Application de la commande B à un quadricoptère

par

Jérémy BROSSARD

THÈSE PRÉSENTÉE À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION
DU DOCTORAT EN GÉNIE
Ph. D.

MONTRÉAL, LE 14 AOÛT 2019

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

©Tous droits réservés, Jérémy Brossard, 2019

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

PRÉSENTATION DU JURY

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. David Bensoussan, directeur de thèse
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. René Landry, codirecteur de thèse
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Gauthier Guy, président du jury
Département de génie des systèmes à l'École de technologie supérieure

Mme Woodward Lyne, membre du jury
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. David Saussié, membre externe du jury
Département de génie électrique à l'école de Polytechnique Montréal

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 7 JUIN 2019

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Je remercie généreusement mon directeur de recherche Monsieur David Bensoussan pour son implication et son soutien tout au long de cette thèse. Sa passion contagieuse et son goût du défi ont avivé davantage en moi la flamme du savoir et le tison de la connaissance.

Je remercie chaleureusement Monsieur René Landry, directeur du Laboratoire LASSENA et co-directeur de cette thèse. La maquette de drone que Monsieur René Landry a mis à ma disposition ainsi que la possibilité de travailler avec le stagiaire Paul Ledesma (stagiaire ingénieur - LASSENA) a joué un rôle important dans le développement pratique de cette thèse.

Je remercie vivement l'équipe de contrôle commande que ce soit pour leurs travaux antérieurs ayant servi de fondement à cette thèse ou leurs précieux conseils : Maher Hammami (Professeur - Université de Sfax) ; Amine Houimdi (Étudiant au doctorat - ÉTS) ; Yulan Sun (Associé de recherche - ÉTS) ; Darren Loo (Étudiant à la maîtrise - ÉTS) ; D'autres étudiants m'ont permis également d'alimenter la réflexion donnant lieu à cette thèse : Xiaoxing Fang (Postdoctoral Fellow - Laboratoire LASSENA) ; Samir Zemam (Chercheur – Laboratoire LASSENA).

Je tiens particulièrement à exprimer toute ma reconnaissance : à ma mère Catherine Perdriset ; mon père Gérard Brossard ; mon Frère Mikaël Brossard ; mon grand-père et ma grand-mère, Michel et Marie Perdriset. Leur soutien a toujours été d'une grande aide et je leur en suis éternellement reconnaissant.

Enfin ma gratitude va aussi vers mes précieux amis Jérôme, Sophie, Baptiste, Richard, Sabrina et tous ceux que j'oublie …

Application de la commande B à un quadricoptère

Jérémy BROSSARD

RÉSUMÉ

L'amélioration constante de la vitesse de calcul de l'électronique et la précision accrue des senseurs permettent de mettre en œuvre des algorithmes de commande beaucoup plus performants. La commande B brevetée par le professeur Bensoussan met à profit ces avancées pour allier une réponse temporelle plus rapide et plus précise tout en maintenant des objectifs de stabilité et de robustesse. Elle a prouvé son efficacité par des simulations relatives à la commande du bras de lecture d'un disque dur puis, expérimentalement, sur un système instable : une expérience en lévitation magnétique. Ces deux applications ont abouti à d'excellents résultats dans les domaines temporel et fréquentiel. Pour confirmer le potentiel de cet algorithme, la prochaine étape est de le développer pour un système multi-variable. Le quadricoptère apparaît comme un candidat idéal pour tester la faisabilité de la commande B sur un système plus complexe.

Un quadricoptère est un hélicoptère multirotors muni de quatre bras, chacun d'eux pourvu d'un moteur et d'une hélice à son extrémité. Ce type de drone évolue dans un espace en 3 dimensions à partir de la commande de ses quatre moteurs. Cette multiplicité des entrées sorties rend le système difficile à commander, car celles-ci s'influencent entre elles. De plus, en vol, le quadricoptère est soumis à de nombreuses perturbations extérieures telles que le vent. Pour parvenir à absorber ces nombreuses interférences, il est nécessaire d'avoir une commande robuste et il est proposé de comparer la commande B aux autres méthodes de commande.

Cette thèse formule les fondements théoriques de la commande B appliquée à des systèmes multivariables. Par ailleurs, les travaux de simulation ont capturé la capacité de la commande B à découpler efficacement les entrées et les sorties sur un système 2×2.

Les nombreux résultats de simulation ont également permis d'apprécier les bonnes performances temporelles, fréquentielles et énergétiques de la commande B relativement à d'autres commandes de référence tel que : H_2 ; H_∞ ; μ-synthèse ; PID ainsi qu'aux méthodes de stabilisation non linéaire backstepping et hiérarchique.

La partie pratique applique diverses commandes dont la commande B à un drone réel. Des tests de vols stationnaires ont permis de constater une amélioration des déplacements le long des axes horizontaux ainsi qu'une minimisation de l'amplitude des signaux de commande relativement à une commande classique de type PID conçue par le manufacturier. Les limitations de la maquette de drone utilisée pour les tests pratiques sont évoquées et des suggestions d'améliorations sont proposées.

Mots-clefs : Quadricoptère, stabilité, robustesse, simulation, commande décentralisée, réponse temporelle, énergie.

Application of B Command to a Quadcopter

Jérémy BROSSARD

ABSTRACT

Constant improvement of electronics speed computing makes possible the implementation of more efficient control algorithms. The patented B-control from Professor Bensoussan's takes advantage of this faster computation speed to combine simultaneously a faster temporal response and better stability and robustness objectives compared to other controls. Its effectiveness was proved by simulations relating to the control of a hard disk reading arm and then, experimentally, on an unstable system: a magnetic levitation experimentation. These two applications have resulted in excellent results. To confirm the potential of this algorithm, the next step is to develop it for a multi-variable system. The quadcopter appears as an ideal candidate to test the feasibility of the B control.

A quadcopter is a multirotor helicopter with four arms, each with a motor and a propeller at the end. This type of drone evolves in a 3-dimensional space from the control of its four motors. This multiplicity of input-outputs makes the system difficult to control because they influence each other. In addition, in flight the quadcopter is subject to many external disturbances such as wind, obstacles, wind back from the ground when approaching or radiation near a wall. To absorb these many interferences, it is necessary to have a robust control. The experiments carried out previously with the B control have proved its ability to combine a very fast time response while maintaining an excellent robustness, whereas the other control algorithms need to make a compromise between these two performances (frequency and time).

This thesis was an opportunity to write the theoretical foundations of a new control method: The B control. The design method of this command, in the mono-variable then multivariable case, was detailed. Then, capability of the B control to effectively decouple inputs and outputs on a 2×2 system has been proven by simulation.

The numerous simulations result made possible to appreciate the good temporals, frequency and energetics performances of the B control relatively to other linear commands of reference such as: H_2; H_∞; μ-synthesis; PID; backstepping et hiérarchique.

The practical part has detailed the dimensioning of a real drone. Then, steady flights tests shown in the case of B control a better minimization of the displacements along the horizontal axes as well as a minimization of the amplitude of the signals of commands relatively to a classic control like the PID. Limitations of the drone model used for the practical tests and suggestions for improvements were exposed.

Keywords: Quadcopter, modeling, simulation, decentralized control, speed, accuracy, stability, robustness, energy.

TABLE DES MATIÈRES

Page

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 REVUE CRITIQUE DE LITTÉRATURE.....9
1.1 Les drones 9
1.1.1 Brève histoire du drone 9
1.1.2 Configuration aérodynamique 10
1.1.2.1 Monorotors..... 10
1.1.2.2 Birotors 11
1.1.2.3 Trirotors 12
1.1.2.4 Quadricoptère..... 13
1.1.2.5 Hexarotors et octorotors..... 13
1.1.3 Exemples d'application du quadricoptère..... 14
1.1.4 Exemples de projets de recherche sur les quadricoptères..... 19
1.1.5 Performances des quadricoptères..... 20
1.1.5.1 Test de suivi de trajectoire 21
1.1.5.2 Test de vol stationnaire 21
1.1.5.3 L'aspect énergétique 22
1.1.5.4 Imprécision du modèle..... 23
1.2 Performances des algorithmes de commande 23
1.2.1 Optimisation des performances temporelles..... 24
1.2.1.1 PID 24
1.2.1.2 Backstepping et hiérarchique..... 24
1.2.2 Optimisation des performances fréquentielles..... 25
1.2.2.1 H_∞..... 25
1.2.2.2 μ-synthèse 26
1.2.3 Minimisation de l'énergie investie..... 26
1.2.3.1 H_2 27
1.2.3.2 LQR..... 27
1.2.4 Optimisation simultanée des performances temporelles et fréquentielles 28
1.2.4.1 Commande B 28
1.2.4.2 Commande décentralisée 31

CHAPITRE 2 GÉNÉRALITÉ SUR LA COMMANDE 33
2.1 Présentation des systèmes de commande.....33
2.1.1 La boucle de commande 33
2.1.2 Système de commande avec perturbation externe 34
2.1.3 Système avec préfiltre..... 36
2.1.4 Système avec préfiltre anticipatif..... 36
2.2 Stabilité d'un système de rétroaction.....37
2.3 Performance temporelle 40
2.4 Stabilisation à partir de la sensibilité 42

CHAPITRE 3 MODÉLISATION D'UN QUADRICOPTÈRE 47
3.1 Introduction.....47
3.2 Modélisation non linéaire 47
3.2.1 Définition des repères 47
3.2.2 Définitions des positions et vitesses, linéaires et angulaires..... 48
3.2.3 Étude d'une hélice..... 51
3.2.4 Paramètres d'efforts..... 54
3.2.5 Expressions des accélérations par la méthode de Newton..... 57
3.3 Modélisation par approximation linéaire 60
3.3.1 Introduction..... 60
3.3.2 Modèle 61
3.4 Modélisation par approximation de série de Taylor 62
3.4.1 Linéarisation 62
3.4.2 Modélisation du quadricoptère par modèle d'état 64
3.4.3 Représentation du modèle..... 69
3.4.4 Commandabilité et observabilité 72
3.5 Structure de commande.....75
3.5.1 Modélisation linéaire du processus avec commande en translation et rotation en cascade..... 76
3.5.2 Modélisation linéaire du processus avec commande en translation et rotation séparée 78
3.5.3 Modélisation non linéaire du processus avec commande en translation et rotation en cascade..... 79
3.5.4 Modélisation non linéaire du processus avec commande en translation et en rotation séparée 80
3.6 Ajout du MCC.....81

CHAPITRE 4 COMMANDE B.....85
4.1 Version monovariable.....85
4.1.1 Processus stable 85
4.1.2 Cas d'un processus instable 89
4.2 Version multivariable.....92
4.2.1 Introduction..... 92
4.2.2 Conditions sur le processus $P(s)$..... 93
4.2.3 Théorème 94
4.2.4 Démonstration du théorème..... 97
4.3 Étude d'un système multi-entrées/multi 2×2 113
4.3.1 Objectifs..... 113
4.3.2 Présentation..... 113
4.3.3 Critères d'applications de la commande B 115
4.3.4 Expression du compensateur $C(s)$..... 119
4.3.5 Calibration du compensateur avec erreur statique..... 121
4.3.5.1 Choix des paramètres initiaux..... 121
4.3.5.2 Utilisations de l'algorithme d'optimisation 121
4.3.5.3 Nécessité d'un filtre pour les fréquences intermédiaires 123

4.3.5.4 Résultats obtenus pour un compensateur avec erreur statique. 127
4.3.6 Calibration du compensateur pour éliminer l'erreur statique 135
4.3.6.1 Ajout de $J_1(s)$ dans $C(s)$ 135
4.3.6.2 Algorithme d'optimisation pour calibrer $J_1(s)$ 137
4.3.6.3 Résultats obtenus pour un compensateur sans erreur statique. 139
4.3.7 Calibration du compensateur pour éliminer le dépassement 147
4.3.7.1 Choix des préfiltres 147
4.3.7.2 Algorithme d'optimisation avec annulation du dépassement .. 148
4.3.7.3 Résultats obtenus pour un compensateur sans dépassement.... 150
4.3.7.4 Préfiltres optimisés pour chaque transmittance 154
4.4 Application de la commande B au quadricoptère 157
4.4.1 Critères d'applications de la commande B 157
4.4.2 Expression des compensateurs B pour le quadricoptère 160
4.4.2.1 Commande en translation et rotation séparée 160
4.4.2.2 Commande en translation et rotation en cascade avec processus linéarisé 162

CHAPITRE 5 CONCEPTION DES COMMANDES H_2, H_∞ et µ-synthèse 165
5.1 Commande PID 165
5.1.1 Principe de la commande PID pour un second ordre 165
5.1.2 Application de la commande PID au drone 168
5.1.2.1 Axe *z* 168
5.1.2.2 Axes *x/y* 170
5.1.2.3 Autour de l'axe de lacet 173
5.1.3 Expression des compensateurs 174
5.2 Commandes H_2 et H_∞ 175
5.2.1 Fonctions de pondération 175
5.2.2 Mise sous forme standard des problèmes H_2 et H_∞ 178
5.2.3 Expression des compensateurs 181
5.3 Commande µ-synthèse 184
5.3.1 Stabilité robuste avec incertitudes structurées 184
5.3.2 Performances robustes avec incertitudes structurées 188
5.3.3 Application de la µ-synthèse au drone 191
5.3.3.1 Modélisation du drone sous forme standard 191
5.3.3.2 Obtention du compensateur par D-K itérations 199
5.3.4 Expression des compensateurs 208

CHAPITRE 6 COMMANDE NON LINÉAIRE 213
6.1 Introduction 213
6.2 Commande backstepping et commande hiérarchique 213
6.3 Préliminaires théoriques 214
6.3.1 Commande par fonctions de Lyapunov 214
6.3.2 Systèmes en cascade 216
6.4 Application de la commande backstepping au quadricoptère 219
6.5 Application de la commande hiérarchique au quadricoptère 229

CHAPITRE 7 RÉSULTATS DE SIMULATION 237
7.1 Introduction 237
7.2 Domaine fréquentiel 239
7.2.1 Conditions de test 239
7.2.2 Boucle ouverte $J(s)$ 240
7.2.2.1 Commandes B, H_2, H_∞ 240
7.2.2.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID 242
7.2.2.3 Discussion 243
7.2.3 Transmittance $T(s)$ 244
7.2.3.1 Commandes B, H_2, H_∞ 244
7.2.3.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID 245
7.2.3.3 Discussion 246
7.2.4 Sensibilité $S_{ey}(s)$ 247
7.2.4.1 Commandes B, H_2, H_∞ 247
7.2.4.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID 248
7.2.4.3 Discussion 250
7.2.5 Sensibilité $S_{du}(s)$ 250
7.2.5.1 Commandes B, H_2, H_∞ 250
7.2.5.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID 251
7.2.5.3 Discussion 252
7.3 Domaine temporel 253
7.3.1 Réponse unitaire 253
7.3.1.1 Conditions de test 253
7.3.1.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 254
7.3.1.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 256
7.3.1.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 258
7.3.1.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 260
7.3.1.6 Commandes backstepping et hiérarchique 262
7.3.1.7 Discussion 264
7.3.2 Scénario 265
7.3.2.1 Conditions de test 265
7.3.2.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 266
7.3.2.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 269
7.3.2.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 272
7.3.2.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 275
7.3.2.6 Commandes backstepping et hiérarchique 279
7.3.2.7 Discussion 282
7.3.3 Couplages 284
7.3.3.1 Conditions de test 284
7.3.3.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 285
7.3.3.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 287
7.3.3.4 Commandes backstepping et hiérarchique 290

7.3.3.5 Discussion 292
7.3.4 Hélicoïde 294
7.3.4.1 Conditions de test 294
7.3.4.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 295
7.3.4.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 300
7.3.4.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 306
7.3.4.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 311
7.3.4.6 Commandes backstepping et hiérarchique 317
7.3.4.7 Discussion 320
7.4 Analyse de robustesse 322
7.4.1 Vol stationnaire en présence de perturbation en sortie 324
7.4.1.1 Conditions de test 324
7.4.1.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 325
7.4.1.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 330
7.4.1.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 335
7.4.1.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 340
7.4.1.6 Commandes backstepping et hiérarchique 345
7.4.1.7 Discussion 348
7.4.2 Suivi de trajectoire hélicoïdale en présence de perturbation en sortie 350
7.4.2.1 Conditions de test 350
7.4.2.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 350
7.4.2.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 355
7.4.2.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 361
7.4.2.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 366
7.4.2.6 Commandes backstepping et hiérarchique 372
7.4.2.7 Discussion 376
7.4.3 Délais sur la mesure 378
7.4.3.1 Conditions de test 378
7.4.3.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 379
7.4.3.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 382
7.4.3.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 385
7.4.3.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 388
7.4.3.6 Commandes backstepping et hiérarchique 391
7.4.3.7 Discussion 394
7.5 Consommation d'énergie et gains 396
7.5.1 Conditions de test 396
7.5.1.1 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire 396
7.5.1.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire 398
7.5.1.3 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire 399
7.5.1.4 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire 401

7.5.1.5 Commandes backstepping et hiérarchique..... 402
7.5.1.6 Discussion..... 403
7.6 Extension : Conception de la commande B avec limitation de l'amplitude du signal de commande.....406
7.6.1 Utilisation d'une méthode graphique pour la conception du compensateur B..... 406
7.6.2 Comparaison entre l'ancien et le nouveau compensateur B pour le modèle linéaire de drone en cascade sur *x* ou *y* décrit en 3.5.1. 409
7.6.3 Comparaison avec les résultats obtenus en 7.4.1 pour un vol stationnaire 412
7.7 Conclusion intermédiaire.....418

CHAPITRE 8 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS AVEC LE QUADRICOPTÈRE F450J 423
8.1 Présentation du fonctionnement (matériel et logiciel) et conception du quadricoptère F450J basé sur l'autopilote Open Source PX4 423
8.1.1 Architecture matérielle du quadricoptère F450J..... 424
8.1.1.1 Matériel embarqué sur le châssis du quadricoptère F450J 425
8.1.1.2 Station de contrôle au sol utilisée pour diriger le quadricoptère F450J..... 439
8.1.2 Architecture du logiciel interne au contrôleur de vol PX4 embarqué sur le quadricoptère F450J..... 440
8.1.2.1 Architecture du logiciel PX4 utilisée dans contrôleur de vol du quadricoptère F450J..... 441
8.1.2.2 Flight stack du logiciel PX4 utilisée dans le contrôleur de vol du drone F450J..... 442
8.1.2.3 Contrôleur de position linéaire présent par défaut dans le logiciel PX4 utilisé dans le contrôleur de vol du quadricoptère F450J 444
8.1.2.4 Contrôleur d'attitude présent par défaut dans le logiciel PX4 utilisé dans le contrôleur de vol du quadricoptère F450J 445
8.1.2.5 Liens entre les variables d'estimations de l'état du drone et la précision des capteurs utilisés dans l'IMU du Pixhawk embarqué sur le quadricoptère F450J..... 447
8.2 Banc d'essai pour valider le dimensionnement des bras et l'équilibrage du quadricoptère F450J.....448
8.2.1 Évaluation du coefficient C_T pour chaque bras du quadricoptère F450J 450
8.2.2 Évaluation du coefficient C_p pour chaque bras du quadricoptère F450J 452
8.2.3 Évaluation du gain α pour chaque moteur du quadricoptère F450J 454
8.3 Calcul de la matrice d'inertie du quadricoptère F450J 456
8.4 Définition des objectifs de performance de la commande B pour l'implémenter dans le contrôleur de vol du F450J.....461
8.4.1 Gains des contrôleurs PID implémentés dans le contrôleur de vol Pixhawk du quadricoptère F450J..... 462
8.4.2 Objectifs de conception pour implémenter la commande B dans le contrôleur de vol PX4 du quadricoptère F450J 464

8.5 Résultats expérimentaux obtenus avec les commandes PID et B sur le quadricoptère F450J 469
8.5.1 Vol stationnaire effectué expérimentalement avec le quadricoptère F450J 469
8.6 Conclusion 474

CONCLUSION GÉNÉRALE 475

ANNEXE I LINÉARISATION DU MODÈLE DU QUADRICOPTÈRE 485

ANNEXE II CALCUL DE LA TRANSMISSION $T_{mn}(s)$ 499

ANNEXE III LISTE DU MATÉRIEL 504

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 507

LISTE DES TABLEAUX

Page

Tableau 3.1 Combinaisons de différent point d'équilibre possible à utiliser pour la linéarisation de Taylor 63

Tableau 3.2 Paramètres constants d'un modèle de quadrotor d'ARA Robotique 68

Tableau 3.3 États de la commandabilité et de l'observabilité chaînes d'altitude, de roulis, de tangage et de lacet 74

Tableau 4.1 Hypothèses et paramètres à déterminer pour la commande B 88

Tableau 4.2 Valeur singulière P(jω) 118

Tableau 4.3 Valeurs obtenues dans le cas d'une erreur statique.....127

Tableau 4.4 Valeurs obtenues dans le cas d'une erreur statique.....131

Tableau 4.5 Résultats fréquentiels des transmittances $T(s)$ et des sensibilités $S_{11}(s)$, $S_{22}(s)$ dans le cas sans erreur statique 139

Tableau 4.6 Résultats des réponses temporelles de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ dans le cas sans erreur statique 143

Tableau 4.7 Paramètres du compensateur $C(s)$ et des préfiltres $F_1(s)$ et $F_2(s)$ 150

Tableau 4.8 Coefficients des compensateurs B 161

Tableau 4.9 Gain maximum du compensateur, BP ω_b, M_s et ε de la sensibilité.....161

Tableau 4.10 Ordre et pôles des compensateurs B pour les axes x/y, z et les angles ϕ/θ, ψ ..161

Tableau 4.11 Coefficients des compensateurs B pour le processus linéaire approximé 162

Tableau 4.12 Gain maximum du compensateur, M_s et ε de la sensibilité.....163

Tableau 4.13 Ordre et pôles des compensateurs B pour les axes x/y, z et les angles ϕ/θ, ψ ..163

Tableau 5.1 Paramètres des compensateurs $PID(s)$ pour le processus linéaire 174

Tableau 5.2 Paramètres des compensateurs $PID(s)$ pour le processus par approximation linéaire.....174

Tableau 5.3 Valeurs des fonctions de pondérations, M_s et ε pour les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor 182

Tableau 5.4 Valeurs des fonctions de pondérations, M_s et ε pour les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéaire approximé 183

Tableau 5.5 Ordre et pôles les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor 183

Tableau 5.6 Ordre et pôles des compensateurs pour les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéaire approximé 184

Tableau 5.7 Valeurs numériques des fonctions de pondérations $W_p(s)$ et $W_u(s)$ pour les chaînes : d'altitude, de roulis, de tangage, de lacet 199

Tableau 5.8 Pourcentage d'incertitudes maximum sur les paramètres nominaux m, k, A_{ii} et b pour les axes z, x-y et autour de l'angle ψ 203

Tableau 5.9 Résumé des métriques obtenues lors de la conception des compensateurs 207

Tableau 5.10 Valeurs des paramètres des fonctions de pondérations, de M_s et ε 209

Tableau 5.11 Pourcentage d'incertitude dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéaire approximé 209

Tableau 5.12 Valeur de μ_p pour le processus linéaire approximé 209

Tableau 5.13 Ordre et pôles des compensateurs μ et μ_Δ dans le cas du processus linéaire approximé 210

Tableau 5.14 Valeurs des paramètres des fonctions de pondérations, de M_s et ε dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéarisé par approximation de Taylor 211

Tableau 5.15 Pourcentage d'incertitude dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéarisé par approximation de Taylor 211

Tableau 5.16 Valeur de μ_p pour le processus linéaire approximé 212

Tableau 5.17 Ordre et pôles des compensateurs μ et μ_Δ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor 212

Tableau 7.1 Bande passante de $J(s)$ sur les axes x ou y, z et autour de l'angle ψ pour le système seul et avec les compensateurs B, H_2 et H_∞ 241

Tableau 7.2 Bande passante ω_b de $J(s)$ sur les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour des angles θ ou ϕ, ψ pour le système seul et avec les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID 243

Tableau 7.3 Bande passante ω_c de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y, z et autour de l'angle ψ avec les compensateurs B, H_2 et H_∞ 244

Tableau 7.4 Bande passante ω_c de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour des angles θ ou ϕ, ψ avec les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID 246

Tableau 7.5 Sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ pour le système seul et avec compensateurs B, H_2 et H_∞ 248

Tableau 7.6 Sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour des angles θ ou ϕ, ψ pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID 250

Tableau 7.7 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus linéaire 255

Tableau 7.8 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus linéaire 258

Tableau 7.9 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus non linéaire 259

Tableau 7.10 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire 261

Tableau 7.11 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs backstepping et hiérarchique 263

Tableau 7.12 Résumé des meilleures performances temporelles pour une réponse à un échelon entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID appliqué sur un modèle linéaire et non linéaire de processus ; backstepping et hiérarchique appliqué à un modèle non linéaire de processus 265

Tableau 7.13 Structures de commandes étudiées section 7.3.2 présentant pour un scénario de référence (7.2), des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées) 284

Tableau 7.14 Comparaison des performances temporelles sur l'axe y et le couplage x pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge et défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) 286

Tableau 7.15 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B, H_2 et H_∞ 287

Tableau 7.16 Comparaison des performances temporelles sur l'axe *y* pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge et défini en (7.3), avec les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID 288

Tableau 7.17 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID.....289

Tableau 7.18 Performances temporelles sur l'axe *y* et le couplage *x* pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : backstepping et hiérarchique.....291

Tableau 7.19 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique ..292

Tableau 7.20 Résumé des meilleures performances temporelles pour les couplages lors d'un scénario de référence y_d défini en (7.3), entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique appliqué sur un modèle non linéaire de processus 294

Tableau 7.21 Structures de commandes étudiées à la section 7.3.4 présentant pour une trajectoire de référence hélicoïdale définie en (7.3), des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées).....322

Tableau 7.22 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire du processus 326

Tableau 7.23 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire du processus.....332

Tableau 7.24 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire du processus.....337

Tableau 7.25 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire du processus.....342

Tableau 7.26 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....346

Tableau 7.27 Structures de commandes étudiées à la section 7.4.1 présentant pour des conditions de vol stationnaire en présence de perturbation en sortie, des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées) 350

Tableau 7.28 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus linéaire lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4).....352

Tableau 7.29 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus linéaire dans le cas d'une consigne hélicoïdale.....357

Tableau 7.30 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus non linéaire dans le cas d'une consigne hélicoïdale.....363

Tableau 7.31 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire dans le cas d'une consigne hélicoïdale.....368

Tableau 7.32 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs backstepping et hiérarchique dans le cas d'une consigne hélicoïdale 373

Tableau 7.33 Structures de commandes étudiées à la section 7.4.2 présentant pour une trajectoire de référence hélicoïdale définie en (7.3) en présence de vent, des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées).....377

Tableau 7.34 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ dans le cas d'un processus linéaire.....379

Tableau 7.35 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ dans le cas d'un processus linéaire.....380

Tableau 7.36 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ dans le cas d'un processus linéaire.....381

Tableau 7.37 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID dans le cas d'un processus linéaire.....382

Tableau 7.38 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID dans le cas d'un processus linéaire.....383

Tableau 7.39 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID dans le cas d'un processus linéaire.....384

Tableau 7.40 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ pour le processus non linéaire.....386

Tableau 7.41 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ pour le processus non linéaire.....387

Tableau 7.42 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ pour le processus non linéaire.....388

Tableau 7.43 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire.....389

Tableau 7.44 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire.....390

Tableau 7.45 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire.....391

Tableau 7.46 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique.....392

Tableau 7.47 Écart type σ_z pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique.....393

Tableau 7.48 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique.....394

Tableau 7.49 Résumé des meilleures performances temporelles (zones colorées) pour une réponse à un échelon en présence de délais sur le retour de mesure, entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID appliqué sur un modèle linéaire et non linéaire de processus ; backstepping et hiérarchique appliqué à un modèle non linéaire de processus.....395

Tableau 7.50 Énergie et maximum des signaux d'erreur e_z, $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$, e_ψ lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire.....396

Tableau 7.51 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire.....397

Tableau 7.52 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire ...397

Tableau 7.53 Énergie et maximum des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus linéaire.....398

Tableau 7.54 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID.....398

Tableau 7.55 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID 399

Tableau 7.56 Énergie des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire.....399

Tableau 7.57 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 400

Tableau 7.58 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire.....401

Tableau 7.59 Énergie et maximum des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire 401

Tableau 7.60 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire...402

Tableau 7.61 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire.....402

Tableau 7.62 Énergie et maximum des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique 403

Tableau 7.63 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique.....403

Tableau 7.64 Résumé des meilleures performances (zones colorées) concernant l'énergie des signaux d'erreurs $\|e(t)\|_2$, de commande $\|u(t)\|_2$, des compensateurs $\|C(s)\|_2$ ainsi que le gain maximum des signaux de commande $\|u(t)\|$ et des compensateurs $\|C(s)\|$ pour l'ensemble des algorithmes de commande, soit : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique.....405

Tableau 7.65 Valeurs obtenues pour les compensateurs B et B_u sur les axes *x* ou *y* et *z* 409

Tableau 7.66 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2, H_∞ et B_u sur le modèle linéaire du drone 3.5.1.....412

Tableau 7.67 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire du processus 414

Tableau 8.1 Spécification du moteur DC Turnigy D2836/9 950 KV 427

Tableau 8.2 Extrait de la documentation technique des "ESC 430

Tableau 8.3 Description des différents types de vol en fonction des dimensions de l'hélice.....432

Tableau 8.4 Caractéristiques principales de l'hélice 1045 Propeller 10 in 10x4.5.....433

Tableau 8.5 Caractéristiques principales des capteurs internes au Pixhawk V2 436

Tableau 8.6 Synthèse de la qualité des mesures utilisées dans le contrôleur de vol en fonction des capteurs de notre application réelle.....447

Tableau 8.7 Approximations du coefficient C_T pour les moteurs M_1, M_2, M_3 et M_4.....451

Tableau 8.8 Approximations du coefficient C_p pour les moteurs M_1, M_2, M_3 et M_4.....453

Tableau 8.9 Approximations du coefficient k_i pour les moteurs M_i 455

Tableau 8.10 Paramètres des compensateurs PID présents dans la chaîne de commande de l'attitude (ϕ et θ).....463

Tableau 8.11 Performances temporelles pour une réponse à un échelon des compensateurs : PIDϕ ; B ; B amélioré 468

Tableau 8.12 Moyenne moy_i et écart type σ_i pour les axes $i = x, y, z$ 471

Tableau 8.13 Norme H_2 et écart type σ des signaux transmis en entrée du drone (indice IN) et des signaux mesurés en sortie du drone (indice OUT), pour les compensateurs PID et B : vitesses de rotation ω_i (pour $i = 1, \ldots, 4$) ; couples L, M, N ; poussée T_z 474

LISTE DES FIGURES

Page

Figure 1.1 Drone mono-rotor : le Monospinner....11

Figure 1.2 Hélicoptère en configuration : Classique (a) ; Tandem (b) ; Coaxial (c) 12

Figure 1.3 Exemple de Trirotor 12

Figure 1.4 Quadricopère Phantom 3 de la 13

Figure 1.5 Deux configurations possibles d'hexarotors (a) - (b) et un octorotors (c) 14

Figure 1.6 Drone Mavic Air de chez DJI et sa radiocommande Tirée de DJI (2018) 15

Figure 1.7 Exemple de trajectoire prédéfinie sur QGC 15

Figure 1.8 Mini drone Cheerson CX10 (a) et drone taxi Ehang 184 (b) Tirées de wirewireweb (2018) et McNabb (2016) 16

Figure 1.9 Drone effectuant la surveillance 17

Figure 1.10 Drone inspectant une ligne électrique Tirée de Hydro-Québec (2017)....17

Figure 1.11 Recherche de personnes perdues dans une avalanche 18

Figure 1.12 Drone transportant rapidement un défibrillateur 18

Figure 1.13 Drone utilisé pour des vidéos de performances sportives 19

Figure 1.14 Variation des positions sur les axes *x/y* pour un vol stationnaire 22

Figure 1.15 Comparaison des résultats obtenus pour une commande de déplacement en position entre une commande PID (à gauche) et la commande B (à droite) Tirée de Bensoussan (2015) 29

Figure 2.1 Boucle fermée d'un système entrée sortie 33

Figure 2.2 Boucle de commande avec les perturbations externes $D_1(s)$, $D_2(s)$, et $D_3(s)$ 35

Figure 2.3 Schéma de commande avec préfiltre 36

Figure 2.4 Schéma de commande avec préfiltre et préfiltre anticipatif 37

Figure 2.5 Schéma bloc d'une commande en boucle fermée 38

Figure 2.6 Pôles et zéros dans le plan de s 39

Figure 2.7 Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte $J(s)$ tracée en verte 40

Figure 2.8 Exemple de réponse unitaire 41

Figure 2.9 Image illustrant le comportement de la sensibilité en HF lors d'une augmentation de gain pour minimiser la sensibilité en BF 43

Figure 2.10 Comparaison entre l'allure de la sensibilité en fonction de la fréquence, dans le cas idéal (en haut) et dans le cas réel (en bas) 44

Figure 2.11 Comparaison entre l'allure de la transmittance en fonction de la fréquence, dans le cas idéal (en haut) et dans le réel (en bas) 44

Figure 2.12 Diagramme de Nyquist de $J(s)$ 45

Figure 3.1 Repère inertiel F_i et repère de la base du drone F_b 48

Figure 3.2 Orientations des angles d'Euler 49

Figure 3.3 Représentation du quadricoptère en un point d 50

Figure 3.4 Élément infiniment petit dr sur l'hélice 51

Figure 3.5 Représentation des forces appliquées sur un élément infiniment petit de l'hélice 52

Figure 3.6 Couple induit par la traînée de l'hélice 54

Figure 3.7 Représentation des forces, des vitesses des moteurs du quadricoptère et des couples agissant sur le quadricoptère 56

Figure 3.8 Représentation du couple gyroscopique 58

Figure 3.9 Représentation sous forme de schéma synoptique de la modélisation d'état d'un système 67

Figure 3.10 Boucle fermée avec le processus diagonal linéarisé pour une commande en translation et de rotation en cascade 76

Figure 3.11 Boucle fermée avec le processus non diagonal linéarisé pour une commande en translation et de rotation en cascade 77

Figure 3.12 Boucle fermée avec le processus linéarisé pour une commande en translation et rotation séparées 78

Figure 3.13 Boucle fermée avec le processus non linéaire pour une commande en translation et de rotation en cascade 79

Figure 3.14 Boucle fermée avec le processus non linéaire pour une commande en translation et rotation séparée 80

Figure 3.15 Boucle de commande avec insertion des moteurs 81

Figure 3.16 Diagramme d'un moteur DC 81

Figure 4.1 Allure fréquentielle de la sensibilité Tirée et reproduite de Garnier (2007) 86

Figure 4.2 Propriété d'atténuation Tirée et reproduite de Garnier (2007) 87

Figure 4.3 Diagramme de Nyquist de Jω Tirée et reproduite de Retif (2008) 88

Figure 4.4 Ordre des fréquences dans la conception de la commande B 96

Figure 4.5 Représentation graphique de l'inégalité $\bar{\sigma}\{D(s_y)\} < \bar{\sigma}\{P(s_y)\}(1-\alpha_1)^{-1}$ 99

Figure 4.6 Représentation graphique de l'inégalité σD-1sx ≤ σP-1sx1 + α1 100

Figure 4.7 Représentation graphique de $J_{i1}(\omega)$ et $J_{i3}(\omega)$ 107

Figure 4.8 Représentation sous forme de schéma bloc du système multivariable $P(s)$ et de son compensateur $C(s)$ 114

Figure 4.9 Valeurs singulières de $P(j\omega)$ 118

Figure 4.10 Organigramme du programme Matlab pour trouver les paramètres de $C(s)$ avec erreur statique 122

Figure 4.11 Bode des transmittances $T_{11}(s)$ et $T_{21}(s)$ pour trois valeurs du gain k_1 123

Figure 4.12 Bode des transmittances $T_{22}(s)$ et $T_{12}(s)$ pour trois valeurs du gain k_1 124

Figure 4.13 Allure du compensateur $C(s)$ pour trois valeurs de k_1 124

Figure 4.14 Bode du filtre intermédiaire F_{inter} 125

Figure 4.15 Comparaison de $C(s)$ avec et sans F_{inter} pour trois valeurs de k_1 126

Figure 4.16 Bode de T11i(s) et $T_{21i}(s)$ 126

Figure 4.17 Bode de $T_{22i}(s)$ et $T_{12i}(s)$ 127

Figure 4.18 Allure de $C(s)$ optimisé pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB 128

Figure 4.19 Allure de $T_{11}(s)$ et $T_{21}(s)$ optimisées pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB.....129

Figure 4.20 Allure de $T_{22}(s)$ et $T_{12}(s)$ optimisées pour $Cmax$ = 60, 70 et 80 dB 129

Figure 4.21 Bode de $S_{11}(s)$ pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB dans le cas avec erreur statique 130

Figure 4.22 Bode de $S_{22}(s)$ pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB dans le cas avec erreur statique 130

Figure 4.23 Allure de $y_1(t)$ optimisé pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB 131

Figure 4.24 Allure de $y_2(t)$ optimisé pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB 132

Figure 4.25 Allure de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ optimisées pour C_{max} = 60 dB 132

Figure 4.26 Allure de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ optimisées pour C_{max} = 70 dB 133

Figure 4.27 Allure de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ optimisées pour C_{max} = 80 dB 133

Figure 4.28 Allure de $y_2(t)$, $y_{12}(t)$ et $y_{22}(t)$ optimisées pour C_{max} = 60 dB 133

Figure 4.29 Allure de $y_2(t)$, $y_{12}(t)$ et $y_{22}(t)$ optimisées pour C_{max} = 70 dB 134

Figure 4.30 Allure de $y_2(t)$, $y_{12}(t)$ et $y_{22}(t)$ optimisées pour C_{max} = 80 dB 134

Figure 4.31 Organigramme du programme Matlab pour trouver les paramètres de $C(s)$ sans erreur statique.....138

Figure 4.32 Bode de $C(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique.....140

Figure 4.33 Bode de $T_{11}(s)$ et $T_{21}(s)$ pour C_{max} = {60, 70,80} dB, dans le cas sans erreur statique 141

Figure 4.34 Bode de $T_{22}(s)$ et $T_{12}(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique 141

Figure 4.35 Bode de $S_{11}(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique....142

Figure 4.36 Bode de $S_{22}(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique....142

Figure 4.37 Réponse temporelle de $y_1(t)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique.....144

Figure 4.38 Réponse temporelle de $y_2(t)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique.....144

Figure 4.39 Réponse temporelle de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ pour C_{max} = 60 dB, dans le cas sans erreur statique.....145

Figure 4.40 Réponse temporelle de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ pour C_{max} = 70 dB, dans le cas sans erreur statique.....145

Figure 4.41 Réponse temporelle de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ pour C_{max} = 80 dB, dans le cas sans erreur statique.....145

Figure 4.42 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{12}(t)$ pour C_{max} = 60 dB, dans le cas sans erreur statique.....146

Figure 4.43 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{12}(t)$ pour C_{max} = 70 dB, dans le cas sans erreur statique.....146

Figure 4.44 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{12}(t)$ pour C_{max} = 80 dB, dans le cas sans erreur statique.....147

Figure 4.45 Schéma bloc du système multivariable avec préfiltres.....147

Figure 4.46 Organigramme du programme Matlab pour trouver les paramètres de $C(s)$ avec annulation du dépassement.....149

Figure 4.47 Bode de $T_{11}(s)$, $T_{12}(s)$, $T_{11f}(s)$, $T_{12f}(s)$ dans le cas sans erreur statique.....151

Figure 4.48 Bode de $T_{22}(s)$, $T_{21}(s)$, $T_{22f}(s)$, $T_{21f}(s)$ dans le cas sans erreur statique.....151

Figure 4.49 Réponse indicielle de $y_1(t)$, $y_{1f}(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{11f}(t)$.....152

Figure 4.50 Réponse indicielle de $y_{12}(t)$ et $y_{12f}(t)$.....152

Figure 4.51 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{2f}(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{22f}(t)$.....153

Figure 4.52 Réponse indicielle de $y_{21}(t)$ et $y_{21f}(t)$.....153

Figure 4.53 Représentation sous forme de schéma bloc du système multivariable, avec un préfiltre associé à chacune des transmittances.....154

Figure 4.54 Bode de $T_{11}(s)$, $T_{12}(s)$, $T_{11f}(s)$, $T_{12f}(s)$, $T_{12ff}(s)$.....155

Figure 4.55 Bode de $T_{22}(s)$, $T_{21}(s)$, $T_{22f}(s)$, $T_{21f}(s)$, $T_{21ff}(s)$.....156

Figure 4.56 Réponse indicielle de $y_1(t)$, $y_{1f}(t)$ et $y_{1ff}(t)$.....156

Figure 4.57 Réponse indicielle de $y_2(t)$, $y_{2f}(t)$ et $y_{2ff}(t)$.....157

Figure 4.58 Valeurs singulières de $P(j\omega)$, $\sigma_1(\omega)$ en noir (derrière la courbe rouge) et $\sigma_2(\omega)$ en rouge, $\sigma_3(\omega)$ en bleu et $\sigma_4(\omega)$ en vert, $\mu(\omega)$ en pointillé bleu.....158

Figure 5.1 Boucle fermée d'un compensateur PID associé à un processus du second ordre.....165

Figure 5.2 Emplacement des pôles de la boucle fermée $T(s)$ dans le cas d'un compensateur $PID(s)$ associé à un second ordre $G(s)$ 167

Figure 5.3 Chaîne d'altitude avec le compensateur $PID_z(s)$ 168

Figure 5.4 Structure PID double boucle pour la commande de θ et x 171

Figure 5.5 Chaîne de commande autour de l'angle ψ avec le compensateur $PID_\psi(s)$.....173

Figure 5.6 Boucle fermée standard avec fonctions de pondérations 176

Figure 5.7 a Sensibilité et pondération $S(s)$ et $1/W_e(s)$ 177

Figure 5.8 Boucle fermée avec ajout des fonctions de pondération 179

Figure 5.9 Boucle fermée sous forme standard 179

Figure 5.10 $P(s)$ - $K(s)$ sous forme standard.....180

Figure 5.11 Boucle fermée avec ajout des fonctions de pondération et la matrice Δ_s 185

Figure 5.12a Bloc scalaire structuré S.....186

Figure 5.13 $P(s)$ et $K(s)$ associés à des incertitudes structurées $\Delta_s(s)$.....187

Figure 5.14 Représentation de la forme standard soumise à des perturbations exogènes 188

Figure 5.15 Boucle fermée sous forme standard avec perturbations structurées et perturbations exogènes.....189

Figure 5.16 Boucle fermée perturbée pour robuste performance 190

Figure 5.17 Représentations sous forme de schéma bloc des chaînes de : a) altitude, b) roulis, c) tangage, d) lacet. 192

Figure 5.18 Représentation sous forme de schéma bloc des LFT des paramètres kΔ, ω0Δ, mΔ, lΔ, gΔ, AiiΔ et IiiΔ.....195

Figure 5.19 Insertion des incertitudes dans la représentation de la chaîne d'altitude.....196

Figure 5.20 Structure de la chaîne d'élévation pour faire apparaître le contenu Δ_z et G_z.....196

Figure 5.21 Structure G_z - Δ_z.....197

Figure 5.22 Mise sous forme canonique avec insertion des fonctions de pondérations W_{pz}, W_{uz} et du compensateur K_z 198

Figure 5.23 Insertion du critère de performance Δ_{pz}.....199

Figure 5.24 Sommaire d'itération pour un algorithme convergeant.....200

Figure 5.25 Sommaire d'itération pour un algorithme convergeant puis divergeant 201

Figure 5.26 Stabilité robuste Md → u∞ en pointillé vert et robuste performance μΔpMjω courbes rouge et bleue (superposées) pour l'axe *z*, sans incertitudes.....203

Figure 5.27 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe *z* avec incertitude.....204

Figure 5.28 Stabilité robuste Md → u∞ en pointillé vert et robuste performance μΔpMjω courbes rouge et bleue (superposées) pour l'axe *z*, avec incertitudes.....204

Figure 5.29 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe *x*-*y* sans incertitude 204

Figure 5.30 Stabilité robuste Md → u∞ en pointillé vert et robuste performance μΔpMjω courbes rouge et bleue (superposées) pour les axes *x*-*y*, sans incertitudes.....205

Figure 5.31 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe *x*-*y* avec incertitude 205

Figure 5.32 Stabilité robuste Md → u∞ en pointillé vert et robuste performance μΔpMjω courbes rouge et bleue (superposées) pour les axes *x*-*y*, avec incertitudes.....205

Figure 5.33 Stabilité robuste Md → u∞ en pointillé vert et robuste performance μΔpMjω courbes rouge et bleue (superposées) autour de l'angle ψ, sans incertitudes.....206

Figure 5.34 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe ψ avec incertitude.....206

Figure 5.35 Stabilité robuste Md → u∞ en pointillé vert et robuste performance μΔpMjω courbes rouge et bleue (superposées) autour de l'angle ψ, avec incertitude 207

Figure 6.1 Schéma bloc de la commande virtuelle en vitesse v_d 221

Figure 6.2 Schéma bloc de la commande virtuelle en accélération a_d.....223

Figure 6.3 Schéma bloc des commandes virtuelles en jerk j_d et en vitesse de rotation Ω_d....225

Figure 6.4 Schéma général de la structure de commande par backstepping 228

Figure 7.1 Schéma de la boucle de commande.....239

Figure 7.2 Diagramme de Bode de gain de la boucle ouverte $J(s)$ sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) pour le système seul (pointillés bleus) et avec compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) 241

Figure 7.3 Diagramme de Bode de gain de la boucle ouverte $J(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ (d) pour le système seul (pointillés bleus) et avec compensateurs B (rouge), μ (bleue), μ_Δ (verte) et PID (noire) 242

Figure 7.4 Diagramme de Bode du gain de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) avec les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) 244

Figure 7.5 Diagramme de Bode du gain de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ (d) avec les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir) 245

Figure 7.6 Diagramme de Bode du gain de la sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes x ou y (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) avec les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) 247

Figure 7.7 Diagramme de Bode du gain de la sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ(d) avec les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir) 249

Figure 7.8 Sensibilité $S_{du}(s)$ sur les axes x ou y (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) 251

Figure 7.9 Sensibilité $S_{du}(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ (d) pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir) 252

Figure 7.10 Schéma général de la boucle de commande 253

Figure 7.11 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) sur le processus linéaire 255

Figure 7.12 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (bleu) sur le processus linéaire 257

Figure 7.13 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) sur le processus non linéaire 259

Figure 7.14 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (bleu) sur le processus non linéaire 261

Figure 7.15 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs backstepping (rouge) et hiérarchique (bleu) 263

Figure 7.16 Réponses temporelles (bleue) sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence (pointillé rouge) défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 267

Figure 7.17 Réponses temporelles (bleue) des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence (pointillé rouge) défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 267

Figure 7.18 Réponses des commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte) et u_z pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 268

Figure 7.19 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 269

Figure 7.20 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire 270

Figure 7.21 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire 270

Figure 7.22 Réponses des commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte) et u_z pour le scénario de référence (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire 271

Figure 7.23 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire 272

Figure 7.24 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 273

Figure 7.25 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 273

Figure 7.26 Réponses des commandes *L, M, N* et T_z pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 274

Figure 7.27 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 275

Figure 7.28 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire 276

Figure 7.29 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire 277

Figure 7.30 Réponses des commandes *L, M, N* et T_z pour le scénario de référence en pointillé rouge défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire 278

Figure 7.31 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire.....279

Figure 7.32 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique.....280

Figure 7.33 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique.....280

Figure 7.34 Réponses des commandes *L, M, N,* T_z pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique.....281

Figure 7.35 Vitesse ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique.....281

Figure 7.36 Réponses temporelles sur *x, y* pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) 285

Figure 7.37 Réponses temporelles sur les angles ϕ, θ et l'axe *x* pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), H_2 (verte), H_∞ (bleue).....286

Figure 7.38 Réponses temporelles sur *x, y* pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge et défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert), PID (noir) 288

Figure 7.39 Réponses temporelles sur les angles ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert), PID (noir) 289

Figure 7.40 Réponses temporelles sur les axes *x, y* pour le scénario de référence (7.3) y_d en pointillé rouge, avec les compensateurs : backstepping (rouge) ; hiérarchique (bleu) 290

Figure 7.41 Réponses temporelles sur les angles ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3) pour les compensateurs : backstepping (rouge) et hiérarchique (bleu) 291

Figure 7.42 Déplacement en bleu sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....295

Figure 7.43 Déplacement en bleu sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....296

Figure 7.44 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....297

Figure 7.45 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....298

Figure 7.46 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ 299

Figure 7.47 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ 300

Figure 7.48 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ.....301

Figure 7.49 Déplacement sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ 302

Figure 7.50 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ.....303

Figure 7.51 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ.....304

Figure 7.52 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ 305

Figure 7.53 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ 306

Figure 7.54 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....307

Figure 7.55 Déplacements sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ 307

Figure 7.56 Déplacements des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....308

Figure 7.57 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞.....309

Figure 7.58 Commandes *L, M, N,* T_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ 310

Figure 7.59 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ 311

Figure 7.60 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ.....312

Figure 7.61 Déplacement sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ 313

Figure 7.62 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ.....314

Figure 7.63 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ.....315

Figure 7.64 Commandes *L, M, N,* T_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ.....316

Figure 7.65 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ 317

Figure 7.66 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique 318

Figure 7.67 Déplacement sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique 318

Figure 7.68 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique 319

Figure 7.69 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique ..319

Figure 7.70 Commandes *L, M, N, T_z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique 320

Figure 7.71 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale pour les compensateurs backstepping et hiérarchique 320

Figure 7.72 Insertion de bruit blanc dans la boucle fermée 324

Figure 7.73 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone 325

Figure 7.74 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone 326

Figure 7.75 Déplacement autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone 327

Figure 7.76 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone 328

Figure 7.77 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone 329

Figure 7.78 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone 330

Figure 7.79 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone 331

Figure 7.80 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone 331

Figure 7.81 Variations des angles ϕ, θ, ψ pour un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone 332

Figure 7.82 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone 333

Figure 7.83 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone 334

Figure 7.84 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone 335

Figure 7.85 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone 336

Figure 7.86 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone 336

Figure 7.87 Déplacements autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone 337

Figure 7.88 Commandes *L, M, N,* T_z lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone 338

Figure 7.89 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone 339

Figure 7.90 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone 340

Figure 7.91 Déplacements sur *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone 341

Figure 7.92 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone 341

Figure 7.93 Déplacement autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone 342

Figure 7.94 Commandes *L, M, N, T_z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone 343

Figure 7.95 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone 344

Figure 7.96 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone 345

Figure 7.97 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....346

Figure 7.98 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....346

Figure 7.99 Déplacements autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....347

Figure 7.100 Commandes *L, M, N, T_z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....347

Figure 7.101 Erreurs e_x (rouge), e_y (bleue), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....348

Figure 7.102 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....348

Figure 7.103 Déplacements en bleu sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 351

Figure 7.104 Déplacements en bleu sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 351

Figure 7.105 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 352

Figure 7.106 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 353

Figure 7.107 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 354

Figure 7.108 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire 355

Figure 7.109 Déplacements en 3D sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire 356

Figure 7.110 Déplacements sur les axes *x, y, z* en fonction du temps lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire 357

Figure 7.111 Déplacements des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire 358

Figure 7.112 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire 359

Figure 7.113 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire 360

Figure 7.114 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire 361

Figure 7.115 Déplacements en 3D sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 362

Figure 7.116 Variations des axes *x, y, z* pour une consigne hélicoïdale définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 362

Figure 7.117 Variations des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 363

Figure 7.118 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire.....364

Figure 7.119 Commandes *L* (bleue), *M* (rouge), *N* (verte), T_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire 365

Figure 7.120 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire.....366

Figure 7.121 Déplacements en 3D sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID.....367

Figure 7.122 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), sur le processus non linéaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID 368

Figure 7.123 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID.....369

Figure 7.124 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID 370

Figure 7.125 Commandes *L* (bleue), *M* (rouge), *N* (verte), T_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID 371

Figure 7.126 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie sur le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID 372

Figure 7.127 Déplacements en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....373

Figure 7.128 Variations sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....373

Figure 7.129 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....374

Figure 7.130 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) pour une consigne hélicoïdale définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....374

Figure 7.131 Commandes L (bleue), M (rouge), N (verte), T_z lors de la consigne hélicoïdale (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....375

Figure 7.132 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale, avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.....375

Figure 7.133 Insertion des délais sur la mesure dans la boucle de commande.....378

Figure 7.134 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour un processus linéaire 380

Figure 7.135 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe *z* et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour un processus linéaire 381

Figure 7.136 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge) , H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour un processus linéaire 382

Figure 7.137 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), μ (bleu) , PID (noir), μ_Δ (vert) dans le cas d'un processus linéaire.....383

Figure 7.138 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe *z* et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), μ (bleu) , PID (noir), μ_Δ (vert) dans le cas d'un processus linéaire 384

Figure 7.139 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), μ (bleu) , PID (noir), μ_Δ (vert) dans le cas d'un processus linéaire.....385

Figure 7.140 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour le processus non linéaire 386

Figure 7.141 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe z et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour le processus non linéaire.....387

Figure 7.142 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour le processus non linéaire 388

Figure 7.143 Réponses unitaires nominales (trait plein) sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ avec délais de mesure (trait en pointillé), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ (processus non linéaire).....389

Figure 7.144 Réponses unitaires nominales en trait plein sur z et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire 390

Figure 7.145 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire.....391

Figure 7.146 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : backstepping (rouge), hiérarchique (bleu) 392

Figure 7.147 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe z et en pointillés avec ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : backstepping (rouge), hiérarchique (bleu) 393

Figure 7.148 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : backstepping (rouge), hiérarchique (bleu) 394

Figure 7.149 Conception de la commande B pour des axes x et y avec GeoGébra avec sur la partie de gauche : commande B (rouge) ; commande B_u (vert) ; Cercle de sensibilité $S_{ey}(s)$ (bleu). À droite pour le compensateur B uniquement : Sensibilité $S_{ey}(s)$ (jaune) ; Transmittance $T(s)$ (verte foncée) ; ε (vert clair) ; M_s (rouge) ; $U(s)$ (noir).....407

Figure 7.150 Conception de la commande B pour des axes x et y avec GeoGebra avec sur la partie de gauche : la commande B (rouge) ; la commande B_u (vert) ; Cercle de sensibilité $S_{ey}(s)$ (bleu). À droite pour le compensateur B_u uniquement : Sensibilité $S_{ey}(s)$ (jaune) ; Transmittance $T(s)$ (verte foncée) ; ε (vert clair) ; M_s (rouge) ; $U(s)$ (noir) 408

Figure 7.151 Allures de la sensibilité $S_{ru}(s)$ sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu). À gauche l'amplitude et à droite la phase 409

Figure 7.152 Allures de la sensibilité $S_{ey}(s)$ sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu). À gauche l'amplitude et à droite la phase 410

Figure 7.153 Transmissions $T(s)$ sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu). À gauche l'amplitude et à droite la phase 410

Figure 7.154 Réponses à un échelon sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu).....411

Figure 7.155 Déplacements sur les axes x, y, z lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone.....413

Figure 7.156 Déplacements sur les axes x, y, z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone 414

Figure 7.157 Déplacements autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone 415

Figure 7.158 Commandes u_ϕ(bleue), u_θ(rouge), u_ψ(verte), u_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone 416

Figure 7.159 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone.....417

Figure 7.160 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone 418

Figure 8.1 Configuration matérielle du quadricoptère F450J basée sur l'autopilote PX4.....425

Figure 8.2 Drone F450J 425

Figure 8.3 Châssis F450 de chez DJI....426
Figure 8.4 Moteur sans balais DC drone F450J....427
Figure 8.5 Connexion d'ESC à un moteur....428
Figure 8.6 Exemple de signaux PWM....429
Figure 8.7 ESC 20A QAV250....429
Figure 8.8 Pas géométrique d'une hélice....431
Figure 8.9 Hélices CCW du drone F450J....432
Figure 8.10 Batterie LIPO 11,1V ; 35C ; 3300 mAh....434
Figure 8.11 APM Power Module 5.3V DC BEC....435
Figure 8.12 Contrôleur de vol Pixhawk embarqué sur le drone F450J....436
Figure 8.13 GPS externe NEO-M8N GPS....438
Figure 8.14 Télémétrie OSD 3DR : sur le drone F450J (a) ; sur l'ordinateur (b)....438
Figure 8.15 Récepteur FlySky FS-R9B de la radio commande....439
Figure 8.16 Station au sol : ordinateur avec QGC + module 3DR (a); Radio commande (b)....439
Figure 8.17 Exemple de planification de mission de vol avec QGC....440
Figure 8.18 Architecture générale du logiciel embarqué PX4[12] (suite page suivante)....441
Figure 8.19 Aperçue de la "flight stack"....444
Figure 8.20 Contrôleur de position et vitesse linéaire PX4....444
Figure 8.21 Contrôleur d'attitude PX4....446
Figure 8.22 Allure de l'amortissement aérodynamique....446
Figure 8.23 Banc de test pour valider le dimensionnement du système de propulsion du drone F450J....449
Figure 8.24 Configuration en X du quadricoptère F450J, emplacement et sens de rotation des moteurs....450

Figure 8.25 T en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $x\omega^2$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c), M_4 (d).....451

Figure 8.26 T en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $x\omega^2$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu), M_4 (rouge).....452

Figure 8.27 P_p en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k\omega^3$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c), M_4 (d).....453

Figure 8.28 P_p en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k\omega^3$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu), M_4 (rouge) 454

Figure 8.29 T en fonction de α, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k_i\alpha_i$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c), M_4 (d) 455

Figure 8.30 T_i en fonction de α_i, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k_i\alpha_i$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu), M_4 (rouge) 456

Figure 8.31 Localisation des moteurs M_1, ... M_4 et des bras b_1, ... b_4 sur le drone réel.....458

Figure 8.32 Localisation de l'adaptateur pour l'hélice et du support pour moteur.....458

Figure 8.33 Bode de la boucle ouverte $J(s)$ avec à gauche l'amplitude et à droite la phase pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert).....465

Figure 8.34 Nyquist de la boucle ouverte $J(s)$ pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert) 466

Figure 8.35 Bode des compensateurs (gains à gauche et phases à droite) : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert) 466

Figure 8.36 Bode des fonctions de transfert en boucle fermée $T(s)$ à gauche et zoom autour de 0 dB à droite pour les compensateurs (gains sur la première ligne et phases sur la deuxième ligne) : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert).....467

Figure 8.37 Réponse unitaire de la sortie $y(t)$ pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert) 468

Figure 8.38 Réponse temporelle de la commande $u(t)$ pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert).....468

Figure 8.39 Mesures expérimentales avec le drone F450J des déplacements en 3D sur *x, y, z* pour un vol stationnaire pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; compensateur B (rouge) 469

Figure 8.40 Mesures expérimentales avec le drone F450J des déplacements en 2D sur *x, y* lors d'un vol stationnaire pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) 470

Figure 8.41 Mesures expérimentales avec le drone F450J des déplacements sur *x, y, z* lors d'un vol stationnaire pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) 470

Figure 8.42 Mesures expérimentales avec le drone F450J des orientations angulaires ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire pour les compensateurs : PIDϕ (bleu) ; B (rouge) 471

Figure 8.43 Commandes expérimentales avec le drone F450J en vitesse ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 envoyées au drone pour les compensateurs : PIDϕ (a) ; B (b) 472

Figure 8.44 Commandes expérimentales avec le drone F450J en couples *L, M, N* et en poussée T_z envoyées au drone pour les compensateurs : PIDϕ (a) ; B (b) 472

Figure 8.45 Mesures expérimentales avec le drone F450J des vitesses ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 venant du drone pour les compensateurs : PIDϕ (a) ; B (b) 473

Figure 8.46 Mesures expérimentales avec le drone F450J en couples *L, M, N* et en poussée T_z venant du drone pour les compensateurs : PIDϕ (a) ; B (b) 473

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

APM	Auto Pilot Mission Planners
BEC	Battery Eliminator Circuit
BF	Basse Fréquence
BP	Bande Passante
c.c.	Complètement Commandable
DSP	Puissance de Densité Spectrale
CCW	Sens de rotation anti-horaire (Counter Clock Wise)
CW	Sens de rotation horaire (Clock Wise)
DC	Courant Continu (Direct Current)
ESC	Contrôleur de vitesse électronique (Electronic Speed Controller)
GPS	Géo-positionnement par satellite (Global Positioning System)
HF	Haute Fréquence
IMU	Centrale de Mesure Inertielle (Inertial Measurement Unit)
LFT	Linear Fractional Transformation
LIPO	Lithium Polymère
LQG	Linear Quadratic Guaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
LTI	Linear Time Invariant (Linéaire Invariant dans le Temps)
MIMO	Multiple Input Multiple Output (Multi-Entrée Multi-Sortie)
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration
NP	Performance Nominale
OSD	Affichage à l'écran (On Screen Display)
PCB	Circuit imprimé (Printed Circuit Board)
PD	Proportionnel Dérivé
PID	Proportionnel Intégral Dérivé
PR	Performance Robuste
PWM	Pulse Width Modulation (MLI - Modulation à largeur d'impulsion)
QGC	QGroundControl
RC	Radio Commande
RGBD	Bleu Rouge Vert Profondeur (Red Green Blue Depth)
RTK	Cinématique Temps Réel (Real Time Kinematics)
RPM	Révolution Par Minute (Revolution Per minute)
SR	Stabilité Robuste
SISO	Système mono-entrée mono-sortie (Single Input Single Output)

SLAM	Localisation et cartographie simultanées (Simultaneous Localization and Mapping)
IAS	Vitesse de l'air indiquée (Indicated AirSpeed)
TAS	Vitesse de l'air vraie (True AirSpeed)
UAV	Unmanned Aerial Vehicle (Véhicule Aérien non-habité)
3DR	Robotique 3D (3D Robitics)

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

Positions linéaires		
ξ	Vecteur de position le long des axes *x, y, z* dans le repère inertiel F_i	m
x	Position linéaire sur l'axe *x*	m
y	Position linéaire sur l'axe *y*	m
z	Position linéaire sur l'axe *z*	m
r_{GPS}	Vecteur de position le long des axes *x, y, z* mesurée par l'accéléromètre	m
x_{GPS}	Position le long de l'axe *x* mesurée par l'accéléromètre	m
y_{GPS}	Position le long de l'axe *y* mesurée par l'accéléromètre	m
z_{GPS}	Position le long de l'axes *z* mesurée par l'accéléromètre	m
$\hat{r}$	Vecteur de position estimée le long des axes *x, y, z*	m
$\hat{x}$	Estimation de position le long de l'axe *x*	m
$\hat{y}$	Estimation de position le long de l'axe *y*	m
$\hat{z}$	Estimation de position le long de l'axe *z*	m
r_{sp}	Vecteur de consigne de position le long des axes *x, y, z* (notation PX4, $_{sp}$ = set point)	m
x_{sp}	Consigne de position le long de l'axe *x* (notation PX4)	m
y_{sp}	Consigne de position le long de l'axe *y* (notation PX4)	m
z_{sp}	Consigne de position le long de l'axes *z* (notation PX4)	m
Vitesses linéaires		**Unité**
$\dot{\xi}$	Vecteur de vitesse le long des axes *x, y, z* dans le repère inertiel F_i	m/s
v	Vecteur composé des vitesses linéaires *u, v, w* dans le repère F_i ou v_x, v_y, v_z (notation PX4) ou dans le repère F_b	m/s
u ou v_x	Vitesse linéaire sur l'axe *x* dans le repère F_b	m/s
v ou v_y	Vitesse linéaire sur l'axe *y* dans le repère F_b	m/s
w ou v_z	Vitesse linéaire sur l'axe *z* dans le repère F_b	m/s
v_h	Vecteur de vitesse horizontale dont les composantes sont v_x et v_y dans le repère F_b	m/s
$\hat{v}_h$	Estimation du vecteur de vitesse horizontale dont les composantes sont v_x et v_y dans le repère F_b	m/s
$\bar{v}$	Vecteur de vitesse linéaires en régime permanent le long des axes *x, y, z*	m/s
$\hat{v}$	Estimation du vecteur de vitesse le long des axes *x, y, z* dans le repère F_b	m/s
$\hat{v}_x$	Estimation de la vitesse le long de l'axe *x*	m/s
$\hat{v}_y$	Estimation de la vitesse le long de l'axe *y*	m/s

$\hat{v}_z$	Estimation de la vitesse le long de l'axe *z*	m/s
v_{sp}	Vecteur de consigne de vitesse le long des axes *x, y, z* (notation PX4)	m/s
v_{xsp}	Consigne de vitesse le long de l'axe *x* (notation PX4)	m/s
v_{ysp}	Consigne de vitesse le long de l'axe *y* (notation PX4)	m/s
v_{zsp}	Consigne de vitesse le long de l'axes *z* (notation PX4)	m/s
V_T	Vitesse relative de l'air	m/s

Accélérations linéaires		**Unité**
a	Vecteur d'accélération le long des axes *x, y, z* dans le repère F_b	m/s^2
a_{IMU}	Vecteur d'accélération le long des axes *x, y, z* mesuré par l'IMU dans le repère F_b	m/s^2
a_{xIMU}	Accélération le long de l'axe *x* mesurée par l'IMU dans le repère F_b	m/s^2
a_{yIMU}	Accélération le long de l'axe *y* mesurée par l'IMU dans le repère F_b	m/s^2
a_{zIMU}	Accélération le long de l'axe *z* mesurée par l'IMU dans le repère F_b	m/s^2
$\dot{v}$	Vecteur d'accélération le long des axes *x, y, z* dans le repère inertiel F_i	m/s^2
$a_h^{F_b}$	Accélération horizontale dans le repère F_b ($a_h^{F_b} = \dot{v}_h$)	m/s^2

Positions angulaires		**Unité**
η	Vecteur de position angulaire autour des axes *x, y, z* dans le repère inertiel F_i	rad
ϕ	Position angulaire autour de l'axe *x* (roulis)	rad
θ	Position angulaire autour de l'axe *y* (tangage)	rad
ψ	Position angulaire autour de l'axe *z* (lacet)	rad
$\hat{\phi}$	Estimation de la position angulaire autour de l'axe *x*	rad
$\hat{\theta}$	Estimation de la position angulaire autour de l'axe *y*	rad
ϕ_{sp}	Consigne de position angulaire autour de l'axe *x* (notation PX4)	rad
θ_{sp}	Consigne de position angulaire autour de l'axe *y* (notation PX4)	rad
ψ_{sp}	Consigne de position angulaire autour de l'axes *z* (notation PX4)	rad

Vitesses angulaires		**Unité**
$\dot{\eta}$	Vecteur de vitesse angulaire composé de $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ dans le repère F_i	rad/s
$\dot{\phi}$	Vitesse angulaire autour de l'axe *x* dans le repère F_i	rad/s
$\dot{\theta}$	Vitesse angulaire autour de l'axe *y* dans le repère F_i	rad/s
$\dot{\psi}$	Vitesse angulaire autour de l'axe *z* dans le repère F_i	rad/s
Ω	Vecteur de vitesse angulaire composé de *p, q, r* dans le repère F_b	rad/s
p	Vitesse angulaire autour de l'axe *x* dans le repère F_b	rad/s
q	Vitesse angulaire autour de l'axe *y* dans le repère F_b	rad/s
r	Vitesse angulaire autour de l'axe *z* dans le repère F_b	rad/s

$\widehat{\Omega}$	Estimation du vecteur de vitesse angulaire autour des axes *x, y, z*	rad/s
$\widehat{\eta}$	Estimation de l'attitude attitude	rad/s
Ω_{IMU}	Vecteur de vitesse angulaire autour des axes *x, y, z* mesuré par l'IMU dans le repère F_b	rad/s
Ω_{xIMU}	Vitesse angulaire autour de l'axe *x* mesurée par l'IMU dans le repère F_b	rad/s
Ω_{yIMU}	Vitesse angulaire autour de l'axe *y* mesurée par l'IMU dans le repère F_b	rad/s
Ω_{zIMU}	Vitesse angulaire autour de l'axe *z* mesurée par l'IMU dans le repère F_b	rad/s
$\widehat{\omega}^b$	Estimation de la vitesse angulaire autour des axes *x, y* dans le repère inertiel F_i	rad/s
$\hat{\dot{\phi}}^b$	Vitesse angulaire estimée autour de l'axe *x* dans le repère inertiel	rad/s
$\hat{\dot{\theta}}^b$	Vitesse angulaire estimée autour de l'axe *y* dans le repère inertiel	rad/s
$\dot{\phi}_{sp}$	Consigne de vitesse angulaire autour de l'axe *x* (notation PX4)	rad/s
$\dot{\theta}_{sp}$	Consigne de vitesse angulaire autour de l'axe *y* (notation PX4)	rad/s
$\dot{\psi}_{sp}$	Consigne de vitesse angulaire autour de l'axe *z* (notation PX4)	rad/s
$\dot{\Psi}_{sp}^b$	Vecteur de consigne de vitesse angulaire autour des axes *x, y, z* dans le repère inertiel (notation PX4)	rad/s
$\dot{\phi}_{sp}^b$	Consigne de vitesse angulaire autour de l'axe *x* dans le repère inertiel (notation PX4)	rad/s
$\dot{\theta}_{sp}^b$	Consigne de vitesse angulaire autour de l'axe *y* dans le repère inertiel (notation PX4)	rad/s
$\dot{\psi}_{sp}^b$	Consigne de vitesse angulaire autour de l'axe *z* dans le repère inertiel (notation PX4)	rad/s

Accélérations angulaires		**Unité**
$\dot{\omega}_{sp}^b$	Vecteur de consigne d'accélération angulaire autour des axes *x, y, z* dans le repère inertiel F_i (notation PX4)	rad/s^2

Erreurs		**Unité**
Δr	Vecteur d'erreur de position linéaire le long des axes *x, y, z* (notation PX4)	m
Δx	Erreur de position linéaire le long de l'axe *x* (notation PX4)	m
Δy	Erreur de position linéaire le long de l'axe *y* (notation PX4)	m
Δz	Erreur de position linéaire le long de l'axe *z* (notation PX4)	m
Δv	Vecteur d'erreur de vitesse linéaire le long des axes *x, y, z* (notation PX4)	m
Δv_x	Erreur de vitesse linéaire le long de l'axe *x* (notation PX4)	m
Δv_y	Erreur de vitesse linéaire le long de l'axe *y* (notation PX4)	m
Δv_z	Erreur de vitesse linéaire le long de l'axe *z* (notation PX4)	m

Couples / Forces		**Unité**
L	Couple autour de ϕ (peut être également un signal de commande)	Nm

M	Couple autour de θ (peut être également un signal de commande)	Nm
N	Couple autour de ψ (peut être également un signal de commande)	Nm
τ_i	Couple du moteur i	Nm
D	Matrice de traînée induite	N
d_x	Trainée induite le long de l'axe x	N
d_y	Trainée induite le long de l'axe y	N
f_i	Poussée du moteur i	N
F_{ext}	Vecteur de force externe appliqué au drone le long des axes x, y, z	N
T	Poussée d'un moteur + hélice	N
T_z	Poussée de vol stationnaire du drone le long de l'axe z (peut être également un signal de commande)	N

Signaux de commandes		**Unité**
u_x	Commande linéaire pour un déplacement sur l'axe x	
u_y	Commande linéaire pour un déplacement sur l'axe y	
u_z	Commande linéaire pour un déplacement sur l'axe z	
u_ψ	Commande linéaire pour un déplacement sur l'axe ψ	
u	Vecteur de commande en sortie du contrôleur de vitesse angulaire autour des axes x, y, z (notation PX4)	Nm
u_1	Commande en sortie du contrôleur de vitesse angulaire autour de l'axe x (notation PX4)	Nm
u_2	Commande en sortie du contrôleur de vitesse angulaire autour de l'axe y (notation PX4)	Nm
u_3	Commande en sortie du contrôleur de vitesse angulaire autour de l'axe z (notation PX4)	Nm
PWM	Vecteur de signal de commande PWM en entrée des ESC 1 à 4 du drone (notation PX4)	
PWM_1	Signal de commande PWM en entrée de l'ESC 1 du drone (notation PX4)	
PWM_2	Signal de commande PWM en entrée de l'ESC 2 du drone (notation PX4)	
PWM_3	Signal de commande PWM en entrée de l'ESC 3 du drone (notation PX4)	
PWM_4	Signal de commande PWM en entrée de l'ESC 4 du drone (notation PX4)	

Vitesse de rotation des moteurs		**Unité**
ω_i	Vitesse de rotation du moteur i	rad/s
ω_0	Vitesse de rotation pour chaque moteur lors d'un vol stationnaire ($\omega_i = \omega_0$)	rad/s
$\Delta\omega_0$	Variation de la vitesse de rotation d'un moteur soumis à des incertitudes de modélisation	rad/s

ω	Vecteur de vitesse de rotation des moteurs 1 à 4	rad/s
ω_i	Vitesse de rotation du moteur *i*	rad/s
Biais et bruits/perturbations de mesure		**Unité**
B_m	Perturbation magnétique local du magnétomètre	T
$\hat{b}$	Biais de mesure estimée	
b	Biais de mesure	
b_a	Biais de mesure de l'accéléromètre	rad/s^2
b_Ω	Biais de mesure du gyroscope	m/s^2
Paramètres constants reliés à la modélisation du drone		**Unité**
A_{ii}	Coefficient de frottement sur l'axe *i*	
b_i	Bras du drone *i*	
f_i	Poussée du moteur *i*	N
g	Constante de gravitation	m/s^2
I_{ii}	Inertie autour de l'axe *i*	kg/m^2
l	Longueur d'un bras du drone ou corde de l'hélice	m
L	Deux fois la longueur d'un bras du drone	m
m	Poids du drone	kg
m_d	Masse du drone à vide (sans la batterie)	kg
m_b	Masse de la batterie	kg
M_i	Moteur *i*	
P_p	Force de puissance	W
Δm	Incertitude de la mesure de la masse *m*	kg
ρ	Densité de l'air	kg/m^3
Représentation d'état		
A	Matrice d'évolution du système	
B	Matrice reliant le vecteur d'état X à l'entrée U	
C	Matrice reliant le vecteur de sortie Y au vecteur d'état X	
U	Vecteur d'entrée	
X	Vecteur d'état	
Y	Vecteur de sortie	
Matrices		
$\mathbb{P}_h$	Matrice de projection sur les axes horizontaux *x, y*	
R_E	Matrice d'attitude estimée par un système de mesure externe	
R_η	Matrice d'attitude	
W_η	Matrice de passage des variables angulaire du repère F_i au repère F_b	

Fonctions de transferts	
C	Compensateur
FF	Filtre anticipatif
J	Boucle ouverte
J_1	Passe bas de haut gain pour la construction de C_B
J_2	Lead lag pour la construction de C_B
J_3	Passe bas en haute fréquence pour la construction de C_B
H	Matrice intermédiaire utilisée pour la construction de C_B
K	Compensateur H infini
P	Processus
ΔP	Variation du processus soumis à des incertitudes
S	Sensibilité du système
S'	Sensibilité avec incertitude
S_{11B}	Sensibilité sur l'axe z pour le compensateur B
$S_{11\infty}$	Sensibilité sur l'axe z pour le compensateur H_{inf}
T	Transmission du système
T'	Transmission avec incertitude
T_{11B}	Transmission sur l'axe z pour le compensateur B
$T_{11\infty}$	Transmission sur l'axe z pour le compensateur H_{inf}
W_e	Fonction de pondération sur le signal d'erreur $e(t)$
W_u	Fonction de pondération sur le signal de commande $u(t)$
Fonction de transfert des compensateurs	
C_θ	Fonction de transfert du compensateur B pour la commande de l'angle θ
$PID_{\dot{\phi}}$	Fonction de transfert pour la commande de la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ du compensateur PID
$PID_{\dot{\theta}}$	Fonction de transfert pour la commande de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du compensateur PID
$P_\theta(s)$	Fonction de transfert du processus pour l'angle θ
Paramètres des fonctions de transfert	
c	Gain de H
c_1	Gain arbitraire
k	Ordre de la fonction de transfert J_3
k_1	Gain utilisé pour la construction de J_1
K_p	Gain proportionnel
K_i	Gain intégral
K_d	Gain dérivé

M_s	Valeur maximum de la sensibilité pour toutes les fréquences	
M_t	Valeur maximum de la transmission pour toutes les fréquences	
M_u	Maximum de W_u	
p_i	Pôle utilisé pour la construction de J_2	
q	Ordre de H	
s	Variable de Laplace	
s_0	Zéro de H	
z_i	Zéro utilisé pour la construction de J_2	
ε	Valeur maximum de la sensibilité en basse fréquence	
ε_1	Valeur maximum de W_u en haute fréquence	
ω	Fréquence en radians	
ω_1	Fréquence utilisée pour la construction de J_1	
ω_1	Limite de la bande fréquentielle d'intérêt	
ω_{2i}	Fréquence utilisée pour la construction de J_3	
ω_b	Bande passante de la boucle fermée $T(s)$	
ω_c	Bande passante de la boucle ouverte $J(s)$	
ω_{bc}	Bande passante du compensateur	
Hélices		
A	Aire de la surface du disque décrit par l'hélice	m^2
A_{flap}	Coefficient décrivant l'influence du battement des hélices	
C_D	Coefficient dépendant de la géométrie de l'hélice et des conditions aéronautiques	
C_Q	Coefficient de couple	
Cp	Coefficient de puissance	
C_T	Coefficient de portance	
df	Force de poussée élémentaire sur une pale d'hélice	
dD	Trainée élémentaire sur une pale d'hélice	
F_h	Référentiel attaché à l'hélice	
k	Coefficient de portance des hélices	
Δk	Variation du coefficient de portance en cas d'incertitudes	
r	Rayon de l'hélice	m
R	Longueur totale de l'hélice	m
V_0	Composantes verticales de la vitesse locale de l'hélice	m/s
V_1	Vitesse locale de l'hélice	m/s
V_2	Composantes horizontales de la vitesse locale de l'hélice	m/s
x_h	Vitesse d'un élément infiniment petit dr le long de l'axe de l'hélice	m

α	Angle d'incidence d'une hélice	°
τ_a	Couple résistant dû à la trainée de l'hélice	Nm

Unité de mesure (SI – Système international d'unité, principalement extrait de (BIPM, 2006))

Symbole	**Nom de l'unité**	**Unité**
A	Ampère	A
g	Gramme	g
G	Gauss	G
Hz	Hertz	Hz
in	Pouce (inch)	in
kg	Kilogramme	kg
kv	Nombre de révolutions par minute pour un volt appliqué à l'entrée du moteur	kv
m	Mètre	m
mAh	milliampère-heure	*mAh*
ms	Milliseconde	ms
N	Newton	N
s	Seconde	s
T	Tesla	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
V	Volt	V
W	Watt	W
°	Degré (angle plan)	°

Métrique		**unité**
Paramètres temporel		
e_s	Erreur statique	
t_s	Temps d'établissement	s
t_r	Temps de montée	s
D	Dépassement	%
ϕ_{max}	Maximum de l'angle ϕ	[rad]
θ_{max}	Maximum de l'angle θ	[rad]
t_ϕ	Temps d'établissement de la réponse temporel sur l'angle ϕ	[s]
t_θ	Temps d'établissement de la réponse temporel sur l'angle ϕ	[s]
Autre		
b'	Variance	
C	Taux de décharge	A
H_2	Espace H_2 avec norme $\|\bullet\|_2$	
H_∞	Norme H_∞ avec norme $\|\bullet\|_\infty$ ou $\|\bullet\|$	

F_b	Référentiel attaché au drone (repère de la base du drone)	
F_i	Référentiel terrestre (repère inertiel)	
k_a	Gain de l'observateur d'attitude	
k_b	Gain de l'observateur d'attitude	
k_E	Gain de l'observateur d'attitude	
k_m	Gain de l'observateur d'attitude	
k_w	Gain pour ajuster la fréquence de coupure de l'estimateur d'accélération	
l_3	(= $[0\ 0\ 1]^T$) Vecteur qui extrait la composante le long de l'axe z	
moy_i	Moyenne du signal sur l'axe i	
U	Tension	V
U_{vw}	Tension située entre les bornes v et w de l'ESC	V
v_h	Tension maximum du signal PWM	V
T	Période du signal PWM	s
σ_i	Écart type du signal sur l'axe i	
α	Rapport cyclique	

INTRODUCTION

L'amélioration constante de la vitesse de calcul de l'électronique permet de mettre en œuvre des algorithmes de commande de plus en plus performants. La commande B brevetée par le professeur Bensoussan (Bensoussan, 2014) met à profit cette vitesse de calcul plus rapide pour allier une réponse temporelle plus rapide par rapport à celle des autres commandes et plus précise avec des objectifs de stabilité et de robustesse. Elle a prouvé son efficacité par des simulations relatives à la commande du bras de lecture d'un disque dur puis une validation expérimentale sur un système de lévitation magnétique dans les laboratoires de l'université McGill (Bensoussan, 2015). Ces deux applications ont abouti à d'excellents résultats simultanément dans les domaines temporel (précision, rapidité) et fréquentiel (stabilité, robustesse). Pour confirmer le potentiel de cet algorithme, la prochaine étape abordée dans cette thèse est de le développer pour un système multivariable plus complexe. Ainsi les problématiques reliées aux quadricoptères qui seront développées dans la prochaine section, apparaissent comme pertinentes pour tester la faisabilité de la commande B dans un contexte multivariable.

0.1 Problématique

Les problèmes des algorithmes de commande conventionnels sont multiples : difficulté à maintenir une poursuite rapide et fidèle de l'entrée sans les effets secondaires (dépassement, oscillation, erreur statique …) tout en respectant des objectifs de robustesse. Dans le cas des systèmes multivariables, ces algorithmes ne parviennent pas à décentraliser efficacement les entrées et sorties. Dit autrement, l'entrée n n'influence pas uniquement la sortie n, mais également les autres sorties $\{n\text{-}1, n\text{-}2 \dots 1\}$. Cette problématique de couplage entre les entrées et les sorties est particulièrement visible dans le cas des drones de type quadricoptères. Ainsi un déplacement le long de l'axe x ne correspond pas exclusivement à un déplacement le long de l'axe x, mais affecte dans une moindre mesure la réaction autour de l'angle ϕ et les déplacements le long de l'axe y. À ces difficultés s'ajoutent d'autres sources potentielles d'instabilités telles que les vibrations mécaniques générées par les mouvements de rotation des

hélices dans l'air et celles des perturbations externes (vent par exemple). De plus, ce type d'appareil est soumis à de nombreuses incertitudes concernant les paramètres du modèle du quadricoptère, des mesures imprécises (Emran et al., 2015), ainsi que la présence de dérivation sur ses nombreux capteurs (gyroscope, accéléromètre, baromètre, magnétomètre et GPS) (Lim et al., 2012) nécessaires pour diriger le drone à distance dans les trois dimensions. La minimisation de la consommation d'énergie par le compensateur est également source de défis (M.Elloumi, 2017) puisque la durée des batteries est limitée.

0.2 Objectifs

Les principaux objectifs de cette thèse peuvent se résumer comme suit :

- Proposer une nouvelle méthode de commande linéaire MIMO (multivariable – Multiple Inputs Multiple Outputs) performante (la commande B) permettant d'atteindre simultanément des objectifs de performance temporelle et fréquentielle ;
- Exposer deux méthodes de conception de la commande B. La première méthode utilisera des algorithmes développés sous le logiciel Matlab permettant de minimiser le temps de stabilisation. La seconde méthode graphique utilisant le logiciel Geogebra tiendra en plus compte d'un maximum du signal de commande à ne pas dépasser ;
- Étendre les résultats de la commande B au domaine multivariable à partir de ceux déjà obtenus dans le domaine monovariable. Un premier système linéaire 2×2 instable servira d'objet d'étude pour tester la capacité de la commande B à diagonaliser la transmission et ainsi minimiser l'effet des couplages entre les entrées et les sorties. Ce premier résultat permettra d'appréhender d'éventuelles améliorations quant à la minimisation des couplages du quadricoptère, qui correspond à un système non linéaire 4×4 plus complexe;
- Les commandes de référence de type PID, H_2, H_∞ et μ seront développées pour comparer leurs performances avec celles de la commande B. Cela permettra de situer les performances de la commande B dans le domaine des commandes linéaires ;
- Couramment utilisées dans le domaine des drones, les commandes backstepping et hiérarchique nous serviront de point de référence. Notamment concernant la réalisabilité de l'amplitude des angles qui doivent rester suffisamment petits pour éviter le décrochage

de l'appareil et de l'amplitude des signaux de commandes pour éviter la saturation de la boucle de commande.

- Évaluer sous Matlab les performances des commandes PID, H_2, H_∞, μ synthèse, B, backstepping et hiérarchique dans l'ensemble des domaines, c.-à-d. :
  - Fréquentiel (bande passante, maximum de transmission et de sensibilité, etc.) ;
  - Temporel (dépassement, oscillation, rapidité, précision, couplages, etc.),
  - Robustesse (en présence de perturbation, incertitude, retard, etc.)
  - Consommation d'énergie.

- Les résultats de simulation sur le modèle du drone visent à confirmer quelle commande obtient les meilleurs performances de postitionnement en terme de :
  - Rapidité ;
  - Précision ;
  - Robustesse ;
  - Stabilité ;
  - Minimisation de la consommation d'énergie (si possible).

- Appliquer la commande B expérimentalement sur un drone réel pour confirmer son applicabilité.

0.3 Méthodologie

La méthodologie suivie au cours de cette thèse peut être résumée comme suit :

- Modélisation de la dynamique du drone ;
- Énoncé du théorème de la commande B dans le cas multivariable
- Conception de la commande B pour un système multivariable 2×2 instable, puis sur le quadricoptère ;
- Conception des compensateurs linéaires de référence H_2, H_∞, μ-synthèse et PID pour le quadricoptère ;
- Conception des commandes non linéaires backstepping et hiérarchique ;

- Simulation de la dynamique du drone appliquée aux commandes B, H_2, H_∞, μ-synthèse, PID backstepping et hiérarchique. L'ensemble des dimensions fréquentiel, temporel, robustesse et de consommation d'énergie devant être abordées ;
- Construction d'un quadricoptère basé sur la technologie PX4 ;
- Réalisation de tests expérimentaux.

0.4 Contributions scientifiques et techniques

Les contributions scientifiques de cette thèse se situent sur plusieurs niveaux : théorique ; simulation ; expérimentale.

1. Énoncé du théorème de la commande B pour des systèmes multivariables ;
2. La thèse infirmée par (Wang & Davison, 1973) indique qu'il est impossible de stabiliser un système multivariable instable avec un retour diagonal. Cette stabilisation s'avère possible à condition que le système soit à dominance diagonale en hautes fréquences.
3. Tel qu'énoncé principalement dans (Bensoussan, 2015), (Houimdi, 2015) et (Yulan et al., 2015) la commande B permet de générer un compensateur performant en termes de rapidité, précision, stabilité et de robustesse des variables contrôlées tout en présentant les avantages suivants :

- Un faible ordre de la fonction de transfert du compensateur. Facilitant son implémentation dans une puce électronique ;
- L'obtention facile et rapide des paramètres du compensateur. Notamment relativement à d'autres commandes linéaires performantes telles que H_2, H_∞ et μ-synthèse ;
- Lorsque les paramètres du compensateur sont obtenus, il est possible de réappliquer ces mêmes paramètres pour des processus similaires tout en conservant le même niveau de performance. Ce qui n'est pas le cas des compensateurs H_2, H_∞, μ-synthèse et PID ;
- La courbe d'apprentissage pour maîtriser la conception d'un compensateur B est rapide et intuitive ;
- La version multivariable de la commande B consiste en un compensateur diagonal. Simplifiant alors sa conception, son implémentation dans un microcontrôleur tout en réduisant le temps de calcul.

4. Une première méthode d'obtention des paramètres du compensateur B via des algorithmes pour minimiser le temps d'établissement (et par extension la réponse fréquentielle) est proposée ;
5. Une seconde méthode graphique utilisant le logiciel Geogebra, tenant compte du maximum du signal de commande est évoquée ;
6. La commande B a démontré en simulation sur un système 2×2 instable sa capacité à décentraliser un système MIMO simultanément dans les domaines temporel et fréquentiel. Alors que jusqu'à présent ces résultats n'étaient qu'en fréquence (Zames et al., 1983) ;
7. La thèse synthétise la commande B dans le paysage de la commande robuste en comparant les performances fréquentielles, temporelles, de robustesses et de consommation d'énergie. Les résultats de simulations montrent pour des hypothèses similaires que la commande B présente des avantages du point de vue de la vitesse de réponse temporelle et de la précision de la commande ;
8. Une approche de conception de la commande B pour l'implémenter dans un drone réel à partir d'un contrôleur PID du manufacturier est proposée.
9. La commande B a été validé expérimentalement en la comparant lors d'un vol stationnaire à la commande PID du manufacturier.

Cette thèse se divise en huit Chapitres :

Le **Chapitre 1** est une revue de littérature permettant de passer en revue les différents types de drones. Plusieurs commandes que l'on retrouve dans le domaine des drones ainsi que différentes méthodes pour tester leurs performances y sont abordées.

Le **Chapitre 2** est une introduction à la commande. Cette section vise à définir les principales notations utilisées dans cette thèse ainsi que les métriques utilisées pour évaluer les performances des algorithmes de commandes.

Le **Chapitre 3** propose une modélisation du quadricoptère par les équations de Newton. C'est également l'opportunité de définir les différentes structures de commande utilisées dans cet ouvrage.

Le **Chapitre 4** détaille les fondements théoriques de la commande B pour des systèmes linéaires monovariables, multivariable pour les processus stables, puis instables. La construction du compensateur B suivant une approche d'optimisation du temps d'établissement (et par extension fréquentielle) est proposée sur un système multivariable 2×2 instables (David Bensoussan & Brossard, 2017). Enfin, une application au quadricoptère est détaillée.

Le **Chapitre 5** étaye dans un premier temps la méthodologie générale pour concevoir les compensateurs linéaires H_2, H_∞ et μ synthèse, puis une application à un quadricoptère est réalisée. À titre de référence l'application d'un compensateur PID à un quadricoptère est également réalisée.

Le **Chapitre 6** formule l'application des commandes non linéaires backstepping et hiérarchique. Ces deux commandes fréquemment utilisées dans le domaine des drones fournissent un point de comparaison fiable pour évaluer les performances des commandes linéaires conçues aux chapitres 4 et 5. Notamment concernant de potentiels décrochages du drone ou de saturation des actionneurs.

Le **Chapitre 7** a pour principal objectif de situer les performances de la commande B relativement aux autres commandes linéaires de références : H_2, H_∞, μ-synthèse et PID. Les commandes non linéaires backstepping et hiérarchique servant de référence de comparaison dans le domaine des drones. Une méthodologie est alors proposée pour évaluer les performances d'un algorithme de commande dans l'ensemble des dimensions. Ainsi, les domaines suivants sont évalués :

- Fréquentiel (Bande passante, amplification des bruits de commandes …) ;
- Temporel (Précision, rapidité, dépassement …) ;
- Robustesse (Évaluation de la stabilité en présence perturbation) ;
- Consommation d'énergie.

Le **Chapitre 8** concernant les résultats expérimentaux commence par étayer le fonctionnement et le dimensionnement d'un drone reposant sur la technologie PX4. Il s'ensuit une méthode

proposée pour valider son bon fonctionnement. Puis, une application de la commande B sur un drone réel utilisant la technologie PX4 est exposée. Cette section permet de confirmer l'applicabilité de la commande B sur un drone réel. Elle permet également de constater lors d'un vol stationnaire une diminution de la nervosité du drone sur les axes horizontaux et de l'amplitude des signaux de commandes avec la commande B relativement à une commande PID.

Nous terminons cette thèse par une conclusion générale concernant les résultats obtenus, des recommandations sur les améliorations possibles et les perspectives futures de recherches.

CHAPITRE 1

REVUE CRITIQUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre sera divisé en deux parties. La première partie a pour objectif de définir des généralités sur les drones également dénommés UAV (Unmanned Aerial Vehicle). En premier lieu une brève histoire de la technologie des drones sera rappelée avant d'aborder les différentes configurations de drones en fonction de leur nombre d'hélices. Notre attention se portera ensuite sur des exemples d'applications de lois de commande reliées au drone de type quadricoptère qui est l'objet principal de cette thèse. Les principaux projets de recherche en cours reliés à la technologie des quadricoptères seront abordés. Cette première partie se terminera en évoquant quelques outils utilisés actuellement pour évaluer les performances des quadricoptères.

La deuxième partie portera sur la notion de commande en général. Plusieurs commandes seront définies selon le type d'optimisation visée : optimisation des performances temporelles ; optimisation des performances fréquentielles ; minimisation de l'énergie investie ; optimisation simultanée des performances temporelles et fréquentielles.

1.1 Les drones

1.1.1 Brève histoire du drone

Le concept de drone est issu du contexte militaire de la Première Guerre mondiale. Le premier projet de drone (qui n'a jamais été appliqué en situation de combat) remonte à 1916 avec un projet "d'avion-torpille", le Kettering Burg dont l'objectif était de frapper une cible aérienne à une distance de 180 km. Un second projet "d'avion-cible" destiné à l'entraînement militaire nommé "aerial target" a pris naissance en 1916 au Royaume-Uni.

Ce n'est que dans les années 1930 que la notion de drone apparaît véritablement au Royaume-Uni. Le terme « drone » désigne le faux bourdon (le mâle de l'abeille) à cause du vol lent et bruyant réalisé par l'avion sans-pilote DH.82 Queen Bee.

L'utilisation des drones par les Américains lors de la guerre froide (principalement pour des missions de reconnaissance et la distribution de tracts à des fins de propagande) a permis un essor important de cette technologie.

Les avantages militaires des drones sont évidents. Ils minimisent l'investissement humain et offrent une précision de tir appréciable. La politique visant à minimiser les victimes dans les années 1990 conduit au développement de drone armé. Leur utilisation a notamment été faite par l'Iran contre l'Irak avec le drone Mohajer-1 muni de six lance-missiles RPG-7.

Depuis quelques années, l'utilisation des drones dans le secteur civil connaît une forte croissance. En effet, leur capacité à effectuer des trajectoires de vols complexes, des atterrissages et décollages verticaux, leur simplicité mécanique, leur faible coût relatif aux appareils contenant un équipage et l'absence de pilote offrent de nombreuses possibilités pour les professionnels ou les particuliers.

1.1.2 Configuration aérodynamique

Dans cette section nous allons exposer succinctement différentes configurations de drones à hélices selon le nombre de rotors qu'ils possèdent : monorotors ; birotors ; trirotors ; quadrirotors ; hexarotors ; octorotor. Nous nous limiterons aux aéronefs capables de réaliser un vol stationnaire, de décoller et atterrir verticalement.

1.1.2.1 Monorotors

La configuration la plus simple mécaniquement est celle avec un seul rotor tel que le monospinner représentée à la Figure 1.1. Bien que fonctionnel, ce type d'appareil reste difficile

à contrôler en raison des nombreux retours de mesures nécessaires à la commande et de la rotation asymétrique autour de son axe de rotation. Il est donc difficile d'en tirer un usage particulier comme de la photo ou de l'inspection.

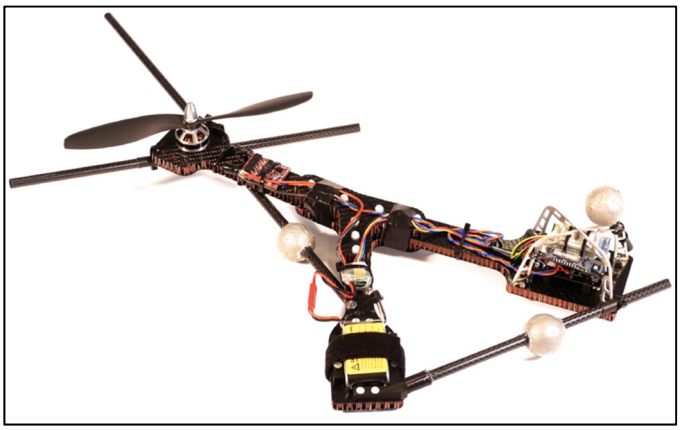


Figure 1.1 Drone mono-rotor : le Monospinner
Tirée de Weixuan Zhang (2016)

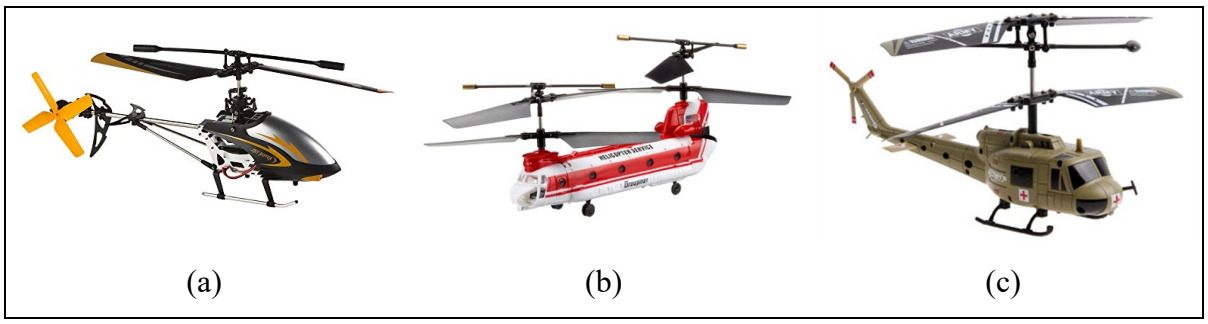
Néanmoins ce concept reste une bonne preuve de faisabilité et une belle prouesse d'ingénierie.

1.1.2.2 Birotors

Cette section distingue les hélicoptères selon les trois catégories illustrées à la Figure 1.2 : classique ; tandem ; coaxial. Le plus répandu est celui de type classique. Son rotor principal fournit la poussée pour élever l'appareil dans les airs. Il permet de diriger l'hélicoptère verticalement, longitudinalement (avant/arrière) et latéralement. Le rotor de queue permet de contrer le couple induit par le rotor principal qui tend à faire tourner l'appareil sur lui-même.

Les hélicoptères de type tandem et coaxial utilisent le concept des rotors contrarotatifs. Celui en tandem possède deux rotors utilisés pour la poussée, un à l'avant et un à l'arrière tournant en contresens et sur des axes différents (mais parallèles). L'hélicoptère coaxial possède également deux moteurs nécessaires pour générer la poussée, mais tournant sur des axes orientés avec une différence de 90°. Cette dernière configuration est la plus complexe, mais

elle permet de réduire l'encombrement lié aux rotors et assure une meilleure stabilité en vol stationnaire ou en basse vitesse.



(a) (b) (c)

Figure 1.2 Hélicoptère en configuration : Classique (a) ; Tandem (b) ; Coaxial (c)

1.1.2.3 Trirotors

Un trirotors a deux rotors qui tournent dans des directions opposées permettant d'éliminer les couples induits. Ces deux moteurs fonctionnent de manière indépendante et permettent de générer une rotation selon l'axe de roulis ou de tangage ainsi que la poussée principale. Une rotation autour de l'axe de lacet est obtenue en variant la vitesse angulaire du rotor de queue.



Figure 1.3 Exemple de Trirotor

Parmi les avantages de cette solution, on retrouve : son agilité ; sa rotation rapide autour de l'axe de lacet ; son coût peu élevé et facile à transporter grâce aux bras pliables et enfin sa relativement faible consommation.

Cependant ses inconvénients sont assez majeurs : il n'y a aucune redondance des moteurs, si un moteur arrête de fonctionner la chute est assurée ; sa faible robustesse et faible stabilité.

1.1.2.4 Quadricoptère

Le quadrirotor ou quadricoptère est muni de quatre bras dont la configuration est en "croix" (x) où en "plus" (+). Cet UAV généralement petit possède deux moteurs tournants dans un sens et deux autres dans l'autre sens. Ainsi, il est capable de faire varier sa poussée et pivoter autour de ses trois axes de : roulis, tangage et lacet. Sa conception mécanique est simple et il possède une grande agilité lui permettant de suivre des trajectoires agressives. De plus, son nombre suffisant de rotors lui permet d'effectuer un atterrissage d'urgence si l'un d'entre eux venait à se briser en vol. Ses bonnes performances et son coût peu onéreux en font un appareil qui est de plus en plus utilisé dans de nombreux domaines militaires ou civils.

Ses principaux points faibles résident dans sa difficulté : à suivre une trajectoire précise ; conserver sa stabilité en vol stationnaire et sa consommation importante.



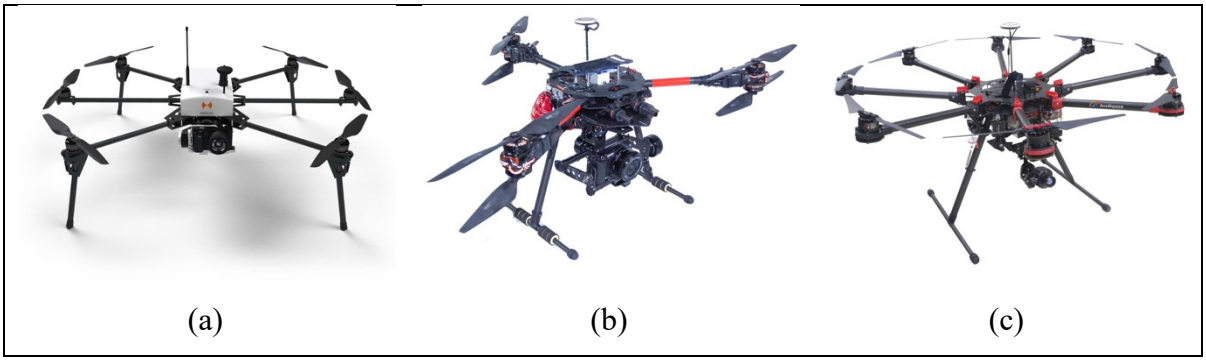
Figure 1.4 Quadricopère Phantom 3 de la compagnie DJI

1.1.2.5 Hexarotors et octorotors

Grâce à leur nombre important de rotors, les hexarotors (six moteurs) et les octorotors (huit moteurs), possèdent une meilleure stabilité relativement aux modèles de drone en possédant un nombre inférieur. De plus, la redondance des moteurs est un atout important permettant de finir une mission de vol de façon sécuritaire même si un des moteurs vient à être défectueux.

Ce qui est particulièrement avantageux lorsque la mission consiste par exemple à transporter une caméra dont le coût peut être très élevé.

Parmi les inconvénients : l'ajout de moteurs tend à augmenter le prix du drone ; son poids important une diminue sa durée de vol et une plus grande difficulté à le transporter.



(a) (b) (c)

Figure 1.5 Deux configurations possibles d'hexarotors (a) - (b) et un octorotors (c)

1.1.3 Exemples d'application du quadricoptère

L'amélioration au cours des dix dernières années de l'efficience des capteurs, des capacités de stockage d'énergie et de la vitesse de traitement des données s'est accompagnée d'une nette amélioration des performances des drones de type quadricoptère dans des domaines variés relevant du civil et du militaire (Montiel-Varela) (Bouabdallah, Noth et Siegwart, 2004). Par définition, un quadricoptère est un hélicoptère multirotors muni de quatre bras, chacun d'eux pourvu d'un moteur (noté de m_1 à m_4, à la Figure 1.6) et d'une hélice à son extrémité. Le corps de ce type de drone est composé des parties électriques nécessaires à la commande des moteurs et au système de communication avec télécommande à partir de laquelle l'opérateur donne la consigne de position pour déplacer le drone dans les 3 dimensions.

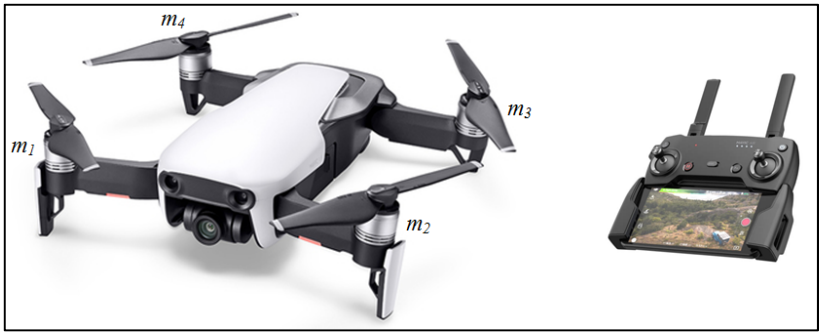


Figure 1.6 Drone Mavic Air de chez DJI et sa radiocommande Tirée de DJI (2018)

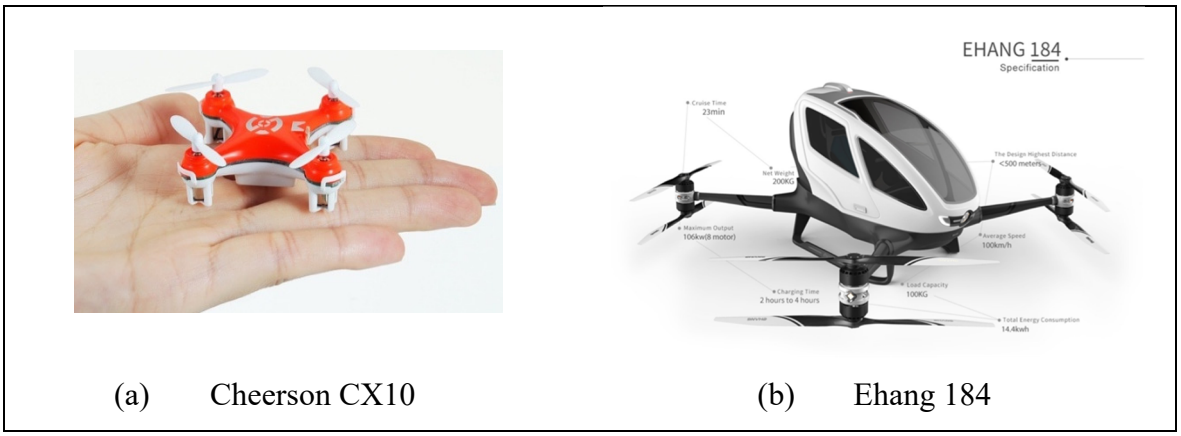
Cette commande peut également être transmise au drone à partir d'une série de consignes définies au préalable par une station au sol utilisant un logiciel sur ordinateur tel que le logiciel "open source" QGroundControl (QGroundControl, 2018) où APM Planner (Auto Pilot Mission Planner) (Planner, 2018). Un exemple de trajectoire de consigne définie avec le logiciel QGC est représenté à la Figure 1.7.



Figure 1.7 Exemple de trajectoire prédéfinie sur QGC

Possédant une conception mécaniquement simple, ce type d'appareil (Bolandi, 2013) présente de nombreux avantages : il peut soulever de lourdes charges relativement à sa masse ; il a une bonne maniabilité ce qui est un avantage pour des vols stationnaires ; il peut décoller/atterrir verticalement et évoluer dans des espaces restreints (Nemati et Kumar, 2014) ; enfin, il est capable de réaliser des manœuvres agressives (Bolandi, 2013).

Les dimensions et les capacités d'un quadricoptère sont très variées. Comme le montre la Figure 1.8, un des plus petits modèles le Cheerson CX10 tient dans la main, pèse seulement 12,3 g et sa batterie dure moins de 5 min. Tandis qu'un des modèles les plus grands comme le drone taxi Ehang 184[1] pèse 200 kg à vide et est capable de transporter une personne pesant jusqu'à 100 kg à 100 km/h pendant 24 min.



(a) Cheerson CX10 (b) Ehang 184

Figure 1.8 Mini drone Cheerson CX10 (a) et drone taxi Ehang 184 (b) Tirées de wirewireweb (2018) et McNabb (2016)

Ainsi les quadricoptères offrent des performances très variées et la diversité de leurs applications dans le secteur civil d'un point de vue professionnel ou récréatif ne cesse d'augmenter. Par exemple :

- **Surveillance** : Le pilotage automatique des drones est très pratique pour surveiller des zones telles que les chantiers, les secteurs résidentiels et le transport de matière dangereuse (Nemati et Kumar, 2014) …

[1] En réalité le drone Ehang est octocoptère, mais sa constitution est très semblable à un quadricoptère



Figure 1.9 Drone effectuant la surveillance d'oléoduc
Tirée de JD (2015)

- **Inspection** : Les drones sont très utilisés dans le secteur industriel pour faire de l'inspection d'infrastructure tels les barrages, les lignes électriques, les plantations (recueillir l'état de santé des plantes), les relevés de terrain (évaluation de l'étendue des dégâts suite à un tremblement de terre par exemple) et la représentation 3D de site archéologique …



Figure 1.10 Drone inspectant une ligne électrique
Tirée de Hydro-Québec (2017)

- **Intervention d'urgence :** La rapidité, la maniabilité et le pilotage à distance sont des atouts majeurs pour effectuer des mesures d'urgence telles que la localisation de personne disparue suite à une avalanche ou en égarement dans la nature … (Nemati et Kumar, 2014).



Figure 1.11 Recherche de personnes perdues dans une avalanche

Tirée de Abrahamsen (2015)

- **Transport de matériel** : Les atouts évoqués au point précédent sont également utiles pour transporter du matériel médical en urgence (défibrillateur) ou dans des régions escarpées difficiles d'accès ainsi que pour éviter la propagation d'épidémie en évitant le contact entre humains …



Figure 1.12 Drone transportant rapidement un défibrillateur en cas de crise cardiaque

Tirée de Momont (2014)

- **Récréatif :** Plusieurs compagnies proposent des drones à des fins récréatives telles que : DJI ; Parrot ; Yuneec … Ils permettent à l'utilisateur de réaliser des films et des photos avec des points vus originaux et une très bonne qualité d'image. Les courses de quadricoptère où le pilote construit généralement son propre drone sont des événements de plus en plus populaires.



Figure 1.13 Drone utilisé pour des vidéos de performances sportives
Tirée de (Desmet, 2016)

Notons que, quelle que soit l'utilisation du drone il est du devoir de l'utilisateur de se renseigner sur les règles de sécurité à respecter propre à chaque pays. En effet, la perte de contrôle d'un drone pourrait rapidement engendrer des dégâts matériels et/ou humains.

