

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
Ph.D.

PAR  
ATA, Riadh

DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES PARTICULAIRES POUR LA RÉOLUTION  
DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

MONTRÉAL, LE 26 OCTOBRE 2007

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Azzeddine Soulaïmani, directeur de thèse  
Département de génie mécanique à l'école de technologie supérieure

M. Francisco Chinesta, codirecteur  
Laboratoire de mécanique de structure et des procédés (LMSP)- École Nationale Supérieure des Arts et Métiers de Paris (France).

M. Saad Bennis, président du jury  
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

M. Georges W. Tchamen, examinateur externe  
Département hydraulique et ouvrages civils, Hydro-Québec

M. Christian Masson, examinateur  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 20 NOVEMBRE 2007

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES PARTICULAIRES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

ATA, Riadh

## SOMMAIRE

Ce travail vise à développer des approches particulières dans le but de simuler les écoulements à surface libre. Celles-ci s'inspirent des méthodes sans maillages, méthodes apparues durant ces deux dernières décennies, et présentant des avantages par rapport aux approches numériques standards. La première partie de la thèse est consacrée à présenter cette famille de méthodes, dont quelques unes des plus connues sont détaillées. Les principaux avantages de ces méthodes ainsi que les plus importants défis à leur rencontre seront énumérés.

Par la suite, la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est utilisée pour simuler les écoulements à surface libre en utilisant le système de Saint-Venant homogène. Une étude mathématique variationnelle révèle que cette méthode aboutit à une formulation symétrique et donc numériquement instable. Le schéma obtenu est stabilisé par un décentrage (upwinding) qui consiste à introduire une viscosité artificielle. L'expression de cette viscosité est obtenue par une analogie avec les solveurs de Riemann. Cette technique de stabilisation conduit à des résultats probants où les chocs sont bien captés. Toutefois, un effet de lissage est observé au niveau des discontinuités probablement dû à l'absence de technique de type MUSCL dans le décentrage introduit. La méthode SPH, comme la majorité des méthodes sans maillage, possède une fonction de forme non-interpolante rendant difficile l'imposition des conditions aux limites. Ce problème est surmonté en adoptant une interpolation de type élément naturel. Une nouvelle méthode de type volumes finis a été présentée : *Méthode des Volumes Naturels* : MVN. Cette méthode s'inspire de l'application de la méthode des éléments naturels en formulation Lagrangienne particulière. Les flux sont évalués sur les cellules de Voronoï en utilisant la méthode des éléments naturels. Le schéma obtenu est un schéma centré donc instable. La même procédure de stabilisation adoptée pour la méthode SPH a été appliquée pour la MVN.

La MVN montre les mêmes avantages que la méthode SPH lorsqu'elle est appliquée en formulation Lagrangienne. De plus, le caractère interpolant de la fonction de forme de type éléments naturels, permet aisément d'imposer des conditions aux frontières de type Dirichlet. L'application de la MVN dans le cas des équations de Saint-Venant homogènes et ensuite non-homogènes (avec termes source) montre un bon potentiel de cette nouvelle méthode. Le terme source de type géométrique disparaît dans la formulation de type MVN Lagrangienne et les cas avec bathymétrie variable sont traités exactement comme les cas

à bathymétrie nulle. Ainsi la profondeur d'eau est remplacée par le niveau de la surface libre. Le schéma obtenu vérifie la z-propriété et la C-propriété.



## DEVELOPMENT OF PARTICLE METHODS FOR THE RESOLUTION OF FREE SURFACE FLOWS

ATA, Riadh

### ABSTRACT

This work aims to develop new approaches of particulaire type in order to simulate free surface flows. These approaches are inspired from the meshfree methods which are a family of methods that appeared in the last two decades and which reveals some advantages compared to standard numerical methods. The first part of this report deals with the family of meshfree methods. An exhaustive presentation of such methods is achieved and some of them are detailed. The main advantages and principal challenges of these methods are listed and discussed.

In the next part, the SPH method (smoothed Particle Hydrodynamics) is used to simulate some inviscid free surface flows using the Saint Venant equations (or shallow water equations) without source terms. The mathematical study fulfilled in this chapter shows that the classic scheme of the SPH method can be obtained using a variationnal formulation and by the mass-matrix lumping. The final scheme is a centered one and a stabilization technique is necessary. The upwinding of the final scheme is achieved by introducing an artificial viscosity obtained by an analogy with Riemann solvers. The stabilisation leads to accurate results and oscillations in the vicinity of the solution discontinuities are damped. The shocks are well captured, however a slight diffusive effect is observed which is probably caused by the absence of MUSCL-type technique in the new artificial viscosity that we introduced in the scheme. The SPH method, as well as the majority of meshfree techniques, suffers from the hardness of the imposition of boundary conditions, due to the non-interpolant character of its shape function. This problem is discussed and solved with natural elements-type interpolation method.

A natural elements particle technique is introduced and applied to shallow water equations. We describe this technique as *The natural volumes method (NVM)* by analogy with the finite volume method. In fact, the NVM consists on a flux computation over Voronoï cells using the natural element interpolation. A Lagrangian particulaire implementation of the NVM is achieved in the case of shallow water equations in presence or not of source terms. The obtained scheme is, as in the case of SPH method, a centered one. Therefore, the same stabilisation technique is adapted for the NVM and an artificial viscosity is introduced to upwind this scheme. This technique gives suitable results where shocks are well captured. Furthermore, the NVM presents the easiness of imposing Dirichlet boundary conditions, which is an important advantage compared to other meshfree techniques.

The last part of this work deals with the introduction of source terms. Only the geometrical term is taken into consideration. The bathymetry of the channel is, consequently, introduced in the formulation and a similar scheme, as in the case of the flat bottom, is obtained. The water depth is replaced by the water level. The obtained scheme keeps the same shape and the same mathematical characteristics as the one of the flat bottom case. The scheme is found to verify both the z-property and the C-property. Some benchmark tests are presented in the end of this chapter.

## REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères au professeur Azzeddine Soulaïmani, pour avoir encadrer cette thèse, pour son grand savoir et son immense savoir faire aussi bien mathématique, que numérique et physique ; mais aussi pour toutes ses qualités humaines. Toutes ces années que j'ai passées sous sa supervision m'ont fait découvrir un grand homme de science, rigoureux et enthousiaste. Merci pour avoir suscité en moi la passion de la recherche.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance au professeur Francisco Chinesta, pour m'avoir accepté dans son laboratoire à l'ENSAM de Paris, pour avoir mis à ma disposition tous ses moyens aussi bien matériels qu'humains, mais surtout pour avoir partagé avec moi tout son talent de physicien et sa chaleur humaine.

Ensuite, je remercie profondément tous mes collègues qui m'ont côtoyé durant toutes ces années et avec qui j'ai partagé tout, ou presque tout. Amine, Riadh, Jaques, Simon, merci d'avoir été là.

Je ne peux pas me permettre d'oublier de remercier mon ami et frère Adnène à qui je dois beaucoup. Adnène, les mots n'exprimeront jamais ce que tu représentes pour moi.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à ceux qui m'ont aidé et côtoyé au LMSP à Paris, et en l'occurrence, Lounes dont l'aide a été inestimable. Djamel, Stéphane, Jaques, Claude, Stephania, Cristophe, merci à vous tous.

Je dédie ce travail à mes parents à qui je dois tout, à mes frères et sœurs. Toute ma famille ainsi que ma belle famille m'ont toujours prodigué de leurs encouragements pour arriver à bout de cette thèse de Doctorat. À la famille Ata, à la famille Sassi, Merci beaucoup.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE.....	i
ABSTRACT.....	iii
REMERCIEMENTS.....	v
TABLE DES MATIÈRES .....	vii
LISTE DES FIGURES .....	xi
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES .....	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
1.1 Cinématique des écoulements en mécanique des fluides .....	1
1.2 Classification des approches numériques.....	3
1.2.1 La méthode des différences finis (MDF) et la méthode des volumes finis (MVF).....	3
1.2.2 Les méthodes variationnelles.....	4
1.2.3 Les méthodes spectrales .....	5
1.3 Les méthodes sans-maillage (Meshfree ou Meshless).....	5
1.4 Présentation de la thèse .....	6
1.4.1 Motivation et mise en situation .....	6
1.4.2 Objectif de la thèse.....	7
1.4.3 Plan de la thèse .....	7
CHAPITRE 2 LES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE .....	10
2.1 Introduction aux écoulements à surface libre.....	10
2.1.1 Généralités .....	10
2.2 Les équations de Saint-Venant ou équations d'eau peu profonde .....	11
2.2.1 Équation de continuité .....	11
2.2.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement .....	14
2.2.3 Propriétés des équations de Saint-Venant .....	17
2.2.4 Solutions des équations de Saint-Venant dans le cas de bris de barrage en 1D .....	19
CHAPITRE 3 LES MÉTHODES SANS MAILLAGE .....	21

3.1	Pourquoi "les méthodes sans maillage" .....	21
3.2	Caractérisation et classification des MMs .....	22
3.2.1	Généralités .....	22
3.2.2	La méthode des résidus pondérés .....	22
3.2.3	Les formulations variationnelles faibles .....	23
3.2.4	La notion de consistance .....	24
3.2.5	La partition de l'unité (PU) .....	25
3.3	Classification des MMs .....	26
3.4	Construction d'une PU .....	26
3.4.1	Base polynômiale complète .....	26
3.4.2	Moving Least Squares (MLS) .....	27
3.4.2.1	Relation avec les séries de Taylor .....	31
3.4.2.2	Relation avec les fonctions de Shepard .....	31
3.4.2.3	Relation avec d'autres schémas de moindres carrés .....	32
3.4.3	La technique RKPM (Reproducing Kernel Particle Method) .....	34
3.4.4	Fonctions Poids (Noyau ou Fenêtre) .....	39
3.5	Difficultés (problèmes) des méthodes sans maillage .....	42
3.5.1	L'imposition des conditions aux limites .....	42
3.5.1.1	Les multiplicateurs de Lagrange .....	42
3.5.1.2	La méthode des pénalités .....	43
3.5.1.3	Le couplage avec les éléments finis .....	43
3.5.1.4	La méthode de transformation .....	44
3.5.1.5	La méthode de collocation .....	45
3.5.2	L'intégration numérique .....	46
3.5.2.1	L'intégration avec un maillage de fond ou une structure de cellules .....	46
3.5.2.2	L'intégration nodale directe .....	47
3.5.2.3	L'intégration sur les sous-domaines ou sur les intersections des sous-domaines. ....	48
3.5.3	La distribution des particules .....	48
3.5.4	La stabilisation .....	49
3.6	Conclusions .....	50
CHAPITRE 4 LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS NATURELS (NEM) .....		52
4.1	Introduction .....	52
4.2	Les interpolants de type voisins naturels .....	52
4.2.1	Le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay .....	52
4.2.2	Les interpolants de type Sibsonien .....	53
4.2.3	Les interpolation non-Sibsoniennes ou de Laplace .....	55
4.3	Propriétés .....	57
4.3.1	Interpolation nodale .....	57
4.3.2	La partition de l'unité .....	57

4.3.3	La consistance linéaire .....	58
4.3.4	Linéarité stricte de l'approximation sur les bords .....	58
4.3.5	Nature du support .....	58
4.3.6	Principales différences .....	58
4.4	Imposition des conditions aux frontières .....	59
4.4.1	Traitement des domaines convexes .....	60
4.4.2	Traitement des domaines non-convexes .....	61
4.4.2.1	Les formes alpha (alpha shapes).....	61
4.5	Méthode des éléments naturels contraints ou C-NEM .....	63
4.5.1	Diagramme de Voronoï contraint.....	63
4.5.2	Interpolation de type C-NEM .....	64
4.6	L'interpolant NEM de classe $C^k$ .....	65
4.7	Algorithmes de calcul des fonctions de forme de la C-NEM.....	68
4.8	La méthode NEM et l'adaptativité ou le raffinement.....	71
4.8.1	Les indicateurs d'erreurs .....	71
4.8.1.1	Premier indicateur d'erreur .....	71
4.8.1.2	Deuxième indicateur d'erreur .....	72
4.8.2	Indexes de précision des calculs (computing effectivity indexes).....	72
4.8.3	Stratégie de raffinement .....	74
4.9	Conclusion.....	76
CHAPITRE 5 LA MÉTHODE SPH (SMOOTHED PARTICLE HYDRO- DYNAMICS) APPLIQUÉE AUX ÉCOULEMENTS À SUR- FACE LIBRE .....		78
5.1	État de l'art .....	79
5.2	Présentation de la méthode SPH.....	81
5.3	Implémentation dans le cas des équations de Saint-Venant.....	86
5.4	Une formulation variationnelle stabilisée avec l'approximation SPH....	87
5.4.1	Formulation variationnelle.....	87
5.4.2	Stabilisation .....	90
5.5	Traitement des conditions aux frontières .....	93
5.5.1	Méthode des particules fantômes.....	94
5.5.2	Méthode de symétrisation .....	94
5.6	Intégration dans le temps.....	96
5.7	Algorithme global.....	96
5.7.1	Recherche de voisins .....	96
5.7.2	Algorithme global de l'approche .....	97
5.8	Résultats.....	98
5.8.1	Problème de bris de barrage en 1D .....	98
5.8.2	Problème de bris de barrage en 2D .....	101
5.8.3	Bris de barrage cylindrique .....	107

5.9	Discussion et conclusions .....	108
<b>CHAPITRE 6 LA MÉTHODE DES VOLUMES NATURELS (MVN) : IM- PLÉMENTATION ET RÉSULTATS .....</b>		
6.1	Introduction.....	110
6.2	Application de la méthode NEM aux équations de Saint-Venant.....	111
6.2.1	Conservation de la masse.....	112
6.2.2	Conservation de la quantité de mouvement.....	115
6.2.3	Consistance et stabilisation .....	119
6.3	Conditions aux limites .....	123
6.4	Discrétisation dans le temps .....	125
6.5	Adaptativité ou le raffinement nodal.....	126
6.6	Algorithme général de la procédure .....	128
6.7	Mesure de performance du code.....	128
6.8	Résultats et applications .....	129
6.8.1	Problème de bris de barrage en 2D dans un canal rectangulaire.....	130
6.8.2	Canal rectangulaire à section variable : canal convergent et divergent..	133
6.8.3	Canal avec une discontinuité de section .....	135
6.8.4	Problème de bris de barrage cylindrique .....	138
6.8.5	Problème de canal rectangulaire avec une contraction soudaine.....	140
6.9	Conclusions.....	141
<b>CHAPITRE 7 INTRODUCTION DES TERMES SOURCES .....</b>		
7.1	Introduction.....	148
7.2	Traitement numérique des termes sources .....	150
7.2.1	Méthode des volumes naturels .....	152
7.2.2	Approximation du frottement du lit .....	153
7.3	Applications numériques .....	154
7.3.1	Écoulement stationnaire sur une bathymétrie plate avec une bosse .....	154
7.3.1.1	Écoulement trans-critique sans choc.....	156
7.3.2	Test de stagnation .....	157
7.4	Synthèse et principales contributions.....	161
7.5	Perspectives et travaux futurs.....	166



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Les trois descriptions cinématiques du mouvement : Lagrangienne, Eulerienne et ALE - d'après Donéa et al. [4]..... 2
Figure 2	Hypothèses pour la dérivation des équations de Saint-Venant ..... 12
Figure 3	Conditions initiales du problème de bris de barrage en 1D. .... 19
Figure 4	La partition de l'unité et ses dérivées avec la méthode MLS-d'après Fries et al. [146] ..... 30
Figure 5	Les différents schémas de l'approximation MLS - d'après Fries et al. [146] ..... 33
Figure 6	Les différents noyaux ou fonctions poids - D'après Fries et al. [146] ..... 41
Figure 7	Combinaison MM-MEF pour le traitement des conditions aux frontières - D'après Huerta et al. [133]..... 44
Figure 8	Intégration avec un maillage de fond ou une structure de cellule - D'après Fries et al. [146]..... 47
Figure 9	Intégration sur des sous-domaines locaux ou sur leur intersection - D'après [146] ..... 48
Figure 10	Mapping de situations d'intégration dans le but d'appliquer les techniques standards d'intégration - D'après [149]..... 49
Figure 11	Triangulation de Delaunay et son diagramme de Voronoï correspondant ..... 54
Figure 12	Interpolation de type sibsonien vs celle de type Laplace-figure d'après [105]..... 55
Figure 13	Le support de la fonction d'interpolation de type NEM vs le support des méthodes MLS et EFG - figure d'après [105] ..... 59

Figure 14	Contribution des cellules de Voronoï des nœuds de frontière dans le cas de domaine convexe et non convexe.....	60
Figure 15	Evolution de la famille des $\alpha$ -shapes d'un nuage de points représentant une mâchoire inférieure. Formes $S_0$ (a), $S_{1.0}$ (b), $S_{1.5}$ (c), $S_{3.5}$ (d) et $S_\infty$ (e). D'après Martinez et al.[46] .....	62
Figure 16	La méthode des formes alpha (alpha shapes) : restriction des voisins naturels (gauche). Inefficacité de la méthode pour les cas fortement non convexes (droite). D'après [49].....	63
Figure 17	Les fonctions de forme de type Sibson et Laplace : (a) distribution nodale ; (b) fonction de forme de Sibson et (c) fonction de forme no-sibsonienne ou de Laplace-D'après [48] .....	69
Figure 18	Étapes de calcul de la fonction de forme de type NEM : (a) triangles et cercles de Delaunay, (b) Élimination des arêtes intérieurs, (c) Joindre le point $P$ aux sommets qui l'entourent (d) Fonction de forme de Sibson et (d) Fonction de forme de Laplace. ....	70
Figure 19	Procédures de raffinement : (a) ancienne approche et (b) approche adoptée dans [48].....	75
Figure 20	Exemple d'adaptativité dans le cas d'un problème d'élastostatique d'après Yvonnet [48].....	76
Figure 21	Méthode des particules fantômes (en haut) et de symétrisation (en bas). ..	95
Figure 22	L'algorithme Octree pour la recherche de voisins. ....	97
Figure 23	Conditions initiales pour le problème de bris de barrage en 1D. ....	99
Figure 24	Comparaison entre les effets de la nouvelle et de l'ancienne viscosités artificielles - la figure de droite est un zoom de celle de gauche .....	99
Figure 25	Effet de la nouvelle viscosité dans le cas monodimensionnel ( $l = 2\Delta x$ ). Haut : pas de correction sur le noyau, milieu : correction partielle, bas : correction complète. Les figures de droite sont des zoom de celles de gauche. ....	101
Figure 26	Effet de la nouvelle viscosité dans le cas monodimensionnel ( $l = 3\Delta x$ ). Haut : pas de correction sur le noyau, milieu : correction	

	partielle, bas : correction complète. Les figures de droite sont des zoom de celles de gauche. ....	102
Figure 27	Test de convergence : effet du nombre de particules. Cas où le nombre de particule entre 50 et 300. ....	103
Figure 28	Test de convergence : effet du nombre de particules. Cas où le nombre de particule entre 500 et 2000. ....	103
Figure 29	Test de convergence : évolution de l'erreur avec le nombre de particules. ....	104
Figure 30	Problème de bris de barrage en 2D. Haut : profondeur d'eau (gauche) et vitesse (droite) avec l'ancienne viscosité. Bas : profondeur d'eau (gauche) et vitesse (droite) avec la nouvelle viscosité. ....	105
Figure 31	Problème de bris de barrage cylindrique : conditions initiales et évolutions de la profondeur dans le temps ( $t=0.4s$ , $t=1.5s$ , $t=2.5s$ et $t=3.5s$ ). ....	106
Figure 32	Problème de barrage cylindrique, comparaison avec la méthode des volumes finis. ....	108
Figure 33	Hypothèses et notations pour les équations de Saint-Venants en 2D. ....	112
Figure 34	Stratégie de conservation de la masse pour la MVN : ( $\circ$ : nœud, $\square$ : sommet de la cellule de "masse", $\rightarrow$ : vitesse). Haut : décomposition du domaine à $t = t^n$ . Bas à droite : cellule de Voronoï réelle à $t = t^{n+1}$ utilisée pour la conservation de la quantité de mouvement. Bas à gauche : Les cellules de masses utilisées pour la conservation de la masse et le calcul de la profondeur d'eau à $t = t^{n+1}$ . ....	113
Figure 35	Cellule de Voronoï fréquemment rencontrée dans les simulations Lagrangiennes. L'approximation du flux (utilisant l'équation 6.6) sur l'arête relative au voisin 2 risque de ne pas être précise. ....	118
Figure 36	Modes parasites aux voisinages des discontinuités $\Rightarrow$ besoin de stabilisation. ....	121
Figure 37	Traitement de la frontière : une particule de la frontière est fixée et ses paramètres physiques ( $\hat{\mathbf{u}}$ , $\mathbf{u}$ and $h$ ) sont interpolés à partir de ceux des particules de frontière au temps $t^{n+1}$ . ....	124
Figure 38	Algorithme global de la méthode des volumes naturels. ....	129

Figure 39	Conditions initiales pour le problème de bris barrage standard. ....	130
Figure 40	Profondeur d'eau (haut) et vitesse (bas) à $t = 30$ s pour le problème de bris barrage standard. ....	131
Figure 41	Profondeur d'eau pour le problème de bris de barrage dans un canal rectangulaire avec 30 000 particules. ....	132
Figure 42	Comparison avec la solution analytique [78]. ....	133
Figure 43	Conditions initiales et géométrie pour les cas de canal convergent et divergent. ....	134
Figure 44	Profondeur d'eau pour le cas d'un canal divergent à $t=30s$ . ....	135
Figure 45	Vitesse dans le canal divergent au temps $t=15s$ (haut) et zoom (bas). ....	136
Figure 46	Profondeur d'eau pour le cas d'un canal convergent à $t=30s$ . ....	137
Figure 47	Vitesse dans le canal divergent au temps $t=15s$ (haut) et zoom (bas). ....	138
Figure 48	Géométrie et lignes de contour pour le canal rectangulaire avec une légère contraction. ....	139
Figure 49	Profondeur d'eau pour le cas d'un canal rectangulaire avec une légère contraction à $t=5s$ . À Noter la naissance d'une vague lorsque le front arrive à la contraction. ....	139
Figure 50	Le problème de bris de barrage cylindrique - maillage structuré. Distribution nodale et maillage initial (haut droite et gauche), le contour de la profondeur d'eau et la distribution de vitesse (milieu droite et gauche) et une vue 3D et une coupe de la profondeur d'eau (bas gauche et droite). ....	143
Figure 51	Le problème de bris de barrage cylindrique - maillage adapté. Distribution nodale et maillage initial (haut droite et gauche), le contour de la profondeur d'eau et la distribution de vitesse (milieu droite et gauche) et une vue 3D et une coupe de la profondeur d'eau (bas gauche et droite). ....	144
Figure 52	Conditions initiales pour le problème de canal rectangulaire avec une contraction brusque. ....	145

Figure 53	Canal rectangulaire avec une contraction brusque : distribution de la vitesse (gauche) et les lignes de contour de la profondeur d'eau (droite). .....	146
Figure 54	Profondeur d'eau pour le canal rectangulaire avec une contraction soudaine à $t=5s$ . .....	147
Figure 55	Notations pour les équations de Saint-Venant non-homogènes. ....	154
Figure 56	Bathymétrie du test de validation avec fond plat en présence d'une bosse parabolique. ....	155
Figure 57	Bathymétrie plate avec une bosse - premier test de stagnation. ....	156
Figure 58	Cas de stagnation - Bathymétrie du canal. ....	159
Figure 59	Test de stagnation - surface libre à $t= 200$ s. ....	160
Figure 60	Test de stagnation - Composante axiale de la vitesse à $t= 200$ s. ....	160

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

MM	Meshfree method (singulier)
MMs	Meshfree methods (pluriel)
MEF	Méthode des Éléments finis
MVF	Méthodes de volumes finis
PU	Partition de l'unité
CL	Conditions aux limites
EDP	Équation aux dérivées partielles
GWF	Global Weak Form
LWF	Local Weak Form
GUSWF	Global Unsymmetric Weak Form
GSWF	Global Symmetric Weak Form
LUSWF	Local Unsymmetric Weak Form
LSWF	Local Symmetric Weak Form
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
NEM	Natural Element Method
NVM	Natural volume method
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	Vecteurs des coordonnées spatiales
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse
$w$	Fonction poids ou fonction test
$u^h$	Approximation de la fonction $u$
$\mathbf{u}$	Vecteur des valeurs nodales de $u$
$h$	Profondeur de l'eau

$l$	Longueur de lissage
$\nabla$	Gradient spatial
$\nabla_i$	Gradient spatial par rapport aux coordonnées de la particule $i$
$\mathbf{p}$	Pression
$\rho$	Masse volumique
$L$	Opérateur différentiel quelconque
$\epsilon$	Erreur infinitésimale
$\Phi$	Fonction de Forme ou d'interpolation
$\Omega$	Domaine d'étude total
$\Omega_s$	Domaine d'étude local inclus dans $\Omega$
$\Gamma$	Frontière du domaine d'étude global
$\Gamma_s$	Frontière du domaine d'étude local

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION GÉNÉRALE

#### 1.1 Cinématique des écoulements en mécanique des fluides

Les problèmes à frontières mobiles ou libres sont très courants dans la nature et dans le domaine du génie. Les difficultés qui surgissent de ces applications sont de taille, aussi bien de point de vue mathématique que numérique. Mathématiquement, la variation du domaine d'étude au cours du temps ne permet pas de bien définir les paramètres physiques qui décrivent le problème. Du point de vue numérique, on doit identifier les parties inconnues des frontières et résoudre le fort couplage entre le mouvement des frontières et la cinématique du milieu continu [9].

Les méthodes numériques qui servent à résoudre les problèmes à frontières mobiles sont classifiées en trois catégories selon le type de la description cinématique (voir figure 1) : les approches Lagrangiennes, Euleriennes et les approches mixtes Eulerienne-Lagrangiennes (ALE : Arbitrary Lagrangian-Eulerian [4]). Dans le premier groupe de méthodes, les particules fluides se déplacent avec le champ de vitesse, on peut citer dans ce cadre la méthode "Segments de ligne" (Line segments) utilisée par Nichols en 1971 et la méthode "Marker Particles" introduite par Harlow et Walsh en 1965. Plus récemment, la méthode des éléments finis a été utilisée en formulation purement Lagrangienne pour simuler les écoulements à surface libre visqueux qui sont généralement à faible nombre de Reynolds [104, 116, 79]. Ces méthodes sont relativement précises et s'adaptent très bien avec la nature des écoulements étudiés et présentent la facilité de localiser automatiquement la surface libre. Cependant, en plus de leur instabilité, un remaillage fréquent est nécessaire pour suivre le comportement du fluide lorsque la frontière de celui-ci bouge. De nos jours, avec le développement des outils informatiques et l'augmentation exponentielle de la puissance de calcul, le problème de remaillage systématique à chaque pas de temps commence à être surmonté.



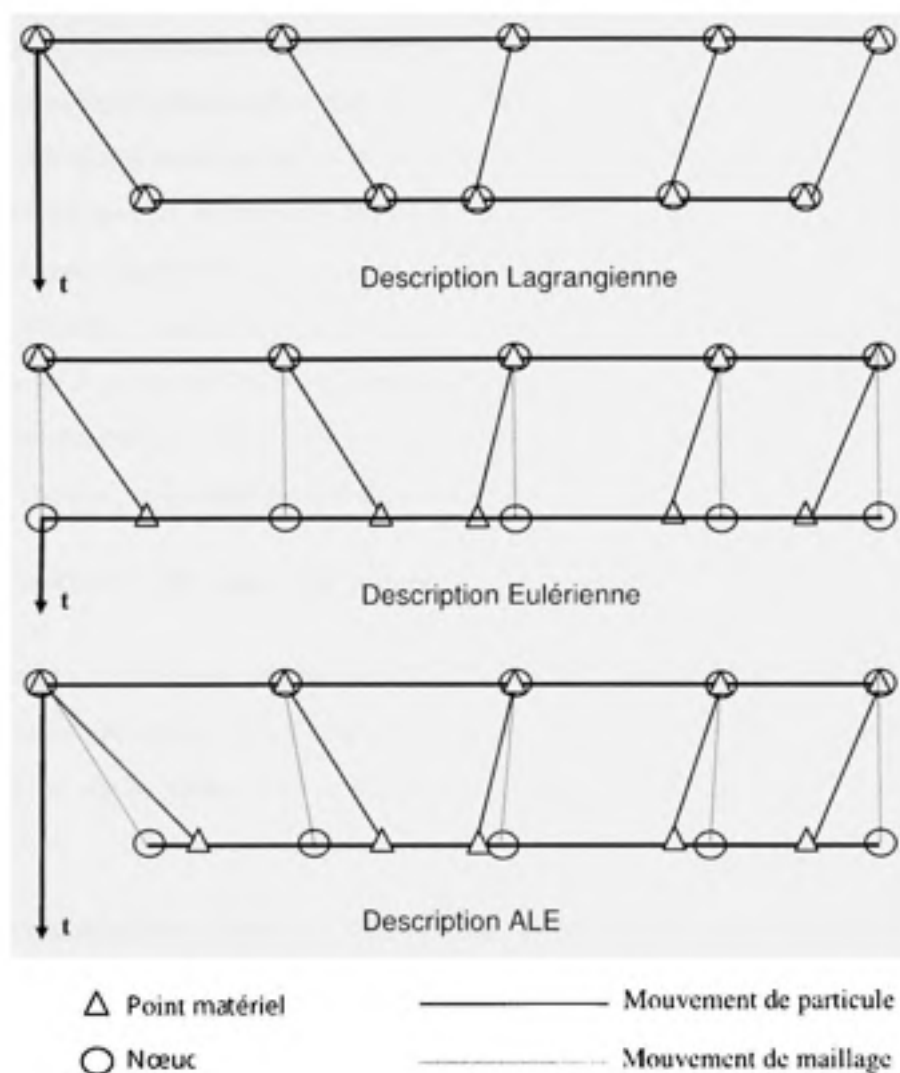


Figure 1 Les trois descriptions cinématiques du mouvement : Lagrangienne, Eulerienne et ALE - d'après Donéa et al. [4].

Dans le cas des méthodes à description Eulerienne, les positions des points de la frontière sont localisées dans un maillage fixe. Les équations qui régissent l'écoulement sont résolues dans un domaine plus grand que le domaine réel et l'interface entre les endroits secs et mouillés doit être détectée. Toutefois, la détection de cette interface nécessite un raffinement de maille afin d'obtenir une précision suffisante. Ce raffinement est une tâche complexe surtout en deux et en trois dimensions.

Les méthodes mixtes (ALE) ont été introduites pour combiner les avantages des deux types d'approches citées précédemment [9]. Le domaine d'étude est complètement occupé par le fluide et donc par le maillage qui peut bouger avec son propre champ de vitesse. Au niveau de la frontière mobile, les vitesses des points du maillage sont reliées avec les vitesses du fluide. Ce type d'approches est adéquat pour les écoulements à un seul front [152]. En présence de plusieurs fronts, il serait difficile d'appliquer une telle approche. Il est convenu, ainsi, que la description ALE est incapable de traiter certains écoulements complexes qui présentent des surfaces libres de formes complexes [52]. Pour de plus amples détails sur cette description, nous référons à la thèse de Soulaïmani [8].

## **1.2 Classification des approches numériques**

La répartition évoquée précédemment se base sur la description cinématique et sur le mouvement relatif matière/maillage. Une autre classification des approches numériques utilisées se base sur la méthode de discrétisation. Ainsi, on peut différencier trois familles d'approches

### **1.2.1 La méthode des différences finis (MDF) et la méthode des volumes finis (MVF)**

La MDF consiste à se donner un certain nombre de points dans l'espace et/ou dans le temps. Les opérateurs différentiels sont discrétisés en utilisant des quotients inspirés des développements en séries de Taylor. Du fait que cette méthode requiert une discrétisation structurée, la MDF n'est pas adaptée à la simulation des écoulements à surface libre qui, à l'origine, sont physiquement complexes et souvent définis sur des domaines à géométries compliquées. La MVF, quand à elle, est souvent utilisée pour les lois de conservation en mécanique des fluides. L'idée principale se base sur le calcul des flux entrants et sortants sur les bords des "volumes de contrôles". À la base, la méthode des volumes finis a été développée pour traiter les équations d'Euler, qui sont intimement similaires à ceux de Saint-Venant. Le succès qu'a trouvé la MVF en hydraulique revient en grande partie à l'esprit de conservation locale intrinsèquement existant dans la formulation de la méthode. De plus,

la MVF présente l'avantage de bien s'adapter aux discontinuités fréquemment rencontrées en aérodynamique et dans les écoulements à surface libre et surtout dans la simulation du problème de bris de barrage. C'est ainsi que la MVF est actuellement l'approche la plus populaire aussi bien pour simuler les écoulements à surface libre que la dynamique des gaz.

### 1.2.2 Les méthodes variationnelles

La méthode des éléments finis : l'équation différentielle fermée par les conditions aux limites est remplacée par une formulation variationnelle construite dans un espace de Hilbert  $H$  bien choisi (par exemple parce qu'il y a existence et unicité de la solution dans cet espace). La discrétisation consiste à remplacer l'espace  $H$  par un sous-espace de dimension finie  $H_k$ , construit par exemple en utilisant les fonctions de base éléments finis [121]. Dans le cadre des écoulements à surface libre, l'utilisation de la MEF est liée à l'analogie entre les équations de Saint-Venant et celles de Navier-Stokes. Pour être traitées avec la MEF, les équations de Saint-Venant sont souvent écrites dans une formulation hauteur-vitesse. Ce qui n'est pas le cas lors de l'utilisation de la MVF où une formulation hauteur-débit est quasi-systématiquement utilisée. Ainsi, opter pour une formulation non-conservative, génère des difficultés pour simuler les problèmes présentant des discontinuités dans la solution (bris de barrage par exemple). De plus, les approches basées sur la MEF ne sont pas très bien adaptées au caractère conservatif des systèmes traités. Il est également difficile de garantir certaines notions de stabilité et surtout la positivité de la profondeur d'eau [35, 152, 70]. Il est à noter que ce dernier problème surgit aussi dans les approches de type volumes finis et différences finis. Néanmoins, plusieurs applications logicielles, dont certains très populaires commercialement, sont formulées par la MEF. Le logiciel TELEMAC2D en est un exemple [80].

### 1.2.3 Les méthodes spectrales

La famille des méthodes spectrales a été introduite en mécanique des fluides il y a une trentaine d'années par Orszag dans [135] et ce pour augmenter la précision des approches numériques de résolution des équations à dérivées partielles [27]. L'idée de base ces méthodes est de trouver une solution approchée en utilisant un développement sur un ensemble de fonctions. La famille de fonctions peut être trouvée en effectuant un développement en série de Fourier. Un choix plus direct et plus facile et qui s'est imposé ultérieurement consiste à effectuer des projections de la fonction inconnue (discrétisation dans l'espace) sur une base de polynômes orthogonaux comme les polynômes de Chebyshev et de Legendre. Ainsi, les méthodes pseudo-spectrales ont vu le jour notamment avec les travaux de Fornberg [18] et de Canuto et al. [145]. Comme on va le remarquer dans le chapitre 3, une grande majorité des méthodes sans-maillage peut être considérée comme faisant partie de la famille des méthodes spectrales.

### 1.3 Les méthodes sans-maillage (Meshfree ou Meshless)

Les techniques standards, présentées dans les paragraphes précédents, ont révélé beaucoup de potentiel pour traiter les écoulements à frontière libre et mobile [153]. Cependant, certaines difficultés aussi bien mathématiques que numériques subsistent toujours. Avec le développement des nouvelles techniques numériques, et en l'occurrence les méthodes dites "sans-maillage" (ou Meshfree methods), plusieurs horizons se sont ouverts et les prémices d'une nouvelle ère dans le domaine numérique sont apparues. Cette famille de méthodes a fait ses preuves dans plusieurs domaines (explosions, chocs à grandes vitesses, etc...) et elle a montré beaucoup de potentiels dans d'autres disciplines comme les problèmes multiphysiques et la micro et la nano-mécanique. Au lieu de travailler sur un maillage et une connectivité, les "meshfree methods" utilisent un ensemble discret de points plus-ou-moins aléatoirement distribués dans le domaine et sur sa frontière.

Ainsi, à la fin des années soixante-dix, une nouvelle famille de méthodes numériques a fait son apparition. On parle ainsi de "meshfree methods". (Dans ce qui suit, on va désigner par MM toute la famille des meshfree methods). Le développement de la méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) par Lucy [95] pour la simulation des phénomènes de fission astronomique, a débuté l'ère des MM dans l'univers des calculs numériques. La méthode SPH est purement Lagrangienne. Outre les problèmes astrophysiques [75], les problèmes de propagation de fissure [19], de grandes déformations et de plasticité en mécanique du solide, la méthode SPH a été appliquée en mécanique des fluides pour plusieurs applications allant des écoulements turbulents [62] aux écoulements à surface libre [12], [76]. Les MM sont devenues des approches de plus en plus utilisées pour traiter les problèmes à grande distorsion géométrique et les problèmes dont les domaines sont discontinus ou fragmentés. En plus des avantages évoqués, l'avantage principal de ces approches est essentiellement la facilité du raffinement adaptatif. Le prix à payer, en contre partie, est la lourdeur des temps de calcul qui restent nettement supérieurs à ceux des approches conventionnelles [146]. De plus, des problèmes surgissent dépendamment du domaine d'application physique. Les deux plus grands handicaps qui sont fréquemment rencontrés sont la stabilité (surtout en mécanique des fluides pour les termes convectifs et en présence de chocs) et le traitement des conditions aux limites. Ces points seront discutés ultérieurement dans le chapitre 3.

## **1.4 Présentation de la thèse**

### **1.4.1 Motivation et mise en situation**

Ce travail qui constitue la thèse de doctorat est une continuation et une généralisation du projet de maîtrise [12]. Les objectifs tracés pour ce travail consistent en l'élaboration d'une nouvelle approche numérique capable de résoudre et simuler les écoulements à surface libre. Ces écoulements naturels qui englobent les rivières et les débordements de leurs rives, les inondations et les phénomènes qui y sont liés, les vagues et leurs écrasements sur

les rivages etc. L'approche qu'on présentera dans ce travail de recherche aura comme axe principal les méthodes MM sous une description Lagrangienne particulière. Ces dernières sont encore dans leur état de "développement", mais prometteuses surtout avec leur indépendance relative du maillage ce qui promet plus ou moins de facilité dans le traitement des problèmes à frontières mobiles.

### **1.4.2 Objectif de la thèse**

Ce travail a pour objectif principal le développement de méthodes Lagrangiennes pour la simulation d'écoulements à surface libre. La famille des méthodes sans maillage sera explorée et quelques unes de ces méthodes seront utilisées pour arriver à cette fin. Les différents aspects mathématiques et numériques de ces méthodes seront explorés, étudiés et adaptés aux écoulements à surface libre. Les systèmes de Saint-Venant homogène et non-homogène formeront les modèles mathématiques de ces simulations. La présence de discontinuités dans la plus part des solutions de ces systèmes implique une attention particulière dans la capture des chocs. Le caractère particulière Lagrangien des simulations envisagées, est synonyme d'une bonne détection de la nature des écoulements à surface libre. Toutefois, numériquement, ce caractère induit plusieurs problèmes qui présentent de vrais défis à surmonter. De plus, l'enjeu pratique est lui aussi assez important. La simulation des phénomènes de crue, d'inondation, de transport de polluant, d'érosion,... représente un des objectifs de ce travail.

### **1.4.3 Plan de la thèse**

Ce mémoire se divise en 7 chapitres qui sont décrits dans ce qui suit :

- \* Chapitre 1-Introduction : ce chapitre introduit le lecteur dans le fond de la thèse. Une mise en situation aussi bien des approches numériques que des spécificités des écoulements à surfaces libres et à frontière mobile, est présentée.

- \* Chapitre 2- Les écoulements à surface libre : à travers ce chapitre nous avons essayé de mettre les cadres théorique, mathématique et physique des écoulements qui présentent une surface libre. Comme première étape, les équations de Saint-Venant sont obtenues par une analyse différentielle. Ensuite, une classification de ces équations et une étude de leurs propriétés sont présentées.
- \* Chapitre 3- Les méthodes sans-maillage MMs : dans ce chapitre une étude complète sur la famille des MMs est présentée. Ce chapitre formera la base de nos choix numériques présentés dans les chapitres suivants. Une mise en situation concernant les méthodes sans maillage est présentée.
- \* Chapitre 4- La méthode des éléments naturels : ce chapitre présente la méthode des éléments naturels dans sa version générale existante. Sa version de Galerkin et ses applications sont expliquées. De plus, tous les autres aspects de cette méthode sont présentés : les fonctions de formes et leurs propriétés, le traitement des conditions aux limites, le raffinement et l'algorithme de calcul.
- \* Chapitre 5- La méthode SPH et son application aux écoulements à surface libre : La méthode SPH est présentée en détail et elle est appliquée dans le cas des équations de Saint-Venant. Une grande partie de ce chapitre est consacrée à la stabilisation du schéma obtenu. Quelques applications de cette méthode dans des cas tests en 2D sont présentées en fin de ce chapitre.
- \* Chapitre 6- La méthode des volumes naturels : C'est une approche développée dans le cadre de cette thèse. Cette nouvelle approche est introduite, expliquée et appliquée aux écoulements à surface libre. Le schéma obtenu est un schéma centré symétrique et par conséquent, une technique de stabilisation est introduite dans ce schéma en le décentrant par une viscosité artificielle. La formulation finale écrite dans une description Lagrangienne est appliquée pour des cas tests en 2D.
- \* Chapitre 7- Introduction des termes sources : ce chapitre est dédié à l'introduction des termes sources dans la formulation finale obtenue dans le chapitre 6. Un premier

pas réalisé, consiste en l'introduction du terme source géométrique. Le terme de frottement n'est pas pris en compte dans ce travail.

- \* Conclusion générale : une synthèse de la thèse est présentée ainsi que les principales contributions. À la fin de ce chapitre, les perspectives et les travaux futurs sont détaillés.

À la fin de ce mémoire, les publications soumises et les sommaires de participation aux conférences et workshops effectués durant la thèse, sont présentés en annexes.



## CHAPITRE 2

### LES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

#### 2.1 Introduction aux écoulements à surface libre

##### 2.1.1 Généralités

L'étude des écoulements naturels entre dans le cadre de l'hydraulique à surface libre. Ce qui différencie cette dernière de l'hydraulique en charge est la présence d'une surface libre c'est-à-dire une surface qui est en contact direct avec l'atmosphère [20]. Ainsi le moteur de l'écoulement n'est pas le gradient de pression comme c'est le cas pour les écoulements à charge, mais tout simplement la gravité. On parle dans ce cas des écoulement gravitaires. Une caractéristique commune à ces écoulements est le fait que la profondeur d'eau est petite par rapport à la longueur d'écoulement (Longueur de la rivière ou de la conduite par exemple). La gamme des écoulements à surface libre et leurs applications comprend les rivières, les cours d'eau et les fleuves. Toutefois, elle englobe aussi les écoulements dans les conduites non pleines, comme c'est le cas dans les systèmes d'irrigation ou d'assainissement. Enfin, l'hydraulique marine est considérée comme une grande branche de l'hydraulique à surface libre. Ainsi, L'écrasement des vagues sur les plages et le dimensionnement et la simulation des écoulements dans les ports, représentent quelques unes des applications les plus intéressantes dans ce domaine. Cette section englobe aussi les écoulements en pleine mer qui ne sont plus à faibles profondeurs et dont les forces motrices sont le vent, la force de Coriolis.

Les écoulements souterrains sont aussi de type gravitaire dans le cas de nappe non-confinée. Cette famille peut être incluse dans la grande famille des écoulements à surface libre.

## 2.2 Les équations de Saint-Venant ou équations d'eau peu profonde

Le système d'équations aux dérivées partielles qui nous intéresse dans ce travail a été introduit en 1871 dans un Compte Rendu à l'Académie des Sciences rédigé par l'ingénieur des Ponts et Chaussées Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant [30]. Dans sa version initiale, le système d'équation décrivait l'écoulement dans un canal rectangulaire à fond horizontal en une dimension d'espace [35]. Ces équations découlent de l'application des lois de conservation sur un élément fluide sous l'hypothèse d'eau peu profonde. Cependant, on souligne que ces EDP peuvent être trouvées par l'adaptation des équations de Navier-Stokes en les moyennant suivant la direction verticale [78]. D'ailleurs ces deux EDP ont été étroitement liées depuis le début [35]. D'après certaines sources [72], Saint-Venant aurait été le premier (deux années avant Stokes [54]) à donner la forme correcte des équations que Navier avait introduites en 1823 [22].

Dans ce qui suit on va montrer les hypothèses et les limites de validité de ces équations, ainsi le cheminement mathématique pour l'obtention de ces EDP. Les notations suivantes vont être utilisées dans le restant de ce chapitre (figure 2) :

- $A$  : l'aire de la section du canal étudié
- $h$  : la profondeur de l'eau
- $\eta$  : l'élévation de la surface libre par rapport à un niveau de référence
- $v$  : la vitesse moyenne dans la section
- $Q$  : le débit d'eau à la section
- $b$  : la largeur de la section au niveau de la surface libre qui est supposé fixe.

### 2.2.1 Équation de continuité

La procédure de détermination des équations de continuité et de la quantité de mouvement se base sur la définition d'un volume de contrôle (voir figure 2) et de vérifier les lois de

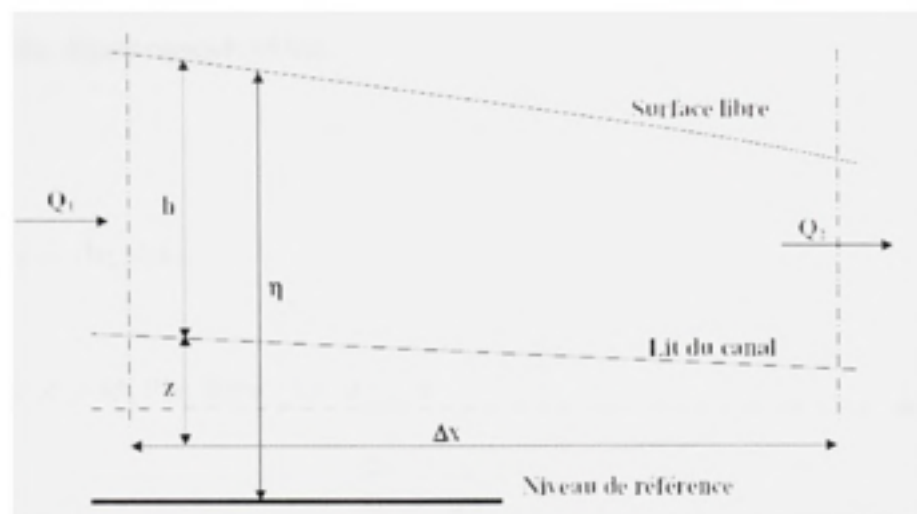


Figure 2 Hypothèses pour la dérivation des équations de Saint-Venant

conservation d'une manière explicite. Ces équations peuvent être trouvées directement en appliquant le théorème de transport de Reynolds.

En supposant qu'il n'y a aucun débit latéral (entrant ou sortant), le débit à la sortie  $Q_2$  s'écrit :

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \quad (2.1)$$

La dérivation est partielle puisque la décharge  $Q = Q(x, t)$ . D'autre part, le volume  $V$  d'eau emmagasinée dans le volume de contrôle varie avec la loi suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial (hb \Delta x)}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \quad (2.2)$$

en terme d'aire de la section  $A = bh$ , l'équation 2.2 s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \quad (2.3)$$

Les deux termes 2.1 et 2.3 se balancent mutuellement i.e. ils sont égaux en valeur absolue mais ont des signes opposés. Ainsi,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + b \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x = 0 \quad (2.4)$$

Comme  $Q = Av$ , alors

$$\frac{\partial Av}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

et puisque  $A = bh$ , l'équation (2.5) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est l'équation de conservation de masse ou l'équation de continuité dans sa formulation conservative.

Pour adapter l'équation (2.6) à une application lagrangienne, une réécriture permettant l'apparition d'une dérivée totale sera plus convenable. Ainsi, si on dérive le terme de convection  $\frac{\partial hv}{\partial x}$ , l'équation (2.6) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} \right) + h \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Dh}{Dt} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

où  $D/Dt$  est la dérivée totale ou particulière. Dans le cas général, en deux dimensions d'espace, l'équation (2.7) s'écrit :

$$\frac{Dh}{Dt} + h \nabla \cdot v = 0 \quad (2.8)$$

$\nabla \cdot$  est l'opérateur de divergence. C'est la version finale de l'équation de continuité.

### 2.2.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

La dérivation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement se base sur l'application de la deuxième loi de Newton sur le même volume de contrôle de la figure (2).

$$\sum F_{ext} = ma = \rho \Delta x A \frac{Dv}{Dt} = \rho \Delta x A \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

$\rho$  est la masse volumique du fluide. Énumérons maintenant les forces extérieures qui s'exercent sur le volume de contrôle :

**Pression statique**  $\frac{\partial P_{stat}}{\partial x}$  : C'est la résultante des pressions statiques exercées par l'eau entourant le volume de contrôle.

**Forces de friction F** : Il s'agit des forces de résistance du lit et des mur du canal, leurs expressions seront détaillées plus loin.

**Forces volumique  $f_v$**  : Principalement cette catégorie de force se résume à la gravité à  $\rho g$ . Dans les applications de prédiction météorologique, les forces de Coriolis (due au mouvement rotatoire de la terre) sont introduites (voir par exemple [93, 125]). D'autres types de forces peuvent être prises en considération dépendamment de l'application (forces magnétiques, nucléaires etc...).

Si on dénote par  $\phi$  l'angle que fait le lit du canal avec l'horizontal, la somme de ces forces extérieures projetées sur l'axe du canal, est (l'angle  $\phi$  est supposé positif si la pente est descendante de l'amont à l'aval) :

$$\sum F_{ext} = \frac{\partial P_{stat}}{\partial x} \Delta x \cos \phi - F \Delta x + \rho g A \Delta x \sin \phi \quad (2.10)$$

Pour des petites pentes  $\phi$ ,  $\cos \phi \simeq 1$  et  $\sin \phi \simeq \phi$ , et donc (2.10) devient :

$$\sum F_{ext} = \frac{\partial P_{stat}}{\partial x} \Delta x - F \Delta x + \rho g A \Delta x \phi \quad (2.11)$$

et comme  $\frac{\partial P_{stat}}{\partial x} = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x}$  et  $F = \rho g A J$  où  $J$  est la perte d'énergie par unité de longueur du canal et par unité de poids du fluide, l'équation (2.9) devient

$$\rho A \Delta x \frac{Dv}{Dt} = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x - \rho g A J + \rho g A \Delta x \phi \quad (2.12)$$

En réarrangeant l'équation (2.12), on obtient :

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + g(\phi - J) \quad (2.13)$$

avec  $\phi = \frac{\partial z}{\partial x}$ . Notant que  $\eta = h + z$ , l'équation 2.14 s'écrit finalement :

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - gJ \quad (2.14)$$

Utilisant l'expression de Chezy,  $J$  peut être exprimé par

$$J = \frac{v^2}{C^2 R_H} \quad (2.15)$$

où  $C$  est la constante de Chézy et  $R_H$  est le rayon hydraulique.  $J$  peut être exprimé aussi en utilisant la formule de Manning :

$$J = \frac{n^2 v^2}{R_H^{\frac{3}{2}}} \quad (2.16)$$

$n$  est le coefficient de Manning [45]. Souvent, les ingénieurs utilisent plutôt l'inverse de  $n$ , ce qui est connu dans la communauté des hydrauliciens par le nombre de Strickler  $S_t = \frac{1}{n}$ .

