K_I et K_{II} doivent être calculés. À partir des résultats, il s'agit de définir la valeur $K_{I,max}$. Puisque $K_{I,max}$ se trouve habituellement au plus haut point de contact unique, il faut s'assurer que cette position soit incluse dans liste des cas de chargement modélisés. Ensuite, avec la relation (5.23), un incrément pondéré d'avancement de la fissure ($da_{(i-1,i)}$) est calculé entre chaque cas de chargement.

$$da_{(i-1,i)} = \frac{K_{(i)} - K_{(i-1)}}{K_{max}} \cdot da \quad (5.23)$$

Où « da » est la valeur totale de l'avancement. L'orientation de chaque $da_{(i-1,i)}$ ($\theta_{p,i}$) doit aussi être calculée par rapport au bout de fissure actuel. Dans ce projet, le critère de propagation $\sigma_{\theta\theta max}$ (éq.(5.16)) a été utilisé. Enfin, l'avancement total de la fissure, est défini par la sommation des vecteurs de chaque incrément $da_{(i-1,i)}$ (Figure 5.10).

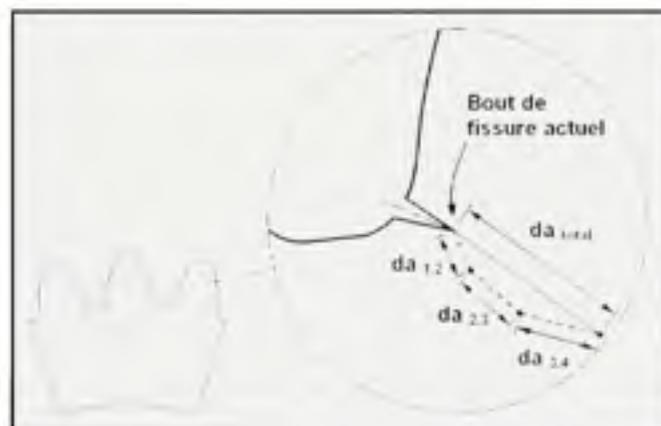


Figure 5.10 Schématisation de la méthode des incréments pondérés.

De cette façon, la variation du rapport K_{II}/K_I durant l'engrènement est prise en compte, contrairement à la méthode précédente, puisque le critère $\sigma_{\theta\theta\max}$ est évalué sur tous le cycle d'engrènement. Bien que les fondements de cette technique semblent cohérents, aucune justification par rapport à la nature du phénomène n'a été apportée par les auteurs de la méthode (Spievak et al., 2001).

5.5.3.3 Comparaison des méthodes

Avec la configuration de la section 5.5.1, les deux techniques de modélisation ont été appliquées. Pour la méthode des incréments pondérés, 25 points de contact de l'engrènement ont été considérés. Aussi, afin d'assurer la précision de l'analyse, un pas d'avancement de fissure (da) équivalent à $a/m = 0.125$, a été utilisé. La Figure 5.11 présente les résultats obtenus de chaque type de modélisation.

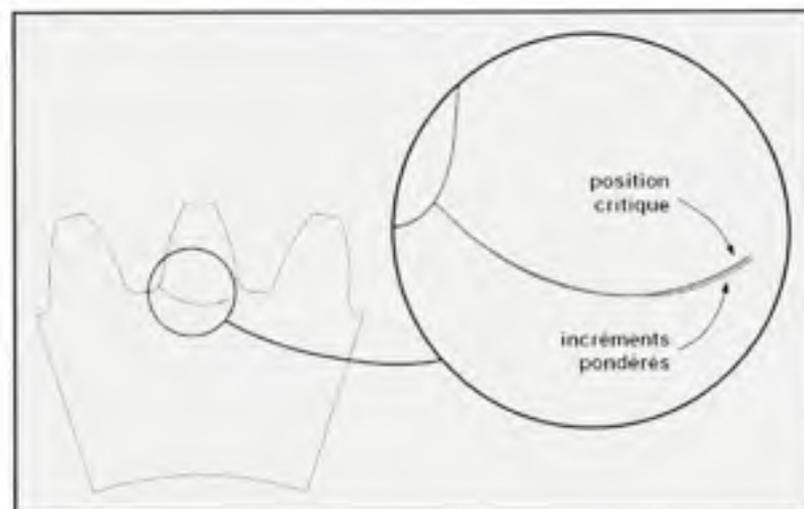


Figure 5.11 *Comparaison des techniques de modélisation de la propagation.*

Cette figure montre que les deux méthodes offrent des prédictions de propagation presque identiques où l'écart entre celles-ci devient apparent seulement lorsque la fissure est assez longue. Cela est causé par l'augmentation du rapport K_{II}/K_I (voir Figure 5.9). Cependant, cet écart est si faible, qu'il ne justifie pas le temps de calcul supplémentaire de la méthode

des incréments pondérés. La méthode de la position critique est donc préférable de par sa rapidité.

5.5.3.4 Effet de l'orientation initiale de la fissure

Les critères d'initiation présentés au chapitre 4, proposent différentes hypothèses quant à l'orientation initiale de la fissure (θ_0). Afin d'analyser l'effet qu'à θ_0 sur la propagation, les caractéristiques initiales obtenues des critères $D_{\sigma_{lmax}}$ ($\theta_0 = 0^\circ$), D_{LCr} ($\theta_0 = 32.9^\circ$) et D_{Pcr} ($\theta_0 = -31.3^\circ$) (voir Tableau 4.1), ont été appliquées tour à tour à une analyse en propagation (Figure 5.12).

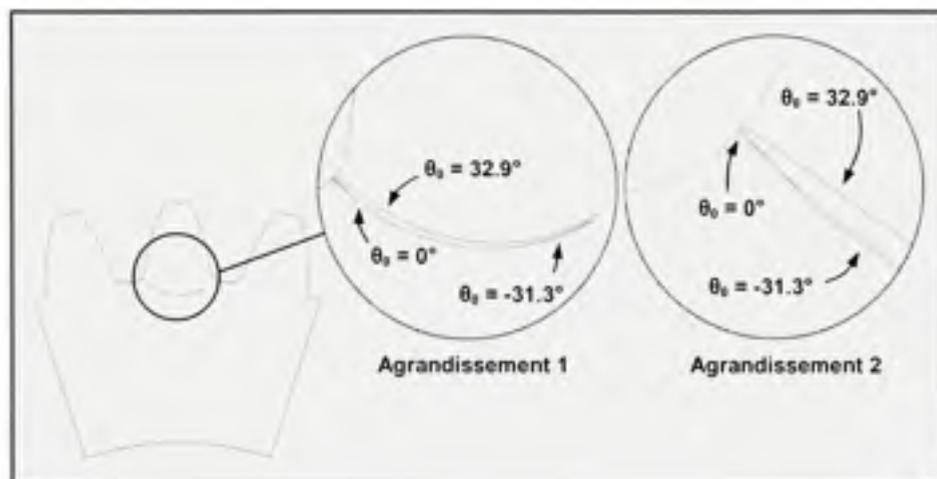


Figure 5.12 *Effet de l'orientation initiale de la fissure.*

Globalement, la Figure 5.12 démontre que la valeur de θ_0 n'a pas un impact significatif sur la propagation de la fissure. Donc, une étude s'intéressant davantage à la propagation, pourrait utiliser le critère $D_{\sigma_{lmax}}$ dont l'application est beaucoup plus simple et rapide, sans pour autant induire un écart important par rapport à l'utilisation des autres critères.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les concepts de base de la MREL et d'autres plus spécifiques à la fatigue des engrenages, ont été exposés, ce qui a permis de définir les possibilités et les limites de

l'analyse en propagation. Avec la revue des lois de propagation à partir de la littérature, trois modèles semblent plus justes : celui de FNK, de Collipriest et de Kato et al.. Leur applicabilité en propagation lente et instable s'est avérée préférable à l'analyse de la fatigue des engrenages.

Par contre, du côté de l'orientation de la propagation, les critères présentés se sont avérés comparables, en raison de la dominance du mode I. Par conséquent, le critère de la $\sigma_{\theta\theta\max}$, de par sa simplicité, sera souvent préférable pour l'analyse en propagation de fissures de tailles importantes. Ce critère sera donc utilisé ici. Cependant, il faut rappeler qu'il introduit une déviation non négligeable en début de propagation. En appliquant différentes valeurs de θ_0 en fonction des critères d'initiation, ce paramètre s'est avéré sans effet marqué sur la propagation après une certaine longueur de fissure, du fait que celle-ci s'oriente toujours par rapport au mode I.

En ce qui concerne l'application du modèle numérique en propagation de fissures, l'étude de convergence sur « da » a mis en évidence l'efficacité du modèle où une valeur de « da/m » d'environ 0.2 était suffisante pour obtenir une solution précise. Aussi, la comparaison des techniques de modélisation de la propagation des fissures a démontré qu'il n'était pas indispensable de considérer la variation du chargement durant l'engrènement, et que seule la position critique (c.-à-d. $K_{L\max}$) pouvait suffire à la caractérisation de l'allure de la propagation.

Par ailleurs, les conclusions tirées de ce chapitre quant à la modélisation de la propagation (section 5.5), devront être revues pour d'autres configurations de roue (ex. : jante mince, défaut existant), d'autres hypothèses d'analyse (ex. : contact Hertzien, vibrations, répartition du chargement) ou encore, pour une modélisation tridimensionnelle. Néanmoins, ces observations ont permis de mettre en perspective les différentes techniques de modélisation et l'impact de certains paramètres sur la propagation. Cela permettra de faire des choix plus éclairés quant à l'approche à adopter pour d'autres contextes d'analyse.

CHAPITRE 6

COMPARAISONS AVEC MESURES EXPÉRIMENTALES

Bien que les modèles d'initiation et de propagation aient été développés en majeure partie selon des concepts généralement acceptés, il est nécessaire d'évaluer leurs performances globales par comparaison à des résultats expérimentaux en fatigue. L'un des principaux objectifs du volet expérimental de ce projet, est de vérifier la pertinence du critère d'initiation élaboré au chapitre 4 (c.-à-d. éq.(4.10) et (4.13)) et ainsi justifier l'approfondissement des concepts proposés par ce dernier. D'autre part, les résultats expérimentaux permettront de juger aussi de certains aspects techniques de l'analyse en propagation (c.-à-d. le critère de propagation et les paramètres de discrétisation). Il faut cependant préciser que le plan d'expérimentation a été établi de sorte à obtenir une appréciation globale du modèle, puisque que la validation stricte de ce dernier aurait nécessité une étude expérimentale large et plus approfondie.

6.1 Définition de l'approche expérimentale

Compte tenu des objectifs généraux du projet, il aurait été peu judicieux d'effectuer les essais de fatigue sur de véritables systèmes d'engrenage. Il était par ailleurs justifié d'opter pour une configuration simplifiée, s'apparentant à la géométrie et le chargement d'une dent d'engrenage. À cet effet, les échantillons d'essais de fatigue en flexion de type Brugger (Figure 6.1), étaient indiqués. Spécialement conçus pour l'évaluation du comportement en fatigue des aciers carburés (ASM International, Handbook Committee., 2002), ceux-ci permettent, entre autres, de simuler l'état de contrainte à la racine des dents d'engrenage droit en contact unique. La fatigue en flexion des engrenages peut, en effet, être caractérisée uniquement par l'état de contrainte à la position critique de l'engrènement (voir chapitre 4 et 5). De plus, Blarasin et al. (1997), ont démontré que cette configuration était assez représentative du champ de contraintes réel des engrenages.

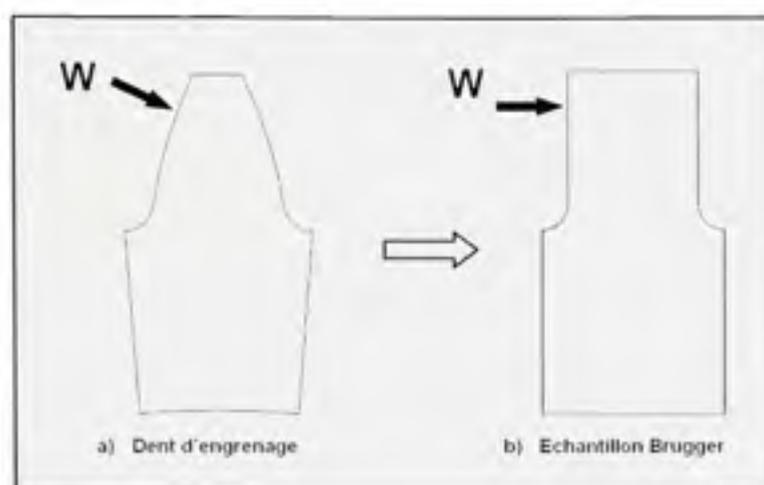


Figure 6.1 *Comparaison d'une dent d'engrenage (a) à un échantillon Brugger (b).*

6.1.1 Préparation des échantillons

Contrairement aux approches expérimentales habituelles en fatigue en flexion des engrenages (voir section 1.3.1), aucun défaut n'a été induit artificiellement aux échantillons, et ce dans le but d'étudier objectivement l'endommagement en fatigue, surtout en phase initiation. De surcroît, afin de minimiser l'effet de l'état surfacique, chaque échantillon a subi un polissage intensif où un fini de surface (R_a) variant de $0.06 \mu\text{m}$ à $0.10 \mu\text{m}$ a été atteint. Aussi, par souci de conformité aux hypothèses d'analyse formulées au chapitre 2, aucun traitement de surface n'a été appliqué aux échantillons. En fait, l'objectif réel était d'obtenir des positions d'initiation non définies par l'état de surface, mais bien par le chargement et l'état de contrainte lui-même. Et ce, dans le but d'estimer expérimentalement la précision du nouveau critère d'initiation proposé par l'équation (4.13) du chapitre 4.

6.1.2 Caractéristiques générales du chargement

Afin de soumettre les échantillons à un régime de fatigue endurance, un chargement (W) pour lequel les contraintes étaient sous le seuil d'écoulement du matériau (S_y) a été imposé. Ainsi, les déformations plastiques ont été évitées. Cependant, afin de maintenir la durée des essais selon un intervalle de temps acceptable (c.-à-d. 4-5 jours), W se devait d'être

suffisamment élevée, tout en préservant N_i dans la zone caractéristique du régime d'endurance (c.-à-d. $N_i > 10^5$ cycles). La valeur de W a donc été fixée à environ $0.94W_y$, où W_y est la charge qui provoque une contrainte dans le domaine plastique dans la zone la plus sollicitée.

Bien qu'en pratique l'amplitude de la charge W soit constante, en propagation, cette dernière a été ajustée tout au long des essais, de sorte à retarder l'instabilité et la plastification. Ici, le diagramme de résistance résiduelle (Figure 5.3) s'est avéré fort utile dans la définition de la charge critique (W_c) en fonction de la longueur de la fissure (a). De cette façon, il a été possible de maintenir la progression des fissures en propagation stable jusqu'à ce que celles-ci atteignent des longueurs appréciables permettant ainsi, des comparaisons numériques/expérimentales plus étendues.

6.1.3 Propriétés du matériau

Plusieurs contraintes de différentes natures (ex. : temps, capacité de chargement, configuration des équipements) ont conduit au choix d'un aluminium 6061-T6 pour la fabrication des échantillons. Bien qu'il soit assez rare d'utiliser ce type de matériau dans la fabrication des roues, à une échelle macroscopique, la ductilité et le caractère isotrope de l'aluminium correspondent bien aux caractéristiques générales des aciers souvent utilisés pour les engrenages. L'objectif premier étant de définir le rôle du mode de chargement sur l'initiation des fissures, si on néglige les propriétés microscopiques du matériau le problème devient uniquement géométrique. Le Tableau 6.1 présente la composition chimique du matériau, tandis que le Tableau 6.2 fournit les propriétés mécaniques de celui-ci²⁶.

Tableau 6.1

Composition chimique de l'aluminium 6061-T6 (%)

Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti
0.4 - 0.8	0.7 max	0.15 - 0.40	0.15 max	1.2	0.04 - 0.35	0.25 max	0.15 max

²⁶ Les valeurs des tableaux 6.1 et 6.2, ont été tirées de ASM International Handbook Committee (2002).

Tableau 6.2

Propriétés mécaniques de l'aluminium 6061-T6

E	ν	S_y	S_u	τ_u	S_{er}	K_{Ic}^\dagger	ΔK_{th}^\dagger
68.9 GPa	0.33	276 MPa	310 MPa	207 MPa	97 MPa	43.9 MPa \sqrt{m}	3.84 MPa \sqrt{m}

† Les valeurs de K_{Ic} et ΔK_{th} ont été tirées de Forman et Hu (1984).

Puisqu'en fatigue initiation, les contraintes induites étaient très près de la valeur moyenne de S_y du Tableau 6.2 (voir section 6.1.2), il était indispensable de connaître la valeur réelle de S_y , afin d'assurer l'absence de déformation plastique. Pour ce faire, un essai de traction a été réalisé selon la norme ASTM E 8M-04 avec un échantillon fabriqué à partir du même lot de matériau et dont le dessin de détails est présenté en annexe IV. Les résultats ont révélé une contrainte d'écoulement (S_y) d'environ 275 MPa et une contrainte ultime (S_u) de 320 MPa, corroborant ainsi les valeurs du Tableau 6.2.

6.1.4 Description du montage

Le montage expérimental utilisé dans ce projet comportait plusieurs composantes qui seront décrites dans les sections suivantes.

6.1.4.1 Équipements d'essais de fatigue

L'ensemble du montage expérimental a été élaboré en fonction de l'équipement de base disponible, soit une machine de fatigue MTS810 à commandes servohydrauliques permettant de contrôler le cyclage (Figure 6.2).



Figure 6.2 *Banc d'essai de fatigue en traction.*

6.1.4.2 Gabarit de montage

Puisque la configuration du banc d'essai (Figure 6.2) permettait seulement le chargement uniaxial en traction, un adaptateur permettant la sollicitation en flexion des échantillons de type Brugger (Figure 6.1), a donc été conçu. Inspiré des échantillons de Blarasin et al. (1997), la configuration suivante a été développée (Figure 6.3).



Figure 6.3 *Gabarit de montage pour essais de fatigue en flexion.*

Avec ce montage, deux essais de fatigue sont réalisés simultanément où les deux échantillons de type Brugger sont fabriqués en une seule pièce. Cependant, puisqu'il était peu probable que l'initiation se produise au même moment, de chaque côté de l'échantillon, le système a été monté sur un pivot permettant la rotation du gabarit. De plus, afin de minimiser les effets du frottement, les axes des appuis et du pivot ont été montés sur des roulements à aiguilles. Aussi, un certain mouvement axial des appuis était possible, diminuant ainsi les efforts dans cette direction. L'ensemble du système a été conçu de sorte à avoir une vie infinie avec un chargement total maximal de 7500N (c.-à-d. $2W$)²⁷. Tous les dessins de détails et d'assemblage du gabarit se trouvent en annexe IV.

6.1.4.3 Échantillons de type Brugger

La Figure 6.4 présente les différentes configurations qui ont été testées en fatigue. Afin d'éviter tout effet de proximité entre la zone de chargement et la région critique, les échantillons ont été définis de sorte que la charge W soit appliquée à une distance L équivalente à $2.5d$ (Figure 6.4). Selon le principe de Saint-Venant, à une telle distance, la distribution des contraintes près du point d'application de la force n'affecte pas celle de la région considérée.

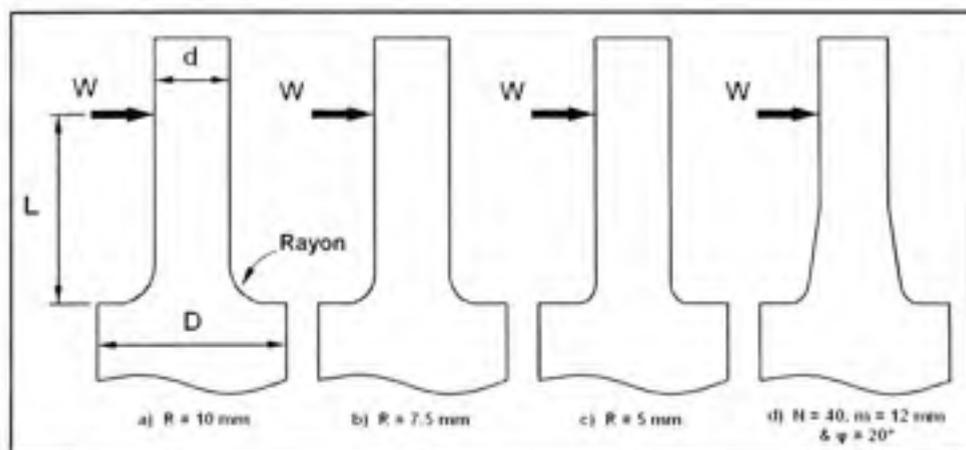


Figure 6.4 Configuration des échantillons de type Brugger.

²⁷ Le chargement admissible en fatigue a été calculé selon une approche conservatrice basée sur la contrainte, telle que présentée par Shigley et al. (2004). Le facteur de sécurité pour 7500N, est de 1.2.

Les trois premiers échantillons de la Figure 6.4 diffèrent seulement de par la valeur du rayon au congé (R). Par contre, afin d'approcher davantage la distribution de contraintes de celle d'une dent d'engrenage, la forme du congé imposée à l'échantillon « d » est identique à celle d'une dent ayant les caractéristiques spécifiées à la Figure 6.4. La forme en développante de cercle n'a cependant pas été considérée, une droite tangente au congé a plutôt été utilisée. Selon Guilbault et al. (2005), cette approximation n'affecte pas le champ de contrainte à la racine des dents. Le dimensionnement complet de chaque échantillon Brugger est aussi présenté en annexe IV.

6.1.4.4 Échantillons avec trou ellipsoïde

Afin d'analyser les performances du modèle numérique pour d'autres types de chargement, des essais de fatigue en traction ont aussi été réalisés. Beaucoup plus simple que le montage en flexion, celui en traction n'était composé que des échantillons installés de la façon illustrée à la Figure 6.5.



Figure 6.5 *Montage des essais de fatigue en traction.*

Pour obtenir un effet de concentration de contrainte similaire aux échantillons Brugger, un trou ellipsoïde a été percé dans chaque spécimen. Deux configurations d'ellipse ont été

testées : la première ellipse était orientée selon l'axe du chargement (Figure 6.6a), tandis que la deuxième formait un angle de 45° avec celui-ci (Figure 6.6b). Toutes les autres spécifications géométriques de ces échantillons, sont également fournies à l'annexe IV.

Comme précédemment, il s'agissait d'étudier le comportement en fatigue initiation, afin d'établir le plein potentiel du critère D_{LCr} , mais cette fois, en considérant d'autres contextes de chargement. D'autre part, la propagation des fissures n'a pas été traitée pour ces cas de fatigue.

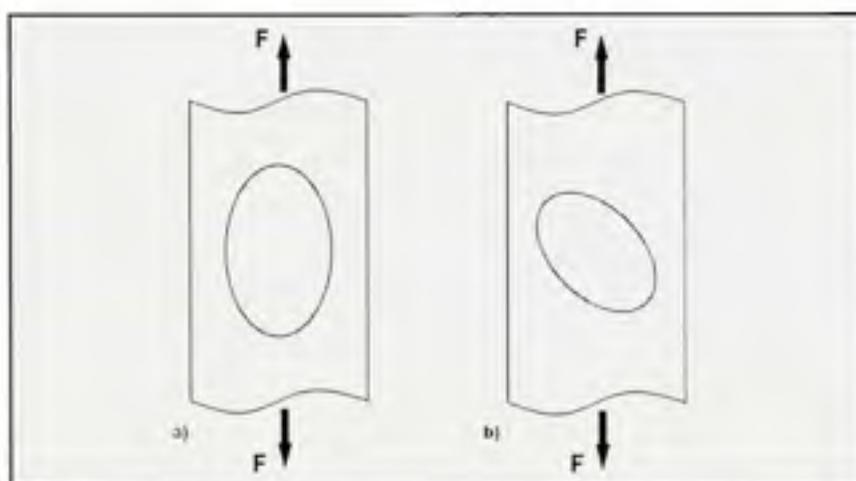


Figure 6.6 Configuration des échantillons avec trou ellipsoïde.

6.1.4.5 Application du chargement

Pour tous les cas d'essai de fatigue, le chargement cyclique a été appliqué selon une courbe sinusoïdale et une fréquence de 10 Hz. La fréquence était cependant réduite en propagation de fissure, afin de maintenir une certaine stabilité de la réponse structurale. D'autre part, pour les essais de flexion, il a été nécessaire d'appliquer une charge minimale non nulle variant entre 50 et 100 N, pour maintenir le contact entre le gabarit et les échantillons. Le Tableau 6.3 présente les caractéristiques des chargements qui ont été appliqués. Il est aussi important de spécifier que chaque configuration d'échantillon a été testée deux fois (c.-à-d. échantillons A et B).

Tableau 6.3

Caractéristiques du chargement des essais de fatigue

Échantillon	W ou F (N)	R	f (Hz)
Brugger Rayon 10 mm	1550	0.02	10
Brugger Rayon 7.5 mm	1330	0.02	10
Brugger Rayon 5 mm	1210	0.02	10
Brugger Roue	2000 & 1860	0.02	10
Ellipse 0°	10000	0.00	10
Ellipse 45°	8000	0.00	10

6.2 Résultats expérimentaux comparés aux simulations numériques

Cette section présente les résultats expérimentaux et les compare à ceux du modèle numérique. Cependant, il faut mentionner que les mesures n'avaient pas pour objectif l'étude de la propagation en fonction du nombre de cycles. En conséquence, l'analyse des résultats porte exclusivement sur les positions d'initiation et sur l'allure géométrique de la fissuration.

6.2.1 Initiation des fissures

Durant les essais expérimentaux, il a été assez difficile de caractériser précisément l'initiation de la fissure, puisque celle-ci était détectée en fonction de la réponse en déplacement. Or, la sensibilité de l'équipement permettait seulement de déceler l'apparition de fissures macroscopiques de 0.5 à 3 mm de longueur. De plus, pour les premiers essais (c.-à-d. échantillons Brugger Rayon = 10 mm et 7.5 mm) l'ajustement des paramètres de détection étant incorrect, l'initiation n'a pu être identifiée.

En raison de ces contraintes d'expérimentation, la caractérisation de l'initiation (c.-à-d. x_0 , y_0 , a_0 et θ_0) a été réalisée à posteriori par photographie numérique. En effectuant un grossissement adéquat des photos, une estimation plus ou moins précise des paramètres x_0 , y_0 , a_0 et θ_0 a pu être obtenue de chaque côté de l'échantillon (c.-à-d. avant (av.) et arrière

(ar.)). Les mesures expérimentales présentées dans ce document doivent donc être prises avec une certaine réserve. Il faut ici mentionner que les échantillons seront analysés au microscope, ce qui permettra une meilleure comparaison. Toutefois, les mesures ne seront pas étudiées dans le cadre du présent travail.

Du côté de l'analyse numérique en fatigue, les critères du Tableau 4.1 ont été repris, où a_0 a été fixée à 0.2220 mm en fonction des propriétés du matériau (Tableau 6.2) et de l'équation (1.5). Des valeurs de 72.7 MPa et 54.9 MPa pour S_e et τ_e respectivement, ont été considérées dans l'application de D_{LCr} et D_{PICr} . La Figure 6.7 montre selon quels systèmes de coordonnées x_0 et y_0 ont été mesurés ou calculés. Par ailleurs, θ_0 a été identifié selon la Figure 4.7, reprise à la Figure 6.7.

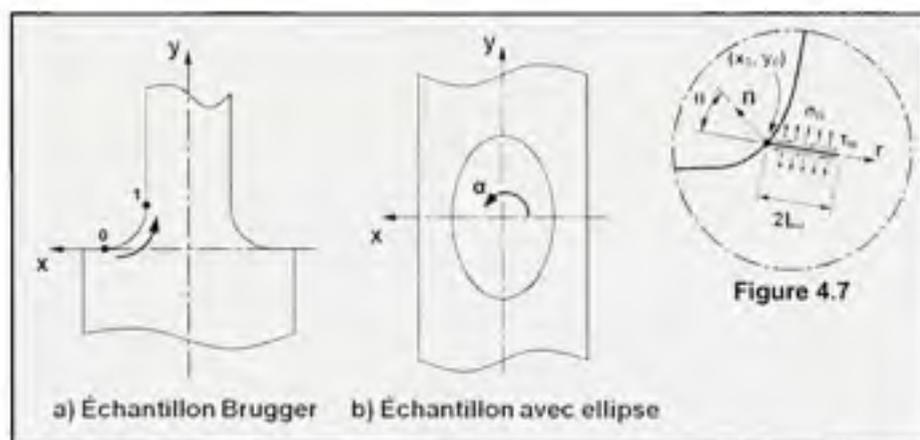


Figure 6.7 *Systèmes de coordonnées des échantillons.*

La Figure 6.8 présente graphiquement les comparaisons des résultats en fonction du point d'initiation en surface (c.-à-d. x_0 ; y_0), défini selon sa position relative au congé (voir Figure 6.7a). Les « zones grises » de cette figure, correspondent aux plages de positions à l'intérieur desquelles, les points d'initiation ont été mesurés sur les échantillons. Les prédictions des critères d'initiation (D) sont aussi tracées, où leur numéro d'identification est le même qu'à la Figure 4.8. et au Tableau 4.1. Il importe de rappeler ici que les critères D_4 et D_6 correspondent à la nouvelle approche proposée dans ce travail.

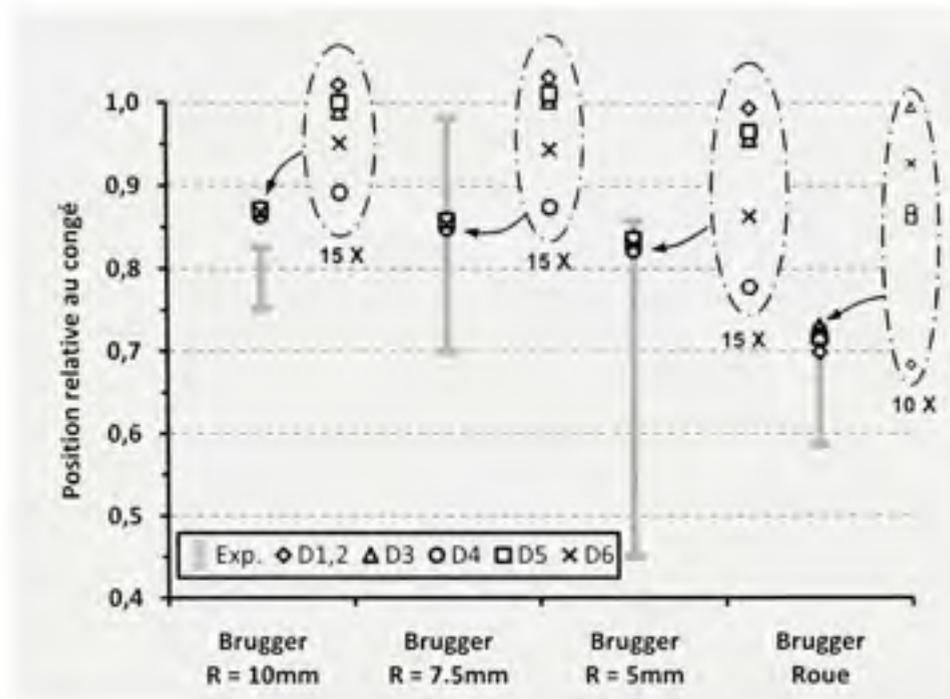


Figure 6.8 Comparaison des résultats pour les échantillons de type Brugger.

À première vue, les résultats expérimentaux semblent montrer d'importantes dispersions, surtout en ce qui a trait aux échantillons de rayon 7.5mm et 5mm, où les plages d'initiation s'étendent sur plus de 3mm. Cependant, ces zones ont été délimitées selon la position initiale des fissures de part et d'autre des échantillons (c.-à-d. 2 mesures par échantillon). Alors, pour chaque échantillon, il y a au moins une des mesures considérées qui n'est pas un point d'initiation, induisant ainsi une erreur dans la mesure de dispersion des résultats. Du côté numérique, comme au chapitre 4, les critères présentent des résultats similaires quant à la prédiction du point d'initiation (c.-à-d. x_0 , y_0). Selon la mesure expérimentale et le critère considéré, l'écart entre ceux-ci varie de 0.02mm à 3mm, mais de façon générale, il est plutôt de l'ordre du mm (c.-à-d. entre 0 et 1mm). Il importe de remarquer sur ce graphique que même si les prédictions numériques sont similaires, le nouveau critère (éq. (4.13)) est presque toujours celui qui est le plus près de la valeur moyenne de la dispersion, ce qui peut indiquer une meilleure précision.

Comme pour les échantillons de type Brugger, la Figure 6.9 illustre la comparaison des résultats pour les échantillons avec trou en ellipse. Cependant, la position du point

d'initiation a été exprimée de façon angulaire (α), selon le système de coordonnées de la Figure 6.7b.

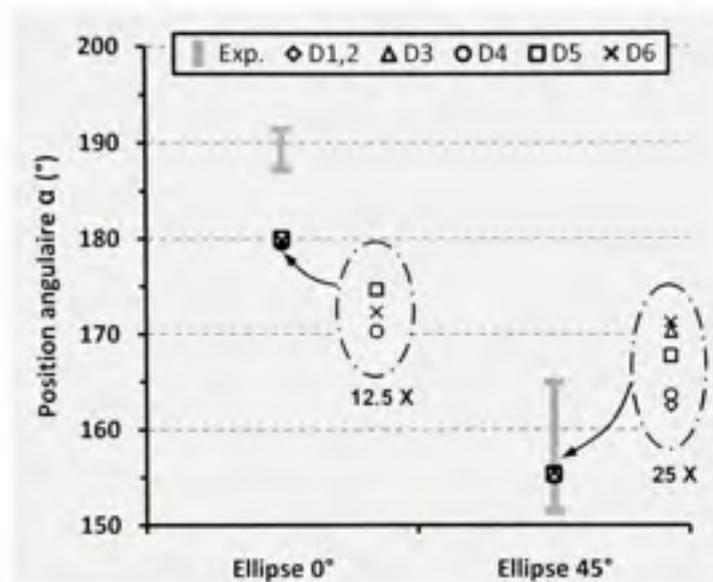


Figure 6.9 Comparaison des résultats pour les échantillons avec trou ellipsoïde.