1.1.4 Exemples de projets de recherche sur les quadricoptères

Actuellement plusieurs pistes de recherche en cours ou à venir peuvent être recensées :

- Des drones ont été équipés de systèmes embarqués intelligents et de systèmes multisenseurs (Gademer A, 2008) leur permettant de combiner une meilleure dynamique de vol tout en résistant aux turbulences (Cheviron, 2008). Ces tests ont été réalisés dans des environnements complexes (ONERA, 2018) c.-à-d. en milieu urbain, qui pourrait évoluer dans le temps (Hérissé, 2011) ou encore dangereux. L'évitement de collision est assuré par l'utilisation de système dit "détecter et éviter" (Muratet, 2003) ;
- Utilisation de drones ou d'essaim de drones pour échantillonner et mesurer la pollution de l'air (Garcia, 2005) ;
- Coordination d'essaim de drones dans le but d'effectuer des tâches individuelles ou collectives (Gademer A, 2008) comme : le monitorage environnemental de vastes étendues (Dunbabin et Marques, 2012) ; la détection de l'érosion des sols (Lisein, 2014b) ; la cartographie ou la modélisation d'endroits difficilement accessibles tels que la canopée forestière (Lisein, 2014a) ou d'endroit en manque d'autonomie. Apparaît alors la notion

de partage d'autorité au sein d'essaim de drones auto-organisé (Legras, 2008) et la planification de missions par essaims (Huard, 2009), pour ce cas de figure, des drones munis de capteurs peuvent remplacer un réseau de capteurs sans-fil (Mainwaring, 2012) tout en intégrant via un terminal certains environnements naturels tels que : les courants, les marées, les variations de niveau de plan d'eau, les saisons, etc ;

- Le concept de "robot marsupial" consiste à utilise un drone-bateau transportant des drones aériens pour la surveillance du littoral et des cours d'eau (Pinto et al., 2014). Cela permet de combiner des images aquatiques, terrestres et aériennes ;
- Le développement de drones capables de transporter du matériel de sauvetage comme une bouée (maritime) (Newsroom, 2015) ou un kit de survie (en montagne par exemple) (Gayet, 2017) ;
- L'armement du drone Tikad avec un fusil M4 ou des grenades dans le cadre de la guérilla urbaine (Lagneau, 2017). Un des principaux défis de la société Duke Robotics était de garantir la stabilité du drone malgré le recul de l'arme lors du coup de feu. De telles capacités sont particulièrement intéressantes pour la lutte contre le terrorisme sur des théâtres extérieurs puisqu'elles permettent de réduire le nombre de troupes au sol ;
- L'utilisation de drone rend désormais possible la construction ou la déconstruction de bâtiment ou d'infrastructure. Le projet "*Flying Machine Enabled Construction*" a ainsi permis de construire une tour de 6 m de haut (GIGadgets, 2016).

1.1.5 Performances des quadricoptères

Tout dépendant de la mission qu'on associe aux quadricoptères, leurs performances requises sont variables. Cependant, on retrouve souvent des requis de stabilité, de précision, de rapidité et de consommation énergétique. L'objet de cette section consiste à dégager les principaux tests utilisés à ce jour dans la recherche pour évaluer les requis de performance susmentionnée. Ainsi trois conditions de tests seront évoquées : suivi de trajectoire ; vol stationnaire ; consommation énergétique. Nous terminerons en faisant état des difficultés rencontrées pour évaluer le modèle avec précision. Ceci joue un rôle important dans la conception du

compensateur de la boucle de rétroaction du quadricoptère et par extension les performances atteignables par ces UAV.

1.1.5.1 Test de suivi de trajectoire

Les commandes en suivi de trajectoire permettent d'évaluer les performances temporelles en termes de précision et de vitesse obtenues avec les compensateurs pour les positions linéaires et angulaires pour les trois axes. Des situations proches des conditions réelles impliquent des vols réalisés en extérieur avec la présence de perturbations extérieures comme le vent (Zhang, 2016). Nous observons généralement des précisions inférieures au mètre pour les axes horizontaux x, y. Parmi les sources d'erreurs qui peuvent être rencontrées, notons (Charland-Arcand, 2014) : les perturbations générées par le vent ; le fait que le centre de gravité ne coïncide pas nécessairement avec le centre géométrique de l'appareil ; l'imprécision des capteurs. Pour les déplacements sur l'axe vertical z nous observons des erreurs plus importantes, allant jusqu'à trois mètres. En effet, le capteur spatial possède généralement une précision moindre sur l'axe vertical.

1.1.5.2 Test de vol stationnaire

La robustesse des algorithmes de commande joue un rôle clef dans la précision et la stabilité de positionnement de l'UAV. Un manque de robustesse reflète des difficultés rencontrées par la boucle de commande pour maintenir une position constante lors d'un vol stationnaire, dont les conditions extérieures sont souvent venteuses. C'est ce que nous pouvons observer à la Figure 1.14 extraite de (Bannwarth et al., 2016), où les conditions de test consistent à maintenir un vol stationnaire en présence d'un vent de travers de 5 m/s, ce qui est réaliste dans le contexte des missions extérieures des quadricoptères. Les résultats obtenus sur une période de 60 s pour trois algorithmes de commandes différents montrent un éloignement de la position d'origine sur les axes horizontaux x, y variant entre 20 cm et 1 m. Des résultats similaires ont été obtenus en 2008 dans (How et al., 2008), ou dans ce cas le drone n'était pas soumis à un vent de travers et nous pouvions observer un déplacement du quadricoptère dans un carré de 20 cm autour de

sa position d'origine sur les axes x, y pendant 63 % du temps pour une durée totale de test de 5 min.

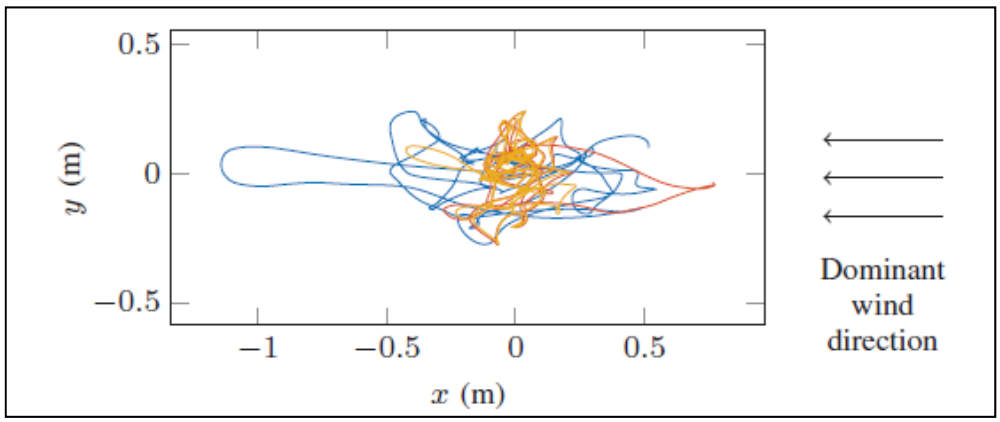


Figure 1.14 Variation des positions sur les axes *x/y* pour un vol stationnaire de 60 s avec un vent de travers de 5 m/s.
Extrait de Bannwarth et al. (2016)

Comme nous venons de l'observer, avec ou sans perturbations extérieures, le quadricoptère présente des difficultés à maintenir une précision de positionnement inférieure à 20 cm. Le manque de robustesse de la part des algorithmes utilisés actuellement en est en partie la cause, d'autant plus que l'optimisation des objectifs de robustesses est souvent négligée au profit des objectifs d'optimisation des performances temporelles.

1.1.5.3 L'aspect énergétique

La quantité d'énergie disponible dans les batteries d'un quadricoptère lors d'une phase de vol est limitée alors que ce système consomme d'importantes quantités d'énergie. La consommation de l'énergie générée par le compensateur apparaît donc comme une donnée importante à prendre en compte lors de sa conception. Néanmoins, les publications se concentrent majoritairement sur les aspects temporels ou fréquentiels, en faisant très peu part de l'aspect énergétique. La durée des tests observés est généralement sur une échelle de temps inférieure à la minute, ce qui est insuffisant pour valider une bonne gestion de l'énergie de la batterie dans le temps. Certaines expériences spécifiques présentent des résultats de maintien

en position qui se font jusqu'à une durée de 10 min maximum (How et al., 2008). Une estimation de l'énergie consommée en joules a été évoquée dans (Tahir, 2016). Dans cette étude, l'auteur conclut que la commande de type LQR permet d'optimiser l'énergie consommée, mais ne laisse pas savoir explicitement l'impact sur la durée de vie de la batterie.

1.1.5.4 Imprécision du modèle

Bien que simple mécaniquement, les quadricoptères présentent de nombreux défis quant à la modélisation électrique. D'où les difficultés rencontrées par les algorithmes de commande pour combiner une réponse temporelle rapide, précise et fréquentiellement stable et robuste. En effet, le drone est sujet à de nombreuses perturbations telles que le vent ou les vibrations mécaniques venant perturber les nombreux instruments de mesure et par extension, la boucle de commande. De plus, la présence des nombreux paramètres nécessaires à sa modélisation accroît le niveau de difficulté pour réaliser un modèle précis, pourtant nécessaire à la conception de la commande pour ce type d'appareil. Un plus grand nombre d'instruments de mesure ajoute des délais dans la boucle de commande.

1.2 Performances des algorithmes de commande

La conception des algorithmes de commandes classiques vise en priorité l'optimisation d'un des critères suivants : temporel (précision, rapidité, erreur statique) ; fréquentiel (stabilité, robustesse) ; consommation énergétique. Généralement, lors de la conception du compensateur, l'optimisation d'un de ces paramètres se fait sans considérer les deux autres et conduit à une optimisation partielle. Cette partie sera tout d'abord divisée selon le critère de performance optimisée par les algorithmes de commande : temporelle ; fréquentielle ; énergétique. Puis la dernière partie traitera de la commande B qui a la particularité de viser simultanément les performances temporelles et fréquentielles lors de la phase de conception.

1.2.1 Optimisation des performances temporelles

L'optimisation des performances temporelles consiste à allier précision et rapidité tout en minimisant le dépassement de la réponse temporelle de la sortie pour une entrée fixe ou évoluant dans le temps (suivi de trajectoire).

1.2.1.1 PID

Malgré des performances fréquentielles moyennes et une consommation d'énergie relativement importante, la commande PID (Proportionnel Intégral Dérivée) est la plus répandue, car son réglage facile lui permet d'obtenir rapidement des résultats acceptables en pratique (Bolandi, 2013; (Bouabdallah, Noth et Siegwart, 2004; Derafa, Madani et Benallegue, 2006). Sa simplicité de mise en œuvre en fait un atout conséquent lui permettant d'être largement utilisée malgré ses performances moyennes.

On obtient par exemple un temps de réponse d'environs 1,5 s pour une consigne angulaire de 1 rad avec un compensateur PID dans (Chen et LiupingWang, 2015). Ces résultats acquis expérimentalement présentent cependant des dépassements supérieurs à 50 % ainsi que la présence d'oscillation. Il sera par conséquent difficile d'améliorer le temps de réponse sans dégrader davantage la réponse temporelle.

1.2.1.2 Backstepping et hiérarchique

Les commandes non linéaires de type backstepping et hiérarchiques reposent sur le critère de stabilité de Lyapunov. Leur conception vise à faire converger les erreurs (positions, vitesses, accélérations …) le plus rapidement possible vers zéro. Ces méthodes de commandes permettent d'annuler les non-linéarités indésirables dans le modèle du processus considéré. Le quadricoptère présentant de nombreuses non-linéarités, ces méthodes de commandes sont donc particulièrement bien adaptées pour les UAV. On les retrouve notamment dans (Charland-Arcand, 2014) et (A.Drouot, E.Richard et M.Boutayeb). Les performances fréquentielles et

énergétiques obtenues avec ces commandes sont généralement convaincantes. Leurs implémentations pratiques sont néanmoins fastidieuses notamment à cause du grand nombre de mesures nécessaires. De plus, l'optimisation de leur performance est peu rigoureuse et ne permet pas un placement précis des pôles du système.

1.2.2 Optimisation des performances fréquentielles

L'optimisation des performances fréquentielles a pour objectif d'assurer la stabilité du système ainsi que la robustesse de la boucle fermée malgré la présence de perturbations extérieures (vent) ou d'incertitudes sur le modèle (variation de masse, bruit des capteurs …).

1.2.2.1 H_∞

La commande H_∞ repose sur une optimisation fréquentielle visant la minimisation du gain maximum du compensateur et des signaux présents dans la boucle de commande, permettant ainsi de prendre en compte des objectifs de stabilité et de robustesse lors de la conception du compensateur. Notons que généralement l'optimisation fréquentielle de la commande H_∞ est suffisamment performante pour garantir des résultats temporels non optimaux, mais néanmoins convaincants. Ce type de commande à l'intérêt dans le cas des quadricoptères de réduire l'effet des perturbations telles que le vent et les vibrations générées par les hélices venant bruiter le signal de mesure (Jiřinec, 2011; Miller, 2011; Raffo, 2008). Cependant, la conception de ce compensateur présente des contradictions rendant délicat l'optimisation de ses performances. En effet, la réjection des perturbations (vent, vibrations …) nécessite un gain important dans le compensateur. Mais, ce gain important lui est également nuisible, car il risque de saturer les actionneurs et tend à générer un comportement nerveux de la part du quadricoptère. De plus, la conception d'une telle commande peut déboucher sur des compensateurs d'ordre élevé ajoutant ainsi une difficulté supplémentaire à son implémentation dans un système réel. C'est pour ces raisons que la commande H_∞ est peu utilisée dans le domaine des quadricoptères.

1.2.2.2 µ-synthèse

La commande par µ-synthèse peut être décrite comme le prolongement de la commande H_∞ dans le sens où aux objectifs de stabilité et de robustesse elle ajoute la prise en compte les incertitudes du système. Ce qui peut être avantageux dans le domaine des drones où la complexité de modélisation, les bruits de mesures et l'imprécision des capteurs jouent un rôle important dans le positionnement de ces appareils. Cependant très peu de publications utilisent la commande par µ-synthèse pour la conception de leur compensateur. Une thèse de maîtrise (Garcia, 2013) a utilisé la µ-synthèse pour effectuer un vol stationnaire, mais seul des résultats de simulation ont été exposés.

La faible utilisation de ce type de compensateur, pourtant théoriquement très performant fréquentiellement et par extension temporellement s'explique par des difficultés à avoir un modèle de drone proche de la réalité. En effet, malgré la prise en compte d'incertitude dans la conception du compensateur par µ-synthèse reste une commande linéaire et nécessite idéalement un modèle nominal du processus fiable. De plus, les compensateurs obtenus par cette méthode de commande peuvent facilement atteindre un ordre important (> 20), ce qui génère des temps de calcul extrêmement longs et l'implantation dans une puce électronique très fastidieuse. Il existe des méthodes d'approximation permettant de réduire l'ordre de ces compensateurs mais ils restent néanmoins élevés et introduisent des approximations dans leur conception.

1.2.3 Minimisation de l'énergie investie

Les quadricoptères puisent leur source d'énergie dans une batterie embarquée. L'énergie disponible fournie par les batteries étant limitée, une minimisation de l'énergie investie dans la boucle de commande peut être un atout intéressant. Dans cet objectif, deux commandes seront l'objet de notre attention : la commande H_2 et la commande LQR (Linear Quadratic Regulator).

1.2.3.1 H_2

La méthode de conception d'un compensateur H_2 utilise une approche similaire aux commandes H_∞ et μ-synthèse. La différence est que son algorithme de commande vise une minimisation de l'énergie des signaux employés par le compensateur et des signaux de boucle de commande (d'erreur et de commande généralement) à la place d'une minimisation de gain. Néanmoins, tout comme les commandes H_∞ et μ-synthèse, la commande H_2 est peu utilisée dans le secteur des drones. Des raisons équivalentes aux commandes H_∞ et μ-synthèse peuvent être évoquées comme : précision de la connaissance du modèle du drone insuffisante pour déboucher sur un résultat optimal ; ordre du compensateur élevé.

1.2.3.2 LQR

La commande de type LQR permet d'obtenir des résultats convaincants concernant la minimisation de l'énergie et satisfaisants en termes de stabilité. Les résultats présentés dans (Mainwaring et al., 2013) montre que la commande LQR obtient des meilleurs résultats que la commande de type PID en combinant une bonne robustesse à une faible erreur statique. Une des principales problématiques liées à l'approche LQR est la présence d'un gain proportionnel élevé. Certes, cela permet d'obtenir une réponse temporelle rapide, mais tend à accroître la présence de couplage entre les entrées, entraînant ainsi une amplification des bruits de mesure et augmentant alors la réponse aux perturbations (Miller, 2011). Des résultats sans dépassements ont été obtenus en simulation avec un temps de réponse de 1,75 s, pour une commande à un échelon sur l'angle de lacet ψ, avec la commande LQR dans (Sabatino, 2015). Populaire grâce à la prise en compte de l'énergie dans sa conception et à sa simplicité de mise en œuvre cette méthode de commande se retrouve également dans (Ataka et al., 2013) et (Balas, 2007)

Une approche voisine, la méthode LQG (Linear Quadratic Gaussian) permet selon (Miller, 2011) d'obtenir des meilleures performances en présence de bruit ou de perturbation

comparativement aux conceptions LQR, H_∞ et SISO (Single Input Single Output) PD (Proportional Derivated)

1.2.4 Optimisation simultanée des performances temporelles et fréquentielles

1.2.4.1 Commande B

Les méthodes de contrôles conventionnels utilisés sur les quadricoptères présentent des difficultés à allier simultanément des bonnes performances dans les domaines temporel et fréquentiel (Bensoussan, 2015). D'une part, la recherche d'amélioration des performances temporelle revient à diminuer le temps de réponse, le temps d'établissement tout en réduisant la sensibilité aux perturbations, telles que le vent ou les vibrations mécaniques dans le cas du quadricoptère. D'autre part les objectifs fréquentiels vont quant à eux viser une augmentation des marges de phase et de gain pour accroître la stabilité. Dès lors des gains importants sont à considérer pour accélérer le temps de réponse et réduire l'erreur statique. Cependant, ces gains importants tendent à accroître les bruits de mesures très présents dans les quadricoptères dus au nombre important de capteurs qu'ils possèdent en plus des multiples perturbations auxquelles ils sont exposés. Ces problématiques liées aux hauts gains tendent à rendre le comportement du drone instable avec l'apparition de dépassement et d'oscillations. C'est ce qui a été montré dans (Miller, 2011) avec l'application de la commande H_∞ provoquant un comportement instable du quadricoptère. Cependant, l'utilisation de la commande B a démontré qu'il est possible d'avoir un algorithme robuste avec un gain élevé tout en bénéficiant également de bonnes marges de phase et gain, par la minimisation de la sensibilité du système. L'optimisation des domaines temporel et fréquentiel est alors réalisable simultanément. Autrement dit, la commande B permet d'allier conjointement d'excellentes performances concernant la rapidité, la précision ainsi que la robustesse et la stabilité. Cette méthode évoquée pour la première fois dans (Zames et Bensoussan, 1983), a peu été utilisée jusqu'à présent à cause des limitations de l'électronique. L'élargissement récent des bandes passantes, l'amélioration des résolutions des capteurs et de la vitesse de traitement des processeurs permettent désormais d'appliquer la commande B expérimentalement.

C'est ainsi qu'une étude expérimentale a été menée concernant le déplacement d'une boule en lévitation dans un champ magnétique (Bensoussan, 2015). Les résultats montrés à la Figure 1.15 montre une comparaison des réponses temporelles obtenues pour un compensateur de type PID et la commande B. Nous observons pour un gain du compensateur k = 1000 que la commande de type PID présente des dépassements allant jusqu'à environs 90 % ainsi que de nombreuses oscillations avant d'atteindre une valeur finale présentant une erreur statique. Tandis qu'avec la commande B, nous observons pour k = 1000 l'annulation des dépassements, des oscillations et la valeur finale est atteinte précisément. De plus, le temps de réponse est beaucoup plus rapide puisque l'on passe de plus de 5 s avec le PID à moins de 2 s avec la commande B. Enfin, comme le montre la figure de droite, il est possible d'augmenter le gain k à 10^5, permettant d'améliorer davantage encore la rapidité de la réponse temporelle, tout en conservant la stabilité.

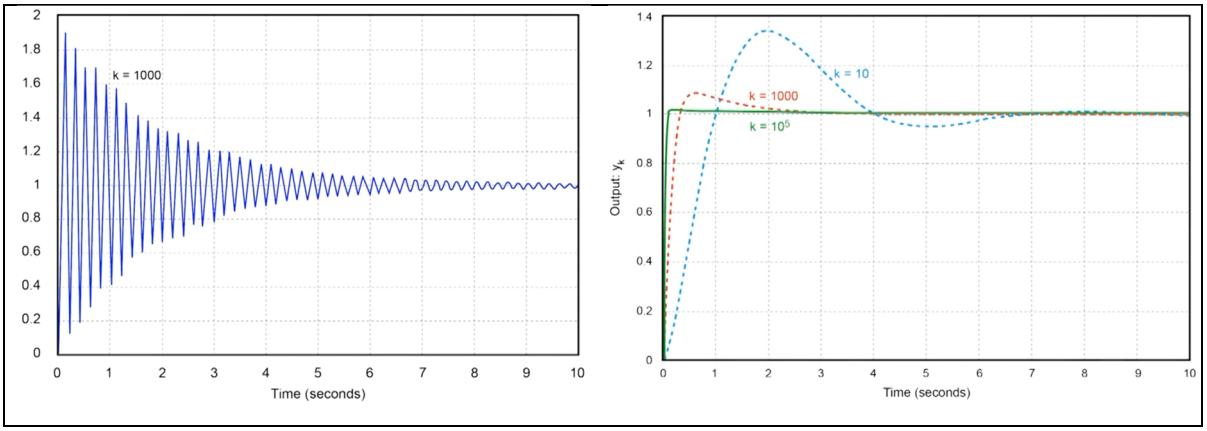


Figure 1.15 Comparaison des résultats obtenus pour une commande de déplacement en position entre une commande PID (à gauche) et la commande B (à droite) Tirée de Bensoussan (2015)

Les résultats obtenus dans le domaine temporel avec l'application de la commande B à un système de lévitation magnétique ont montré une nette amélioration en termes de vitesse et de précision, comparativement à un compensateur de type PID. Le domaine fréquentiel a vu aussi une nette amélioration en termes de stabilité et de robustesse. L'amélioration de la robustesse a également été démontrée dans la vidéo parue dans la revue scientifique substance (Bensoussan, 2015), où nous observons que la boule de lévitation magnétique peut être

remplacée par tout autre objet métallique tel qu'un porte-clefs, une clef hexagonale ou une capsule de bouteille tout en conservant sa stabilité et sa robustesse, sans changer de compensateur. Cela laisse entrevoir la possibilité d'appliquer la commande B de manière universelle, quels que soient le processus et les variations intrinsèques auxquelles il est soumis. La commande B a donc prouvé sa capacité à minimiser le temps de réponse avec un temps d'établissement égal au temps de montée tout en conservant des bonnes marges de stabilité et de robustesse.

Ces résultats sont encourageants, puisqu'ils pourraient résoudre une partie des problèmes rencontrés par les commandes appliquées sur les quadricoptères. En effet, la robustesse de la commande B pourrait permettre d'absorber les imprécisions de modélisation due aux multiples paramètres du drone difficile à évaluer et aux nombreuses perturbations auxquelles il est soumis.

Jusqu'à présent dans le domaine de la commande il était considéré qu'il fallait choisir entre l'optimisation du domaine temporelle (précision, rapidité) ou l'optimisation dans le domaine fréquentiel (stabilité, robustesse). L'un de ces deux aspects devait être privilégié au détriment de l'autre. Désormais, comme nous l'avons constaté avec l'expérience de lévitation magnétique, la commande B permet d'optimiser simultanément les performances dans les domaines temporel et fréquentiel. Ce qui est une grande innovation, à laquelle nous pouvons ajouter l'objectif de minimiser l'énergie investie par le compensateur. De plus, selon l'article paru dans le journal substance (Bensoussan, 2015), cette commande vise à tenir compte des non-linéarités et des délais du système. Or, comme nous l'avons vue à la partie précédente, la modélisation du quadricoptère nécessite de manipuler un système d'équations qui présente de fortes non-linéarités. Le quadricoptère se positionne alors comme un candidat idéal pour tester la faisabilité de la commande B. De plus, de nombreux délais sont à prendre en compte tout le long de la chaîne de commande en boucle fermée de ce type de processus. Par exemple, les ESC (Electronic Speed Controllers) dont le rôle est de convertir l'énergie continue provenant de la batterie au moteur, présente une inertie plus élevée que celle du moteur. Tendant alors à augmenter le temps de réponse de la vitesse de rotation de l'hélice (Miller, 2011). Ensuite,

pour éviter la présence de bruit de vibration, pouvant provenir des hélices en rotation ou des moteurs une solution consiste à ajouter des filtres passe-bas. Cela permet effectivement d'améliorer la qualité du signal, mais ajoute un délai supplémentaire pouvant ralentir la dynamique du système (Cho, 2014). Le nombre important de capteurs est une autre source potentielle de délais.

D'autres intérêts de l'extension de la commande B évoqués dans (Bensoussan, 2015) consiste à expérimenter sa capacité à décentraliser la commande du quadricoptère. En effet, ce type de drone possède quatre entrées et quatre sorties fortement couplées entre elles, ce qui en fait un candidat intéressant pour tester expérimentalement la capacité de commande B à découpler les entrées et les sorties. Ce qui serait une forte amélioration pour le quadricoptère, car cela augmenterait sa précision lors de ses missions de suivi de trajectoire ou de maintien de position.

1.2.4.2 Commande décentralisée

Un des problèmes majeurs des quadricoptères est la présence de couplage entre les entrées et les sorties. Cela signifie qu'il est difficile à ce jour de réaliser une commande exclusivement sur un seul des paramètres suivants x, y, z et ϕ, θ, ψ, sans que les autres soient également influencés dans moindre mesure. Par exemple, une commande de rotation de 18 degrés de l'angle de tangage dans (Nemati et Kumar, 2014) provoque également des oscillations sur l'angle de roulis et un écartement de sa consigne sur l'axe de lacet.

Ce problème de couplage est fréquent dans les systèmes multivariables et est une des raisons principales provoquant des erreurs de position lors du suivi de trajectoire ou pour des tests de vol stationnaire telle que dans (Ghadiok, Goldin et Ren, 2012).

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉ SUR LA COMMANDE

Ce chapitre vise à rappeler les notions de base nécessaires à la compréhension de cette thèse. C'est également l'opportunité de définir les principales variables et métriques que nous utiliserons par la suite.

2.1 Présentation des systèmes de commande

2.1.1 La boucle de commande

L'objectif de la commande est de maîtriser l'évolution d'une grandeur physique (vitesse, position, température …) en sortie d'un système, à partir d'une consigne d'entrée. Ainsi, pour faire tendre la sortie *y* représentée à la Figure 2.1 vers l'entrée *r* on reboucle généralement la sortie *y* à travers un capteur de mesure caractérisé par une fonction de transfert *K*, dont la sortie mesurée est notée y_m. L'erreur *e* est transmise au compensateur *C* dont le rôle est de transmettre un jeu de commande adéquate *u* au processus *P*.

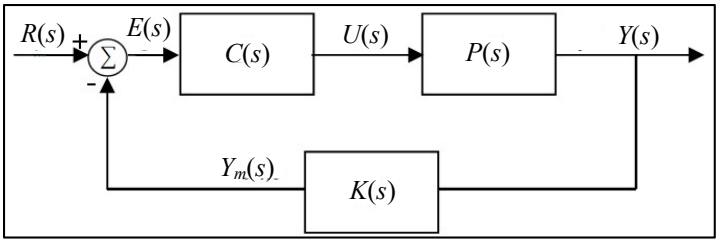


Figure 2.1 Boucle fermée d'un système entrée sortie

Les équations reliant la sortie *y* et l'erreur *e* en rétroaction sont de la forme :

$$y = PCe \tag{2.1}$$

$$e = r - Ky \tag{2.2}$$

On en déduit l'expression de la sortie en fonction du signal d'entrée :

$$y = PC(I + KPC)^{-1}\, r \tag{2.3}$$

I représente la matrice identité dans le cas des systèmes multivariables où *r* et *y* sont de dimension supérieure à un.
La transmittance *T* est définie par la relation *y* = *Tr*, il en découle :

$$T = (I + PCK)^{-1}PC \tag{2.4}$$

La fonction de sensibilité *S* du système caractérisant le transfert entre l'erreur d'asservissement *e* et le signal d'entrée *r* est :

$$S = (I + KPC)^{-1} \tag{2.5}$$

On remarque pour *K* = *I* :

$$T + S = I \tag{2.6}$$

Dans le domaine de Laplace la relation *T*+*S* = 1 pour le cas monovariable implique que $\sum Réel(T(s)) + Réel(S(s)) = 1$. Tandis que la somme de leur partie imaginaire est nulle.

2.1.2 Système de commande avec perturbation externe

Il est possible de concevoir des méthodes de commande (H_∞, μ-synthèse, commande B) dans le but de minimiser l'effet des perturbations sur les grandeurs à contrôler. La Figure 2.2 indique l'emplacement de trois perturbations notées d_1, d_2, d_3 qui peuvent être décrites comme suit :

- d_1 : perturbation additive à l'entrée du processus *P*(*s*) ;
- d_2 : perturbation additive à la sortie de *P*(*s*) ;
- d_3 : perturbation additive sur la sortie *Y*(*s*).

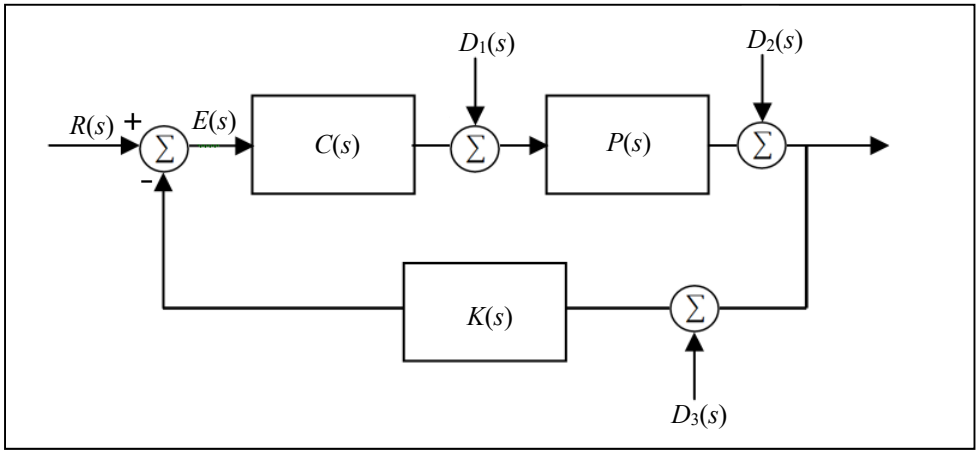


Figure 2.2 Boucle de commande avec les perturbations externes $D_1(s)$, $D_2(s)$, et $D_3(s)$

Supposons que le processus et le compensateur utilisés soient linéaires. Cela permet d'utiliser le théorème de superposition et d'obtenir les expressions analytiques des quatre entrées $r(t)$, $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$ en fonction des trois variables $e(t)$, $u(t)$ et $y(t)$ (Bensoussan, 2008) :

$$\begin{pmatrix} y \\ e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S' & 0 \\ 0 & 0 & S'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PC & P & I & -PCK \\ I & -KP & -K & -K \\ C & -CKP & -CK & -CK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Avec :

$$S = (I + KPC)^{-1} \quad ; \quad S' = (I + PCK)^{-1} \quad ; \quad S'' = (I + CKP)^{-1} \qquad (2.8)$$

Remarque : pour minimiser les effets de la perturbation d_1 sur la sortie y, il faudrait que la norme de l'opérateur $S = (I + KPC)^{-1}$ soit aussi petite que possible. Il s'en suivrait dans le cas d'un retour unitaire et d'un système mono-entrée mono-sortie (SISO – Single Input Single Output), que la transmission par rapport à d_2 approcherait l'unité en raison de l'équation (2.7). On ne pourra donc pas minimiser simultanément les effets des perturbations d_1 et d_2 sans faire un compromis.

2.1.3 Système avec préfiltre

Pour améliorer les performances du système, on peut ajouter en entrée un préfiltre F. Celui-ci a pour but d'agrandir la bande passante de la boucle fermée dans le domaine fréquentiel tout en assurant une réponse plus rapide dans le domaine temporel (Vassal et Deschaux, 2015). Le schéma de commande est présenté à la Figure 2.3.

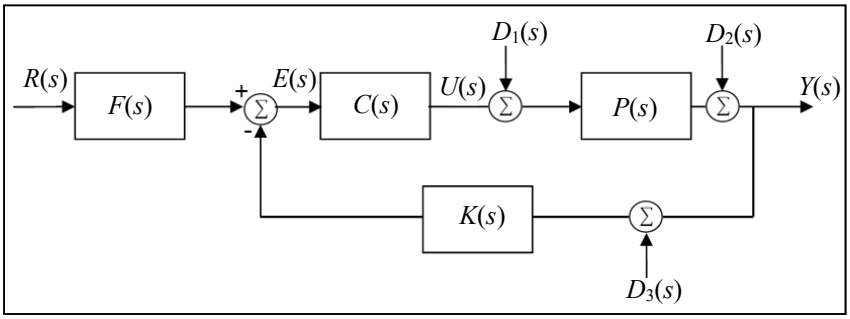


Figure 2.3 Schéma de commande avec préfiltre

L'insertion d'un préfiltre sert à pondérer le signal d'entrée. Comme le montre l'équation (2.9), les fonctions de transfert des perturbations ne sont pas affectées par l'ajout de ce préfiltre. L'expression matricielle d'une telle structure de commande s'exprime par :

$$\begin{pmatrix} y \\ e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S' & 0 \\ 0 & 0 & S'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PCF & P & I & -PCK \\ F & -KP & -K & -K \\ CF & -CKP & -CK & -CK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

2.1.4 Système avec préfiltre anticipatif

Un second préfiltre de type anticipatif (ou prédictif) peut être inséré dans le système. Nommé A sur la Figure 2.4, il reproduit l'entrée r en sortie du compensateur C en passant par sa fonction de transfert A. Ce type de filtre permet d'accélérer la réponse de la commande u en sortie du compensateur C.

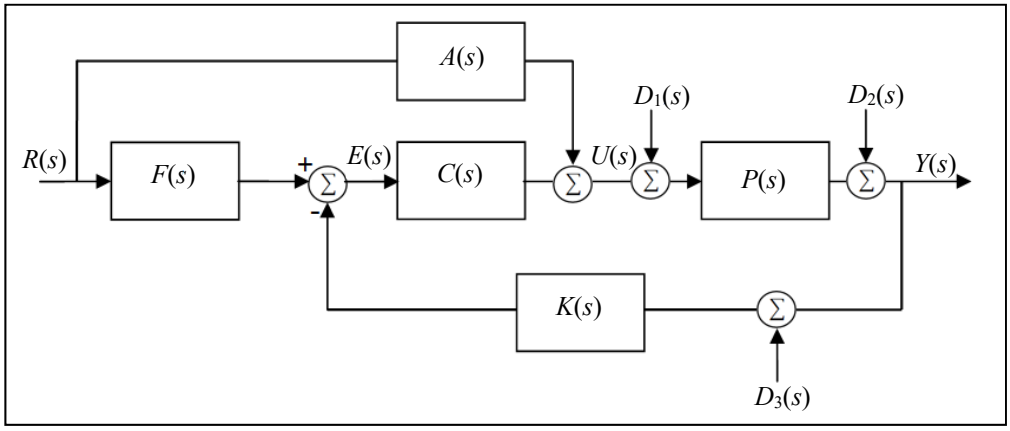


Figure 2.4 Schéma de commande avec préfiltre et préfiltre anticipatif

L'ajout de ce filtre influence les fonctions de transfert en boucle fermée liées à l'entrée *r* :

$$\begin{pmatrix} y \\ e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S' & 0 \\ 0 & 0 & S'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PCF + PA & P & S & -PCK \\ F + PA & -KP & -K & -K \\ CF + PA & -CKP & -CK & -CK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

2.2 Stabilité d'un système de rétroaction

Pour réaliser une commande de système en rétroaction, l'automaticien doit identifier la fonction de transfert du processus pour dimensionner une commande qui lui est propre. Dans la réalité les transmissions ne sont pas toujours linéaires et le concepteur doit utiliser des méthodes de commande alternatives comme la commande non linéaire ou la commande adaptative.

La capacité d'une commande à maintenir ses performances en dépit des variations des paramètres du processus et des imperfections du système est appelée robustesse. Une commande sera dite robuste, si elle donne des résultats satisfaisants en présence d'incertitudes de modélisation. Les commandes QFT (Horowitz, 2001) et H_∞ (Zames, 1981) offrent par exemple des approches différentes pour répondre aux problèmes de stabilité.

Plusieurs outils permettent d'analyser la stabilité d'un système de commande : Diagramme de Bode, diagramme de Nyquist, le lieu géométrique des racines, critère de Hurwitz pour les systèmes analogiques et celui de Jury pour les systèmes numériques (Saucedo, 1968). Considérons la commande du système en boucle :

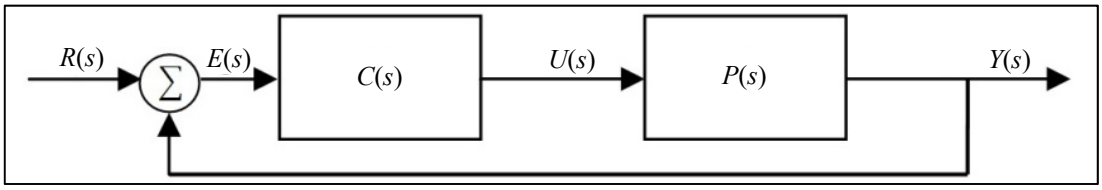


Figure 2.5 Schéma bloc d'une commande en boucle fermée

La fonction de transfert en boucle fermée de ce type de rétroaction s'exprime comme suit :

$$T(s) = P(s)C(s)(I + P(s)C(s))^{-1} \tag{2.11}$$

Avec *s* la variable de Laplace définie par une partie réelle σ et une partie imaginaire ω :

$$s = \sigma + j\omega \tag{2.12}$$

Les performances temporelles ainsi que la stabilité de cette structure de commande vont dépendre de la position des pôles $b_1,\ b_2, \dots, b_n$ et des zéros $a_1,\ a_2, \dots, a_m$ du dénominateur de la boucle fermée, nommé $T(s)$ dans le plan complexe *s* :

$$T(s) = k\frac{(s + a_1)(s + a_2), \dots, (s + a_m)}{(s + b_1)(s + b_2), \dots, (s + b_n)} \tag{2.13}$$

Avec k le gain statique de la boucle fermée. Notons que dans le cas de système réel le degré du numérateur *m* est inférieur ou égal au degré du dénominateur *n*, soit : $n \geq m$.

Critère de Nyquist : Ce critère s'applique à un système de retour unitaire. Soit Γ un contour de rayon infini du demi-plan complexe de droite pouvant inclure les zéros $(a_1,\ a_2, \dots, a_m)$ et les

pôles (b_1, b_2 ... b_n) du dénominateur $I + P(s)C(s)$ de $T(s)$. La commande du processus sera stable si et seulement si les pôles de $T(s)$ ne se trouvent pas dans le demi-plan complexe de droite.

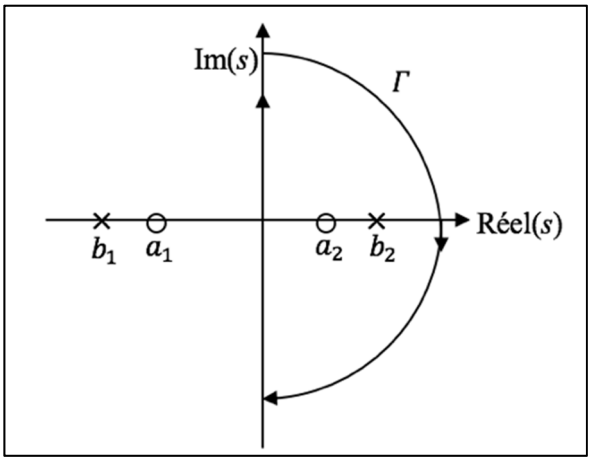


Figure 2.6 Pôles et zéros dans le plan de *s*

Le plan de Nyquist retrace le gain de la boucle ouverte $J(s) = P(s)C(s)$ en fonction de ses parties réelles et imaginaires qui définissent ce plan de Nyquist. La stabilité est assurée si l'équation suivante est vérifiée :

$$N = P - Z \tag{2.14}$$

Où N représente le nombre de tours antihoraires du point (-1,0) par le diagramme de Nyquist ; P le nombre de pôles instables (dans le demi-plan complexe de droite) ; Z le nombre de zéro dans le demi-plan complexe de gauche.

La représentation dans le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $J(s)$ donne par exemple le tracé de la Figure 2.7.

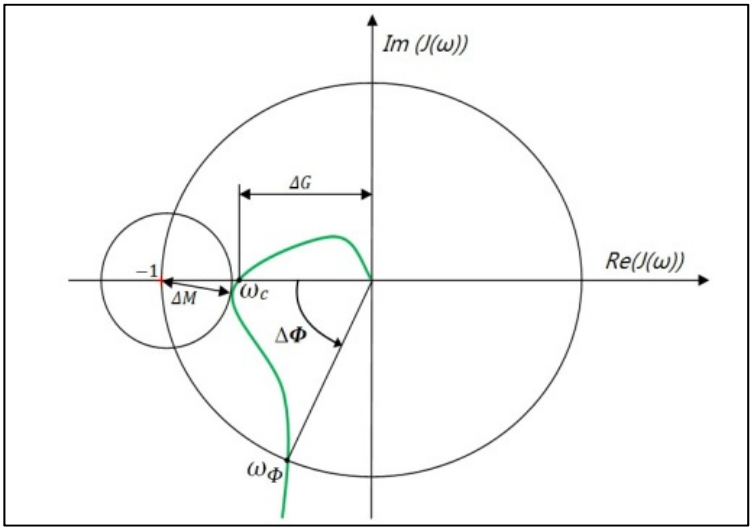


Figure 2.7 Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte $J(s)$ tracée en verte
Tirée et reproduite de Retif (2008)

Deux paramètres représentés à la Figure 2.7 permettent d'évaluer la robustesse du système en boucle fermée : ΔG (marge de gain) ; $\Delta\phi$ (marge de phase). Ils peuvent être définis par :

Marge de gain ΔG : distance séparant l'axe imaginaire au passage à -180° de la boucle ouverte $J(s)$. Il est conseillé de prendre une marge de sécurité comme suit (Retif, 2008):

$$\Delta G < 6 \text{ dB} \tag{2.15}$$

La marge de phase $\Delta\Phi$: correspond à la variation de phase de la boucle ouverte qui amènerait le diagramme de Nyquist à passer à gauche du point critique (-1,0).

2.3 Performance temporelle

Pour évaluer la qualité de la conception d'une commande, il est nécessaire d'étudier ses performances dans le domaine fréquentiel et temporel. Un bon comportement fréquentiel n'est pas systématiquement garant d'une bonne réponse temporelle. Par exemple, un système peut présenter une grande robustesse (performances fréquentielles), avec de très bonnes marges de

phase et de gain, mais fournir une réponse indicielle (performances temporelles) trop lente par rapport au résultat escompté. Lors du dimensionnement d'un compensateur il s'impose donc nécessaire de prendre en compte les domaines fréquentiel et temporel.

Pour définir les paramètres de la réponse temporelle d'un système, on lui applique un échelon unitaire en entrée. À partir de la réponse obtenue, on peut alors évaluer les performances temporelles du système. La Figure 2.8 représente la réponse de la sortie $y(t)$ à une entrée indicielle $r(t)$, soit $r(t) = 1$.

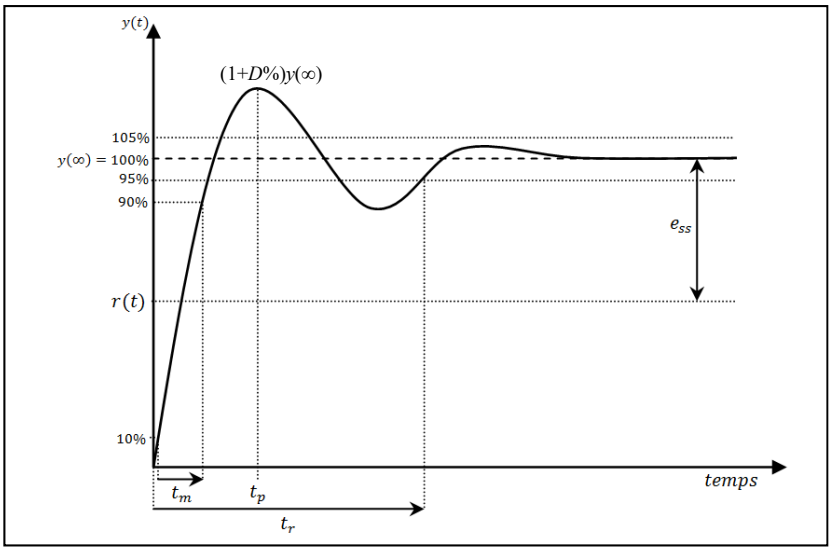


Figure 2.8 Exemple de réponse unitaire

Les principaux critères pour caractériser une réponse indicielle d'un système sont :

- **Le dépassement D** : représente le pourcentage de dépassement de la consigne par le système asservi. Il s'exprime comme suit, avec $t \rightarrow +\infty$:

$$D_{\%} = \frac{\max_{t}\big(y(t)\big) - \mathrm{y}(\infty)}{\mathrm{y}(\infty)} \tag{2.16}$$

- **L'erreur statique e_{ss} :** quantifie l'écart entre la consigne ($r(t) = 1$) et la mesure en régime permanent $y(\infty)$:

$$e_{ss} = |y(\infty) - 1| \tag{2.17}$$

- **Le temps de montée t_r :** temps mis par la mesure pour passer de 10 % à 90 % de la valeur de consigne :

$$y(t_r) = y(t_{90\%}) - y(t_{10\%}) \tag{2.18}$$

- **Le temps d'établissement t_s :** On parle de temps d'établissement à 5 % pour désigner le temps mis par la réponse pour rentrer dans une zone située à $\pm$ 5 % autour de la valeur de consigne d'entrée. Un critère plus restrictif serait le temps de réponse à 2 %, situé à $\pm$ 2 % de la valeur de consigne. Le temps d'établissement t_s à 5% peut être défini comme suit :

$$\forall t > t_s \qquad |y(t) - y(\infty)| < 0{,}05y(\infty) \tag{2.19}$$

- **Le temps de pic t_p :** Temps au bout duquel la mesure atteint son maximum.

$$t_p = \max_t(y(t)) \tag{2.20}$$

2.4 Stabilisation à partir de la sensibilité

Considérons la relation (2.5) avec $K = 1$ dans le cas SISO, soit $S = (1 + PC)^{-1}$. Pour avoir une erreur statique nulle en régime permanent, les systèmes réels vérifient que la boucle ouverte $J(s) = P(s)C(s) \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow \infty$. Il s'ensuit qu'en hautes fréquences (HF) $J(s) \rightarrow 0$ et par suite, $S(s) \rightarrow I$ et $T(s) = J(s)(I+J(s))^{-1} \rightarrow 0$. L'objectif visant une transmission de boucle fermée unitaire et donc une sensibilité nulle ne peut alors être atteint à toutes les fréquences. Un objectif de commande consiste alors à viser une minimisation de la sensibilité (et donc de l'erreur *e* entre l'entrée *r* et la sortie *y*) dans une bande de fréquence d'intérêt : $|S(s)| < \varepsilon < 1$ pour $\omega < \omega_1$, où ε est un réel proche de 0, tout en vérifiant que $|S(s)| < M_s$ avec $M_s > 1$ pour l'ensemble des fréquences. Cette dernière considération vient du fait que l'intégrale de la

sensibilité est égale à la somme de la partie réelle des pôles instables de $J(s)$ (Freudenberg et Looze, 1985) :

$$\pi \sum_{i=1}^{N_p} Re[p_i] = \int_0^{\infty} log|S(j\omega)|d\omega \qquad (2.21)$$

Avec p_i le pôle numéro i et N_p le nombre total de pôles.

Un haut gain minimise la sensibilité en basses fréquences (BF) et tend à augmenter l'aire de la surface représentée en bleue à la Figure 2.9, mais entraîne également un risque de sensibilité maximum excessive en HF avec une augmentation de l'aire de la surface verte (car l'aire des surfaces bleue et verte sont égales). C'est pourquoi le compensateur B vise à limiter la sensibilité globale à un maximum M_s aussi proche de l'unité que possible.

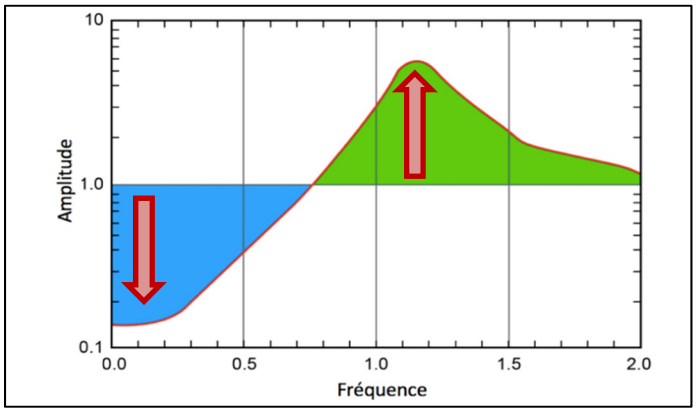


Figure 2.9 Image illustrant le comportement de la sensibilité en HF lors d'une augmentation de gain pour minimiser la sensibilité en BF

Les objectifs de conception théoriques (idéal) et pratiques (réel) pour la sensibilité sont représentés à la Figure 2.10.

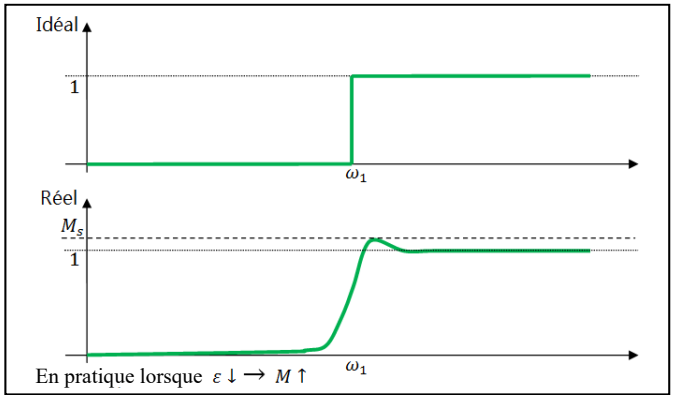


Figure 2.10 Comparaison entre l'allure de la sensibilité en fonction de la fréquence, dans le cas idéal (en haut) et dans le cas réel (en bas)

Pour une structure de commande idéale, on cherche à avoir une transmission $T(s)$ unitaire sur une bande passante la plus large possible. Mais le comportement d'un système réel amorcera une transition de 1 vers 0 en HF (puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur) au-delà d'une fréquence notée ω_1 sur la Figure 2.10, en passant par une valeur maximum M_t dont il conviendra de limiter l'amplitude pour éviter la présence d'oscillations dans le système bouclé.

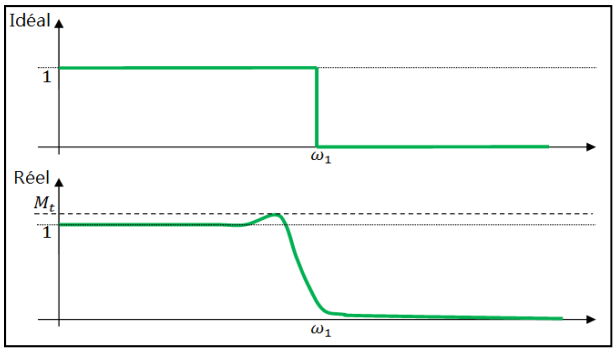


Figure 2.11 Comparaison entre l'allure de la transmittance en fonction de la fréquence, dans le cas idéal (en haut) et dans le réel (en bas)

Une approche intuitive pour obtenir l'allure de la sensibilité désirée $S(s) = (1+J(s))^{-1}$ de la Figure 2.11 (en bas) est la représentation correspondante de la boucle ouverte $J(s) = P(s)C(s)$ dans le diagramme de Nyquist, dont l'allure est représentée en rouge à la Figure 2.12. Tout

d'abord, pour les basses fréquences $\omega < \omega_1$ (ce qui correspond sensiblement à la bande passante de la boucle ouverte), l'objectif du compensateur est de minimiser la sensibilité inférieure à une faible valeur $\varepsilon < 1$. Cela correspond dans le diagramme de Nyquist à une boucle ouverte $J(s)$ à l'extérieur du cercle de sensibilité (en pointillé vert) centré au point critique (-1,0) et de rayon $\frac{1}{\varepsilon}$. Ce qui s'exprime par :

$$|1 + J(s)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{|1+J(s)|} < \varepsilon \tag{2.22}$$

Puis, en HF la boucle ouverte est maintenue tangente au cercle de sensibilité (tracé en pointillé bleu) centré sur le point critique (-1,0) et de rayon $\frac{1}{M_s}$, où M_s représente le maximum de la sensibilité, il s'ensuit :

$$|1 + J(s)| > \frac{1}{M_s} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{|1+J(s)|} < M_s \tag{2.23}$$

Ce cercle de sensibilité permet de définir les zones du plan de Nyquist pour lesquelles $S(s)$ est inférieure à M_s. Il est d'intérêt de concevoir un compensateur visant la minimisation du maximum M_s pour limiter les dépassements et les oscillations de la réponse temporelle.

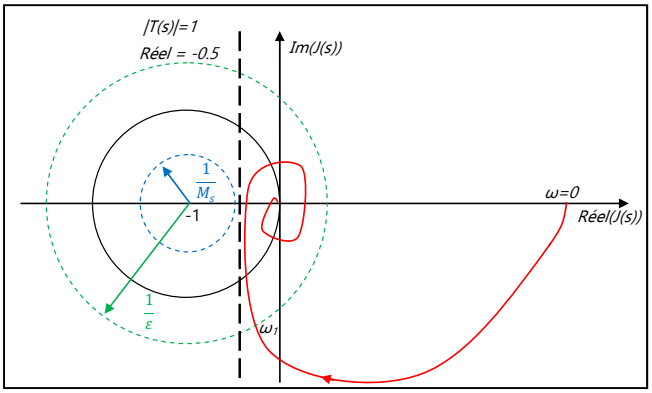


Figure 2.12 Diagramme de Nyquist de $J(s)$
Tirée et reproduite de Houimdi (2015)

Un objectif visé supplémentaire consiste à faire suivre lors des fréquences intermédiaires (passage de 0 à 1 de la sensibilité $S(s)$), la courbe de $J(s)$ le plus longtemps possible le long de la droite des réels $\{J(s)\} = -0.5$ (tracé en pointillé noir). En effet, cela permet d'étendre la bande passante du système puisque dans ces conditions :

$$|T(s)| = |J(s)(1+J(s))^{-1}| \approx |-0.5(1+(-0.5))^{-1}| \approx 1 \qquad (2.24)$$

CHAPITRE 3

MODÉLISATION D'UN QUADRICOPTÈRE

3.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre nous verrons une modélisation générale du quadricoptère inspiré principalement de (Bouabdallah, 2007; Charland-Arcand, 2014; ElKholy, 2014). Nous fixerons les bases nécessaires à la modélisation d'un quadricoptère tel que la définition des repères de base et inertiel, l'expression des positions et vitesses linéaire et angulaire. Il s'en suivra l'expression des forces et des couples sur une hélice puis à l'échelle d'un drone complet. Il sera alors possible de faire la mise en équation non linéaire des accélérations linéaires et angulaires par la méthode de Newton. Ensuite, un modèle d'approximation linéaire sera présenté ainsi qu'une linéarisation du modèle dont une représentation d'état pourra en être déduite. La seconde partie permettra de définir puis vérifier la commandabilité et l'observabilité du modèle du drone. La troisième partie détaillera les architectures de boucle de commande qui seront utilisées lors de la conception des différents types de compensateurs. La dernière partie portera sur la modélisation des moteurs des hélices du drone.

3.2 Modélisation non linéaire

3.2.1 Définition des repères

Pour modéliser un quadricoptère, il convient d'utiliser deux types de repères :

- Le repère inertiel sert de référence, il est fixe de type orthonormal et galiléen. Identifié par l'indice *i,* il est lié à la surface de la terre par le point O_i et est noté $F_i = \{O_i, x_i,\ y_i,\ z_i\}$ sur la Figure 3.1. Le repère inertiel est représenté par le référentiel terrestre où se trouve le pilote, il est fixe et son origine O_i indique généralement la position de départ du quadricoptère ;

- Le second repère de la base du drone est repéré par l'indice *b*. Il est attaché à l'origine du châssis du drone au point O_b et est noté $F_b = \{O_b, x_b,\ y_b,\ z_b\}$ dont l'origine se trouve sur le quadricoptère, permet de décrire l'orientation du drone.

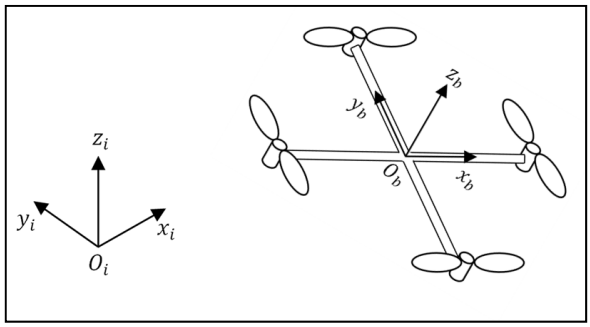


Figure 3.1 Repère inertiel F_i et repère de la base du drone F_b

3.2.2 Définitions des positions et vitesses, linéaires et angulaires

Il s'agit ici de définir les vecteurs des positions et des vitesses, linéaires et angulaires qui vont nous être utiles pour la modélisation. On peut les distinguer en fonction du repère dans lequel ils évoluent.

Les positions ξ et les vitesses $\dot{\xi}$ linéaires dans le repère inertiel F_i sont :

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} en\ (m) \quad ; \quad \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} en\ (m/s) \tag{3.1}$$

Les positions η et les vitesses $\dot{\eta}$ angulaires dans le repère inertiel F_i sont définies par les angles d'Euler tel que :

$$\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} en\ (rad) \quad ; \quad \dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} en\ (rad/s) \tag{3.2}$$

Dans le repère de la base F_b, nous exprimerons la vitesse linéaire du drone par :

$$v = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} en\ (m/s) \tag{3.3}$$

La vitesse angulaire dans le repère de la base F_b peut être définie tel que :

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} en\ (rad/s) \tag{3.4}$$

Pour ramener l'expression des vitesses linéaires depuis le repère F_b dans le repère F_i, nous utiliserons la matrice de rotation R_η décrite par :

$$R_\eta = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Où ϕ, θ, ψ représentent les angles d'Euler. Ils permettent de représenter l'orientation du quadricoptère dans le repère de la base, tel que dans la Figure 3.2. Pour simplifier la notation $C_{(.)} = cos(.)$ et $S_{(.)} = sin(.)$

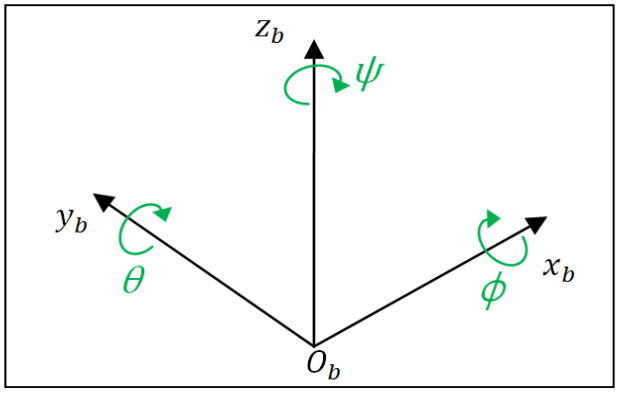


Figure 3.2 Orientations des angles d'Euler

La matrice R_η exprime la vitesse linéaire ν en (3.3) depuis le repère F_b, dans le repère F_i :

$$\dot{\xi} = R_\eta \nu \quad en\ (m/s) \tag{3.6}$$

Les matrices W_η et W_η^{-1} permettent de passer respectivement les vitesses angulaires du repère F_i au repère F_b et du repère F_b au repère F_i :

$$W_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -C_\theta T_\theta \\ 0 & C_\phi & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \quad ; \quad W_\eta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & S_\phi T_\theta & C_\phi T_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi / C_\theta & C_\phi / C_\theta \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

La relation entre la vitesse angulaire Ω dans le repère F_b et la vitesse angulaire $\dot{\eta}$ dans le repère F_i est :

$$\dot{\eta} = W_\eta^{-1} \Omega \quad en\ (rad/s) \tag{3.8}$$

Nous considérerons dans notre étude que le quadricoptère est un corps rigide (Charland-Arcand, 2014), ce qui implique qu'il peut être considéré comme indéformable. Cela permet de modéliser le drone comme étant une masse ponctuelle, sans volume; toute sa masse, ses forces et ses moments appliqués sont considérés appliqués en un point d tel que représenté à la. Figure 3.3. Le quadricoptère sera modélisé comme un corps rigide à six degrés de liberté, définis par sa position ξ et son orientation η dans l'espace.

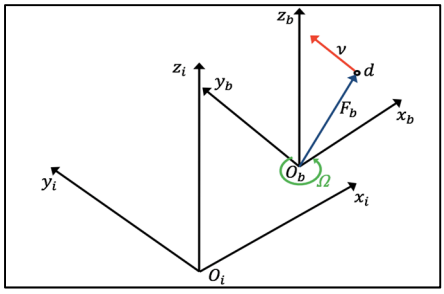


Figure 3.3 Représentation du quadricoptère en un point *d*

3.2.3 Étude d'une hélice

Dans le but de modéliser le drone dans le repère inertiel F_i commençons par étudier l'expression des forces et des couples appliqués sur une hélice du quadricoptère. Décomposons l'hélice en un nombre d'éléments *dr* infiniment petits, pour traiter chacun de ses éléments puis par intégration sur la géométrie de l'hélice nous obtiendrons une formulation des forces et des couples qui lui sont appliqués (A. Raptis, 2011).

Sur la Figure 3.4 nous apercevons la représentation d'un élément infiniment petit dr sur l'hélice. Cette représentation est réalisée dans le repère de l'hélice noté $F_h = \{O_h, x_h, y_h, z_h\}$ l'axe z_h pointant dans la direction du lecteur sur la Figure 3.4. L'origine O_h étant dans l'axe de rotation du moteur et la vitesse ω désignant la vitesse de rotation du moteur. Enfin, la longueur totale de l'hélice est notée R et la corde de l'hélice notée l.

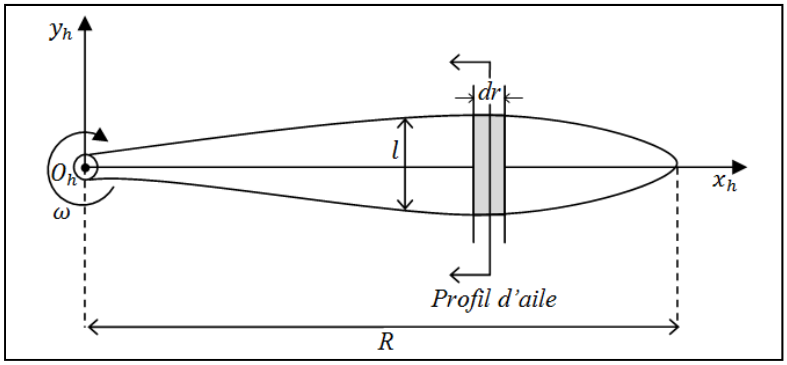


Figure 3.4 Élément infiniment petit dr sur l'hélice

La Figure 3.5 montre une vue de profil d'une hélice. La vitesse locale V_1 orientée selon l'angle d'attaque α, vue par un élément de l'hélice peut s'exprimer en fonction de ses composantes verticales V_0 et horizontale V_2 (Raptis, 2009). La composante verticale est générée lorsque l'hélice traverse l'air, suivant les mouvements de rotation de l'axe du moteur, V_0 est donc uniforme en tout point le long de l'hélice. La composante horizontale est générée par le mouvement de l'élément élémentaire le long de l'hélice, selon le mouvement de rotation de

l'axe du moteur. V_2 dépend donc de la position radiale de l'élément et de l'orientation avec laquelle l'hélice attaque le flux d'air.
La relation entre ces trois vitesses s'exprime tel que :

$$V_1^2 = V_0^2 + V_2^2 \tag{3.9}$$

Avec :

$$V_2 = r\,\omega \tag{3.10}$$

r étant le rayon correspondant à l'emplacement de la vitesse le long de l'axe x_h.

On aperçoit, toujours sur la Figure 3.5, la force de poussée élémentaire df ainsi que la force de traînée élémentaire dD (A. Raptis, 2011).

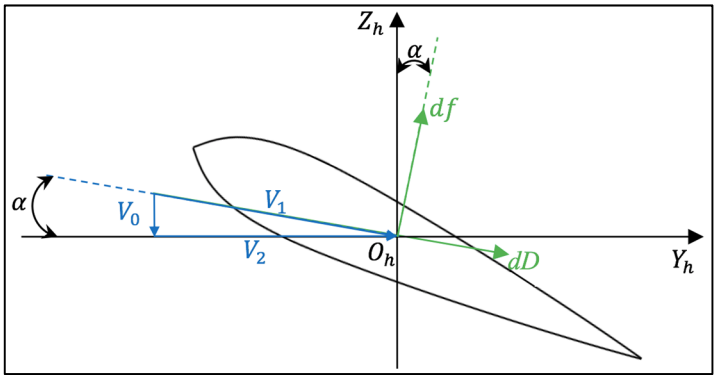


Figure 3.5 Représentation des forces appliquées sur un élément infiniment petit de l'hélice

La force élémentaire *df* s'exprime de la manière suivante (A. Raptis, 2011) :

$$df = \frac{1}{2} C_T \rho V_1^2 l dr \tag{3.11}$$

C_T étant définie comme un coefficient dépendant de la géométrie de et ρ la densité de l'air. Lorsque l'on intègre cette expression sur le long du profil nous obtenons l'expression de la poussée *f* totale créée par une pale de l'hélice (Fay, 2001) :

$$f = C_T \rho A (\omega R)^2 \tag{3.12}$$

En exprimant toute les constantes présentes dans l'équation (3.12) par k, avec $k = 2C_T \rho A R^2$, le facteur 2 permettant de tenir compte des deux pâles de l'hélice et A désignant l'aire de la surface du disque décrit par la rotation de l'hélice, nous pouvons ramener la force de poussée totale f_i sur l'hélice i tel que (Charland-Arcand, 2014) :

$$f_i = k\omega_i^2 \tag{3.13}$$

L'expression de la traînée élémentaire dD s'écrit (Fay, 2001) :

$$dD = \frac{1}{2} C_D \rho V_1^2 l dr \tag{3.14}$$

Où C_D est un coefficient dépendant de la géométrie de l'hélice. En intégrant l'équation (3.14) sur la longueur R d'une pale de l'hélice, nous obtenons :

$$D = C_D \rho A (\omega R)^2 \tag{3.15}$$

En exprimant toutes les constantes présentes à l'équation (3.15) et en tenant compte des deux pâles pour une hélice par la constante d, où $d = 2C_D \rho A R^2$, nous obtenons l'expression de la force de traînée D_i pour l'hélice i :

$$D_i = d\omega_i^2 \tag{3.16}$$

Lorsque le moteur entre en rotation avec une vitesse de rotation ω, la force de traînée D_i telle qu'exprimée à l'équation (3.16) est créée le long des rayons R des pâles de l'hélice. Le couple résistant qui en résulte, noté τ_a sur la Figure 3.6, tend à s'opposer à la vitesse de rotation de l'hélice.

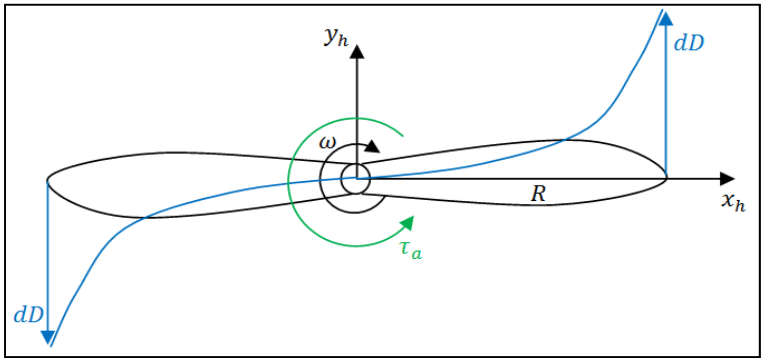


Figure 3.6 Couple induit par la traînée de l'hélice

L'expression du couple τ_a est tel que (Fay, 2001) :

$$\tau_a = \frac{1}{2} C_Q \rho A R (R\omega)^2 \tag{3.17}$$

Avec C_Q un coefficient de couple. En tenant compte de la totalité de l'hélice et en exprimant toute les constantes présentes à l'équation (3.17) telle que $b = C_Q \rho A R^3$, l'équation devient :

$$\tau_a = b\omega^{\,2} \tag{3.18}$$

On notera par ailleurs que lorsque l'hélice fonctionne en régime permanent, le couple moteur τ_i de l'hélice i est égale au couple résistant τ_{ai} induit par la traînée de l'hélice i.

3.2.4 Paramètres d'efforts

Commençons par exprimer les forces externes appliquées au quadricoptère dans le repère inertiel. L'expression des forces de portance générée par les hélices des quatre moteurs dans les axes des rotors, dans le repère de la base F_b est :

$$T_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f_i \end{bmatrix} en\ (N) \tag{3.19}$$

Or, selon (3.13) :

$$f_i = k\omega_i^2\ en\ (N) \tag{3.20}$$

Où k est une constante de portance liée au type d'hélice utilisé et ω_i la vitesse de rotation en rad/s de l'hélice i avec $i = 1, \dots, 4$.

À l'aide de la matrice définie en (3.5) la force T_z, exprimée dans le repère F_b du drone, devient dans le repère F_i :

$$F = R_\eta T_z l_3\ ; \quad en\ (N)$$

$$F = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ C_\theta C_\phi \end{bmatrix} T_z \tag{3.21}$$

Le couple τ_i crée par les rotors autour de l'axe de rotation du rotor i s'exprime comme suit :

$$\tau_i = b\omega_i^2 + I_M \dot{\omega}_i \tag{3.22}$$

Avec b la constante de traînée et I_M l'inertie du moteur. Généralement l'inertie électrique est négligée devant l'inertie mécanique. I_M est alors considérée nulle et les expressions des couples appliqués au drone peuvent s'écrire tel que :

$$\tau_b = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} en\ (N.m) \tag{3.23}$$

La Figure 3.7 illustre les forces $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, générées par la poussée des hélices, les vitesses angulaires des hélices sont notées $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, les couples $\{L, M, N\}$ autour des axes x_b, y_b, z_b et les couples résistants générés par la traînée des hélices seront notés $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$. Nous noterons qu'en régime permanent chacun de ces couples résistants est égal au couple moteur de l'hélice qui lui est associée.

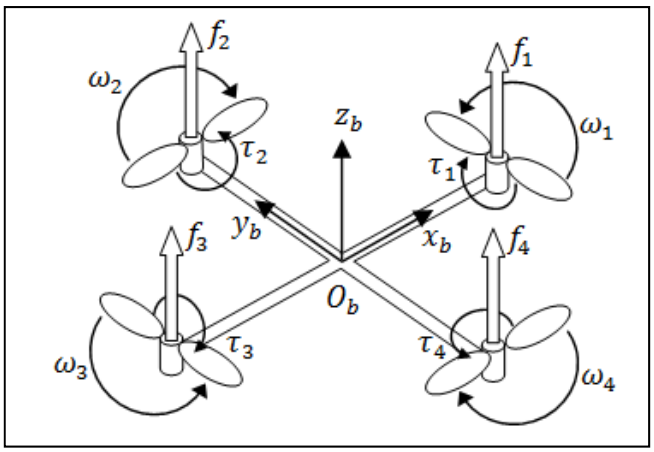


Figure 3.7 Représentation des forces, des vitesses des moteurs du quadricoptère et des couples agissant sur le quadricoptère

Le comportement du drone peut être obtenu à partir de l'équation (3.23). Une différence de vitesse entre ω_4 et ω_2 créera un couple L autour de l'axe x_b et modifiera son axe de roulis. Tandis qu'une différence entre les vitesses ω_3 et ω_1 créera un couple M autour de l'axe y_b et modifiera son axe de tangage. Enfin une différence de vitesse entre un couple d'hélices opposées (ω_1 et ω_3, ou ω_2 et ω_4) va créer un couple N autour de l'axe z_b et modifiera son azimuth.

Nous considérerons ici des déplacements du quadricoptère à faible vitesse, les effets aérodynamiques suivants peuvent alors être négligés (Bouabdallah, 2007) :

- L'effet de battement de l'hélice qui se crée lors du déplacement horizontal de l'hélice ;
- La friction de l'air sur le châssis du quadricoptère lorsqu'il pénètre dans l'air ;

- L'effet de sol généré par le retour de vent lorsque le drone vol trop près du sol, soit une demi-fois la longueur de l'hélice ;
- Les perturbations extérieures générées par le vent et l'air sur le drone ;
- On utilise principalement des moteurs sans balais, dont la dynamique électrique est plus rapide que celle mécanique du quadricoptère et peut être négligée.

3.2.5 Expressions des accélérations par la méthode de Newton

Pour exprimer les accélérations linéaires et angulaires, deux méthodes sont principalement utilisées : les équations de Newton Euler (Charland-Arcand, 2014; Saied et al., 2015), ou les équations de Lagrange (Luukonen, 2011). Les deux types de représentations arrivent à des résultats similaires et présentent des complexités identiques. La méthode de Newton Euler que nous utiliserons dans ce document est généralement privilégiée, car elle est plus directe. La méthode de Lagrange est plus générale et permet de considérer la partie mécanique du quadricoptère avec les forces et les couples qui lui sont appliqués ainsi que la partie électrique reliée aux moteurs et la chaîne de commande (Bouabdallah, 2007).

Le formalisme de Newton permet d'exprimer les équations du mouvement dans le repère de la base F_b du drone selon les angles d'Euler, tel que (ElKholy, 2014) :

$$I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega + \tau_G = \tau_b \tag{3.24}$$

avec $\times$ le produit vectoriel, Ω la vitesse angulaire du drone dans le repère de la base F_b, et I étant la matrice d'inertie définie telle que :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Nous avons approximé précédemment le quadricoptère par la représentation d'un point dans l'espace, sa structure peut donc être considérée comme symétrique. C'est pourquoi les termes hors diagonales de la matrice I représentée en (3.25) sont égaux à zéros.

L'hélice se comporte comme un gyroscope. Ainsi, toute sollicitation en mouvement, autour de l'un des deux axes perpendiculaires à l'axe de rotation, aura pour conséquence une rotation effective sur l'autre axe situé à 90° tel que représenté à la Figure 3.8.

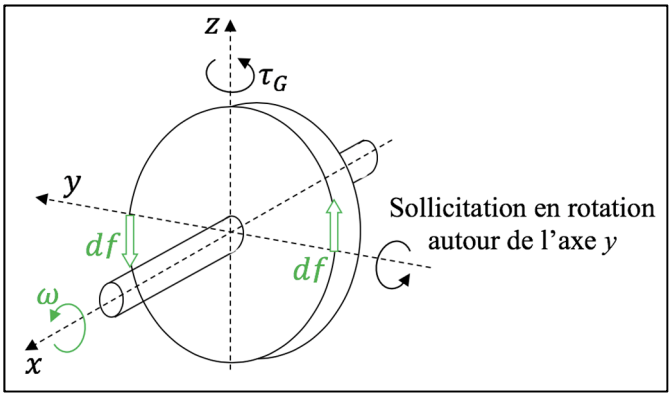


Figure 3.8 Représentation du couple gyroscopique

Le couple gyroscopique peut être exprimé de la manière suivante (ElKholy, 2014) :

$$\tau_G = \Omega \times [0\ 0\ J_r\omega_r]^T \tag{3.26}$$

Où ω_r désigne la vitesse relative des rotors tels que :

$$\omega_r = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 \tag{3.27}$$

En remplaçant les variables dans l'équation (3.24) par leurs expressions, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_r\omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p} \\ I_{yy}\dot{q} \\ I_{zz}\dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qI_{zz}\dot{\Psi} - \dot{\Psi}I_{yy}q \\ rI_{xx}p - pI_{zz}r \\ pI_{yy}q - qI_{xx}p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qJ_r\omega_r \\ -pJ_r\omega_r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Les expressions des accélérations angulaires donnent à partir de l'équation (3.29) :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{lk}{I_{xx}}(\omega_4^2 - \omega_2^2) - \frac{J_r}{I_{xx}}q\omega_r + \frac{I_{yy}}{I_{xx}}rq - \frac{I_{zz}}{I_{xx}}qr \\ \dot{q} &= \frac{lk}{I_{yy}}(\omega_3^2 - \omega_1^2) + \frac{J_r}{I_{yy}}p\omega_r + \frac{I_{zz}}{I_{yy}}pr - \frac{I_{xx}}{I_{yy}}rp \\ \dot{r} &= \frac{b}{I_{zz}}(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) + \frac{I_{xx}}{I_{zz}}qp - \frac{I_{yy}}{I_{zz}}pq \end{aligned} \tag{3.30}$$

Selon la seconde loi de Newton, les équations du mouvement d'un quadricoptère dans le repère F_i s'expriment comme suit (Nagaty, 2013) :

$$m\ddot{\xi} = F - mgl_3 + F_a \tag{3.31}$$

Ou $l_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ et F_a représente la force de frottement créée par la friction de l'air sur le châssis du quadricoptère lorsqu'il se déplace. Son expression peut être représentée par :

$$F_a = \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{zz} \end{bmatrix} \dot{\xi} \tag{3.32}$$

En remplaçant la valeur des expressions des variables de l'équation (3.31) nous obtenons :

$$m\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi \\ S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi \\ C_\theta C_\phi \end{bmatrix} T_z - \begin{bmatrix} A_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

À partir de l'équations (3.33) exprimons les accélérations linéaires dans le repère inertiel :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{(C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi)}{m} T_z - \frac{A_{xx}}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} &= \frac{(C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi)}{m} T_z - \frac{A_{yy}}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} &= \frac{C_\phi C_\theta}{m} T_z - \frac{A_{zz}}{m}\dot{z} - g\end{aligned} \tag{3.34}$$

La stratégie de contrôle est généralement développée à partir de l'expression des accélérations issues des équations (3.30) et (3.34) (Chovancová, Fico, Chovanec, & Hubinsk, 2014). Comme nous le verrons par la suite, il est également pratique de représenter le modèle du drone sous la forme (3.35) à partir des expressions (3.8), (3.24) pour le système en rotation et (3.6), (3.21), (3.31) pour le système en translation que nous désignerons respectivement par P_r et P_t :

$$P_r \quad \begin{cases} \dot{\eta} = W_\eta^{-1}\Omega & (3.35a) \\ I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega - \tau_G + \tau_b & (3.35b) \end{cases}$$

$$P_t \quad \begin{cases} \dot{\xi} = R_\eta \nu & (3.35c) \\ m\ddot{\xi} = T_z R_\eta l_3 - mgl_3 + F_a & (3.35d) \end{cases}$$

3.3 Modélisation par approximation linéaire

3.3.1 Introduction

Dans cette section nous allons exprimer une approximation linéaire pour un vol stationnaire du système d'équations (3.35a). Cette approximation vise à approcher l'expression du modèle non linéaire tout en rendant possible son expression dans le domaine de Laplace. Cela permettra de concevoir des modèles linéaires de compensateurs sur l'approximation linéaire du processus puis de les appliquer sur la version non linéaire du processus. L'influence des compensateurs sur les couplages entre les entrées et les sorties pourra ainsi être évaluée en utilisant un modèle du drone proche de la réalité.

La faiblesse de ce type de modélisation est son domaine de validité. En effet, la modélisation est réalisée dans des conditions de vol stationnaire. Ainsi, des dynamiques trop éloignées de

ces conditions particulières entraîneront une forte dégradation des performances des compensateurs.

3.3.2 Modèle

Pour concevoir des compensateurs linéaires, il est nécessaire d'avoir une représentation du processus sous forme de Laplace. Pour ce faire, nous allons extraire la partie nominale de (3.34) (ce qui revient à ignorer les couplages entre les entrées et les sorties) et considérer des conditions de vol stationnaire. Le modèle suivant est obtenu :

$$P_t = Translation \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{T_{z0}}{m}\theta - \frac{A_{xx}}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = \frac{T_{z0}}{m}\phi - \frac{A_{yy}}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m}T_z - \frac{A_{zz}}{m}\dot{z} - g \end{cases} \tag{3.36}$$

Où T_{z0} = *-mg* représente la force générée par les hélices pour maintenir un vol stationnaire. De plus, comme nous considérons des conditions de vol stationnaire les commandes *sin*(θ) et *sin*(ϕ) sur les axes *x*, *y* dans (3.34) peuvent être approximées par ϕ et θ (développement de Taylor). La commande sur l'axe *z* reste T_z.

Les conditions de vol du drone étant peu exigeantes dynamiquement, nous pouvons négliger les termes provenant des forces de Coriolis. Ainsi, la dynamique du système en rotation (3.30) peut être approximée par :

$$P_r = Rotation \quad \left\{ \ddot{\phi} = \frac{L}{I_{xx}}; \quad \ddot{\theta} = \frac{M}{I_{yy}}; \quad \ddot{\psi} = \frac{N}{I_{zz}} \right. \tag{3.37}$$

Avec les couples autour des axes ϕ, θ et ψ respectivement représentés par $L = lk(\omega_4^2 - \omega_2^2)$, $M = lk(\omega_3^2 - \omega_1^2)$, $N = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$. La représentation dans le domaine de

Laplace des équations (3.36) et (3.37) des transferts entre les angles désirées θ_d, ϕ_d la poussée désirée T_{z_d}, les couples L, M, N et les positions mesurées linéaires $\xi = \{x, y, z\}^T$ et angulaires $\eta = \{\theta, \phi, \psi\}^T$ donne (Remarquons ici que $\theta = \theta_d$ et $\phi = \phi_d$.) :

$$P(s) = diag(P_t, P_r) = diag\left(\begin{matrix} \frac{\frac{T_{z0}}{m}}{I_{yy}s\left(s+\frac{A_{xx}}{m}\right)}, & \frac{\frac{T_{z0}}{m}}{I_{xx}s\left(s+\frac{A_{yy}}{m}\right)}, & \frac{\frac{1}{m}}{s\left(s+\frac{A_{zz}}{m}\right)}, \\ \frac{1}{I_{yy}s^2}, & \frac{1}{I_{xx}s^2}, & \frac{1}{I_{zz}s^2} \end{matrix}\right) \quad (3.38)$$

3.4 Modélisation par approximation de série de Taylor

3.4.1 Linéarisation

Comme nous pouvons l'apercevoir aux équations (3.30) et (3.34), la modélisation d'un quadricoptère repose sur six équations pour déterminer les accélérations linéaires et angulaires. Cette représentation est complexe à modéliser et à appliquer, car les équations dépendent de variables communes : ϕ, θ, ψ et x, y, z. Ainsi, à des fins de simplifications il est possible de considérer que le quadricoptère effectue un vol autour d'un point d'équilibre. La linéarisation de Taylor autour d'un point d'équilibre général (détail en ANNEXE I), des équations (3.30) et (3.34) donne pour les accélérations linéaires et angulaires :

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{x} = &-\frac{A_{xx}}{m}\Delta\dot{x} + \frac{C_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta + \frac{-C_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0}+S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b_0}\Delta\Phi + \\ &\frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi + \frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}\Delta F_b \\ \Delta\ddot{y} = &-\frac{A_{yy}}{m}\Delta\dot{y} + \frac{S_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta + \frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0}-C_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m} \\ &+ \frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+S_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta + \frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}\Delta F_b \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\Delta\ddot{z} = -\frac{A_{zz}}{m}\Delta\dot{z} - \frac{S_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta - \frac{C_{\theta_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi + \frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}\Delta F_b$$

$$\Delta\ddot{\Phi} = \frac{\Delta\tau_{\phi}}{I_{xx}} + \left(\left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{xx}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\theta} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\Delta\omega_r$$

$$\Delta\ddot{\theta} = \frac{\Delta\tau_{\theta}}{I_{yy}} + \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\Psi} + \left(\frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{yy}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\phi} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0 - \dot{\omega}_{r_0}\Delta\omega_r$$

$$\Delta\ddot{\Psi} = \frac{\Delta\tau_{\Psi}}{I_{yy}} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\theta} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\Delta\dot{\phi}$$

Ensuite, pour une des quatre conditions d'équilibre de vols reportées au Tableau 3.1 les simplifications correspondantes sont appliquées à l'équation (3.39) (Zhang, 2014).

Tableau 3.1 Combinaisons de différent point d'équilibre possible à utiliser pour la linéarisation de Taylor

Condition d'équilibre		Simplification		
1	Vol stationnaire	$\phi = 0$	$\sin(\phi) = 0$	$\cos(\phi) = 1$
		$\theta = 0$	$\sin(\theta) = 0$	$\cos(\theta) = 1$
		$\psi = 0$	$\sin(\psi) = 0$	$\cos(\psi) = 1$
		$x = 0$	$y = 0$	$z = z_0$
		$\dot{x} = 0$	$\dot{y} = 0$	$\dot{z} = 0$
2	Déplacement vertical à vitesse constante	$\phi = 0$	$\sin(\phi) = 0$	$\cos(\phi) = 1$
		$\theta = 0$	$\sin(\theta) = 0$	$\cos(\theta) = 1$
		$\psi = \psi_0$	$\sin(\psi) = \sin(\psi_0)$	$\cos(\psi) = \cos(\psi_0)$
		$x = 0$	$y = 0$	$z = \dot{z}_0 t$
		$\dot{x} = 0$	$\dot{y} = 0$	$\dot{z} = \dot{z}_0$
3	Déplacement horizontal sur l'axe x_b avec l'angle de tangage θ_0 constant	$\phi = 0$	$\sin(\phi) = 0$	$\cos(\phi) = 1$
		$\theta = \theta_0$	$\sin(\theta) = \sin(\theta_0)$	$\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$
		$\psi = 0$	$\sin(\psi) = 0$	$\cos(\psi) = 1$
		$x = \dot{x}_0 t$	$y = 0$	$z = z_0$
		$\dot{x} = \dot{x}_0$	$\dot{y} = 0$	$\dot{z} = 0$

4	Déplacement horizontal sur l'axe $y_b$avec l'angle de roulis ϕ_0 constant	$\phi = \phi_0$ $\theta = 0$ $\psi = 0$	$\sin(\phi) = \sin(\phi_0)$ $\sin(\theta) = 0$ $\sin(\psi) = 0$	$\cos(\phi) = \cos(\phi_0)$ $\cos(\theta) = 1$ $\cos(\psi) = 1$
		$x = 0$ $\dot{x} = 0$	$y = \dot{y}_0 t$ $\dot{y} = \dot{y}_0$	$z = z_0$ $\dot{z} = 0$

Les conditions de vol stationnaire reportées au Tableau 3.1, appliquée à (3.39) donne :

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{A_{xx}}{m}\dot{x} - g\theta \\
\ddot{y} &= -\frac{A_{yy}}{m}\dot{y} - g\phi \\
\ddot{z} &= -\frac{A_{zz}}{m}\dot{z} + \frac{2k\omega_0(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)}{m} \\
\ddot{\Phi} &= \frac{2lk\omega_0(\omega_4 - \omega_2)}{I_{xx}} \\
\ddot{\theta} &= \frac{2lk\omega_0(\omega_3 - \omega_1)}{I_{yy}} \\
\ddot{\Psi} &= \frac{2b\omega_0(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{zz}}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{4k}}$$

Le système d'équations des accélérations linéaires et angulaires étant linéarisé autour d'un point d'équilibre, nous allons dans la prochaine partie pouvoir modéliser le drone par retour d'état. Ce qui permettra par la suite de développer une stratégie de commande pour contrôler les déplacements du quadricoptère avec des compensateurs linéaires.

3.4.2 Modélisation du quadricoptère par modèle d'état

La représentation d'état est fréquemment utilisée pour les systèmes multivariables, car elle permet d'accéder à une modélisation sous forme matricielle de boucle de commande complexe

ainsi que d'étudier leurs stabilités / commandabilité. Un autre avantage est la possibilité de passer aisément dans le domaine de Laplace et ainsi de pouvoir réaliser des études fréquentielles permettant de concevoir des compensateurs linéaires. Les équations d'états permettant de modéliser le système d'équations du quadricoptère (3.40) s'expriment par :

$$\dot{X} = AX + BU \quad ; \quad Y = CX \tag{3.41}$$

Où l'on définit :

- *U* est le vecteur des commandes ou des entrées : $dim(U) = m$;
- *X* est le vecteur d'état : $dim(X) = n$;
- *Y* est le vecteur des sorties : $dim(Y) = p$;
- *A* est la matrice d'évolution du système : $dim(A) = (n \times n)$;
- *B* est la matrice d'application de la commande : $dim(B) = (n \times m)$;
- *C* est la matrice d'application de l'observation : $dim(C) = (p \times n)$.

Dans ce cas la matrice d'entrées du quadricoptère est composée des vitesses angulaires des moteurs ω_1 à ω_4 et s'exprime telle que :

$$U = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \tag{3.42}$$

Définissons le vecteur d'état *X* du quadricoptère en fonction des positions et vitesses, linéaires et angulaires tel que :

$$X = [x \quad y \quad z \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \phi \quad \theta \quad \Psi \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\Psi}]^T \tag{3.43}$$

En dérivant l'expression du vecteur d'état (3.43) nous obtenons :

$$\dot{X} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z} \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\Psi} \quad \ddot{\phi} \quad \ddot{\theta} \quad \ddot{\Psi}]^T \tag{3.44}$$

À partir des équations (3.40) nous pouvons résumer l'ensemble des équations d'états du quadricoptère, pour les vitesses et les accélérations, linéaires et angulaires, selon le modèle mathématique suivant :

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = v_x \quad ; \quad \ddot{x} = -\frac{A_{xx}}{m}\dot{x} - g\theta \\
&\dot{y} = v_y \quad ; \quad \ddot{y} = -\frac{A_{yy}}{m}\dot{y} + g\Phi \\
&\dot{z} = v_z \quad ; \quad \ddot{z} = -\frac{A_{zz}}{m}\dot{z} + \frac{2k\omega_0(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{m} \\
&\dot{\Phi} = p \quad ; \quad \ddot{\Phi} = \frac{2lk\omega_0(\omega_4-\omega_2)}{I_{xx}} \\
&\dot{\theta} = q \quad ; \quad \ddot{\theta} = \frac{2lk\omega_0(\omega_3-\omega_1)}{I_{yy}} \\
&\dot{\Psi} = r \quad ; \quad \ddot{\Psi} = \frac{2b\omega_0(\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4)}{I_{zz}}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

La mise sous forme matricielle de la représentation d'états (3.45) donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{xx}}{m} & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{yy}}{m} & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_{zz}}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \Phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2k\omega_0}{m} & \frac{2k\omega_0}{m} & \frac{2k\omega_0}{m} & \frac{2k\omega_0}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2lk\omega_0}{I_{xx}} & 0 & \frac{2lk\omega_0}{I_{xx}} \\ -\frac{2lk\omega_0}{I_{yy}} & 0 & \frac{2lk\omega_0}{I_{yy}} & 0 \\ \frac{2b\omega_0}{I_{zz}} & -\frac{2b\omega_0}{I_{zz}} & \frac{2b\omega_0}{I_{zz}} & -\frac{2b\omega_0}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons une structure de commande sur les positions linéaires x, y, z ainsi que sur l'axe de lacet ψ. Le vecteur de sortie Y peut alors être représenté comme suit :

$$Y = [x\ y\ z\ \psi]^T \tag{3.47}$$

Par déduction, nous obtenons l'expression de la sortie Y et de la matrice C :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

Cette expression matricielle sous forme de schéma synoptique, peut également être représentée sous la forme suivante :

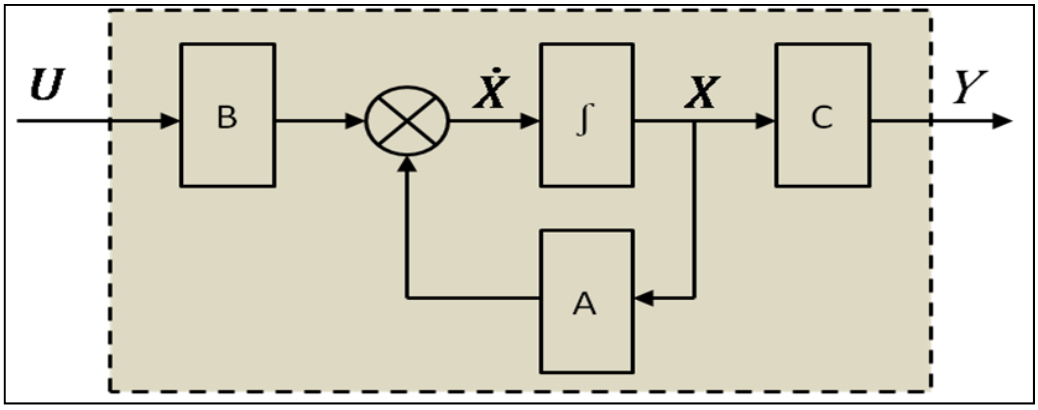


Figure 3.9 Représentation sous forme de schéma synoptique de la modélisation d'état d'un système

Le Tableau 3.2 expose des paramètres constants d'un modèle de quadricoptère utilisé par l'entreprise ARA Robotique[2].

Tableau 3.2 Paramètres constants d'un modèle de quadrotor d'ARA Robotique

Constante	Unité	Valeur
g	m/s^2	9.81
m	kg	2.2
l	m	0.32
k	kg.m	2.98e-6
b	$kg.m^2$	1,140e-7
I_{xx}	$kg.m^2$	0.04514
I_{yy}	$kg.m^2$	0.03582
I_{zz}	$kg.m^2$	0.04409
A_{xx}	kg/s	0.25
A_{yy}	kg/s	0.25
A_{zz}	kg/s	0.25
w_0	rad/s	1345

[2] https://www.ara-uas.com

En appliquant les valeurs numériques du Tableau 3.2 dans l'équation (3.46) nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1136 & 0 & 0 & 0 & -9.81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1136 & 0 & 9.81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1136 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \Phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0036 & 0.0036 & 0.0036 & 0.0036 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5283 & 0 & 0.5283 \\ -0.5283 & 0 & 0.5283 & 0 \\ 0.0696 & -0.0696 & 0.0696 & -0.0696 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

L'équation (3.50), permet d'exprimer la fonction de transfert dans le domaine Laplace à partir des matrices utilisées pour la représentation d'état :

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{3.50}$$

En utilisant Matlab pour faire le calcul exprimé en (3.50), nous obtenons pour $P(s)$:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} \frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0 & -\frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0 \\ 0 & -\frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0 & \frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} \\ \frac{0.0036}{s(s+0.1136)} & \frac{0.0036}{s(s+0.1136)} & \frac{0.0036}{s(s+0.1136)} & \frac{0.0036}{s(s+0.1136)} \\ \frac{0.06955}{s^2} & -\frac{0.06955}{s^2} & \frac{0.06955}{s^2} & -\frac{0.06955}{s^2} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

3.4.3 Représentation du modèle

La fonction de transfert entre la sortie $Y(s)$ et l'entrée $R(s)$ en fonction du compensateur $C(s)$ et du processus $P(s)$ s'exprime tel que : $T(s) = Y(s)R(s) = P(s)C(s)(I + P(s)C(s))^{-1}R(s)$, ou I est une matrice unitaire. Dans le cas du quadricoptère nous pouvons remplacer $P(s)$ par l'expression (3.51) et le compensateur $C(s)$ par une matrice diagonale de dimension 4×4 tel que $C(s) = diag[C_n(s)]$ avec $n = \{1, 2, 3, 4\}$. En omettant la variable de Laplace "s" dans les matrices pour alléger l'expression de $T(s)$ nous obtenons :

$$T(s) = \begin{bmatrix} P_{11}C_1 & P_{12}C_2 & P_{13}C_3 & P_{14}C_4 \\ P_{21}C_1 & P_{22}C_2 & P_{23}C_3 & P_{24}C_4 \\ P_{31}C_1 & P_{32}C_2 & P_{33}C_3 & P_{34}C_4 \\ P_{41}C_1 & P_{42}C_2 & P_{43}C_3 & P_{44}C_4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}C_1 & P_{12}C_2 & P_{13}C_3 & P_{14}C_4 \\ P_{21}C_1 & P_{22}C_2 & P_{23}C_3 & P_{24}C_4 \\ P_{31}C_1 & P_{32}C_2 & P_{33}C_3 & P_{34}C_4 \\ P_{41}C_1 & P_{42}C_2 & P_{43}C_3 & P_{44}C_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (3.52)$$

De l'équation (3.51) nous remarquons que :

$$\begin{gathered} P_{11} = -P_{13} = P_x \quad ; \quad P_{22} = -P_{24} = P_y \\ P_{12} = P_{14} = P_{21} = P_{23} = 0 \quad ; \quad P_{31} = P_{32} = P_{33} = P_{34} = P_z \\ P_{41} = -P_{42} = P_{43} = -P_{44} = P_\psi \end{gathered} \quad (3.53)$$

L'expression (3.53) nous permet également de définir une notation plus explicite que nous utiliserons par la suite avec : P_x, P_y, P_z, P_ψ. En ajoutant (3.53) dans (3.52) la transmission $T(s)$ à partir de l'expression de la boucle ouverte $J(s) = P(s)C(s)$ devient :

$$T(s) = \overbrace{\begin{bmatrix} -P_xC_1 & 0 & P_xC_3 & 0 \\ 0 & -P_yC_2 & 0 & P_yC_4 \\ P_zC_1 & P_zC_2 & P_zC_3 & P_zC_4 \\ P_\psi C_1 & -P_\psi C_2 & P_\psi C_3 & -P_\psi C_4 \end{bmatrix}}^{J(s)} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -P_xC_1 & 0 & P_xC_3 & 0 \\ 0 & -P_yC_2 & 0 & P_yC_4 \\ P_zC_1 & P_zC_2 & P_zC_3 & P_zC_4 \\ P_\psi C_1 & -P_\psi C_2 & P_\psi C_3 & -P_\psi C_4 \end{bmatrix}}_{J(s)} \right)^{-1} \quad (3.54)$$

En modifiant la matrice B de l'équation (3.46) il possible d'obtenir une matrice diagonale de la transmission (3.54), facilitant ainsi la conception des compensateurs linéaires. Cela revient à modifier l'expression du vecteur d'entrée U exprimée en (3.42) tel que :

$$U = \left[u_z \; u_\phi \; u_\theta \; u_\psi\right]^T \tag{3.55}$$

Avec :
$$\begin{aligned} u_z &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \; ; u_\phi = \omega_4 - \omega_2 \\ u_\theta &= \omega_3 - \omega_1 \; ; u_\psi = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \end{aligned} \tag{3.56}$$

La nouvelle expression matricielle BU est :

$$BU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2k\omega_0}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2lk\omega_0}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2lk\omega_0}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2b\omega_0}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_z \\ u_\varphi \\ u_\theta \\ u_\psi \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

Nous pouvons remarquer que le produit BU est strictement identique entre les équations (3.46) et (3.57). Par ailleurs, les matrices A et C sont identiques à celles décrites aux équations (3.46) et (3.48). En prenant *B* telle qu'en (3.57) nous pouvons alors exprimer la nouvelle fonction de transfert $P(s)$ à l'aide de l'équation (3.50). Il s'ensuit :

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_x & 0 \\ 0 & p_y & 0 & 0 \\ p_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\psi \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Pour nous rapprocher d'une matrice diagonale nous pouvons inverser les lignes 1 et 3 telles que les liens entre les variables à commander z_m, y_m, x_m, ψ_m et les entrées de consignes z_c, y_c, x_c et ψ_c soient définis en utilisant les valeurs du Tableau 3.2 par :

$$P(s) = diag(p_z(s) \quad p_y(s) \quad p_x(s) \quad p_\psi(s))$$
$$P(s) = diag\left(\frac{0.0036}{s(s+0.1136)} \quad -\frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} \quad -\frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} \quad -\frac{0.06965}{s^2}\right) \tag{3.59}$$

La nouvelle expression de la matrice $T(s) = PC(I+PC)^{-T}$, avec $P(s)$ diagonale issue de (3.59) et $C(s)$ est également diagonale :

$$T(s) = diag\left(T_z = \frac{P_z C_z}{1+P_Z C_z}, T_y = \frac{P_y C_y}{1+P_y C_y}, T_x = \frac{P_x C_x}{1+P_x C_x}, T_\psi = \frac{P_\psi C_\psi}{1+P_\psi C_\psi}\right) \tag{3.60}$$

En exprimant les sorties $\{Z(s),\ Y(s),\ X(s),\ \psi(s)\}$ en fonction de leurs entrées respectives $\{Z_c(s),\ Y_c(s),\ X_c(s),\ \psi_c(s)\}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} Z(s) &= T_z(s)Z_c(s) \\ Y(s) &= T_y(s)Y_c(s) \\ X(s) &= T_x(s)X_c(s) \\ \psi(s) &= T_\psi(s)\psi_c(s) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Comme nous pouvons le constater dans les équations (3.61) chaque compensateur $C_n(s)$ est associé à une unique transmission $T_n(s)$ ou $n = \{z, y, x, \psi\}$, la conception des compensateurs en sera alors facilité. Bien qu'en réalité ce type de représentation omet la présence des couplages, cela permet une bonne première approximation pour concevoir des compensateurs linéaires et en comparer les résultats.

3.4.4 Commandabilité et observabilité

Pour évaluer la commandabilité et l'observabilité du système sous forme de représentation d'état (3.46) nous pouvons diviser celui-ci en quatre systèmes SISO suivants :

- **Chaîne d'altitude (A_z, B_z, C_z, D_z) avec $x_z = [z \quad v_z]^T$:**

$$\begin{bmatrix}\dot{z}\\ \ddot{z}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{A_{zz}}{m}\end{bmatrix}}_{A_z}\begin{bmatrix}z\\ v_z\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{2k\omega_0}{m}\end{bmatrix}}_{B_z}u_z \quad ; \quad y_z = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{C_z}\begin{bmatrix}z\\ v_z\end{bmatrix} \tag{3.62}$$

- **Chaîne de roulis (A_y, B_y, C_y, D_y) avec $\boldsymbol{x_y} = [\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{v_y} \quad \phi \quad \boldsymbol{p}]^{\boldsymbol{T}}$:**

$$\begin{bmatrix}\dot{y}\\ \ddot{y}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{A_{yy}}{m} & g & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{A_y}\begin{bmatrix}y\\ v_y\\ \phi\\ p\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{2lk\omega_0}{I_{yy}}\end{bmatrix}}_{B_y}u_\phi \quad ; \quad y_y = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{C_y}\begin{bmatrix}y\\ v_y\\ \phi\\ p\end{bmatrix} \tag{3.63}$$

- **Chaîne de tangage (A_x, B_x, C_x, D_x) avec $\boldsymbol{x_x} = [\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{v_x} \quad \boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{q}]^{\boldsymbol{T}}$:**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\theta}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{A_{xx}}{m} & -g & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{A_x}\begin{bmatrix}y\\ v_x\\ \theta\\ q\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \dfrac{2lk\omega_0}{I_{xx}}\end{bmatrix}}_{B_x}u_\theta \quad ; \quad y_x = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{C_x}\begin{bmatrix}y\\ v_x\\ \theta\\ q\end{bmatrix} \tag{3.64}$$

- **Chaîne de lacet (A_ψ, B_ψ, C_ψ, D_ψ) avec $\boldsymbol{x_\psi} = [\boldsymbol{\psi} \quad \boldsymbol{r}]^{\boldsymbol{T}}$:**

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{r}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{A_\psi}\begin{bmatrix}\psi\\ r\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{2b\omega_0}{I_{zz}}\end{bmatrix}}_{B_\psi}u_\psi \quad ; \quad y_\psi = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{C_\psi}\begin{bmatrix}\psi\\ r\end{bmatrix} \tag{3.65}$$

Remarquons que pour chacune des chaînes de commande la matrice *C* permet de transmettre les variables d'états sur la sortie associée. Dans le cas réel, cela peut être réalisé par l'utilisation des capteurs comme le GPS, la centrale de mesure inertielle (Inertial Measurement Unit - IMU) ou l'accéléromètre qui permettent d'obtenir les mesures de position, de vitesse et d'accélération (Mahony, Kumar, & Corke, 2012). À partir des représentations d'états (3.62) à

(3.65) il est possible d'obtenir une représentation dans le domaine de Laplace pour chacune des 4 chaînes de commandes en utilisant la relation (3.50).

Nous allons déterminer la commandabilité et l'observabilité pour chacune des chaînes d'altitude, de roulis, de tangage et de lacet à partir des équations (3.62) à (3.65). La vérification de la commandabilité permet d'estimer la possibilité d'amener les variables d'états d'une valeur initiale à une valeur finale. L'observabilité va mettre en évidence la possibilité de mesurer l'évolution des variables d'états en de sortie.

Les représentations d'états entre (3.62) et (3.65) ne possèdent qu'une seule entrée chacune (u_z, u_φ, u_θ et u_ψ). Dans ces conditions, la commandabilité d'un système est assurée si le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ définie en (3.66) est égal à n (Le rang de la matrice A étant de dimension $n \times n$). Autrement dit, si $\det(\mathcal{C}) \neq 0$ alors le système est dit complètement commandable (c.c.).

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} [B, \quad AB, \quad \ldots \quad , A^{n-1}B] \tag{3.66}$$

L'observabilité des représentations d'états (3.62) à (3.65) sera assurée pour autant que le rang de la matrice $\mathcal{O}$ soit égal à n. Soit que $\det(\mathcal{O}) \neq 0$

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

Le calcul des matrices de commandabilité et d'observabilité, ainsi que le nombre d'états non commandables et non observables sont reportés au Tableau 3.3. Nous en déduisons que le système est entièrement commandable et observable ; il sera donc possible de réaliser une boucle de commande sur les variables x, y, z, ψ. Notons toutefois qu'en réalité la qualité des capteurs en termes de précision et de bande passante ainsi que des estimateurs[3] associés ont

[3] Plus de détails concernant les estimateurs se trouvent au CHAPITRE 8.

une grande influence sur la qualité des signaux observés et donc sur les performances de la boucle de commande.

Tableau 3.3 États de la commandabilité et de l'observabilité chaînes d'altitude, de roulis, de tangage et de lacet

i	Expression de $\mathcal{C}_i$	rang($\mathcal{C}_i$)	rang(A_i)	Nombre d'états non commandable = rang($\mathcal{C}_z$) − rang(A_z)
z	$[B_z \quad A_z B_z]$	2	2	0
y	$[B_y \quad A_y B_y \quad A_y^2 B_y \quad A_y{}^3 B_y]$	4	4	0
x	$[B_x \quad A_x B_x \quad A_x^2 B_x \quad A_x{}^3 B_x]$	4	4	0
ψ	$[B_\psi \quad A_\psi B_\psi]$	2	2	0
i	Expression de $\mathcal{O}_i$	rang($\mathcal{O}_i$)	rang(A_i)	Nombre d'états non observable = rang($\mathcal{O}_z$) − rang(A_z)
x	$[C_z \quad C_z A_z]^T$	2	2	0
y	$[C_y \quad C_y A_y \quad C_y A_y^2 \quad C_y A_y{}^3]^T$	4	4	0
z	$[C_x \quad C_x A_x \quad C_x A_x^2 \quad C_x A_x{}^3]^T$	4	4	0
ψ	$[C_\psi \quad C_\psi A_\psi]^T$	2	2	0

3.5 Structure de commande

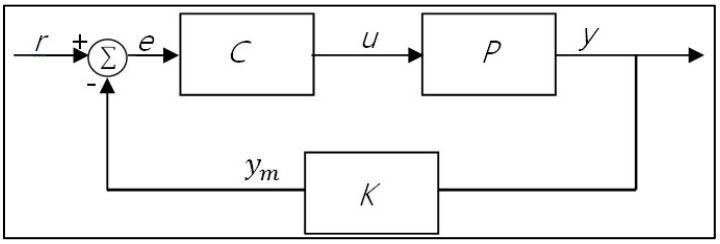
Pour chacune des représentations linéaires et non linéaires, il existe généralement deux types d'architecture de commande. Lorsque le compensateur considère les dynamiques de translation et de rotation d'un seul tenant, on parle de système de translation et de rotation en cascade. Si le compensateur considère séparément les systèmes de translation et de rotation, nous parlerons dans ce cas de système de translation et rotation séparée. Il en découle quatre types d'architectures différentes qui seront développés dans cette partie (2 représentations linéaire et non linéaire × 2 architectures en cascade ou séparée).