En deux dimensions le système d'équation de Saint-Venant peut s'écrire, dans sa forme conservative, comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(U)}{\partial y} = S(U) \quad (2.17)$$

dans lequel :

$$U = U(h, q_x, q_y)^T$$

$$F_x = \left( q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2}, \frac{q_x q_y}{h} \right)^T$$

$$F_y = \left( q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right)^T$$

$q_x = hu$  et  $q_y = hv$  sont les décharges unitaires dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement,  $h$  est la profondeur d'eau,  $(u, v)$  sont les composantes sur  $x$  et  $y$  de la vitesse moyenne dans la section.  $U$  est le vecteur des variables conservatives et  $F_x$  et  $F_y$  sont les vecteurs de flux associés à  $U$  dans les directions  $x$  et  $y$  [147]. Les termes sources  $S(U)$  représentent la pente du lit et les pertes par friction dans les deux directions de l'espace. Ils sont donnés par :

$$S(u) = \left( 0, gh(S_{0x} - S_{fx}), gh(S_{0y} - S_{fy}) \right)^T$$

où

$$S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y}$$

Les termes de pertes par friction sont exprimés en utilisant le coefficient de frottement de Manning  $n$  :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{3/2}} \quad \text{et} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{3/2}}$$

Le système (2.17) peut aussi s'écrire sous une forme non-conservative. Il devient :

$$\begin{cases} \frac{Dh}{Dt} + h \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + g \nabla \eta + gJ = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $D./Dt$  est la dérivée particulière ou totale. C'est la version non-conservative du système de Saint-venant écrite dans une formulation Lagangienne. Le système (2.18) sera utilisé dans le restant de cette thèse.

### 2.2.3 Propriétés des équations de Saint-Venant

*"L'intérêt majeur d'une approche de type Saint-Venant est de permettre, grâce à l'utilisation de la vitesse moyenne de l'écoulement et à l'introduction explicite de la hauteur d'eau comme inconnue, d'aborder des problèmes physiques tridimensionnels et instationnaires, posés sur des domaines mobiles, au travers de l'étude d'un système posé sur un domaine bi- (voir mono-) dimensionnel et invariant en temps" [35].* Les approches de types Saint-Venant ont prouvé leurs efficacité et leur concordance avec les données expérimentales. La validité de ce système d'équations dépasse dans beaucoup d'applications les limites et les contraintes dictées par les hypothèses mathématiques qui ont servi à la dérivation des équations. D'ailleurs, l'expérience des hydrauliciens approuve la dernière remarque, puisque les simulations basées sur les modèles de type Saint-Venant sont en très bon accord avec les données expérimentales. Plus important encore, ces résultats sont souvent suffisants pour fournir les informations et pour prendre des décisions par les ingénieurs (étude de sécurité des barrages par exemple).

Les modèles de type Saint-Venant supposent que l'effet de la composante verticale de l'accélération est négligeable. Par conséquent, la pression est supposée hydrostatique sur tout le domaine d'étude. Des modèles plus élaborés sont donc nécessaires pour passer outre l'hypothèse de l'hydrostaticité de la pression. Ces modèles se rapprochent généralement des équations de Navier-Stokes (voir les travaux de Soulaïmani par exemple [8, 152]), ou sinon, situés entre ces dernières et les équations de Saint-Venant. Le lecteur est référé à la thèse d'Audusse [35] pour plus de détails sur les équations de Saint-Venant multicouches, et à la thèse de Berger [126] pour les équations de Saint-Venant généralisées qui tiennent en considération les courbures des lits des canaux et des déversoirs.



Pour l'étude des propriétés mathématiques du système de Saint-Venant, ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}F(U) = S(U) \quad (2.19)$$

où  $U(t, x, y) = (h, hu, hv)^T = (h, q_x, q_y)^T$  est le vecteur des variables conservatives et où  $F(U) = \begin{pmatrix} q_x & q_y \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} & \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_x q_y}{h} & \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}$  et  $S(U)$  est le vecteur des termes sources. (2.19) peut être réarrangée comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + DF_x \frac{\partial U}{\partial x} + DF_y \frac{\partial U}{\partial y} = S(U) \quad (2.20)$$

où  $DF_x$  et  $DF_y$  sont les matrices Jacobiennes du flux [35]

$$DF_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + gh & \frac{2q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad DF_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_x}{h} & \frac{q_y}{h} \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + gh & 0 & \frac{2q_y}{h} \end{bmatrix}$$

Si on introduit un vecteur  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , et on définit la matrice  $DF(\xi) = \xi_x DF_x + \xi_y DF_y$  [28], alors, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $DF(\xi)$  possède trois valeurs propres définies par :

$$\lambda_1 = u_\xi - c; \quad \lambda_2 = u_\xi; \quad \text{et} \quad \lambda_3 = u_\xi + c$$

où  $u_\xi = \xi_x \frac{q_x}{h} + \xi_y \frac{q_y}{h}$  est la vitesse de l'écoulement dans la direction de  $\xi$  et  $c = \sqrt{gh}$  est la célérité de l'onde dans le fluide. Dans le cas où la profondeur de l'eau est non nulle, les trois valeurs propres sont réelles et strictement distinctes, ce qui montre que le système est strictement hyperbolique. Dans le cas contraire (hauteur d'eau nulle et donc existence de zones sèches), le système perd son hyperbolicité. La stabilité du système requiert une attention spéciale dans ce cas [35].

### 2.2.4 Solutions des équations de Saint-Venant dans le cas de bris de barrage en 1D

Les équations de Saint-Venant ne peuvent pas être résolues analytiquement surtout en présence du terme source correspondant au frottement du lit [59]. Les équations de Saint-Venant présentent, dans le cas monodimensionnel d'un canal prismatique rectangulaire, une solution analytique connue sous le nom de la solution de Ritter [7]. Cette solution n'est valable que dans le cas de frottement nul (sur le lit et sur les berges du canal). La solution peut être trouvée dans le livre de Stoker [78]. Pour un lit aval mouillé de hauteur d'eau  $h_R$ , la solution en profondeur est donnée par :

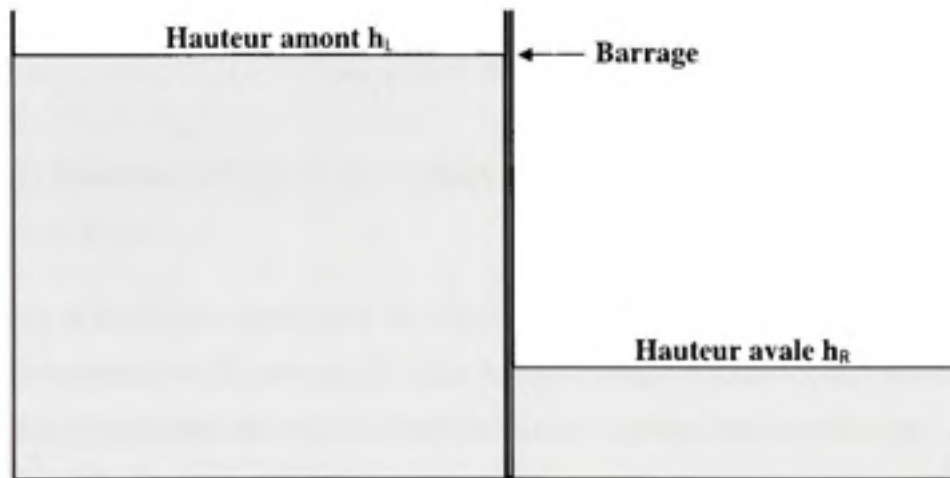


Figure 3 Conditions initiales du problème de bris de barrage en 1D.

$$h(x, t) = \begin{cases} h_L & \text{si } x < \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} \\ \frac{1}{9g} \left( 2\sqrt{gh_L} - \frac{1}{2t}(2x-1) \right)^2 & \text{si } \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} \leq x \leq (u_2 - c_2)t + \frac{1}{2} \\ \frac{h_R}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}} - 1 \right) & \text{si } (u_2 - c_2)t + \frac{1}{2} < x \leq St + \frac{1}{2} \\ h_R & \text{si } x > St + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.21)$$

La solution en vitesse est :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} \\ \frac{1}{3t}(2(x + t\sqrt{gh_L}) - 1) & \text{si } \frac{1}{2} - t\sqrt{gh_L} \leq x \leq (u_2 - c_2)t + \frac{1}{2} \\ u_2 & \text{si } (u_2 - c_2)t + \frac{1}{2} < x \leq St + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x > St + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.22)$$

avec  $u_2 = S - \frac{gh_R}{4S} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}}\right)$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{gh_R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}} - 1\right)}$ .  $t$  désigne le temps et  $S$  la célérité du front.  $S$  est la racine positive de l'équation suivante [71] :

$$u_2 + 2c_2 - 2\sqrt{gh_L} = 0 \quad (2.23)$$

Dans les équations (2.21) et (2.22), le domaine est pris de longueur 1m et le barrage est situé à  $x = 0.5m$ .

Plusieurs autres études ont proposé des solutions analytiques dans le cas d'un fluide réel (avec frottement) [56, 58] et/ou en présence de turbulence [59]. Dans le cadre de ce travail, nous nous contenterons du cas d'un fluide idéal, et d'écoulements non turbulents.

## CHAPITRE 3

### LES MÉTHODES SANS MAILLAGE

#### 3.1 Pourquoi "les méthodes sans maillage"

Les méthodes numériques conventionnelles telles que la méthode des éléments finis (MEF), de volumes finis (MVF) ou de différences [140] finies (MDF) sont devenues des outils essentiels dans la résolution de problèmes en mécanique des fluides et des solides. Leur efficacité et leur capacité à résoudre une pléiade de problèmes sont bien connues et bien prouvées. Cependant, dans certains problèmes physiques, ces approches se confrontent à des impasses de nature aussi bien mathématiques que numériques.

Les problèmes qui présentent des discontinuités dans leurs domaines de définition, les phénomènes de fragmentations, de fissuration etc... sont difficiles à traiter avec les approches numériques courantes. Dans le cas des mécaniques des fluides, le problème d'érosion, d'inondation avec des écoulements couvrants-découvrants, les explosions etc... sont très délicats à entreprendre.

D'un autre côté, le côté numérique n'est pas toujours très facile à manipuler dans les cas des méthodes classiques. En effet, la présence systématique de maillage, implique dans des cas à géométries compliquées et surtout lors de l'utilisation de formulation Lagrangienne ou de type ALE, des distortions dans le maillage, des difficultés dans l'intégration numérique. De plus, le coût d'obtention d'un maillage de bonne qualité peut s'avérer très élevé surtout en 3D et pour les problèmes qui nécessitent des remaillages fréquents, comme par exemple le problème induisant la propagation d'une fissure.

Pour ces raisons, nous avons décidé d'explorer cette nouvelle famille d'approches numériques qui promet d'être aussi compétitive que la famille des approches conventionnelles. Cette thèse a ainsi un objectif d'exploration qui vise à élargir l'arsenal des techniques nu-

mériques qui sont à la disposition des ingénieurs et ce pour mieux traiter les problèmes qu'ils rencontrent et pour fiabiliser davantage les informations qu'ils obtiennent.

## 3.2 Caractérisation et classification des MMs

### 3.2.1 Généralités

Dans ce qui suit, on va commencer par introduire quelques notions fondamentales pour la bonne compréhension de la philosophie des MM. Ces notions sont la base d'une formulation meshfree. Il s'agit essentiellement des notions de partition de l'unité, de consistance et des différents types de formulations. Ces notions vont jouer le rôle de paramètres d'évaluation pour la classification des MMs. En effet, la classification va se baser sur :

- la construction de la partition de l'unité (PU) ;
- le choix de l'approximation ;
- le choix des fonctions de pondération ou fonction poids.

### 3.2.2 La méthode des résidus pondérés

L'objectif principal pour nous est de résoudre numériquement un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). En d'autres termes, trouver une fonction  $u$  vérifiant  $Lu = f$  où  $L$  est un opérateur différentiel quelconque et  $f$  est un terme de source.

Une des techniques les plus utilisées pour résoudre un tel problème est la technique des résidus pondérés. La MEF, la MVF et la MDF peuvent être formulées en utilisant ce principe. La majorité des techniques MMs peut être vue comme étant "des versions", plus-ou-moins variées de l'idée des moindres carrés pondérés.

Dans cette méthode, l'approximation de la fonction inconnue  $u$  est obtenue par la sommation des fonctions d'interpolation  $\Phi$  (appelées aussi fonctions de forme [146]) et des valeurs nodales ou les points inconnus  $\hat{\mathbf{u}}$ . Ainsi,  $u \approx u^h = \Phi^T \hat{\mathbf{u}} = \sum_i \Phi_i \hat{u}_i$ . En rem-

plaçant  $u$  par  $u^h$  dans l'EDP donne  $Lu^h - f = \epsilon$ . Comme nous sommes, en général, incapables de manipuler directement l'EDP, le résidu ou l'erreur  $\epsilon$  est introduit. Par conséquent, en choisissant des fonctions de pondération  $\Psi$ , on détermine un système d'équation à résoudre en postulant que  $\epsilon$  est orthogonal à cet ensemble de fonctions :  $\int \Psi \epsilon d\Omega = \int \Psi (Lu^h - f) d\Omega = 0$ .

### 3.2.3 Les formulations variationnelles faibles

Les formulations variationnelles faibles sont indispensables pour les méthodes basées sur le principe des résidus pondérés. Cependant, dans le cadre des MMs et surtout pour les méthodes de type MLPG (voir section 4.2), on doit discerner entre les formulations faibles globales (Global Weak Form GWF) et locales (Local Weak Form LWF)[130]. La formulation globale est composée d'intégrales sur le domaine entier et sur les frontières globales du domaine, tandis que la formulation locale est construite sur les domaines locaux  $\Omega_s$  qui sont inclus dans le domaine global  $\Omega$  ainsi que sur les frontières locales des domaines  $\Omega_s$ .

Pour mieux comprendre ces deux notions, on va prendre l'équation de Poisson comme exemple illustratif [140]. On se donne l'équation de Poisson  $\nabla^2 u(x) = p(x)$  avec les conditions aux frontières suivantes :  $u = \bar{u}$  sur  $\Gamma_u$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$  sur  $\Gamma_q$ .

La forme faible globale et dissymétrique (GUSWF) correspondant à ce problème est donnée comme suit :

$$\int_{\Omega} \Psi (\nabla^2 u^h - p) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} \Psi (u^h - \bar{u}) d\Gamma_u = 0$$

où  $\Omega$  est le domaine total et  $\alpha$  une constante réelle qui vérifie  $\alpha \gg 1$ . Après intégration par partie, on obtient la forme faible globale symétrique (GSWF) suivante :

$$\int_{\Gamma} \Psi q d\Gamma - \int_{\Omega} (\Psi_{,i} u^h_{,i} + \Psi p) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} \Psi (u^h - \bar{u}) d\Gamma_u = 0$$

Le même raisonnement s'applique pour un domaine local  $\Omega_s$ , dans ce cas on obtient la formulation faible locale dissymétrique (LUSWF) :

$$\int_{\Omega_s} \Psi(\nabla^2 u^h - p) d\Omega_s - \alpha \int_{\Gamma_u} \Psi(u^h - \bar{u}) d\Gamma_u = 0$$

Par intégration par partie sur la dernière équation, on obtient la formulation faible symétrique (LSWF).

$$\int_{\Gamma_s} \Psi u_{,i}^h n_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} (\Psi_{,i} u^h_{,i} + \Psi p) d\Omega_s - \alpha \int_{\Gamma_u} \Psi(u^h - \bar{u}) d\Gamma_u = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_s} \Psi u_{,i}^h n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \Psi u_{,i}^h n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \Psi \bar{q} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_s} (\Psi_{,i} u^h_{,i} + \Psi p) d\Omega_s - \alpha \int_{\Gamma_u} \Psi(u^h - \bar{u}) d\Gamma_u = 0 \end{aligned}$$

où  $\Gamma_s$  est la frontière du domaine local  $\Omega_s$  là où aucune condition n'est appliquée,  $\Gamma_{su}$  et  $\Gamma_{sq}$  sont celles où des conditions de type Dirichlet et Neumann sont respectivement appliquées. Par conséquent, cette formulation transforme le problème global en n-problèmes localisés dans les sous-domaines  $\Omega_s$ .

### 3.2.4 La notion de consistance

La notion de consistance réfère au plus grand ordre d'un polynôme qui peut être reproduit exactement par l'approximation numérique. Par conséquent, si on parle d'une consistance d'ordre  $n$ , alors la solution analytique peut être reproduite exactement jusqu'à cet ordre. Si la solution analytique est d'un ordre supérieur à  $n$ , alors une erreur d'approximation est engendrée.

La consistance peut être prouvée par deux manières :

- À travers les conditions de consistance (appelées aussi conditions de reproduction). Si on dispose d'une approximation du type  $u^h = \sum_i \Phi_i \hat{u}_i$ , les conditions de consistance d'ordre  $n$  sont (reproduction de tous les monômes d'ordre  $p \leq n$ ) :

$$\sum_i \Phi_i(x) x_i^p = x^p \quad \text{pour } 0 \leq p \leq n, x \in \mathbb{R}$$

- En utilisant le développement en série de Taylor. Il s'agit d'insérer les termes de l'approximation d'une méthode dans la série de Taylor et ainsi déterminer l'erreur résultante. Cette erreur est, en fait, les termes de la série de Taylor qui ne peuvent être captés par l'approximation MM.

### 3.2.5 La partition de l'unité (PU)

La partition de l'unité découle directement de la notion de consistance. En effet, l'ordre de consistance 0 est défini comme :

$$\begin{aligned} \sum_i \Phi_i(x) x_i^0 &= x^0 \quad , x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \sum_i \Phi_i(x) &= 1 \quad , x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

C'est précisément la définition de la partition de l'unité. En d'autres termes, c'est le fait que la somme sur tout le domaine  $\Omega$  de l'ensemble des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation)  $\Phi$  est égale à l'unité. Plus généralement, une partition de l'unité d'ordre  $n$  est un ensemble de fonctions  $\{\Phi_i^n\}$  où les fonctions satisfont la condition de consistance définie dans la section précédente jusqu'à l'ordre  $n$ .



### 3.3 Classification des MMs

Pour classer les MMs, il est important de rappeler les étapes de construction d'une approximation meshfree. Étant donnée une base polynômiale intrinsèque, les trois étapes sont les suivantes :

- construire une PU d'ordre  $n$  en utilisant cette base intrinsèque ;
- construire l'approximation en se basant sur la PU ;
- choisir les fonctions de pondération (ou fonction poids, test functions).

La construction de la PU peut se faire aussi bien avec des techniques meshless qu'avec les techniques conventionnelles. Dans le premier cas, on peut utiliser les procédures MLS (Moving Least Squares) ou RKPM (Reproducing Kernel Particle method). En utilisant l'approche de la MEF pour construire la PU, on peut aboutir à des techniques mixtes "meshbased-meshfree".

Dans la deuxième étape, si on prend tout simplement  $u^h = \sum_i \Phi_i u_i$ , alors la PU est prise directement comme étant les fonctions d'approximation  $\Phi_i$ . Par ailleurs, on peut définir plusieurs types de fonctions d'approximation en jouant sur la nature de la PU et sur la base qui la constitue.

Finalement, le choix de la fonction poids est l'élément qui caractérise le plus la MM. En effet, en choisissant par exemple la masse de Dirac  $\Psi_i = \delta(x_i - x)$ , un schéma de collocation va en résulter. Si on choisit  $\Psi_i = \Phi_i$ , on obtient une formulation de type Galerkin.

## 3.4 Construction d'une PU

### 3.4.1 Base polynômiale complète

Pour obtenir une consistance d'un ordre donné, il est important de disposer d'une base complète. Pour clarifier les notations, on va adopter dans ce qui suit la notation multi-

indice de Fries[146]. Le multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  est utilisé dans ce qui suit avec  $\alpha_i \geq 0$  et  $d = \dim(\Omega)$  est la dimension du problème. Si  $\alpha$  est appliquée à un vecteur de même dimension  $\mathbf{x}$  alors :

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

On définit de la même manière, la dérivée de Frechet d'une fonction  $u$ , comme suit :

$$\mathbf{D}^\alpha u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(\mathbf{x})}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}$$

la longueur de  $\alpha$  est  $|\alpha| = \sum_i^d \alpha_i$ .

En utilisant cette notation on peut définir une base polynômiale dont la consistance est d'ordre  $n$  comme suit :

$$\mathbf{p}(x) = \{x^\alpha \mid |\alpha| \leq n\}$$

La relation entre la dimension du problème  $d$  et l'ordre de consistance  $n$  d'une part, et le nombre de composante de la base d'un autre part, est la suivante :

$$k = \frac{1}{d!} \prod_{i=1}^d (n+i)$$

Ainsi, en une dimension, on a  $k = (n+1)$ , en deux dimensions  $k = 1/2(n+1)(n+2)$  et en trois dimensions  $k = 1/6(n+1)(n+2)(n+3)$ . Pour plus de détails sur la liste complète des bases, on réfère aux références suivantes [130] et [146].

### 3.4.2 Moving Least Squares (MLS)

La technique MLS a été introduite par Lancaster et Salkauskas dans [88] pour interpoler les données discrètes. Pour une fonction  $u(x)$  suffisamment régulière sur un domaine  $\Omega$ , on peut définir une approximation "Locale" autour d'un point  $\hat{x} \in \bar{\Omega}$  telle que :

$$u^l(x, \hat{x}) \approx L_x u(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x)$$

où  $u(x) = \begin{cases} u(x) & \forall x \in \tilde{\Omega}, |x| < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $L_x$  est une application. Pour obtenir la meilleure approximation de la fonction  $u$  dans un sens "des moindres carrés", le vecteur de coefficients  $\mathbf{a}(\bar{x})$  est choisi de façon à minimiser la norme d'erreur  $L_2$  pondérée et discrète. En d'autres termes, le vecteur coefficients  $\mathbf{a}(\bar{x})$  est choisi tel qu'il satisfait la condition  $J_x(\mathbf{a}(\bar{x})) \leq J_x(\mathbf{b})$  pour tout  $\mathbf{b} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$  :

$$\begin{aligned} J_x(\mathbf{a}) &= \sum_i^N w(x - x_i) [L_x u(x) - u^l(x, \bar{x})]^2 \\ &= \sum_i^N w(x - x_i) [p^T(x_i) \mathbf{a}(\bar{x}) - u_i]^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

La fonction poids  $w(x - x_i)$  joue un rôle important dans le contexte des MMs.

La minimisation de la fonctionnelle  $J_x(\mathbf{a})$  se fait en supposant que la dérivée par rapport à  $\mathbf{a}$  est égal à zéro. Le développement complet de la méthode MLS est détaillé dans les références suivantes [130],[134] et [113]. L'approximation MLS finale est donnée par :

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \left[ \sum_{i=1}^N w(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^N w(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) u_i \quad (3.2)$$

Ce qui peut être écrit dans un format condensé comme suit :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i = \Phi^T(x) \mathbf{u} \quad (3.3)$$

où  $\Phi^T(x) = \underbrace{\mathbf{p}^T(x) [\mathbf{M}(x)]^{-1} \mathbf{B}(x)}_{1 \times N}$  est le vecteur des fonctions de forme,  $M(x)$  est appelée *matrice moment*. Elle est donnée par  $M(x) = \sum_{i=1}^N w(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i)$ . Le vecteur  $B$  est formé par la base pondérée par la fonction poids. Il s'écrit comme :

$$\mathbf{B}(x) = \left[ w(x - x_1) p(x_1) \quad w(x - x_2) p(x_2) \quad \cdots \quad w(x - x_N) p(x_N) \right]$$

Par conséquent, ces fonctions de forme vérifient une condition de consistance d'ordre  $n$  et ainsi il construisent une partition de l'unité PU  $\{\Phi_i^n(x)\}$  d'ordre  $n$ .

Pour calculer les dérivées de ces fonctions de forme, il suffit de considérer ces dernières comme un produit de trois fonctions dépendantes de  $x$  qui sont respectivement  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{B}$ . (Voir les références mentionnées en haut pour les expressions explicites des dérivées.)

La figure 12 montre une illustration des fonctions de forme et de leurs premières et deuxième dérivées. La ligne en pointillés dans le haut de la première figure, montre que la somme des fonctions poids est bel-et-bien égale à l'unité. Dans la figure du milieu, on voit que la première et la deuxième dérivées des fonctions de forme une "partition de la nullité" puisque leur somme est égale à zéro en tout point. i.e.  $\sum_i \frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x} = \sum_i \frac{\partial^2 \Phi_i(x)}{\partial x^2} = 0$ .

### Remarques

- Les fonctions d'interpolation possèdent un caractère polynômial dans la majorité des cas, alors que leurs dérivées premières et deuxièmes tendent vers des fonctions qui ont moins ce caractère. Cette nature peu régulière de ces dernières va poser des problèmes lors de l'intégration des formulations variationnelles faibles.
- Les fonctions de forme ne possèdent pas le caractère interpolant. i.e. Elle ne vérifient pas la propriété du delta Kronecker. Ceci peut se traduire par le fait que à chaque nœud, il y plus qu'une fonction de forme qui est différente de zéro. Ainsi l'approximation meshfree basée sur la procédure MLS n'est pas une approximation nodale. Ce caractère non-interpolant rend l'imposition des conditions aux limites une tâche très délicate.
- Il est à noter que la MLS peut traiter les fonctions dérivées comme des fonctions indépendantes. Comme dans le cas de la MEF, et dans le cas d'une analyse de poutre par exemple, de monter l'ordre de la solution jusqu'au  $n^{me}$  ordre, la MLS peut faire intervenir les valeurs nodales  $u_i$  mais aussi les valeurs nodales des dérivées. On parle dans ce cas, on parle dans ce cas de GMLS (Generalized MLS).

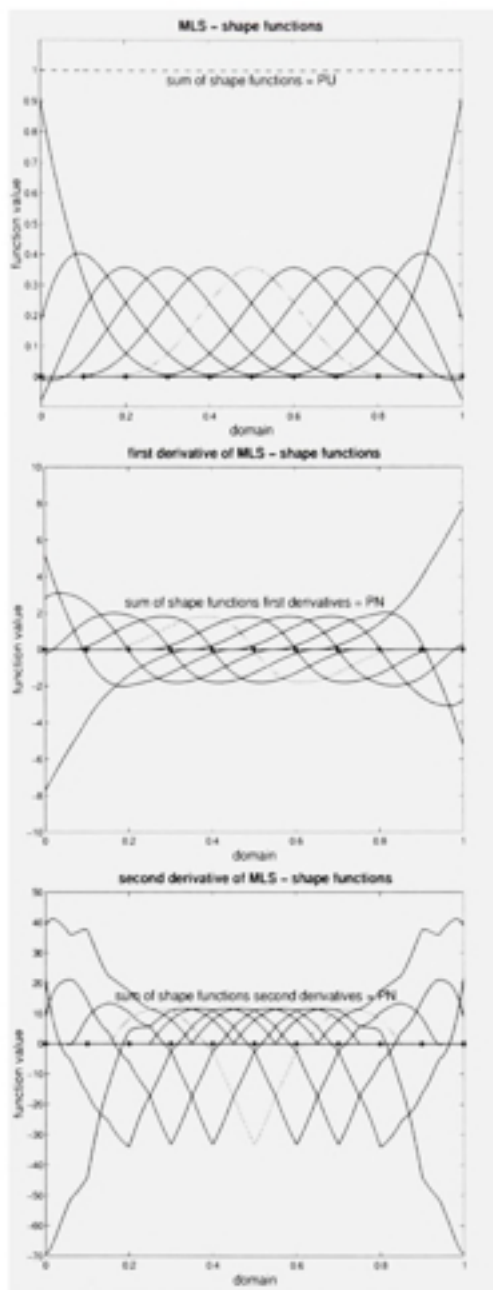


Figure 4 La partition de l'unité et ses dérivées avec la méthode MLS- d'après Fries et al. [146]

### 3.4.2.1 Relation avec les séries de Taylor

La série de Taylor peut être un autre point de départ pour construire une approximation d'une fonction  $u$ . Ainsi pour construire une approximation du type :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i \quad (3.4)$$

on peut écrire le développement de Taylor pour la fonction  $u$  pour tout point  $u_i = u(x_i)$  comme suit :

$$u(x_i) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(x_i - x)^\alpha}{|\alpha|!} D^\alpha u(x_i) \quad (3.5)$$

Si on choisit  $\Phi_i(x)$  de la forme  $\Phi_i(x) = \mathbf{p}^T \mathbf{a}(x) w(x - x_i)$  ce qui peut être interprété comme une interpolation polynômiale locale, et si on introduit l'équation (3.5) dans l'équation (3.4), et après quelques manipulations mathématiques [134], on retrouve exactement l'approximation MLS c-à-d l'équation (3.3). D'où on peut conclure qu'on peut retrouver l'approximation MLS, qui possède un ordre de consistance d'ordre  $n$ , en utilisant le développement en série de Taylor.

### 3.4.2.2 Relation avec les fonctions de Shepard

En 1968, Shepard [29] a introduit l'approximation suivante pour interpoler des données discrètes :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(x) u_i$$

avec

$$\Phi_i(x) = \frac{w(x - x_i)}{\sum_{k=1}^n w(x - x_k)}$$

Ceci peut être interprété comme étant une pondération avec l'inverse de la distance. On peut voir immédiatement que cette approximation forme une PU puisque  $\frac{\sum_{i=1}^n w(x - x_i)}{\sum_{i=1}^n w(x - x_i)} = 1$ . D'un autre côté, l'approximation de Shepard peut être vue comme étant une approximation

MLS avec une base polynômiale dont l'ordre de consistance est 0. En effet, dans ce cas,  $\mathbf{p}(x) = 1$  et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 u^h(x) &= \mathbf{p}^T(x) \left[ \sum_{i=1}^N w(x-x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^N w(x-x_i) \mathbf{p}(x_i) u_i \\
 &= 1 \left[ \sum_{i=1}^N w(x-x_i) 1 \cdot 1 \right]^{-1} \sum_{i=1}^N w(x-x_i) 1 \cdot u_i \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{w(x-x_i)}{\sum_{k=1}^N w(x-x_k)} u_i
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ainsi, on voit bien que la méthode de Shepard est un cas particulier de la procédure MLS à l'ordre zéro. Il est, cependant important de noter que la méthode Shepard est l'une des rares MMs dont la fonction de forme s'écrit explicitement, c-à-d sans inversion de matrice. Par conséquent, elle présente l'avantage d'être peu coûteuse de point de vue temps de calcul. Cette approximation peut être obtenue de l'approximation SPH pour des  $\Delta V$  égaux.

### 3.4.2.3 Relation avec d'autres schémas de moindres carrés

D'après Oñate et al [112], tout schéma du type moindres carrés peut être utilisé pour construire une approximation meshfree. L'idée de base est toujours de minimiser la somme des carrés des distances entre n'importe quel point et la valeur exacte, pondérées par la fonction poids  $w$ . Ainsi, on a à minimiser :

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_i^N w \left( u(x_i) - u^h(x_i) \right)^2 \\
 &= \sum_i^N w \left( \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} - u_i \right)^2
 \end{aligned}$$

Partant de cette remarque, tous les schémas qui suivent sont valables pour l'approximation MLS (voir la figure 13) :

◊  $w = 1$  : on retrouve la méthode des moindres carrés standard (LSQ). L'inconvénient majeur de la LSQ est le fait que l'approximation se détériore rapidement lorsque le nombre de points utilisés  $N$ , dépasse le nombre  $k$  de polynômes dans la base  $\mathbf{p}$ . La minimisation

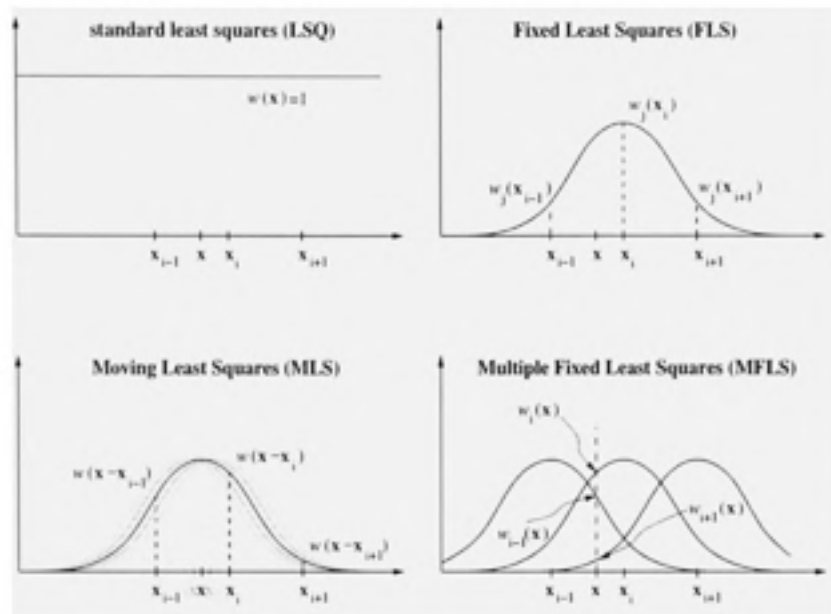


Figure 5 Les différents schémas de l'approximation MLS - d'après Fries et al. [146]

utilisant LSQ conduit au système suivant :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}(x_i) u_i \quad (3.7)$$

o  $w = w_j(x_i)$  : Dans ce cas, on retrouve la méthode des moindres carrés fixe (FLS : Fixed least squares). Cette approximation mène au système d'équation suivant :

$$\sum_{i=1}^N w_j(x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^N w_j(x_i) \mathbf{p}(x_i) u_i \quad (3.8)$$

Les valeurs inconnues  $\mathbf{a}$  sont constants tant qu'un certain  $w_j$  est choisi et fixé en un point  $x$ . Sinon, plusieurs  $\mathbf{a}$  peuvent être retrouvés ce qui signifie que l'approximation devient illogiquement "multi-valued".



◊  $w = w(x - x_i)$  : C'est typiquement l'approximation MLS (Moving Least Squares). La fonction de poids est définie différemment (la forme et la taille) à chaque point  $x$  et est tradlatée sur tout le domaine de façon à couvrir aléatoirement un maximum de points. Le système linéaire résultant est :

$$\sum_{i=1}^N w(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^N w(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) u_i \quad (3.9)$$

◊  $w = w_i(x)$  : Ceci mène à la MFLS (Multiple Fixed Least Squares). Cette appellation provient du fait que plusieurs fonctions poids fixes  $w_i$ , chacune ayant leurs maximums au point  $x_i$ , sont considérés au point  $x$ . Le système résultant de cette approximation est :

$$\sum_{i=1}^N w_i(x) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^N w_i(x) \mathbf{p}(x_i) u_i \quad (3.10)$$

### *Remarque*

Dans la communauté numérique, l'appellation de méthode meshfree est attribuée à chaque fois qu'une méthode sort du cadre traditionnel de la méthode des éléments finis ou la méthode des volumes finis. Les méthodes FCM et MTD peuvent ainsi entrer dans ce cadre. La méthode FCM (Finite Cloud Method) a été introduite par Aluru et al. [51]. Elle se base sur la technique qui généralise la notion d'interpolation par la FLS. Quant à la méthode MTD (Méthode des tourbillons discrets) elle a été introduite par Hasegawa dans [110]. La méthode de transport de vortex généralisé (Generalized Vortex transport method) représente la plus récente de ses version [98]. C'est une approche de type Lagrangien-Eulerien qui sert au calcul de la vorticité.

### **3.4.3 La technique RKPM (Reproducing Kernel Particle Method)**

La RKPM et la famille des méthodes de "reproduction par les noyaux" (reproducing kernel methods : RKM) consistent à retrouver une fonction à partir d'une approximation intégrale écrite en utilisant un noyau corrigé [143]. Dans ce cas, on est intéressé à la transformation

intégrale suivante :

$$u^h(x) = \int_{\Omega_y} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Omega_y \quad (3.11)$$

Il est clair que si le "noyau" (kernel)  $K$  est la masse de Dirac, alors la fonction  $u$  est reproduite exactement. L'équation (3.11) représente la forme continue de la méthode RKM. En pratique, pour évaluer  $u$ , on procède à une discrétisation de l'équation (3.11) comme suit :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N K(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, \mathbf{x})u_i\Delta V_i \quad (3.12)$$

Cette forme discrète s'appelle RKPM (Reproducing Kernel Particle Method).

On veut construire un noyau  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de façon qu'il reproduise exactement un polynôme d'ordre  $n$  i.e. il garantit un ordre de consistance d'ordre  $n$ . On pose

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})w(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.13)$$

où  $w(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  est la fonction poids, appelée aussi noyau ou aussi dans le cadre de la méthode RKPM fonction "fenêtre" et  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$  est la fonction qui permettra de garantir la consistance. Dans le cas où  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , l'approximation ne peut plus vérifier les conditions de consistance. On se retrouve alors dans le cas de la méthode SPH. Un terme de correction du noyau a été introduit pour que celui-ci augmente l'ordre de consistance, le noyau devient alors  $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{y})w(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Pour déterminer la correction, plusieurs approches ont été introduites. On va survoler quelques unes dans ce qui suit :

1. Cette approche a été proposée par Liu et al. dans [154]. Pour déterminer l'approximation de la fonction  $u$  en utilisant une base polynômiale  $\mathbf{p}(x)$  telle que  $u^h(x) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a}$ , on multiplie chaque côté par  $\mathbf{p}(x)$  et on intègre l'équation pondérée par la fonction fenêtre. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
u^h(x) &= \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a} \\
\mathbf{p}(x)u(x) &= \mathbf{p}(x)\mathbf{p}(x)^T\mathbf{a} \\
\int_{\Omega_y} \mathbf{p}(y)w(x-y)u(y)d\Omega_y &= \int_{\Omega_y} \mathbf{p}(y)\mathbf{p}^T(y)w(x-y)d\Omega_y \mathbf{a}
\end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équation pour la détermination des inconnues  $\mathbf{a}$  et après insertion dans l'expression  $u^h(x) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a}$  donne finalement :

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \left[ \int_{\Omega_y} w(x-y)\mathbf{p}(y)\mathbf{p}^T(y)d\Omega_y \right]^{-1} \int_{\Omega_y} w(x-y)\mathbf{p}(y)u(y)d\Omega_y \quad (3.14)$$

Ainsi, la fonction de correction correspond à

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}^T(x) \left[ \int_{\Omega_y} w(x-y)\mathbf{p}(y)\mathbf{p}^T(y)d\Omega_y \right]^{-1} \mathbf{p}(y)$$

2. La deuxième approche utilise l'idée de la MLS dans un sens continue. Elle était proposée dans [143] et dans [84]. Elle préconise une minimisation de l'erreur locale engendrée par l'approximation MLS :

$$J(a(\bar{x})) = \int_{\Omega} w(\bar{x}-y)[u(x) - \mathbf{p}^T(x)a(\bar{x})]^2 d\Omega$$

En appliquant les mêmes étapes vues pour la MLS, on aboutit aisément à la même équation 3.14.

3. Cette approche se base essentiellement sur le développement de Taylor [25]. Elle commence par l'approximation :

$$u^h(x) = \int_{\Omega_y} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y})w(\mathbf{x}-\mathbf{y})u(\mathbf{y})d\Omega_y$$

On suppose que la correction est de la forme  $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{a}(x)$ . En introduisant la série de Taylor pour  $u(\mathbf{y})$  dans l'approximation et après quelques manipulations mathématiques [146], on se retrouve avec l'approximation RKPM donnée par l'équation 3.14.

### Remarques

- On peut remarquer que l'obtention de l'approximation continue de la RKPM peut se faire d'une façon équivalente par l'approche MLS, par le développement de Taylor ou par une approche directe.
- On peut noter la ressemblance entre le RKM et le MLS. La différence principale réside dans le fait que la MLS utilise une formulation discrète (Somme sur un ensemble de points), alors que la RKM est une formulation intégrale continue.
- La fonction de correction associée au noyau ou à la fonction fenêtre est :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{p}^T(x) \left[ \int_{\Omega_y} w(x-y) \mathbf{p}(y) \mathbf{p}^T(y) d\Omega_y \right]^{-1} \mathbf{p}(y) \\ &= \mathbf{p}^T(x) [M(x)]^{-1} \mathbf{p}(y) \end{aligned}$$

Cette correction est principalement introduite pour prendre en considération l'effet des frontières [151]. Loin de la frontière son effet est limité [143],[154]. Cependant cette correction est très délicate à manipuler et son effet requiert de l'importance dans les problèmes à caractère Lagrangien et en présence de chocs (Voir article de Ata et Soulaïmani).

- Pour évaluer la formulation intégrale RKM (3.14) numériquement, une intégration numérique est nécessaire. Par cette étape, on passe du RKM au RKPM. Il faut noter que l'objectif ici est n'est pas encore d'évaluer la formulation faible, mais de construire les fonctions de forme.

Après discrétisation de l'équation 3.14, l'approximation RKPM est donnée par

$$\begin{aligned}
 u^h(x) &= \int_{\Omega_y} C(x, y) w(x - y) u(y) d\Omega_y \\
 &\simeq \sum_{i=1}^N C(x, x_i) w(x - x_i) u_i \Delta V_i \\
 &= \mathbf{p}^T(x) [M(x)]^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}(x_i) w(x - x_i) u_i \Delta V_i
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Il est à noter aussi que l'intégration numérique est aussi nécessaire pour évaluer la matrice moment  $M(x)$  :

$$\begin{aligned}
 M(x) &= \int_{\Omega_y} w(x - y) \mathbf{p}(y) \mathbf{p}^T(y) d\Omega_y \\
 &\simeq \sum_{i=1}^N w(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \Delta V_i
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Le choix des volumes d'intégration  $\Delta V_i$  est très important. Dans le cas où  $\Delta V_i = 1$ , l'approximation RKPM se réduit exactement à celle de la MLS.

#### 3.4.4 Fonctions Poids (Noyau ou Fenêtre)

Les approximations MLS et RKPM sont utilisées pour la construction d'une partition de l'unité dont l'ordre de consistance est  $n$ . Mais, en plus de la PU, elles ont besoin d'une fonction poids (noyau ou fenêtre). Les deux plus importantes caractéristiques des fonctions poids sont la forme de la fonction et le support.

Le *support* d'une fonction poids diffère dans la taille et la forme. Ce dernier inclut implicitement la dimension du problème ou de l'EDP. Toutefois, n'importe quel choix de la forme du support peut être possible. Les formes les plus utilisées sont les sphères et les parallélépipèdes. D'après Atluri [86], dans le cas d'un espacement nodal différent, il est préférable d'utiliser des supports elliptiques.

La taille du support est définie par ce qu'on appelle couramment "la longueur de lissage" ou "le paramètre de dilatation" qu'on note souvent  $\rho$ . Ce paramètre est critique et joue un rôle très important dans la précision des solutions et dans la stabilité. Il joue un rôle similaire à la taille de l'élément dans la MEF. Une originalité par rapport à la MEF, est le fait que ce paramètre peut rester constant pour chaque particule, mais aussi il peut varier à chaque pas de temps. Cependant, il est encore inconnu et non clair comment choisir la valeur optimale pour  $\rho$  [154]. Le même problème se pose pour le nombre de particules optimal présentes dans le support [133].

Le deuxième aspect important des fonctions poids, est la forme (de la fonction). En général,  $w$  est choisie de façon à approximer la masse de Dirac  $\delta$  [73]. Il existe une infinité de manière ([149],[75]) de construire un noyau. Toutefois, la fonction Gaussienne et la fonction Spline sont les plus utilisées. Dans ce qui suit, on donne les exemples de noyaux les plus utilisés :

$$\begin{aligned} \text{Spline de 3}^{\text{ème}} \text{ ordre : } w(q) &= \begin{cases} \frac{2}{3} - 4q^2 + 4q^3 & \text{pour } q \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4q + 4q^2 - \frac{4}{3}q^3 & \text{pour } \frac{1}{2} < q \leq 1 \\ 0 & \text{pour } q > 1 \end{cases} \\ \text{Spline de 4}^{\text{ème}} \text{ ordre : } w(q) &= \begin{cases} 1 - 6q^2 + 8q^3 - 3q^4 & \text{pour } q \leq 1 \\ 0 & \text{pour } q > 1 \end{cases} \\ \text{Gaussienne 1 : } w(q) &= \begin{cases} e^{-(q/c)^{2k}} & \text{pour } q \leq 1 \\ 0 & \text{pour } q > 1 \end{cases} \\ \text{Gaussienne 2 : } w(q) &= \begin{cases} \frac{e^{-(q/c)^{2k}} - e^{-(1/c)^{2k}}}{1 - e^{-(1/c)^{2k}}} & \text{pour } q \leq 1 \\ 0 & \text{pour } q > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $q = \frac{|x-x_j|}{\rho}$ . La figure (6) donne une idée sur les différents noyaux les plus fréquemment utilisés.

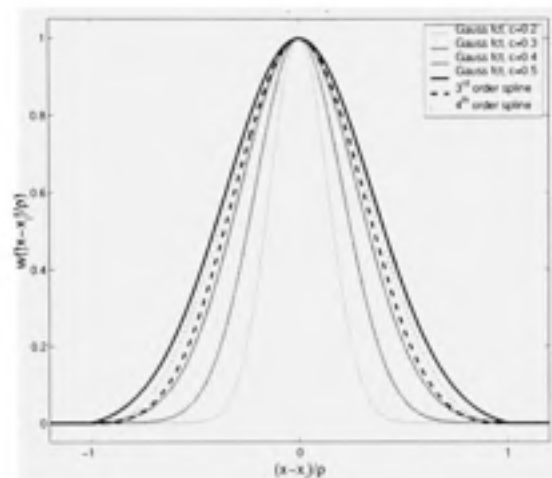


Figure 6 Les différents noyaux ou fonctions poids - D'après Fries et al. [146]

### Remarques

1. Dans le cas de la MLS comme pour la RKPM, pour approximer une fonction en un certain point  $\mathbf{x}$ , une matrice  $k \times k$  (la matrice moment)  $M(\mathbf{x})$  doit être inversée. Le paramètre  $k$ , qui définit la taille du système, est égal au nombre de composante dans la base intrinsèque  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  et par conséquent il dépend du dimension du problème  $d$  et de l'ordre de consistance  $n$ .
2. Pour évaluer les expressions intégrales de la formulation variationnelle faible associée à la EDP du problème, un nombre plus ou moins important de points d'intégration  $\mathbf{x}_Q$  doit être considéré. À chacun de ces points, un système d'équations  $k \times k$  doit être construit et résolu. On peut ainsi conclure que *le besoin de construire et d'inverser la matrice moment en un grand nombre de points est un des points*



*faibles marquants des MMs.* Ces inversions de matrice impliquent un coût très cher en temps CPU mais aussi un risque que ces inversions échouent.

3. Pour construire la matrice moment  $M(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)$  le vecteur de droite  $\mathbf{B}(x) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  une somme sur les particules doit être faite. Ceci requiert l'identification des particules "Voisines", i.e. les particules telles que  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, \rho) \neq 0$  [102]. La notion de voisin remplace celle de connectivité dans la MEF ou MVF. Cette importante étape peut dominer le temps CPU pour un grand nombre de particule, surtout si un algorithme séquentiel ( qui est  $O(N^2)$ ) est utilisé pour chaque particule. C'est pourquoi il faut utiliser des techniques de recherche qui emploient la localisation puisque ces dernières sont plus optimales [131]. (Voir aussi l'article de Ata et Soulaïmani pour plus de détails)

### 3.5 Difficultés (problèmes) des méthodes sans maillage

#### 3.5.1 L'imposition des conditions aux limites

Comme on l'a déjà mentionné, les fonctions de forme des MMs ne sont pas interpolantes, i.e. elles ne vérifient pas la propriété du delta de Kronecker. Cette caractéristique complique énormément l'imposition des conditions aux limites. On présente dans ce qui suit les principales techniques utilisées pour remédier à ce problème.

##### 3.5.1.1 Les multiplicateurs de Lagrange

C'est l'approche la plus générale et la plus précise [113]. Les multiplicateurs de Lagrange ont besoin d'être résolus en plus des variables inconnues du problème et donc un ensemble de fonctions d'interpolation réservés à eux, est nécessaire. En plus d'augmenter le nombre d'inconnues du système, ils transforment la structure de celui-ci puisque la matrice correspondante devient de la forme  $\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{pmatrix}$  et ce au lieu de seulement  $[\mathbf{K}]$ . Cette matrice n'est pas définie positive et les méthodes de résolution qui se basent sur cette hypothèse

ne sont plus applicables [91]. Plus spécialement en dynamique ([91],[94]) et/ou dans les problèmes non linéaires [25], ce plus grand système doit être résolu pour chaque itération.

Dans certains cas, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être identifier à des entités physiques. Par exemple, dans le cas du transfert de chaleur, ils sont identifiés comme étant des flux de frontières. Dans de tels cas, la formulation variationnelle est changée et on parle de "formulation modifiée". Les multiplicateurs de Lagrange sont remplacés par leurs contreparties physiques.

### 3.5.1.2 La méthode des pénalités

Dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet, ces dernières peuvent être intégrées dans la formulation du problème en utilisant l'approche des pénalités. Le terme de pénalité est de la forme :

$$\alpha \int_{\Gamma} \Psi(u_i - \bar{u}_i) d\Gamma$$

avec  $\alpha \gg 1$  [130].

### 3.5.1.3 Le couplage avec les éléments finis

Cette technique utilise une chaîne ou une bande d'éléments tout au long de la frontière et elle combine les fonctions de forme de cette bande avec l'approximation meshfree [66]. Il a été prouvé que l'approximation résultante peut reproduire exactement un polynôme linéaire. La figure 7 donne une idée sur le fonctionnement de cette méthode. Pour implémenter ce traitement, les éléments finis sont placés dans une région  $\Omega_B$  tout au long de la frontière. Dans cette zone l'approximation EF est définie :  $u^{EF}(x) = \sum_i N_i(x)u_i$ . Dans le reste du domaine,  $\Omega_E = \Omega - \Omega_B$ , une approximation meshfree est définie :  $u^{MM}(x) = \sum_i \Phi_i(x)u_i$ . Ces deux différentes approximations sont par la suite combinées



Figure 7 Combinaison MM-MEF pour le traitement des conditions aux frontières - D'après Huerta et al. [133]

pour donner l'approximation modifiée suivante :

$$u^h(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^{MM}(x) + v(x)(u^{EF}(x) - u^{MM}(x)) & x \in \Omega_B \\ u^{MM}(x) & x \in \Omega_E \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $v(x)$  est définie comme suit :  $v(x) = \sum_i N_i(x)$ ,  $x \in \Gamma_u$ . C'est une fonction qu'on nomme fonction de mélange ou fonction rampe. Elle est égale à 1 sur la frontière et ainsi  $u^h(x) = u^{EF}(x)$  sur  $\Gamma_u$  et égale à 0 sur l'interface éléments-particules. Ce qui implique que  $u^h(x) = u^{MM}(x)$ . Entre les deux, elle varie d'une façon monotone. Cette approximation est continue, la dérivée présente une coupure à l'endroit de l'interface. Cette discontinuité n'affecte pas sévèrement la précision [142].