Cette figure montre une dispersion assez faible pour les résultats expérimentaux de l'échantillon avec l'ellipse à 0°, où celle-ci représente une longueur de 1.1mm. Il en est tout autrement pour l'échantillon avec l'ellipse à 45° dont la position du point d'initiation s'étale sur une plage d'environ 4.6mm.

Malheureusement, lorsque comparées aux prédictions du modèle, les mesures expérimentales des deux types d'échantillon ne semblent pas présenter de corrélation ou de tendance particulière avec l'un ou l'autre des critères. Certes, pour plusieurs cas, les critères étaient assez précis avec moins de 1mm d'erreur de positionnement, mais la précision et la dispersion des mesures expérimentales ainsi que le nombre limité d'essais réalisés permettent difficilement de porter un jugement définitif sur la justesse des critères.

Concernant l'orientation initiale (θ_0), les critères présentent des résultats très divergents, comme le montre la Figure 6.10 qui compare les valeurs expérimentales et numériques de θ_0 . Les résultats expérimentaux montrent aussi de bonnes dispersions, où θ_0 varie de -26° à

49.8°. Cependant, les mesures expérimentales de θ_0 ne représentent que des estimations, puisqu'il a été impossible de détecter précisément le moment et le lieu exact de l'initiation à partir de photos numériques. De plus, θ_0 a été estimée sur des longueurs de fissures souvent beaucoup plus longues que la valeur a_0 prédite (ex. : entre $2a_0$ et $10a_0$). Par conséquent, aucune conclusion claire, n'a pu être tirée pour la caractérisation de θ_0 .

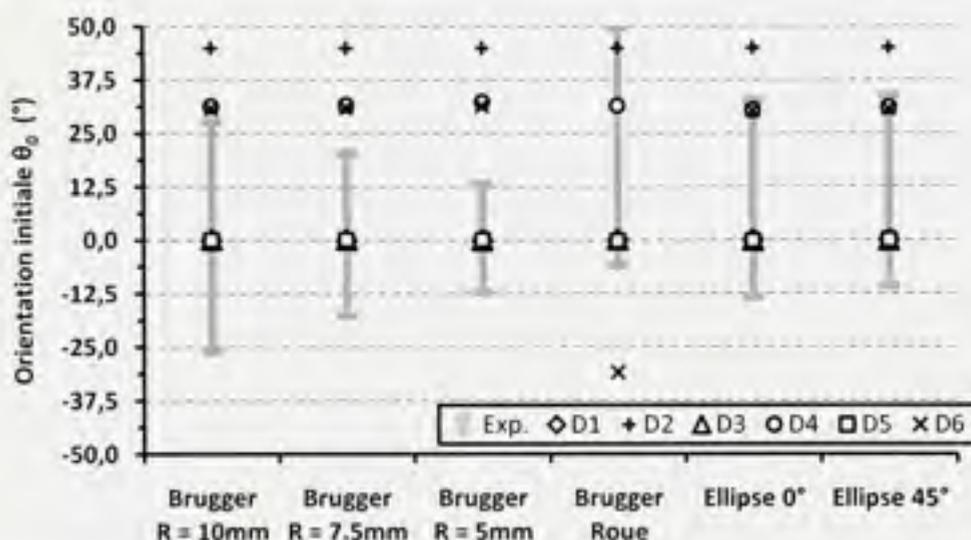


Figure 6.10 Comparaison des résultats selon θ_0 .

Par contre, les résultats expérimentaux ont montré que θ_0 était souvent loin des plans orientés selon $\sigma_{1\max}$ ou τ_{\max} , et que le critère D_{LCr} proposé permettait d'obtenir une estimation de θ_0 plus réaliste. En fait, seulement 2 mesures sur 24 ont révélé une valeur de θ_0 correspondant à τ_{\max} (c.-à-d. 44.6° et 49.8°), tandis qu'à 5 reprises θ_0 était près du plan $\sigma_{1\max}$ (c.-à-d. -2.2°, -3.9°, 0.0°, 2.1° et 0.0°). Cependant, θ_0 étant évaluée expérimentalement sur des fissures beaucoup plus longues que $a_0 = 0.222$ mm, il est fort possible que celles-ci étaient déjà en propagation, où l'endommagement est principalement contrôlé par $\sigma_{1\max}$. Par conséquent, les valeurs mesurées de θ_0 seraient en partie faussées et probablement plus élevées, ce qui porte à croire que celles-ci pourraient être plus près des prédictions du critère proposé.

Pour mieux apprécier la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques, les Tableaux 6.4 et 6.5 présentent les valeurs réelles des paramètres x_0 , y_0 , θ_0 et a_0 pour

l'échantillon Brugger associé à une roue d'engrenage et l'échantillon avec ellipse à 0° . Les valeurs expérimentales de a_0 représentent plutôt les longueurs sur lesquels θ_0 a été mesuré. Des tableaux comparatifs similaires ont également été réalisés pour les autres types d'échantillon, ceux-ci se retrouvent à l'annexe V.

Tableau 6.4

Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon Brugger Roue

Critères ou Mesures Exp.	Paramètres Fissure Initiale			
	x_0 (mm)	y_0 (mm)	θ_0 ($^\circ$)	a_0 (mm)
Échantillon A (av.)	12.5	3.7	-5.9	0.9
Échantillon B (av.)	13.0	2.7	11.3	0.8
Échantillon A (ar.)	12.8	2.9	44.6	0.2
Échantillon B (ar.)	12.8	3.0	49.8	0.5
$D_{\sigma_{lmax}}$ (D1)	12.547	3.577	0.0	0.222
$D_{\tau_{max}}$ (D2)	12.547	3.577	0.0 ± 45	0.222
$D_{L,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D3)	12.451	3.829	0.1	0.222
$D_{L,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D4)	12.488	3.729	31.5	0.222
$D_{Pl,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D5)	12.491	3.720	-0.1	0.222
$D_{Pl,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D6)	12.471	3.774	-30.9	0.222

Tableau 6.5

Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon avec ellipse à 0°

Critères ou Mesures Exp.	Paramètres Fissure Initiale			
	x_0 (mm)	y_0 (mm)	θ_0 ($^\circ$)	a_0 (mm)
Échantillon A (av.)	14.9	-3.0	32.8	0.4
Échantillon B (av.)	14.9	-2.7	-13.4	2.1
Échantillon A (ar.)	14.9	-2.9	0.0	1.1
Échantillon B (ar.)	14.95	-1.9	39.6	0.2
$D_{\sigma_{lmax}}$ (D1)	15.000	0.000	0.0	0.222
$D_{\tau_{max}}$ (D2)	15.000	0.000	0.0 ± 45	0.222
$D_{L,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D3)	15.000	0.000	-0.1	0.222
$D_{L,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D4)	14.999	0.103	30.4	0.222
$D_{Pl,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D5)	15.000	0.000	-0.1	0.222
$D_{Pl,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D6)	14.999	0.057	30.2	0.222

Afin de saisir l'ordre de grandeur des écarts entre les mesures expérimentales et les prédictions du modèle, la Figure 6.11 et la Figure 6.12 présentent les photographies des zones d'initiation des échantillons « Brugger Roue ». Les prédictions de D_{LCr} , avec $f_-(\sigma_n, \tau_n)$ (trait rouge) et $f_+(\sigma_n, \tau_n)$ (trait bleu) ont été superposées aux images²⁸.

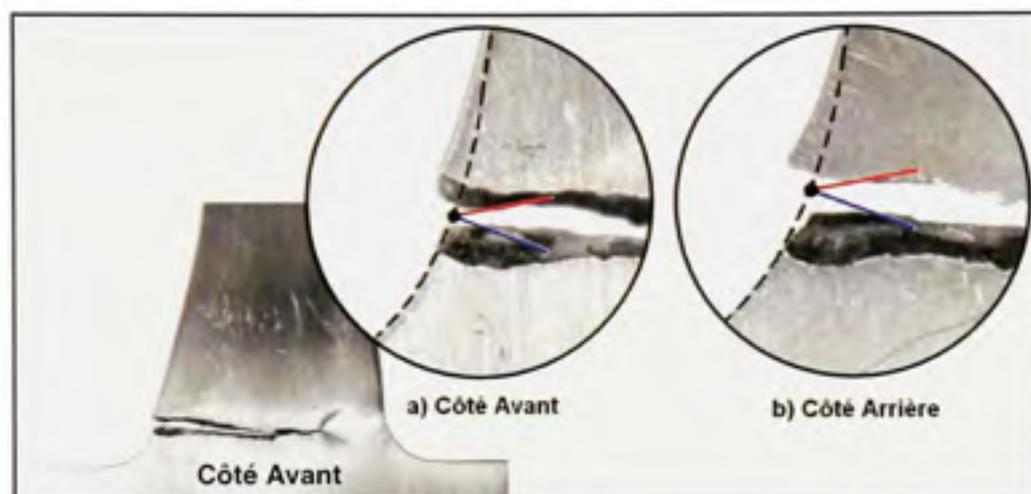


Figure 6.11 *Initiation de fissure échantillon Brugger Roue A.*

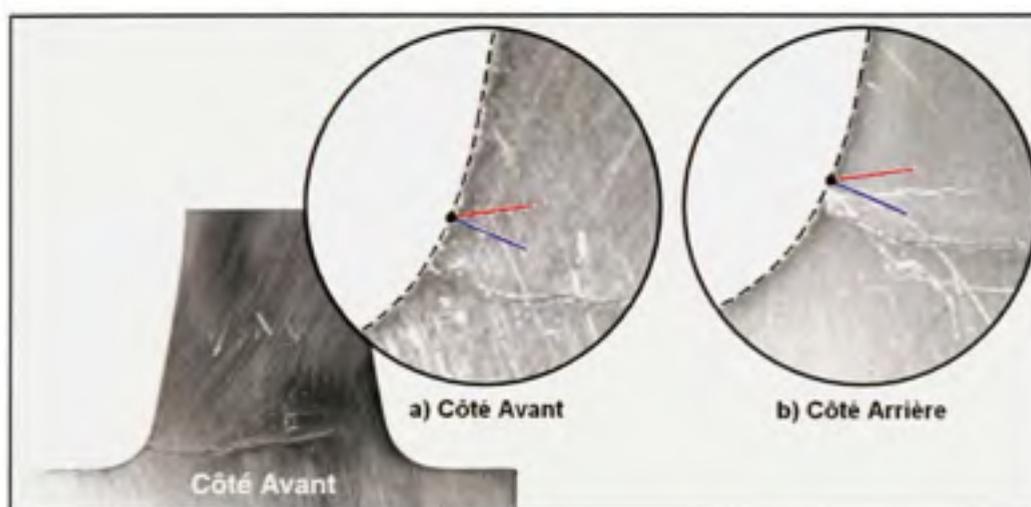


Figure 6.12 *Initiation de fissure échantillon Brugger Roue B.*

²⁸ Afin d'être visibles, les traits ont été tracés sur une longueur de 2mm. De plus, les points d'initiation ont été confondus puisque la résolution des photographies, ne permettait pas un agrandissement suffisant.

La Figure 6.13 et la Figure 6.14 présentent de façon similaire, la zone d'endommagement des échantillons avec ellipse à 0° . Les photographies des autres échantillons sont présentées à l'annexe V.

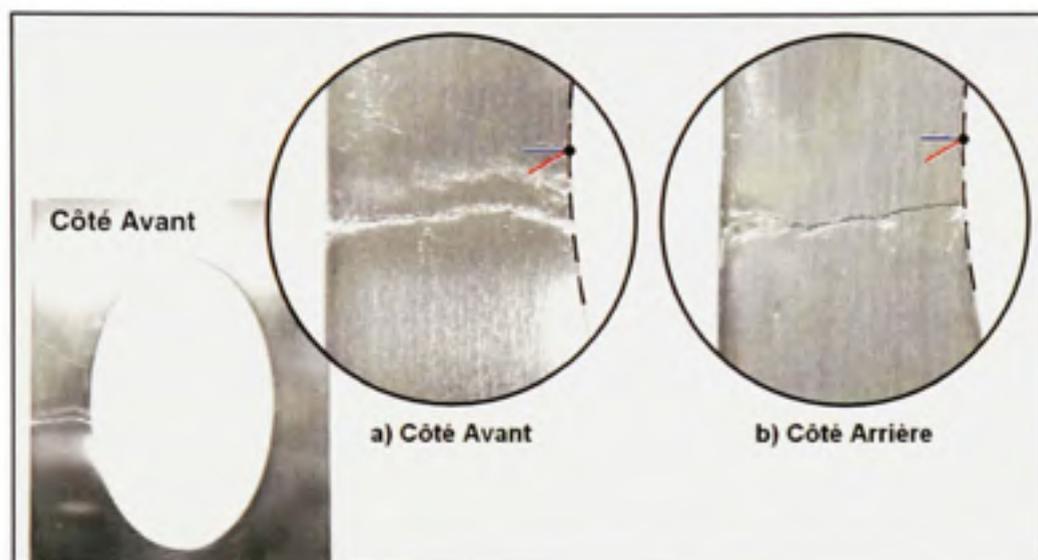


Figure 6.13 *Initiation de fissure échantillon avec ellipse à 0° A.*

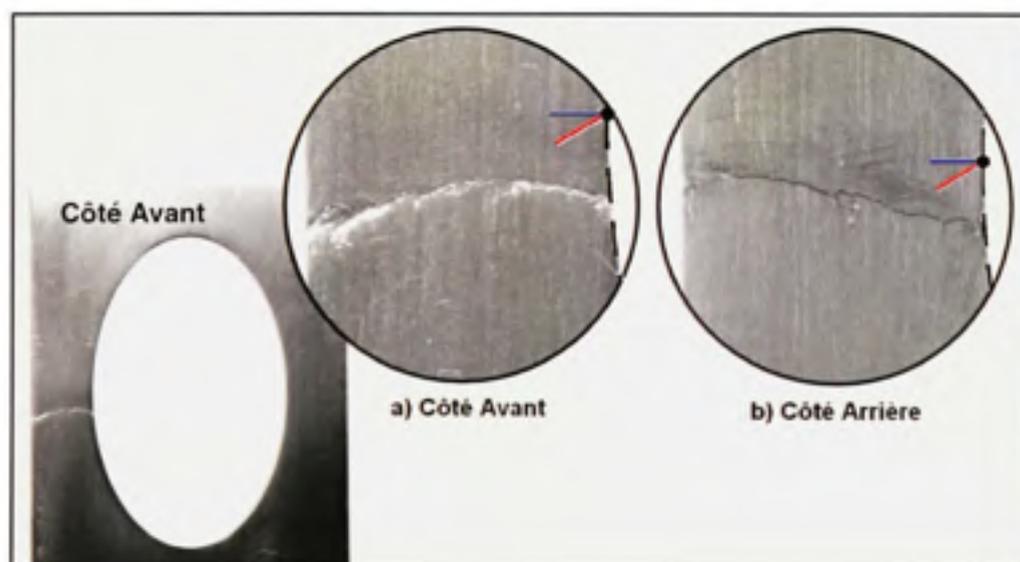


Figure 6.14 *Initiation de fissure échantillon avec ellipse à 0° B.*

6.2.2 Propagation des fissures

Du côté de l'analyse des résultats en propagation de fissure, les comparaisons ont été effectuées au niveau de l'allure de la trajectoire. Puisque le modèle développé se veut un outil d'analyse en durée de vie totale (c.-à-d. $N_i + N_p$), les paramètres initiaux x_0 , y_0 , θ_0 et a_0 prédits par $D_{L,Cr}$ et $f_s(\sigma_n, \tau_n)$ ont été utilisés pour les simulations numériques, permettant ainsi, de juger de la précision globale du modèle pour l'analyse complète en fatigue.

La Figure 6.15 et la Figure 6.16 présentent les photographies des échantillons « Brugger Roue » au stade final de propagation, où la trajectoire prédite par le modèle a été tracée en rouge. Pour les deux échantillons, les corrélations entre les résultats expérimentaux et numériques sont très bonnes, et ce même si la fissure initiale a été modélisée selon des paramètres ne correspondant pas tout à fait aux conditions expérimentales. Des observations similaires peuvent être effectuées avec les autres échantillons. Les images sont présentées dans les Figures 6.17 - 6.22.

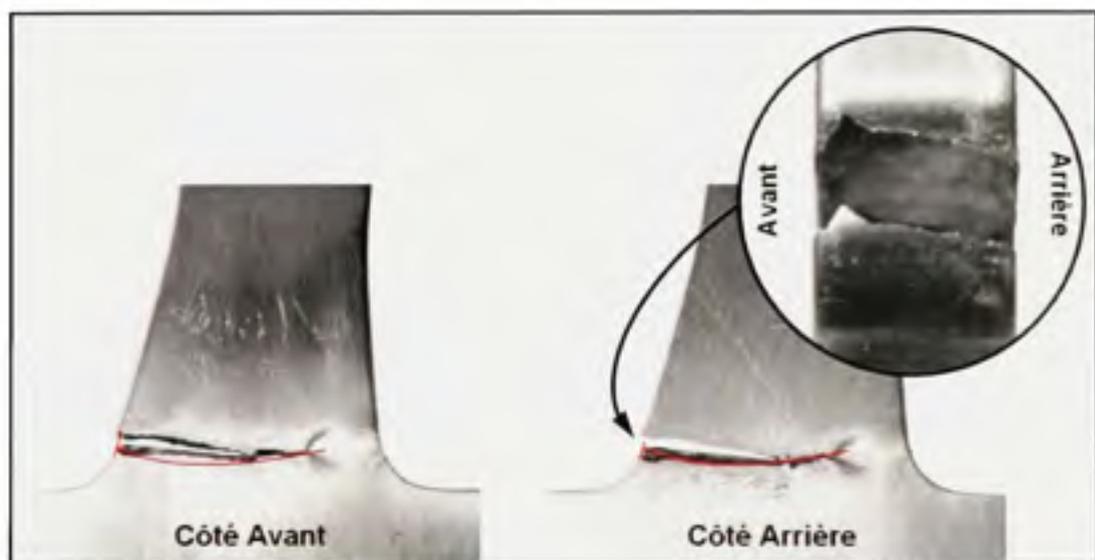


Figure 6.15 Propagation de fissure échantillon Brugger Roue A.

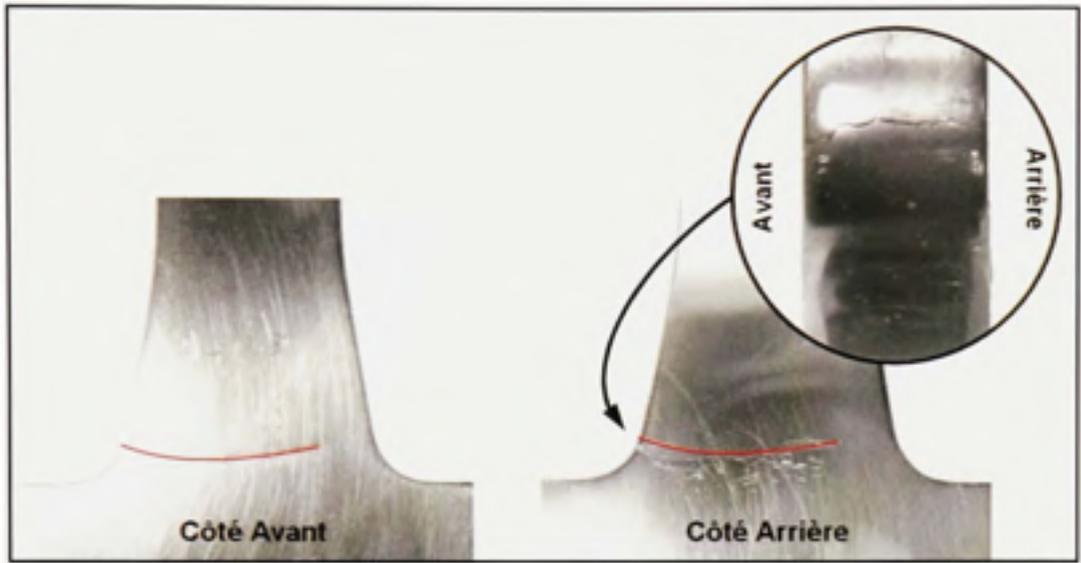


Figure 6.16 *Propagation de fissure échantillon Brugger Roue B.*

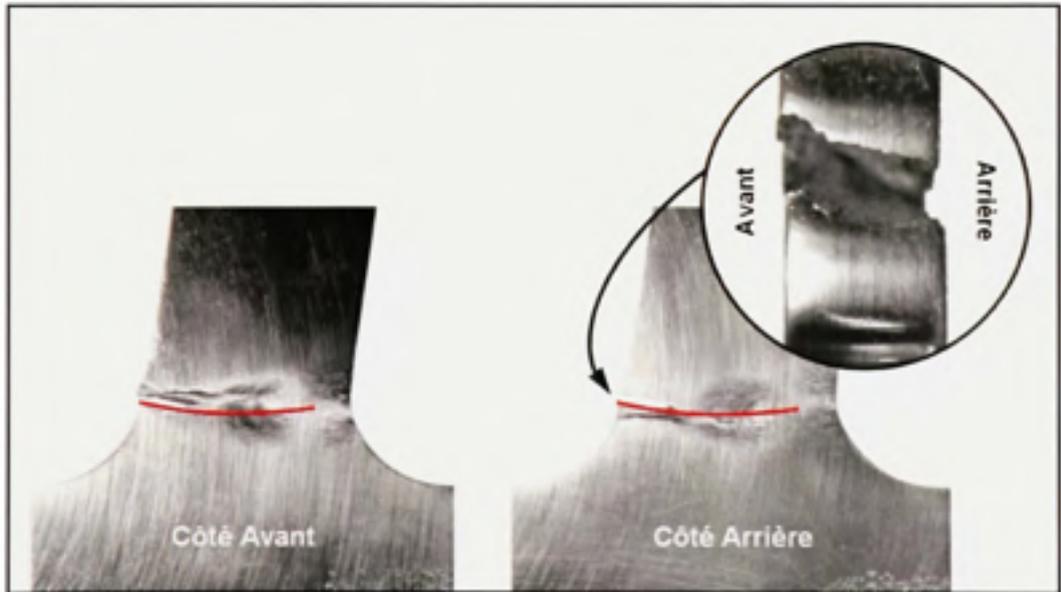


Figure 6.17 *Propagation de fissure échantillon Brugger R = 10 mm A.*

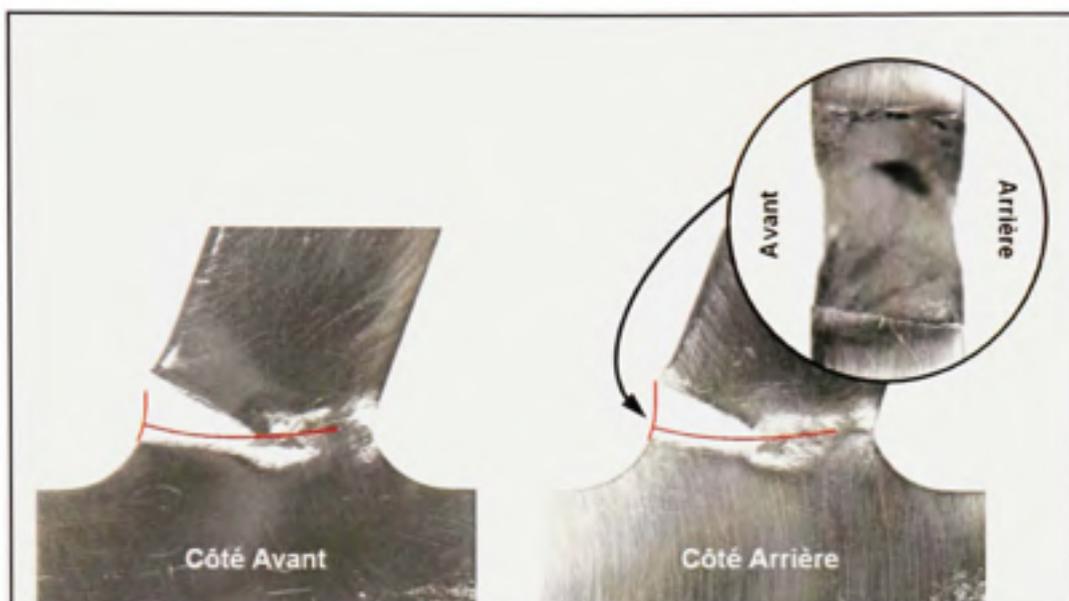


Figure 6.18 *Propagation de fissure échantillon Brugger R = 10 mm B.*

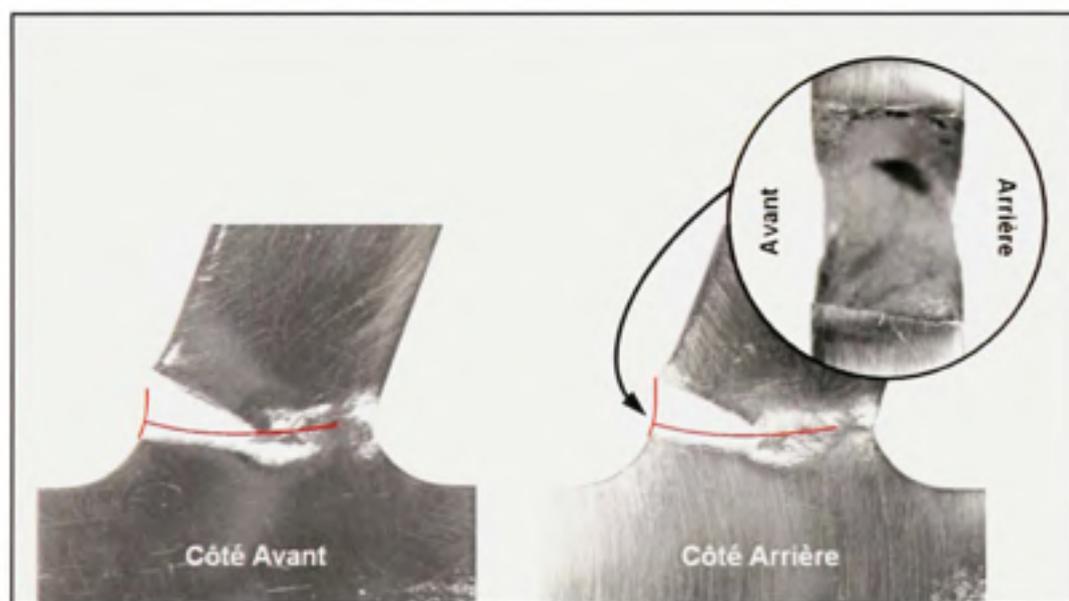


Figure 6.19 *Propagation de fissure échantillon Brugger R = 7.5 mm A.*

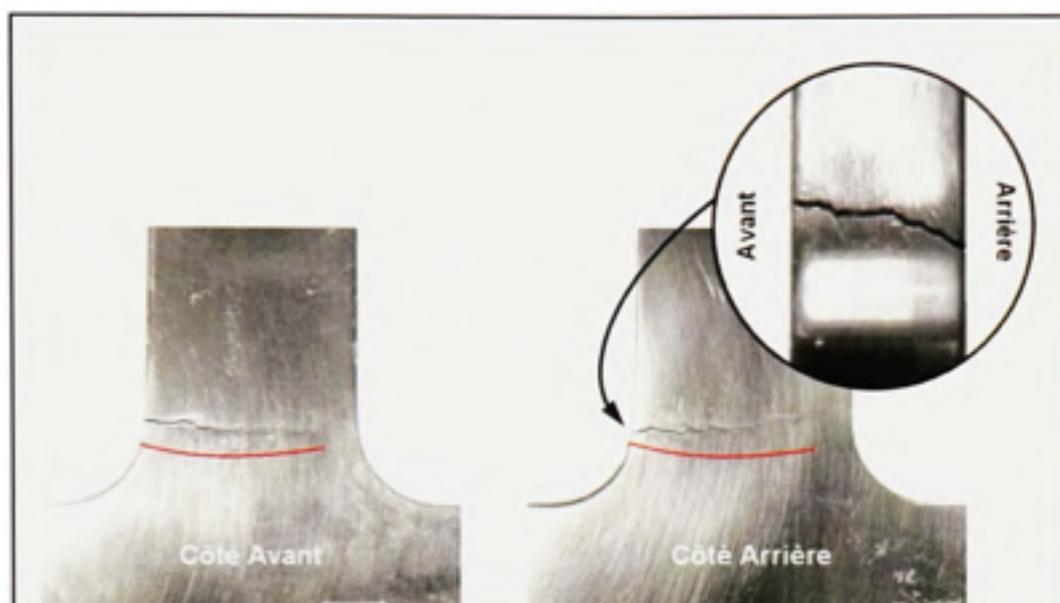


Figure 6.20 Propagation de fissure échantillon Brugger $R = 7.5 \text{ mm B}$.

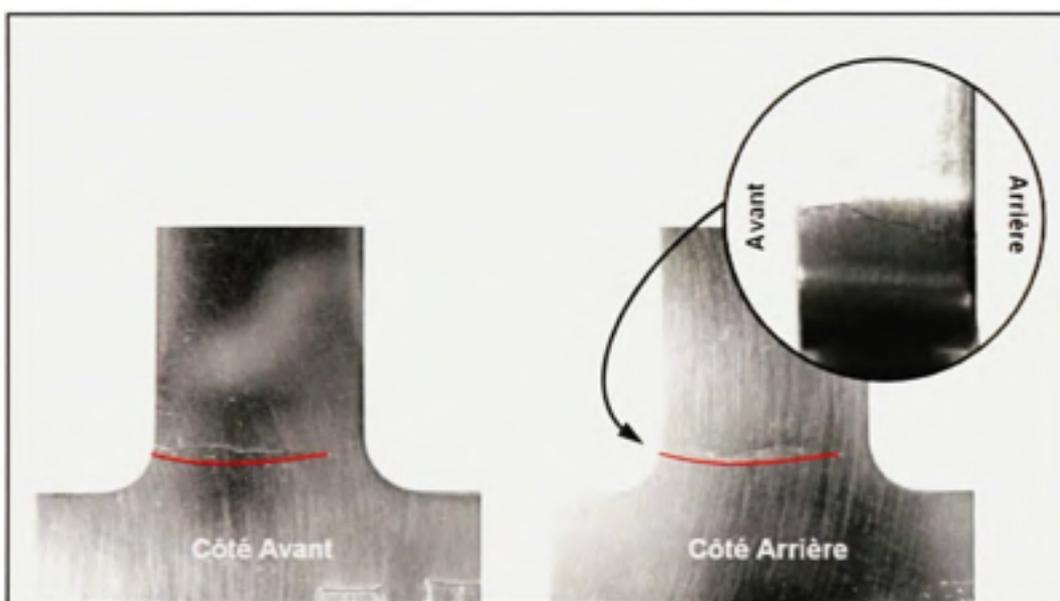


Figure 6.21 Propagation de fissure échantillon Brugger $R = 5 \text{ mm A}$.

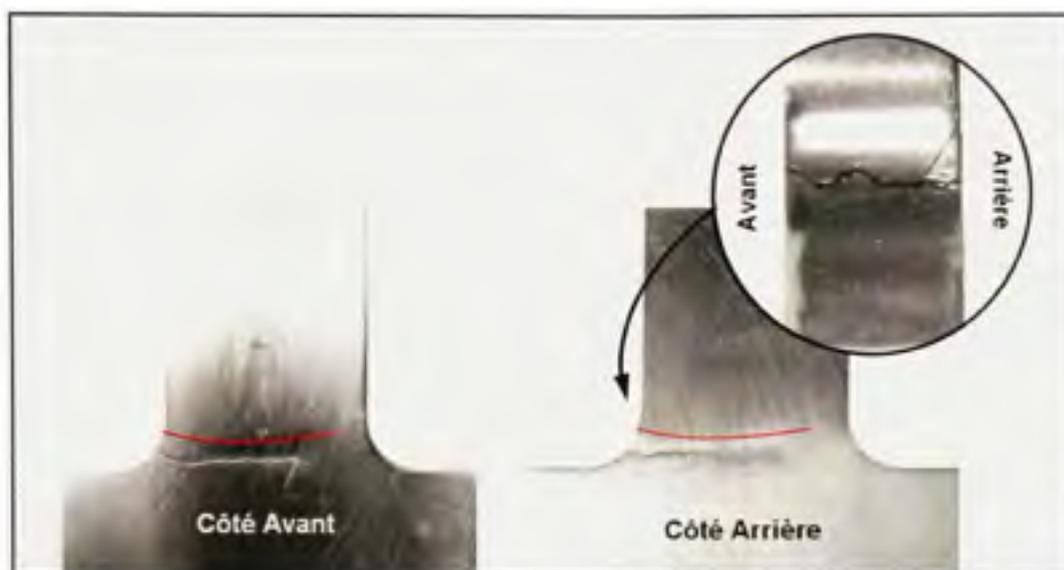


Figure 6.22 Propagation de fissure échantillon Brugger $R = 5 \text{ mm}$ B.

Ces résultats en propagation permettent de conclure que le critère d'orientation de l'avancement de la fissure ainsi que la précision du modèle quant à la caractérisation de la sollicitation de celles-ci en mode mixte sont valides et justes. Le modèle basé sur la séparation infinitésimale des lèvres de la fissure (δ) et la subdivision des éléments correspond donc à une approche hautement efficace, puisqu'elle simplifie de manière importante la simulation numérique tout en offrant une très grande concordance aux mesures expérimentales.

6.3 Conclusion

Bien que les analyses expérimentales de ce chapitre n'étaient pas dirigées vers la validation directe du modèle de la fatigue en flexion réelle des engrenages, celles-ci ont tout de même permis de vérifier les hypothèses et concepts des chapitres précédents.