On notera dans ces structures de commande la présence d'éléments appelés "mixer". Les "mixer" sont d'intérêts pour deux raisons : tout d'abord, ils permettent d'accéder aux valeurs des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et ainsi d'évaluer la réalisabilité de la commande d'un

point de vue pratique ; puis, lors de l'implémentation dans un système réel la sortie du contrôleur de vol correspond aux signaux de commandes PWM (Pulse Width Modulation) envoyés aux ESC (Electronics Speed Controller) dont le rôle est de faire varier la tension aux bornes des moteurs. Or l'obtention de ces signaux de sorties passent par l'utilisation des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

3.5.1 Modélisation linéaire du processus avec commande en translation et rotation en cascade

La structure de commande exprimée aux relations (3.61) est représentée à la



. Les variables d'états choisies pour commander les entrées sont les positions linéaires x, y, z sur les trois axes ainsi que l'orientation ψ autour de l'axe z, donnant ainsi le vecteur de consigne $R = [z_d, y_d, x_d, \psi_d]^T$; les positions mesurées sont notées $Y = [z_m, y_m, x_m, \psi_m]^T$; le vecteur d'erreur est noté $E = [e_z, e_y, e_x, e_\psi]^T$; le vecteur des signaux de commande $U = [u_z, u_y, u_x, u_\psi]^T$. Le processus $P(s) = diag(P_z, P_y, P_x, P_\psi)$ et le compensateur $C(s) = diag(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

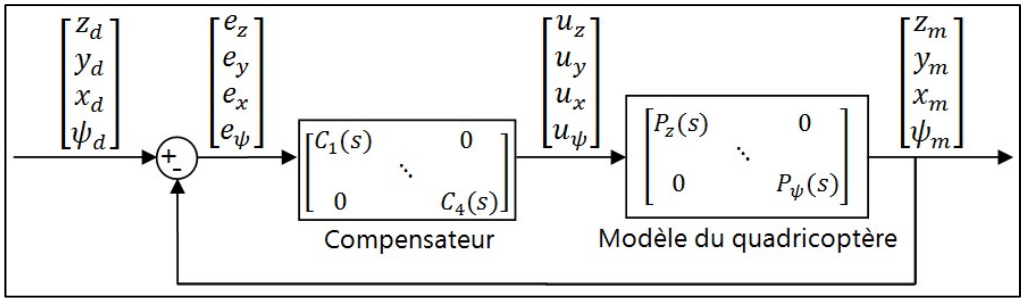
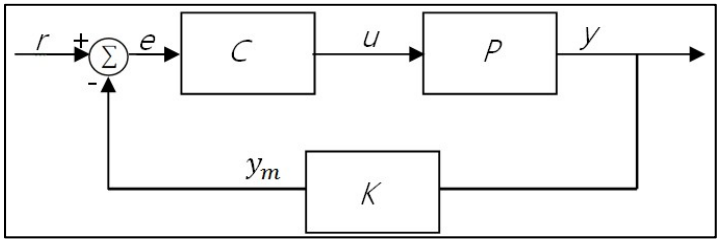


Figure 3.10 Boucle fermée avec le processus diagonal linéarisé pour une commande en translation et de rotation en cascade

Cependant, cette structure ne permet pas d'accéder aux vitesses de rotation $\omega_1, \ldots, \omega_4$. À partir de (3.56) le rapport entre les commandes $u_z, u_\phi, u_\theta, u_\psi$ et les vitesses $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ s'écrit en définissant la matrice M_1 telle que :

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4\end{bmatrix} = \mathrm{M}_1 U = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_z\\ u_\varphi\\ u_\theta\\ u_\psi\end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Sur la Figure 3.11 nous apercevons la matrice M_1 située entre le compensateur $C(s)$ identique à celui de la



et le processus $P(s)$ qui dans ce cas est un modèle non diagonal extrait de l'équation (3.51). L'accès aux vitesses de rotation $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ est alors possible.

Nous remarquons également sur la Figure 3.11 la présence d'une matrice M_2 sur la boucle de retour. Cela permet de réagencer l'ordre du vecteur de sortie la matrice $P(s)$ à z_m, y_m, x_m, ψ_m pour correspondre au vecteur d'entrée z_d, y_d, x_d, ψ_d. Son expression est telle que :

$$\mathrm{M}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.69}$$

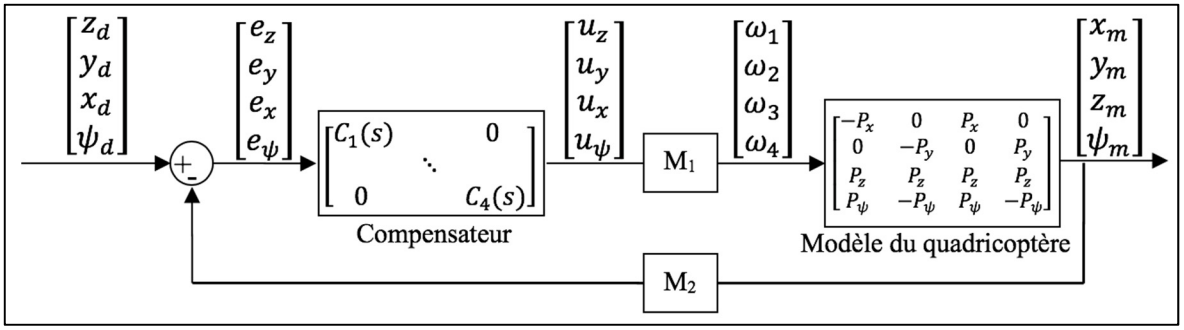


Figure 3.11 Boucle fermée avec le processus non diagonal linéarisé pour une commande en translation et de rotation en cascade

Pour nous assurer de ne pas avoir ajouté d'instabilité avec l'insertion des matrices M_1 et M_2 dans la boucle de commande, nous pouvons vérifier la valeur de leur déterminant, soit :

$$\det(M_1) = \frac{1}{8}$$
$$\det(M_2) = -1 \tag{3.70}$$

Les déterminants de M_1 et M_2 étant différents de zéro, aucune instabilité n'est ajoutée dans la boucle fermée.

3.5.2 Modélisation linéaire du processus avec commande en translation et rotation séparée

Lorsque la structure de commande considère séparément les contrôles en translation et en rotation, deux boucles de commande imbriquées apparaissent. La première boucle représentée à la Figure 3.12, dites interne est composée du compensateur $C_r = diag(C_\phi, C_\theta, C_\psi)$ à partir de l'erreur entre les valeurs désirées ϕ_d et θ_d fournit par la boucle externe et ψ_d fixée par la référence et les mesures en orientation des angles $\eta = [\phi, \theta, \psi]^T$. La dynamique de rotation $P_r = diag(P_\phi, P_\theta, P_\psi) = diag\left(\frac{-2lk\omega_0}{I_{yy}s^2}, \frac{-2lk\omega_0}{I_{xx}s^2}, \frac{2b\omega_0}{I_{zz}s^2}\right)$ étant extraite des représentations d'état (3.62) à (3.64). La boucle externe est quant à elle composée du compensateur en translation $C_t = diag(C_x, C_y, C_z)$ entre les positions linéaires désirées ξ_d et mesurées x, y, z. La

dynamique de translation $P_t = diag(P_x,\ P_y,\ P_z) = diag\left(\frac{g}{s\left(s+\frac{A_{yy}}{m}\right)}, \frac{-g}{s\left(s+\frac{A_{xx}}{m}\right)}, \frac{1}{m}\frac{2k\omega_0}{s\left(s+\frac{A_{zz}}{m}\right)}\right)$ est extrait de la représentation d'état (3.62) à (3.64). Les contrôleurs C_t et C_r permettent de fournir respectivement les commandes u_z et $u_\phi,\ u_\theta,\ u_\psi$ au modèle par l'intermédiaire de l'étage "Mixer" donnant l'accès aux vitesses de rotation des moteurs $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$. Les matrices de passage M_1 et M_2 étant identiques à (3.68) et (3.69).

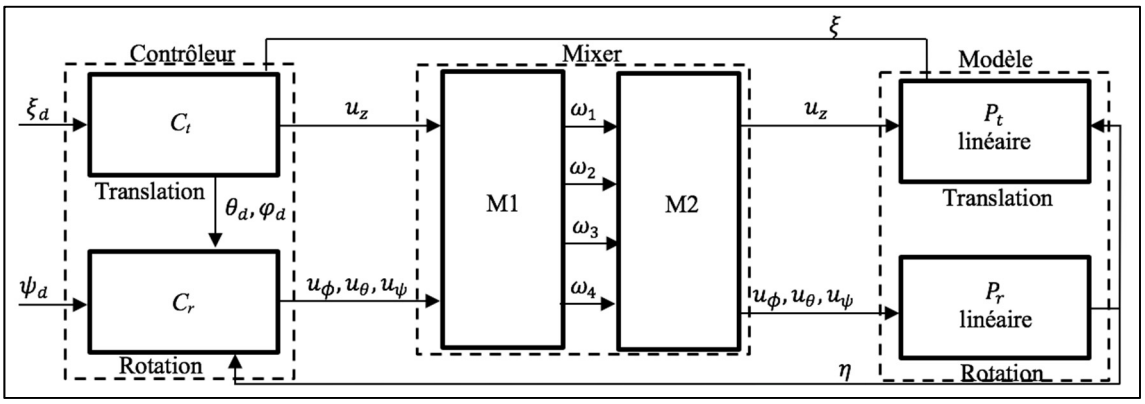


Figure 3.12 Boucle fermée avec le processus linéarisé pour une commande en translation et rotation séparées

Notons que dans ce cas de commande linéaire les retours d'asservissements sont les mesures des positions linéaires ξ et angulaires η. Les modèles du drone en translation P_t et en rotation P_r ayant été définis en (3.38).

3.5.3 Modélisation non linéaire du processus avec commande en translation et rotation en cascade

Dans le cas des commandes non linéaires en cascade comme celle par backstepping, les sorties du compensateur C représentent les couples $L,\ M,\ N$ (3.23) et la force de poussée des hélices T_z (3.19) tel que représentée à la Figure 3.13.

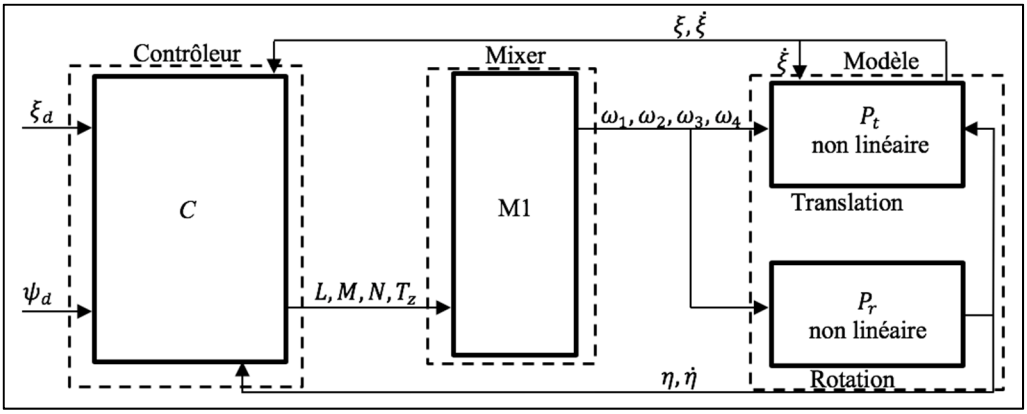


Figure 3.13 Boucle fermée avec le processus non linéaire pour une commande en translation et de rotation en cascade

Le mixer M_1 permet à partir des expressions (3.19) et (3.23) de définir le transfert entre les commandes *L, M, N,* T_z et les vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 comme suit :

$$\omega_1 = \sqrt{-\frac{M}{2lk} + \frac{N}{4b} + \frac{T_z}{4k}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{-\frac{L}{2lk} - \frac{N}{4b} + \frac{T_z}{4k}}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{M}{2lk} + \frac{N}{4b} + \frac{T_z}{4k}} \; ; \; \omega_4 = \sqrt{\frac{L}{2lk} - \frac{N}{4b} + \frac{T_z}{4k}} \tag{3.71}$$

Les modèles P_t et P_r correspondent à l'expression des accélérations linéaires et angulaires résumée en (3.35). Les retours de mesures nécessaires au contrôleur *C* sont les positions et les vitesses linéaires $\xi, \dot{\xi}$ et angulaires $\eta, \dot{\eta}$, la consigne étant directement donnée par les valeurs désirées ξ_d et ψ_d.

3.5.4 Modélisation non linéaire du processus avec commande en translation et en rotation séparée

La structure de commande de drone avec les processus non linéaires en translation P_t et en rotation P_r séparée Figure 3.14 présente le même mixer M_1 et le même modèle que la structure

en cascade 3.5.3. La différence réside dans la structure de commande composée d'une boucle interne avec C_r et P_r imbriqués dans la boucle externe composée de C_t et P_t. Cette architecture de commande est celle utilisée dans le cas de la commande hiérarchique comme nous le verrons par la suite.

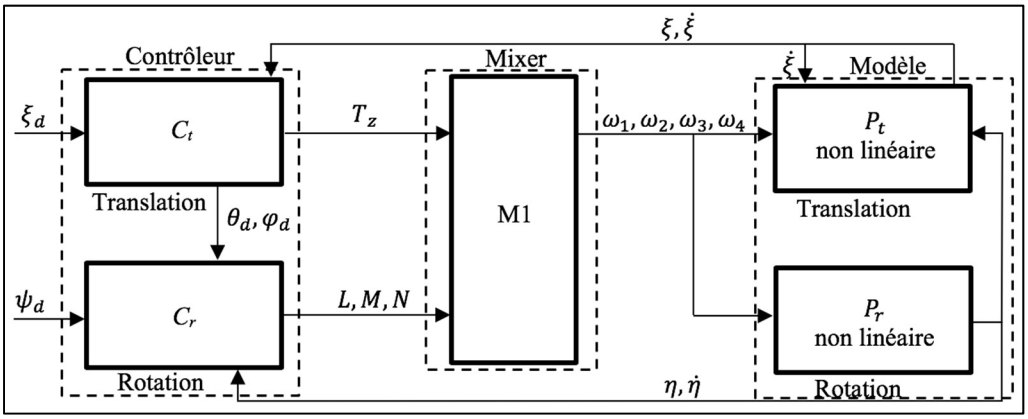


Figure 3.14 Boucle fermée avec le processus non linéaire pour une commande en translation et rotation séparée

Ce type de structure présente généralement l'avantage de corriger plus rapidement les perturbations puisque la boucle interne liée à la dynamique de rotation est plus rapide que la boucle externe liée à la dynamique de translation.

3.6 Ajout du MCC

Comme nous pouvons le voir sur la boucle fermée de la Figure 3.15 il y a la présence des moteurs $M(s)$ entre le compensateur $C(s)$ (dont la structure dépend d'une des quatre architectures de commande définie précédemment) et le processus $P(s)$ (linéaire ou non linéaire). Ces quatre moteurs souvent de type sans balais (brushless) DC (ElKholy, 2014) sont utilisés pour mettre en rotation les quatre hélices du quadricoptère.

Nous retrouvons également le vecteur de consigne $R = [z_d, y_d, x_d, \psi_d]^T$; les positions mesurées $Y = [z_m, y_m, x_m, \psi_m]^T$; le vecteur d'erreur $E = [e_z, e_y, e_x, e_\psi]^T$; le vecteur des signaux de

commande $U = [u_z, u_y, u_x, u_\psi]^T$ (dans le cas linéaire) ou $[L, M, N, T_z]^T$ (dans le cas non linéaire) selon l'architecture de commande utilisée ; le vecteur de vitesse $\Omega_r = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]^T$.

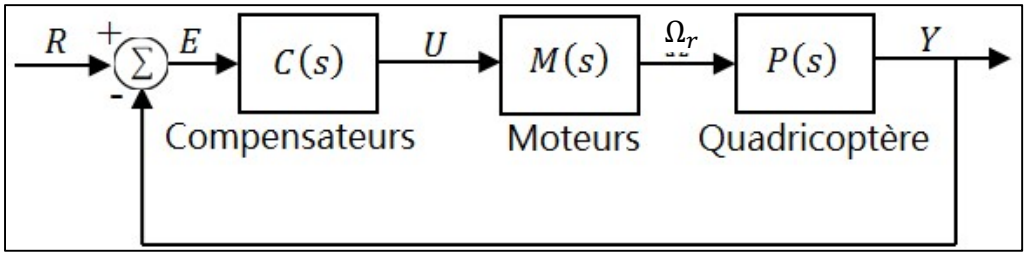


Figure 3.15 Boucle de commande avec insertion des moteurs

Chaque moteur possède la même représentation et nous nous concentrerons désormais sur le schéma d'un seul moteur DC tel qu'à la Figure 3.16. On y retrouve la tension d'alimentation du moteur v, la résistance R_m et l'inductance L_m de l'induit du moteur ; la force électromotrice e ; i_a le courant circulant dans l'armature ; T_m le couple moteur ; T_r le couple résistant ; ω la vitesse de rotation du moteur et J_r l'inertie du moteur.

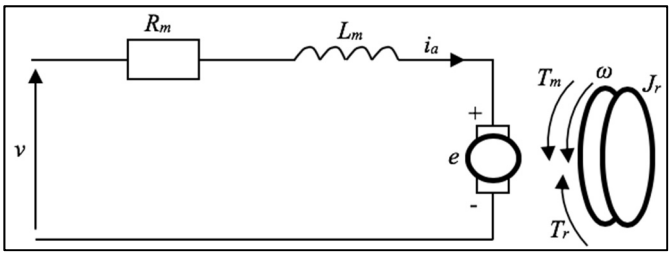


Figure 3.16 Diagramme d'un moteur DC

En utilisant la loi des mailles, nous pouvons écrire :

$$v = R_m i_a + L_m \frac{di_a}{dt} + k_m \omega \tag{3.72}$$

Avec k_m la constante de couple et $e = k_m\omega$.

Les moteurs des quadricoptères étant petits il est possible de négliger le terme lié à l'inductance L_m dans (3.72) qui devient :

$$v = R_m i_a + k_m \omega \tag{3.73}$$

L'équation mécanique est quant à elle donnée par :

$$J_r \dot{\omega} = T_m - T_r \tag{3.74}$$

Avec :

$$T_m = k_m i_a \tag{3.75}$$
$$T_r = k_r \omega^2$$

Ou k_r représente une constante liée au couple résistant. En remplaçant les expressions des couples T_m et T_r (3.75) dans (3.74) nous obtenons :

$$J_r \dot{\omega} = k_m i_a - k_r \omega^2 \tag{3.76}$$

Considérons que le couple résistant $k_r \omega^2 = 0$ dans (3.76). En exprimant l'expression du courant i_a puis en l'insérant dans (3.73) nous obtenons :

$$v = \frac{R_m J_r}{k_m} \dot{\omega} + k_m \omega \tag{3.77}$$

L'expression (3.77) dans le domaine de Laplace donne la fonction de transfert de $M(s)$ pour le moteur i avec $i = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$M(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{1/k_m}{\frac{R_m J_r}{k_m^2} s + 1} \tag{3.78}$$

Généralement la fonction de transfert (3.78) possède une bande passante beaucoup plus rapide que le reste la boucle fermée. Il est donc courant de la négliger dans la modélisation du système.

CHAPITRE 4

COMMANDE B

4.1 Version monovariable

4.1.1 Processus stable

Les compensateurs conventionnels éprouvent des difficultés à allier de bonnes performances simultanément dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Plus spécifiquement, cela revient d'un point de vue temporel à combiner un faible temps de réponse, sans dépassement et une erreur statique nulle. Dans le même temps, le domaine fréquentiel possède une large bande passante avec des marges de gain et de phase suffisamment grandes pour être robuste face aux incertitudes des processus et aux perturbations. Cela implique d'injecter un gain important dans la chaîne de commande à travers le compensateur. Mais, un gain important est susceptible de présenter une réponse oscillatoire à cause du déplacement des pôles vers l'instabilité, détériorant ainsi les performances du système. Cependant, certains algorithmes montrent qu'il est possible de combiner un gain important tout en bénéficiant de marges de phase et de gain robustes (D. Bensoussan, 1984).

L'algorithme utilisé pour réaliser les objectifs visés ci-dessus est la commande B, du professeur David Bensoussan. En théorie, cette commande existe depuis le début des années 80. Mais en pratique, ce n'est que l'amélioration récente de l'électronique qui permet l'application de cet algorithme. En effet, il est désormais possible de travailler sur une large bande fréquentielle avec des capteurs de haute résolution et une vitesse de traitement de calcul beaucoup plus élevée.

La commande B décrite dans (D. Bensoussan, 1984) et reprise dans (Houimdi, 2015) définit une bande passante d'intérêt $[0 ; \omega_1]$ dans laquelle on recherche une sensibilité $S(\omega)$ proche de

0, inférieure à une valeur positive donnée ε. Au-delà de cette bande passante le comportement de $|S(\omega)|$ voit dans le cas d'un système réel (degré du numérateur < degré du dénominateur) son module tendre vers 1 en haute fréquence (HF). De plus, il est souhaitable que le maximum de $|S(\omega)|$ ne soit pas trop élevé avant de converger vers la valeur finale 1 pour éviter le risque d'oscillation dans le domaine temporel. Nous fixerons donc $|S(\omega)|$ inférieure à une valeur positive $M_s > 1$ représentant le maximum de la sensibilité. Il vient :

$$|S(\omega)| < \varepsilon \qquad \text{pour : } \omega \leq \omega_1 \tag{4.1}$$

$$|S(\omega)| < M_s \qquad \text{pour tout } \omega \tag{4.2}$$

L'allure la sensibilité recherchée dans le domaine fréquentiel est représentée à la Figure 4.1.

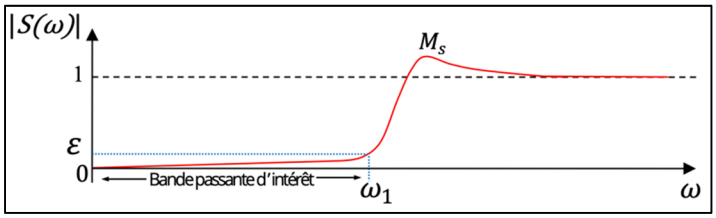


Figure 4.1 Allure fréquentielle de la sensibilité
Tirée et reproduite de Garnier (2007)

Supposons que le processus commandable $P(\omega)$ satisfait la propriété d'atténuation suivante : il existe des constantes positives μ, ω_μ et un entier q tels que l'inégalité suivante soit respectée en hautes fréquences :

$$|P(\omega)| < \frac{\mu}{s^q} \qquad \text{pour : } \omega > \omega_\mu \tag{4.3}$$

Cette inégalité s'applique pour une fréquence supérieure ou égale à ω_μ. Cette condition imposée au processus $P(\omega)$ est résumée par la Figure 4.2 et peut s'expliquer comme suit : au-delà d'une certaine fréquence, le module du processus est inférieur au module d'une fonction de transfert dont la réponse fréquentielle a un pôle d'ordre q à l'infini.

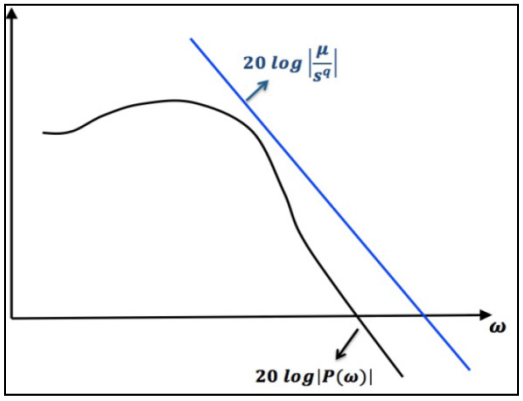


Figure 4.2 Propriété d'atténuation
Tirée et reproduite de Garnier (2007)

La conception du compensateur $C(\omega)$ est restreinte à une classe de processus $P(\omega)$ linéaire invariant dans le temps, inversible et strictement propre. Dans le cas présent le processus $P(\omega)$ est stable, on pose :

$$P(\omega)C(\omega) = J(\omega) \tag{4.4}$$

Notre objectif sera de choisir la boucle ouverte $J(\omega)$ pour que les spécifications sur le comportement de $S(\omega)$ et $T(\omega)$ soient atteintes. On en déduit :

$$S(\omega) = \frac{1}{1+J(\omega)} \quad ; \quad T(\omega) = \frac{J(\omega)}{1+J(\omega)} \tag{4.5}$$

La conception de $J(\omega)$, Figure 4.3 vise à respecter les critères suivants :

- Pour : $\omega \leq \omega_1$

$$|[I + J(\omega)]^{-1}|_{\omega_1} < \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad |I + J(\omega)|_{\omega_1} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\varepsilon} > 1 \tag{4.6}$$

- Pour : $\omega \geq \omega_1$

$$|[I + J(\omega)]^{-1}|_{\infty} < M_s \quad \leftrightarrow \quad |I + J(\omega)|_{\infty} > \frac{1}{M_s} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{M_s} > 1 \tag{4.7}$$

Les relations (4.6) et (4.7) peuvent être illustrées graphiquement comme à la Figure 4.3. La relation (4.6) spécifie que le vecteur $J(\omega)$ dans le plan de Nyquist est extérieur au cercle centré en (-1,0), et de rayon $\frac{1}{\varepsilon} > 1$ pour les basses fréquences inférieures à ω_1. De même la relation (4.7), spécifie que $J(\omega)$ est extérieur au cercle centré en (-1,0) et de rayon $\frac{1}{M_s} < 1$ pour l'ensemble des fréquences.

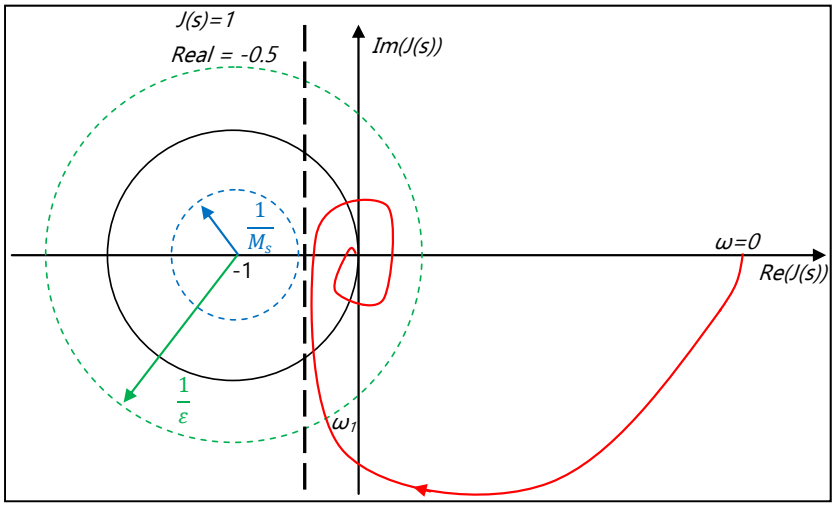


Figure 4.3 Diagramme de Nyquist de $J(\omega)$
Tirée et reproduite de Retif (2008)

Pour obtenir un tel résultat, les formules suivantes permettent de déterminer les paramètres inconnus à partir des hypothèses développées dans la commande B et reportées au Tableau 4.1.

Tableau 4.1 Hypothèses et paramètres à déterminer pour la commande B

Hypothèses	Paramètre à déterminer
$P(\omega)$	$C(\omega) = P(\omega)^{-1}J(\omega)$
ε	k
M_s	k_1
ω_1	ω_b
(ω_μ, q)	ω_2

Les relations (4.8) à (4.10) permettent de fixer des conditions sur le choix des paramètres k_1, k, ω_b et ω_2 (D. Bensoussan, 1984) :

$$k_1 \geq max\left[2^{\frac{k+1}{2}}\omega_1\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right), \omega_1\left(\frac{M-1}{M}\right)\right] \qquad k > q \tag{4.8}$$

$$\omega_b > \omega_1\left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2(1-\frac{1}{M})^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.9}$$

ω_2 vérifie :

$$\begin{cases} k.artg\left(\frac{\omega_b}{\omega_2}\right) + artg\left(\frac{\omega_b}{\omega_2}\right) < \frac{\pi}{2} \\ \omega_2 > \max(\omega_b, \omega_\mu) \end{cases} \tag{4.10}$$

L'expression du correcteur $C(\omega)$ est obtenue à partir de ces paramètres :

$$J(s) = \left(\frac{k_1}{s+\omega_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k \tag{4.11}$$

$$C(s) = P^{-1}(s)\left(\frac{k_1}{s+\omega_1}\right)\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k \tag{4.12}$$

4.1.2 Cas d'un processus instable

Cette partie repose sur des résultats exposés dans (Houimdi, 2015). On recherche ici à optimiser simultanément les réponses temporelles et fréquentielles, soit :

$$C(s) = H^{-1}(s)J(s) \tag{4.13}$$

Le transfert $H(s)$ présente le même comportement que $P(s)$ en hautes fréquences et le transfert $J(s)$ est une fonction que nous déterminerons. Soit $s = j\omega$; les pôles de $J(\omega)$ sont dans le demi-plan complexe de gauche dans la bande fréquentielle d'intérêt $|\omega| \leq \omega_1$ et $J(\omega)$ a un gain élevé de sorte que les valeurs de $P(\omega)C(\omega)$ restent à l'extérieur du cercle de sensibilité centré à (-1, 0) et de rayon $\frac{1}{\varepsilon} > 1$. Ainsi, nous garantissons que pour les fréquences $|s| < \omega_1$ la sensibilité est inférieure à ε c.-à-d. :

$$\|[I + P(\omega)C(\omega)]^{-1}\|_\infty \triangleq \sup_\omega |I + P(\omega)C(\omega)| < \varepsilon \text{ avec } |\omega| < \omega_1 \qquad (4.14)$$

De plus, les valeurs de $|J(\omega)|$ sont conservées à l'extérieur du cercle de sensibilité centré au point (-1,0) et de rayon $\frac{1}{M_s} < 1$ pour l'ensemble des fréquences. Une telle conception assure que la norme H_∞ du maximum de la sensibilité est inférieure à M_s pour toutes les fréquences, soit :

$$\|[I + P(\omega)C(\omega)]\|_\infty = \sup_\omega |[I + P(\omega)C(\omega)]^{-1}| < M_s \qquad (4.15)$$

La conception du compensateur $C(s)$ peut être faite de façon graphique avec des outils tels que les diagrammes de Bode, de Nyquist, d'Evans ou de Black-Nichols. La fonction $J(s)$ peut être décomposée en trois parties :

$$J(s) = k_1 J_1(s) J_2(s) J_3(s) \qquad (4.16)$$

Où $k_1 J_1(s)$ est une fonction de transfert d'un filtre passe-bas de haut gain possédant une réponse temporelle ultrarapide. Son objectif est de faire tendre la sensibilité vers 0 en basse fréquence. Dans le même temps, la transmittance $T(s)$ est proche du 0 dB dans la bande passante. Une expression typique de $k_1 J_1(s)$ est par exemple :

$$k_1 J_1(s) = k_1 \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \qquad (4.17)$$

Le transfert $J_2(s)$ est composé de circuits de phase agissant sur les fréquences intermédiaires qu'il s'agira de déterminer. Il aura pour rôle de diminuer les dépassements de $T(s)$ et $S(s)$ dans la zone de transition. Son rôle est déterminant pour prévenir l'apparition d'oscillation dans la réponse indicielle de la boucle fermée.

$$J_2(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{s + z_i}{s + p_i} \tag{4.18}$$

Où z_i et p_i représentent respectivement un $i^{éme}$ zéro et un $i^{ème}$ pôle.
$J_3(s)$ est un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure en HF est liée au gain k_1 et dont l'ordre garantit que le compensateur $C(s)$ est strictement propre. Par exemple :

$$J_3(s) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\omega_{zi}}{s + \omega_{zi}} k > q \tag{4.19}$$

Le processus $P(s)$ vérifiant en HF l'inégalité $|P(s)| > \frac{c}{|s^q|}$ où c est une constante et q un nombre entier. Le processus $P(s)$ peut être décomposé en sa partie à phase minimale $P_1(s)$ et sa partie instable et inversible $P_2(s)$, il s'ensuit :

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \tag{4.20}$$

Une fonction de transfert $H(s)$ est définie pour une certaine valeur s_0 :

$$H(s) = \frac{c}{(s + s_0)^{q'}} P_2^{-1}(s)P(s) = \frac{c}{(s + s_0)^{q'}} P_1(s) \tag{4.21}$$

q' est choisi pour que le critère d'encerclement de Nyquist soit respecté, et que $H(s)$ et $P(s)$ ait un comportement similaire en haute fréquence, soit :

$$\|P(s)H(s)^{-1} - 1\| \leq \alpha < 1 \tag{4.22}$$

Avec α une valeur inférieure à l'unité. Remarquons que $H(s)$ est holomorphique par construction et que son inverse l'est également dans $R_e\{s\} \geq 0$. Le compensateur $C(s)$ est alors conçu de la façon suivante :

$$C(s) = H(s)^{-1}J(s) = \left(\frac{1}{c}\right)(s + s_0)^{q'}P_1(s)^{-1}J(s) \tag{4.23}$$

La boucle ouverte prend alors la forme :

$$P(s)C(s) = P(s)H(s)^{-1}J(s) \tag{4.24}$$

$$= P_1(s)P_2(s)H(s)^{-1}J(s) \tag{4.25}$$

$$= \frac{1}{c}(s + s_0)^{q'}P_2(s)J(s) \tag{4.26}$$

Les valeurs de c et s_0 sont ajustées pour permettre un meilleur encerclement des cercles de sensibilité ε et M_s tout en contribuant à l'amélioration de la marge de phase du système.

4.2 Version multivariable

4.2.1 Introduction

Dans un système à retour unitaire composé d'un processus multivariable $P(s)$ et d'un compensateur $C(s)$, la commande décentralisée est reliée à une réduction de la sensibilité telle que : $Y(s)$, $E(s)$, et $R(s)$ désigne la sortie, l'erreur et l'entrée du système bouclé. La sensibilité $S(s)$ et la boucle fermée $T(s)$ peuvent être définies comme suit : $E(s)=S(s)R(s)$ et $Y(s)=T(s)R(s)$. Soit les notations $\|.\|$, $\|.\|_{s_1}$ ou $\|.\|_{\omega_1}$ représentant respectivement la norme H_∞ et la norme H_∞ sur une bande de fréquence limitée $|s| \leq s_1$ ou $|\omega| \leq \omega_1$. En supposant que l'inverse de $[\, I + P(s)C(s)]$ existe, nous obtenons :

$$S(s) = [\, I + P(s)C(s)\,]^{-1} \tag{4.27}$$

$$T(s) = P(s)C(s)\,[\,I + P(s)C(s)\,]^{-1} \tag{4.28}$$

$$S(s) = I - T(s) \text{ et } \|S(s) = I - T(s)\| \tag{4.29}$$

$$\|S(s)\|_{s_1} = \|I - T(s)\|_{s_1} \tag{4.30}$$

La minimisation de la sensibilité en dessous d'une faible valeur ε correspond à une transmission de la boucle fermée $T(s)$ approchant la matrice identité lorsque ε tend vers 0. Cela implique que la norme individuelle de ces éléments diagonaux tend vers l'unité, il en résulte une réponse temporelle très rapide comme il l'est démontrée dans (D. Bensoussan, 2014) pour le cas mono-entrée mono-sortie. Il sera montré qu'une application diagonale de la méthode de contrôle proposée à une famille de systèmes instables débouche sur une boucle fermée quasi diagonale dans une bande fréquentielle d'intérêt donnée.

4.2.2 Conditions sur le processus $P(s)$

i) Le théorème s'applique aux fonctions $P(s)$ multivariables meromorphiques, c.-à-d. aux fonctions dont l'inverse existe et est analytique dans le demi-plan complexe fermé de droite.

ii) Pour une constante c, un entier q et une valeur en HF ω_c, $P(s)$ est strictement propre et satisfait la propriété d'atténuation suivante :

$$\underline{\sigma}\{P(s)\} > c/|s^q| \text{ pour } |s| \geq \omega_c, \quad \mathrm{R_e}\{s\} \geq 0 \tag{4.31}$$

Cette propriété s'applique également aux éléments diagonaux du système multivariable.

iii) Le comportement suivant en HF s'applique aux éléments diagonaux ainsi que de couplage, c.-à-d. si $D(s) = diag(D_i(s), i = 1,2, \ldots n)$ représente la partie diagonale du processus $P(s)$, ω_a une fréquence élevée et α est une valeur inférieure à l'unité :

$$\|P(s)D^{-1}(s) - I\| < \alpha < 1 \quad |s| \geq \omega_a, \quad \mathrm{R_e}\{s\} \geq 0 \tag{4.32}$$

Cette propriété implique que les éléments diagonaux de $P(s)$ sont dominants en HF par rapport aux éléments hors diagonale.

iv) Le processus $P(s)$ est supposé stabilisable et détectable. Cependant, aucun mode fixe décentralisé n'est présent (Shih-Ho & Davison, 1973) et le processus instable $P(s)$ peut être stabilisé par un retour diagonal.

4.2.3 Théorème

Il existe un compensateur $C(s)$ qui assure que les conditions de découplage de la boucle fermée, avec une tolérance acceptable dans une bande passante d'intérêt ω_1, peuvent être atteintes dans le sens où la norme de l'opérateur de sensibilité, c.-à-d. $\|S(s)\|_{\omega_1} = \|I - T(s)\|_{\omega_1}$ peut être obtenue inférieure à n'importe quelle valeur ε arbitraire et positive, tout en conservant une norme H_∞ de la sensibilité $\|S(s)\|$ arbitrairement proche de $M_s > \alpha^{-1} > 1$.

$$\left\|S(s)\right\|_{\omega_1} < \varepsilon, \text{ pour } |\omega| \le \omega_1 \tag{4.33}$$

$$\|S(s)\| < M_s, \text{ pour } \omega \text{ et } M_s > \alpha^{-1} > 1 \tag{4.34}$$

Le compensateur $C(s)$ sera diagonal : $C(s) = \text{diag}[C_i(s),\ i = 1, 2 \ldots n]$, il sera appliqué aux éléments diagonaux de la matrice $H(s) = \text{diag}[H_i(s),\ i = 1,2 \ldots n]$ et sera construit de la manière suivante : Soit $D_i^+(s)$ représente la fonction rationnelle dont les pôles et les zéros sont les pôles et les zéros de $D_i(s)$ dans le demi-plan fermé de droite. Lorsque $s \longrightarrow +\infty$, $D_i^+(s)$ possède la propriété d'atténuation, c.-à-d. qu'elle approche pour une valeur c_i et un entier q_i une fonction de la forme $c_i/|s^{q_i}|$ pour une fréquence élevée $|s| > \omega_c$, $\text{Re}\{s\} \ge 0$. Construisons la matrice diagonale suivante avec une constante s_0 :

$$Z(s) = diag\left[Z_i(s),\ i = 1,2 \ldots n\right] = diag\left[\left[c_i / (s + s_0)^{q_i}\right](D_i^+(s))^{-1}\right] \tag{4.35}$$

On définit :

$$H(s) = Z(s)D(s) \tag{4.36}$$

La méthode de contrôle mono-entrée monosortie développée dans (David Bensoussan, 2015) est appliqué avec la matrice diagonale $H(s)$ tel que :

$$C_i(s) = H_i^{-1}(s) \underbrace{\underbrace{k_{i1}\left(\frac{\omega_{i1}}{s+\omega_{i1}}\right)}_{J_{i1}(s)} \underbrace{\frac{\beta_i+s}{\alpha_i+s}}_{J_{i2}(s)} \underbrace{\left(\frac{\omega_{i2}}{s+\omega_{i2}}\right)^{k_i}}_{J_{i3}(s)}}_{J_i(s)} \tag{4.37}$$

Où k_{i1} est un gain important $\in \mathbb{R}$; ω_{i1}, ω_{i2} sont des fréquences ; β_i, α_i des constantes $\in \mathbb{R}$; $k_i > q_i$ est un entier $\in \mathbb{N}$.

La fonction $H(s)$ et les constantes ω_a, ω_b, ω_c, ω_d, ξ, ξ_1 sont choisies comme suit :

- ω_a est choisie telle que :

$$\|P(s)D(s)^{-1} - I\|_{s_a} < \alpha_1 < 1 \text{ pour } |s| \geq \omega_a,\ \alpha < \alpha_1 < 1, \quad \mathrm{Re}\{s\} \geq 0$$

Ce qui implique qu'en HF, soit pour $\omega > \omega_a$ où ω_a est une fréquence élevée, que les éléments diagonaux de $P(s)$ sont dominants par rapport aux éléments non diagonaux.

- ω_b telle que $P(s)$ est analytique dans :

$$|s| \geq \omega_b, \quad \mathrm{R_e}\{s\} \geq 0$$

Cela signifie que pour les fréquences importantes $\omega > \omega_b$, $P(s)$ est une fonction à valeurs complexes, définie dérivable en tout point d'un sous-ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.

- ω_c telle que :

$$\underline{\sigma}\{P(s)\} < c/|s^q| \text{ pour } |s| \geq \omega_c, \quad \mathrm{R_e}\{s\} \geq 0$$

Autrement dit, pour les fréquences ω supérieures à une fréquence élevée ω_c, $P(s)$ vérifie la propriété d'atténuation.

- ω_d est une fréquence suffisamment importante utilisée comme suit :

$$\|P(s)H(s) - I\|_{s_d} < \alpha_1 < 1 \text{ pour } \alpha < \alpha_1, |s| \geq \omega_d \quad \text{Re}\{s\} \geq 0$$

C.-à-d. $P(s)$ et $H(s)$ ont un comportement semblable dans les HF $|\omega| > \omega_d$.

Notons que ω_a, ω_b, ω_c, ω_d sont des fréquences.

- ω_1 est telle que $\omega_1 \geq \max(\omega_a, \omega_b, \omega_d)$

$$\xi = \min_{R_e\{s\}\geq 0} \underline{\sigma}\{P(s)H^{-1}(s)\} \; ; \; \xi_1 = \min_{|\omega|\leq\omega_1} \underline{\sigma}\{P(s)H^{-1}(s)\}$$

$$k_{i1} > 2\max\left[\frac{1}{\xi_1}(1+\frac{1}{\varepsilon}), \frac{1}{\xi}(1+\frac{1}{M})\right] \quad i = 1,2\ldots n \tag{4.38}$$

L'insertion de réseaux d'avance/retard $J_{i2}(s)$ agissant dans les fréquences intermédiaires $(\omega_{i1}, \omega_{i2})$ peut permettre d'ajuster les temps de réponse des sorties affectant les bornes de la sensibilité en basses et hautes fréquences. L'ordre des fréquences (rôle résumé ci-après) utilisées dans la démonstration de la commande B (David Bensoussan & Brossard, 2017) peuvent être résumés comme à la Figure 4.4.

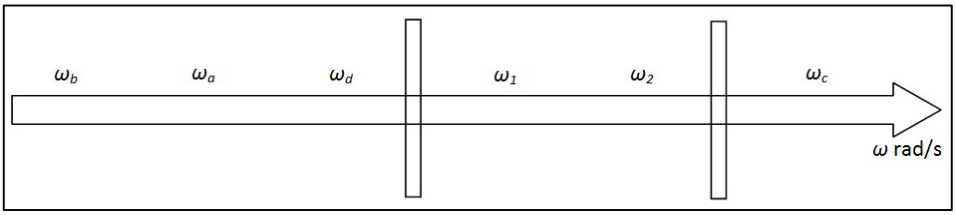


Figure 4.4 Ordre des fréquences dans la conception de la commande B

Rôles des fréquences :

- ω_b : (4.38) $P(s)$ est holomorphique au-delà de cette fréquence ;
- ω_a : (4.32) Pour cette fréquence $\omega_a > \omega_b$ le transfert $P(s)$ est stable, ultimement diagonal et vérifie : $||P(s)D^{-1}(s) - 1|| < \alpha < 1$ pour $|s| \geq \omega_a$; $\text{Re}\{s\} \geq 0$;
- ω_d : (4.38) Au-delà de la fréquence ω_d, $P(s)$ est ultimement diagonale et vérifie : $\|P(s)H^{-1}(s) - I\|_{s_d} < \alpha_1 < 1$ avec $\alpha < \alpha_1$ et $|s| \geq \omega_d$;

- ω_1 : (5.33)(5.34)(5.38) Permet d'exprimer la minimisation de la sensibilité selon ε et M_s : $\|s\|_{\omega_1} < \varepsilon$ pour $|\omega| < \omega_1$ et $||S(s)|| < M_s \; \forall \; \omega$;
- ω_2 : (4.38) Va assurer que $C(s)$ soit strictement propre en ajustant l'ordre des pôles de $J_3(s)$ et si nécessaire $C(s)$ va jouer un rôle dans la stabilisation des pôles instables en assurant le nombre d'encerclements du diagramme de Nyquist nécessaire autour du point (-1, 0) pour stabiliser la boucle fermée (Houimdi, 2015) ;
- ω_c : (4.31) Permet d'exprimer la propriété d'atténuation sur $P(s)$ tel que : $\underline{\sigma}\big(P(s)\big) < \frac{c}{|s^q|}$.

4.2.4 Démonstration du théorème

Soit la condition suivante :

$$\|[\, I + P(\omega)C(\omega)]^{-1}\|_{\omega_1} < \varepsilon \tag{4.39}$$

Commençons par exprimer l'objectif (4.39) qui se traduit par le supremum de la valeur singulière en objectif équivalent en termes d'infimum de la valeur singulière :

$$\begin{aligned} &\|[\, \mathrm{I} + P(\omega)C(\omega)]^{-1}\|_{\omega_1} < \varepsilon \text{ et } \varepsilon < 1 \\ &\overline{\sigma}\{\mathrm{I} + P(\omega)C(\omega)\}^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}\{\mathrm{I} + P(\omega)C(\omega)\}} < \varepsilon \\ &\underline{\sigma}\{\mathrm{I} + P(\omega)C(\omega)\} > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\underline{\sigma}\{P(\omega)C(\omega)\} > \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.40}$$

L'inégalité en (4.40) met en évidence une norme très élevée pour $\|P(\omega)C(\omega)\|$.

Alors que la condition :

$$\|[\, I + P(\omega)\, C(\omega)\,]^{-1}\| < M_s \tag{4.41}$$

devient,

$$\left\|\left(I + P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\| = \bar{\sigma}\left\{\left(I + P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\} \tag{4.42}$$

$$= \frac{1}{\underline{\sigma}\{I+P(\omega)C(\omega)\}} < M_s \;\text{ avec }\; M_s > \frac{1}{\alpha} > 1 \tag{4.43}$$

Soit que la norme-∞ de la sensibilité reste inférieure à une valeur maximum M_s.

Lemma 1 : La matrice diagonale $D(s)$ extraite de $P(s)$:

a) Est analytique ;
b) Est strictement propre ;
c) Satisfait $det(D(s)) \neq 0$, pour tout s dans la région $|s| \geq \omega_b$, $\omega_b > \omega_a$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$;
d) Satisfait la propriété d'atténuation.

Preuve :

a) Par hypothèse, $P(s)$ est à dominance diagonale en HF (4.32), et strictement propre. Par conséquent, il existe une fréquence $\omega_b > \omega_a$ telle que $P(s)$ est analytique pour $|s| \geq \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$.

Pour tout s_y qui n'est pas un pôle de $D(s)$, $|s| > \omega_b > \omega_a$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ nous utilisons l'inégalité suivante avec le théorème du petit gain et la propriété d'ultime dominance diagonale :

$$\bar{\sigma}\left\{D(s_y)\right\} = \bar{\sigma}\left\{D(s_y)P(s_y)^{-1}P(s_y)\right\} < \bar{\sigma}\left\{D(s_y)P(s_y)^{-1}\right\}.\bar{\sigma}\left\{P(s_y)\right\} \tag{4.44}$$

$$\leq \bar{\sigma}\left\{\left[I + P(s_y)\,\mathrm{D}(s_y)^{-1} - I\right]^{-1}\right\}.\bar{\sigma}\left\{P(s_y)\right\} \tag{4.45}$$

$$\leq \frac{\bar{\sigma}\left\{P(s_y)\right\}}{\underline{\sigma}\left\{I + P(s_y)\,\mathrm{D}(s_y)^{-1} - I\right\}} \tag{4.46}$$

$$< \frac{\bar{\sigma}\left\{P(s_y)\right\}}{1 - \bar{\sigma}\left\{P(s_y)\,\mathrm{D}(s_y)^{-1} - I\right\}} < \frac{\bar{\sigma}\left\{P(s_y)\right\}}{1-\alpha} \tag{4.47}$$

Comme (4.46) est valide au voisinage de $\delta > 0$, $0 < |s - s_a| < \delta$ en tout point s_y pour $|s| > \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ et $P(s)$ analytique dans $|s| > \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$, ω_a ne peut pas être un pôle de $D(s)$ (pas de pôle en HF).

Il s'ensuit que tous les pôles dans le demi-plan de droite de $D_i(s), i = 1,2 \ldots n$ sont confinés dans la région $|s| < \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ (soit en basse fréquence) et que $D(s)$ est analytique dans $|s| > \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$.

b) À partir de la propriété strictement propre de $P(s)$ et (4.46), il s'ensuit que $D(s)$ doit être strictement propre.

La représentation graphique Figure 4.5 des inégalités (4.45) à (4.47) indiquent que la valeur maximum de la valeur singulière $\bar{\sigma}\{D(s_y)\}$ en tout point s_y pour $|s| > \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ est bornée par $\bar{\sigma}\{P(s_y)\}(1-\alpha_1)^{-1}$.

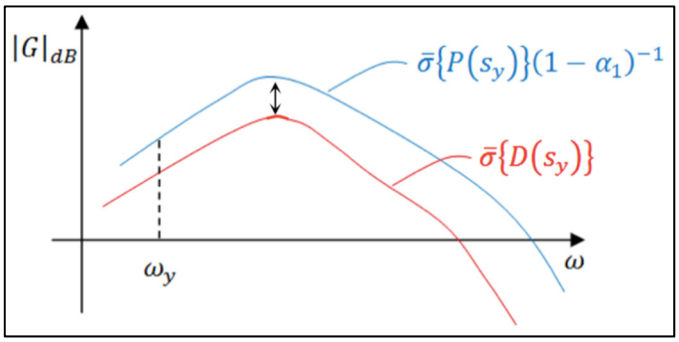


Figure 4.5 Représentation graphique de l'inégalité $\bar{\sigma}\{D(s_y)\} < \bar{\sigma}\{P(s_y)\}(1-\alpha_1)^{-1}$

Autrement dit, comme $P(s_y)$ est analytique en HF et strictement propre, $\bar{\sigma}\{P(s_y)\}(1-\alpha_1)^{-1}$ « n'explose pas » et $\bar{\sigma}\{D(s_y)\}$ multiplie $\bar{\sigma}\{P(s_y)\}$ par la constante $(1-\alpha_1)^{-1}$, tout en respectant les mêmes propriétés : analytique et strictement propre.

c) De plus, en tout point s_x pour $|s| > \omega_b$, $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ qui n'est pas un pôle de $D(s)^{-1}$. Soit :

$$\bar{\sigma}\left[D^{-1}(s_x)\right] = \bar{\sigma}\left[P(s_x)^{-1}P(s_x)D^{-1}(s_x)\right] \quad (4.48)$$

$$\leq \bar{\sigma}\left[P^{-1}(s_x)\right].\bar{\sigma}\left[P(s_x)D^{-1}(s_x)\right] \quad (4.49)$$

$$\leq \bar{\sigma}\left[P^{-1}(s_x)\right](1+\alpha_1) \quad (4.50)$$

Il s'ensuit que l'inverse $D^{-1}(s_x) = \text{adj}(D(s_x))(\det(D(s_x))^{-1}$ existe, c.-à-d. $\det(D(s_x))$ est non nul. Comme $P(s)^{-1}$ est analytique dans $|s| > \omega_b$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$ et (4.50) est valide au voisinage de tout δ de s_a dans $|s| > \omega_b$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$, s_a ne peut pas être un pôle de $D^{-1}(s)$ et les pôles dans le demi-plan de droite de $D^{-1}(s)$ sont confinés dans la région $|s| < \omega_b$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$. Il s'ensuit que les éléments diagonaux de $D(s)$ sont à déphasage minimum dans la région $|s| < \omega_b$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$. Graphiquement cela implique que $D(s_x)^{-1}$ en tout point s_x pour $|s| > \omega_b$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$ est nécessairement situé « quelque part » en dessous de la borne $P^{-1}(s_x)$. Cette borne ne possédant pas de pôle dans cette région, à aucun moment $D(s_x)^{-1}$ « n'explose ».

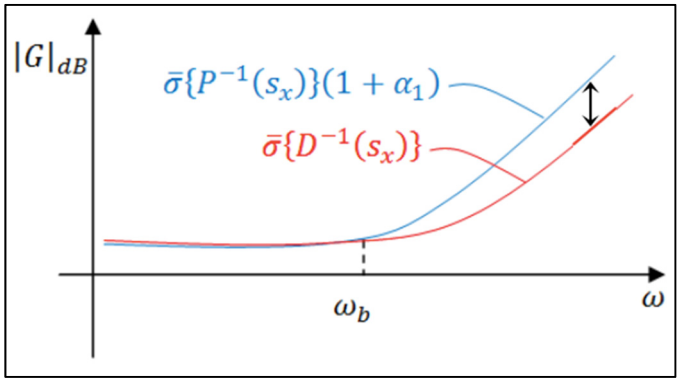


Figure 4.6 Représentation graphique de l'inégalité $\bar{\sigma}[D^{-1}(s_x)] \leq \bar{\sigma}[P^{-1}(s_x)](1+\alpha_1)$

d) Étant donné que $P(s)$ satisfait la propriété d'atténuation, il existe une fréquence ω_c pour laquelle $\underline{\sigma}\{P(s)\} > c/|s^q|, |s| \geq \omega_c$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$, il s'ensuit que pour tout s dans $|s| > max(\omega_b, \omega_c)$, $\text{Re}\{s\} \geq 0$:

$$\underline{\sigma}\{D(s)\} = \underline{\sigma}\{P^{-1}(s)D(s)P(s)\}$$

$$\geq \underline{\sigma}\{P^{-1}(s)D(s)\}\underline{\sigma}\{P(s)\} \tag{4.51}$$

Or selon (4.31) : $\underline{\sigma}\{P(s)\} > c/|s^q|$

Et :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}\{P^{-1}(s)D(s)\} &\geq \frac{1}{\bar{\sigma}\{P(s)D^{-1}(s)\}} \\ &= \frac{1}{\bar{\sigma}\{I + P(s)D^{-1}(s) - I\}} \\ &\geq \frac{1}{1 + \bar{\sigma}\{P(s)D^{-1}(s) - I\}} \\ &\geq \frac{1}{1+\alpha}\end{aligned} \tag{4.52}$$

En remplaçant (4.31) et (4.52) dans (4.51) :

$$\underline{\sigma}\{D(s)\} \geq \frac{c}{|s^q|(1+\alpha)} \tag{4.53}$$

c.-à-d. *D*(*s*) satisfait la propriété d'atténuation. Les termes diagonaux sont dominants en HF.

Lemma 2 : *H*(*s*) est :

a) Diagonale par construction ;
b) Analytique par construction ;
c) Strictement propre ;
d) Analytiquement inversible dans $R_e\{s\} \geq 0$;
e) Représente ultimement la partie inversible de $P(s)$.

Preuve : *H*(*s*) ne possède aucun pôle ou zéro dans le demi-plan de droite et approche $D(s)$ lorsque $s \to \infty$. Selon (4.35), *Z*(*s*) approche l'unité lorsque $s \to \infty$ et *D*(*s*) est strictement propre d'après le lemme 1. *H*(*s*) est donc strictement propre. Par construction *H*(*s*) est diagonal, analytique et *det*[*H*(*s*)] ne possède pas de zéro dans $R_e\{s\} \geq 0$.

Nous démontrons en se référant aux propriétés (4.32) concernant les éléments diagonaux de $P(s)$ en HF et (4.35) sur la construction de $Z(s)$ que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|\left[\!\left[\, P(s)H(s)^{-1}-I\,\right]\!\right]\right\|_s=\alpha\\
&=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|\left[\!\left[\, P(s)H(s)^{-1}-I\,\right]\!\right]\right\|_s=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|\left[\!\left[\, P(s)-H(s)\,\right]\!\right]H(s)^{-1}\right\|_s\\
&=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|\left[\!\left[\, P(s)-H(s)\,\right]\!\right]D(s)^{-1}Z(s)^{-1}\right\|_s\\
&=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|\left[P(s)-H(s)\right]D(s)^{-1}\right\|_s\\
&=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|P(s)D(s)^{-1}-Z(s)\right\|_s=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|P(s)D(s)^{-1}-I+Z(s)-\mathrm{I}\right\|_s\\
&=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left\|P(s)D(s)^{-1}-I\right\|_s=\alpha\ \text{ puisque}\left|Z(s)\right|\to\mathrm{I}\ \text{lorsque s}\to\infty
\end{aligned}\tag{4.54}$$

Cela implique que $H(s)$ et $D(s)$ ont le même comportement en HF et possèdent la propriété d'atténuation. On pourra justifier ici l'utilisation du supremum dans le but d'englober le maximum de cas possible. La preuve se déroule désormais en 4 étapes :

Étape 1 : Démonstration que le compensateur $C_i(s)$ est strictement propre.

Comme $H^{-1}(s)$ est ultimement l'inverse de $P(s)$ selon le lemma 2, il s'ensuit que pour $|s|>\omega_d$, en se référant aux propriétés (4.54)(4.55) et (4.31) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\bar{\sigma}\left\{P(s)H(s)^{-1}\right\}\\
&=\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\bar{\sigma}\left\{I+P(s)H(s)^{-1}-I\right\}\\
&\leq\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|s|\geq R\\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}}\left(\bar{\sigma}\left\{I\right\}+\bar{\sigma}\left\{P(s)H(s)^{-1}-I\right\}\right)
\end{aligned}\tag{4.55}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|s|\geq R \\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}} \bar{\sigma}\left\{P(s)H(s)^{-1} - I\right\} \\
&\leq 1 + \alpha \\
\bar{\sigma}\left\{H^{-1}(s)\right\} &\leq \bar{\sigma}\left\{\mathrm{P}^{-1}(s)\right\}\bar{\sigma}\left\{P(s)H(s)^{-1}\right\} \\
&\leq \frac{\bar{\sigma}\left\{P(s)H(s)^{-1}\right\}}{\underline{\sigma}\left\{P(s)\right\}} \\
&= \frac{\bar{\sigma}\left\{I + P(s)H(s)^{-1} - I\right\}}{\underline{\sigma}\left\{P(s)\right\}} \\
&\leq \frac{1 + \bar{\sigma}\left\{P(s)H(s)^{-1} - I\right\}}{\underline{\sigma}\left\{P(s)\right\}} \\
&\leq \frac{(1+\alpha)}{\underline{\sigma}\left\{P(s)\right\}} \\
&\leq \frac{(1+\alpha)}{c}\left|s^{q}\right|
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Les relations (4.55), (4.56) et la propriété d'atténuation indiquent que $H^{-1}(s)$ est bornée en HF par $P(s)$. Autrement dit, pour $|s| > \omega_d$ la fonction de transfert $H^{-1}(s)$ « n'explose pas » puisqu'elle est bornée par $P(s)$, assurant ainsi la convergence de $C_i(s)$ qui est le produit de $H_i(s)$ avec $J(s)$ qui sont tous deux strictement propres. De plus, rappelons que dans l'expression du compensateur (4.37) $k_i \geq q_i$, il s'ensuit que $C_i(s)$ est strictement propre. Dans le cas mono-entrée monosortie la méthodologie développée dans (David Bensoussan, 2015) peut être appliquée pour la conception du compensateur $C_i(s)$. En effet la conception est simplifiée puisque les éléments de $H(s) = diag[H_i(s), \mathrm{i} = 1, 2 \ldots n]$ sont à déphasage minimal.

Étape 2 : Nous démontrons désormais que $P(s)H^{-1}(s)$ ne s'annule pas dans $R_e\{s\} \geq 0$.

$H^{-1}(s)$ est analytique dans $R_e\{s\} \geq 0$ et $P(s)$ est analytique dans $|s| > \omega_b$, $R_e\{s\} \geq 0$. Par conséquent, $P(s)H^{-1}(s)$ est analytique dans $|s| > \omega_b$, $R_e\{s\} \geq 0$. Étant donné que $P(s)$ est analytiquement inversible dans $R_e\{s\} \geq 0$ et $\underline{\sigma}\{P(s)\} = \|P^{-1}(s)\|^{-1}$, il s'ensuit que $\underline{\sigma}\{P(s)\}$ est une fonction qui ne s'annule pas pour s dans $R_e\{s\} \geq 0$ qui est bornée en dessous d'une

valeur constante positive et possède un infimum différent de zéro lorsque $\omega \to \infty$. De plus, en se référant à (4.54) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|s|\geq R \\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}} \underline{\sigma}\left\{P(s)\mathrm{H}^{-1}(s)\right\} \\
&= \lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|s|\geq R \\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}} \underline{\sigma}\left\{I + P(s)\mathrm{H}^{-1}(s) - \mathrm{I}\right\} \\
&\geq 1 - \lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|s|\geq R \\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}} \overline{\sigma}\left\{P(s)\mathrm{H}^{-1}(s) - \mathrm{I}\right\} \\
&\geq 1 - \alpha \geq 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Cette borne minimum sera utilisée pour prouver la propriété sur la minimisation de la sensibilité dans la bande fréquentielle d'intérêt.

Étape 3 : Preuve du théorème pour $|s| < \omega_1$.

Le compensateur (4.37) est conçu avec un gain $k_1 = diag\left(k_{i1}, i = 1,2...n\right)$ ajusté pour satisfaire les conditions (4.33) et (4.34). Selon (4.37) et (4.40) nous avons :

$$\begin{aligned}
&\underline{\sigma}\left\{P(\omega)C(\omega)\right\} = \underline{\sigma}\left\{P(\omega)k_1 H^{-1}(\omega)J(\omega)\right\} \geq \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&\geq \underline{\sigma}\left\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\right\}\underline{\sigma}\left\{k_1 J(\omega)\right\} \geq \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&\geq \frac{\underline{\sigma}\left\{k_1 J(\omega)\right\}}{\overline{\sigma}\left\{P^{-1}(\omega)H(\omega)\right\}} \geq \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&\underline{\sigma}\left\{k_1 J(\omega)\right\} \geq \overline{\sigma}\left\{P^{-1}(\omega)H(\omega)\right\}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&\underline{\sigma}\left\{k_1 J(\omega)\right\} \geq \underline{\sigma}\left\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\right\}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&k_1 \sup_{|\omega|<\omega_1} |J(\omega)| > \left\|\left[\underline{\sigma}(P(\omega)H^{-1}(\omega))\right]^{-1}\left[\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right]\right\|
\end{aligned} \tag{4.58}$$

On pourra justifier l'utilisation du supremum pour couvrir un maximum de cas possible.

De même pour tout ω et à partir de (4.40) et (4.58) :

$$\begin{aligned}
&\bar{\sigma}\left\{I + P(\omega)C(\omega)\right\}^{-1} < M_s \\
&\underline{\sigma}\left\{P(\omega)C(\omega)\right\} \geq \frac{1+M_s}{M_s} \\
&\underline{\sigma}\left\{k_1 J(\omega)\right\} \geq \underline{\sigma}\left\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\right\}^{-1}\left(\frac{1+M_s}{M_s}\right) \\
&\sup_{|\omega|<\omega_1}\left|J(\omega)\right| > \left|\left[\underline{\sigma}(P(\omega)H^{-1}(\omega))\right]^{-1}\left[\frac{1+M_s}{M_s}\right]\right|
\end{aligned} \tag{4.59}$$

À partir de (4.58) l'inégalité pour tout $|\omega| \leq \omega_1$ nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}\{k_1 J(\omega)\} &\geq \underline{\sigma}\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
k_1 &\geq \frac{1}{\underline{\sigma}\{J(\omega)\}}\underline{\sigma}\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
k_1 &\geq 2\underline{\sigma}\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

L'inégalité (4.60) devient égale lorsque la partie de droite est à son maximum, d'où :

$$k_1 = 2max\left(\underline{\sigma}\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right) \tag{4.61}$$

De même pour tout ω l'expression (4.61) est :

$$k_1 = 2\,max\left(\underline{\sigma}\left\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\right\}^{-1}\left(\frac{1+M_s}{M_s}\right)\right) \tag{4.62}$$

En combinant (4.61) et (4.62) :

$$k_1 = 2max\begin{pmatrix} \underline{\sigma}\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\}^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \; pour \; |\omega| \leq \omega_1 \\ \underline{\sigma}\{P(\omega)H^{-1}(\omega)\}^{-1}\left(\frac{1+M_s}{M_s}\right) \; pour \; tout \; \omega \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

La fréquence ω_{i2} et l'exposant k_i sont ajustés de sorte que le module de $J_i(\omega)$ soit supérieur à une valeur positive $\gamma < I$. Par exemple, on fixe $\gamma = \frac{1}{2}$, c.-à-d. $J_i(\omega) \geq \frac{1}{2}$ pour $|\omega| \leq \omega_1$. Tout en assurant que k_i est choisi suffisamment grand pour que $C_i(s)$ soit strictement causal. Selon (4.37) on a $J_i(\omega) = J_{i1}(\omega)J_{i2}(\omega)J_{i3}(\omega)$. Supposons que le gain de $J_{i2}(\omega)$ n'agisse que dans les fréquences intermédiaires pour $|\omega| \geq \omega_1$ et n'influence pas les gains de $J_{i1}(\omega)$ et $J_{i3}(\omega)$. Alors pour obtenir $|J_i(\omega_1)| \geq \frac{1}{2}$ nous pouvons fixer $|J_{i1}(\omega_1)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|J_{i3}(\omega_1)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tout en assurant que ω_{i2} soit suffisamment important pour satisfaire (4.34). Pour ω_1 fixe :

$$|J_{i3}(\omega_1)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \left|\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.64}$$

D'où $$\omega_1 \leq \omega_2$$

Il s'ensuit la représentation graphique de $J_{i1}(\omega)$ et $J_{i3}(\omega)$ de la Figure 4.7.

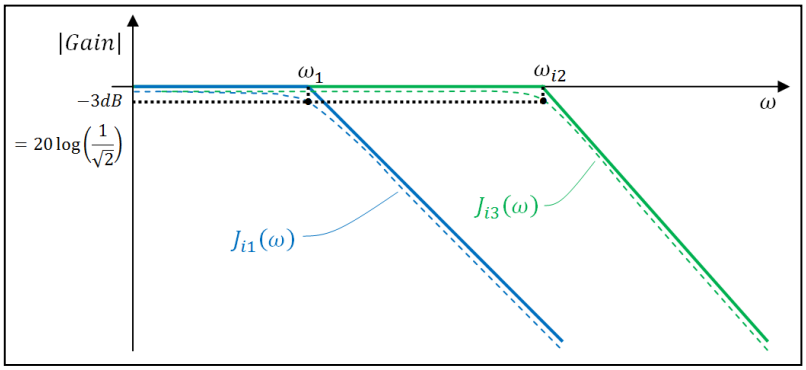


Figure 4.7 Représentation graphique de $J_{i1}(\omega)$ et $J_{i3}(\omega)$

En se référant à (4.38) :

$$\begin{aligned}\left\|\left(1+P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\|_{\omega_1} &= \bar{\sigma}\left\{\left(1+P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\} = \frac{1}{\underline{\sigma}\left\{1+P(\omega)C(\omega)\right\}} \\ &= \frac{1}{k_{i1}\underline{\sigma}\left\{\mathrm{J}_i(\omega)P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\}-1} \\ &\le \frac{1}{k_{i1}\underline{\sigma}\left\{\mathrm{J}_i(\omega)\right\}\underline{\sigma}\left\{P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\}-1} \\ &= \frac{1}{\frac{k_{i1}}{2}\underbrace{\underline{\sigma}\left\{P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\}}_{\varepsilon_1}-1} \\ &= \frac{1}{\left|\frac{k_{i1}}{2}\xi_1-1\right|} = \frac{1}{\frac{k_{i1}}{2}\xi_1-1}\end{aligned} \tag{4.65}$$

Or d'après (4.38) nous avons $k_{i1} \ge \frac{2}{\varepsilon_1}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ce qui se réarrange tel que $\frac{1}{\frac{k_{i1}}{2}\xi_1-1} \le \varepsilon$ d'où :

$$\left\|\left(1+P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\|_{\omega_1} \le \frac{1}{\frac{k_{i1}}{2}\xi_1-1} \le \varepsilon \tag{4.66}$$

De même, à partir de (4.38) nous déduisons $((k_{i1}/2)\xi\text{-}1)^{-1} \le M_s$ dans $R_e\{s\} \ge 0$, il en découle que $\|[I + P(s)C(s)]^{-1}\| \le M_s$ pour tout $|\omega|$.

Étape 4 : Preuve du théorème pour $|s| \ge \omega_1$.

Par construction $k_{i1}J_{i1}(s)$ est un réel positif, c.-à-d. $R_e\{k_{i1}J_{i1}(s)\} \ge 0$ et les fonctions $(1 + k_{i1}J_{i1})(s)\ i = 1,2 \ldots n$ sont analytiques inversibles dans $R_e\{s\} \ge 0$ et satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\left\|\left(1+k_{i1}J_{i1}(s)\right)^{-1}\right\| \le 1 \\ &\left\|k_{i1}J_{i1}\left(1+k_{i1}J_{i1}(s)\right)^{-1}\right\| \le 1 \\ &\left\|\left(1+k_{i1}J_{i1}(s)\right)\right\| \ge 1\end{aligned} \tag{4.67}$$

Remarque, pour $R_e\{s\} \geq 0$, $x(s) \geq 0$ nous pouvons simplifier la propriété (4.67) par l'exemple suivant : soit $1+x \geq 1$, alors il existe $(1+x)^{-1} \geq 0$ (puisque cette expression ne s'annule pas), d'où $\left\|(1+x)^{-1}\right\| < 1$. Exprimons désormais $(1 + PC)$ en fonction de $k_1 J_1 J_3$ avec $k_1 = diag(k_{i1})$, $J_1 = diag(J_{i1})$ et $J_3 = diag(J_{i3})$, en se référant à (4.67) :

$$
\begin{aligned}
&\|(I+PC)\| = \left\|I + k_1 P H^{-1} J_1 J_3\right\| \lim_{x\to\infty} \\
&\left\|I + PH^{-1}k_1J_1J_3 + k_1J_1 - k_1J_1 + PH^{-1}k_1J_1 - PH^{-1}k_1J_1\right\| \\
&= \left\|I + k_1J_1 + (PH^{-1} - I)k_1J_1 + PH^{-1}k_1J_1(J_3 - I)\right\| \\
&= \left\|(I + k_1J_1) + [(PH^{-1} - I)k_1J_1 + PH^{-1}k_1J_1(J_3 - I)](I + k_1J_1)^{-1}(I + k_1J_1)\right\| \\
&= \left\|\left[I + [(PH^{-1} - I)k_1J_1 + PH^{-1}k_1J_1(J_3 - I)](I + k_1J_1)^{-1}\right]\underbrace{(I + k_1J_1)}_{\geq 1}\right\| \qquad (4.68) \\
&\geq \left\|\left[I + [(PH^{-1} - I)k_1J_1 + PH^{-1}k_1J_1(J_3 - I)](I + k_1J_1)^{-1}\right]\right\| \\
&\geq \|I\| - \underbrace{\left\|\left[[(PH^{-1} - I)k_1J_1 + PH^{-1}k_1J_1(J_3 - I)](I + k_1J_1)^{-1}\right]\right\|}_{\|\phi(s)\|} \\
&= 1 - \|\phi(s)\|
\end{aligned}
$$

Selon (4.41) $\left\|(I+PC)^{-1}\right\| < M_s$ avec $M_s > 1$. D'où $\frac{1}{M_s} \leq \left\|(I+PC)\right\| < 1$, on déduit de (4.68) :

$$1 - \|\phi(s)\| \leq \|(I + PC)\| < 1 \text{ avec } \|\phi(s)\| < 1 \qquad (4.69)$$

Puisque $P(s)H^{-1}(s)$ est analytique pour $s \in |s| > \omega_1$, $R_e\{s\} \geq 0$, l'expression de $\|\phi(s)\|$ à partir de (4.68) donne :

$$\|\phi(s)\| \leq \left\|\left[(PH^{-1} - I)\right]\right\| \left\|k_1J_1(I + k_1J_1)^{-1}\right\| + \left\|PH^{-1}\right\| \left\|k_1J_1(I + k_1J_1)^{-1}(J_3 - I)\right\| \qquad (4.70)$$

Puisque selon (4.54) nous avons pour $\omega > \omega_c$, $\|(PH^{-1} - I)\| \leq \alpha$ alors (4.70) devient :

$$\left\|\phi(s)\right\| \le \alpha \underbrace{\left\|k_1 J_1 (I + k_1 J_1)^{-1}\right\|}_{\le 1} + \left\|PH^{-1}\right\| \left\|k_1 J_1 (I + k_1 J_1)^{-1} (J_3 - I)\right\|$$

$$\left\|\phi(s)\right\| \le \alpha + \left\|PH^{-1}\right\| \left\|k_1 J_1 (I + k_1 J_1)^{-1} (J_3 - I)\right\| \tag{4.71}$$

De plus, pour $\omega > \omega_z \geq \omega_c$ avec $\omega_z = \max(\omega_1, \omega_a, \omega_b)$ et l'expression de J_1 en (4.37) :

$$\begin{aligned}
&\frac{k_1 J_1}{I + k_1 J_1} = \frac{k_1 \dfrac{\omega_1}{s + \omega_1}}{I + k_1 \dfrac{\omega_1}{s + \omega_1}} \\
&= \frac{k_1 \omega_1}{s + \omega_1 + k_1 \omega_1} = \frac{k_1 \omega_1}{s + \omega_1 (I + k_1)} \\
&= \frac{k_1}{I + k_1} \left(\frac{\omega_1}{\dfrac{s}{I + k_1} + \omega_1} \right) \\
&= \frac{k_1}{I + k_1} \underbrace{\left(\frac{\omega_1 (I + k_1)}{s + \omega_1 (I + k_1)} \right)}_{J_{1(1+k_1)}} \\
&= \frac{k_1}{I + k_1} J_{1(1+k_1)}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Pour $\omega_{i1} \geq \omega_1$ remplaçons (4.72) dans (4.71) :

$$\left\|\phi(s)\right\| \le \alpha + \frac{k_1}{I + k_1} \left\|PH^{-1}\right\| \left\|J_{1(1+k_1)}\right\| \left\|(J_3 - I)\right\| \tag{4.73}$$

Sachant que $\dfrac{1}{M_s} \le \left\|(I + PC)\right\|$, M_s étant la valeur maximum de $\left\|(I + PC)^{-1}\right\|$, alors $\dfrac{1}{M_s}$ est une valeur minimum, ce qui impose le sens de l'inégalité suivante pour tout $|\omega|$ à partir de (4.68) :

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(I+PC\right)\right\| \geq 1-\left\|\phi\left(s\right)\right\| \geq \frac{1}{M_s} \\
&1-\alpha-\frac{k_1}{1+k_1}\left\|PH^{-1}\right\|\left\|J_{1\left(1+_{k_1}\right)}\right\|\left\|\left(J_3-I\right)\right\| \geq \frac{1}{M_s} \\
&1-\alpha-\frac{1}{M_s} \geq \frac{k_1}{1+k_1}\left\|PH^{-1}\right\|\left\|J_{1\left(1+_{k_1}\right)}\right\|\left\|\left(J_3-I\right)\right\| \\
&1-\alpha-\frac{1}{M_s} \geq \left\|PH^{-1}\right\|\left\|\frac{k_1}{1+k_1}J_{1\left(1+_{k_1}\right)}\right\|\left\|\left(J_3-I\right)\right\|
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Prenons pour des raisons de simplicité $\omega_2 = \max(\omega_{i2}) > \omega_1$ et remplaçons les expressions de $J_{1(1+k_1)}$ (4.72) et de J_3(4.37) dans (4.74) :

$$\begin{aligned}
&1-\alpha-\frac{1}{M_s} \geq \left\|PH^{-1}\right\|\left\|k_1\left(\frac{\omega_1}{s+\left(1+k_1\right)\omega_1}\right)\right\|\left\|\left(\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k-I\right)\right\| \\
&1-\alpha-\frac{1}{M_s} \geq \left|\inf\left(PH^{-1}\right)k_1\left(\frac{\omega_1}{s+\left(1+k_1\right)\omega_1}\right)\right\|\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k-I\Big|
\end{aligned} \tag{4.75}$$

La condition mentionnée à l'équation (4.75) peut également être satisfaite en augmentant ω_2 à la valeur désirée, c.-à-d. lorsque k_1 est augmenté, l'expression $k_1[\omega_1/\,(s+(I+k_1)\omega_1)\,]$ approche l'unité, tandis qu'une augmentation de ω_2 fais tendre $\left[I-[\omega_2/(s+\omega_2)^k]\right]$ vers 0. En insérant (4.75) dans (4.73) :

$$\left\|\phi(s)\right\| \leq \alpha+1-\alpha-\frac{1}{M_s} = 1-\frac{1}{M_s} < 1 \tag{4.76}$$

À partir de (4.68) et (4.76) nous obtenons :

$$\|I+PC\| \geq 1-\|\phi(s)\| \geq \frac{1}{M_s} \tag{4.77}$$

$(I + PC)^{-1}$ est donc analytique et (4.34) est valide pour $|s| \leq \omega_1$ où $R_e\{s\} \geq 0$. La condition $|J_3(\omega_1)| = \|I\| \left|\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k\right|_{s=\omega_1} \geq 2^{-1/2}$ s'exprime également par $\omega_2 \geq \left[2^{\frac{1}{k}} - I\right]^{-\frac{1}{2}} \omega_1$. Cela permet de définir ω_2 selon une fréquence ω_1 fixe. L'expression (5.34) devient :

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(I + P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\|_s = \bar{\sigma}\left\{\left(I + P(\omega)C(\omega)\right)^{-1}\right\} \\
&\leq \frac{1}{\underline{\sigma}\left\{P(\omega)C(\omega) + I\right\}} \\
&\leq \frac{1}{\underline{\sigma}\left\{P(\omega)C(\omega)\right\} - \bar{\sigma}\left\{I\right\}} \\
&\leq \frac{1}{\underline{\sigma}\left\{P(\omega)C(\omega)\right\} - 1} < M_s \\
&\underline{\sigma}\left\{\frac{k_1}{2} P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\} - 1 > \frac{1}{M_s} \\
&\underline{\sigma}\left\{\frac{k_1}{2} P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\} > 1 + \frac{1}{M_s} \\
&\frac{k_1}{2}\underline{\sigma}\left\{P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\} > 1 + \frac{1}{M_s} \\
&k_1 > \frac{2(1+\frac{1}{M_s})}{\underline{\sigma}\left\{P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\}} \\
&> \frac{2(1+\frac{1}{M_s})}{\left[\bar{\sigma}\left\{P(\omega)\mathrm{H}^{-1}(\omega)\right\}^{-1}\right]^{-1}} = 2(1+\frac{1}{M_s})\bar{\sigma}\left\{P^{-1}(\omega)\mathrm{H}(\omega)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Pour $\omega \to \infty$ et selon (4.54),

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|s|\geq R \\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}} \left\|\left[P(s)H(s)^{-1} - I\right]\right\|_s = \alpha \\
&\lim_{R\to\infty} \sup_{\substack{|s|\geq R \\ \mathrm{Re}(s)\geq 0}} \left\|\left[P(s)H(s)^{-1}\right]\right\|_s \geq 1 + \alpha \quad \textit{en se référent à}(4.23)
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

Avec (5,34), on obtient :

$$M_s > \frac{1}{\alpha}, \qquad 1 + \frac{1}{M_s} < 1 + \alpha \tag{4.80}$$

En utilisant (4.79) et (4.80) dans (4.78) on obtient :

$$k_1 > 2\left(1 + \frac{1}{M_s}\right)^2 \tag{4.81}$$

Remarque : Le compensateur $C_i(s)$ peut être conçu individuellement selon la procédure décrite ci-dessus. Ce qui permettra de choisir des gains individuels k_{i1} (reliés à ω_{i2}) plus petit autant que possible.

Étape 5 : Ajustement du temps de réponse des sorties.

En basses et hautes fréquences, la minimisation de la sensibilité est assurée. Les filtres $J_{i2}(\omega) = \prod_{j=1}^{j=m} k_{2ij}\left(1+\beta_{ij}s\right)\left(1-\alpha_{ij}s\right)^{-1}$ qui agissent sur les fréquences intermédiaires sont ajustés comme dans le cas monovariable développé dans (David Bensoussan, 2015).

Remarque : Notons que la preuve ne suppose pas nécessairement que $P(s)$ soit stabilisable et détectable. C.-à-d. qu'il n'y a pas de fixe mode présent (Shih-Ho & Davison, 1973). Cependant, un processus instable peut être stabilisé par une boucle de retour diagonale. La condition (4.32) remplace la condition habituelle sur la minimalité, c.-à-d. concernant la commandabilité et la détectabilité de $P(s)$.

4.3 Étude d'un système multi-entrées/multi 2×2

4.3.1 Objectifs

La réalisation d'une commande de processus comporte plusieurs défis. La maîtrise des marges de phase et de gain permet d'obtenir une bonne robustesse du système s'affranchissant alors des incertitudes sur le processus et les perturbations. Par ailleurs, une bonne réponse temporelle se devra d'être ultrarapide et précise.

Dans un premier temps l'étude proposée dans ce chapitre vise à évaluer le comportement d'un système 2×2 dont la structure sera de type "P-cannonical MIMO interconnected plant" tel que défini dans (Tzanev, 2014). Le compensateur choisi a été conçu avec la commande B. On portera une attention particulière sur les performances temporelles et fréquentielles de ce type de compensateur, notamment sur les couplages.

4.3.2 Présentation

Ce chapitre étudie un système de type MIMO 2×2 extrait de (Zames & Bensoussan, 1983). Son expression dans le domaine de Laplace est donnée comme suit :

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} \begin{bmatrix} s-1 & -7 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

L'association du processus $P(s)$ et de son compensateur $C(s)$ dans le contexte d'un système MIMO 2× 2 est représentée à la Figure 4.8 sous forme de schéma bloc de type P-canonique, tel que décrit dans (Tzanev, 2014).

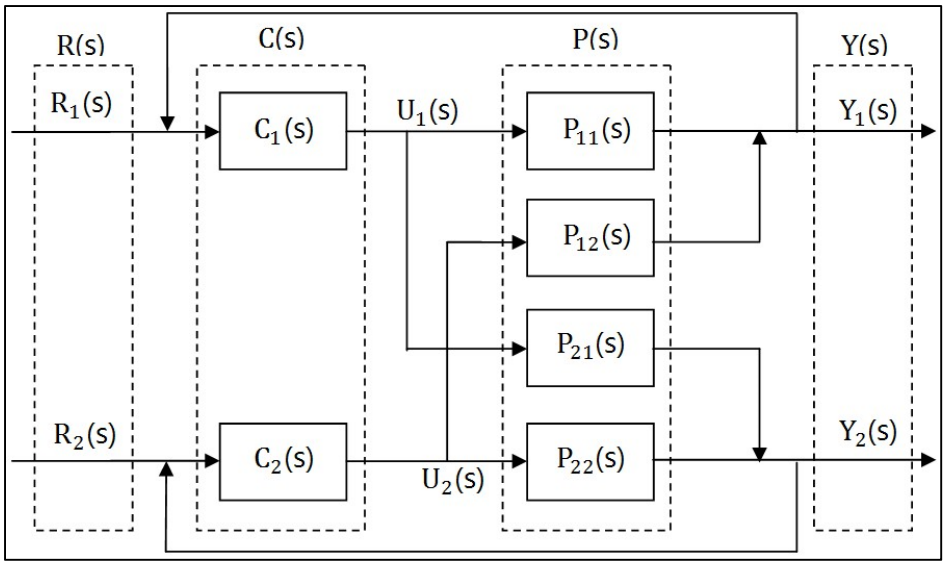


Figure 4.8 Représentation sous forme de schéma bloc du système multivariable *P*(*s*) et de son compensateur *C*(*s*)

En développant l'expression de $P(s)$ décrite en (4.82) il vient alors :

$$P_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s-1}{(s+2)^2(s-2)} \tag{4.83}$$

$$P_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{-7}{(s+2)^2(s-2)} \tag{4.84}$$

$$P_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} \tag{4.85}$$

$$P_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{s+3}{(s+2)^2(s-2)} \tag{4.86}$$

La conception des compensateurs $C_1(s)$ et $C_2(s)$ avec la commande B sera détaillée plus loin dans ce chapitre. Les relations entre les entrées $R(s)$ et $Y(s)$ peuvent s'exprimer avec les transmittances en boucles fermées *T*(*s*) sous la forme suivante :

$$Y(s) = T(s)R(s) \tag{4.87}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

Le calcul des expressions analytiques de $T(s)$ en fonction de $P(s)$ et $C(s)$ est disponible en ANNEXE II. Le résultat final, avec $D = (1 + P_{11}C_1)(1 + P_{22}C_2) - P_{12}C_2P_{21}C_1$ est :

$$T_{11}(s) = [P_{11}C_1 + C_1C_2(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})]D^{-1} \tag{4.89}$$

$$T_{12}(s) = P_{12}C_2D^{-1} \tag{4.90}$$

$$T_{21}(s) = P_{21}C_1D^{-1} \tag{4.91}$$

$$T_{22}(s) = [P_{22}C_2 + C_1C_2(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})]D^{-1} \tag{4.92}$$

On remarquera que dans les expressions de $T_{11}(s)$ et $T_{22}(s)$ on retrouve les transmittances du système sans couplages $P_{11}C_1/(1+P_{11}C_1)$ et $P_{22}C_2/(1+P_{22}C_2)$, dont il conviendra de se rapprocher, tout en les faisant se rapprocher de l'unité avec la conception du compensateur $C(s)$.

4.3.3 Critères d'applications de la commande B

Dans cette partie nous allons vérifier les différents critères nécessaires à remplir sur $P(s)$ pour pouvoir concevoir le compensateur B qui lui sera associé :

(1) Être linéaire et invariant dans le temps

La fonction de transfert $P(s)$ donnée par (4.82) est représentée par des équations différentielles linéaires à coefficients constants ; elle est donc linéaire et invariante dans le temps.

(2) $P(s)$ doit être inversible

Une des conditions à remplir pour appliquer la commande B est que la matrice $P(s)$ peut être instable, mais inversible. Calculons $P^{-1}(s)$, en commençant par le déterminant de $P(s)$ noté $\det(P(s)) = P_{11}(s)P_{22}(s) - P_{12}(s)P_{21}(s)$:

$$\det\big(P(s)\big) = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)^2} \tag{4.93}$$

Le déterminant n'ayant pas de zéro dans le demi-plan complexe de droite, il est alors possible de poursuivre le calcul de la matrice inverse $P^{-1}(s)$, holomorphique dans $Re\{s\} > 0$:

$$P^{-1}(s) = \frac{(s+2)^2(s-2)}{s^2+2s+4}\begin{pmatrix} s+3 & 7 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

$$P^{-1}(s) = \frac{1}{\det\big(P(s)\big)}\begin{pmatrix} \dfrac{s+3}{(s+2)^2(s-2)} & \dfrac{-1}{(s+2)^2(s-2)} \\ \dfrac{7}{(s+2)^2(s-2)} & \dfrac{s-1}{(s+2)^2(s-2)} \end{pmatrix}^T$$

(3) $P(s)$ est strictement propre, instable avec diagonale $D(s)$

Les degrés des numérateurs de $P(s)$ sont strictement inférieurs aux degrés des dénominateurs de $P(s)$. Par conséquent $P(s)$ est strictement propre. La fonction de transfert $P(s)$ est instable avec un pôle situé à droite pour $s = -2$. La diagonale $D(s)$ de $P(s)$ peut alors être définie telle que :

$$D(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \tag{4.95}$$

(4) 1er critère en HF : $\underline{\sigma}(P(s)) > \frac{\mu}{s^k}$ avec $\omega > \omega_f$

Soit le calcul des valeurs singulières de la fonction $P(j\omega)$:

Avec

$$P^*(j\omega) = \frac{1}{(-j\omega+2)^2(-j\omega-2)}\begin{bmatrix} -j\omega-1 & 1 \\ -7 & -j\omega+3 \end{bmatrix} \tag{4.97}$$

$$\sigma\big(P(j\omega)\big) = \sigma\left(\frac{1}{(j\omega+2)^2(j\omega-2)}\begin{bmatrix} j\omega-1 & -7 \\ 1 & j\omega+3 \end{bmatrix}\right) \tag{4.96}$$

D'où
$$P^*(j\omega)P(j\omega) = \frac{1}{(4+\omega^2)^3}\begin{bmatrix} 2+\omega^2 & 8j\omega+10 \\ -8j\omega+10 & 58+\omega^2 \end{bmatrix} \tag{4.98}$$

Les valeurs singulières s'expriment alors par :

$$Det(P^*(j\omega)P(j\omega) - \lambda I) = \det\left(\frac{1}{(4+\omega^2)^3}\begin{bmatrix} 2+\omega^2-\lambda & 8j\omega+10 \\ -8j\omega+10 & 58+\omega^2-\lambda \end{bmatrix}\right) \tag{4.99}$$

Avec l'aide de Matlab nous calculons les valeurs singulières $\sigma(P(\sigma))$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\omega) &= \sqrt{\frac{30+\omega^2+2\sqrt{221+16\omega^2}}{(4+\omega^2)^3}} \\ \sigma_2(\omega) &= \sqrt{\frac{30+\omega^2-2\sqrt{221+16\omega^2}}{(4+\omega^2)^3}} \end{aligned} \tag{4.100}$$

La Figure 4.9 montre les tracés des valeurs singulières $\sigma_1(\omega)$ et $\sigma_2(\omega)$ de $P(j\omega)$. D'une part nous remarquons que la valeur singulière minimum $\underline{\sigma}\big(P(j\omega)\big) = \sigma_2(\omega)$. D'autre part, pour une fréquence nulle $\sigma_2(0) \approx 0{,}00418$ et pour les hautes fréquences cette valeur propre peut être approximée par $\frac{1}{\omega^2}$. Preuve :

$$\lim_{\omega\to+\infty} \sigma_2(\omega) = \lim_{\omega\to+\infty} \sqrt{\frac{30+\omega^2-2\sqrt{221+16\omega^2}}{(4+\omega^2)^3}} \approx \sqrt{\frac{\omega^2-2\sqrt{16\omega^2}}{(\omega^2)^3}} \approx \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^6}} \approx \frac{1}{\omega^2} \tag{4.101}$$

Il est alors, possible de considérer une fonction du type $\frac{k}{s^m}$, telle que $\underline{\sigma}\big(P(j\omega)\big) > \frac{k}{s^m}$. Par exemple, en vert sur la Figure 4.9 a été tracée la fonction $\mu = \frac{10^{-4}}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^3}$, permettant ainsi de valider un des critères d'application de la commande B.

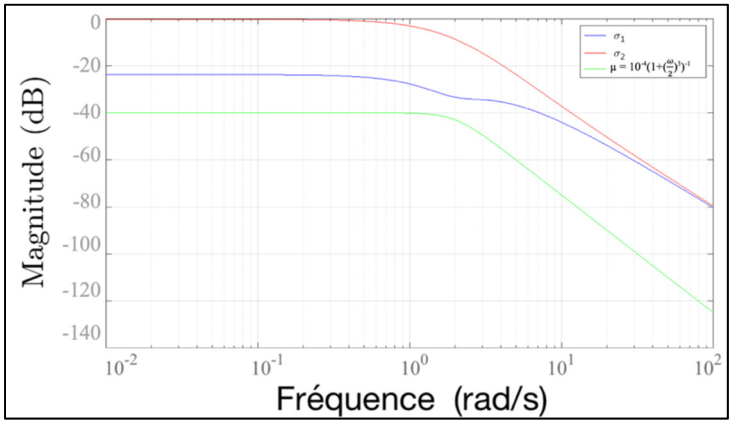


Figure 4.9 Valeurs singulières de $P(j\omega)$

Le Tableau 4.2 répertorie la valeur singulière maximum de $P(j\omega)$ noté $\|P(j\omega)\|$. Il est souhaité que cette valeur ne soit pas trop importante afin de faciliter le travail du compensateur pour faire converger le système. Ici, le maximum est proche de 0 dB, ce qui laisse entrevoir une conception du compensateur avec des paramètres réaliste.

Tableau 4.2 Valeur singulière $\|P(j\omega)\|$

$\max(\bar{\sigma}(P(j\omega)))$ [dB]	Fréquence [rad/s]
-0.301	0

(5) 2ème critère en HF vérifiant $\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|P(s)-D(s)\|\right)<\alpha<1$

En HF la propriété $\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|P(s)-D(s)\|\right)<\alpha<1$ dois être vérifiée. $D(s)$ étant la matrice diagonale de $P(s)$ et α une valeur inférieure à l'unité. En développant cette propriété, nous obtenons :

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\left\|\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\begin{bmatrix}0 & -7\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\|\right)<\alpha<1 \qquad (4.102)$$

Lorsque s tend vers l'infini on peut alors vérifier la propriété :

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\left\|\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix}0 & -7\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\|\right)\approx 0<\alpha<1 \tag{4.103}$$

Les critères validant la possibilité d'appliquer la commande B au processus $P(s)$ ont été vérifiés. Soient : la matrice $P(s)$ est inversible ; strictement propre ; En HF $\underline{\sigma}(P(j\omega))>\frac{k}{s^m}$ et $\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|P(s)-D(s)\|\right)<\alpha<1$ pour $R=4$ par exemple.

4.3.4 Expression du compensateur *C*(*s*)

Dans cette partie nous allons chercher à construire le compensateur B dans le domaine multivariable pour le système $P(s)$ défini en (4.82). Pour rappel l'expression générale du compensateur B s'écrit :

$$C(s)=H^{-1}(s)J(s) \tag{4.104}$$

En multivariable l'expression de $H^{-1}(s)$ est définie tel que dans (Bensoussan, 2015) :

$$H(s)=Z(s)D_i(s) \tag{4.105}$$

$D_i(s)$ étant définie comme la diagonale du processus multivariable $P(s)$, soit :

$$D_i(s)=\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ 0 & s+3\end{bmatrix} \tag{4.106}$$

De même :

$$Z(s) = diag\left(\frac{c_i}{(s+s_0)^{q_i}}\right)[D_i^+(s)]^{-1} \tag{4.107}$$

Où $D_i^+(s)$ représente les pôles et zéros du demi-plan complexe de droite de $D_i(s)$, d'où :

$$D_i^+(s) = \frac{1}{(s-2)}diag[(s-1) \quad 1] \tag{4.108}$$

On en déduit :

$$[D_i^+(s)]^{-1} = (s-2)diag\left[\frac{1}{(s-1)} \quad 1\right] \tag{4.109}$$

On peut alors exprimer $Z(s)$:

$$Z(s) = diag\left(\frac{c_i}{(s+s_0)^{q_i}}\right)(s-2)diag\left[\frac{1}{(s-1)} \quad 1\right] \tag{4.110}$$

Et :

$$H(s) = diag\left(\frac{c_i}{(s+s_0)^{q_i}}\right)(s-2)diag\left[\frac{1}{(s-1)} \quad 1\right]\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}diag[s-1 \quad s+3] \tag{4.111}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)^2}diag\left(\frac{c_i}{(s+s_0)^{q_i}}\right)diag[1 \quad s+3]$$

D'où :

$$H^{-1}(s) = (s+2)^2 diag\left(\frac{(s+s_0)^{q_i}}{c_i}\right)diag\left[1 \quad \frac{1}{s+3}\right] \tag{4.112}$$

L'expression générale du compensateur B dans le contexte multivariable devient :

$$C(s) = k_1(s+2)^2 diag\left(\frac{(s+s_0)^{q_i}}{c_i}\right)diag\left[1 \quad \frac{1}{s+3}\right]\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k \tag{4.113}$$

4.3.5 Calibration du compensateur avec erreur statique

4.3.5.1 Choix des paramètres initiaux

Choisissons les valeurs suivantes qui nous permettent d'assurer que la fonction de transfert du compensateur est strictement propre et de symétriser sa diagonale : $k = 3$; $q_1 = 0$; $q_2 = 1$; $s_0 = 3$; $c_1 = c_2 = 1$. L'expression (4.113) devient alors :

$$C(s) = k_1(s+2)^2 diag[1 \quad 1] \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^3 \tag{4.114}$$

Les paramètres k_1, ω_1 et ω_2 seront déterminés à partir d'un programme d'optimisation développé sous Matlab, dont un aperçu du fonctionnement est donné dans la partie suivante.

4.3.5.2 Utilisations de l'algorithme d'optimisation

L'utilisation d'un programme Matlab dont le détail est exposé dans (Houimdi, 2015) va nous permettre de calibrer k_1, ω_1 et ω_2. Trois cas seront étudiés pour des gains du compensateur inférieur aux valeurs 60 dB, 70 dB et 80 dB, tout en recherchant un temps d'établissement t_s de la réponse temporelle le plus court possible dans chacune de ces conditions. L'algorithme d'optimisation utilisé teste plusieurs valeurs de ces trois paramètres rentrés au préalable, puis utilise la réponse temporelle du système en boucle fermée pour évaluer t_s de $T_{11}(s)$. Si le résultat obtenu est meilleur que le test précédent, alors les valeurs de k_1, ω_1 et ω_2 sont conservées et stockées dans k_{1r}, ω_{1r} et ω_{2r}.

Les constantes à définir manuellement au début du programme sont les suivantes :

- C_{max} : Valeur maximum du gain du compensateur $C(s)$;
- k_{1min} : Valeur initiale du gain k_1 ;
- k_{1max} : Valeur finale du gain k_1 ;
- k_{1pas} : Pas d'augmentation du gain k_1 ;

- ω_{2min} : Valeur initiale de la fréquence ω_2 ;
- ω_{2max} : Valeur finale de la fréquence ω_2 ;
- ω_{2pas} : Pas d'augmentation de la fréquence ω_2 ;
- ω_{1min} : Valeur initiale de la fréquence ω_1 ;
- ω_{1max} : Valeur finale de la fréquence ω_1 ;
- ω_{1pas} : Pas d'augmentation de la fréquence ω_1.

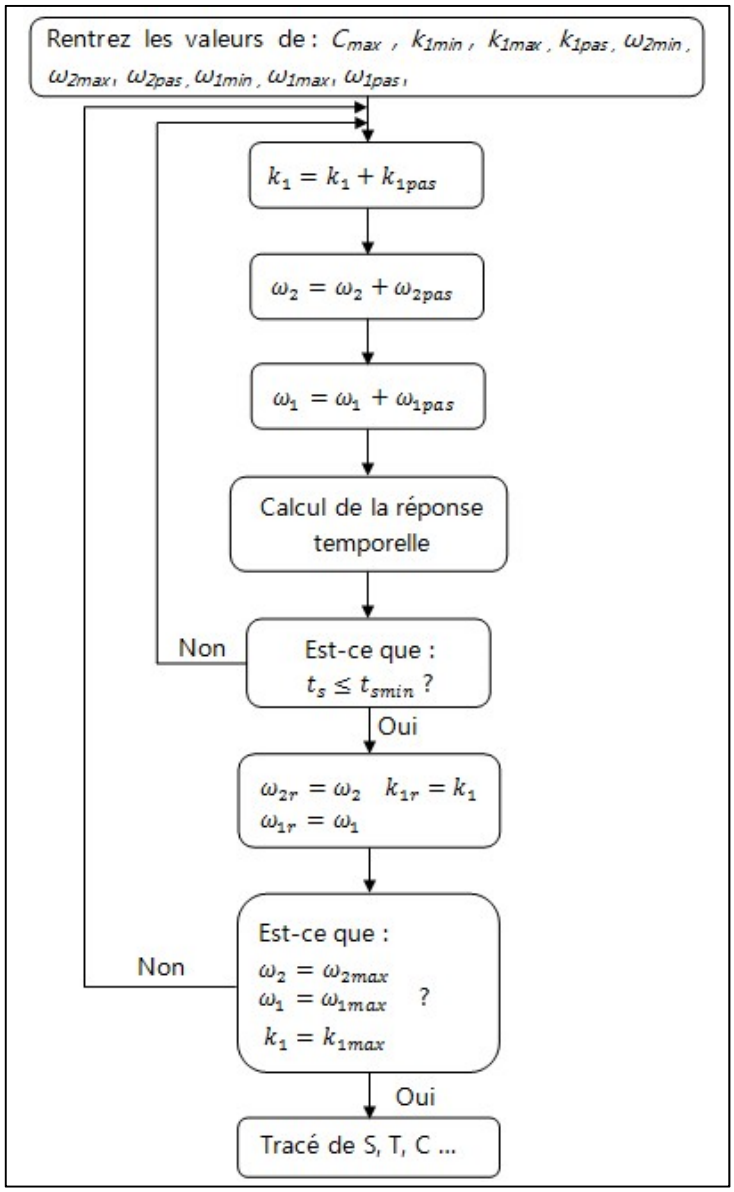


Figure 4.10 Organigramme du programme Matlab pour trouver les paramètres de $C(s)$ avec erreur statique

Notons que le temps d'établissement minimum t_{smin} est une valeur fixe à définir dans les conditions initiales, nous prendrons par exemple une large valeur de 10 s.

4.3.5.3 Nécessité d'un filtre pour les fréquences intermédiaires

Dans un premier temps les résultats obtenus montraient une difficulté à obtenir une réponse temporelle stable tout en préservant un gain du compensateur $C(s)$ inférieur aux valeurs fixées. La Figure 4.11 et la Figure 4.12 montrent l'allure des fonctions de transfert $T_{nn_i}(s)$ avec $n = \{1, 2\}$ et $i = \{60, 70, 80\}$ désignant les trois valeurs de $k_1 = \{24; 66; 108\}$.

Nous observons que pour une bande fréquentielle $\Delta\omega$ située environs entre 0.2 et 10 rad/s les courbes des couplages $T_{21}(s)$ et $T_{12}(s)$ s'approchent fortement, voir même dépasse l'axe des 0 dB. Ces perturbations provoquent alors de l'instabilité et les réponses temporelles $y_1(t)$ et $y_2(t)$ peinent à se stabiliser.

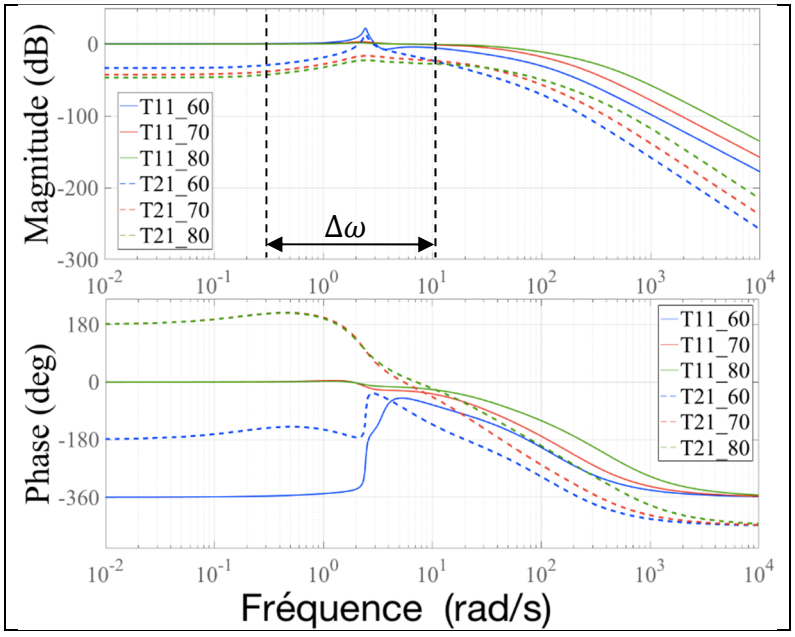


Figure 4.11 Bode des transmittances $T_{11}(s)$ et $T_{21}(s)$ pour trois valeurs du gain k_1

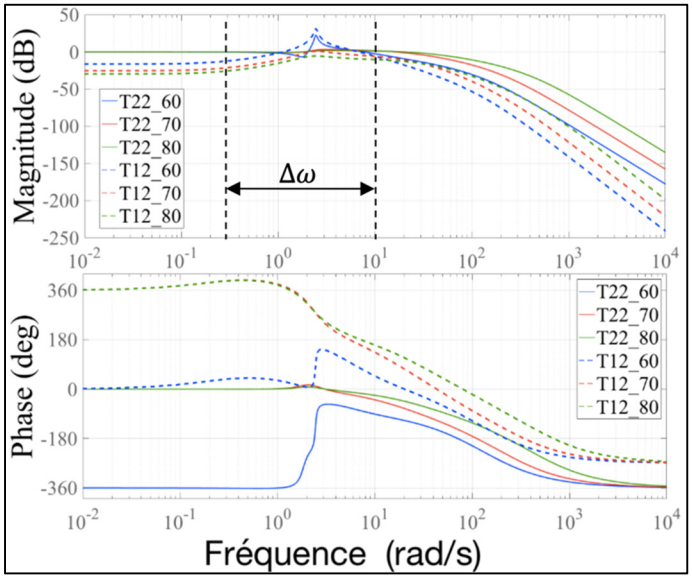


Figure 4.12 Bode des transmittances $T_{22}(s)$ et $T_{12}(s)$ pour trois valeurs du gain k_1

La Figure 4.13 montre un écroulement du gain de $C(s)$ dans la bande fréquentielle $\Delta\omega$. Cette perte de gain ne permet pas de conserver une bonne réjection des couplages pour ses fréquences telles que nous l'avons constaté sur les Figure 4.11 et Figure 4.12.

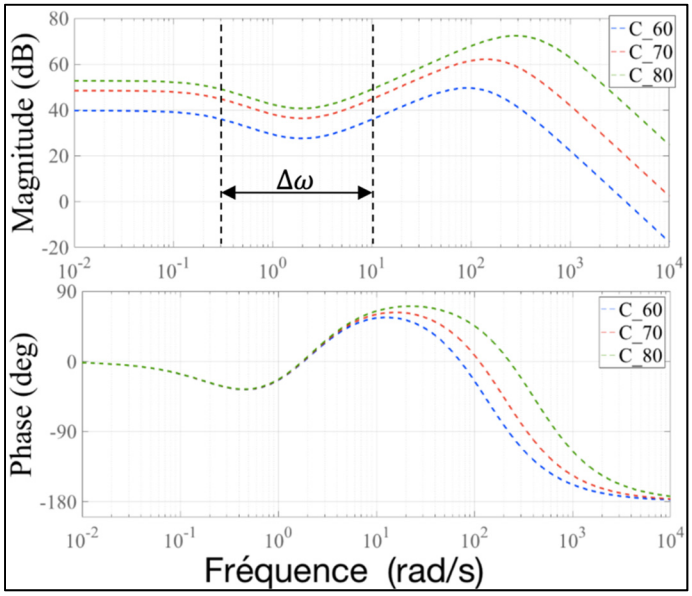


Figure 4.13 Allure du compensateur $C(s)$ pour trois valeurs de k_1

Pour compenser cette perte de gain du compensateur $C(s)$ nous allons ajouter un filtre intermédiaire F_{inter} pour élever son amplitude dans la gamme de fréquences $\Delta\omega$. L'expression du filtre choisi est détaillée à l'équation (4.115) :

$$F_{inter} = \left(1 + \frac{s}{z_4}\right)\left(1 + \frac{s}{z_3}\right)\left(\left(1 + \frac{s}{p_3}\right)^2\right)^{-1} \tag{4.115}$$

L'expression du compensateur avec le filtre intermédiaire devient :

$$C(s) = k_1(s+2)^2 diag[1 \quad 1]\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^3 F_{inter} \tag{4.116}$$

Les valeurs des zéros z_3, z_4 et du pôle double p_3 ont été choisies de manière à ajouter un gain dans la gamme de fréquences $\Delta\omega$ pour relever le gain de $C(s)$ tout en prenant garde de ne pas rajouter une valeur finale de F_{inter} trop importante, ce qui risquerait d'augmenter la valeur de C_{max} par défaut et réduire la marge de liberté quant au réglage des paramètres k_1, ω_1 et ω_2. Les valeurs de $z_3 = 2.05$, $z_4 = 0.19$ et $p_3 = 1.05$ permettent d'obtenir la courbe représentée à la Figure 4.14. La valeur finale de $F_{inter}(s) = 9.04\ dB$.

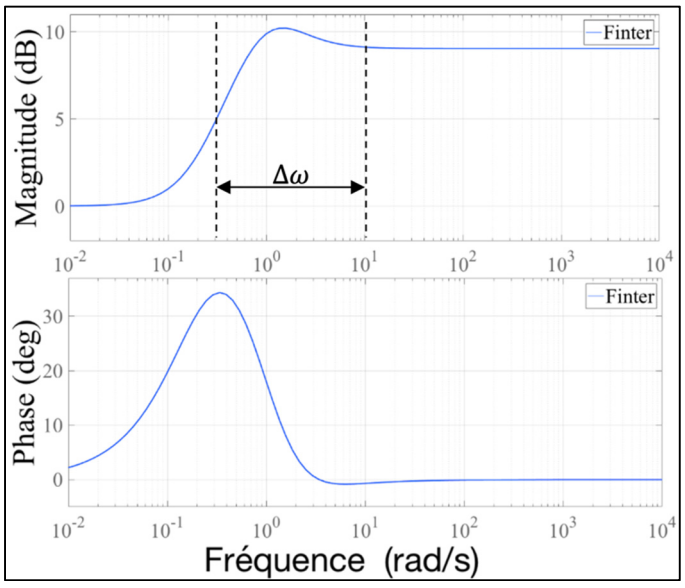


Figure 4.14 Bode du filtre intermédiaire F_{inter}

La Figure 4.15 montre que l'ajout de F_{inter} a permis de rehausser, pour les trois valeurs de k_1 utilisées, l'allure du gain (courbe pleine) pour les fréquences comprises dans $\Delta\omega$ pour $C(s)$ comparé aux allures en pointillés sans le filtre intermédiaire.

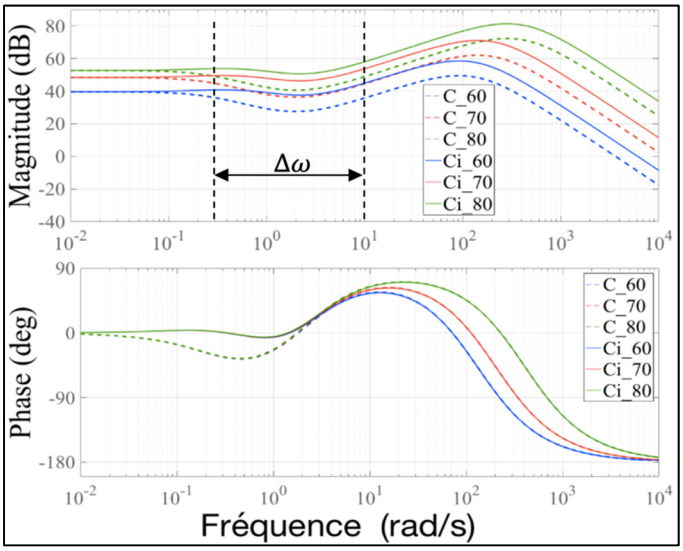


Figure 4.15 Comparaison de $C(s)$ avec et sans F_{inter} pour trois valeurs de k_1

Une meilleure réjection des perturbations $T_{21}(s)$ et $T_{12}(s)$, notamment dans la gamme de fréquences $\Delta\omega$ est observée.