### 3.5.1.4 La méthode de transformation

La méthode de transformation transforme les coordonnées généralisées en coordonnées nodales et ainsi elle impose directement les conditions aux limites [66]. L'idée de base est la suivante : La relation entre les valeurs de la fonction inconnue  $u^h(\mathbf{x})$  et les valeurs nodales qui présentent les inconnues du système d'équation que nous voulons résoudre,

est :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i \quad (3.18)$$

Donc pour les valeurs nodales actuelles  $u^h(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}_j) \hat{u}_i$ . En notation matricielle on peut écrire  $u^h(\mathbf{x}_j) = u_j^h = \mathbf{S} \hat{u}_j$  avec  $S_{ij} = \Phi_i(\mathbf{x}_j)$ . L'inversion de la matrice  $\mathbf{S}$  donne  $\hat{u}_i = \mathbf{R} u_j$  avec  $\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1} = [\Phi_i(\mathbf{x}_j)]^{-1}$ . En supposant que  $K_{ij}$  est le système d'équation initial à résoudre, c'est-à-dire :

$$K_{ij} \hat{u}_i = f_j \quad (3.19)$$

le système se transforme comme suit :

$$K_{ij} R_{jk} \hat{u}_i = f_j \quad (3.20)$$

Ainsi, on peut imposer directement les CL puisqu'on a une écriture avec les valeurs nodales.

### 3.5.1.5 La méthode de collocation

La condition  $u = \bar{u}$  est introduite directement comme  $u(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{x}_j) \hat{u}_i = \bar{u}(\mathbf{x}_j)$  (Notez la différence entre les valeurs nodales fictives et réelles). Cette équation est prise directement comme une équation dans le système global. Il faut, cependant, se mettre en évidence que cette méthode garantit l'imposition exacte des CL seulement sur les nœuds de frontière mais pas sur toute la frontière [130]. C'est pourquoi il est important de vérifier l'imposition des conditions sur toute la frontière. La technique de collocation a un avantage majeur surtout dans le cas des méthodes sans maillage. Elle permet d'éviter l'étape d'intégration numérique. Ceci est d'autant plus remarquable que le caractère non-polynômial des fonctions de forme augmente. Dans la majorité des méthodes sans maillage de type Galerkin, les fonctions de forme sont rationnelles, ce qui alourdit l'intégration numérique et augmente l'erreur qu'elle engendre. Dans le présent travail, la mé-

thode de collocation va être adoptée non seulement pour traiter les conditions aux frontières, mais pour traiter le système global.

### 3.5.2 L'intégration numérique

L'utilisation de la méthode des résidus pondérés mène à une forme faible de l'EDP. Cette dernière est formée par des expressions intégrales qui doivent être évaluées numériquement. Pour les MMs cette tâche est la plus coûteuse en temps CPU puisque les termes intégrales sont très compliqués. Les dérivées des fonctions de formes peuvent avoir des oscillations, des coupures ou des discontinuités locales. Ces aspects sont désavantageux pour l'intégration numérique puisqu'un nombre important de points d'intégration est nécessaire pour avoir un niveau de précision appréciable. L'intégration de Gauss est souvent utilisée et elle marche bien tant que les fonctions de forme qui sont des rationnels montrent un aspect polynômial. Toutefois, en MMs, les fonctions dérivées d'ordres supérieurs tendent vers la perte de ce caractère polynômial (voir figure 1 de la section 2.4.2) et ainsi la quadrature de Gauss peut ne pas être meilleure que d'autres méthodes d'intégration.

Il est clair que les méthodes de collocation présentent un net avantage par rapport aux méthodes de type Galerkin, puisqu'elles résolvent la forme forte de l'EDP et donc elles ne génèrent aucune expression intégrale à calculer numériquement. Les méthodes d'intégration utilisées en MMs sont :

#### 3.5.2.1 L'intégration avec un maillage de fond ou une structure de cellules

Dans cette méthode, le domaine est divisé en domaines d'intégration dans lesquels la quadrature de Gauss est faite (voir la figure 8). Dans le cas où un maillage de fond est utilisé, les nœuds et les nœuds géométriques coïncident comme dans le cas de la MEF classique. Tandis que dans le cas d'une grille de cellules, les sommets des cellules sont différents des points d'intégration. Le problème de cette technique est le fait que l'erreur due au non-alignement des supports et des domaines d'intégration, est plus importante que

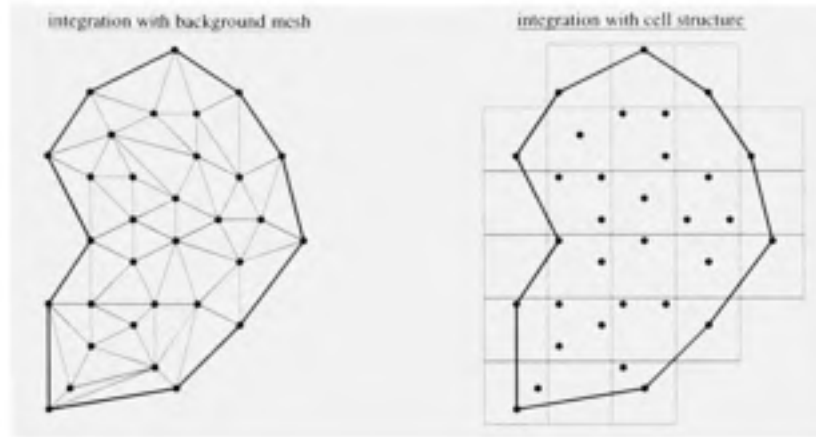


Figure 8 Intégration avec un maillage de fond ou une structure de cellule - D'après Fries et al. [146]

celle due au caractère non rationnel des fonctions de forme. La convergence et la précision seraient donc affectées et même l'utilisation d'un ordre plus élevé pour la quadrature de Gauss seraient insuffisantes pour abaisser l'erreur et remédier à ce problème.

### 3.5.2.2 L'intégration nodale directe

L'évaluation des intégrales seulement aux points  $x_I$  où les particules existent dans le support de la fonction de forme, est appelée intégration nodale directe. Ainsi, les matrices sont calculées entièrement aux nœuds sans aucun recours à un maillage de fond. Cette technique est plus simple que celle de Gauss puisqu'il n'y a aucun recours à des points artificiels pour l'intégration. Seuls les points nodaux déjà existants sont pris comme points d'intégration. Puisque l'erreur d'intégration est plus grande, une nouvelle technique d'intégration stabilisée a été introduite par Chen et al. dans [150]. Cette technique garantit une intégration nodale directe qui satisfait exactement le patch-test.

### 3.5.2.3 L'intégration sur les sous-domaines ou sur les intersections des sous-domaines.

Cette méthode est un choix naturel pour la méthode MLPG qui est basée sur une formulation variationnelle faible et locale. Les résultats de l'intégration sont nettement meilleurs que celle basée sur l'utilisation des maillages des méthodes pseudo-meshfree.

Il est à noter qu'il n'y a aucun besoin d'un maillage pour ce genre d'intégration. Les

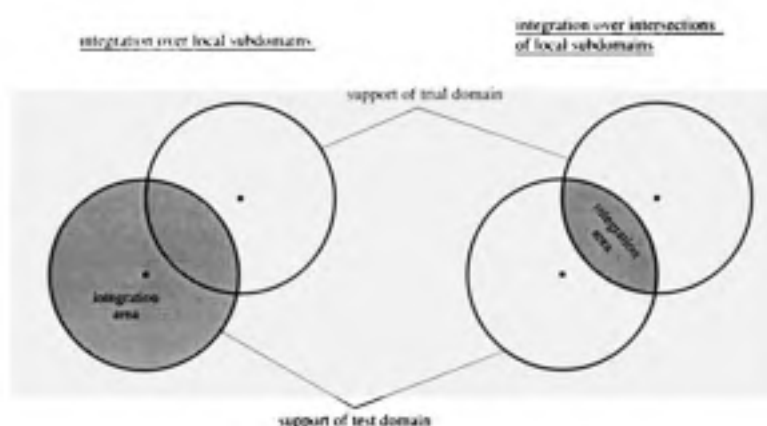


Figure 9 Intégration sur des sous-domaines locaux ou sur leur intersection - D'après [146]

points d'intégration sont directement placés dans les intersection des sous-domaines. Des techniques spéciales de Gauss et de mapping peuvent être utilisées pour intégrer efficacement dans le cas de sous-domaines sphériques qui ont une partie en commun avec les frontières globales du domaine. (Voir figure (9) et (10))

### 3.5.3 La distribution des particules

Bien que la distribution des particules dans les MMs est souvent aléatoire, il n'est pas systématique de considérer une telle distribution acceptable à moins que certains critères soient réunis. Les distributions admissibles doivent satisfaire les conditions suivantes[136] :

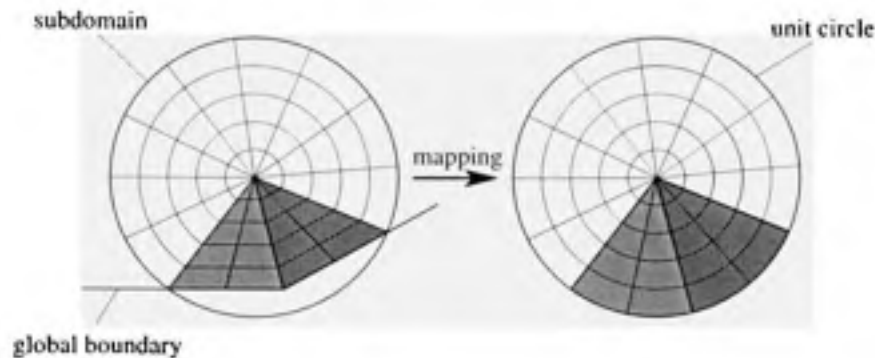


Figure 10 Mapping de situations d'intégration dans le but d'appliquer les techniques standards d'intégration - D'après [149]

- Chaque particule  $x_I$  a un support qui lui est associé. L'union de tous les supports doit couvrir le domaine en entier i.e.  $\Omega \subseteq \bigcup_{I=1}^{NP} S_I$
- Pour tout point  $x$  il existe une boule  $B(x) = \{x' \mid |x - x'| \leq c\}$  dans lequel le nombre de particules  $N_p$  satisfait la condition  $0 < N_{min} \leq N_p \leq N_{max} < \infty$  ou  $N_{min}$  et  $N_{max}$  sont fixés a priori [26]. Donc un point donné du domaine ne doit pas être couvert par plus ou moins un certain nombre de support.
- La distribution des particules doit être "non-dégénérative". Dans un espace de dimension  $d$ , i.e.  $x^* \in \mathbb{R}^d$ , les  $d + 1$  particules nécessaires pour une interpolation linéaire doit décrire un  $d$ -simplexe non-dégénératif. Par exemple, en deux dimensions,  $x^*$  doit appartenir aux supports d'au moins trois fonctions de forme associées à des particules non alignées.

### 3.5.4 La stabilisation

Comme c'est le cas dans les approches conventionnelles, la famille des méthodes sans maillage, est confrontée souvent aux problèmes de stabilité des schémas numériques obtenus. D'ailleurs, la classification "avec ou sans maillage" tombe immédiatement lorsqu'on parle de stabilisation. La classification cinématique des méthodes numériques de-



vient beaucoup plus pertinente de ce point de vue. En effet, un choix d'une approche à description Eulerienne ou de type ALE, implique la présence du terme convectif absent dans le cas d'une description Lagrangienne. Les termes convectifs sont des opérateurs qui ne sont pas auto-adjoints, et ainsi ils posent des problèmes lors de leur traitement numérique. Ceci est particulièrement le cas pour les formulations de types Bubnov-Galerkin lorsque les fonctions de pondération (fonction test) sont choisies comme étant les fonctions inconnues [65]. Des modes oscillants peuvent, ainsi, naître et polluer localement la solution. L'effet de ces modes parasites peut s'étendre sur une échelle globale et affecter la solution du problème. Pour les schémas écrits sous une formulation Lagrangienne, ce problème peut être rencontré bien que le terme convectif disparaît avec l'utilisation des dérivées particulières. En effet, comme on va le voir dans les chapitres 5 et 6, la discrétisation basée sur une approche particulière mène à l'obtention de schémas symétriques, donc instables. La stabilisation des schémas obtenus se révèlent, par conséquent, indispensable.

### 3.6 Conclusions

- En résumé, les MM construisent une interpolation à partir d'un ensemble discret de données sur une distribution de points. En RKPM cette approximation est donnée par :

$$\begin{aligned} u^h(x) &\simeq \sum_{i=1}^N C(x, x_i) w(x - x_i) u_i \Delta V_i \\ &= \mathbf{p}^T(x) [M(x)]^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}(x_i) w(x - x_i) u_i \Delta V_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

En MLS, l'approximation est :

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) [M(x)]^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}(x_i) w(x - x_i) u_i \quad (3.22)$$

Notons que dans le cas où  $\Delta V_i = 1$  l'approximation RKPM et MLS coïncident exactement.

- À partir de ces interpolations, on peut construire des méthodes pour discrétiser les EDP en se basant ou bien sur une formulation variationnelle ou sur la collocation. Dans le premier cas, une étape supplémentaire d'intégration des termes intégrales est nécessaire avant d'aboutir au système linéaire final. Si une approche par collocation est adoptée, le système final est obtenu directement.
- En présence de frontière mobile, lorsque les points bougent, on n'a pas besoin de remaillage mais juste de mettre à jour la liste des voisins !

## CHAPITRE 4

### LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS NATURELS (NEM)

#### 4.1 Introduction

La méthode des éléments naturels ou NEM, est apparue dans les années 1990, bien que son idée originale remonte à plusieurs décennies en arrière [144, 148]. C'est une méthode meshless de type Galerkin qui est basée sur la notion de l'interpolation des "voisins naturels". Une telle interpolation est reconnue être très robuste, interpolante et donc très pratique pour imposer les conditions aux frontières [69]. La principale caractéristique de l'interpolation NEM est son caractère géométrique qui implique uniquement les voisins immédiats (ou naturels) qui entourent le nœud. La fonction de forme est essentiellement composée de rapports d'aires (en 2D) ou de volumes (en 3D), dans le cas d'une interpolation de type "Sibsonienne". Dans le cas où cette dernière est de type "non-Sibsonienne", elle est formée de rapports de longueurs (en 2D) ou de surfaces (en 2D). Dans ce qui suit, nous allons présenter les deux types d'interpolation et discuter brièvement de leurs avantages et de leurs limites d'utilisation.

#### 4.2 Les interpolants de type voisins naturels

En 1980, Sibson [122],[123] a introduit la notion d'interpolation par les voisins naturels pour l'approximation et le lissage des données. Avec l'émergence des meshfree methods, d'autres travaux se sont intéressés à cette méthode et à la généralisation de l'utilisation du diagramme de Voronoï pour la construction des fonctions de forme.

##### 4.2.1 Le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay

Le diagramme de Voronoï (ou de Dirichlet) est une construction géométrique unique réalisée à partir d'un ensemble de nœuds distincts dans un espace Euclidien de dimension

quelconque  $d$ . L'appellation du diagramme de Voronoï remonte au mathématicien russe Georgi Voronoï (1868-1908).

Soit  $N$  un ensemble de  $M$  nœuds distincts d'un domaine borné  $\Omega$  :  $N = n_1, n_2, \dots, n_M$ . Le diagramme de Voronoï associé à l'ensemble  $N$  est la sub-division du domaine en des régions convexes  $V(n_I)$  de manière à ce que chaque point dans  $V(n_I)$  est plus proche du nœud  $n_I$  que de n'importe quel autre nœud  $n_J \in N$  ( $I \neq J$ ). La région  $V(n_I)$  (cellule de Voronoï de premier ordre) d'un nœud  $n_I$  est le polygone (polyèdre) convexe :

$$V(n_I) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, x_I) < d(x, x_J) \forall J \neq I\} \quad (4.1)$$

avec  $d$  une mesure de Lebesgue définie sur  $\Omega$

Le dual du diagramme de Voronoï est la triangulation de Delaunay, nommée d'après Boris Delone (1890-1980), mathématicien russe dont le nom a été francisé en Delaunay. Le fait de dire que la triangulation de Delaunay est le dual du diagramme de Voronoï se traduit comme suit : deux points d'un nuage de points sont connectés dans la triangulation de Delaunay si et seulement si leurs cellules de Voronoï respectifs sont adjacentes (elles ont une arête commune en  $2D$ ). Elle est construite en joignant les nœuds qui ont en commun  $d - 1$  facettes de Voronoï. Pour un ensemble  $N$  de nœuds, le diagramme de Voronoï est unique alors que la triangulation de Delaunay ne l'est pas (exemple le cas d'un carré).

#### 4.2.2 Les interpolants de type Sibsonien

L'interpolant de type voisin naturel ou interpolant de Sibson a été introduit par Sibson [123]. La définition du diagramme de Voronoï de premier ordre a été introduite dans l'équation 4.1. De la même manière, on peut étendre la définition à un ordre supérieur  $k > 1$ . Ainsi on définit le diagramme de Voronoï de second ordre comme suit :

$$V(n_I) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) < d(x, x_K) \forall K \neq I, J\} \quad (4.2)$$

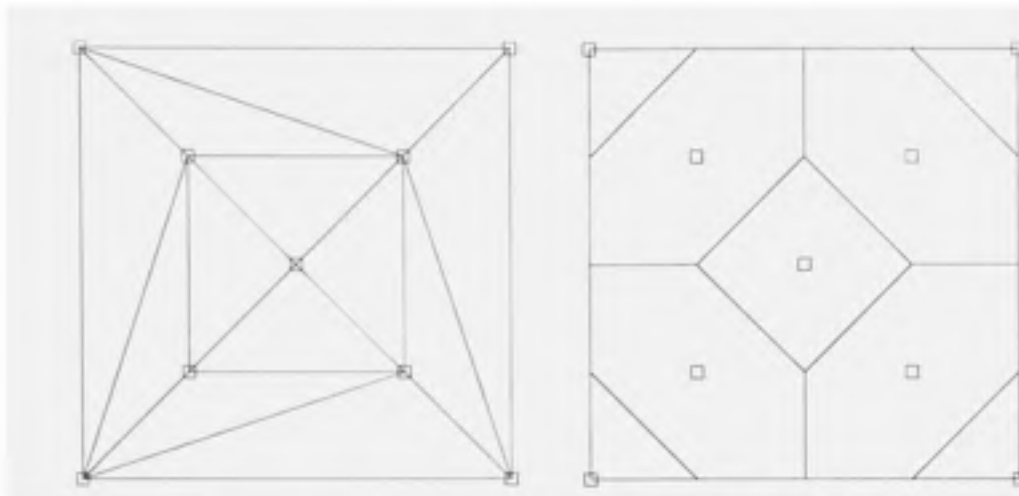


Figure 11 Triangulation de Delaunay et son diagramme de Voronoï correspondant

Par conséquent le diagramme de Voronoï de second ordre est la subdivision du plan (ou de l'espace) en domaines  $V_{IJ}$  de manière à ce que  $V_{IJ}$  est le lieu de tout point qui a  $I$  comme nœud le plus proche et  $J$  comme deuxième nœud le plus proche.

Sibson a utilisé la notion de diagramme de Voronoï de second ordre pour définir la fonction d'interpolation de type voisin naturel. Cette dernière peut être utilisée, en outre, comme fonction de pondération ainsi qu'une fonction test dans la formulation de type Galerkin. En se référant à la figure 12, si un point  $P$  de coordonnée  $x$  est inséré dans la triangulation de Delaunay, la fonction de forme de type voisin naturel de  $P$ , associée au nœud  $I$ , est définie comme étant le rapport de la surface de la cellule de Voronoï de second ordre ( $A_I$ ) par l'aire totale de la cellule de Voronoï de premier ordre ( $A$ ) de  $P$  :

$$\phi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)}, A(x) = \sum_{j=1}^n A_j(x) \quad (4.3)$$

$n$  étant le nombre de voisins naturel de  $P$ . La dérivée de la fonction de forme de type Sibson est obtenue en dérivant l'équation 4.3 :

$$\phi_{I,j}(x) = \frac{A_{I,j}(x) - \phi_I(x)A_j(x)}{A(x)}, j = 1, 2 \quad (4.4)$$

Quand  $x \rightarrow x_I$  alors  $\phi_I(x_I) = 1$  et par conséquent toutes les autres fonctions de forme sont nulles, i.e.  $\phi_I(x_J) = \delta_{IJ}$ . D'où la conclusion très importante : les propriétés de positivité, de la partition de l'unité et du caractère interpolant sont automatiquement vérifiées :

$$0 \leq \phi_I \leq 1, \quad \phi_I(x_J) = \delta_{IJ}, \quad \sum_{I=1}^n \phi_I(x) = 1 \quad (4.5)$$

Cette interpolation vérifie aussi la propriété de coordonnées locales et elle reproduit exactement toute distribution linéaire (linear completeness)[148] :

$$x = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) x_I \quad (4.6)$$

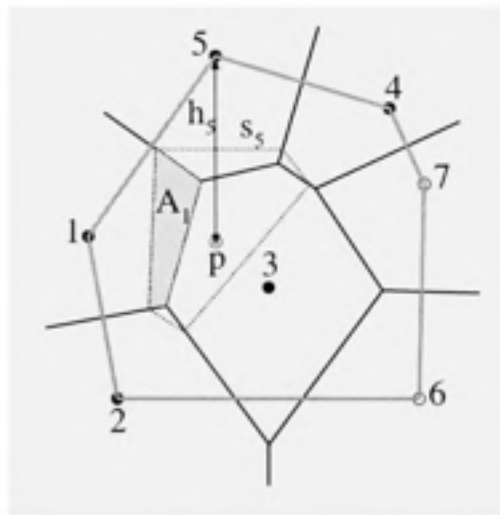


Figure 12 Interpolation de type sibsonien vs celle de type Laplace-figure d'après [105]

### 4.2.3 Les interpolation non-Sibsoniennes ou de Laplace

Soit  $N$  un ensemble de nœuds à qui sont associés les cellules de Voronoï définies par l'équation 4.1. Soit  $t_{IJ}$  la facette associée aux cellules  $V_I$  et  $V_J$  (de dimension  $d - 1$  :

segment en  $2D$  ou polygone en  $3D$ ) et  $m(t_{IJ})$  la mesure de Lebesgue de  $t_{IJ}$ . Si un point  $P$  quelconque de coordonnées  $x \in \mathbb{R}^d$  est introduit dans la mosaïque (tessellation), et si ce point possède  $n$  voisins naturels (voir figure 12), alors la fonction de forme de Laplace associée au nœud  $I$  est [15],[24] :

$$\phi_I(x) = \frac{\alpha_I(x)}{\sum_{J=1}^n \alpha_J(x)} \quad (4.7)$$

avec

$$\alpha_J(x) = \frac{m(t_{IJ}(x))}{h_J(x)}$$

en  $2D$  cette équation prend la forme suivante :

$$\phi_I(x) = \frac{\alpha_I(x)}{\sum_{J=1}^n \alpha_J(x)}, \quad \alpha_J(x) = \frac{s_J(x)}{h_J(x)} \quad (4.8)$$

où  $\alpha_J(x)$  est la fonction poids de Laplace,  $s_I(x)$  est la longueur de l'arête de Voronoï associé à  $P$  et au nœud  $I$  et  $h_I(x)$  est la distance Euclidienne entre les points  $P$  et  $I$  (voir Figure 12). Ainsi la fonction test basée sur une interpolation de type NEM, s'écrit comme suit :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I^n \phi_I(\mathbf{x}) u_I \quad (4.9)$$

La dérivée de la fonction d'interpolation de Laplace est :

$$\phi_{I,J}(x) = \frac{\alpha_{I,J}(x) - \phi_I(x)\alpha_J(x)}{\alpha(x)} \quad (4.10)$$

avec  $\alpha(x) = \sum_J \alpha_J(x)$ . Il est à noter que le calcul de cette dérivée peut se faire explicitement vu que l'expression de la fonction de forme est disponible. En  $2D$ , la fonction de forme de Laplace implique un rapport de longueurs, alors celle de Sibson implique un rapport d'aires. Ainsi, le coût de calcul favorise le premier type de fonction sur le dernier. Cet avantage est d'autant plus marqué en  $3D$ .

### 4.3 Propriétés

En plus de la positivité, les principales propriétés de l'interpolation du type voisins naturels sont énumérées dans ce qui suit :

#### 4.3.1 Interpolation nodale

ce qui se traduit par :

$$\phi_I(x_J) = \delta_{IJ} \quad (4.11)$$

avec  $\delta_{IJ}$  est ce qui est connu sous l'appellation du delta de Kronecker. Ainsi, comme pour le cas de la méthode des éléments finis ou en volumes finis, l'interpolation NEM est interpolante. Cette propriété est très importante puisqu'elle implique une aisance relative dans l'imposition des conditions aux frontières. Il est important de noter dans ce même cadre que la majorité des interpolations de type MM ne satisfont pas cette propriété ; ce qui a rendu l'imposition des conditions aux frontières le problème principal de toute la famille des MM.

#### 4.3.2 La partition de l'unité

Les interpolants Sibsoniens et non-Sibsoniens vérifient la consistance d'ordre 0 ou la partition de l'unité :

$$\sum_I^N \phi_I(x) = 1 \quad (4.12)$$

Ainsi toutes les interpolations de type NEM reproduisent exactement les fonctions constantes.



### 4.3.3 La consistance linéaire

Les différentes interpolations de type NEM reproduisent exactement une fonction qui varie linéairement. C'est ce qui est connu couramment par la consistance linéaire.

$$x = \sum_I^N \phi_I(x) x_I \quad (4.13)$$

Le lecteur est référé aux travaux de Sukumar et al. [148, 69] pour les démonstrations de la consistance linéaire qui concerne les interpolations de Sibson et de Laplace.

### 4.3.4 Linéarité stricte de l'approximation sur les bords

Sur la frontière d'un domaine convexe, les fonctions de forme sont strictement linéaires entre deux nœuds voisins. La fonction d'approximation étant une combinaison linéaire des fonctions de forme, celle-ci est également linéaire sur la frontière de ce domaine. La démonstration peut être trouvée dans [144].

Pour les cas non-convexes, des traitements spéciaux sont requis pour retrouver la linéarité de la fonction de forme. Ces traitements sont résumés dans le paragraphe 'Imposition des conditions aux frontières'.

### 4.3.5 Nature du support

Le support de la fonction d'interpolation de type NEM est l'union de cercles circonscrits dans les triangles de Delaunay autour du nœud  $I$ . Voir figure 13.

### 4.3.6 Principales différences

L'interpolation de type Sibson et celle de Laplace sont différentes dans deux aspects principaux :

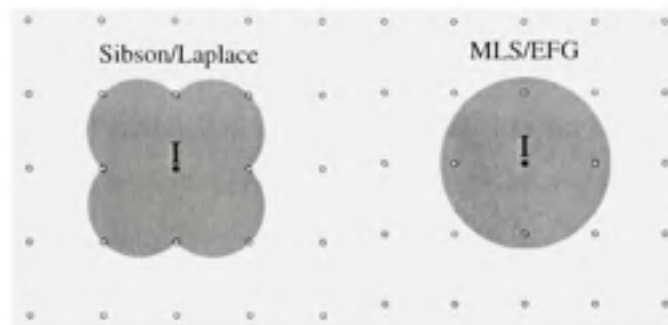


Figure 13 Le support de la fonction d'interpolation de type NEM vs le support des méthodes MLS et EFG - figure d'après [105]

- La fonction de forme de Laplace est symétrique (car  $\alpha_{IJ} = \alpha_{JI}$ ) alors que celle de Sibson ne l'est pas.
- La fonction de forme de Sibson est  $C^1$  sur tout le domaine  $\Omega$  sauf aux nœuds  $I$  là où elle est  $C^0$ . La fonction de forme de Laplace est  $C^0$  aux nœuds ainsi que sur toute la frontière du support.

#### 4.4 Imposition des conditions aux frontières

Le caractère interpolant de la fonction de forme favorise et facilite l'imposition des conditions aux frontières. Cette propriété est très précieuse dans le cas de la méthode NEM puisqu'elle est une des rares méthodes purement meshless et qui vérifie la propriété du 'delta de Kronecker'. Toutefois, un problème persiste dans le traitement des conditions aux frontières pour la méthode NEM. Le traitement diffère selon la présence ou non du caractère convexe du domaine d'étude. C'est pourquoi, chaque cas est présenté séparément dans ce qui suit :

#### 4.4.1 Traitement des domaines convexes

L'interpolant de Sibson reproduit précisément une fonction linéaire sur une frontière d'un domaine convexe. Sukumar et al. [148] ont montré que les fonctions d'approximation  $u^h(\mathbf{x})$  sont strictement linéaire entre deux nœuds situés sur une arête du triangle de Delaunay. La démonstration est assez triviale et repose sur la comparaison des contributions des cellules de Voronoï des nœuds situés sur la frontière et ceux situés à l'intérieur du domaine. La contribution de la cellule de Voronoï d'un nœud de la frontière est infinie ; ce qui rend la contribution de la cellule de Voronoï d'un nœud interne négligeable (voir figure 14).

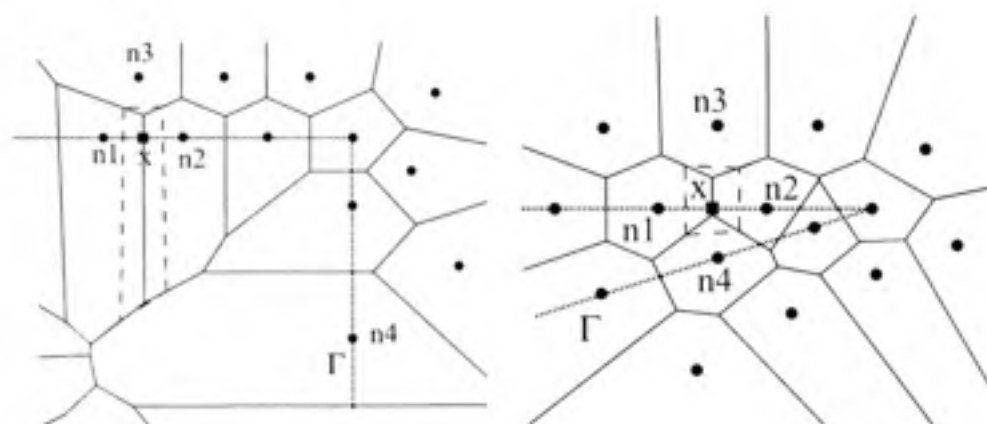


Figure 14 Contribution des cellules de Voronoï des nœuds de frontière dans le cas de domaine convexe et non convexe

Cette propriété est perdue pour l'interpolation de type Sibsonien dans le cas d'un domaine non-convexe. En effet, dans ce cas, les cellules de Voronoï des nœuds de frontière ne sont plus infinies. Ainsi, leurs contributions sont comparables à celles des nœuds de l'intérieur du domaine. En pratique, un raffinement suffisant au voisinage de la frontière serait capable de retrouver un comportement quasi-linéaire. Pour le cas de l'interpolation de type non-Sibsonien, Sukumar et al.[148] montrent que "les déplacements sont parfaitement li-

néaires sur les frontières des deux types de domaines (convexes et non-convexes)". Ainsi les conditions aux limites dans le cas de la NEM avec une interpolation non-Sibsonienne, peuvent être imposées directement comme dans le cas de la méthode des éléments finis.

#### **4.4.2 Traitement des domaines non-convexes**

Sukumar et al. [144] a prouvé que l'interpolation du type NEM est linéaire sur un domaine convexe. Cependant, dans un domaine non-convexe, la linéarité est perdue pour l'interpolation de type Sibsonien. Pour remédier à ce problème, deux approches principales ont été proposées. La première approche est le concept alpha-shape. La seconde, est l'adaptation de la méthode NEM en utilisant les diagrammes de Voronoï contraints, ce qui mène à la méthode NEM contrainte ou C-NEM. Il est important de noter que d'autres approches existent pour traiter les domaines non-convexes (décomposition en sous-domaines convexes (applicable que pour les domaines ayant une ou plusieurs symétrie), couplage avec la MEF). Cependant, ces approches ne sont pas d'intérêt pratique dans nos applications.

##### **4.4.2.1 Les formes alpha (alpha shapes)**

Une première approche originale pour traiter les cas non-convexes a été proposée par Cueto et al.[92]. Il s'agit de ne pas changer d'interpolation mais de restreindre les voisins naturels intervenant dans le calcul de l'approximation. Dans certains domaines, où il y a un caractère non convexe prononcé, les domaines d'influence des fonctions de forme de certains nœuds de la frontière, ont une étendue importante de manière à ce que cette influence atteigne des nœuds d'une autre frontière (comme dans le cas des fissures). Ainsi et pour prévenir les étendues indésirables de certaines fonctions de forme, Cueto et al.[92] ont proposé l'idée suivante : Éliminer de la liste des voisins naturels tous les nœuds qui appartiennent à un tétraèdre dont le rayon de la sphère circonscrite dépasse une certaine valeur fixée  $\alpha$  [49]. Cette méthode permet de garantir la linéarité le long du bord d'un

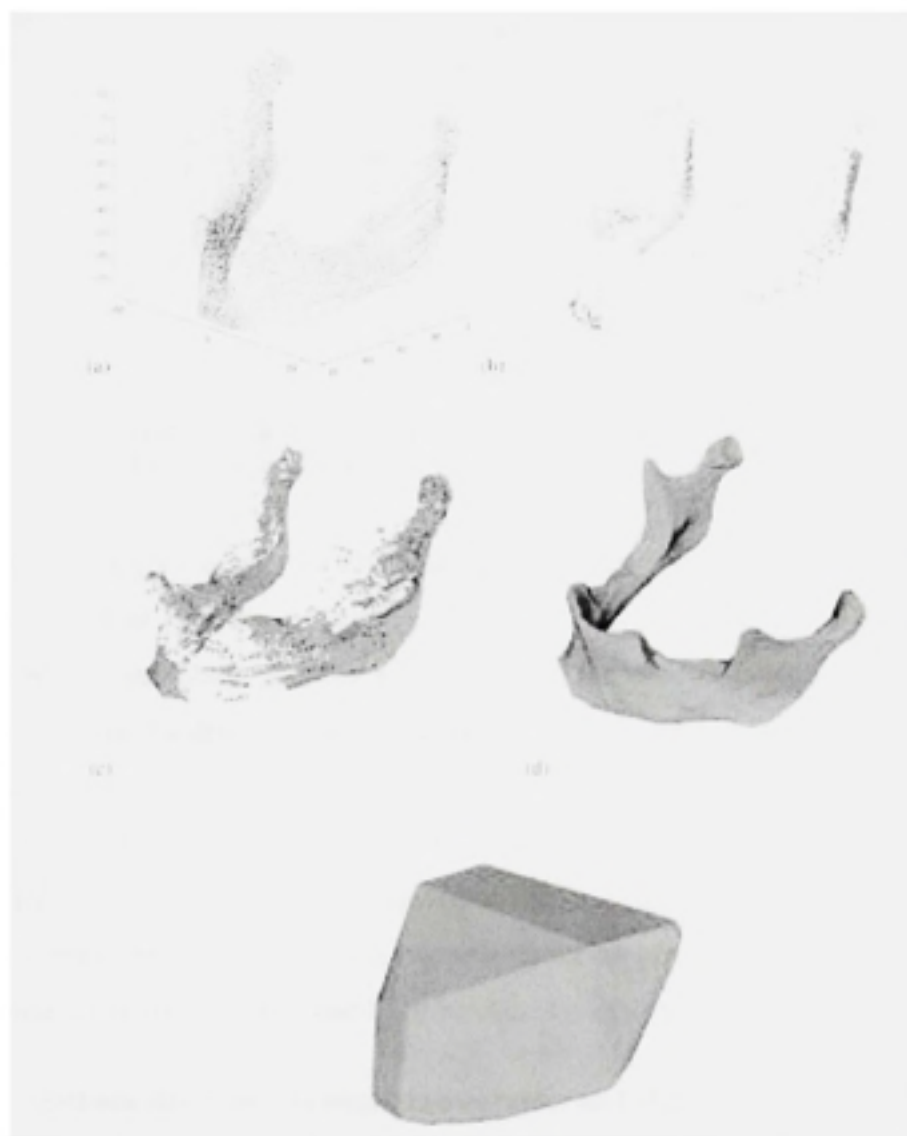


Figure 15 Evolution de la famille des  $\alpha$ -shapes d'un nuage de points représentant une mâchoire inférieure. Formes  $S_0$  (a),  $S_{1.0}$  (b),  $S_{1.5}$  (c),  $S_{2.5}$  (d) et  $S_{\infty}$  (e). D'après Martinez et al.[46]

domaine non convexe puisqu'elle permet d'éviter l'influence des nœuds non désirés (voir figure 16).

Cependant, cette méthode ne peut pas être appliquée pour les cas fortement non convexes. Dans ce cas, la méthode C-NEM devient une alternative efficace.

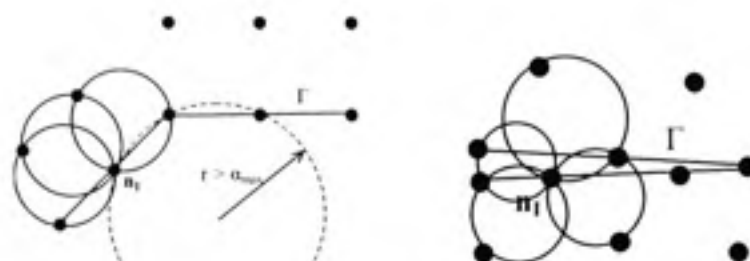


Figure 16 La méthode des formes alpha (alpha shapes) : restriction des voisins naturels (gauche). Inefficacité de la méthode pour les cas fortement non convexes (droite). D'après [49]

Toujours, d'après Cueto et al [92], deux conditions permettent de définir la valeur maximale de  $\alpha$ . Une première condition se base sur la distance entre les bords d'une fissure et leurs axes médians [69]. La deuxième condition se base sur le rayon de courbure local de la frontière. La distance entre deux nœuds consécutifs sur le bord doit être inférieure aux deux paramètres cités. L'application de ces conditions puis la suppression des voisins suivant la méthode des formes alpha garantissent la linéarité de l'interpolation sur la frontière. Toutefois, lorsque la distance entre deux surfaces tend vers zéro, ou lorsque la surface présente un angle vif ou une pointe de fissure et que le rayon de courbure local s'annule, la vérification des conditions précédentes devient impossible [49].

#### 4.5 Méthode des éléments naturels contraints ou C-NEM

Pour remédier aux problème de la méthode NEM lors de la présence du caractère non-convexe du domaine, Yvonnet et al.[49] ont proposé une approche originale basée sur une nouvelle définition du diagramme de Voronoï.

##### 4.5.1 Diagramme de Voronoï contraint

La définition de diagramme de Voronoï "borné" ou "contraint" a été suggérée par Klein [5]. Le diagramme de Voronoï contraint est le dual de la triangulation de Delaunay contrainte.

Pour définir le Diagramme de Voronoï contraint nous avons besoin de définir quelques notions préalables.

Soit  $\Omega$  le domaine d'étude et  $\Gamma$  sa frontière. Soit  $I(\mathbf{n})$  l'ensemble des nœuds intérieurs à  $\Omega$  et  $E(\mathbf{n})$  l'ensemble des nœuds situés sur  $\Gamma$  [49]. Un point  $\mathbf{x}$  est *visible* d'un nœud  $\mathbf{n}_I$  si et seulement si il vérifie un des critères suivants :

- $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{n}_I \in I(\mathbf{n})$  et il n'existe aucune intersection entre le segment  $[\mathbf{x}\mathbf{n}_I]$  et  $\Gamma$
- $\mathbf{x}$  est situé sur une arête ou une face contenant  $\mathbf{n}_I$ ,  $\mathbf{n}_I \in E(\mathbf{n})$

Le diagramme de Voronoï Contraint est l'ensemble des cellules de Voronoï contraintes. A chaque nœud  $\mathbf{n}_I$  est associé la cellule de Voronoï contrainte  $T_I^c$  définie par :

$$T_I^c = \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}\mathbf{n}_I) < d(\mathbf{x}, \mathbf{n}_J), \forall J \neq I, \mathbf{n}_J \text{ visible depuis } \mathbf{n}_I\} \quad (4.14)$$

En d'autres termes, tout point  $\mathbf{x}$  contenu dans  $\Omega$  et se trouvant dans  $T_I^c$  est plus proche du nœud  $\mathbf{n}_I$  que de n'importe quel nœud  $\mathbf{n}_J$  visible depuis le nœud  $\mathbf{n}_I$ .

#### 4.5.2 Interpolation de type C-NEM

Une fois le diagramme de Voronoï contraint défini, l'interpolation de type C-NEM se présente comme suit. Une fonction inconnue  $u$  est approximée par  $u^h(\mathbf{x})$  définie par :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^V \phi_I^C(\mathbf{x}) u_I \quad (4.15)$$

où  $V$  est le nombre de voisins naturels visibles depuis  $\mathbf{x}$ ,  $\phi_I^C$  sont les interpolants Sibsoniens identiques à ceux utilisés dans la méthode NEM mais calculés sur la base du diagramme de Voronoï contraint. Les valeurs  $u_I$  sont les inconnues nodales des voisins naturels visibles depuis le point  $\mathbf{x}$  [49].

Il est très important de noter que lorsque le point  $\mathbf{x}$  s'approche d'une arête ou d'une face de  $\Gamma$ , le contour des cellules de Voronoï concernés est prolongé à l'infini à l'extérieur de

$\Omega$  ce qui implique des contribution en aire (en 2D) ou en volume (en 3D) infinies. Ces contributions infinies permettent de retrouver la linéarité de l'interpolation sur la frontière du domaine.

Ainsi, la méthode C-NEM, avec la nouvelle définition du diagramme de Voronoï, a pu surmonter les "anomalies" rencontrées dans l'interpolation de type NEM standard. C'est pourquoi la continuité, la partition de l'unité, la consistance linéaire et la linéarité sur les bords sont désormais assurées.

La méthode C-NEM a été suggérée principalement pour traiter les cas qui présentent un non-convexité aigüe comme le traitement des fissures en mécanique des solides. Il est important de noter que Yvonnet et al. [49] n'ont présenté la méthode C-NEM que pour le cas d'une interpolation de type Sibsonien. Aucune référence sur la possibilité d'étendre la méthode aux interpolation de type Laplace n'a été évoquée. Cependant, nous ne voyons aucun handicap pour étendre cette méthode aux cas non-sibsoniens puisque la seule modification apportée à la méthode NEM standard est le critère de visibilité ajouté à la définition du diagramme de Voronoï. Toutefois, cette remarque reste à explorer plus rigoureusement.

#### 4.6 L'interpolant NEM de classe $C^k$

Bien que les applications que nous envisageons ne nécessitent qu'une interpolation d'ordre bas (de préférence d'ordre 0 vue la présence de discontinuités), il est intéressant de notifier la capacité de la méthode C-NEM à monter en ordre de dérivation. Plusieurs application en mécanique nécessitent, en effet, un interpolant de classe  $C^k$  où  $k$  doit impérativement être supérieur à 1. D'après Sukumar et al. [148], Belikov et al. [15] ont proposé une procédure compacte pour la génération d'interpolation d'ordre élevé dans le cas d'interpolant de type non-Sibsonien. L'idée principale réside dans le fait qu'un interpolant soit d'ordre  $k$  à un point  $\mathbf{x}$ , il suffit que  $u(\mathbf{x})$  vérifie l'équation  $\Delta^k u = 0$ , où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace. Ainsi pour les voisins de  $\mathbf{x}$ , une série de valeurs  $w_1, w_2, \dots, w_{m-1}$  est calculée de manière



à ce que les  $w_i$  vérifient les relations  $\Delta u = w_1$ ,  $\Delta w_1 = w_2$ ,  $\Delta w_2 = w_3, \dots, \Delta w_{k-1} = w_k = 0$ . Le calcul de  $u(\mathbf{x})$  s'effectue en résolvant l'ensemble de 'équations précédentes en commençant par la dernière et en allant vers la première.

En utilisant l'expression de la fonction test dans sa version non-Sibsonienne, on peut avoir l'identité suivante :

$$\sum_{I=1}^n \frac{u_I - u^h(\mathbf{x})}{2h_I(\mathbf{x})} s_I(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.16)$$

et ainsi, la forme continue cette expression discrète est :

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_V \Delta u dV = 0 \quad (4.17)$$

ou

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \quad (4.18)$$

Le théorème de Gauss a été utilisé pour transformer l'intégrale de surface en une intégrale sur le volume. Par conséquent l'équation 4.9 donne une approximation locale et discrète de la solution de l'équation harmonique en  $\mathbb{R}^d$ . On peut référer à  $\phi_I(\mathbf{x})$  comme étant des " coordonnées harmoniques "

Pour le cas spécifique qui correspond à  $k = 2$ , deux équations sont résolues :  $\Delta u = w$  et  $\Delta w = 0$ . Ainsi les expressions finales pour un interpolant de second ordre sont les suivantes :

$$w_I = \frac{1}{V_I} \sum_{J=1}^{p_I} \frac{u_J - u_I}{h_J^I} s_J^I \quad (4.19)$$

$$w^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) w_I \quad (4.20)$$

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) u_I - \frac{w^h(\mathbf{x}) V(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^n \frac{s_J(\mathbf{x})}{h_J(\mathbf{x})}} \quad (4.21)$$

Ici,  $n$  est le nombre de voisins naturels pour le point  $\mathbf{x}$ ;  $p_I$  est le nombre de voisins naturels du point  $\mathbf{x}_I$  et  $V_I$  est l'aire (le volume) de la cellule de Dirichlet correspondante.

On peut réarranger l'expression de l'équation 4.21 dans la forme standard :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \psi_I(\mathbf{x}) u_I \quad (4.22)$$

avec  $\psi_I(\mathbf{x})$  est la fonction de forme non-sibsonienne de second ordre du nœud  $I$  au point  $\mathbf{x}$  et  $u_I$  ( $I = 1, 2, \dots, m$ ) sont le vecteur des valeurs nodales. En utilisant l'équation 4.21, on peut immédiatement écrire :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) [u_I - \beta(\mathbf{x}) w_I], \quad \beta(\mathbf{x}) = \frac{V(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^n \frac{s_J(\mathbf{x})}{h_J(\mathbf{x})}} \quad (4.23)$$

Soit  $N_x = n_{x1}, n_{x2}, \dots, n_{xn}$  l'ensemble des  $n$  voisins naturels du point  $\mathbf{x}$  et  $N_I = n_{I1}, n_{I2}, \dots, n_{Ip_I}$  l'ensemble des  $p_I$  voisins naturels du point  $\mathbf{x}_I$ . Soit enfin  $\tilde{N}$  l'ensemble de tous les nœuds qui interviennent dans l'approximation :  $\tilde{N} = N_x \cup \bigcup_{I=1}^m N_I$ . Le cardinal de  $\tilde{N}$  est  $m$ . L'expression de  $w_I$  est donnée par l'équation 4.19. On remarque que pour chaque nœud de  $N_x$ , il y a deux sources de contributions distinctes (voir le deuxième terme de l'équation 4.23). Après quelques rearrangements, on arrive à la forme suivante :

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \phi_I(\mathbf{x}) \left[ 1 + \beta(\mathbf{x}) \frac{1}{V_I} \sum_{J=1}^{p_I} \frac{s_J^I}{h_J^I} - \beta(\mathbf{x}) \sum_{J=1}^{p_I} \frac{1}{V_J} \frac{s_J^I}{h_J^I} \right], \quad n_I \in N_x \quad (4.24)$$

$$\psi_I(\mathbf{x}) = -\beta(\mathbf{x}) \sum_{J=1, n_J \in N_J}^n \frac{\phi_J(\mathbf{x}) s_J^I}{V_J h_J^I}, \quad n_I \notin N_x \quad (4.25)$$

et comme  $s_J^I = s_I^J$  et  $s_J^I = s_I^J$  on obtient une écriture finale :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \psi_I(\mathbf{x}) u_I$$

avec :

$$\psi_I(\mathbf{x}) = \phi_I(\mathbf{x}) \left[ 1 + \beta(\mathbf{x}) \sum_{J=1}^{p_I} \frac{s_I^J}{h_I^J} \left( \frac{1}{V_I} - \frac{1}{V_J} \right) \right], \quad n_I \in N_x \quad (4.26)$$

$$\psi_I(\mathbf{x}) = -\beta(\mathbf{x}) \sum_{J=1, n_J \in N_x}^n \frac{\phi_J(\mathbf{x}) s_I^J}{V_J h_I^J}, \quad n_I \notin N_x \quad (4.27)$$

Cette version finale est facile à implémenter et très attrayante numériquement [16].

#### 4.7 Algorithmes de calcul des fonctions de forme de la C-NEM

En 2D, une implémentation de l'algorithme de Bowyer-Watson [2],[31] peut être adoptée pour le calcul des interpolants de type Sibson et Laplace. L'algorithme de Lasserre a été également utilisé [61]. L'algorithme de Watson n'est pas extensible en 3D. De plus l'algorithme échoue dans les points situés sur les arêtes de Delaunay. L'algorithme de Bowyer-Watson est le plus performant pour évaluer la fonction de forme de Laplace en 2D et en 3D. Alors que l'algorithme de Lasserre est efficace pour le calcul de la fonction de forme de Sibson en 3D [69]. Dans ce qui suit, on va se contenter de décrire l'algorithme de Bowyer-Watson [69]. La séquence de figures suivantes (figure 18) illustre les principales étapes de l'algorithme global de la méthode C-NEM.

Soit un point  $P$ , les cercles de Delaunay circonscrits dans les quels le point  $P$  se situe, sont trouvés. Ensuite, toutes les arêtes internes des triangles associés sont effacés. Le point  $P$  est par la suite connecté à tous les nœuds qui l'entourent. Ainsi on définit une nouvelle triangulation. Enfin les fonctions de forme de Sibson ou de Laplace sont évaluées via de simples calculs géométriques. La longueur de l'arête de Voronoï ( $s_{IJ}$ ) est la distance entre deux sommets de Voronoï adjacents (voir figure 18).