Tout d'abord, la comparaison des résultats en fatigue initiation n'a pu fournir de réponse décisive quant à la validité des critères. En effet, la qualité des mesures expérimentales faites à partir de photos numériques étant discutable, il a été impossible de définir avec certitude quel critère était le plus approprié. Cet aspect pourra être corrigé à la suite de ce travail par une analyse en fractographie des échantillons. Cependant, l'analyse de θ_0 a en

partie confirmé la principale hypothèse du chapitre 4 : soit que l'initiation des fissures ne se produit pas selon la normale à la surface ou selon le plan de cisaillement maximal, mais bien entre les deux. Cela justifie donc l'utilisation d'un critère tel que D_{LCr} où σ_n et τ_n sont combinés vectoriellement (voir éq.(4.13)). L'analyse en fractographie permettra d'avoir une évaluation plus juste des paramètres x_0 , y_0 , θ_0 et a_0 . Du côté de la fatigue en propagation, de façon beaucoup plus aisée, il a été possible de valider le choix du critère de propagation (c.-à-d. σ_{00max}).

Les observations faites dans ce chapitre mettent en évidence les particularités du nouveau modèle développé aux chapitres 3, 4 et 5. Tout d'abord, la simplicité du modèle attribuable à la MEIF et à la nouvelle technique de modélisation des fissures, a grandement facilité le déroulement des simulations où sa fiabilité et sa précision ont permis d'obtenir, pour tous les cas, des trajectoires de propagation numériques très similaires à celles obtenues expérimentalement. Quant à la prédictions des caractéristiques initiales des fissures, le modèle s'est aussi démarqué en proposant une approche non-locale, nouvelle, basée sur l'interrelation des contraintes σ_n et τ_n (éq.(4.13)). La comparaisons des résultats numériques et expérimentaux sur ce plan ont démontré que cette approche offrait une avenue très prometteuse en ce qui a trait à l'analyse de l'initiation des fissures en fatigue. Ces observations mettent donc à l'avant plan les deux contributions importantes de ce travail : 1 - la méthode de séparation finie (δ) et 2 - le critère vectoriel d'initiation (éq.(4.13)).

Durant la réalisation des essais expérimentaux, quelques sources d'erreurs ont pu être notées. Notamment, en ce qui a trait au positionnement des échantillons où les erreurs d'alignement et de centrage ont sûrement eu une incidence sur la nature du chargement (ex. : composante de chargement induite en torsion) et le comportement en fatigue des spécimens. Certaines irrégularités du matériau ont également pu influencer sur l'endommagement de celui-ci. Par exemple, les contraintes résiduelles en surface, induites par l'usinage des échantillons, ont sûrement favorisé certains sites d'initiation n'étant pas particulièrement critiques au point de vue du chargement. Toutefois ces phénomènes n'ont pas été observés de manière explicite.

CONCLUSION

Responsable de plus de 30% des cas de défaillance des engrenages, la fatigue en flexion de ceux-ci est, encore aujourd'hui, un problème important des systèmes de transmission. Cependant, bien que les avancées scientifiques des dernières décennies (c.-à-d. MREL et mécanique de l'endommagement) aient permis d'atteindre un haut niveau de compréhension des phénomènes d'endommagement, l'application concrète de ces théories à travers différents outils d'analyse est encore peu répandue, surtout en ce qui a trait aux engrenages.

La revue de la littérature au chapitre 1 a couvert de manière exhaustive le sujet selon trois grands aspects : 1 - les caractéristiques du phénomène de la fatigue en flexion des engrenages de l'initiation à la propagation instable, en passant par les facteurs d'influence. 2 - L'applicabilité de la MREL à ce problème de même que les méthodes de calcul des FIC et de la propagation des fissures selon divers concepts et hypothèses. Et enfin, 3 - la modélisation numérique de la fatigue en flexion où différentes approches de représentation géométrique, de calcul et de discrétisation ont été présentées. De façon résumée, cette revue a principalement révélé que la fatigue en flexion des engrenages est un phénomène de nature très complexe encore difficile à caractériser, mais que l'application des concepts de la MREL selon des méthodes numériques appropriées, rend possible son analyse.

Malgré l'importance de la fatigue en flexion des engrenages, il a été démontré qu'aucune approche systématique d'analyse du phénomène n'était encore bien établie. Or, cette recherche, directement liée à la définition d'une modélisation de base simple et efficace de la fatigue en flexion a répondu à cette lacune. En fait, ce projet d'étude visait trois objectifs bien précis. Le premier consistait à développer un modèle numérique basé sur l'utilisation efficace de la MEIF et permettant l'évaluation précise des FIC. Ensuite, la caractérisation des phases d'initiation et de propagation des fissures en fatigue en flexion constituait les deux autres objectifs du projet. Cependant, l'ampleur du travail à accomplir permettait seulement l'analyse bidimensionnelle des roues cylindriques à denture droite.

Le développement des outils numériques nécessaires à la modélisation 2D a tout d'abord prouvé, par comparaison à la MEF, que la MEIF était une méthode numérique tout indiquée à l'analyse des structures fissurées ou non. En effet, la discrétisation simplifiée (c.-à-d. maillage du contour extérieur seulement) et la formulation intégrale, inhérentes à la MEIF, lui confèrent une grande efficacité tout en étant très précise. L'élaboration du modèle 2D d'éléments frontières nécessitait cependant une attention particulière en ce qui a trait à la modélisation des fissures. En effet, la MEIF ne permettait pas la représentation coplanaire des lèvres des fissures selon une application standard de la méthode (c.-à-d. formulation en déplacement uniquement et un seul domaine). Afin de maintenir la simplicité du modèle, une approche nouvelle a donc été proposée, développée et validée : la méthode de séparation finie des lèvres (δ).

Essentiellement fondée sur une application optimisée du principe de subdivision des éléments, cette technique induit une approximation de la géométrie idéale des fissures (c.-à-d. surfaces coplanaires) en imposant un écartement infinitésimal (δ) des lèvres, offrant ainsi tous les avantages de la formulation usuelle de la MEIF. Comparée aux techniques habituelles de modélisation des fissures par la MEIF (c.-à-d. sous-structuration, DDM et DBEM), l'approche proposée dans ce projet s'est montrée supérieure ou équivalente sur la majorité des aspects couverts. Combinée aux éléments EQP et à l'extrapolation des déplacements en deux points, la méthode de séparation finie (δ) s'est avérée stable et très précise dans l'évaluation des FIC pour différentes configurations géométriques et différents cas de chargement. Ces développements ont donc conduit à un modèle numérique de roues d'engrenage hautement efficace, capable de caractériser l'état de sollicitation des fissures avec précision.

Le deuxième volet de ce mémoire lié au développement du modèle, portait sur l'initiation des fissures où une approche phénoménologique et macroscopique a été adoptée. La revue de la littérature a montré que cet aspect de la fatigue en flexion des engrenages était rarement considéré ou encore que l'approche utilisée ne correspondait pas entièrement au phénomène réel d'initiation. Ce projet d'étude cherchait donc à caractériser de façon plus

cohérente l'initiation selon les principales caractéristiques de la fatigue en flexion des engrenages : chargement multiaxial et proportionnel, fatigue endurance (i.e $\varepsilon_{pl} \approx 0$) et concentration de contrainte élevée. Cependant, le critère d'initiation devait surtout traduire l'interrelation du cisaillement et de la tension, essentielle à l'endommagement par fatigue. En combinant le principe de la distance critique (c.-à-d. L_0) et celui du plan de sollicitation maximale au critère vectoriel d'initiation (éq.(4.13)) proposé par cette étude, une approche nouvelle a été développée. Celle-ci caractérise de façon objective tous les paramètres géométriques d'initiation (c.-à-d. x_0 , y_0 , θ_0 et a_0), où interviennent de manière cohérente les propriétés du matériau, mais surtout l'effet combiné du cisaillement et de la tension.

La dernière partie du développement du modèle, s'adressait à la modélisation de la propagation des fissures par les concepts de la MREL. Quelques lois de propagation ont d'abord été passées en revue où celles permettant l'analyse en propagation lente et instable étaient plus appropriées à la fatigue des engrenages. Du côté des critères d'orientation de la propagation, celui de la $\sigma_{\theta\theta\max}$ s'est montré très efficace pour l'analyse des fissures longues. Cependant, l'intensité du mode II pouvant être plus importante en début de propagation selon θ_0 , ce critère peut induire une déviation appréciable de la fissure. L'analyse numérique en propagation a aussi démontré l'efficacité du modèle où un pas d'avancement de fissure « da » assez grand (c.-à-d. 0.2m), était suffisant à l'obtention d'une solution précise. Aussi, il a été prouvé qu'en utilisant seulement l'état de chargement à la position critique de l'engrènement (c.-à-d. $K_{I,\max}$), l'allure de la propagation pouvait être décrite avec une bonne précision.

Finalement, les comparaisons des résultats numériques à des mesures expérimentales ont confirmé l'efficacité et la haute précision du schéma de calcul développé dans l'étude, surtout en ce qui a trait à la propagation des fissures. Du point de vue de l'initiation, aucune conclusion définitive n'a pu être apportée en raison de la qualité des mesures expérimentales. Par contre, une certaine tendance des résultats expérimentaux permet de croire que les valeurs prédites par le nouveau critère vectoriel d'initiation (éq.(4.13)) sont plus précises. Une analyse en fractographie permettra cependant, de confirmer ces observations.

Globalement, l'ensemble du travail réalisé a su répondre à l'objectif général du projet, soit définir les lignes directrices d'une modélisation de base pour l'étude de la propagation des fissures de fatigue en flexion dans les engrenages, de l'initiation à la rupture. Outre, les développements des chapitres 3 et 4, ceux-ci ont apporté deux contributions significatives à l'analyse des structures en fatigue.

La modélisation des fissures par la méthode de séparation finie des lèvres (δ) constitue la première contribution de ce projet. Cette approche novatrice de modélisation, facilite grandement l'application de la MEIF en mécanique de la rupture. Nul doute que l'efficacité, la précision et la fiabilité de cette méthode sauront profiter à d'autres études portant sur l'analyse numérique de structures fissurées. La seconde contribution de ce mémoire est le critère d'initiation (éq.(4.13)) développé au chapitre 4 où la combinaison vectorielle du cisaillement et de la tension propose des pistes nouvelles pour l'analyse en fatigue initiation. Bien que le critère soit encore à un stade de développement, celui-ci présente un grand potentiel en fournissant des réponses concrètes et cohérentes en ce qui a trait aux paramètres d'initiation des fissures.

RECOMMANDATIONS

Ce projet a permis le développement d'un modèle complet, permettant la caractérisation de l'initiation à la propagation instable des fissures de fatigue en flexion des engrenages. Ainsi, l'impact de différents aspects de la modélisation a pu être analysé selon une perspective globale. Par contre, le cadre d'analyse limitant l'étude au cas 2D tout en imposant plusieurs hypothèses simplificatrices, laisse place à de multiples pistes de recherches complémentaires, voire même nécessaires.

Même si le stade de développement actuel du modèle demeure primaire, plusieurs aspects de la fatigue en flexion, inexplorés dans ce projet, pourraient être abordés directement avec le type de modélisation proposé. Entre autres, il serait possible de simuler l'effet du contact entre les dents, en appliquant une distribution de chargement appropriée, définie par les théories de Hertz. De cette façon, l'état de contrainte serait calculé avec plus d'exactitude, pour les cas de chargement où le point de contact est situé près du congé. Pour les situations où les roues sont soumises à des vitesses de rotation élevées, l'étude des forces centrifuges pourrait aussi être envisagée. En effet, les charges volumiques induites par la rotation peuvent être incorporées dans la formulation de la MEIF par un ajustement simple, utilisant le vecteur de Galerkin pour transformer l'intégrale de domaine (Ω) en intégrale de contour (Γ) (Aliabadi, 2002). Enfin, l'effet des paramètres géométriques des roues sur le comportement en fatigue, tel le module (m), l'angle de pression (ϕ), la forme du congé, l'épaisseur de la jante (m_B) et autres, pourraient tout aussi bien être analysés avec le présent modèle et fournir des résultats très intéressants et utiles à la conception des systèmes.

Bien que le modèle 2D offre plusieurs avantages (ex. : simplicité et rapidité de calcul), une modélisation tridimensionnelle serait plus représentative et réaliste. En effet, l'aspect géométrique de la denture, la distribution du chargement souvent non uniforme et les fissures apparaissant rarement sur toute la largeur des dents (F), nécessitent un modèle 3D. Plusieurs règles de modélisation définies dans ce projet, pourront cependant être transposées à un tel modèle, favorisant ainsi un développement plus direct. Un travail important devra

néanmoins être réalisé pour adapter la méthode de séparation finie des lèvres de la fissure aux éléments surfaciques. En ce qui concerne l'approche de la ligne critique (L_{Cr}), utilisée pour l'application du critère vectoriel d'initiation (éq.(4.13)), celle-ci devrait être remplacée par une surface critique (A_{Cr}) positionnée selon un point $x_0; y_0; z_0$ et ayant pour longueur caractéristique L_0 . L'orientation de cette surface devra aussi être définie dans un repère 3D nécessitant deux valeurs angulaires (ex. : θ_0 et α_0).

L'applicabilité de la MREL imposait aussi quelques limitations aux analyses en fatigue, surtout en ce qui a trait à la propagation des fissures courtes où la plasticité a un effet non négligeable sur celle-ci. Or, le chapitre 5 soulevait la nécessité de bien caractériser ce stade d'endommagement puisque dans les engrenages, ce dernier peut représenter une portion considérable de la durée de vie résiduelle. Pour traiter ce problème, deux avenues sont suggérées. La première consiste à utiliser les modèles semi-empiriques de propagation, discutés dans ce projet. Cette approche est relativement simple à implanter, cependant, selon le modèle choisi, elle peut introduire plusieurs facteurs plus ou moins arbitraires et difficiles à évaluer. La deuxième approche est beaucoup plus complexe, puisqu'il s'agit de modéliser directement le comportement non linéaire du matériau selon des modèles rhéologiques appropriés. Le phénomène de fermeture des lèvres pouvant être présent dans le cas des fissures courtes, il faudra aussi prévoir la modélisation du contact entre celles-ci. Ainsi, l'état de sollicitation des fissures courtes (c.-à-d. FIC) pourrait être déterminé seulement en fonction du chargement, ce qui minimiserait les sources d'erreur.

Cependant, avant même d'entreprendre tous ces projets de recherches complémentaires, mais surtout assez complexes, il est d'abord essentiel de valider le modèle actuel dans son application aux engrenages. En effet, le cadre de ce projet n'étant pas approprié à la réalisation d'essais de fatigue sur de véritables roues d'engrenage, certaines hypothèses d'analyses (ex. : chargement) n'ont pu être vérifiées expérimentalement. De plus, ces essais expérimentaux permettraient l'évaluation quantitative de plusieurs autres aspects de la fatigue en flexion des engrenages encore peu documentés telles la plasticité en bout de fissure, les contraintes résiduelles et les vibrations.

ANNEXE I

MÉTHODES NUMÉRIQUES

- **Méthode des moindres carrés**

La méthodologie employée pour cette technique d'approximation, a été basée entièrement sur celle présentée par Al-Khafaji et Tooley (1986). Voici, la procédure suivie pour le cas général d'une régression non linéaire visant à définir un polynôme de degré « n » selon la forme suivante :

$$K(r) = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + a_3 \cdot r^3 + \dots + a_n \cdot r^n \quad (1.1)$$

Où K est le paramètre pour lequel l'approximation est voulue, et r est la variable indépendante selon laquelle K est décrit. Il s'agit donc de définir les coefficients a_i à partir d'une série de N données où les valeurs K_i sont connues pour des valeurs r_i spécifiques. Chaque coefficient doit être défini de sorte qu'il minimise la fonction de déviation D (1.2) correspondant au carré de l'erreur entre K_i et $K(r_i)$.

$$D = \sum_{i=1}^N (K_i - a_0 - a_1 \cdot r - a_2 \cdot r^2 - a_3 \cdot r^3 - \dots - a_n \cdot r^n)^2 \quad (1.2)$$

La valeur des coefficients doit alors respecter l'équation (1.3) pour chaque a_i .

$$\frac{\partial D}{\partial a_i} = 0 = 2 \cdot \sum_{j=1}^N (K_j - a_0 - a_1 \cdot r - a_2 \cdot r^2 - a_3 \cdot r^3 - \dots - a_n \cdot r^n) \cdot (-r_j^i) \quad (1.3)$$

La dernière étape, est de résoudre le système d'équations généré à partir de (1.3) afin d'obtenir les coefficients a_i . Dépendamment de la distribution des K_i et du degré de la courbe, cette dernière sera plus ou moins représentative des données de départ. Deux paramètres, permettent de juger quantitativement de la représentativité de $K(r)$, soit le coefficient de corrélation (R^2) (1.4) et l'écart type (σ_e) (1.5).

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (K(r_i) - \bar{K}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (K_i - \bar{K}_i)^2} \quad (1.4)$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (K_i - \bar{K})^2}{N - M}} \quad (I.5)$$

Dans l'équation (I.4) \bar{K}_i est la valeur moyenne du paramètre K_i et dans l'équation (I.5), M est le nombre de coefficients a_i . Un R^2 se rapprochant de 1, indiquera une bonne corrélation et il en sera de même pour de faibles valeurs de σ_e .

- **Méthode des coefficients indéterminés**

Cette méthode de différentiation a été également appliquée selon une méthodologie présentée par Al-Khafaji et Tooley (1986). Elle consiste principalement estimer la fonction à dériver « $f(x)$ » par un polynôme de degré « n » autour du point x_i (I.6)

$$f(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \dots + a_n \cdot x_i^n \quad (I.6)$$

Il suffit ensuite de dériver ce polynôme « n » fois et obtenir la série d'expressions suivante :

$$\begin{aligned} f^1(x_i) &= a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x_i + 3 \cdot a_3 \cdot x_i^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x_i^{n-1} \\ f^2(x_i) &= 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x_i + \dots + (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x_i^{n-2} \\ &\vdots \\ f^n(x_i) &= n! \cdot a_n \end{aligned} \quad (I.7)$$

En considérant l'évaluation des expressions (I.7) pour $x_i = 0$, celles-ci deviennent beaucoup plus simples.

$$\begin{aligned} f^1(x_i) &= a_1 \\ f^2(x_i) &= 2 \cdot a_2 \\ &\vdots \\ f^n(x_i) &= n! \cdot a_n \end{aligned} \quad (I.8)$$

Maintenant, il s'agit de développer les équations permettant de définir les coefficients a_i en considérant la solution numérique (c.-à-d. MEF ou MEIF) à des positions de part et d'autre

du point x_i uniformément distribuées selon des intervalles de distance « h ». Cela conduit au système d'expressions suivant :

$$\begin{aligned}
 f_{i-j} &= a_0 - a_1 \cdot jh + a_2 \cdot (-jh)^2 + a_3 \cdot (-jh)^3 + \dots + a_n \cdot (-jh)^n \\
 &\vdots \\
 f_{i-1} &= a_0 - a_1 \cdot h + a_2 \cdot (-h)^2 + a_3 \cdot (-h)^3 + \dots + a_n \cdot (-h)^n \\
 f_i &= a_0 \\
 f_{i+1} &= a_0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot (h)^2 + a_3 \cdot (h)^3 + \dots + a_n \cdot (h)^n \\
 &\vdots \\
 f_{i+j} &= a_0 + a_1 \cdot jh + a_2 \cdot (jh)^2 + a_3 \cdot (jh)^3 + \dots + a_n \cdot (jh)^n
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

En résolvant ce système d'équations, il est possible d'obtenir les valeurs de a_i et de par (I.8) la dérivée première à la position $x_i = 0$, vaut a_1 . Lorsque la position x_i se situe près des frontières, il est possible de décentrer la formulation (Al-Khafaji et Tooley, 1986).

• Décomposition de l'intégrale J

La décomposition de l'intégrale J a été appliquée dans ce projet, selon la procédure décrite par Aliabadi et Rooke (1992) qui ont en premier lieu formulé l'intégrale sous la forme de l'équation (I.10).

$$J = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} n_x - [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}] \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \right\} d\Gamma \tag{I.10}$$

Où n_x et n_y sont les composantes du vecteur unitaire normal au contour Γ . Pour décomposer l'intégrale en mode I et II, il faut en premier lieu définir les contraintes, les déformations et les déplacements spécifiques à ceux-ci (I.11).

$$\sigma_y = \sigma_y^I + \sigma_y^{II} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^I + \varepsilon_y^{II} \quad u_y = u_y^I + u_y^{II} \tag{I.11}$$

Pour ce faire, il faut considérer deux points $P(x,y)$ et $P'(x,-y)$ symétriques par rapport à l'axe de la fissure (Figure 3.3), ce qui permet alors d'établir les relations (I.12), (I.13) et (I.14).

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} + \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} + \sigma'_{yy} \\ \tau_{xy} - \tau'_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma''_{xx} \\ \sigma''_{yy} \\ \tau''_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} - \sigma'_{yy} \\ \tau_{xy} + \tau'_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \varepsilon'_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} + \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon_{yy} + \varepsilon'_{yy} \\ \varepsilon_{xy} - \varepsilon'_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon''_{xx} \\ \varepsilon''_{yy} \\ \varepsilon''_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon_{yy} - \varepsilon'_{yy} \\ \varepsilon_{xy} + \varepsilon'_{xy} \end{Bmatrix} \quad (I.13)$$

$$\begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_x + u'_x \\ u_y - u'_y \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u''_x \\ u''_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_x - u'_x \\ u_y + u'_y \end{Bmatrix} \quad (I.14)$$

En appliquant ces expressions dans (I.10), l'intégrale J se décompose ainsi :

$$J = J_I + J_{I,H} + J_{H,I} + J_{II} \quad (I.15)$$

De par la symétrie de Γ , les termes $J_{I,H}$ et $J_{H,I}$ s'annulent et J devient :

$$J = J_I + J_{II} \quad (I.16)$$

Où J_I et J_{II} peuvent être évaluées séparément par les équations (I.17) et (I.18).

$$J_I = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ 2\varepsilon'_{xy} \end{Bmatrix} n_x - \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u'_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \right\} d\Gamma \quad (I.17)$$

$$J_{II} = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{yy} & \tau''_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon''_{xx} \\ \varepsilon''_{yy} \\ 2\varepsilon''_{xy} \end{Bmatrix} n_x - \begin{bmatrix} \sigma''_{xx} & \sigma''_{yy} & \tau''_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u''_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u''_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \right\} d\Gamma \quad (I.18)$$

En ce qui concerne l'évaluation des dérivées $\partial u_i / \partial x_k$, il a été mentionné à la section 3.1.3 que celles-ci ont été évaluées par la dérivée d'un polynôme de Lagrange. Or, avec la MEIF, il est possible d'évaluer directement et avec plus de précision $\partial u_i / \partial x_k$ par la relation (I.19).

$$\frac{\partial u_i(P)}{\partial x_k} = \int_{\Gamma} \frac{\partial U_{ij}(P,Q)}{\partial x_k} t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial T_{ij}(P,Q)}{\partial x_k} u_j(Q) d\Gamma \quad (I.19)$$

Où les dérivées des tenseurs U_{ij} et T_{ij} sont données par les expressions (I.20) et (I.21).

$$\frac{\partial U_{ij}(P,Q)}{\partial x_k} = \frac{-1}{8G\pi(1-\nu)r} \left\{ (3-4\nu) \frac{\partial r}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \delta_{jk} - \frac{\partial r}{\partial x_j} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \quad (I.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}(P,Q)}{\partial x_k} = & \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial r}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \delta_{jk} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \left((1-2\nu) \delta_{ij} + 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \right] \right. \\ & + n_k \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right] - n_j (1-2\nu) \left[\delta_{ik} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \\ & \left. + n_i (1-2\nu) \left[\delta_{jk} - 2 \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \right\} \quad (I.21) \end{aligned}$$

C'est cette technique qui a été implantée au code d'éléments de frontières.

- **Dégénérescence de la MEIF pour des surfaces coplanaires**

Afin de bien comprendre comment la modélisation de surfaces coplanaires conduit à une dégénérescence de la formulation, il faut considérer le cas général d'un domaine (Ω) contenant une fissure intérieure (Figure I.1). Donc, Ω peut être défini par son contour extérieur (Γ) et ceux des lèvres supérieure (Γ_+) et inférieure (Γ_-) de la fissure.

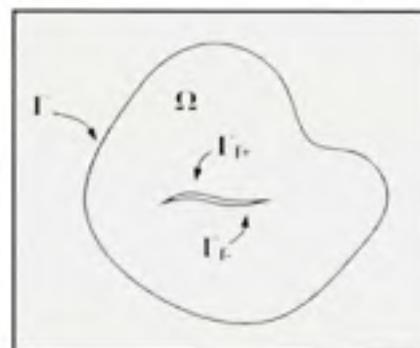


Figure I.1 Corps avec fissure interne.

En appliquant l'identité de Somigliana en déplacement (éq.(1.32)) à cette situation, l'expression (1.22) est obtenue.

$$u_i(P) = \int_{\Gamma_{f^+}, \Gamma_{f^-}} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma_{f^+}, \Gamma_{f^-}} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (1.22)$$

Au cas limite où Γ_{f^+} et Γ_{f^-} sont confondus pour donner Γ_f , les coefficients U_{ij} et T_{ij} ont les caractéristiques suivantes pour des points Q_{f^+} et Q_{f^-} situés sur Γ_{f^+} et Γ_{f^-} respectivement.

$$\begin{aligned} U_{ij}(P, Q_{f^+}) &= U_{ij}(P, Q_{f^-}) \\ T_{ij}(P, Q_{f^+}) &= -T_{ij}(P, Q_{f^-}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Alors, en considérant seulement Γ_f et en utilisant les relations de (1.23), l'équation (1.22) peut être écrite comme le montre l'équation 1.24.

$$\begin{aligned} u_i(P) &= \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) \Sigma t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) \Delta u_j(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.24)$$

Où $\Delta u_j(Q) = u_j(Q_{f^+}) - u_j(Q_{f^-})$ et $\Sigma t_j(Q) = t_j(Q_{f^+}) + t_j(Q_{f^-})$. Lorsque les surfaces de la fissure sont libres ou chargées de façon égale et en sens opposé, $\Sigma t_j(Q) = 0$. Pour ce cas particulier et où le point P est situé sur Γ_f l'équation (1.24) devient (Cruse, 1988) :

$$\begin{aligned} u_i(P) - \frac{\Delta u_j(P)}{2} &= \int_{\Gamma} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q) \Delta u_j(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (1.25)$$

Il apparaît donc, dans la relation (1.25), deux inconnues en déplacement u_i et Δu_j qui rendent l'équation impossible à résoudre par la MEIF conventionnelle. De plus, cette équation sera valable pour toute combinaison de tractions égales et en sens opposé appliquée sur Γ_{f^+} et Γ_{f^-} , puisque $\Sigma t_j(Q) = 0$, ce qui physiquement est incohérent (Aliabadi et Rooke, 1992).

ANNEXE II

CALCULS RELATIFS À LA GÉOMÉTRIE DES ENGRENAGES

- **Équations du taillage par un outil crémaillère**

Le calcul de la géométrie des profils en développante de cercle générés par un outil crémaillère, s'appuie entièrement sur la méthodologie de Litvin et Fuentes (2004). Celle-ci consiste à transposer le mouvement d'un système en translation (c.-à-d. crémaillère) à un autre en rotation (c.-à-d. roue) (Figure II.1).

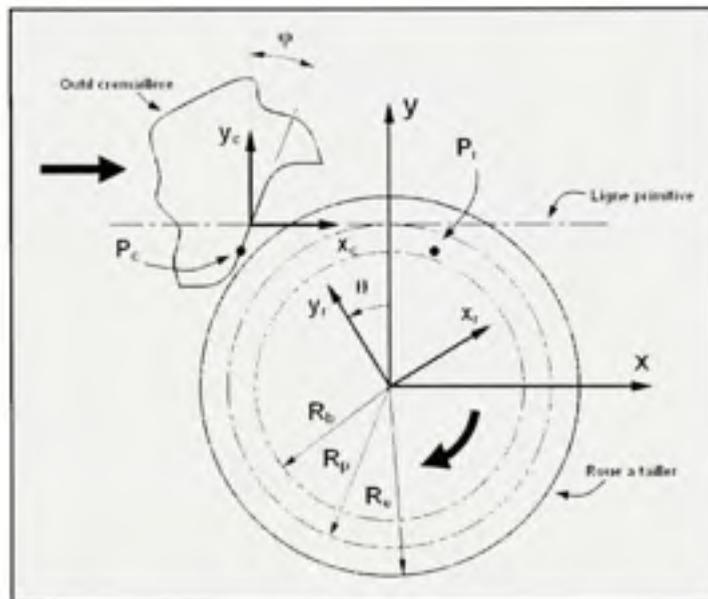


Figure II.1 *Taillage des roues par un outil crémaillère.*

Pour définir les points du profil sur la roue « P_r » selon le système de coordonnées « xy », il faut premièrement générer les points sur l'outil « P_c » par rapport à « $x_c y_c$ ». Les points appartenant à la partie droite du couteau, généreront le profil en développante de cercle et ceux sur l'arrondi définiront le congé en racine de dent. Dans ce projet, l'arrondi a été fixé au quart du module (0.25 m). Lorsque les points P_c sont définis, il suffit de la transposer sur la roue une équation de transformation décrite par (II.1).

$$\vec{P}_r = [M_r] \cdot [M_c] \cdot \vec{P}_c \quad (\text{II.1})$$

Où M_r est la matrice de transposition des points P_c dans le système de coordonnées « xy » tenant compte de la rotation de la roue (θ). Cette matrice est donnée en fonction du rayon primitif (R_p) et de θ par l'expression suivante :

$$M_r = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & R_p \cdot (-\theta \cos(\theta) + \sin(\theta)) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & R_p \cdot (\theta \sin(\theta) + \cos(\theta)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

L'angle θ est défini par rapport à la position du point P_c sur l'outil. Pour la partie droite du couteau, θ peut être calculé par l'équation (II.3) où u_c représente la distance du point P_c par rapport à l'origine du système « $x_c y_c$ ». Si P_c est sous l'origine, u_c est négatif.

$$\theta = \frac{u_c}{R_p \cdot \sin(\varphi)} \quad (\text{II.3})$$

Lorsque P_c est situé sur l'arrondi de l'outil, il faut plutôt utiliser la relation (II.4)

$$\theta = \frac{(x_{c,d} + y_{c,d} \cdot \tan(\alpha))}{R_p} \quad (\text{II.4})$$

Cette équation est basée sur la géométrie de l'outil et la position du point P_c , illustrées à la Figure II.2.

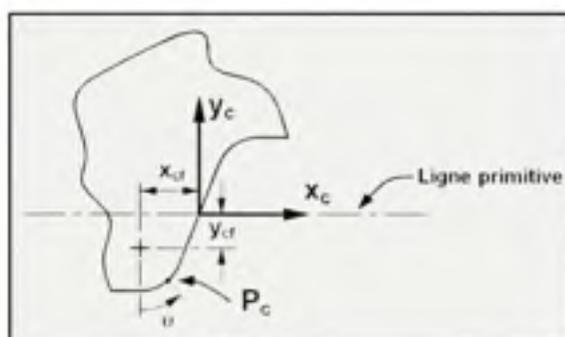


Figure II.2 Paramètres du point P_c sur l'arrondi de l'outil crémaillère.

Enfin, la matrice M_r de l'équation (II.1) permet d'obtenir un profil aligné verticalement par rapport au système de coordonnées global, elle est exprimée par (II.5) où t_p est l'épaisseur de la dent au diamètre primitif.

$$M_r = \begin{bmatrix} \cos(-t_p/2R_p) & \sin(-t_p/2R_p) & 0 \\ -\sin(-t_p/2R_p) & \cos(-t_p/2R_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Il faut préciser que dans ce projet, les profils ont été définis par environ 50 points dérivés à partir des relations précédentes. Une fonction d'interpolation cubique a ensuite été utilisée pour réunir ces points en une courbe.

- **Calcul de la position des points de contact**

Le calcul des points de contact a également été réalisé selon les méthodes de Litvin et Fuentes (2004). Premièrement, dans ce projet, les points de contact ont été définis en fonction d'une position angulaire dans l'engrènement (θ_i) et d'un rayon de contact (R_c). L'angle θ_i était prédéfini selon la position à analyser et R_c était déduit par l'équation (II.6).

$$R_c = R_b \cdot \sqrt{(\sin(\theta_{ci}) - \theta_{ci} \cos(\theta_{ci}))^2 + (\cos(\theta_{ci}) + \theta_{ci} \sin(\theta_{ci}))^2} \quad (\text{II.6})$$

Où θ_{ci} correspond à la rotation angulaire de la roue au point de contact lors de la génération du profil. Celui-ci peut être évalué par l'équation (II.7) faisant intervenir le rayon de base des deux roues du système (R_{b1} et R_{b2}), ainsi que l'entre-axes (C).

$$\theta_{ci} = \theta_i + \cos^{-1}\left(\frac{R_{b1} + R_{b2}}{C}\right) \quad (\text{II.7})$$

ANNEXE III

ÉTUDES DE CONVERGENCE DES MAILLAGES

- **Maillage roue non fissurée (MEF)**

L'étude de convergence menée sur les maillages d'éléments finis a été réalisée selon des modèles comportant 3 dents (Figure III.1), dont chacune d'elle a été subdivisée en 6 parties selon le patron montré à la Figure 3.5.