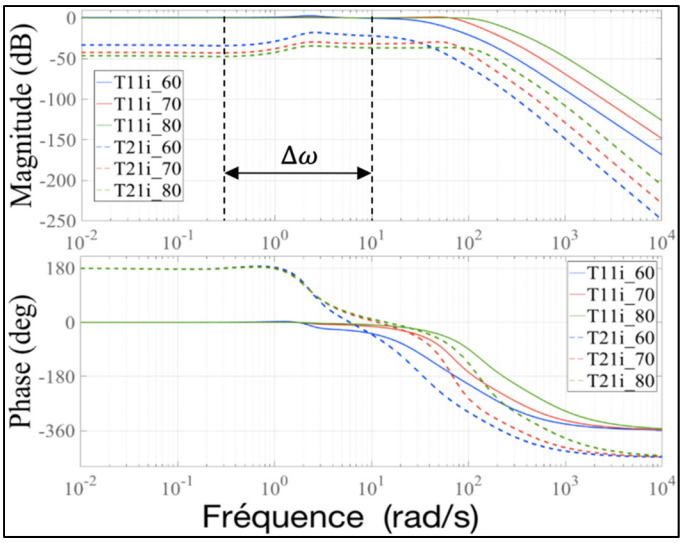


Figure 4.16 Bode de T11i(s) et $T_{21i}(s)$

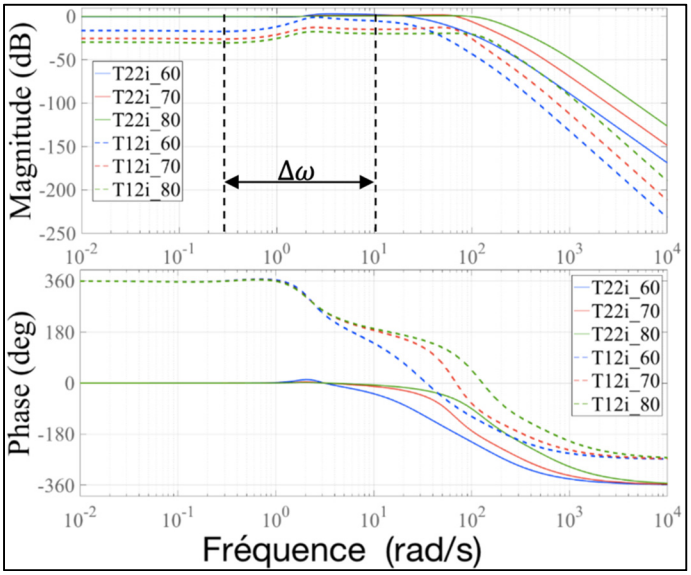


Figure 4.17 Bode de $T_{22i}(s)$ et $T_{12i}(s)$

Les courbes présentées ci-dessus ne sont pas encore optimisées selon k_1, ω_1 et ω_2 pour des valeurs de C_{max} = {60, 70, 80} dB. La partie suivante va permettre d'analyser les résultats optimisés avec l'algorithme présenté à la section 4.3.5.2.

4.3.5.4 Résultats obtenus pour un compensateur avec erreur statique

L'utilisation de l'algorithme d'optimisation présenté à la section 4.3.5.2 a permis d'obtenir les valeurs présentes dans le Tableau 4.3 pour les trois gains maximums du compensateur C_{max} = {60, 70, 80} dB.

Tableau 4.3 Valeurs obtenues dans le cas d'une erreur statique

		C_{max} = 60 dB	C_{max} = 70 dB	C_{max} = 80 dB
ω_1 [rad/s]		0.25	0.25	0.25
ω_2 [rad/s]		130	200	400
k_1		28	57	91
$T_{11}(s)$	BF	0.458	0.226	0.142
[dB]	max	2.26	0.99	0.6

Tableau 5.3 Valeurs obtenues dans le cas d'une erreur statique (suite)

		C_{max} = 60 dB	C_{max} = 70 dB	C_{max} = 80 dB
$T_{22}(s)$	BF	-0.174	-0.0804	-0.0493
[dB]	max	2.42	1.44	0.675
$T_{12}(s)$	BF	-17.8	-24.1	-28.2
[dB]	max	-3	-11.1	-15.8
$S_{11}(s)$	BF	-25.3	-31.6	-35.6
[dB]	max	3	3.88	3.08
$S_{22}(s)$	BF	-34.1	-40.7	-44.9
[dB]	max	3.5	4.21	3.24

Le programme d'optimisation a permis d'obtenir des allures de $C(s)$ montrées à la Figure 4.18 présentant un maximum sensiblement égal aux valeurs de C_{max} = {60, 70, 80} dB désirées.

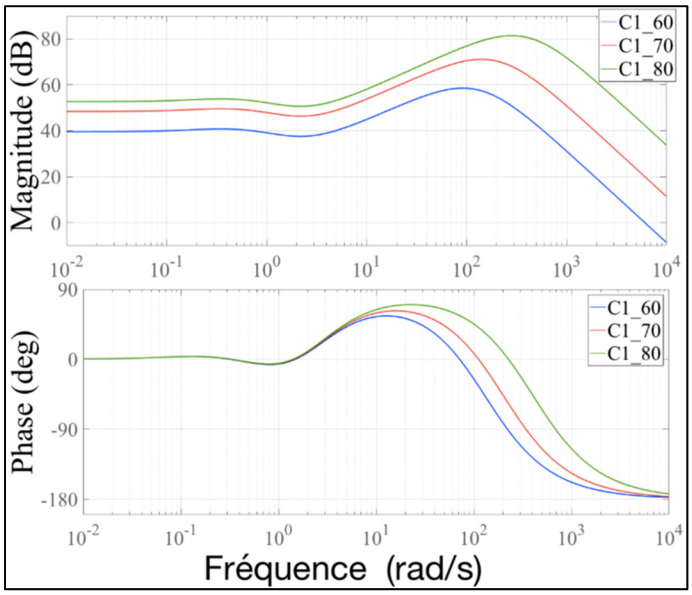


Figure 4.18 Allure de $C(s)$ optimisé
pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB

L'allure des transmissions $T(s)$ représentées aux Figure 4.19 et Figure 4.20 montrent une bonne réjection des couplages $T_{21}(s)$ et $T_{12}(s)$ pour toutes les bandes fréquentielles. On notera d'ailleurs que cette réjection est augmentée pour des valeurs de C_{max} plus importantes. De plus

cette augmentation du gain du compensateur accroît la bande passante de $T_{11}(s)$ et $T_{22}(s)$ d'environ 40 rad/s pour C_{max} = 60 dB à environ 110 rad/s pour C_{max} = 80 dB.

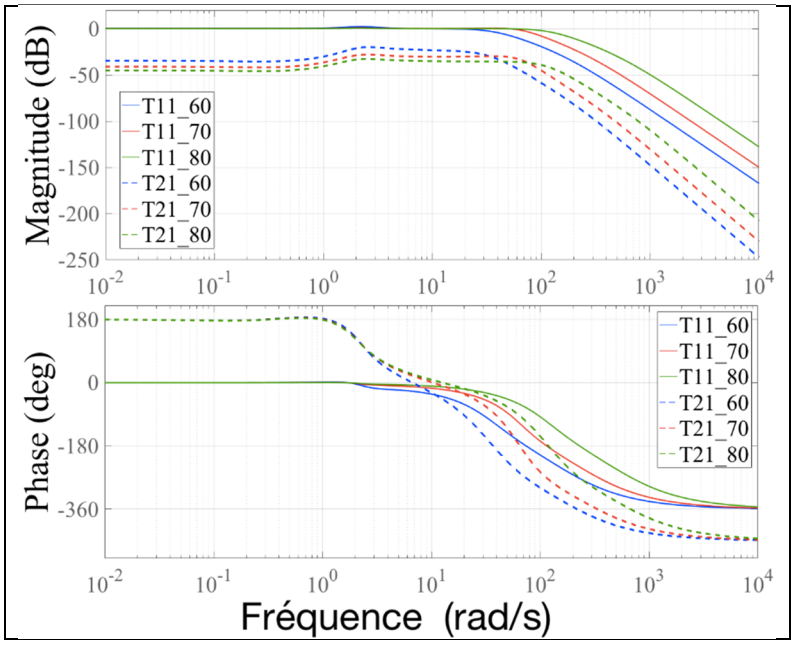


Figure 4.19 Allure de $T_{11}(s)$ et $T_{21}(s)$ optimisées pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB

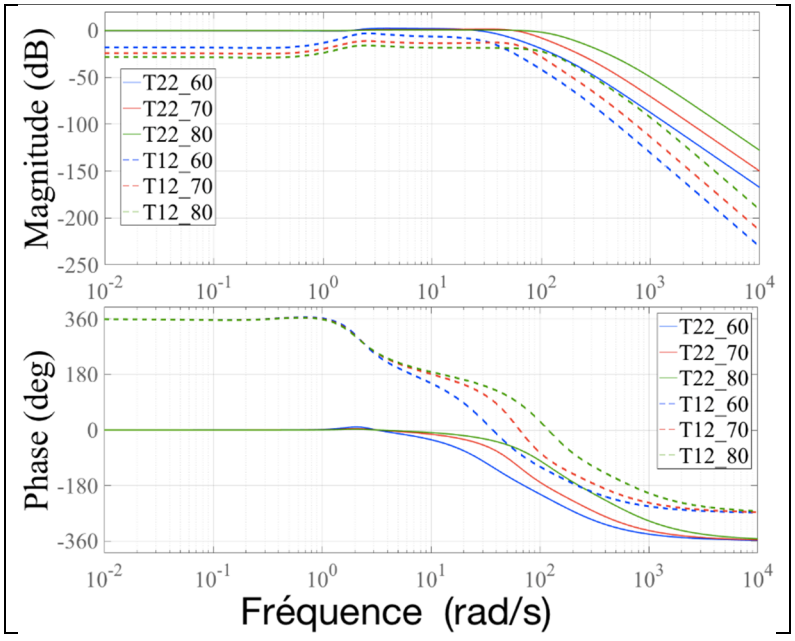


Figure 4.20 Allure de $T_{22}(s)$ et $T_{12}(s)$ optimisées pour *Cmax* = 60, 70 et 80 dB

Les allures des sensibilités $S_{11}(s)$ et $S_{22}(s)$ présentées aux Figure 4.21 et Figure 5.22 montrent une valeur inférieure maximum à -25 dB pour les basses fréquences et une valeur finale convergente systématique à 0 dB. Cependant, pour les transferts $S_{11}(s)$ et $S_{22}(s)$ la valeur maximum de la sensibilité approche 5 dB, ce qui est trop élevé et est en partie responsable des dépassements observables sur les allures temporelles représentées ci-après.

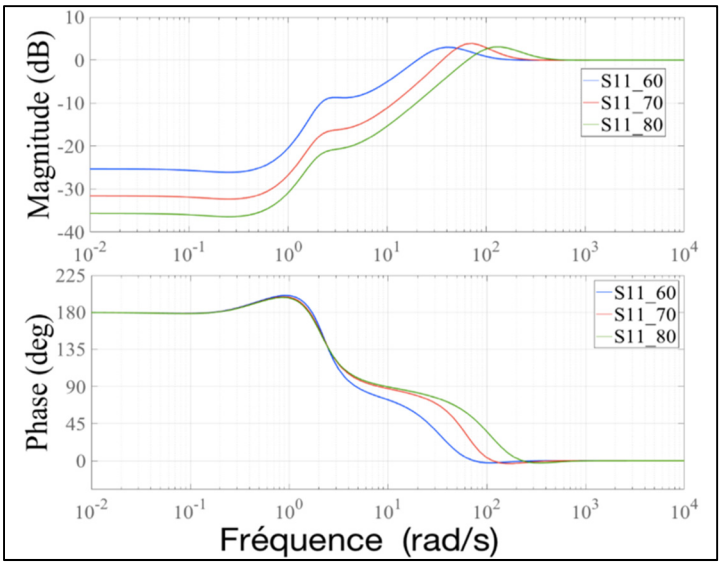


Figure 4.21 Bode de $S_{11}(s)$ pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB dans le cas avec erreur statique

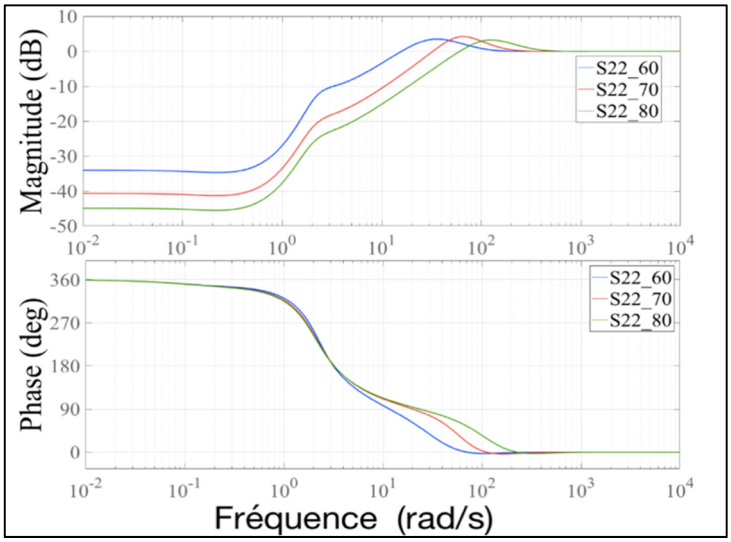


Figure 4.22 Bode de $S_{22}(s)$ pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB dans le cas avec erreur statique

Nous apercevons sur les Figure 4.23 et Figure 4.24 que l'augmentation du gain du compensateur $C(s)$ permet globalement de diminuer l'erreur statique e_{ss}, le temps de montée t_r, le temps d'établissement t_s et le dépassement $D_{\%}$, tel que le confirme les valeurs inscrites dans le Tableau 4.4.

Tableau 4.4 Valeurs obtenues dans le cas d'une erreur statique

		C_{max} = 60 dB	C_{max} = 70 dB	C_{max} = 80 dB
ω_1 [rad/s]		0.25	0.25	0.25
ω_2 [rad/s]		130	200	400
k_1		28	57	91
$y_1(t)$	t_s [s]	2.482	1.215	0.794
	t_r [s]	0.0603	0.0303	0.0224
	$D_{\%}$	10.49	13.27	5.56
	e_{ss}	0.03	0.02	0.01
$y_2(t)$	t_s [s]	3.146	2.774	1.3715
	t_r [s]	0.2188	0.0357	0.0245
	$D_{\%}$	16.75	6.94	4.12
	e_{ss}	0.1	0.05	0.03

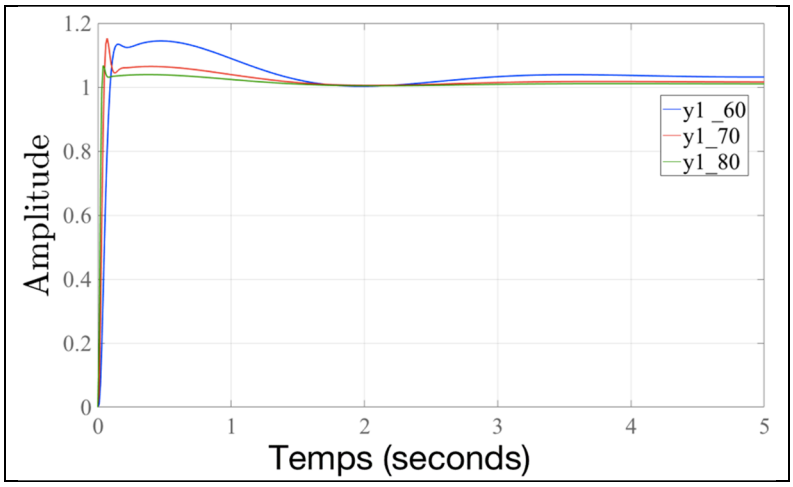


Figure 4.23 Allure de $y_1(t)$ optimisé pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB

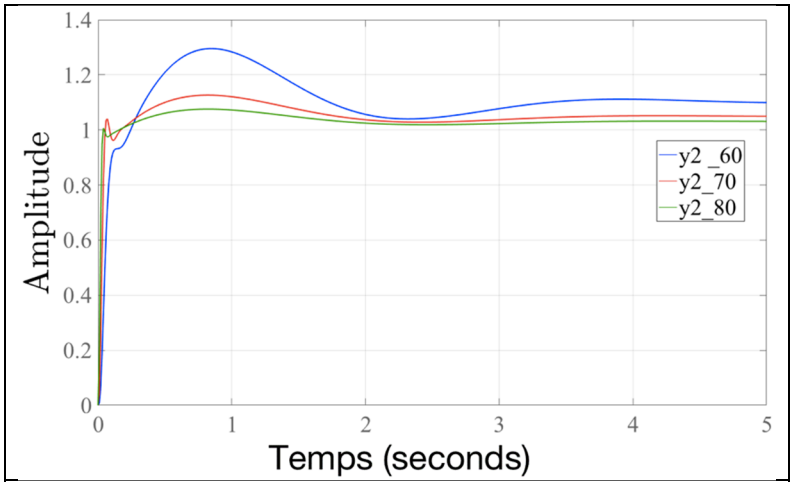


Figure 4.24 Allure de $y_2(t)$ optimisé pour C_{max} = 60, 70 et 80 dB

Les Figure 4.25 à Figure 4.30 montrent l'influence des couplages $y_{21}(t)$ sur $y_{11}(t)$ et $y_1(t)$ ainsi que $y_{12}(t)$ sur $y_{22}(t)$ et $y_2(t)$. On notera par ailleurs une diminution des couplages lorsque $C_{max}(s)$ augmente et donc de leurs influences sur les sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$. Ces améliorations dans le domaine temporel corroborent les améliorations évoquées plus haut dans le domaine fréquentiel concernant l'allure des transmittance $T(s)$ et des sensibilités $S(s)$.

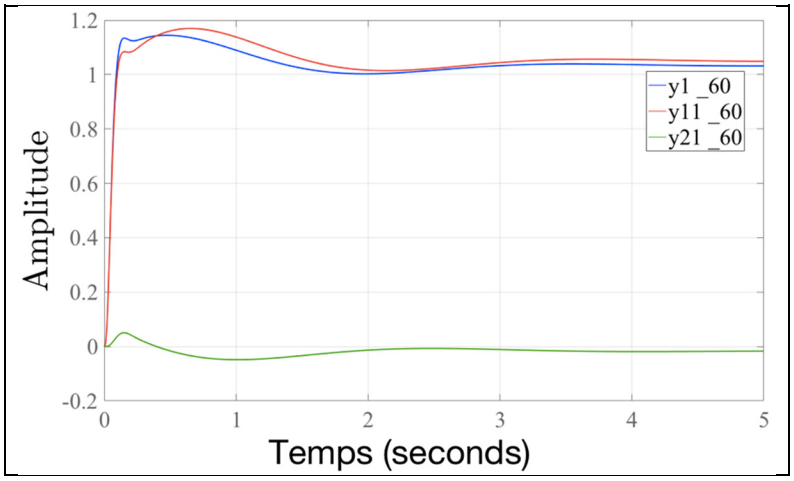


Figure 4.25 Allure de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ optimisées pour C_{max} = 60 dB

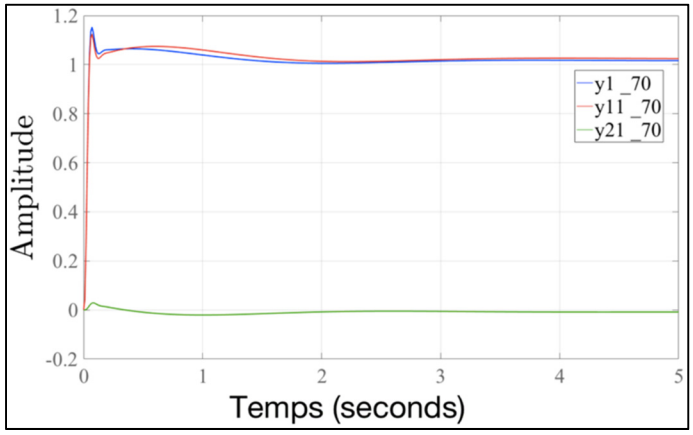


Figure 4.26 Allure de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ optimisées pour C_{max} = 70 dB

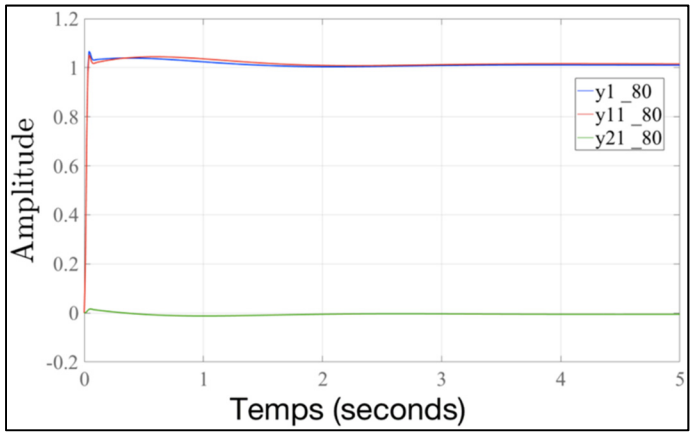


Figure 4.27 Allure de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ optimisées pour C_{max} = 80 dB

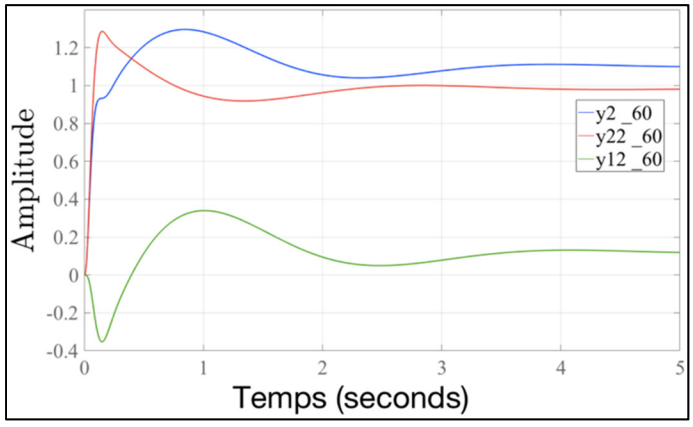


Figure 4.28 Allure de $y_2(t)$, $y_{12}(t)$ et $y_{22}(t)$ optimisées pour C_{max} = 60 dB

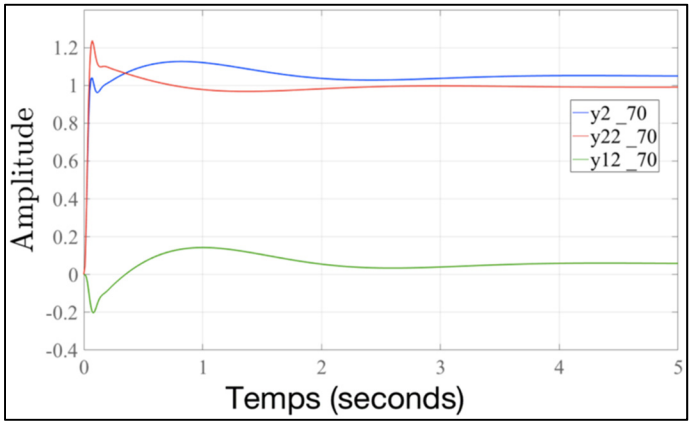


Figure 4.29 Allure de $y_2(t)$, $y_{12}(t)$ et $y_{22}(t)$ optimisées pour C_{max} = 70 dB

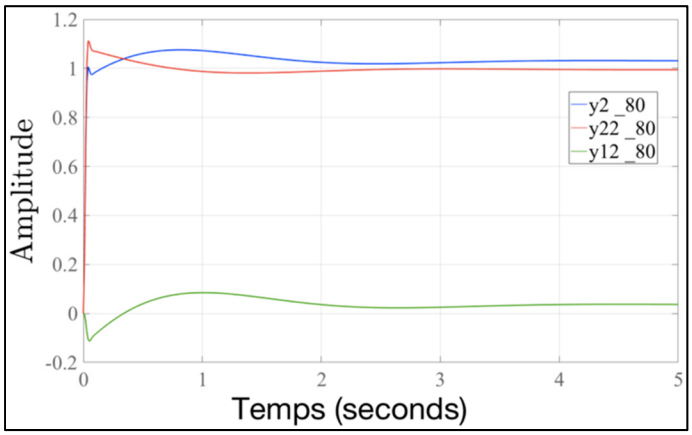


Figure 4.30 Allure de $y_2(t)$, $y_{12}(t)$ et $y_{22}(t)$ optimisées pour C_{max} = 80 dB

Les résultats des réponses temporelles ont été optimisés dans le cas d'une erreur statique pour trois valeurs maximum du compensateur. On notera que les résultats sont légèrement meilleurs pour la sortie $y_1(t)$ comparativement à la sortie $y_2(t)$. Une des raisons à cela est la structure symétrique du compensateur $C(s)$ $(C_1(s) = C_2(s))$ alors que le processus $P(s)$ n'est pas symétrique $((P_{11}(s) \neq P_{22}(s))$. Une piste d'amélioration consisterait alors à optimiser le compensateur selon $P_{11}(s)$ et $P_{22}(s)$, on aurait ainsi $C_1(s) \neq C_2(s)$.

4.3.6 Calibration du compensateur pour éliminer l'erreur statique

4.3.6.1 Ajout de $J_1(s)$ dans $C(s)$

L'objectif ici consiste à insérer une fonction de transfert $J_1(s)$ dans $C(s)$ pour éliminer l'erreur statique. Considérons que $J_1(s)$ est composé de deux polynômes du premier ordre tel que :

$$J_1(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} \tag{4.117}$$

L'expression de la boucle ouverte $J(s)$ s'écrit :

$$J(s) = J_1(s)k_1(s+2)^2 diag[1 \quad 1]\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^3 \frac{\left(1+\frac{s}{z_4}\right)\left(1+\frac{s}{z_3}\right)}{\left(1+\frac{s}{p_3}\right)^2}\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{4.118}$$

Soit en multipliant les matrices et en remplaçant $J_1(s)$ par son expression :

$$J(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}k_1(s+2)^2\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^3 \frac{\left(1+\frac{s}{z_4}\right)\left(1+\frac{s}{z_3}\right)}{\left(1+\frac{s}{p_3}\right)^2}\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\begin{bmatrix} s-1 & -7 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \tag{4.119}$$

Nous allons rechercher les conditions sur $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ permettant d'obtenir une erreur statique e_{ss} nulle. Pour rappel, selon le théorème de la valeur finale :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{I + J(s)} \tag{4.120}$$

Avec $R(s)$ l'entrée du système que nous prendrons égale à $\frac{I}{s}$, soit :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{I}{I + J(s)} \tag{4.121}$$

Nous constatons que pour obtenir une erreur statique nulle il faut que $|J(s)| \gg 1$ pour $s \to 0$, alors :

$$\lim_{s\to 0}|J(s)| = \frac{\alpha(0)}{\beta(0)} k_1 (2)^2 \frac{\omega_1}{\omega_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^3 \frac{\left(1+\frac{0}{z_4}\right)\left(1+\frac{0}{z_3}\right)}{\left(1+\frac{0}{p_3}\right)^2} \frac{1}{(2)^2(2)} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & +3 \end{bmatrix} \gg 1 \tag{4.122}$$

En simplifiant :

$$\lim_{s\to 0}|J(s)| = \frac{\alpha(0)}{\beta(0)} k_1 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \gg 1 \tag{4.123}$$

Soit pour chacun des éléments de $J(s)$:

$$\lim_{s\to 0}|J_{11}(s)| = \left|\frac{\alpha(0)}{\beta(0)} \frac{k_1}{2}\right| \gg 1 \to \left|\frac{k_1}{2}\alpha(0)\right| \gg |\beta(0)| \tag{4.124}$$

$$\lim_{s\to 0}|J_{12}(s)| = \left|\frac{\alpha(0)}{\beta(0)} \frac{k_1}{7}\right| \gg 1 \to \left|\frac{k_1}{7}\alpha(0)\right| \gg |\beta(0)| \tag{4.125}$$

$$\lim_{s\to 0}|J_{21}(s)| = \left|\frac{\alpha(0)}{\beta(0)} k_1\right| \gg 1 \to |k_1\alpha(0)| \gg |\beta(0)| \tag{4.126}$$

$$\lim_{s\to 0}|J_{21}(s)| = \left|\frac{\alpha(0)}{\beta(0)} 3k_1\right| \gg 1 \to |3k_1\alpha(0)| \gg |\beta(0)| \tag{4.127}$$

En se plaçant dans le cas le plus restrictif nous avons $k_1 = 28$ au minimum selon les résultats obtenus au Tableau 4.4, nous remarquons alors que le respect de l'équation (4.124) permet de remplir les conditions sur les trois autres, soit (4.125) à (4.127). Pour garantir une erreur statique faible il faut donc s'assurer que :

$$\left|\frac{28}{2}\alpha(0)\right| \gg |\beta(0)| \tag{4.128}$$

Nous prendrons une allure de $J_1(s)$ composé de deux premiers ordres, soit :

$$J_1(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{z_{11}}{p_{11}} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_{11}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_{11}}\right)} \tag{4.129}$$

Pour $\alpha(0) = z_{11}$ et $\beta(0) = p_{11}$, on déduit à partir de (4.128) la condition suivante :

$$|14\, z_{11}| \gg |p_{11}| \tag{4.130}$$

L'expression du compensateur $C(s)$ avec l'insertion de $J_1(s)$ devient :

$$C(s) = k_1(s+2)^2 diag[1 \quad 1] \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^3 F_{inter} \frac{z_{11}}{p_{11}} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_{11}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_{11}}\right)} \tag{4.131}$$

4.3.6.2 Algorithme d'optimisation pour calibrer $J_1(s)$

Nous allons exposer ici un algorithme d'optimisation pour obtenir le pôle p_{11} et le zéro z_{11} de $J_1(s)$. Dans la continuité de la partie avec erreur statique, trois cas seront étudiés pour des gains du compensateur inférieur aux valeurs 60 dB, 70 dB et 80 dB, avec pour conditions implantées dans le programme Matlab un temps d'établissement t_s visée le plus court possible dans chacune de ces conditions. L'algorithme d'optimisation développé dans le programme Matlab teste plusieurs paramètres p_{11} et z_{11} rentrés au préalable, puis utilise la réponse temporelle du système en boucle fermée pour évaluer t_s de $T_{11}(s)$. Si le résultat obtenu est meilleur que le test précédent, alors les valeurs de z_{11} et p_{11}sont conservées.

Les constantes à définir manuellement au début du programme sont les suivantes :

- C_{max} : Valeur maximum du gain du compensateur $C(s)$;
- z_{11min} : Valeur initiale du zéro z_{11} ;
- z_{11max} : Valeur finale du zéro z_{11} ;
- z_{11pas} : Pas d'augmentation du zéro z_{11} ;
- p_{11min} : Valeur initiale du pôle p_{11} ;
- p_{11max} : Valeur finale du pôle p_{11} ;
- p_{11pas} : Pas d'augmentation du pôle p_{11}.

Il est préférable d'utiliser dans un premier temps des larges valeurs min, max et de pas pour p_{11}, z_{11} pour pouvoir trouver des mesures, puis de resserrer progressivement vers des valeurs qui permettent d'optimiser t_s.

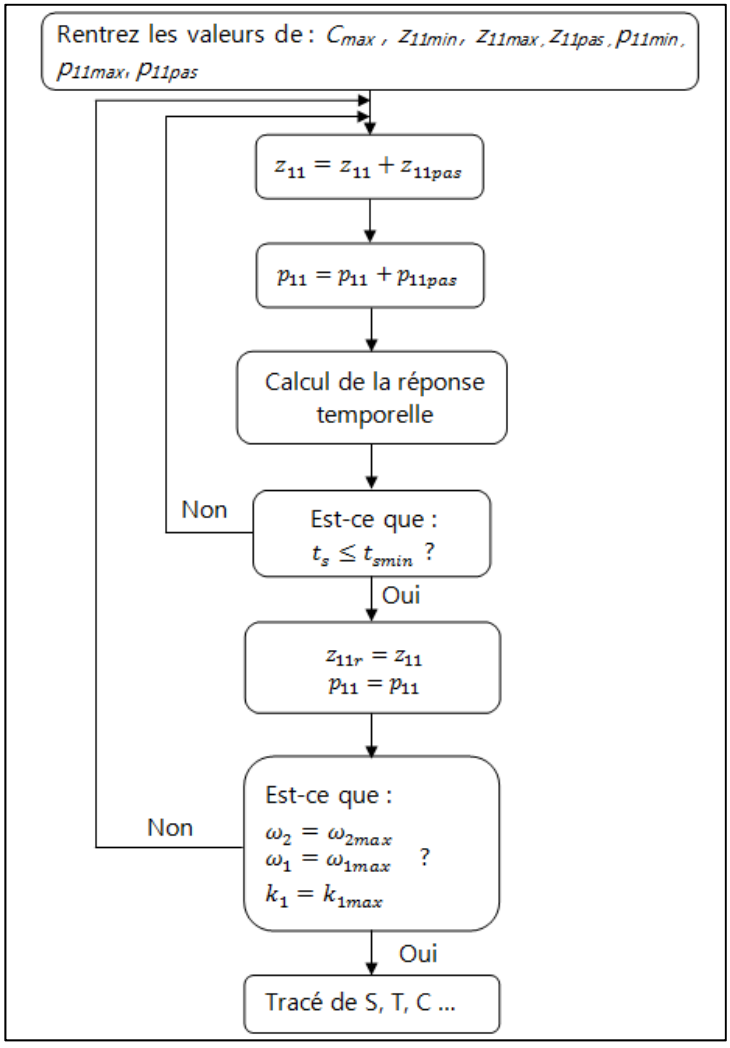


Figure 4.31 Organigramme du programme Matlab pour trouver les paramètres de $C(s)$ sans erreur statique

4.3.6.3 Résultats obtenus pour un compensateur sans erreur statique

L'utilisation de l'algorithme dont le fonctionnement est décrit dans la section 4.3.6.2 a permis de calibrer les valeurs de z_{11}et p_{11} reportées dans le Tableau 4.5 pour des valeurs de C_{max} = {60, 70, 80} dB.

Tableau 4.5 Résultats fréquentiels des transmittances $T(s)$ et des sensibilités $S_{11}(s)$, $S_{22}(s)$ dans le cas sans erreur statique

	C_{max} = 60 dB	C_{max} = 70 dB	C_{max} = 80 dB

ω_1 [rad/s]		0.25	0.25	0.25
ω_2 [rad/s]		130	200	400
k_1		28	57	91
z_{11}		10.3	17.9	30
p_{11}		1.6	3.4	8
$T_{11}(s)$	BF	0.072	0.0433	0.0381
[dB]	max	3.75	4.32	2.89
$T_{12}(s)$	BF	-51.1	-55.5	-56.7
[dB]	max	-16.2	-22.1	-30.4
$T_{22}(s)$	BF	-0.0245	-0.0146	0.0139
[dB]	max	6.57	5.81	3.61
$T_{21}(s)$	BF	-34.2	-38.6	-39.6
[dB]	max	0.724	-5.23	-13.5
$S_{11}(s)$	BF	-41.6	-46	-47.2
[dB]	max	4.59	5.78	4.26
$S_{22}(s)$	BF	-51.5	-55.5	-56.7
[dB]	*max*	6.4	6.67	4.57

L'ajout de $J_1(s)$ a eu pour effet d'augmenter le gain du compensateur en BF. C'est ce que nous apercevons en comparant les allures du compensateur avec erreur statique de la Figure 4.18 à celles de la Figure 4.32 dans le cas où l'erreur statique est nulle.

Avoir un gain élevé en basses fréquences, permet d'annuler l'erreur sur les faibles fréquences et également dans le cas du régime statique ($\omega \rightarrow 0$ rad/s). La réponse indicielle tend alors vers 1 lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

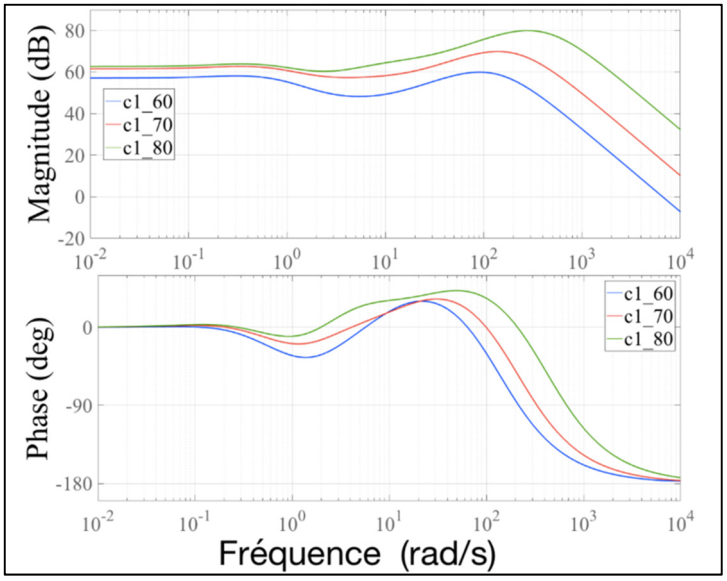


Figure 4.32 Bode de $C(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique

Comme le montre le Tableau 4.5 les transmissions $T_{12}(s)$ et $T_{21}(s)$ ont une amplitude plus faible en basses fréquences, comparativement aux résultats précédents visibles au Tableau 4.3. Cette diminution des interférences en BF se traduit, comme nous le verrons dans l'analyse temporelle, par une réponse indicielle avec une erreur statique plus faible.

Cependant les valeurs maximums obtenues ont été augmentées et se traduisent par une augmentation du dépassement reportée dans le Tableau 4.6. Ce commentaire est aussi applicable pour les diagonales de $T(s)$. De plus, nous remarquons en BF des valeurs de $T_{11}(s)$ et $T_{22}(s)$ plus proche de 0 dB, ce qui est l'effet recherché puisque cela permet de diminuer l'erreur statique de la réponse indicielle de $y(t)$.

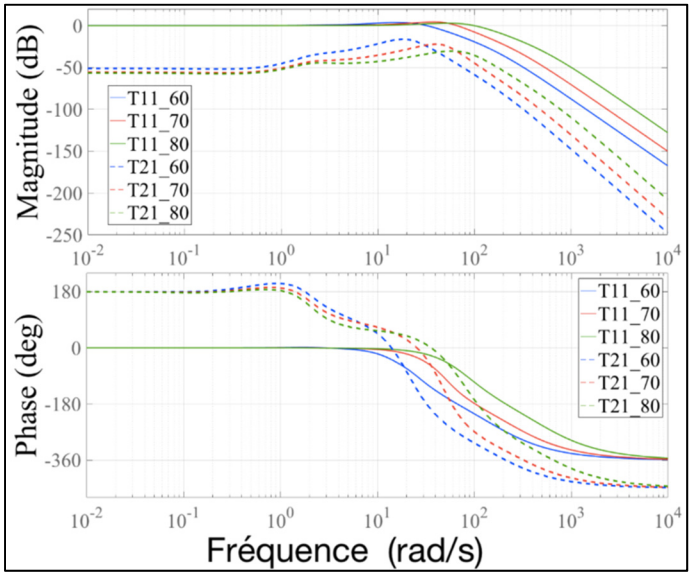


Figure 4.33 Bode de $T_{11}(s)$ et $T_{21}(s)$ pour C_{max} = {60, 70,80} dB, dans le cas sans erreur statique

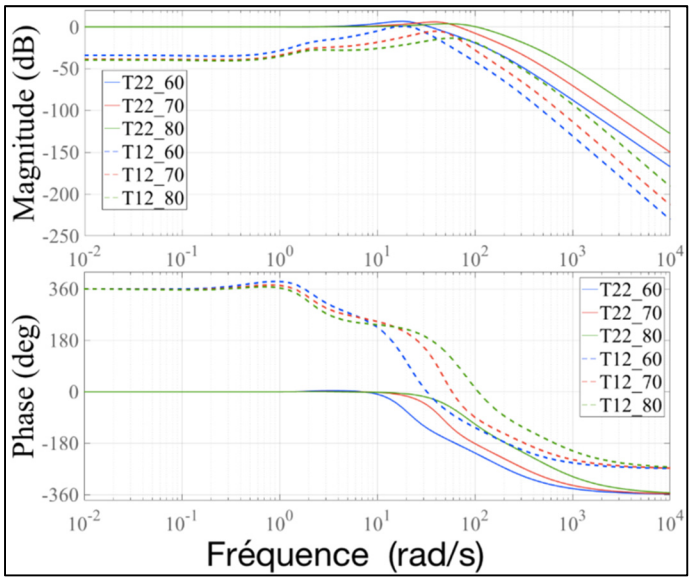


Figure 4.34 Bode de $T_{22}(s)$ et $T_{12}(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique

La modification de la sensibilité suite à l'insertion de $J_1(s)$ suit les mêmes tendances que pour la diagonale de la transmission $T(s)$, à savoir une diminution de la sensibilité en BF, mais une augmentation de la valeur maximale, tel que le confirment les Tableau 4.5 et Tableau 4.7 ainsi que les courbes montrées à la Figure 4.35 et à la Figure 4.36.

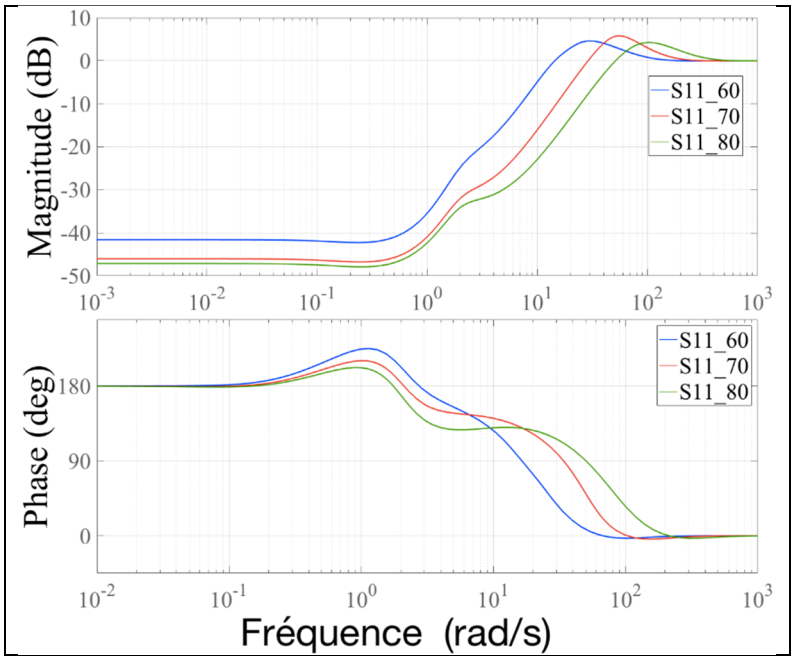


Figure 4.35 Bode de $S_{11}(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique

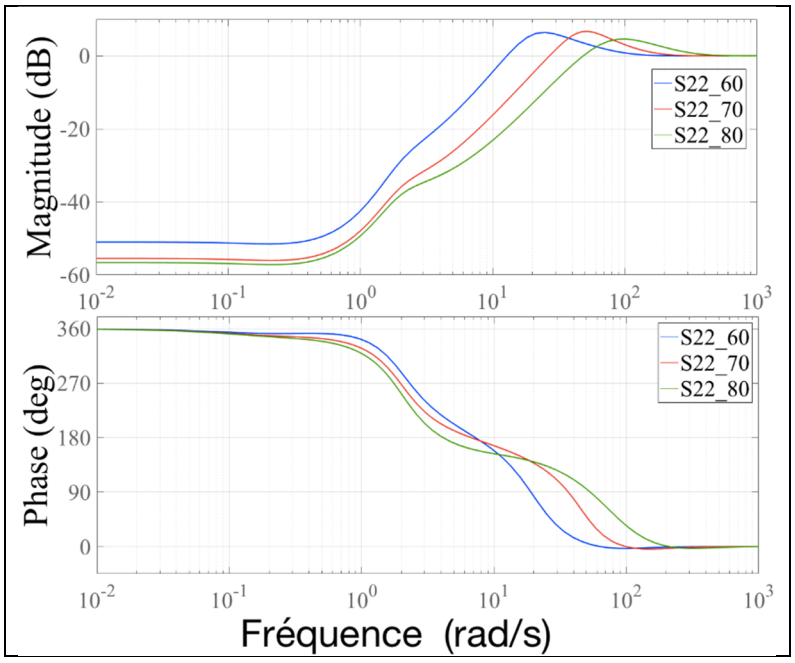


Figure 4.36 Bode de $S_{22}(s)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique

Les allures des réponses temporelles de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec l'insertion de $J_1(s)$ sont représentées aux Figure 4.37 et Figure 4.38 pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, les valeurs numériques étant reportées au Tableau 4.6.

Comparativement aux résultats obtenus au Tableau 4.4 nous remarquons une diminution des temps d'établissement t_s et du temps de montée t_r, tandis que les dépassements D ont été augmentés. Ces résultats sont cohérents avec le rapprochement autour de 0 dB de $T_{11}(s)$ et $T_{22}(s)$ en BF (annulation de l'erreur statique), ainsi que l'augmentation de leur valeur max pour des fréquences plus élevées (augmentation du dépassement D).

Tableau 4.6 Résultats des réponses temporelles de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ dans le cas sans erreur statique

		C_{max} = 60 dB	C_{max} = 70 dB	C_{max} = 80 dB
ω_1 [rad/s]		0.25	0.25	0.25
ω_2 [rad/s]		130	200	400
k_1		28	57	91
z_{11}		10.3	17.9	30
p_{11}		1.6	3.4	8
$y_1(t)$	t_s [s]	0.279	0.168	0.089
	t_r [s]	0.0445	0.0244	0.0179
	$D_{\%}$	46.88	48.7	33.26
$y_2(t)$	t_s [s]	0.8332	0.2046	0.0869
	t_r [s]	0.0507	0.0257	0.0188
	$D_{\%}$	23.55	34.94	25.74

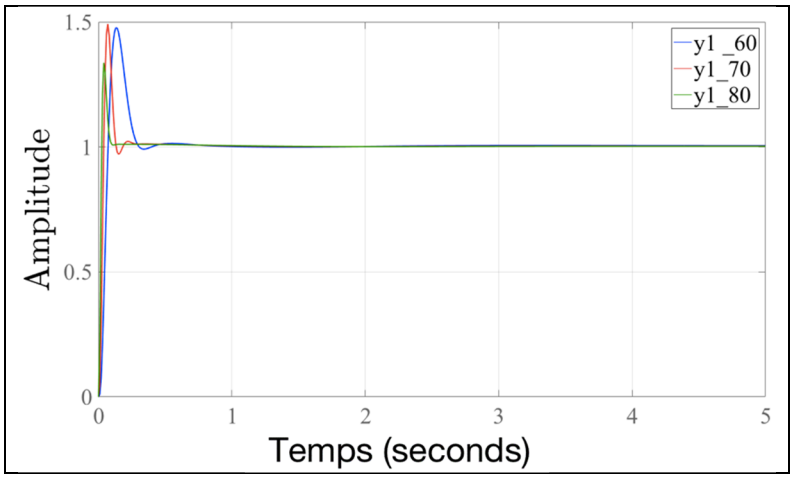


Figure 4.37 Réponse temporelle de $y_1(t)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique

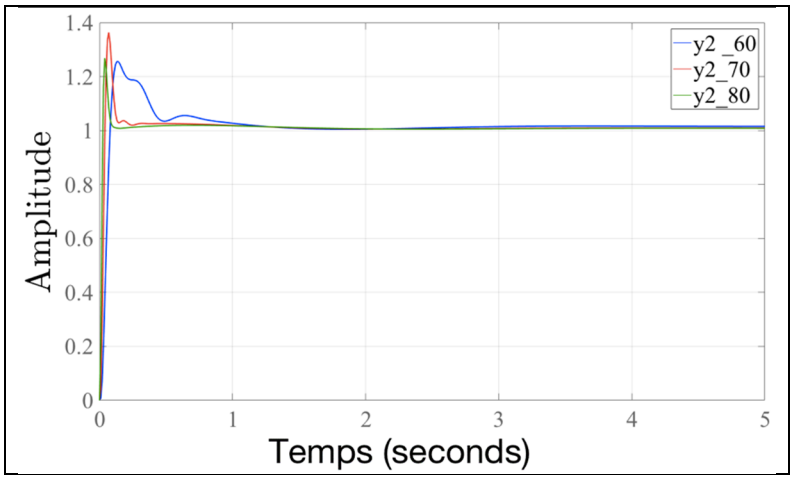


Figure 4.38 Réponse temporelle de $y_2(t)$ pour C_{max} = {60, 70, 80} dB, dans le cas sans erreur statique

De la Figure 4.39 à la Figure 4.41 nous observons que l'erreur statique en vert tend rapidement vers 0 et l'écart entre la sortie totale $y_1(t)$ et $y_{11}(t)$ est rapidement annulée, tandis que le couplage $y_{21}(t)$ tend rapidement vers 0 grâce à l'augmentation du gain du compensateur $C(s)$ en régime statique.

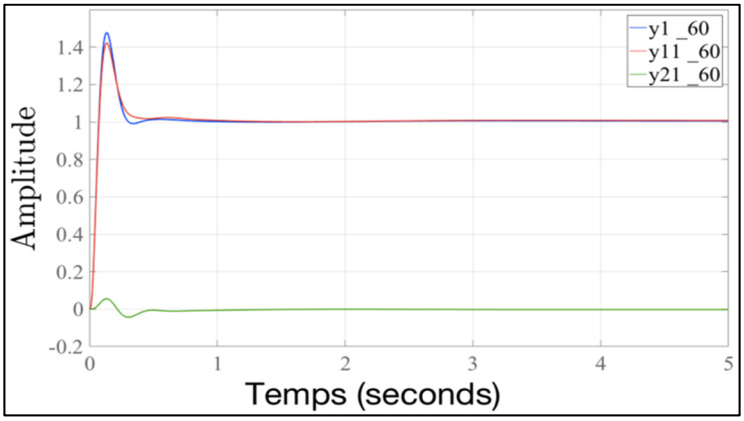


Figure 4.39 Réponse temporelle de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ pour C_{max} = 60 dB, dans le cas sans erreur statique

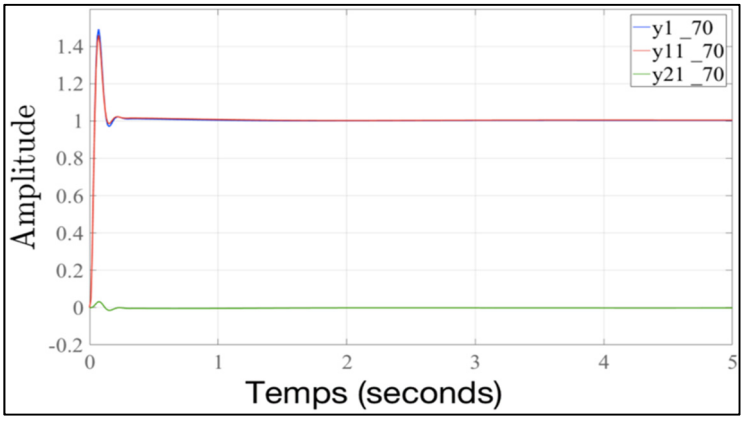


Figure 4.40 Réponse temporelle de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ pour C_{max} = 70 dB, dans le cas sans erreur statique

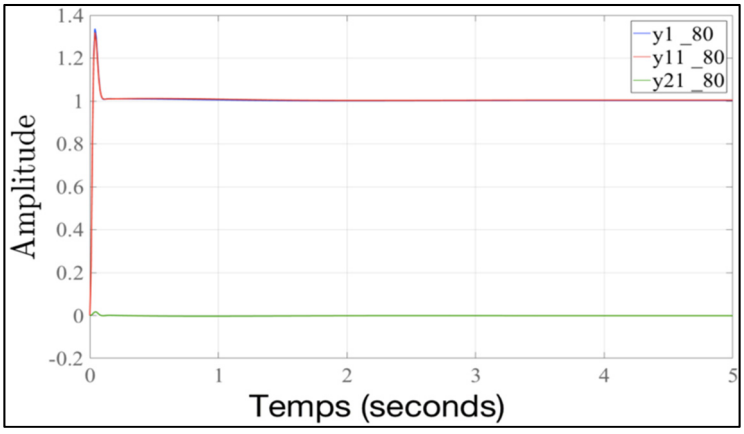


Figure 4.41 Réponse temporelle de $y_1(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{21}(t)$ pour C_{max} = 80 dB, dans le cas sans erreur statique

Des observations similaires au cas de $y_1(t)$ peuvent être faites dans le cas de $y_2(t)$. Les réponses temporelles représentées Figure 4.42 à Figure 4.44 sont néanmoins moins convaincantes avec une réduction des temps d'établissements t_s, de montée t_r et un dépassement plus important. Une option d'amélioration consiste à avoir $C_1(s) \neq C_2(s)$ pour optimiser indépendamment chacune des deux réponses temporelles.

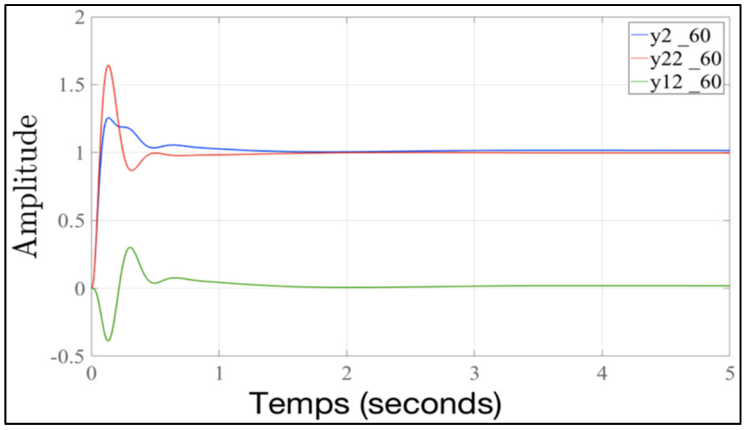


Figure 4.42 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{12}(t)$ pour C_{max} = 60 dB, dans le cas sans erreur statique

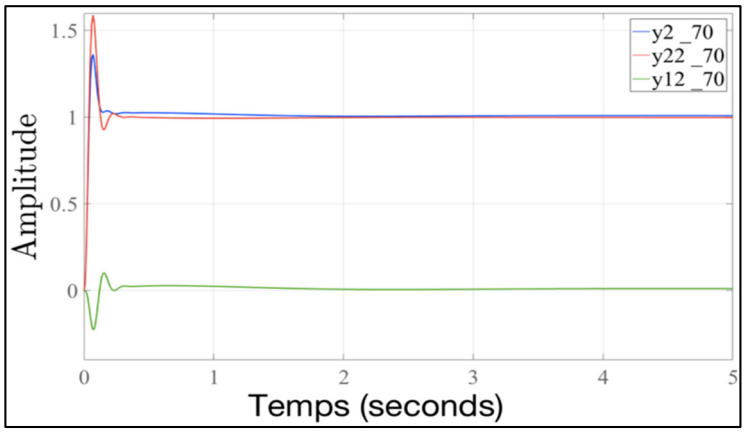


Figure 4.43 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{12}(t)$ pour C_{max} = 70 dB, dans le cas sans erreur statique

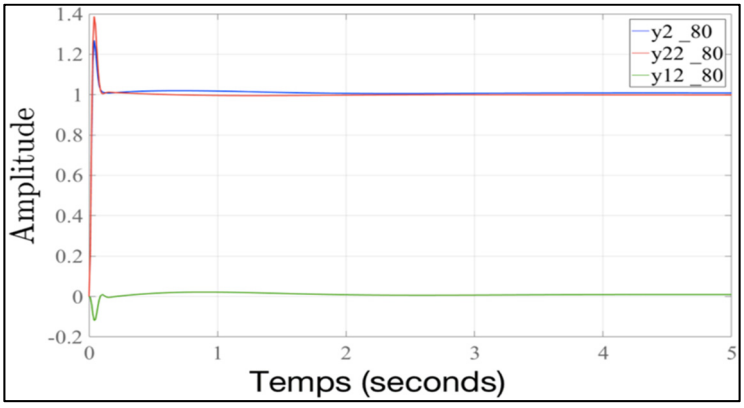


Figure 4.44 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{12}(t)$ pour C_{max} = 80 dB, dans le cas sans erreur statique

La dernière étape pour optimiser la réponse temporelle consiste à éliminer le dépassement représenté sur les réponses temporelles de $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

4.3.7 Calibration du compensateur pour éliminer le dépassement

4.3.7.1 Choix des préfiltres

La solution choisie pour éliminer le dépassement consiste à insérer des préfiltres $F_1(s)$ et $F_2(s)$ sur les entrées $R_1(s)$ et $R_2(s)$ tel que montré à la Figure 4.45.

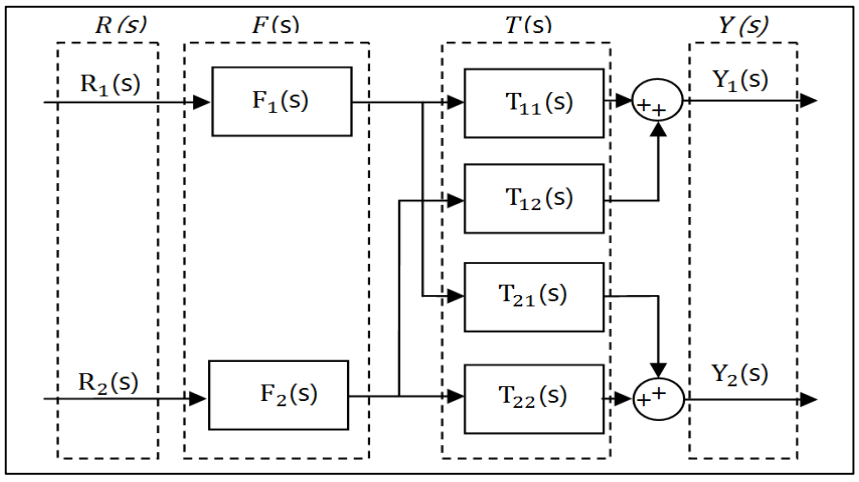


Figure 4.45 Schéma bloc du système multivariable avec préfiltres

Le système d'équations représentant les relations entre les entrées et les sorties s'écrit :

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= T_{11}(s)F_1(s)R_1(s) + T_{12}(s)F_2(s)R_2(s) \\ Y_2(s) &= T_{21}(s)F_1(s)R_1(s) + T_{22}(s)F_2(s)R_2(s) \end{aligned} \tag{4.132}$$

Dans cette configuration le filtre $F_1(s)$ sera optimisé par rapport à la transmission $T_{11}(s)$ et agira aussi sur l'interférence $T_{21}(s)$ et par conséquent, influencera également la sortie $Y_2(s)$. De même, le filtre $F_2(s)$ sera optimisé par rapport à la transmission $T_{22}(s)$ et agira aussi sur l'interférence $T_{12}(s)$ et influencera également la sortie $Y_1(s)$.

Pour minimiser le temps de calcul de l'algorithme d'optimisation, nous allons choisir des fonctions de transfert $F_i(s)$ où $i = \{1, 2\}$, avec un ordre au numérateur et au dénominateur égal à 1, on obtient :

$$F_i(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{4.133}$$

L'algorithme devra trouver les deux variables optimales z_i et p_i pour chacun des deux préfiltres.

4.3.7.2 Algorithme d'optimisation avec annulation du dépassement

L'utilisation d'un programme Matlab va nous permettre de calibrer z_1, p_1 puis z_2 et p_2. Puisque que la méthodologie est identique, nous ne détaillerons dans cette partie que le cas pour la conception de $F_1(s)$. L'objectif est d'obtenir une réponse temporelle t_s de $T_{11}(s)$ la plus courte possible.

L'algorithme d'optimisation développé dans le programme Matlab teste différentes valeurs des paramètres z_1 et p_1 rentrés au préalable, puis utilise la réponse temporelle du système en boucle

fermée pour évaluer le temps d'établissement t_s de $T_{11}(s)$. Si le résultat obtenu est meilleur que le test précédent, alors les valeurs de z_1 et p_1 sont conservées dans z_{1r} et p_{1r}. Les constantes à définir manuellement au début du programme sont les suivantes :

- C_{max} : Valeur maximum du gain du compensateur $C(s)$;
- z_{1min} : Valeur initiale du zéro z_1 ;
- z_{1max} : Valeur finale du zéro z_1 ;
- z_{1pas} : Pas d'augmentation du zéro z_1 ;
- p_{1min} : Valeur initiale du pôle p_1 ;
- p_{1max} : Valeur finale du pôle p_1 ;
- p_{1pas} : Pas d'augmentation du pôle p_1.

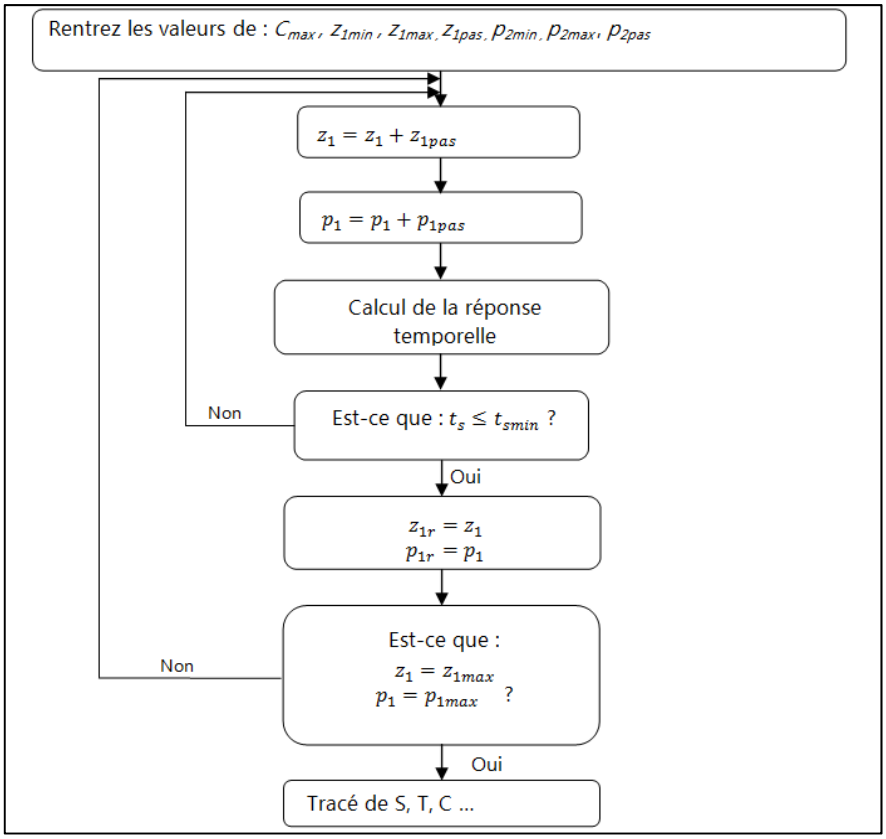


Figure 4.46 Organigramme du programme Matlab pour trouver les paramètres de $C(s)$ avec annulation du dépassement

4.3.7.3 Résultats obtenus pour un compensateur sans dépassement

Les valeurs obtenues avec l'algorithme d'optimisation pour les pôles et zéros des préfiltres $F_1(s)$ et $F_2(s)$ sont visibles dans le Tableau 4.7.

Tableau 4.7 Paramètres du compensateur $C(s)$ et des préfiltres $F_1(s)$ et $F_2(s)$

	C_{max} = 80dB
ω_{1r} [rad/s]	0.25
ω_{2r} [rad/s]	400
k_{1r}	91
z_{11}	30
p_{11}	8
z_1	56.5
p_1	26.8
z_2	44.1
p_2	22

En se référant à la Figure 4.45 on notera les transmittances :

$$\begin{aligned} T_{11f}(s) &= F_1(s)T_{11}(s) \\ T_{12f}(s) &= F_1(s)T_{12}(s) \\ T_{22f}(s) &= F_2(s)T_{22}(s) \\ T_{21f}(s) &= F_2(s)T_{21}(s) \end{aligned} \tag{4.134}$$

La Figure 4.47 et la Figure 4.48 permettent de voir la diminution du maximum des transmittances $T(s)$ avec l'insertion des préfiltres. Notons que les transmittances diagonales sont proches de 0 dB sur une plus large bande fréquentielle.

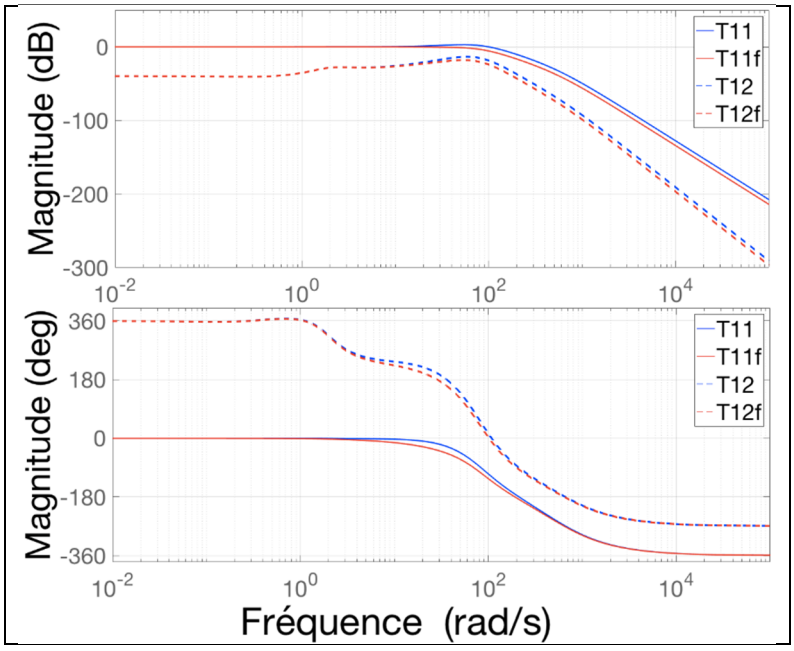


Figure 4.47 Bode de $T_{11}(s)$, $T_{12}(s)$, $T_{11f}(s)$, $T_{12f}(s)$ dans le cas sans erreur statique

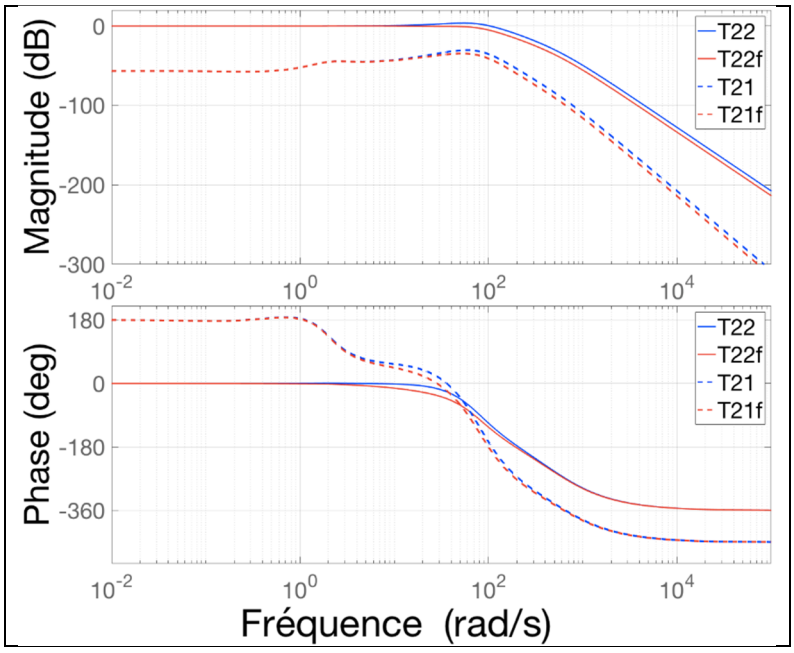


Figure 4.48 Bode de $T_{22}(s)$, $T_{21}(s)$, $T_{22f}(s)$, $T_{21f}(s)$ dans le cas sans erreur statique

Comme nous pouvons le constater sur la Figure 4.49 l'insertion du préfiltre $F_1(s)$ a permis d'annuler les dépassements de $y_1(t)$ et $y_{11}(t)$, respectivement en pointillés bleus et rouges. Nous remarquons également que l'erreur statique est plus faible pour $y_{11}(t)$ que $y_1(t)$, cette différence étant issue de l'interférence $y_{12}(t)$ représentée sur la Figure 4.50, qui tend à dégrader les performances de la réponse temporelle de $y_1(t)$. De plus, le temps de réponse de $y_{11f}(t)$ est plus court que celui de $y_{1f}(t)$, également à cause de l'influence de $y_{12}(t)$.

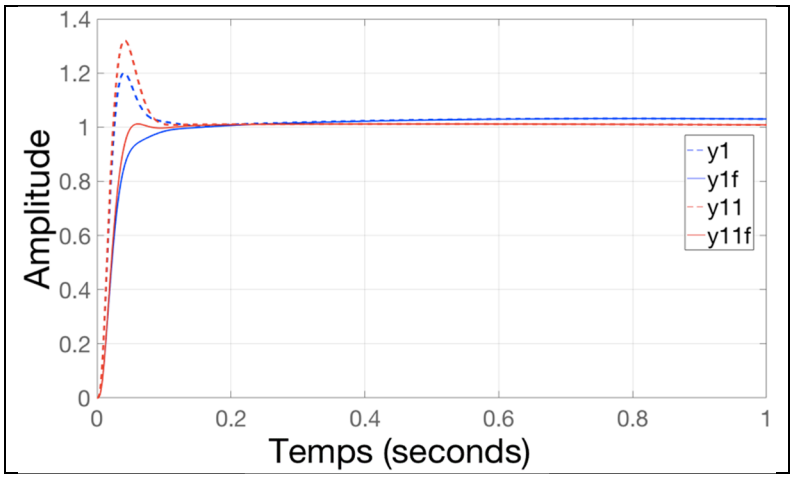


Figure 4.49 Réponse indicielle de $y_1(t)$, $y_{1f}(t)$, $y_{11}(t)$ et $y_{11f}(t)$

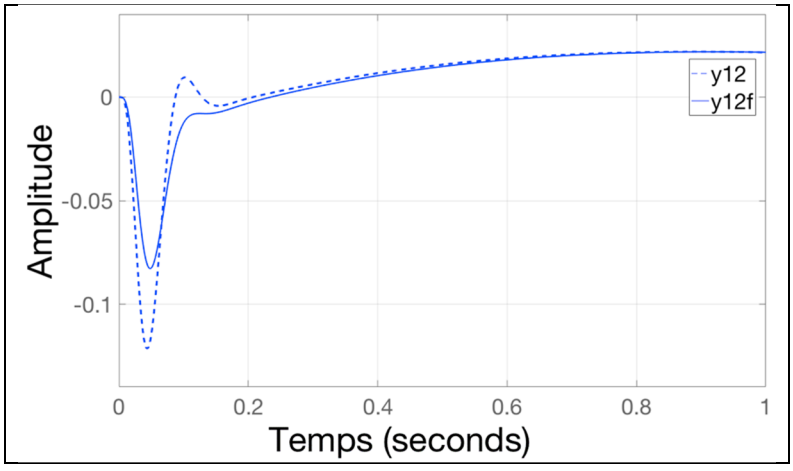


Figure 4.50 Réponse indicielle de $y_{12}(t)$ et $y_{12f}(t)$

Comme nous pouvons le constater sur la Figure 4.51 l'insertion du pré filtre $F_2(s)$ a permis d'annuler les dépassements de $y_2(t)$ et $y_{22}(t)$, respectivement en pointillés bleus et rouges.

Nous remarquons également que l'erreur statique est plus faible pour $y_{22}(t)$ que $y_2(t)$, cette différence étant issue de l'interférence $y_{21}(t)$ représentée sur la Figure 4.52, qui tend à dégrader les performances de la réponse temporelle de $y_2(t)$. De plus, le temps de réponse de $y_{22f}(t)$ est plus court que celui de $y_{2f}(t)$, également à cause de l'influence de l'interférence $y_{21}(t)$.

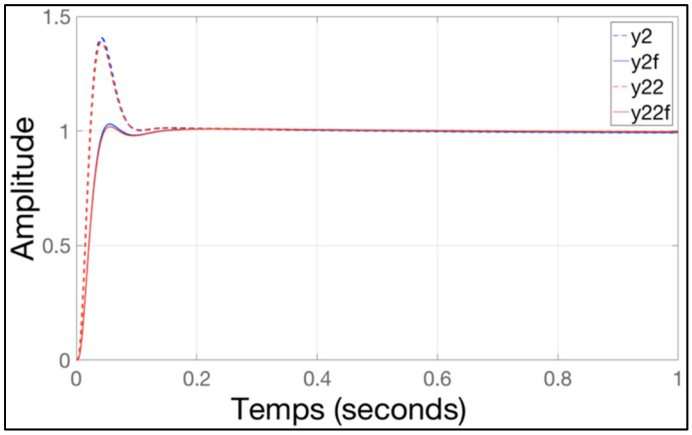


Figure 4.51 Réponse temporelle de $y_2(t)$, $y_{2f}(t)$, $y_{22}(t)$ et $y_{22f}(t)$

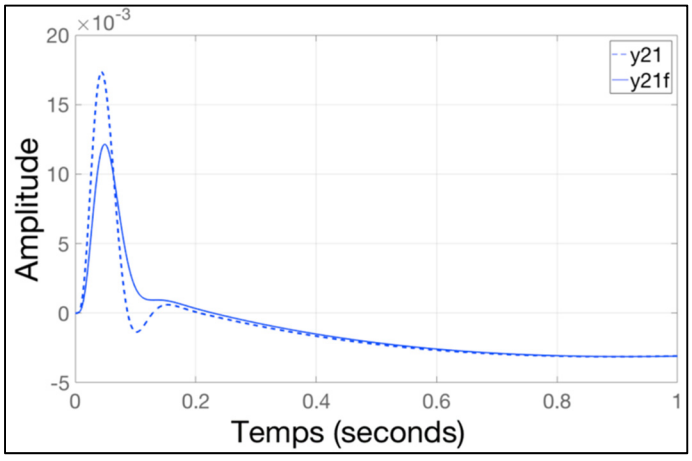


Figure 4.52 Réponse indicielle de $y_{21}(t)$ et $y_{21f}(t)$

Dans cette partie nous avons constaté une amélioration des réponses temporelles $y_1(t)$ et $y_2(t)$ avec l'insertion des préfiltres $F_1(t)$ et $F_2(t)$. Néanmoins, ces réponses temporelles restent moins bonnes que celles de $y_{11}(t)$ et $y_{22}(t)$ à cause de l'influence des interférences $y_{12}(t)$ et

$y_{21}(t)$ qui tendent à augmenter le temps d'établissement t_s ainsi que les oscillations sur les sorties 1 et 2. Nous verrons dans la prochaine section qu'en concevant des préfiltres pour chacune de ces interférences il est possible de les annuler et faire tendre $y_1(t)$ et $y_2(t)$ directement vers $y_{11}(t)$ et $y_{22}(t)$.

4.3.7.4 Préfiltres optimisés pour chaque transmittance

Dans la partie précédente, nous avons constaté que l'ajout de pré filtre sur les entrées $R_1(t)$ et $R_2(t)$ a permis d'annuler le dépassement. Néanmoins l'influence des interférences persiste. Dans cette section nous allons rechercher leur annulation pour permettre d'améliorer davantage les réponses temporelles des sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$. De plus, nous viserons également une réjection plus importante des transmissions non diagonales $T_{12}(s)$ et $T_{21}(s)$, pour rendre la matrice $T(s)$ davantage diagonale sur les HF. La Figure 4.53 montre la nouvelle association entre les 4 préfiltres pour chacune des transmittances de $T(s)$.

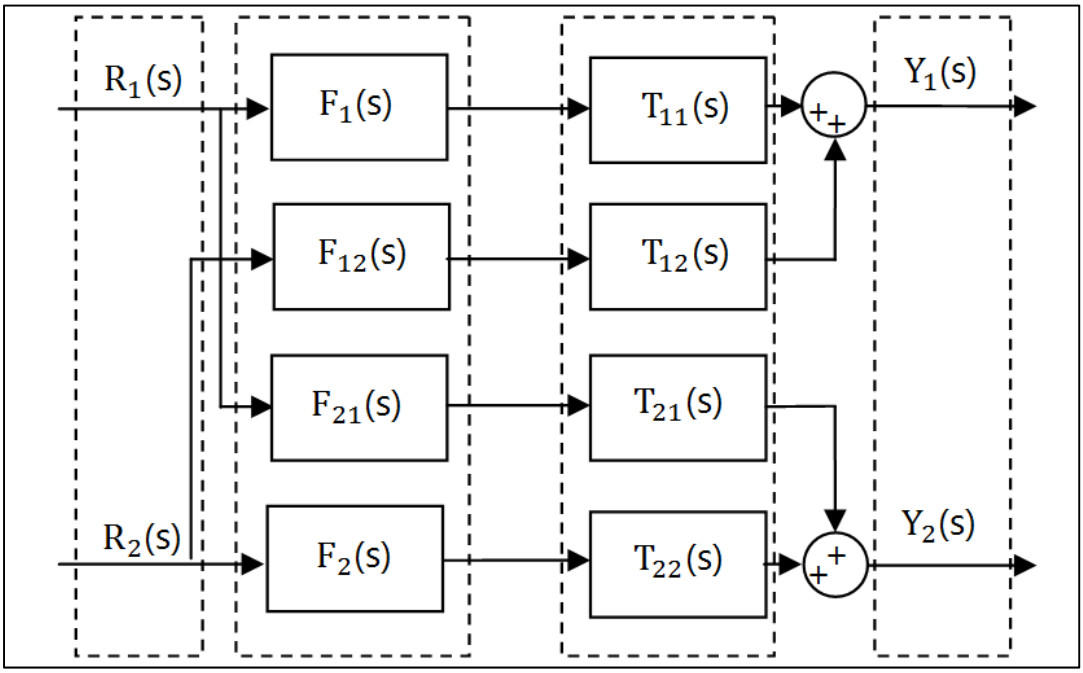


Figure 4.53 Représentation sous forme de schéma bloc du système multivariable, avec un préfiltre associé à chacune des transmittances

Le système d'équations représentant les relations entrées / sorties de la Figure 4.53 est :

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= T_{11}(s)F_1(s)R_1(s) + T_{12}(s)F_{12}(s)R_2(s) \\ Y_2(s) &= T_{21}(s)F_{21}(s)R_1(s) + T_{22}(s)F_2(s)R_2(s) \end{aligned} \tag{4.135}$$

Les préfiltres $F_1(s)$ et $F_2(s)$ ont déjà été optimisés dans la partie précédente. Les préfiltres $F_{12}(s)$ et $F_{21}(s)$ seront conçues tel qu'exprimé à l'équation (4.133) et optimisé pour annuler l'effet des interférences $T_{12}(s)$ et $T_{21}(s)$. Ce qui revient de manière indirecte à faire tendre les sorties $Y_1(s)$ et $Y_2(s)$ directement vers les termes diagonaux $T_{11}(t)$ et $T_{22}(t)$ tel que :

$$Y_1(s) = T_{11}(s)F_1(s)R_1(s) \quad ; \quad Y_2(s) = T_{22}(s)F_2(s)R_2(s) \tag{4.136}$$

En se référant à la Figure 4.53 on notera les transmittances :

$$T_{12ff}(s) = F_{12}(s)T_{12}(s) \quad ; \quad T_{21ff}(s) = F_{21}(s)T_{21}(s) \tag{4.137}$$

Sur la Figure 4.54 et la Figure 4.55 nous apercevons que l'insertion des préfiltres permet une meilleure réjection des interférences $T_{12ff}(s)$ et $T_{21ff}(s)$ en pointillés verts, pour les HF.

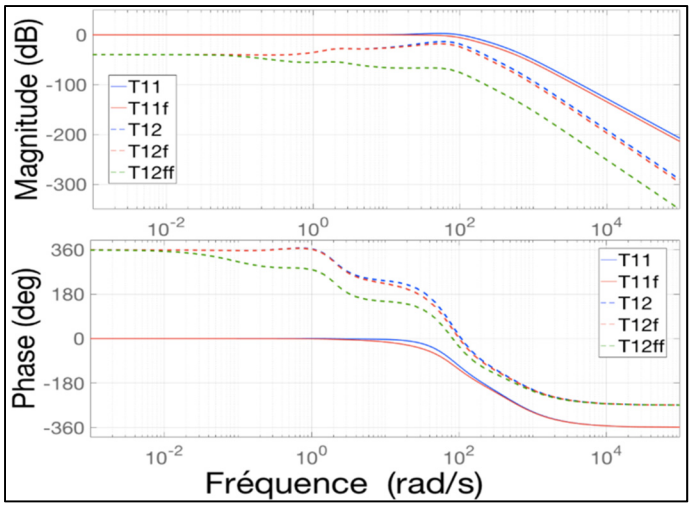


Figure 4.54 Bode de $T_{11}(s)$, $T_{12}(s)$, $T_{11f}(s)$, $T_{12f}(s)$, $T_{12ff}(s)$

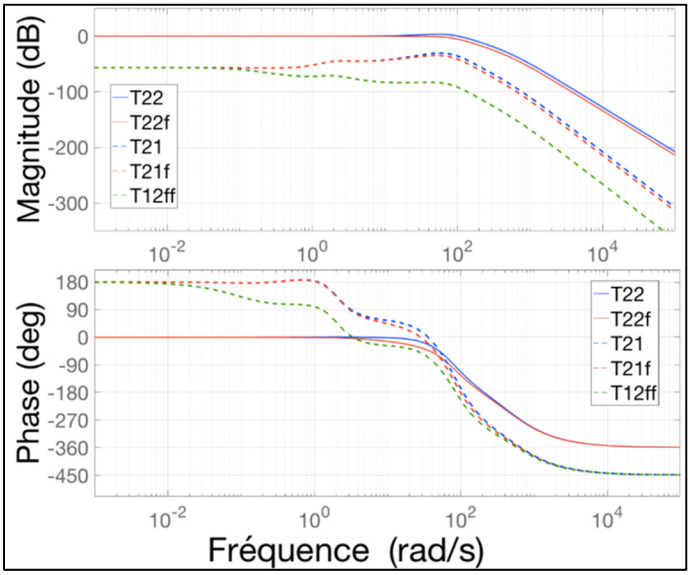


Figure 4.55 Bode de $T_{22}(s)$, $T_{21}(s)$, $T_{22f}(s)$, $T_{21f}(s)$, $T_{21ff}(s)$

La Figure 4.56 et la Figure 4.57 montrent l'allure des réponses temporelles des sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour trois configurations : sans préfiltre (courbes bleues), avec 1 préfiltre sur chaque entrée (courbes rouges) et avec 1 préfiltre sur chaque transmission (courbes vertes). La dernière configuration montre les meilleurs résultats avec une diminution des temps de pic t_p et d'établissement t_s. Ce qui est cohérent puisque les préfiltres $F_{12}(s)$ et $F_{21}(s)$ permettent d'annuler les couplages $y_{12}(t)$ et $y_{21}(t)$, tout faisant tendre les sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ directement vers les termes diagonaux $y_{11}(t)$ et $y_{22}(t)$.

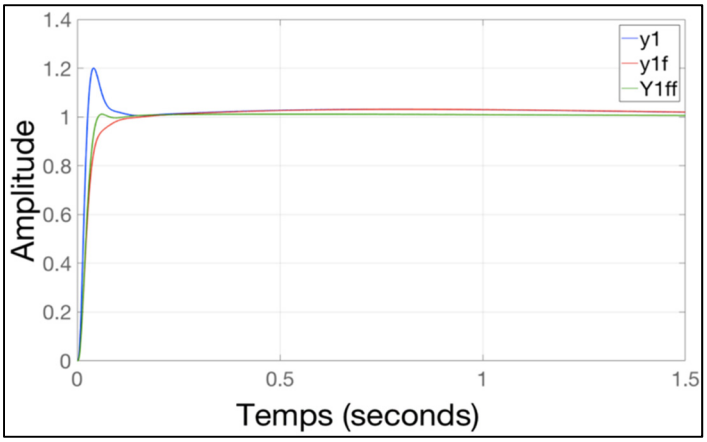


Figure 4.56 Réponse indicielle de $y_1(t)$, $y_{1f}(t)$ et $y_{1ff}(t)$

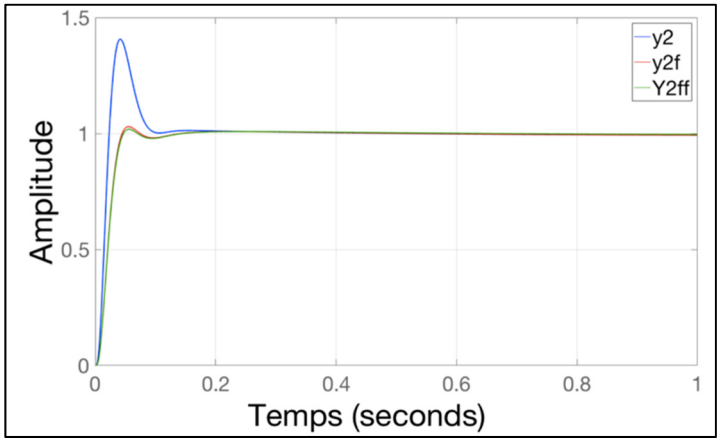


Figure 4.57 Réponse indicielle de $y_2(t)$, $y_{2f}(t)$ et $y_{2ff}(t)$

4.4 Application de la commande B au quadricoptère

4.4.1 Critères d'applications de la commande B

Dans cette partie nous allons vérifier les différents critères à remplir sur $P(s)$ tel que décrit dans (D. Bensoussan, 2015), pour concevoir le compensateur. L'expression du processus choisi sera celle en (3.59). Noter toutefois que si cela n'a pas été détaillé ici, la version du processus en (3.38) conduit à une conclusion identique concernant les critères d'application de la commande B. Soit :

(1) Être linéaire et invariant dans le temps

La fonction de transfert de $P(s)$ diagonalisée donnée par (3.59), est représentée par des équations différentielles linéaires à coefficients constants ; elle est donc linéaire et invariante dans le temps.

(2) $P(s)$ doit être inversible

Une des conditions à remplir pour appliquer la commande B est que la matrice $P(s)$ peut-être instable, mais inversible. Calculons $P^{-1}(s)$:

$$P^{-1}(s) = diag\left(\frac{s(s+0.1136)}{0.0036} \quad -\frac{s^3(s+0.1136)}{5.182} \quad -\frac{s^3(s+0.1136)}{5.182} \quad -\frac{s^2}{0.06965}\right) \tag{4.138}$$

Ou $P^{-1}(s)$, est définie comme étant holomorphique dans $Re\{s\} > 0$.

(3) $P(s)$ est strictement propre, instable avec diagonale $D(s)$

Les degrés des numérateurs de $P(s)$ en (4.135) sont strictement inférieurs aux degrés des dénominateurs de $P(s)$. Par conséquent $P(s)$ est strictement propre.

La fonction de transfert $P(s)$ est oscillatoire et stable avec 9 pôles sur l'axe imaginaire.

Ainsi, la diagonale $D_i(s)$ de $P(s)$ peut être définie tel que :

$$D_i(s) = diag\left(\frac{0.0036}{s(s+0.1136)} \quad -\frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} \quad -\frac{5.182}{s^3(s+0.1136)} \quad -\frac{0.06965}{s^2}\right) \qquad (4.139)$$

(4) 1er critère en HF : $\underline{\sigma}(P(s)) > \frac{\mu}{s^k}$ avec $\omega > \omega_f$

La Figure 4.58 montre les tracés des valeurs singulières de $P(j\omega)$, $\sigma_1(\omega)$ en noir (derrière la courbe rouge) et $\sigma_2(\omega)$ en rouge, $\sigma_3(\omega)$ en bleu et $\sigma_4(\omega)$ en vert. Il est par conséquent, possible de considérer une fonction du type $\frac{k}{s^m}$, telle que $\underline{\sigma}(P(j\omega)) > \frac{k}{s^m}$ en HF. Par exemple, en pointillé bleu sur la figure a été tracée la fonction $\mu(\omega) = \left(\left(1 + \frac{j\omega}{0.0001}\right)^4\right)^{-1}$, permettant ainsi de valider un des critères d'application de l'algorithme B.

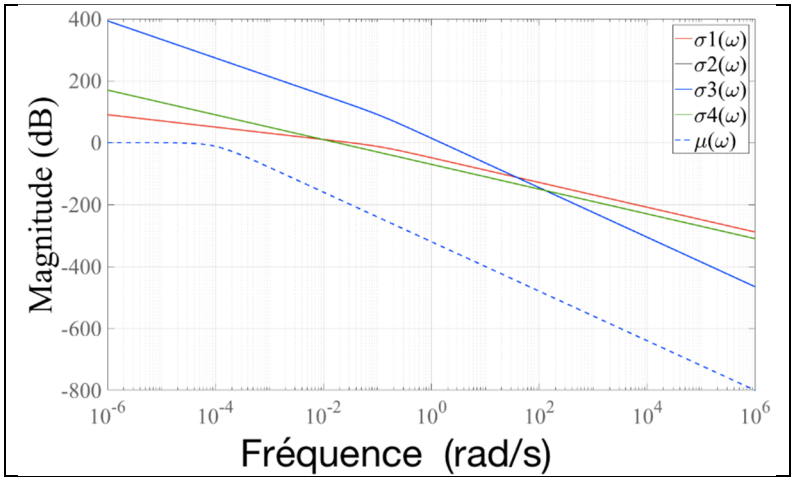


Figure 4.58 Valeurs singulières de $P(j\omega)$, $\sigma_1(\omega)$ en noir (derrière la courbe rouge) et $\sigma_2(\omega)$ en rouge, $\sigma_3(\omega)$ en bleu et $\sigma_4(\omega)$ en vert, $\mu(\omega)$ en pointillé bleu.

(5) 2ème critère en HF vérifiant $\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|P(s)-D(s)\|\right)<\alpha<1$

En HF la propriété $\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|P(s)-D_i(s)\|\right)<\alpha<1$ dois être vérifiée. $D_i(s)$ étant la matrice diagonale de $P(s)$ et α une valeur inférieure à l'unité. En développant cette propriété, nous obtenons :

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\left\|\begin{bmatrix}\frac{0.003644}{s(s+0.1136)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{0.0695}{s^2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{0.003644}{s(s+0.1136)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-5.182}{s^3(s+0.1136)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{0.0695}{s^2}\end{bmatrix}\right\|\right)<\alpha<1 \quad (4.140)$$

Lorsque s tend vers l'infini on peut alors vérifier la propriété :

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|0\|\right)=0<\alpha<1 \quad (4.141)$$

Les critères validant la possibilité d'appliquer la commande B au processus $P(s)$ ont été vérifiés. Soit : la matrice $P(s)$ est inversible ; elle est strictement propre ; En HF $\underline{\sigma}\left(P(j\omega)\right)>\frac{k}{s^m}$ et $\lim_{R\to+\infty}\left(\sup_{\substack{|s|>R\\ Re(s)\geq 0}}\|P(s)-d(s)\|\right)<\alpha<1$.

4.4.2 Expression des compensateurs B pour le quadricoptère

Comme nous l'avons vu au CHAPITRE 3 concernant la modélisation du quadricoptère, il existe plusieurs types d'architectures de commande et de modélisation du drone. Ainsi, bien que la philosophie de conception reste la même, le nombre de compensateurs et leur contenu peuvent varier selon le type d'architecture et de modélisation du processus utilisé. Nous détaillerons ici l'application de la commande B dans le cas de l'architecture de commande en translation et en rotation séparée défini à la section 3.5.2 sur le modèle de drone par approximation linéaire (3.38) puis, dans le cas de l'architecture en cascade décrite à la section 3.5.1 sur le modèle du drone linéarisé (3.59).

4.4.2.1 Commande en translation et rotation séparée

Dans le cas de l'architecture de commande en translation et rotation séparée décrite à la section 3.5.2 le nombre de compensateurs à concevoir est de six. Trois pour le système de rotation $C_r = diag(C_\phi, C_\theta, C_\psi)$ et trois pour le système de translation $C_t = diag(C_x, C_y, C_z)$. À la vue de l'expression du processus (3.38) nous déduisons que $C_x = C_y$ et $C_\phi = C_\theta$ puisque $P_x = P_y$ et $P_\phi = P_\theta$. La conception des compensateurs se limitera donc aux quatre suivants : C_x, C_z, C_ϕ, C_ψ. L'expression de $P(s)$ donnée en (3.38) ou (3.59) montre que nous sommes dans le cas d'un processus avec des pôles sur l'axe imaginaire. Dans ce cas particulier, le processus $P(s)$ est à la limite de la stabilité, mais peut être considéré stable. En se référant à la partie 4.1.1 l'expression du compensateur de la commande B s'écrit tel que $C(s) = P^{-1}(s)J(s)$, ou $J(s)$ est une matrice diagonale dont l'expression se résume à (avec $i = \{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$) :

$$J_i(s) = k_i \frac{\omega_{1i}}{s + \omega_{1i}} \frac{1 + z_i s}{1 + p_i s} \left(\frac{\omega_{2i}}{s + \omega_{2i}} \right)^{k_i} \tag{4.142}$$

Les coefficients $k_i, \omega_{1i}, \omega_{2i}, z_i, p_i$ et k_i étant déterminés en suivant la méthodologie présentée à la section 4.3.

L'expression générale du compensateur devient :

$$C(s) = diag[C_i(s)] = P^{-1}(s)J_i(s) = P^{-1}(s)diag\left[k_i \frac{\omega_{1i}}{s+\omega_{1i}} \frac{1+z_i s}{1+p_i s}\left(\frac{\omega_{2i}}{s+\omega_{2i}}\right)^{k_i}\right] \quad (4.143)$$

Les coefficients des compensateurs $C_i(s)$ obtenus sont résumés dans le Tableau 4.8.

Tableau 4.8 Coefficients des compensateurs B

	k_{1i}	ω_{1i}	ω_{2i}	z_{1i}	p_{1i}	k_i
$C_x = C_y$	38	0.1	18	0.1	0.015	2
$C_\theta = C_\phi$	53	0.07	34	0.08	0.02	2
C_z	38	0.1	18	0.1	0.015	2
C_ψ	18	0.9	77	0.6	0.0095	2

Le gain maximum en dB de chaque compensateur $C(s)$ du Tableau 4.8, la BP ω_b de $T(s)$, les gains maximums M_s et minimum ε de la sensibilité sont reportés au Tableau 4.9.

Tableau 4.9 Gain maximum du compensateur, BP ω_b, M_s et ε de la sensibilité

Sortie	z	x/y	ϕ/θ	ψ
max($C(s)$) [dB]	37.5	16.2	8.36	8.79
ω_b [rad/s]	6	6.43	23.4	24.6
M_s [dB]	2.43	2.93	2.76	2.39
ε [dB]	-48.1	-46.6	-52.6	-61.1

L'ordre et les pôles des compensateurs $C_x = C_y$, C_z, $C_\theta = C_\phi$ et C_ψ sont reportés dans le Tableau 4.10.

Tableau 4.10 Ordre et pôles des compensateurs B pour les axes x/y, z et les angles ϕ/θ, ψ

Compensateur	Ordre	Pôles
$C_x = C_y$	4	$(s+34)^2(s+0.07)(s+0.02)$
C_z	4	$(s+18)^2(s+0.1)(s+0.015)$
$C_\theta = C_\phi$	4	$(s+0.9)(s+0.04)$
C_ψ	4	$(s+77)^2(s+0.9)(s+0.0095)$

4.4.2.2 Commande en translation et rotation en cascade avec processus linéarisé

Nous avons dans ce cas l'architecture de commande à la section 3.5.1. Il est alors nécessaire de concevoir quatre compensateurs : C_x, C_y, C_z, C_ψ. On remarque que le processus possède des expressions similaires sur les axes x et y, on en déduit que $C_x = C_y$.

Comme dans la section précédente le processus $P(s)$ donnée en (3.38) ou (3.59) possède des pôles sur l'axe imaginaire et la conception pour un processus stable de la commande B sera considérée. En se référant à la partie 4.1.1 l'expression du compensateur de la commande B s'écrit $C(s) = P^{-1}(s)J(s)$, ou $J(s)$ est une matrice diagonale dont l'expression se résume à (avec $n = \{x, y, z, \psi\}$) :

$$J_i(s) = k_i \frac{\omega_{1i}}{s+\omega_{1i}} \frac{1+z_i s}{1+p_i s} \left(\frac{\omega_{2i}}{s+\omega_{2i}}\right)^{k_i} \tag{4.144}$$

Les coefficients $k_i, \omega_{1i}, \omega_{2i}, z_i, p_i$ et k_i étant déterminés en suivant la méthodologie présentée dans 4.3. L'expression générale du compensateur devient :

$$\begin{aligned} C(s) &= diag[C_i(s)] = P^{-1}(s)J_i(s) \\ &= diag\left(\frac{s(s+0.1136)}{0.003644} \quad \frac{s^3(s+0.1136)}{-5.182} \quad \frac{s^3(s+0.1136)}{-5.182} \quad -\frac{s^2}{0.0695}\right) \\ &\quad diag\left[k_i \frac{\omega_{1i}}{s+\omega_{1i}} \frac{1+z_i s}{1+p_i s} \left(\frac{\omega_{2i}}{s+\omega_{2i}}\right)^{k_i}\right] \end{aligned} \tag{4.145}$$

Les coefficients des compensateurs $C_i(s)$ extrait de (Brossard & Bensoussan, 2017) sont :

Tableau 4.11 Coefficients des compensateurs B pour le processus linéaire approximé

	k_{1i}	ω_{1i}	ω_{2i}	z_{1i}	p_{1i}	k_i
$C_x = C_y$	53	0.07	34	0.02	0.08	4
C_z	38	0.1	18	0.1	0.015	2
C_ψ	18	0.9	77	0.1	0.01	2

Le gain maximal des compensateurs $C(s)$ reporté au Tableau 4.11 est visible au Tableau 4.12 ainsi que la BP $\omega_{b.}$ Les maxima M_s et minima ε y sont également visibles.

Tableau 4.12 Gain maximum du compensateur, M_s et ε de la sensibilité

Sortie	z	x/y	ψ
max($C(s)$) [dB]	79.4	79.2	79
ω_b [rad/s]	5.4	5.3	24.6
M_s [dB]	2.43	2.93	2.39
ε [dB]	-48.1	-46.6	-61.1

Nous retrouvons dans le Tableau 4.13 l'ordre et les pôles des compensateurs $C_x = C_y$, C_z et C_ψ.

Tableau 4.13 Ordre et pôles des compensateurs B pour les axes x/y, z et les angles ϕ/θ, ψ

Compensateur	Ordre	Pôles
$C_x = C_y$	4	$(s + 18)^2(s + 0.1)(s + 0.015)$
C_z	6	$(s + 34)^4(s + 0.07)(s + 0.02)$
C_ψ	4	$(s + 77)^2(s + 0.9)(s + 0.0095)$

CHAPITRE 5

CONCEPTION DES COMMANDES H_2, H_∞ et µ-synthèse

Dans ce chapitre nous commencerons par concevoir un compensateur de type PID, un des plus populaires dans le domaine des drones en raison de sa simplicité relativement à des performances temporelles acceptables. Ensuite, nous aborderons les problèmes H_2 et H_∞ avec la description des fonctions de pondérations et de leurs rôles respectifs ; la mise sous forme standard des problèmes H_2, H_∞ et le calcul de leurs compensateurs respectifs. La dernière partie concerne la µ-synthèse qui prend en compte l'incertitude du système dans la conception du compensateur

5.1 Commande PID

5.1.1 Principe de la commande PID pour un second ordre

Tout d'abord, étayons la conception d'un compensateur de type PID pour un processus du second ordre. Nous verrons par la suite que cette approche peut être utilisée pour la commande des chaînes d'altitude, de tangage, de lacet et de roulis. La Figure 5.1 montre un compensateur $PID(s)$ associé à un processus du second ordre $G(s)$. On y retrouve également le signal de consigne $r(t)$, la sortie mesurée $y_m(t)$, l'erreur $e(t)$ et de commande $u(t)$.

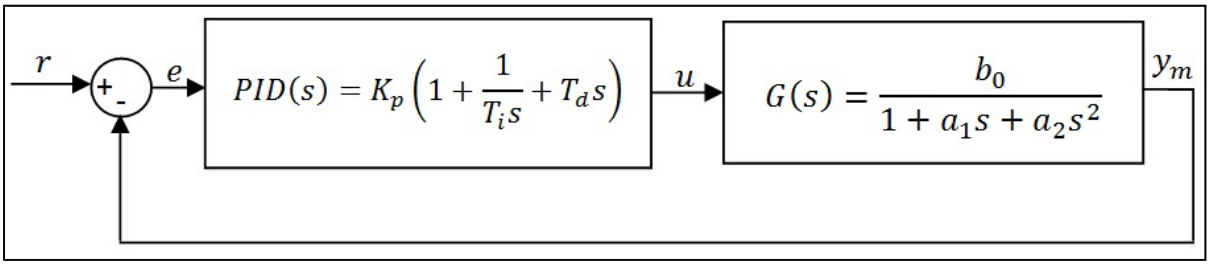


Figure 5.1 Boucle fermée d'un compensateur PID associé à un processus du second ordre

Le compensateur $PID(s)$ possède une fonction de transfert définie en (5.1) par un gain proportionnel K_P, d'une action intégrale $1/T_i$ et d'une action dérivée de gain T_d.

$$PID(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{5.1}$$

Le processus du second ordre $G(s)$ est décrit en (5.2) par les constantes b_0, a_1 et a_2 :

$$G(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \tag{5.2}$$

La transmission $T(s)$ définie par $T(s) = PID(s)G(s)(\mathrm{I}+PID(s)G(s))^{-1}$ s'exprime en utilisant (5.1) et (5.2) par :

$$T(s) = \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{\frac{a_2 T_i}{K_p b_0} s^3 + \frac{T_i\left(K_p b_0 T_d + a_1\right)}{K_p b_0} s^2 + \frac{T_i\left(K_p b_0 + 1\right)}{K_p b_0} s + 1} \tag{5.3}$$

Le dénominateur de $T(s)$ peut être représenté sous forme canonique par le produit d'un second ordre et d'un premier ordre : $\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi_0}{\omega_0} s + 1\right)(1 + T_0 s)$. Où ω_0 est la pulsation propre du second ordre et ξ_0 le coefficient d'amortissement. $1/T_0$ représente le pôle du premier ordre. En développant cette expression, il vient :

$$\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi_0}{\omega_0} s + 1\right)(1 + T_0 s) = \frac{T_0}{\omega_0^2} s^3 + \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0}\right) s^2 + \left(T_0 + \frac{2\xi_0}{\omega_0}\right) s + 1 \tag{5.4}$$

En égalant l'expression (5.4) au dénominateur de $T(s)$ décrit en (5.3) nous pouvons identifier :

$$\frac{T_0}{\omega_0^2} = \frac{a_2 T_i}{K_p b_0} \;\; ; \;\; \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0} = \frac{T_i\left(K_p b_0 T_d + a_1\right)}{K_p b_0} \;\; ; \;\; T_0 + \frac{2\xi_0}{\omega_0} = \frac{T_i\left(K_p b_0 + 1\right)}{K_p b_0} \qquad (5.5)$$

En fixant les paramètres ω_0, ξ_0 et T_0 pour obtenir un comportement désiré, cela permet de déduire la valeur les coefficients K_P, T_i et T_d du compensateur. Pour rappel les pôles du second ordre sont donnés par $-\xi_0\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi_0 - 1}$. Nous viserons un comportement de la boucle fermée sans d'oscillation, ce qui impose $\xi_0 \geq 1$. Dans un premier temps nous fixons $\xi_0 = 1$ ce qui donne un pôle double pour le second ordre, permettant d'éviter le dépassement temporel. Nous chercherons aussi à égaler le temps montée t_r de la réponse temporelle avec celle de la commande B, ce qui revient à obtenir une BP équivalente entre les deux commandes. Pour ce faire, ω_0 sera dans un premier temps fixée égal à la bande passante du compensateur B conçu en 4.4. Enfin, $1/T_0$ aura une valeur initiale deux fois plus importante que ω_0. Ainsi ce pôle rapide servira de réglage sur le temps de montée t_r. Ce premier réglage approximatif sera ajusté par la méthode essais/erreurs afin d'approximer le temps de montée de la commande B pour chacune des chaînes de commande. Le placement des pôles au départ est représenté à la Figure 5.2.

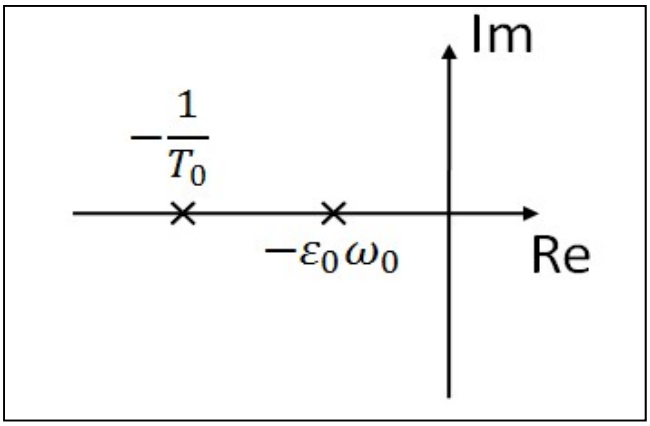


Figure 5.2 Emplacement des pôles de la boucle fermée $T(s)$ dans le cas d'un compensateur $PID(s)$ associé à un second ordre $G(s)$

Les expressions des paramètres K_P, T_i et T_d sont obtenues à partir de (5.5) et donne :

$$K_p = \frac{1}{b_0}\left(a_2\omega_0^2\left(1+\frac{2\xi_0}{\omega_0}\right)-1\right)$$
$$T_i = K_p\frac{b_0 T_0}{a_2\omega_0^2} \tag{5.6}$$
$$T_d = \frac{1}{T_i\omega_0^2}(1+2T_0\omega_0) - \frac{a_1}{K_p b_0}$$

5.1.2 Application de la commande PID au drone

La méthodologie décrite ci-dessous est développée dans le cas du processus linéaire présenté en (3.59) utilisant la structure de commande en translation et rotation séparée 3.5.2. Les coefficients des compensateurs *PID*(*s*) seront exposés à la fin de cette partie. Seront également reportés les coefficients dans le cas du processus linéaire approximé (3.38) utilisant la structure de commande en translation et rotation séparée 3.5.4. Cependant, pour ce deuxième cas la méthodologie pour obtenir ces coefficients ne sera pas détaillée puisqu'elle sensiblement identique à celle présentée pour le premier cas.

5.1.2.1 Axe *z*

La section 5.1.1 nous a permis de fixer la méthodologie générale pour le réglage des paramètres des compensateurs PID pour les chaînes de commande en altitude, tangage, lacet et roulis.

Considérons désormais la chaîne d'altitude représentée à la Figure 5.3. Comparées à la Figure 5.1 toutes les composantes sont désormais repérées par un indice *z* pour dénoter le raisonnement lié à l'axe *z*.

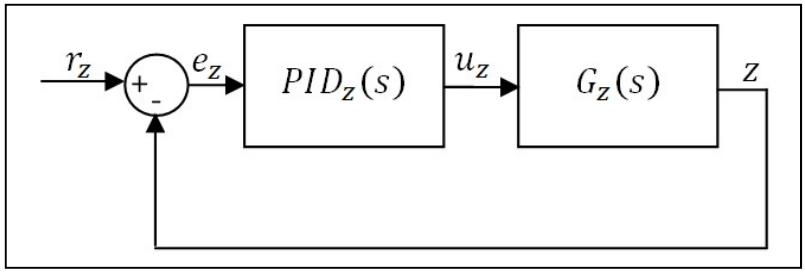


Figure 5.3 Chaîne d'altitude avec le compensateur $PID_z(s)$

Le processus obtenu en (3.59) peut-être réécrit à l'aide d'une constante $K_z = \frac{2k\omega_0}{m}$ pour simplifier la suite du raisonnement, il vient :

$$G_z(s) = \frac{\frac{2k\omega_0}{m}}{s\left(s + \frac{A_{zz}}{m}\right)} = \frac{K_z}{s\left(s + \frac{A_{zz}}{m}\right)} \tag{5.7}$$

Le compensateur $PID_z(s)$ s'écrit :

$$PID_z(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{5.8}$$

Il s'ensuit l'expression de la boucle fermée :

$$T_z(s) = \frac{PID_z(s)G_z(s)}{1 + PID_z(s)G_z(s)} = \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{\frac{T_i}{K_p K_z}s^3 + \left(\frac{T_i A_{zz}}{K_p K_z m} + T_i T_d\right)s^2 + T_i s + 1} \tag{5.9}$$

En égalant le dénominateur de $T_z(s)$ défini en (5.9) à celui de l'expression canonique reportée en (5.4) cela donne :

$$\begin{aligned} den\big(T_z(s)\big) &= \frac{T_i}{K_p K_z}s^3 + \left(\frac{T_i A_{zz}}{K_p K_z m} + T_i T_d\right)s^2 + T_i s + 1 \\ &= \frac{T_0}{\omega_0}s^3 + \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0}\right)s^2 + \left(\frac{2\xi_0}{\omega_0} + T_0\right)s + 1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

En égalant chacun des paramètres devant les s^n avec $n = \{0, 1, \ldots, 3\}$ de l'équation (5.10) nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{\omega_0} &= \frac{T_i}{K_p K_z} \\ \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0}\right) &= \left(\frac{T_i A_{zz}}{K_p K_z m} + T_i T_d\right) \\ \left(\frac{2\xi_0}{\omega_0} + T_0\right) &= T_i \end{aligned} \tag{5.11}$$

On en déduit les expressions des coefficients K_P, T_i et T_d :

$$\begin{aligned} T_i &= \left(\frac{2\xi_0}{\omega_0} + T_0\right) \\ K_p &= \frac{\omega_0 T_i}{K_z T_0} .. \\ T_d &= \frac{1}{T_i}\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0} - \frac{T_i A_{zz}}{K_p K_z m}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Tel que décrit à la section 5.1.1, la valeur ξ_0 est fixée à 1 dans un premier temps. ω_0 a pour valeur initiale la BP du compensateur B obtenue en 4.4 sur l'axe z, soit 6 rad/s. Enfin, $1/T_0$ à 2 fois ω_0, d'où $T_0 = 1/12$.