Sukumar et al [144] donnent une formule algébrique simple pour calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit dans un triangle. Ces coordonnées sont utilisées pour évaluer les coordonnées des sommets de Voronoï. Pour un triangle  $ABC$  de sommets  $A(\mathbf{a})$ ,

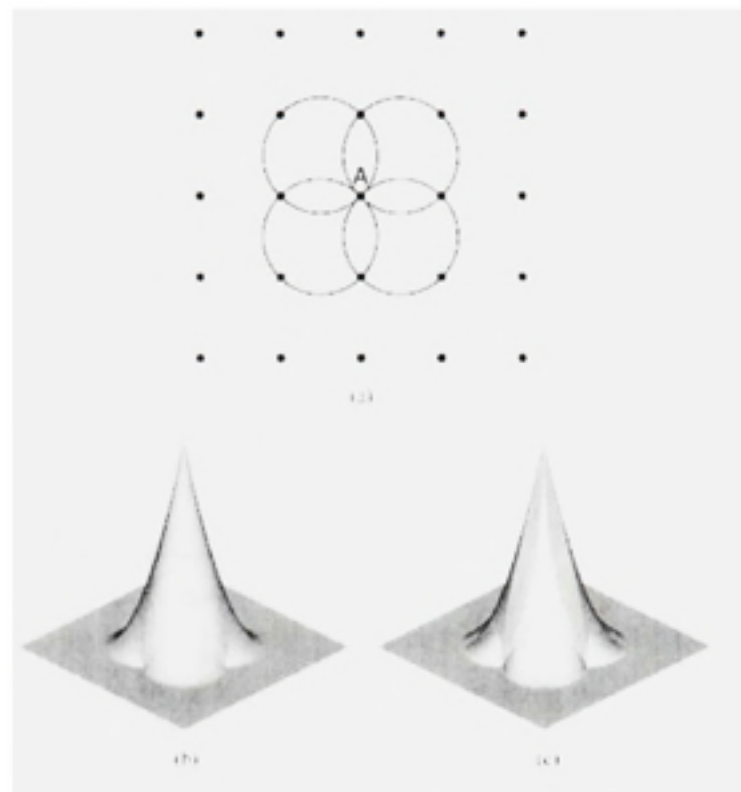


Figure 17 Les fonctions de forme de type Sibson et Laplace : (a) distribution nodale ; (b) fonction de forme de Sibson et (c) fonction de forme no-sibsonienne ou de Laplace-D'après [48]

$B(\mathbf{b})$  et  $C(\mathbf{c})$ , le centre du cercle circonscrit est de coordonnées :

$$x = \frac{(a_1^2 - c_1^2 + a_2^2 - c_2^2)(b_2 - c_2) - (b_1^2 - c_1^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_2 - c_2)}{D} \quad (4.28)$$

$$y = \frac{(b_1^2 - c_1^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_1 - c_1) - (a_1^2 - c_1^2 + a_2^2 - c_2^2)(b_1 - c_1)}{D} \quad (4.29)$$

où  $D$  est quatre fois l'aire du triangle  $ABC'$  :

$$D = 2[(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (b_1 - c_1)(a_2 - c_2)] \quad (4.30)$$

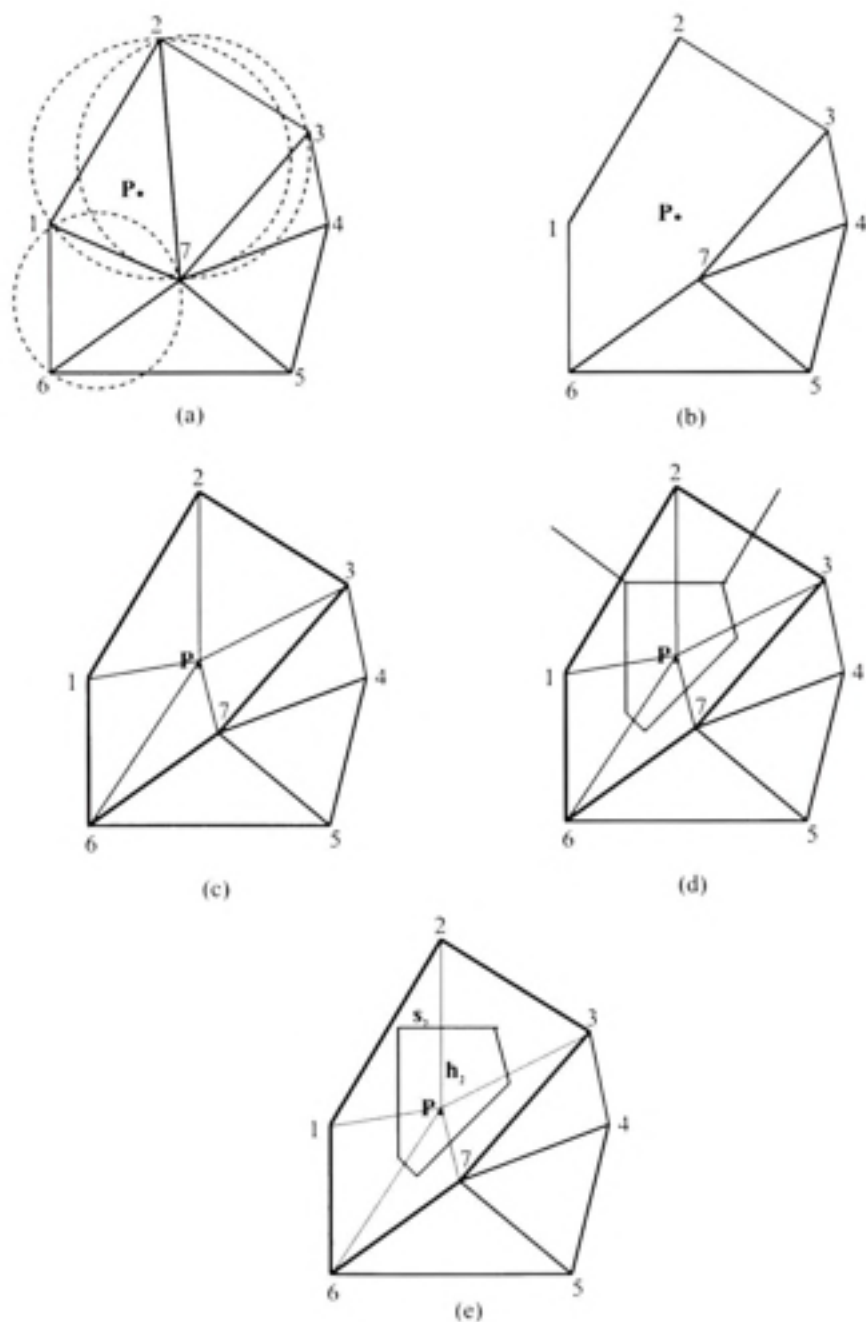


Figure 18 Étapes de calcul de la fonction de forme de type NEM : (a) triangles et cercles de Delaunay, (b) Élimination des arêtes intérieures, (c) Joindre le point  $P$  aux sommets qui l'entourent (d) Fonction de forme de Sibson et (d) Fonction de forme de Laplace.

## 4.8 La méthode NEM et l'adaptativité ou le raffinement

La méthode C-NEM paraît très adaptée pour résoudre des problèmes présentant des discontinuités, ou de grands changements du domaine de résolution [48],[69]. Une des manières privilégiées par les numériciens pour augmenter la précision et pour mieux capter les discontinuités, est le raffinement. Cette stratégie est très délicate et surtout très coûteuse lors de l'utilisation des méthodes à maillage. Dans le cas des méthodes sans maillage, l'adaptativité paraît plus réalisable vue la flexibilité des méthodes et surtout l'absence des maillages spécialement pour les méthodes vraiment meshless.

Dans le cas de la méthode NEM, qui est une méthode typiquement meshless, le raffinement est une tâche relativement aisée. Yvonnet et al.[48] ont présenté des stratégies de raffinement et des critères avec lesquels ils procèdent au raffinement.

Il est logique de procéder au raffinement dans le cas où l'erreur du schéma numérique n'est plus acceptable. C'est pourquoi, la stratégie de raffinement se base sur des indicateurs (ou capteurs) d'erreurs et ce pour améliorer la précision des résultats.

### 4.8.1 Les indicateurs d'erreurs

L'application de la méthode C-NEM dans [48] portait sur la résolution d'un problème d'élastostatique en formulation de Galerkin. Dans ce cas, les auteurs ont défini deux types d'indicateurs d'erreur.

#### 4.8.1.1 Premier indicateur d'erreur

Le premier indicateur est basé sur le calcul de l'erreur  $L^2$  locale sur le tenseur de contrainte discontinu. Les déplacements nodaux  $\mathbf{d}$  sont obtenus par la résolution du système linéaire final (et après l'intégration numérique sur les cellules de Voronoï). Ces déplacements sont utilisés pour calculer les contraintes sur les nœuds à l'intérieur de chaque cellule de Voronoï  $\sigma_i = \mathbf{C}\tilde{\epsilon}_i^h = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}}_i\mathbf{d}$ .

D'un autre côté, le tenseur de contraintes peut être défini d'une manière continue en n'importe quel point  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Ce tenseur  $\tilde{\sigma}(\mathbf{x})$  est obtenu par l'interpolation C-NEM sur les valeurs nodales :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^V \phi_i^C(\mathbf{x}) \tilde{\sigma}_i^h \quad (4.31)$$

où  $V$  est le nombre de nœuds voisins visibles de  $\mathbf{x}$  et  $\phi_i^C$  sont les fonctions d'interpolation contraintes de ces voisins. Ainsi, l'erreur locale peut être calculée comme suit :

$$e_i^h = \left[ \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_i^h - \tilde{\sigma})^T \mathbf{C}^{-1} (\tilde{\sigma}_i^h - \tilde{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} = \|\tilde{\sigma}_i^h - \tilde{\sigma}\|, \quad (4.32)$$

#### 4.8.1.2 Deuxième indicateur d'erreur

Le deuxième indicateur d'erreur est basée sur une définition continue du tenseur de contrainte. Il est possible de construire une fonction de contrainte continue en utilisant la dérivée de la fonction de forme là où elle est définie :

$$\sigma^h(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \mathbf{B}^h(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (4.33)$$

et ainsi un autre type d'indicateur d'erreur peut être défini en utilisant les deux expressions 4.31 et 4.33 :

$$e_i^h = \left[ \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} (\sigma^h - \tilde{\sigma})^T \mathbf{C}^{-1} (\sigma^h - \tilde{\sigma}) d\Omega \right]^{1/2} = \|\sigma^h - \tilde{\sigma}\|, \quad (4.34)$$

#### 4.8.2 Indexes de précision des calculs (computing effectivity indexes)

Puisque le diagramme de Voronoï constitue une décomposition complète du domaine d'étude, l'erreur globale est obtenue par la sommation des erreurs locales sur tous les

nœuds du domaine :

$$\left(\tilde{e}_{\Omega}^h\right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\tilde{e}_i^h\right)^2 \quad (4.35)$$

et

$$\left(e_{\Omega}^h\right)^2 = \sum_{i=1}^N \left(e_i^h\right)^2 \quad (4.36)$$

La contribution relative à l'erreur globale peut aussi être définie comme suit :

$$\tilde{\eta}_i^h = \frac{\tilde{e}_i^h}{\|\tilde{\sigma}\|_{\Omega}} \quad (4.37)$$

et

$$\eta_i^h = \frac{e_i^h}{\|\sigma\|_{\Omega}} \quad (4.38)$$

Il est important de noter le coût très élevé du calcul de ces erreurs et particulièrement le calcul des intégrales dans les équations 4.32 et 4.34. En effet, il est nécessaire de faire une triangulation des cellules de Voronoï et d'accomplir une intégration numérique sur ces triangles.

L'index de précision  $\theta$  est défini comme suit :

$$\tilde{\theta}^h = \frac{\tilde{e}_{\Omega}^h}{e_{\Omega}^{ex}} = \frac{\|\tilde{\sigma}^h - \tilde{\sigma}\|_{\Omega}}{\|\tilde{\sigma}^h - \sigma^{ex}\|_{\Omega}} \quad (4.39)$$

et

$$\theta^h = \frac{e_{\Omega}^h}{e_{\Omega}^{ex}} = \frac{\|\sigma^h - \sigma\|_{\Omega}}{\|\sigma^h - \sigma^{ex}\|_{\Omega}} \quad (4.40)$$

L'index de précision doit être proche de 1, du moins tendre asymptotiquement quand le nombre de nœuds augmente.



### 4.8.3 Stratégie de raffinement

Pour améliorer la précision des solutions approximées, il est très important de connaître la contribution locale de chaque cellule. c'est pourquoi, Yvonnet et al.[48] définissent l'indicateur d'erreur permissible  $\tilde{\eta}$  et l'indicateur d'erreur pour chaque cellule  $\tilde{\eta}_i$  :

$$\tilde{\eta}^2 = \sum_{i=1}^N (\tilde{\eta}_i)^2 \quad (4.41)$$

Pour avoir une erreur similaire dans chaque cellule, il faut avoir  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_*$ ,  $\forall i$ , avec :

$$\tilde{\eta}_* = \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \quad (4.42)$$

En suivant Zienkiewicz et al.[87], on peut définir une longueur caractéristique d'une nouvelle cellule par rapport à celle d'une ancienne et ce pour obtenir une convergence d'ordre  $p$  ( $\Theta(h^p)$ ). Dans notre cas, on peut définir la longueur caractéristique  $h$  d'une cellule de Voronoï comme étant la moyenne des distances entre le nœud central et ses voisins naturels. Ainsi, on a :

$$\frac{h_i^{new}}{h_i^{old}} = \left[ \frac{\tilde{\eta}_*}{\tilde{\eta}_i} \right]^{\frac{1}{p}} = \left[ \frac{\tilde{\eta} \|\dot{\sigma}(\mathbf{x})\|_{\Omega}}{\sqrt{N} \epsilon_i^h} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (4.43)$$

D'après Yvonnet et al.[48], le taux de convergence de la méthode C-NEM est équivalent à celui de la MEF sur un maillage triangulaire et utilisant une interpolation linéaire. Ainsi, le taux de convergence prévu est  $p$  dans le cas où une norme Euclidienne (Energy norm) est utilisée.

En utilisant une des stratégies de raffinement présentées dans la figure 19, on obtient :

$$\frac{h^{new}}{h^{old}} \leq \frac{1}{2} \quad (4.44)$$

et par conséquent, le raffinement doit opérer dans le cas où :

$$\left[ \frac{\|\hat{\eta}\| \|\hat{\sigma}(\mathbf{x})\|_{\Omega}}{\sqrt{N} \epsilon_r^h} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} \quad (4.45)$$

La stratégie illustrée dans la figure 19-a a été utilisée dans quelques publications ([63],[83]).

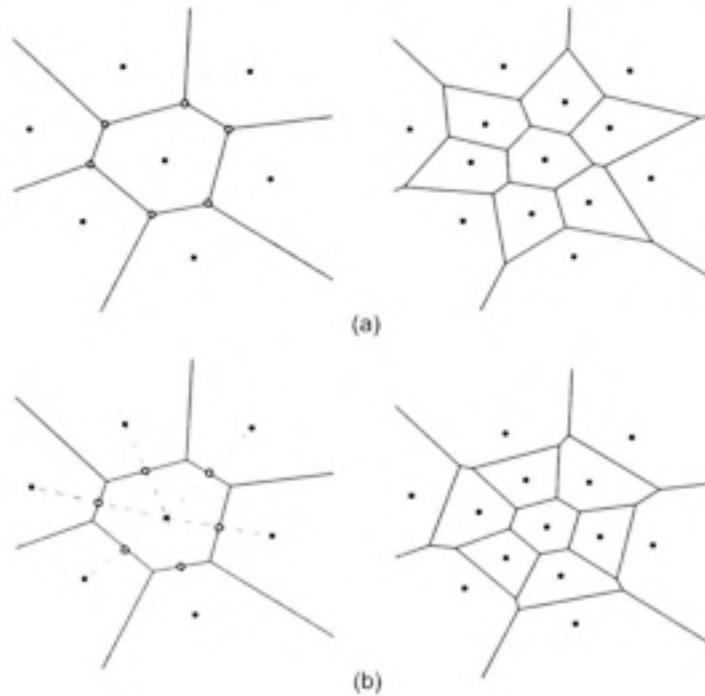


Figure 19 Procédures de raffinement : (a) ancienne approche et (b) approche adoptée dans [48]

Elle est facile et recommandée pour raffiner un nuage irrégulier de points. La deuxième stratégie de la figure 19-b a été appliquée par Yvonnet et al.[48] dans des problèmes d'élastostatique. Les mêmes auteurs ont testé l'efficacité des deux approches et ont remarqué que, dans leurs cas d'application, la deuxième approche est beaucoup plus efficace que la première.

Vue la nature même de l'approximation NEM qui se base sur l'utilisation du diagramme de Voronoï, le raffinement ne nécessite pas de coût additionnel dans le calcul comme c'est



Figure 20 Exemple d'adaptativité dans le cas d'un problème d'élastostatique d'après Yvonnet [48]

le cas pour les autres MMs. De plus, et contrairement aux autres MMs, le support de la fonction de forme de la méthode NEM est automatiquement défini par la détection des voisins naturels. Ce qui évite les difficultés liées à l'adaptation de la taille du support lors de la procédure de raffinement [23].

#### 4.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la méthode des éléments naturels dans sa version standard. Dans la majorité des cas d'application rencontrés dans la littérature, un cadre variationnel de type Galerkin sous une description Eulerienne, est utilisé. Quelques applications ont utilisé une description Lagrangienne actualisée, tout en gardant l'approche variationnelle (voir par exemple [100, 46, 69]). Les applications citées ici ont simulé des écoulements à surface, sans pour autant utiliser les équations de Saint-Venant.

Il est intéressant, donc, d'explorer les capacités de la méthode des éléments naturels à traiter des écoulements à surface libre en présence de chocs et en utilisant le système de Saint-Venant. Le grand avantage de la NEM, en l'occurrence la fonction de forme interpolante, offre une aisance dans l'imposition des conditions aux frontières. Cet avantage est absent dans toutes les autres méthodes sans maillage. De plus, les approches variation-

nelles utilisées jusqu'ici avec la NEM, ne nous intéressent pas particulièrement dans les applications que nous envisageons. Ceci est due principalement au fait que nous sommes en présence d'une loi de conservation (système de Saint Venant) qui est souvent traitée à l'aide d'approche de type volumes finis. Par conséquent, on va essayer de développer une approche particulière basée sur la fonction de forme de type NEM. Le chapitre 6 sera consacré à cette tâche. Une nouvelle méthode élaborée dans le cadre de ce travail et baptisée *Méthode des volumes naturels* sera développée, présentée et appliquée pour simuler les écoulements à surface libre.

## CHAPITRE 5

### LA MÉTHODE SPH (SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS) APPLIQUÉE AUX ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

Après avoir présenté les principales méthodes sans maillage dans le chapitre 3 et après avoir présenté plus en détail la méthode NEM dans le chapitre 4, nous entamons à partir de ce chapitre les applications de ces méthodes dans le cas des écoulements à surface libre. La première étape consiste à utiliser la méthode SPH vue son caractère Lagrangien intrinsèque. L'application de la méthode SPH dans sa version standard a fait l'objet du projet de maîtrise de l'auteur [12]. Cette étape a servi à explorer les capacités de la méthode et de détecter ses limites. Le travail effectué dans le cadre de cette thèse vise à surmonter les difficultés de la SPH. Ce chapitre est, donc, consacré à l'application de la méthode SPH aux écoulements à surface libre. Les équations de Saint-Venant sont formulées en utilisant cette méthode pour simuler des écoulements en 1D et en 2D en absence de termes sources. La méthode est présentée dans sa version standard. Ensuite, son implémentation dans le cas des équations de Saint-Venant est détaillée. Une étude comparative de la méthode dans son cadre "variationnel" avec la méthode des éléments finis donne les limites de validité, aussi bien de la méthode dans sa version de collocation, que de celle des expressions des gradients. Dans la même philosophie, et vue la forme centrée du schéma obtenu, une bonne partie de ce chapitre sera consacrée aux techniques de stabilisation utilisées. En effet, une viscosité artificielle obtenue par une analogie avec les techniques de décentrage (upwinding) rencontrées et utilisées pour les solveurs de Riemann, est introduite dans le schéma SPH final. Finalement, des résultats de validation en 1D et 2D sont présentés en fin de chapitre. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication apparue dans le "International Journal for Numerical Methods in Fluids" en 2005.

## 5.1 État de l'art

Dans la littérature scientifique, la grande majorité des travaux rencontrés qui traitent la simulation des écoulements à surface libre, utilisent les approches Euleriennes ou pseudo-Lagrangienne (ALE). La méthode des éléments finis (voir par exemple Soulaïmani et Saad [153], Souli et Zolesio [81] et Hicks [50]) et surtout la méthode des volumes finis (voir par exemple Toro [38], Loukili et al. [6], Audusse [35] et Mohammadian et al.[34]) représentent les approches systématiques pour cette fin. La description Lagrangienne reste d'un usage très limité. Dorfi et al. [97] ont introduit la méthode de différences finis mobile (*moving finite difference methods*). Par la suite Miller a présenté la méthode des éléments finis mobile [129, 89]. Les deux dernières décennies ont vu l'avènement de la famille des méthodes sans maillage (*meshfree methods*). Les premières applications parues étaient dans le domaine de l'astrophysique en utilisant la méthode SPH (voir Lucy [95] ainsi que Gingold et Monaghan [73]). La méthode SPH a été utilisée dans plusieurs applications en mécanique de solide et en fluide. À titre d'exemple, les références [96], [139], [57], [103] et [10] montrent des applications de la méthode SPH dans la simulation des chocs à grande vitesse. En écoulements à surface libre, on peut citer les travaux de Monaghan [76]. Dans ce travail, et dans plusieurs autres ([114],[99],...), les équations de Saint-Venant n'ont pas constitué le support mathématique des simulations. Les équations de dynamique des gaz dans le cadre d'une loi d'état isentropique représentait la base mathématique de ces travaux. La loi la plus souvent rencontrée dans la littérature est donnée par l'équation (5.1) :

$$P = k \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (5.1)$$

où  $P$  est la pression,  $\rho$  est la masse volumique et  $\gamma$  est un paramètre et le coefficient  $k$  est choisi de manière à avoir un nombre de Mach faible pour l'écoulement (typiquement entre 0.1 et 0.01). Les équations de Saint-Venant ont été traitées avec la méthode SPH dans très peu de cas. Wang et al.[67] ont simulé les cas de bris de barrage en 1D. Les résultats qu'ils ont publiés sont non-reproductibles. Contrairement à ce dernier travail, Ben Moussa a

présenté dans sa thèse [17] une étude mathématique exhaustive des méthodes particulières de type SPH. Son travail a le mérite d'être un des seuls (avec les rapports de Sandia Lab. [32] et [85]) à fonder les bases mathématiques de la méthode et d'étudier d'une manière rigoureuse l'influence des différents paramètres qui entre dans la formulation. Dans le même contexte, Frank et Reich [132] ont étudié les propriétés de conservation de la méthode SPH dans le cas des équations de Saint-Venant. Ils se sont intéressés surtout à la conservation de la vorticité (Potential vorticity PV).

Les équations de Navier-Stokes ont été traitées par la méthode SPH pour simuler les écoulements à surface libre. On peut citer le travail de Shao et al. [40] dans lequel les auteurs simulent des écoulements de fluide Newtoniens et non-Newtonien en présence de surface libre. Inutska [138] a introduit les solveurs de Riemann dans la formulation SPH pour évaluer les forces sur chaque particules. Cha et al. [11] ont présenté une nouvelle formulation de la SPH appelée GPH (Godunov-type Hydrodynamics). La GPH a exactement la même philosophie que la SPH à l'exception que la GPH utilise un solveur de Riemann pour évaluer les accélérations hydrodynamiques. Dans la même lignée de travaux, Monaghan [77] et de Molteni [21] montrent des reformulation de la méthode SPH avec les solveurs de Riemann. La méthode SPH a même fait l'objet d'un livre qui traite de ses aspects mathématiques et numériques ainsi que ses divers application. Voir la référence [106] pour plus de détails. De plus, quelques codes commerciaux basés sur la méthode SPH commencent à être de plus en plus populaires dans la communauté des ingénieurs. Citons à titre d'exemple le code SPARTACUS-2D qui a été développé en se basant sur les travaux de recherche de EDF (Électricité de France) [33, 124, 37] et qui a été incorporé dans le grand logiciel TELEMAC-2D spécialisé dans les écoulements à surface libre.

Dans ce chapitre, la méthode SPH sera présentée ensuite implémentée et appliquée dans le cas des SWE. Les solveurs de Riemann vont être utilisés pour des fins de stabilisation.

## 5.2 Présentation de la méthode SPH

L'idée principale de la méthode SPH repose sur l'identité suivante : Toute valeur  $f(x)$  d'une fonction  $f$  en un point  $\mathbf{x}$  peut s'écrire comme suit :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{s})\delta_{\mathbf{x}}(\mathbf{s})d\Omega = \int_{\Omega} f(\mathbf{s})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})d\Omega \quad (5.2)$$

où  $\Omega$  est le domaine de définition de  $f$ ,  $\delta_{\mathbf{x}}$  est la masse de Dirac centrée en  $\mathbf{x}$ . En pratique, la masse de Dirac est numériquement non-reproductible. Par conséquent, elle est remplacée par une fonction plus régulière appelée "fonction noyau" (Kernel), qu'on notera désormais  $W$ , qui doit vérifier quelques propriétés mathématiques qu'on va détailler par la suite [75, 82]. L'équation (5.2) devient :

$$f(\mathbf{x}) \simeq \int_{\Omega} f(\mathbf{s})W(\mathbf{x} - \mathbf{s})d\Omega \quad (5.3)$$

$W$  dépend de la variable  $\mathbf{x} - \mathbf{s}$  et d'une autre variable notée  $l$  et appelée "longueur de lissage" (smoothing length). La fonction Gaussienne et la fonction Spline sont les noyaux le plus souvent utilisées. La fonction Gaussienne est donnée par :

$$W(\mathbf{x}, l) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}l)^d} \exp^{-\xi^2} \quad (5.4)$$

où  $\xi = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$  et  $d$  est la dimension spatiale du problème. Un exemple des fonctions Spline est donné par :

$$W(\mathbf{x}, l) = \begin{cases} 4 - 6\xi^2 + 3\xi^3 & \text{si } 0 \leq \xi < 1 \\ (2 - \xi)^3 & \text{si } 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{si } \xi \geq 2 \end{cases} \quad (5.5)$$

D'autres exemples de noyaux ont été évoqués dans le paragraphe 3.4.4.

Les fonctions noyaux doivent vérifier les conditions suivantes [74, 113] :



1.  $W(\mathbf{x}, t) > 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega_f$ , où  $\Omega_f$  est un sous-domaine du domaine total  $\Omega$
2.  $W(\mathbf{x}, t) = 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_f$ , complément de  $\Omega_f$  dans  $\Omega$
3.  $W$  doit être normalisé :  $\int_{\Omega} W(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1$
4.  $W(\mathbf{s}, h)$  une fonction monotone et décroissante avec  $\mathbf{s} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
5.  $W(\mathbf{s}, h) \rightarrow \delta(\mathbf{s})$  quand  $h \rightarrow 0$  où  $\delta$  est la masse de Dirac.

De plus, la fonction noyau doit avoir la propriété de la symétrie (i.e.  $W(\mathbf{s} - \mathbf{x}) = W(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ ) et par conséquent, l'anti-symétrie de sa dérivée (i.e.  $\frac{\partial W(\mathbf{s} - \mathbf{x})}{\partial r} = -\frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\partial x}$ ). Cette propriété est nécessaire et indispensable pour garantir la conservation de la quantité de mouvement (voir la démonstration dans Gingold [73]).

La discrétisation de l'équation (5.3) en utilisant une quadrature de Riemann donne l'approximation SPH de la fonction  $f$  :

$$f(\mathbf{x})^a = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (5.6)$$

L'exposant  $a$  dénote l'approximation.  $N$  est le nombre de voisins situés dans le cercle de lissage relatif à  $\mathbf{x}$  et qui ont des masses fixes  $m_j$  et des coordonnées  $\mathbf{x}_j$ .  $\rho_j$  est la masse volumique relative à la particule  $j$  et  $m_j/\rho_j$  est son volume qui peut varier pour les fluides compressibles.

Toujours en appliquant une quadrature de Riemann, en utilisant l'équation (5.6), la dérivée spatiale de la fonction  $f$  est donnée par :

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial r^m} \right)^a = \sum_{j=1}^N V_j f(\mathbf{x}_j) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}^m} \quad (5.7)$$

La dérivée spatiale  $(\partial f / \partial \mathbf{x}^m)^a$  peut être obtenue en dérivant directement l'équation (5.3). Ce qui procure l'identité suivante  $(\partial f / \partial \mathbf{x}^m)^a = \partial f^a / \partial r^m$ . Cette propriété n'est pas valide dans le cas où le noyau n'a pas un gradient anti-symétrique. En effet, pour assurer les

conditions de la consistance d'ordre zéro (appelée partition de l'unité) dans une forme discrète, c-à-d :

$$\sum_{j=1}^N V_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = 1 \quad (5.8)$$

et

$$\sum_{j=1}^N V_j \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = 0 \quad (5.9)$$

Pour monter en consistance de la méthode SPH, un noyau corrigé est souvent utilisé. Il est donné par [99] :

$$W^c(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = C(\mathbf{x})W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (5.10)$$

où  $C^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ . Cependant cette correction fait perdre le caractère symétrique (pair) du noyau et donc le caractère anti-symétrique du gradient. Ce constat implique deux conséquences :

- La conservation de la quantité de mouvement peut être compromise. D'après Monaghan [75], l'anti-symétrie du gradient du noyau est une condition nécessaire pour garantir la conservation de la quantité de mouvement.
- Une attention spéciale doit être portée au calcul des dérivées spatiales du noyau corrigé. En effet, l'identité  $(\partial f / \partial \mathbf{x}^m)^a = \partial f^a / \partial x^m$  n'est plus vérifiée. En effet, utilisant l'équation (5.4) avec un noyau symétrique et à support compact, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^m} &\simeq \int_{\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial s^m} W^c(\mathbf{x} - \mathbf{s}) ds \\ &= - \int_{\Omega} f(\mathbf{s}) C(\mathbf{x}) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\partial s^m} ds \\ &= \int_{\Omega} f(\mathbf{s}) C^c(\mathbf{x}) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\partial s^m} ds \end{aligned} \quad (5.11)$$

et ainsi en appliquant une quadrature de Riemann, l'approximation de la dérivée

spatiale donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^m}\right)^a(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j f(\mathbf{x}_j) C(\mathbf{x}) \frac{\partial W(\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\partial s^m} \Big|_{s=\mathbf{x}_j} \quad (5.12)$$

Il est clair que  $(\partial f / \partial x^m)^a \neq \partial f^a / \partial x^m$ .

### Remarques

1. En appliquant la formule (5.7), la dérivée discrétisée calculée dans la position  $\mathbf{x}_l$  est :

$$\nabla f(\mathbf{x}_l)^a = \sum_{j=1}^N V_j f(\mathbf{x}_j) \nabla W_{lj} \quad (5.13)$$

avec  $\nabla W_{lj} = \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_l}$ . À titre d'exemple, considérons, en 1D, une distribution de particules distancées de  $dx$ , et un noyau symétrique avec une longueur de lissage  $l = dx/2$ . Dans ce cas,  $V_j = dx$ . L'approximation de la dérivée est alors :

$$\frac{df(\mathbf{x})^a}{dx} = dx \frac{dW_{l,l+1}}{dx} (f_{i+1} - f_{i-1})$$

Cette approximation peut être nulle dans des cas non-triviaux comme pour la fonction donnée par  $f_l = (-1)^l$ . Ces fonctions sont des solutions oscillantes qui représentent des fonctions parasites (spurious modes) qui sont capables de se multiplier surtout au voisinage des discontinuités et ainsi polluer la solution totale. Ce cas, est un cas d'instabilité très connu dans le contexte des méthodes de différences finies et d'éléments finis, lorsque les gradients sont approximés par des schémas centrés.

2. Comme suite à la remarque précédente, il est important de noter que, dans le cas d'une approximation à deux points, la meilleure précision est obtenue dans le cas où  $dx(dW_{l,l+1}/dx) = 1/2dx$ , alors que le pire cas correspond à  $dW_{l,l+1}/dx = 0$ . Il est clair que la précision de l'approximation est liée au choix du noyau et de sa longueur de lissage. Si cette dernière est très petite, le nombre de particules situées dans le cercle de lissage de rayon  $\kappa l$  et qui interviennent dans l'approximation est

insuffisant pour obtenir une bonne précision. Dans le cas contraire, si la longueur de lissage est trop grande, les caractéristiques locales de la solution peuvent être lissées. Dans nos exemples numériques, nous allons choisir  $\kappa = 2$  et une longueur de lissage  $l$  égale à deux fois l'incrément spatial initial  $dx$ .

Rappelons, à présent, brièvement l'application de la méthode SPH dans le cas de l'équation de la quantité de mouvement de dynamique des gaz :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \quad (5.14)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse et  $p$  est la pression. Pour une particule  $i$ , l'accélération nodale est approximée classiquement par :

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij} \quad (5.15)$$

Dans le passage de l'équation (5.14) à l'équation (5.15), une intégration par partie, utilisant l'identité suivante, a été effectuée :

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) - p \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Pour amortir les oscillations dans les régions des chocs et afin d'éviter l'interpénétration des particules, une viscosité artificielle [75] est introduite dans l'équation (5.15) :

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\alpha \tilde{c}_{ij} \tilde{\mu}_{ij} + \beta \tilde{c}_{ij} \tilde{\mu}_{ij}^2 & \text{si } (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.16)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes,  $\tilde{c}_{ij}$  est la moyenne des vitesses d'ondes associées aux particules  $i$  et  $j$  et  $\tilde{\mu}_{ij} = l(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) / ((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 + \epsilon^2)$ . Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont souvent pris respectivement 0.01 et 0 [76]. Ainsi, la version stabilisée de l'équation de la

quantité de mouvement (5.13) :

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} \quad (5.17)$$

### 5.3 Implémentation dans le cas des équations de Saint-Venant

En se basant sur ce qui est dit dans le paragraphe précédent, on peut obtenir une implémentation des équations de Saint-Venant avec la méthode SPH et ce par analogie avec les équations des écoulements compressibles et isentropiques. Dans les écoulements à surface libre, la profondeur de l'eau  $h$  joue le même rôle que joue la masse volumique  $\rho$  dans les écoulements compressibles. De plus, en utilisant l'équation d'état  $p = gh^2/2$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement en écoulements d'eau peu profonde est obtenue par analogie avec l'équation (5.17) :

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N V_j \left( g(h_i + h_j) + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} \quad (5.18)$$

où  $h_i$  est la profondeur d'eau nodale relative au nœud  $i$ . Il est à noter que la propriété de consistance du noyau  $\sum_{j=1}^N V_j \nabla W_{ij}$  a été utilisée pour obtenir une forme symétrique de l'équation (5.18).

#### Remarques

1. L'équation de continuité est automatiquement et implicitement vérifiée puisqu'une description Lagrangienne est utilisée. La masse totale de l'eau est subdivisée en  $N$  particules de masses  $m_j$ . La masse de chaque particule est conservée dans le temps, ce qui garantit la conservation globale de la masse. La profondeur d'eau peut être calculée en utilisant l'approximation SPH (équation 5.6) :

$$h^a(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N h_j V_j W_{ij} = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (5.19)$$

avec  $w_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{j})$ . Ainsi la profondeur approximée n'est pas la valeur nodale.

2. D'après les équations (5.17) et (5.18), l'accélération nodale est obtenue directement par collocation et donc sans aucune procédure de "smoothing" comme c'est le cas pour la pression. Ainsi, le terme de gauche de l'équation (5.17) est obtenu par une procédure de collocation. Tandis que le terme de droite est obtenu par une approximation faisant intervenir les particules voisines. Dans la section suivante, il est montré comment ces deux termes sont obtenus d'une manière consistante en utilisant une analyse variationnelle.

#### 5.4 Une formulation variationnelle stabilisée avec l'approximation SPH

L'approximation SPH (5.6) peut être considérée comme une interpolation de type éléments finis. En effet, elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$f^a(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) f_j(t) \quad (5.20)$$

où  $N_j(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}) V_j$  est la fonction de forme associée au noeud  $j$ . Toutefois, cette fonction de forme n'est pas interpolante i.e. elle ne vérifie pas l'identité de Kronecker :

$$N_j(\mathbf{x}_i) \neq \delta_{ij} \quad (5.21)$$

où  $\delta_{ij}$  est la fonction Delta de Kronecker. L'équation (5.21) implique que  $f^a(\mathbf{x}_i) \neq f_i$ . Cette identité cause des grandes difficultés dans l'imposition des conditions aux frontières de type Dirichlet.

##### 5.4.1 Formulation variationnelle

Considérons dans la suite une ÉDP de type hyperbolique :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla F = 0 \quad (5.22)$$

où  $F$  est une fonction scalaire de flux ( par exemple, pour les équations de Saint-Venant  $F = gh$ ). Une formulation variationnelle faible associée à l'équation (5.22) est donnée par :

$$\int_{\Omega_i} N_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left( \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \right)^a d\Omega - \int_{\Omega_i} F \nabla N_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega + \int_{\Gamma_i} F N_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (5.23)$$

avec  $\Omega_i$  est le support compact de frontière  $\Gamma_i$  associé à la particule  $i$ .  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire normal sortant à  $\Omega$ . Lorsque le support de la particule  $i$  est complètement inclus dans le domaine de définition (particule interne), le terme intégrale de contour s'annule.

Plusieurs choix sont possibles pour approximer le flux  $F$ . Un premier choix consiste à choisir une approximation constante sur  $\Omega_i$ , qui est égale par exemple à  $F(\mathbf{x}_i)$  ou à une valeur lissée telle que  $F^a(\mathbf{x})$ . Le premier choix est peu coûteux en calcul et il est souvent utilisé dans les formulation classique de la méthode SPH. Désormais, on notera par  $F_h(\mathbf{x})$  le flux approximé. D'un autre côté, l'approximation SPH de la dérivée temporelle de la vitesse est obtenue par un "lissage de la dérivée particulaire sur le temps", comme :

$$\left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)^a(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) V_j \dot{\mathbf{u}}_j \quad (5.24)$$

avec  $\dot{\mathbf{u}}_j = D\mathbf{u}_j/Dt$  l'accélération nodale de la particule  $j$ . Cette équation suppose que la longueur de lissage n'est pas fonction du temps. Par conséquent, le premier terme de l'équation (5.23) devient :

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega_i} W_i V_i W_j V_j d\Omega \right) \dot{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=1}^N M_{ij} \dot{\mathbf{u}}_j$$

où  $M_{ij}$  sont les coefficients de la matrice masse. Par l'application de la procédure classique de "condensation de la masse" (mass lumping) sur la matrice de masse consistante, qui

consiste à concentrer toutes les masses du voisinage sur la particule  $i$ , on a :

$$\sum_{j=1}^N M_{ij} = \int_{\Omega_i} W_i V_i \left( \sum_{j=1}^N W_j V_j \right) d\Omega \quad (5.25)$$

En prenant en considération que  $\sum_{j=1}^N W_j V_j = 1$ , on obtient :

$$\sum_{j=1}^N M_{ij} = \int_{\Omega_i} W_i V_i d\Omega = V_i \quad (5.26)$$

Par conséquent, si la matrice consistante de masse est remplacée par la matrice "lampée", l'équation (5.23) devient :

$$\dot{\mathbf{u}}_i - \int_{\Omega_i} F \nabla N_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = 0 \quad (5.27)$$

En utilisant une quadrature de Riemann, l'équation (5.27) donne :

$$\dot{\mathbf{u}}_i - \sum_{j=1}^N V_j F_h(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ji} = 0 \quad (5.28)$$

Dans le cas d'un noyau consistant avec une dérivée anti-symétrique,  $\sum_{j=1}^N V_j F_h(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} = 0$  et  $\nabla W_{ij} = -\nabla W_{ji}$ . La forme discrétisée finale de l'équation (5.23) est donnée par :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = - \sum_{j=1}^N V_j (F_h(\mathbf{x}_j) + F_h(\mathbf{x}_i)) \nabla W_{ji} = 0 \quad (5.29)$$

Si on considère le cas où un noyau corrigé comme celui donné par l'équation (5.10), alors le problème variationnel donné par l'équation (5.23) sera :

$$\int_{\Omega_i} N_i^c(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left( \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \right)^a d\Omega = \int_{\Omega_i} F \nabla N_i^c(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega \quad (5.30)$$



Utilisant une quadrature numérique et considérant le fait que  $\sum_{j=1}^N V_j F_h(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} = 0$ , le terme de droite de l'équation (5.30) est développé comme suit :

$$\sum_{j=1}^N V_j (F_h(\mathbf{x}_i) + F_h(\mathbf{x}_j)) (C(\mathbf{x}_j) \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} + W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) C(\mathbf{x}_j)$$

Comme  $W$  est symétrique, alors  $\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j} = -\nabla W_{ij}$ . En appliquant la procédure de lumping sur le terme de gauche de l'équation (5.30), le problème variationnel discrétisé devient :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = - \sum_{j=1}^N V_j (F_h(\mathbf{x}_i) + F_h(\mathbf{x}_j)) (C(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} - W_{ij} \nabla C(\mathbf{x}_j)) \quad (5.31)$$

**Remarque :**

On peut conclure d'après ce qui est évoqué en sus, que la formulation standard de la méthode SPH ne peut être obtenue que si :

- un noyau consistant, symétrique et à support compact est utilisé ;
- une concentration de la matrice masse (mass lumping) est effectuée ;
- le flux est choisi comme étant un flux discret et égal à  $F_h(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_i)$ .

### 5.4.2 Stabilisation

Passons maintenant à la stabilisation de la formulation variationnelle (5.29) ou (5.31). Comme il a été montré dans la section 5.2, l'approximation des gradients des flux avec la méthode SPH standard, aboutit à un schéma centré et donc instable. Des oscillations parasites peuvent naître et s'amplifier surtout aux voisinages des discontinuités et ainsi polluer la solution globale du problème. D'où la nécessité d'introduire des mécanisme de stabilisation dans le schéma d'approximation discret. Notre approche de stabilisation va se baser sur une analogie des techniques existantes et appliquées pour les solveurs de Riemann. Cette approche aboutira à l'introduction d'une nouvelle viscosité artificielle qui

"décentre" le schéma (5.31) et qui sera plus performante que celle suggérée par Monaghan (avec l'équation (5.16)) dans [74].

Dans ce qui suit on va considérer les deux noyaux de types Gaussien et Spline. Ces noyaux vont être corrigés ultérieurement pour assurer les conditions de consistance. Le noyau Gaussien est donné par :

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \frac{1}{(l\sqrt{\pi})^d} \exp(-\zeta^2) \quad (5.32)$$

Le noyau de type Spline cubique est :

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 4 - 6\zeta^2 + 3\zeta^3 & \text{si } (0 \leq \zeta < 1) \\ (2 - \zeta)^2 & \text{si } (1 \leq \zeta < 2) \\ 0 & \text{si } (\zeta \geq 2) \end{cases} \quad (5.33)$$

où  $\zeta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  et  $d$  est la dimension de l'espace. De plus, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\nabla W_{ij}}{|\nabla W_{ij}|} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$$

avec  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  le vecteur distance entre les particules  $i$  et  $j$ .

Revenons, à présent, à l'équation (5.29). Elle stipule que le flux est estimé au milieu de la distance entre  $i$  et  $j$ . Ce constat est beaucoup plus clair si on réécrit l'équation (5.29) sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = - \sum_{j=1}^N 2V_j \frac{F_h(\mathbf{x}_i) + F_h(\mathbf{x}_j)}{2} |\nabla W_{ij}| \mathbf{n}_{ij} \quad (5.34)$$

Pour introduire un mécanisme de stabilisation dans l'approximation du flux, un schéma simple de Lax-Friedrichs [118, 38] est utilisé. Ainsi le flux centré  $(F_h(\mathbf{x}_i) + F_h(\mathbf{x}_j))/2$  est

remplacé par

$$\frac{1}{2} \left( (F_h(\mathbf{x}_i) + F_h(\mathbf{x}_j)) - \lambda(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right)$$

où  $\lambda$  est une longueur d'onde caractéristique. Ainsi, la formulation SPH stabilisée devient :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = - \sum_{j=1}^N V_j \nabla W_{ij} \left( (F_h(\mathbf{x}_i) + F_h(\mathbf{x}_j)) - \lambda(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) \quad (5.35)$$

Par conséquent, le terme de stabilisation dans la direction  $\mathbf{n}_{ij}$  correspond à :

$$\Pi_{ij} = -\lambda(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (5.36)$$

La normale  $\mathbf{n}_{ij}$  peut s'exprimer en utilisant le vecteur  $\mathbf{r}_{ij}$ , ce qui mène à l'expression suivante :

$$\Pi_{ij} = -\frac{\lambda(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{r}_{ij}^2 + \epsilon^2}} \quad (5.37)$$

$\epsilon$  étant introduite pour éviter la division par zéro.

La formulation stabilisée de l'approximation SPH de l'équation hyperbolique (5.22) peut être appliquée directement sur l'équation de la quantité de mouvement de Saint-Venant, et ce en prenant la fonction de flux  $F = gh$ . Si son approximation est choisie comme  $F_h(\mathbf{x}_i) = gh_i$ , l'approximation SPH, donnée par l'équation (5.18), s'obtient. Toutefois, il est possible de choisir  $F_h(\mathbf{x}_i) = gh_i^a$  et ainsi on obtient la formulation suivante :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = - \sum_{j=1}^N V_j \nabla W_{ij} \left( g(h_i^a + h_j^a) + \Pi_{ij} \right) \quad (5.38)$$

qui est supposée être plus stable. Dans le cas où un noyau corrigé est utilisé, l'équation précédente devient :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = - \sum_{j=1}^N V_j \left( g(h_i^a + h_j^a) + \Pi_{ij} \right) (\nabla W_{ij} - W_{ij} \nabla C(\mathbf{x}_j)) \quad (5.39)$$

L'équation de continuité (5.19) est utilisée pour la détermination de la valeur lissée la profondeur  $h_i^a$  et non pas la valeur nodale  $h_i$ . Ainsi, les volumes  $V_j$  sont calculés par  $V_j = m_j/h_j^a$ . Le terme de stabilisation est donné par :

$$\Pi_{ij} = -\frac{\lambda_{ij}\mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{r}_{ij}^2 + \epsilon^2}} \quad (5.40)$$

avec  $\mathbf{u}_{ij} = (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)$  est la vitesse relative,  $\lambda_{ij} = (c_i + c_j)/2$  et  $c_i = \sqrt{gh_i^a}$  est la vitesse d'onde. Comparé avec la viscosité artificielle donnée par Monaghan (équation 5.16) :

- L'équation (5.40) ne dépend pas de la longueur de lissage  $l$  ;
- Elle ne dépend pas d'une constante  $\alpha$  ;
- Son application ne dépend pas des cas où les particules se rapprochent ou s'éloignent, ainsi elle empêchent les oscillations parasites (stencil spurious oscillations) de naître et de s'amplifier.

## 5.5 Traitement des conditions aux frontières

Après l'élaboration du schéma de l'approximation SPH pour les équations de Saint-Venant, nous allons voir les procédures de traitement des conditions aux frontières. Comme indiqué précédemment, cette tâche n'est pas facile à accomplir vu le caractère non-interpolant de la fonction de forme de type SPH. Le caractère Lagrangien de la méthode complique encore plus l'imposition des conditions aux frontières. En bougeant, les positions des particules et leur distributions spatiales changent dans le temps. C'est pourquoi, les exemples que nous avons traités ont des géométries simples. D'ailleurs, le traitement des frontières reste toujours un problème ouvert pour la méthode et c'est principalement à cause de ce problème que nous avons cherché à nous tourner vers une autre méthode Meshfree qui dispose du caractère interpolant.

Parmi les techniques utilisées pour le traitement des frontières, Monaghan [76] a introduit la méthode des forces. Il a considéré que l'interaction entre les particules et la frontière

est semblable à ce qui existe à l'échelle moléculaire. Ainsi, une particule de frontière fixe (mur) exerce une force de type Lennard-Jones sur la particule mobile voisine (fluide). Cette approche a donné des résultats médiocres dans nos cas d'application. La présence de chocs rend la solution très sensible à ce genre de traitement. Les deux approches utilisées ici sont : la méthode des particules fantômes et la méthode de symétrisation. Nous allons expliquer brièvement comment les implémenter dans nos cas d'applications.

### **5.5.1 Méthode des particules fantômes**

Cette méthode consiste à ajouter des rangées de particules sur le bord de la frontière pour compléter la partie manquante du support des particules de frontières (voir figure 21). Dans le cas où on veut imposer une condition de glissement parfait, les composantes tangentielles de la vitesse et de l'accélération sont attribuées aussi aux particules fantômes. Les composantes normales affectées aux particules fantômes sont l'opposé de celles des particules réelles. Ainsi, la vitesse sur la frontière du domaine sera purement tangentielle. Dans nos cas d'applications, c'est ce type de condition qui est exigé mathématiquement par les équations de Saint-Venant. Dans le cas où, une condition de frottement parfait est nécessaire, les particules fantômes doivent avoir l'opposé des composantes tangentielles de vitesse des particules réelles.

### **5.5.2 Méthode de symétrisation**

Cette méthode peut être décrite brièvement comme suit : pour toute particule proche de la frontière (à support incomplet), l'utilisateur doit détecter aussi bien la partie manquante que la partie pleine du support et qui lui est symétrique (voir figure 21). Par conséquent, le calcul de la vitesse tient en considération le double de la contribution des particules réelles (dans le cas d'une condition de frottement parfait), et la particule de frontière verra son support comme si il était plein donc comme si cette particule était à l'intérieur du domaine. Cette approche a un coût de stockage inférieur à la méthode des particules fan-

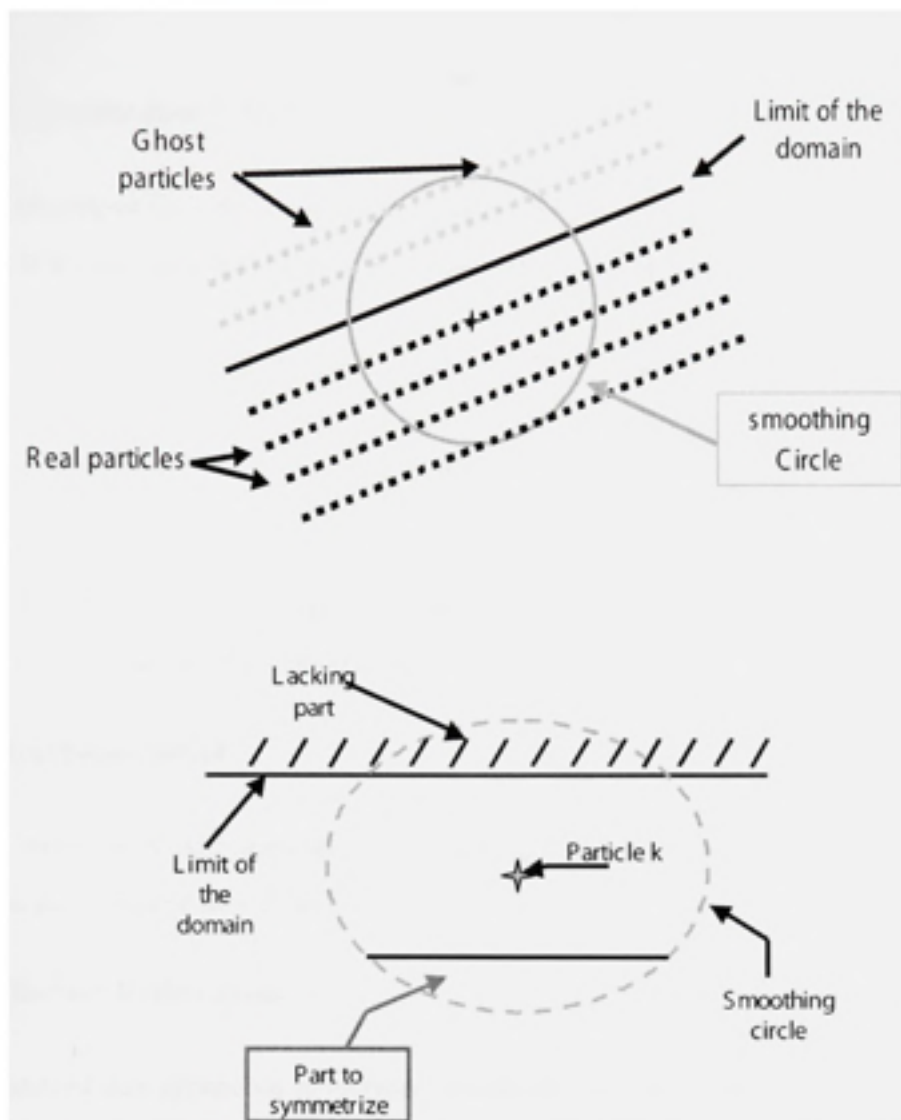


Figure 21 Méthode des particules fantômes (en haut) et de symétrisation (en bas).

tômes, puisqu'aucune particule nouvelle n'est ajoutée. Pour les deux approches citées ici, leur champs d'application se limitent aux géométries simples.