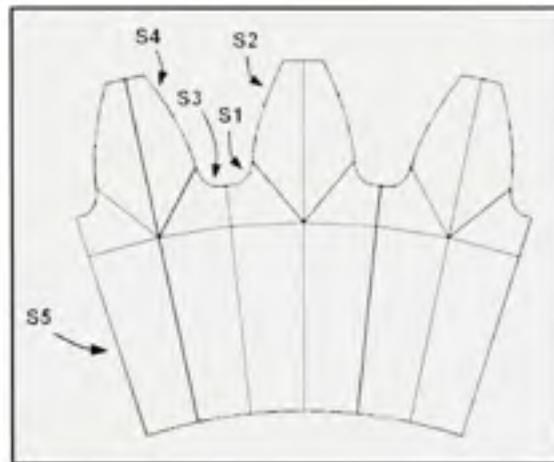


Figure III.1 *Partition des surfaces des modèles d'éléments finis sans fissure.*

Le contrôle des maillages s'est effectué en définissant une taille d'élément (h) pour chaque subdivision. La première étape de l'étude, a d'abord été d'établir le maillage approprié pour une roue, arbitrairement choisie, comportant 30 dents, ayant un module (m) de 4mm, un angle de pression (φ) de 20° et un alésage de 71.5mm. Afin de définir les points de contact dans l'engrènement, une roue de 45 dents a été utilisée. En tout, 9 maillages de degré de discrétisation différents ont été analysés. Le Tableau III.1 présente les caractéristiques de chacun de ceux-ci²⁹. Puisque la solution exacte pour les engrenages n'est pas connue, la performance des différents maillages a été évaluée par comparaison aux résultats d'un modèle complet de la roue, discrétisé par un maillage très précis comportant 907762 DDL.

²⁹ Au Tableau III.1, les caractéristiques des maillages sont données en nombre d'éléments par segment.

Tableau III.1

Caractéristiques des maillages d'éléments finis sans fissure

Maillage	DDL	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
Maillage Roue	907762	76	59	57	44	20
Maillage 1	303286	76	59	57	44	20
Maillage 2	235362	67	52	50	39	18
Maillage 3	173640	57	44	43	33	15
Maillage 4	124542	48	37	36	28	15
Maillage 5	82888	38	30	29	22	15
Maillage 6	51214	29	22	22	19	15
Maillage 7	25826	19	15	15	11	15
Maillage 8	9086	10	8	8	6	15
Maillage 9	3650	5	4	4	4	15

Puisque la région critique, en flexion, se situe à la racine des dents, la performance des maillages a été établie selon les résultats aux nœuds du segment « S₁ » (voir Figure III.1) définissant le congé de la dent principale. La comparaison des maillages a été principalement basée sur la qualité de la distribution du champ de contraintes, nécessaire pour l'analyse en fatigue initiation.

Les Figures III.2, III.3 et III.4 présentent la distribution de la contrainte équivalente (σ_{eq}) (c.-à-d. Von Mises) relative à la contrainte maximale ($\sigma_{eq\ max}$) obtenue du modèle de la roue complète. Conformément au principe de la section 1.4.2, $\sigma_{eq\ max}$ a été détectée à la position du plus haut point de contact avec une seule paire de dents en action. De plus, pour ces graphes, la position « 0 » au congé de la dent représente le point situé au cercle de racine et la position « 1 » est liée à la fin du congé (c.-à-d. début du profil en développante de cercle).

Le premier graphique (Figure III.2) montre la distribution de σ_{eq} au début de l'engrènement où il est possible de constater une forte singularité à la fin du congé. Cela est causé par l'application ponctuelle de la charge, qui au début se trouve très près du congé. La figure montre également qu'il est possible de minimiser l'étendue de cette singularité par un raffinement du maillage où les éléments affectés par ce phénomène sont de plus petite taille. Mais, pour obtenir des résultats acceptables près du point de contact, il faudrait appliquer la charge selon une distribution pouvant être dérivée à partir des lois du contact de Hertz.

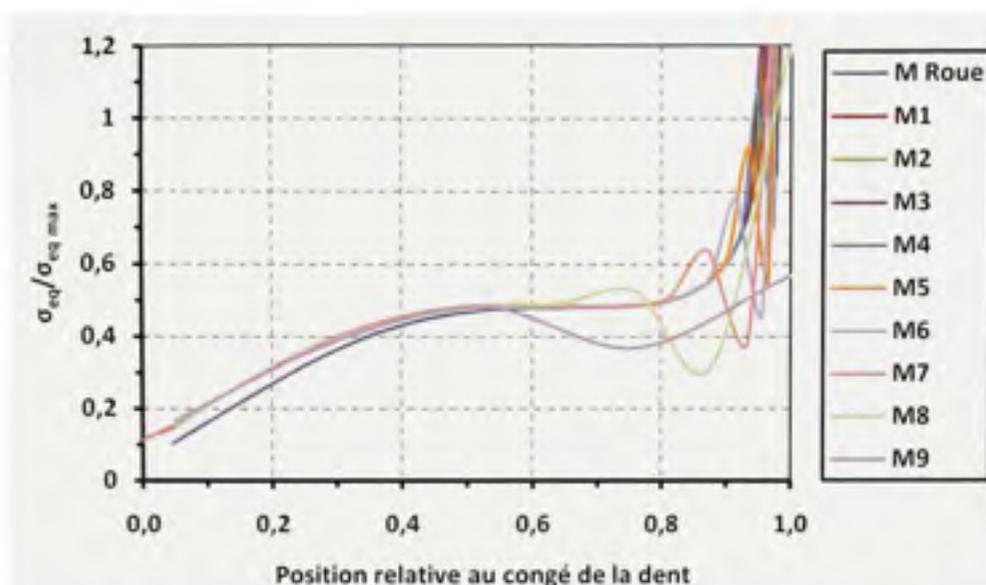


Figure III.2 Distribution de la σ_{eq} relative au début de l'engrènement (MEF).

Néanmoins, puisqu'au début de l'engrènement le niveau de contrainte est relativement faible ($\leq \frac{1}{2} \sigma_{eq \max}$), cette situation n'est pas vraiment critique pour l'initiation des fissures. De plus, il a été observé qu'à 5% du cycle d'engrènement, le phénomène singulier était presque entièrement dissipé pour les maillages 1 à 6. Contrairement au début de l'engrènement, à la fin de ce dernier la distribution de σ_{eq} ne présente aucun aspect divergent (Figure III.3). Pour cette position, les distributions des maillages 1 à 6 semblent coïncider assez bien à celle du maillage complet de la roue. Les maillages plus grossiers montrent un écart maximal d'environ -6% entre 40 et 50% de la longueur du congé.

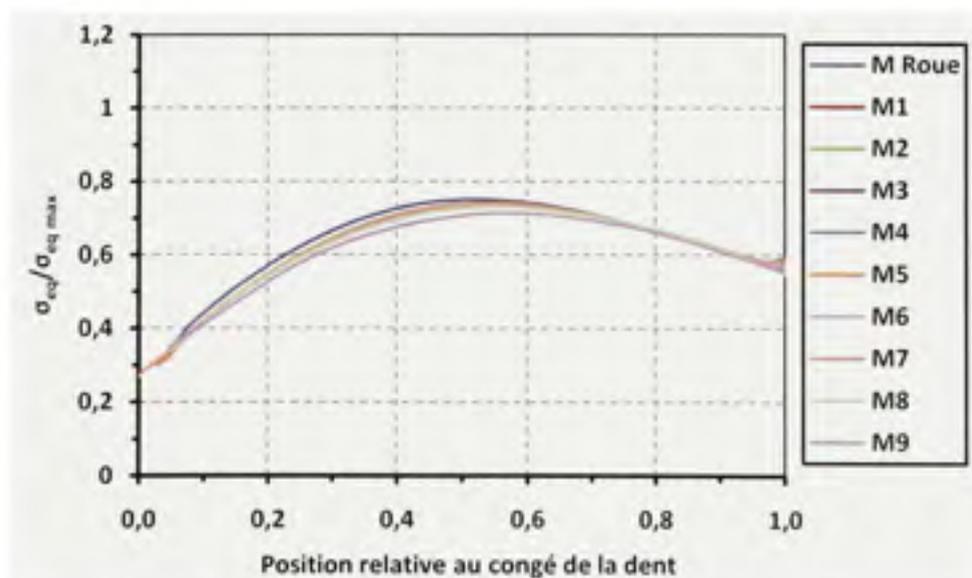


Figure III.3 Distribution de la σ_{eq} relative à la fin de l'engrènement (MEF).

Enfin, la Figure III.4 présente la distribution de σ_{eq} au point critique de l'engrènement, soit au plus haut point de contact unique qui pour l'engrenage analysé, se situe à 59% du cycle. Ce graphique montre sensiblement les mêmes corrélations qu'à la position précédente.

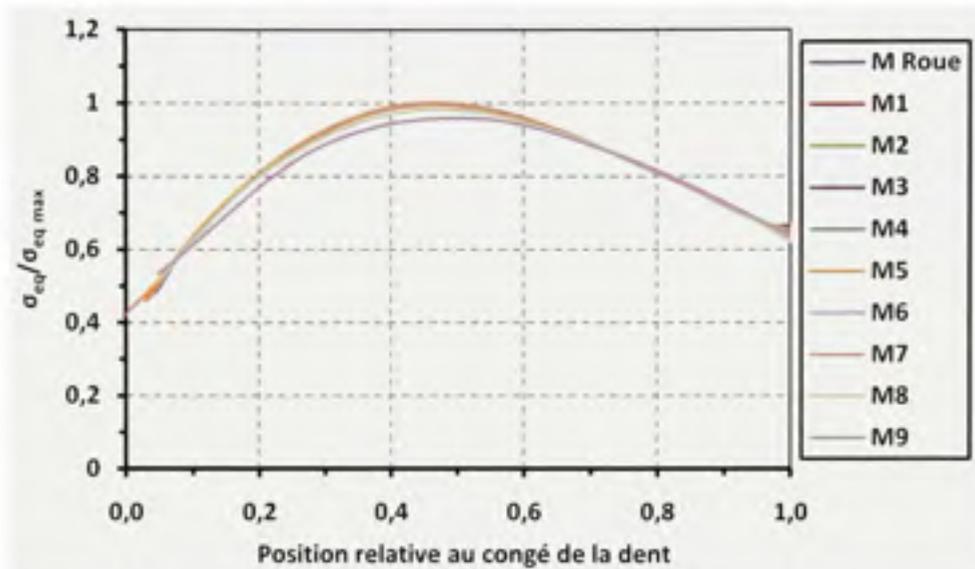


Figure III.4 Distribution de la σ_{eq} relative au point critique de l'engrènement (MEF).

Pour mieux juger de la qualité des maillages, l'écart relatif au maillage complet de la roue a été tracé à la Figure III.5 pour le point critique de l'engrènement.

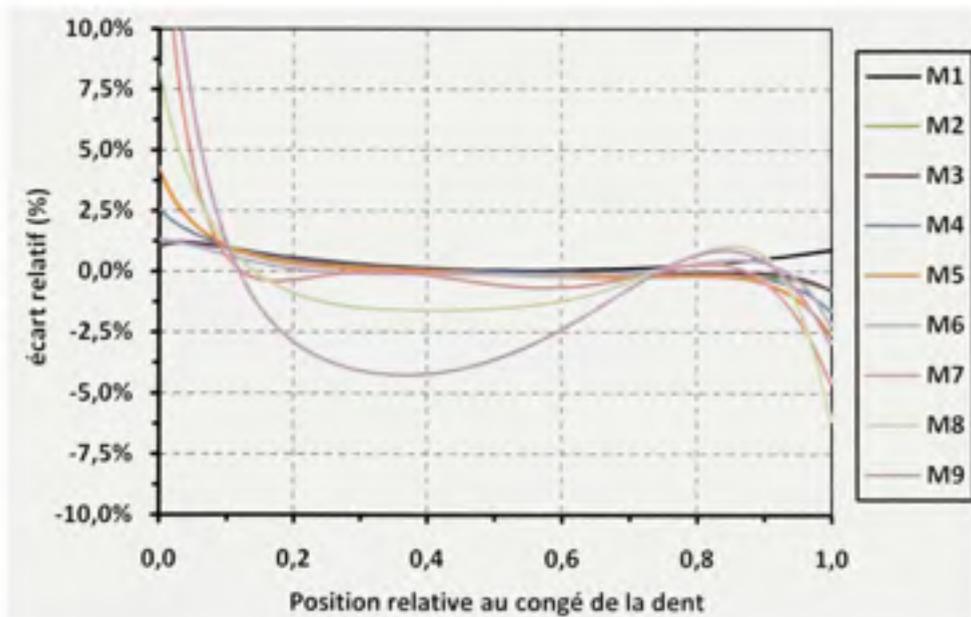


Figure III.5 Écart relatif sur σ_{eq} au point critique de l'engrènement (MEF).

Celle-ci montre clairement que pour la majeure partie du congé (i.e de 0.1 à 0.9), les maillages 1 à 7 donnent de bons résultats. Afin d'assurer une précision à l'analyse en fatigue initiation, le maillage 6 a été retenu pour la modélisation puisque sur tout le profil du congé, l'écart est sous les 2% et près du point $\sigma_{eq\ max}$, ce dernier est inférieur à 0.5%, ce qui semble largement suffisant. De plus, comparativement au maillage 1, celui-ci a six fois moins de DDL, ce qui réduit considérablement le temps de calcul.

Afin d'évaluer si la discrétisation du maillage retenu peut être appliquée de manière générale aux engrenages cylindriques droits, des roues de 18 et 45 dents ont été modélisées (Figure III.6) où toutes les autres caractéristiques de la roue initiale ont été conservées.



Figure III.6 *Variation de la forme de la denture en fonction du nombre de dents (N).*
(a) $N = 18$, b) $N = 30$ et c) $N = 45$

Toujours par rapport à un modèle complet, l'écart relatif des roues de 18, 30 et 45 dents au point critique de l'engrènement est comparé à la Figure III.7. Celle-ci montre que les paramètres du maillage choisis, permettent d'obtenir de bonnes corrélations en maintenant l'écart sous les 2%, et ce pour les trois roues.

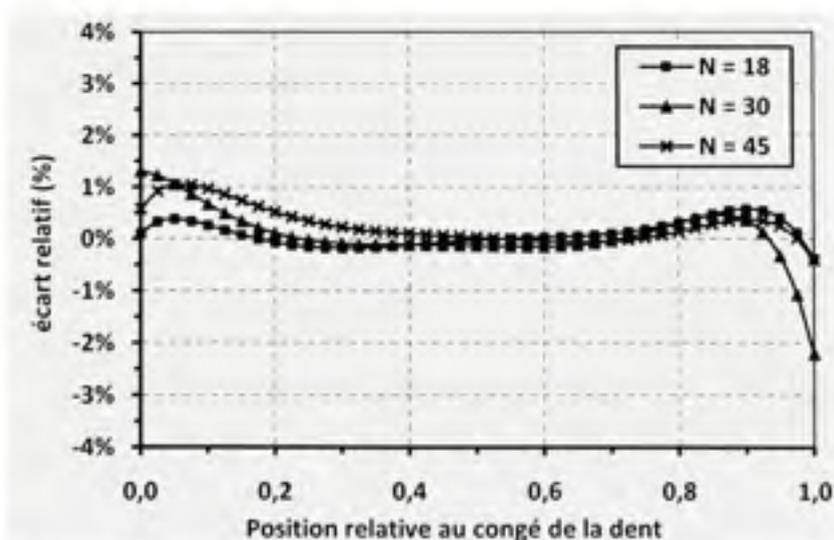


Figure III.7 *Écart relatif sur σ_{eq} pour différents N au point critique de l'engrènement.*

L'angle de pression (φ) influence aussi l'allure de la denture des engrenages. Cet aspect a donc aussi été étudié en appliquant différentes valeurs de φ à la roue initiale (Figure III.8).

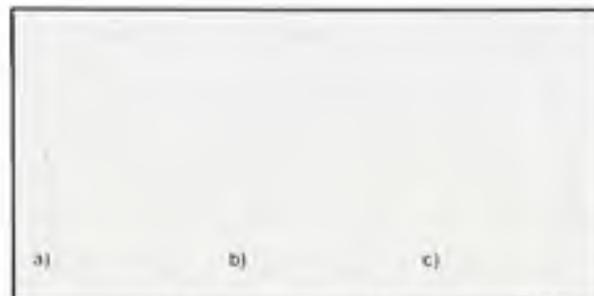


Figure III.8 Variation de la forme de la denture en fonction de l'angle de pression (φ).
(a) $\varphi = 14.5^\circ$, b) $\varphi = 20^\circ$ et c) $\varphi = 25^\circ$

De la même façon que pour la variation de N , l'écart relatif des modèles a été comparé à la position critique (Figure III.9). Dans ce cas-ci, un écart assez important (25%) est observé pour la roue ayant un φ et 14.5° . Cependant, cet écart ne représente qu'environ 7% de la valeur de $\sigma_{eq\ max}$, ce qui est négligeable pour l'analyse en fatigue initiation.

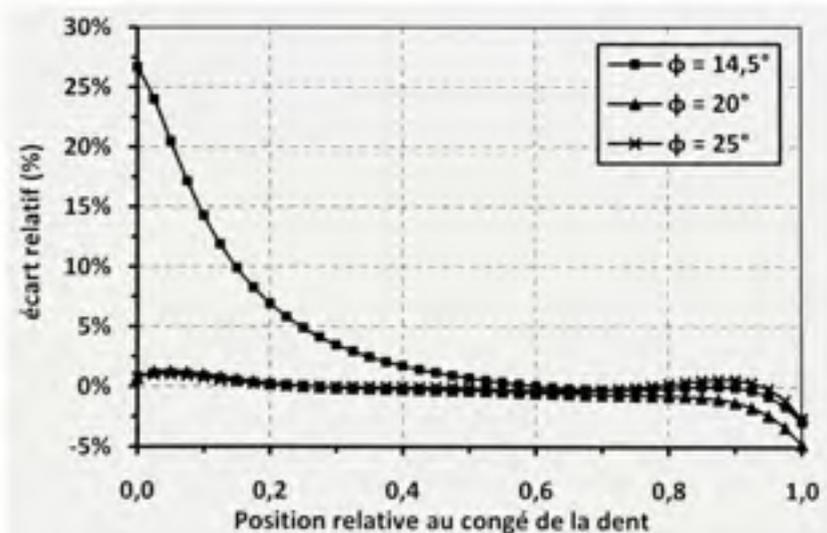


Figure III.9 Écart relatif de σ_{eq} pour différents φ au point critique de l'engrènement.

Ces différentes analyses, ont donc démontré que les paramètres du maillage 6 au Tableau III.1 permettent de définir avec une bonne précision le champ de contraintes à la racine des dents d'engrenage, indépendamment du nombre de dents et de l'angle de pression. Il faut préciser que l'étude de convergence a porté sur des roues assez rigides et que pour les cas de roues à jante mince, il faudrait probablement raffiner le maillage du corps.

- **Maillage roue fissurée (MEF)**

L'étude de convergence des maillages de roues fissurées a été réalisée pour un engrenage ayant les mêmes caractéristiques que celui de base de l'étude précédente. Puisque cette analyse est antérieure à celle de l'initiation de la fissure de flexion, la position initiale et l'angle exact de cette dernière n'étaient pas encore définis. Alors, ces paramètres ont été posés arbitrairement tout en étant cohérents avec les concepts présentés à la section 1.3. Voici les différentes configurations de fissures analysées dans cette étude (Tableau III.2).

Tableau III.2

Configurations pour l'étude de convergence des maillages de roues fissurées

Configuration	% Lg. Congé	a (mm)	Angle (°) [†]
C1	68.44	0.41	179.08
C2	68.44	2.06	184.21
C3	68.44	4.09	190.61

† L'angle définissant l'orientation de la fissure est défini par rapport à la normale au contour externe du point de départ de celle-ci.

Le maillage de chacune des configurations a été construit selon la partition des surfaces présentée par la Figure III.10. De plus, seulement des éléments triangulaires (singuliers ou réguliers) ont été utilisés pour la discrétisation du point de singularité en bout de fissure.

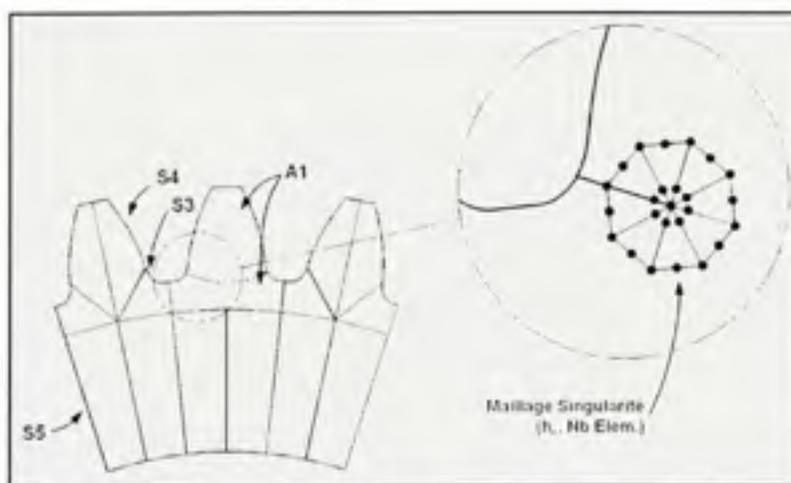


Figure III.10 Partition des surfaces des modèles d'éléments finis avec fissure.

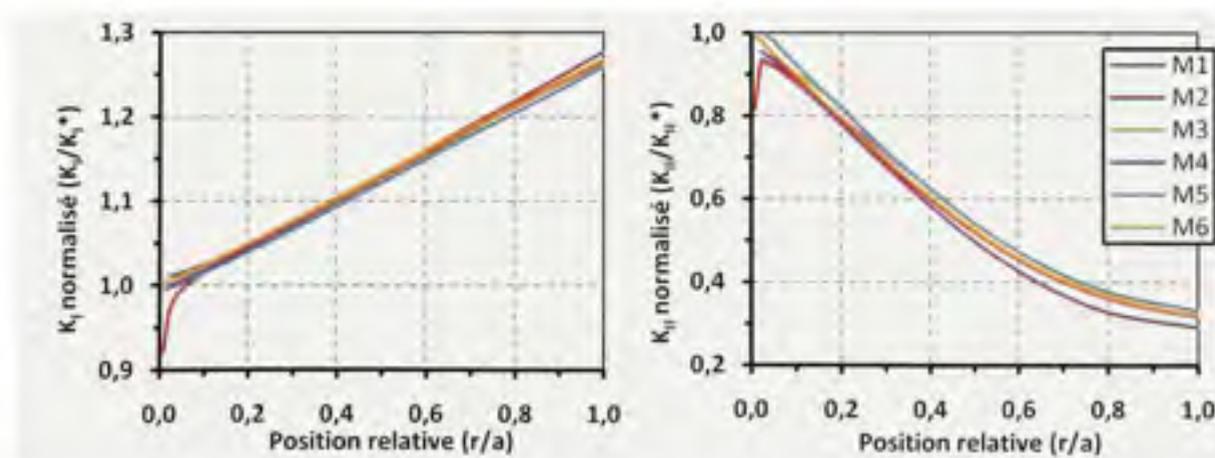
À partir de cette sous-structuration de la géométrie des roues, 6 types de maillage ont été testés, et ce pour chaque configuration de fissure. Les paramètres des maillages sont présentés au Tableau III.3. Le nombre d'éléments discrétisant le bout de la fissure était de 12 pour tous les maillages. De plus un raffinement du maillage global a été appliqué près du bout de la fissure, permettant une transition graduelle de la taille des éléments vers h_t .

Tableau III.3

Caractéristiques des maillages d'éléments finis avec fissure

Maillage	Type Elem.	h_t	h_{A1}	S_3	S_4	S_5
Maillage 1	Régulier	$a/20$	$S_1/5$	3	3	10
Maillage 2	Régulier	$a/40$	$S_1/40$	10	10	15
Maillage 3	Singulier	$a/5$	$S_1/5$	3	3	10
Maillage 4	Singulier	$a/10$	$S_1/5$	3	3	10
Maillage 5	Singulier	$a/20$	$S_1/5$	3	3	10
Maillage 6	Singulier	$a/40$	$S_1/40$	10	10	15

La convergence des maillages a été établie selon la variation des valeurs de K_I et K_{II} évaluées à partir des déplacements de 3 positions dans l'engrènement: début, fin et position critique. Aussi, les FIC calculés ont été comparés entre eux selon leur valeur normalisée par rapport à K_I^* et K_{II}^* évalués par la méthode d'extrapolation des déplacements en 2 points (voir section 3.1.1.2), à partir du maillage 6 jugé à priori suffisamment précis. Les Figures III.11 à III.19 présentent les comparaisons des maillages pour les 3 configurations de fissure, permettant ainsi d'observer l'évolution de la solution selon la discrétisation et le point de calcul.

Figure III.11 K_I et K_{II} normalisé au début de l'engrènement (CI & MEF).

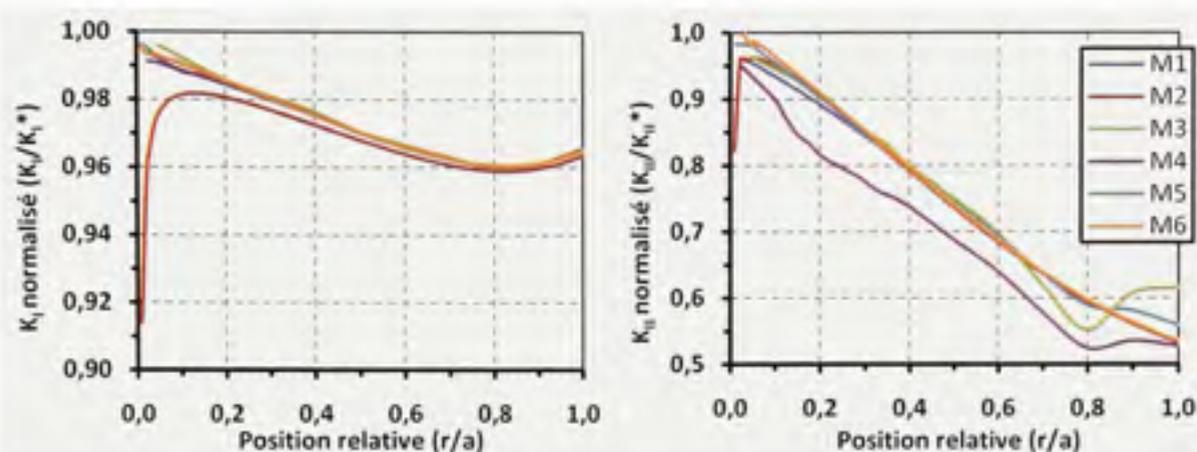


Figure III.12 K_I et K_{II} normalisé à la fin de l'engrènement (CI & MEF).

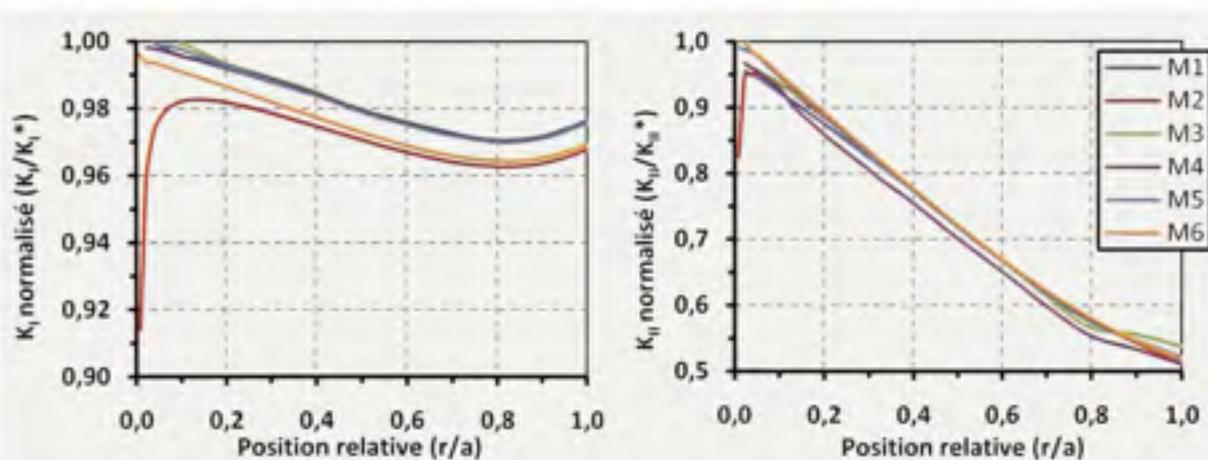


Figure III.13 K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (CI & MEF).

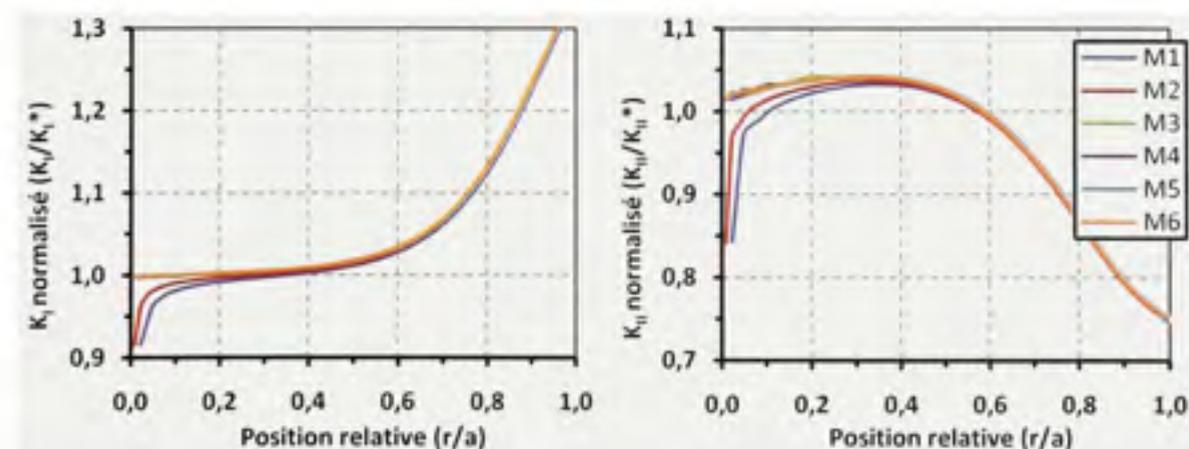


Figure III.14 K_I et K_{II} normalisé au début de l'engrènement (C2 & MEF).

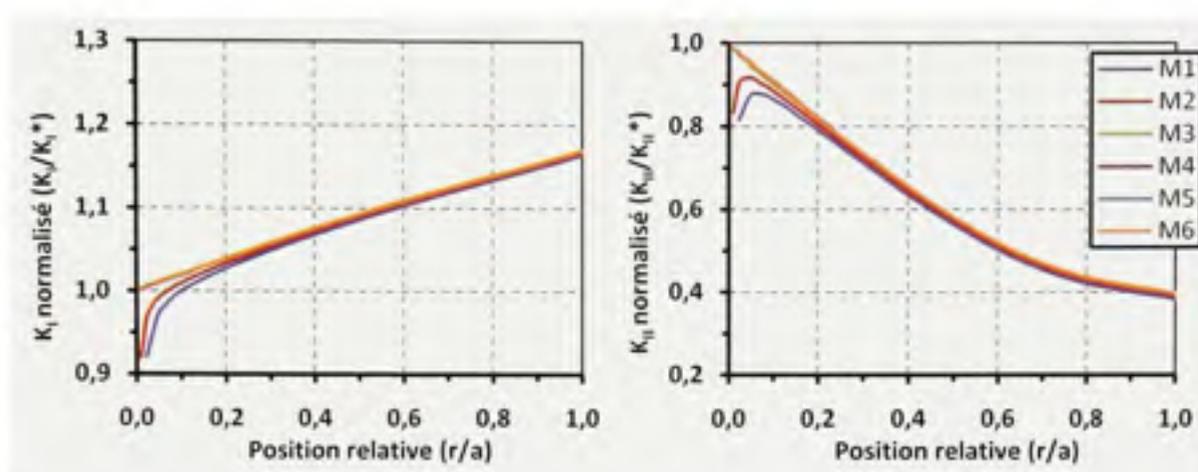


Figure III.15 K_I et K_{II} normalisé à la fin de l'engrènement (C2 & MEF).

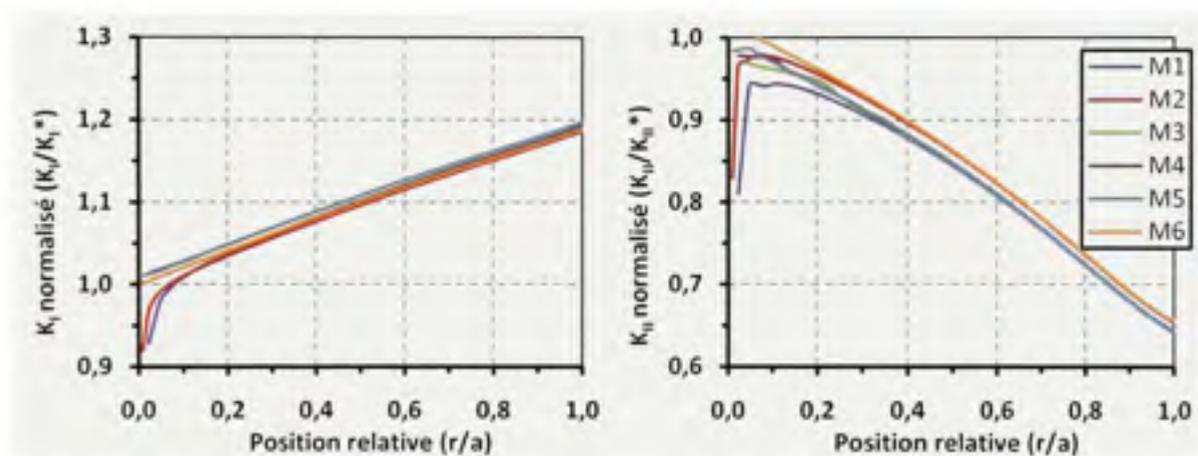


Figure III.16 K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (C2 & MEF).