5.1.2.2 Axes *x/y*

La commande en position sur l'axe x est réalisée par l'intermédiaire de la variable d'entrée θ, comme nous pouvons l'apercevoir à la Figure 5.4. Par analogie la commande sur l'axe y est liée aux variations de l'angle ϕ. De plus, le drone étant symétrique le résultat concernant l'axe y sera identique à celui sur l'axe x. Par conséquent, le raisonnement développé ci-dessous se

fera sur l'axe *x*, mais il sera directement transposable pour l'axe *y* et nous laissons le soin au lecteur de faire l'analogie entre $x\theta$ et $y\phi$.

Le concept de la commande double boucle consiste à stabiliser dans un premier temps le processus $G_\theta(s) = \frac{2lk\omega_0}{I_{yy}s^2}$ avec le compensateur $PID_\theta(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$ représenté à la Figure 5.4. Cette boucle interne dont la consigne est $r_\theta(t)$, l'erreur $e_\theta(t)$, la commande $u_\theta(t)$ et la sortie mesurée $\theta(t)$ aura une BP beaucoup plus rapide que la boucle externe composée des transferts $PID_x(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$, $G_x(s) = -\frac{g}{s\left(s+\frac{A_{xx}}{m}\right)}$ et des variables de consigne $r_x(t)$, d'erreur $e_x(t)$, de commande $u_x(t) = \theta(t)$ et de sortie mesurée x(t). De la sorte sa dynamique interne pourra être négligée pour le réglage de la boucle externe.

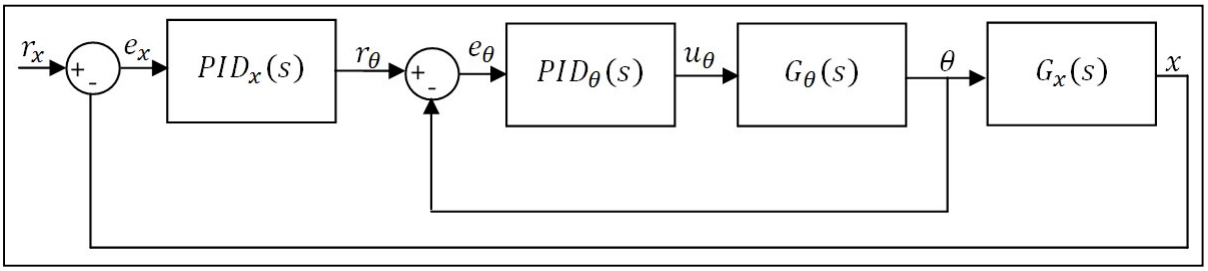


Figure 5.4 Structure PID double boucle pour la commande de θ et x

La transmission $T_\theta(s)$ reliant l'entrée $R_\theta(s)$ et la sortie $\theta(s)$, avec $K_\theta = \frac{2lk\omega_0}{I_{yy}}$, est :

$$T_\theta(s) = \frac{PID_\theta(s)G_\theta(s)}{1 + PID_\theta(s)G_\theta(s)} = \frac{K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\frac{2lk\omega_0}{I_{yy}s^2}}{1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\frac{2lk\omega_0}{I_{yy}s^2}} = \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{\frac{T_i}{K_\theta K_p}s^3 + T_d T_i s^2 + T_i s + 1} \quad (5.13)$$

En égalant le dénominateur de l'équation (5.13) avec celui de l'équation (5.4) nous trouvons les relations suivantes qui nous permettront d'extraire les valeurs de K_P, T_i et T_d :

$$\frac{T_0}{\omega_0^2} = \frac{T_i}{K_p K_\theta} \;\; ; \;\; \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0} = T_d T_i \;\; ; \;\; T_0 + \frac{2\xi_0}{\omega_0} = T_i \tag{5.14}$$

Soit :

$$T_i = T_0 + \frac{2\xi_0}{\omega_0} ; T_d = \frac{1}{T_i}\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0}\right) ; K_p = \frac{\omega_0^2 T_i}{T_0 K_\theta} \tag{5.15}$$

La BP de la transmission de la commande B obtenue à la section 4.4 sur les axes *x* ou *y* est de 6.43 rad/s. On s'assurera alors que la boucle interne soit au minimum 5 fois plus rapide (6.43×5 = 32.15 rad/s) pour ne pas influencer la dynamique de la boucle externe liée au compensateur $PID_x(s)$. ξ_0 sera également fixé à 1 dans un premier temps pour s'assurer d'avoir uniquement des pôles réels dans le compensateur $PID_\theta(s)$ et $T_0 = 1/(2\omega_0)$.

L'expression de la transmission $T_x(s)$ de la boucle externe est donnée par :

$$T_x(s) = \frac{PID_x(s)T_\theta(s)G_x(s)}{1 + PID_x(s)T_\theta(s)G_x(s)} \tag{5.16}$$

Or, comme la boucle interne $T_\theta(s)$ sera fixée beaucoup plus rapide que la boucle externe décrite par $T_x(s)$, nous pouvons négliger sa dynamique et l'expression (5.16) devient :

$$\begin{aligned} T_x(s) &= \frac{PID_x(s)G_x(s)}{1 + PID_x(s)G_x(s)} \\ &= \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{\frac{T_i}{gK_p}s^3 + \left(T_d T_i - \frac{A_{xx}T_i}{mgK_p}\right)s^2 + T_i s + 1} \end{aligned} \tag{5.17}$$

En égalant le numérateur de $T_x(s)$ (5.18) avec la forme canonique (5.4) nous obtenons :

$$\frac{T_0}{\omega_0^2} = \frac{T_i}{gK_p} \;\; ; \;\; \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0} = T_d T_i - \frac{T_i A_{xx}}{mgK_P} \;\; ; \;\; T_0 + \frac{2\xi_0}{\omega_0} = T_i \tag{5.18}$$

Il s'ensuit les expressions analytiques des paramètres du compensateur $PID_x(s)$ sur l'axe x :

$$T_i = T_0 + \frac{2\xi_0}{\omega_0} \; ; \; K_p = \frac{T_i \omega_0^2}{T_0 g} \; ; \; T_d = \frac{1}{T_i}\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\xi_0}{\omega_0} + \frac{A_{xx}}{mgK_p}\right) \tag{5.19}$$

En suivant la méthodologie développée en 5.1.1 nous viserons une BP de $T_x(s)$ d'environ 6.49 rad/s.

5.1.2.3 Autour de l'axe de lacet

La chaîne de commande autour de l'axe de lacet est représentée à la Figure 5.5. On y retrouve le compensateur $PID_\psi(s)$ ainsi que le processus $G_\psi(s)$ et les variables d'entrées $r_\psi(t)$, d'erreur $e_\psi(t)$, de commande $u_\psi(t)$ et de sortie $\psi(t)$.

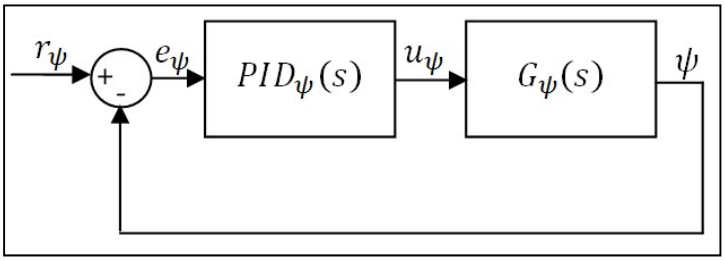


Figure 5.5 Chaîne de commande autour de l'angle ψ
avec le compensateur $PID_\psi(s)$

En nous référant à l'équation (3.59) nous pouvons exprimer le transfert $G_\psi(s)$ entre l'entrée u_ψ et la sortie ψ, avec $K_\psi = \frac{-2b\omega_0}{I_{zz}}$:

$$G_\psi(s) = \frac{\frac{-2b\omega_0}{I_{zz}}}{s^2} = \frac{K_\psi}{s^2} \tag{5.20}$$

On remarque que la forme analytique de $G_\psi(s)$ est identique à $G_z(s)$ (5.7), excepté que A_{zz} est égale à zéro et la constante K_ψ remplace K_z. De plus le compensateur $PID_\psi(s)$ ayant la même

forme que $PID_z(s)$ exprimé en (5.8) nous pouvons par analogie déduire l'expression des coefficients K_P, T_i et T_d :

$$T_i = \frac{2\varepsilon_0}{\omega_0} + T_0 \; ; K_p = \frac{\omega_0 T_i}{K_\psi T_0} \; ; T_d = \frac{1}{T_i}\left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2T_0\varepsilon_0}{\omega_0}\right) \tag{5.21}$$

La BP de la transmission avec le compensateur B en 4.4 est de 24.6 rad/s. Nous cherchons donc à égaler cette valeur pour $T_\psi(s)$. De plus, ici également nous fixons comme point de départ des pôles de $T_\psi(s)$ sur l'axe des réels, soit $\xi_0 = 1$, $\omega_0 = 24.6$ rad/s et $\frac{1}{T_0} = 49{,}2$ rad/s.

5.1.3 Expression des compensateurs

La conception des compensateurs *PID* en 5.1.2 a été décrite dans le cas du processus linéarisé (3.59) par approximation de Taylor et les paramètres des compensateurs obtenus sont reportées au Tableau 5.1.

Tableau 5.1 Paramètres des compensateurs $PID(s)$ pour le processus linéaire

Axes/angles	ξ_0	ω_0	T_0	K_p	T_i	T_d	ω_{bp} [rad/s]
z	1	3	2.5	3128.7	3.1667	0.2807	5.96
θ/ϕ	1	10	0.22	361	0.42	0.2486	51.1
x/y	1	3	3	1.1213	3.67	0.2727	6.53
ψ	0.6	1	30	285	31.2	1.19	24.8

Nous considérons également un second cas où le processus est celui linéaire approximé exprimée en (3.38). Pour cette deuxième configuration, la méthodologie employée est similaire à la première et ne sera pas détaillée. Nous utiliserons l'architecture de commande en translation et rotation séparée (3.5.4) et les BP recherchées ω_{bp} sont celles obtenues avec la

commande B au Tableau 4.9. Les valeurs obtenues pour les coefficients des *PID* et la BP ω_{bp} avec Matlab par la méthode détaillée en 5.1.2 sont reportées au Tableau 5.2.

Tableau 5.2 Paramètres des compensateurs *PID*(*s*) pour le processus par approximation linéaire

Axes/angles	ξ_0	ω_0	T_0	K_p	T_i	T_d	ω_{bp} [rad/s]
z	1	3	2.5	8.36	3.17	0.53	3.43
θ/ϕ	0.6	1	30	1,12	31.2	1.19	51
x/y	1	3	3	1.12	3.67	0.28	5.7
Ψ	0.6	1	30	0.063	31.2	1.19	51

5.2 Commandes H_2 et H_∞

Les commandes H_2 et H_∞ sont des commandes robustes utilisant des outils mathématiques avancés dans le domaine fréquentiel. La commande H_2 vise une minimisation de l'énergie investie dans la boucle de commande. Tandis que, la commande H_∞ repose sur la minimisation des gains maximum investis dans la boucle de commande.

Ces deux commandes reposent sur l'utilisation de fonctions de pondération qui permettent d'imposer des contraintes au design. L'objectif est de trouver un compensateur permettant de satisfaire simultanément ces contraintes, assurant alors la robustesse de la boucle de commande.

Une étape importante de la modélisation de ces commandes est la mise sous « forme standard » qui consiste à représenter sous une forme particulière la boucle fermée et les fonctions de pondérations de manière à faire apparaître les objectifs de design. Cette mise sous forme standard est identique dans le cas des commandes H_2 et H_∞.

Notez que cette section se réfère principalement au cours de commande robuste dispensé à l'université McGill : (Boulet, 2017) ; du livre : (Zhou & Doyle, 1998) ; et de la publication : (J. C. Doyle et al., 1989).

5.2.1 Fonctions de pondération

Pour la synthèse des commandes H_2 et H_∞ la première étape consiste à ajouter des fonctions de pondération dans la boucle fermée composée du compensateur $K(s)$ et du processus $G(s)$ illustré à la Figure 5.6. On y retrouve également le signal de commande $r(t)$, le signal de commande normalisé $\tilde{r}(t)$, l'erreur $e(t)$, l'erreur normalisée $\tilde{e}(t)$, la commande $u(t)$, la commande normalisée $\tilde{u}(t)$, la perturbation sur la commande $d_i(t)$, la perturbation sur la commande normalisée $\tilde{d}_i(t)$, la perturbation sur la sortie $d(t)$, la perturbation sur la sortie normalisée $\tilde{d}(t)$, $n(t)$ le signal représentant le bruit sur les mesures des capteurs, $\tilde{n}(t)$ le signal représentant le bruit normalisé sur les mesures des capteurs, la sortie du processus $y(t)$ et la sortie mesurée $y_m(t)$.

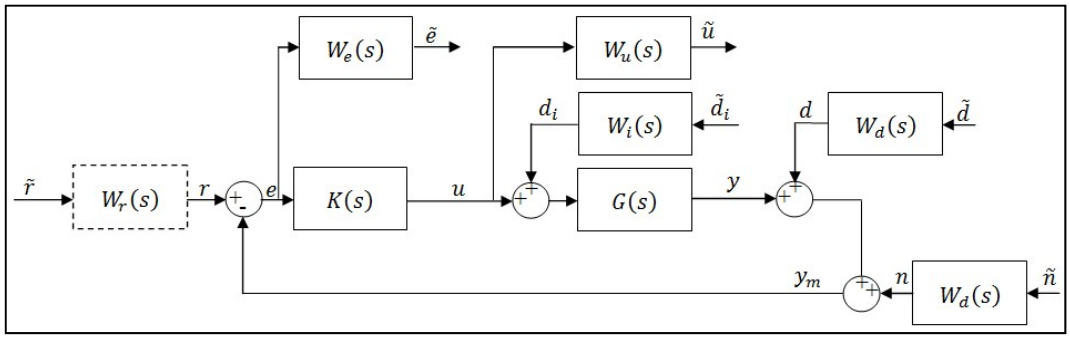


Figure 5.6 Boucle fermée standard avec fonctions de pondérations

Les principales fonctions de pondérations utilisées dans la conception des compensateurs H_2 et H_∞ sont $W_e(s)$, $W_u(s)$ et $W_d(s)$. La fonction de pondération $W_e(s)$ est une fonction de transfert inversible permettant de modéliser des prérequis sur l'allure la sensibilité $S(s)$ et l'erreur $e(t)$. La fonction de transfert $W_u(s)$ permet de fixer des contraintes sur le signal de commande envoyé aux actionneurs du processus, ce qui peut être utile pour limiter le signal de commande

$u(t)$ et éviter la saturation des actionneurs. $W_d(s)$ est une fonction de pondération utilisée pour modéliser la dynamique des perturbations $\tilde{d}$ sur la sortie $y(t)$. D'autres fonctions de pondération peuvent éventuellement être rajoutées telles que $W_r(s)$ pour contraindre le signal d'entrée ; $W_i(s)$ pour modéliser le bruit sur le signal de commande ; $W_n(s)$ les bruits sur les capteurs de mesures.

Un résumé simplifié des objectifs de design des synthèses H_2 ou H_∞ (selon le problème considéré) consiste à rechercher un compensateur $K(s)$ permettant à l'allure de la sensibilité $S(s) = (1+G(s)K(s))^{-1}$ et la fonction $K(s)S(s)$ d'être pour l'ensemble des fréquences ω sous les courbes des gabarits décrites respectivement par les fonctions de pondérations : $1/|We(s)|$ et $1/|W_u(s)|$. Si cet objectif de design est atteint alors la boucle fermée pourra être considérée robuste (voir Figure 5.7).

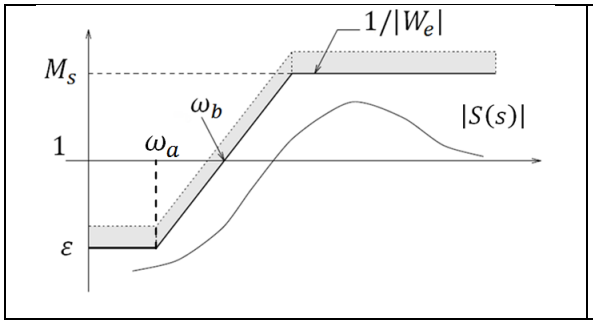


Figure 5.7 a Sensibilité et pondération $S(s)$ et $1/W_e(s)$
Extrait et adapté de Zhou & Doyle (1998)

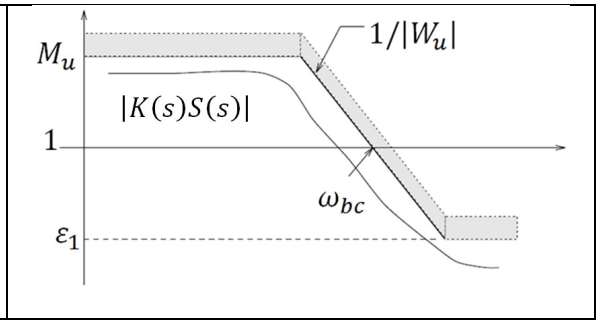


Figure 5.7 b Entrée au processus et pondération $K(s)S(s)$ et $1/W_u(s)$

Le lien entre $W_e(s)$ et la sensibilité $S(s)$ s'exprime comme suit :

$$\tilde{e}(s) = W_e(s)e(s) = W_e(s)\big(1 + G(s)K(s)\big)^{-1}r(s) = W_e(s)S(s)r(s) \qquad (5.22)$$

La fonction de pondération $W_e(s)$ exprimée en (5.24) et représentée à la Figure 5.7a sous la forme $1/|W_e(s)|$ nécessite le choix de plusieurs paramètres : tout d'abord ε dont le rôle est de faire tendre la fonction de sensibilité $|S(s)|$ proche de zéro en basse fréquence pour limiter l'erreur statique ; ω_b permet d'imposer la bande passante du système et M_s représente le

maximum de la sensibilité à ne pas dépasser dans le domaine fréquentiel ce qui en pratique permet d'éviter les dépassements de la sortie dans le domaine temporel (bien que cela a été démontré pour les systèmes du second ordre, les simulations montrent que cela reste à prouver pour les systèmes de tout ordre).

La pondération $W_u(s)$ représentée Figure 5.7b et exprimée en (5.23) est utilisée pour limiter la norme du signal de commande en utilisant la relation :

$$\tilde{u}(s) = W_u(s)u(s) = W_u(s)K(s)\big(1 + G(s)K(s)\big)^{-1}r(s) = W_e(s)K(s)S(s)r(s) \qquad (5.23)$$

Le paramètre M_u permet de limiter le maximum de la commande pour éviter la saturation des actionneurs ; ω_{bc} correspond à la bande passante maximum du compensateur et ε_1 est une valeur choisie petite pour rendre $W_u(s)$ propre sans influencer la dynamique du système.

$$W_e(\mathrm{s}) = \left(\frac{s}{M_s} + \omega_b\right)\left(s + \omega_b\varepsilon\right)^{-1} \qquad (5.24) \qquad W_u(\mathrm{s}) = \left(s + \frac{\omega_{bc}}{M_u}\right)\left(\varepsilon_1 s + \omega_{bc}\right)^{-1} \qquad (5.25)$$

En se référant à la Figure 5.7 b les objectifs de design peuvent être résumés comme suit : Soit $\|.\|_{\omega_x}$ la norme obtenue pour toutes les fréquences inférieures à ω_x et $\|.\|_{\underline{\omega_x}}$ la norme obtenue pour toutes les fréquences supérieures à $\underline{\omega_x}$:

Nous visons $\|W_e(s)S(s)\| < 1$ soit :

$$\|S(s)\| < \frac{1}{\|W_e(s)\|}\forall\omega \qquad (5.26)$$

et

$$\|S(s)\|_{\omega_a} < \varepsilon \qquad (5.27)$$

Nous recherchons également $\|W_u(s)K(s)S(s)\| < 1$ soit :

$$\|K(s)S(s)\| < \frac{1}{\|W_u(s)\|}\forall\omega$$

et

$$\|K(s)S(s)\|_{\underline{\omega_{bc}}} < \varepsilon_1 \qquad (5.28)$$

5.2.2 Mise sous forme standard des problèmes H_2 et H_∞

Pour une classe de système LTI une étape commune aux problèmes H_2 et H_∞ consiste à mettre sous forme standard la boucle fermée. Cela permet de faire apparaître l'ensemble des transferts entre les entrées exogènes et les sorties régulées du système par l'intermédiaire des fonctions de pondération représentées à la Figure 5.8. On y retrouve le signal de commande $r(t)$, l'erreur $e(t)$, l'erreur normalisée $\tilde{e}(t)$, la commande $u(t)$, la commande normalisée $\tilde{u}(t)$, la sortie $y(t)$, la perturbation $\tilde{d}(t)$ et la sortie perturbée $y_m(t)$. Les principales fonctions de pondération évoquées en 5.2.1 ont été conservées, à savoir : $W_e(s)$, $W_u(s)$ et $W_d(s)$.

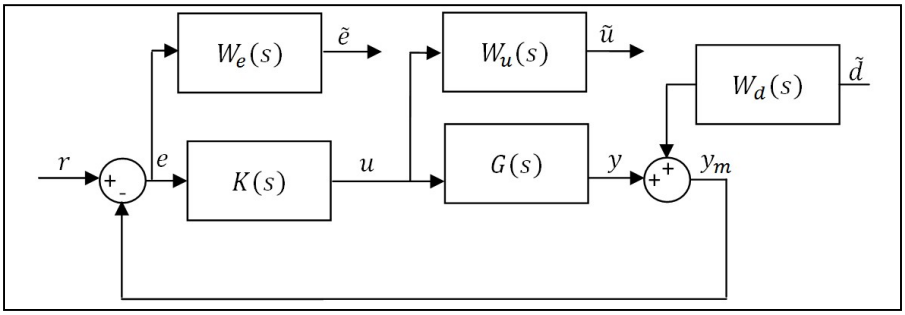


Figure 5.8 Boucle fermée avec ajout des fonctions de pondération

La mise sous forme standard ou LFT (Linear Fractionnal Transformation) consiste à réagencer les composants de la Figure 5.8 tels qu'à la Figure 5.9. De la sorte, cela permet de faire apparaître la fonction de transfert $P(s)$ pour représenter les relations entre les entrées exogènes $(r, \tilde{d}, u)$ et les sorties régulées $(\tilde{u}, \tilde{e}, e)$ à l'intérieur du rectangle en pointillés. L'entrée exogène $w = [\ r\ \tilde{d}\ ]^T$ dans notre cas est un vecteur de signal pouvant contenir le signal de commande r et la perturbation $\tilde{d}$. La sortie régulée $z = [\ \tilde{u}\ \tilde{e}\ ]^T$, est un vecteur de signal pouvant inclure le signal de commande $\tilde{u}$ et l'erreur de poursuite $\tilde{e}$.

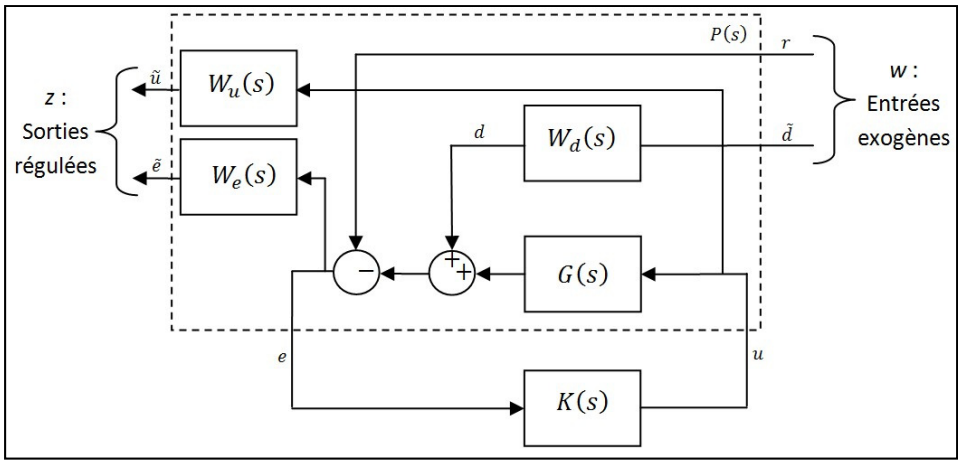


Figure 5.9 Boucle fermée sous forme standard

Avec cette modélisation $P(s)$ représente le transfert entre les entrées w, u et les sorties z, e. Il s'ensuit les relations entrées – sorties suivantes :

$$\begin{pmatrix} z \\ e \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & W_u \\ W_e & -W_e W_d & -W_e G \\ \hdashline 1 & W_d & -G \end{array}\right)}_{P(s)} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

Avec :

$$\begin{aligned} P_{11}(s) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W_e & -W_e W_d \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{12}(s) = \begin{pmatrix} W_u \\ -W_e G \end{pmatrix} \\ P_{21}(s) &= \begin{pmatrix} 1 & -W_d \end{pmatrix} \quad ; \quad P_{22}(s) = (-G) \end{aligned} \tag{5.30}$$

La dynamique de $P(s)$ peut être représentée par les matrices d'état (A), (B_1, B_2), (C_1), (D_{11}, D_{12}) et aussi (A), (B_1, B_2), (C_2) et (D_{21}, D_{22}), que l'on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ e \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c:c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hdashline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Tel que décrit dans (Doyle, 1989) la représentation d'état de l'expression $P(s)$ détaillée en (5.31) est nécessaire pour la vérification des conditions d'applications des problèmes standards H_2 et H_∞ ainsi que le calcul des compensateurs. L'expression (5.31) fait également apparaître

le vecteur d'état $x(t)$ et sa dérivée, dont la dimension dépend de l'ordre des fonctions de transfert $W_u(s)$, $W_e(s)$, $W_d(s)$ et $G(s)$ présentes dans $P(s)$. Ainsi, la dimension des matrices d'état (A), (B_1, B_2), $(C_1 ; C_2)$, $(D_{11}, D_{12} ; D_{21}, D_{22})$ de la représentation d'état de $P(s)$ dépendent de la dimension des vecteurs d'entrée $[x, w, u]^T$ et de sortie $[\dot{x}, z, e]^T$. Le schéma de la Figure 5.9 est alors mis sous la forme représentée ci-dessous, où $w = \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$ et $z = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{e} \end{bmatrix}$.

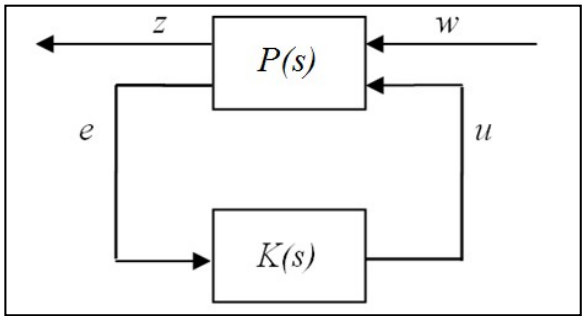


Figure 5.10 $P(s)$ - $K(s)$ sous forme standard

Sous réserve que l'inverse $(I + PK)$ existe, l'expression du transfert $T_{zw}(s)$ entre z et w est :

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l\big(P(s), K(s)\big) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)[I - P_{22}(s)K(s)]^{-1}P_{21}(s) \tag{5.32}$$

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W_e & -W_e W_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_u \\ -W_e G \end{pmatrix} K[I + GK]^{-1}(1 \quad -W_d) \tag{5.33}$$

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{W_u K}{(I + PK)} & \dfrac{-W_u K W_d}{(I + PK)} \\ W_e \dfrac{I}{(I + PK)} & -W_e \dfrac{I}{(I + PK)} W_d \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

$$T_{zw}(s) = \begin{pmatrix} W_u KS & -W_u KSW_d \\ W_e S & -W_e SW_d \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Comme le montre l'expression (5.35) la conception de la fonction de pondération $W_e(s)$ va influencer la sensibilité $S(s)$, tandis que, le signal de commande $u(t)$ représentée par la fonction de transfert $K(s)S(s)$ sera influencé par W_u(s). La pondération en entrée $W_d(s)$ aura un impact

sur les deux fonctions de transfert $S(s)$ et $K(s)S(s)$. Cependant, contrairement à $W_e(s)$ et $W_u(s)$, $W_d(s)$ n'est pas un degré de liberté sur lequel on peut agir puisque, son rôle est de normer les perturbations sur la sortie y_m. La solution standard H_2 ou H_∞ consistera alors à minimiser la norme maximum :

$$\min_{K\in S}\|T_{zw}(s)\|_2 \qquad \text{cas } H_2 \tag{5.36}$$

$$\min_{K\in S}\|T_{zw}(s)\|_\infty \qquad \text{cas } H_\infty \tag{5.37}$$

5.2.3 Expression des compensateurs

L'objectif visé pour la conception de chacun des compensateurs est d'obtenir un minimum ε et un maximum M_s de la sensibilité identique aux valeurs obtenues avec le compensateur B en 4.4. Cette approche permet d'obtenir une base de comparaison commune entre les compensateurs B, H_2 et H_∞. Deux cas sont à considérer selon le type de processus : le premier concernant le processus linéarisé par approximation de Taylor (3.38) dont les résultats visés concernant ε et M_s sont détaillés au Tableau 4.9 du chapitre 4 concernant la commande B ; le deuxième concerne le processus linéarisé par approximation (3.59) avec pour valeurs recherchées de ε et M_s celle du Tableau 4.1 relié à la commande B. L'architecture de commande utilisée est systématiquement ici celle en translation et rotation en cascade respectivement en 3.5.1 (pour le processus linéarisé par approximation de Taylor) puis en 3.5.3 (pour le processus linéaire approximé).

L'approche présentée ici pour obtenir les compensateurs consiste à rechercher les paramètres des fonctions de pondérations définies en 5.2.1 de manière à faire correspondre les valeurs de Ms et ε avec celles de la commande B obtenue dans les Tableaux 5.9 (linéarisé par approximation de Taylor) et 5.12 (linéaire approximé). Pour ce faire nous avons utilisé sous Matlab des algorithmes permettant d'extraire des valeurs suffisamment proches. Les résultats obtenus sont reportés au Tableau 5.5 dans le cas du processus linéarisé et au Tableau 5.6 pour le processus non linéaire.

Tableau 5.3 Valeurs des fonctions de pondérations, M_s et ε pour les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor

	H_2			H_∞		
	z	x-y	Ψ	z	x-y	Ψ
M_e	2.05	2.3	2.05	2.5	1.3	2.9
ω_b	6.5	6.5	49	1	4	42
ε_e	0.0051	0.0054	0.0012	0.006	0.0048	0.0017
M_u	10839	9120.1	10839	5839	9120.1	10351
ω_{bc}	5.6e5	1.4e6	5.65e5	2.7e4	0.4e6	1.45e6
ε_u	0.3162	0.3388	1e-5	0.3162	1.5388	0.0557
M_s	2.48	3.3	2.39	2.7	1.82	2.37
ε	-48.2	-46.6	-61.1	-48.2	-46.2	-61.1

Tableau 5.4 Valeurs des fonctions de pondérations, M_s et ε pour les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéaire approximé

	H_2			H_∞		
	z	x-y	Ψ	z	x-y	Ψ
M_e	2.05	2.38	2.05	2.235	2.0828	2.75
ω_b	2.5	1.5	7	0.8	1.5	2.4
ε_e	0.0051	0.0054	0.0012	0.0053	0.0058	0.0015
M_u	10839	9120.1	10351	10839	9120.1	10351
ω_{bc}	5.6e5	1.4e6	1.9e6	5.6e5	1.4e6	1.9e6
ε_u	0.3162	0.3388	0.2570	0.3162	0.3388	0.2570
M_s	2.45	2.92	2.39	2.42	2.95	2.4
ε	-48.1	-46.4	-61	-48.2	-46.5	-61.1

Nous retrouvons dans les Tableau 5.5 et Tableau 5.6 l'ordre et les pôles des compensateurs le long des axes x/y, z et autour de l'angle ψ respectivement dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor, puis dans le cas du processus linéaire approximé.

Tableau 5.5 Ordre et pôles les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor

Compensateur		Ordre	Pôles
H_2	$C_x = C_y$	7	$(s + 1e05)(s + 20.92)(s + 0.0099)(s^2 + 29.61s + 368.9)$ $(s^2 + 7.948s + 261.7)$
	C_z	5	$(s + 1e05)(s + 52.71)(s + 0.0128)(s^2 + 23.17s + 298.9)$
	C_ψ	5	$(s + 1e05)(s + 77.46)(s + 0.0084)(s^2 + 65.23s + 3769)$
H_∞	$C_x = C_y$	6	$(s + 153.5)(s + 0.0087)(s^2 + 27.42s + 231.5)$ $(s^2 + 7.978s + 175.9)$
	C_z	4	$(s + 52.14)(s + 0.00432)(s^2 + 7.575s + 29.32)$
	C_ψ	4	$(s + 188.5)(s+0.003648)(s^2 + 28.89s + 429.1)$

Tableau 5.6 Ordre et pôles des compensateurs pour les commandes H_2 et H_∞ dans le cas du processus linéaire approximé

Compensateur		Ordre	Pôles
H_2	$C_x = C_y$	7	$(s + 1e05)(s + 154.1)(s + 0.0377)(s^2 + 120.5s + 4681)$ $(s^2 + 31.09s + 3149)$
	C_z	5	$(s + 1e05)(s + 70.07)(s + 0.03315)(s^2 + 57.57s + 2777)$
	C_ψ	5	$(s + 1e05)(s + 477.4)(s + 0.0588)$ $(s^2 + 410.7s + 1.969e05)$
H_∞	$C_x = C_y$	6	$(s + 70.32)(s + 0.0192)(s^2 + 101.5s + 4074)$ $(s^2 + 31.46s + 3083)$
	C_z	4	$(s + 9.901)(s + 0.006)(s^2 + 8.318s + 83.39)$
	C_ψ	4	$(s + 591.9)(s + 0.0714)\ (s^2 + 508.8s + 2.946e05)$

5.3 Commande μ-synthèse

La μ-synthèse se trouve dans le prolongement du problème standard H_∞ dans le sens où elle utilise la même méthodologie de modélisation tout en prenant en compte dans la modélisation

du compensateur des incertitudes présentes dans le système. De plus, l'utilisation de la norme H_∞ est nécessaire pour l'obtention d'un compensateur par μ-synthèse.

Dans cette section nous définirons tout d'abord ce que sont des incertitudes non structurées. Ensuite, des critères de stabilités puis de performances robustes avec incertitudes structurées seront présentés. Cette partie repose principalement sur le cours de commande robuste donnée à l'université McGill : (Boulet, 2017) ; et des deux livres : (Gu, Petkov, & Konstantinov, 2005; Zhou & Doyle, 1998).

5.3.1 Stabilité robuste avec incertitudes structurées

Tel qu'illustré à la Figure 5.11 la μ synthèse prend en compte la présence d'incertitudes dans la modélisation du processus $G_\Delta(s)$ et extrait une matrice d'incertitudes structurées $\Delta_s(s)$ dont la définition est rappelée dans ce qui suit. Ce type de représentation rigoureuse des incertitudes permet d'éviter d'obtenir des résultats trop conservatifs du compensateur.

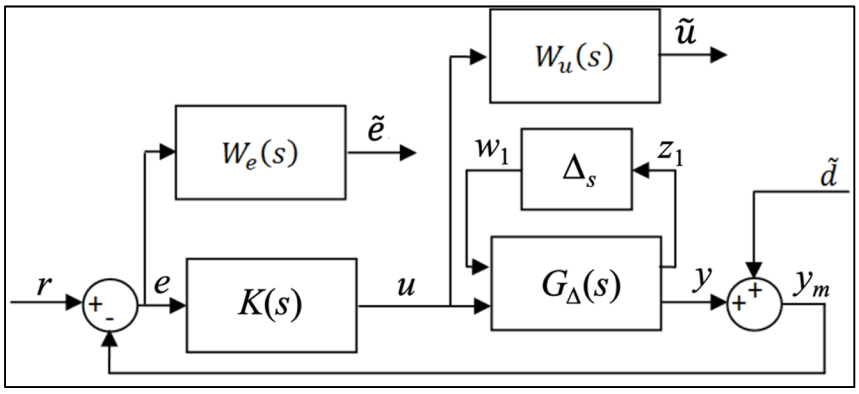


Figure 5.11 Boucle fermée avec ajout des fonctions de pondération et la matrice Δ_s

Définition de l'incertitude structurée Δ_s : La matrice d'incertitude Δ_s est structurée de manière à être un bloc diagonal, chacun de ses blocs représentant un type d'incertitude particulier. Pour chaque problème, cette structure est généralement différente puisqu'elle dépend du type d'incertitudes ainsi que des objectifs de performances du problème. La définition de la structure des incertitudes implique généralement trois aspects :

- Le type de chaque bloc ;
- Le nombre total de blocs ;
- Leurs dimensions.

Pour les systèmes linéaires, il est possible de regrouper les incertitudes en deux catégories : tout d'abord les incertitudes paramétriques, représentées par une ou plusieurs fonctions de transferts non connus. Elles permettent de modéliser des dynamiques généralement de hautes fréquences mal connues ou négligées. Puis, des incertitudes plus globales reliées au gain et la phase. Elles sont généralement représentées par un ou plusieurs paramètres complexes.

La structure des incertitudes est représentée par deux types de blocs d'incertitudes : les blocs scalaires S (possiblement répétés) (Figure 5.12a) et les matrices de transfert stable Δ de structure quelconque (Figure 5.12b). Notons que S et F sont des entiers non négatifs représentant respectivement le nombre de blocs scalaires répétés et le nombre de blocs complet.

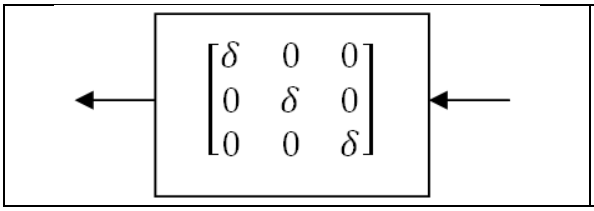


Figure 5.12a Bloc scalaire structuré S

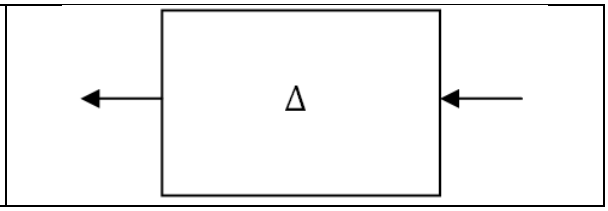


Figure 5.12b Matrices de transfert stable de structure quelconque F

Pour $r_1, \ldots, r_q, m_1, \ldots, m_l$ des entiers positifs satisfaisant :

$$\sum_{i=1}^{S} r_i + \sum_{j=1}^{F} m_j = n \tag{5.38}$$

Nous pouvons alors définir le bloc d'incertitude structuré $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ comme suit :

$$\Gamma \coloneqq \left\{\Delta_s = diag\left\{\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_q I_{r_q}, \Delta_1, \dots, \Delta_l\right\} : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\right\} \qquad (5.39)$$

Les conditions sur les normes des incertitudes deviennent alors :

$$\left\|\Delta_j\right\|_\infty < 1\ ;\ |\delta_i| < 1 \ \leftrightarrow \|\Delta_s\|_\infty < 1 \qquad (5.40)$$

La matrice d'incertitudes structurées $\Delta_s(s)$ définie en (5.39) est donc représentée par l matrices Δ_j(s) de fonctions transferts stables de structures quelconques bornées inférieures à |1| et q blocs δ_i complexes scalaires répétés bornés inférieurs à |I| et dans certains cas les blocs scalaires répétés peuvent également être réels.

Afin d'énoncer le théorème de la stabilité robuste lorsque la boucle fermée comprend des incertitudes structurées, considérons le processus général $P(s) = [P_{11}(s)\ P_{12}(s)\ ;\ P_{21}(s)\ P_{22}(s)]$ associé au compensateur $K(s)$ et l'incertitude structurée $\Delta_s(s)$ telle qu'illustrée à la Figure.4.23. L'ensemble des perturbations structurées réelles rationnelles, propres et stables est défini comme suit :

$$\mathcal{S} \coloneqq \{\Delta_s(s) \in \mathcal{RH}_\infty : \Delta_s(s_0) \in \Gamma, \forall\, s_0 \in \text{demi-plan fermé de droite}\} \qquad (5.41)$$

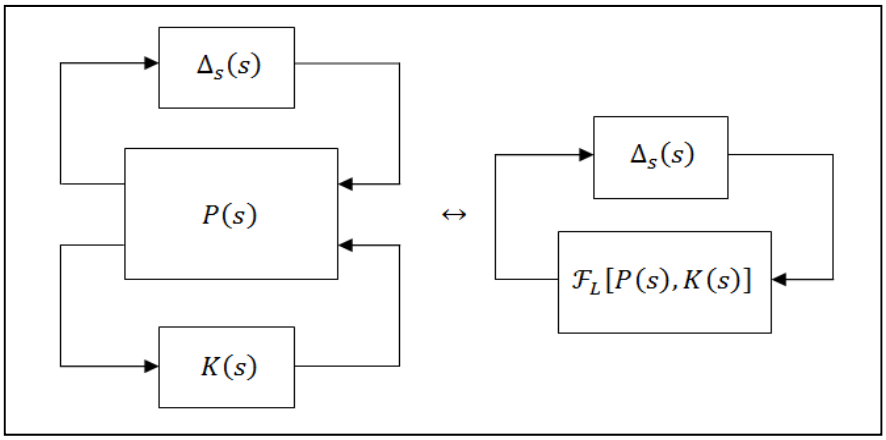


Figure 5.13 $P(s)$ et $K(s)$ associés à des incertitudes structurées $\Delta_s(s)$

Ce qui nous amène au théorème du petit gain généralisé permettant d'évaluer la stabilité robuste de la boucle fermée représentée à la Figure 5.13 :

Théorème : Soit un compensateur $K(s)$ supposé stable et le processus nominal $P(s)$. Alors pour une valeur $\beta > 0$ la boucle fermée représentée à la Figure 5.13 est dite bien posée et intérieurement stable pour tout $\Delta_s(s) \in \mathcal{S}, \|\Delta_s\|_\infty < \beta$ si et seulement si :

$$\sup_{\omega \in \mathcal{R}} \mu_\Gamma\{\mathcal{F}_L(P(j\omega), K(j\omega))\} \leq \frac{1}{\beta} \tag{5.42}$$

Si la perturbation structurée est normalisée, c.à-d., $\tilde{\Delta}_s \in \mathcal{S}, \|\tilde{\Delta}_s\|_\infty < 1$ la condition (5.42) devient :

$$\sup_{\omega \in \mathcal{R}} \mu_\Gamma\{\mathcal{F}_L(P(j\omega), K(j\omega))\} \leq 1 \tag{5.43}$$

Pour vérifier la condition de stabilité (5.42) il s'agit de calculer $\mu_\Gamma\{\mathcal{F}_L(G(j\omega), K(j\omega))\}$ à travers une large bande de fréquence. Si le tracé obtenu est inférieur à β^{-1} pour toutes les fréquences, alors la boucle fermée du système est dite stable robuste avec l'insertion des incertitudes structurées. Si un seul point dépasse β^{-1} alors la boucle fermée du système n'est pas stable robuste lorsqu'elle est soumise à des incertitudes.

5.3.2 Performances robustes avec incertitudes structurées

Dans de nombreuses situations, la stabilité interne n'est pas l'unique propriété à vérifier pour un système en boucle fermée. La robustesse face aux perturbations externes doit également être prise en compte. En effet, la présence de perturbations exogènes agissant sur le système (vent, bruit sur les capteurs …) provoque des erreurs sur le suivi de consigne ou sur la régulation. Soumis à ses dynamiques perturbées, le signal d'erreur peut augmenter de manière importante et les performances de la boucle fermée se dégrader.

Des spécifications sur les performances peuvent être exprimées avec l'utilisation de la norme H_∞. Pour le schéma sous forme standard de la Figure 5.14 il peut être considéré que le processus généralisé contient déjà les fonctions de pondérations et le spectre de performance s'écrit tel que :

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1 \text{ avec } T_{zw} = \mathcal{F}_L\big(P(j\omega), K(j\omega)\big) \tag{5.44}$$

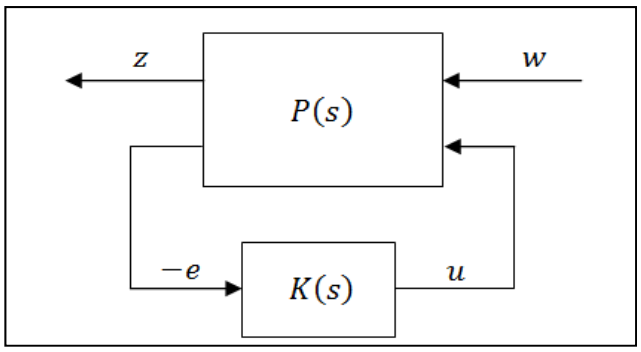


Figure 5.14 Représentation de la forme standard soumise à des perturbations exogènes

En réalité il y a toujours la présence d'incertitude dans le modèle. Une représentation sous forme de diagramme bloc plus approprié contient des incertitudes structurées telles qu'en (5.45) et représenté Figure 5.15. Permettant ainsi de formuler des spécifications sur les performances robustes à partir des LFT supérieure $\mathcal{F}_U$ et inférieure $\mathcal{F}_L$:

$$\begin{gathered}\|\mathcal{F}_L\{\mathcal{F}_U[P(j\omega), \Delta_s(j\omega)], K(s)\}\|_\infty < 1 \\ \forall \Delta_s(s) \in \mathcal{S}, \|\Delta_s(s)\|_\infty < 1\end{gathered} \tag{5.45}$$

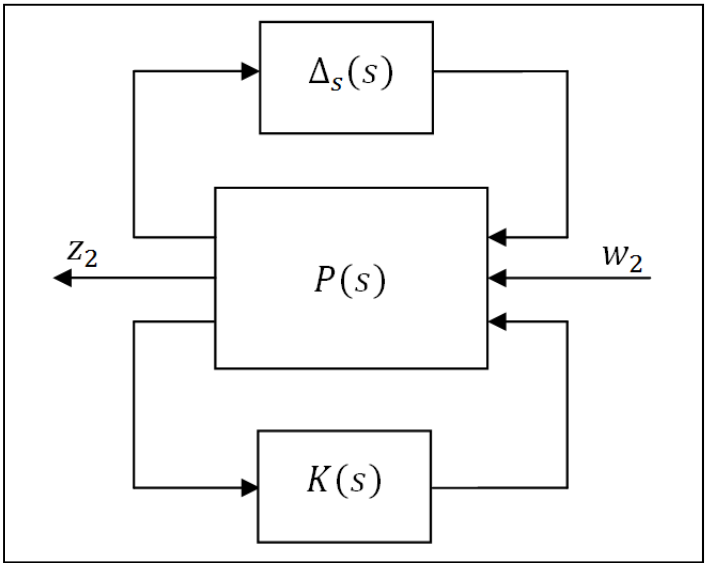


Figure 5.15 Boucle fermée sous forme standard avec perturbations structurées et perturbations exogènes

Pour prendre en compte les performances robustes en plus de la stabilité robuste, considérons le système en boucle fermée de la Figure 5.16 où Δ_P est un bloc d'incertitude structurée fictive, reliant $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n_{z_2}}$ et $w_2(t) \in \mathbb{R}^{n_{w_2}}$. Définissons le bloc structuré augmenté Ω:

$$\Omega = \left\{\Delta_{sa} = \begin{bmatrix} \Delta_s(s) & 0 \\ 0 & \Delta_p(s) \end{bmatrix} : \right\} \Delta_s \in \Gamma, \Delta_p \in \mathbb{C}^{n_{w2} \times n_{z2}} \qquad (5.46)$$

Ce bloc d'incertitude fictif permet de rendre le problème de performance robuste équivalent à un problème de stabilité robuste avec l'insertion de la perturbation structurée $\Delta_{sa} = diag\left(\Delta_s(s), \Delta_p(s)\right)$.

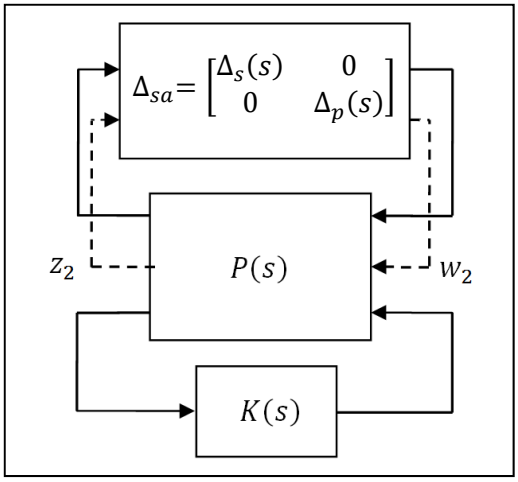


Figure 5.16 Boucle fermée perturbée pour robuste performance

Selon le théorème du petit gain le système en boucle fermée de la Figure 5.16 est stable robuste pour tout $\left\|\Delta_p(s)\right\|_\infty < 1$, ce qui implique que $\|T_{zw}\|_\infty < 1$.

Propriété : Pour des performances robustes avec l'insertion de perturbation structurée. Considérons un compensateur $K(s)$ stabilisant le processus nominal $P(s)$. Alors pour tout $\Delta_s \in \mathcal{S}, \Delta_s < 1$ le problème du système en boucle fermée est bien posé, internement stable et $\left\|T_{z_2 w_2}\right\|_\infty \leq 1$ si et seulement si :

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Omega \{\mathcal{F}_L[P(j\omega), K(j\omega)]\} \leq \frac{1}{\beta} \tag{5.47}$$

Remarque générale :

- Le théorème est principalement utilisé avec $\beta = 1$, soit avec des perturbations normalisées $\tilde{\Delta}_s(s)$;
- Ce théorème permet d'évaluer les performances robustes d'une boucle fermée en calculant $\mu_\Omega\{\mathcal{F}_L[P(j\omega), K(j\omega)]\}$ pour chaque fréquence et s'assurer que sa valeur soit inférieure à 1 ;

- La condition $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Omega} \{\mathcal{F}_L[P(j\omega), K(j\omega)]\} \leq 1$ implique la stabilité robuste et des performances nominales ;

5.3.3 Application de la μ-synthèse au drone

Dans cette partie nous allons détailler la mise sous forme standard du modèle du drone obtenu en (3.59). Au début pour l'ensemble des chaînes de commandes puis la méthodologie étant rigoureusement la même pour l'ensemble des axes, nous nous concentrerons uniquement sur l'axe *z*. Ensuite, la conception d'un contrôleur par la méthode d'itération D-K pour chacune des chaînes de commandes sera réalisée. Les performances robustes et stabilités robustes en seront déduites pour différentes amplitudes d'incertitudes.

5.3.3.1 Modélisation du drone sous forme standard

Tout d'abord, rappelons les expressions analytiques des différentes chaînes de commandes linéarisées développées en (3.59) autour d'un vol stationnaire:

Chaîne d'altitude :

$$\ddot{z} = -\frac{A_{zz}}{m}\dot{z} + \frac{2k\omega_0 u_z}{m} \tag{5.48}$$

Avec : $u_z = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$

Chaîne de roulis :

$$\ddot{y} = -\frac{A_{yy}}{m}\dot{y} - g\phi$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2lk\omega_0 u_y}{I_{xx}} \tag{5.49}$$

Avec : $u_y = \omega_4 - \omega_2$

Chaîne de tangage :

$$\ddot{x} = -\frac{A_{xx}}{m}\dot{x} - g\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2lk\omega_0 u_x}{I_{yy}} \qquad (5.50)$$

Avec : $u_x = \omega_3 - \omega_1$

Chaîne de lacet :

$$\ddot{\Psi} = \frac{2b\omega_0 u_\psi}{I_{zz}} \qquad (5.51)$$

Avec : $u_\psi = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$

Les équations (5.48) à (5.51) se représentent sous forme de schéma bloc suivant :

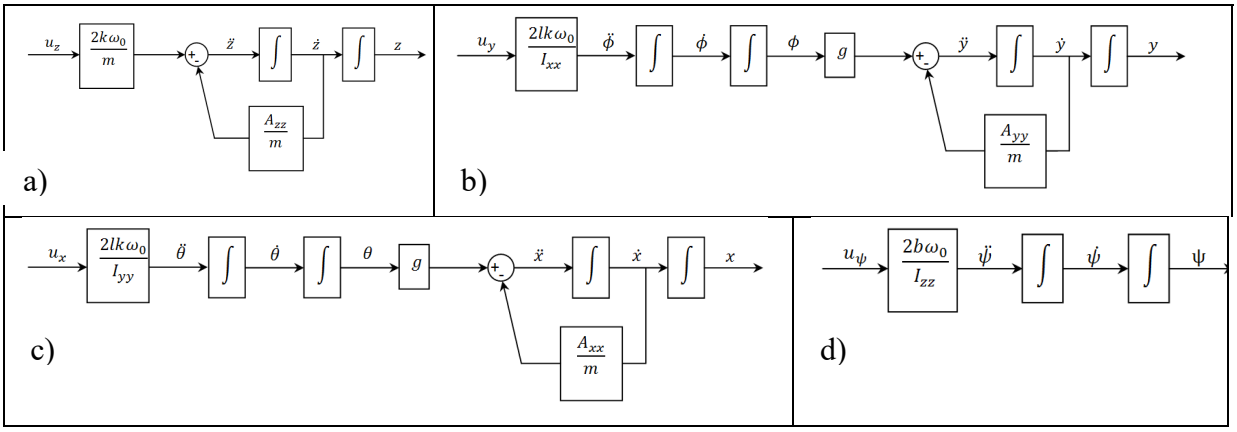


Figure 5.17 Représentations sous forme de schéma bloc des chaînes de : a) altitude, b) roulis, c) tangage, d) lacet.

En réalité les valeurs des paramètres $k, \omega_0, m, l, g, A_{ii}$ et I_{ii} avec $i = \{x, y, z\}$, présents dans les équations (5.48) à (5.51) ne sont pas rigoureusement exactes. Une différence peut exister à cause d'imprécisions qui conduisent à une différence entre le modèle réel et celui à modéliser. De plus, certains paramètres tel que la masse m peuvent varier au cours du temps. Les variations par rapport au modèle nominal peuvent être représentées par :

$$k_\Delta = k(1 + p_k\delta_k)\,;\, \omega_{0\Delta} = \omega_0\left(1 + p_{\omega_0}\delta_{\omega_0}\right)\,;\, m_\Delta = m(1 + p_m\delta_m)\,;$$
$$l_\Delta = l(1 + p_l\delta_l)\,;\; g_\Delta = g\left(1 + p_g\delta_g\right)\,;\; A_{ii\Delta} = A_{ii}\left(1 + p_{A_{ii}}\delta_{A_{ii}}\right)\,; \qquad (5.52)$$

$$I_{ii\Delta} = I_{ii}\left(1 + p_{I_{ii}}\delta_{I_{ii}}\right)$$

Où $k, \omega_0, m, l, g, A_{ii}$ et I_{ii} avec $i = \{x\ , y\ , z\}$ représentent les paramètres nominaux dont les valeurs sont reportées au Tableau 3.2. $k_\Delta, \omega_{0\Delta}, m_\Delta, A_{zz\Delta}\ l_\Delta, g_\Delta$, et $I_{ii\Delta}$ sont les paramètres soumis aux incertitudes. $p_k, p_{\omega_0}, p_m, p_l, p_g, p_{A_{ii}}$ et $p_{I_{ii}}$ représentent le maximum d'incertitude présent dans la boucle de commande pour chacun des paramètres constants du drone, tandis que $\delta_k, \delta_{\omega_0}, \delta_m, \delta_l, \delta_g, \delta_{A_{ii}}$ et $\delta_{I_{ii}} \in$ [-1, 1] permettent de faire varier l'amplitude des incertitudes.

Les blocs contenant des paramètres constants à la Figure 5.17 peuvent être modélisés sous forme la forme LFT à partir de $k_\Delta, k\ , p_k$ et δ_k comme suit :

- Pour le coefficient *k* la représentation LFT est la suivante :

$$k_\Delta = k(1 + p_k\delta_k) = k + p_k\delta_k(I - 0 \times \delta_k)^{-1}k = \mathcal{F}_u(M_k, \delta_k\ ) \qquad (5.53)$$

Avec : $$M_k = \begin{bmatrix} 0 & k \\ p_k & k \end{bmatrix}$$

- De même pour $\omega_{0\Delta} = \omega_0\left(1 + p_{\omega_0}\delta_{\omega_0}\right)$:

Avec : $$M_{\omega_0} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ p_{\omega_0} & \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{0\Delta} = \omega_0\left(1 + p_{\omega_0}\delta_{\omega_0}\right) = \omega_0 + p_{\omega_0}\delta_{\omega_0}\left(I - 0 \times \delta_{\omega_0}\right)^{-1}\omega_0 = \mathcal{F}_u\left(M_{\omega_0}, \delta_{\omega_0}\right) \quad (5.54)$$

- Pour $m_\Delta = m(1 + p_m\delta_m)$:

$$\frac{1}{m_\Delta} = \frac{1}{m(1 + p_m\delta_m)} = \frac{1}{m} - p_m\delta_m(I + p_m\delta_m)^{-1}\frac{1}{m} = \mathcal{F}_u(M_m, \delta_m) \qquad (5.55)$$

Avec : $$M_m = \begin{bmatrix} -p_m & \frac{1}{m} \\ -p_m & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

- Pour $l_\Delta = l(1 + p_l \delta_l)$:

$$l_\Delta = \mathcal{F}_u(M_l, \delta_l) \tag{5.56}$$

Avec : $$M_l = \begin{bmatrix} 0 & l \\ p_l & l \end{bmatrix}$$

- Pour $g_\Delta = g(1 + p_g \delta_g)$:

$$g_\Delta = \mathcal{F}_u(M_g, \delta_g) \tag{5.57}$$

Avec : $$M_g = \begin{bmatrix} 0 & g \\ p_g & g \end{bmatrix}$$

- Pour $A_{ii_\Delta} = A_{ii}(1 + p_{A_{ii}} \delta_{A_{ii}})$:

$$A_{ii_\Delta} = \mathcal{F}_u(M_{A_{ii}}, \delta_{A_{ii}}) \tag{5.58}$$

Avec :

$$M_{A_{ii}} = \begin{bmatrix} 0 & A_{ii} \\ p_{A_{ii}} & A_{ii} \end{bmatrix}$$

- Pour $I_{ii_\Delta} = I_{ii}(1 + p_{I_{ii}} \delta_{I_{ii}})$:

$$I_{ii_\Delta} = \mathcal{F}_u(M_{I_{ii}}, \delta_{I_{ii}}) \tag{5.59}$$

Avec :

$$M_{I_{ii}} = \begin{bmatrix} -p_{I_{ii}} & \frac{1}{I_{ii}} \\ -p_{I_{ii}} & \frac{1}{I_{ii}} \end{bmatrix}$$

Les LFT des équations (5.53) à (5.59) sont représentées sous forme de schéma blocs à la Figure 5.18 :

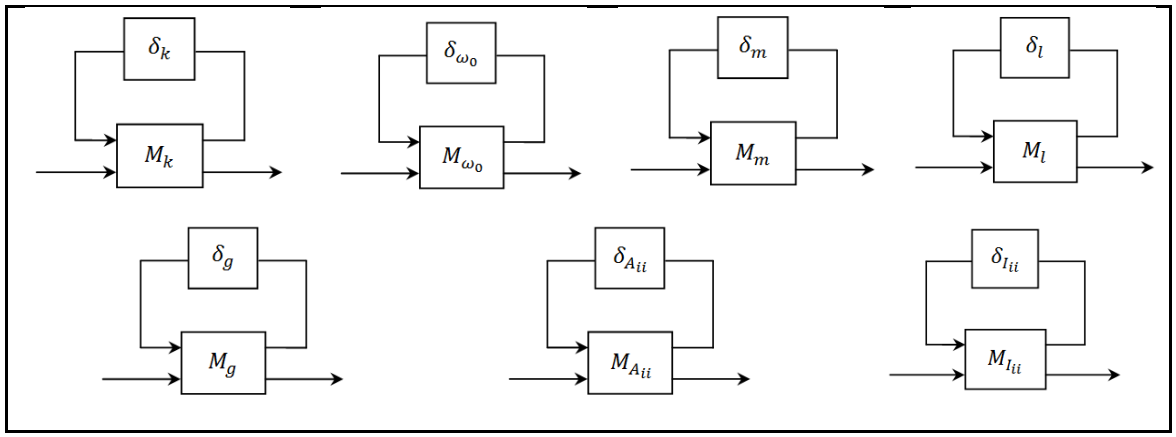


Figure 5.18 Représentation sous forme de schéma bloc des LFT des paramètres $k_\Delta, \omega_{0\Delta}, m_\Delta, l_\Delta, g_\Delta, A_{ii\Delta}$ et $I_{ii\Delta}$

Les entrées et les sorties des blocs d'incertitudes de type paramétriques $\delta_k, \delta_{\omega_0}, \delta_m, \delta_l, \delta_g, \delta_{A_{ii}}$ et $\delta_{I_{ii}}$ de la Figure 5.18 seront notées respectivement : $y_k, y_{\omega_0}, y_m, y_l, y_g, y_{A_{ii}}, y_{I_{ii}}$ et $u_k, u_{\omega_0}, u_m, u_l, u_g, u_{A_{ii}}, u_{I_{ii}}$.

L'insertion des incertitudes $\delta_k, \delta_{\omega_0}, \delta_m$ et A_{zz} dans la chaîne d'altitude mène au schéma de la Figure 5.19. Nous laissons le soin au lecteur de faire l'analogie avec ce qui suit pour les chaînes de roulis, tangage et de lacet.

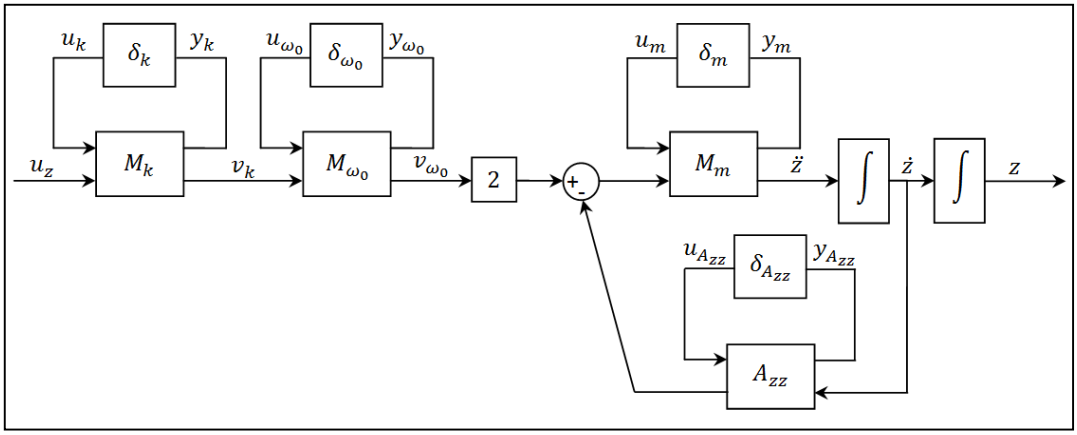


Figure 5.19 Insertion des incertitudes dans la représentation de la chaîne d'altitude

La prochaine étape consiste à modifier la disposition des blocs de la Figure 5.19 pour faire apparaître le bloc diagonal d'incertitudes paramétrique Δ_z et le transfert G_z de u_z vers z. Δ_z et G_z se trouvent à l'intérieur des deux rectangles en pointillé à la Figure 5.20.

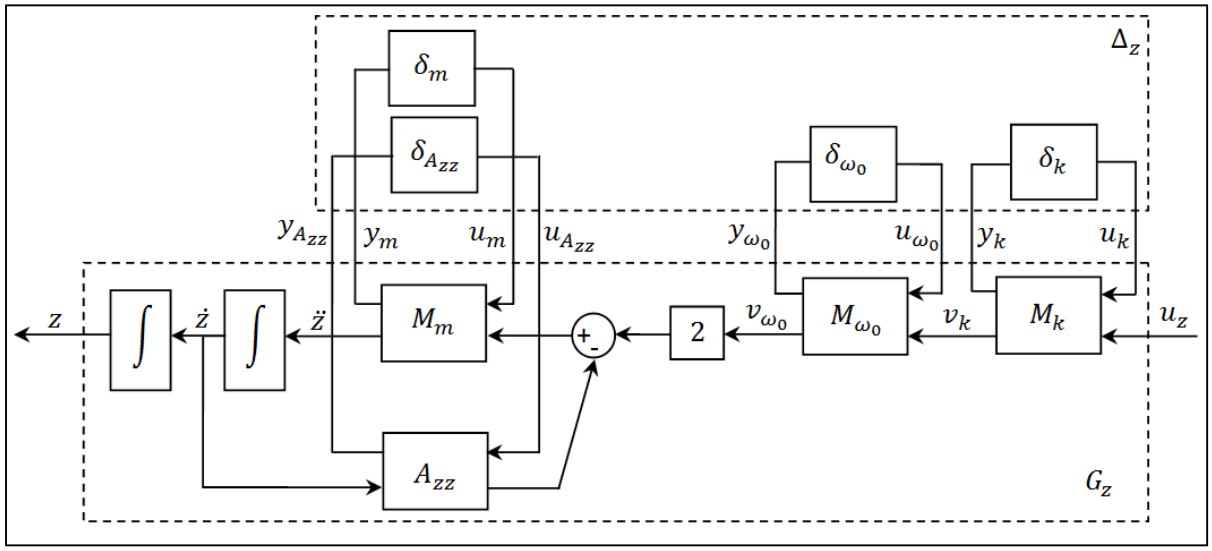


Figure 5.20 Structure de la chaîne d'élévation pour faire apparaître le contenu Δ_z et G_z

La Figure 5.20 peut être réduite à la Figure 5.21.

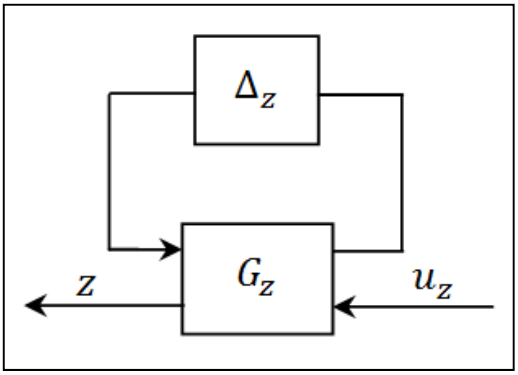


Figure 5.21 Structure G_z - Δ_z

Pour chacune des chaînes d'altitude, de roulis, de tangage et de lacet, on peut résumer respectivement le contenu de chacun des blocs $\Delta_z, \Delta_y, \Delta_x$ et Δ_ψ comme suit :

$$\Delta_z = diag(\delta_k, \quad \delta_{\omega_0}, \quad \delta_m, \quad \delta_{A_{zz}}) \tag{5.60}$$

$$\Delta_y = diag(\delta_l, \quad \delta_k, \quad \delta_{\omega_0}, \quad \delta_{I_{xx}}, \quad \delta_g, \quad \delta_{A_{yy}}, \quad \delta_m) \tag{5.61}$$

$$\Delta_x = diag(\delta_l, \quad \delta_k, \quad \delta_{\omega_0}, \quad \delta_{I_{yy}}, \quad \delta_g, \quad \delta_{A_{xx}}, \quad \delta_m) \tag{5.62}$$

$$\Delta_\psi = diag(\delta_b, \quad \delta_{\omega_0}, \quad \delta_{I_{zz}}) \tag{5.63}$$

La prochaine étape consiste à mettre le schéma sous forme standard avec l'insertion des fonctions de pondération $W_{pz}(s)$ pour ajouter une contrainte de performance liée à la sensibilité et $W_{uz}(s)$ pour imposer un gabarit sur le signal de commande $u_z(t)$ (voir Figure 5.22). Cette mise sous forme standard permet de modéliser le transfert $P_z(s)$ entre les entrées $w_1 = [u_k, u_{\omega_0}, u_m, u_{A_{zz}}]^T$, la consigne r_z, la perturbation d_z, la commande u_z et les sorties $z_1 = [y_k, y_{\omega_0}, y_m, y_{A_{zz}}]^T$, les sorties normalisées $\tilde{z}_m$, $\tilde{u}_z$ des fonctions de pondérations et l'erreur e_z transmise au compensateur.

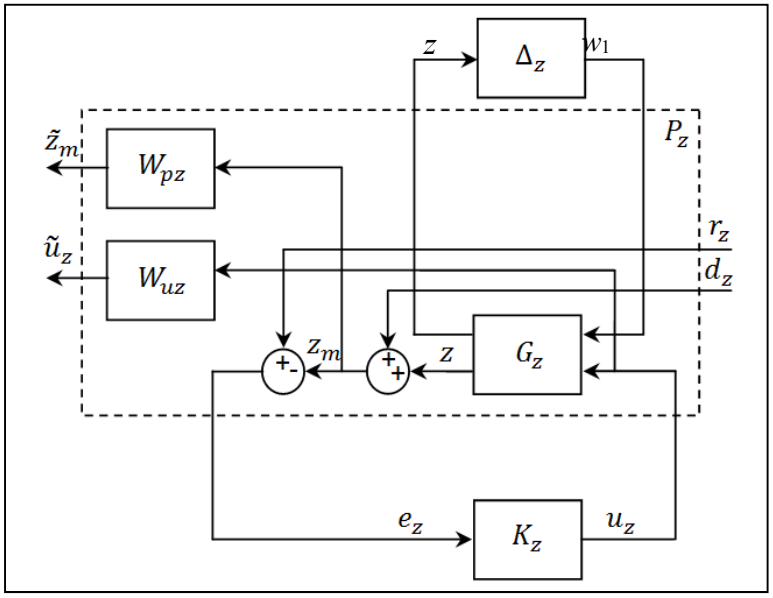


Figure 5.22 Mise sous forme canonique avec insertion des fonctions de pondérations W_{pz}, W_{uz} et du compensateur K_z

La matrice $P_z(s)$ définissant le transfert entre les entrées $[w_1 \quad r_z \quad d_z \quad u_z]^T$ et les sorties $[z_1 \quad \tilde{z}_m \quad \tilde{u}_z \quad e_z]^T$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \tilde{z}_m \\ \tilde{u}_z \\ e_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{z_{11}} & 0 & 0 & G_{z_{12}} \\ W_{pz}G_{z_{21}} & 0 & W_{pz} & W_{pz}G_{z_{22}} \\ 0 & 0 & 0 & W_{uz} \\ -W_{pz}G_{z_{21}} & 1 & -1 & -W_{pz}G_{z_{22}} \end{bmatrix}}_{P_z(s)} \begin{bmatrix} w_1 \\ r_z \\ d_z \\ u_z \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

Les expressions générales des fonctions de pondération extraites de 5.2.2 donnent pour rappel :

$$W_p(\mathrm{s}) = \frac{\frac{s}{M_s} + \omega_b}{s + \omega_b \varepsilon} \tag{5.65a}$$

$$W_u(\mathrm{s}) = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M_u}}{\varepsilon_1 s + \omega_{bc}} \tag{5.65b}$$

Les valeurs numériques des équations (5.65a) et (5.65b) sont reportées au Tableau 5.7.

Tableau 5.7 Valeurs numériques des fonctions de pondérations $W_p(s)$ et $W_u(s)$ pour les chaînes : d'altitude, de roulis, de tangage, de lacet

Chaîne	W_p			W_u		
	M_s	ω_b	ε	ω_{bc}	M_u	ε_1
Altitude	1.98	0.98	0.0042	5.65×10^5	10939	0.3162
Roulis	2.96	0.98	0.0048	5.65×10^5	10939	0.3162
Tangage	2.96	0.98	0.0048	5.65×10^5	10939	0.3162
Lacet	2.39	0.98	0.000881	1.95×10^6	10351	0.2570

La dernière étape avant de pouvoir procéder au calcul du compensateur par itération D-K consiste à définir le bloc d'incertitude diagonale Δ_{F_z} à la Figure 5.23. Il est composé du bloc d'incertitude paramétrique Δ_z déjà défini en (5.60). Le second bloc d'incertitude fictif Δ_{pz} permet de viser des critères de performance.

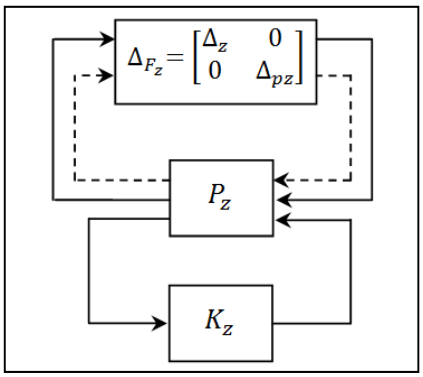


Figure 5.23 Insertion du critère de performance Δ_{pz}

$$\Delta_{F_z} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_{sz} & 0 \\ 0 & \Delta_{pz} \end{bmatrix} : \Delta_z \in \mathcal{R}^{3\times3}, \Delta_{pz} \in \mathbb{C}^{1\times2} \right\} \tag{5.66}$$

5.3.3.2 Obtention du compensateur par D-K itérations

L'optimisation séquentielle par la méthode de la D-K itération détaillée dans (Gu, 2005), est une solution répandue pour la conception des compensateurs dans le cadre de la µ-synthèse.

Dans cette partie deux compensateurs seront conçus pour chacun des axes *z, x-y* et concernant l'angle ψ : le premier avec un pourcentage d'incertitudes fixé à 0, soit que $p_j = 0$ avec $\{j = m, k, A_{ii}, b\}$ dans le transfert $P(s)$ tel qu'exprimé en (5.64) pour l'axe *z*, p_j étant issus des équations (5.52). Un premier compensateur nommé $K_{\mu p_j}$ sera obtenu, avec $j = \{x, y, z, \psi\}$. Puis les valeurs des p_j seront progressivement augmentées jusqu'à ce que la réponse temporelle soit "suffisamment dégradée". C'est-à-dire une augmentation importante du temps de stabilisation t_s ou par exemple l'apparition d'oscillation. Un second compensateur $K_{\mu p_{\Delta j}}$ sera alors obtenu.

L'utilisation de la Robust Control Toolbox sous Matlab permet de résoudre le problème par la méthode d'itération D-K. La sortie obtenue pour 5 itérations concernant l'axe *z*, sans perturbation est représentée à la Figure 5.24. Cette sortie nommée "sommaire d'itération" fait apparaît deux métriques que nous allons utiliser pour déterminer le compensateur à extraire.

Iteration #	1	2	3	4	5
Controller Order	6	6	6	6	6
Total D-Scale Order	0	0	0	0	0
Gamma Acheived	1.773	1.024	1.010	1.010	1.010
Peak mu-Value	1.742	0.772	0.770	0.770	0.770

Figure 5.24 Sommaire d'itération pour un algorithme convergeant

1. La première métrique, nommée "Gamma Acheived" permet de qualifier la **robustesse du système selon la norme H_∞.** Elle est définie par la norme infinie :

$$\left\|\mathcal{F}_l\left(Pj\omega, K(j\omega)\right)\right\|_\infty = \gamma \qquad (5.67)$$

   La robustesse est atteinte selon la norme H_∞ si γ <1.

2. La deuxième métrique nommée "Peak mu-Value" est reliée aux **performances robustes (PR)** consiste à évaluer, pour une perturbation fictive Δ_p la valeur minimale $M_{w_2 \to z_2}(j\omega) = \mathcal{F}_{L_{w_2 \to z_2}}\left(P(j\omega), K(j\omega)\right)$ causant l'instabilité de l'expression suivante :

$$\sup_{\omega\in\mathcal{R}} \mu_{\Delta_p}\left\{\mathcal{F}_{L_{w_2\to z_2}}\left(P(j\omega),K(j\omega)\right)\right\} = \sup_{\omega\in\mathcal{R}} \frac{1}{\min\left\{\bar{\sigma}\left(\Delta_p(j\omega)\right) : \det\left(I - M(j\omega)\Delta_p\right) = 0\right\}} \tag{5.68}$$

Les performances robustes sont atteintes si la relation (5.68) est inférieure à 1. On observe sur la Figure 5.25 que l'algorithme converge dès la 3ème itération. Les itérations suivantes donnant le même résultat. De plus, la robustesse selon la norme H_∞ est presque atteinte avec $\gamma = 1.010$. Tandis que, les PR sont atteintes avec $\sup_{\omega\in\mathcal{R}} \mu_{\Delta_p} = 0.770$.

Un second cas de figure est représenté la Figure 5.26 où des incertitudes ont été insérées dans la boucle fermée. On remarque ici que l'algorithme permet de réduire la valeur des critères γ et μ_{Δ_p} jusqu'à la 2ème itération puis diverge avec une augmentation de ces deux critères. Cela s'explique par la difficulté de l'algorithme à converger en présence de nombreuses incertitudes et du pôle sur l'axe imaginaire de $G_z(s)$.

Iteration #	1	2	3	4	5
Controller Order	6	12	20	22	20
Total D-Scale Order	0	6	14	16	14
Gamma Acheived	2.547	1.044	1.071	1.774	2.198
Peak mu-Value	2.356	1.037	1.070	1.773	2.198

Figure 5.25 Sommaire d'itération pour un algorithme convergeant puis divergeant

Trois autres métriques peuvent être calculées à partir des résultats donnés par Matlab pour évaluer les performances du compensateur obtenu, soit :

3. La **stabilité robuste (SR)** permet d'évaluer la robustesse du système vis-à-vis de la valeur singulière des perturbations structurées Δ_s en cherchant la plus petite valeur de $M_{w_1\to z_1}(j\omega)$ rendant $det((I - M_{w_1\to z_1}\Delta_s)) = 0$:

$$\sup_{\omega\in\mathcal{R}} \mu_{\Delta_s}\left\{\mathcal{F}_{L_{w_1\to z_1}}\left(P(j\omega),K(j\omega)\right)\right\} = \sup_{\omega\in\mathcal{R}} \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta_s(j\omega)): \det(I - M(j\omega)\Delta_s) = 0\}} \leq \beta(j\omega) \qquad (5.69)$$

Le maximum de $\beta(j\omega)$ noté β_{max} permet de définir la norme maximum des incertitudes $\|\Delta_s\|_\infty$ admissible dans le système avant de causer l'instabilité, tel que :

$$\|\Delta_s\|_\infty < \frac{1}{\beta_{max}} \qquad (5.70)$$

Si β_{max} est inférieure à 1 alors la stabilité robuste est atteinte.

4. Les **performances nominales (NP),** représentant le transfert entre la perturbation $\tilde{d}$ et la commande $\tilde{u}$, noté également $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|$ sont atteintes si l'inégalité suivante est inférieure à 1, soit :

$$\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\| = \|W_u K(1 + G_\Delta K)^{-1}\|_\infty < 1 \qquad (5.71)$$

5. Une dernière métrique peut être prise en compte dans l'évaluation des performances des compensateurs. Soit la norme infinie du produit $\mathcal{F}_L\left(P(j\omega)K(j\omega)\right)$:

$$\left\|\mathcal{F}_L\left(P(j\omega)K(j\omega)\right)\right\|_\infty \qquad (5.72)$$

L'équation (5.72) revient à considérer un type d'incertitude Δ_F non structurée. Notons que ce résultat est généralement conservateur, car il ne prend pas en compte la structure réelle des incertitudes.

Les amplitudes des incertitudes pour les compensateurs $K_{\mu p_{\Delta_j}}$ sont reportées au Tableau 5.8.

Tableau 5.8 Pourcentage d'incertitudes maximum sur les paramètres nominaux *m, k, A_{ii}* et *b* pour les axes *z, x-y* et autour de l'angle ψ

Axes	*z*	*x-y*	ψ
m [%]	10	10	×
k [%]	10	5	×
A_{ii} [%]	10	10	×
b [%]	×	×	50

Les résultats obtenus concernant $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$, $\mu_{\tilde{\Delta}_p}(M(j\omega))$, $\mu_{\Delta s}$ et $\left\|\mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega))\right\|_\infty$ pour chacun des axes *z, x/y* et autour de l'angle ψ sont représentés de la Figure 5.26 à la Figure 5.35, dans les cas sans et avec incertitudes. Le Tableau 5.9 résume l'ensemble des résultats obtenus. Nous remarquons que quasiment l'ensemble des critères sont rencontrés pour $\mu_{\Delta s}$ et $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|$. En effet, certaines valeurs sont légèrement supérieures à 1 pour γ et μ_{Δ_p}. Nous remarquons que $\mu_{\Delta s}$ atteint parfois 0 dans le cas sans incertitudes, ce qui correspondrait à une quantité infinie d'incertitudes admissible par la boucle fermée. Ce cas particulier n'est donc par nécessairement représentatif de la réalité. De même, l'expression de $\left\|\mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega))\right\|_\infty$ donne parfois des valeurs supérieures à 10^4, ce qui peut conduire à des conclusions restrictives par rapport au compensateur obtenu.

- **Axe *z***

Sans incertitudes

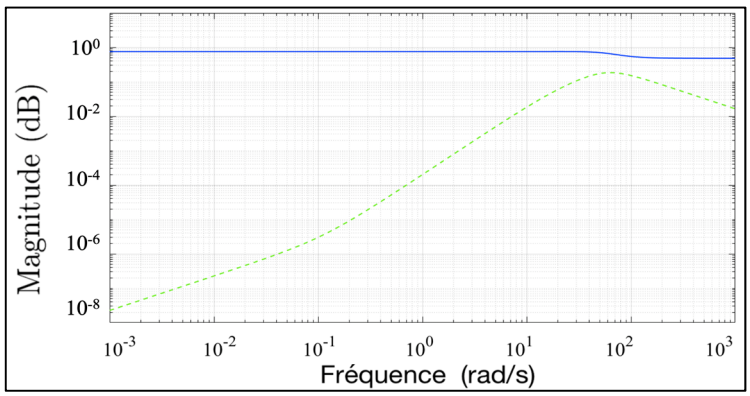


Figure 5.26 Stabilité robuste $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$ en pointillé vert et robuste performance $\mu_{\tilde{\Delta}_p}(M(j\omega))$ courbes rouge et bleue (superposées) pour l'axe *z*, sans incertitudes

Avec incertitudes

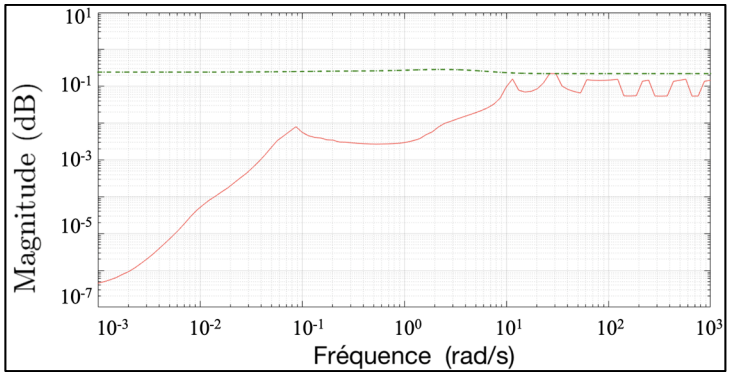


Figure 5.27 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe z avec incertitude

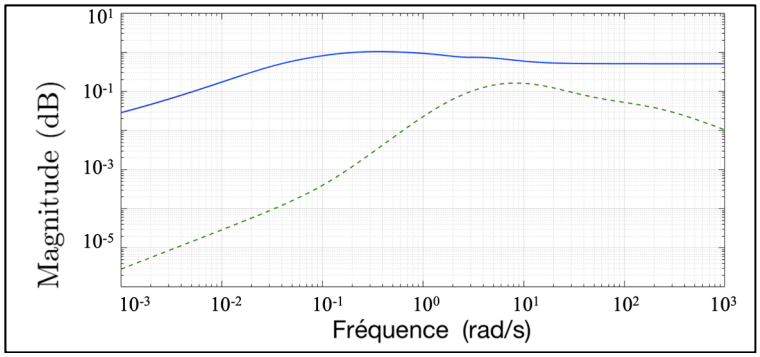


Figure 5.28 Stabilité robuste $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$ en pointillé vert et robuste performance $\mu_{\tilde{\Delta}_p}\left(M(j\omega)\right)$ courbes rouge et bleue (superposées) pour l'axe z, avec incertitudes

- **Axe *x-y***

Sans incertitudes

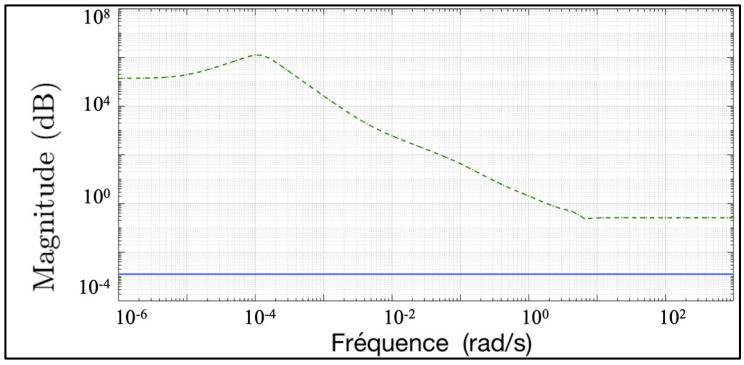


Figure 5.29 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe x-y sans incertitude

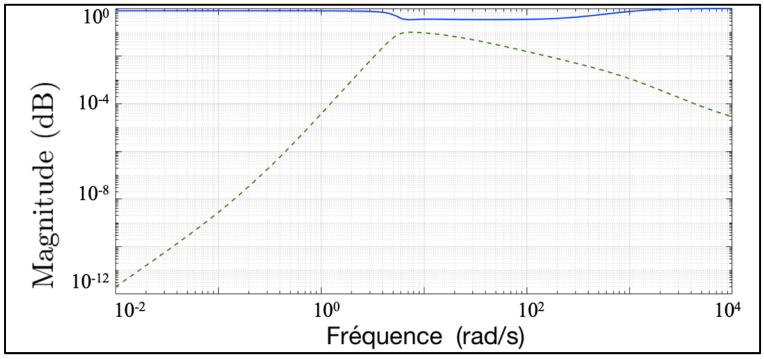


Figure 5.30 Stabilité robuste $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$ en pointillé vert et robuste performance $\mu_{\tilde{\Delta}_p}\left(M(j\omega)\right)$ courbes rouge et bleue (superposées) pour les axes *x*-*y*, sans incertitudes

Avec incertitudes

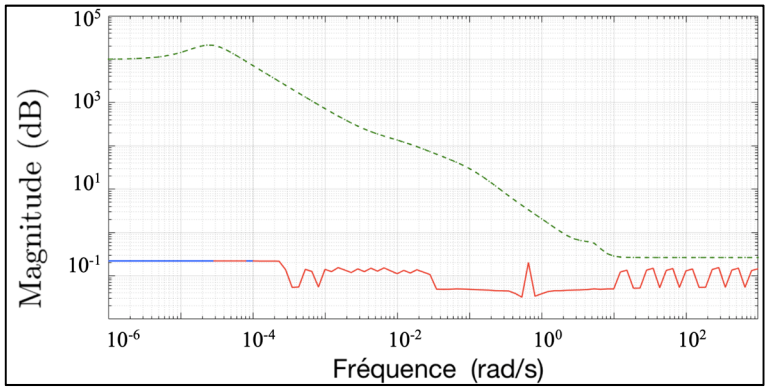


Figure 5.31 $\mu_{\Delta s}$ et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe *x*-*y* avec incertitude

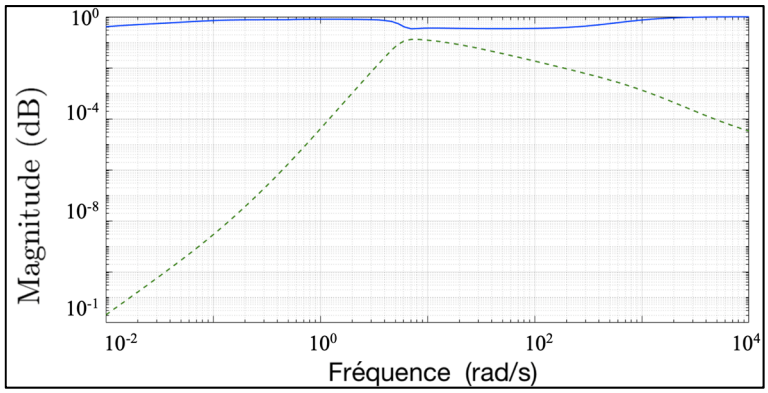


Figure 5.32 Stabilité robuste $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$ en pointillé vert et robuste performance $\mu_{\tilde{\Delta}_p}\left(M(j\omega)\right)$ courbes rouge et bleue (superposées) pour les axes *x*-*y*, avec incertitudes

- **Autour de l'angle ψ**

Sans incertitudes

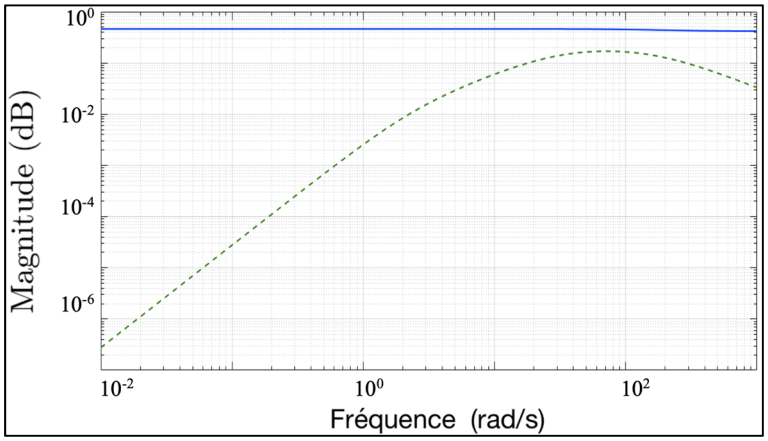


Figure 5.33 Stabilité robuste $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$ en pointillé vert et robuste performance $\mu_{\tilde{\Delta}_p}\left(M(j\omega)\right)$ courbes rouge et bleue (superposées) autour de l'angle ψ, sans incertitudes

Avec incertitudes

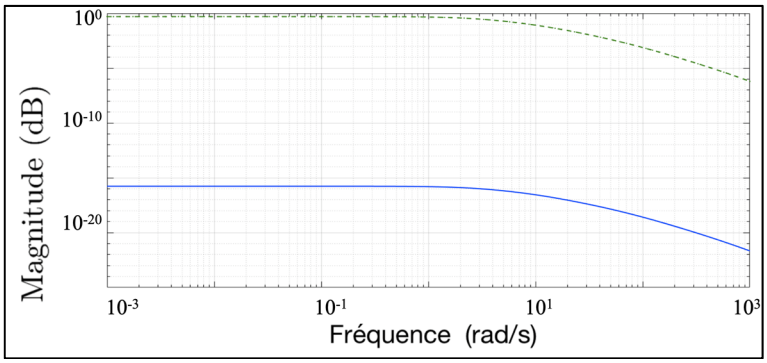


Figure 5.34 μ_{Δ_S} et $\left\| \mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega)) \right\|_\infty$ pour l'axe ψ avec incertitude

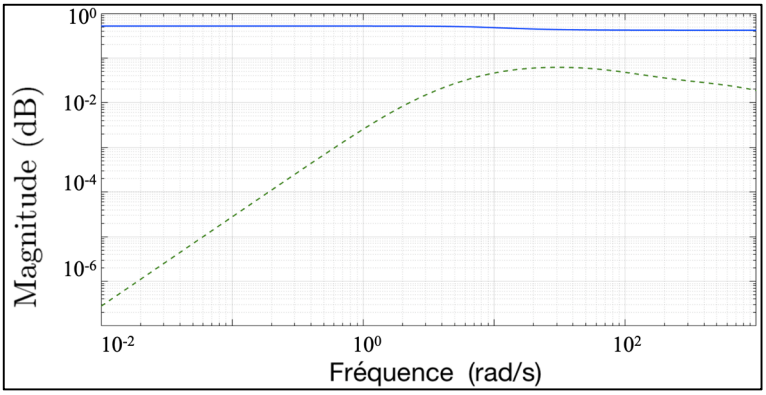


Figure 5.35 Stabilité robuste $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|_\infty$ en pointillé vert et robuste performance $\mu_{\tilde{\Delta}_p}\left(M(j\omega)\right)$ courbes rouge et bleue (superposées) autour de l'angle ψ, avec incertitude

Tableau 5.9 Résumé des métriques obtenues lors de la conception des compensateurs

Axe / angle	$K_{\mu p_z}$	$K_{\mu p_{\Delta z}}$	$K_{\mu p_{xy}}$	$K_{\mu p_{\Delta xy}}$	$K_{\mu p_\psi}$	$K_{\mu p_{\Delta\psi}}$
Itération	3	2	3	3	3	4
Ordre compensateur	6	12	12	30	4	8
Ordre total max D	0	6	4	22	0	4
γ	1.010	1.044	1.010	1.010	0.4609	0.521
$\left\|\mathcal{F}_l\left(P_{w_1\to z_1}(j\omega), K(j\omega)\right)\right\|_\infty$	0	0.2859	1.23e6	2.12e4	0	0.5
μ_{Δ_s}	0	0.2205	0.001283	0.22	0	1.69e-16
max($\|\Delta_s\|_\infty$)=1/ γ	0.99	0.96	0.99	0.99	2.17	1.92
$\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|$	0.1836	0.1627	0.1	0.1291	0.1695	0.0619
μ_{Δ_p}	0.7693	1.03	0.996	0.996	0.4609	0.520

On a constaté une variance importante dans les résultats concernant la robustesse du système via les indicateurs μ_{Δ_s} et $\left\|\mathcal{F}_l\left(P_{w_1\to z_1}(j\omega), K(j\omega)\right)\right\|_\infty$ donnés au Tableau 5.9. La présence des pôles sur l'axe imaginaire des $G_{i\Delta}$ explique certainement ces écarts importants. Néanmoins, les critères de performances $\|M_{\tilde{d}\to\tilde{u}}\|$ et μ_{Δ_p}, ainsi que γ présentent des résultats fiables et convaincants, quelque soit la condition sur les incertitudes et l'axe/angle considéré.

Pour finir, nous remarquons que certains compensateurs obtenus présentent un ordre important (12 à 30). Tant que nous travaillons en simulation, ce n'est pas un problème critique, mais cela posera des difficultés lors de l'utilisation en pratique d'un contrôleur par μ-synthèse à cause de l'augmentation du temps de calcul et de la complexité engendrée pour l'implémenter dans un microcontrôleur. Notons qu'il est possible de réduire l'ordre des compensateurs par μ-synthèse par des approximations d'ordre inférieur, mais la précision risque d'être détériorée.

5.3.4 Expression des compensateurs

Pour concevoir les compensateurs par μ-synthèse nous allons viser les mêmes objectifs que pour les commandes H_2 et H_∞ décrit en 4.3.5, à savoir que les valeurs de ε et M_s pour la sensibilité sont identiques à celles que nous obtiendrons avec la commande B en 4.4. Dans un premier temps les incertitudes seront fixées à 0 de manière à produire des courbes de sensibilité via l'utilisation des fonctions de pondération ayant la même allure que celle de la commande B, permettant alors une base de comparaison commune entre les deux commandes, nous parlerons alors de compensateur μ (sous-entendu sans incertitude). Puis, pour ces mêmes fonctions de pondération, nous augmenterons les incertitudes jusqu'à une valeur réaliste. Dans ce second cas, comme nous le verrons au CHAPITRE 7 concernant les résultats de simulation, l'allure de la sensibilité est déformée par rapport à sa courbe originelle. Dans ce cas, nous parlerons de compensateur μ_Δ (sous-entendu avec incertitude).

Dans le cas du processus linéaire approximé (3.38) nous utiliserons l'architecture de commande en translation et rotation séparée (3.5.4) et les valeurs de comparaisons pour M_s et ε de la commande B seront celles du Tableau 4.9. Les valeurs des fonctions de pondération et les résultats concernant M_s et ε obtenus avec l'application de la μ-synthèse via Matlab sont reportés au Tableau 5.10.

Tableau 5.10 Valeurs des paramètres des fonctions de pondérations, de M_s et ε

dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéaire approximé

	z	x/y	θ/ϕ	ψ
M_e	2.08	2.86	3.39	2.59
ω_b	10.98	0.5282	3.98	9.425
ε_e	0.0052	0.0068	0.006	0.001431
M_u	10939	0.539	10351	103510
ω_{bc}	64.65e5	1.65	8e2	8.95e2
ε_u	0.3162	0.0016162	0.257	2.570
M_s	2.35	2.42	2.16	2.87
ε	-48.1	-46.5	-52	-60.6

Les pourcentages d'incertitudes pour l'obtention du second compensateur étant reportés au Tableau 5.11. Nous remarquons que pour ces pourcentages relativement faibles, mais réalistes les valeurs de μ_P au Tableau 5.12 sont sensiblement élevées.

Tableau 5.11 Pourcentage d'incertitude dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéaire approximé

	z	x/y	θ/ϕ	ψ
A_{ii}	10	10	10	
I_{ii}				10
T_z		10		
m	10	10		

Tableau 5.12 Valeur de μ_p pour le processus linéaire approximé

	z	z_Δ	x/y	x_Δ/y_Δ	ϕ/θ	$\theta_\Delta/\phi_\Delta$	ψ	ψ_Δ
μ_P	0.76	3.28	0.7	3.16	0.417	1.634	0.65	2.94

Dans le Tableau 5.13 nous retrouvons l'ordre et les pôles des compensateurs μ et μ_Δ le long des axes x/y, z et autour des angles ϕ/θ, ψ dans le cas du processus linéaire approximé.

Tableau 5.13 Ordre et pôles des compensateurs μ et μ_Δ dans le cas du processus linéaire approximé

Compensateur		Ordre	Pôles
μ	$C_x = C_y$	6	$(s + 1e06)(s + 9369)(s+631.3)(s+0.0571)$ $(s^2 + 102s + 5273)$
	C_z	6	$(s + 1e06)(s + 9369)(s + 631)(s + 0.1)(s^2 + 102s + 5273)$
	$C_\theta = C_\phi$	5	$(s + 1e05)(s + 101.3)(s + 0.02388)(s^2 + 73.9s + 4335)$
	C_ψ	4	$(s + 90.23)(s + 0.01349)(s^2 + 77.27s + 5253)$
μ_Δ	$C_x = C_y$	28	$(s + 23.67)(s + 4.455)(s + 2.275)(s + 2.243)(s + 1.952)$ $(s + 1.229)(s + 0.373)(s + 0.1436)(s+0.1209)$ $(s + 0.05213)(s + 0.01039)(s + 0.007905)(s + 0.003592)$ $(s + 0.002648)(s^2 + 0.00908s + 4.434e-05)$ $(s^2 + 0.0016s + 8.876e-05)(s^2 + 0.00186s + 9.46e-05)$ $(s^2 + 0.00093s + 0.00011)(s^2 + 0.00112s + 0.00011)$ $(s^2 + 0.009274s + 0.0001407)(s^2 + 7.41s + 21.57)$
	C_z	12	$(s + 1e06)(s + 1081)(s + 25.79)(s + 16.45)(s + 7.825)$ $(s +7.32)(s + 1.452)(s + 0.06302)(s + 0.0571)$ $(s + 0.00703)(s^2 + 4.655e04s + 1.057e09)$
	$C_\theta = C_\phi$	28	$(s + 23.67)(s + 4.455)(s + 2.275)(s + 2.243)(s + 1.952)$ $(s + 1.229)(s + 0.373)(s + 0.1436)$ $(s + 0.1209)(s + 0.05213)(s + 0.01039)(s + 0.007905)$ $(s + 0.003592)(s + 0.002648)(s^2 + 0.009s + 4.434e-05)$ $(s^2 + 0.00158s + 8.876e-05)(s^2 + 0.00186s + 9.461e-05)$ $(s^2 + 0.0009278s + 0.000108)(s^2 + 0.00112s + 0.00011)$ $(s^2 + 0.009274s + 0.0001407)(s^2 + 7.41s + 21.57)$
	C_ψ	28	$(s + 23.67)(s + 4.46)(s + 2.28)(s + 2.24)(s + 1.95)$ $(s + 1.23)(s + 0.373)(s + 0.1436)(s + 0.1209)$ $(s + 0.052)$ $(s + 0.01039)(s + 0.007905)$ $(s + 0.003592)$ $(s + 0.002648)(s^2 + 0.00908s + 4.434e-05)$ $(s^2 + 0.00158s + 8.876e-05)(s^2 + 0.00186s + 9.461e-05)$ $(s^2 + 0.00093s + 0.000108)(s^2 + 0.00112s + 0.0001101)$ $(s^2 + 0.009274s + 0.0001407)$ $(s^2 + 7.41s + 21.57)$

Dans le second cas, nous considérons le processus linéarisé (3.59) et l'architecture de commande en translation et rotation séparée (3.5.2). Les valeurs des fonctions de pondération et les résultats concernant M_s et ε obtenus avec l'application de la μ-synthèse via Matlab sont visibles au Tableau 5.14.

Tableau 5.14 Valeurs des paramètres des fonctions de pondérations, de M_s et ε dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéarisé par approximation de Taylor

	z	*x/y*	θ/ϕ	Ψ
M_e	2.08	1.86	2.39	2.59
ω_b	0.98	0.68	1.98	3.98
ε_e	0.0052	0.0068	0.003	0.001431
M_u	10939	539	10351	30351
ω_{bc}	5.65e5	16.5	0.8e3	1.95e5
ε_u	0.3162	0.0016162	0.000257	0.0570
M_s	2.35	1.47	2.81	2.43
ε	-48.1	-46.7	-52.6	-61

Comme nous pouvons l'apercevoir dans le Tableau 5.15 les pourcentages d'incertitude pour obtenir les seconds compensateurs sont plus élevés, voire même irréalistes. Mais tel que le montre le Tableau 5.12 les valeurs du critère de performance μ_{p_z} dépassent à peine l'unité et valident donc sa réalisabilité.

Tableau 5.15 Pourcentage d'incertitude dans le cas de la μ-synthèse pour le processus linéarisé par approximation de Taylor

	z	*x/y*	θ/ϕ	Ψ
A_{ii}	50	5		
g		5		
I_{ii}			20	4
lk			30	
k	50			
m	10			
b				10

Tableau 5.16 Valeur de μ_p pour le processus linéaire approximé

	z	z_Δ	x/y	x_Δ/y_Δ	ϕ/θ	$\theta_\Delta/\phi_\Delta$	ψ	ψ_Δ
μ_P	0.755	1.036	0.686	1.012	0.785	0.974	0.616	0.985

L'ordre et les pôles des compensateurs μ et μ_Δ le long des axes x/y, z et autour des angles ϕ/θ, ψ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor sont reportés dans le Tableau 5.17.

Tableau 5.17 Ordre et pôles des compensateurs μ et μ_Δ dans le cas du processus linéarisé par approximation de Taylor

Compensateur		Ordre	Pôles
μ	$C_x = C_y$	4	$(s + 50.39)(s + 0.003592)(s^2 + 5.969s + 13.02)$
	C_z	6	$(s + 1e06)(s + 9369)(s + 631)(s + 0.057)(s^2 + 102s + 5273)$
	$C_\theta = C_\phi$	5	$(s + 1e05)(s + 101.3)(s + 0.02388)(s^2 + 73.9s + 4335)$
	C_ψ	4	$(s + 90.23)(s + 0.01349)(s^2 + 77.27s + 5253)$
μ_Δ	$C_x = C_y$	28	$(s + 23.67)(s + 4.455)(s + 2.275)(s + 2.243)(s + 1.952)$ $(s + 1.229)(s + 0.373)(s + 0.1436)(s + 0.1209)(s + 0.05213)$ $(s + 0.01039)(s + 0.007905)(s + 0.003592)(s + 0.002648)$ $(s^2 + 0.00908s + 4.434e\text{-}05)(s^2 + 0.00158s + 8.876e\text{-}05)$ $(s^2 + 0.001861s + 9.461e\text{-}05)(s^2 + 0.000928s + 0.0001084)$ $(s^2 + 0.001117s + 0.0001101)(s^2 + 0.009274s + 0.0001407)$ $(s^2 + 7.41s + 21.57)$
	C_z	12	$(s + 1e06)(s + 1081)(s + 25.79)(s + 16.45)(s + 7.825)$ $(s + 7.32)(s + 1.452)(s + 0.06302)(s + 0.0571)$ $(s + 0.00703)(s^2 + 4.655e04s + 1.057e09)$
	$C_\theta = C_\phi$	13	$(s + 1e05)(s + 3056)(s + 39.84)(s + 6.939)(s + 0.97)$ $(s + 0.451)(s + 0.02388)(s^2 + 0.0229s + 0.000217)$ $(s^2 + 0.002414s + 0.0002064)(s^2 + 0.002652s + 0.0002105)$
	C_ψ	12	$(s + 348.2)(s + 204.2)(s + 8.219)(s + 1.103)(s + 0.4348)$ $(s + 0.01349)(s^2 + 0.02195s + 0.0002094)$ $(s^2 + 0.00242s + 0.0002064)(s^2 + 0.002655s + 0.00021)$

CHAPITRE 6

COMMANDE NON LINÉAIRE

6.1 Introduction

Nous étudierons ici deux types de commandes non linéaires amplement utilisées dans le domaine des drones. Tout d'abord la commande dite backstepping puis la commande hiérarchique. Les principaux documents de référence utilisés dans cette partie sont les suivants : (A.Drouot, E.Richard, & M.Boutayeb; Drouot, 2013; Miroslav Krstić, Loannis Kanellakopoulos, & Kokotović, 1995)

6.2 Commande backstepping et commande hiérarchique

Comme de nombreuses commandes non linéaires, les commandes par backstepping et hiérarchique sont fondées sur la théorie de la stabilité de Lyapunov. Cette théorie requiert le choix d'une fonction de Lyapunov définie positive dont la dérivée est rendue négative par la définition de la loi de commande. Le choix de cette fonction de Lyapunov est une difficulté majeure dans la conception de ce type de commande. Les commandes par backstepping et hiérarchique surmontent cette difficulté en produisant de manière itérative une fonction de Lyapunov adaptée au processus considéré.

Les approches par backstepping et hiérarchique sont similaires dans leur utilisation de la fonction de Lyapunov, mais une différence majeure permet les distinguer. En effet, la commande par backstepping construit sa loi de commande en utilisant des fonctions de Lyapunov en cascade sur les erreurs des positions linéaires, des vitesses linéaires, d'accélérations linéaires, la dérivée de l'accélération (jerk), des positions angulaires et des vitesses angulaires, permettant ainsi d'obtenir directement les commandes L, M, N, T_z définies par les équations (3.23) et (3.19). La commande hiérarchique utilise des fonctions de Lyapunov sur les erreurs linéaires en positions, vitesses et en accélérations pour obtenir la commande en poussée T_z ; une seconde série de fonctions de Lyapunov est définie sur les erreurs de position

et vitesses angulaires permettant d'obtenir les commandes *L, M, N.* Dit autrement, la commande hiérarchique découple la commande des axes de rotation de celle des axes linéaires, alors que la commande par backstepping considère d'un seul tenant les axes de rotation et de translation lors de la conception de la commande.

La commande hiérarchique possède deux avantages sur la commande par backstepping : l'aspect découplé de sa commande permet de régler indépendamment les gains des lois de commande en rotation et en translation, permettant ainsi de mieux profiter de la réaction plus rapide du système de rotation pour apporter des corrections en cas de perturbation extérieure. Par exemple, le découplage ajouté au fait de ne pas considérer l'erreur en jerk rend plus simple son implantation dans un système réel. Cependant, ce dernier avantage pourrait également être un inconvénient, car aucun système de compensation des vibrations n'est considéré dans cette loi de commande. À contrario, la commande par backstepping prend en considération cette erreur en jerk et pourrait donc être moins sensible aux vibrations.

6.3 Préliminaires théoriques

Nous commencerons cette section en décrivant les principaux théorèmes de stabilité de Lyapunov nécessaires à la construction d'une loi de commande par backstepping ou hiérarchique. Puis, nous énoncerons une méthode de stabilisation de commande par fonction de Lyapunov pour un système d'ordre n, ce qui servira d'introduction au système nous concernant : le drone. Cette section repose essentiellement sur l'ouvrage suivant : (M.Krstić, L.Kanellakopoulos & Kokotović, 1995).

6.3.1 Commande par fonctions de Lyapunov

Notre objectif ici est d'utiliser la fonction de Lyapunov pour concevoir un système en boucle fermée avec les propriétés de stabilité désirées. Soit un système invariant dans le temps :

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}, \quad f(0,0) = 0 \tag{6.1}$$

Il s'agit de concevoir une loi de commande $u = \alpha(x)$ associée à une variable de commande u telle que le point d'équilibre $x = 0$ de la boucle fermée du système suivant est asymptotiquement stable :

$$\dot{x} = f\big(x, \alpha(x)\big) \tag{6.2}$$

Pour ce faire une fonction de Lyapunov est une bonne candidate et requiert que sa dérivée, solution de (6.2) satisfasse $\dot{V}(x) \leq -W(x)$, où *W(x)* est une fonction définie positive. Pour cela nous devons trouver une commande $\alpha(x)$ garantissant pour tout $x \in \Re^n$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f\big(x, \alpha(x)\big) \leq -W(x) \tag{6.3}$$

La difficulté réside dans le fait qu'une loi de commande satisfaisant (6.1) peut exister, mais échouer à satisfaire (6.3) à cause d'un mauvais choix des fonctions $V(x)$ et $W(x)$. La définition suivante va nous permettre de clarifier la façon de mieux choisir ces fonctions $V(x)$ et $W(x)$:

Définition 6.1 :

Une fonction définie positive lisse et radialement non bornée $V : \Re^n \rightarrow \Re_+$ est appelée fonction de commande de Lyapunov pour (6.1) si :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \right\} < 0, \quad \forall\, x \neq 0 \tag{6.4}$$

Arstein (Artstein, 1983) a démontré que la condition (6.4) est nécessaire et suffisante pour assurer une loi de commande assurant (6.3), son existence est équivalente à une stabilisation asymptotique globale. Pour le système affin suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0 \tag{6.5}$$

L'inégalité (6.3) doit être vérifiée et est liée à la loi de commande de Lyapunov qui devient :

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)\alpha(x) \leq -W(x) \tag{6.6}$$

6.3.2 Systèmes en cascade

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3, \\ \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n\,, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u, \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.7}$$

Avec le vecteur d'état $x \in \Re^n$, la sortie $y \in \Re^n$, la commande $u \in \Re$ ainsi que $f : \Re^n \to \Re^n$ et $g : \Re^n \to \Re^n$ des champs de vecteurs. L'approche par backstepping consiste à concevoir un contrôleur pour le système d'ordre n (6.7) de manière récursive en considérant certaines variables d'états comme des "commandes virtuelles" dont la loi de contrôle est définie de façon intermédiaire. Dans la première équation de (6.7) la "commande virtuelle" réalisée par l'état x_2 a pour rôle de stabiliser le sous-système décrit par $\dot{x}_1$. Puis la seconde "commande virtuelle" x_3 sert à stabiliser l'équation de $\dot{x}_2$ et ainsi de suite jusqu'à remonter à la commande recherchée u stabilisant $\dot{x}_n$.