## 5.6 Intégration dans le temps

Pour la discrétisation dans le temps, un schéma de Newmark explicite à été utilisé. Les vitesses et les coordonnées spatiales pour une particule  $i$  sont obtenues par :

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \Delta t((1 - \gamma)\dot{\mathbf{u}}_i^n + \gamma\dot{\mathbf{u}}_i^{n+1}) \quad (5.41)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{u}_i^n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_i^n + \beta \ddot{\mathbf{u}}_i^{n+1} \right) \quad (5.42)$$

$\Delta t$  est le pas de temps,  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $\ddot{\mathbf{u}}$  est le vecteur accélération et la notation  $\mathbf{u}^n$  réfère à  $\mathbf{u}(t^n)$ . En choisissant les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  respectivement égaux à  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$ , le schéma correspond à la règle des trapèzes et il est de second ordre en précision [42].

## 5.7 Algorithme global

Avant d'introduire l'algorithme global de l'approche, on va commencer par expliciter l'algorithme de recherche de voisins.

### 5.7.1 Recherche de voisins

Contrairement aux approches numériques standard, dans les méthodes sans maillage, la connectivité entre les nœuds n'est pas connue d'une manière directe par la donnée du maillage. Dans le cas de méthodes meshless à formulation Lagrangienne, comme c'est le cas de la méthode SPH, les voisins (et donc la connectivité) de chaque particule change dans le temps. Par conséquent, l'identification de ces voisins, pour chaque particule, et à chaque pas de temps, est nécessaire. Cette tâche est celle qui coûte le plus cher dans l'algorithme total de l'approche. C'est pourquoi, il est impératif de l'accomplir d'une manière optimale. Dans nos applications, nous avons adopté l'algorithme Octree décrit par Libersky et Petshek dans [10]. Une grille de fond (bookkeeping grid) est construite sur tout le domaine (voir figure 22). Les cellules de la grille sont des carrés dont le côté est égal au rayon du cercle de lissage de chaque particule, i.e.  $\kappa l$ . Ainsi, pour chercher les voi-

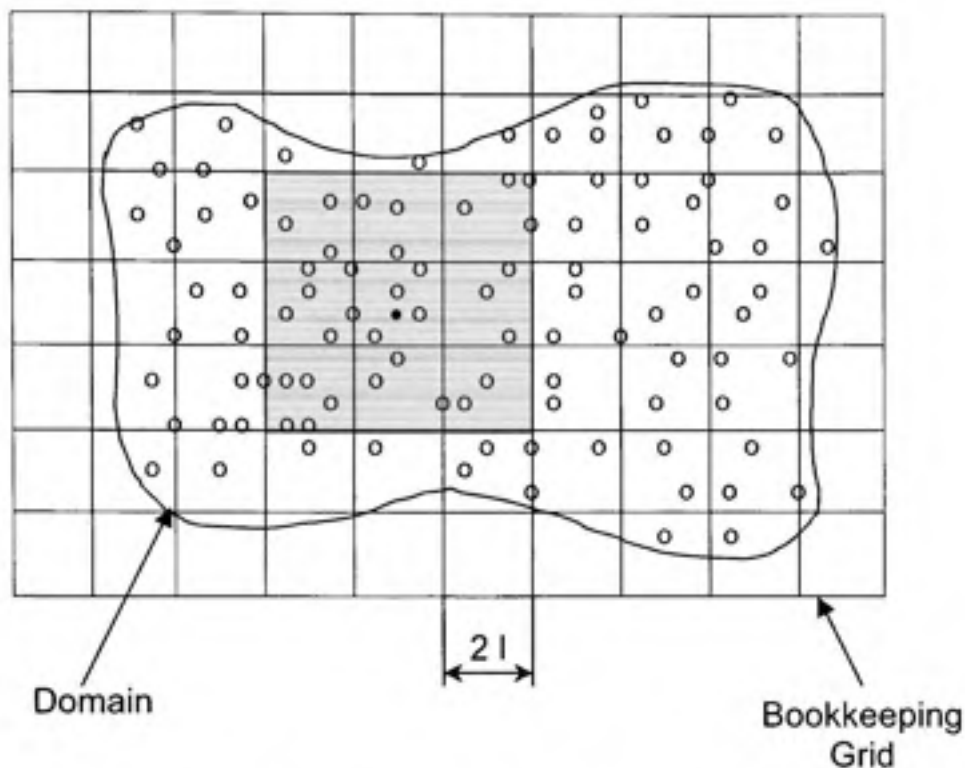


Figure 22 L'algorithme Octree pour la recherche de voisins.

sins d'une particule, une première étape consiste à détecter la cellule dans laquelle cette dernière est située. Ensuite, la recherche des voisins s'effectue dans les 8 cellules entourant la cellule de la particule. Il est très important que cette grille n'est utilisée que pour la recherche de voisins et non pour l'intégration numérique, ce qui fait garder le caractère mesh-free de l'approche.

### 5.7.2 Algorithme global de l'approche

L'algorithme global de l'application de la méthode SPH aux écoulements à surface libre peut être résumé dans les étapes suivantes :

- Initialisation, introduction des variables initiales :  $h_j^0, \mathbf{u}_j^0, V_j^0, \dots$
- Boucle sur le temps : Répéter, tant que  $t < t_{simul}$
- Boucle sur les particules : faire pour  $i = 1, \dots, N$



1. Mettre à jour la liste des voisins
  2. Calculer les accélérations avec l'équation (5.39)
  3. Mettre à jour les vitesses avec l'équation (5.41)
  4. Mettre à jour les coordonnées avec l'équation (5.42)
  5. Calcul des profondeurs d'eau approximées (lissées) avec l'équation (5.19)
- Fin de la boucle sur les particules
  - Fin de la boucle sur le temps

## 5.8 Résultats

Une fois la formulation SPH est établie pour le cas des équations de Saint-Venant, des tests de validation de cette approximation seront présentés dans cette section. Le problème de bris de barrage (dam-beak) en 1D et en 2D vont constituer les applications préliminaires. Les résultats vont être comparés à la solution analytique dans le cas monodimensionnel établie par Stoker dans [78], et avec une solution de type volumes finis donnée par Toro [38].

### 5.8.1 Problème de bris de barrage en 1D

Le premier ensemble de tests est la simulation du problème de bris de barrage en 1D. L'objectif est d'évaluer les différentes versions de l'approximation SPH et de voir l'effet de la stabilisation sur chaque schéma. L'équation (5.39) est implémentée en utilisant un noyau Gaussien (équation 5.32) et une longueur de lissage égale au double de l'espacement initial  $dx$ . Le pas de temps de la simulation est  $\Delta t = 0.02s$ . Les résultats présentés dans ce qui suit sont au temps  $t = 30s$ .

La figure (23) donne les conditions initiales pour ce cas de validation. La profondeur amont est  $10m$  et la profondeur aval est de  $1m$ . Figure (24) donne une comparaison entre les résultats obtenus avec la nouvelle viscosité artificielle (5.40) et ceux obtenus avec

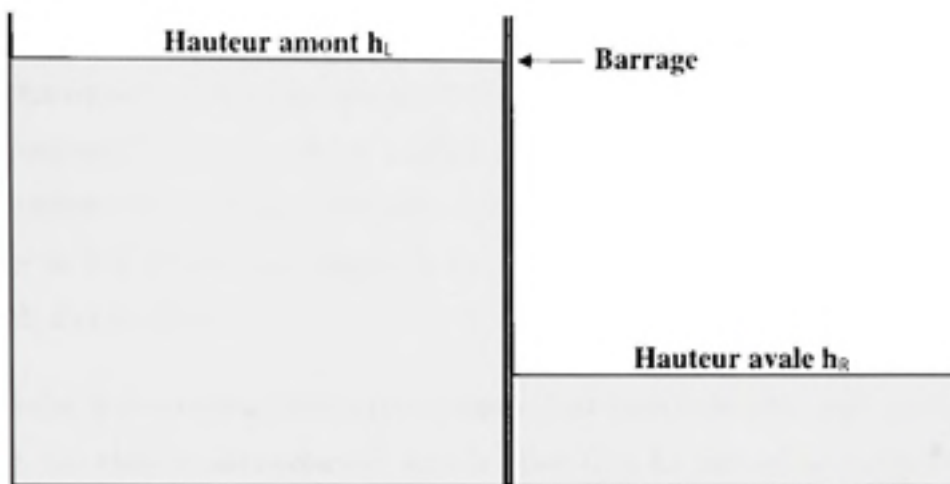


Figure 23 Conditions initiales pour le problème de bris de barrage en 1D.

la viscosité standard (5.16). 1000 particules ont été utilisées pour accomplir ce test. Le meilleur résultat pour la viscosité de Monaghan est obtenu pour  $\alpha = 2.0$  et  $\beta = 0.0$  et la formulation (5.38). On remarque que la majorité des modes oscillants ont été éliminés

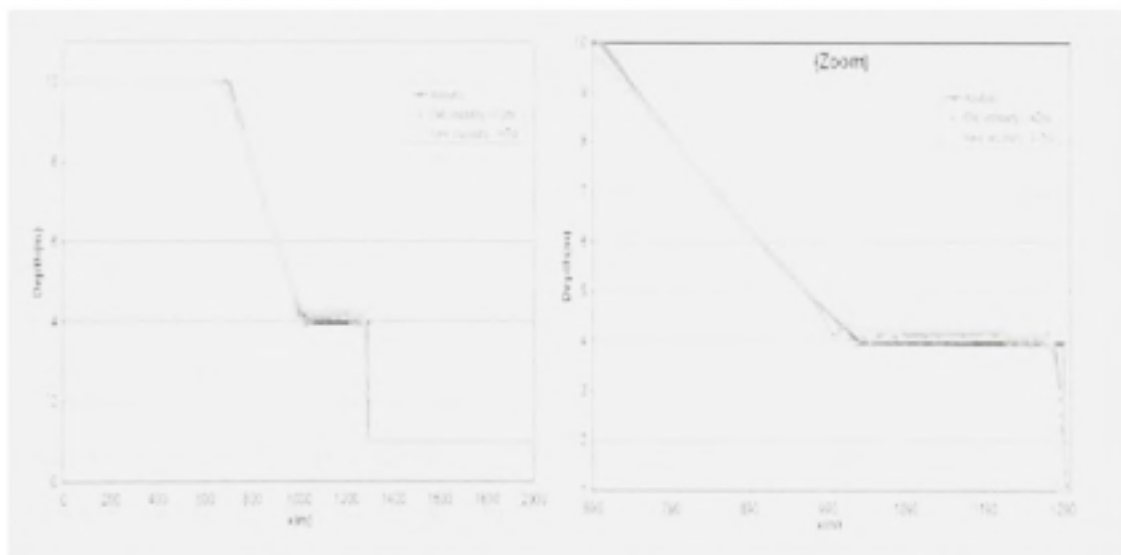


Figure 24 Comparaison entre les effets de la nouvelle et de l'ancienne viscosités artificielles - la figure de droite est un zoom de celle de gauche

avec la nouvelle viscosité. Quelques perturbations minuscules persistent aux alentours de

la discontinuité. Le plateau est bien défini mais sa valeur est légèrement supérieur à la valeur théorique (voir le paragraphe 2.2.4). Une petite perturbation persiste à l'endroit de la discontinuité initiale. L'onde de raréfaction est lissée, très probablement, à cause de l'effet diffusif de la viscosité artificielle. Cet effet pourrait être réduit en appliquant un limiteur de flux comme c'est toujours le cas pour les méthodes de volumes finis de type MUSCL d'ordre élevé.

Par la suite, la formulation (5.39) est considérée, dans laquelle le noyau est complètement corrigé. Les résultats sont présentés dans la figure (25). Le plateau est maintenant plus proche de sa valeur théorique. Toutefois, les petites perturbations à l'endroit du choc persistent encore. L'effet de diffusion est clair surtout au niveau du choc de raréfaction. Nous avons trouvé expérimentalement que les meilleurs résultats sont obtenus avec une correction partielle du gradient du noyau i.e. quand la dérivation de  $C(x)$  dans la formulation (5.39) est négligée. Ceci pourrait être expliqué par la nature fortement non-polynômiale du noyau corrigé (fonction rationnelle). Cette nature provoque une erreur plus importante lors de l'intégration numérique (procédure de collocation), que pour un noyau non corrigé. Ainsi le choc est plus clair et le plateau est plus proche à la solution exacte.

Les mêmes tests ont été reproduits avec une longueur de lissage  $l = 3\Delta x$  (figure (26)). Les résultats sont très clairement plus lissés que dans le cas où  $l = 2\Delta x$ . Toutefois, les résultats obtenus avec la nouvelle viscosité sont toujours meilleurs que ceux obtenus avec la viscosité de Monaghan.

Finalement un test de convergence est effectué avec une longueur de lissage  $l = 2\Delta x$  et en utilisant la nouvelle viscosité (figures 27 et 28). Clairement, la solution s'améliore nettement avec le nombre de particules. L'erreur Euclidienne et l'erreur  $L^1$  sont présentées sur la figure (29). Le taux de convergence est cependant assez bas par rapport à celui des approches standards.

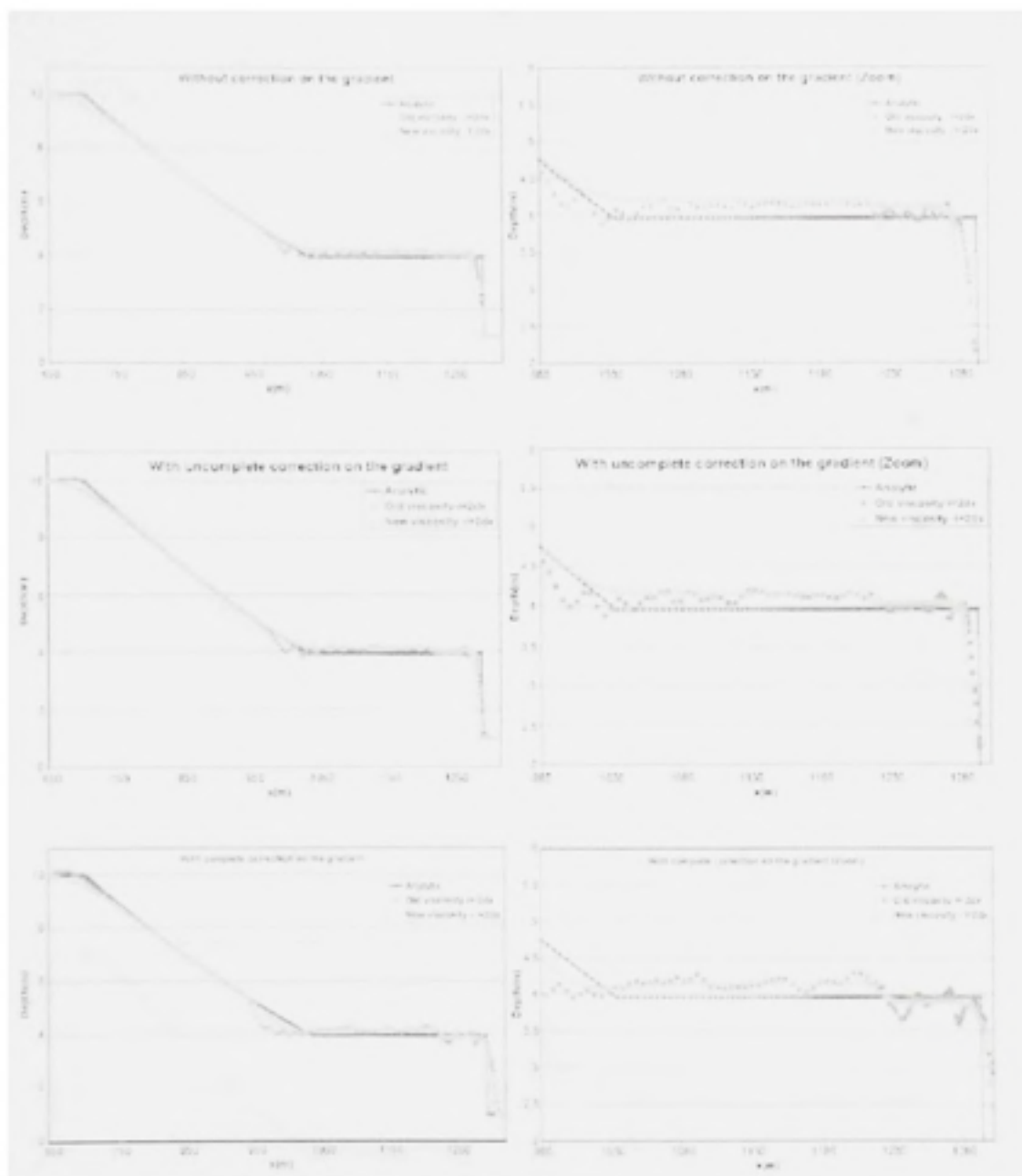


Figure 25 Effet de la nouvelle viscosité dans le cas monodimensionnel ( $l = 2\Delta t$ ). Haut : pas de correction sur le noyau, milieu : correction partielle, bas : correction complète. Les figures de droite sont des zoom de celles de gauche.

### 5.8.2 Problème de bris de barrage en 2D

Le test suivant est le problème de bris de barrage en deux dimensions. Ce test servira à voir l'effet de la nouvelle viscosité, mais aussi pour imposer les conditions aux frontières

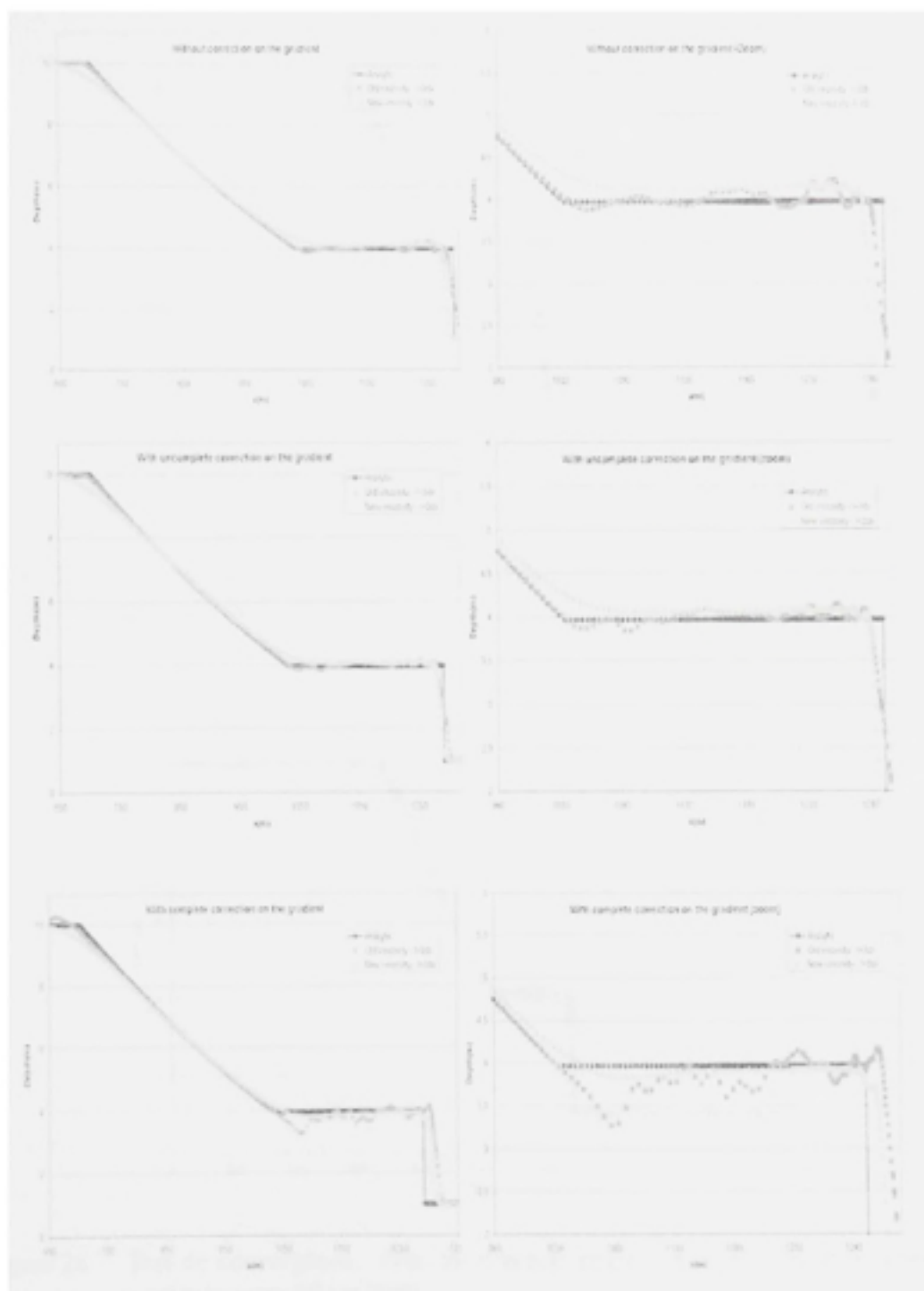


Figure 26 Effet de la nouvelle viscosité dans le cas monodimensionnel ( $l = 3\Delta r$ ). Haut : pas de correction sur le noyau, milieu : correction partielle, bas : correction complète. Les figures de droite sont des zoom de celles de gauche.

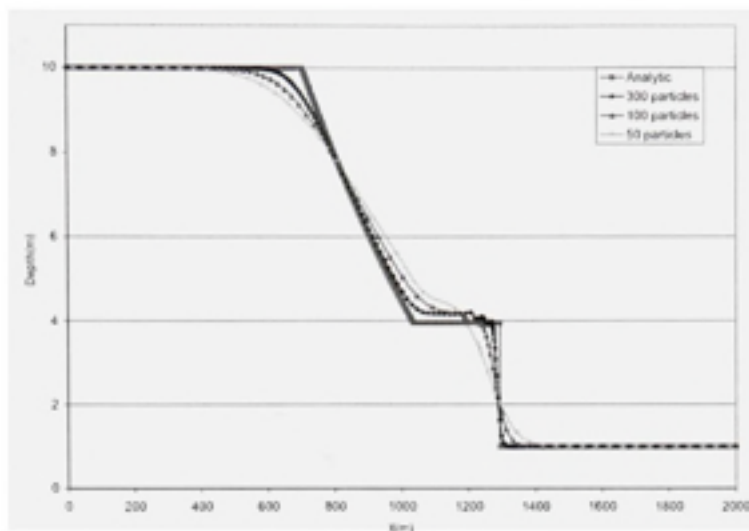


Figure 27 Test de convergence : effet du nombre de particules. Cas où le nombre de particule entre 50 et 300.

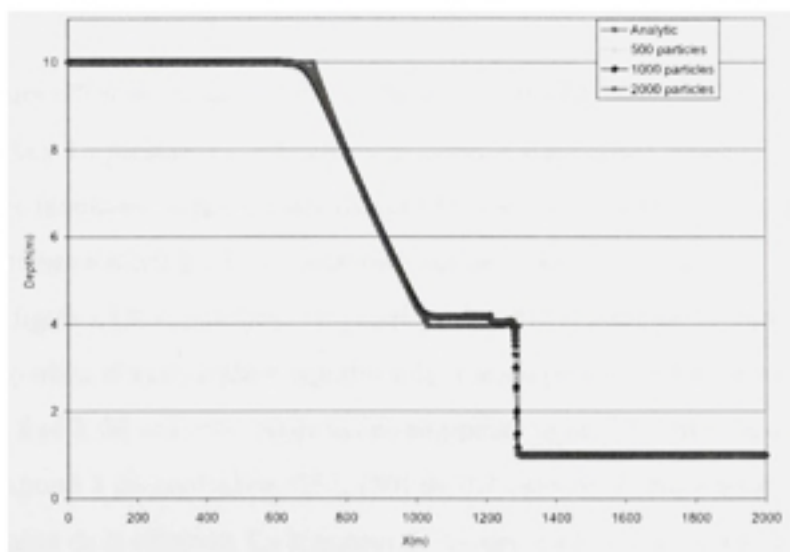


Figure 28 Test de convergence : effet du nombre de particules. Cas où le nombre de particule entre 500 et 2000.

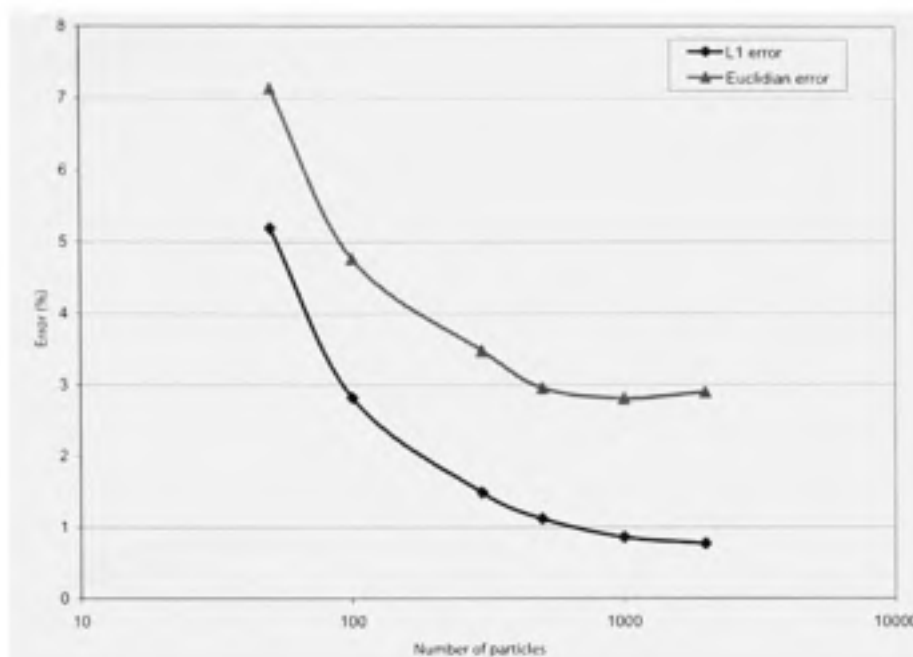


Figure 29 Test de convergence : évolution de l'erreur avec le nombre de particules.

et évaluer leurs effets sur la qualité de la solution. Deux configurations géométriques vont être considérées. Le premier cas est celui d'un canal rectangulaire. Dans ce cas, la méthode des particules fantômes ou la méthode de symétrisation sont utilisées. Les deux méthodes donnent les mêmes résultats. Les conditions initiales sont exactement les mêmes présentées dans la figure (23). La largeur du canal est 75 m. Le nombre de particules utilisées est 10080 réparties d'une manière équidistante. Le temps de simulation est 30s et le pas de temps est fixé à  $\Delta t = 0.02s$ . Nous avons augmenté le pas de temps jusqu'à  $\Delta t = 0.1s$  ce qui correspond à un coefficient CFL [60] de 0.4 environ. Cette augmentation n'a pas affecté la qualité de la solution. La longueur de lissage est  $l = 2\Delta x$ , avec  $\Delta x$  est l'espace initial entre deux particules successives. La figure (30) montre les résultats obtenus dans ce cas. Comme il peut être remarqué, la nouvelle viscosité donne une meilleure stabilisation, puisqu'il existe moins d'oscillations. L'effet diffusif est plus marqué. Le niveau

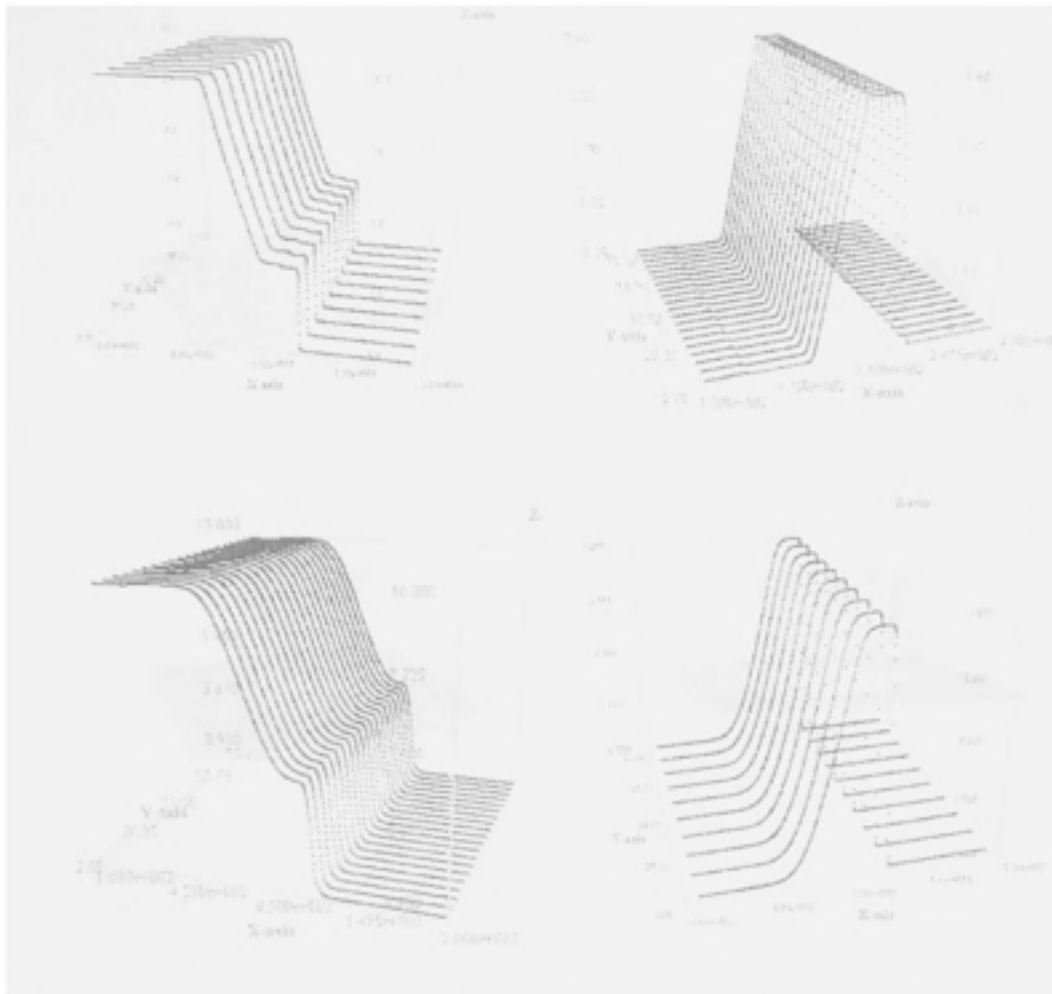


Figure 30 Problème de bris de barrage en 2D. Haut : profondeur d'eau (gauche) et vitesse (droite) avec l'ancienne viscosité. Bas : profondeur d'eau (gauche) et vitesse (droite) avec la nouvelle viscosité.

de l'onde de choc reste assez élevé. Ceci peut être expliqué par la combinaison de l'effet diffusif de la viscosité artificielle avec l'ordre bas de l'interpolation.



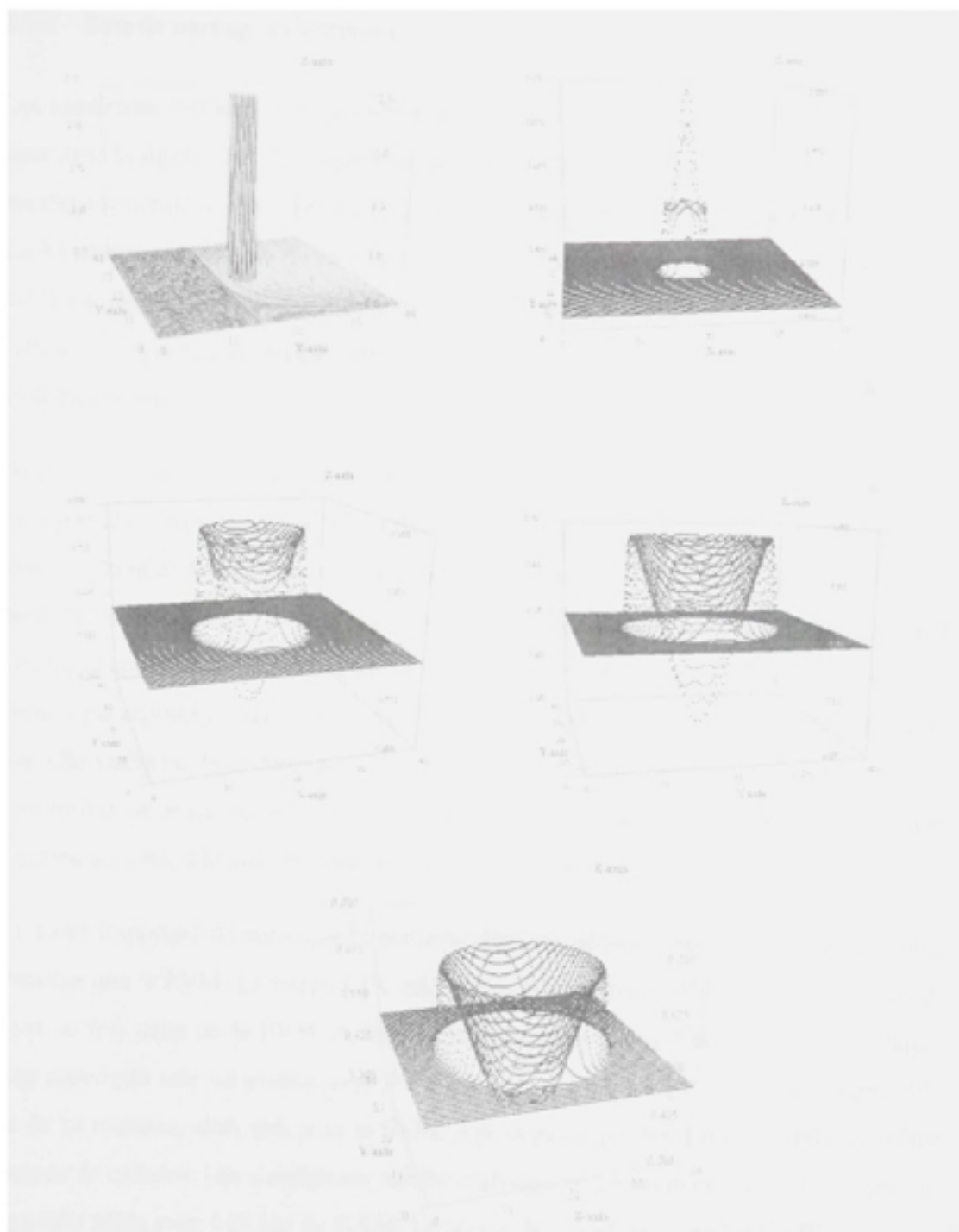


Figure 31 Problème de bris de barrage cylindrique : conditions initiales et évolutions de la profondeur dans le temps ( $t=0.4s$ ,  $t=1.5s$ ,  $t=2.5s$  et  $t=3.5s$ ).

### 5.8.3 Bris de barrage cylindrique

Les conditions initiales et la géométrie du cas de bris de barrage cylindrique sont données dans la figure (31). Le nombre de particules utilisées est 40000 qui correspond à un maillage structuré de 200x200. La profondeur d'eau à l'intérieur du barrage est 2.5m et de 0.5 à l'extérieur. Le rayon du barrage est de 0.5 m. Les dimensions du domaine sont 40x40  $m^2$ . La longueur de lissage est toujours  $l = 2\Delta x$  et le temps de simulation est 3.5s. La méthode de symétrisation a été utilisée pour le traitement de la frontière et ce pour simuler un domaine infini.

Dans ce cas, on observe plus clairement l'effet de la nouvelle technique de stabilisation. La figure (32) montre que la profondeur d'eau n'est plus oscillante aux voisinages des chocs de front et de raréfaction. Ces résultats sont comparés avec ceux donnés par la méthode des volumes finis, fournis par Toro [38]. Les résultats fournis par la méthode SPH sont assez acceptables. Pour les deux premières figures, les résultats SPH sont légèrement déviés par rapport à ceux de la FVM. Ceci est dû à l'effet de la diffusion artificielle de la nouvelle viscosité. Pour être plus précis, le schéma de Lax-Friedrich utilisé, n'utilise aucune technique de reconstruction de type MUSCL pour réduire la diffusion habituellement associée avec les schémas de Godunov de premier ordre.

Il est très important de noter que la méthode SPH est beaucoup plus lente et surtout plus coûteuse que la FVM. Le temps CPU nécessaire à la méthode SPH peut dépasser facilement 50 fois celui de la FVM. À titre d'exemple, pour le cas d'un barrage cylindrique, pour accomplir une simulation avec 40000 particules à un temps de 3.5s, le temps CPU est de 24 minutes, alors que pour la FVM, il ne dépasse pas les 4 minutes pour le même nombre de cellules. Les simulations ont été réalisées sur un ordinateur dont le processeur est à 550 MHz avec 512 Mo de RAM. Le temps de calcul de la méthode SPH est réduit environ 6 fois avec l'utilisation de l'algorithme Octree pour la recherche de voisins.

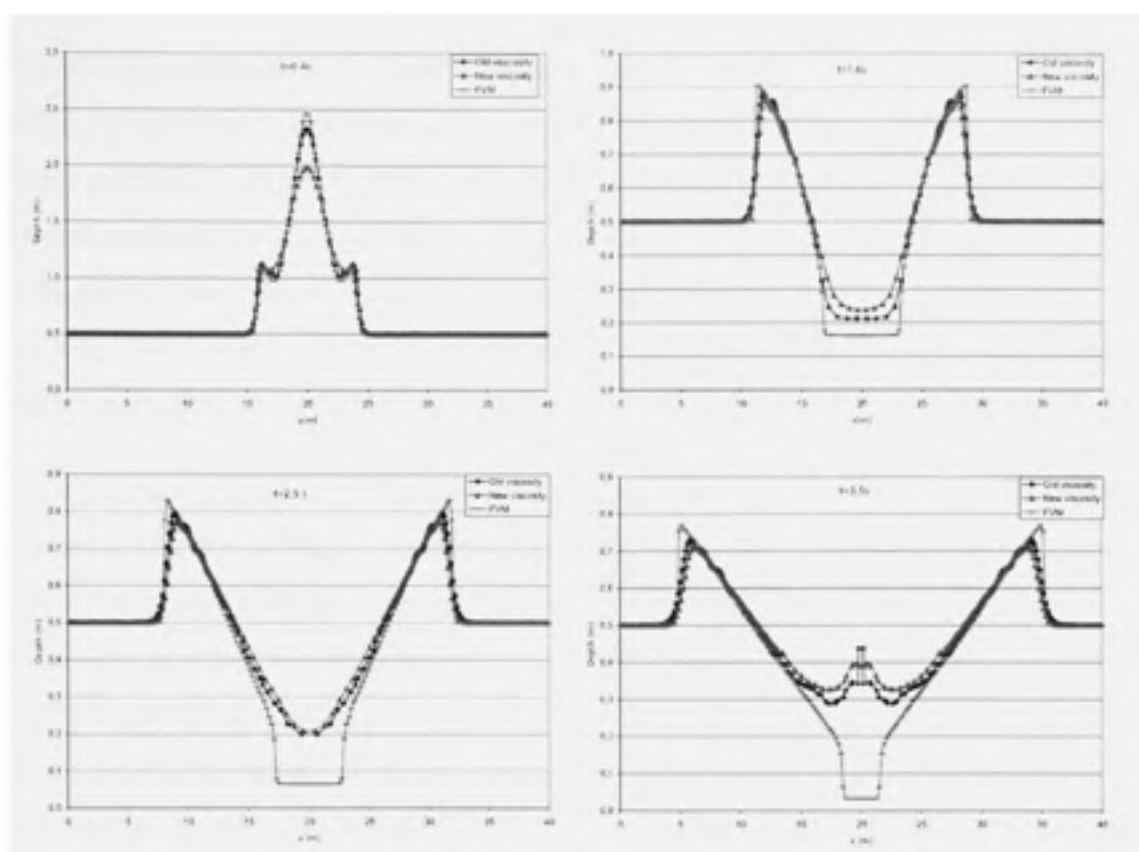


Figure 32 Problème de barrage cylindrique, comparaison avec la méthode des volumes finis.

## 5.9 Discussion et conclusions

Dans ce chapitre, la méthode SPH a été appliquée pour la simulation des écoulements à surface libre. La méthode a été évaluée dans quelques cas académiques et a montré de bons résultats. Une étude variationnelle a abouti à une nouvelle formulation de la méthode SPH dans le cas des équations hyperboliques de type Saint-Venant. La nouvelle formulation a été stabilisée par l'introduction d'une nouvelle viscosité artificielle inspirée des solveurs de Riemann. La technique de stabilisation a révélé de très bons résultats par rapport à celle introduite par Monaghan. Les chocs ont été bien capturés et les formes des ondes sont bien définies.

Toutefois, la méthode est incapable de traiter des cas géométriquement complexes. En effet, les techniques de traitement des conditions aux frontières sont limitées aux géométries simples. Le caractère non-interpolant de la fonction de forme rend l'imposition des conditions aux limites très difficile. Ce problème est commun à la majorité des approches Meshless. Avant l'apparition de la technique NEM, toutes les méthodes Meshless ont des fonctions de forme non-interpolantes et par conséquent, ne sont conseillées que pour les domaines infinis ou à géométries simples.

À cette étape du projet, une orientation stratégique était à prendre. Toutes les techniques de traitement des conditions aux frontières (voir le paragraphe 3.5.1) ont été essayées dans notre cas et elles n'ont pas donné de résultats satisfaisants. Notre intérêt va se tourner vers une autre approche Meshless qui, bien qu'elle perd une partie de son caractère meshless, offre l'avantage d'avoir une fonction de forme interpolante. Ainsi, l'implémentation de cette nouvelle technique bénéficiera de l'expérience acquise avec la méthode SPH. Les techniques de stabilisation appliquées pour la formulation SPH, seront utilisées dans le cadre de la méthode NEM. De plus, la méthode permet de résoudre le problème de l'imposition des conditions aux frontières. L'implémentation de cette méthode fera l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE 6

### LA MÉTHODE DES VOLUMES NATURELS (MVN) : IMPLÉMENTATION ET RÉSULTATS

#### 6.1 Introduction

Ce chapitre est une suite logique des chapitres précédents. L'objectif initial de ce travail étant le développement d'une approche pour la simulation des écoulements à surface libre avec les méthodes sans maillages sous un formalisme Lagrangien. La première étape a consisté à appliquer et explorer les capacités de la méthode SPH pour ce genre de problème. Le chapitre 5 a été consacré pour cette fin. La méthode SPH s'est révélée un outil assez bon pour être capable de reproduire les écoulements jusqu'à une certaine limite et de bien capter les chocs que présentent les solutions des équations de Saint-Venant. L'étude accomplie sur la méthode SPH a montré que cette dernière présente essentiellement deux problèmes : la stabilisation et le traitement des conditions aux frontières. La capture de choc a été bien réussie surtout avec la nouvelle technique de stabilisation inspirée de l'up-winding des schémas de flux dans les solveurs de Riemann. Toutefois, le traitement des frontières reste un handicap majeur pour cette méthode. En effet, la méthode SPH reste limitée aux domaines non bornés et aux géométries relativement simples [101]. Plusieurs travaux ont suggéré des solutions pour tenter de remédier à ce grand problème (voir à titre d'exemples [13], [75], [101]). Cependant, le problème reste ouvert. Pour ces raisons, notre stratégie a consisté à se tourner vers une autre méthode meshless qui ne souffre pas de la même problématique. Or, d'après la revue bibliographique accomplie dans le chapitre 3, la majorité des méthodes sans maillage ont ce problème en commun, à l'exception de la méthode des éléments naturels (NEM). En effet, la NEM dispose d'une fonction de forme interpolante et donc l'imposition des conditions de Dirichlet est une tâche triviale pour cette méthode [117]. Le prix à payer est la perte du caractère meshless pur, puisque la fonction de forme NEM est construite sur le diagramme de Voronoï ou sur une triangula-

tion de Delaunay. La NEM a été présentée en détail dans le chapitre 4. Dans ce chapitre, l'adaptation et l'application de la NEM aux écoulements à surface libre dans une formulation totalement lagrangienne et en mode de collocation, sera détaillée. Plusieurs problèmes seront surmontés grâce à ce choix de collocation, notamment les aspects de l'intégration numérique. Une analogie avec la dualité éléments finis-volumes finis, sera discutée. Ainsi, la méthode des volumes naturels NVM sera définie et suggérée pour l'utilisation des lois de conservation.

Le travail effectué dans ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis à la revue "International journal for numerical methods in fluid", qui fait l'objet de l'annexe B.

## 6.2 Application de la méthode NEM aux équations de Saint-Venant

L'objectif de ce qui suit est l'application de la méthode NEM pour la simulation des écoulements à surface libre en utilisant les équations de Saint-Venant comme modèle mathématique. La NEM a déjà été utilisée pour la simulation de quelques problèmes en mécanique des solides et des fluides. L'approche Lagrangienne actualisée (updated Lagrangian) est la plus fréquente dans la littérature [46], particulièrement en mécanique des solides. Dernièrement, González et collaborateurs ont présenté une application en Lagrangien actualisé de la méthode NEM en utilisant les équations de Navier-Stokes avec un nombre de Reynolds modéré [100]. Aucune application totalement Lagrangienne n'a été trouvée dans la littérature. La distorsion rapide du maillage et ainsi le remaillage fréquent représente le défi à surmonter pour les scientifiques. Le travail de Birknes [53] peut être considéré comme cas type où la méthode des éléments finis a été utilisée sous forme particulière en Lagrangien total et où un remaillage est effectué dans chaque pas de temps.

Les équations de Saint-Venant en coordonnées cartésiennes sous forme non-conservative, sont données par (voir figure 33) :

$$\frac{Dh}{Dt} + h\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.1)$$

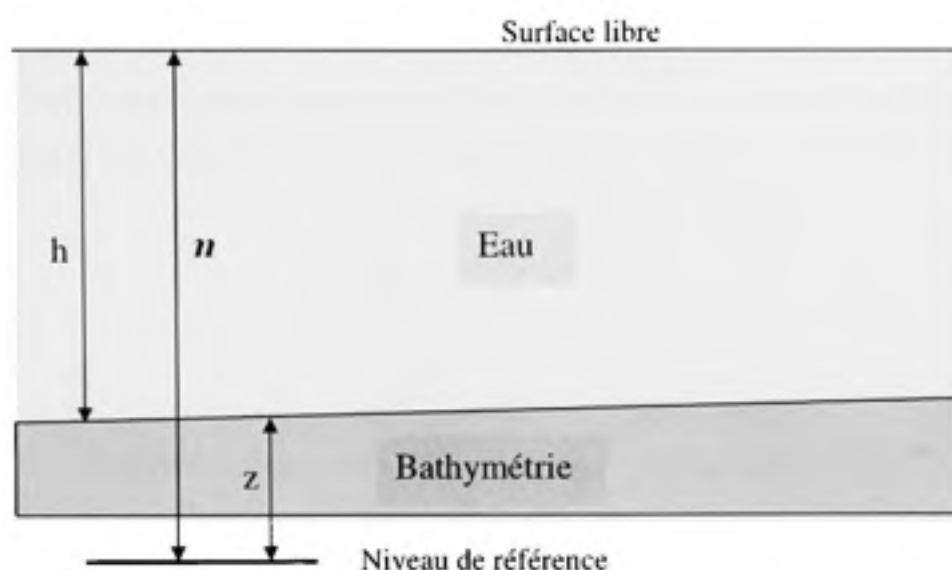


Figure 33 Hypothèses et notations pour les équations de Saint-Venants en 2D.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{g}\nabla\eta = -\mathbf{g}S_f \quad (6.2)$$

où  $h$  est la profondeur totale de l'eau ( $\eta = h + z$ ),  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $S_f$  est le frottement du lit. Dans une première étape, les termes sources vont être négligés. La notation  $D/Dt$  désigne la dérivée particulière.

### 6.2.1 Conservation de la masse

En général, l'équation de continuité (équation (6.1)) est utilisée pour garantir la conservation de la masse et pour calculer les valeurs nodales de la profondeur d'eau. Toutefois, dans nos applications, nous allons adopter une autre technique qui diffère des approches standards. La philosophie se base sur une conservation locale de la masse qui, une fois assurée, engendre une conservation globale de la masse. La formulation purement Lagrangienne utilisée garantit, ainsi, d'une manière automatique une conservation de la masse pour toute particule (cellule) de fluide. Ainsi il n'y a plus besoin d'utiliser l'équation 6.1 puisqu'elle est implicitement vérifiée. Les problèmes numériques liés à sa discrétisation sont, de ce fait, contournés.