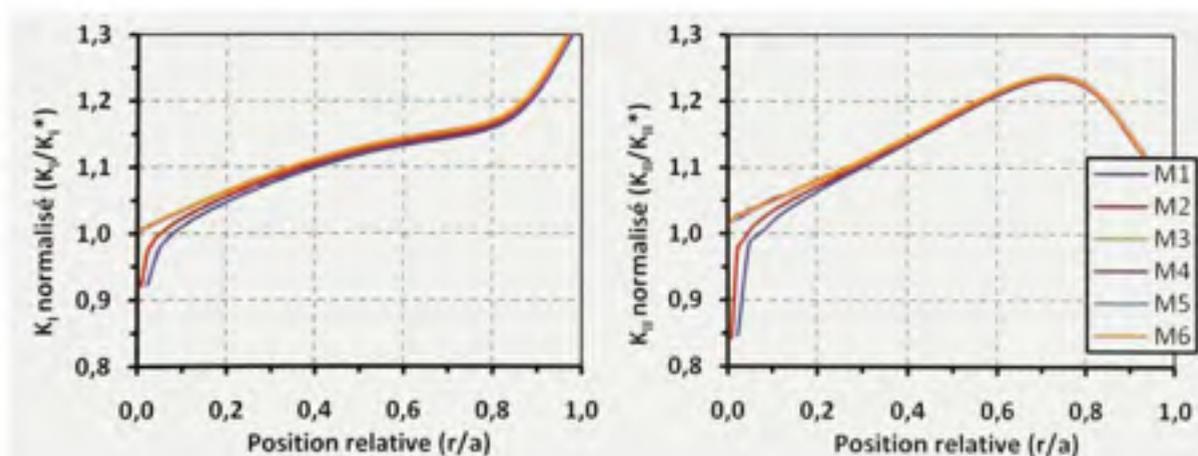


Figure III.17 K_I et K_{II} normalisé au début de l'engrènement (C3 & MEF).

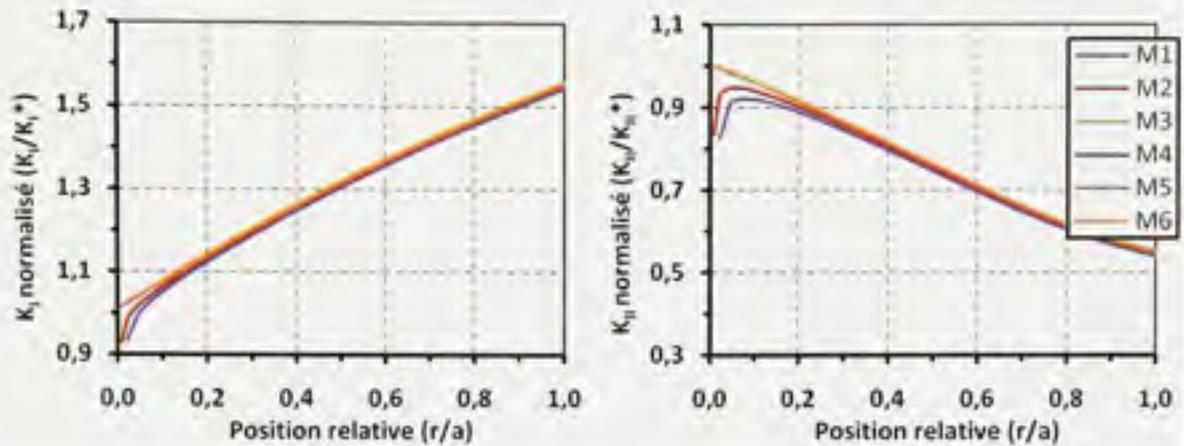


Figure III.18 K_I et K_{II} normalisé à la fin de l'engrènement (C3 & MEF).

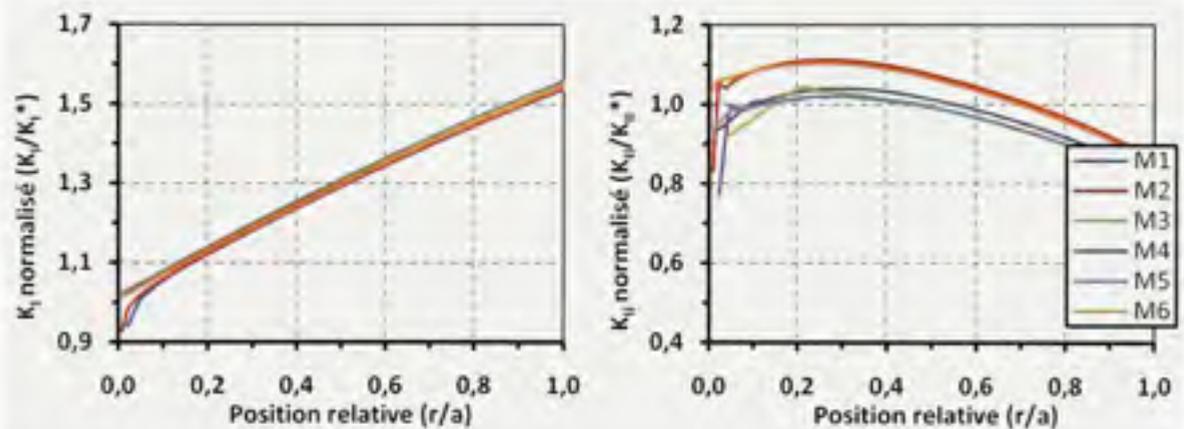


Figure III.19 K_I et K_{II} normalisé à la position critique de l'engrènement (C3 & MEF).

À première vue, la forme du maillage appliquée aux roues semble être efficace en convergent assez rapidement. Par contre, pour les maillages 1 et 2 où des éléments réguliers sont utilisés en bout de fissure, il y a divergence des FIC lorsque « r » tend vers 0. Cette dernière est surtout marquée pour les 2 premiers éléments à partir du bout de la fissure. Afin de comparer quantitativement chaque maillage, les valeurs normalisées de K_I et K_{II} ont été évaluées par extrapolation pour $r = 0$. Une extrapolation en 2 points a été appliquée pour les maillages avec éléments EQP. Pour les maillages avec éléments réguliers, une extrapolation par régression linéaire a été effectuée en excluant les points de divergence et ceux moins pertinents loin du bout de la fissure. Il faut préciser que les courbes de régression ont été établies de sorte à obtenir un coefficient de corrélation (R^2) de plus de 0.99. Les Tableaux III.4 et III.5 dressent la liste des valeurs calculées.

Tableau III.4

Valeurs normalisées de K_I obtenues par extrapolation des déplacements (MEF)

Maillage	Configuration 1			Configuration 2			Configuration 3		
	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.
Maillage 1	0.968	0.986	0.992	0.979	0.985	1.000	0.984	0.985	1.008
Maillage 2	0.983	0.990	0.991	0.988	0.986	0.998	0.974	0.984	0.988
Maillage 3	0.971	1.008	1.008	1.011	1.000	1.008	1.002	1.006	1.009
Maillage 4	0.993	0.997	1.005	1.000	1.000	1.008	1.000	1.000	1.009
Maillage 5	0.992	0.999	1.006	1.000	1.000	1.007	1.000	1.000	1.008
Maillage 6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tableau III.5

Valeurs normalisées de K_{II} obtenues par extrapolation des déplacements (MEF)

Maillage	Configuration 1			Configuration 2			Configuration 3		
	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.
Maillage 1	0.962	0.982	0.974	0.950	0.939	1.012	0.975	0.976	0.931
Maillage 2	0.968	0.992	0.979	0.978	0.973	1.039	1.018	0.995	0.965
Maillage 3	0.989	0.979	0.979	0.990	0.994	0.969	1.005	1.008	0.864
Maillage 4	0.983	0.965	0.980	1.001	0.998	0.973	1.002	1.004	0.898
Maillage 5	1.023	0.982	0.994	1.000	0.998	0.978	1.001	1.002	0.907
Maillage 6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Ces tableaux montrent clairement que pour la majorité des cas, il y a convergence des résultats avec moins de 1% d'écart avec la solution de référence (c.-à-d. Maillage 6). Cependant, un écart assez marqué de K_{II} peut être constaté avec la configuration 3 et la position critique, où les maillages avec éléments singuliers à la position critique présentent des écarts de plus de 10%. Cependant, comme l'illustre le Tableau III.6, pour la configuration 3, le rapport K_{II}^*/K_I^* est très faible, et donc cet écart aura peu d'impact sur la propagation de la fissure. De plus, il est fort probable que ce rapport soit davantage diminué lors de l'analyse en propagation, puisque la géométrie des fissures arbitrairement posée dans cette étude de convergence ne correspond pas exactement à la forme réelle, en particulier pour la configuration 3.

Tableau III.6

Valeurs des rapports K_{II}^*/K_I^* des différentes configurations et positions d'analyse

Configuration	Début	Fin	Pt. Critique
C1	0.194	0.013	0.046
C2	0.748	0.031	0.077
C3	0.517	0.102	0.028

Bien que l'écart maximal des solutions du maillage 2 est le moins élevé, l'extrapolation par régression linéaire est plus laborieuse et nécessite certains ajustements (ex. : exclusion de points de divergence et non pertinents). Tandis que le maillage 5, offre des résultats qui, dans l'ensemble (mise à part K_{II} pour la configuration 3 au point critique) ont moins de 2% d'écart sur la solution du maillage 6 et ce, selon une méthodologie simple de calcul. Aussi, ce maillage requiert beaucoup moins de DDL que le maillage 2 et donc permettra d'effectuer plus rapidement une analyse complète en propagation. Alors, en raison de ces avantages, ce sont les paramètres du maillage 5 qui seront appliqués aux modèles d'éléments finis de ce projet.

Contrairement à l'étude de convergence des maillages sans fissure, l'analyse de l'effet de la variation de la géométrie de la dent sur la convergence des résultats n'a pas été jugée nécessaire, compte tenu du fait que le point d'analyse (c.-à-d. le bout de fissure) n'est pas directement lié à la géométrie du profil des dents.

- **Maillage roue non fissurée (MEIF)**

Dans le but de comparer adéquatement la MEIF à la MEF, l'étude de convergence qui a permis de définir les paramètres du maillage des roues non fissurées, a repris les mêmes analyses utilisées avec la MEF. Aussi, afin de donner plus de signification à la comparaison des méthodes, le contour de la géométrie des roues a été segmenté selon la partition des surfaces du modèle d'éléments finis (voir Figure III.1) de sorte à pouvoir caractériser le maillage des segments S1, S2, S3, S4 et S5 (Figure III.20).

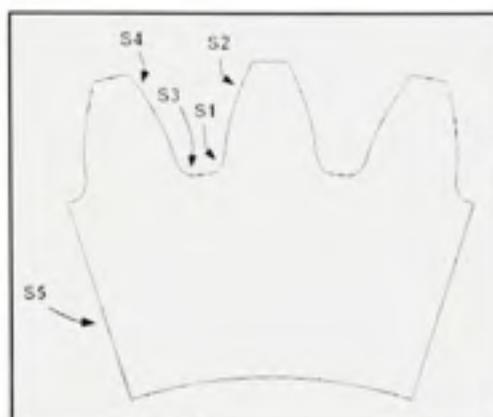


Figure III.20 Segmentation du contour des modèles d'éléments de frontières sans fissure.

De la même façon que pour la MEF, les résultats des différentes configurations de discrétisation ont été comparés à une solution de référence obtenue d'une modélisation complète de la roue et comportant 4112 DDL. Le Tableau III.7 présente les paramètres des 8 maillages testés. La roue utilisée est la même que celle des études précédentes.

Tableau III.7

Caractéristiques des maillages d'éléments frontière sans fissure

Maillage	DDL	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
Maillage Roue	4112	60	40	40	30	N/A
Maillage 1	2032	60	40	40	30	10
Maillage 2	1720	50	40	30	20	10
Maillage 3	1360	40	30	20	15	10
Maillage 4	1008	30	20	15	10	10
Maillage 5	640	20	15	10	5	5
Maillage 6	496	15	10	5	5	5
Maillage 7	448	10	10	5	5	5
Maillage 8	280	5	5	3	3	3

La première analyse compare les résultats des maillages en début d'engrènement et, comme pour la MEF, la comparaison est effectuée selon la valeur relative de σ_{eq} par rapport à $\sigma_{eq,max}$ obtenue à la position critique (voir Figure III.21).

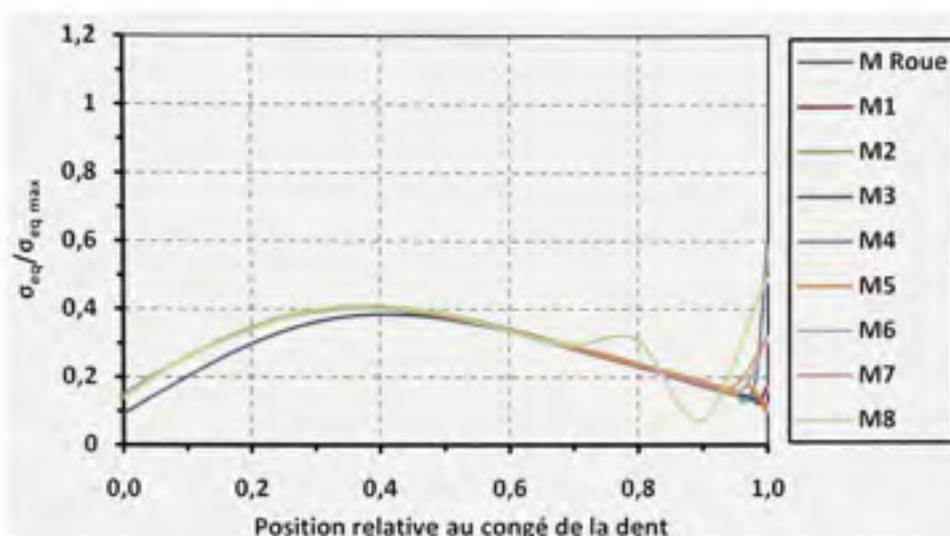


Figure III.21 *Distribution de la σ_{eq} relative au début de l'engrènement (MEIF).*

Comme avec les modèles d'éléments finis, il est possible d'observer avec le graphe précédent le même phénomène de divergence à la fin du congé, causée par la proximité du point de contact. Cependant, l'étendue du phénomène est beaucoup moins importante avec des répercussions sur moins de 10% de la longueur du congé en excluant le maillage 8. À titre de comparaison, avec la MEF le phénomène avait des effets sur 10 à 40% de la longueur du congé. Mise à part la singularité les maillages 1 à 8 semblent donner des résultats similaires. Par contre, la surestimation de la rigidité du corps imposée par la modélisation simplifiée de la roue (i.e 3 dents) tend à surévaluer les niveaux de contrainte en début de congé. En ce qui concerne la distribution de σ_{eq} à la fin de l'engrènement (Figure III.22), aucun phénomène divergent n'est présent et les maillages n'incluant que 3 dents semblent tous fournir une solution convergente.

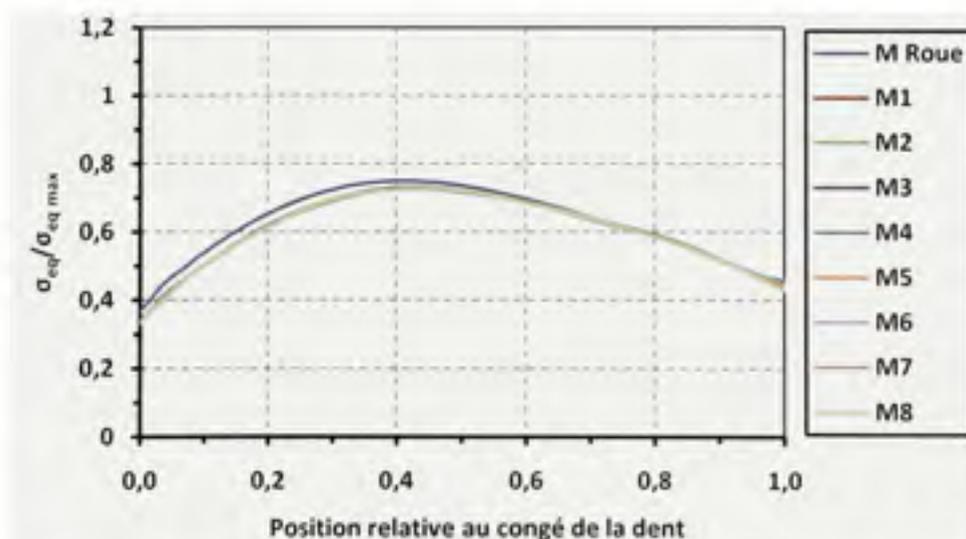


Figure III.22 *Distribution de la σ_{eq} relative à la fin de l'engrènement (MEIF).*

Encore une fois, la simplification géométrique de la roue induit une erreur relative d'environ -7% par rapport au modèle complet de la roue. Enfin, à la position critique de l'engrènement (Figure III.23), la corrélation semble complète avec la solution de la roue complète, et ce pour tous les maillages.

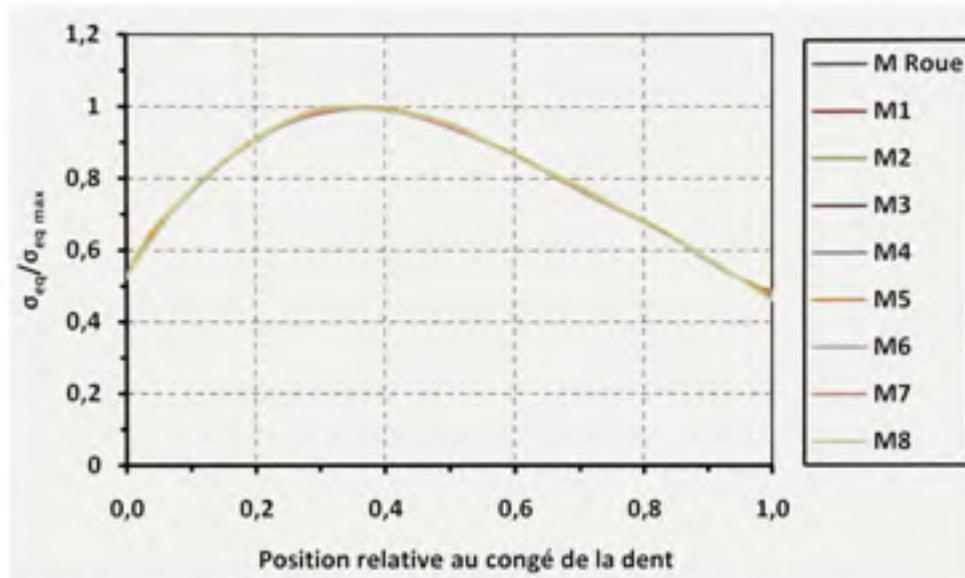


Figure III.23 Distribution de la σ_{eq} relative au point critique de l'engrènement (MEIF).

Afin de mieux départager les résultats obtenus, l'écart relatif au « maillage roue » a été tracé à la Figure III.24 pour la position critique. Pour tous les maillages l'écart relatif y est inférieur à 3%.

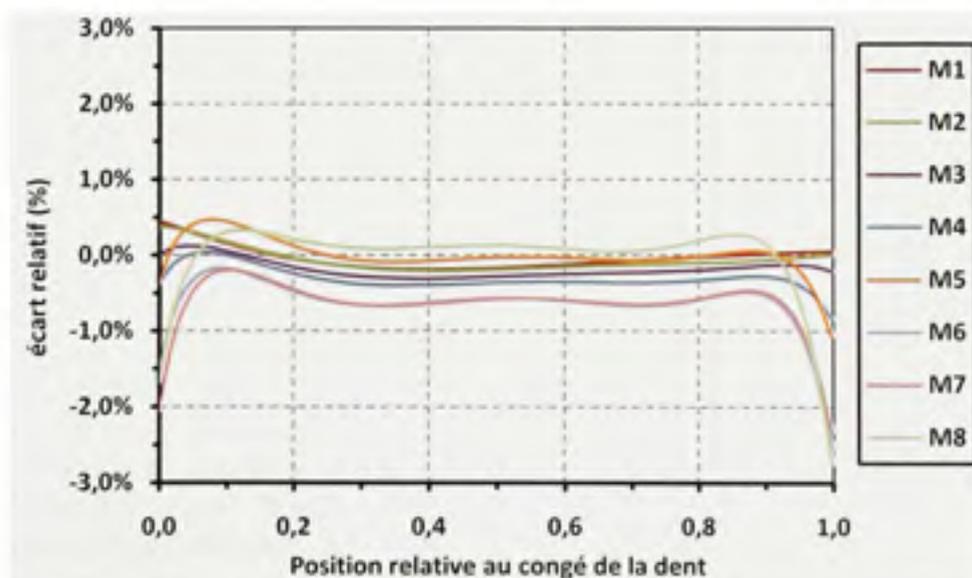


Figure III.24 Écart relatif sur σ_{eq} au point critique de l'engrènement (MEIF).

La Figure III.24 montre qu'en ne considérant que le point critique de l'engrènement il serait possible d'utiliser le maillage le plus grossier (c.-à-d. maillage 8) tout en conservant un niveau acceptable de l'écart relatif. Par contre, la Figure III.21 a démontré que ce maillage induisait une erreur plus importante au début de l'engrènement. Alors, afin d'assurer la qualité des résultats et aussi d'obtenir une distribution détaillée de la contrainte en racine des dents (i.e plusieurs nœuds), c'est le maillage 5 qui a été retenu. Celui-ci, malgré ses 640 DDL, offre une solution convergente à moins de 1% (Voir Figure III.24). Puisque, les résultats de la MEIF pour les trois positions extrêmes de l'engrènement sont similaires à ceux de la MEF pour des modèles comparables, il a été jugé inutile d'approfondir l'étude en analysant l'effet de la forme des dents.

- **Maillage roue fissurée (MEIF avec sous-structuration)**

L'étude de convergence menée sur les modèles d'éléments de frontières utilisant la méthode de sous-structuration pour la modélisation des fissures, a été réalisée selon la configuration de la Figure III.25. L'interface de séparation des domaines a été définie selon la technique présentée à la section 3.4.2.6.1. Les paramètres de la roue et de son chargement sont les mêmes que ceux utilisés pour l'étude de convergence des modèles d'éléments finis.

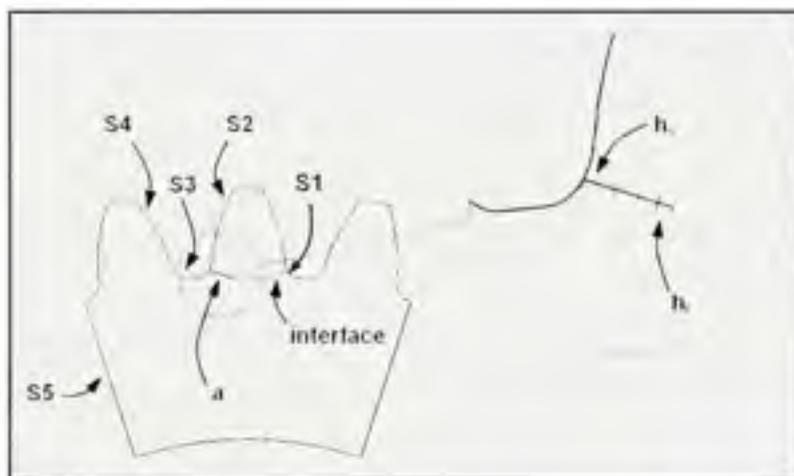


Figure III.25 Segmentation du contour des modèles d'éléments de frontières sans fissure.

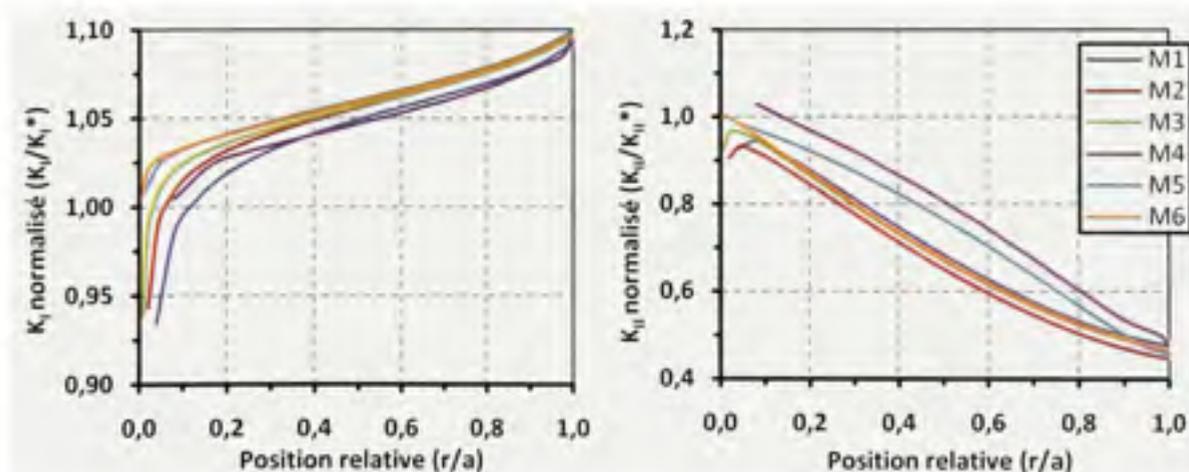
Comme pour la MEF, trois configurations de fissures ont été testées. Les paramètres des fissures sont ceux du Tableau III.2. En tout, six maillages ont été évalués dont les trois premiers avaient des éléments réguliers en bout de fissure et les autres utilisaient des éléments singuliers (c.-à-d. EQP). Les caractéristiques de ces maillages sont présentées au Tableau III.8 où la signification des paramètres est illustrée à la Figure III.25.

Tableau III.8

Caractéristiques des maillages d'éléments de frontières avec fissure

Maillage	Discrétisation Fissure			Discrétisation Extérieure				
	Type Elem.	h_s	h_t	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Maillage 1	Régulier	a/5	a/10	5	7	3	5	5
Maillage 2	Régulier	a/10	a/20	10	10	5	7	10
Maillage 3	Régulier	a/20	a/40	15	12	10	10	15
Maillage 4	Singulier	a/5	a/10	5	7	3	5	5
Maillage 5	Singulier	a/10	a/20	10	10	5	7	10
Maillage 6	Singulier	a/20	a/40	15	12	10	10	15

L'analyse de la convergence pour les modèles d'éléments de frontières avec fissure a été réalisée selon la même approche qu'avec la MEF. Donc, 3 positions de l'engrènement (c.-à-d. début, fin et position critique) ont été étudiées en fonction des valeurs de K_I et K_{II} obtenues. Pour mieux comparer les maillages entre eux, les valeurs normalisées des FIC ont été préférées. K_I^* et K_{II}^* correspondent aux valeurs de K_I et K_{II} calculées avec la méthode d'extrapolation des déplacements en 2 points (voir section 3.1.1.2) à partir de la solution du maillage 6. Les Figures III.26 à III.34 présentent les comparaisons des maillages pour les 3 configurations de fissure par rapport à l'évolution de la solution en fonction de la position relative « r/a ».

Figure III.26 K_I et K_{II} normalisés au début de l'engrènement (C1 & MEIF).

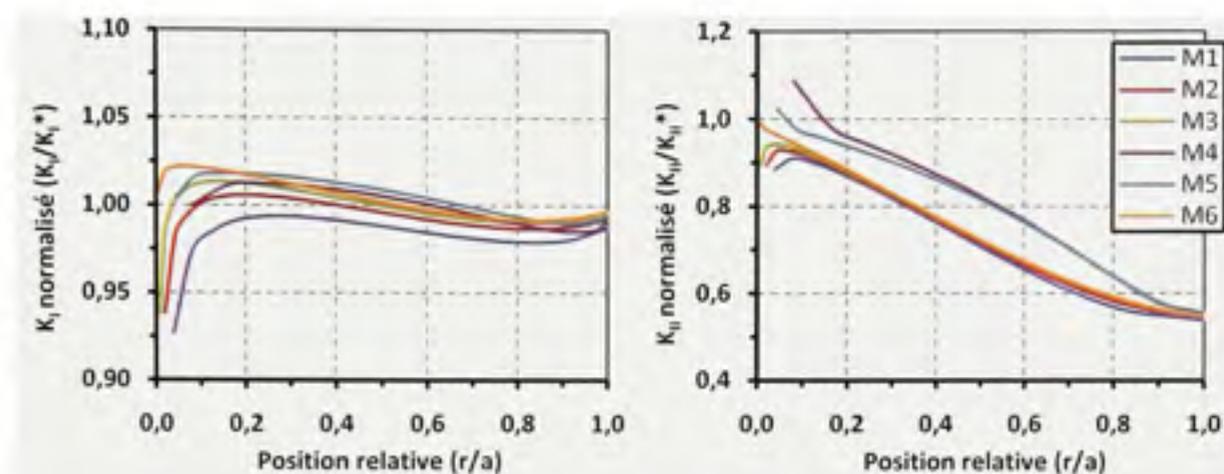


Figure III.27 K_I et K_{II} normalisés à la fin de l'engrènement (C1 & MEIF).

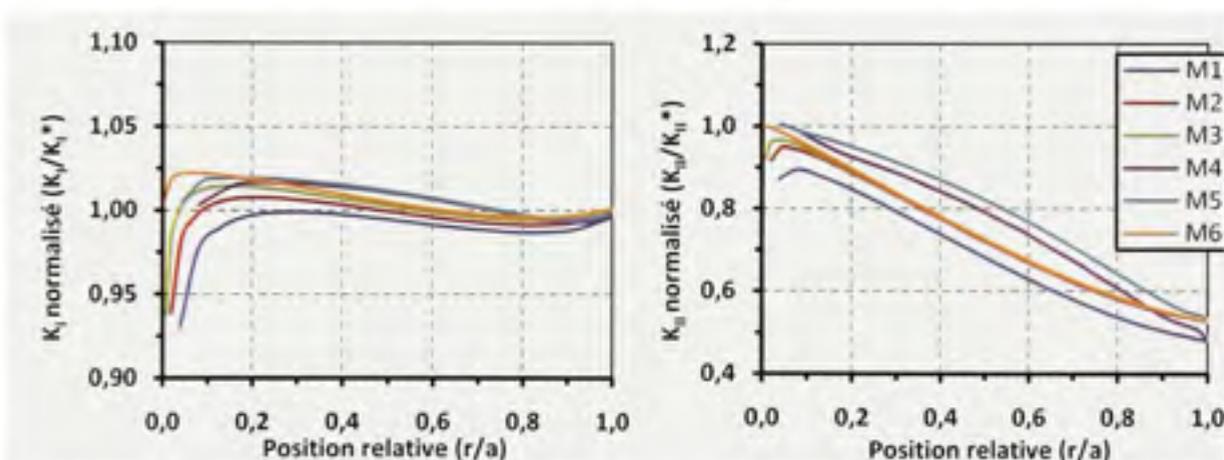


Figure III.28 K_I et K_{II} normalisés à la position critique de l'engrènement (C1 & MEIF).

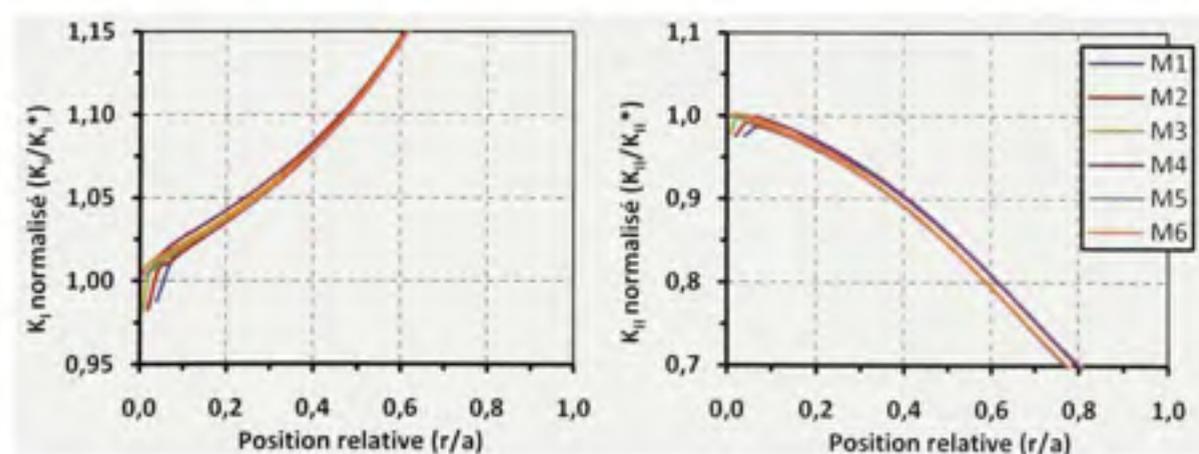


Figure III.29 K_I et K_{II} normalisés au début de l'engrènement (C2 & MEIF).

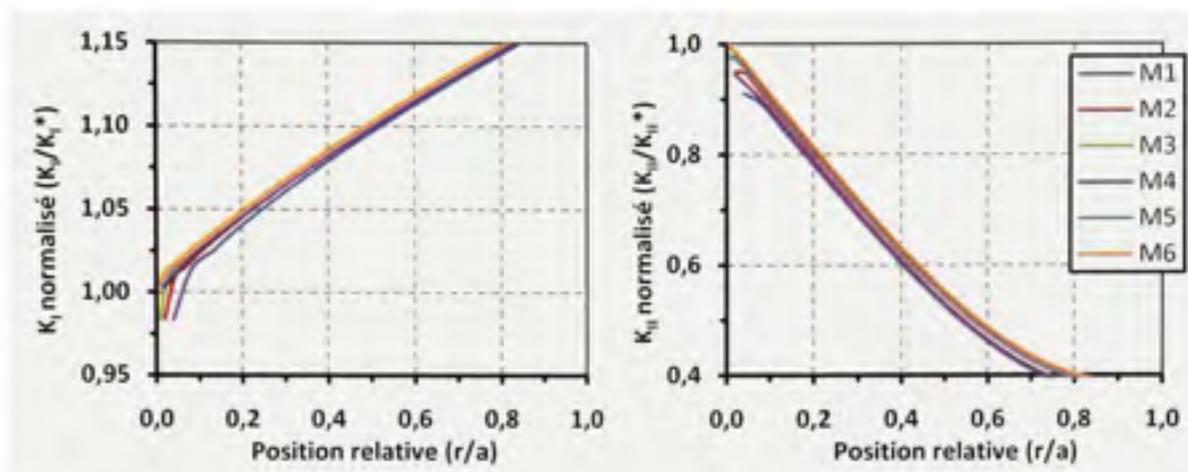


Figure III.30 K_I et K_{II} normalisés à la fin de l'engrènement (C2 & MEIF).