Soit la sortie désirée $y_d = x_{1_d} \in \Re$ que doit suivre la sortie mesurée $y = x_1$. Nous pouvons alors définir un premier changement de coordonnée en définissant l'erreur $e_y = e_{x_1}$ par :

$$e_y = y - y_d \quad \Leftrightarrow \quad e_{x_1} = x_1 - x_{1_d} \tag{6.8}$$

Un objectif important ici consiste à faire converger l'erreur définie en (6.8) le plus rapidement possible vers zéro. Pour cela, commençons par définir une commande par fonction de Lyapunov V_1 définie positive par e_{x_1} construite comme suit :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_{x_1}^2 > 0 \tag{6.9}$$

En insérant (6.8) dans la dérivée de (6.9) par rapport au temps nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = e_{x_1} \dot{e}_{x_1} = e_{x_1} (\dot{x}_1 - \dot{x}_{1_d}) \tag{6.10}$$

En remplaçant l'expression de $\dot{x}_1$ issue de la première ligne de (6.7) dans (6.10) cela donne :

$$\dot{V}_1 = e_{x_1} \dot{e}_{x_1} = e_{x_1} (f_1(x_1) + g_1(x_1) x_2 - \dot{x}_{1_d}) \tag{6.11}$$

La variable mesurée x_2 peut être remplacée en utilisant un second changement de coordonnées selon l'erreur $e_{x_2} = x_2 - x_{2_d}$ où x_{2_d} est la valeur désirée de x_2. L'expression (6.11) devient :

$$\dot{V}_1 = e_{x_1} (f_1(x_1) + g_1(x_1)(e_{x_2} + x_{2_d}) - \dot{x}_{1_d}) \tag{6.12}$$

L'objectif est de choisir une fonction $W_{x_1}(e_{x_1})$ de sorte que la commande désirée x_{2_d} permette de respecter la négativité de $\dot{V}_1$ tel que décrit en (6.3). En supposant que l'ordre de $\dot{V}_1$ est de deux nous pouvons choisir $W_{x_1}(e_{x_1}, e_{x_2}) = -k_{e_1} e_{x_1}^2 + e_{x_1} g_1(x_1) e_{x_2}$ avec $k_{e_1} > 0$. Notons que le premier terme de $W_{x_1}(e_{x_1}, e_{x_2})$ est nécessairement négatif. Le deuxième terme $e_{x_1} g_1(x_1) e_{x_2}$apparaîtra comme étant négatif qu'après avoir développé davantage le calcul. Ce n'est que lorsque le calcul de u sera atteint que tous les termes de la dérivée de la fonction Lyapunov $\dot{V}_n$ apparaîtront comme étant négatifs de manière évidente, ce qui est une spécificité des systèmes en cascades. La négativité sur $\dot{V}_1$ s'exprime alors selon l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_1 = e_{x_1} (f_1(x_1) + g_1(x_1)(e_{x_2} + x_{2_d}) - \dot{x}_{1_d}) \leq -k_{e_1} e_{x_1}^2 + e_{x_1} g_1(x_1) e_{x_2} \tag{6.13}$$

À partir de (6.13) la variable x_{2_d} peut alors se réduire à :

$$x_{2_d} = \frac{1}{g_1(x_1)}\left(-k_{e_1}e_{x_1} - f_1 + \dot{x}_{1_d} + g_1(x_1)e_{x_2}\right) - e_{x_2} \tag{6.14}$$

En remplaçant cette valeur de x_{2_d} dans (6.13) nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = -k_{e_1}e_{x_1}^2 + e_{x_1}g_1(x_1)e_{x_2} \tag{6.15}$$

L'erreur e_{x_2} est utilisée pour définir une seconde fonction de Lyapunov définie positive, soit :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_{x_2}^2 > 0 \tag{6.16}$$

La dérivée de (6.16) dans le temps en utilisant (6.15) et la dérivée $\dot{x}_2$ en (6.7) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + e_{x_2}\dot{e}_{x_2} = \dot{V}_1 + e_{x_2}\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2_d}\right) \\ \dot{V}_2 &= -k_{x_1}e_{x_1}^2 + e_{x_1}g_1(x_1)e_{x_2} + e_{x_2}\left(f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)x_3 - \dot{x}_{2_d}\right) \end{aligned} \tag{6.17}$$

La fonction (6.17) doit également vérifier la condition de négativité $\dot{V}_2 \leq -W_{x_2}\left(e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}\right) = -W_{x_1}\left(e_{x_1}, e_{x_2}\right) - k_{e_2}e_{x_2}^2 + e_{x_2}g_2(x_1,x_2)e_{x_3}$ avec $e_{x_3} = x_3 - x_{3_d}$ et $k_{x_2} > 0$. En remplaçant les expressions de x_3, $\dot{V}_2$ et $W_{x_1}\left(e_{x_1}, e_{x_2}\right)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_{e_1}e_{x_1}^2 + e_{x_1}g_1(x_1)e_{x_2} + e_{x_2}\left(f_2(x_1,x_2) + g_2(x_1,x_2)\left(e_{x_3} + x_{3_d}\right) - \dot{x}_{2_d}\right) \\ &\leq -k_{e_1}e_{x_1}^2 + e_{x_1}g_1(x_1)e_{x_2} - k_{e_2}e_{x_2}^2 + e_{x_2}g_2(x_1,x_2)e_{x_3} \end{aligned} \tag{6.18}$$

En considérant (6.18) comme une égalité nous pouvons extraire l'expression de x_{3_d} :

$$x_{3_d} = \frac{1}{g_2(x_1,x_2)}\left(-k_{e_2}e_{x_2} + g_2(x_1,x_2)e_{x_3} - f_2(x_1,x_2) + \dot{x}_{2_d}\right) - e_{x_3} \tag{6.19}$$

En remplaçant l'expression de x_{3_d} (6.19) dans $\dot{V}_2$ en (6.18) on obtient :

$$\dot{V}_2 = -k_{x_1} e_{x_1}^2 - k_{x_2} e_{x_2}^2 + e_{x_2} g_2(x_1, x_2) e_{x_3} \tag{6.20}$$

Le processus itératif se poursuit jusqu'à l'état x_n, faisant alors apparaître la commande u. Elle sera alors choisie de sorte que :

$$\dot{V}_n = -k_{e_1} e_{x_1}^2 - k_{e_2} e_{x_2}^2 + \cdots + k_{e_{n-1}} e_{x_{n-1}}^2 - k_{x_n} e_{x_n}^2 \tag{6.21}$$

Avec les constantes $k_{x_1}, k_{x_2}, \ldots . k_{x_n} > 0$, l'expression (6.21) est donc négative et la convergence vers zéro de l'erreur est assurée selon le théorème 6.1.

La méthodologie pour construire la commande par backstepping peut se résumer comme suit :

- La commande réelle u stabilise l'état x_n ;
- La commande virtuelle x_{n_d} stabilise l'état x_{n-1} ;
- ...
- La commande virtuelle x_{3_d} stabilise l'état x_2 ;
- La commande virtuelle x_{2_d} stabilise l'état x_1 et donc la sortie y.

6.4 Application de la commande backstepping au quadricoptère

La commande par backstepping est développée ici dans l'optique d'une poursuite de trajectoire de référence définie par les entrées linéaires désirées $\xi_d = [x_d, y_d, z_d]^T$ et autour de l'angle désiré ψ_d à partir de la poussée T_z générée par les moteurs et des couples autour des axes de rotation x, y, z. Dans ce qui suit, plusieurs fonctions de Lyapunov serons définies en cascade V_1, V_2, V_3 et V_4. C'est cette dernière fonction V_4 qui servira de fonction de Lyapunov pour définir la loi de commande du drone.

1. Fonction Lyapunov V_1 sur l'erreur de position e_1

Commençons par définir l'erreur en position e_1 comme suit :

$$e_1 \triangleq \xi - \xi_d \tag{6.22}$$

La première fonction de Lyapunov peut alors être construite telle que :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 \quad , \quad V_1 > 0 \tag{6.23}$$

En rappelant que la vitesse linéaire mesurée $\dot{\xi} = v$, la dérivée de (6.23) par rapport au temps donne :

$$\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T \left(v - \dot{\xi}_d \right) \tag{6.24}$$

Une seconde variable d'erreur e_2 en vitesse peut alors être définie :

$$e_2 \triangleq v - v_d \tag{6.25}$$

Et la valeur de v peut être remplacée dans (6.24) pour donner :

$$\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T \left(e_2 + v_d - \dot{\xi}_d \right) \tag{6.26}$$

Selon (6.3) la dérivée de la fonction de Lyapunov donnée en (6.26) doit être négative pour assurer la convergence de l'erreur e_1. La commande virtuelle recherchée v_d doit permettre de vérifier $\dot{V}_1 \leq -k_{e_1} \|e_1\|^2 + e_1^T e_2$ avec $k_{e_1} > 0$. De là, nous pouvons déduire l'expression de v_d assurant $\dot{V}_1$ négatif :

$$e_1^T \left(e_2 + v_d - \dot{\xi}_d \right) = -k_{e_1} \|e_1\|^2 + e_1^T e_2$$

d'où

$$v_d = -k_{e_1} e_1 + \dot{\xi}_d \tag{6.27}$$

En remplaçant l'expression (6.27) de v_d dans (6.26) nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 + e_1^T e_2 \tag{6.28}$$

La loi de commande pour la vitesse désirée (6.27) qui sera implémentée dans le contrôleur peut être représentée sous forme de schéma bloc (Figure 6.1).

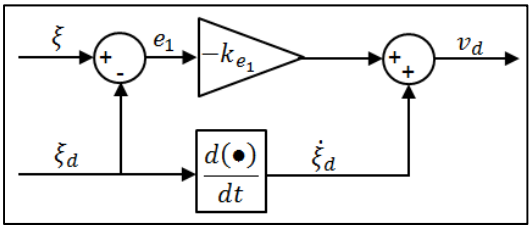


Figure 6.1 Schéma bloc de la commande virtuelle en vitesse v_d

2. Fonction Lyapunov V_2 sur l'erreur de vitesse e_2

Définissons désormais la seconde fonction de Lyapunov V_2 reliée à l'erreur de vitesse e_2 :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_2^T e_2 \quad , \quad V_2 \text{ est} > 0 \text{ si } V_1 \text{ est} > 0 \tag{6.29}$$

La dérivée de (6.29) par rapport au temps donne :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_2^T(\dot{v} - \dot{v}_d) \tag{6.30}$$

En remplaçant l'expression de $\dot{V}_1$ en (6.28) dans (6.30) nous obtenons :

$$\dot{V}_2 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 + e_1^T e_2 + e_2^T(\dot{v} - \dot{v}_d) \tag{6.31}$$

Nous pouvons faire apparaître l'erreur en accélération $e_3 = a - a_d$. Remarquons que $a = \dot{v}$ et en imposant la condition sur la négativité de $\dot{V}_2$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -k_{e_1}\|e_1\|^2 + e_1^T e_2 + e_2^T(e_3 + a_d - \dot{v}_d) \\ &= -k_{e_1}\|e_1\|^2 - k_{e_2}\|e_2\|^2 + e_2^T e_3\end{aligned} \tag{6.32}$$

L'expression désirée de l'accélération, a_d est obtenue en égalant l'inégalité (6.32) :

$$a_d = -e_1^T - k_{e_2}e_2 + \dot{v}_d \tag{6.33}$$

Par ailleurs, selon le CHAPITRE 3 l'accélération linéaire notée $\dot{v} = a$ s'exprime par :

$$a = \dot{v} = \frac{1}{m}T_z R_\eta l_3 + g l_3 \tag{6.34}$$

L'expression (6.34) fait apparaître les nouvelles entrées virtuelles T_z et η. On peut fixer ces deux entrées virtuelles T_z et η comme des valeurs désirées T_{z_d} et η_d pour obtenir une seconde expression de l'accélération désirée a_d :

$$a_d = \dot{v}_d = \frac{1}{m}T_{z_d} R_{\eta_d} l_3 + g l_3 \tag{6.35}$$

En remplaçant l'expression de a_d en (6.33) dans (6.32) on obtient :

$$\dot{V}_2 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 - k_{e_2}\|e_2\|^2 + e_2^T e_3 \tag{6.36}$$

La commande en accélération a_d définie en (6.33) peut être représentée sous forme de schéma bloc tel qu'à la Figure 6.2 à l'aide de la dérivée de $\dot{v}_d$ issu de (6.52) :

$$\dot{v}_d = -k_{e_1}\dot{e}_1 + \ddot{\xi}_d = -k_{e_1}(v - \dot{\xi}_d) + \ddot{\xi}_d \tag{6.37}$$

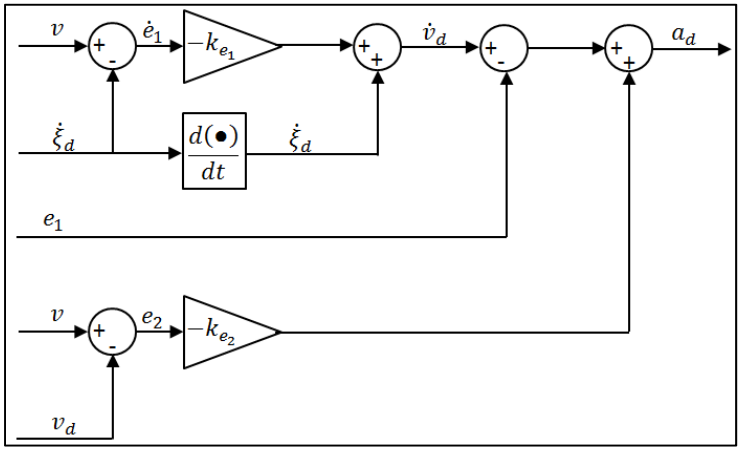


Figure 6.2 Schéma bloc de la commande virtuelle en accélération a_d

3. Fonction Lyapunov V_3 sur l'erreur d'accélération e_3

La suite de la procédure qui concerne l'erreur en accélération e_3 est définie par :

$$e_3 \triangleq a - a_d \tag{6.38}$$

Une troisième fonction de Lyapunov est choisie comme suit :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} e_3^T e_3 + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \quad , \quad V_3 \text{ est} > 0 \text{ si } V_2 \text{ est} > 0 \tag{6.39}$$

Où la variable ε_1 permet de définir l'erreur en angle de lacet comme suit :

$$\varepsilon_1 \triangleq l_3^T (\eta - \eta_d) \tag{6.40}$$

Remarquons qu'une notation plus intuitive pour exprimer l'erreur de lacet est $\varepsilon_1 = \psi - \psi_d$. La forme (6.40) sera néanmoins conservée pour des raisons de notation. La dérivée de (6.39) par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + e_3^T \dot{e}_3 + \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 \\ &= -k_{e_1} \|e_1\|^2 - k_{e_2} \|e_2\|^2 + e_2^T e_3 + e_3^T (\dot{a} - \dot{a}_d) + \varepsilon_1^T \left(l_3 (\dot{\eta} - \dot{\eta}_d) \right) \end{aligned} \tag{6.41}$$

Il s'agit désormais de mettre l'équation (6.41) sous une forme convenable pour exprimer la condition sur la négativité de $\dot{V}_3$. Tout d'abord notons que la dérivée de l'accélération *a* en (6.34), communément appelée "jerk" et notée *j* peut s'exprimer en dérivant (6.34) par :

$$j = \dot{a} = \frac{1}{m}\dot{T}_z R_\eta l_3 - \frac{1}{m} T_z \dot{R}_\eta l_3 \tag{6.42}$$

L'erreur e_4 entre *j* et sa commande j_d donne :

$$e_4 \triangleq j - j_d \tag{6.43}$$

D'autre part, en remarquant que $\dot{\eta} = Q_\eta \Omega$, nous pouvons exprimer l'erreur ε_2 entre les vitesses de rotation angulaires Ω et désirées Ω_d comme suit:

$$\varepsilon_2 \triangleq l_3^T Q_\eta (\Omega - \Omega_d) \tag{6.44}$$

À partir de (6.43) et (6.44) nous pouvons extraire les expressions de $j = \dot{a}$ et $\Omega = \dot{\eta}/Q_\eta$ pour les remplacer dans (6.41), nous obtenons :

$$\dot{V}_3 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 - k_{e_2}\|e_2\|^2 + e_2^T e_3 + e_3^T(e_4 + j_d - \dot{a}_d) + \varepsilon_1^T\left(\varepsilon_2 + l_3^T Q_\eta \Omega_d - l_3^T \dot{\eta}_d\right) \tag{6.45}$$

La négativité de $\dot{V}_3$ peut être assurée en choisissant les lois de commandes j_d et Ω_d liées à e_3 et ε_1 présentes dans (6.45) vérifiant :

$$e_2^T e_3 + e_3^T(e_4 + j_d - \dot{a}_d) \leq -k_{e_3}\|e_3\|^2 + e_3^T e_4 \tag{6.46a}$$

$$\varepsilon_1^T\left(\varepsilon_2 + l_3^T Q_\eta \Omega_d - l_3^T \dot{\eta}_d\right) \leq -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 + \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \tag{6.46b}$$

Les inégalités (6.46) permettent d'extraire les expressions des commandes virtuelles j_d et Ω_d garantissant $\dot{V}_3 \leq 0$:

$$j_d = -k_{e_3} e_3 - e_2 + \dot{a}_d \quad ; \quad \Omega_d = \frac{-k_{\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \dot{\eta}_d}{l_3^T Q_\eta} \tag{6.47}$$

En remplaçant les expressions (6.47) dans $\dot{V}_3$ en (6.45) :

$$\dot{V}_3 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 - k_{e_2}\|e_2\|^2 - k_{e_3}\|e_3\|^2 + e_3^T e_4 - k_{\varepsilon_1}\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \qquad (6.48)$$

La représentation des commandes virtuelles j_d et Ω_d issues de (6.47) nécessaire pour implémenter le contrôleur sous forme de schéma bloc est illustrée à la Figure 6.3.

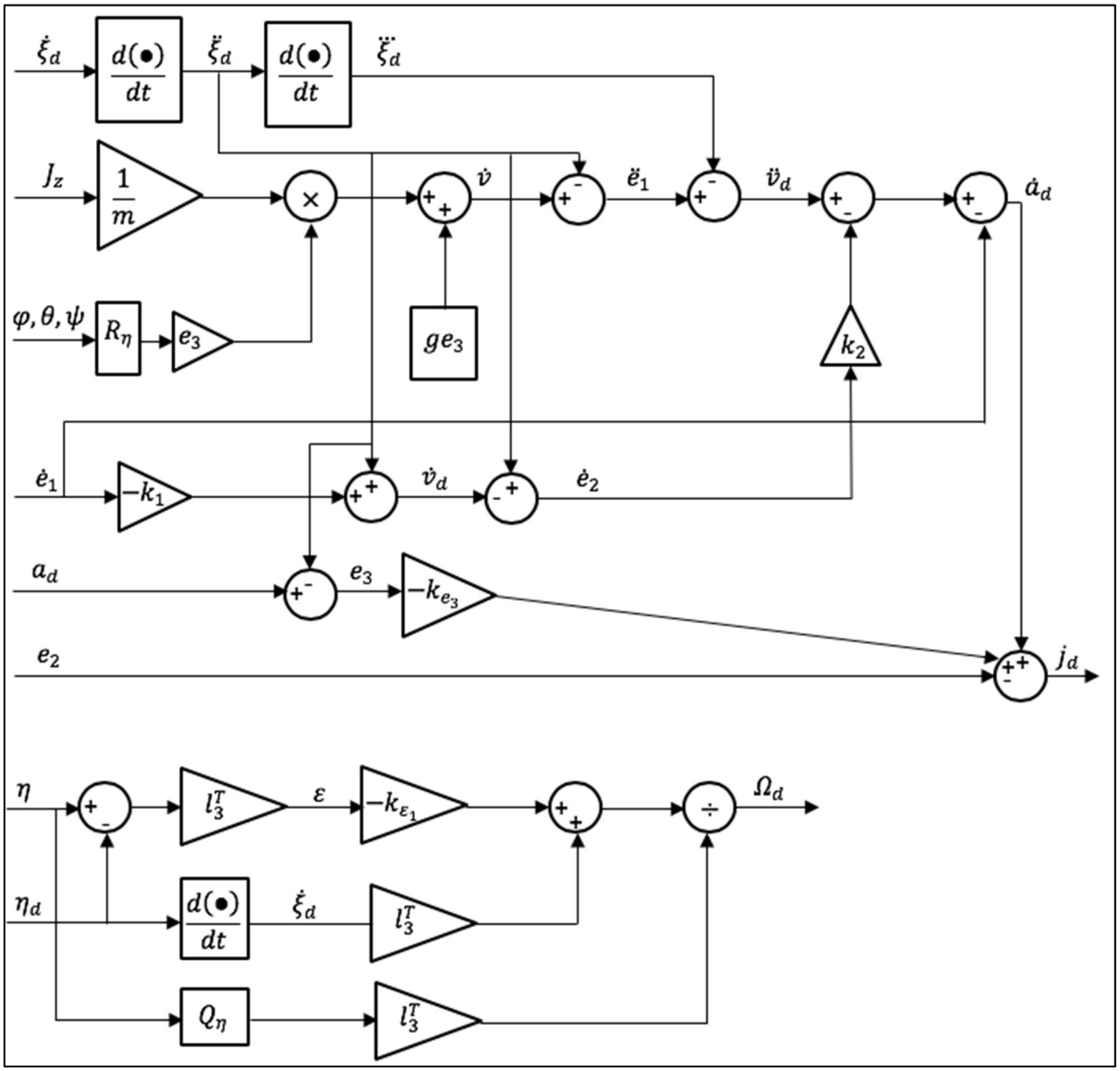


Figure 6.3 Schéma bloc des commandes virtuelles en jerk j_d et en vitesse de rotation Ω_d

4. Fonction Lyapunov V_4 sur les erreurs e_4 et ε_2

La fonction de Lyapunov prenant en compte les erreurs e_4 et ε_2 peut s'écrire:

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2} e_4^T e_4 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \quad , \quad V_4 \text{ est} > 0 \text{ si } V_3 \text{ est} > 0 \tag{6.49}$$

La dérivée de (6.49) par rapport au temps donne :

$$\dot{V}_4 = -k_{e_1} \|e_1\|^2 - k_{e_2} \|e_2\|^2 - k_{e_3} \|e_3\|^2 + e_3^T e_4 + e_4^T \dot{e}_4 - k_{\varepsilon_1} \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 \tag{6.50}$$

Pour assurer la négativité de $\dot{V}_4$ en (6.50) les deux conditions suivantes peuvent être imposées :

$$e_3^T e_4 + e_4^T \dot{e}_4 = -k_{e_4} \|e_4\|^2 \quad ; \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 = -k_{\varepsilon_2} \|\varepsilon_2\|^2 \tag{6.51}$$

avec les dérivées de e_4 en (6.43) et ε_2 en (6.44) et en se rappelant la propriété [4]:

$$\dot{e}_4 = \frac{1}{m} \ddot{T}_z R_\eta l_3 + \frac{2}{m} \dot{T}_z R_\eta \Omega \times l_3 + \frac{1}{m} T_z R_\eta \Omega^2 \times l_3 - \frac{1}{m} T_z R_\eta l_3 \times \dot{\Omega} - j_d \tag{6.52}$$

et

$$\dot{\varepsilon}_2 = e_3^T \left(\dot{Q}_\eta (\Omega - \Omega_d) + Q_\eta \left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_d \right) \right) \tag{6.53}$$

De l'équation du théorème d'Euler développée au CHAPITRE 3 $J\dot{\Omega} = -\Omega \times J\Omega + \tau$ nous pouvons extraire l'expression de $\dot{\Omega}$ et la remplacer dans (6.52) et (6.53). Cela donne :

$$\begin{aligned} \dot{e}_4 = \frac{1}{m} \ddot{T}_z R_\eta l_3 + \frac{2}{m} \dot{T}_z R_\eta \Omega \times l_3 + \frac{1}{m} T_z R_\eta \Omega^2 \times l_3 \\ - \frac{1}{m} T_z R_\eta l_3 \times J^{-1} (-\Omega \times J\Omega + \tau) - \dot{j}_d \end{aligned} \tag{6.54}$$

et

$$\dot{\varepsilon}_2 = e_3^T \left(\dot{Q}_\eta (\Omega - \Omega_d) + Q_\eta \left(J^{-1} (-\Omega \times J\Omega + \tau) - \dot{\Omega}_d \right) \right) \tag{6.55}$$

---

[4]. Pour tout vecteur u,v : $u \times v = u \wedge v = -v \wedge u = -v \times u$.

Les commandes réelles $\ddot{T}_z$ et τ qui seront envoyées au modèle du drone sont détaillées dans (6.54) et (6.55). L'objectif est désormais d'extraire les expressions de ces commandes réelles sous forme matricielle en fonction des variables connues du système. Pour cela une étape intermédiaire consiste à insérer (6.54) et (6.55) dans (6.51) puis en réorganisant on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m}\ddot{T}_z R_\eta l_3 - \frac{1}{m}T_z R_\eta l_3 \times J^{-1}\tau \\ &= -e_3 - k_{\varepsilon_1}e_4 - \frac{2}{m}\dot{T}_z R_\eta \Omega \times l_3 - \frac{1}{m}T_z R_\eta \Omega^2 \times l_3 - \frac{1}{m}T_z R_\eta l_3 \times J^{-1}\Omega \times J\Omega + \dot{j}_d\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\text{et} \quad e_3^T Q_\eta J^{-1}\tau = -\varepsilon_1 - k_{\varepsilon_2}\varepsilon_2 - e_3^T \dot{Q}_\eta(\Omega - \Omega_d) + e_3^T Q_\eta\left(J^{-1}\Omega \times J\Omega + \dot{\Omega}_d\right) \tag{6.57}$$

Avec la dérivée de la matrice Jacobienne Q_η :

$$\dot{Q}_\eta = \frac{1}{C_\theta}\begin{bmatrix}0 & \dot{\phi}C_\phi S_\theta + \dot{\theta}\dfrac{S_\phi}{C_\theta} & -\dot{\phi}S_\theta S_\phi + \dot{\theta}\dfrac{C_\phi}{C_\theta} \\ 0 & -\dot{\phi}S_\phi C_\theta & -\dot{\phi}C_\phi \\ 0 & \dot{\phi}C_\phi + \dot{\theta}\dfrac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & -\dot{\phi}S_\phi + \dot{\theta}\dfrac{C_\phi S_\theta}{C_\theta}\end{bmatrix} \tag{6.58}$$

La dérivée du jerk j_d et de la vitesse angulaire $\dot{\Omega}_d$ désiré exprimés en (6.47) donne :

$$\dot{\Omega}_d = \tfrac{1}{Q_\eta}\left(-k_{\varepsilon_1}(\Omega - \dot{\eta}_d) + \ddot{\eta}_d - \dot{Q}_\eta \Omega_d\right) \quad ; \quad \dot{j}_d = \ddot{a}_d - \dot{e}_2 - k_3\dot{e}_3 \tag{6.59}$$

Avec $\ddot{a}_d$ la dérivée seconde de (6.33). On obtient les lois de commandes réelles $\ddot{T}_z$ et τ :

$$\begin{bmatrix}\tau \\ \ddot{T}_z\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{m}T_z R_\eta l_3 \times J^{-1} & \dfrac{1}{m}R_\eta l_3 \\ e_3^T Q_\eta J^{-1} & 0\end{bmatrix}^{-1}}_{\hat{H}}\begin{bmatrix}A \\ B\end{bmatrix} \tag{6.60}$$

Où A et B sont définies par :

$$\begin{aligned}A &= -e_3 - k_{\varepsilon_1}e_4 - \frac{2}{m}\dot{T}_z R_\eta \Omega \times l_3 - \frac{1}{m}T_z R_\eta \Omega^2 \times l_3 - \frac{1}{m}T_z R_\eta l_3 \times J^{-1}\Omega \times J\Omega + \dot{j}_d \\ B &= -\varepsilon_1 - k_{\varepsilon_2}\varepsilon_2 - e_3^T \dot{Q}_\eta(\Omega - \Omega_d) + e_3^T Q_\eta\left(J^{-1}\Omega \times J\Omega + \dot{\Omega}_d\right)\end{aligned} \tag{6.61}$$

L'insertion de (6.51) dans (6.50) donne :

$$\text{et} \quad \begin{cases} \dot{V}_4 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 - k_{e_2}\|e_2\|^2 - k_{e_3}\|e_3\|^2 - k_{e_4}\|e_4\|^2 - k_{\varepsilon_1}\varepsilon_1^2 - k_{\varepsilon_2}\varepsilon_2^2 < 0 \\ V_4 > 0 \qquad \text{d'après (6.23), (6.29), (6.39) et (6.49)} \end{cases} \tag{6.62}$$

La Figure 6.4 représente la structure générale de la commande par backstepping conçue dans cette partie. On peut distinguer les entrées générales du système par les mesures ξ, η, v, Ω, T_z et les commandes désirées ξ_d, η_d. Les variables en sorties du contrôleur, envoyées au système sont les couples L, M, N et la force de poussée T_z.

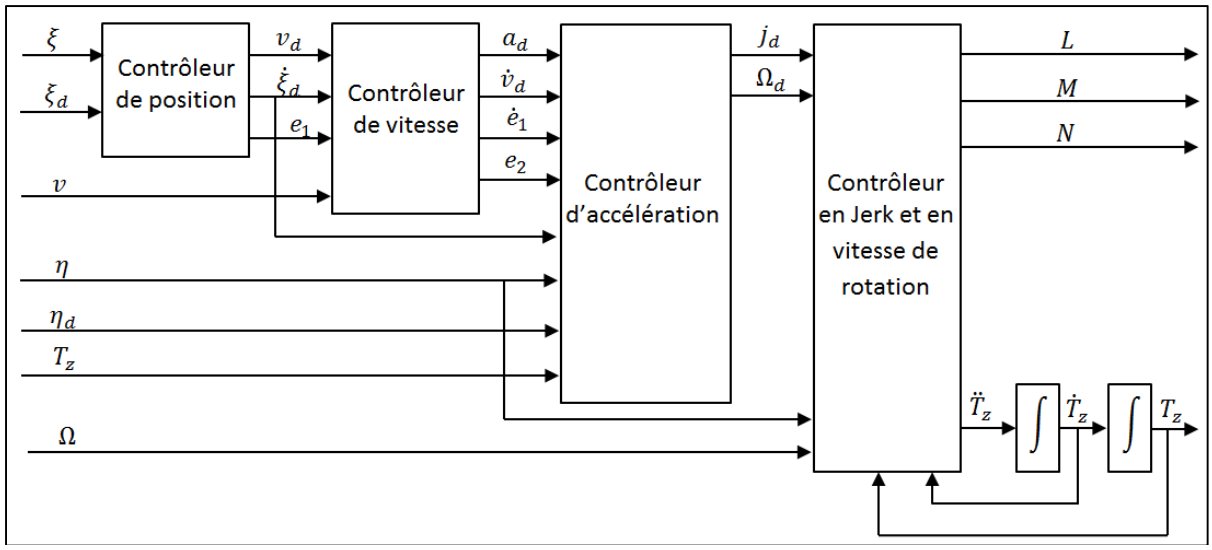


Figure 6.4 Schéma général de la structure de commande par backstepping

Remarque 1 : L'application de la commande par backstepping requiert l'inversibilité de la matrice H définie en (6.60). Ce qui est le cas pour toutes les trajectoires en boucle fermée.

Remarque 2 : Si la matrice H est non singulière, alors selon la théorie de Lyapunov (Miroslav Krstić et al., 1995) la loi de commande (6.60) (6.61), appliquée au système (3.35), garantit la convergence exponentielle des erreurs $e_1, e_2, e_3, e_4, \varepsilon_1$ et ε_2 vers 0. Elle assure donc la poursuite des trajectoires désirées $\xi_d(t)$ et $\psi_d(t)$.

Les coefficients $k_{e_1}, k_{e_2}, k_{e_3}, k_{e_4}$ peuvent être fixés pour placer à -1 les valeurs propres des relations entre les erreurs et leurs dérivées en dérivant respectivement (6.22)(6.25)(6.38) (6.43)(6.40) et (6.44) pour le système en translation :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_{e_1} e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -e_1 - k_{e_2} e_2 + e_3 \\ \dot{e}_3 &= -e_2 - k_{e_3} e_3 + e_4 \\ \dot{e}_4 &= -e_3 - k_4 e_4 \end{aligned} \tag{6.63}$$

La dynamique de rotation étant plus rapide, nous pouvons utiliser les coefficients $k_{\varepsilon_1}, k_{\varepsilon_2}$ pour placer les valeurs propres du système en rotation en -2 :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -k_{\varepsilon_1} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\varepsilon_1 - k_{\varepsilon_2} \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6.64}$$

On obtient alors :

$$\begin{gathered} k_{e_1} = k_{e_2} = k_{e_3} = k_{e_4} = k_{\varepsilon_2} = 1 \\ k_{\varepsilon_1} = 3 \end{gathered} \tag{6.65}$$

6.5 Application de la commande hiérarchique au quadricoptère

La commande hiérarchique repose en partie sur l'utilisation de la théorie de Lyapunov telle que développée dans la partie précédente 6.2 pour la commande par backstepping. Comme le montre l'architecture de commande à la section 3.5.4, la structure du compensateur permet de dégrouper les commandes en translation et rotation. Le sous-système en rotation possédant une bande passante plus large, son rôle est de contrôler plus rapidement l'orientation du drone, tandis que la boucle externe plus lente à cause d'une bande passante plus faible, a pour rôle de commander la trajectoire du drone. De plus, la commande des positions mesurées ξ, ψ à partir des valeurs désirées ξ_d, ψ_d est réalisée par les commandes en couples *L, M, N* et en force de poussée T_z. Un des avantages principaux de la commande hiérarchique est comme nous le

verrons, la simplicité des signaux de commandes comparativement à la commande par backstepping, ce qui est un atout certain dans l'optique d'implémenter cette commande dans un système réel.

1. Fonction Lyapunov V_1 sur l'erreur de position e_1

Commençons par définir l'erreur en position e_1 comme suit :

$$e_1 \triangleq \xi - \xi_d \tag{6.66}$$

La première fonction de Lyapunov peut alors être construite tel que :

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 \quad > \quad 0 \tag{6.67}$$

En rappelant que la vitesse linéaire mesurée $\dot{\xi} = v$, la dérivée de (6.23) par rapport au temps donne :

$$\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T \left(v - \dot{\xi}_d \right) \tag{6.68}$$

Une seconde variable d'erreur $e_2 = v - v_d$ en vitesse peut alors être définie et la valeur de v peut être remplacée dans (6.68) pour donner :

$$\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T \left(e_2 + v_d - \dot{\xi}_d \right) \tag{6.69}$$

Selon (6.3) la dérivée de la fonction de Lyapunov donnée en (6.69) doit être négative pour assurer la convergence de l'erreur e_1. La commande virtuelle recherchée v_d dois permettre de vérifier $\dot{V}_1 \leq -k_{e_1} \|e_1\|^2 + e_1^T e_2$ avec $k_{e_1} > 0$. D'où l'expression de v_d assurant $\dot{V}_1$ négatif :

$$\begin{aligned} & e_1^T \left(e_2 + v_d - \dot{\xi}_d \right) = -k_{e_1} \|e_1\|^2 + e_1^T e_2 \\ \text{alors} \quad & v_d = -k_{e_1} e_1 + \dot{\xi}_d \end{aligned} \tag{6.70}$$

En remplaçant l'expression (6.70) de v_d dans l'expression de $\dot{V}_1$ en (6.26) nous obtenons :

$$\dot{V}_1 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 + e_1^T e_2 \tag{6.71}$$

2. Fonction Lyapunov V_2 sur l'erreur de vitesse e_2

Définissons désormais la seconde fonction de Lyapunov V_2 reliée à l'erreur de vitesse e_2 :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_2^T e_2 \quad , \quad V_2 \text{ est} > 0 \text{ si } V_1 \text{ est} > 0 \tag{6.72}$$

La dérivée de (6.72) par rapport au temps donne :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_2^T(\dot{v} - \dot{v}_d) \tag{6.73}$$

En remplaçant l'expression de $\dot{V}_1$ en (6.71) dans (6.73) nous obtenons :

$$\dot{V}_2 = -k_{e_1}\|e_1\|^2 + e_1^T e_2 + e_2^T(\dot{v} - \dot{v}_d) \tag{6.74}$$

Nous pouvons faire apparaître ici l'erreur en accélération $e_3 = a - a_d$. Notons que $a = \dot{v}$ et en imposant une loi de commande adéquate sur a_d la négativité de $\dot{V}_2$ s'obtient tel que :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_{e_1}\|e_1\|^2 + e_1^T e_2 + e_2^T(e_3 + a_d - \dot{v}_d) \\ &= -k_{e_1}\|e_1\|^2 - k_{e_2}\|e_2\|^2 + e_2^T e_3 \end{aligned} \tag{6.75}$$

L'expression désirée de l'accélération, a_d est obtenue à partir de (6.75) :

$$a_d = -e_1^T - k_{e_2}e_2 + \dot{v}_d \tag{6.76}$$

Par ailleurs, selon l'expression (3.35) l'accélération linéaire notée $\dot{v} = a$ s'exprime par :

$$a = \dot{v} = \frac{1}{m}T_z R_\eta l_3 + g l_3 \tag{6.77}$$

L'expression (6.77) fait apparaître les nouvelles entrées virtuelles T_z et η. On peut fixer ces deux entrées virtuelles T_z et η comme des valeurs désirées pour obtenir une seconde expression de l'accélération désirée a_d :

$$a_d = -e_1 - k_{e_2} e_2 + \dot{v}_d = \frac{1}{m} T_{z_d} R_{\eta_d} l_3 + g l_3 \tag{6.78}$$

En remplaçant l'expression de a_d en (6.78) dans (6.75) on obtient :

$$\dot{V}_2 = -k_{e_1} \|e_1\|^2 - k_{e_2} \|e_2\|^2 + e_2^T e_3 \tag{6.79}$$

Où la variable d'erreur e_3 peut être décrite à partir de (6.77) - (6.78) comme suit :

$$e_3 \triangleq \frac{1}{m} \left(T_z R_\eta - T_{z_d} R_{\eta_d} \right) l_3 \tag{6.80}$$

Nous pouvons remarquer que les équations (6.66) à (6.79) sont la copie conforme des équations (6.22) à (6.36). La différence entre la commande par backstepping et la commande hiérarchique apparaît à ce moment du raisonnement. En effet, dans le cas de la commande par backstepping la fonction de Lyapunov va être augmentée jusqu'à l'obtention du signal désiré pour les couples *L, M, N* et la poussée T_z en (6.60). Avec la commande hiérarchique Le signal désiré T_{z_d} est obtenu à partir de (6.78) et des accélérations désirées sur les axes *x, y, z* notées respectivement a_{x_d}, a_{y_d} et a_{z_d} dans :

$$T_{z_d} = -m \sqrt{a_{x_d}^2 + a_{y_d}^2 + \left(a_{z_d} - g \right)^2} \tag{6.81}$$

Où les expressions des accélérations désirées a_{x_d}, a_{y_d} et a_{z_d} sont obtenues en dérivant l'expression de v_d en (6.70) puis en l'insérant dans (6.76), cela donne :

$$a_d = -\left(k_{e_1} k_{e_2} + 1 \right) \left(\xi - \xi_d \right) + \left(k_{e_1} + k_{e_2} \right) \left(\dot{\xi}_d - v \right) + \ddot{\xi}_d \tag{6.82}$$

La valeur de l'angle désirée ψ_d est fixée de manière externe. En revanche, pour différente valeur de ψ_d, l'expression des angles désirés ϕ_d et θ_d à partir de (6.78) donne :

$$\begin{aligned}
&\text{Pour } \psi_d \approx 0\ [2\pi] : && \begin{cases} \phi_d = \arctan\left(\dfrac{a_{y_d}}{\sqrt{a_{x_d}^2+\left(a_{z_d}-g\right)^2}}\right) \\ \theta_d = \arctan\left(\dfrac{a_{x_d}}{a_{z_d}-g}\right) \end{cases} \\
&\text{Pour } \psi_d \approx \frac{\pi}{2}\ [2\pi] : && \begin{cases} \phi_d = -\arctan\left(\dfrac{a_{x_d}}{\sqrt{a_{y_d}^2+\left(a_{z_d}-g\right)^2}}\right) \\ \theta_d = \arctan\left(\dfrac{a_{y_d}}{a_{z_d}-g}\right) \end{cases} \\
&\text{Pour } \psi_d \approx \pi\ [2\pi] : && \begin{cases} \phi_d = -\arctan\left(\dfrac{a_{y_d}}{\sqrt{a_{x_d}^2+\left(a_{z_d}-g\right)^2}}\right) \\ \theta_d = -\arctan\left(\dfrac{a_{x_d}}{a_{z_d}-g}\right) \end{cases} \\
&\text{Pour } \psi_d \approx -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] : && \begin{cases} \phi_d = \arctan\left(\dfrac{a_{x_d}}{\sqrt{a_{y_d}^2+\left(a_{z_d}-g\right)^2}}\right) \\ \theta_d = -\arctan\left(\dfrac{a_{y_d}}{a_{z_d}-g}\right) \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Tel qu'en (6.63) les deux variables pour la dynamique de translation se résument à :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_{e_1} e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -e_1 - k_{e_2} e_2 + e_3 \end{aligned} \tag{6.84}$$

3. Fonction Lyapunov V_3 sur l'erreur en rotation ε_1

Désormais, considérons la dynamique de rotation en définissant la nouvelle variable d'erreur de position angulaire ε_1 :

$$\varepsilon_1 \triangleq \eta - \eta_d \tag{6.85}$$

L'objectif ici est de forcer la variable d'erreur ε_1 à converger vers 0 le plus rapidement possible. Notons qu'avec cette approche le terme $e_2^T e_3$ de l'équation (6.79) ne sera pas annulé directement comme dans partie 6.2 sur la commande backstepping. Néanmoins, selon (6.80) et en remarquant que $T_z = T_{z_d}$ il s'avère que $e_3 \to 0$ lorsque $\varepsilon_1 \to 0$. Une nouvelle fonction de Lyapunov peut alors être décrite par :

$$V_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_1^T \varepsilon_1 \quad , \quad V_3 > 0 \tag{6.86}$$

La dérivée dans le temps de (6.86) donne en tenant compte de (6.58) :

$$\dot{V}_3 = \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1^T \left(Q_\eta \Omega - \dot{\eta}_d\right) \tag{6.87}$$

Selon (6.3) la dérivée de la fonction de Lyapunov de $\dot{V}_3$ donnée en (6.87) doit être négative pour assurer la convergence de l'erreur ε_1. La commande virtuelle recherchée $\dot{\eta}_d$ doit permettre de vérifier l'inégalité $\dot{V}_3 \leq -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 + \varepsilon_1^T \varepsilon_2$ avec $k_{\varepsilon_1} > 0$ et l'erreur en vitesse angulaire ε_2 étant définie par :

$$\varepsilon_2 \triangleq Q_\eta(\Omega - \Omega_d) \tag{6.88}$$

À partir de (6.87) et l'inégalité de Lyapunov ci-dessus nous déduisons :

$$\varepsilon_1^T \left(Q_\eta \Omega - \dot{\eta}_d\right) = -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 + \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \tag{6.89}$$

D'où l'expression de $\dot{\eta}_d$ assurant $\dot{V}_3$ négatif :

$$\dot{\eta}_d = k_{\varepsilon_1}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + Q_\eta \Omega \tag{6.90}$$

En remplaçant l'expression (6.90) de $\dot{\eta}_d$ dans (6.87) nous obtenons :

$$\dot{V}_3 = -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 + \varepsilon_1^T \varepsilon_2 \tag{6.91}$$

4. Fonction Lyapunov V_4 sur l'erreur en rotation ε_2

La dernière étape consiste à construire la fonction de Lyapunov V_4 en prenant compte de l'erreur ε_2 décrite en (6.88). On écrit :

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^T\varepsilon_2 \quad , \quad V_4 \text{ est} > 0 \text{ si } V_3 \text{ est} > 0 \tag{6.92}$$

En dérivant (6.92) nous obtenons avec l'expression de $\dot{V}_3$ en (6.91) et de la dérivée de ε_2 :

$$\dot{V}_4 = -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 + \varepsilon_1^T\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^T\left(\dot{Q}_\eta(\Omega - \Omega_d) + Q_\eta(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_d)\right) \tag{6.93}$$

Rappelons ici que $\dot{\Omega} = I^{-1}(-\Omega \times I\Omega + \tau_b)$ selon (3.35) (pour rappel I désigne la matrice d'inertie), le couple de Coriolis τ_g étant considéré négligeable. La nouvelle entrée réelle du système τ_b fait alors son apparition et doit permettre de vérifier la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov V_4 soit : $\dot{V}_4 \leq -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 - k_{\varepsilon_2}\|\varepsilon_2\|^2$ avec $k_{\varepsilon_2} > 0$. En recherchant l'égalité entre cette expression et celle en (6.93) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &-k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 + \varepsilon_1^T\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^T\left(\dot{Q}_\eta(\Omega - \Omega_d) + Q_\eta\left(I^{-1}(-\Omega \times I\Omega + \tau_b) - \dot{\Omega}_d\right)\right) \\ &= -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 - k_{\varepsilon_2}\|\varepsilon_2\|^2 \end{aligned} \tag{6.94}$$

On extrait de (6.94) l'expression de la loi de commande réelle τ_b permettant d'assurer la négativité de $\dot{V}_4$:

$$\tau_b = IQ_\eta^{-1}\left(k_{\varepsilon_2}\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \dot{Q}_\eta(\Omega - \Omega_d)\right) + I\dot{\Omega}_d + \Omega \times I\Omega \tag{6.95}$$

En remplaçant l'expression de (6.95) dans (6.93) on obtient une expression de $\dot{V}_4 < 0$:

$$\dot{V}_4 = -k_{\varepsilon_1}\|\varepsilon_1\|^2 - k_{\varepsilon_2}\|\varepsilon_2\|^2 \tag{6.96}$$

La dynamique de rotation peut alors se résumer selon la dérivée des erreurs ε_1 (6.85) et ε_2 (6.88) comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -k_{\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\varepsilon_1 - k_{\varepsilon_2}\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6.97}$$

Les dérivées des erreurs en (6.97) sont exponentiellement stable puisqu'elles sont liées aux fonctions de Lyapunov dont les dérivées définies en (6.91) et (6.96) sont strictement négatives.

Ainsi, les signaux de commande T_z et *L, M, N* de la commande hiérarchique sont donnés par les équations (6.81) et (6.95).

CHAPITRE 7

RÉSULTATS DE SIMULATION

7.1 Introduction

Ce septième chapitre vise à évaluer la performance des algorithmes de commande dans les aspects : temporel ; fréquentiel/robustesse et énergétique. Pour ce faire la première des quatre parties porte sur l'analyse fréquentielle des algorithmes de commandes linéaires pour les fonctions de transfert suivantes :

1. La boucle ouverte $J(s)$, entre l'entrée r et la sortie y ;
2. La transmittance en boucle fermée $T(s)$, transmission entre l'entrée r et la sortie y ;
3. La sensibilité $S_{ey}(s)$, transfert entre l'erreur e et la sortie y ;
4. La sensibilité $S_{du}(s)$, transfert d'une perturbation d sur le signal de commande u.

La seconde partie étudie les performances temporelles des algorithmes de commande selon les quatre conditions de tests suivantes :

1. Réponse unitaire ;
2. Scénario de vol ;
3. Influence des couplages ;
4. La consigne de vol hélicoïdale.

La troisième partie expose une analyse de robustesse des algorithmes de commande avec les conditions de vol perturbé suivantes :

1. Vol stationnaire en présence de vent ;
2. Consigne de vol hélicoïdale en présence de vent ;
3. Influence d'un délai de mesure sur la réponse temporelle.

Enfin, une analyse de la consommation d'énergie et des gains maximums des compensateurs sera effectuée en évaluant les aspects suivants :

1. Énergie du signal d'erreur $e(t)$ en entrée du compensateur ;

2. Énergie du signal de commande $u(t)$ en entrée du processus ;
3. Énergie du compensateur, via son diagramme de Bode ;
4. Gain maximum du compensateur, via son diagramme de Bode.

Pour chacune des parties ci-dessus, les résultats seront regroupés en cinq sous-parties en fonction du type de commande utilisée et du modèle de drone utilisé :

1. Commandes B, H_2 et H_∞ appliquées sur le modèle linéaire de drone avec commande des systèmes de rotation et translation en cascade (3.5.1) ;
2. Commandes B, μ, μ_Δ et PID appliquées sur le modèle linéaire de drone avec commande des systèmes de rotation et translation séparés (3.5.2) ;
3. Commandes B, H_2 et H_∞ appliquées sur le modèle non linéaire de drone avec commande des systèmes de rotation et translation en cascade (3.5.3) ;
4. Commandes B, μ, μ_Δ et PID appliquées sur le modèle non linéaire de drone avec commande des systèmes de rotation et translation en séparée (3.5.4) ;
5. Commandes backstepping et hiérarchique appliquées sur le modèle non linéaire de drone avec commande des systèmes de rotation et translation en cascade (3.5.3).

Apportons ici une précision concernant la notation utilisée dans le cas des commandes B, μ, μ_Δ et PID appliquées sur une représentation du processus avec système de rotation et translation séparée. En se référant au modèle du drone symétrique le long des axes x et y illustré à la Figure 3.12 (modélisation linéaire) ou à la Figure 3.14 (modélisation non linéaire) nous parlerons des transferts obtenus sur :

- ϕ ou θ désigne la boucle interne composée du contrôleur C_r et de la dynamique de rotation du processus P_r ;
- x ou y pour désigner l'association du contrôleur de translation C_t à la modélisation de la dynamique de translation du processus P_t ;
- $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ pour désigner l'association en cascade des contrôleurs de rotation C_r et de translation C_t à la modélisation en cascade des dynamiques en rotation P_r et en translation P_t du processus.

7.2 Domaine fréquentiel

Le domaine fréquentiel a pour vocation d'analyser la stabilité et la robustesse d'une boucle de commande. Notons que cette analyse nécessite une modélisation linéaire du processus et n'est donc pas utilisable pour des commandes non linéaires comme par backstepping et hiérarchique.

7.2.1 Conditions de test

Le schéma simplifié de la boucle de commande utilisée pour évaluer les performances fréquentielles des algorithmes de commandes est celui de la Figure 7.1. Il est composé du processus linéaire $P(s)$ et du compensateur $C(s)$ qui modélisera successivement les compensateurs : B, H_2, H_∞ avec une structure de commande des systèmes de rotation et de translation en cascade (Figure 3.10) ; B, μ, μ_Δ, PID avec une structure de commande des systèmes de rotation et de translation séparées (Figure 3.12). Nous retrouvons les vecteurs suivants :

- Vecteur de consigne $r(t) = [x_d, y_d, z_d, \psi_d]^T$;
- Vecteur d'erreur $e(t) = [e_x, e_y, e_z, e_\psi]^T$;
- Vecteur de commande $u(t) = [u_x, u_y, u_z, u_\psi]^T$;
- Vecteur de sortie $y = [x, y, z, \psi]^T$;
- Vecteur de sortie mesurée $y_m = [x_m, y_m, z_m, \psi_m]^T$;
- Vecteur de perturbation $d(t) = [d_x, d_y, d_z, d_\psi]^T$.

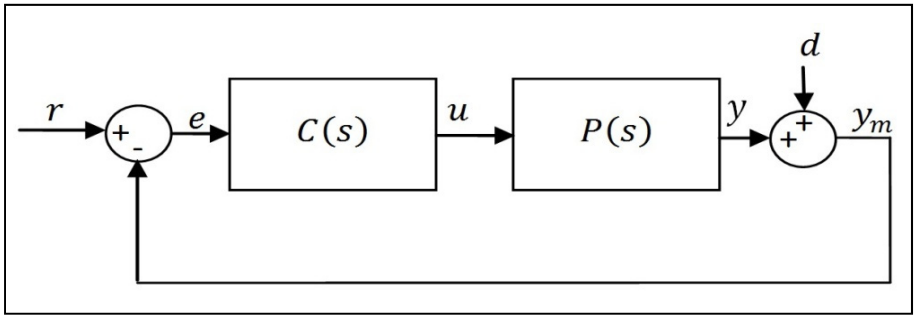


Figure 7.1 Schéma de la boucle de commande

À partir de la Figure 7.1 définissons les fonctions de transfert utiles pour évaluer les performances des algorithmes de commande dans le domaine fréquentiel :

1) ***J*(*s*)** : Boucle ouverte $J = y/e = PC$. Permet d'évaluer la BP ω_b à -3 db de la boucle ouverte $J(s)$, en utilisant le diagramme de Bode $P(s)$ du drone seul, puis avec les compensateurs $C(s)$. Un gain important en basse fréquence est attendu pour annuler l'erreur statique ;

2) ***T*(*s*)** : Transmittance $T = y/r = PC(1+PC)^{-1}$. La BP ω_c à -3 dB du système en boucle fermée $T(s)$ sera estimée avec le diagramme de Bode. D'éventuels maximums de la transmission M_t pourront être détectés ;

3) ***S*$_{ey}$(*s*)** : Sensibilité $S_{ey} = y/e = (1+PC)^{-1}$. Représente la sensibilité de l'erreur e vis-à-vis de la sortie y. Elle doit être minimisée en dessous d'une faible valeur ε en basse fréquence pour minimiser l'erreur statique et en haute fréquence son maximum M_s doit être limité pour éviter l'apparition de dépassement, d'oscillation ou d'instabilité sur la réponse temporelle ;

4) ***S*$_{du}$(*s*)** : Transfert d'une perturbation d sur la commande u, s'exprimant par : $S_{du} = u/d = C(1+PC)^{-1}$. Caractérise l'influence des bruits de mesure d sur la commande u. Des gains faibles sont à privilégier puisqu'ils reflètent de la part du compensateur une bonne atténuation des bruits de mesure sur la commande.

7.2.2 Boucle ouverte *J*(*s*)

7.2.2.1 Commandes B, H_2, H_∞

Comme le montre la Figure 7.2 et le Tableau 7.1 l'ajout des compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) augmentent systématiquement la BP ω_b de la boucle ouverte, relativement au drone seul tracé en pointillé bleu. De plus, pour tous les compensateurs, le gain en basse fréquence est suffisamment important pour minimiser l'erreur statique e_{ss}.

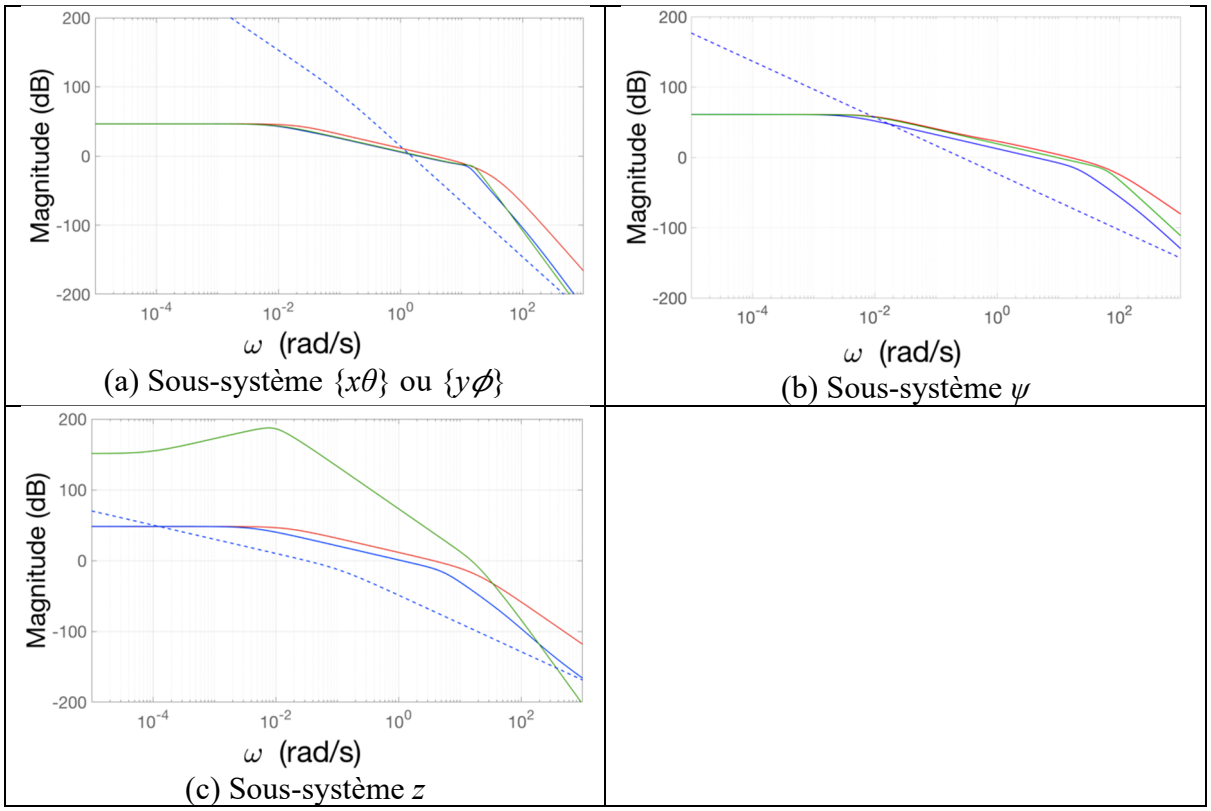


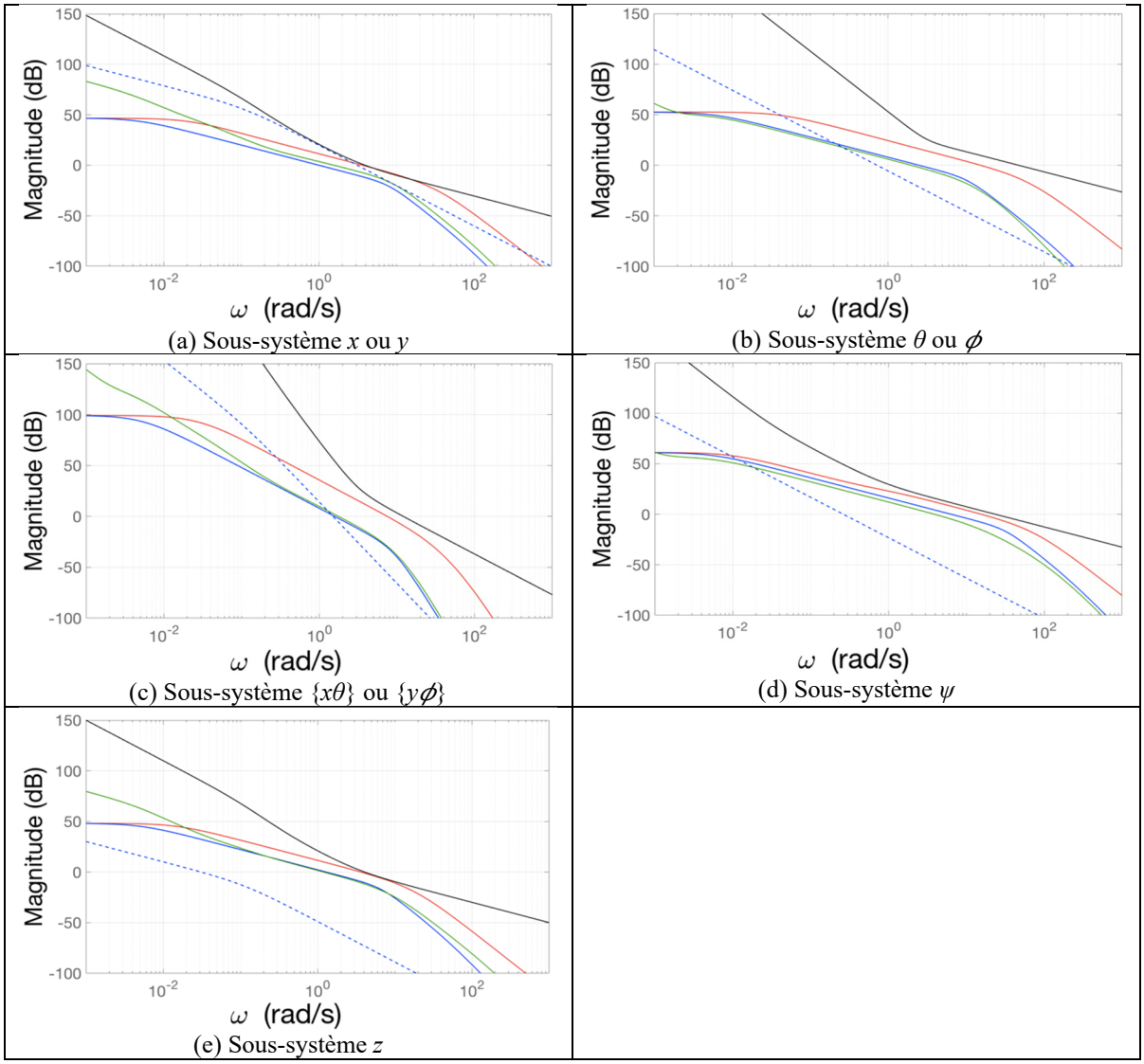
Figure 7.2 Diagramme de Bode de gain de la boucle ouverte $J(s)$ sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) pour le système seul (pointillés bleus) et avec compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu)

Tableau 7.1 Bande passante de $J(s)$ sur les axes x ou y, z et autour de l'angle ψ pour le système seul et avec les compensateurs B, H_2 et H_∞

Axes / angles	ω_b [rad/s]			
	Drone	B	H_2	H_∞
$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	1.64	5	3	2.8
z	0.04	5	15	1.6
ψ	0.31	20	13	5.9

7.2.2.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID

La Figure 7.3 montre des BP ω_b de la boucle ouverte $J(s)$ plus larges avec l'ajout des compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noire) pour les transferts : x ou y (a) ; θ ou ϕ (b) ; $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c) ; ψ (d) ; z (e). Seul sur les axes x ou y, pour les compensateurs μ (bleu) et μ_Δ (vert), l'élargissement de la BP ω_b n'a pas été constaté. Les gains importants en basse fréquence permettront de minimiser l'erreur statique e_{ss}.



(a) Sous-système x ou y

(b) Sous-système θ ou ϕ

(c) Sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

(d) Sous-système ψ

(e) Sous-système z

Figure 7.3 Diagramme de Bode de gain de la boucle ouverte $J(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ (d) pour le système seul (pointillés bleus) et avec compensateurs B (rouge), μ (bleue), μ_Δ (verte) et PID (noire)

Tableau 7.2 Bande passante ω_b de $J(s)$ sur les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour des angles θ ou ϕ, ψ pour le système seul et avec les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID

Axes / angles	ω_b [rad/s]				
	Drone	B	μ	μ_Δ	PID
$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	1.64	8.9	1.8	2.1	14
z	0.04	5	1.8	1.6	5.3
ψ	0.31	21	8.9	5.3	34
x ou y	3.83	5	1.4	2.3	5
θ ou ϕ	3.71	21	3.5	2.8	67

7.2.2.3 Discussion

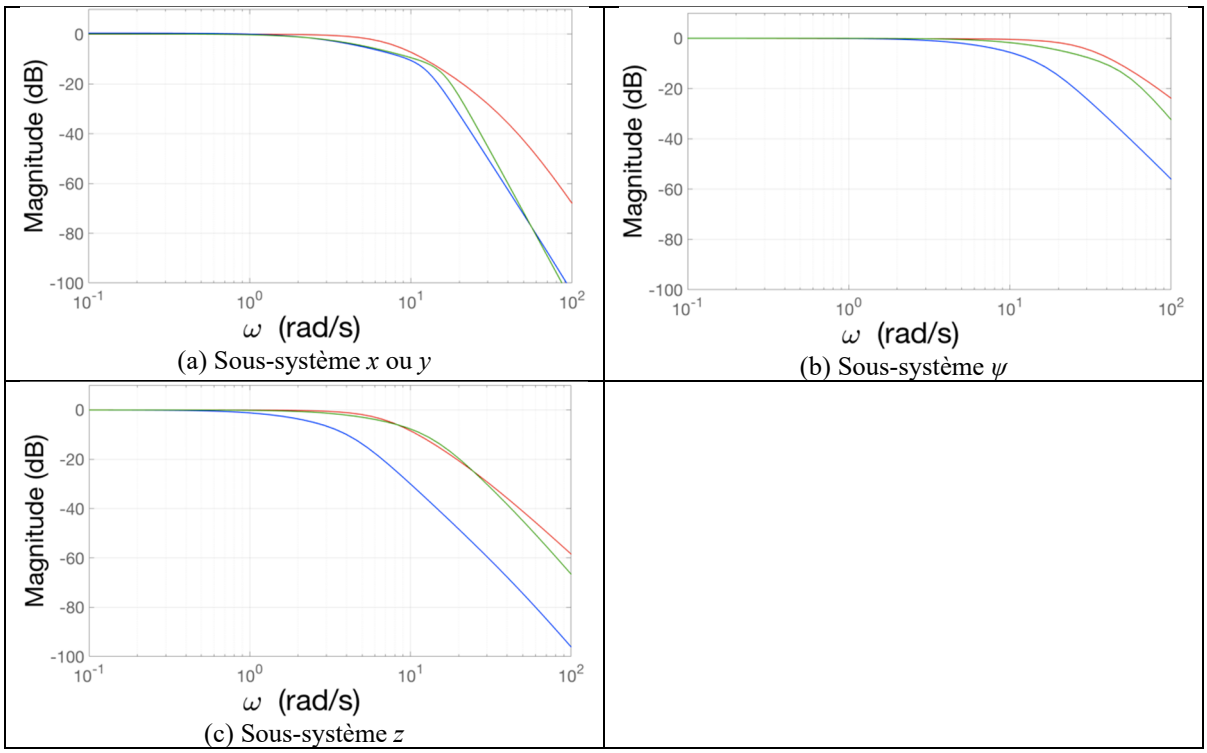
Dans cette section nous avons comparé les BP en boucle ouverte pour le modèle linéaire de drone seul et avec les compensateurs B, H_2, H_∞, μ, μ_Δ ou PID. Nous avons constaté que la boucle ouverte associée au compensateur PID obtient généralement la BP la plus grande puis est suivie de près par le compensateur H_2 et les deux compensateurs B (pour les représentations avec commande de translation en cascade et en translation/rotation séparées). La boucle ouverte obtenue avec la commande H_∞ obtient une BP moyennement grande relativement aux autres commandes, mais toujours supérieure à celle du drone seul. L'association des compensateurs μ et μ_Δ au drone donne une boucle ouverte avec des BP presque systématiquement inférieures aux autres commandes et parviennent difficilement à avoir une BP plus grande que le drone seul sur $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$.

On remarquera que le passage d'une structure de commande en cascade vers une structure de commande en translation/rotation séparée a permis d'élargir la BP en boucle ouverte sur $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ de la commande B de 5 rads/s à 8.9 rads/s. De plus, le passage d'une structure de commande en cascade vers une structure de commande en translation/rotation séparée a augmenté la BP autour de l'angle ψ de 10 rads/s à 21 rads/s pour la commande B.

7.2.3 Transmittance $T(s)$

7.2.3.1 Commandes B, H_2, H_∞

Les BP ω_c des boucles fermées $T(s)$ représentées à la Figure 7.4 et au Tableau 7.3 suivent les mêmes tendances qu'avec la boucle ouverte $J(s)$ tout en étant sensiblement élargies.



(a) Sous-système x ou y

(b) Sous-système ψ

(c) Sous-système z

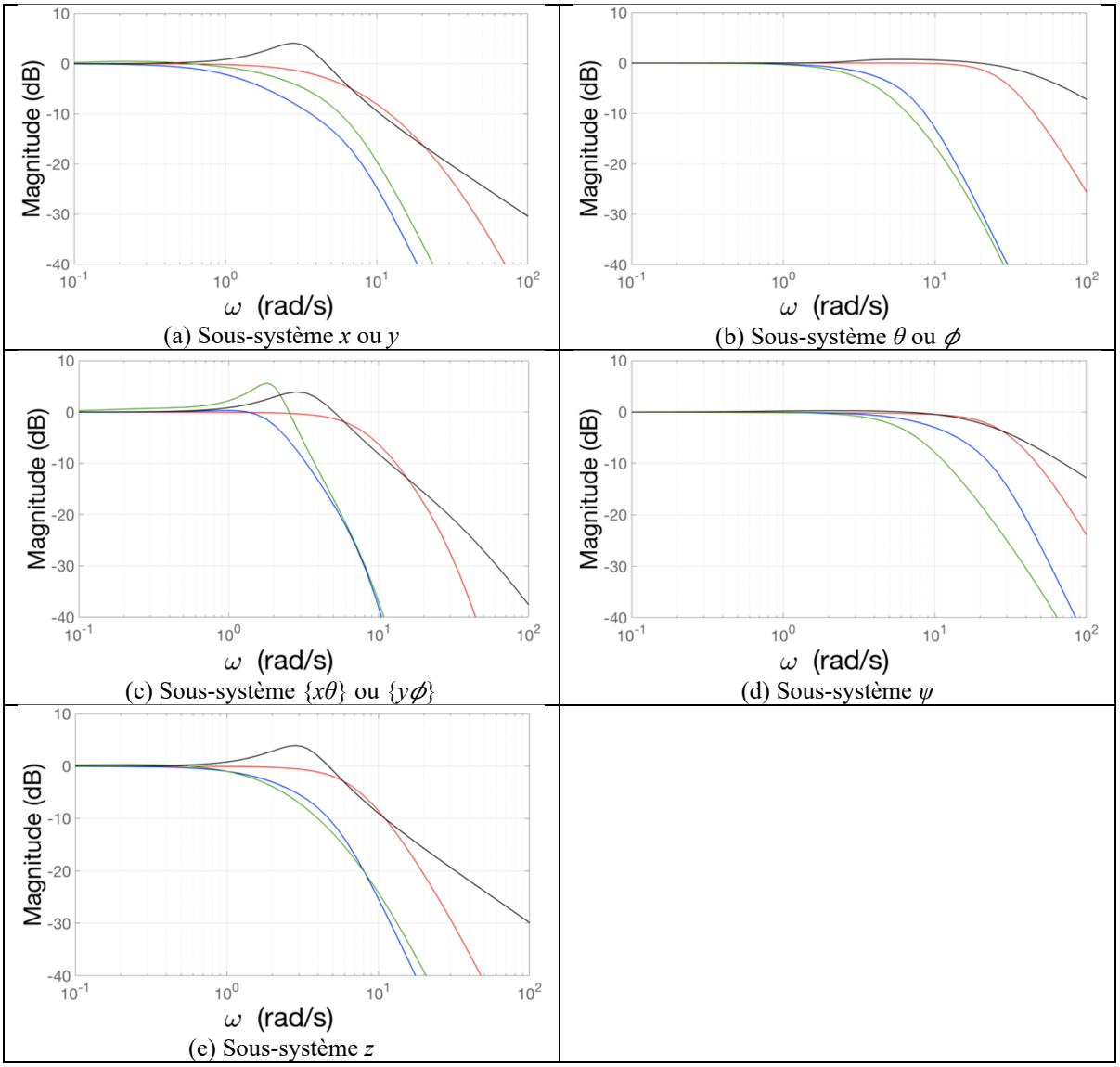
Figure 7.4 Diagramme de Bode du gain de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) avec les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu)

Tableau 7.3 Bande passante ω_c de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y, z et autour de l'angle ψ avec les compensateurs B, H_2 et H_∞

Axes / angles	ω_c [rad/s]		
	B	H_2	H_∞
$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	6.5	3.6	3.4
z	6	5	1.7
ψ	25.1	14.2	6.4

7.2.3.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID

La BP ω_c des boucle fermée $T(s)$ des commandes B (rouge), μ (bleue) et μ_Δ (verte) sont reportées à la Figure 7.5 et au Tableau 7.4 se trouve élargie relativement à la boucle ouverte $J(s)$ étudiée en 7.2.2.2. Seule la commande PID (noire) ne voit pas sa BP élargie.



(a) Sous-système x ou y

(b) Sous-système θ ou ϕ

(c) Sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

(d) Sous-système ψ

(e) Sous-système z

Figure 7.5 Diagramme de Bode du gain de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ (d) avec les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir)

Tableau 7.4 Bande passante ω_c de la transmission $T(s)$ sur les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour des angles θ ou ϕ, ψ avec les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID

Axes / angles	ω_c [rad/s]			
	B	μ	μ_Δ	PID
$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	7.1	2.1	2.7	6.4
z	6	2	1.7	5.8
ψ	25	10	6	24
x ou y	4.7	1.2	2.3	5.8
θ ou ϕ	26	4.4	3.2	51

7.2.3.3 Discussion

Cette partie avait pour objectif principal d'évaluer la BP en boucle fermée des compensateurs B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID ainsi que de détecter la présence éventuelle de dépassement sur la transmission $T(s)$. La commande PID présente les BP les plus larges, mais également du dépassement fréquentiel sur $T(s)$ ce qui pourrait être à l'origine des dépassements et des oscillations que nous observées sur les réponses unitaires le long des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et z en 7.3.1.3. La commande B obtient les résultats les plus satisfaisants avec de larges BP sur $T(s)$ tout en évitant les dépassements fréquentiels.

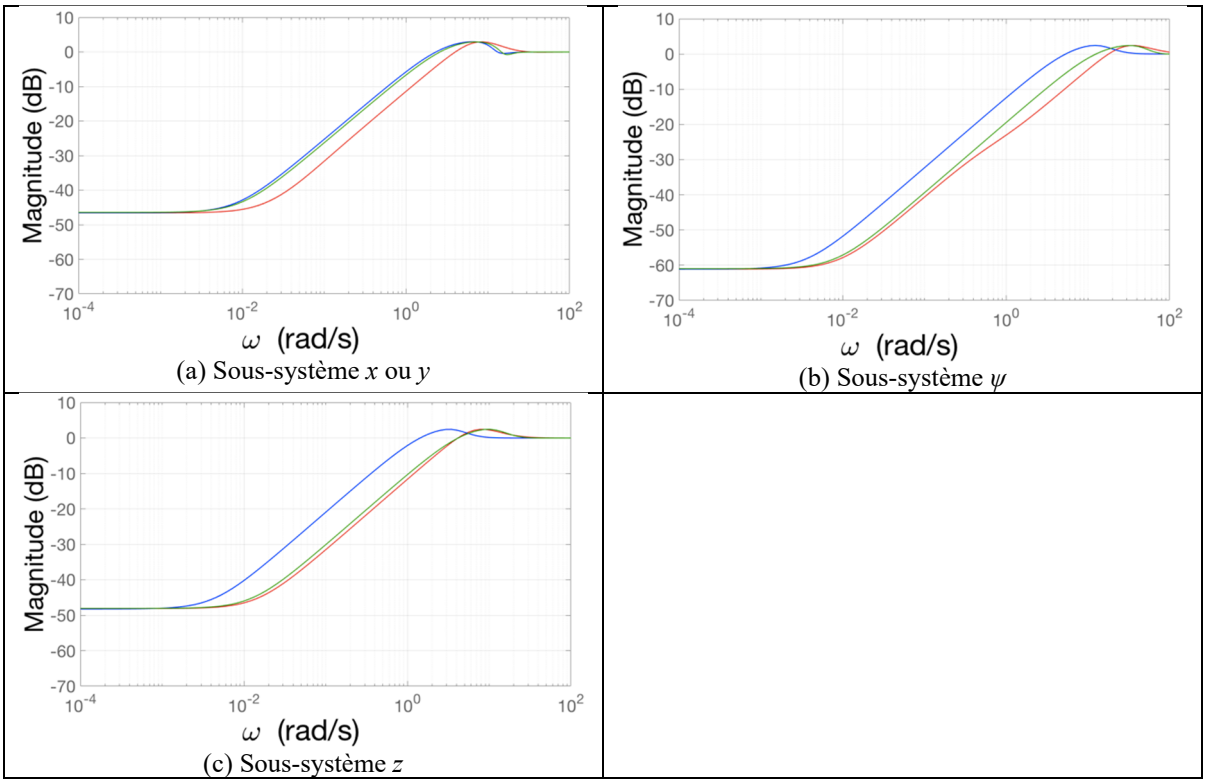
On remarquera que le passage d'une structure de commande en cascade vers une structure de commande en translation/rotation séparée a permis d'élargir la BP de $T(s)$ de la commande B de 6.5 rads/s à 7.1 rads/s.

Les commandes H_2, H_∞, μ et μ_Δ obtiennent des BP inférieures aux commandes B et PID tout en étant sensiblement plus large pour les commandes H_2 et H_∞. Aucune de ses commandes H_2, H_∞, μ et μ_Δ ne présente de dépassement fréquentiel de la transmission $T(s)$.

7.2.4 Sensibilité $S_{ey}(s)$

7.2.4.1 Commandes B, H_2, H_∞

Tel qu'illustré à la Figure 7.6 et au Tableau 7.5 les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) présentent des bornes similaires ε pour $\omega \leq \omega_1$ et M_s pour l'ensemble des fréquences. Le compensateur B amorce sa transition de basses en hautes fréquences plus tardivement ce qui a pour effet d'accélérer la réponse temporelle.



(a) Sous-système x ou y

(b) Sous-système ψ

(c) Sous-système z

Figure 7.6 Diagramme de Bode du gain de la sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes x ou y (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) avec les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu)

Tableau 7.5 Sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ pour le système seul et avec compensateurs B, H_2 et H_∞

		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	ψ	z
M_s [dB]	B	2.93	2.43	2.39
	H_2	2.92	2.45	2.39
	H_∞	2.95	2.42	2.4
ε [dB]	B	-46.6	-48.1	-61.1
	H_2	-46.4	-48.1	-61
	H_∞	-46.5	-48.2	-61.1

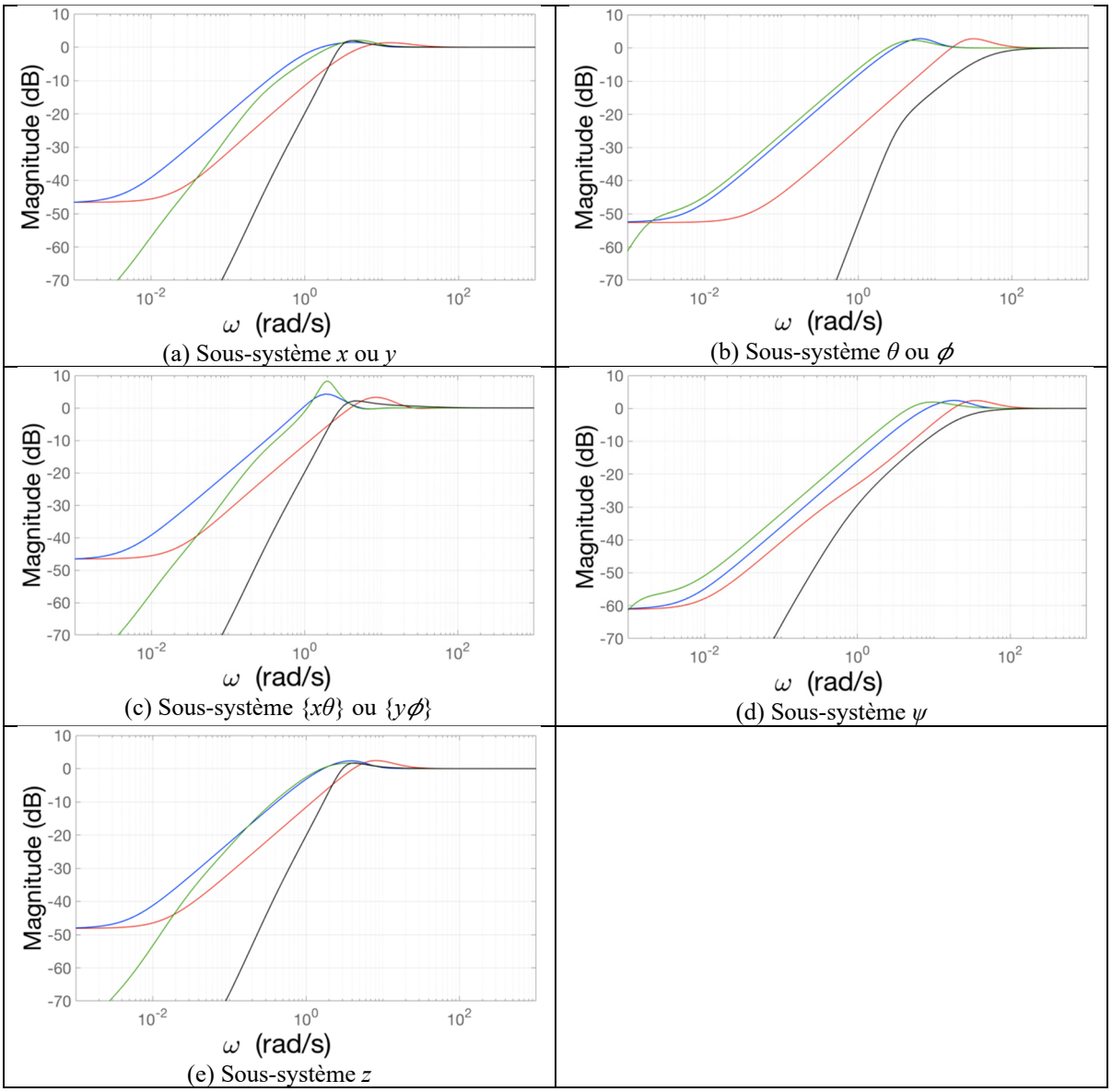
7.2.4.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID

Comme nous l'avons vu à la partie (4.4.13), pour pouvoir comparer les performances des compensateurs B et μ, leurs conceptions reposent sur une sensibilité similaire en BF avec une valeur ε pour $\omega \leq \omega_1$ et en dessous d'une borne maximum M_s pour l'ensemble des fréquences. Notons que ces objectifs de conceptions ne sont atteignables que pour une modélisation sans incertitude de la commande par μ-synthèse, puisque l'ajout d'incertitude tend à déformer, comme nous le verrons dans cette section, l'allure de la sensibilité rendant alors les objectifs de conception sur ε et M_s invalides. Ceci justifie la présence d'un compensateur sans incertitude noté μ et d'un compensateur avec incertitude μ_Δ (obtenu à partir de celui sans incertitude).

La Figure 7.7 (et en s'appuyant sur le Tableau 7.6) montre avec les courbes bleues pour la commande μ et rouges pour la commande B que l'objectif a été atteint avec un minimum ε en BF similaire et un maximum M_s également similaire pour l'ensemble des axes *x, y, z* et des angles ϕ, θ, ψ. La transition dans les phases intermédiaires est amorcée plus tôt avec le compensateur μ, expliquant possiblement la réponse unitaire plus lente relativement à la commande B que nous observerons en 7.3.1.3.

Pour les axes *x* ou *y,* $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et *z* le compensateur μ_Δ montre avec la courbe verte une minimisation de la sensibilité plus importante en BF et des résultats similaires en HF.

Le PID donne des résultats convaincants pour les 5 sous-systèmes avec une forte minimisation de $S_{ey}(s)$ en BF, ainsi qu'une minimisation plus importante du maximum M_s en HF. Notons toutefois que ses bonnes allures de la sensibilité nécessitent un gain important du compensateur générant une forte consommation d'énergie.



(a) Sous-système x ou y

(b) Sous-système θ ou ϕ

(c) Sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

(d) Sous-système ψ

(e) Sous-système z

Figure 7.7 Diagramme de Bode du gain de la sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ(d) avec les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir)

Tableau 7.6 Sensibilité $S_{ey}(s)$ sur les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour des angles θ ou ϕ, ψ pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID

		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	ψ	z	x ou y	θ ou ϕ
M_s [dB]	B	3.28	2.39	2.93	2.76	2.43
	μ	4.22	2.43	1.47	2.81	2.35
	μ_Δ	8.24	1.92	2.09	2.3	1.67
	PID	2.16	0	1.97	0	1.72
ε [dB]	B	-46.5	-61.1	-46.6	-52.6	-48.1
	μ	-46.5	-61	-46.7	-52.6	-48.1

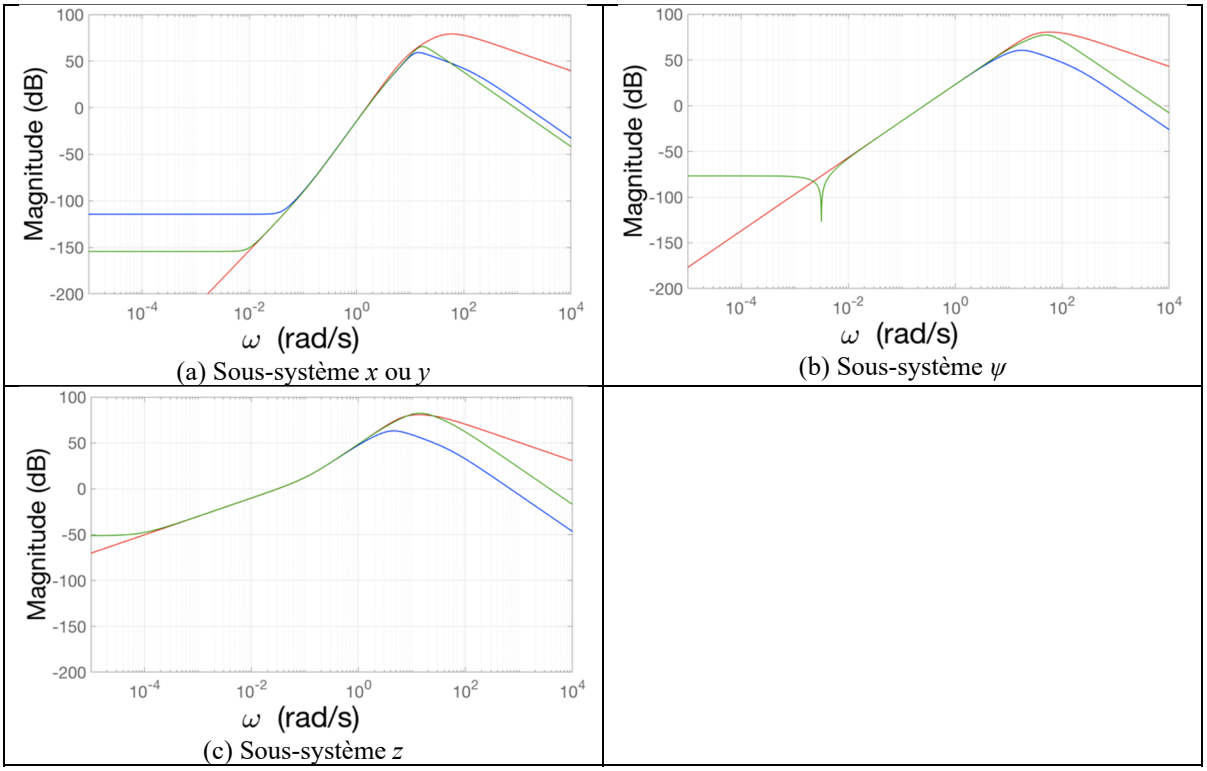
7.2.4.3 Discussion

Cette partie nous a permis de valider les objectifs communs de conception des compensateurs B, H_2, H_∞ et μ, soit : $S_{ey}(s) < \varepsilon$ pour $\omega < \omega_1$ et $S_{ey}(s) < M_s$ pour toutes les fréquences. L'insertion d'incertitude dans la conception du compensateur de μ_Δ tend à déformer la fonction de transfert de sa sensibilité $S_{ey}(s)$ en BF en accentuant la minimisation de l'erreur, mais parfois en augmentant également le maximum M_s pouvant conduire à une dégradation des performances temporelles. La commande PID génère une bonne minimisation de l'erreur en BF et du maximum M_s.

7.2.5 Sensibilité $S_{du}(s)$

7.2.5.1 Commandes B, H_2, H_∞

La sensibilité $S_{du}(s)$ illustrée à la Figure 7.8 montre pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) une bonne atténuation du bruit de mesure sur la sortie en haute fréquence en (a), (b) et (c). De plus, les pentes négatives en HF assurent une minimisation du bruit hautes fréquences.



(a) Sous-système x ou y

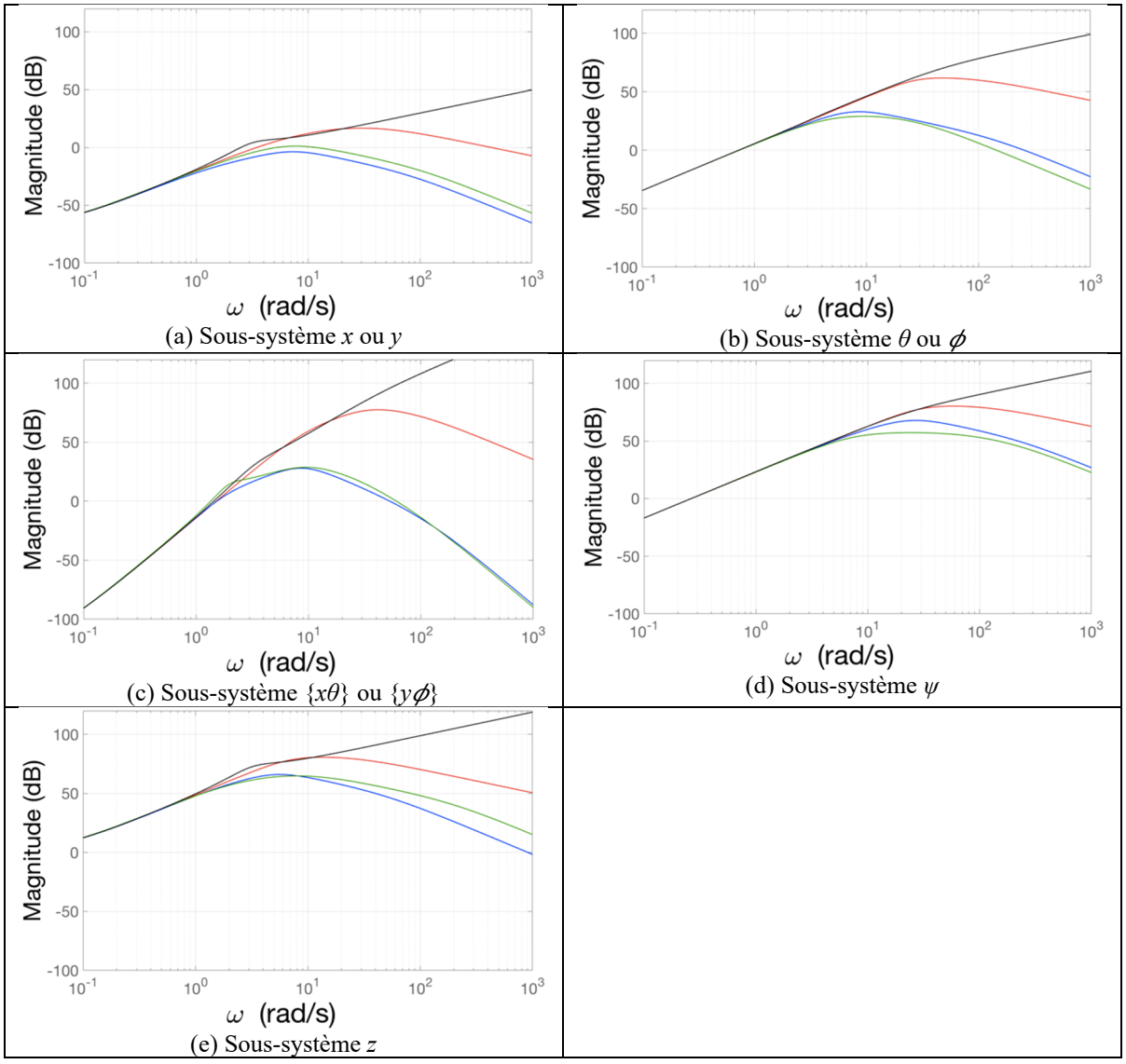
(b) Sous-système ψ

(c) Sous-système z

Figure 7.8 Sensibilité $S_{du}(s)$ sur les axes x ou y (a), z (c) et autour de l'angle ψ (b) pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu)

7.2.5.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID

Comme le montre la Figure 7.9, les commandes B (rouge), μ (bleue) et μ_Δ (verte) minimisent le bruit de hautes fréquences puisque le diagramme d'amplitude de Bode de la fonction de transfert $S_{du}(s)$ possède une pente négative au-delà d'une fréquence importante en (a-b-c-d-e). Notons que la commande B a un maximum plus important que la commande μ-synthèse et aurait donc tendance générer des amplitudes des signaux de commandes plus élevées. La commande PID (noire) tend à amplifier l'effet du bruit sur la mesure puisqu'elle continue d'augmenter dans les hautes fréquences. L'insertion d'un filtre pour minimiser l'effet du bruit sur la sortie du signal de commande $u(t)$ est une solution possible pour remédier à ce problème.



(a) Sous-système x ou y

(b) Sous-système θ ou ϕ

(c) Sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

(d) Sous-système ψ

(e) Sous-système z

Figure 7.9 Sensibilité $S_{du}(s)$ sur les axes x ou y (a), $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ (c), z (e) et autour des angles θ ou ϕ (b), ψ (d) pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir)

7.2.5.3 Discussion

Nous avons vu dans cette partie avec l'étude de la sensibilité $S_{du}(s)$, que les commandes μ et μ_Δ ont montrées la meilleure habilitée à réduire le bruit de haute fréquence. La commande H_∞ présente également une bonne capacité de réduction du bruit de mesure sur la commande, suivie de proche par la commande H_2. La commande B présente un gain plus élevé et possiblement une sensibilité plus importante au bruit de mesure sur la commande. Les résultats

les moins convaincants sont obtenus par la commande PID dont le gain en HF ne cesse d'augmenter et met en évidence une probable amplification des bruits sur la commande.

7.3 Domaine temporel

L'objectif de cette section est d'analyser les performances temporelles des commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique. Les conditions de tests suivantes seront étudiées :

1. Réponse unitaire ;
2. Scénario de vol ;
3. Influence des couplages ;
4. La consigne de vol hélicoïdale.

7.3.1 Réponse unitaire

7.3.1.1 Conditions de test

L'objectif ici consiste à évaluer les performances temporelles des algorithmes de commande lorsqu'un échelon est appliqué sur l'entrée *r* de la boucle de commande illustrée à la Figure 7.10. On retrouve donc sur cette figure les variables suivantes : la sortie mesurée *y* ; l'erreur *e* ; la commande *u* ; le compensateur *C* ; le processus *P*. Le détail de chacun des éléments précités dépend du type de compensateur issu des CHAPITRE 4, CHAPITRE 5, CHAPITRE 6 et de la structure de commande développée au CHAPITRE 3.

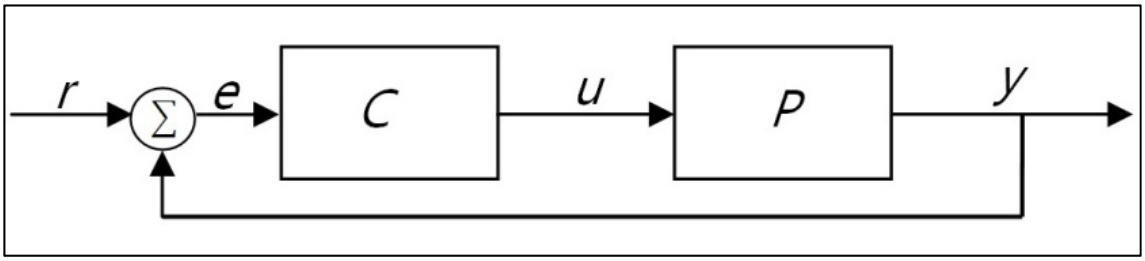


Figure 7.10 Schéma général de la boucle de commande

Pour chacun des tests l'entrée *r* a pour référence un échelon valant 1 lorsque les compensateurs linéaires B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ PID sont associés à un processus linéaire. Puis, pour rester dans une gamme de fonctionnements acceptables des compensateurs linéaires, cet échelon de référence est réduit à 0.1 lorsque les compensateurs linéaires B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID et les compensateurs non linéaires backstepping et hiérarchique sont associés à un processus non linéaire.

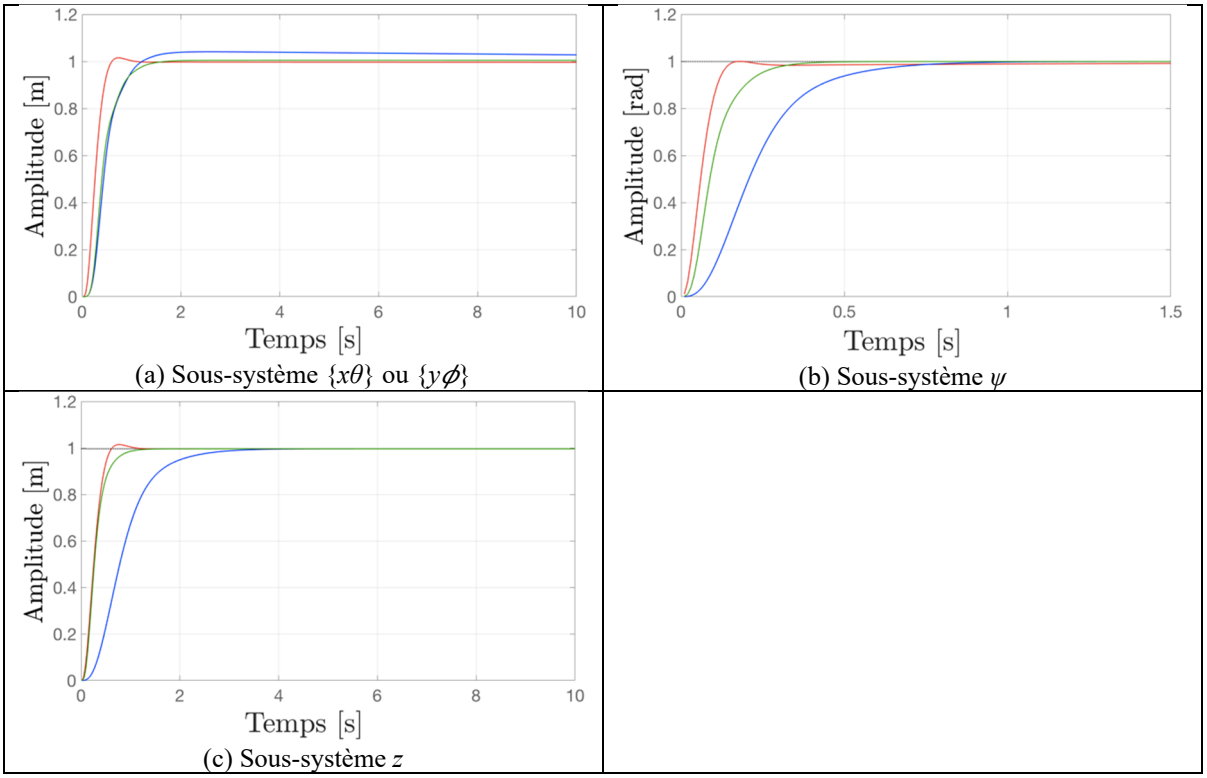
Les performances temporelles sont évaluées en observant la sortie *y* via les métriques suivantes :

1) $t_{s2\%}$ [s] : Temps d'établissement à 2 % ;
2) $t_{s5\%}$ [s] : Temps d'établissement à 5 % ;
3) t_r [s] : Temps de montée décrivant le passage de 10 % à 90 % de la valeur de consigne ;
4) e_{ss} [%] : Erreur statique par rapport à la consigne ;
5) D [%] : Dépassement maximum de la valeur de consigne.

7.3.1.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

Les réponses unitaires pour les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et l'angle ψ pour les compensateurs linéaires B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) sur le processus linéaire $P(s)$ définie en (3.5.1) sont représentées à la Figure 7.11 et les valeurs numériques reportées au Tableau 7.7.

La commande B est plus rapide dans les trois cas (a), (b) et (c). Le compensateur H_2 donne un temps d'établissement plus rapide que H_∞ pour les cas (c) et (b). Le temps d'établissement est similaire pour les compensateurs H_2 et H_∞ en (a) néanmoins, la présence d'une erreur statique d'environ 2 % est constatée avec H_∞. Aucun dépassement *D* supérieur à 2 % n'est constaté.



(a) Sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

(b) Sous-système ψ

(c) Sous-système z

Figure 7.11 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) sur le processus linéaire

Tableau 7.7 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus linéaire

Sortie		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z	ψ
$t_{s2\%}$ [s]	B	0.75	0.52	0.14
	H_2	1.24	0.71	0.31
	H_∞	11.6	2.63	0.54
$t_{s5\%}$ [s]	B	0.5	0.57	0.13
	H_2	1.01	0.92	0.24
	H_∞	0.98	2.02	0.69
$t_{r\%}$ [s]	B	0.42	0.41	0.09
	H_2	0.61	0.86	0.21
	H_∞	1.75	0.8	0.47
e_{ss} [%]	B	0	0	1
	H_2	0	0	0
	H_∞	2	0	0
D [%]	B	2	1	0
	H_2	0	0	0
	H_∞	4	0	0

7.3.1.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

La Figure 7.12 présente les réponses unitaires des compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir) respectivement le long des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, x ou y, z et autour des angles ϕ ou θ et ψ appliqués au processus linéaire (3.5.2).

Les performances temporelles reportées au Tableau 7.8, montrent des temps de montées t_r similaires entre les commandes B et PID. Néanmoins, la présence de dépassement et d'oscillation pour le PID tend à rallonger le temps d'établissement t_s et à conserver une erreur statique plus longtemps comme à la Figure 7.12 (d).

Le compensateur μ produit une réponse temporelle plus lente que la commande B, mais sans dépassement et avec une erreur finale rapidement annulée. Le compensateur μ_Δ laisse apparaître pour les axes x ou y, $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et z une erreur statique plus longue à s'annuler relativement au compensateur B.

Dans le cas des réponses unitaires des sous-systèmes concernant les angles ϕ ou θ et ψ, la rapidité est diminuée avec le compensateur μ_Δ relativement au compensateur μ. Les résultats temporels semblent donc se dégrader lors de la prise en compte d'incertitude dans la conception du compensateur par μ synthèse.

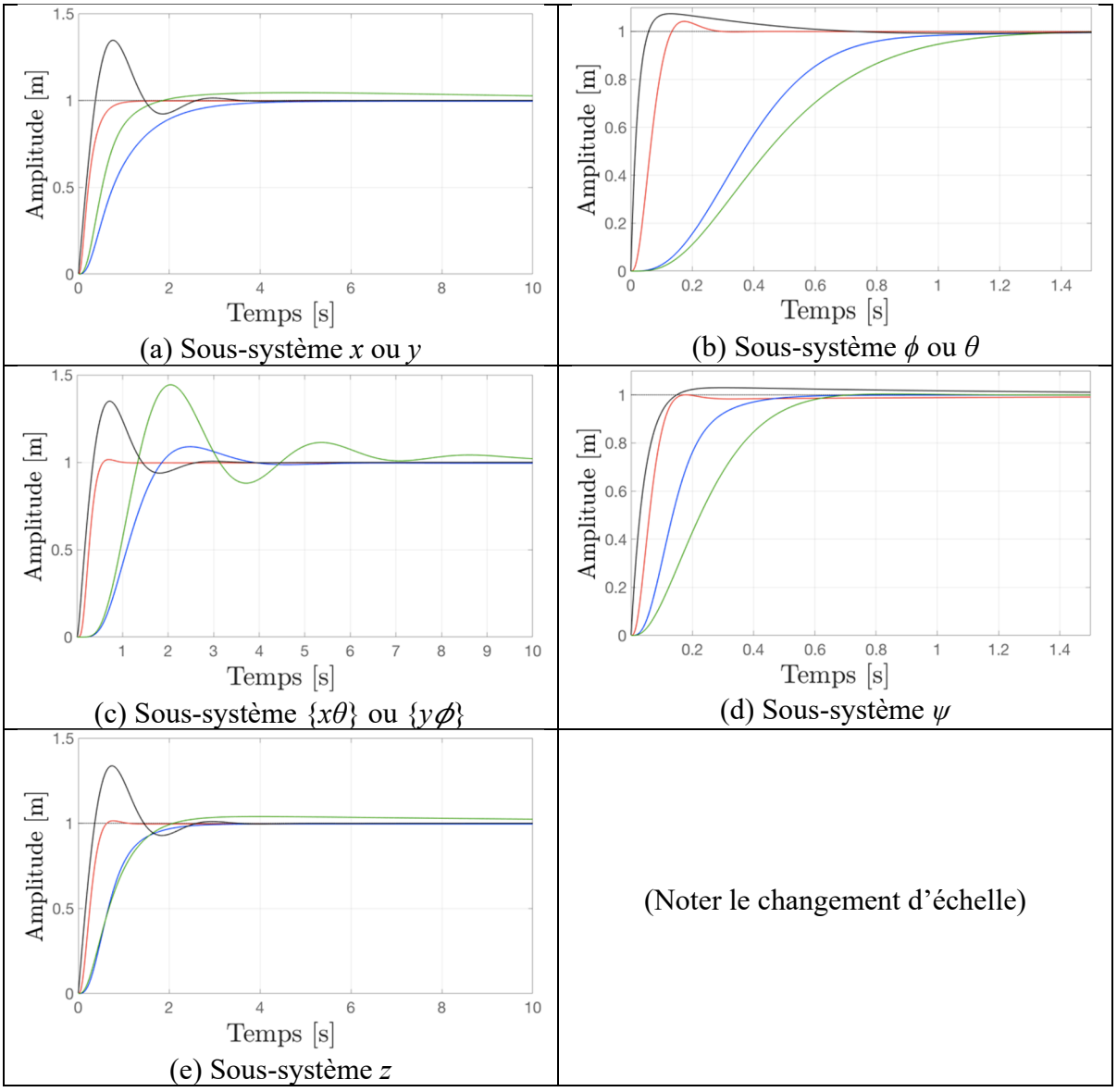


Figure 7.12 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (bleu) sur le processus linéaire

Tableau 7.8 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus linéaire

Sortie		x ou y	θ ou ϕ	$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z	ψ
$t_{s2\%}$ [s]	B	0.87	0.228	0.53	0.58	0.141
	μ	3.49	0.939	3.44	2.3	0.438
	μ_Δ	10.4	1.18	9.72	9.56	0.597
	PID	2.41	0.455	2.35	2.38	0.564
$t_{s5\%}$ [s]	B	0.68	0.118	0.487	0.52	0.126
	μ	2.64	0.767	3.18	1.77	0.345
	μ_Δ	1.38	1.01	6.29	1.68	0.522
	PID	2.18	0.258	2.04	2.13	0.11
$t_{r\%}$ [s]	B	0.62	0.1	0.36	0.42	0.12
	μ	2.44	0.89	1.2	1.52	0.3
	μ_Δ	1.2	0.86	0.81	1.4	0.46
	PID	0.33	0.05	0.3	0.32	0.11
e_{ss} [%]	B	0	0	0	0	0
	μ	0	0	0	0	0
	μ_Δ	3	0	2	2	0
	PID	0	0	0	0	1
D [%]	B	0.1	4.4	2	1.8	0.1
	μ	0	0	8.9	0	0
	μ_Δ	4.4	0	44	3.9	0.4
	PID	35	7.4	35	34	3

7.3.1.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

La Figure 7.13 montre les réponses unitaires le long des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H_∞ (bleu) dans le cas du processus non linéaire (3.5.3). Pour le sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ en (a) d'importants dépassements provoquant un allongement du temps d'établissement t_s sont constatés pour les commandes H_2

et H∞. La commande B présente un léger dépassement en (c), son temps d'établissement t_s est plus en rapide en (a) et similaire aux compensateurs H_2 et H∞ en (b) et (c). Les erreurs statiques e_{ss} sont généralement plus faibles pour la commande B comparée à H_2 et H∞. Le Tableau 7.9 détaille l'ensemble des résultats temporels.

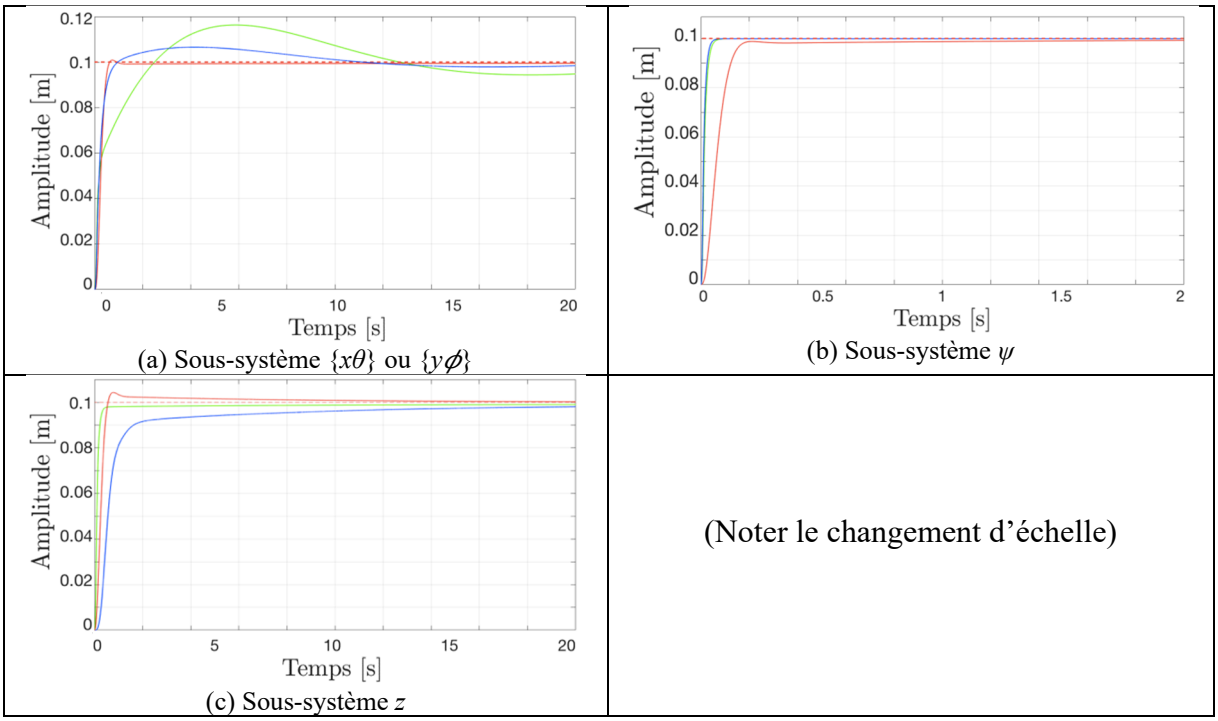


Figure 7.13 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), H_2 (vert) et H∞ (bleu) sur le processus non linéaire

Tableau 7.9 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2 et H∞ sur le processus non linéaire

Sortie		{xθ} ou {yϕ}	z	ψ
$t_{s2\%}$[s]	B	0.57	2.7	0.17
	H_2	∞	0.58	0.04
	H∞	8.6	19.1	0.05
$t_{s5\%}$ [s]	B	0.52	0.5	0.15
	H_2	11.1	0.3	0.03
	H∞	6.5	6.9	0.04

Tableau 7.9 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus non linéaire (suite)

Sortie		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z	ψ
$t_{r\%}$ [s]	B	0.5	0.42	0.13
	H_2	2.03	0.22	0.036
	H_∞	0.59	6.63	0.036
e_{ss} [%]	B	0.6	0.3	0.8
	H_2	5.3	1	0
	H_∞	1.7	2	0
D[%]	B	0.9	4.3	0
	H_2	16.3	0	0
	H_∞	6.5	0	0

7.3.1.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

La Figure 7.14 présente les réponses unitaires appliquées au système non linéaire le long des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (noir). Le détail des performances temporelles est reporté dans le Tableau 7.10.