Le domaine est subdivisé en  $N$  particules.  $N$  correspond au nombre de nœuds utilisés pour mailler le domaine. Chaque particule est affectée à un nœud. En description Lagrangienne, chaque particule conserve sa masse au cours du temps. La masse d'une particule  $I$  (le

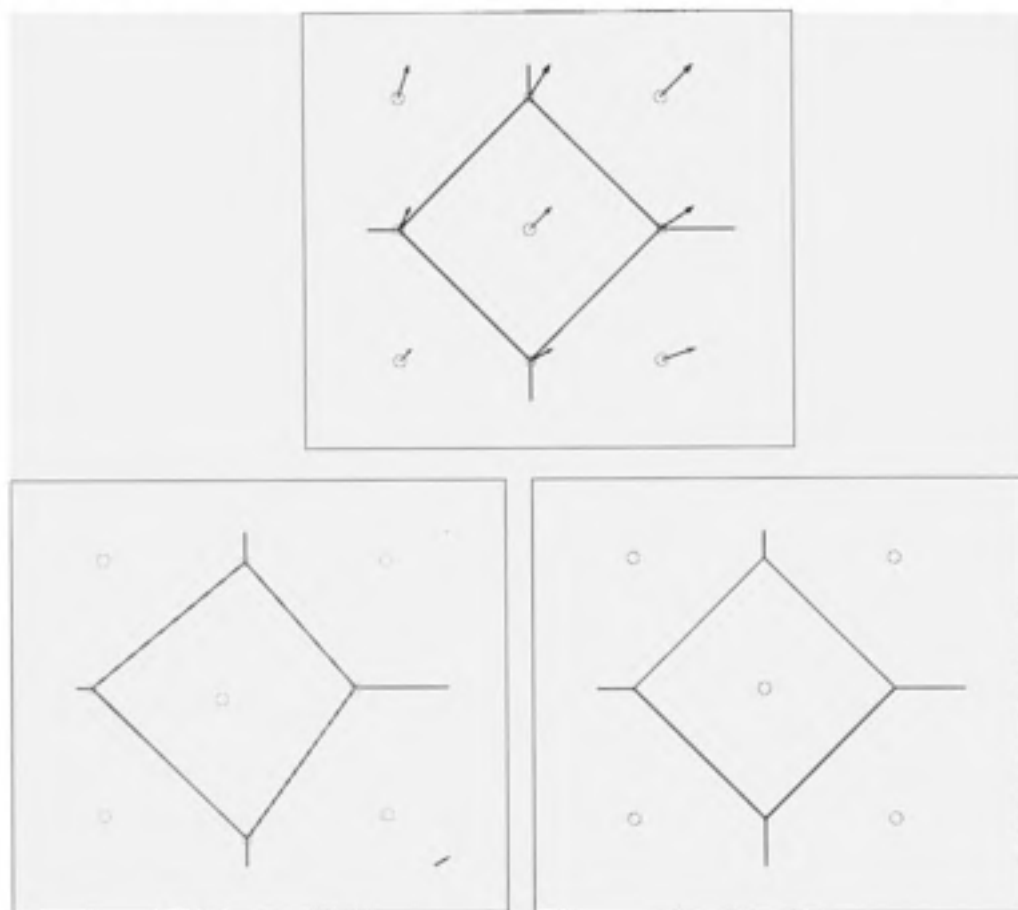


Figure 34 Stratégie de conservation de la masse pour la MVN : (o : nœud, □ : sommet de la cellule de "masse", → : vitesse). Haut : décomposition du domaine à  $t = t^n$ . Bas à droite : cellule de Voronoï réelle à  $t = t^{n+1}$  utilisée pour la conservation de la quantité de mouvement. Bas à gauche : Les cellules de masses utilisées pour la conservation de la masse et le calcul de la profondeur d'eau à  $t = t^{n+1}$

volume pour le cas incompressible) est  $V_I = \rho h_I A_I$ , où  $\rho$  est la masse volumique,  $h_I$  est la profondeur de l'eau moyenne sur la cellule relative au nœud  $I$  et  $A_I$  est l'aire de cette cellule. Les aires  $A_I$  sont celles des cellules de Voronoï à  $t = 0s$ . À chaque pas de temps,



le volume de la particule  $V_I$  est constant, puisque  $\rho$  est constante. Ainsi, la profondeur moyenne de la particule au temps suivant  $t^{n+1} = t^n + \delta t$  est calculée comme suit :

$$V_I^{n+1} = h^{n+1} A_I^{n+1} = V_I^n = h_I^n A_I^n \implies h_I^{n+1} = h_I^n \frac{A_I^n}{A_I^{n+1}} \quad (6.3)$$

$A_I^{n+1}$  est l'aire de la cellule de la particule  $I$  et qui est obtenue par la déformation de la même cellule en faisant bouger ses sommets (voir figure (34)). Plus clairement, chaque nœud porte dans son déplacement une masse (un volume) à chaque pas de temps. Ce volume est le produit de la profondeur d'eau par la base qui est la cellule associée au nœud. L'écoulement du fluide et les effets dynamiques et cinétiques causent des déformations de cette cellule. Le changement d'aire de la cellule engendre une variation de la profondeur d'eau (équation (6.3)).

La stratégie de calcul peut être résumée dans les étapes suivantes. À  $t = 0$ , le diagramme de Voronoï est construit et chaque cellule est affectée à son nœud correspondant. Ensuite, à chaque pas de temps, après le calcul des vitesses et des accélérations sur les nœuds, une interpolation de type NEM est effectuée pour calculer les vitesses et les accélérations sur les sommets des cellules. Avec ces vitesses les coordonnées des sommets sont mises à jours et ainsi les cellules sont déformées. Cette déformation se répercute sur la profondeur d'eau et cette dernière est calculée, en moyenne, en utilisant l'équation (6.3). Pour l'interpolation des vitesses et des accélérations l'équation (4.15) est utilisée.

**Remarque 6.1 :** Il est important de noter l'utilisation de deux grilles (ou décompositions) du domaine. Une première grille est utilisée pour garantir la conservation de la masse et une deuxième pour la conservation de la quantité de mouvement. La première grille (grille de gauche de la figure 34) est, le diagramme de Voronoï à  $t = 0s$ . La deuxième grille est le vrai diagramme de Voronoï construit géométriquement à chaque pas de temps (grille de droite de la figure 34). L'utilisation de deux grilles est une obligation et non pas un luxe. En effet, la reconstruction géométrique du diagramme de Voronoï à chaque pas de

temps fait perdre l'information sur la masse portée par le diagramme de Voronoï construit au pas précédent. En d'autres termes, si, la cellule de Voronoï  $C_I^n$  relative à un nœud  $I$  et qui a une aire  $A_I^n$  à l'instant  $t^n$ , le même nœud  $I$  aura une cellule  $C_I^{n+1}$  dont l'aire  $A_I^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1}$ . L'information sur la masse liée à la particule  $I$  est perdue lors du passage de  $t^n$  à  $t^{n+1}$ . En effet, la cellule  $C_I^{n+1}$  n'est pas uniquement la déformation de la cellule  $C_I^n$  due aux déplacements des sommets de cette dernière, c'est tout simplement le résultat de la construction purement géométrique du diagramme de Voronoï après le déplacement des nœuds. Pour bien saisir la nuance de cette remarque, il faut juste se rappeler que "après le déplacement des sommets d'un diagramme de Voronoï, celui-ci ne coïncide pas avec le diagramme de Voronoï des nœuds déplacés."

**Remarque 6.2 :** une attention particulière doit être portée sur le fait qu'on utilise deux types de cellules. La résolution de l'équation de la quantité de mouvement se fait sur le vrai diagramme de Voronoï et donc les masses utilisées dans les équations d'équilibre sont celles qui coïncident avec les vraies cellules de Voronoï et non aucun rapport avec celles qu'on utilise pour la conservation de la masse.

### 6.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Nous cherchons à appliquer la méthode des éléments naturels dans une formulation Lagrangienne et en mode de collocation pour la simulation des écoulements à surface libre. Bien que la majorité des travaux qui se basent sur la NEM, était dans une formulation de Galerkin, un schéma de type différences finies de la méthode à été introduit par Sukumar dans [111] et ensuite commenté et discuté d'une manière extensive dans [69]. Bien que les auteurs utilisent le terme de "différences finies", nous préférons la terminologie "volumes finis" puisqu'il s'agit du calcul des valeurs des grandeurs physiques moyennes par l'intermédiaire d'un bilan de flux sur les frontières des cellules.

Pour tout nœud  $I$  situé en  $\mathbf{x}$ , la valeur nodale du gradient discret en  $I$  peut être approximée par la dérivation directe de l'équation (4.7). C'est l'approche systématique pour la majo-

rité des MMs. Une deuxième alternative pour approximer la valeur nodale du gradient, consiste à utiliser le "moyennage" de type volumes finis de l'opérateur du gradient. Cette approche a été proposée par Chen dans [150]. En général, la composante  $j$  du gradient d'un champ  $w$  est approximée, en utilisant le théorème de divergence de Gauss, par :

$$\left(\widetilde{\frac{\partial w^h}{\partial x_j}}\right)_I = \frac{\int_{A_I} w^h_j(\mathbf{x}) d\mathbf{A}}{A_I} = \frac{\int_{\Gamma_I} w^h n_j d\Gamma}{A_I} \quad (6.4)$$

$w$  étant le champs à dériver,  $A_I$  est l'aire et  $\Gamma_I$  la frontière de la cellule de Voronoï associée au nœud  $I$ ;  $n_j$  est la  $j$ -ème composante de la normale unitaire sortante à la frontière  $\Gamma_I$ .

Pour les cas où on dispose d'une distribution nodale assez régulière, l'intégrale de l'équation (6.4) est calculée en approximant  $w^h$  par une valeur pondérée moyennée sur chaque arête de la cellule de Voronoï [69]. Le choix  $w^h(x_m) = (w_I + w_J)/2$  donne une approximation exacte pour les champs linéaires  $w$  sur des grilles régulières ( $x_m$  est le milieu du segment [IJ]). Ainsi, le gradient spatial est approximé par :

$$\left(\widetilde{\frac{\partial w^h}{\partial x_j}}\right)_I = \frac{\sum_{J=1}^N (w_I + w_J) n_j^{IJ} s_{IJ}}{2A_I}, \quad A_I = \frac{1}{4} \sum_{J=1}^N s_{IJ} h_{IJ} \quad (6.5)$$

$n_j^{IJ}$  est la  $j$ -ème composante de la normale sortante à la l'arête de la cellule de Voronoï commune aux deux nœuds  $I$  et  $J$ .  $s_{IJ}$  est la longueur de cette arête et  $h_{IJ}$  est la longueur du segment [IJ].

L'équation (6.5) est une approximation linéaire de type élément fini. En effet, l'approximation MEF est linéaire sur les arêtes des triangles; et dans le cas d'une distribution nodale régulière, le milieu de l'arête de la cellule de Voronoï relative au segment [IJ] est situé sur l'arête du triangle dont  $I$  et  $J$  sont ses sommets. Avec cette discrétisation du gradient spatial, on peut formuler une première approximation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. En appliquant l'équation (6.5) pour approximer le gradient de la

pression statique  $P = gh$ , l'équation de Saint-Venant devient :

$$\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} = -\frac{1}{2\lambda_I} \sum_{j=1}^N \left[ (gh_I + gh_J) \mathbf{n}' s_{IJ} \right] \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $h_I$  est la profondeur d'eau de la particule  $I$ ,  $N$  est le nombre total d'arêtes de la cellule de Voronoï associée à  $I$  et  $s_{IJ}$  est la longueur de ces arêtes.

**Remarque 6.3 :** Il est très important de noter que  $N$ , le nombre d'arêtes de la cellule de Voronoï, n'est pas toujours égal au nombre de voisins naturels visibles de  $I$ . Ceci n'est vrai que dans le cas d'une distribution régulière et lorsqu'il s'agit d'un nœud interne (loin de la frontière).

L'approximation de l'équation (6.6) est la plus directe et la moins chère. Toutefois, elle est limitée aux cas où les distributions nodales sont régulières et où les solutions du problème sont linéaires ou quasi-linéaires. Pour les cas où ces conditions ne sont pas vérifiées a-priori, n'importe quel autre type d'approximation peut être utilisé (éléments finis, différences finis, éléments naturels ou n'importe quel schéma de flux de type Godunov). Pour notre cas, le fait d'avoir les cellules de Voronoï déjà prêtes, favorise l'utilisation d'une approximation de type élément naturel.

Comme mentionné précédemment, l'approximation (6.6) est limitée aux distributions régulières et aux géométries simples et pour les fonctions linéaires ou quasi-linéaires. Dans les applications proposées dans ce travail, la nature Lagrangienne de la formulation induit des déplacements relatifs assez chaotiques des particules. Ainsi, la nature régulière de la distribution nodale se perd très rapidement. La figure 35 montre un cas très simple et assez fréquent en simulation Lagrangienne où pour le cas de trois nœuds  $\{1, 2, 3\}$ , l'équation (6.6) ne peut pas être utilisée car elle risque de donner une approximation assez imprécise. En effet, pour l'arête de Voronoï relative aux nœuds 1 et 2, l'interpolation de n'importe

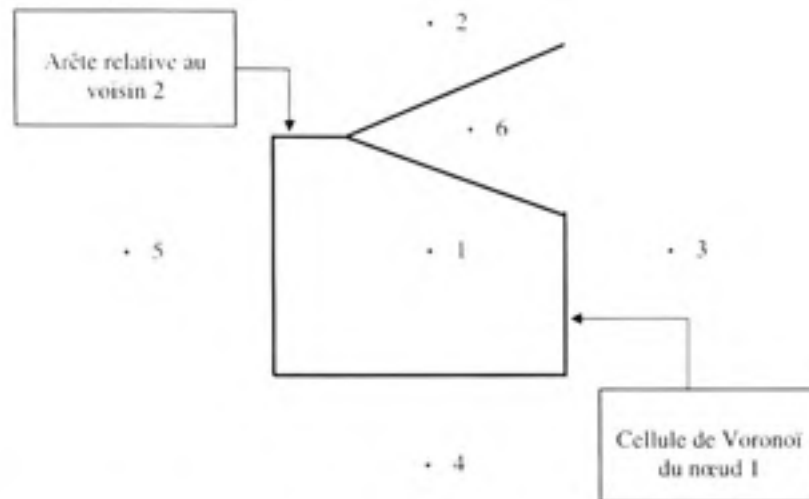


Figure 35 Cellule de Voronoï fréquemment rencontrée dans les simulations Lagrangiennes. L'approximation du flux (utilisant l'équation 6.6) sur l'arête relative au voisin 2 risque de ne pas être précise.

quelle fonction  $w$  au milieu de l'arête en utilisant  $w^h(x_m) = (w_I + w_J)/2$ , est loin d'être précise.

Pour améliorer la solution, une interpolation du flux sur les arêtes de Voronoï est accomplie en utilisant l'interpolation de type NEM. La manière la plus simple et la moins coûteuse pour quantifier l'intégrale de l'équation (6.4), consiste à intégrer cette équation avec un seul point d'intégration (le point milieu de l'arête). Cette quadrature a été étudiée et discutée assez rigoureusement de point de vue mathématique et numérique par Mishev dans [68]. Par conséquent, l'équation (6.4) est discrétisée par :

$$\left(\frac{\partial w^h}{\partial x_j}\right)_I = \frac{\int_{A_I} u^h_j(\mathbf{x}) d\Omega}{A_I} = \frac{\int_{\partial A_I} w^h n_j d\Gamma}{A_I} = \frac{1}{A_I} \sum_J (\tilde{w}_{IJ} s_J n_j^{IJ}) \quad (6.7)$$

avec  $\tilde{w}_{IJ}$  est l'approximation NEM de  $w$  estimée au point  $M_J$  milieu de l'arête de Voronoï,  $s_J$  est la longueur de l'arête et  $N$  est le nombre d'arêtes dans la cellule de la particule  $I$ .  $\tilde{w}_{IJ}$  est obtenue en appliquant l'équation (4.15) qui est une approximation plus "riche" que celle utilisant l'interpolation de type éléments finis, puisqu'elle utilise tous les voisins

naturels visibles par I, au lieu de seulement  $I$  et  $J$  dans (6.5). En utilisant l'équation (6.7) pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation (6.2)), on obtient :

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N (g\check{h}_J) \mathbf{n}^{IJ} s_J \quad (6.8)$$

où  $\check{h}_J = \sum_{K=1}^{N_J} \phi_K(M_J) h_K$ ,  $N_J$  est le nombre d'arêtes de la cellule de Voronoï associée au point  $M_J$ . De plus, sachant l'identité  $\oint \mathbf{n} ds = 0$ , ou sous sa forme discrétisée  $\sum_{J=1}^N \mathbf{n}^{IJ} s_J = 0$ , l'équation (6.8) devient :

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N g(\check{h}_J + \check{h}_I) \mathbf{n}^{IJ} s_J \quad (6.9)$$

C'est la forme finale discrétisée de l'équation de Saint-Venant. Cette forme est préférée à l'équation (6.5). Elle est la base de toutes les simulations effectuées dans la suite de ce travail et qui vont être présentés dans la section 6.8.

Toutefois, l'équation (6.9) montre que le schéma obtenu est symétrique ou centré, d'où l'obligation de le stabiliser. La stabilisation de ce schéma est traitée dans la section suivante. Il est à noter la ressemblance qu'existe entre l'équation (6.9) et la formulation finale obtenue en utilisant la méthode SPH (équation 5.38). Cette ressemblance va nous servir dans la suite puisque la procédure de stabilisation qu'on a appliquée avec la méthode SPH va être adoptée avec la méthode NVM.

### 6.2.3 Consistance et stabilisation

Une notion très importante pour toutes les méthodes numériques est la notion de consistance. La consistance garantit, dans le cas limite où le pas du maillage tend vers zéro, que la solution approximée tend vers la solution analytique du problème. Dans [69], Cueto et al. ont utilisé un développement en séries de Taylor pour montrer qu'un schéma de différences finies pour l'opérateur Laplacien est  $O(h_m)$  pour un maillage non régulier, où

$h_m$  est l'espaceur internodal moyen. Ainsi, un minimum de consistance d'ordre 1 est garanti pour la NEM. Dans le cas d'un maillage régulier, l'ordre de consistance monte et la méthode est de second ordre. Pour une étude détaillée sur la notion de consistance de la méthode NEM on réfère au travail de Sukumar [111]. Dans le cas du travail proposé, la régularité de la distribution nodale initiale ne peut pas être conservée et est très rapidement perdue puisqu'on utilise une formulation purement Lagrangienne. On ne peut s'attendre, par conséquent, qu'à une consistance de premier ordre.

Revenons à présent à la problématique de stabilisation. Comme il a été évoqué précédemment, les équations de Saint-Venant sont de type hyperbolique pouvant avoir des solutions discontinues. D'un autre côté, le schéma obtenu donné par les équations (6.6) ou (6.9), est un schéma symétrique comparable aux schémas de type différences finies centrés. Ce type de schéma est instable et par conséquent il doit être stabilisé [1]. Ceci permettra d'éliminer les oscillations parasites (spurious modes) qui peuvent naître et croître aux voisinages des discontinuités. La figure (36) illustre la naissance de ces modes parasites qui risquent de polluer la solution globale du problème.

C'est pourquoi une stabilisation de ce schéma est nécessaire. En s'inspirant de ce qui a été présenté dans le chapitre 5 pour la méthode SPH et de ce qui a été publié dans [13], la technique de stabilisation proposée dans ce chapitre sera construite par analogie avec le décentrage des flux dans les solveurs de Riemann. Le décentrage (upwinding) consiste à introduire une viscosité artificielle.

La quantité  $F_h(x_I) = gh_I$  peut être considérée comme un flux à travers l'arête de la cellule de Voronoï. Ainsi l'équation (6.9) peut s'écrire comme :

$$\dot{\mathbf{u}}_I = \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)_I = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N 2 \left[ \frac{(F_h(\mathbf{x}_I) + F_h(\mathbf{x}_J))}{2} \mathbf{n}^{IJ} s_{IJ} \right] \quad (6.10)$$

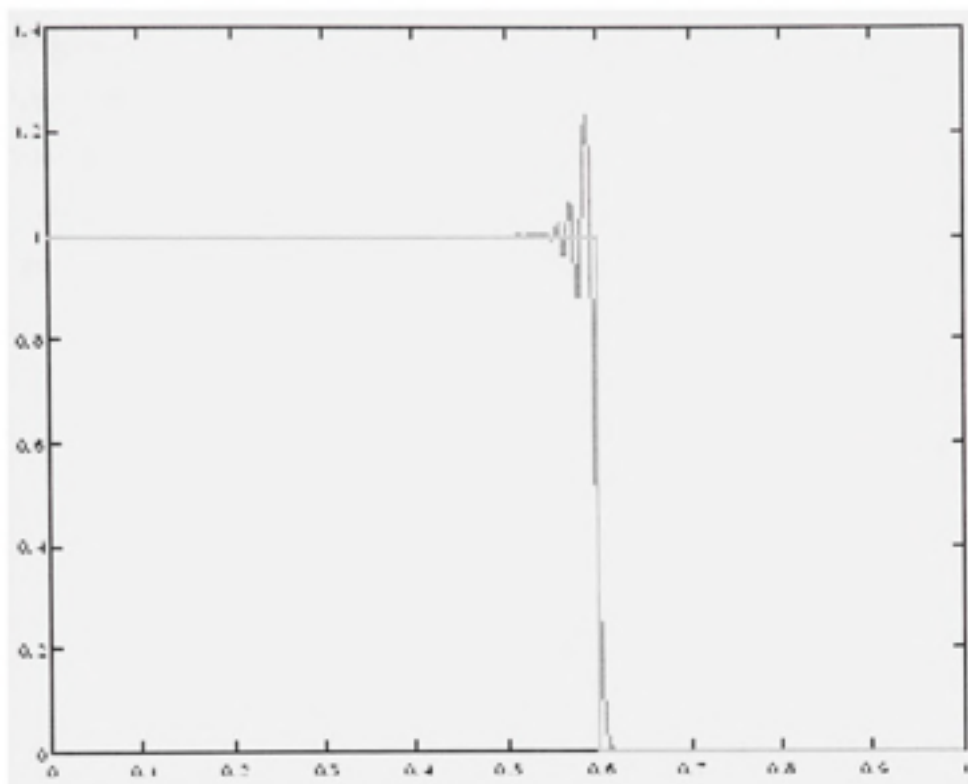


Figure 36 Modes parasites aux voisinages des discontinuités  $\Rightarrow$  besoin de stabilisation.

Dans un objectif de stabilisation, le terme  $(F_h(\mathbf{x}_J) + F_h(\mathbf{x}_I))/2$  dans l'équation (6.10) est remplacé par un schéma simple de Lax-Friedrich donné par :

$$\frac{1}{2}((F_h(\mathbf{x}_J) + F_h(\mathbf{x}_I)) - \lambda(\mathbf{u}_J - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n}^{IJ}) \quad (6.11)$$

avec  $\lambda > 0$ . Ainsi, on peut définir une viscosité artificielle qui sert à stabiliser le schéma proposé et prévenir, en l'occurrence, l'inter-pénétration des particules. Cette viscosité artificielle est donnée par [13] :

$$\Pi_{IJ} = \alpha \frac{-\lambda \mathbf{u}_{IJ} \cdot \mathbf{r}_{IJ}}{\sqrt{\mathbf{r}_{IJ}^2 + \epsilon^2}} = \alpha \frac{-\lambda [(v_J - v_I)(y_J - y_I) + (u_J - u_I)(x_J - x_I)]}{\sqrt{\mathbf{r}_{IJ}^2 + \epsilon^2}} \quad (6.12)$$



où  $\lambda = \frac{1}{2}(c_I + c_J) = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_I} + \sqrt{gh_J})$  est la vitesse moyenne des vagues de surface,  $\mathbf{u}_{IJ} = \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_J$  est la différence entre les vitesses des particules I et J,  $u$  et  $v$  sont les composantes du champ de vitesse respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $\mathbf{r}_{IJ} = \mathbf{r}_I - \mathbf{r}_J$  et  $\epsilon$  est une petite constante introduite pour éviter la division par zéro ( $\epsilon = 0.01$ ) et  $\alpha$  est un coefficient constant. La valeur typique que nous avons utilisée dans nos applications est  $\alpha = 0.5$ . L'équation finale de conservation de la quantité de mouvement, discrétisée et stabilisée, est donnée :

$$\dot{\mathbf{u}}_I = \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)_I = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N ((gh_I + gh_J) + \Pi_{IJ}) \mathbf{n}^{IJ} s_{IJ} \quad (6.13)$$

La viscosité artificielle  $\Pi_{IJ}$  est introduite par la même manière dans l'équation (6.9). L'écriture finale de cette équation qu'on va adopter dans le reste de ce travail est donnée par :

$$\dot{\mathbf{u}}_I = \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)_I = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N (g\tilde{h}_J + g\tilde{h}_I + \Pi_{IJ}) \mathbf{n}^{IJ} s_{IJ} \quad (6.14)$$

**Remarques 6.4 :**

1. Pour des raisons de précisions, nous allons utiliser l'équation (6.14) dans le reste de ce travail. Cette équation est adaptée pour toutes les distributions nodales aussi bien régulières que non-régulières. Le caractère Lagrangien de l'approche utilisée nous oblige à adopter l'équation (6.14) sur l'équation (6.13). Toutefois, pour les applications Euleriennes, l'équation (6.13) est nettement suffisante et beaucoup moins coûteuse.
2. Il est à noter que nous utilisons deux décompositions distinctes du domaine. Un premier "diagramme", qui n'est pas de Voronoï est utilisé pour la conservation de la masse. Le deuxième, qui est réellement de Voronoï, est utilisé pour la conservation de la quantité de mouvement et sur lequel équation (6.14) est appliquée (voir remarque 6.1).

3. Comme pour toute application à caractère purement Lagrangien, la décomposition utilisée pour la conservation de la masse peut se tordre et les cellules peuvent devenir singulières. Dans une telle situation, une redistribution de la masse est nécessaire et le diagramme de référence doit être réinitialisé.
4. Par analogie avec la dualité MEF-MVF, l'approche proposée dans ce chapitre peut être baptisée "*Méthode des volumes naturels*" notée par MVN par analogie à MEN. Le calcul des flux sur les bords de la cellule de Voronoï est comparable avec ce celui effectué sur les arêtes des triangles pour la méthode des volumes finis conventionnelle.

### 6.3 Conditions aux limites

Contrairement au cas de la méthode SPH, le traitement des conditions aux limites est grandement facilité pour la MVN. Le caractère interpolant de la fonction de forme de la NEM permet l'imposition exacte des conditions aux limites de type Dirichlet. La seule difficulté réside dans la gestion du mouvement des particules de bord puisqu'on est dans une description Lagrangienne pure. Dans les applications proposées, une condition de glissement parfait est requise. Pour assurer une telle condition, il est nécessaire et suffisant d'annuler la composante normale du champs de vitesse. Toutefois, vue son utilisation dans l'intégration temporelle, la composante normale de l'accélération est également annulée. À défaut, au moins le gradient de la profondeur d'eau doit être nul [137, 119]. Ces conditions sont traduites par :

$$u_j^n = 0 \text{ et } \dot{u}_j^n = 0 \quad \forall I \text{ sur la frontière domaine} \quad (6.15)$$

avec  $u_j^n$  et  $\dot{u}_j^n$  sont, respectivement, les composantes normales du vecteur vitesse et celui de l'accélération. Pour ceci, les vecteurs vitesse et accélération sont, tout simplement, projetés sur les vecteurs tangents à la frontière.

Toutefois, le caractère Lagrangien de la formulation introduit des difficultés supplémentaires dans l'introduction des conditions aux frontières. En fait, la frontière (la géométrie)

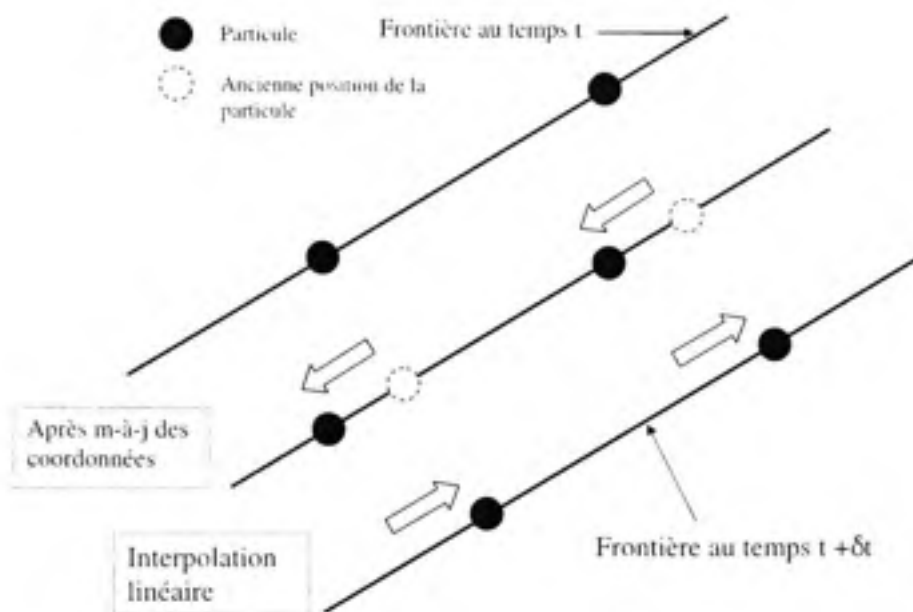


Figure 37 Traitement de la frontière : une particule de la frontière est fixée et ses paramètres physiques ( $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{u}$  and  $h$ ) sont interpolés à partir de ceux des particules de frontière au temps  $t^{n-1}$

du domaine est définie par un ensemble de nœuds (points). À chaque nœud, est attachée une particule fluide qui est en mouvement à chaque pas de temps. Ainsi, la géométrie du domaine risque d'être perdue, ou au moins, modifiée lorsque les particules de la frontière bougent. Par conséquent, afin de garder et de maintenir la géométrie initiale du domaine, les particules de frontière sont figées dans leurs positions initiales. Ce traitement spécial doit garantir, physiquement, une condition de glissement parfait sur la frontière. Les grandeurs physiques (vitesses, accélérations et profondeur d'eau) sont interpolées linéairement utilisant les deux particules les plus proches. En d'autres termes, les valeurs physiques dans l'emplacement des particules fixes sont interpolées utilisant les valeurs déjà calculées des particules mobiles. La figure (37) illustre cette procédure d'interpolation. Une attention particulière est portée pour les nœuds situés dans les coins et les points anguleux. Dans de tels cas, il n'y a qu'une seule particule voisine (dans chaque direction) et ainsi l'interpolation linéaire décrite dans ce paragraphe ne peut être appliquée. Pour contourner ce problème, l'équation de continuité (6.1) est utilisée. Une profondeur approximative est

attribuée au nœud du coin et en utilisant l'équation de continuité, cette valeur est corrigée. Quelques itérations sont généralement nécessaires.

Cette procédure peut être remplacée par une deuxième qui génère moins d'erreur puisqu'elle ne nécessite pas d'interpolation, mais qui est plus difficile à mettre en œuvre surtout en présence de frontière géométriquement complexe. Dans cette deuxième alternative, les particules peuvent être laissées libres de manière qu'elles se déplacent comme les particules internes. Toutefois, les nœuds des points anguleux doivent être remplacés par des nœuds sans masses dès qu'elles se mettent à se déplacer. La valeur de la profondeur attribuée au nouveau nœud est déterminée par la même manière avec l'équation de continuité (6.1).

#### 6.4 Discrétisation dans le temps

L'intégration temporelle se base sur des schémas explicites. Ceci permet d'éviter la résolution de grand système matriciel, mais il requiert une attention spéciale pour garantir la stabilité de l'intégration en temps et pour assurer un meilleur choix du pas de temps. Dans le travail proposé, le schéma d'Euler explicite a été utilisé dans quelques unes des applications. Toutefois, pour la majorité des tests, le schéma de Newmark explicite est utilisé systématiquement. Les vitesses et les coordonnées pour une particule  $I$  sont obtenues comme :

$$\mathbf{u}_I^{n+1} = \mathbf{u}_I^n + \Delta t((1 - \gamma)\dot{\mathbf{u}}_I^n + \gamma\dot{\mathbf{u}}_I^{n+1}) \quad (6.16)$$

$$\mathbf{x}_I^{n+1} = \mathbf{x}_I^n + \Delta t\mathbf{u}_I^n + \Delta t^2\left(\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{u}}_I^n + \beta\ddot{\mathbf{u}}_I^{n+1}\right) \quad (6.17)$$

avec  $\Delta t$  est le pas de temps,  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $\dot{\mathbf{u}}$  est le vecteur accélération et la notation  $\mathbf{u}^n$  veut dire  $\mathbf{u}(t^n)$ . En choisissant les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  égales, respectivement,  $1/2$  et  $1/4$ , le schéma correspond à la règle des trapèzes et le schéma est d'ordre 2 en précision [42].

D'un autre côté, Loukili et al. ont suggéré dans [6], que d'après une étude de stabilité par linéarisation, appliquée aux équations de Saint-Venant, le pas de temps doit obéir à une limitation du CFL [60]. Cette condition est donnée par :

$$CFL = \Delta t \frac{\max_I(\sqrt{gh} + \sqrt{u_x^2 + u_y^2})}{\min(d_{IJ})} < 1, \forall I, J \quad (6.18)$$

Pour la majorité des applications de volumes finis en approches Euleriennes, la valeur du CFL est généralement supérieur à 0.5. Il peut même atteindre 0.9 vue qu'il n'y a pas de risque de distortion du maillage. Cependant, dans nos applications, la nature purement Lagrangienne implique une limitation assez importante du CFL qui ne peut dépasser la valeur de 0.5.

### 6.5 Adaptativité ou le raffinement nodal

Vue la nature Lagrangienne totale de la procédure proposée, la distribution nodale change à chaque pas de temps. Par conséquent, on peut obtenir dans certains cas, des concentrations nodales fortement irrégulières où un grand nombre de nœuds est confiné dans une partie restreinte du domaine de calcul, alors que le reste des nœuds sont éparpillés dans l'autre partie. Bien que l'introduction de la viscosité artificielle donnée par l'équation (6.12), assure une régularité minimale de la distribution nodale, le caractère fortement Lagrangien de l'écoulement peut l'emporter sur l'effet de la viscosité artificielle. Dans un tel cas, une adaptation ou une re-organisation nodale peuvent se révéler nécessaires. C'est ce qu'on appelle "adaptativité" ou "raffinement nodal".

La procédure d'adaptativité doit satisfaire deux conditions indispensables : la conservation de la masse et la stabilité du schéma numérique. La conservation de la masse signifie que la masse totale du fluide doit rester constante avant et après l'enclenchement de la procédure d'adaptativité. La stabilité numérique signifie que lors d'ajout ou de suppression

de particule, les perturbations numériques engendrées ne doivent pas causer de grandes erreurs et par conséquent ne doivent pas affecter la qualité de la solution globale.

Pour enclencher la procédure d'adaptativité, nous avons besoin d'un indicateur qui donne une idée sur la répartition et la distribution nodale dans le domaine. Ainsi, dès la détection d'une zone de concentration de nœuds, une fusion de particules est requise. Sinon, dans le cas inverse, une introduction d'un nouveau nœud est effectuée. L'indicateur utilisé dans ce travail se base sur la distance entre les nœuds. Pour chaque particule, l'entité suivante est calculée à chaque pas de temps :

$$R = \frac{\min_J d_{IJ}}{\min_J d_{IJ}^0}, \quad J \text{ est le voisin naturel de } I \quad (6.19)$$

où  $d_{IJ}$  est la distance entre les nœuds  $I$  et  $J$  au temps  $t$  et  $d_{IJ}^0$  est la distance entre  $I$  et  $J$  au temps  $t = 0s$ . Quand  $R$  est inférieur à 10 pour cent, ce qui signifie que la particule  $I$  s'est rapprochée beaucoup à une de ses voisines. Ceci déclenche la procédure d'adaptativité. Les deux particules sont, ainsi, fusionnées en une seule qui a une masse égale à la somme des deux et située à mi-chemin entre les deux anciennes. La vitesse et l'accélération de la nouvelle particule sont interpolées linéairement. Si l'indicateur  $R$  est supérieur à 190, une insertion d'un nouveau nœud est effectuée. La nouvelle particule sera placée à mi-distance entre le nœud et le plus loin de ses voisins. La masse est distribuée entre les trois particules de manière à ne pas engendrer de perturbation numérique. En général, pour stabiliser le code, quelques itérations sont nécessaires avant de passer au pas de temps suivant.

Il est à noter que pour toutes les applications présentées dans le paragraphe 6.8, il n'y a pas eu besoin pour enclencher la procédure d'adaptativité. Toutefois, la nature Lagrangienne de la formulation causera certainement dans des cas complexes des situations nécessitant l'adaptativité.

## 6.6 Algorithme général de la procédure

L'algorithme de la méthode peut résumer dans le diagramme de la figure 38. Il est à noter que, pour implémenter cette méthode, nous avons utilisé un mailleur de Delaunay très efficace et très rapide élaboré par Lounes Amran Illoul dans le laboratoire LMSP du professeur Chinesta au sein de l'école nationale supérieure des arts et métiers ENSAM de Paris (France). Ce mailleur est capable de générer aussi bien la triangulation de Delaunay que le diagramme de Voronoï associés à un ensemble de points munis d'une frontière bien définie.

## 6.7 Mesure de performance du code

Le temps de calcul du diagramme de Voronoï est proportionnel à  $n \log(n)$ . Celui du diagramme de Voronoï contraint est proportionnel au nombre de nœuds de la frontière (qui est de l'ordre de  $\sqrt{n}$ ). Pour localiser un point dans un domaine, le temps de calcul est de l'ordre de  $\sqrt{n}$  aussi. Le tableau suivant résume les performances du code utilisé pour le cas d'un domaine à 100 000 nœuds (Ces données nous ont été fournies par Dr. L. Illoul de l'équipe du professeur Chinesta) :

TABLEAU I

Mesure de performance du code utilisé pour le cas de 100000 nœuds

Processeur	Mobile Intel Pentium M 745, 1800 MHz
Mémoire	1024 Mo (PC2700 DDR SDRAM)
Nombre de nœud	100 000
Voronoï contraint + intersection frontière	100 000 millisecondes
Calcul de fonction de forme Sibson + dérivée	20ms/1000 opérations
Localisation d'un point dans un domaine de 100 000 nœuds	1000 ms/1000 points



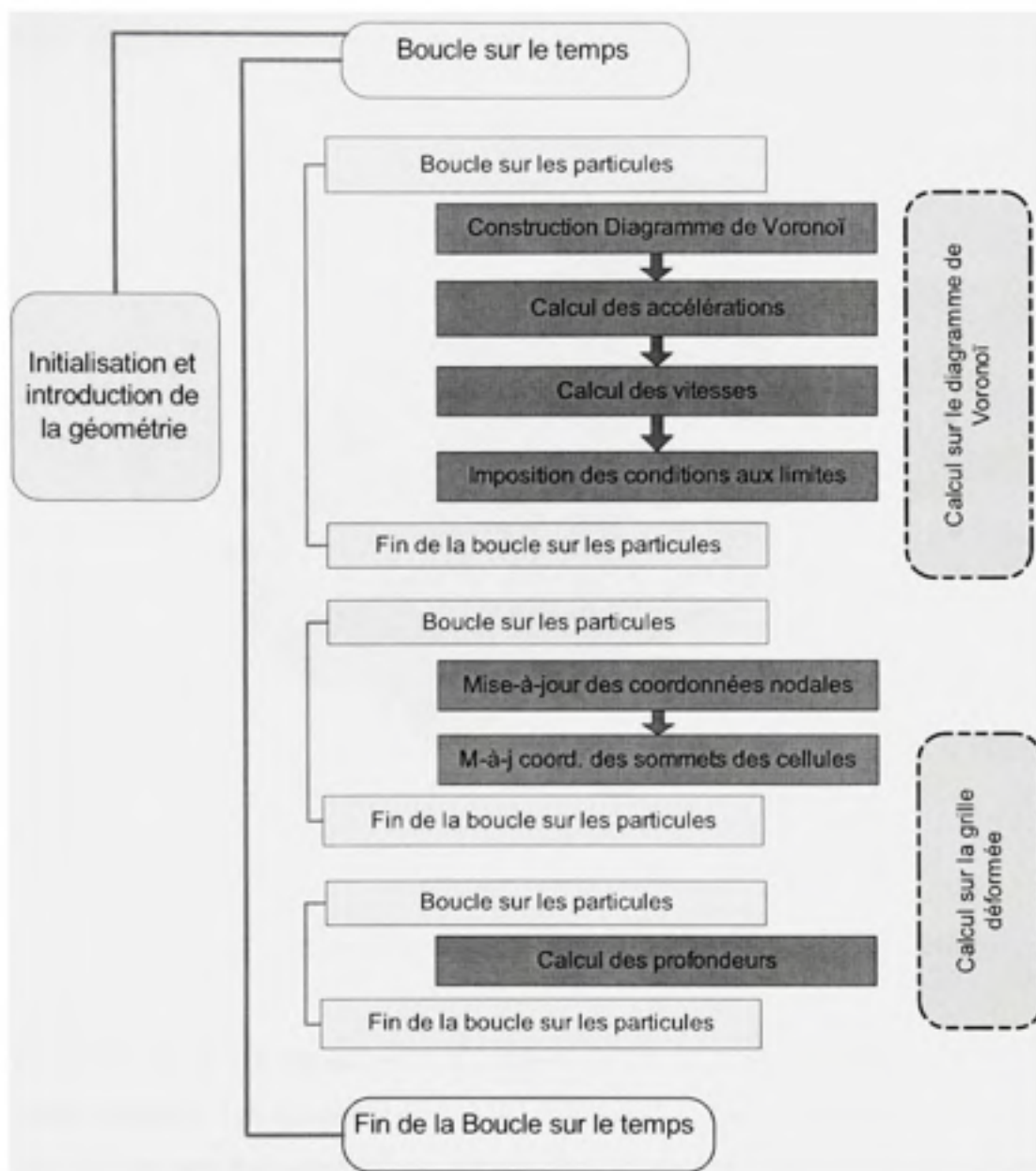


Figure 38 Algorithme global de la méthode des volumes naturels.

## 6.8 Résultats et applications

Dans ce qui suit, on va présenter des tests de validation du code élaboré. Ces tests permettront d'étudier la robustesse et les limites de la méthode des volumes naturels.



### 6.8.1 Problème de bris de barrage en 2D dans un canal rectangulaire

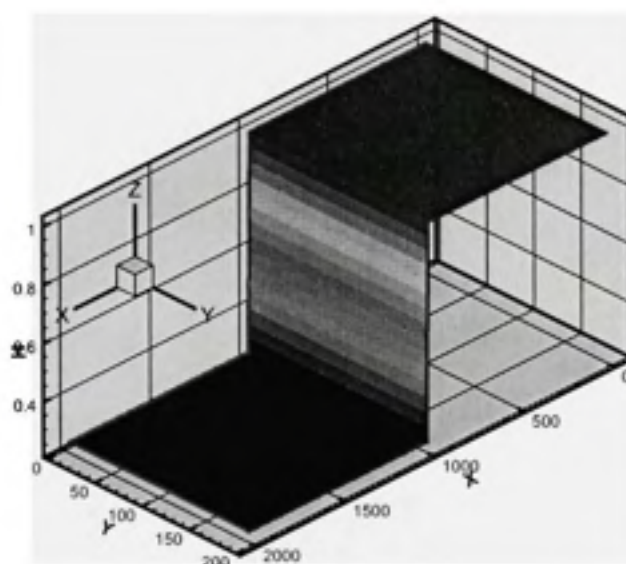


Figure 39 Conditions initiales pour le problème de bris barrage standard.

Le premier test de validation consiste à simuler le problème de bris de barrage dans un canal rectangulaire. Les frottement du lit et la variation de la bathymétrie sont supposés sans effet. Ce cas peut être considéré comme une généralisation du problème en 1D, puisque la variation transversale n'a, à-priori, aucun effet sur l'écoulement. Ce dernier sera par conséquent uniquement suivant la composante longitudinale du canal. En d'autres termes, le problème de bris de barrage en 2D peut être considéré comme une suite d'écoulement mono-dimensionnels rangés l'un à côté de l'autre dans la direction transversale.

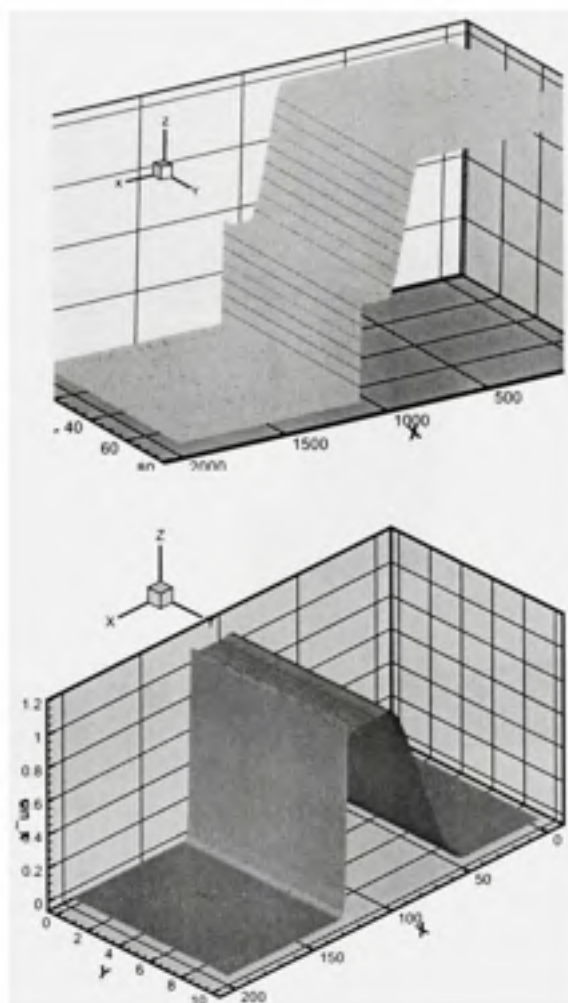


Figure 40 Profondeur d'eau (haut) et vitesse (bas) à  $t = 30$  s pour le problème de bris barrage standard.

Une solution analytique a été donnée par Stoker dans [78] pour le problème de bris de barrage en 1D. Les conditions initiales pour ce cas sont présentées dans la figure 39. La profondeur amont de l'eau est 1 m et la profondeur aval est 0.25 m. La longueur du canal est 2 000 m et sa largeur est 80 m. Le barrage est situé à  $x=1\ 000$  m. La discontinuité de profondeur est linéarisée sur une distance de 15 m. Le nombre de particules utilisées a été varié de 1 000 à 30 000. La figure (41) donne la profondeur d'eau pour une simulation faisant intervenir 30 000 particules. Toutefois, les résultats obtenus ont montré qu'un nombre

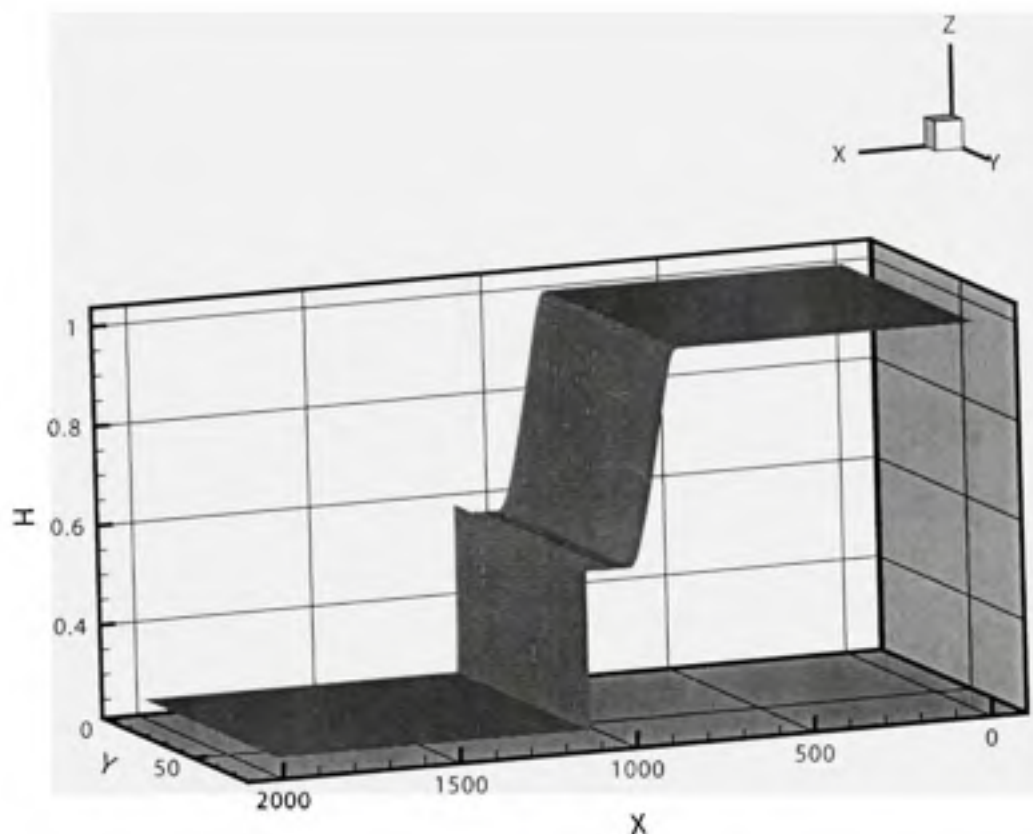


Figure 41 Profondeur d'eau pour le problème de bris de barrage dans un canal rectangulaire avec 30 000 particules.

minimum de 1 000 particules dans la direction longitudinale est nécessaire. Dans la figure 40 le résultat de la profondeur et de la vitesse sont présentés avec 10 000 particules disposées comme  $10 \times 1000$ . La capture du choc a été implémentée avec un coefficient  $\alpha$  qui varie entre 0.5 et 2. Pour les résultats présentés dans la figure 40,  $\alpha = 2$  et le terme de viscosité artificielle utilisé est donné par l'équation (6.12). Dans la figure (42) une comparaison entre résultat numérique trouvé et la solution analytique donné par Stoker. On peut remarquer que la solution a été bien reproduite, les chocs ont été bien captés et la technique de stabilisation a bien fonctionné puisqu'il n'y a pratiquement pas d'oscillations au niveau des discontinuités. Toutefois, un effet de diffusion est constaté surtout au niveau de l'onde de raréfaction. Ce qui peut être attribuable à l'effet de la viscosité artificielle. De

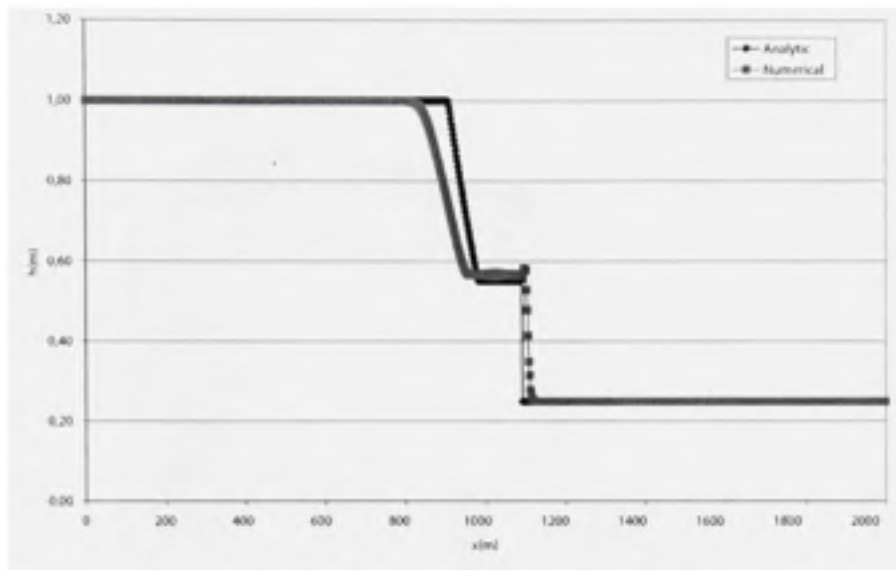


Figure 42 Comparison avec la solution analytique [78].

plus, le schéma de Lax-Friedrichs n'incorpore aucune technique MUSCL pour la réduction de la diffusion associée généralement avec les schémas de Godunov de premier ordre [13]. L'utilisation d'un limiteur de flux du style  $(\alpha = \alpha_0 \frac{|h_1 - h_2|}{h_s})$  with  $\alpha_0 = 2$  améliore le résultat de point de vue stabilisation mais génère plus d'effets diffusifs.