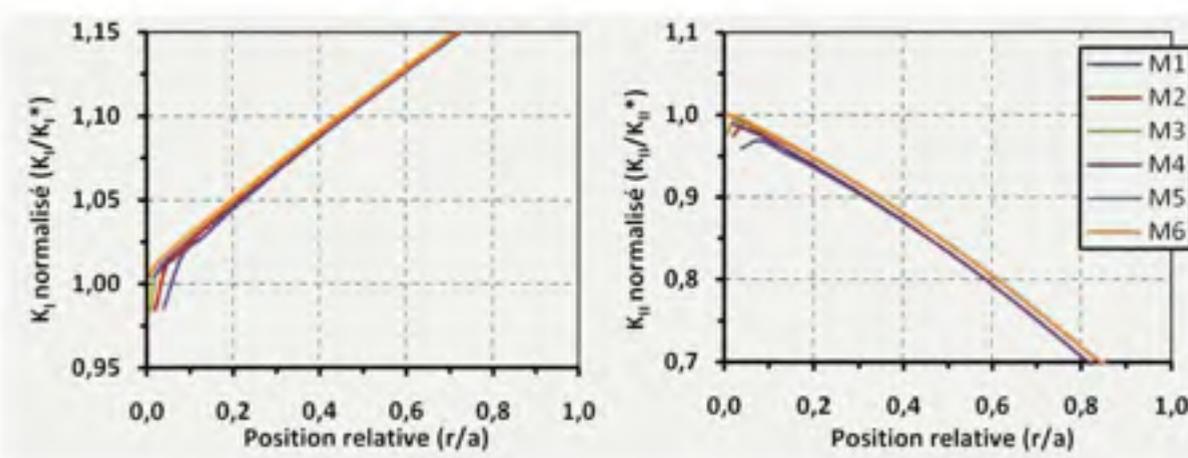


Figure III.31 K_I et K_{II} normalisés à la position critique de l'engrènement (C2 & MEIF).

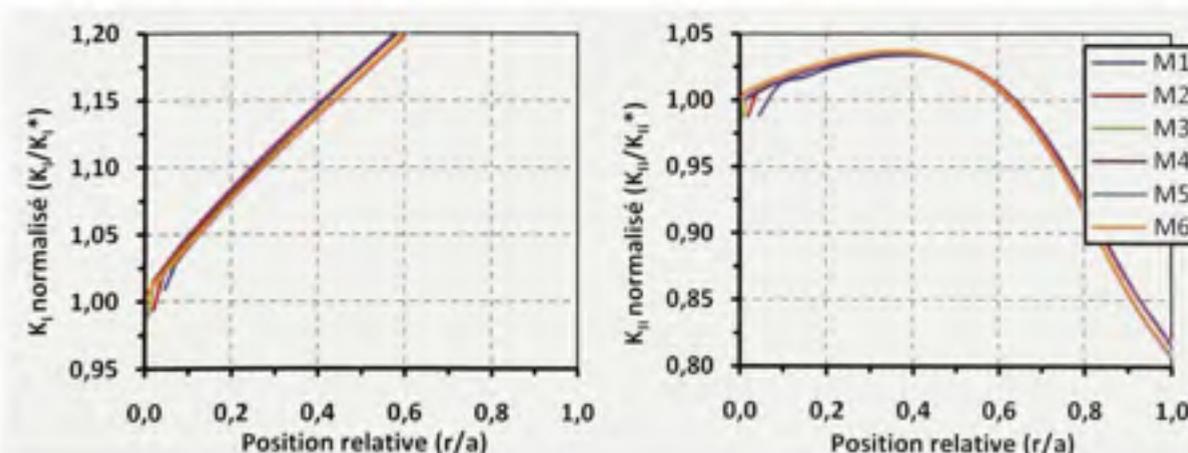


Figure III.32 K_I et K_{II} normalisés au début de l'engrènement (C3 & MEIF).

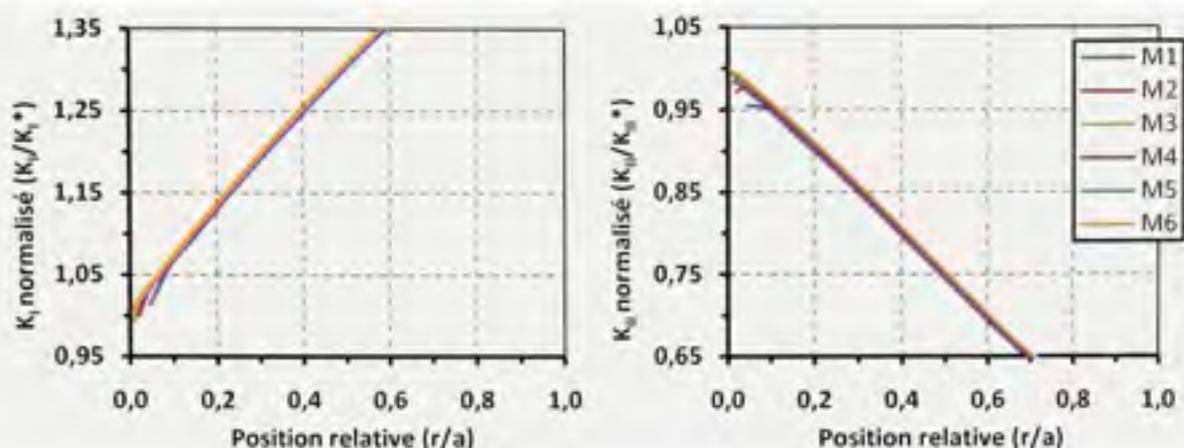


Figure III.33 K_I et K_{II} normalisés à la fin de l'engrènement (C3 & MEIF).

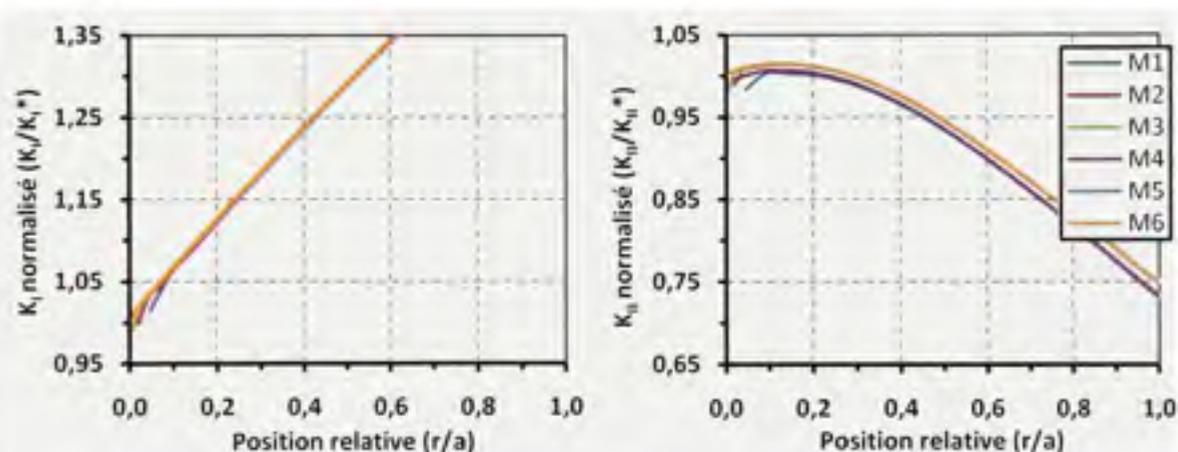


Figure III.34 K_I et K_{II} normalisés à la position critique de l'engrènement (C3 & MEIF).

Similairement à la MEF, le type de maillage adopté ici, fournit des résultats qui convergent rapidement. Comme prévu, les maillages n'utilisant pas les éléments EQP, présentent une divergence de la solution près du point de singularité. Toutefois, cette dernière est beaucoup moins importante que pour les modèles d'éléments finis ayant un maillage comparable (voir Figures III.11 à III.19). Par contre, d'après les graphiques III.26 à III.34, une légère divergence de la solution (c.-à-d. 3-4%) est aussi observée pour les maillages avec EQP, celle-ci tend cependant à diminuer pour les maillages plus grossiers.

De façon identique à l'étude de convergence des modèles d'éléments finis avec fissure (c.-à-d. Tableaux III.4 et III.5), les valeurs normalisées de K_I et K_{II} ont été évaluées par extrapolation pour $r = 0$. Les Tableaux III.9 et III.10 présentent les valeurs calculées.

Tableau III.9

Valeurs normalisées de K_I obtenues par extrapolation des déplacements (MEIF)

Maillage	Configuration 1			Configuration 2			Configuration 3		
	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.
Maillage 1	1.010	1.003	0.996	0.955	0.996	1.006	1.010	1.017	1.021
Maillage 2	1.020	1.014	1.015	0.979	1.009	1.006	1.010	1.006	1.012
Maillage 3	1.019	1.021	1.021	0.994	1.005	1.005	1.008	1.003	1.007
Maillage 4	0.998	0.996	0.999	1.004	0.997	0.999	1.006	0.997	0.999
Maillage 5	1.002	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000
Maillage 6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tableau III.10

Valeurs normalisées de K_{II} obtenues par extrapolation des déplacements (MEIF)

Maillage	Configuration 1			Configuration 2			Configuration 3		
	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.	Début	Fin	Pt. Cr.
Maillage 1	0.985	0.966	0.935	1.065	0.934	1.018	0.959	0.988	1.019
Maillage 2	0.969	0.970	0.991	1.058	0.965	1.011	0.972	1.005	1.019
Maillage 3	0.995	0.979	0.995	1.023	0.992	1.004	0.998	1.003	1.006
Maillage 4	1.044	1.123	1.004	1.004	0.961	0.994	0.998	0.993	0.993
Maillage 5	0.990	1.039	1.011	0.999	0.988	1.001	1.000	0.998	1.001
Maillage 6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Ces tableaux prouvent que dans l'ensemble il y a convergence des résultats avec moins de 1% d'écart par rapport à ceux du maillage 6. Cependant, pour les mêmes raisons évoquées lors de l'étude de convergence avec la MEF, les maillages avec éléments singuliers sont préférables. Considérant cela, le maillage 5 semble être celui qui offre les meilleurs résultats tout en étant efficace (c.-à-d. moins de DDL), il sera donc appliqué aux modèles d'éléments de frontières de ce projet.

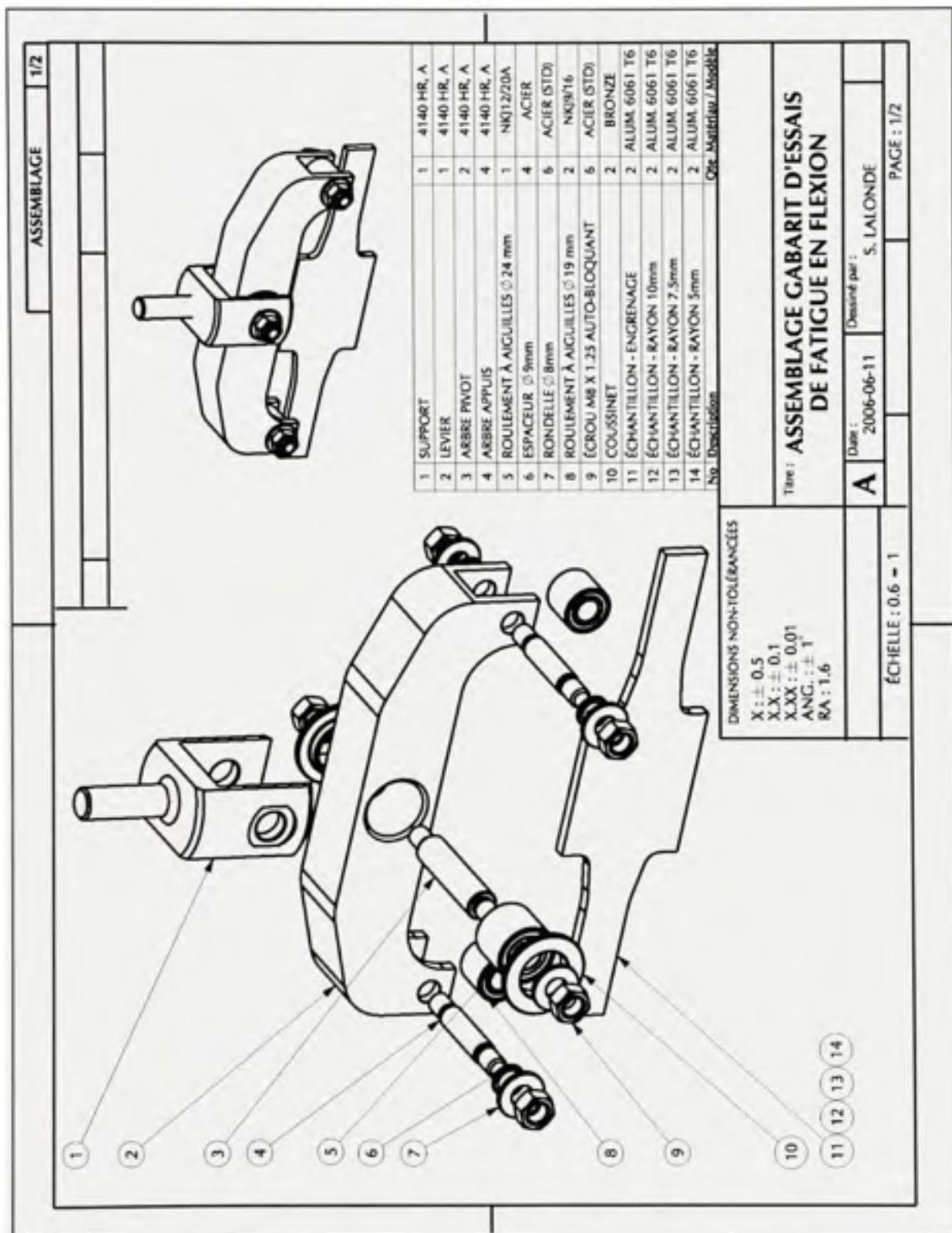
ANNEXE IV

DESSINS DE DÉTAIL DU MONTAGE EXPÉRIMENTAL

Cette annexe contient l'ensemble des dessins d'assemblage et de détail des composantes du montage expérimental réalisé pour ce projet. Le gabarit d'essais de fatigue en flexion a été conçu pour supporter une charge totale, en fatigue, de 7500N avec un facteur de sécurité d'environ 1.2 sur les composantes critiques du montage, soit les arbres des appuis (i.e composante #4). La photographie suivante montre la façon dont a été installé le gabarit d'essai de fatigue et les échantillons de type Brugger sur une machine à essais de traction MTS810.

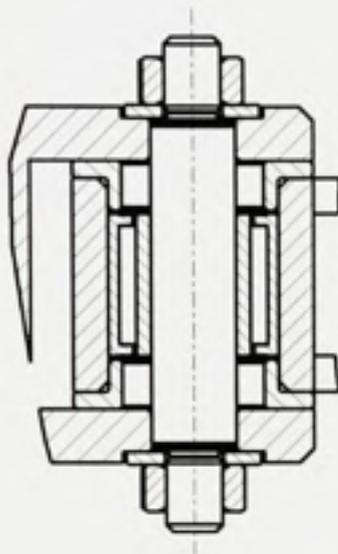
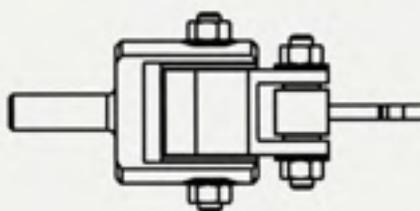
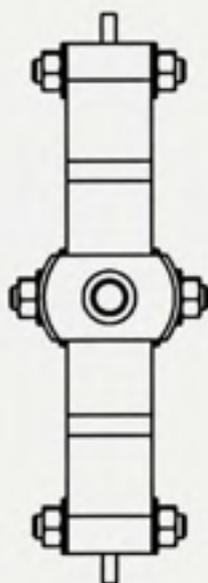


Figure IV.1 *Montage des essais de fatigue en flexion.*

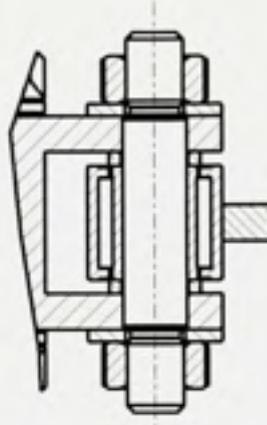


ASSEMBLAGE

2/2



COUPE ARBRE PIVOT



COUPE ARBRE APPLUIS

DIMENSIONS NON-TOLÉRANCÉES

X : $\pm 0,5$
 X.X : $\pm 0,1$
 X.XX : $\pm 0,01$
 ANG. : $\pm 1^\circ$
 RA : 1,6

Titre : **ASSEMBLAGE GABARIT D'ESSAIS
 DE FATIGUE EN FLEXION**

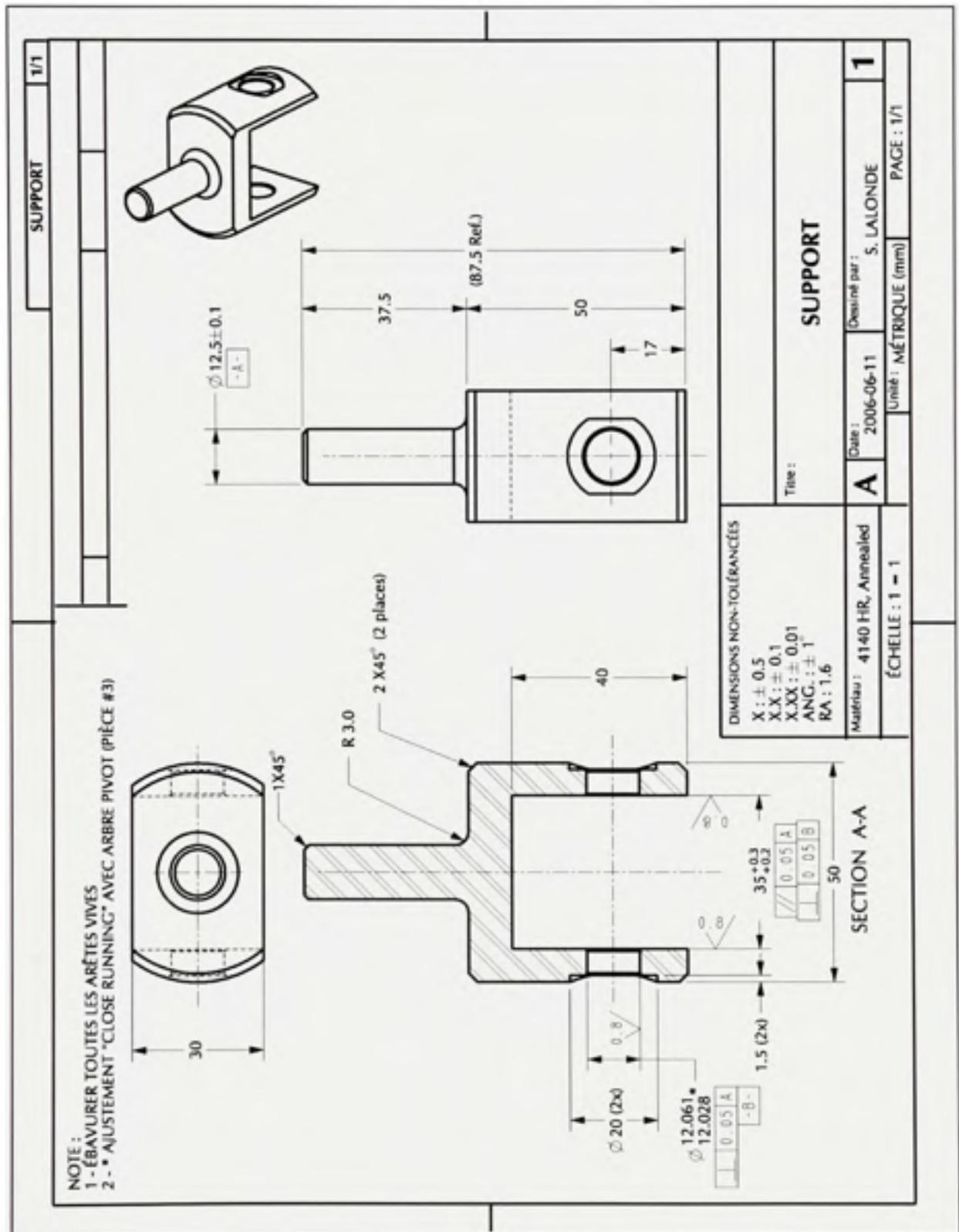
A

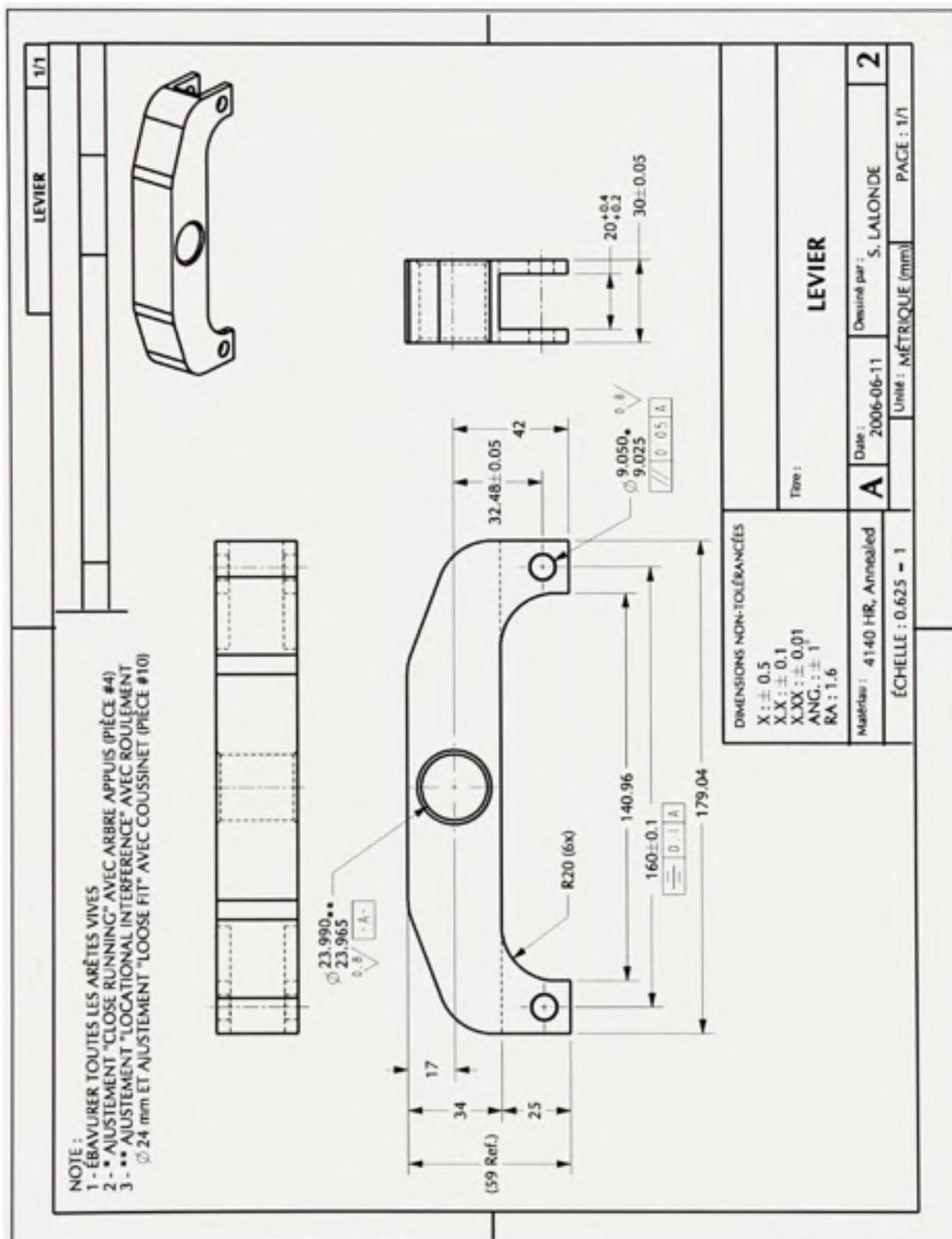
Date : 2006-06-11

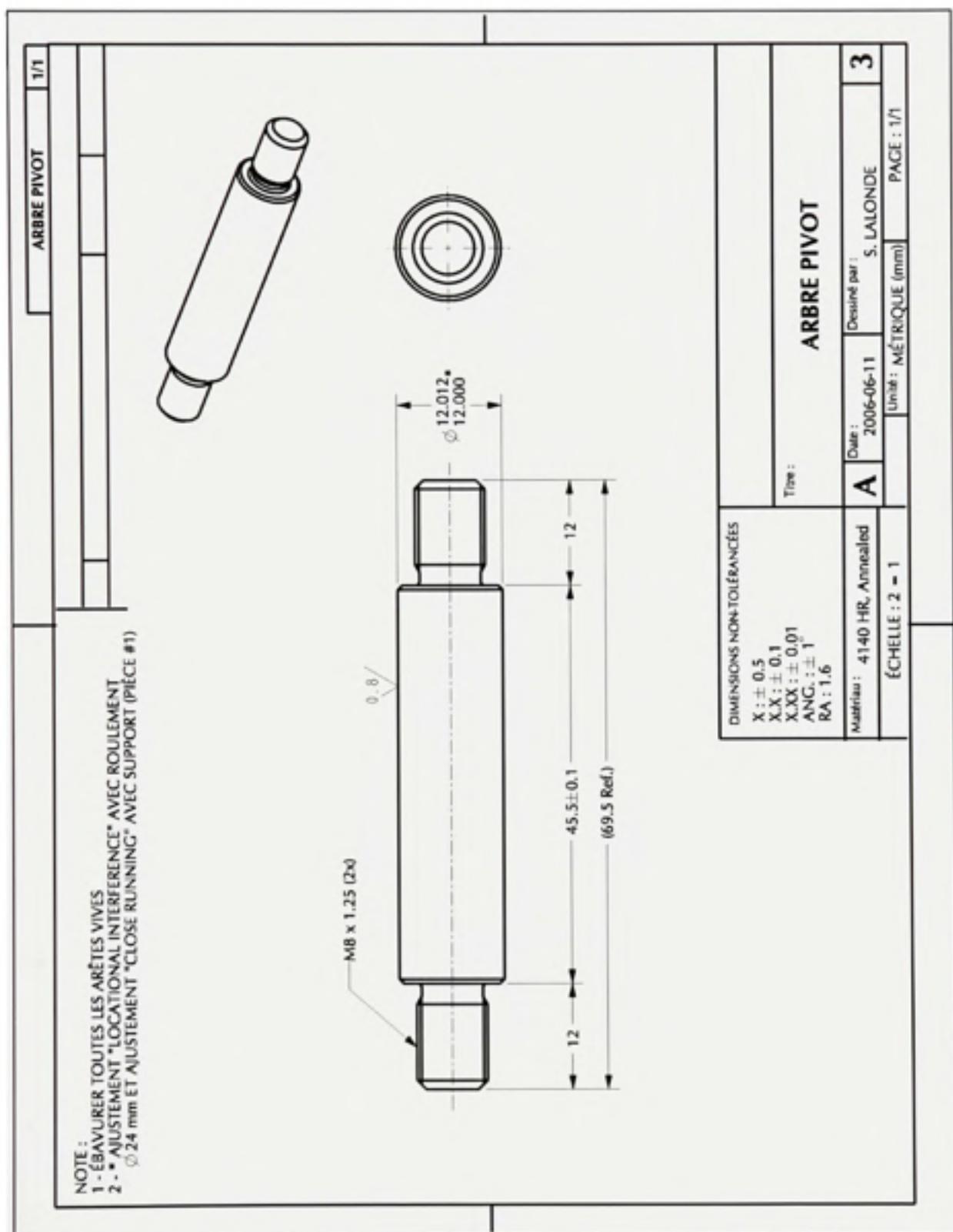
Dessiné par : S. LALONDE

PAGE : 2/2

ÉCHELLE : 0,5 - 1





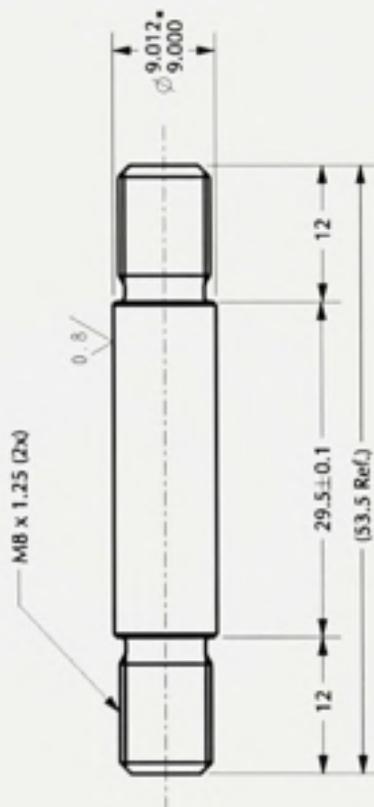
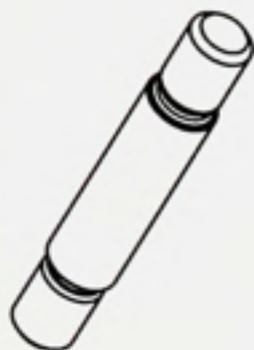


ARBRE APPUIS

1/1

NOTE :

- 1 - ÉBAUVIR TOUTES LES ARÊTES VIVES
- 2 - * AJUSTEMENT "LOCALATIONAL INTERFERENCE" AVEC ROULEMENT
 \varnothing 19 mm ET AJUSTEMENT "CLOSE RUNNING" AVEC LEVIER (PIÈCE #2)



DIMENSIONS NON-TOLÉRANCÉES

X : ± 0.5
 X.X : ± 0.1
 X.XX : ± 0.01
 ANG. : ± 1°
 RA : 1.6

Titre :