Tel que désiré les temps de montées t_r entre la commande B et le PID sont presque identiques. Néanmoins le PID génère du dépassement. La commande μ présente très peu de dépassement et obtient des temps d'établissement t_s rapides en (b) et (c). L'insertion d'incertitude dans la conception du compensateur μ_Δ tend à ralentir les performances temporelles du compensateur μ et ajoute du dépassement en (a).

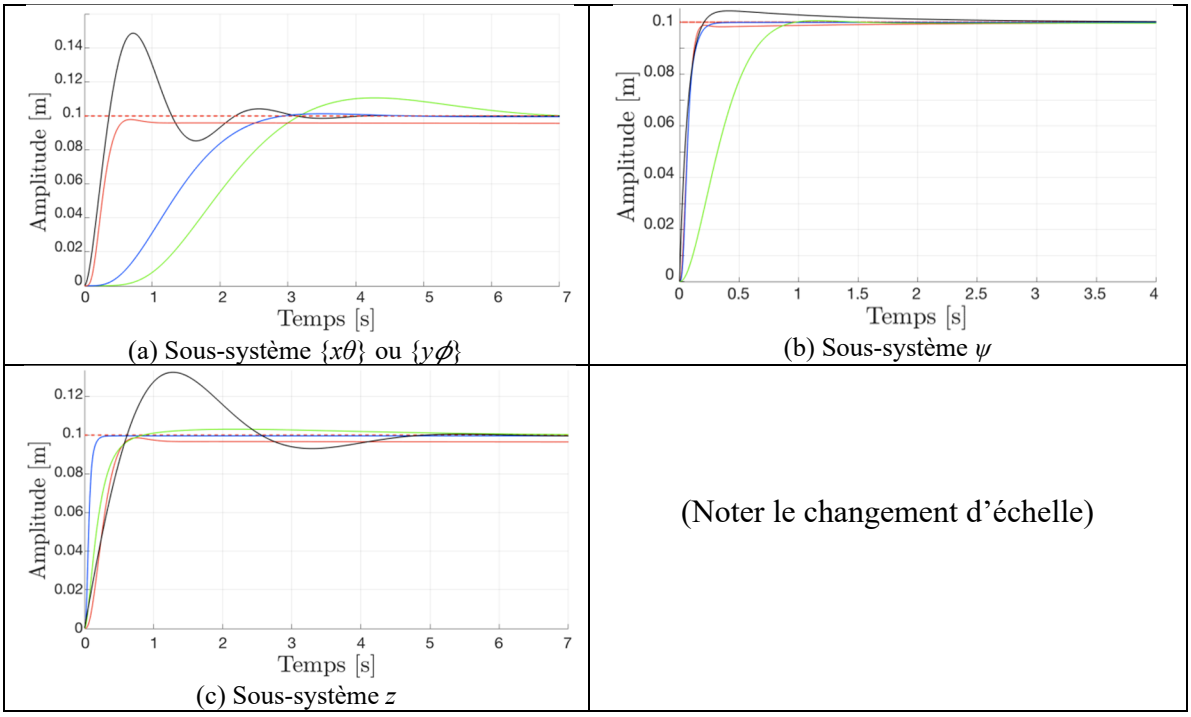


Figure 7.14 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert) et PID (bleu) sur le processus non linéaire

Tableau 7.10 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire

Sortie		{xθ} ou {yϕ}	z	ψ
$t_{s2\%}$ [s]	B	∞	∞	∞
	μ	2.69	0.2	0.21
	μ_Δ	6.21	0.65	0.78
	PID	2.87	4.37	0.17
$t_{s5\%}$ [s]	B	0.53	0.56	0.87
	μ	2.46	0.16	0.18
	μ_Δ	4.08	0.59	0.87
	PID	1.81	3.84	0.15
$t_{r\%}$ [s]	B	0.4313	0.513	0.64
	μ	1.694	0.137	0.17
	μ_Δ	1.9625	0.5	0.65
	PID	0.4122	0.547	0.14

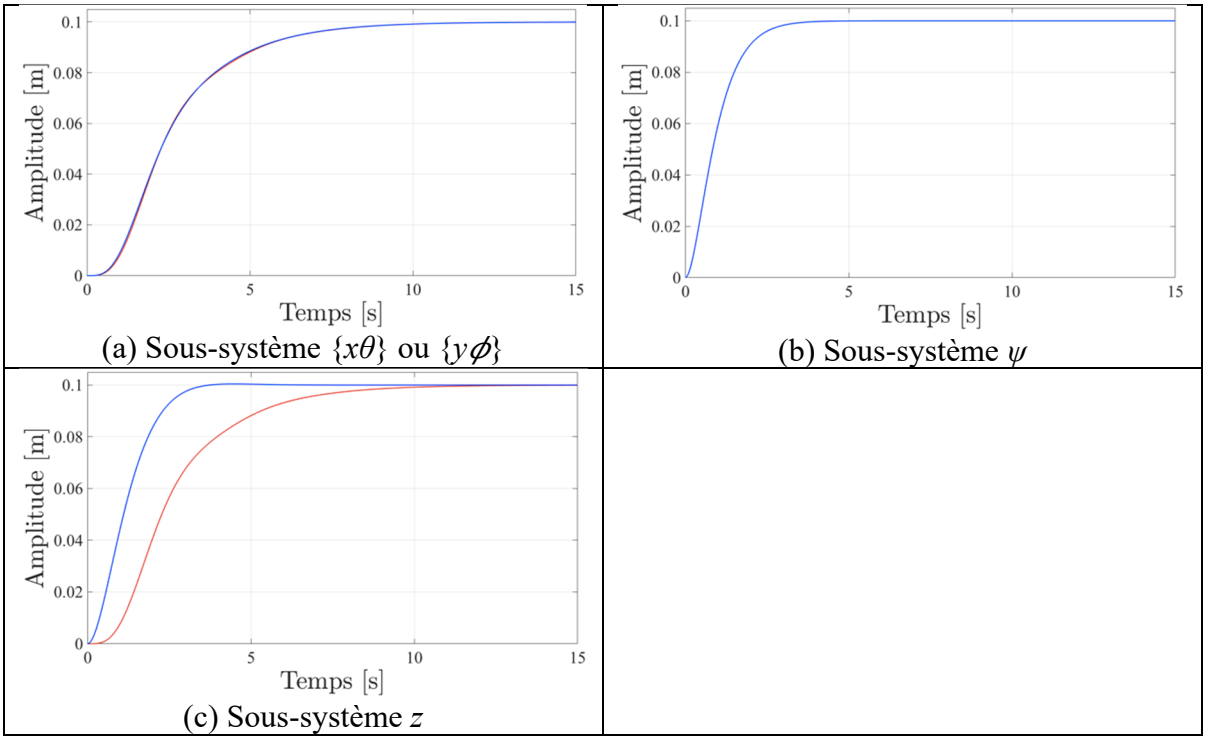
Tableau 7.10 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire (suite)

Sortie		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z	ψ
e_{ss} [%]	B	4.5	3.5	4
	μ	0	0	0
	μ_Δ	1	0	0
	PID	1.1	0	0
D [%]	B	0	0	0
	μ	1.3	0	0
	μ_Δ	12.2	3.6	1.2
	PID	48	32	4.4

7.3.1.6 Commandes backstepping et hiérarchique

Les réponses unitaires pour les commandes par backstepping (rouge) et hiérarchique (bleue) sont similaires pour les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ avec une consigne de 0.1 m et pour l'angle ψ avec une consigne de 1 rad comme le montre la Figure 7.15 (a) et (b).

La commande hiérarchique le long de l'axe z Figure 7.15 (c) est la plus rapide. Aucun dépassement D ou erreur statique e_{ss} n'est observé.



(a) Sous-système $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

(b) Sous-système ψ

(c) Sous-système z

Figure 7.15 Réponse unitaire $y(t)$ pour les compensateurs backstepping (rouge) et hiérarchique (bleu)

Tableau 7.11 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Sortie		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z	ψ
$t_{s2\%}$[s]	backstepping	8.4	8.3	2.9
	hiérarchique	8.4	3	2.9
$t_{s5\%}$ [s]	backstepping	6.6	6.6	2.4
	hiérarchique	6.6	2.7	2.4
$t_{r\%}$ [s]	backstepping	5.83	5.7	2.2
	hiérarchique	5.83	2.5	2.2
e_{ss} [%]	backstepping	0	0	0
	hiérarchique	0	0	0
D [%]	backstepping	0	0	0
	hiérarchique	0	0	0

7.3.1.7 Discussion

Nous avons réalisé dans cette partie l'étude des performances temporelles des compensateurs B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ et PID pour une entrée échelon sur un modèle linéaire de drone puis sur un modèle non linéaire de drone. Excepté la commande PID qui présente presque systématiquement des dépassements, les performances temporelles sont globalement satisfaisantes, principalement concernant les commandes B et μ.

On remarque des limitations de la part des commandes linéaires B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ et PID lorsqu'elles sont appliquées au modèle non linéaire de drone. En effet, pour conserver des résultats exploitables l'amplitude de l'échelon d'entrée a été réduite à 0.1 m. Un échelon au-delà de cette limite conduit rapidement à une dégradation des performances temporelles, engendrant ainsi une réponse unitaire plus lente avec une augmentation de l'erreur statique.

Les réponses temporelles des commandes non linéaires backstepping et hiérarchique sont plus lentes pour un échelon de 0.1 m relativement aux commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ et PID lorsqu'elles sont appliquées sur le modèle non linéaire de drone. Cependant, lors d'une augmentation de l'échelon d'entrée à 10 m par exemple, les commandes backstepping et hiérarchique parviennent à conserver le même niveau de performances temporel qu'indiqué au Tableau 7.11, tandis que les commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ et PID voient leurs performances temporelles considérablement dégradées (temps de réponse beaucoup plus long et apparition d'erreur statique).

Dans le Tableau 7.12 est inscrit le nom de la commande obtenant les meilleures performances temporelles dans sa section respective (à partir du Tableau 7.7 jusqu'au Tableau 7.11), pour une réponse à un échelon entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID appliqué sur un modèle linéaire (3.5.1) (3.5.2) et non linéaire (3.5.3) (3.5.4) de processus ; backstepping et hiérarchique appliquées à un modèle non linéaire de processus (3.5.3). Notons que le Tableau 7.12 permet d'extraire les commandes les plus performantes, mais ne permet pas de quantifier l'écart de performance entre les commandes.

Tableau 7.12 Résumé des meilleures performances temporelles pour une réponse à un échelon entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID appliqué sur un modèle linéaire et non linéaire de processus ; backstepping et hiérarchique appliqué à un modèle non linéaire de processus

Processus	Linéaire (7.3.1.2)	Linéaire (7.3.1.3)	Non linéaire (7.3.1.4)	Non linéaire (7.3.1.5)	Non linéaire (7.3.1.6)
Commande	B, H_2, H_∞	B, μ, μ_Δ, PID	B, H_2, H_∞	B, μ, μ_Δ, PID	backstepping hiérarchique
$t_{s2\%}$[s]	B	B	B	μ	hiérarchique
$t_{s5\%}$ [s]	B	B	B	B	hiérarchique
$t_{r\%}$ [s]	B	PID	B	PID	hiérarchique
e_{ss} [%]	H_2	B et μ	B	μ	backstepping hiérarchique
D [%]	H_2	μ	H_∞	B	backstepping hiérarchique

7.3.2 Scénario

7.3.2.1 Conditions de test

Le scénario permet de valider la bonne coordination entre les angles ϕ ou θ et les axes x ou y. L'effet des couplages entre les entrées et les sorties lors d'un changement de consigne pourra être évalué avec les tests sur les processus non linéaires (3.5.3) ou (3.5.4). L'amplitude des signaux de commandes u_ϕ, u_θ, u_ψ, u_z à l'entrée du processus linéaire ou L, M, N, T_z à l'entrée du processus non linéaire seront observées pour détecter des potentielles saturations des actionneurs. Le réalisme des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sera évaluée sachant que théoriquement pour un vol stationnaire $\omega_0 = 1345$ rads/s. Les conditions initiales en positions linéaires et angulaire ψ_0 se résume à :

$$\xi_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad \text{et} \quad \psi_0 = 0.3 \tag{7.1}$$

En se référant à la Figure 7.10, le scénario consiste à appliquer sur l'entrée r une série de référence sur les axes $r = [x_d, y_d, z_d]^T$ et autour de l'angle ψ_d à des temps t_x, t_y, t_z, t_ψ, ce qui se résume par :

$$
\begin{aligned}
x_d &= [0.1 \quad 0.2 \quad 0.1 \quad 0 \quad -0.1 \quad 0]^T \\
t_x &= [0 \quad 15 \quad 30 \quad 45 \quad 60 \quad 75]^T \\
\\
y_d &= [0.1 \quad -0.1 \quad -0.2 \quad -0.1 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0]^T \\
t_y &= [0 \quad 5 \quad 20 \quad 35 \quad 50 \quad 65 \quad 80]^T \\
\\
z_d &= [1 \quad 1.1 \quad 1 \quad 0.9 \quad 0.8 \quad 0.9 \quad 1]^T \\
t_z &= [0 \quad 10 \quad 20 \quad 40 \quad 55 \quad 70 \quad 85]^T \\
\\
\psi_d &= [0 \quad 0.15 \quad -0.15 \quad -0.25 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0]^T \\
t_\psi &= [0 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 49 \quad 63 \quad 77]^T
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

On remarque selon (7.2) que le déplacement maximum réalisé pour un changement de référence est de 0.2 m concernant les axes x, y, z ou de 0.3 rad autour de l'angle ψ. Les amplitudes des déplacements ont été choisies volontairement petites, puisque les performances des algorithmes de commandes linéaires appliqués à une représentation non linéaire de drone sont rapidement détériorées lorsque la consigne s'éloigne des conditions d'équilibre de vol stationnaire.

7.3.2.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

Le scénario des commandes de références décrit en (7.2) appliquées aux commandes B, H_2 et H_∞ donne les résultats représentés sur la Figure 7.16 pour les axes x, y, z et à la Figure 7.17 concernant les réactions sur les angles ϕ, θ et ψ. Les sens de variations des angles ϕ, θ lors d'un changement de consigne sur x, y sont cohérents et leurs amplitudes comprises entre ± 0.5 rad ne devraient pas provoquer le décrochage de l'appareil.

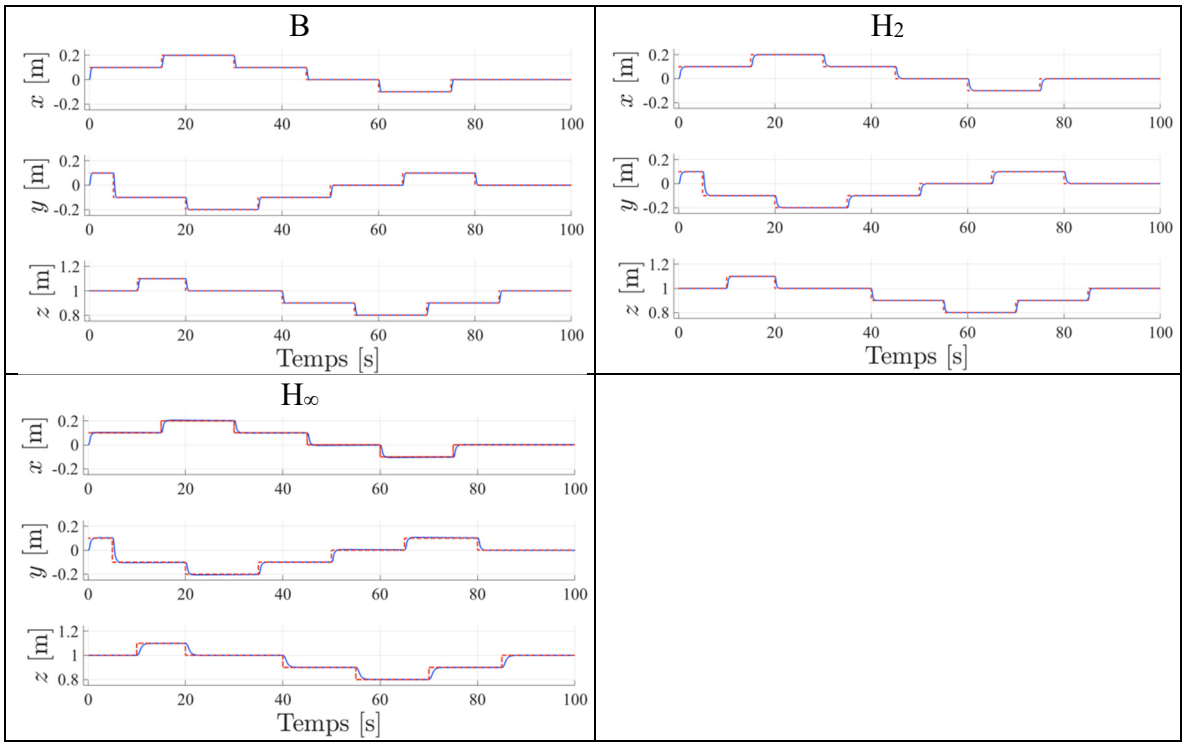


Figure 7.16 Réponses temporelles (bleue) sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence (pointillé rouge) défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

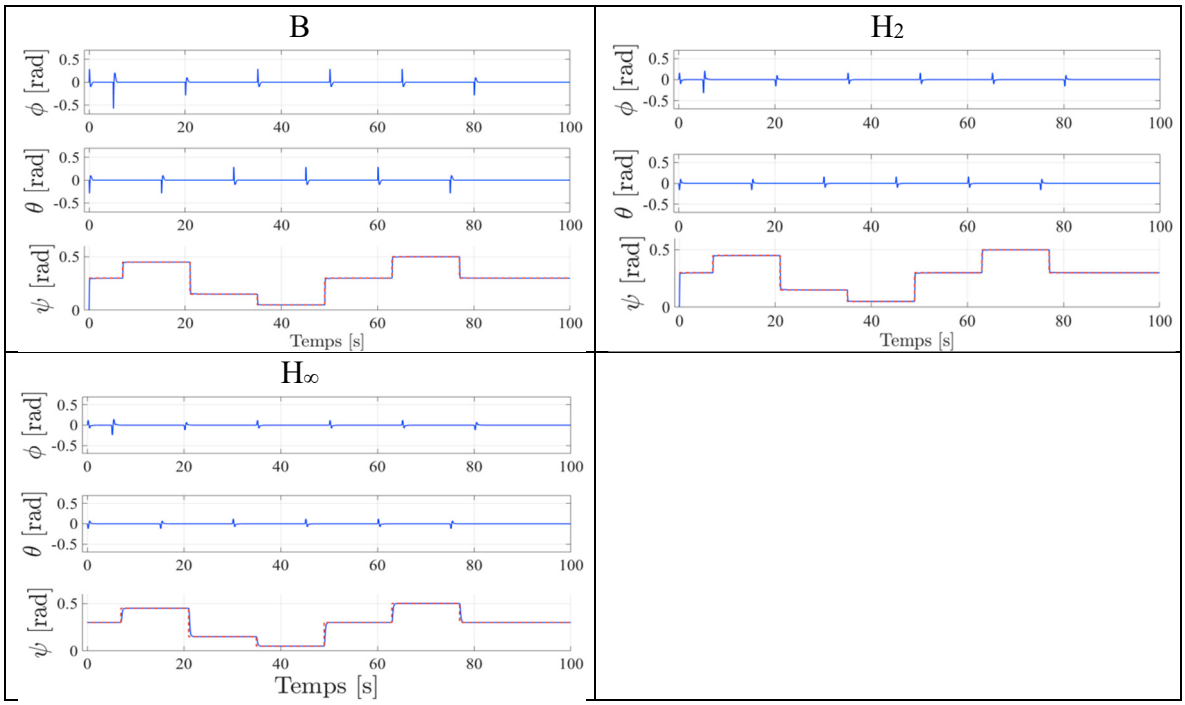


Figure 7.17 Réponses temporelles (bleue) des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence (pointillé rouge) défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

La Figure 7.18 montre que la commande B nécessite des amplitudes des signaux de commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z plus importantes tandis que la commande H_∞ génère des maxima des amplitudes des signaux de commandes les plus petits.

Il est néanmoins difficile d'appréhender la réalisabilité, c.-à-d. la non-saturation des actionneurs, car ces valeurs linéarisées dont l'unité serait le rad/s ne correspondent pas directement à un signal en pratique.

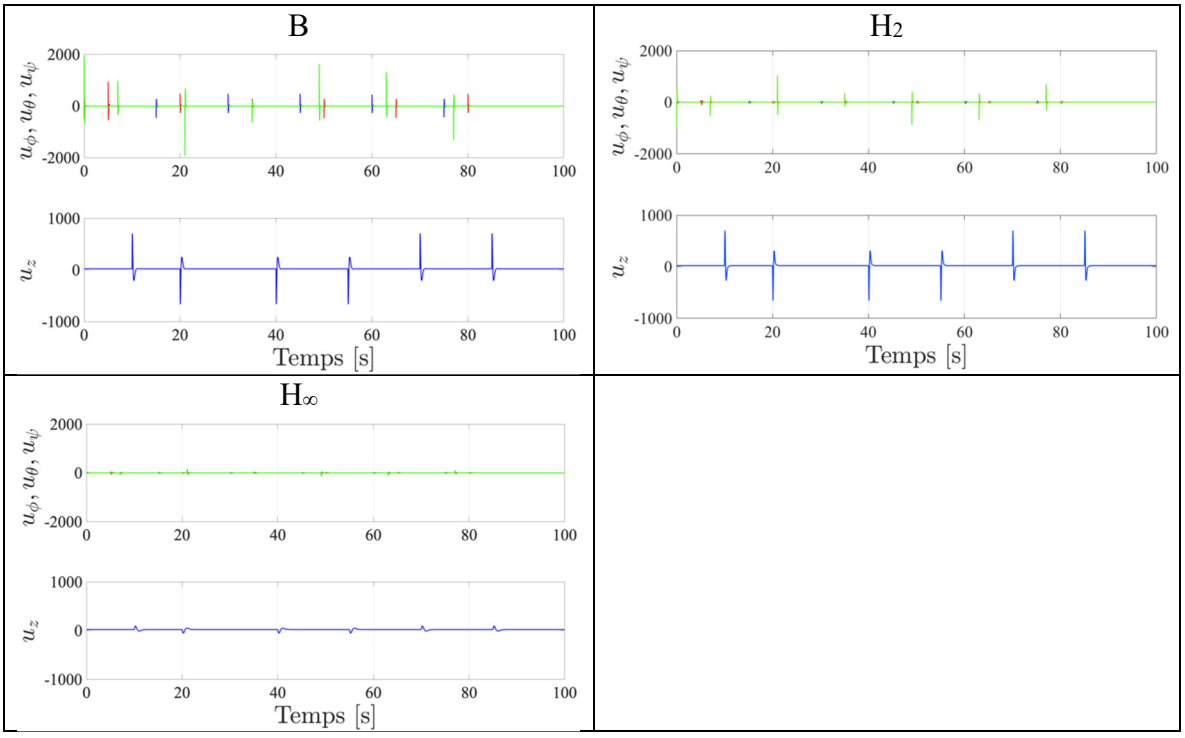


Figure 7.18 Réponses des commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte) et u_z pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

Les valeurs des vitesses de rotation des moteurs de la Figure 7.19 sont centré sur ω_0 = 1345 rads/s et sont donc cohérentes. Malgré des amplitudes plus importantes et des pics de vitesses pouvant générer des à-coups dans les déplacements pour les commandes B et H_2 elles semblent réalisables. La commande H_∞ donne quant à elle des variations d'amplitude des vitesses plus favorables pour être appliquées en pratique puisqu'elles sont plus faibles.

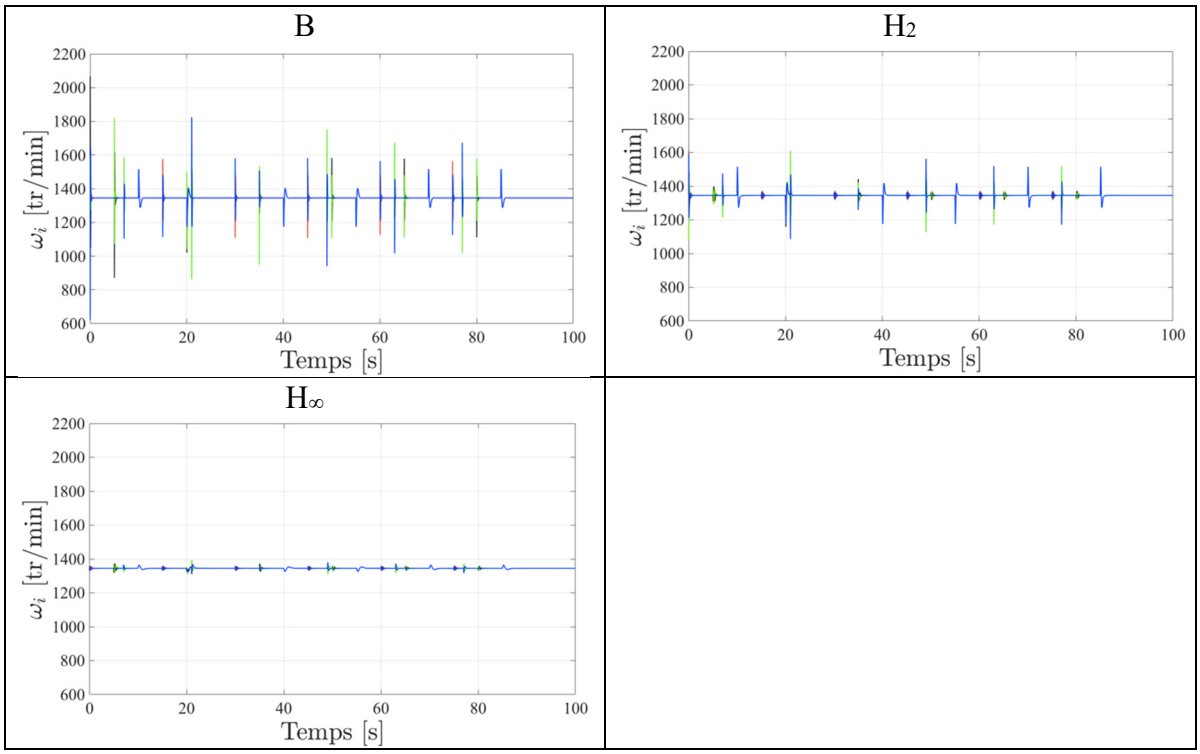


Figure 7.19 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

7.3.2.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

On observe sur les Figure 7.20 et Figure 7.21 des sens de variations cohérents des angles ϕ, θ relativement au changement de consigne sur x, y pour les commandes B, μ, μ_Δ, PID. Néanmoins, les amplitudes des angles ϕ, θ avoisinant jusqu'à ± 2 rads dans le cas du compensateur PID sont importantes et pourraient provoquer le décrochage du drone. Les commandes B et μ obtiennent des variations d'angles comprises environs entre $\pm$ 0.5 rad, ce qui semble réaliste. Les commandes μ et μ_Δ obtiennent des variations d'angles faibles d'environs $\pm$ 0.03 rad.

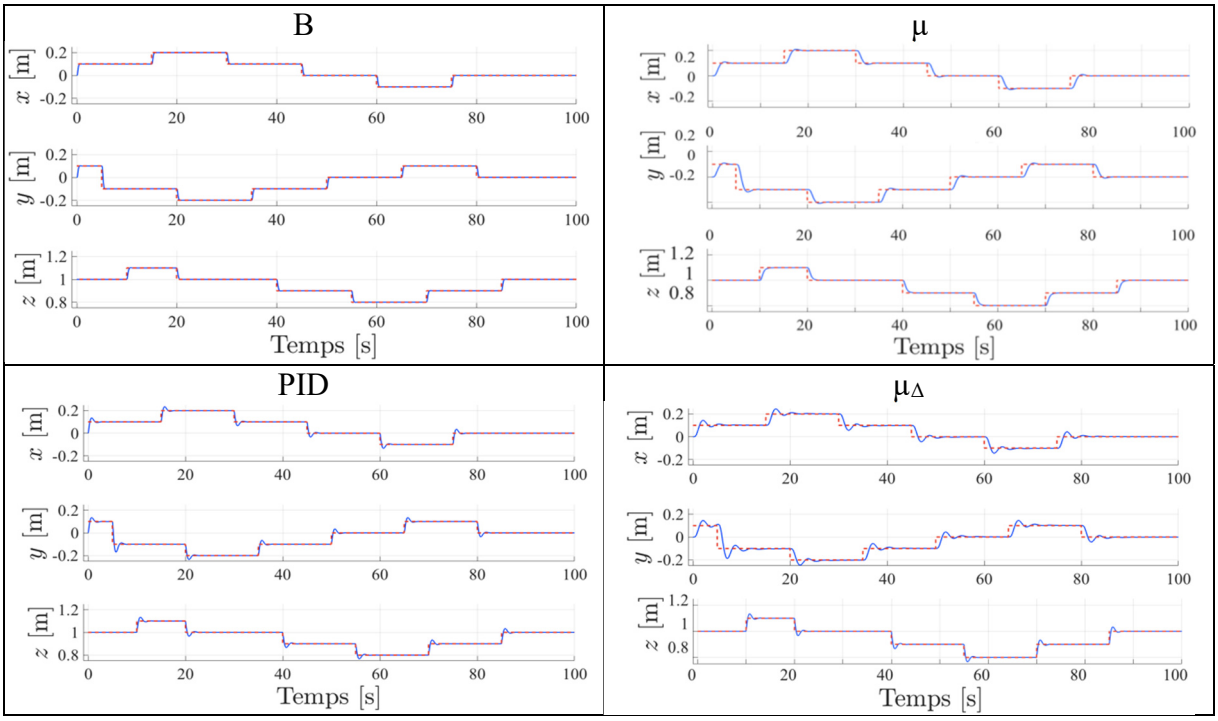


Figure 7.20 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire

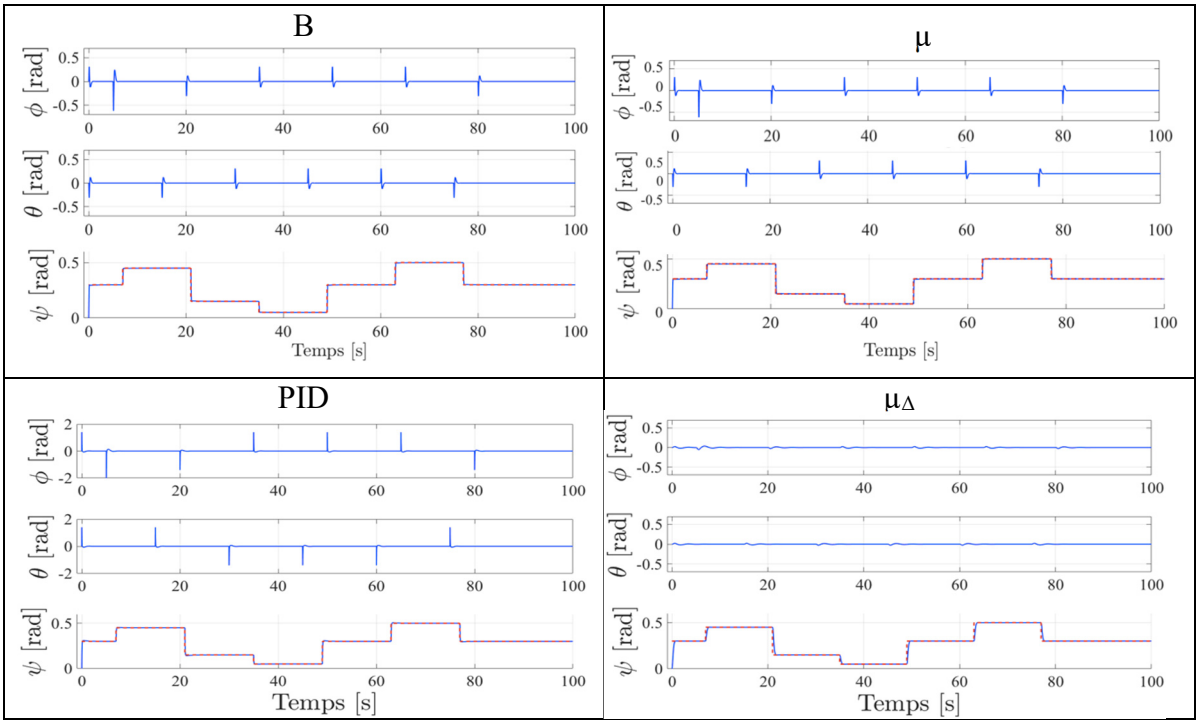


Figure 7.21 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire

Les variations des signaux de commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z pour le scénario de référence défini en (7.2), sont représentées à la Figure 7.22. La réalisabilité du PID semble compromise à cause des amplitudes importantes risquant de saturer les actionneurs. Les signaux de commandes plus faibles de la commande B paraissent plus réalisables et celles des commandes μ et μ_Δ d'autant plus.

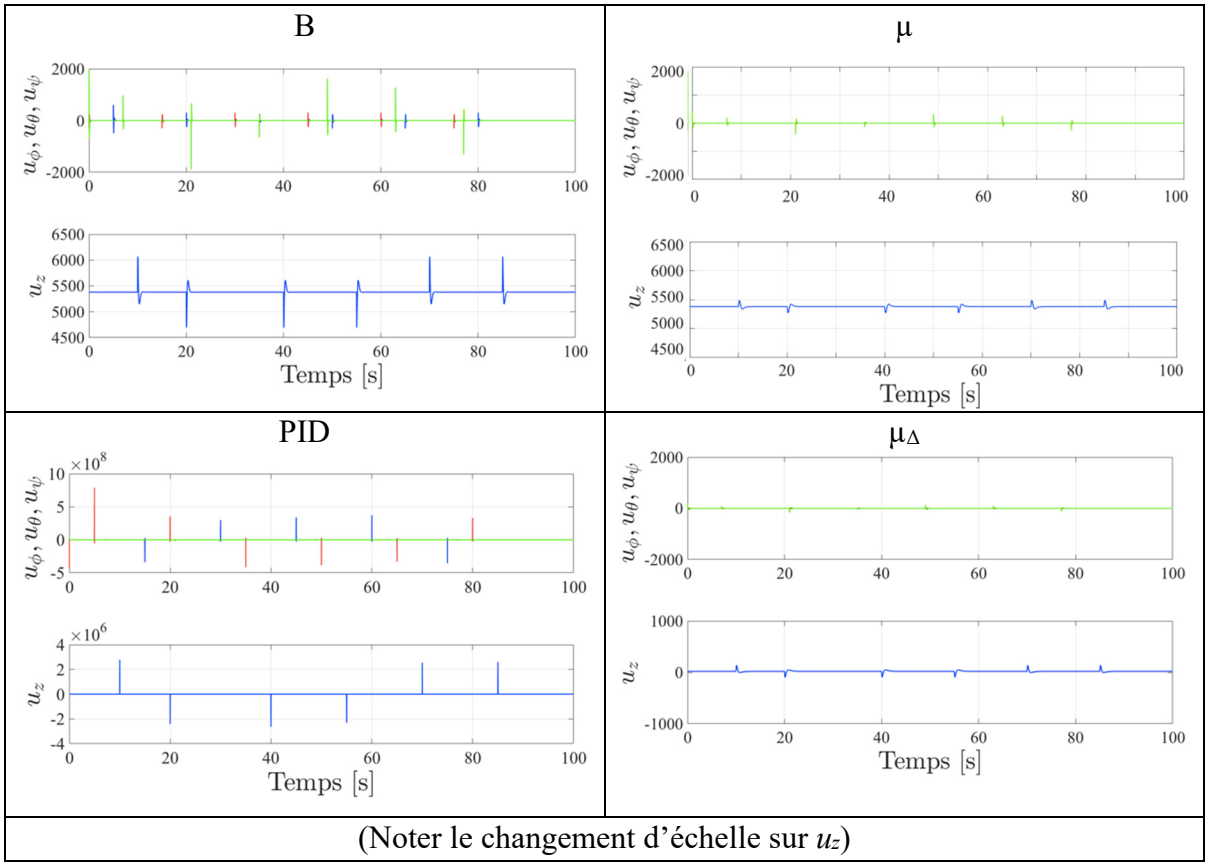


Figure 7.22 Réponses des commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte) et u_z pour le scénario de référence (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire

Les amplitudes des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) des moteurs montrées à la Figure 7.23 suivent la même tendance que les signaux de commandes u_ϕ, u_θ, u_ψ et u_z.

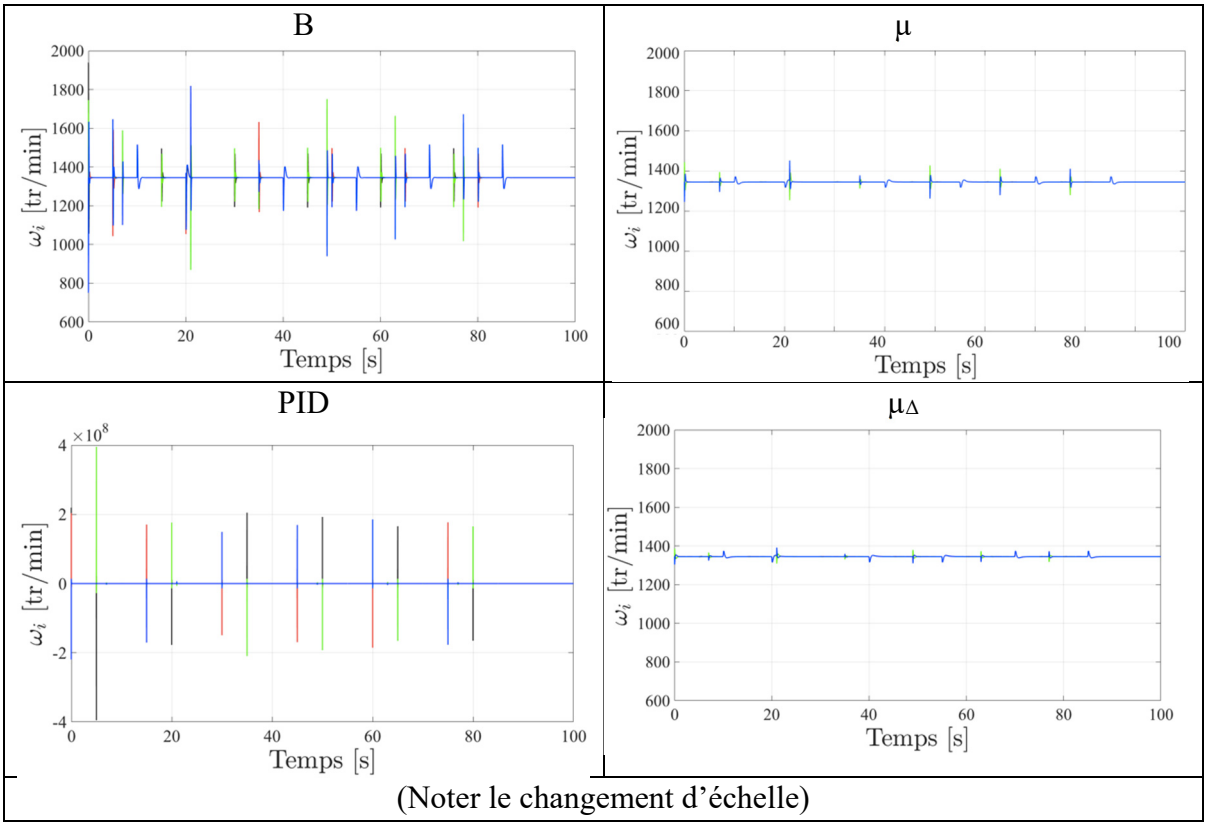


Figure 7.23 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus linéaire

7.3.2.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

L'application du scénario de référence (7.2) aux commandes B, H_2 et H_∞ lorsqu'elles sont associées au processus non linéaire donne les résultats représentés sur la Figure 7.24, pour les axes *x, y, z* ainsi que la réaction des angles ϕ, θ et l'angle commandé ψ à la Figure 7.25. On observe des variations des angles ϕ, θ réalisables pour la commande B, soit environ ± 0.5 rad. Ces variations d'angles ϕ, θ sont plus proches du décrochage de l'appareil dans le cas de la commande H_∞ avec des variations d'amplitudes comprises environ entre ± 1 rad. Dans le cas de la commande H_2 les angles ϕ, θ sont plus importantes et peuvent aller jusqu'à 4 rads, le risque de faire décrocher l'appareil est alors important. On notera également la présence des couplages sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ lorsque des déplacements sont réalisés sur les axes $\{y\phi\}$ ou $\{x\theta\}$.

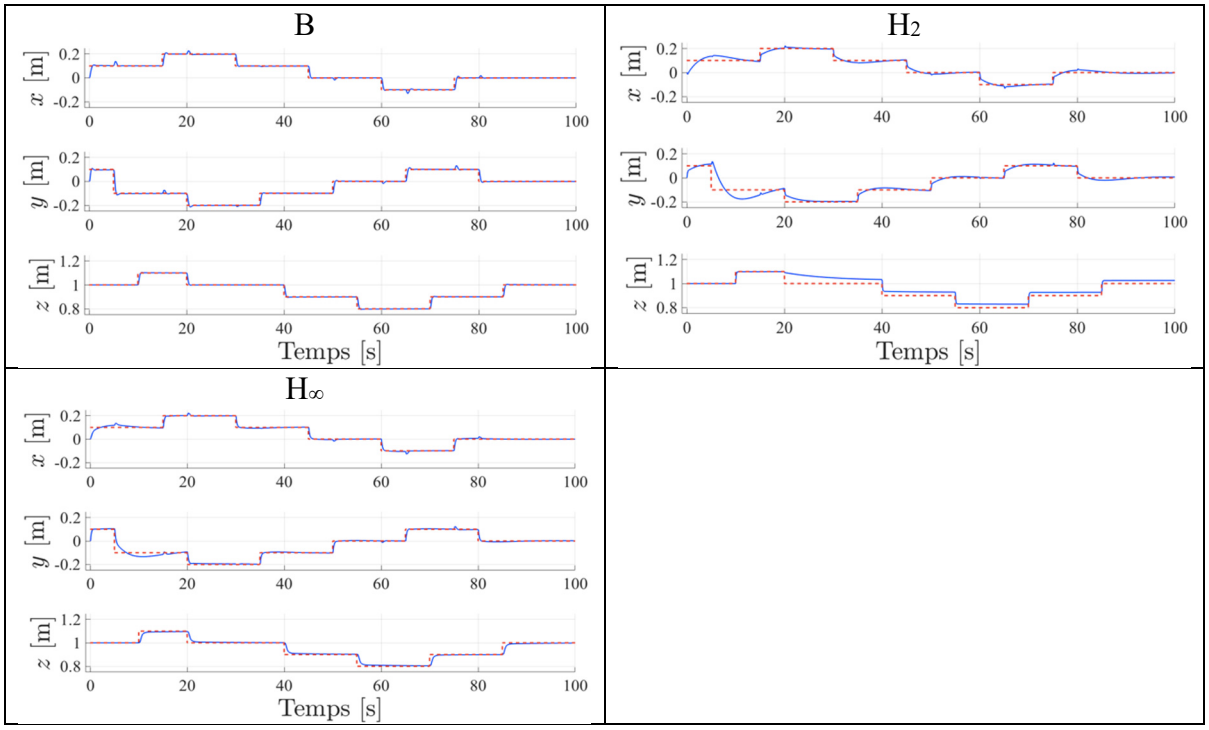


Figure 7.24 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

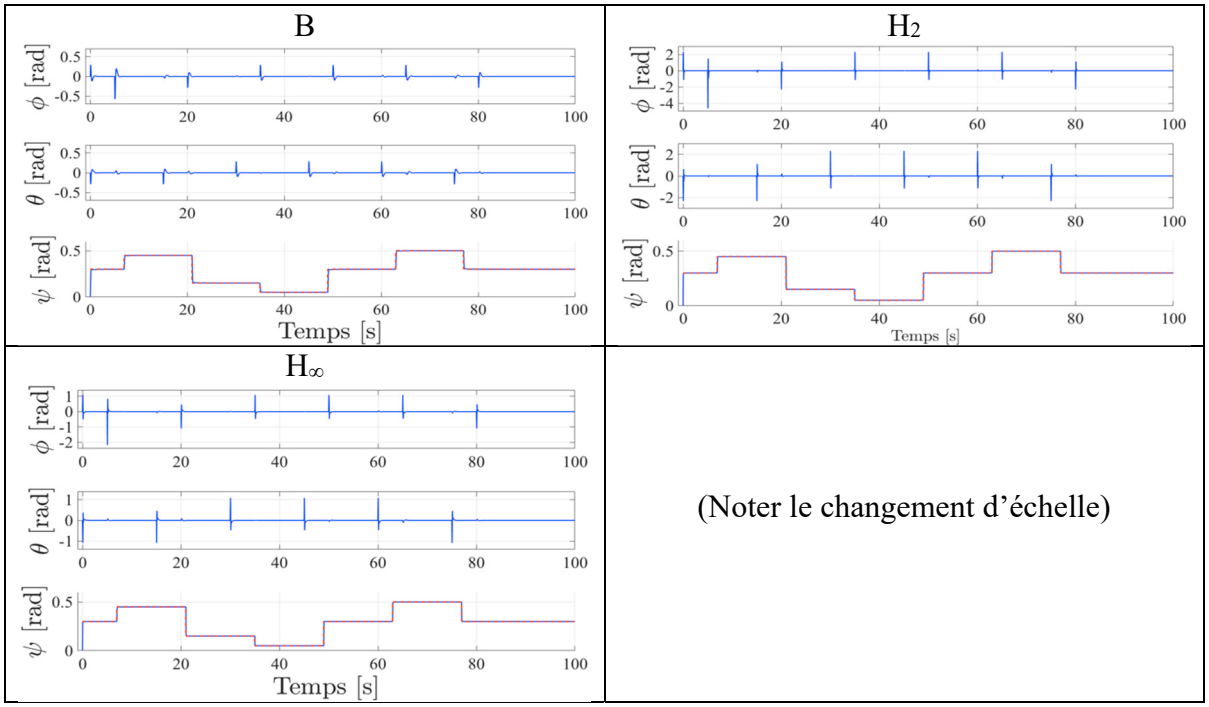


Figure 7.25 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

Les amplitudes des commandes en couples *L, M, N* représentées à la Figure 7.26 pour le scénario de référence défini en (7.2), sont les plus faibles dans le cas de la commande B, puis vient la commande H∞ avec des amplitudes plus importantes, puis la commande H_2 avec d'importantes amplitudes risquant de saturer les actionneurs.

Les amplitudes des commandes en poussées T_z pour le scénario de référence défini en (7.2), sont toutes centrées sur $T_z = mg = 21{,}5$ N, soit la force de poussée nécessaire pour maintenir le drone en vol stationnaire. La commande H∞ obtient les amplitudes les plus faibles, la commande B possède des amplitudes plus importantes, mais sans doute réalisables. Enfin la commande H_2 génère des amplitudes de T_z les plus grandes.

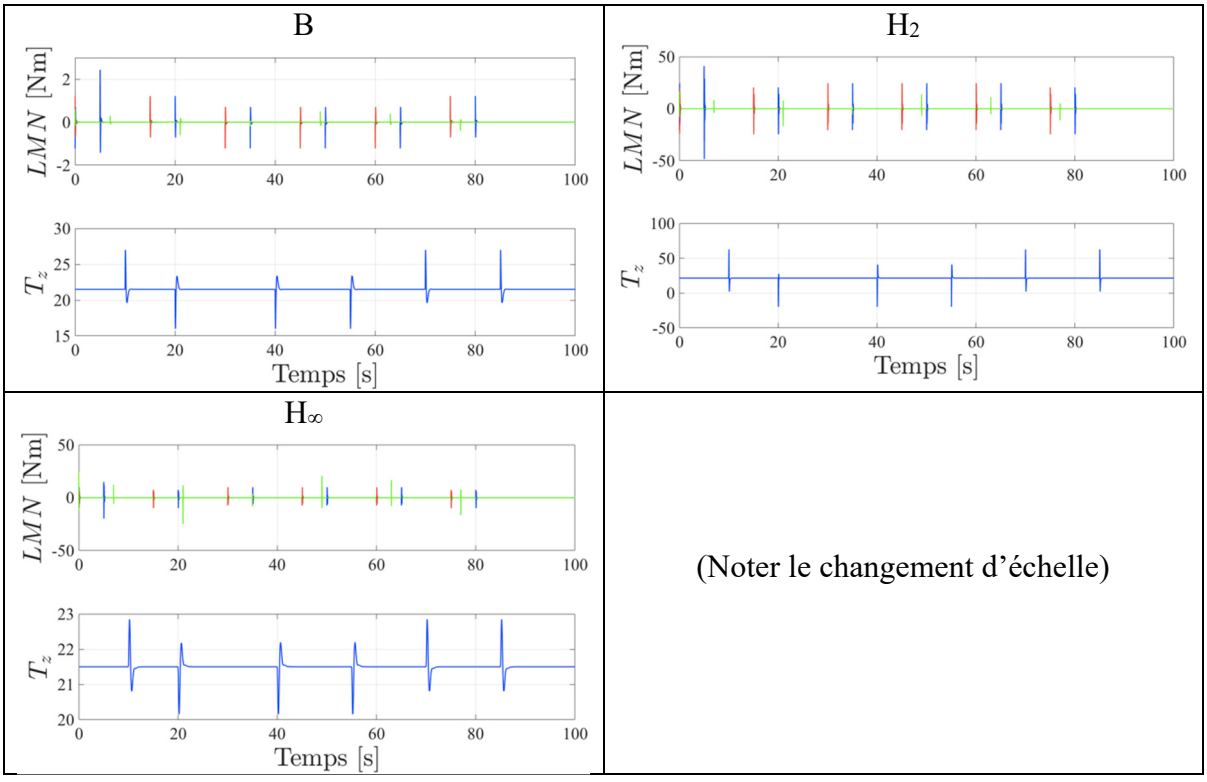


Figure 7.26 Réponses des commandes *L, M, N* et T_z pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H∞ sur le processus non linéaire

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) montrent à la Figure 7.27 des amplitudes très importantes et négatives pour les compensateurs H_2 et H∞ lors

d'un changement de consigne sur *x, y, z, ψ*, alors que la commande B obtient des maximums d'amplitude réalistes.

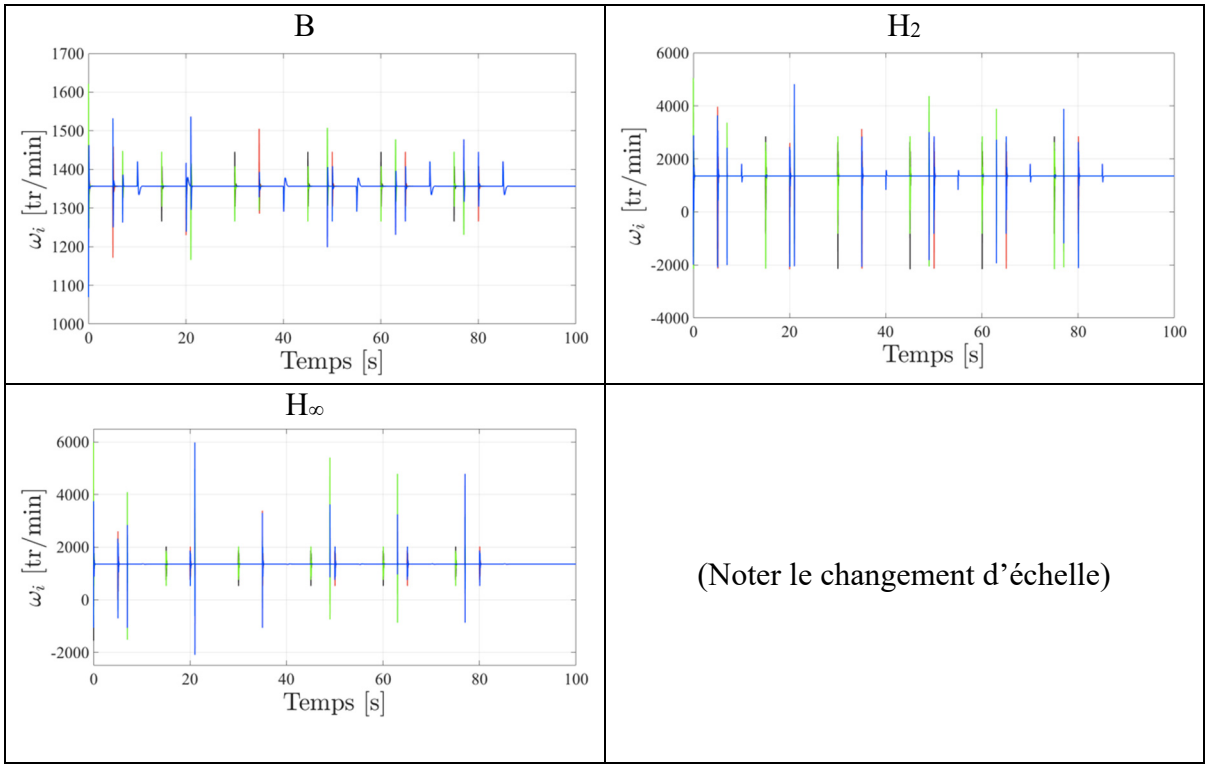


Figure 7.27 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

7.3.2.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

Les réponses des commandes B, μ, μ_Δ, PID lorsqu'elles sont associées au processus non linéaire (3.5.4) pour un scénario de référence (7.2) en entrée sont représentées à la Figure 7.28. On observe pour la commande PID la présence d'oscillation lors des changements de consigne. La commande μ_Δ est un peu lente à se réajuster entre deux changements de consigne ou lors des couplages tandis que la commande μ atteint la consigne plus rapidement. La commande B montre une bonne poursuite du scénario ainsi qu'un réajustement rapide des couplages.

Pour les quatre commandes les variations des angles ϕ, θ représentées à la Figure 7.28 les résultats semblent réaliste en termes d'amplitude. Le compensateur μ obtient les plus petites

variations d'amplitudes d'angles, soit inférieures à ±0.02 rad. La commande B génère des variations d'angles d'amplitudes plus importantes et le PID encore un peu plus grandes. Notons la présence d'oscillations amorties dans le cas du PID, ce qui pourrait traduire un comportement nerveux et non souhaitable de la part du drone.

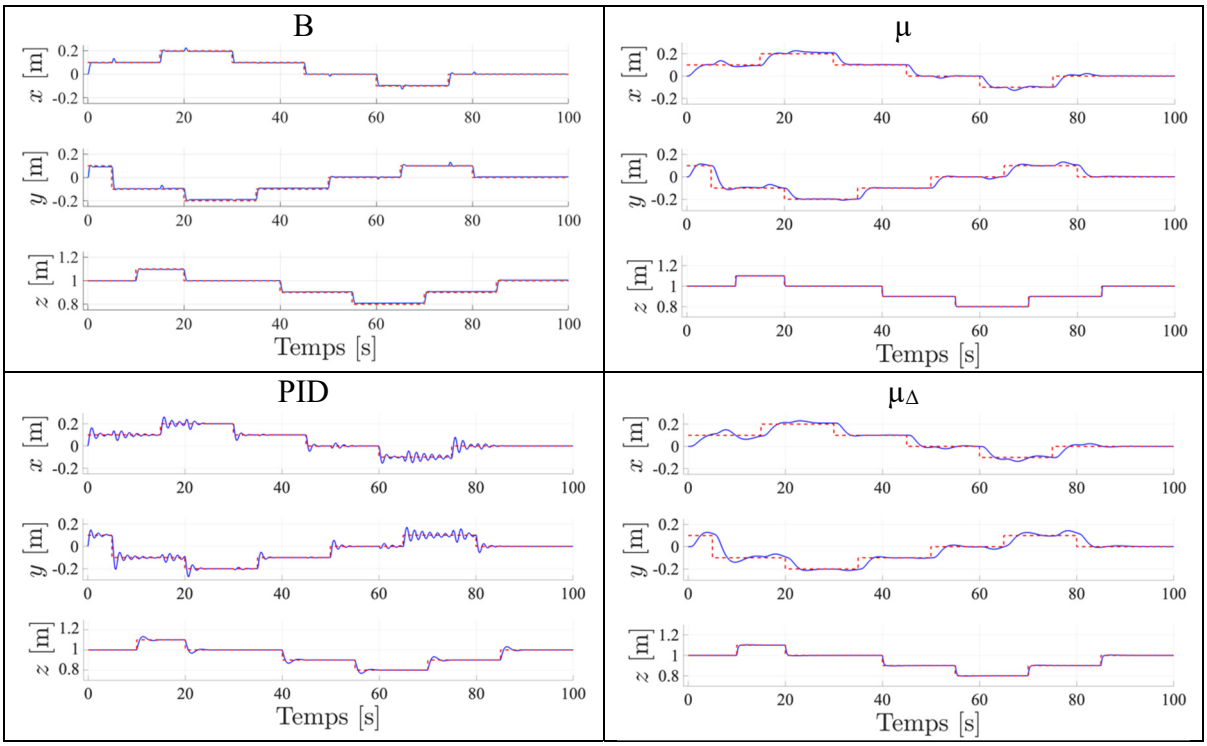


Figure 7.28 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire

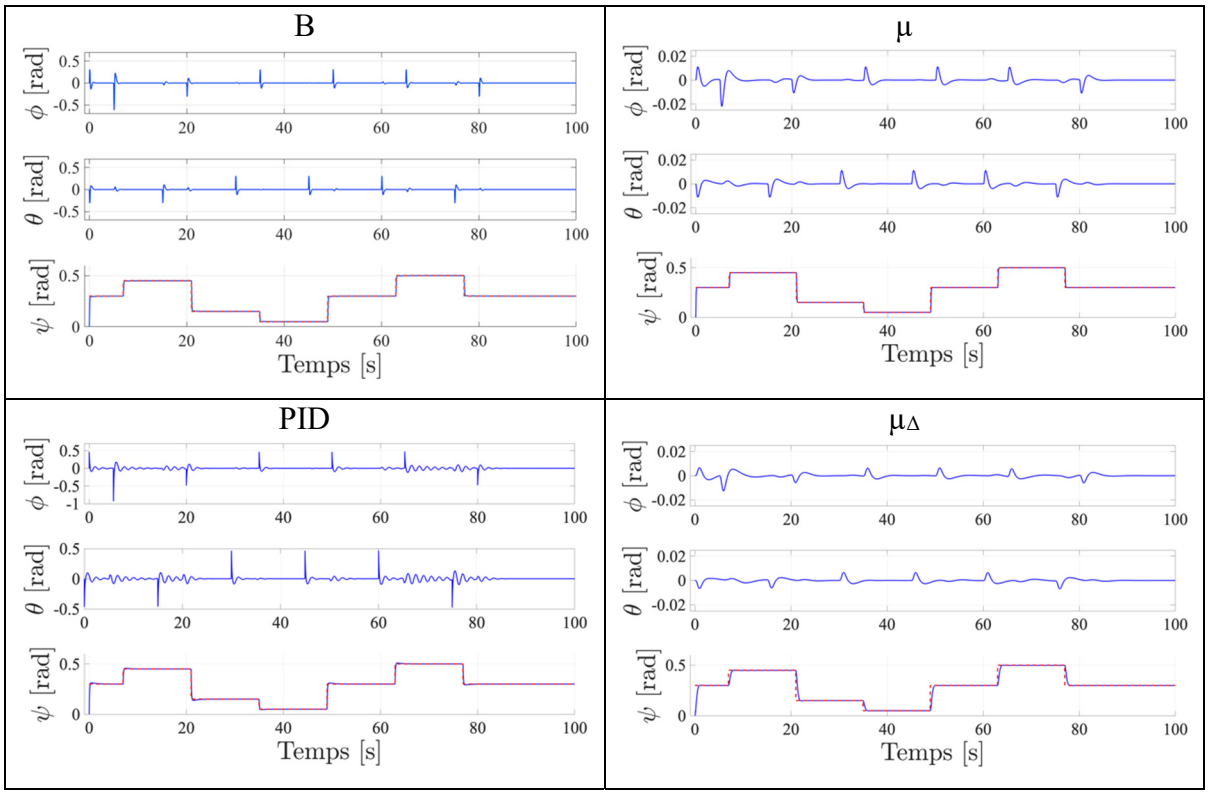


Figure 7.29 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire

Les commandes B et μ donne pour le scénario de référence défini en (7.2), des amplitudes des commandes en couple *L, M, N* relativement similaires comme le montre la Figure 7.30. La commande μ_Δ obtient un résultat pour les commandes en couples environ 20 fois plus faible tandis qu'avec des amplitudes atteignant 10^7 Nm le compensateur PID provoquerait assurément des saturations sur les commandes.

L'amplitude des signaux de commande en poussée T_z pour le scénario de référence défini en (7.2), semble réaliste pour la commande B, mais très importante dans le cas des trois autres commandes μ, μ_Δ et particulièrement pour le PID. On note également la présence d'oscillation pour la commande en poussée T_z dans le cas de la commande μ_Δ.

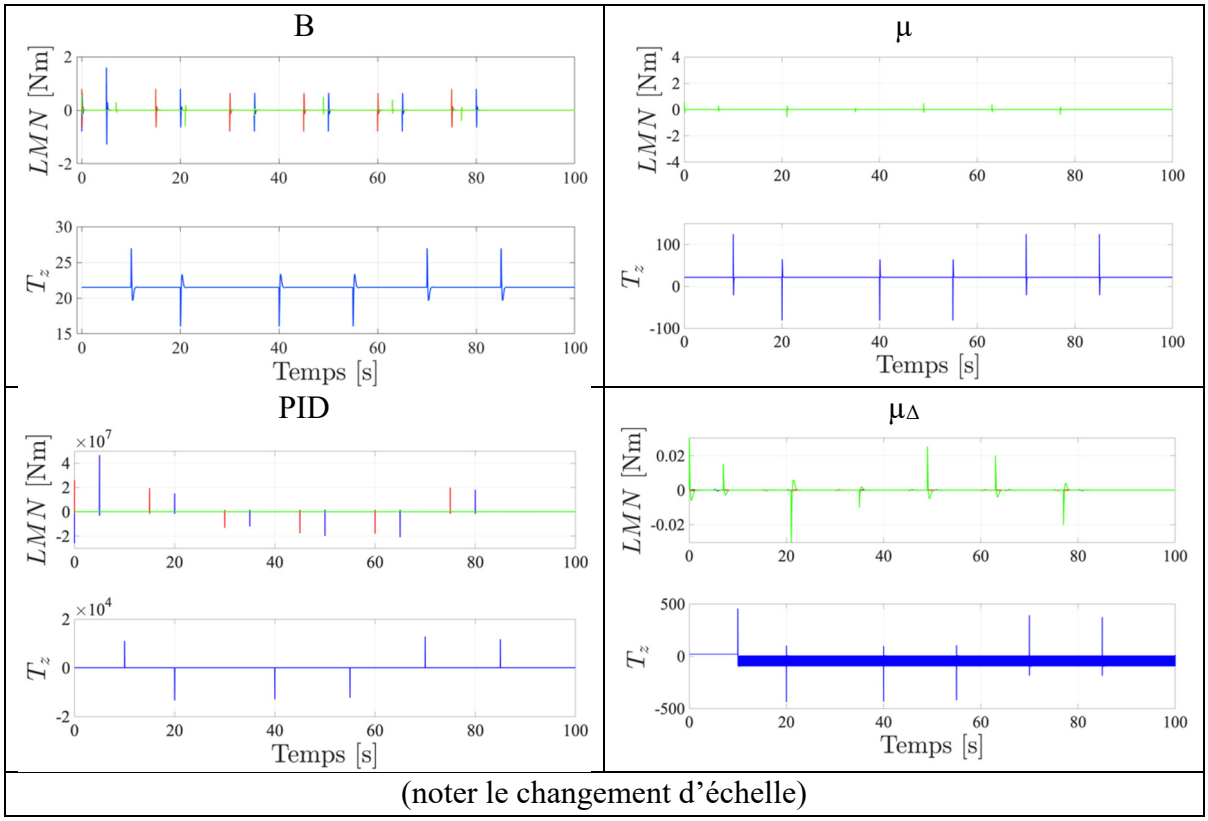


Figure 7.30 Réponses des commandes *L, M, N* et T_z pour le scénario de référence en pointillé rouge défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) montrent à la Figure 7.31 pour le scénario de référence défini en (7.2), des valeurs pics très importantes risquant de saturer les actionneurs pour les compensateurs PID, H_2 et H_∞. La commande B obtient des maximums d'amplitudes réalistes.

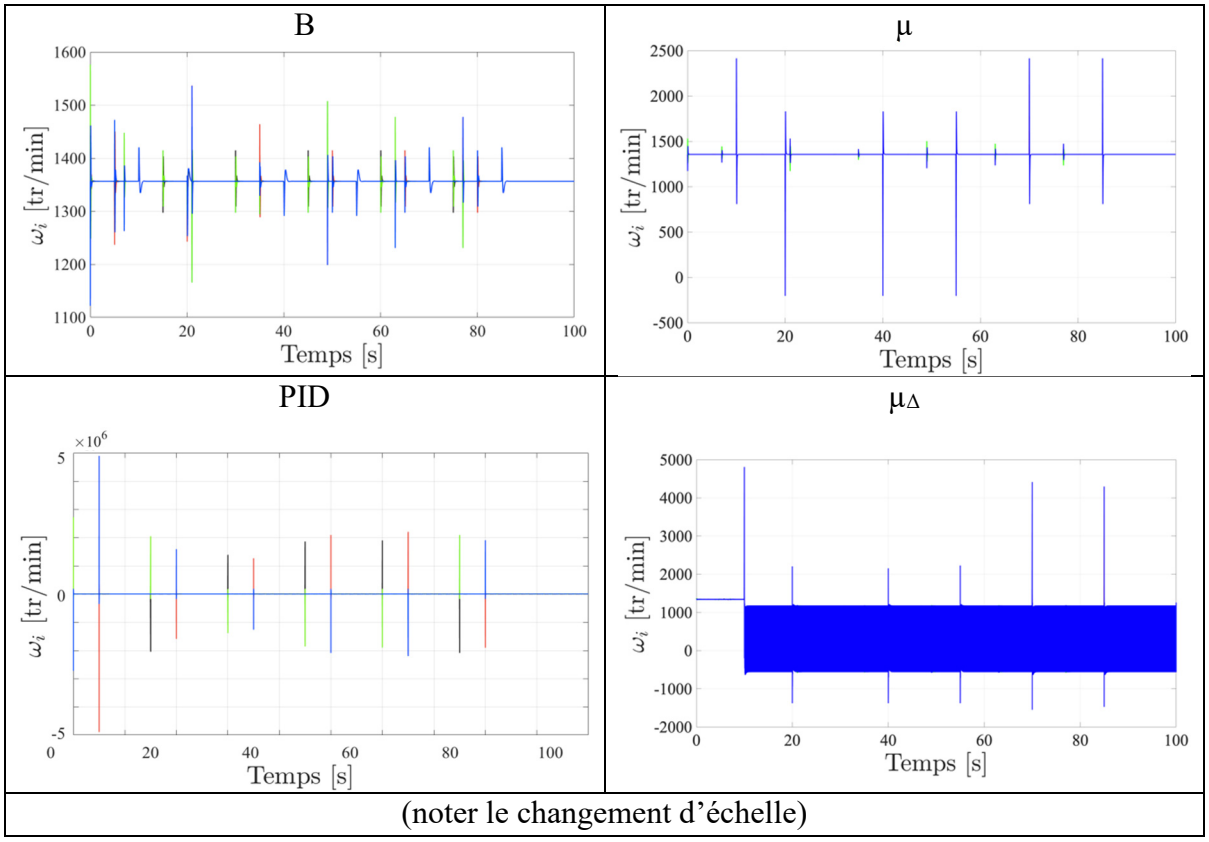


Figure 7.31 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire

7.3.2.6 Commandes backstepping et hiérarchique

Les commandes backstepping et hiérarchique montrent à la Figure 7.32 pour le scénario de référence défini en (7.2), des résultats similaires le long des axes *x, y, z* lorsqu'appliquées au modèle non linéaire de drone (3.5.3), avec toutefois une meilleure capacité de réajustement des couplages de la part de la commande par backstepping. Les sens de variations et les amplitudes des angles ϕ, θ représentés à la Figure 7.33 sont similaires pour les deux commandes et semblent suffisamment petites être réalisables.

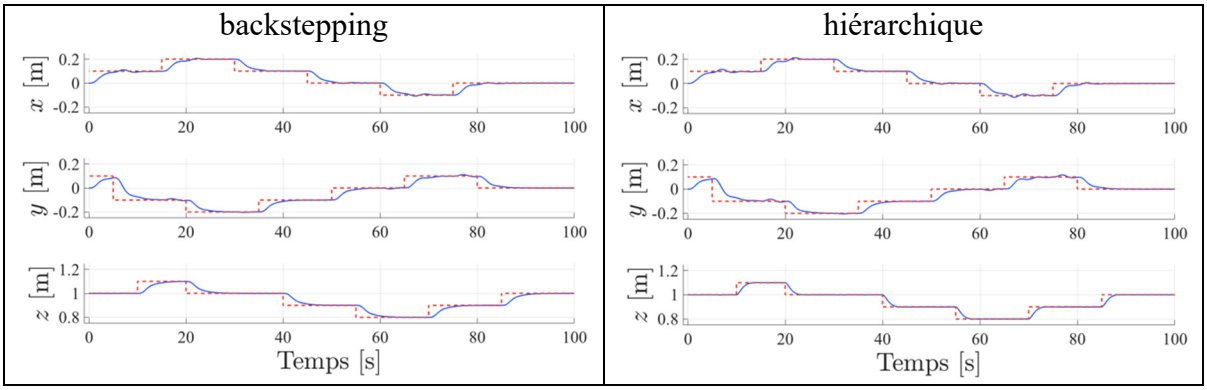


Figure 7.32 Réponses temporelles sur les axes *x, y, z* pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique

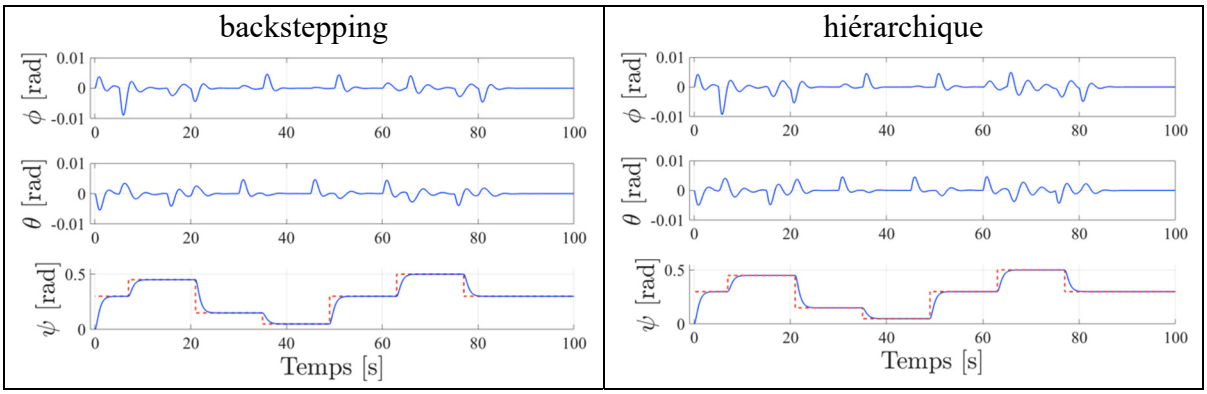


Figure 7.33 Réponses temporelles des angles ϕ, θ, ψ pour le scénario de référence en pointillé rouge et défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les amplitudes des commandes en couples *L, M, N* illustrées à la Figure 7.34 pour le scénario de référence défini en (7.2), dans le cas des commandes backstepping et hiérarchique sont semblables et suffisamment petites pour éviter la saturation des actionneurs.

La poussée T_z est centrée environ en 21,5 N, force nécessaire pour vaincre la gravité lors d'un vol stationnaire. De plus, les variations d'amplitudes de T_z restent petites dans les deux cas avec néanmoins un peu plus de nervosité de la part de la commande hiérarchique.

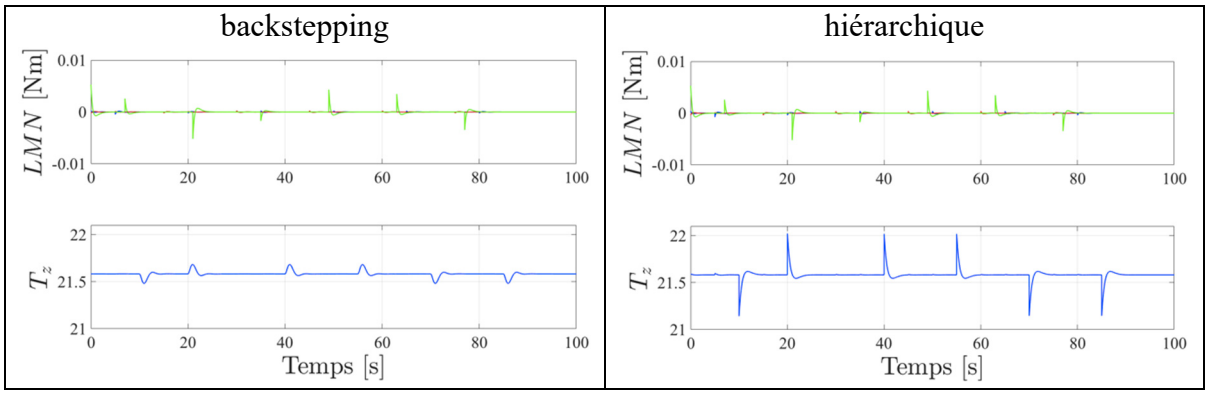


Figure 7.34 Réponses des commandes *L, M, N, T_z* pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), sont centrées environ à 1345 tr/min, ce qui correspond à la vitesse de vol stationnaire ω_0. Les amplitudes des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) sont moins importantes et moins nerveuses dans le cas de la commande backstepping.

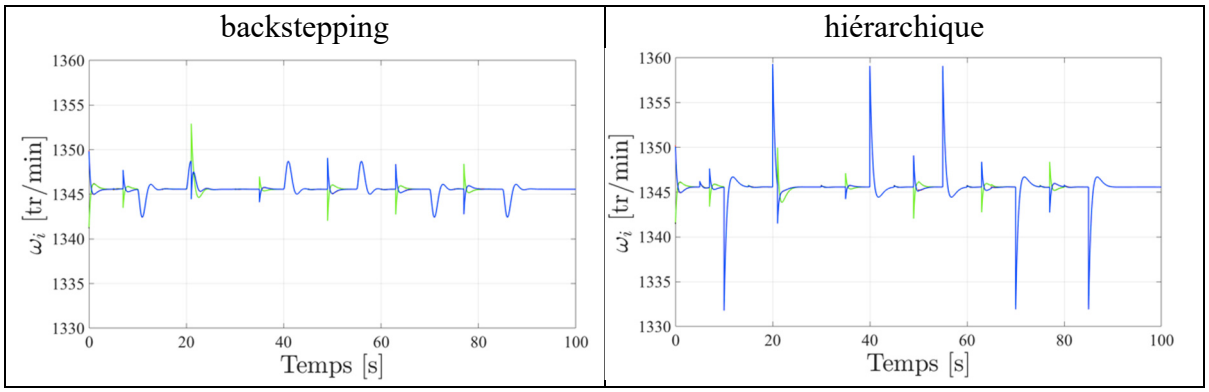


Figure 7.35 Vitesse ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour le scénario de référence défini en (7.2), avec les compensateurs backstepping et hiérarchique

7.3.2.7 Discussion

Cette section avait pour objectif l'étude des performances temporelles des compensateurs B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique pour un scénario appliqué en entrée défini en (7.2) sur les axes *x, y, z* et autour de l'angle ψ.

Lorsque les commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID sont appliquées à un modèle linéaire de drone on observe des réponses temporelles convaincantes sur *x, y, z* et autour de l'angle ψ avec toutefois un faible dépassement sur *x, y, z* dans le cas des commandes μ_Δ et PID. Les amplitudes des angles ϕ et θ sont suffisamment faible pour éviter le décrochage du drone excepté pour la commande PID.

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 semblent réaliste pour les commandes des compensateurs B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ malgré des pics d'amplitude importants pour les commandes B et H_2. Seule la commande PID présente des pics d'amplitudes de ces vitesses de rotation risquant fortement de saturer les actionneurs. Notons qu'un inconvénient de l'utilisation du modèle linéaire de drone est de ne pas faire apparaître les couplages sur les axes *x, y, z* lors d'un déplacement du drone.

Les performances temporelles sur les axes *x, y, z* des algorithmes de commandes B, H_∞, B, μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique sont globalement satisfaisantes lorsque le scénario (7.2) est appliqué comme référence en entrée du modèle non linéaire de drone. Deux commandes obtiennent des résultats moins convaincants : la commande H_2 dont la réponse temporelle sur l'axe *z* est très lente et avec présence d'erreur statique ; la commande PID dont la réponse temporelle est oscillatoire amortis sur les axes *x, y*.

La réponse temporelle autour de l'angle ψ pour le modèle non linéaire de drone est convaincante pour l'ensemble des commandes. Autour des angles ϕ, θ la commande H_2 présente des amplitudes des angles importantes et risque de provoquer le décrochage du drone. Pour ces angles la commande H_∞ obtient des amplitudes à la limite de la réalisabilité tandis

que la commande PID présente des oscillations amorties pouvant générer un comportement nerveux du drone. La commande B montre une amplitude des angles ϕ, θ suffisamment faible pour être réalisable, mais, le retour brusque à la position initiale est susceptible d'engendrer de la nervosité dans les déplacements de l'appareil. Les autres commandes μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique obtiennent des amplitudes des angles ϕ, θ suffisamment faibles pour être réalisable ainsi qu'un retour à l'état initial relativement souple.

Un des problèmes majeurs qui a été relevée dans la partie reliée au processus non linéaire, est l'amplitude importante des signaux de commandes L, M, N et/ou T_z pour les compensateurs H_2, H_∞, μ, μ_Δ et PID qui se traduit en pratique par une possible saturation des actionneurs et par extension des vitesses de rotation des moteurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 demandées trop importantes. Une application pratique de ces commandes reste toutefois envisageable moyennant une diminution substantielle du gain du compensateur, en espérant que la réponse temporelle ne soit pas trop dégradée. Seules les commandes B, backstepping et hiérarchique parviennent à combiner simultanément des amplitudes de commande sur L, M, N et T_z suffisamment faible pour être réalisable et par extension des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 possédants elles aussi des amplitudes réalistes.

Nous avons évalué dans cette partie les amplitudes des angles ϕ, θ et des vitesses de rotation des moteurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Des amplitudes trop importantes des angles ϕ, θ (considérons au-delà de ± 1 rad) risquent de provoquer le décrochage de l'appareil. De plus, en se rappelant que la vitesse de vol stationnaire est $\omega_0 = 1345$ tr/min, des amplitudes trop importantes des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 risquent de saturer les actionneurs. Le Tableau 7.13 permet de mettre en évidence (zones colorées), les structures de commandes étudiées entre les sections 7.3.2.2 à 7.3.2.6 présentant pour un scénario de référence (7.2), des amplitudes importantes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et risquant de provoquer le décrochage du drone ou la saturation des actionneurs. On remarque lorsque les commandes sont appliquées à un processus linéaire, un risque de décrochage ou de saturation des actionneurs uniquement avec la commande PID. Dans le cas du processus non linéaire, seule les commandes B,

backstepping et hiérarchique parviennent à éviter systématiquement un risque de décrochage ou de saturation des actionneurs.

Tableau 7.13 Structures de commandes étudiées section 7.3.2 présentant pour un scénario de référence (7.2), des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées)

Processus	Linéaire (7.3.4.2)			Linéaire (7.3.4.3)				Non Linéaire (7.3.4.4)			Non Linéaire (7.3.4.5)				Non linéaire (7.3.4.6)
Commande	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	backstepping hiérarchique
Risque de décrochage?															
Risque de saturation des actionneurs?															

7.3.3 Couplages

7.3.3.1 Conditions de test

L'objectif ici est d'étudier la capacité des compensateurs B, H_2, H_∞, μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique à minimiser l'effet des couplages entre les entrées et les sorties. Pour ce faire, nous appliquons sur l'axe y un scénario défini en (7.3) d'amplitude y_d croissante au court du temps t_y, l'effet des couplages est observé sur l'axe x ainsi qu'autour des angles de rotations ϕ et θ. Dans le même temps, l'altitude est maintenue à z = 1 m et l'angle ψ à 0.3 rad.

$$\begin{aligned} y_d &= [0.05 \quad -0.1 \quad 0.15 \quad -0.3]^T \\ t_y &= [0 \quad 5 \quad 20 \quad 40]^T \end{aligned} \tag{7.3}$$

Sur l'axe y sera relevé : le temps de montée t_r ; le temps d'établissement t_s ; le dépassement D et l'erreur statique e_{ss}. Le module maximum du couplage sur x lors d'un changement de consigne sur y sera noté $|x_{max}|$. Sera également relevé le maximum de la réaction des angles ϕ_{max} et θ_{max} ainsi que leur temps d'établissement $t_{s\phi}$ et $t_{s\theta}$ pour revenir à l'état initial. Notons

que ces tests seront réalisés uniquement sur le modèle non linéaire du processus (3.35) puisque le modèle linéaire ne fait pas apparaître les couplages.

7.3.3.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

La Figure 7.36 montre le couplage sur x lorsqu'une série d'échelons d'amplitude croissante définie en (7.3) est appliquée sur l'axe y. Le Tableau 7.14 montre pour la réponse temporelle sur l'axe y : le temps de montée t_r ; le temps d'établissement t_s ; le dépassement D ; l'erreur statique e_{ss}.

Le compensateur B présente une meilleure capacité à maintenir ses performances temporelles t_r, t_s, D et e_{ss} sur l'axe y lors d'une augmentation de l'amplitude de l'échelon d'entrée relativement aux compensateurs H_2 et H_∞. Le temps de stabilisation avec la commande B est plus court relativement aux compensateurs H_2 et H_∞.

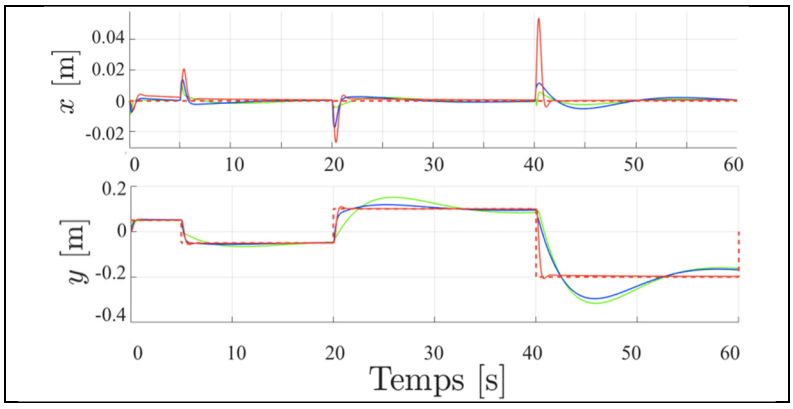


Figure 7.36 Réponses temporelles sur x, y pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu)

Tableau 7.14 Comparaison des performances temporelles sur l'axe y et le couplage x pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge et défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu)

Amplitude de l'échelon		t_r	t_s	D	$\lvert x_{max}\rvert$	e_{ss}
0.05	B	0.48	0.98	1	1.1	6.1e-3
	H_2	0.32	0.32	0	3.1	8.7e-3
	H_∞	0.44	3.07	1	4.6	7.3e-3
-0.15	B	0.49	0.96	7	0.2	20.9e-3
	H_2	2.28	11.0	16	1.67	12.1e-3
	H_∞	0.62	7.0	6.5	3.25	14.1e-3
0.25	B	0.48	0.93	6.67	0	27e-3
	H_2	2.28	∞	36.7	12.9	5.5e-3
	H_∞	1.29	9.6	12.2	4.2	17.4e-3
-0.45	B	0.54	0.54	2.2	1	54e-3
	H_2	2.34	∞	31.7	10.7	11e-3
	H_∞	2.34	∞	38.3	13.4	5.7e-3

Comme le montrent la Figure 7.37 et le Tableau 7.15, les valeurs maximums de l'amplitude de l'angle ϕ_{max} sont plus petites dans le cas du compensateur B, mais le temps d'établissement $t_{s\phi}$ est plus long. De même, θ_{max} est généralement plus petit pour le compensateur B, mais le temps d'établissement $t_{s\theta}$ est plus important. La commande H_2 montre les performances temporelles les plus convaincantes.

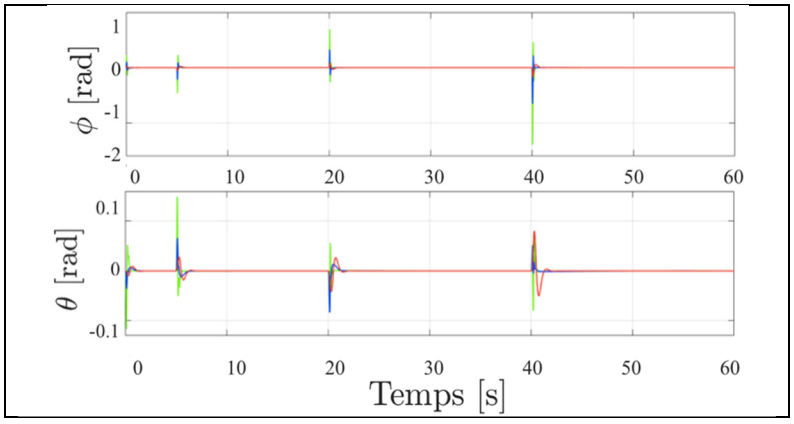


Figure 7.37 Réponses temporelles sur les angles ϕ, θ et l'axe x pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), H_2 (verte), H_∞ (bleue)

Tableau 7.15 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B, H_2 et H_∞

Amplitude de l'échelon		ϕ_{max} [rad]	θ_{max} [rad]	$t_{s\phi}$ [s]	$t_{s\theta}$ [s]
0.05	B	0.15	0.010	0.4	0.960
	H_2	1.16	0.116	0.28	0.504
	H_∞	0.54	0.035	0.28	0.721
-0.15	B	0.29	0.028	0.58	1.083
	H_2	2.32	0.149	0.29	0.515
	H_∞	1.09	0.066	0.4	0.892
0.25	B	0.43	0.042	0.65	1.13
	H_2	3.47	0.084	0.27	0.43
	H_∞	1.63	0.073	0.65	0.94
-0.45	B	0.87	0.080	0.74	1.19
	H_2	6.96	0.080	0.34	0.55
	H_∞	3.26	0.052	0.27	0.44

7.3.3.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

La Figure 7.38 et le Tableau 7.16 montrent pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), une meilleure capacité de la commande B pour maintenir son niveau de performance temporel concernant t_r, t_s, D et e_{ss} comparativement aux compensateurs μ et μ_Δ. On remarque également que les performances temporelles de la commande μ_Δ, sont systématiquement plus lentes et génèrent des amplitudes de dépassements plus grandes que celles de la commande μ. La commande PID introduit des dépassements et des oscillations dans une réponse temporelle de y qui se voit amplement dégradée.

Les couplages sur x montrent des temps d'établissements t_s importants dans le cas des compensateurs μ et μ_Δ. La présence d'oscillations sur l'axe y pour la commande PID allonge grandement son temps d'établissement. La commande B présente des temps d'établissements

considérablement plus court relativement aux trois autres commandes et l'amplitude $|x_{max}|$ est systématique plus faible.

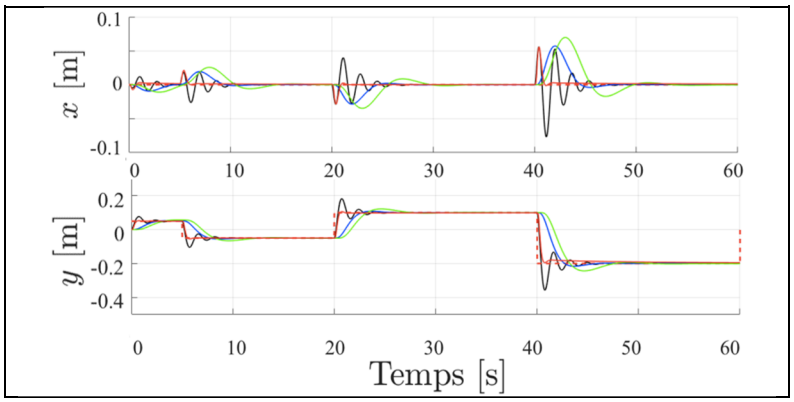


Figure 7.38 Réponses temporelles sur *x, y* pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge et défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert), PID (noir)

Tableau 7.16 Comparaison des performances temporelles sur l'axe *y* pour le scénario de référence y_d en pointillé rouge et défini en (7.3), avec les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID

Amplitude de l'échelon		t_r [s]	t_s [s]	D [%]	$\|x_{max}\|$ [m]	e_{ss} [%]
0.05	B	0.47	0.51	5.3	7.4e-3	0.5
	μ	1.83	2.42	1.25	9.5e-3	5.11
	μ_Δ	2.17	2.84	0	1.0e-2	0.06
	PID	0.35	3.4	7.7	1.2e-2	0.05
-0.15	B	0.39	0.49	3.6	2.2e-2	0.22
	μ	1.89	2.36	5.45	1.9e-2	0
	μ_Δ	1.95	2.89	15	2.6e-2	0.8
	PID	0.4	3.5	55	2.6e-2	0
0.25	B	0.29	0.57	2.1	2e-2	0.1
	μ	1.94	2.45	5.3	2.8e-2	0
	μ_Δ	2	3	15	3.5e-2	0.25
	PID	0.27	3.43	21.3	4.1e-2	0
-0.45	B	0.52	0.56	0	5.7e-2	1
	μ	1.96	2.46	5.3	5.7e-2	0
	μ_Δ	2.08	3	14.5	6.9e-2	0.4
	PID	0.33	3.5	19.07	7.7e-2	0

Comme illustré à la Figure 7.39 et au Tableau 7.17 les couplages sur ϕ et θ sont beaucoup plus faibles et les temps d'établissement $t_{s\phi}$ et $t_{s\theta}$ sont bien plus rapides dans le cas des commandes μ et μ_Δ. Cela pourrait paraître un avantage, mais la faible présence de variation sur les angles ϕ et θ se traduit par une réponse temporelle sur y lente, avec des dépassements et des couplages plus longs à être résorbés sur x. La commande B performe mieux que le PID puisqu'elle ne génère pas d'oscillation sur les couplages.

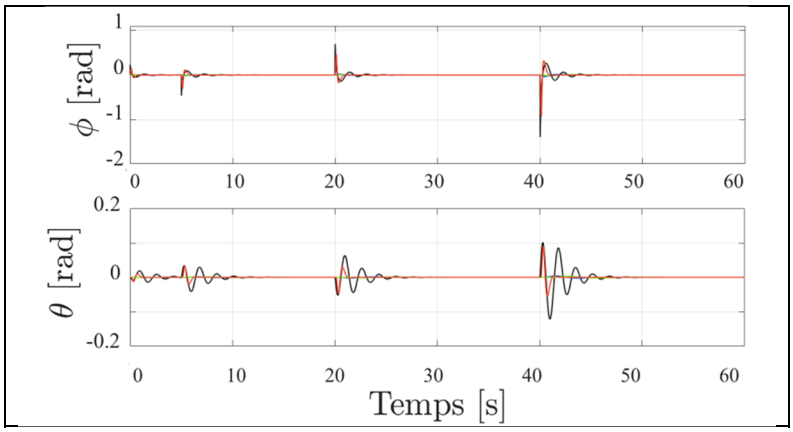


Figure 7.39 Réponses temporelles sur les angles ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B (rouge), μ (bleu), μ_Δ (vert), PID (noir)

Tableau 7.17 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID

Amplitude de l'échelon		ϕ_{max} [rad]	θ_{max} [rad]	$t_{s\phi}$ [s]	$t_{s\theta}$ [s]
0.05	B	0.16	0.013	0.43	0.92
	μ	5.8e-3	3.5e-3	0	0
	μ_Δ	3.3e-3	2.7e-3	0	0
	PID	0.23	0.019	0.13	2.72
-0.15	B	0.32	0.032	0.58	1.1
	μ	1.3e-2	1.2e-3	0	0
	μ_Δ	7e-3	0.95e-3	0	0
	PID	0.46	0.041	0.84	4.45

Tableau 7.17 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID (suite)

Amplitude de l'échelon		ϕ_{max} [rad]	θ_{max} [rad]	$t_{s\phi}$ [s]	$t_{s\theta}$ [s]
0.25	B	0.48	0.049	0.63	1.2
	μ	1.8e-2	1.8e-3	0	0
	μ_Δ	1.1e-2	1.3e-3	0	0
	PID	0.64	0.063	1.6	4.55
-0.45	B	0.95	0.09	0.73	1.15
	μ	3.4e-2	3.7e-3	0	0
	μ_Δ	2e-2	2.6e-3	0	0
	PID	1.49	0.12	2.44	6.1

7.3.3.4 Commandes backstepping et hiérarchique

En regard du couplage pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), les performances temporelles selon t_r, t_s, D et e_{ss} sur y pour des échelons d'amplitude croissante sont sensiblement identiques entre les commandes backstepping et hiérarchique tel que le montre la Figure 7.40 et le Tableau 7.18. Bien que le temps d'établissement t_s pour les deux commandes sur le couplage x est sensiblement identique, l'amplitude du couplage $|x_{max}|$ est plus faible dans le cas de la commande backstepping.

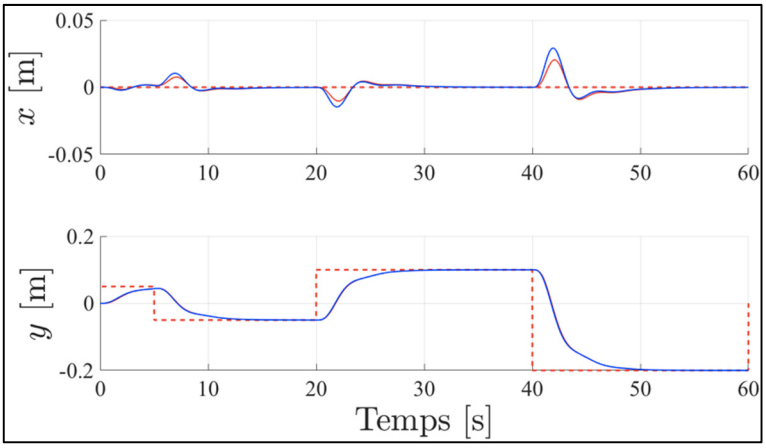


Figure 7.40 Réponses temporelles sur les axes x, y pour le scénario de référence (7.3) y_d en pointillé rouge, avec les compensateurs : backstepping (rouge) ; hiérarchique (bleu)

Tableau 7.18 Performances temporelles sur l'axe y et le couplage x pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), avec les compensateurs : backstepping et hiérarchique

Amplitude de l'échelon		t_r [s]	t_s [s]	D [%]	e_{ss} [%]	$\lvert x_{max}\rvert$ [m]
0.05	backstepping	6.42	∞	0	5.2	1.85e-3
	hiérarchique	6.42	∞	0	5	5.8e-3
0.1	backstepping	5.81	6.71	0	0	7.6e-3
	hiérarchique	5.81	6.71	0	0	10.4e-3
0.15	backstepping	6.09	6.68	0	0	10.2e-3
	hiérarchique	6.09	6.68	0	0	14.7e-3
0.3	backstepping	5.83	6.7	0	0	20.4e-3
	hiérarchique	5.80	6.7	0	0	29.2e-3

L'amplitude des couplages sur ϕ et θ est sensiblement plus faible avec la commande par backstepping comme le montre la Figure 7.41 et le Tableau 7.19. Les temps d'établissements $t_{s\phi}$ et $t_{s\theta}$ sont identiques et faibles pour les deux commandes.

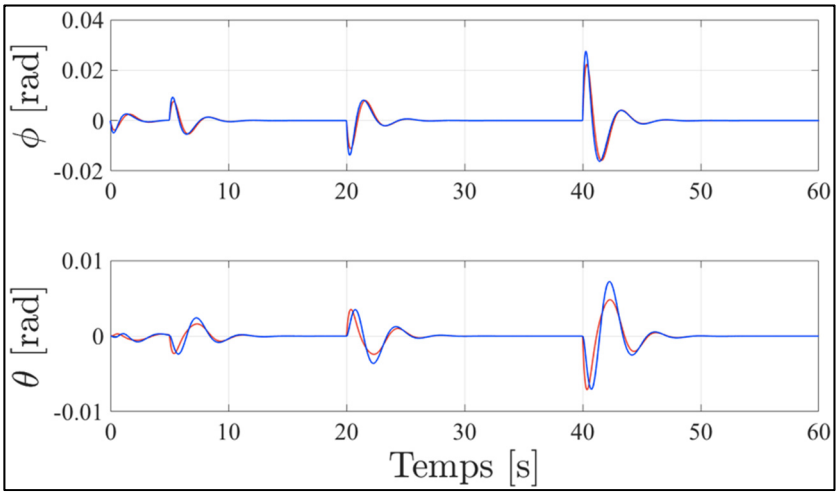


Figure 7.41 Réponses temporelles sur les angles ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3) pour les compensateurs : backstepping (rouge) et hiérarchique (bleu)

Tableau 7.19 Comparaison des interactions sur ϕ et θ pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique

Amplitude de l'échelon		ϕ_{max} [rad]	θ_{max} [rad]
0.05	backstepping	3.8e-3	0.5e-3
	hierarchique	5.6e-3	2.7e-3
0.1	backstepping	7.6e-3	2.3e-3
	hierarchique	9.4e-3	2.5e-3
0.15	backstepping	11.2e-3	3.5e-3
	hierarchique	13.8e-3	3.6e-3
0.3	backstepping	22.3e-3	7.0e-3
	hierarchique	27.5e-3	7.2e-3

7.3.3.5 Discussion

Dans cette partie l'étude de l'évolution des couplages sur *x, ϕ, θ* lorsque des échelons de différentes amplitudes définies en (7.3) sont appliqués sur l'axe *y* a été réalisé. Notre attention s'est également portée sur la capacité des compensateurs à maintenir leurs performances temporelles sur l'axe *y* malgré l'augmentation de l'échelon d'amplitude d'entrée pour une représentation non linéaire du processus. Dans ce registre, la commande B parvient à conserver les meilleures performances temporelles sur l'axe *y* malgré l'augmentation de l'amplitude d'entrée. Les commandes μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique parviennent à conserver un niveau de performance temporelle acceptable malgré la présence de dépassement pour les compensateurs μ et μ_Δ ainsi qu'une réponse lente (mais sans erreurs statiques) pour les compensateurs backstepping et hiérarchique.

L'augmentation du dépassement, de l'erreur statique ou d'oscillations viennent dégrader de manière conséquente la réponse temporelle des compensateurs H_2, H_∞ et PID qui semblent alors moins adaptées à un modèle non linéaire du processus.

Dans l'ensemble, la minimisation de l'amplitude du couplage sur l'axe *x* est bien réalisée, particulièrement avec les commandes : H_2 et H_∞ ; puis backstepping et hiérarchique ; puis, B,

μ et μ_Δ. Seule la commande PID obtient des résultats peu satisfaisants concernant la minimisation de l'amplitude des couplages sur l'axe *x* à cause de la présence de dépassement et d'oscillation.

La commande B est particulièrement performante concernant la minimisation du temps d'établissement sur l'axe *x* avec un temps maximum inférieur à 2 s. Les autres compensateurs H_2, H_∞, μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique sont moins convaincantes avec un temps d'établissement maximum sur l'axe *x* avoisinant les 10 s.

La minimisation de l'amplitude et du temps d'établissement autour des angles ϕ et θ est la mieux réalisée avec les commandes μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique. Ses résultats peuvent paraître positifs de prime abord, mais en réalité ce n'est pas le cas puisqu'ils tendent à allonger les temps d'établissement des réponses temporelles sur *x* et *y*. En effet, tant que l'amplitude des angles ϕ et θ reste inférieure à l'amplitude provoquant le décrochage de l'appareil (1 rad environ) l'effet d'une amplitude suffisamment grande, combinée à un temps d'établissement court peut être bénéfique puisque cela permet de minimiser l'effet du couplage sur *x* et d'optimiser la réponse temporelle sur *y*. C'est le cas de la commande B.

L'amplitude autour des angles ϕ ou θ est trop importante pour les commandes H_2 (ϕ_{max} = 6.92 rads) et H_∞ (θ_{max} = 3.26 rads) et risque de provoquer le décrochage. Bien que l'amplitude des angles ϕ et θ semble dans une gamme acceptable pour la commande PID, la présence d'oscillations risque de générer un comportement nerveux de l'appareil et vient ternir la performance temporelle de cette commande sur les axes *x* et *y*.

Dans le Tableau 7.20 est inscrit le nom de la commande obtenant les meilleures performances temporelles sur les couplages dans cette section (en se référant aux Tableau 7.14 à Tableau 7.19), pour le scénario de référence y_d défini en (7.3), entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique appliqué à un modèle non linéaire de drone (3.5.3) (B, H_2, H_∞, backstepping et hiérarchique) ou (3.5.4) (B, μ, μ_Δ, PID). Notons que le Tableau 7.20

permet d'extraire les commandes les plus performantes, mais ne permet pas de quantifier l'écart de performance entre les commandes.

Tableau 7.20 Résumé des meilleures performances temporelles pour les couplages lors d'un scénario de référence y_d défini en (7.3), entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique appliqué sur un modèle non linéaire de processus

Processus	Non linéaire (7.3.3.2)	Non linéaire (7.3.3.3)	Non linéaire (7.3.3.4)
Commande	B, H_2, H_∞	B, μ, μ_Δ, PID	backstepping hiérarchique
t_r [s]	B	PID	backstepping hiérarchique
t_s [s]	B	B	backstepping hiérarchique
D [%]	B	B	backstepping hiérarchique
$\lvert x_{max}\rvert$	B	B	backstepping hiérarchique
e_{ss} [%]	H_2	PID	backstepping
ϕ_{max}	B	B et μ_Δ	backstepping
θ_{max}	B	μ_Δ	backstepping
$t_{s\phi}$	H_2	μ et μ_Δ	
$t_{s\theta}$	H_2	μ et μ_Δ	

7.3.4 Hélicoïde

7.3.4.1 Conditions de test

Dans cette partie nous allons appliquer une consigne hélicoïdale à chacune des commandes : B, H_2, H_∞ ; B, μ, PID, μ_Δ pour un modèle de drone linéaire (3.5.1) ou (3.5.2) puis, sur un modèle non linéaire (3.5.3) ou (3.5.4) ; les commandes backstepping et hiérarchique sont appliquées uniquement sur le modèle non linéaire du drone (3.5.3).

Un des intérêts de ce test est de solliciter simultanément l'ensemble des couplages et non-linéarités présentes dans le modèle du drone permettant éventuellement de repérer des erreurs de poursuite sur les axes *x*, *y*, *z*. En se référant à la Figure 7.10 les consignes x_d, y_d, z_d sur les axes *x, y, z* pour générer une consigne hélicoïdale sont les suivantes :

$$\begin{aligned} x_d &= 3sin(0.2t) \\ y_d &= 3sin(0.2t - \pi/2) + 3 \\ z_d &= 0.3t \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ou *t* représentes le temps et la consigne sur l'angle ψ est fixée à zéro. Chaque simulation dure 100 s, ce qui correspond à une ascension de 30 m.

7.3.4.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

On observe sur la Figure 7.42 et la Figure 7.43 que la trajectoire en bleue reste proche de la référence en pointillée rouge définie en (7.4), pour les commandes B et H_2. La commande H_∞ obtient une erreur de traînée sensiblement plus importante.

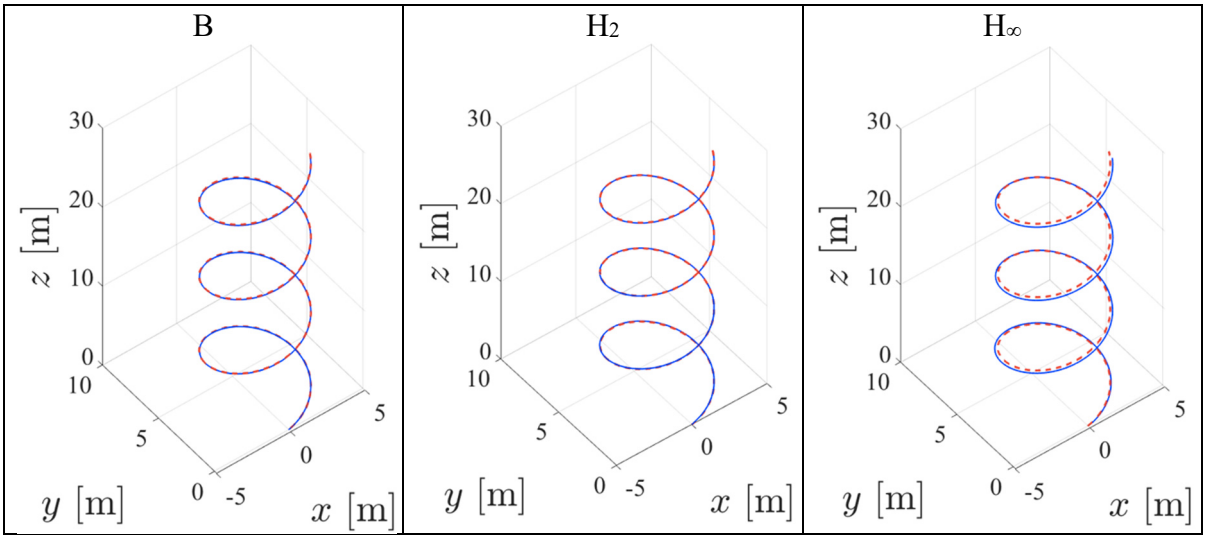


Figure 7.42 Déplacement en bleu sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

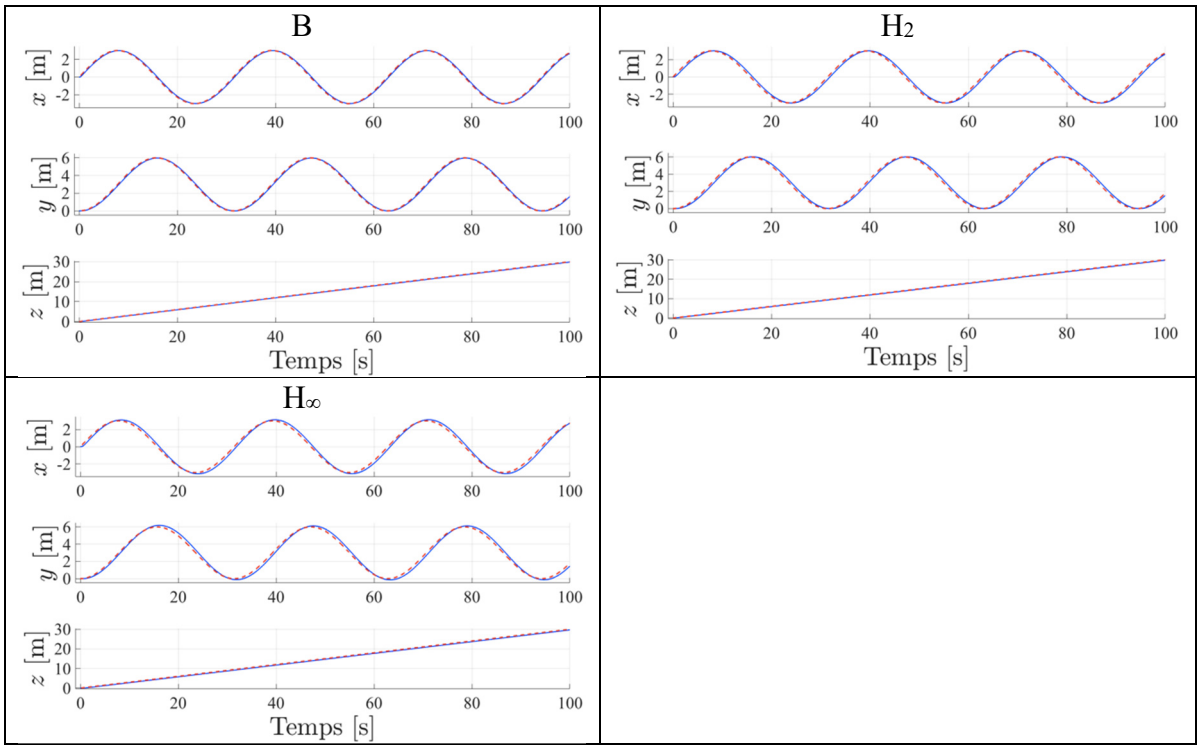


Figure 7.43 Déplacement en bleu sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Les amplitudes des angles ϕ et θ, tracées sur la Figure 7.44 sont comprises entre ±0,02 rad pour les trois commandes B, H_2 et H_∞, ce qui semble réalisable. L'angle ψ reste nul tel que désiré.