### 6.8.2 Canal rectangulaire à section variable : canal convergent et divergent

Pour voir l'effet d'une composante transversale de l'écoulement, le cas test précédent est changé de manière à ce que le canal, initialement rectangulaire, devient convergent ou divergent. La géométrie et les conditions initiales utilisées sont les mêmes pour les deux tests, à l'exception de la profondeur d'eau qui s'inverse d'un cas à l'autre. La profondeur amont pour un canal convergent, devient la profondeur aval pour le canal divergent. La figure 43 montre la géométrie et les conditions initiales pour ces deux cas tests.

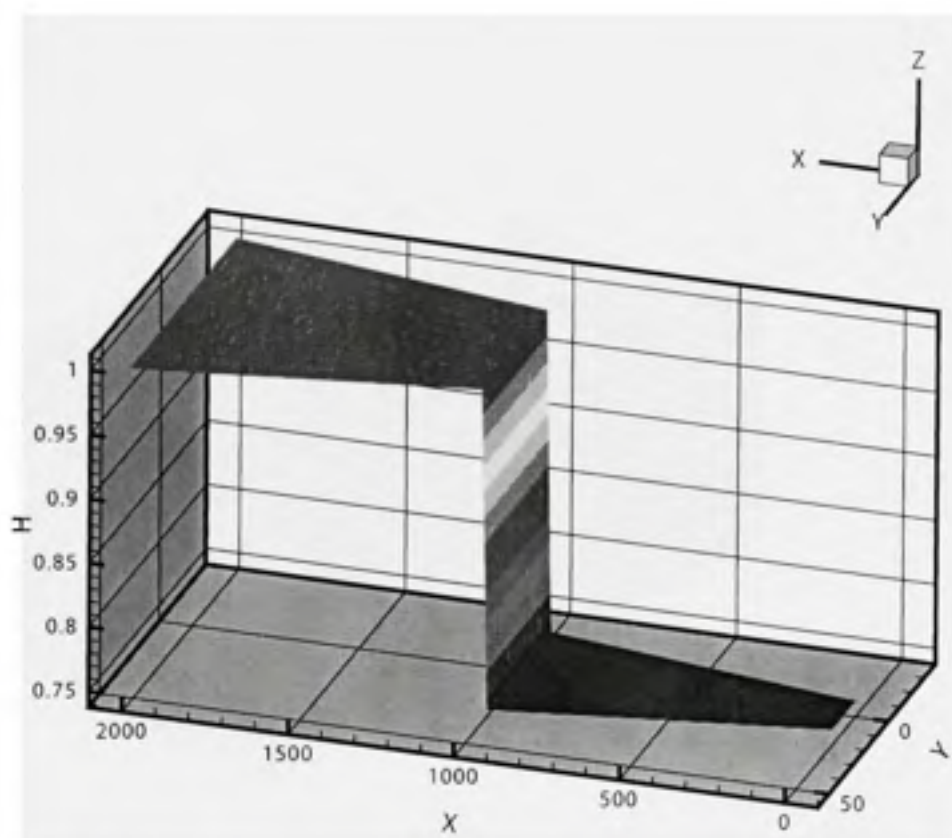


Figure -43 Conditions initiales et géométrie pour les cas de canal convergent et divergent.

La profondeur amont est 1 m, l'aval est 0.25 m et 10760 particules ont été utilisées pour simuler ces deux cas. Le domaine est de longueur 2000 m et le barrage est situé à  $x = 1000$  m. Comme pour le test précédent, la discontinuité à été linéarisée sur une distance de 15 m. Comme le montre les figures (44) et (46), l'introduction d'une composante transversale de l'écoulement n'a pas affecté la qualité de la solution et n'a pas baissé la performance du code. Les chocs sont bien captés et les oscillations sont très minimales. La technique de stabilisation a bien fonctionné comme dans le cas précédent.

Les figures (45) et (47) donnent une idée sur le comportement du champ de vitesse dans les deux cas. La conditions de glissement parfait peut être constatée sur les détails présentés dans chaque figure.



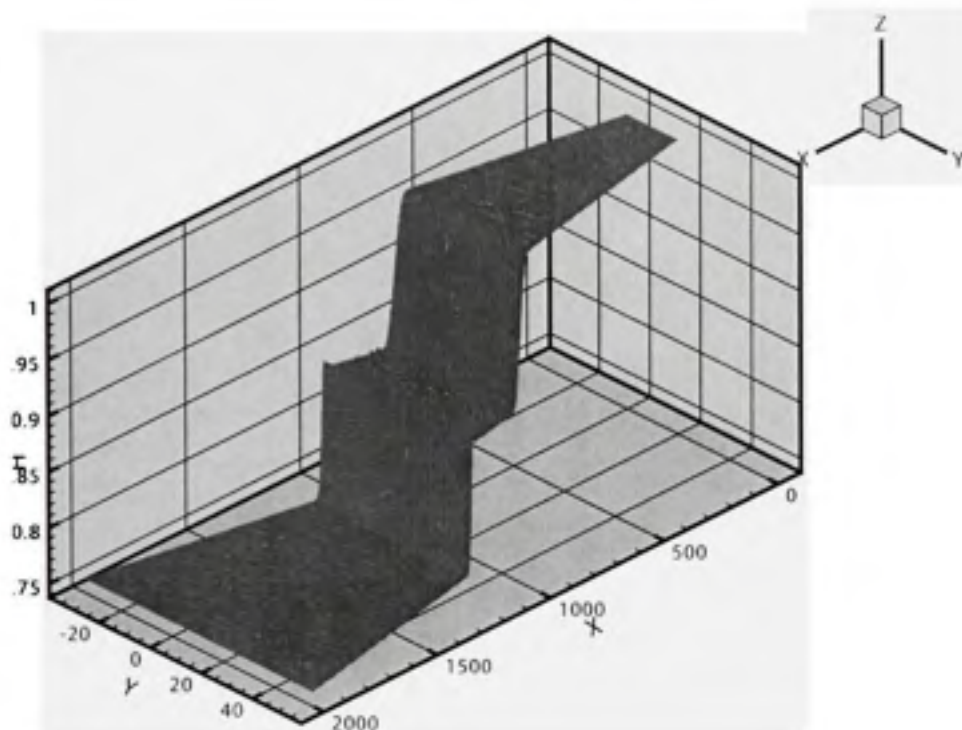


Figure 44 Profondeur d'eau pour le cas d'un canal divergent à  $t=30s$ .

### 6.8.3 Canal avec une discontinuité de section

Toujours dans le but d'étudier le comportement de la MVN vis-à-vis de la géométrie, le test suivant fait intervenir une point anguleux dans la géométrie. En effet, le domaine d'étude consiste en la jonction d'un canal rectangulaire avec un canal convergent, de manière à avoir un canal avec une légère discontinuité dans la section. La figure (48) donne les dimensions et la forme géométrique du domaine d'étude ainsi que les lignes de contour de la profondeur d'eau au temps  $t = 5s$ . La longueur du domaine est 200 m et sa largeur est de 80 m en amont et 60 en aval, ce qui induit un angle d'inclinaison de 2.29 degrés (10m/100m). La figure (49) donne une vue tridimensionnelle de la profondeur d'eau. On

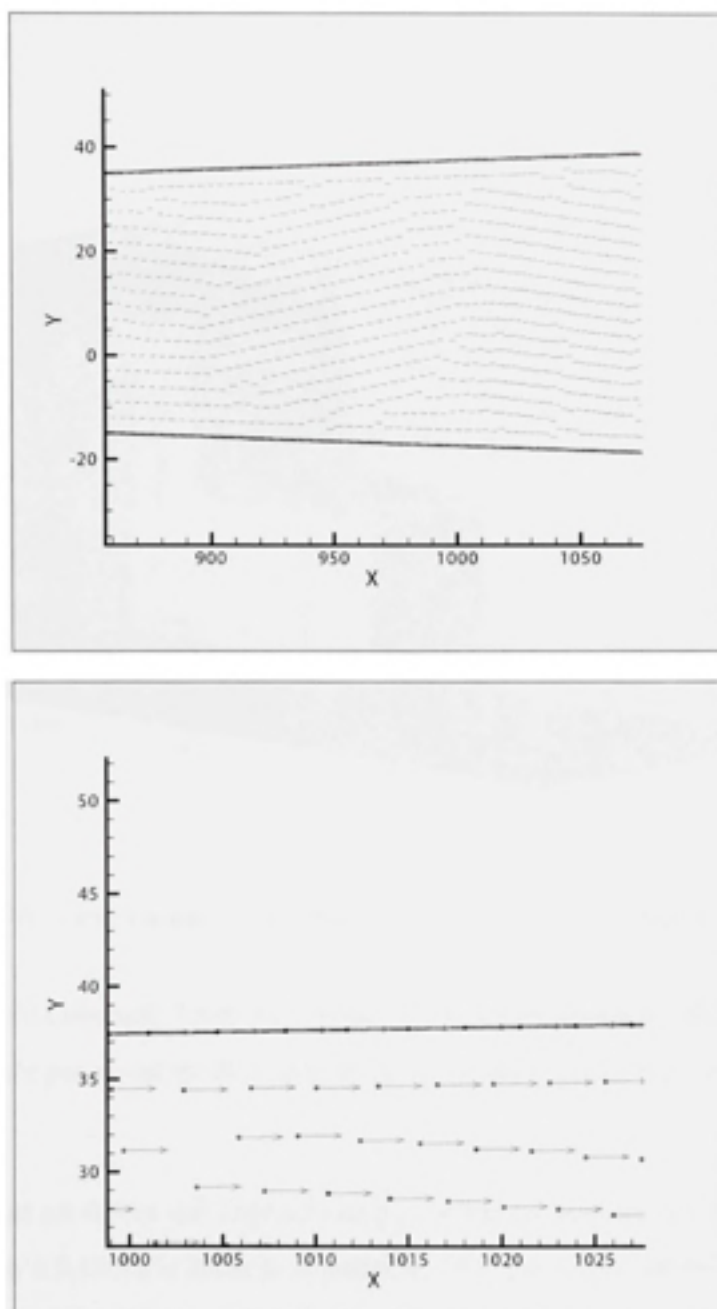


Figure 45 Vitesse dans le canal divergent au temps  $t=15s$  (haut) et zoom (bas).

note la naissance d'une vague lorsque le front arrive à la contraction. Physiquement, cette vague est parfaitement explicable par une augmentation naturelle de la profondeur d'eau

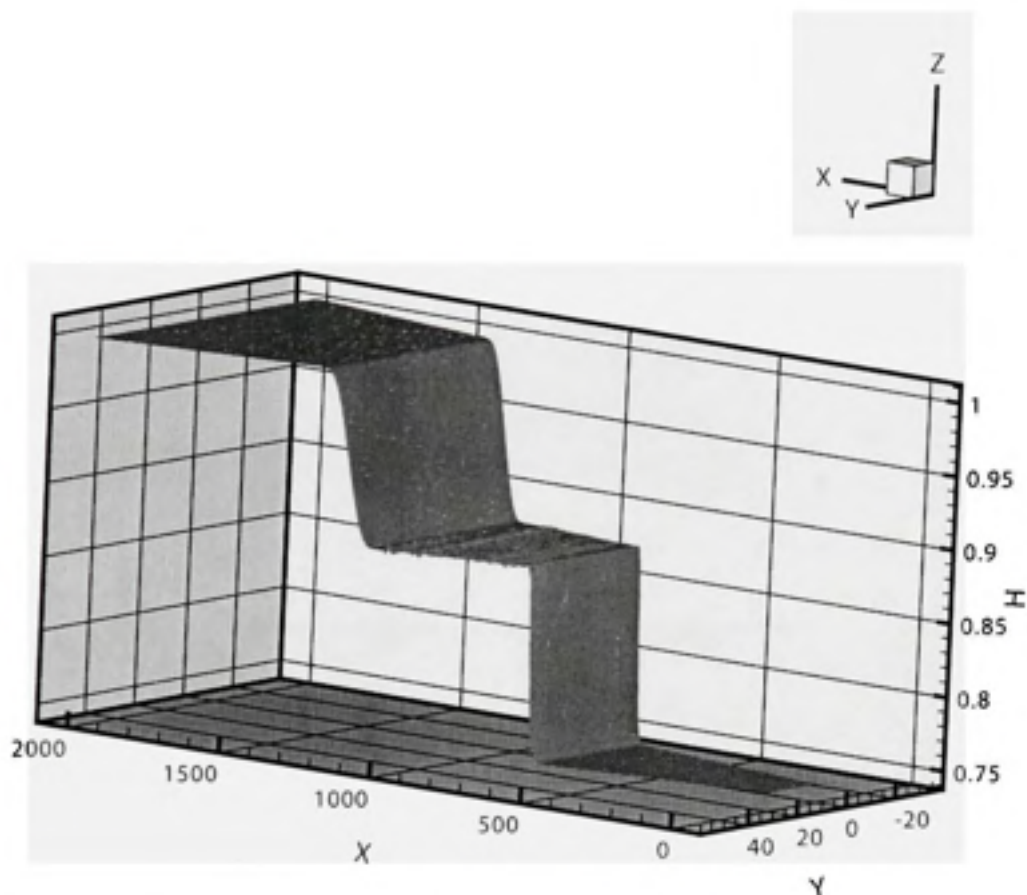


Figure 46 Profondeur d'eau pour le cas d'un canal convergent à  $t=30s$ .

dès la détection de l'obstacle. En d'autres termes, c'est la conversion immédiate de l'énergie cinétique incarnée par la vitesse de l'onde de choc, en une énergie de pression (profondeur d'eau).

Le CFL maximal est 0.5 ce qui implique un pas de temps dans les environs de 0.20 s et qui décroît jusqu'à 0.18 s à la fin de la simulation. 7490 particules ont été utilisées pour la simulation de ce cas.



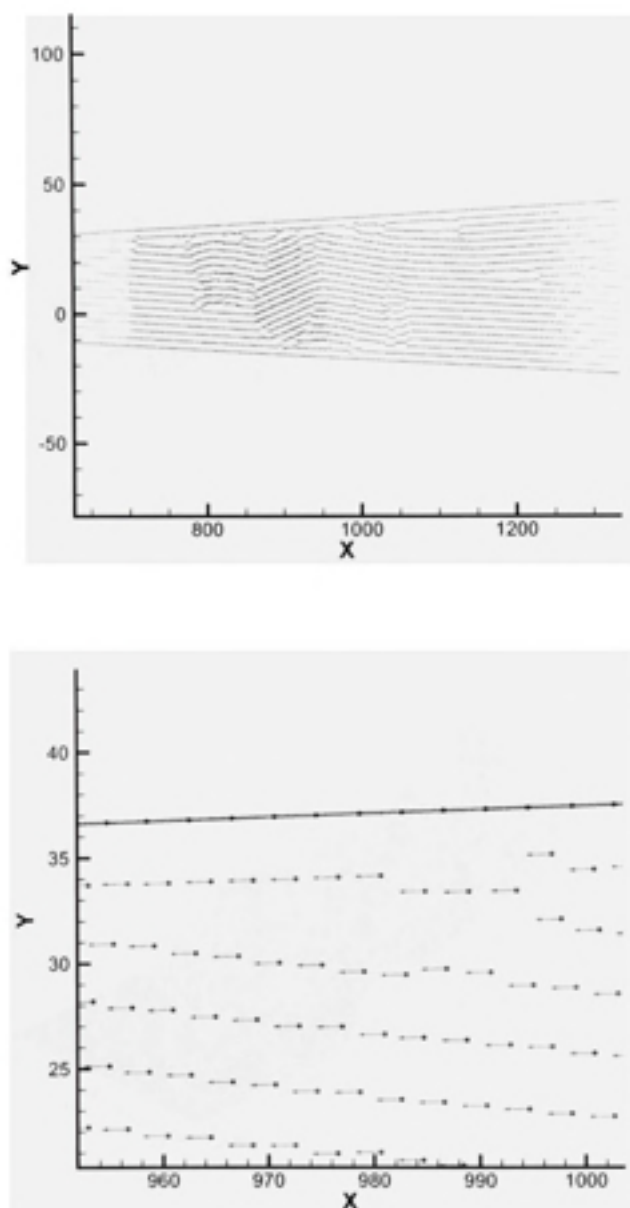


Figure 47 Vitesse dans le canal divergent au temps  $t=15s$  (haut) et zoom (bas).

#### 6.8.4 Problème de bris de barrage cylindrique

Dans son livre [38], Toro a suggéré un test de validation consistant en un barrage cylindrique au milieu d'un champ infini. Le barrage a un rayon  $R=5$  m et le domaine utilisé

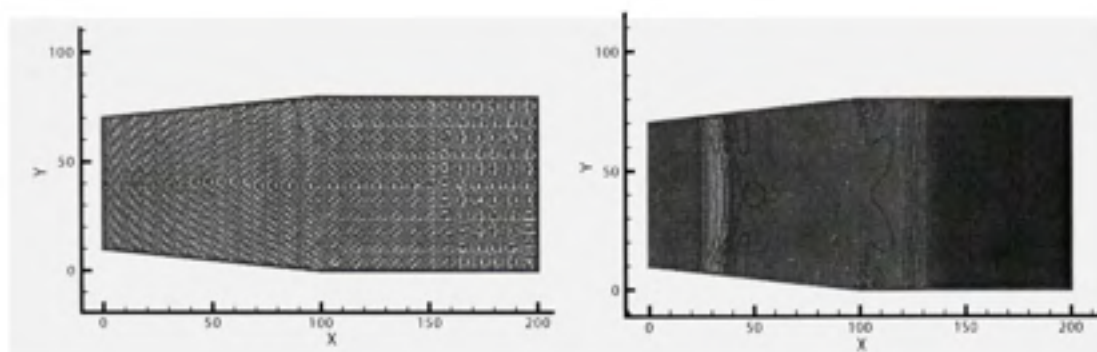


Figure 48 Géométrie et lignes de contour pour le canal rectangulaire avec une légère contraction.

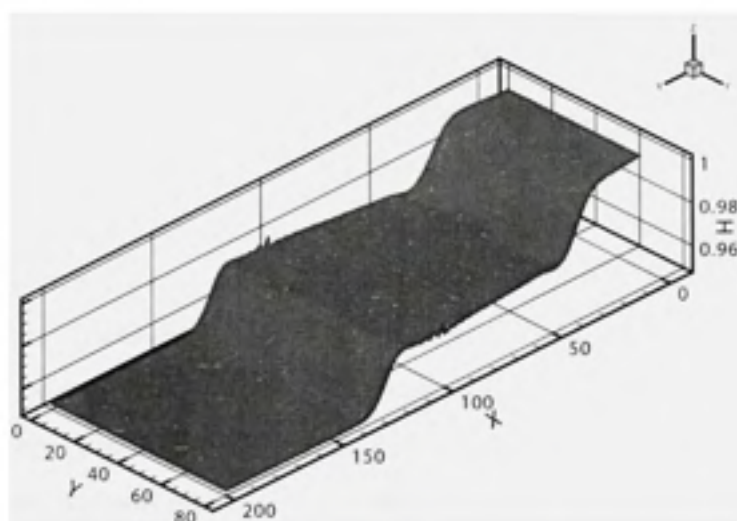


Figure 49 Profondeur d'eau pour le cas d'un canal rectangulaire avec une légère contraction à  $t=5s$ . À Noter la naissance d'une vague lorsque le front arrive à la contraction.

est un carré de côté 100 m ou un cercle de rayon 100 m. La profondeur intérieure est de 1 m et celle de l'extérieur est de 0.95 m. 2490 particules ont été utilisées. Ce nombre de

particules a été augmenté jusqu'à 10 000 pour voir l'effet de la h-variation. Les figures (50) et (51) illustrent ce cas test. Le comportement de la méthode des volumes naturels (MVN) proposée dans ce travail, vis-à-vis de la variation du nombre de particules et par rapport à la technique de stabilisation, est semblable à celui de la méthode SPH présentée dans le chapitre 5. Dans ce qui suit on va s'intéresser uniquement au comportement de la méthode proposée à la nature du maillage ou la distribution nodale initiale. La figure (50) montre le cas d'un maillage structuré 80x80. Elle donne la distribution nodale et le maillage initiaux, ainsi que les lignes de contour de la solution, la distribution du champ de vitesse et une vue tridimensionnelle de la solution en profondeur. Il peut être remarqué immédiatement que l'axi-symétrie du problème est perdue dès les premiers instants de la simulation. Ce problème est surmonté une fois le maillage structuré est remplacé par un autre adapté où la disposition initiale des nœuds est plus-ou-moins circulaire. La figure (51) présente ce cas où le maillage est adapté. Elle donne également la distribution nodale initiale, le maillage initial, les lignes de contour, le champ de vitesse et une vue en perspective de la profondeur d'eau à  $t=5s$ . On remarque que la qualité de la solution est nettement améliorée et que, contrairement au cas précédent, l'axi-symétrie est conservée. Les chocs ont été bien capté et la naissance d'une deuxième onde au milieu du domaine est même montrée. Toutefois, il est à noter que, malgré le dispositif de stabilisation présent, des oscillations numériques sont présents dans le voisinage de la deuxième onde. Ceci peut être expliqué par la faible densité nodale au voisinage du nœud central. Mais la raison la plus probable est la non compatibilité géométrique de la subdivision du domaine en cellules de Voronoï (qui sont des polygones) avec la nature circulaire de la géométrie et surtout de l'écoulement.

#### **6.8.5 Problème de canal rectangulaire avec une contraction soudaine**

Le dernier test présenté dans ce chapitre est le problème de bris de barrage dans un cas canal rectangulaire qui présente une contraction soudaine. C'est un test qui sert à évaluer la sensibilité du schéma envers les variations dans la géométrie. Il présente ainsi une variation

sévère de la géométrie. La figure (52) montre les conditions initiales de ce problème. Le domaine est de longueur 200 m et de largeur 80 m en amont du barrage et 20 m en aval de celui-ci. Le barrage est localisé à  $x=100$  m, la profondeur de l'eau est 1 m en amont et 0.95 en aval. La discontinuité est linéarisée sur une distance de 10 m. Les figures (53) et (54) donnent respectivement le champs de vitesse, le contour et la profondeur de l'eau à  $t=5$ s. 2490 particules ont été utilisées pour simuler ce cas. Un CFL maximal de 0.5 a été utilisé ce qui a généré un pas de temps de 0.123 s au début de la simulation qui décroît jusqu'à 0.121 s à la fin de la simulation.

On peut remarquer que la solution est d'une assez bonne qualité. Le choc a été bien capté et le champs de vitesse est bien représentatif de l'évolution de l'écoulement. Néanmoins, la qualité de la solution est légèrement perturbée dans les voisinages des coins. Ce qui peut naturellement être expliqué par le vif caractère du point anguleux qui est difficilement traité en formulation Lagrangienne. Le traitement des coins discuté dans le paragraphe 6.3, est aussi, très probablement à l'origine de ces oscillations. En effet, l'interpolation linéaire effectuée pour déterminer la profondeur d'eau sur les nœuds de frontières, ne peut pas être effectuée avec précision pour les nœuds des coins. Vraisemblablement, l'utilisation de l'équation de continuité pour déterminer cette valeur de profondeur, génère des erreurs numériques qui polluent la solution. Tous ces problèmes évoqués sont en grande partie générés par le caractère Lagrangien de la formulation. Éventuellement, dans un cadre purement Eulerien, les solutions présenteraient de meilleures précisions.

## 6.9 Conclusions

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de type volumes-finis a été présentée : C'est la *Méthode des Volumes Naturels* : MVN. Cette méthode, s'inspire de l'application de la méthode des éléments naturels en collocation et en formulation Lagrangienne. La MEN est donc utilisée pour évaluer les flux sur les cellules de Voronoï. Le schéma obtenu est un schéma centré donc instable. Ainsi, une procédure de stabilisation pour la formulation

obtenue, a été présentée. La stabilisation consiste à décentrer le schéma en introduisant une viscosité artificielle qui a été obtenue par analogie avec les techniques existantes dans les solveurs de Riemann.

La méthode des volumes naturels en formulation purement Lagrangienne a été appliquée dans quelques tests de validation. Ces applications ont montré un bon potentiel pour cette méthode : ce qui augure un bon avenir dans des applications complexes et pour pour des cas plus réels. Le caractère Lagrangien adopté dans le travail proposé, introduit plusieurs difficultés qui concernent surtout le traitement des conditions aux frontières dans les zones de complexités géométriques. Toutes ces difficultés sont éventuellement surmontées dès lors que la description Lagrangienne est abandonnée. Dans ce cas, le traitement des termes convectifs sera à la base de la naissance de nouveaux types de difficultés.

La méthode des volumes naturels montre les mêmes avantages que la méthode SPH et surtout lorsqu'elle est appliquée en formulation Lagrangienne. De plus, le caractère interpolant de la fonction de forme de type NEM, implique une aisance nette dans l'imposition des conditions aux frontières de type Dirichlet. Cet avantage est absent pour les méthodes MM's de type SPH ce qui a limité leur utilisation aux problèmes à frontières infinies ou à géométries très simples.

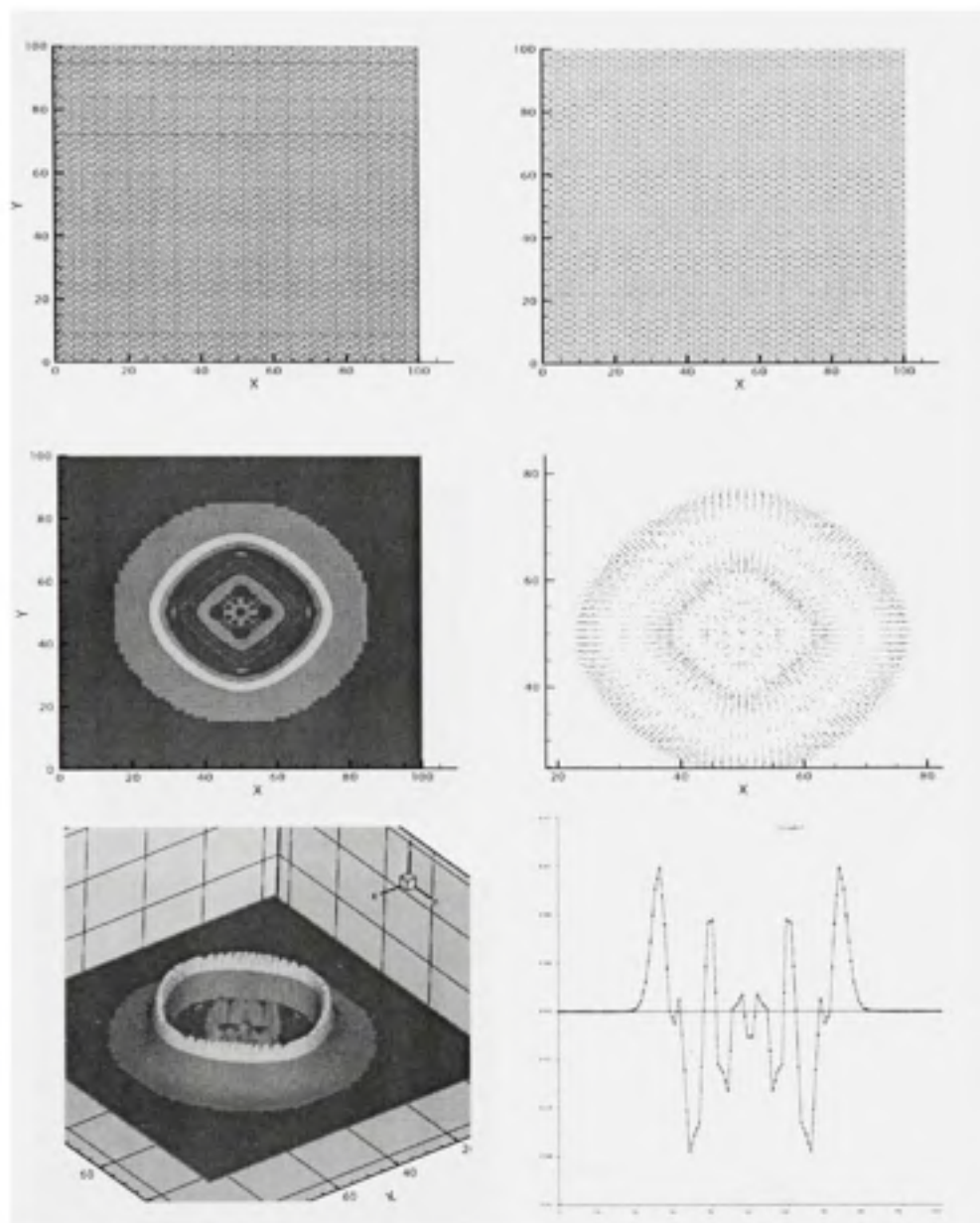


Figure 50 Le problème de bris de barrage cylindrique - maillage structuré. Distribution nodale et maillage initial (haut droite et gauche), le contour de la profondeur d'eau et la distribution de vitesse (milieu droite et gauche) et une vue 3D et une coupe de la profondeur d'eau (bas gauche et droite).



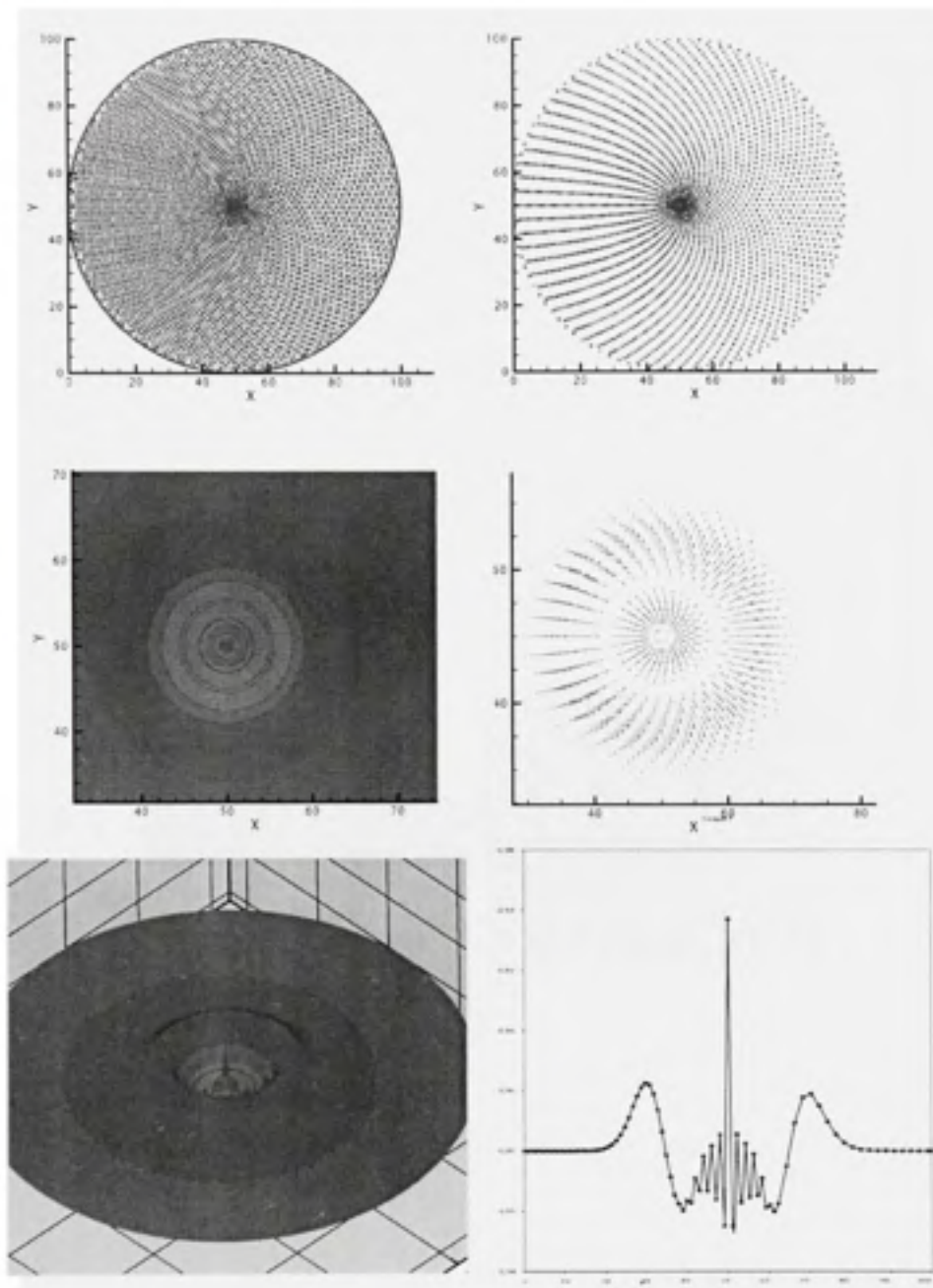


Figure 51 Le problème de bris de barrage cylindrique - maillage adapté. Distribution nodale et maillage initial (haut droite et gauche), le contour de la profondeur d'eau et la distribution de vitesse (milieu droite et gauche) et une vue 3D et une coupe de la profondeur d'eau (bas gauche et droite).

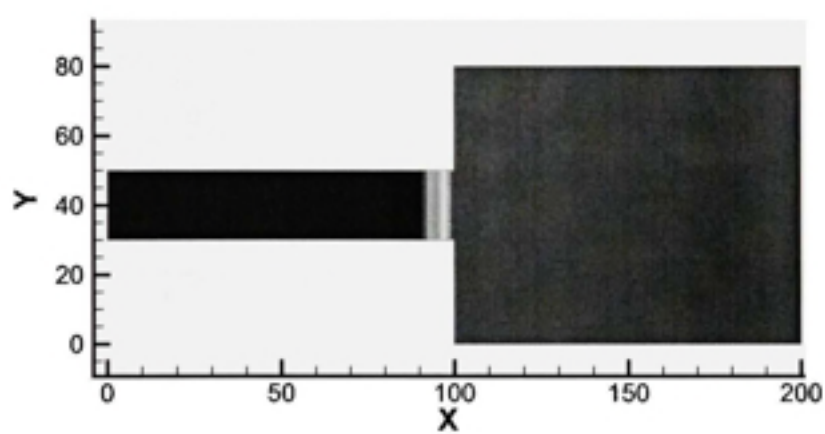


Figure 52 Conditions initiales pour le problème de canal rectangulaire avec une contraction brusque.



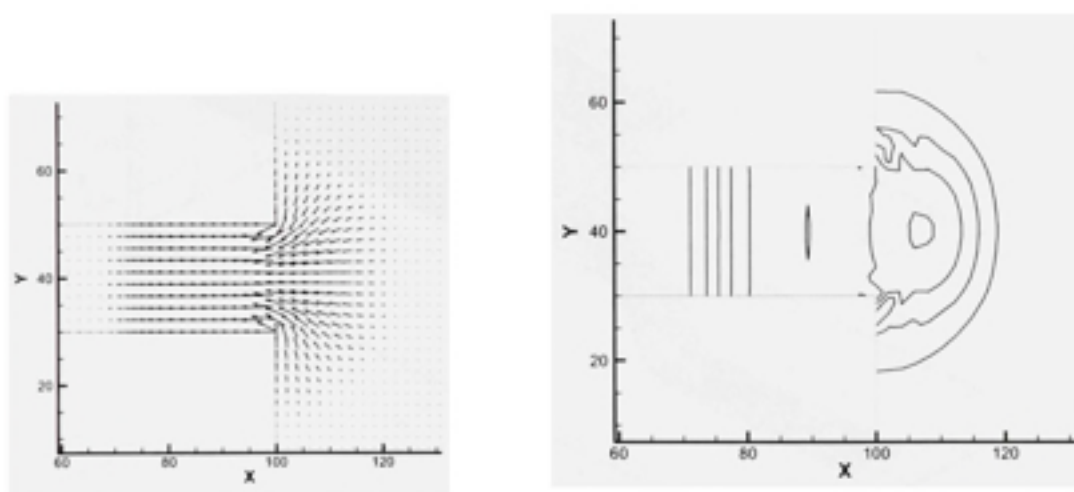


Figure 53 Canal rectangulaire avec une contraction brusque : distribution de la vitesse (gauche) et les lignes de contour de la profondeur d'eau (droite).

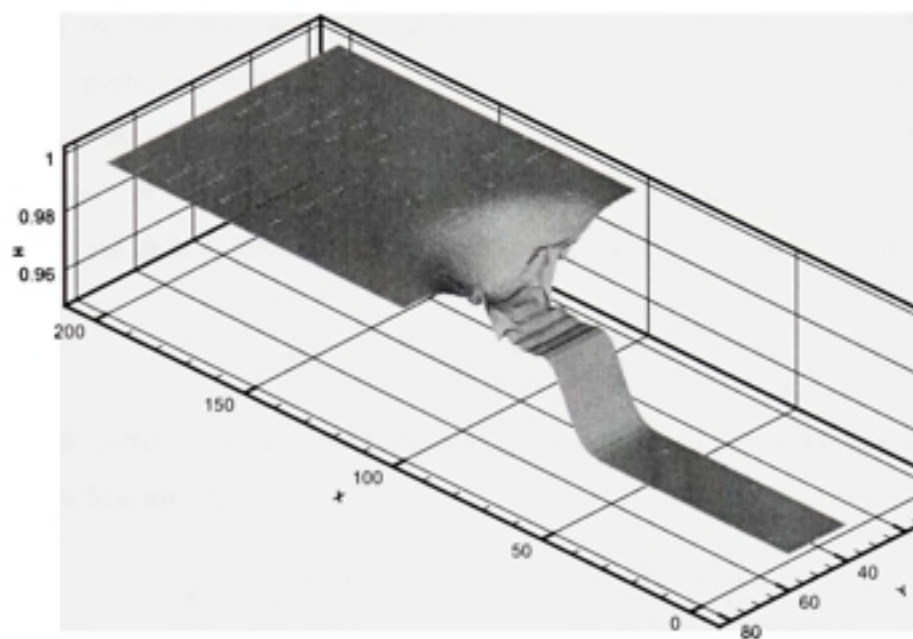


Figure 54 Profondeur d'eau pour le canal rectangulaire avec une contraction soudaine à  $t=5s$ .

## CHAPITRE 7

### INTRODUCTION DES TERMES SOURCES

#### 7.1 Introduction

Dans tous les chapitres précédents, les équations de Saint-Venant ont été évoquées et utilisées sous leur forme homogène. Dans le présent chapitre, on va essayer d'introduire les termes sources et ainsi traiter le système de Saint-Venant non homogène. Les termes sources pour notre cas, se décomposent en deux types : le premier terme traduit l'effet de la variation du lit du cours d'eau, noté  $S_0$  (connue dans la communauté hydraulique par bathymétrie), et le deuxième terme, introduit le frottement que subissent les colonnes d'eau par le fond de la rivière durant leur déplacement, noté  $S_f$ . Le terme de bathymétrie est donné par :

$$S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y} \quad (7.1)$$

Les termes de pertes par friction sont exprimés, par exemple, en utilisant le coefficient de frottement de Manning  $n$  :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{3}{2}}} \quad (7.2)$$

L'introduction de ces termes source est synonyme de génération de beaucoup de problèmes numériques. Un premier impact direct est l'introduction d'une nouvelle non-linéarité au système. Ceci peut même se traduire, dans le cas d'une formulation Lagrangienne (et donc la disparition du terme convectif), à une perte de la linéarité des équations. D'un autre côté, l'existence d'états stationnaires non-triviaux est l'un des principaux défis du système de Saint-Venant non-homogène. Ceci s'explique par l'existence de paramètres physiques du problème qui ne sont pas constants, même en régime stationnaire. Le traitement de ce dernier problème a fait l'objet de beaucoup de publications durant les dernières années. Citons à titre d'exemples Bermudez et Vasquez [36] et [107], Loukili [6], Mohammadian

et Le Roux [34], Leveque [128] et Leveque et Yee [64]. Cette liste est loins d'être exhaustive, ce qui montre l'abondance des travaux et la largesse des problèmes rencontrés. La présence du terme source qui introduit l'influence de la topographie induit, donc, des états stationnaires complexes. En 1D, et pour des solutions régulières, ils sont caractérisés par [35] :

$$\frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (7.3)$$

avec  $H(t, x) = \frac{u^2}{2} + g(h + Z)$ , la charge hydraulique. La conservation dans le temps de ces états stationnaires est une tâche délicate et assez difficile numériquement. En effet, l'état stationnaire correspond à un équilibre entre les termes de flux et les termes sources dont les discrétisations sont habituellement dé-corrélées [35]. Dans le cas des équations de Saint-Venant, un des états d'équilibre est la préservation de l'état de repos d'un fluide ( $u = 0$  dans l'équation 7.3).

En 2D, les états stationnaires correspondent, pour des solutions régulières, aux relations suivantes :

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, \quad \nabla H - \nabla \otimes \mathbf{u} = 0 \quad (7.4)$$

où  $\nabla \otimes \mathbf{u}$  est le rotationnel du champs de vitesse. Les états d'équilibre monodimensionnel (équation 7.3) sont alors retrouvés en suivant les lignes de courant. Or, ces lignes de courant ne sont pas connues a priori dans les écoulements complexes et pour les géométries compliquées. Ainsi, les états d'équilibre en 2D paraissent impossible à préserver numériquement, à l'exception, éventuellement, de celui qui correspond à une zone de repos. En 1D, les états d'équilibre qui correspondent à l'équation (7.4) et dont le champ de vitesse est non nul, sont caractérisés par les relations suivantes :

$$hu = C_1, \quad \frac{\|u\|^2}{2} + g(h + z) = C_2 \quad (7.5)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes qui sont déterminées par les conditions aux limites. L'équation (7.5) sera utilisée pour déterminer la solution analytique du cas d'un canal avec une bathymétrie constante avec une bosse au milieu.

L'étude du traitement numérique des termes sources est une tâche très large dont on ne peut la présenter exhaustivement dans le cadre de cette thèse. Pour une étude plus complète des causes numériques et de la résolution des problèmes générés par les termes sources, nous référons à l'excellente thèse de Audusse [35]. Dans le cadre du travail proposé, nous allons nous limiter à reproduire les états d'équilibre qui correspondent à des zones de repos.

## 7.2 Traitement numérique des termes sources

La majorité des travaux qui s'intéressaient aux écoulements à surface libre basés sur les modèles de type Saint-Venant, ont utilisé le système homogène. Une revue de ces travaux peut être trouvée dans les travaux de LeVeque [127], de Soulaïmani [8] et de Toro [38]. Plus récemment, plus d'intérêt s'est porté sur l'étude du système non-homogène monodimensionnel. D'après Bermudez [36], Roe a montré dans [120] que pour les systèmes linéaires, les termes sources doivent être décentrés avec la même manière que le flux physique. Ensuite, Glaister s'est basé sur ce travail pour proposer, dans [115], une approche pour résoudre le système de Saint-Venant non-homogène. LeVeque et Yee [64] ont utilisé des termes sources paramétrés dans une équation d'advection pour laquelle les termes source et les flux sont traités dans deux pas différents. Bermudez et Vasquez ont généralisé l'approche de LeVeque et Yee pour les systèmes hyperboliques non-homogènes [36]. Les termes sources et les flux sont discrétisés et décentrés par la même méthode. Leur approche consiste à projeter les termes source sur les vecteurs propres de la matrice Jacobienne du flux et ainsi généraliser la notion de décentrage. Cette approche a permis d'étendre les techniques existantes aux topographies variables et aux maillages structurés. Les auteurs ont surtout introduit la notion de *C-Property* qui garantit que le schéma utilisé vérifie les conditions de stagnation i.e. il reproduit les cas de zones de repos. " On dit qu'un

*schéma vérifie la C-Propriété, si le schéma appliqué à une solution stationnaire retrouve :*  
[47, 36, 107]

$$h_i^n + z_i = c \quad \text{et} \quad u_i^n = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.6)$$

Par la suite cette technique a été généralisée par Vasquez-Cendon dans [108] pour le cas de canal avec une géométrie irrégulière. On dit qu'un schéma vérifie la *C-propriété approximée à l'ordre n*, si il reproduit la solution exacte du problème à l'ordre décrit [108]. Enfin, on dit que le schéma vérifie la *Z-propriété* [39] si il reproduit un test de stagnation i.e. il ne génère pas de mouvement artificiel dans un fluide au repos.

Toutes les approches évoquées en haut, sont coûteuses en terme de temps de calcul, puisqu'elles se basent sur une projection des termes sources sur les vecteurs propres de la matrice Jacobienne. Pour surmonter ce problème, LeVeque a proposé un problème de Riemann local pour balancer les termes source et pour le calcul des flux et de leur gradients. Cette technique vérifie aussi bien le test de stagnation, que les conditions de l'état *quasi-stationnaire* [128], mais elle n'est pas applicable sur les maillages non-structurés. Mohammadian et al. [90] ont fait une première exploration sur le décentrage des termes source sur des maillages non-structurés. Ils ont développé un schéma numérique qui se base sur le schéma de Roe, et qui vérifie la *C-property*. Dans [34], ils ont proposé deux techniques qu'ils jugent efficaces, pour simuler les écoulements sur des topographies variables et sur des maillages non-structurés. Ces deux méthodes vérifient la *C-property* lorsqu'elles sont combinées avec le schéma de Roe pour le calcul la profondeur d'eau à la surface. Les auteurs défendent aussi le fait que ces approches peuvent être combinées avec d'autres schémas en volumes finis [34], sans, toutefois, mener à des formulations complexes comme c'est le cas pour les travaux antérieurs [3]. Dans un autre registre, Idelis et al. ont proposé dans [141] des techniques de relaxation de premier et de second ordre qui servent aussi bien pour discrétiser les flux que les termes sources. Audusse et al. [109] ont fait une bonne récapitulation des schémas dites "cinétiques". De plus, ils ont proposé un nouveau schéma cinétique qui résout les équations de Saint-Venant homogènes en les

interprétant et en les écrivant sous une formulation cinétique : Ainsi, au lieu de résoudre le système de Saint-Venant classique, qui est un système hyperbolique non linéaire, la formulation cinétique permet de résoudre une équation de transport linéaire d'une entité (densité microscopique de particules  $M$ ) qui est non linéaire, pour laquelle il est plus facile de trouver des schémas d'approximation précis et présentant de bonnes propriétés théoriques [109]. Ce schéma présente de bonnes propriétés de stabilité puisqu'il préserve la positivité de la profondeur d'eau même lorsqu'il est appliqué dans des zones sèches [109]. Ensuite, les auteurs présentent une extension de ce schéma au système non-homogène basée sur une *reconstruction hydrostatique* de la profondeur d'eau. Cette extension conserve les propriétés de conservation du schéma homogène [109].

### 7.2.1 Méthode des volumes naturels

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler brièvement le schéma obtenu dans le chapitre précédent, qui donne la discrétisation par la méthode des volumes naturels (MVN) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système de Saint-Venant homogène. Cette équation est l'équation (6.14) qui est donnée par :

$$\dot{\mathbf{u}}_I = \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)_I = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N (g\check{h}_J + g\check{h}_I + \Pi_{IJ}) \mathbf{n}^{IJ} s_J \quad (7.7)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse et  $\dot{\mathbf{u}}_I$  est le vecteur accélération de la particule  $I$ ,  $\check{h}_J$  est l'approximation de type éléments naturels de la profondeur d'eau sur l'arête  $J$ ,  $s_J$  est la longueur de cette arête,  $\mathbf{n}^{IJ}$  est la normale unitaire sortante portée par la droite  $(IJ)$ ,  $A_I$  est l'aire de la cellule de Voronoï associée à  $I$  et  $\Pi_{IJ}$  est la viscosité artificielle introduite par l'équation (6.12), pour décentrer le schéma et pour le stabiliser afin de mieux capter les chocs. Cette viscosité est donnée par :

$$\Pi_{IJ} = \alpha \frac{-\lambda \mathbf{u}_{IJ} \cdot \mathbf{r}_{IJ}}{\sqrt{\mathbf{r}_{IJ}^2 + \epsilon^2}} = \alpha \frac{-\lambda [(v_J - v_I)(y_J - y_I) + (u_J - u_I)(x_J - x_I)]}{\sqrt{\mathbf{r}_{IJ}^2 + \epsilon^2}} \quad (7.8)$$

où  $\lambda = \frac{1}{2}(c_I + c_J) = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_I} + \sqrt{gh_J})$  est la vitesse du son moyenne,  $\mathbf{u}_{IJ} = \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_J$  est la différence entre les vitesses des particules I et J,  $u$  et  $v$  sont les composantes du champ de vitesse respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $\mathbf{r}_{IJ} = \mathbf{r}_I - \mathbf{r}_J$  et  $\epsilon$  est une petite constante introduite pour éviter la division par zéro et  $\alpha$  est un coefficient constant.

La méthode MVN introduite dans le chapitre 6 est, rappelons le, une approche de type volumes finis qui consiste à approximer les flux sur les cellules de Voronoï en utilisant une interpolation de type éléments naturels. Les paramètres physiques sont moyennés sur la cellule de Voronoï et les gradients sont calculés en utilisant l'approche du gradient stabilisée introduite par Chen [66] et qui est tout simplement une approximation du gradient qui utilise le théorème de Green.

Dans le cas où les termes sources sont introduites, l'équation (7.7) est adaptée pour prendre en considération la bathymétrie. Ainsi  $\bar{h}$  est remplacée par  $\bar{\eta} = \bar{h} + \bar{\xi}$  et l'équation devient (voir figure 55) :

$$\dot{\mathbf{u}}_I = \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)_I = -\frac{1}{A_I} \sum_{J=1}^N (g\bar{\eta}_J + g\bar{\eta}_I + \Pi_{IJ}) \mathbf{n}^{IJ} s_J \quad (7.9)$$

### 7.2.2 Approximation du frottement du lit

Dans la plupart des travaux consacrés au traitement des termes source, l'accent est mis sur la discrétisation des gradients de la bathymétrie. Les études de stabilisation et/ou de décentrage concernent exclusivement ces termes géométriques. Pour introduire la friction du lit, une simple procédure de collocation est effectuée sur le terme de friction. Ainsi, pour une particule I :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u_I \sqrt{u_I^2 + v_I^2}}{h_I^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad S_{fy} = \frac{n^2 v_I \sqrt{u_I^2 + v_I^2}}{h_I^{\frac{3}{2}}} \quad (7.10)$$



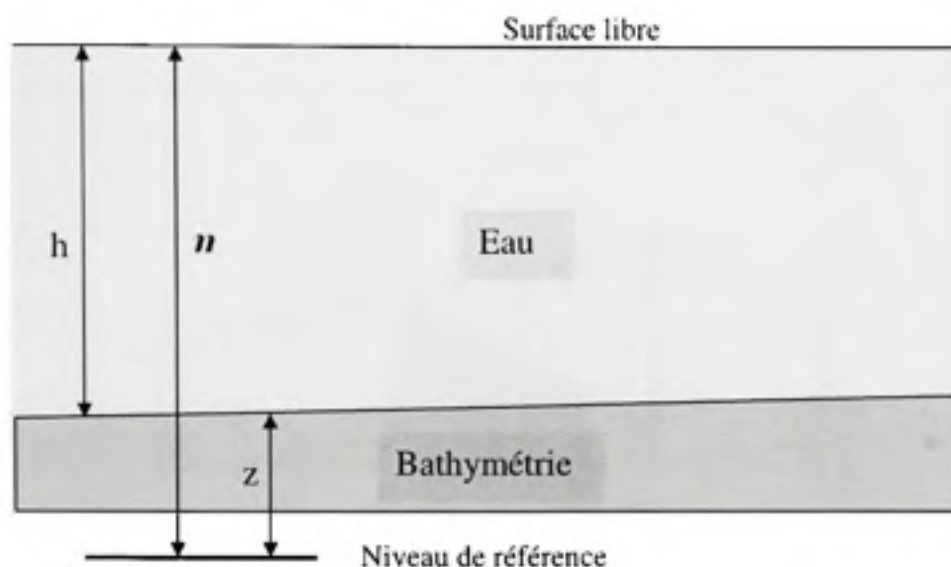


Figure 55 Notations pour les équations de Saint-Venant non-homogènes.