ARBRE APPUIS

Matériau : 4140 HR, Annealed

A

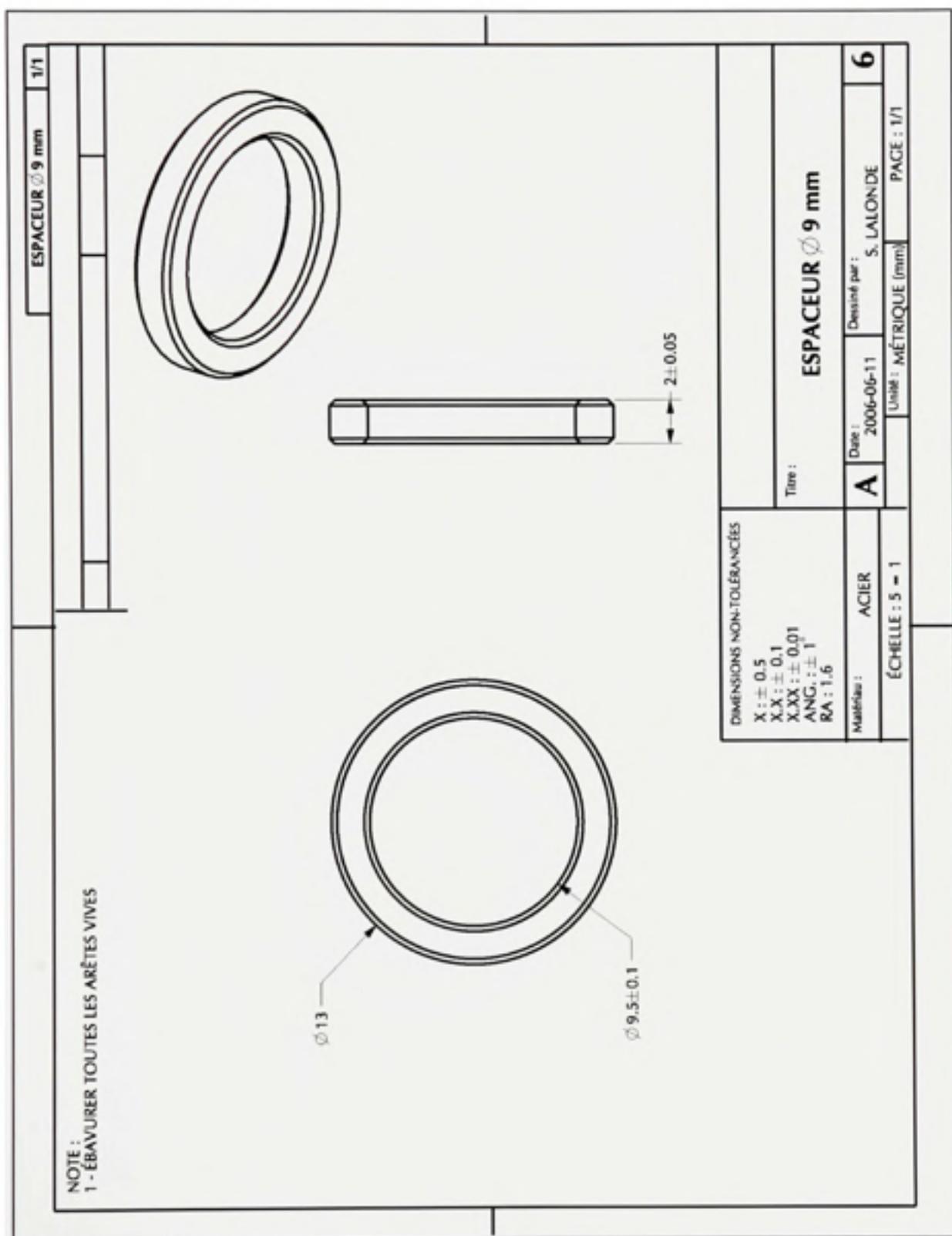
Date : 2006-06-11

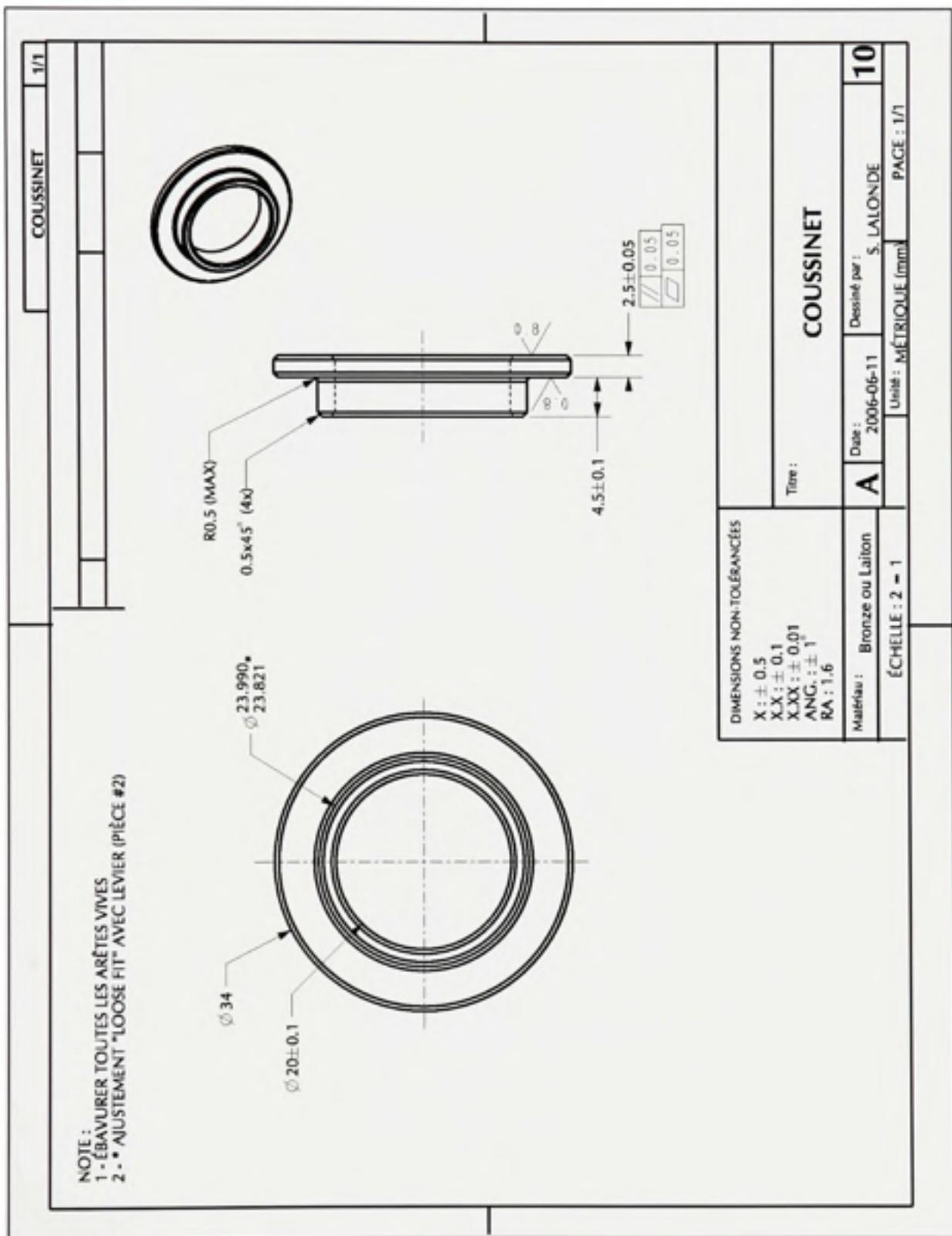
Dessiné par : S. LALONDE

4

ÉCHELLE : 2 - 1

Unité : MÉTRIQUE (mm) PAGE : 1/1



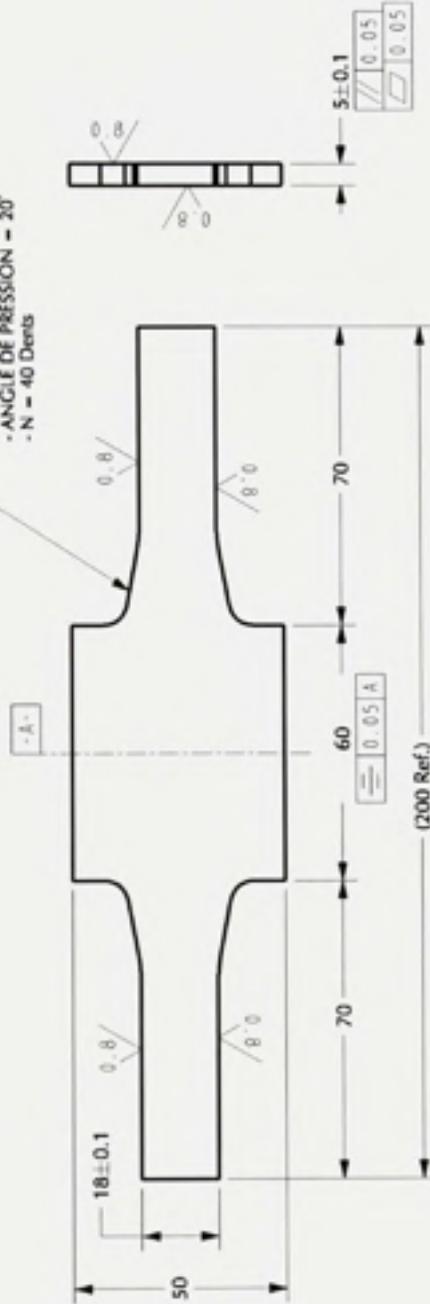


ECHANTILLON - ENGRENAGE 1/1

NOTE :
 1 - CONSERVER LES ARÊTES VIVES
 2 - VOIR MODÈLE CAD "ECHANTILLONGEAR.PRT" (PROE) POUR LE PROFIL



PROFIL DE LA RACINE
 D'UNE DENT D'ENGRENAGE (4x)
 - MODULE = 12 mm
 - ANGLE DE PRESSION = 20°
 - N = 40 Dents



DIMENSIONS NON-TOLÉRANCÉES

X : ± 0.5
 X.X : ± 0.1
 X.XX : ± 0.01
 ANG. : ± 1°
 RA : 1.6

Matériau : ALUM. 6061 T6

A

Date : 2006-06-11

Dessiné par :

S. LALONDE

11

Titre : ÉCHANTILLON - ENGRENAGE

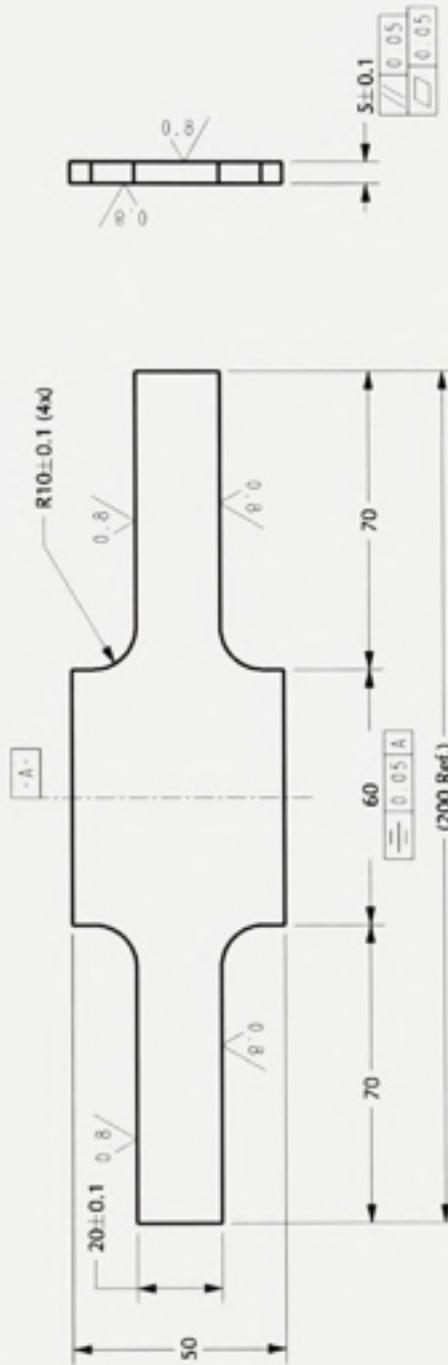
Unité : MÉTRIQUE (mm) PAGE : 1/1

ÉCHELLE : 0.75 - 1

ÉCHANTILLON - R 10mm

1/1

NOTE :
1 - CONSERVER LES ARÊTES VIVES



DIMENSIONS NON-TOLÉRANCÉES

X : ± 0.5
 X.X : ± 0.1
 X.XX : ± 0.01
 ANG. : $\pm 1^\circ$
 RA : 1.6

Matériau : ALUM. 6061 T6

A

Date : 2006-06-11

Destiné par : S. LALONDE

12

Unité : MÉTRIQUE (mm)

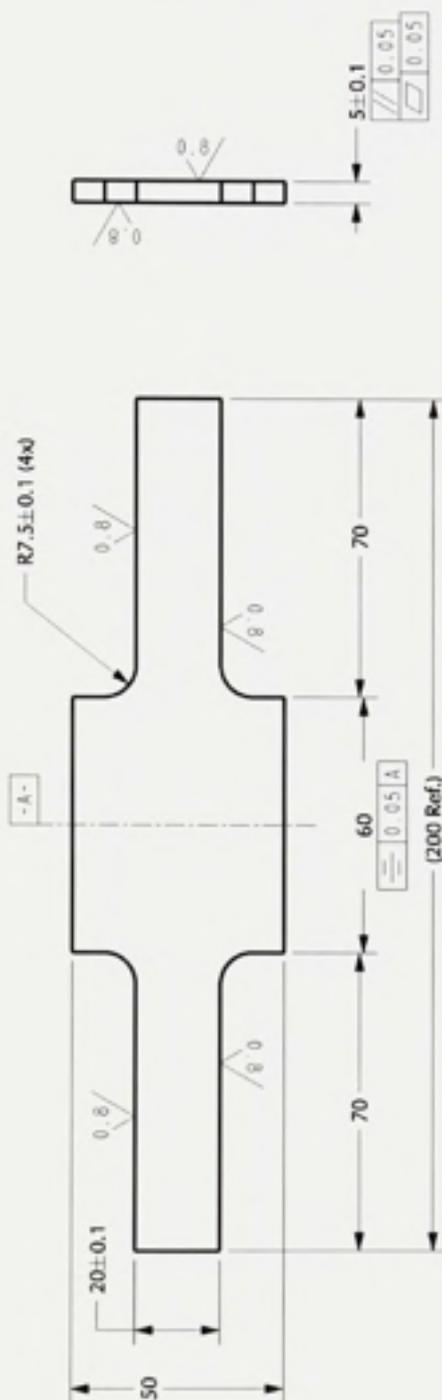
PAGE : 1/1

Titre : ÉCHANTILLON - RAYON 10mm

ÉCHANTILLON - R 7.5 mm

1/1

NOTE :
1 - CONSERVER LES ARÊTES VIVES



DIMENSIONS NON-TOLÉRANCÉES

X : ± 0.5
X.X : ± 0.1
X.XX : ± 0.01
ANG. : ± 1°
RA : 1.6

Titre :

ÉCHANTILLON - RAYON 7.5 mm

Matériau : ALUM. 6061 T6

A

Date : 2006-06-11

Destiné par : S. LALONDE

13

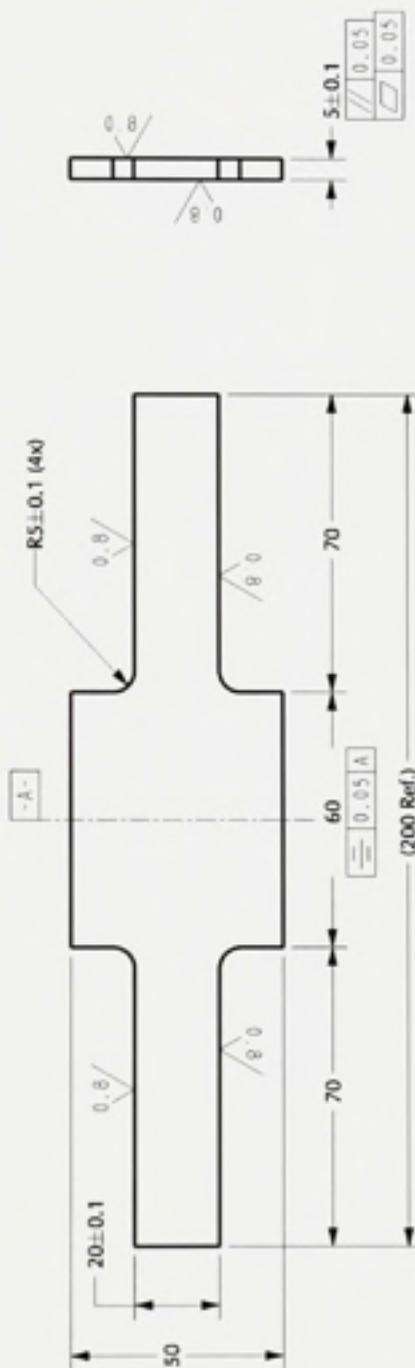
Unité : MÉTRIQUE (mm)

PAGE : 1/1

ÉCHANTILLON - R 5 mm

1/1

NOTE :
1 - CONSERVER LES ARÊTES VIVES



DIMENSIONS NON-TOLÉRANCÉES

X : ± 0.5
X.X : ± 0.1
X.XX : ± 0.01
ANG. : ± 1°
RA : 1.6

Titre :
ÉCHANTILLON - RAYON 5 mm

Matériau : ALUM. 6061 T6

Date : 2006-05-11

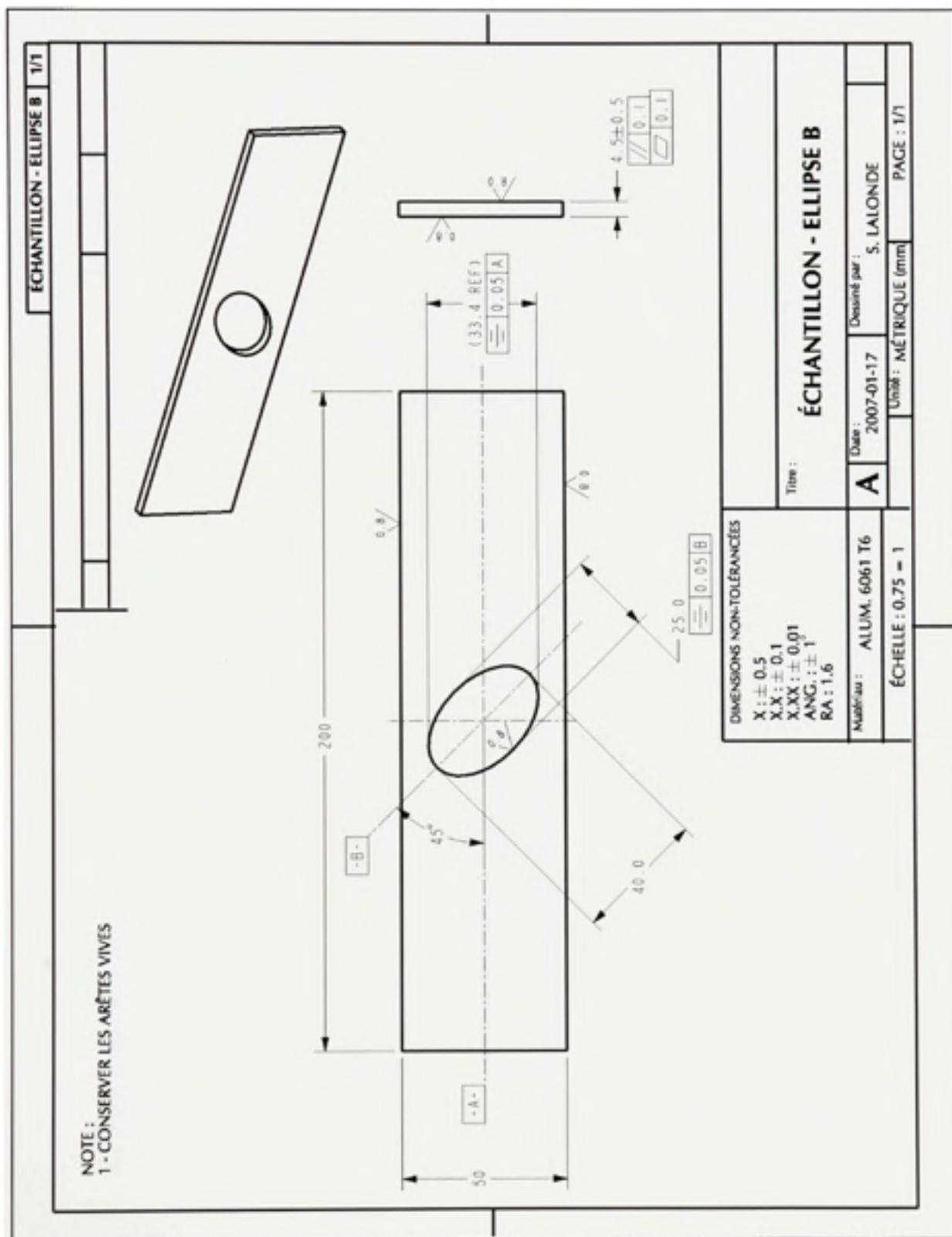
Dessiné par : S. LALONDE

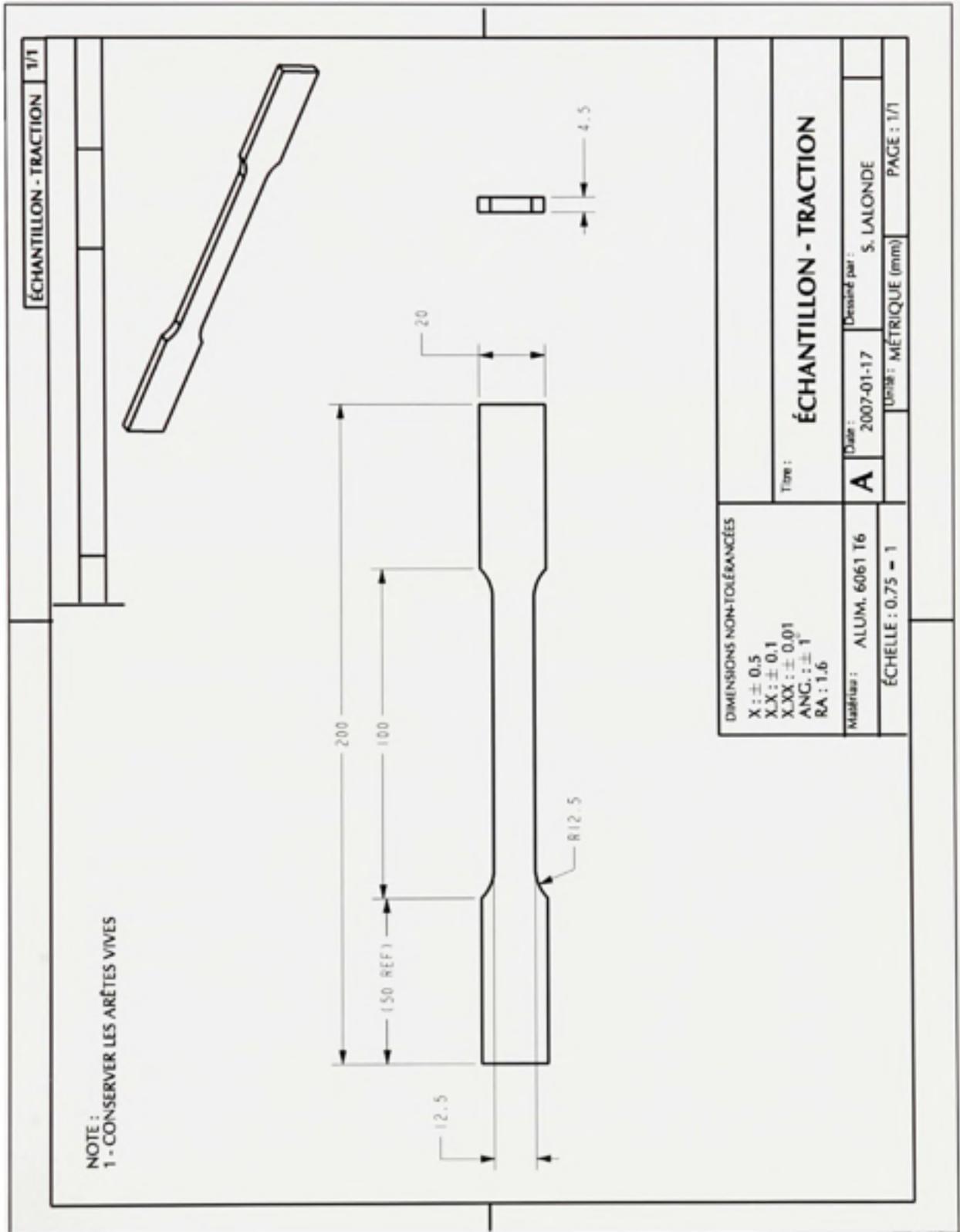
14

ÉCHELLE : 0.75 = 1

Unité : MÉTRIQUE (mm)

PAGE : 1/1





ANNEXE V

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX VS. NUMÉRIQUES

- **Résultats expérimentaux et numériques en fatigue initiation**

Les tableaux de cette section présentent les mesures expérimentales et les prédictions de différents critères en fatigue initiation. Les paramètres x_0 et y_0 ont été définis selon les systèmes de coordonnées de la Figure 6.7 et θ_0 selon la configuration de la Figure 4.7. Aussi, les valeurs expérimentales de a_0 correspondent surtout aux longueurs sur lesquelles θ_0 a été mesuré.

En ce qui concerne les figures de cette section, elles représentent les zones d'initiation des échantillons où les prédictions des critères D_{LCr} avec $f_+(\sigma_n, \tau_n)$ (trait bleu) et $f_-(\sigma_n, \tau_n)$ (trait rouge), ont été tracées sur une longueur d'environ 2mm, pour des raisons de visibilité.

Tableau V.1

Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon Brugger R = 10 mm

Critères ou Mesures Exp.	Paramètres Fissure Initiale			
	x_0 (mm)	y_0 (mm)	θ_0 (°)	a_0 (mm)
Échantillon A (av.)	10.4	7.3	-2.2	1.9
Échantillon B (av.)	10.4	7.1	6.3	0.7
Échantillon A (ar.)	10.7	6.2	-26.0	1.7
Échantillon B (ar.)	10.7	6.4	27.8	0.2
$D_{\sigma_{1max}}$ (D1)	10.198	8.019	0.0	0.222
$D_{\tau_{max}}$ (D2)	10.198	8.019	0.0 ± 45	0.222
D_{LCr} & $f_+(\sigma_n, \tau_n)$ (D3)	10.205	7.985	0.1	0.222
D_{LCr} & $f_-(\sigma_n, \tau_n)$ (D4)	10.226	7.885	31.4	0.222
D_{PLCr} & $f_+(\sigma_n, \tau_n)$ (D5)	10.203	7.997	0.1	0.222
D_{PLCr} & $f_-(\sigma_n, \tau_n)$ (D6)	10.213	7.946	30.8	0.222

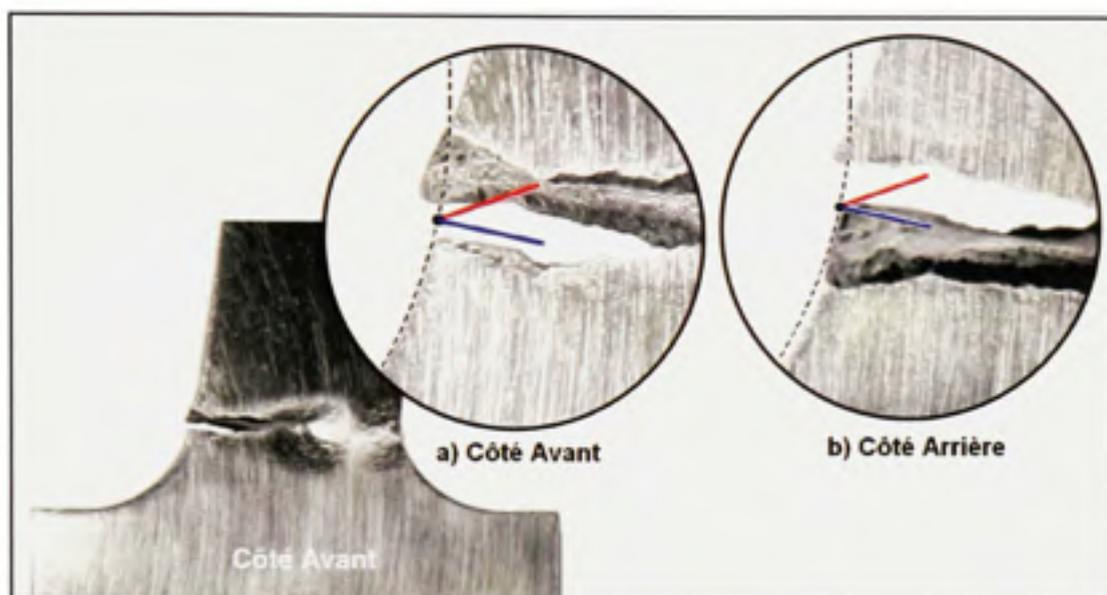


Figure V.1 *Initiation de fissure échantillon Brugger R = 10 mm A.*

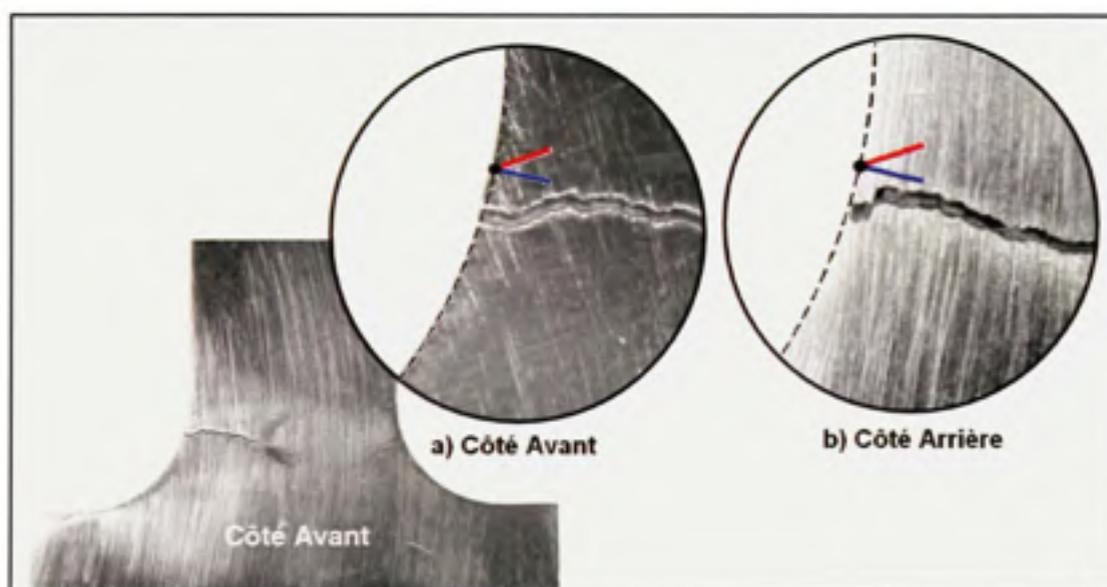
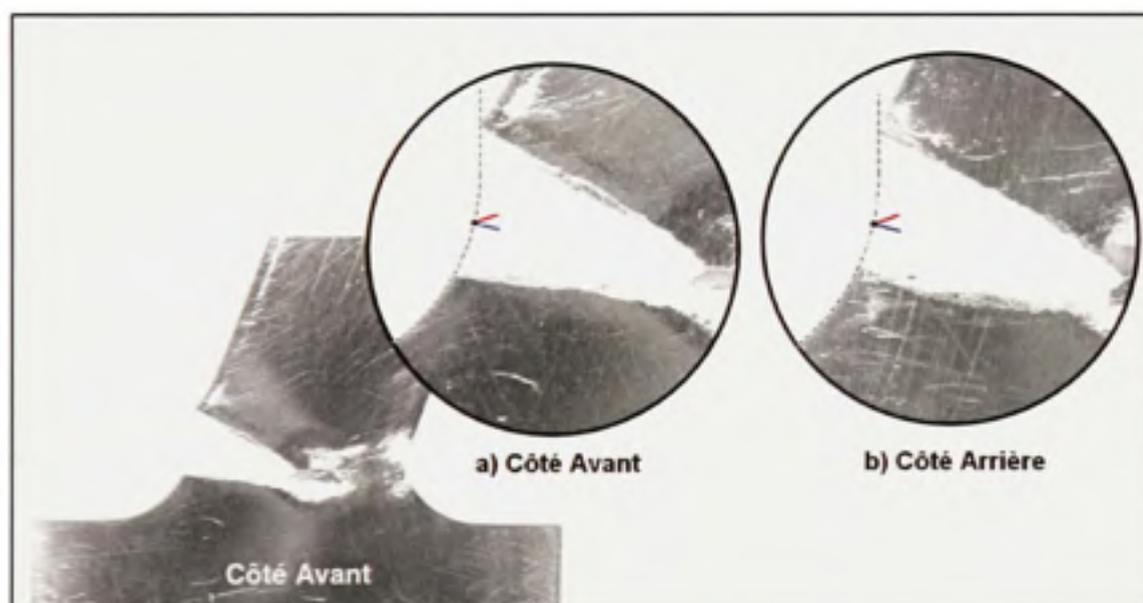


Figure V.2 *Initiation de fissure échantillon Brugger R = 10 mm B.*

Tableau V.2

Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon Brugger $R = 7.5$ mm

Critères ou Mesures Exp.	Paramètres Fissure Initiale			
	x_0 (mm)	y_0 (mm)	θ_0 (°)	a_0 (mm)
Échantillon A (av.)	10.8	4.1	20.3	0.4
Échantillon B (av.)	10.0	7.3	7.4	0.4
Échantillon A (ar.)	10.6	4.5	-17.7	0.4
Échantillon B (ar.)	10.1	6.4	8.8	0.4
$D_{\sigma_{1max}}$ (D1)	10.180	5.866	0.0	0.222
$D_{\tau_{max}}$ (D2)	10.180	5.866	0.0 ± 45	0.222
$D_{L.Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D3)	10.185	5.845	0.1	0.222
$D_{L.Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D4)	10.208	5.746	31.7	0.222
$D_{Pc.Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D5)	10.183	5.852	0.1	0.222
$D_{Pc.Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D6)	10.195	5.800	31.0	0.222

Figure V.3 Initiation de fissure échantillon Brugger $R = 7.5$ mm A.

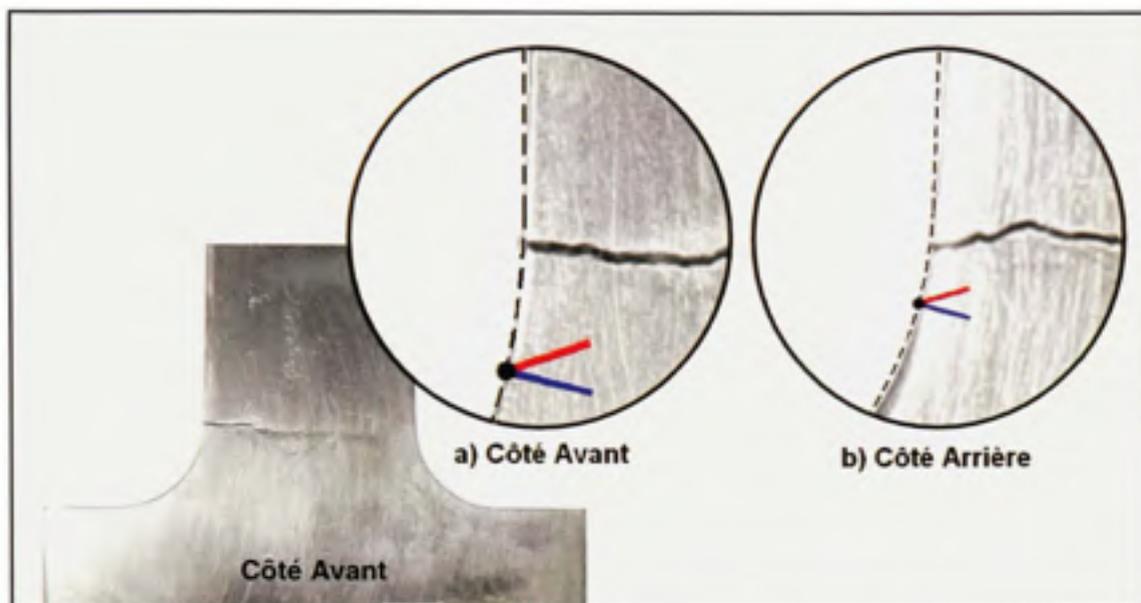


Figure V.4 Initiation de fissure échantillon Brugger $R = 7.5 \text{ mm B}$.