$n$  étant le coefficient de Manning. Pour introduire ce terme de frottement, l'expérience montre l'obligation d'impliciter dans le temps le schéma utilisé, faute de quoi, des problèmes avec le CFL émergeraient.

### 7.3 Applications numériques

Dans un but d'évaluation du schéma obtenu, nous allons appliquer cette discrétisation dans quelques cas test. La description de la géométrie et des conditions initiales et aux limites, sont présentées séparément à chaque cas présenté.

#### 7.3.1 Écoulement stationnaire sur une bathymétrie plate avec une bosse

Ce premier test de validation consiste à étudier le comportement de la formulation obtenue sur une bathymétrie plate et en présence d'une bosse de forme parabolique (voir figure 56). Ce test a été introduit par Goutal et al. dans [43]. Le domaine est donné par un rectangle de longueur 25 m et de largeur 1 m. Le fond du canal est sans frottement. La bathymétrie

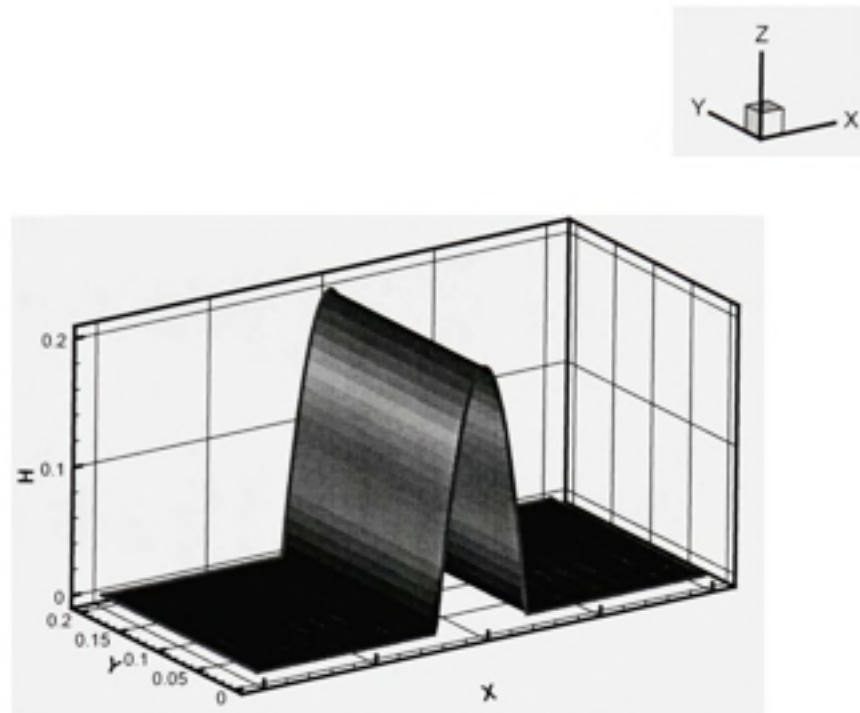


Figure 56 Bathymétrie du test de validation avec fond plat en présence d'une bosse parabolique.

est donnée par :

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 8m; \\ 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 12m; \\ 0 & \text{si } x > 12m; \end{cases} \quad (7.11)$$

Dépendamment des conditions initiales, l'écoulement peut être sub-critique ou trans-critique (en présence de choc ou non), ou super-critique. La solution analytique de ce problème est

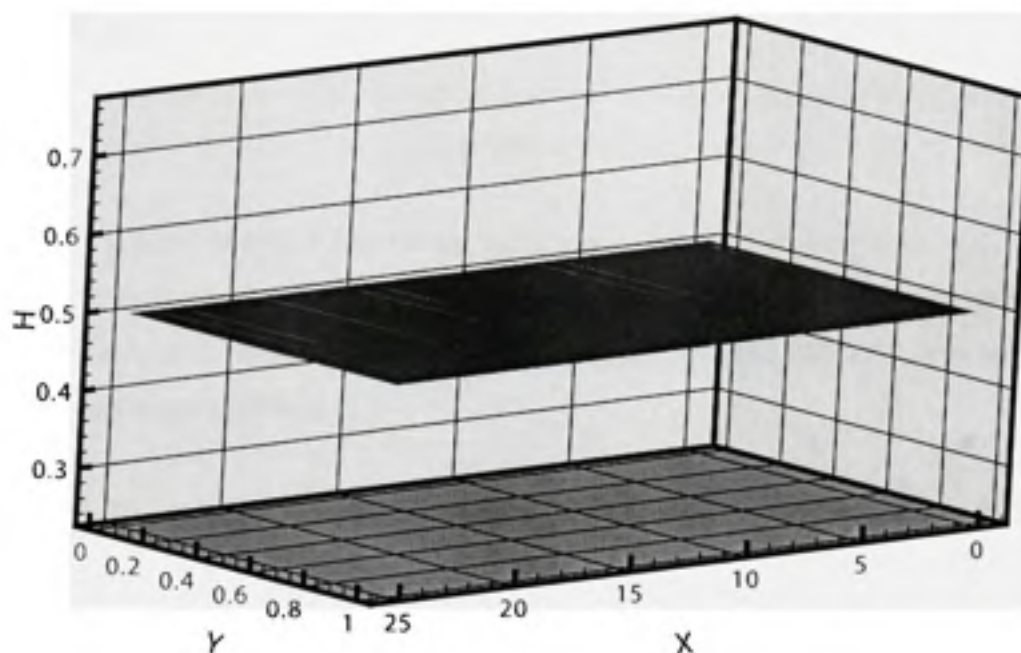


Figure 57 Bathymétrie plate avec une bosse - premier test de stagnation.

donnée dans [43] et elle est obtenue par l'application du théorème de Bernoulli. Dans notre cas, nous allons présenter trois cas de validation dans lesquelles les conditions aux limites sur la profondeur d'eau et le débit à l'amont et à l'aval sont variées. Ces cas sont :

- Écoulement trans-critique sans choc, dans lequel  $h=0.66$  m seulement lorsque l'écoulement est sub-critique et le débit  $q = 1.53m^3s^{-1}$
- Écoulement trans-critique avec choc avec  $h=0.33$  m et  $q = 0.18m^3s^{-1}$
- Écoulement sub-critique avec  $h=2$ m et  $q = 4.42m^3s^{-1}$

### 7.3.1.1 Écoulement trans-critique sans choc

La solution analytique est obtenue par l'application du théorème de Bernoulli. En effet, en appliquant le théorème de Bernoulli entre l'entrée du canal (point 1) et un point quel-

conque du front (point 2), on trouve :

$$\frac{q^2}{2gL^2\eta_2^2} + \eta_2 + z_2 = h_1 \quad (7.12)$$

avec  $q$  est le débit imposé à l'entrée du canal,  $g$  est l'accélération du pesanteur,  $L$  est la largeur du canal,  $\eta$  est la profondeur d'eau,  $z$  est la côte de la bathymétrie et  $h_a$  est la charge à l'entrée du canal. En réarrangeant l'équation (7.12), on trouve l'équation polynômiale de troisième degré à résoudre :

$$\eta_2^3 + (z_2 - h_1)\eta_2^2 + \frac{q^2}{2gL^2} = 0 \quad (7.13)$$

Pour résoudre cette équation, on peut utiliser, entre autre, la méthode de Cardan [55] qui pour une équation de la forme :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (7.14)$$

stipule que si la condition  $D = 4p^3 - 27q^2 > 0$  est vérifiée, alors l'équation (7.14) admet une solution réelle donnée par :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}} \quad (7.15)$$

avec  $p = b - \frac{a^2}{3}$  et  $q = \frac{a}{27}(2a^2 - 9b) + c$

### 7.3.2 Test de stagnation

Le deuxième test étudié, consiste à vérifier la z-property. Il s'agit d'un test de stagnation. Une zone de repos doit rester au repos et ainsi le schéma ne doit pas générer de mouvement artificiel dans le canal. Ce test a été proposé par Goutal et Maurel dans [43]. Il s'agit dans un premier temps de vérifier la préservation de la condition de stagnation sur

un bathymétrie fortement variable et ensuite, voir la propagation d'une onde générée par un mouvement de la frontière. Ce dernier test va être décrit dans le paragraphe suivant. La figure 58 montre la une vue en perspective du canal étudié et de la variation de sa bathymétrie. Le tableau II donne les valeurs numériques dans 24 points du canal.

TABLEAU II

Données de la bathymétrie du test de stagnation

x(m)	0	50	100	150	250	300	350	400	425	435	450	475	500	505
z(m)	0	20	2.5	5	5	3	5	5	7.5	8	9	9	9.1	9
x(m)	530	550	565	575	600	650	700	750	800	820	900	950	1000	1500
z(m)	9	6	5.5	5.5	5	4	3	3	2.3	2	1.2	0.4	0	0

Le canal a une longueur de 1500 m, la surface libre initiale est 21 m. D'après Goutal [43, 44], pour qu'un schéma numérique réussisse un test de stagnation, une simulation de 200 s est suffisante. La figure 59 et 60 donne le résultat trouvé pour la surface libre à  $t=200$  s. Cette figure montre que la condition de stagnation est bien vérifiée et que schéma ?? est conservatif (ne génère pas de masse artificielle) et stable (ne génère pas de vitesse artificielle). Le nombre de Courant utilisé pour les deux figures présentées est de 0.4.

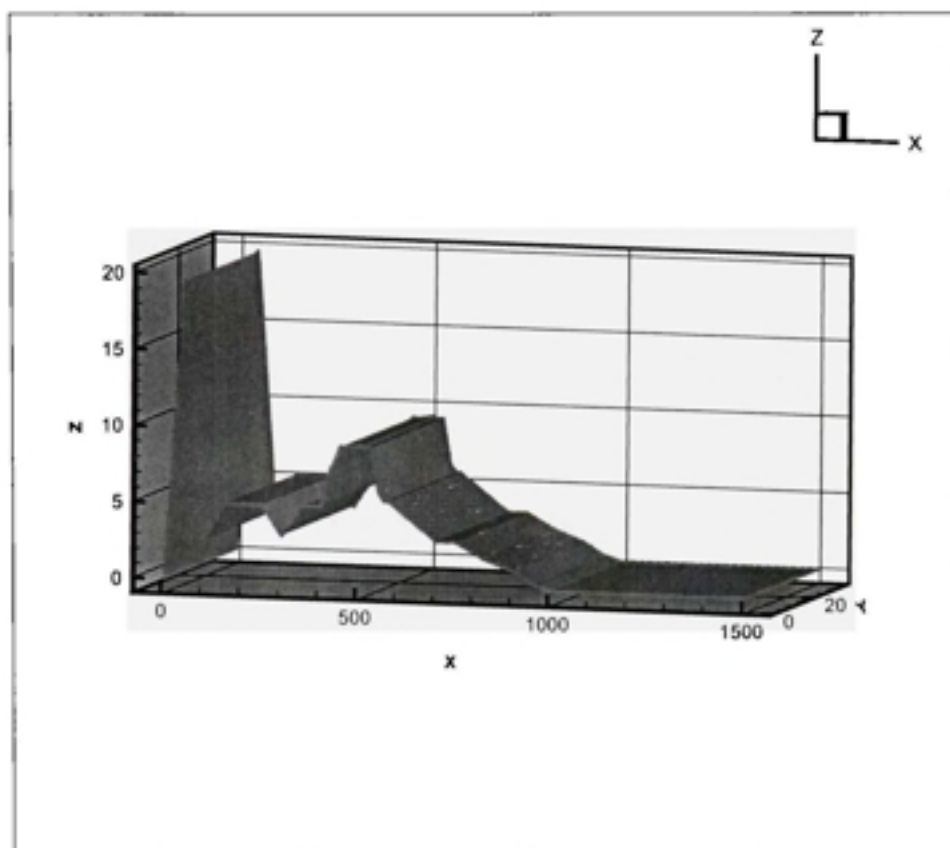


Figure 58 Cas de stagnation - Bathymétrie du canal.

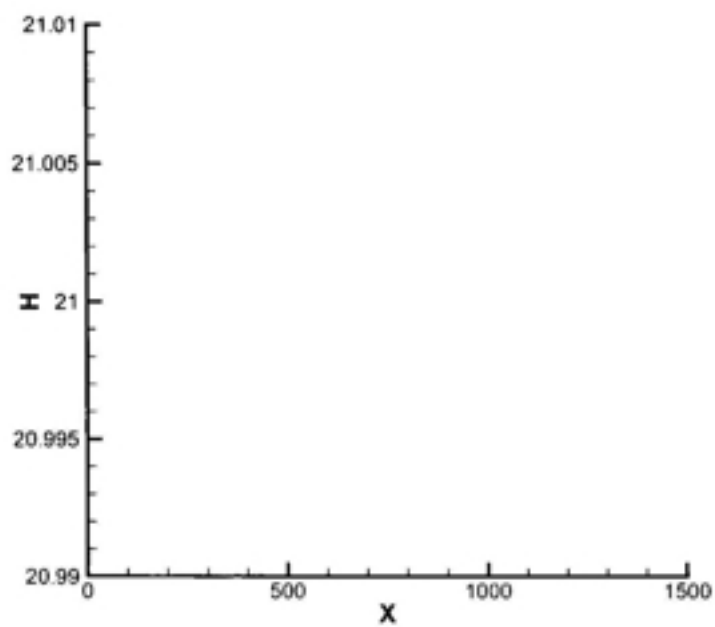


Figure 59 Test de stagnation - surface libre à  $t = 200$  s.

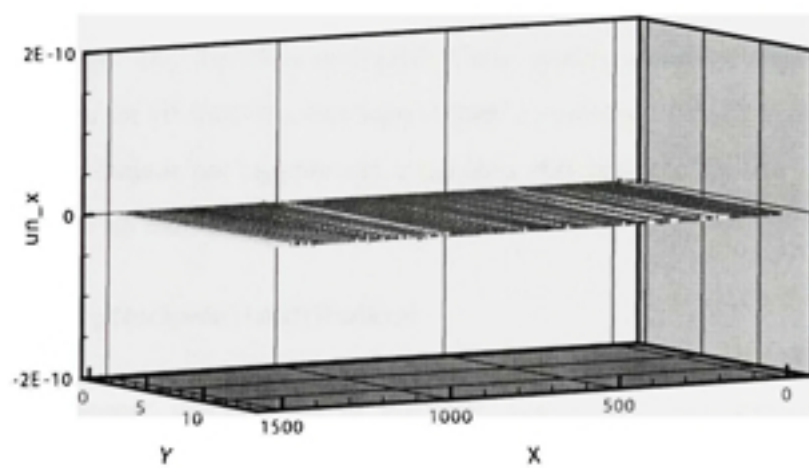


Figure 60 Test de stagnation - Composante axiale de la vitesse à  $t = 200$  s.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse est motivé par un objectif essentiel qui consiste à développer une famille d'approches numériques pour simuler les écoulements à surface libre et qui a un double caractère : particulière et Lagrangienne. Le caractère Lagrangien représente un atout majeur pour ce type d'écoulements. En effet, les approches Lagrangiennes sont assez précises, mais surtout elles s'adaptent très bien avec la nature de ces écoulements. De plus, elles ont l'avantage de capter la surface libre plus facilement que les approches écrites sous d'autres formulations cinématiques. La deuxième particularité des méthodes présentées dans ce travail découle en partie du caractère Lagrangien. Il s'agit du caractère particulière. On entend par particulière le fait de subdiviser le domaine fluide total en un ensemble de particules et d'y appliquer le système de conservation utilisé d'une manière locale. La conservation locale assurée au niveau de chaque particule garantit automatiquement une conservation globale pour le système entier.

Numériquement, vue que les approches classiques (méthodes des éléments finis ou méthodes de volumes finis) sont peu adaptées à ce type de description, nous avons opté pour une nouvelle famille de méthodes numériques qui sont connues sous l'appellation "méthode sans maillage" ou "meshfree methods". Cette famille a émergé depuis les années 1970 mais qui a eu un vif intérêt scientifique durant les années 1990. Ce type de méthode offre un avantage majeur par rapport aux approches standards : c'est leur indépendance relative ou totale d'un maillage.

### 7.4 Synthèse et principales contributions

Depuis deux décennies, une panoplie de méthodes sans maillage est apparue dans la littérature. Par conséquent, un choix immense s'est offert à nous et la décision d'adopter telle ou telle méthode n'était pas facile à prendre. Pour cette fin, une étude exhaustive sur les méthodes sans maillage à été effectuée et présentée au début de ce travail. L'objectif



de cette étude est de classer les différentes méthodes, de cerner leurs avantages et leurs inconvénients, d'avoir une idée sur leurs fonctionnements et enfin de déceler leur applicabilité dans la simulation des écoulements à surface libre en formulation Lagrangienne. Plusieurs points communs entre les différentes techniques meshless sont apparus à l'issue de cette étude. Les principales fonctions de forme sans maillage se basent sur l'interpolation de type "moindre carrés mobiles" (MLS) ou "Reproducing Kernel Particle Method" (RKPM). La notion de connectivité connue dans les approches standards, est remplacée par la "longueur de lissage" qui définit l'étendue du support de la fonction fenêtre. On parle ainsi de "voisins" qui sont les nœuds qui entourent le nœud étudié et qui sont situés dans le support de sa fonction de forme.

La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) appartient à cette classe de méthode sans maillage. C'est la méthode qu'on a choisie pour être implémentée dans notre cas. Ce choix se justifie par plusieurs facteurs. En effet, en plus de sa simplicité et de la facilité de sa mise en œuvre, la méthode SPH est la seule méthode intrinsèquement Lagrangienne. D'ailleurs, plusieurs applications en mécanique du solide et en fluide démontrent l'intérêt qu'a eu la méthode SPH dans la communauté numérique. La méthode SPH dans sa formulation originale a fait l'objet du projet de maîtrise de l'auteur de cette thèse [12], ce qui justifie encore plus l'adoption de cette méthode dans la thèse.

Les détails de l'implémentation de la méthode SPH dans le cas des écoulements à surface libre font l'objet du chapitre 5. La méthode est présentée dans sa version originale et appliquée au cas des équations de Saint-Venant. Ensuite, une étude mathématique variationnelle est effectuée et qui a permis de déterminer les conditions nécessaires à l'obtention de la formulation classique de la méthode SPH. Une étude de stabilité de la méthode est menée et a permis d'introduire une nouvelle viscosité artificielle pour décentrer le schéma de la méthode. Cette viscosité est obtenue par analogie avec les techniques utilisées pour les solveurs de Riemann. La nouvelle stabilisation conduit à des résultats satisfaisants en comparaison avec l'ancienne méthode de stabilisation. En effet, les chocs sont bien révélés

et les oscillations aux niveaux des discontinuités sont amorties d'une façon très notable. Toutefois, des effets diffusifs sont observés aux niveaux des chocs qui sont probablement causés par l'introduction de la nouvelle viscosité artificielle. La présence de ces effets diffusifs est attribuée à l'absence d'un limiteur de flux comme c'est le cas dans les techniques de volumes finis type MUSCL d'ordre élevé.

La méthode SPH, comme c'est le cas de la famille des techniques sans maillage qui se basent sur les interpolations de type MLS, souffre de quelques inconvénients. En premier lieu, lors de la présence d'un cadre variationnelle de type Galerkin, l'intégration numérique est très coûteuse et pas toujours précise. Ceci est dû à la nature plutôt rationnelle, et donc non polynômiale, des fonctions de forme des méthodes sans maillage. Ce problème est évité dans notre cas puisqu'on adopte des techniques de collocation qui ne nécessitent pas d'intégration numérique. En deuxième lieu, l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet est une tâche particulièrement délicate pour les méthodes sans maillage. En effet, la nature non-interpolante des fonctions de forme de la majorité des méthodes sans maillage, représente la cause principale de cette difficulté. Plusieurs techniques de traitement des conditions aux frontières, évoquées dans le chapitre 3, sont implémentées dans notre cas. Toutefois, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants et la qualité des solutions trouvées ne sont pas à la hauteur de nos attentes. La forme des chocs est systématiquement déformée, voire perdue et des oscillations parasites sont observées. C'est pourquoi, le choix d'une technique sans maillage qui possède une fonction de forme interpolante, s'est imposé à cette étape de la thèse.

Les méthodes purement sans maillage possédant des fonctions de forme interpolantes sont très rares d'après la recherche bibliographique effectuée durant la thèse. La méthode des éléments naturels fait partie des méthodes interpolantes. Bien que le caractère sans maillage est loin d'être évident, la NEM est considérée comme une méthode Meshless. Le principal avantage qu'elle offre est sa fonction de forme qui est construite en utilisant des notions purement géométriques et qui est interpolante de surcroît. Le principe de fonction-

nement de la NEM se base essentiellement sur la construction d'une partition de l'unité par l'intermédiaire de rapport de longueurs ou d'aires (en 2D), ou d'aires et de volumes (en 3D). La détermination de ces grandeurs géométriques nécessite la construction d'une triangulation de Delaunay ou du diagramme de Voronoï qui est son dual géométrique. Ainsi l'utilisation d'un mailleur est inévitable pour implémenter la NEM. C'est pourquoi nous avons contacté l'équipe du professeur Chinesta à l'école nationale supérieure des arts et métiers de Paris (ENSAM), qui dispose d'un tel outil et qui est bien avancée dans l'utilisation de la NEM.

Il s'agissait donc d'implémenter la NEM dans le cadre de cette thèse. Ceci revenait à l'utiliser dans un cadre particulier et en formulation Lagrangienne et l'appliquer à un système de conservation qui est en l'occurrence le système de Saint-Venant. Les principales utilisations de la NEM sont faites dans un cadre variationnel, ce qui ne nous intéresse pas dans ce travail. Une approche par collocation est donc adoptée. Les grandeurs cinématiques présentes dans l'écoulement (vitesse, accélération) sont, donc, moyennées sur les cellules de Voronoï. Les valeurs moyennes de ces grandeurs sont calculées en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement transformée par l'application du théorème Green pour passer d'une intégrale surfacique à une intégrale sur le contour. La discrétisation de cette équation se sert de l'interpolation de type NEM pour évaluer les valeurs de la profondeur aux points d'intégration. Cette procédure est trouvée comme étant semblable à une technique de type volumes finis qui consiste à évaluer les flux sur les contours de la cellule de Voronoï et à attribuer les valeurs moyennes des paramètres physiques au nœud. Pour toutes ces raisons, et par analogie entre la méthode des éléments finis et celle des volumes finis, nous désignons cette procédure *Méthode des volumes naturels*.

La méthode des volumes naturels est appliquée au système de Saint-Venant homogène. Le schéma obtenu est centré et par conséquent instable. Un décentrage utilisant une viscosité artificielle, comme pour le cas de la méthode SPH, est effectué pour des fins de stabilisation. Les résultats obtenus pour des cas tests bidimensionnels montrent que les solutions

sont d'une qualité assez satisfaisante. Les chocs sont bien captés et leurs formes bien définies. Des effets diffusifs sont remarqués et sont causés par l'introduction de cette viscosité. Quelques propriétés numériques sont vérifiées pour la MVN, telle que l'influence de l'orientation du maillage et celle de la densité nodale.

Le caractère particulière de la méthode SPH est conservé pour la méthode des volumes naturels. En effet, la masse totale est divisée en un ensemble de particules qui conservent leurs masses respectives au cours du temps et ainsi la masse totale est conservée. La profondeur d'eau est supposée constante sur chaque cellule. Sa variation dans le temps est calculée en considérant la variation de l'aire de la cellule. Ainsi, la profondeur d'eau varie d'une manière inversement proportionnelle à l'aire de la cellule. Il est important de noter deux points stratégiques dans la procédure de conservation de la masse. En premier lieu, l'utilisation de l'équation de continuité et sa discrétisation sont évitées. Par conséquent, tous les problèmes de stabilité relatifs à sa discrétisation, rencontrés dans les applications de type volumes finis ou éléments finis et bien connus dans la communauté numérique, sont épargnés. L'approche utilisée dans ce travail est simple, élégante et stable puisqu'elle ne génère aucun problème numérique. Le deuxième point concerne la grille utilisée pour la procédure de conservation de la masse. En effet, celle-ci est différente de la grille utilisée pour la conservation de la quantité de mouvement, qui est le diagramme de Voronoï. La première grille est conservée à chaque pas de temps et ses sommets sont déplacés à chaque fois en utilisant des vitesses interpolées par la méthode des volumes naturels.

En dernier lieu la méthode des volumes naturels est appliquée pour le système de Saint-Venant non-homogène, i.e. en présence de terme source. Seul le terme géométrique qui traduit l'effet de la bathymétrie, est considéré dans cette thèse. Par la reformulation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, cette dernière tient compte non plus de la profondeur d'eau, mais plutôt du niveau de la surface libre. Ainsi, le schéma global conserve sa forme initiale formulée pour le cas du système de Saint-Venant homogène. Le schéma obtenu est validé pour des tests de validation théoriques. Il passe aisément les

tests de stagnation et donc il vérifie la  $z$ -propriété. D'autres tests sont à prévoir pour valider le schéma pour des cas réels à bathymétries complexes.

La présente thèse a abouti à la publication de deux articles à "International journal for numerical methods in fluids". Le premier article est publié en 2005 [13] et le second est accepté pour publication en 2007 [14]. Nous avons également participé à quatre conférences et workshops dont exigeant le dépôt d'un article révisé et accepté par un comité de lecture [41].

### 7.5 Perspectives et travaux futurs

Le présent travail ouvre de multiples perspectives et travaux futurs qui sont résumés dans les points suivants :

- \* La méthode SPH est étudiée et implémentée dans le cas des écoulements à surface libre. Ses problèmes de stabilisation sont relativement résolus. Toutefois, le problème d'imposition des conditions aux limites reste posé, bien que plusieurs techniques sont testées. Il est intéressant de voir la possibilité de coupler la méthode SPH avec une méthode interpolante. Le couplage SPH-éléments finis a été implémenté avec plus ou moins de succès [133]. La méthode des volumes naturels semble très adaptée à ce type de couplage.
- \* La méthode des volumes naturels est appliquée au système de Saint-Venant non-homogène. Le terme source géométrique est le seul terme introduit dans la formulation. La validation du schéma obtenu est effectuée sur quelques tests théoriques. Il sera intéressant de voir la capacité du modèle à simuler des cas réels.
- \* L'introduction du terme de frottement du lit reste une tâche intéressante à accomplir. La non-linéarité de ce terme et la difficulté de l'intégrer dans le temps, sont des côtés à explorer.

- \* Vu le fait que la version non conservative du système de Saint-Venant est utilisée, des difficultés ont été rencontrées dans l'imposition des conditions entrée/sortie de type débit. La résolution de ce problème reste à faire dans les travaux futurs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Agoshkov VL ; Ambrosi D ; Pennati V ; Quarteroni A. Mathematical and numerical modelling of shallow water flow. *Computational Mechanics*, 11 :280–299, 1993.
- [2] Bowyer A. Computing dirichlet tessellations. *Computer J.*, 24 :162–166, 1981.
- [3] Caleffi V ; Valiani A ; Zanni A. Finite volume method for simulating extreme flood events in natural channels. *Journal of hydraulic reseaurch*, 41(2) :167–177, 2003.
- [4] Donea J ; Huerta A ; Ponthot JP ; Rodriguez-Ferran A. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*, chapter 14, pages 1–21. Encyclopedia of computational mechanics. Wiley, 2004.
- [5] Klein R ; Lingas A. A linear-time randomized algorithm for the bounded voronoi diagram of a simple polygon. *Internation Journal of Computational Geometry and Applications*, 6 :263–278, 1996.
- [6] Loukili Y ; Soulaïmani A. Numerical tracking of shallow water waves by the unstructured finite volume waf approximation. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8(2) :75–88, 2007.
- [7] Ritter A. Die fortpflanzung der wasserwellen. *Vereine Deutscher Ingenieure Zeitschrift*, 36(2) :947–954 (en allemand), août 1892.
- [8] Soulaïmani A. *Nouveaux aspects de l'application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique*. Rapport de maîtrise, Université Laval, Québec, 1983.
- [9] Soulaïmani A. *Contribution à la résolution de problèmes d'écoulements à surface libre*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1987.
- [10] Libersky LD ; Petshek AG. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. *Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin*, 395 :248–257, 1990.
- [11] Cha SH ; Whitworth AP. Implementations and tests of gudunov-type particle hydrodynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 340 :73–90, 2003.
- [12] R. Ata. Les écoulements à surface libre avec la méthode SPH. Master's thesis, Publication de l'ÉTS, Montréal, 2002.
- [13] R. Ata and A. Soulaïmani. A stabilized sph method for inviscid shallow water flows. *Int. J. Numer. Meth. fluids.*, 47(3) :139–159, 2005.



- [14] Soulaïmani A. Ata, R. and Chinesta F. The natural volume method ; presentation and application to inviscid shallow water flows. *Int. J. Numer. Meth. fluids.*, Accepié, 2007.
- [15] Belikov VV ; Ivanov VD ; Kontorovich VK ; Korytnik SA ; Semenov AY. The non-sibsonian interpolation : a new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points. *Computational mathematics and mathematical physics*, 37(1) :9–15, 1997.
- [16] Belikov VV ; Semenov AY. New non-sibsonian interpolation on arbitrary system of points in euclidean space. *In 15th IMACS World Congress, Numerical Mathematics, Wissen Tech. Verlag :Berlin*, 2 :237–242, 1997.
- [17] Ben Moussa B. *Analyse numérikue de méthodes particulières régularisées de type SPH pour les lois de conservation*. Phd thesis, INSA Toulouse, Toulouse- France, 1998.
- [18] Fornberg B. The pseudospectral method : accurate representation of interfaces in elastic wave calculations. *Geophysics*, 53 :625–637, 1988.
- [19] Asphaug E Benz W. Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Comput. phys. commun*, 87(1-2) :253–265, 1995.
- [20] Ancy C. *Notes de cours d'hydraulique*. Laboratoire d'hydraulique environnementale - École polytechnique de Lauzanne, Suisse, version 3.9 edition, Juillet 2007.
- [21] Molteni D ; Bilello C. Riemann solver in sph. *Mem. S.A.It. Suppl.*, 1(1) :36–45, 2003.
- [22] Navier C. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Compte rendu à l'académie des sciences de Paris*, 6 :389–416, 1823.
- [23] Lee CK ; Zhou CE. On error estimation and adaptive refinement for element free galerkin method - part i : Stress recovery and a posteriori error estimation. *Computers and structures*, 2003.
- [24] Lee TD Christ NH, Friedberg R. Weights of links and plaquettes in a random lattice. *Nuclear Physics B*, 210(3) :337–346, 1982.
- [25] Chen JS ; Pan C ; Wu CI. Large deformation analysis of rubber based on reproducing kernel particle method. *Comp. Mech.*, 19 :211–227, 1997.
- [26] Liu WK ; Chen Y ; Uras RA ; Chang CT. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139 :91–157, 1996.



- [27] Komatitsch D. *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique en 2D et 3D en milieu hétérogène*. Thèse de doctorat, Institut du globe de Paris, Paris-France, mai 1997.
- [28] Serre D. *Systèmes hyperboliques de lois de conservation, Partie I et II*. Diderot, Paris, France, 1996.
- [29] Shepard D. A two dimensional function for irregularly spaced points. In *ACM national conference*, pages 517–524, 1968.
- [30] de Saint Venant AJC. Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées de leur lit. *Compte rendu à l'académie des sciences de Paris*, 73 :147–154, 1871.
- [31] Watson DF. Computing the n-dimensional delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *The Computer Journal*, 24(2) :167–172, 1981.
- [32] Sweigle JW ; Attaway SW ; Heinstein MW ; Mello FJ ; Hicks DL. An analysis of smoothed particle hydrodynamics. Technical report SAND93-2513, Sandia National laboratory, Albuquerque, New Mexico, 1994.
- [33] Issa R ; Lee ES ; Violeau D ; Laurence DR. Incompressible separated flows simulations with the smoothed particle hydrodynamics gridless method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47(10-11) :1101–1106, 2005.
- [34] Mohammadian A ; Le Roux DY. Simulation of shallow flows over variable topographies using unstructured grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 52 :473–498, 2006.
- [35] Audusse E. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. Phd thesis, Université Paris VI, Pierre et Marie Curie, 2004.
- [36] Bermudez A ; Vasquez E. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers fluids*, 23(8) :1049–1071, 1994.
- [37] Violeau D ; Buvat C ; Abed-Meraïm E. Numerical modelling of boom and oil spill with sph. *Coastal Eng.*, In press, 2007.
- [38] Toro EF. *Shock-capturing methods for free surface flows*. John Wiley, England, première édition, 2001.
- [39] Vignoli G ; Titarev VA ; Toro EF. ADER schemes for the shallow water equations in channel with irregular bottom elevation. *Isaac Newton Institute Preprint Series*, NI06051-NPA, 2006.

- [40] Shao S ; Lo EYM. Incompressible sph method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources*, 26 :787–800, 2003.
- [41] Ata R ; Soulaïmani A ; Chinesta F. A lagrangian finite volume method for the simulation of flows with moving boundaries. In 10TH ESAFORM CONFERENCE ON MATERIAL FORMING. AIP Conference Proceedings, editor, *ESAFORM*, volume 907, pages 1412–1417. Lavoisier, 2007.
- [42] Bardella L ; Genna F. Newmark's time integration method from the discretization of extended functionals. *Journal of Applied Mechanics*, 72(4) :527–537, 2005.
- [43] Goutal N ; Maurel F. In *proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation*, HE-43/97/016/B, France, 1997, EDF/LNH.
- [44] Goutal N ; Maurel F. A finite volume solver for 1d shallow-water equations applied to an actual river. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 38 :1–19, 2002.
- [45] Khoury F. The history of the manning formula. Site web, San Diago university-California, 2005. <http://manning.sdsu.edu/>.
- [46] Martinez MA ; Cueto E ; Alfaro I ; Doblaré M ; Chinesta F. Updated lagrangian free surface flow simulations with natural neighbour galerkin methods. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 60 :2105–2129, 2004.
- [47] Sahmim S ; Benkhaldoun F. Schéma srnhs analyse et application d'un schéma aux volumes finis dédié aux systèmes non homogènes. *ARIMA*, 5 :302–316, 2006.
- [48] Yvonnet J ; Ryckelynck D ; Coffignal G ; Lerong P ; Chinesta F. Adaptive constrained natural element method. *Submitted to Elsevier Science*, 2005.
- [49] Yvonnet J ; Ryckelynck D ; Lonrong P ; Chinesta F. Interpolation naturelle sur les domaines non-convexes par l'utilisation du diagramme de voronoi contraint. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 3743443(1) :9–15, 2001.
- [50] Hicks FC. *Finite element modeling for open channel flow*. Phd thesis, University of Alberta, Fall 1990.
- [51] Aluru NR ; Li G. Finite cloud method : a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *Int. J. Num. Methods Engng.*, 50 :2373–2410, 2001.
- [52] Ashgriz N ; Barbat T ; Wang G. A computational lagrangian-eulerian advection remap for free surface flows. *Int. J. Numer. Meth. fluids*, 44 :1–32, 2004.

- [53] Birknes J; Pedersen G. A particle finite element method applied to long wave run-up. *Inter. J. Numer. meth. fluids*, 52 :237–261, 2006.
- [54] Stokes G. On the theories of the internal friction of fluids motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8 :287–305, 1845.
- [55] Villemin G. Page personnelle. Technical report, <http://villemin.gerard.free.fr/>, 2006.
- [56] Whitham GB. The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proc. Roy. Soc. of London*, 227 :399–407, 1955.
- [57] Johnson GR. Linking of lagrangian particle methods to standard finite element methods for high velocity impact computations. *Nuclear Engineering and Design*, 150 :256–274, 1994.
- [58] Chanson H. Analytical solution of dam break wave with flow resistance. application to tsunami surges. *Proc. 31th Biennial IAHR Congress, Seoul, Korea, B.H. Jun, S.I. Lee, I.W. Seo and G.W. Choi Editors. Theme D1 paper 0137*, pages 3341–3353, 2005.
- [59] Chanson H. *River Flow*. Taylor and Francis Group, London, UK, pp 465–475, 2006.
- [60] Courant R; Friedrichs KO; Lewy H. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematisches. *Mathematische Annalen*, 100(1) :32–74, 1928.
- [61] Sambridge M; Braun J; McQueen H. Geophysical parametrization and interpolation of irregular data using natural neighbours. *Geophysical journal international*, 122 :837–857, 1995.
- [62] Songdong S; Gotoh H. Turbulence particle models for tracking free surfaces. *Journal of Hydraulic Research*, 43(3) :276–289, 2005.
- [63] You Y; Chen JS; Lu H. Filters, reproducing kernel and adaptive meshfree method. *Computational mechanics*, 2003.
- [64] LeVeque RJ; Yee HC. A study of numerical methods for hyperbolic conservations laws with stiff source terms. *J. Comput. Phys.*, 86 :187–210, 1990.
- [65] Fries TP; Matties HG. A stabilized and coupled meshfree/meshbased method for the incompressible navier-stokes equations - part I : Stabilization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6205–6224, 2006.

- [66] Chen JS ; Wang HP. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 187 :441–468, 2000.
- [67] Wang Z ; Shen HT. Lagrangian simulation of one dimensional dam-break flow. *Journal of hydraulic engineering*, 125(11) :1216–1220, 1999.
- [68] Mishev ID. Finite volume methods on Voronoï meshes. url = "cite-seer.ist.psu.edu/153080.html", à paraître.
- [69] Cueto E ; Sukumar N ; Calvo B ; Cegonino J and Doblaré M. Overview and recent advances in natural neighbour galerkin methods, technical report. ECCOMAS, 2003. Archives of computational methods in Engineering.
- [70] Dawson C ; Proft J. Discontinuous and coupled continuous/discontinuous galerkin methods for the shallow water equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 191 :4721–4746, 2002.
- [71] Hudson J. *Numerical Techniques for Morphodynamic Modelling*. Thèse de doctorat, University of Reading, 2001.
- [72] Anderson JD. *A History of Aerodynamics*. Cambridge University Press, cambridge edition, 1997. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Saint-Venant.html>.
- [73] Gingold RA ; Monaghan JJ. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 46 :429–453, 1982.
- [74] Monaghan JJ. Why particle methods work. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 3(4) :422–433, 1982.
- [75] Monaghan JJ. An introduction to sph. *Computer Physics Communications*, 48 :89–96, 1988.
- [76] Monaghan JJ. Simulating free surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, 110(2) :399–406, 1994.
- [77] Monaghan JJ. Sph and riemann solvers. *Journal of computational Physics*, 136 :298–307, 1997.
- [78] Stoker JJ. *Water waves*. Interscience, Wiley, first edition, 1957.
- [79] Muttin F ; Coupez T ; Bellet M ; Chenot JL. Lagrangian finite element analysis of time-dependant viscous free surface flow using automatic remeshing technique : application to metal casting flow. *Int. J. Numer. Meth. engng*, 36 :2001–2015, 1993.

- [80] Hervouet JM. Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation avec la méthode des éléments finis. Technical report, École des ponts et chaussées - Paris, France, 2003.
- [81] Souli M ; Zolesio JP. Finite element method for free surface flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(1) :43–51, 1996.
- [82] Vila JP. On particle weighted methods and smooth particle hydrodynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(2) :191–209, 1999.
- [83] Lu H ; Chen JS. Adaptive meshfree method. *Lecture notes in computational science and engineering*, 26 :251–267, 2002.
- [84] Duarte CAM ; Oden JT. H-p clouds - an h-p meshless method. *Numerical Methods for partial differential equations*, 12 :673–705, 1996.
- [85] Wen Y ; Hicks DL ; Swegle JW. Stabilizing s.p.h. with conservative smoothing. Technical report SAND94-1932, Sandia National laboratory, Albuquerque, New Mexico, 1994.
- [86] Atluri SN ; Kim HG ; Cho JY. A critical assessment of the truly meshless local petrov-galerkin (mlpg) and local boundary integral equation (lbie) methods. *Comp. Mech.*, 24 :348–372, 1999.
- [87] Zienkiewicz OC ; Boroomand B ; Zhu JZ. Recovery procedures in error estimation and adaptativity-part i : Adaptativity in linear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 176 :111–125, 1999.
- [88] Lancaster P ; Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of computation*, 37 :141–158, 1981.
- [89] Miller K. Moving finite elements II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18 :1033–1057, 1981.
- [90] Mohammadian A ; Le Roux DY ; Tajrishi M ; Mazaheri K. A mass conservative scheme for simulating shallow water flows over variable topographies using unstructured grid. *Advances in water resources*, 28 :523–539, 2005.
- [91] Belytschko T ; Lu YY ; Gu L. Element-free galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37 :229–256, 1994.
- [92] Cueto E ; Doblaré M ; Gracia L. Imposing essential boundary conditions in the natural elements method by mean of density-scaled alpha-shapes. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 49 :519–546, 2000.

- [93] Gavete L. An adaptive procedure for the spherical shallow water equations. In *MathEstia workshop on meshfree methods*, Biarritz, France, April 2007. MathEstia.
- [94] Lu YY; Belytschko T; Gu L. A new implementation of element-free galerkin methods. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 113 :397–414, 1994.
- [95] Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission thesis. *The Astronomical Journal*, 82(12) :1013–1024, 1977.
- [96] Coutman LD. Basics of smoothed particle hydrodynamics. *Lawrence Livermore National Laboratory Report UCRL-ID-103698*, 1990.
- [97] Dorfi EA; Drury LO. Simple adaptive grids for 1-d initial value problems. *J. Comput. Phys.*, 69 :175–195, 1987.
- [98] Zhao J; Chew YT; Luo SC; Pan LS and Wu JK. Generalized transport vortex method. *Computers and fluids*, 36(6) :1081–1091, 2007.
- [99] Bonet J; Kulasegaram S; Rodriguez-Paz MX; Profit M. Variational formulation for the smooth particle hydrodynamics (sph) simulation of fluid and solid problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(12) :1245–1257, 2004.
- [100] Gonzalez D; Cueto E; Chinesta F; Doblare M. A natural element updated lagrangian strategy for free-surface fluid dynamics. *Journal of Computational Physics*, 223 :127–150, 2007.
- [101] Kulasegaram S; Bonet J; Lewis RW; Profit M. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional sph applications. *Computational Mechanics, Springer-Verlag*, 33 :316–325, 2004.
- [102] Kulasegaram S; Bonet J; Lok TSL; Rodriguez-Paz M. Corrected smooth particle hydrodynamics - a meshless method for computational mechanics, technical report. ECCOMAS, 2000.
- [103] Letellier A; Bung H; Galon P; Berhillier M. Bird impact on fan blade analysis using sph coupled with finite elements. *Structure Under Extreme Loading Conditions, PVP 351. ASME : New York*, 395, 1997.
- [104] Ramaswamy B; Kawahara M. Lagrangian finite element analysis applied to viscous free surface fluid flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 7 :953–984, 1987.
- [105] Sukumar N; Dolbow J; Devan A; Yvonnet J; Chinesta F; Ryckelynck D; Lorong P; Alfaro I; Martínez M; Cueto E; Doblare M. Meshless methods and partition of



- unity finite elements. *Int. J. forming processes*, 10 :1–19, 2004.
- [106] Liu GR ; Liu MB. *Smooth Particle Hydrodynamics : a meshfree partile methd.* World Scientific, HongKong, 2003.
- [107] Bermudez A ; Dervieux A ; Desideri JA ; Vasquez ME. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshess. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155(1-2) :49–72, 1998.
- [108] Vazquez-Cendon ME. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. *J. comput. Physics*, 148 :497–526, 1999.
- [109] Audusse E ; Bristeau MO. A 2d well-balanced positivity preserving second order scheme for shallow water flows on unstructured meshes. Technical report n 5260, INRIA, France, jullet 2004.
- [110] Hasegawa T ; Yamaguchi S ; Ohiwa N. A numerical analysis of mass transfer in a plane shear layer. *JSME Int. j.*, 30(263) :785–791, 1987.
- [111] Sukumar N. Voronoï cell finite difference method for the diffusion operator on arbitrary unconstructed grids. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 57(1) :1–34, 2003.
- [112] Oñate E ; Idelsohn S ; Zienkiewicz OC ; Taylor RL ; Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139 :315–346, 1996.
- [113] Belytschko T ; Kronkautz Y ; Organ D ; Fleming M ; Krysl P. Meshless methods an overview and recent developments, technical report. Northwestern university, USA, 1996. Northwestern university, USA.
- [114] Doring M ; Andrillon Y ; Alessandrini B ; Ferrant P. Two-dimensional sph simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, 213(2) :803–822, 2006.
- [115] Glaister P. Approximate riemann solutions of the shallow water equations. *J. Hydraulic. res.*, 26 :293–306, 1988.
- [116] Hansbo P. Lagrangian incompressible flow computations in three dimensions by use for space-time finite element. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20 :989–1001, 1995.
- [117] Yvonnet J ; Ryckelynck D ; Lerong P and Chinesta F. A new extension of the natural element method for non convex and discontinuous problems : the constrained natural element method (c-nem). *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 40 :1–6, 2000.

- [118] Lax PD. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM, Philadelphia, 1973.
- [119] Liang Q; Zang J; Borthwick AGL; Taylor PH. Shallow flow simulation on dynamically adaptive cut cell quadtree grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 53 :1777–1799, 2007.
- [120] Roe PL. Upwind differenced schemes for hyperbolic conservation laws with source terms. In Serre Carasso, Raviart, editor, *Proc. Conf. Hyperbolic problems*, pages 41–51. Springer, 1986.
- [121] Herbin R. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. *Notes de cours de Master en mathématiques de l'université d'Aix Marseille I, France*, 2007.
- [122] Sibson R. A vector identity for the dirichlet tessellation. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, 87 :151–155, 1980.
- [123] Sibson R. A brief description of natural neighbour interpolation. In V. Barnett, editor, *Interpreting multivariate data*, Chichester. John Wiley, pages 21–25, 1981.
- [124] Violeau D; Issa R. Modelling of complex turbulent free surface flows with the sph lagrangian method : an overview. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 53(2) :277–304, 2007.
- [125] Zeitlin V; Medvedev SB; Plougonven R. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in 1d rotating shallow water. part 1. *J. Fluid Mechanics*, 481 :269–290, 2003.
- [126] Berger Jr. RC. *Free surface flows over curved surfaces*. Thèse de doctorat (phd), University of Texas at Austin, 1992.
- [127] LeVeque RJ. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, Basel, Suisse, 1990.
- [128] LeVeque RJ. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm. *J. Comput. Phys.*, 146(1) :346–365, 1998.
- [129] Miller K; Miller RN. Moving finite elements I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18 :1019–1032, 1981.
- [130] Atluri SN; Shen S. *The Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) method*. TechScience, first edition, 2002.



- [131] Bonet J ; Kulasegaram S. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47 :1189–1214, 2000.
- [132] Frank J ; Reich S. Conservation properties of smoothed particle hydrodynamics applied to shallow water equations. *BIT numerical Mathematics*, 43(1) :41–55, 2003.
- [133] Huerta A ; Fernandez-Mendez S. Coupling element free galerkin and finite element method, technical report. ECCOMAS, 2000.
- [134] Liu WK ; Belytschko T ; Li S. Moving least square reproducing kernel methods . methodology and convergence. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, 143 :113–154, 1997.
- [135] Orszag SA. Spectral methods for problems in complex geometries. *J. comput. Physics*, 37 :70–92, 1980.
- [136] Li XY ; Teng SH. Point placement for meshless methods using sphere packing and advancing front methods, technical report. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.
- [137] Yu-E Shi. *Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection en utilisant une méthode des volumes finis dans un maillage non structuré*. Thèse de doctorat, Université de Caen, 2006.
- [138] Inutsuka SI. Reformulation of smoothed particle hydrodynamics with riemann solver. *J. Comput. Physics*, 179 :238–267, 2002.
- [139] Johnson GR ; Beissel SR. Normalised smoothing functions for sph impact computations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 39 :2725–2741, 1996.
- [140] Atluri SN ; Zhu T. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Comp. Mech.*, 22 :117–127, 1998.
- [141] Idelis AI ; Katsaounis T. Computational methods for 2d shallow water flows based on relaxation schemes. In *HERCMA*. HERCMA, 2003.
- [142] Krongauz Y ; Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 131 :133–145, 1996.
- [143] Liu WK ; Jun S ; Li S ; Adee J ; Belytschko T. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38 :1655–1679, 1995.

- [144] Sukumar N ; Moran B ; Belytschko T. The natural elements method in solid mechanics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 43 :839–887, 1998.
- [145] Canuto C ; Hussaini MY ; Quarteroni A ; Zang TA. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [146] Fries TP. Classification and overview of meshfree methods, technical report. Brunswick, 2003. Scientific Computing Institute, Technical University Braunschweig, Germany.
- [147] Brufau P ; García-Navarro P ; Vázquez-Cendón. Zero mass error using unsteady wetting-drying conditions in shallow flows over dry irregular topography. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 45 :1047–1082, 2004.
- [148] Sukumar N ; Moran B ; Yu Semenov ; Belikov VV. Natural neighbour galerkin methods. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 50 :1–27, 2001.
- [149] Han W ; Meng X. Some studies of the reproducing kernel particle method, technical report. University of Iowa, 2001.
- [150] Chen JS ; Wu CT ; You Y. A stabilized conforming nodal integration for galerkin meshfree methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50 :435–466, 2001.
- [151] Liu WK ; Chen Y. Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 21 :901–931, 1995.
- [152] Soulaïmani A ; Fortin M ; Dhatt G ; Ouellet Y. Finite element simulation of two- and three-dimensional free surface flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 86 :265–296, 1991.
- [153] Soulaïmani A ; Saad Y. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for solving three dimensional free surface flows. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, 162 :79–106, 1998.
- [154] Liu WK ; Jun S ; Zhang YF. Reproducing kernel particle methods. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 20 :1081–1106, 1995.