Tableau V.3

Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon Brugger $R = 5 \text{ mm}$

Critères ou Mesures Exp.	Paramètres Fissure Initiale			
	x_0 (mm)	y_0 (mm)	θ_0 (°)	a_0 (mm)
Échantillon A (av.)	10.1	3.9	-3.9	1.1
Échantillon B (av.)	10.9	2.1	0.0	0.6
Échantillon A (ar.)	10.2	3.6	13.2	0.5
Échantillon B (ar.)	11.8	1.2	-12.2	0.3
D_{01max} (D1)	10.160	3.746	0.0	0.222
D_{0max} (D2)	10.160	3.746	0.0 ± 45	0.222
$D_{L,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D3)	10.164	3.729	0.0	0.222
$D_{L,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D4)	10.191	3.632	32.4	0.222
$D_{Pl,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D5)	10.164	3.731	0.1	0.222
$D_{Pl,cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D6)	10.178	3.677	31.4	0.222

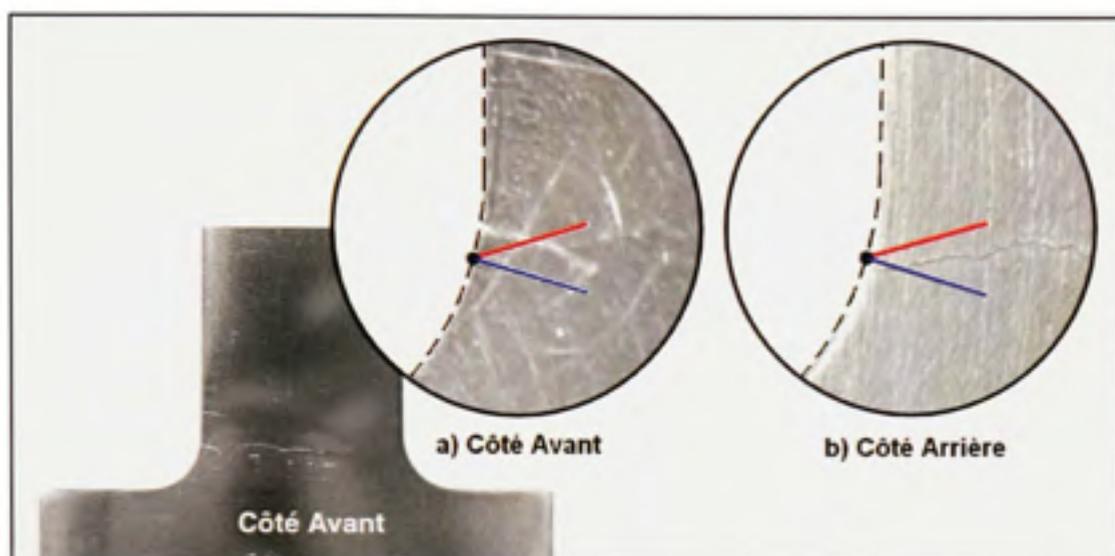


Figure V.5 *Initiation de fissure échantillon Brugger $R = 5$ mm A.*

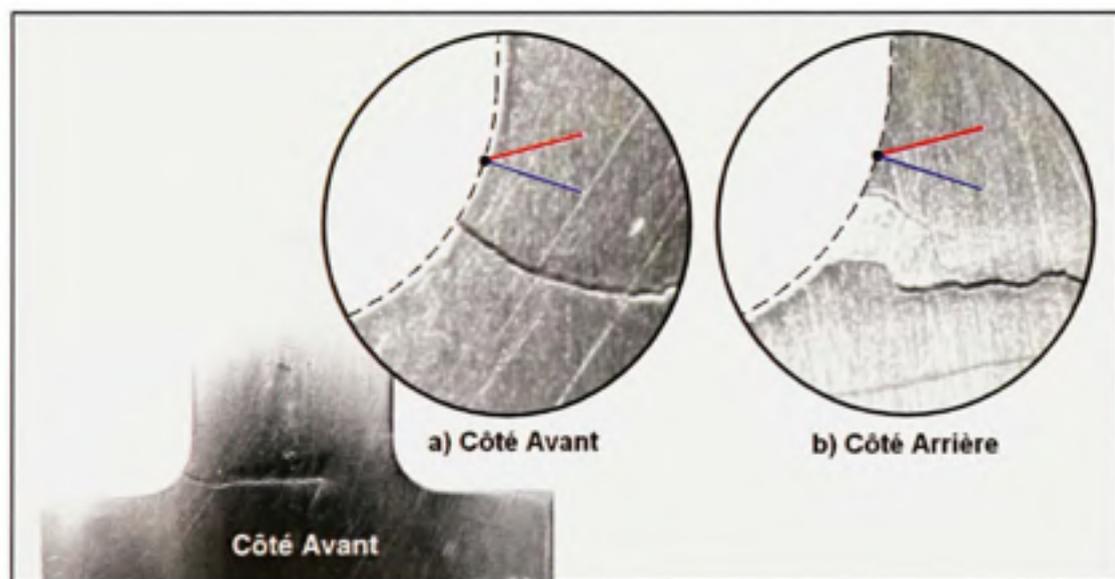


Figure V.6 *Initiation de fissure échantillon Brugger $R = 5$ mm B.*

Tableau V.4

Résultats en fatigue initiation pour l'échantillon avec ellipse à 45°

Critères ou Mesures Exp.	Paramètres Fissure Initiale			
	x_0 (mm)	y_0 (mm)	θ_0 (°)	a_0 (mm)
Échantillon A (av.)	16.6	9.0	2.1	0.4
Échantillon B (av.)	16.4	4.4	11.1	1.7
Échantillon A (ar.)	16.6	8.5	-10.7	0.3
Échantillon B (ar.)	16.4	4.4	33.8	0.3
$D_{\sigma_{1max}}$ (D1)	16.700	7.746	0.0	0.222
$D_{\tau_{max}}$ (D2)	16.700	7.746	0.0 ± 45	0.222
$D_{L, Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D3)	16.673	7.624	-0.1	0.222
$D_{L, Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D4)	16.670	7.728	31.1	0.222
$D_{Pt, Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D5)	16.672	7.665	0.0	0.222
$D_{Pt, Cr.}$ & $f_*(\sigma_n, \tau_n)$ (D6)	16.674	7.609	30.6	0.222

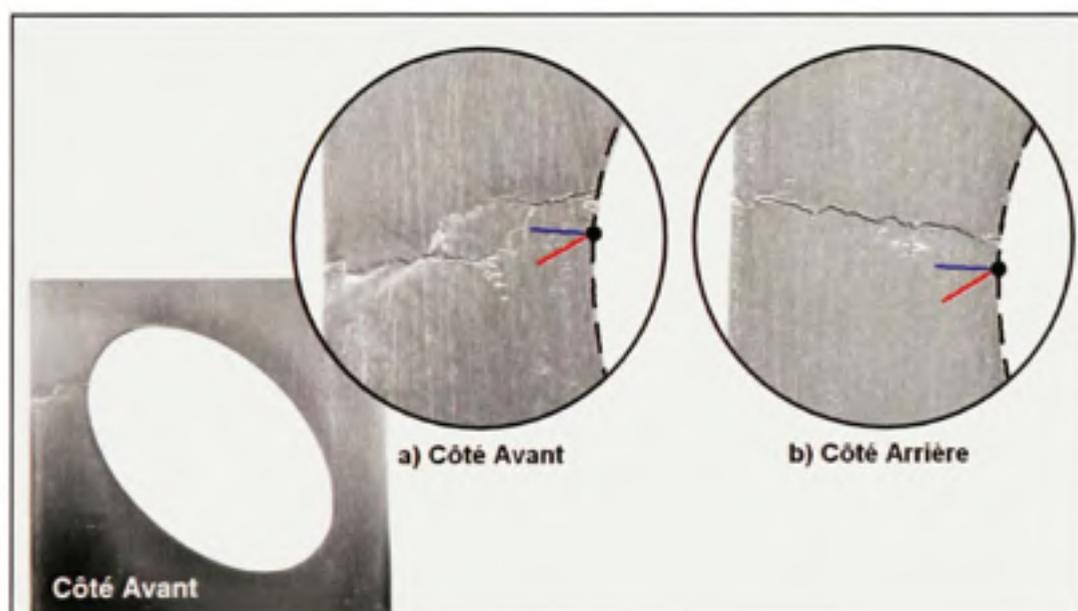


Figure V.7 Initiation de fissure échantillon avec ellipse à 45° A.

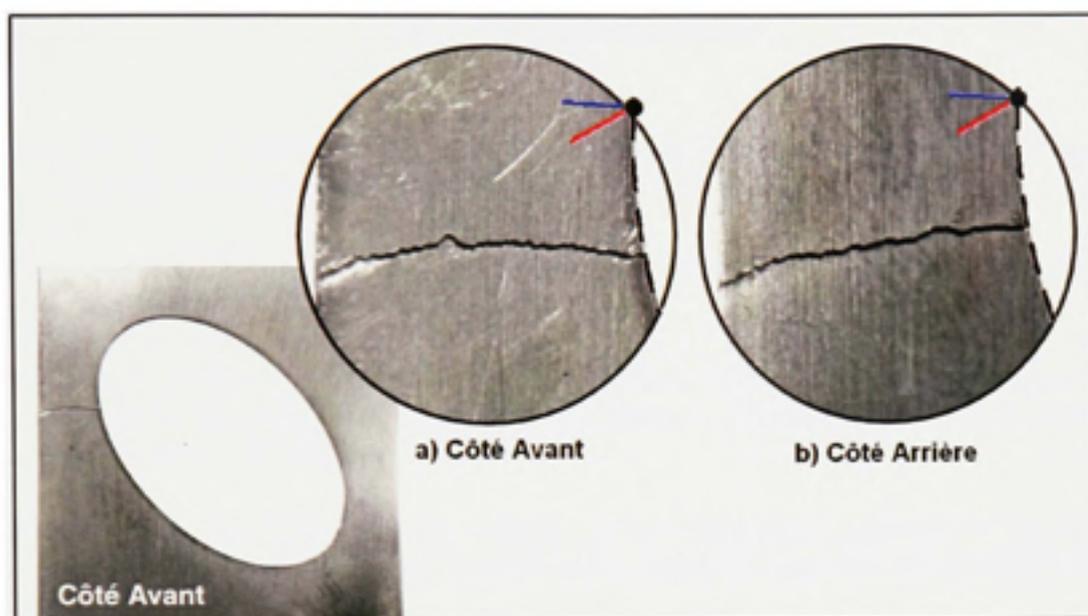


Figure V.8 *Initiation de fissure échantillon avec ellipse à 45° B.*

LISTE DE RÉFÉRENCES

- Abersek, B. et J. Flasker. 1994. « Stress intensity factor for cracked gear tooth ». *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 20, n° 2, p. 99-104.
- Abersek, B. et J. Flasker. 2004. *How gears break*, 7. Coll. « Advances in damage mechanics ». Southampton: WIT Press, 221 p.
- Abersek, B., J. Flasker et S. Glodez. 2004. « Review of mathematical and experimental models for determination of service life of gears ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, n° 4-6, p. 439-453.
- Al-Khafaji, Amir Wadi et John R. Tooley. 1986. *Numerical methods in engineering practice*. Coll. « HRW series in mechanical engineering ». New York: Holt Rinehart and Winston, xiv, 642 p.
- Alban, Lester E. 1984. « Number one gear failure - tooth bending fatigue ». In *International Off-Highway & Powerplant Congress & Exposition*. SAE, Warrendale, PA, USA.
- Alban, Lester E. 1985. *Systematic analysis of gear failures*. Metals Park, Ohio: American Society for Metals, viii, 232 p.
- Aliabadi, M. H. 1997. « Boundary element formulations in fracture mechanics ». *Applied Mechanics Reviews*, vol. 50, n° 2, p. 83-96.
- Aliabadi, M. H. 2002. *Boundary element method : application in solids and structures*, vol. 2. Chichester, En: John Wiley & sons, 580 p.
- Aliabadi, M. H. et W. S. Hall. 1989. « Two-dimensional boundary element kernel integration using series expansions ». *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 6, n° 3, p. 140-143.
- Aliabadi, M. H., W. S. Hall et T. G. Plemister. 1985. « Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, n° 12, p. 2221-2236.
- Aliabadi, M. H. et David P. Rooke. 1992. *Numerical fracture mechanics*. Coll. « Solid mechanics and its applications v. 8 ». Southampton, U.K. Dordrecht, Pays-Bas: Computational Mechanics Publications Kluwer Academic, 276 p.
- Anderson, T. L. 2005. *Fracture mechanics : fundamentals and applications*, 3rd. Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 621 p.

- Aslantas, K. et S. Tasgetiren. 2004. « A study of spur gear pitting formation and life prediction ». *Wear*, vol. 257, n° 11, p. 1167-1175.
- ASM International. Handbook Committee. 2002. *ASM handbooks online*. Coll. « ASM materials information ». Materials Park, OH: ASM International. <<http://products.asminternational.org/hbk/>>.
- Barsoum, Roshdy S. 1976. « On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, n° 1, p. 25-37.
- Becker. A. A. 1992. *The boundary element method in engineering a complete course*. London, Angleterre: McGraw-Hill, 337 p.
- Beer, Gernot. 2001. *Programming the boundary element method : an introduction for engineers*. New York: John Wiley & Sons, 457 p.
- Benedetti, Matteo, V. Fontanari, B. R. Hohn, P. Oster et T. Tobie. 2002. « Influence of shot peening on bending tooth fatigue limit of case hardened gears ». *International Journal of Fatigue*, vol. 24, n° 11, p. 1127-1136.
- Bhattacharya, Baidurya et Bruce Ellingwood. 1998. « Continuum damage mechanics analysis of fatigue crack initiation ». *International Journal of Fatigue*, vol. 20, n° 9, p. 631-639.
- Blandford, George E., Anthony R. Ingraffea et James A. Liggett. 1981. « Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, n° 3, p. 387-404.
- Blarasin, A., M. Guagliano et L. Vergani. 1997. « Fatigue crack growth prediction in specimens similar to spur gear teeth ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 20, n° 8, p. 1171-1182.
- Boniardi, Marco, Fabrizio D'Errico et Chiara Tagliabue. 2006. « Influence of carburizing and nitriding on failure of gears - A case study ». *Engineering Failure Analysis*, vol. 13, n° 3 SPEC ISS, p. 312-339.
- Bonnet, Marc. 1995. *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. Chichester ; New York: Wiley, xx, 391 p.
- Bouchard, P. O., F. Bay et Y. Chastel. 2003. « Numerical modelling of crack propagation: Automatic remeshing and comparison of different criteria ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n° 35-36, p. 3887-3908.

- Broek, David. 1986. *Elementary engineering fracture mechanics*, 4th rev. Boston, Mass.: Kluwer Academic, xiv, 516 p.
- Byskov, E. 1970. « Calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements ». vol. 6, n° 2, p. 159-67.
- Cavallaro, G. P., T. P. Wilks, C. Subramanian, K. N. Strafford, P. French et J. E. Allison. 1995. « Bending fatigue and contact fatigue characteristics of carburized gears ». *Surface & Coatings Technology*, vol. 71, n° 2, p. 182-192.
- Celik, M. 1999. « Comparison of three teeth and whole body models in spur gear analysis ». *Mechanism and Machine Theory*, vol. 34, n° 8, p. 1227-1235.
- Chang, Chungchu et Mark E. Mear. 1995. « A boundary element method for two dimensional linear elastic fracture analysis ». *International Journal of Fracture*, vol. 74, n° 3, p. 219-251.
- Collipriest, J. E., Jr. 1972. « Experimentalist's view of the surface flaw problem ». *AGARD Conference Proceedings*, p. 43-61.
- Crouch, S. L. 1976. « Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, n° 2, p. 301-343.
- Cruse, T. A. et R. Aithal. 1993. « Non-singular boundary integral equation implementation ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, n° 2, p. 237-254.
- Cruse, Thomas A. 1972. « Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method ». In *The surface crack: physical problems and computational solutions*, sous la dir. de Swedlow, J. L. p. 153-170. New York: American Society of Mechanical Engineers.
- Cruse, Thomas A. 1988. *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. Coll. « Mechanics--computational mechanics. 1. ». Dordrecht ; Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Cui, Weicheng. 2002. « A state-of-the-art review on fatigue life prediction methods for metal structures ». *Journal of Marine Science and Technology*, vol. 7, n° 1, p. 43-56.
- Daniewicz, S. R., J. A. Collins et D. R. Houser. 1994. « Stress intensity factor and stiffness for a cracked spur gear tooth ». *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 116, n° 3, p. 697-700.

- Das, C. R., S. K. Albert, A. K. Bhaduri et S. K. Ray. 2005. « Failure analysis of a pinion ». *Engineering Failure Analysis*, vol. 12, n° 2, p. 287-298.
- De Matos, P. F. P., P. M. G. P. Moreira, A. Portela et P. M. S. T. De Castro. 2004. « Dual boundary element analysis of cracked plates: Post-processing implementation of the singularity subtraction technique ». In *Computational Mechanics in Portugal, Apr 17-19 2003*. Vol. 82, p. 1443-1449. Elsevier Ltd, Oxford, United Kingdom.
- Dowling, Norman E. 1999. *Mechanical behavior of materials : engineering methods for deformation, fracture, and fatigue*, 2nd. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, xviii, 830 p.
- Ellyin, Fernand. 1988. « Recent developments in predicting multiaxial fatigue failure ». *Res Mechanica: International Journal of Structural Mechanics and Materials Science*, vol. 25, n° 1, p. 1-23.
- Ellyin, Fernand et Daniel Kujawski. 1993. « Multiaxial fatigue criterion including mean-stress effect ». In *Proceedings of the Symposium on Multiaxial Fatigue, Oct 14-16 1991*. Vol. 1191, p. 55-66. ASTM, Philadelphia, PA, USA.
- Errichello, Robert L. et Jane Muller. 2001. « How to analyze gear failures ». *Practicing oil analysis magazine*, n° 200101.
- Eyercioglu, O., D. Walton et T. A. Dean. 1997. « Comparative bending fatigue strength of precision forged spur gears ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 211, n° 4, p. 293-299.
- Faria, L. 1991. *The economic effects of fracture in Europe*. Final report of European Atomic Energy Community study contract No. 320105.
- Fatemi, A. et L. Yang. 1998. « Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials ». *International Journal of Fatigue*, vol. 20, n° 1, p. 9-34.
- Fedelinski, P., M. H. Aliabadi et D. P. Rooke. 1995. « Single-region time domain BEM for dynamic crack problems ». *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32, n° 24, p. 3555-3571.
- Fernandes, P. J. L. 1996. « Tooth bending fatigue failures in gears ». *Engineering Failure Analysis*, vol. 3, n° 3, p. 219-225.
- Flasker, J., S. Glodez et S. Pehan. 1995. « Influence of contact area on service life of gears with crack in tooth root ». *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, n° 1, p. 49.

- Forman, Royce G. et Tianlai Hu. 1984. « Application of fracture mechanics on the space shuttle ». In *Damage Tolerance of Metallic Structures: Analysis Methods and Applications*. p. 108-133. ASTM, Philadelphia, PA, USA.
- Gao, Xiao-Wei et Trevor G. Davies. 2001. *Boundary element programming in mechanics*. Cambridge, U.K. : Cambridge University Press, xvi, 254 p.
- Glodez, S., S. Pešan et J. Flaker. 1998. « Experimental results of the fatigue crack growth in a gear tooth root ». *International Journal of Fatigue*, vol. 20, n° 9, p. 669-675.
- Glodez, S., Z. Ren et G. Fajdiga. 2001. « Computational modelling of the surface fatigue crack growth on gear teeth flanks ». *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, n° 8, p. 529-541.
- Glodez, S., H. Winter et H. P. Stuwe. 1997. « Fracture mechanics model for the wear of gear flanks by pitting ». *Wear*, vol. 208, n° 1-2, p. 177-183.
- Glodez, Srečko, M. Sraml et J. Kramberger. 2002. « A computational model for determination of service life of gears ». *International Journal of Fatigue*, vol. 24, n° 10, p. 1013-1020.
- Guagliano, M. et L. Vergani. 2001a. « Effect of crack closure on gear crack propagation ». *International Journal of Fatigue*, vol. 23, n° 1, p. 65-73.
- Guagliano, M. et L. Vergani. 2001b. « Mode I stress intensity factors for curved cracks in gears by a weight functions method ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 24, n° 1, p. 41-52.
- Guilbault, Raynald, Claude Gosselin et Louis Cloutier. 2005. « Express model for load sharing and stress analysis in helical gears ». *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 127, n° 6, p. 1161-1172.
- Guo, Y. H., T. S. Srivatsan et J. Padovan. 1994. « Influence of mixed-mode loading on fatigue-crack propagation ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 47, n° 6, p. 843-866.
- Hertzberg, Richard W. 1996. *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*, 4th, New York: J. Wiley & Sons.
- Hidayetoglu, T. K. 2001. « Effect of the gear finishing process on bending fatigue crack initiation and propagation in spur gears ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 215, n° 7, p. 785-792.

- Hildenbrand, J. et G. Kuhn. 1993. « Numerical treatment of finite part integrals in 2-D boundary element analysis with application in fracture mechanics ». *Computational Mechanics*, vol. 13, n° 1, p. 55-67.
- Holston, A., Jr. 1976. « Mixed mode crack tip finite element », *International Journal of Fracture*, vol. 12, n° 6, p. 887-899.
- Huber, O., J. Nickel et G. Kuhn. 1993. « On the decomposition of the J-integral for 3D crack problems ». *International Journal of Fracture*, vol. 64, n° 4, p. 339-348.
- Hussain, M.A., S.L. Pu et J. Underwood. 1974. « Strain energy release rate for crack under combined mode I and mode II ». *ASTM STP 560*, p. 2-28.
- Inoue, Katsumi et Masana Kato. 1995. « Crack growth resistance due to shot peening in carburized gears », *Journal of Propulsion and Power*, vol. 11, n° 5, p. 973-979.
- Ishikawa, H., H. Kitagawa et H. Okamura. 1980. « J integral of a mixed mode crack and its application ». *Proceedings - Computer Networking Symposium*, vol. 3, p. 447-455.
- Jelaska, Damir T. 2000. « Crack initiation life at combined HCF/LCF loading ». In *Life assessment and management for structural components* (Kiev, 239-246).
- Jelaska, Damir T., Srečko Glodez et Srdjan Podrug. 2003. « Numerical modelling of the crack propagation path at gear tooth root ». In *2003 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Sep 2-6 2003*. Vol. 4 A, p. 201-207. American Society of Mechanical Engineers, New York, NY 10016-5990, United States.
- Jelaska, Damir T., Srdjan Podrug et Srečko Glodez. 2005. « Comparison of numerical models for gear tooth root fatigue assessments ». In *2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2005, Nov 5-11 2005*. Vol. 2005, p. 77-84. American Society of Mechanical Engineers, New York, NY 10016-5990, United States.
- Jha, Abhay K. et V. Diwakar. 2002. « Metallurgical analysis of failed gear ». *Engineering Failure Analysis*, vol. 9, n° 3, p. 359-365.
- Kacianauskas, Rimantas, Mroz Zenon, Vladislav Zarnovskij et Eugenius Stupak. 2005. « Three-dimensional correction of the stress intensity factor for plate with a notch ». *International Journal of Fracture*, vol. 136, n° 1-4, p. 75-98.
- Kader, M. M. A., S. P. Nigam et G. K. Grover. 1998. « Study on mode of failures in spur gears under optimized conditions ». *Mechanism & Machine Theory*, vol. 33, n° 6, p. 839-850.

- Kane, James H. 1994. *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, xii, 676 p.
- Karolczuk, A. et E. Macha. 2005. « A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials ». *International Journal of Fracture*, vol. 134, n° 3-4, p. 267-304.
- Kato, Masana, Gang Deng, Katsumi Inoue et Nobuo Takatsu. 1993. « Evaluation of the strength of carburized spur gear teeth based on fracture mechanics ». *JSME International Journal, Series C: Dynamics, Control, Robotics, Design and Manufacturing*, vol. 36, n° 2, p. 233-240.
- Kita, E. et N. Kamiya. 1994. « Recent studies on adaptive boundary element methods ». *Advances in Engineering Software*, vol. 19, n° 1, p. 21-32.
- Kita, E. et N. Kamiya. 2001. « Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method, an overview ». *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 25, n° 7, p. 479-495.
- Korsunsky, A. M., K. E. James, C. Aylott et B. A. Shaw. 2002. « Residual stresses in induction-hardened gear teeth mapped by neutron diffraction ». *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 37, n° 4, p. 337-344.
- Kramberger, J., M. Sraml, I. Potrc et J. Flaker. 2004. « Numerical calculation of bending fatigue life of thin-rim spur gears ». In *Second International Conference on Fracture and Damage Mechanics, 18-20 Sept. 2001*. Vol. 71, p. 647-56. Elsevier.
- Lemaître, J. et Rodrigue Desmorat. 2005. *Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures*, Berlin ; New York: Springer, xxiii, 380 p.
- Lewicki, D. G. 1996. *Crack propagation studies to determine benign or catastrophic failure modes for aerospace thin-rim gears*. Cleveland: NASA, 70 p.
- Lewicki, D. G. 2001. *Effect of speed (centrifugal load) of gear crack propagation direction*. Cleveland: NASA, 6 p.
- Lewicki, D. G. et R. Ballarini. 1997. « Rim thickness effects on gear crack propagation life ». *International Journal of Fracture*, vol. 87, n° 1, p. 59-86.
- Lewicki, David G. 2002. « Gear crack propagation path studies-guidelines for ultra-safe design ». *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 47, n° 1, p. 64-72.
- Lewicki, David G., Ashok D. Sane, Raymond J. Drago et Paul A. Wawrzynek. 1998. *Three-dimensional gear crack propagation studies*. Technical Memorandum. NASA Lewis research center & U.S. army research laboratory, 16 p.

- Lewicki, David G., Lisa E. Spievak, Paul A. Wawrzynek, Anthony R. Ingraffea et Robert F. Handschuh. 2002. « Consideration of moving tooth load in gear crack propagation predictions ». *Gear Technology*, vol. 19, n° 1, p. 14-21.
- Liebowitz, H., J. S. Sandhu, J. D. Lee et F. C. M. Menandro. 1995. « Computational fracture mechanics: research and application ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 50, n° 5-6, p. 653-670.
- Litvin, F. L. et Alfonso Fuentes. 2004. *Gear geometry and applied theory*, 2nd. New York: Cambridge University Press, xvi, 800 p.
- Lukas, P. et L. Kunz. 2003. « Small cracks - Nucleation, growth and implication to fatigue life ». In *International Conference on Fatigue Damage of Structural Mater, Sep 22-27 2002*. Vol. 25, p. 855-862. Elsevier Ltd.
- Lukas, Petr et Ludvik Kunz. 1981. « Influence of notches on high cycle fatigue life ». *Materials Science and Engineering*, vol. 47, n° 2, p. 93-98.
- Macha, E. et C. M. Sonsino. 1999. « Energy criteria of multiaxial fatigue failure ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 22, n° 12, p. 1053-1070.
- Masuyama, Tomoya, Masana Kato, Katsumi Inoue et Toshihiko Yamashita. 2002. « Evaluation of bending strength of carburized gears based on a quantification of defect size in the surface layer ». *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 124, n° 3, p. 533-538.
- Milne, I. 1994. « Importance of the management of structural integrity ». *Engineering Failure Analysis*, vol. 1, n° 3, p. 171-181.
- Mukhopadhyay, N. K., S. K. Maiti et A. Kakodkar. 2000. « Review of SIF evaluation and modelling of singularities in BEM ». *Computational Mechanics*, vol. 25, n° 4, p. 358-375.
- Murakami, Y. 1987. *Stress intensity factors handbook*, 1st. Oxford [Oxfordshire] ; New York: Pergamon, 2 v. (xlix, 1456, 8) p.
- Newman, J. A., W. T. Riddell et R. S. Piascik. 2003. « A threshold fatigue crack closure model: Part I - Model development ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 26, n° 7, p. 603-614.
- Newman, J. C., Jr. 1984. « A crack opening stress equation for fatigue crack growth ». *International Journal of Fracture*, vol. 24, n° 4, p. 131-5.

- Nicoletto, G. 1993. « Approximate stress intensity factors for cracked gear teeth ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 44, n° 2, p. 231-42.
- Nikishkov, G. P. et S. N. Atluri. 1987. « Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, n° 9, p. 1801-1821.
- Pehan, S., T. K. Hellen et J. Flasket. 1995. « Applying numerical methods for determining the service life of gears ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 18, n° 9, p. 971-979.
- Pehan, S., T. K. Hellen, J. Flasket et S. Glodez. 1997. « Numerical methods for determining stress intensity factors vs crack depth in gear tooth roots ». *International Journal of Fatigue*, vol. 19, n° 10, p. 677-685.
- Pilkey, Walter D. et Rudolph Earl Peterson. 1997. *Peterson's stress concentration factors*, 2nd. New York, N.Y.: J. Wiley and Sons, xxxii, 508 p.
- Plank, R. et G. Kuhn. 1999. « Fatigue crack propagation under non-proportional mixed mode loading ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 62, n° 2, p. 203-229.
- Portela, A., M. H. Aliabadi et D. P. Rooke. 1992. « Dual boundary element method. Effective implementation for crack problems ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n° 6, p. 1269-1287.
- Qian, J. et A. Fatemi. 1996. « Mixed mode fatigue crack growth: a literature survey ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, n° 6, p. 969-90.
- Rank, Ernst. 1989. « Adaptive h-, p- and hp-versions for boundary integral element methods ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, n° 6, p. 1335-1349.
- Reddy, J. N. 2006. *An introduction to the finite element method*, 3rd. Coll. « McGraw-Hill series in mechanical engineering ». New York, NY: McGraw-Hill Higher Education, xvi, 766 p.
- Reed, R. P., J. H. Smith, Bruce W. Christ, United States. National Bureau of Standards., Battelle Memorial Institute. Columbus Laboratories., United States. National Bureau of Standards. et Battelle Memorial Institute Columbus Ohio. Columbus Laboratories. 1983. *The economic effects of fracture in the United States*. Washington, D. C.: U. S. Dept. of Commerce National Bureau of Standards, 16 p.

- Rigby, R. H. et M. H. Aliabadi. 1998. « Decomposition of the mixed-mode J-integral - revisited ». *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 17, p. 2073-2099.
- Salgado, N. K. et M. H. Aliabadi. 1998. « The boundary element analysis of cracked stiffened sheets, reinforced by adhesively bonded patches ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 42, n° 2, p. 195-217.
- Sander, M. et H. A. Richard. 2006. « Fatigue crack growth under variable amplitude loading Part II: Analytical and numerical investigations ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 29, n° 4, p. 303-319.
- Seweryn, Andrzej et Zenon Mroz. 1995. « Non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, n° 6, p. 955-973.
- Sfakiotakis, V. G. et N. K. Anifantis. 2002. « Finite element modeling of spur gearing fractures ». *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, n° 2, p. 79-92.
- Sfakiotakis, V. G., D. E. Katsareas et N. K. Anifantis. 1997. « Boundary element analysis of gear teeth fracture ». *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 20, n° 2, p. 169-175.
- Shang, De-Guang, Wei-Xing Yao et De-Jun Wang. 1998. « New approach to the determination of fatigue crack initiation size ». *International Journal of Fatigue*, vol. 20, n° 9, p. 683-687.
- Shaniavski, A. A. et G. V. Skvortsov. 1999. « Crack growth in the gigacycle fatigue regime for helicopter gears ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 22, n° 7, p. 609-619.
- Shaw, B. A., C. Aylott, P. O'Hara et K. Brimble. 2003. « The role of residual stress on the fatigue strength of high performance gearing ». In *International Conference on Fatigue Damage of Structural Mater. Sep 22-27 2002*. Vol. 25, p. 1279-1283. Elsevier Ltd.
- Shen, Wei et James D. Lee. 1982. « Nonlinear energy method for mixed mode fracture ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 16, n° 6, p. 783-798.
- Shigley, Joseph Edward, Charles R. Mischke et Richard G. Budynas. 2004. *Mechanical engineering design*, 7th. New York: McGraw-Hill, xxv, 1030 p.
- Singh, A. 2002. « The nature of initiation and propagation S-N curves at and below the fatigue limit ». *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 25, n° 1, p. 79-89.

- Smith, R. N. L. 1988. « Solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method ». *Engineering Analysis*, vol. 5, n° 2, p. 75-80.
- Socie, Darrell. 1993. « Critical plane approaches for multiaxial fatigue damage assessment ». In *Proceedings of the Symposium on Multiaxial Fatigue, Oct 14-16 1991*. Vol. 1191, p. 7-36. ASTM, Philadelphia, PA, USA.
- Spievak, Lisa E., Paul A. Wawrzynek, Anthony R. Ingraffea et David G. Lewicki. 2001. « Simulating fatigue crack growth in spiral bevel gears ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68, n° 1, p. 53-76.
- Srinivas, V. et P. Vasudevan. 1993. « Experimental observations on mixed mode fatigue crack propagation ». *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 56, n° 3, p. 319-329.
- Stroud, A. H. et Don Secrest. 1966. *Gaussian quadrature formulas*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Suresh, S. 1998. *Fatigue of materials*, 2nd. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, xxi, 679 p.
- Susmel, Luca. 2007. « The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue ». *Engineering fracture Mechanics*, doi:10.1016/j.engfracmech.2006.12.004.
- Tada, Hiroshi, P. C. Paris et George Rankin Irwin. 2000. *The stress analysis of cracks handbook*, 3rd. New York: ASME Press, xx, 677 p.
- Tan, C. L. et X. Wang. 2003. « The use of quarter-point crack-tip elements for T-stress determination in boundary element method analysis ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, n° 15, p. 2247-2252.
- Tanaka, Keisuke. 1974. « Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 6, n° 3, p. 493-507.
- Taylor, D. 2007. « The theory of critical distances ». *Engineering Fracture Mechanics*, doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.04.007.
- Ural, Ani, Gerd Heber, Paul A. Wawrzynek, Anthony R. Ingraffea, David G. Lewicki et Joaquim B. C. Neto. 2005. « Three-dimensional, parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 72, n° 8, p. 1148-1170.
- Wang, Ying-Yu et Wei-Xing Yao. 2004. « Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria ». *International Journal of Fatigue*, vol. 26, n° 1, p. 17-25.

- Woo, C. W., Y. H. Wang et Y. K. Cheung. 1989. « Mixed mode problems for the cracks emanating from a circular hole in a finite plate ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 32, n° 2, p. 279-288.
- Yan, Xiang-Qiao. 2005. « Effective boundary element method for analysis of crack problems in a plane elastic plate ». *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, vol. 26, n° 6, p. 814-822.
- You, Bong-Ryul et Soon-Bok Lee. 1996. « Critical review on multiaxial fatigue assessments of metals ». *International Journal of Fatigue*, vol. 18, n° 4, p. 235-244.
- Zhang, X. B., S. Ma, N. Recho et J. Li. 2006. « Bifurcation and propagation of a mixed-mode crack in a ductile material ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, n° 13, p. 1925-1939.
- Zhao, Yishu. 1987. « Griffith's criterion for mixed mode crack propagation ». *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 26, n° 5, p. 683-689.