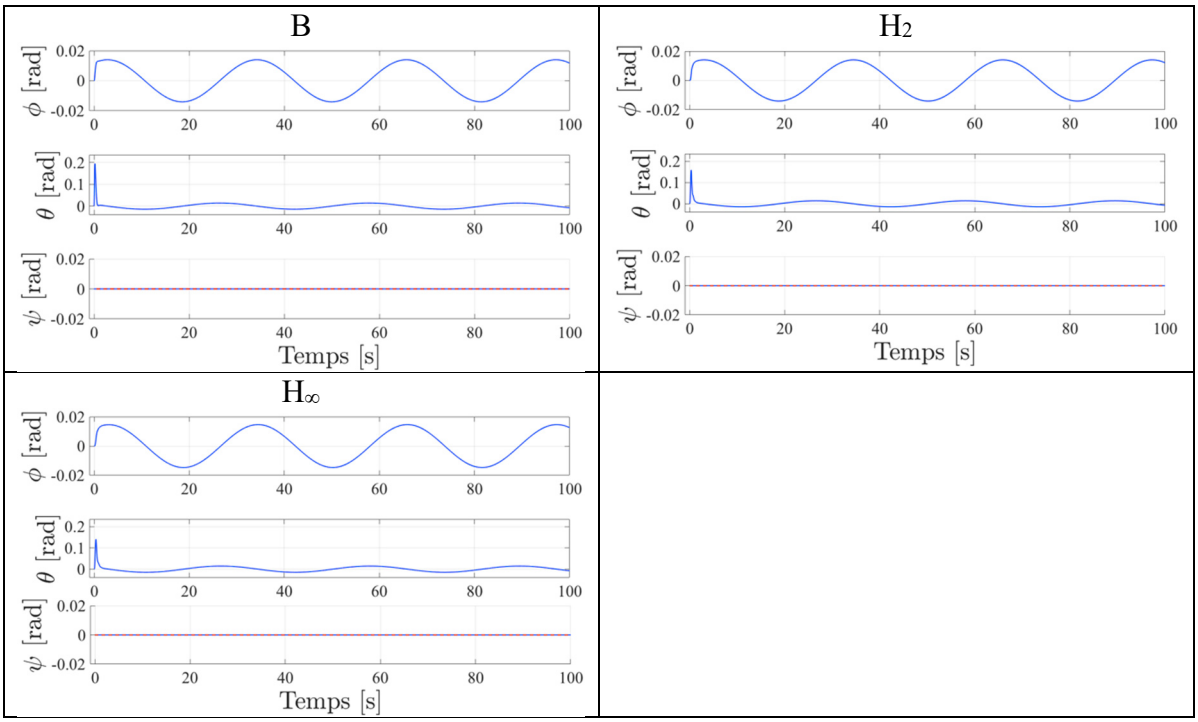


Figure 7.44 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Sur la Figure 7.45, on observe que les erreurs e_z (vertes), lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4) sur l'axe z sont très proches pour les commandes B et H_2, mais, sur les axes x et y la commande B obtient les erreurs e_x (bleue) et e_y (rouge) les plus faibles. La commande H_∞ obtient systématiquement les erreurs les plus importantes. Cependant, les erreurs e_x, e_y et e_z restent faibles pour les trois commandes.

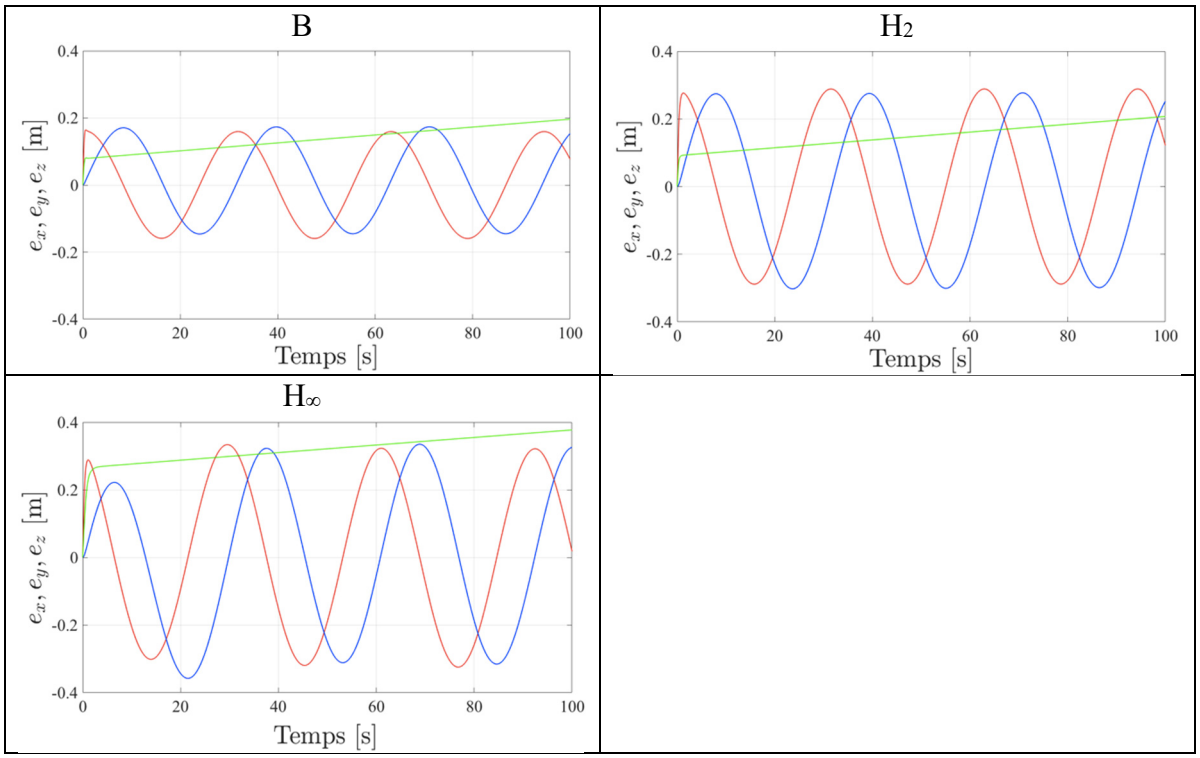


Figure 7.45 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

La Figure 7.46 montre des commandes u_z, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), similaires pour les compensateurs B et H_2, le compensateur H_∞ obtenant le plus faible pic au démarrage. Les commandes sur u_ϕ et u_θ sont plus faibles dans le cas de la commande H_∞, ce qui pourrait expliquer les erreurs plus importantes sur x et y observées à la Figure 7.45. Le compensateur H_2 obtient un pic légèrement plus important au démarrage sur les commandes u_ϕ et u_θ relativement à la commande H_∞. Les commandes u_ϕ et u_θ produites par la commande B sont plus importantes au démarrage.

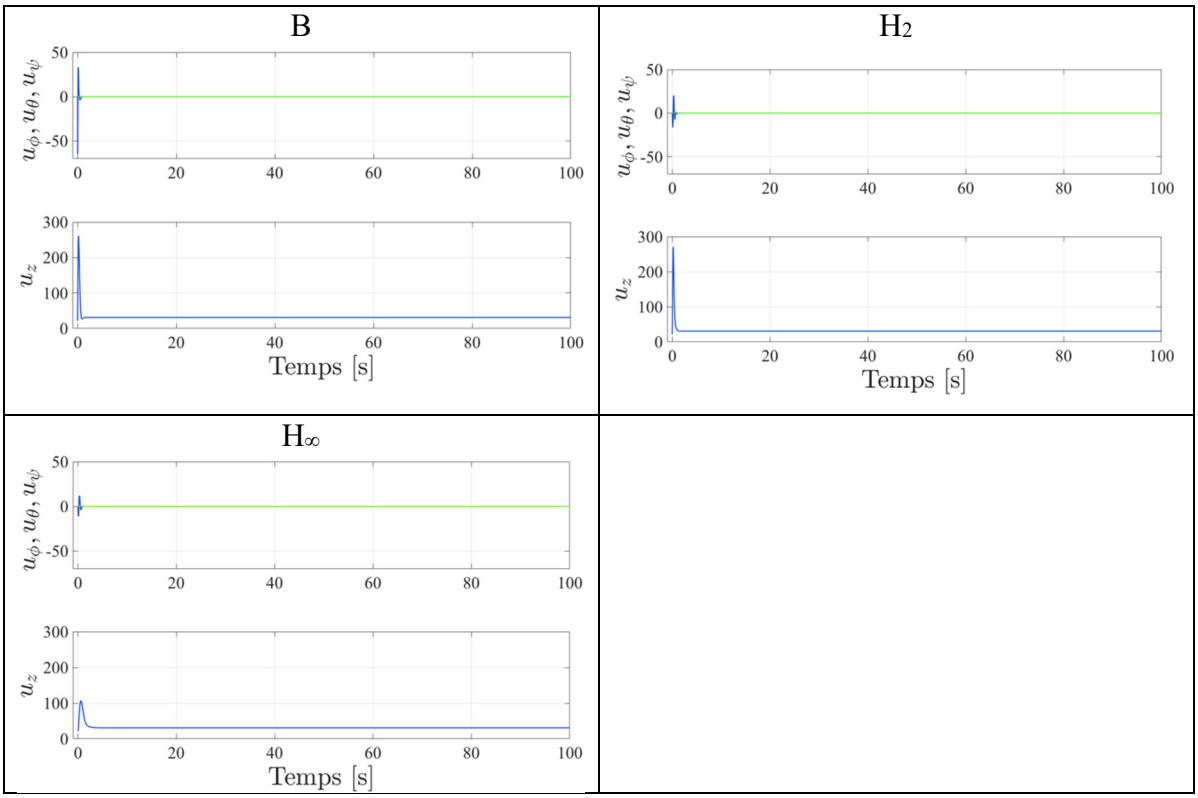


Figure 7.46 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Comme représenté à la Figure 7.47, les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) possèdent un pic au démarrage légèrement plus élevé dans le cas de la commande B. Elles vont ensuite se stabiliser à une vitesse sensiblement plus importante que celle pour un vol stationnaire qui est à 1345 tr/min. La commande H_∞ obtient le plus faible pic au démarrage.

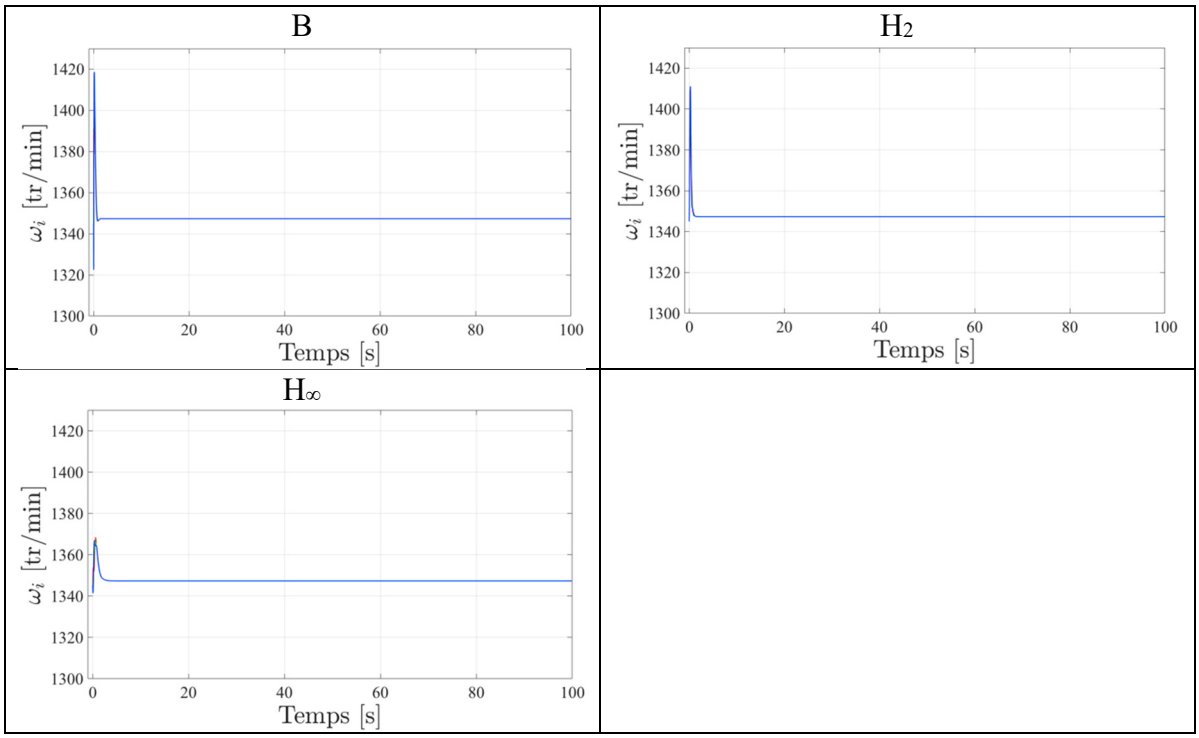


Figure 7.47 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

7.3.4.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

Tel que représenté sur la Figure 7.48 et la Figure 7.49, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID possèdent un suivi de trajectoire en bleue sur *x, y, z* proche de la référence en pointillé rouge. Seul le compensateur μ est sensiblement moins précis.

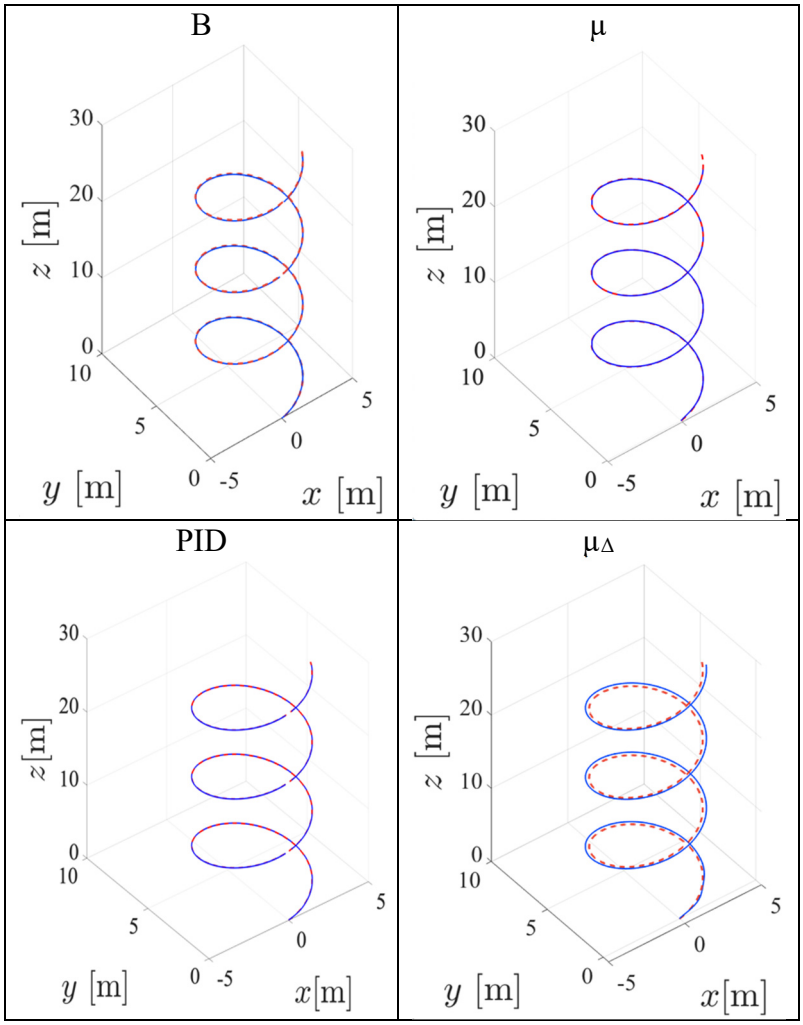


Figure 7.48 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

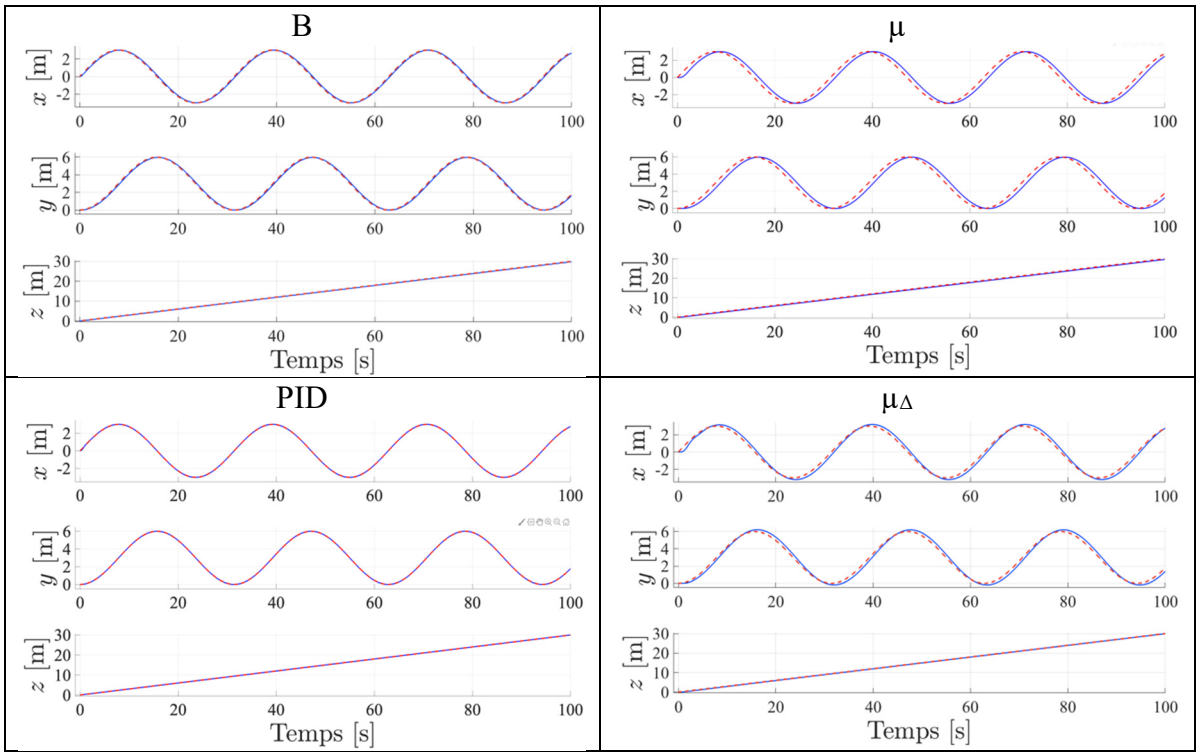


Figure 7.49 Déplacement sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

Comme nous pouvons l'apercevoir à la Figure 7.50, les amplitudes des angles ϕ et θ obtenue pour une consigne hélicoïdale définie en (7.4), sont semblables avec des amplitudes de ± 0.02 rad en régime permanent pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ. Un pic au démarrage allant jusqu'à 0.2 rad environ pour θ est observé dans le cas des commandes B, PID, alors que les compensateurs μ et μ_Δ obtiennent respectivement une amplitude inférieure à 0.06 rad et 0.1 rad.

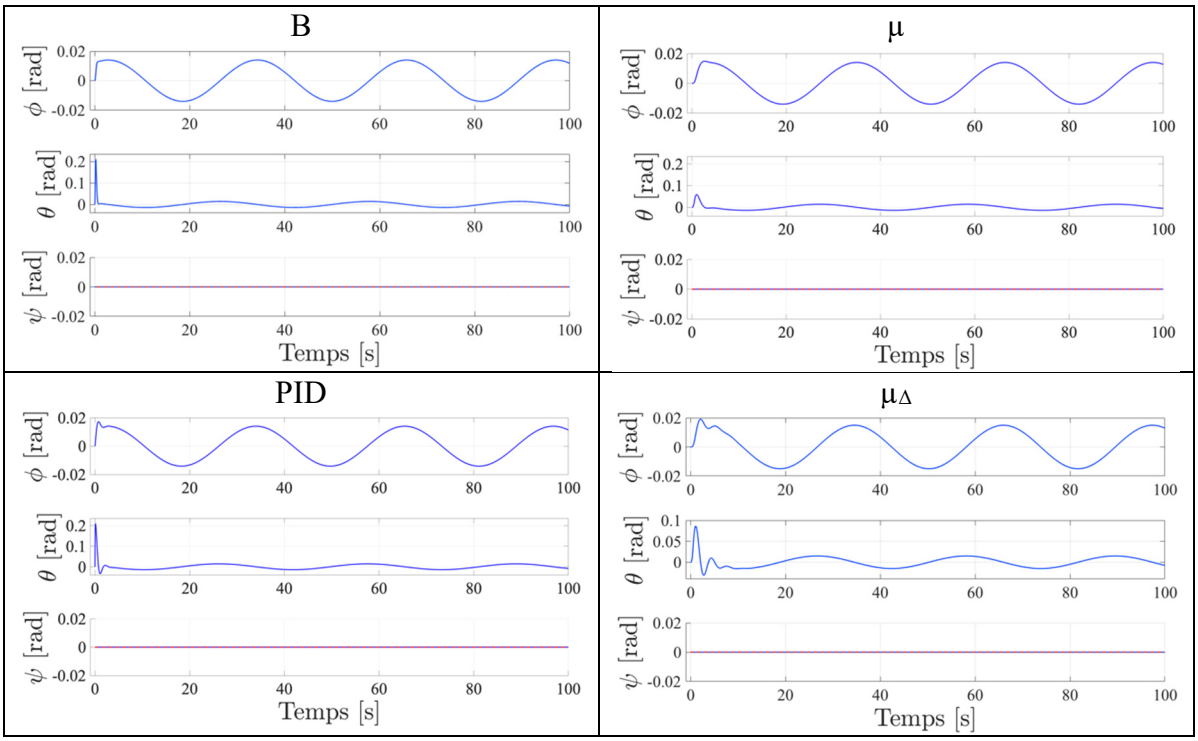


Figure 7.50 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

Comme le montre la Figure 7.51 les amplitudes des erreurs e_x (bleue) et e_y (rouge), lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), sont semblables pour les commandes B et μ_Δ. Bien qu'avec un pic au démarrage le compensateur PID génère les erreurs les plus faibles sur les trois axes x, y, z. Le compensateur μ obtient les erreurs e_x, e_y et e_z les plus importantes.

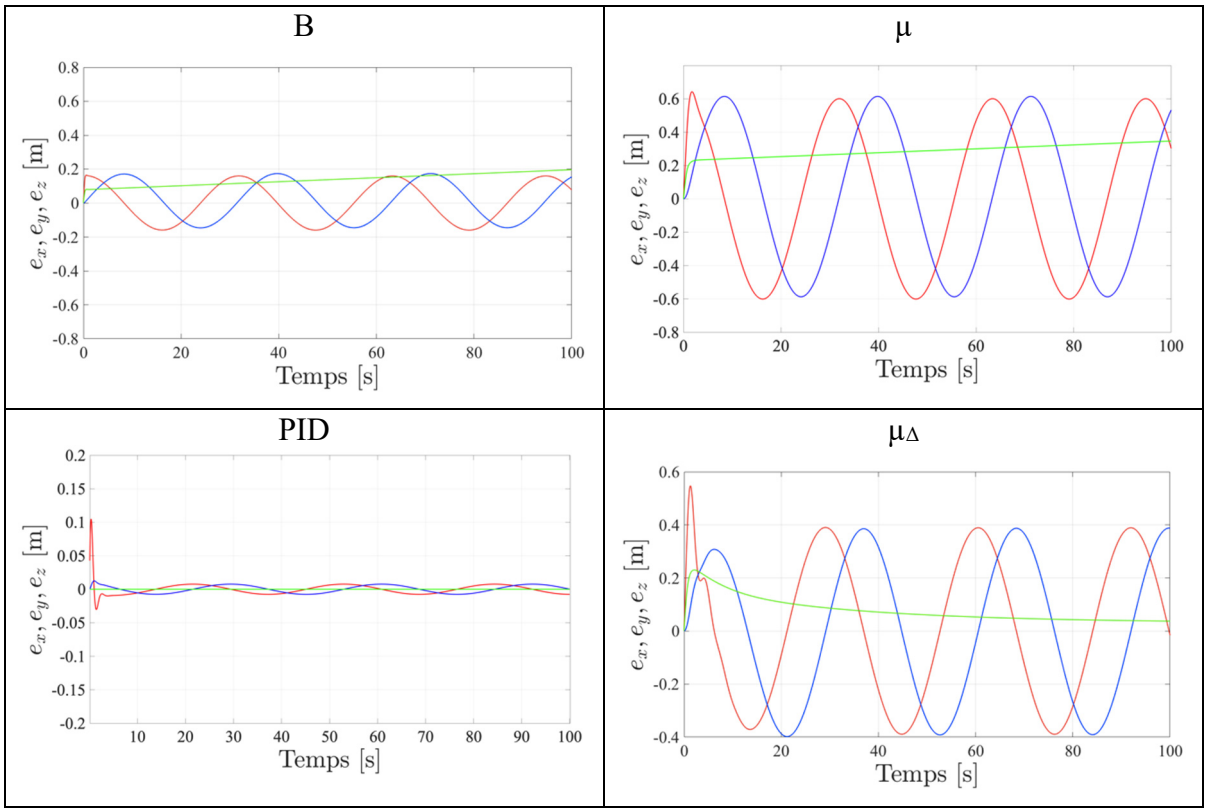


Figure 7.51 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

Comme le montre la Figure 7.52, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), les compensateurs B, μ, PID et μ_Δ génèrent des amplitudes de commande u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte) et u_z identiques en régimes permanents. En régime transitoire la commande PID génère des amplitudes des signaux de commande plus importantes avec un risque important de saturation des actionneurs. La commande μ génère de faibles amplitudes sur u_ϕ, et u_θ et les commandes B et μ obtiennent des amplitudes plus importantes. Sur u_z c'est le compensateur μ_Δ qui obtient la plus faible amplitude puis viennent les commandes μ, B et PID. La commande sur u_ψ reste égale à zéro puisqu'il n'y a pas de couplage et la référence sur ψ est constante.

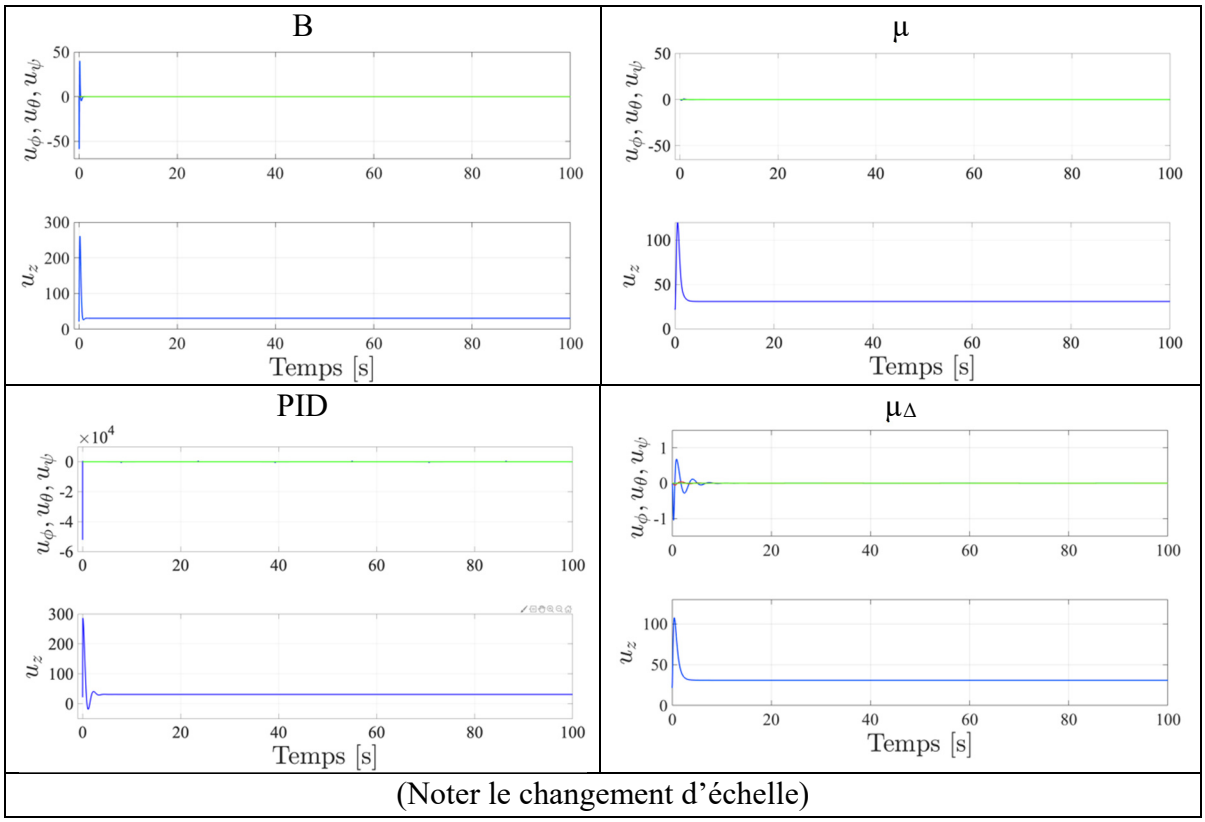


Figure 7.52 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

Des pics de démarrage concernant les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue), d'amplitudes suffisamment faibles pour être réaliste, sont représentés à la Figure 7.53 pour les commandes B, μ et μ_Δ. Le compensateur PID quant à lui obtient un pic de démarrage pour les vitesses de rotation des moteurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 avoisinant 3×10^4 rads/s, ce qui saturera certainement les actionneurs.

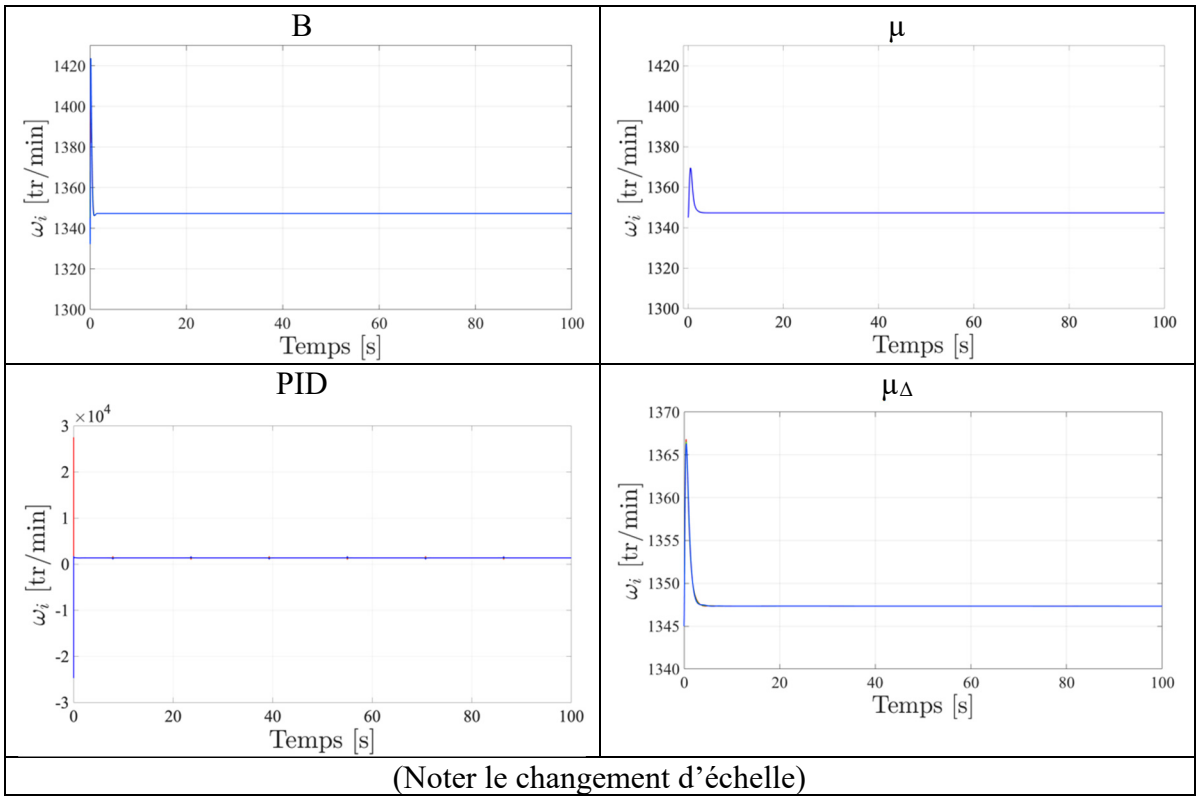


Figure 7.53 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

7.3.4.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

Les compensateurs B, H_2 et H_∞ montrent sur la Figure 7.54 et la Figure 7.55 une bonne capacité à suivre une trajectoire de vol hélicoïdale lorsque le processus est non linéaire. L'écart de la trajectoire vis-à-vis de la consigne est sensiblement moins important pour le compensateur B et un écart plus important avec la consigne est présent pour le compensateur H_∞.

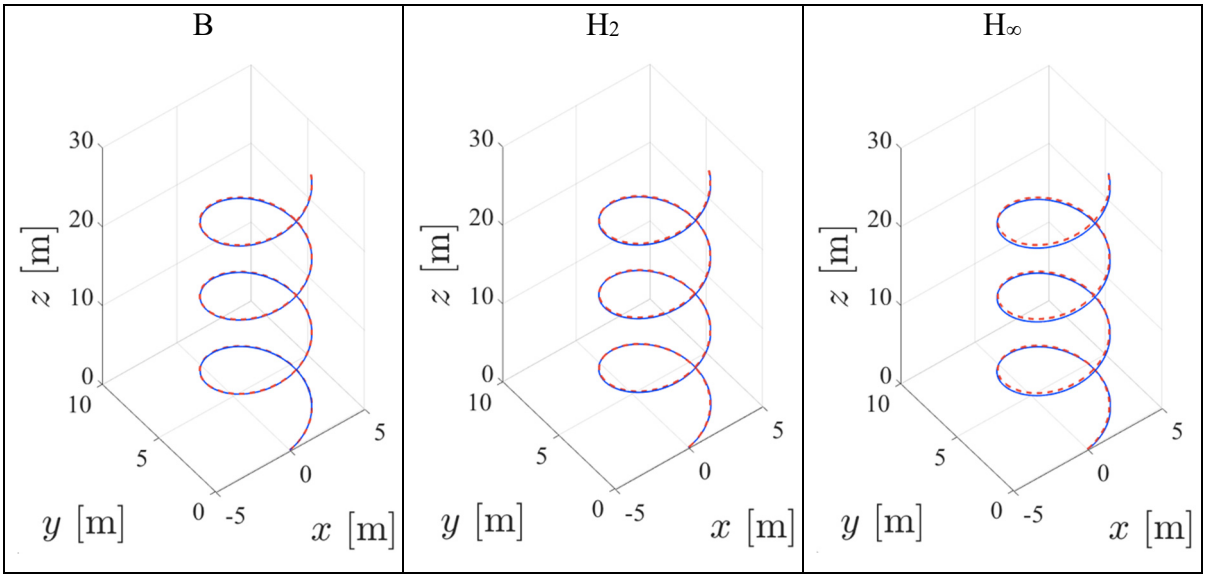


Figure 7.54 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

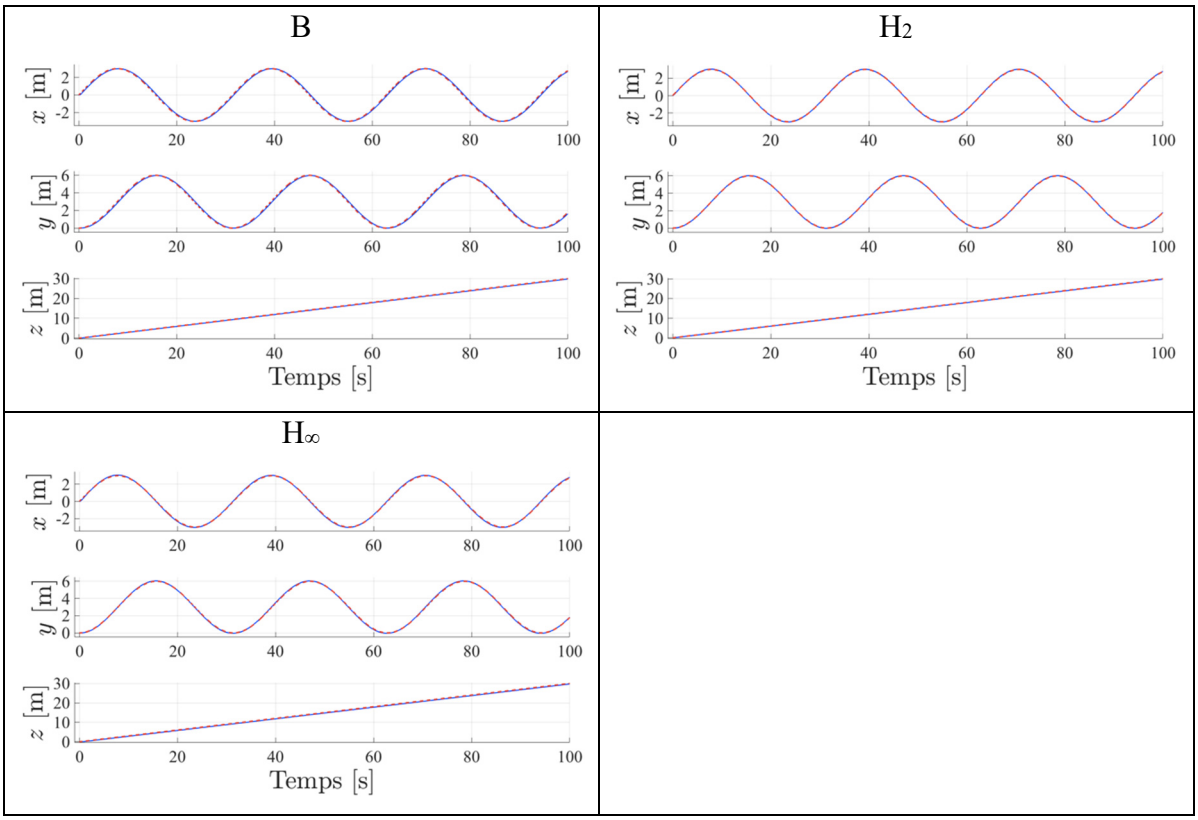


Figure 7.55 Déplacements sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Les réactions sur les angles ϕ et θ, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), illustrées à la Figure 7.56 semble réalisables pour l'ensemble des commandes B, H_2 et H_∞, avec des variations maximales au démarrage restants respectivement inférieure à 0.2 rad, 0.6 rad et 0.3 rad.

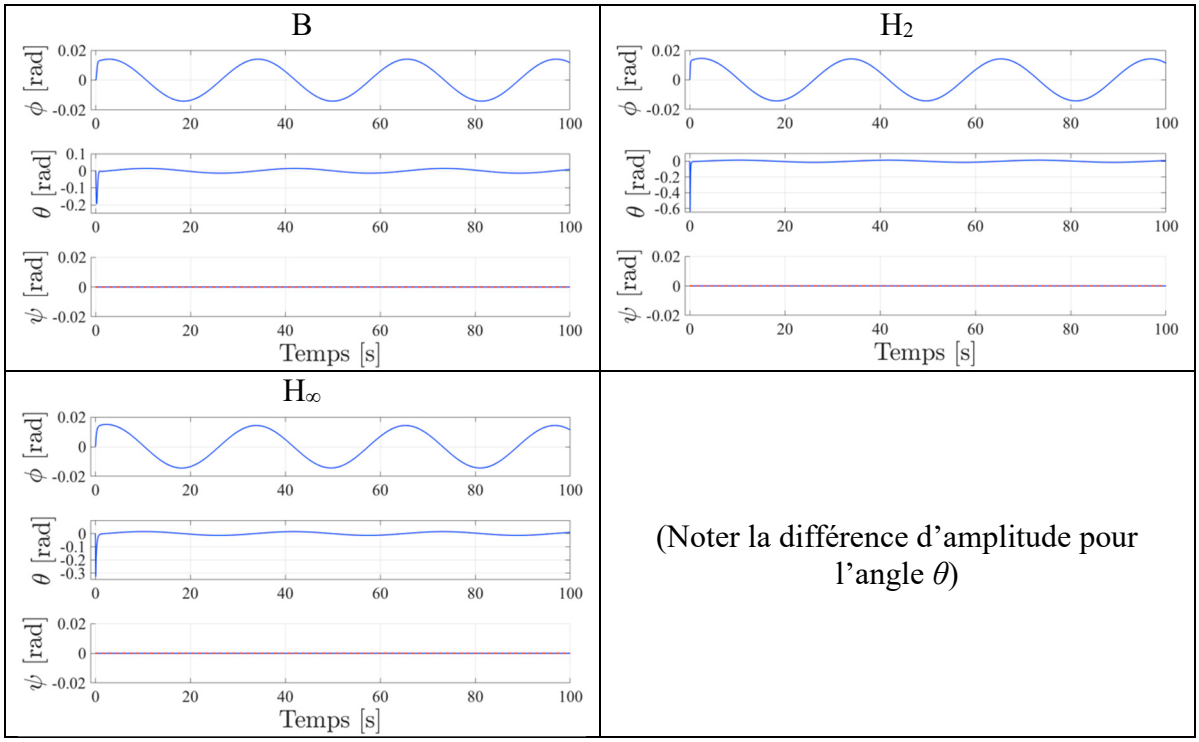


Figure 7.56 Déplacements des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Les erreurs e_x (bleue) et e_y (rouge), sont faibles pour les trois commandes B, H_2 et H_∞ mais, légèrement plus importante dans le cas de la commande B. L'erreur de traînée e_z (verte) est sensiblement plus importante avec le compensateur H_∞.

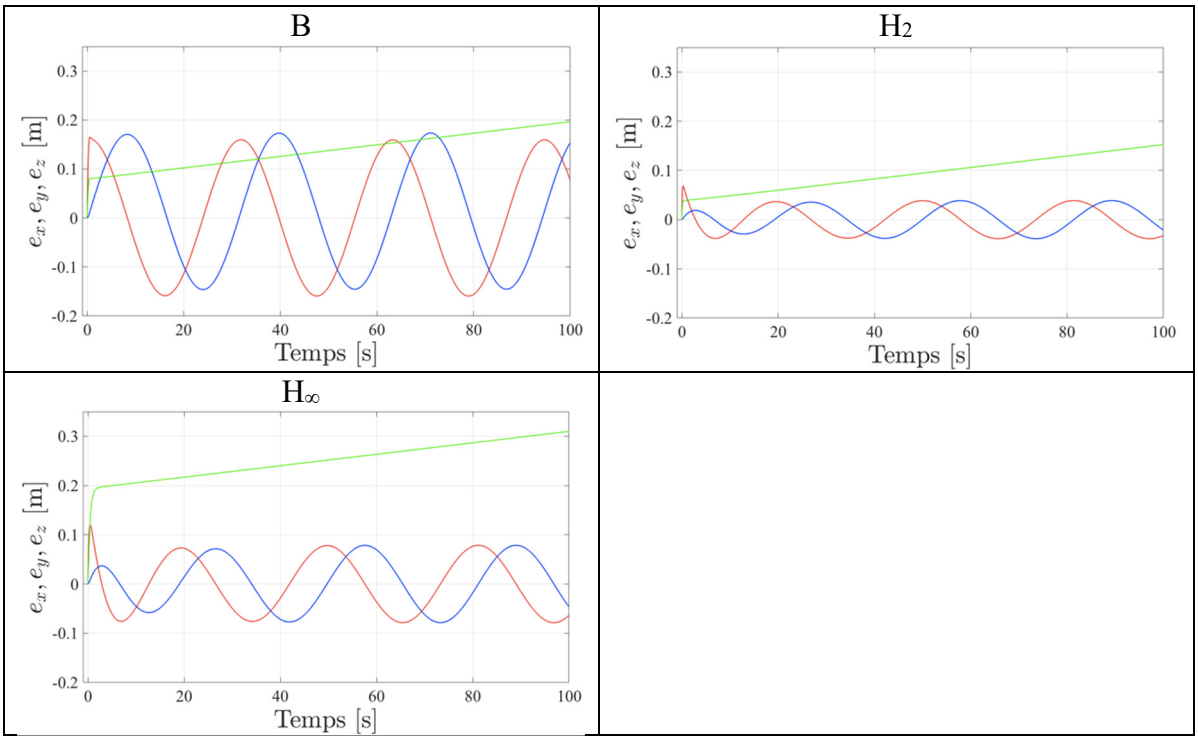


Figure 7.57 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Comme le montre la Figure 7.58 les commandes *L, M, N, T_z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), sont bien plus importantes dans le cas de la commande H_2. Le compensateur B obtient les plus faibles amplitudes de commandes sur *L, M* et *N*. La commande H_∞ obtient l'amplitude de commande la plus faible sur T_z.

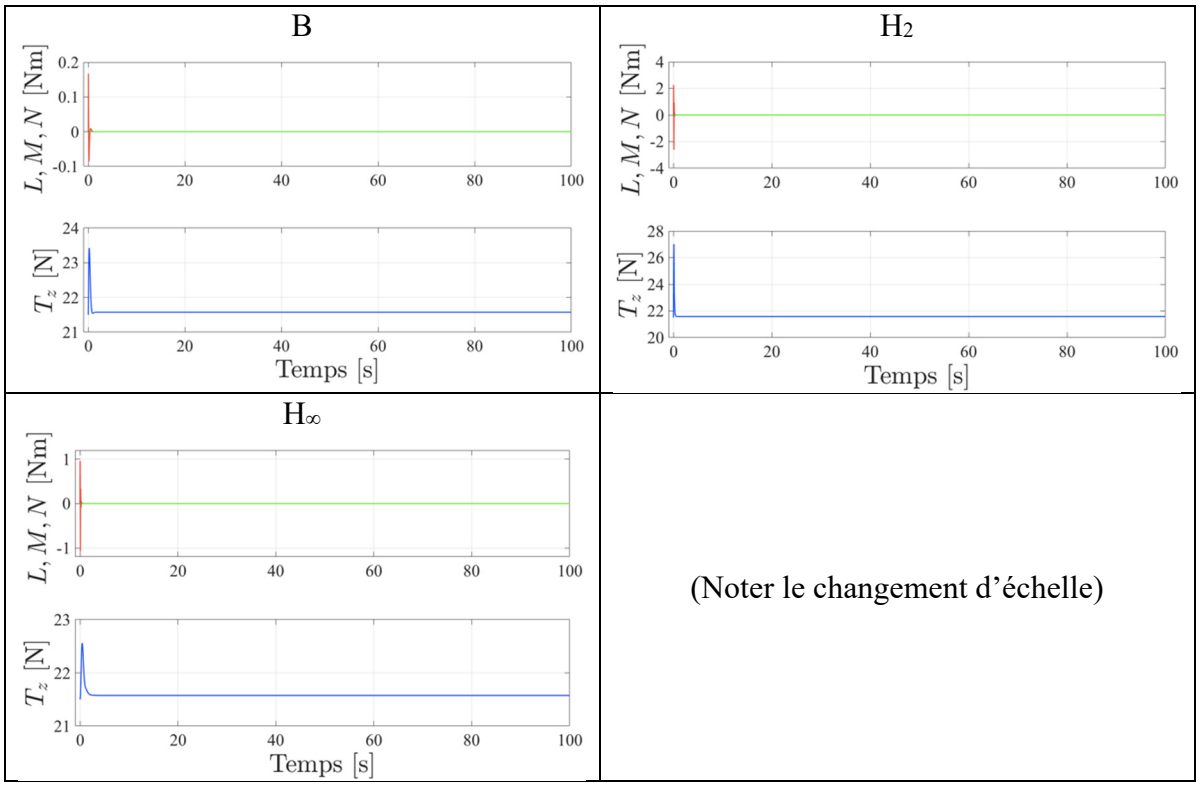


Figure 7.58 Commandes *L, M, N, T_z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue), lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), génèrent un pic au démarrage pour les trois compensateurs B, H_2, H_∞ tel que le montre la Figure 7.59.

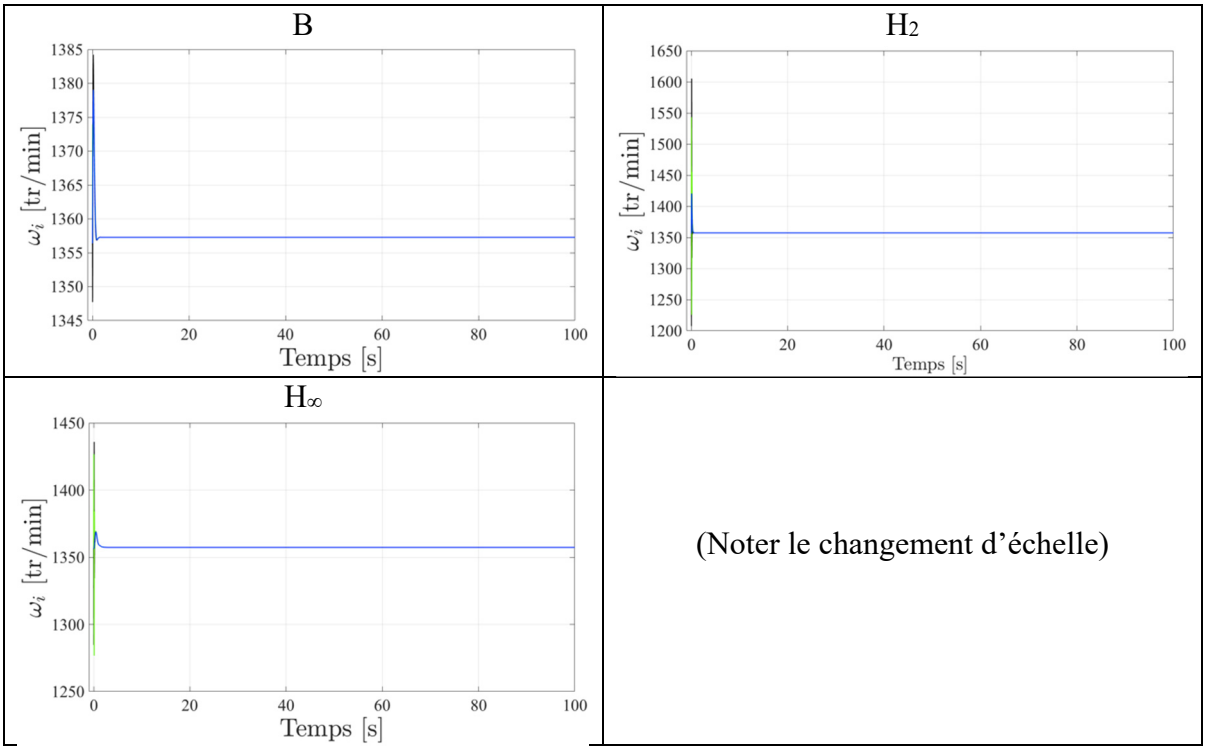


Figure 7.59 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, H_2, H_∞

7.3.4.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

On remarque sur la Figure 7.60 et la Figure 7.61, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), que la commande PID est la plus performante en étant la plus proche de la trajectoire de référence en pointillé rouge. Vient ensuite la commande B qui présente un léger écart avec la consigne sur les axes x, y, z qui augmentent sensiblement avec le temps. Puis, les commandes μ et μ_Δ génèrent un écart plus important sur les axes x et y. Toutefois cet écart est relativement constant dans le temps.

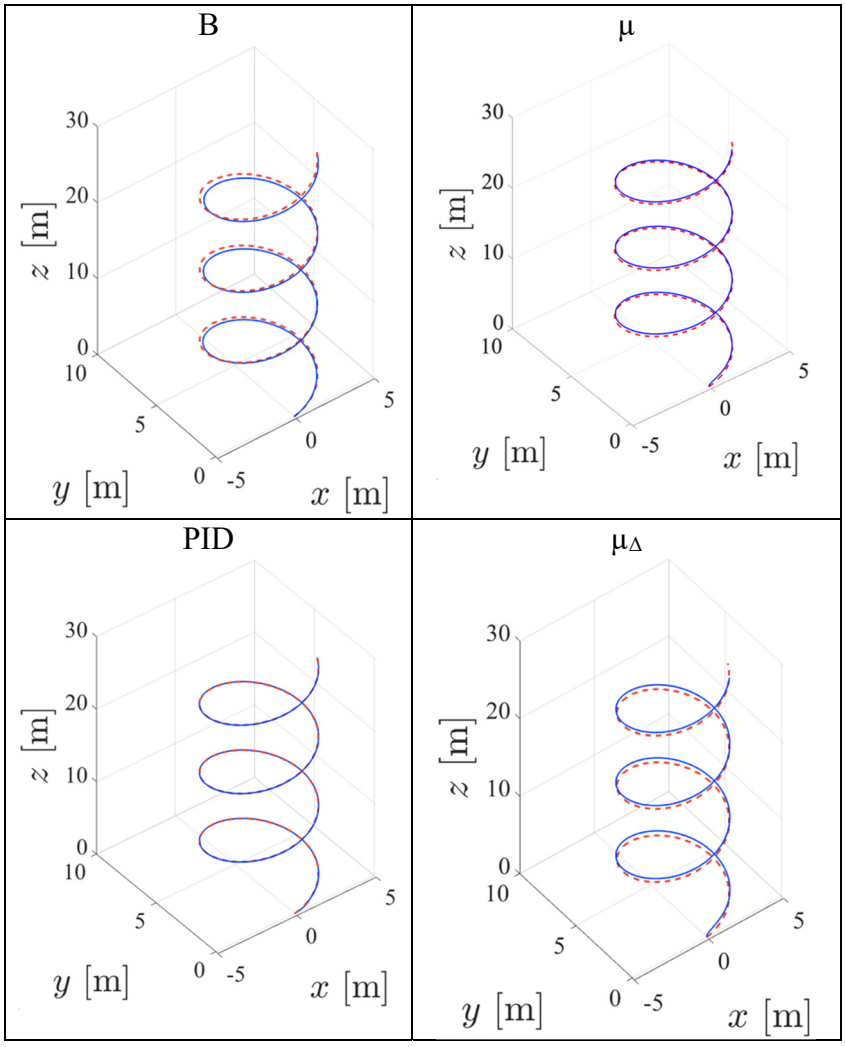


Figure 7.60 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

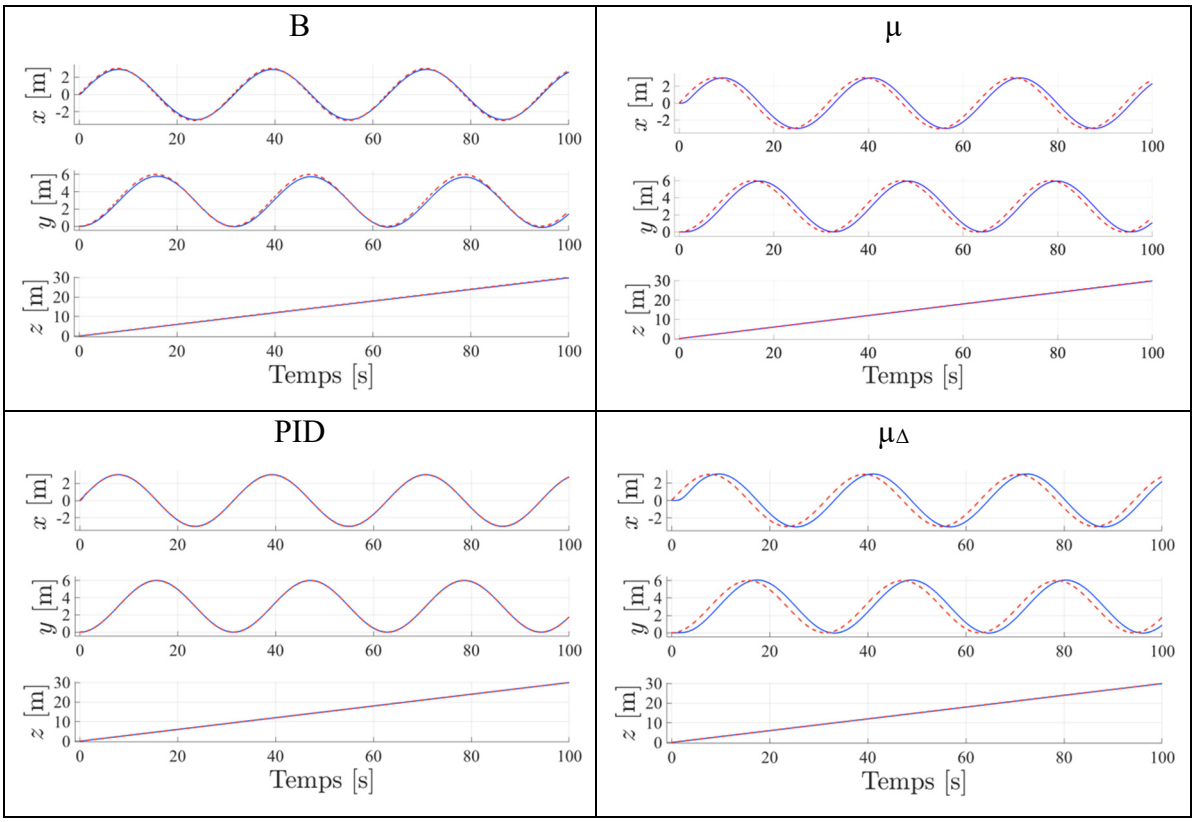


Figure 7.61 Déplacement sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ

La Figure 7.62 montre des amplitudes pour les angles ϕ et θ réalisables pour les quatre compensateurs B, μ, PID, μ_Δ. Ici également l'angle ψ est sensiblement égal à zéro.

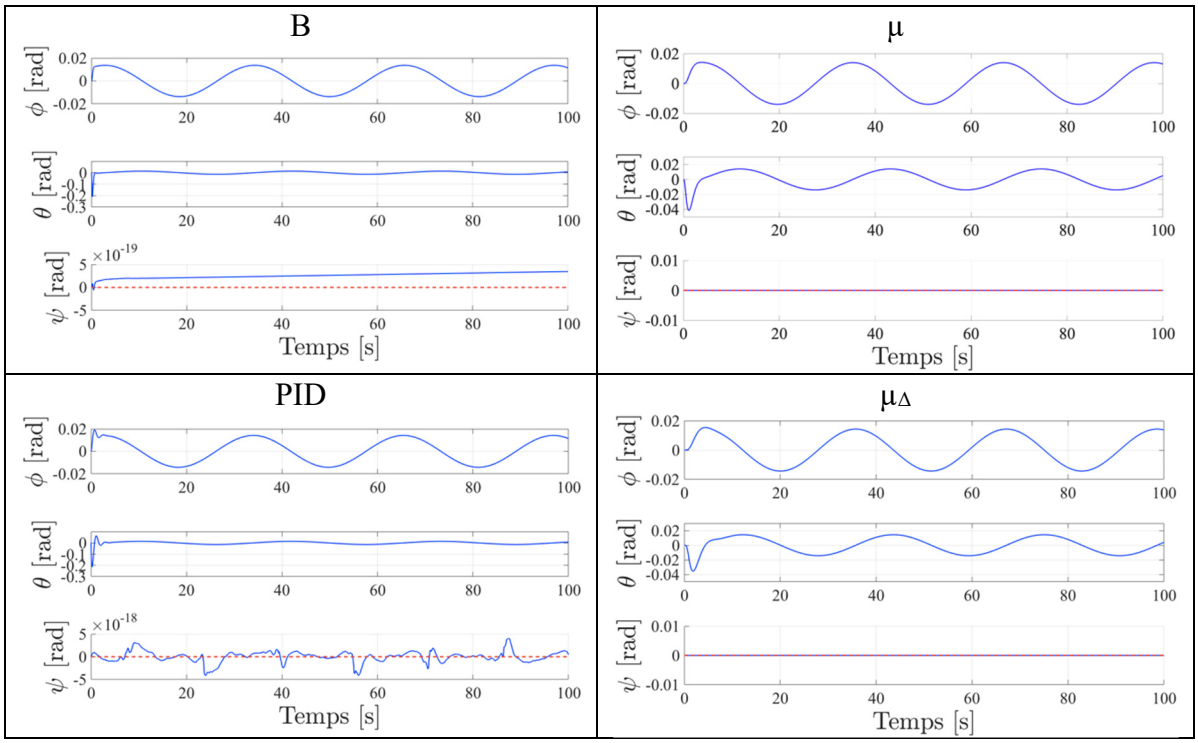


Figure 7.62 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ

Tel que représenté à la Figure 7.63, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), les commandes μ et μ_Δ possèdent des erreurs e_x (bleue) et e_y (rouge) plus importantes relativement à la commande B, mais restant faibles et constantes. La commande B génère une augmentation de l'erreur sur e_x. L'erreur sur e_z (verte) est identique entre les commandes B et μ. L'augmentation dans le temps de l'erreur de traîné e_z observée avec les commandes B et μ est annulée avec les commandes PID et μ_Δ. Avec un pic au démarrage restant faible, la commande PID obtient les plus faibles erreurs e_x, e_y et e_z.

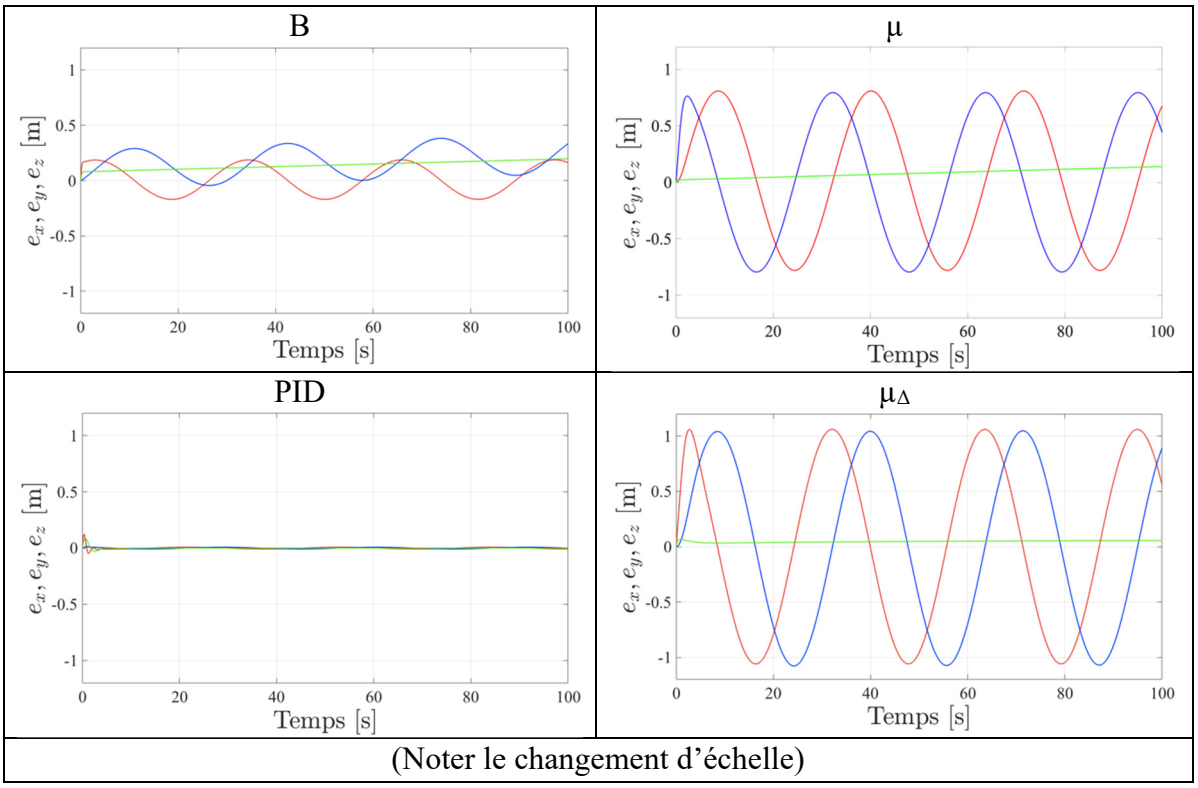


Figure 7.63 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ

Les commandes *L, M, N* représentées à la Figure 7.64, semblent réalisable pour les compensateurs B, μ et μ_Δ. Le pic observé au démarrage avec le compensateur PID sur *L, M, N* risque de saturer les actionneurs. Les commandes en poussée T_z sont réalistes pour les commandes B, μ et PID. Les amplitudes de la poussée T_z, générées par le compensateur μ_Δ sont importantes. De plus, ce signal de commande est très bruité et pourrait générer un comportement nerveux du drone.

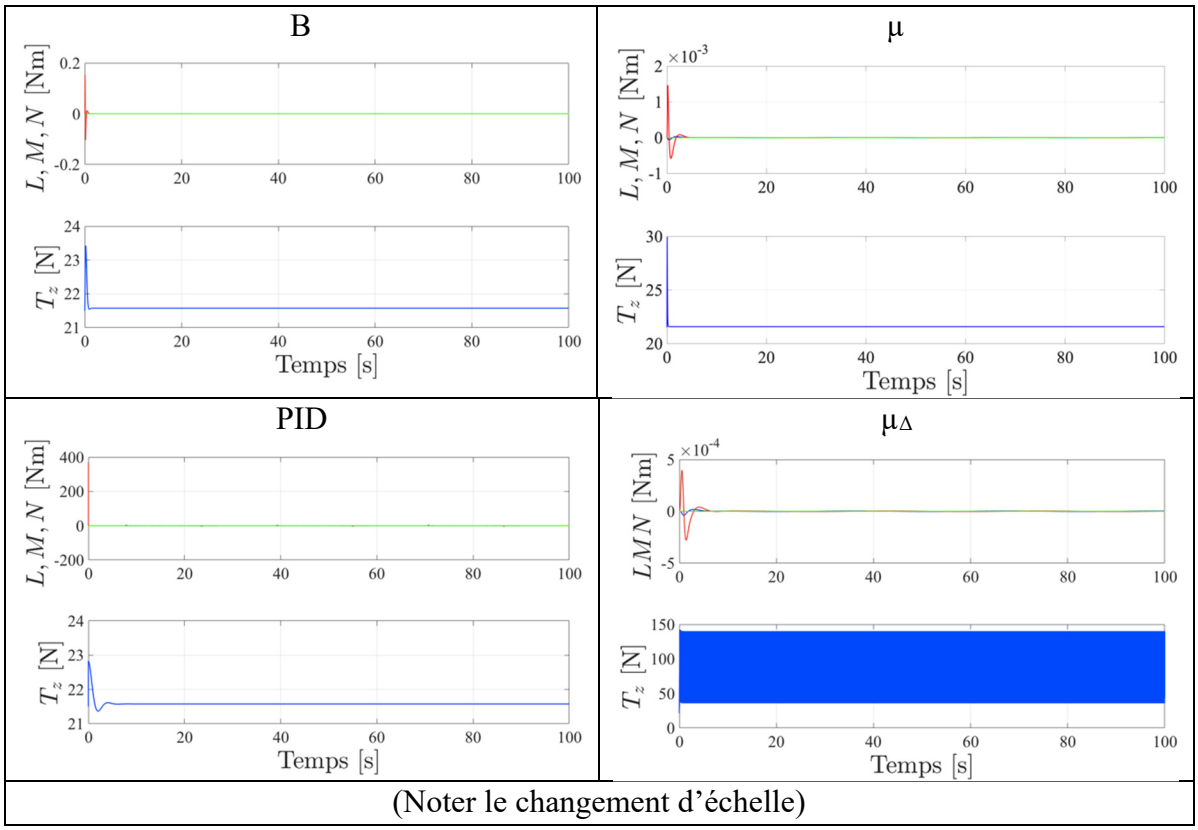


Figure 7.64 Commandes *L, M, N, Tz* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ

Les allures des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) représentées à la Figure 7.65 montrent d'importants pics de vitesse au démarrage pour l'ensemble des commandes, excepté les commandes B et μ qui sont plus réalistes.

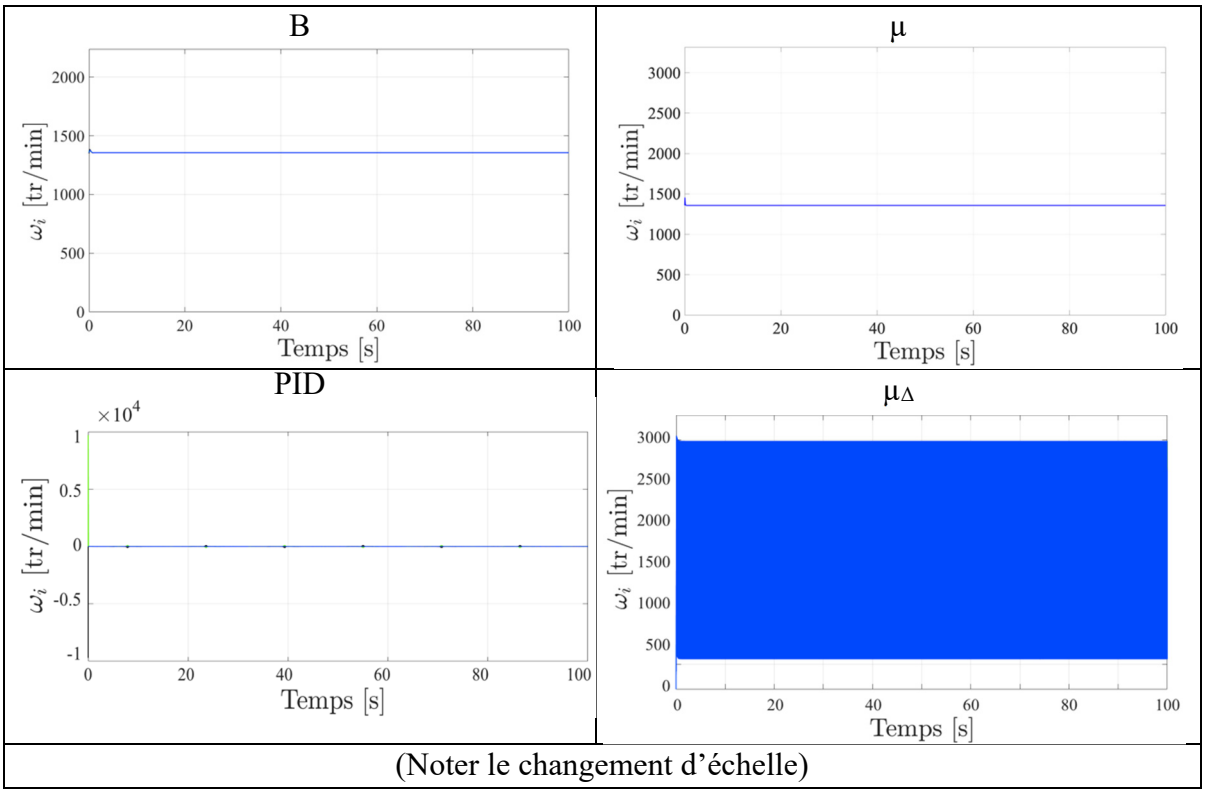


Figure 7.65 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs B, μ, PID, μ_Δ

7.3.4.6 Commandes backstepping et hiérarchique

Comme le montre la Figure 7.66 et la Figure 7.67, les commandes par backstepping et hiérarchique, lorsqu'une consigne hélicoïdale définie en (7.4) est appliquée, génèrent des erreurs non négligeables sur x et y. Une légère erreur de traînée subsiste sur l'axe z dans les deux cas.

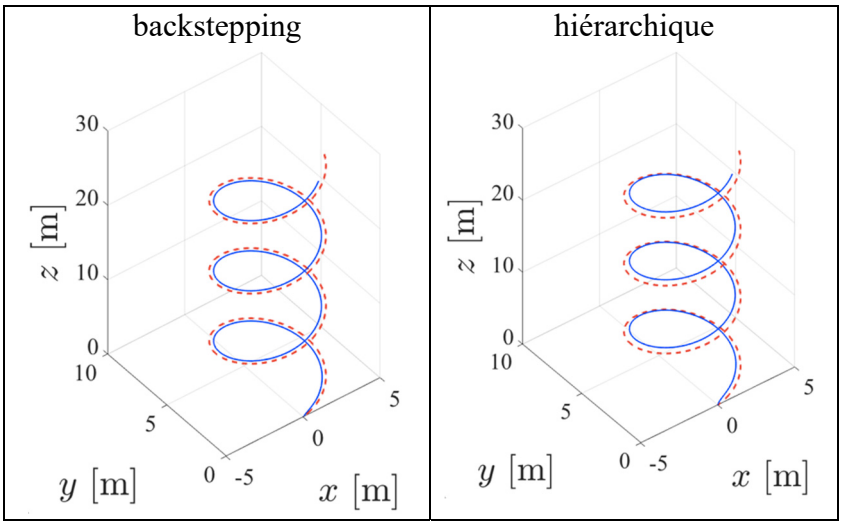


Figure 7.66 Déplacement en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

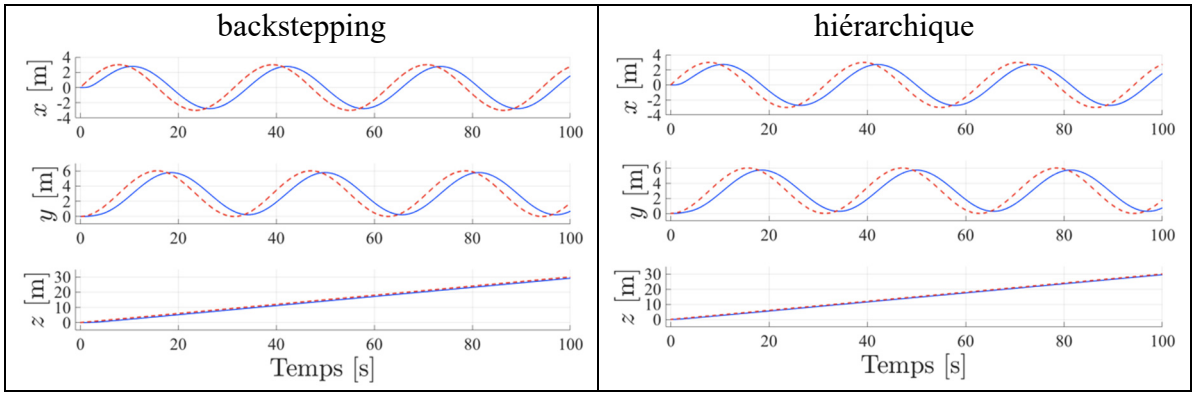


Figure 7.67 Déplacement sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les amplitudes des angles ϕ et θ représentées à la Figure 7.68, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), sont comprises entre ± 0.04 rad pour les deux commandes et semblent réalisables.

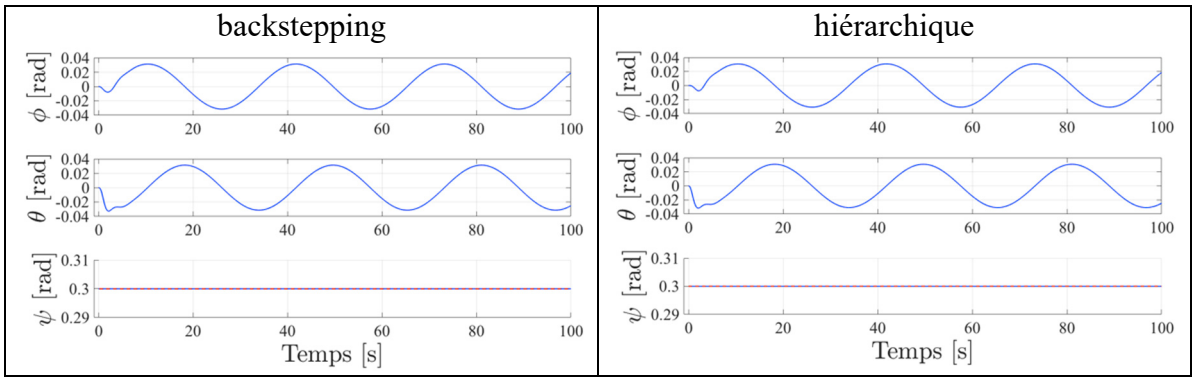


Figure 7.68 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les erreurs e_x et e_y avoisinant ± 1.5 m, lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les deux commandes sont relativement importantes. L'erreur e_z est constante pour les deux commandes, mais sensiblement plus élevée dans le cas du compensateur par backstepping.

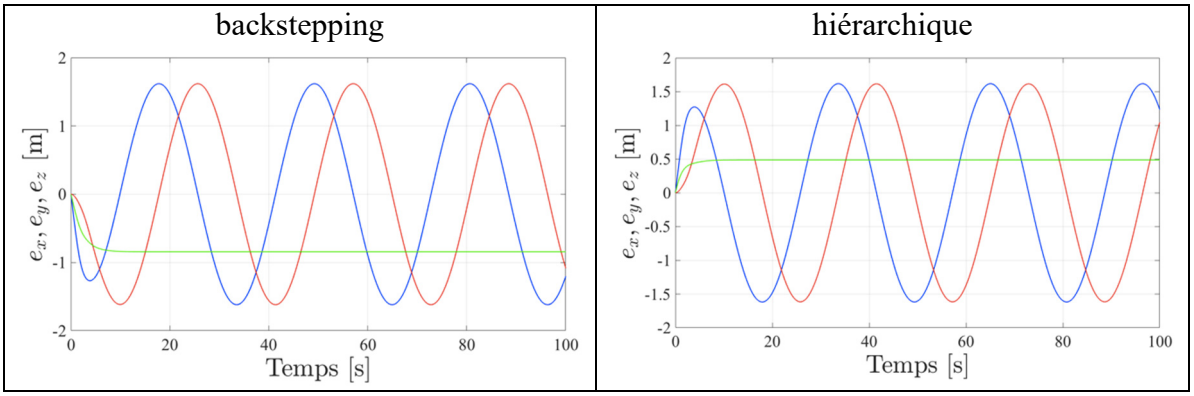


Figure 7.69 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les commandes L, M, N, T_z représentées à la Figure 7.70 lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), sont sensiblement identiques pour les commandes backstepping et hiérarchique. De plus, les faibles amplitudes des commandes L, M, N, T_z rendent certainement les commandes backstepping et hiérarchique réalisables, sans saturations.

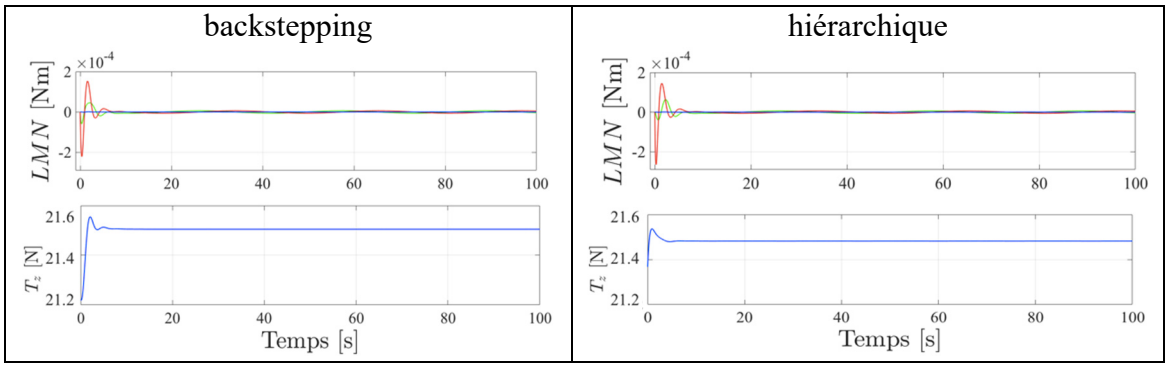


Figure 7.70 Commandes *L, M, N, T_z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) représentées à la Figure 7.71 semblent réalisables sans saturation avec un pic de démarrage avoisinant 1346 tr/min pour les deux commandes et un régime stationnaire autour de 1336 tr/min.

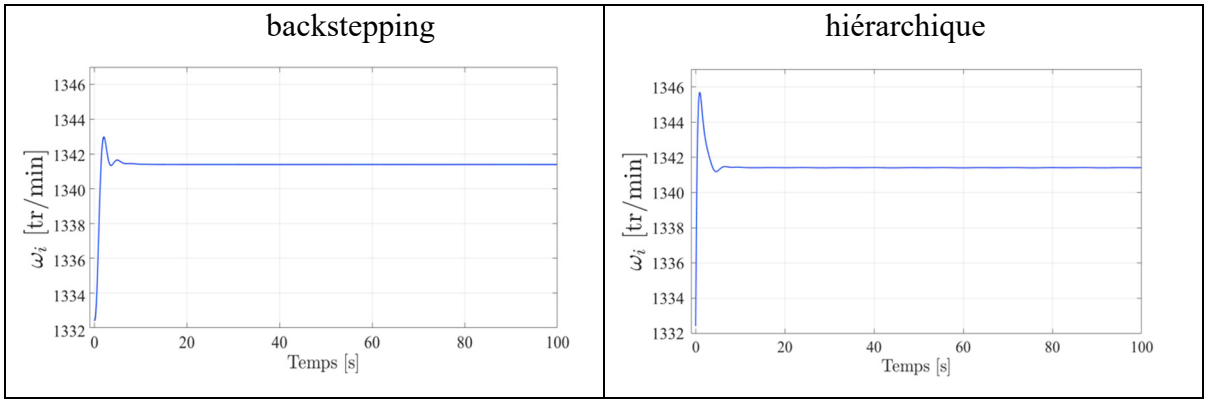


Figure 7.71 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

7.3.4.7 Discussion

Nous avons constaté dans cette partie que le suivi de trajectoire sur les axes *x, y, z* est le plus précis dans le cas de la commande PID ($\approx \pm$ 0.01 m). Les commandes B, H_2 et H_∞ ($\approx \pm 0.16 \sim 0.3$ m) présentent également des performances satisfaisantes sur les axes *x, y, z* avec néanmoins la présence d'une légère dérive sur l'axe *z*. On remarque également la présence d'une dérive sur l'axe *x* pour la commande B lorsqu'elle est appliquée sur le modèle non

linéaire du drone avec système de translation et rotation séparé (3.5.4). Les erreurs de suivi de la trajectoire hélicoïdale sur les axes *x, y* pour les commandes μ et μ_Δ sont sensiblement plus importantes soit ≈ ±0.8 m. On note également une augmentation de l'erreur de position sur l'axe *z* au cours du temps. Les commandes backstepping et hiérarchique génèrent des erreurs de suivi de trajectoire hélicoïdale sur les axes *x, y, z* les plus importantes (≈ ±1.5 m), mais aucune dérive n'est constatée.

Les amplitudes des angles ϕ, θ, ψ (±0.02 - 0.03 rad) pour les commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ backstepping et hiérarchique sont satisfaisantes pour les représentations linéaires et non linéaires du drone puisqu'elles n'excèdent pas ≈ ± 0.04 rad, évitant ainsi tout risque de décrochage du drone.

Les compensateurs backstepping et hiérarchique obtiennent des amplitudes des commandes en couples *L, M, N* les plus faibles (de l'ordre de 10^{-4} Nm), suivies de proche par les commandes μ et μ_Δ, ce qui est souhaitable pour éviter la saturation des actionneurs. Les commandes B, H_2, H_∞ et principalement PID obtiennent des amplitudes des couples *L, M, N* satisfaisantes en régime permanent, mais avec d'importants pics aux démarrages (presque 400 Nm dans le cas du PID) risquant de saturer les actionneurs. Après un pic au démarrage compris entre 21.6 N et 30 N pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B, μ, PID, backstepping et hiérarchique la commande en poussée T_z se stabilise autour de 21.5 N, soit sa valeur théorique en vol stationnaire. Seul le compensateur μ_Δ génère une commande en poussée T_z avec de fortes amplitudes risquant de saturer les actionneurs (jusqu'à ≈ 145 N). De plus cette réponse temporelle de T_z dans le cas du compensateur μ_Δ présente des oscillations pures.

Nous avons évalué dans cette section à partir des figures illustrant les angles ϕ, θ et les vitesses de rotation des moteurs $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, pour une trajectoire de référence hélicoïdale définie en (7.3). Des amplitudes trop importantes des angles ϕ, θ risquent de provoquer le décrochage de l'appareil. De plus, en se rappelant que la vitesse de vol stationnaire est $\omega_0 = 1345$ tr/min, des amplitudes trop importantes des vitesses de rotation $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ risquent de saturer les actionneurs. Le Tableau 7.21 permet de mettre en évidence (zones colorées), les structures de

commandes étudiées entre les sections 7.3.4.2 à 7.3.4.6 présentant, des amplitudes importantes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 risquant de provoquer le décrochage du drone ou la saturation des actionneurs.

On remarque que les risques de décrochage du drone et de saturation des actionneurs sont systématiquement évités lorsque le processus linéaire est considéré. Dans le cas du processus non linéaire, seules les commandes H_2, H_∞, B, μ, backstepping et hiérarchique parviennent à éviter simultanément les risques de décrochage du drone et de saturation des actionneurs.

Tableau 7.21 Structures de commandes étudiées à la section 7.3.4 présentant pour une trajectoire de référence hélicoïdale définie en (7.3), des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées)

Processus	Linéaire (7.3.4.2)			Linéaire (7.3.4.3)				Non Linéaire (7.3.4.4)			Non Linéaire (7.3.4.5)				Non linéaire (7.3.4.6)
Commande	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	backstepping hiérarchique
Risque de décrochage?															
Risque de saturation des actionneurs?															

Il est important pour l'analyse des résultats de cette partie, de prendre en considération les conditions de tests avec lesquels ces résultats ont été générés. D'une part les critères de comparaison utilisés pour la conception des compensateurs linéaires B, H_2, H_∞ et μ consiste à égaler le gain de la sensibilité en BF (ε) et à limiter à un maximum similaire (M_s) de cette sensibilité sur l'ensemble des fréquences (voir section 7.2.4 pour rappel).

D'autre part les conditions de test, pour les boucles de commandes entièrement linéaires (sections 7.4.1.2 et 7.4.1.4) consistent à augmenter l'amplitude de la perturbation en sortie jusqu'à ce que l'amplitude des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 se rendent à la limite de la réalisabilité pour les commandes B, H_2, H_∞, PID ou μ. L'avantage de cette approche est de rendre exploitables les signaux de la boucle de commande en les rendant suffisamment importants pour être visibles et permettre la comparaison des performances entre les différentes commandes. La faiblesse de cette approche réside au niveau de la conclusion sur la réalisabilité pratique des commandes. En effet, avec cette méthode, l'amplitude de la perturbation appliquée en sortie de la boucle de commande n'est pas nécessairement représentative de conditions réelles. Les conclusions concernant le décrochage ou la saturation des actionnaires peuvent alors être erronées.

L'application des commandes linéaires B, H_2, H_∞, PID ou μ au modèle non linéaire de drone dans les parties 7.4.1.3 et 7.4.1.5, nécessite une diminution de la perturbation en sortie relativement aux parties 7.4.1.2 et 7.4.1.4. En effet, pour des amplitudes de perturbation en sortie similaires au cas avec processus linéaire, l'ensemble des boucles de commandes considérant le modèle non linéaire de drone diverge. Cette diminution de l'amplitude de perturbation en sortie a été considérée convenable, lorsque les déplacements du drone le long des axes x, y, z devenaient suffisamment petits pour être exploitables. Comme nous le verrons, seule la commande PID ne parvient à remplir systématiquement ces objectifs.

7.4.1 Vol stationnaire en présence de perturbation en sortie

7.4.1.1 Conditions de test

Nous porterons dans cette partie notre attention sur l'effet d'un bruit blanc *d* d'une fréquence de 10 Hz inséré sur la sortie de mesure *y* telle que représentée à la Figure 7.72. L'intensité de la valeur maximale de la puissance de densité spectrale (DSP) exprimée en m^2/Hz va varier selon le type de modèle du processus *P*(*s*) utilisé. Nous considérons ici la présence du bruit blanc sur les axes *x*, *y* et *z* avec une durée de simulation de 10 s. Le positionnement initial du drone sera une altitude *z* constante et aux coordonnées (*x* = 0, *y* = 0).

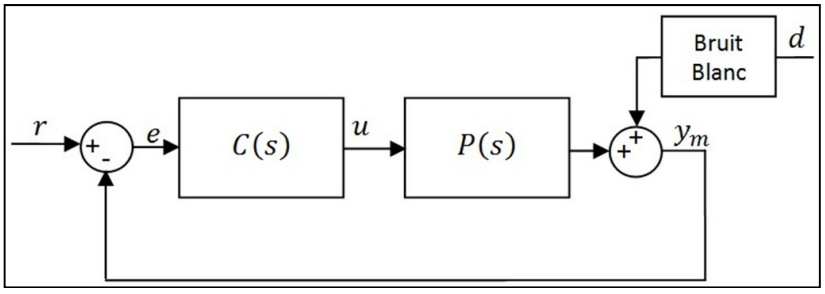


Figure 7.72 Insertion de bruit blanc dans la boucle fermée

La métrique utilisée pour évaluer la robustesse des algorithmes de commande est l'écart type σ de l'erreur de position *e.* Pour un nombre d'échantillons *n* cet écart type σ s'exprime par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|e_i - \delta|^2} \tag{7.5}$$

Avec e_i l'échantillon *i* de l'erreur de position *e* et δ la valeur moyenne de l'erreur de position *e* telle que :

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i \tag{7.6}$$

Dans un premier temps nous évaluerons les erreurs de position e_x, e_y, e_z sur les axes *x, y, z* ainsi que l'erreur quadratique $e_{xyz} = \sqrt{(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/3}$. Pour évaluer les performances fréquentielles des algorithmes de commande nous relèverons les écarts types σ_x, σ_y, σ_z et σ_{xyz} à partir des erreurs e_x, e_y, e_z et e_{xyz}. La valeur maximale de chacune des erreurs sera relevée.

7.4.1.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

Pour une DSP de 0.075 m^2/Hz insérée sur les sorties *x, y, z* lors d'un vol stationnaire nous observons à la Figure 7.73, et la Figure 7.74 ainsi qu'au Tableau 7.22 que la commande H_∞ est la plus robuste puisque ses variations sur *x, y, z* sont les plus faibles, puis viennent les commandes H_2 et B.

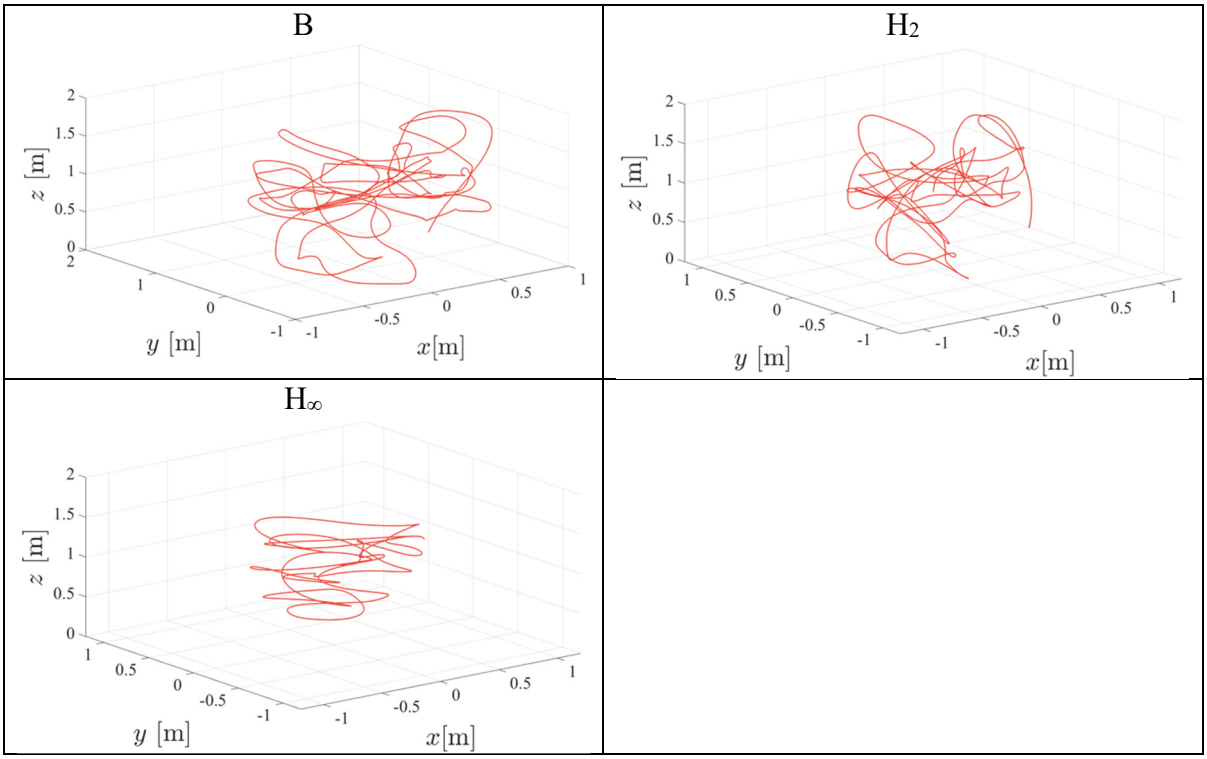


Figure 7.73 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone

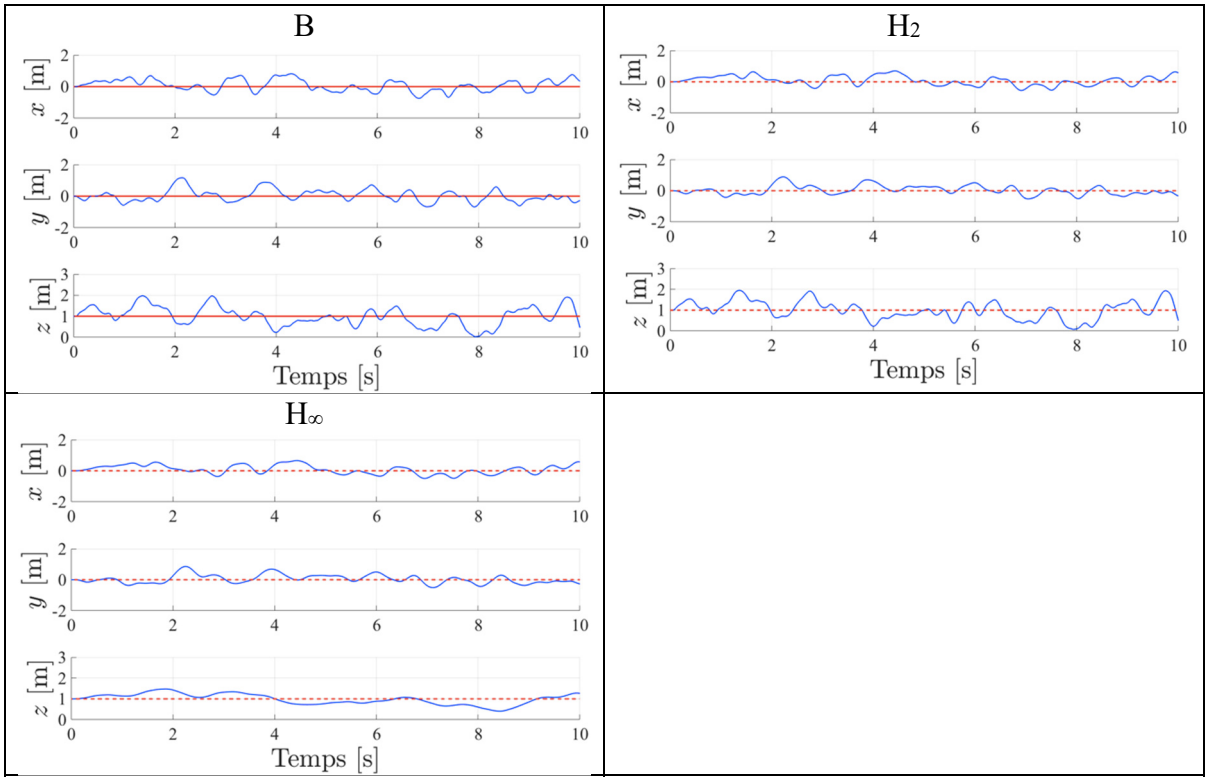


Figure 7.74 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone

Tableau 7.22 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire du processus

	B	H_2	H_∞
σ_{xyz}	0.3729	0.3809	0.2560
σ_x	0.3598	0.2954	0.2830
σ_y	0.3786	0.2916	0.2814
σ_z	0.4467	0.4333	0.2572
$max(e_x)$	0.8175	0.6970	0.6594
$max(e_y)$	1.1678	0.8890	0.8576
$max(e_z)$	1.9517	1.9517	1.4724

Dans ces conditions de test les amplitudes des angles ϕ et θ illustrées à la Figure 7.75 sont importantes pour les trois commandes et engendrent le décrochage de l'appareil. On note également que les variations des angles de la commande B sont environ deux fois plus importantes que celles des commandes H_2 et H_∞.

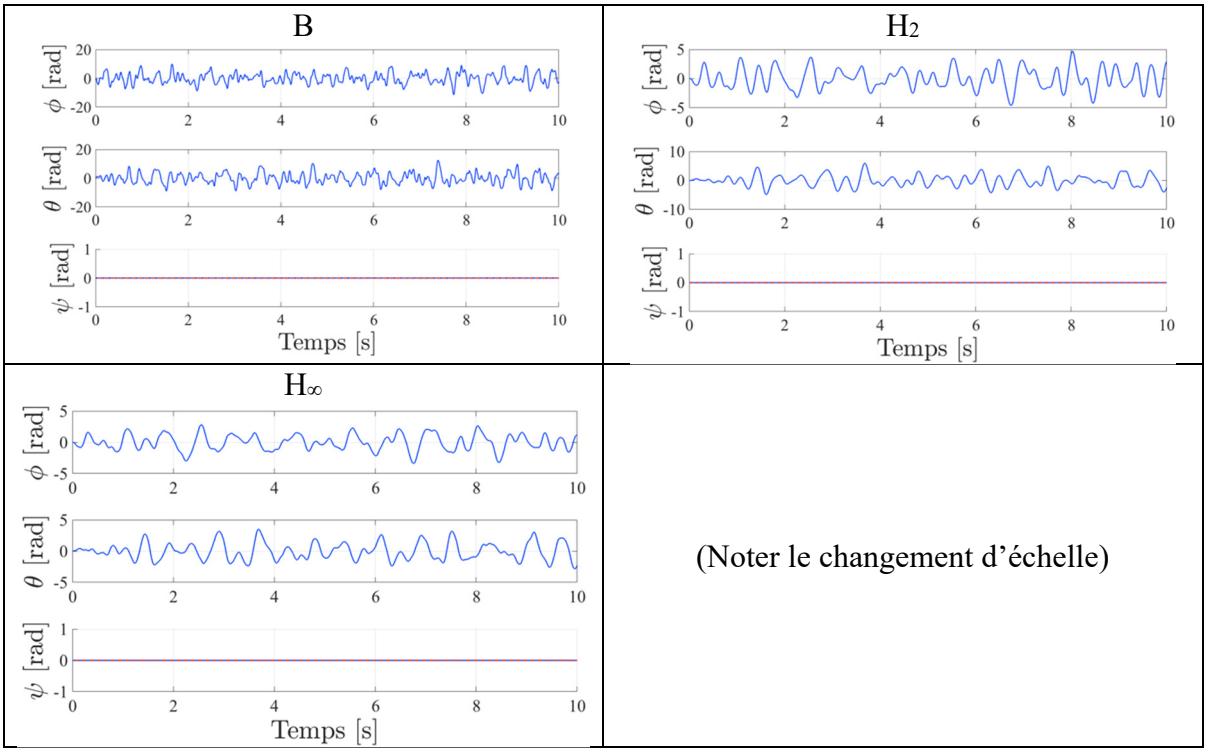


Figure 7.75 Déplacement autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone

L'amplitude des commandes u_ϕ et u_θ tracées à la Figure 7.75 sont bien plus faibles dans le cas des compensateurs H_2 et H_∞. Concernant la poussée u_z seule le compensateur H_∞ obtient des variations d'amplitude relativement faibles.

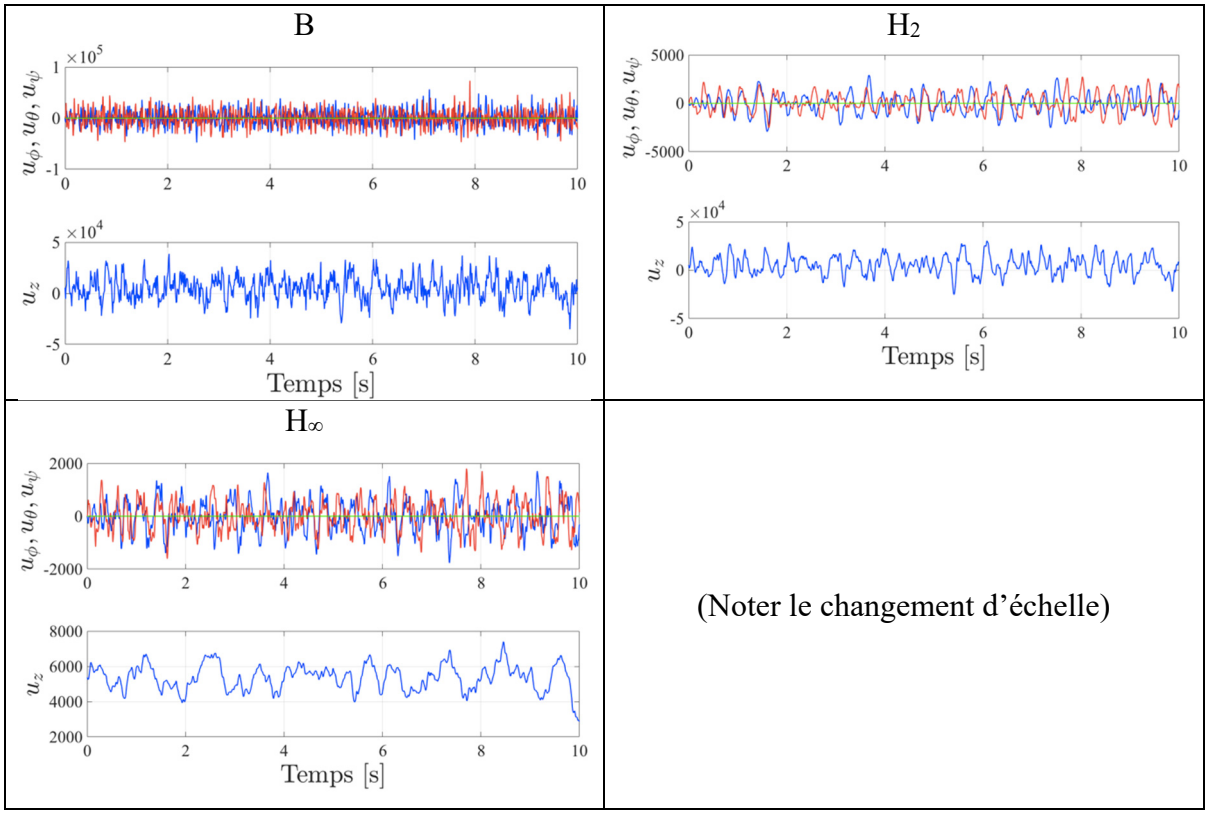


Figure 7.76 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone

La variation des erreurs e_x (bleue), e_y (rouge) et e_z (verte) sont représentées à la Figure 7.77. Le compensateur H_∞ obtient les plus faibles amplitudes.

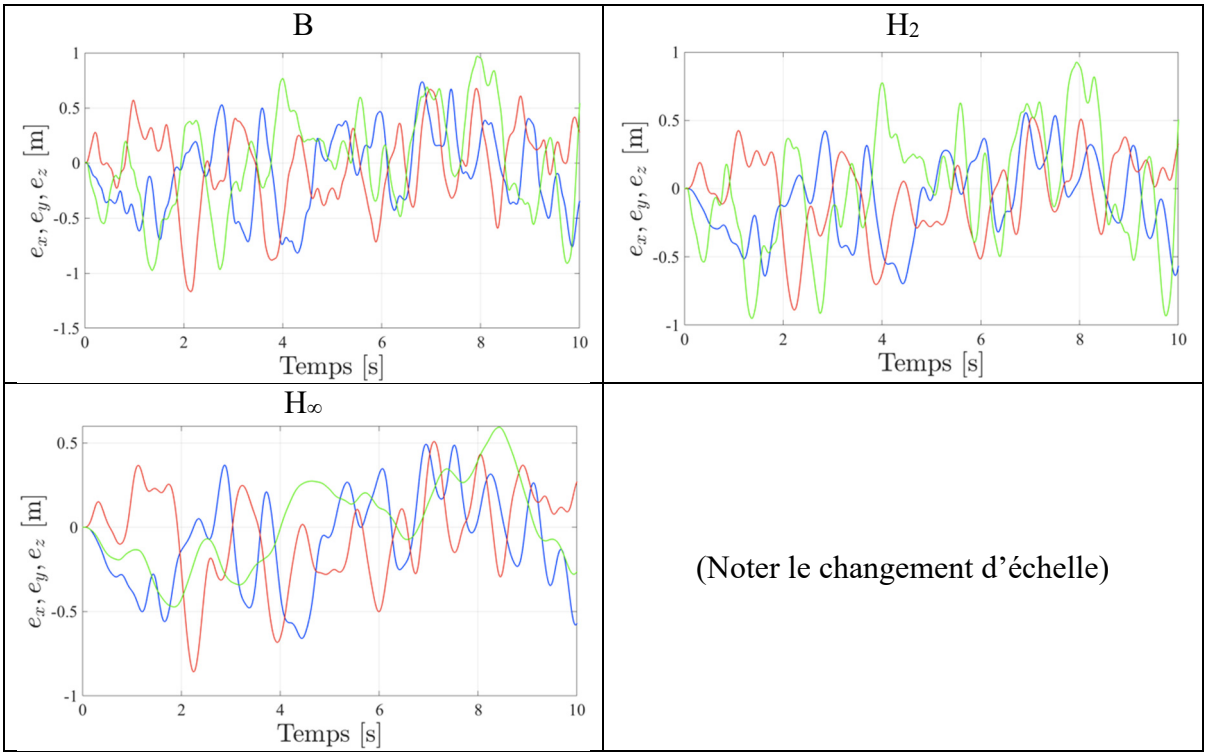


Figure 7.77 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone

L'évolution des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) illustrées à la Figure 7.78, montre un compensateur B avec des variations d'amplitude importante. Les commandes H_2 puis H_∞ semblent plus convaincante et risquent moins de saturer la boucle de commande.

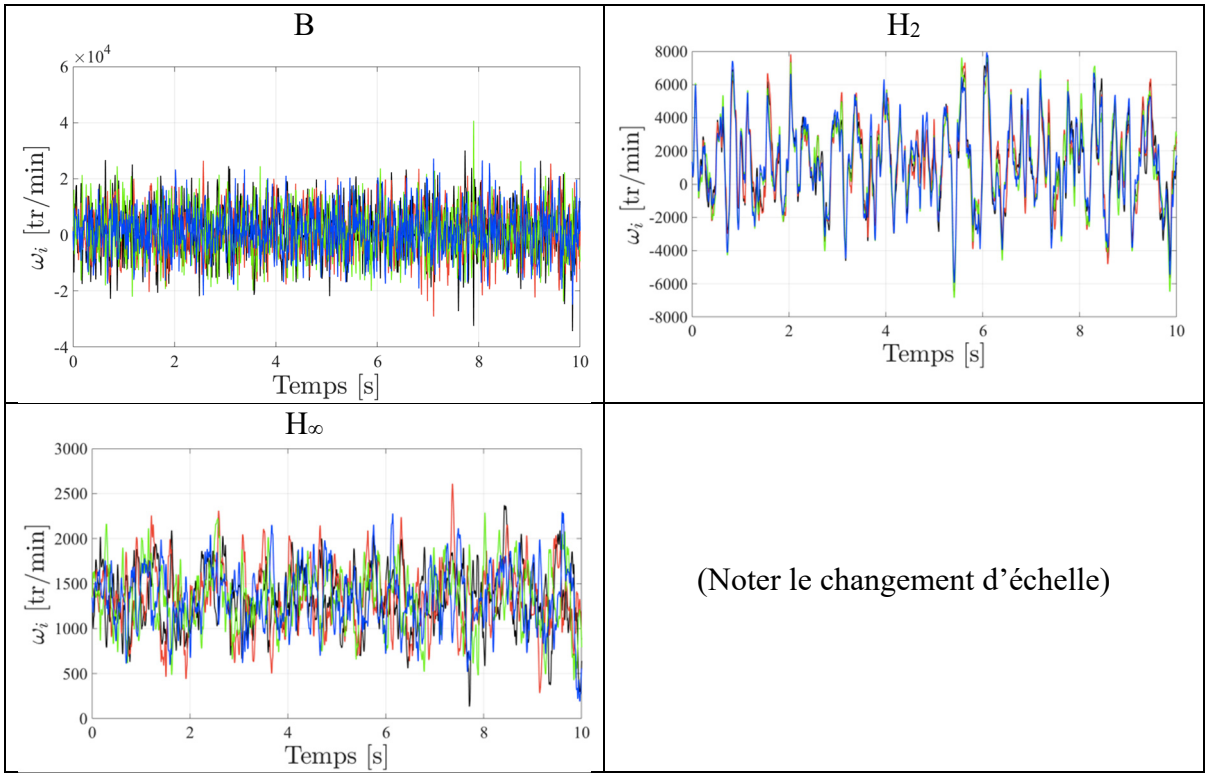


Figure 7.78 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle linéaire de drone

7.4.1.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

La DSP employée ici sur les axes *x, y, z* est de 0.12 m^2/Hz. Tel que le montrent la Figure 7.79 et la Figure 7.80 ainsi que le Tableau 7.34, les résultats les plus robustes sont obtenus par les compensateurs μ et μ_Δ avec, globalement, une légère dégradation pour μ_Δ. La commande B obtient des résultats acceptables et le PID génère un comportement nerveux avec de nombreux changements brusques de direction.

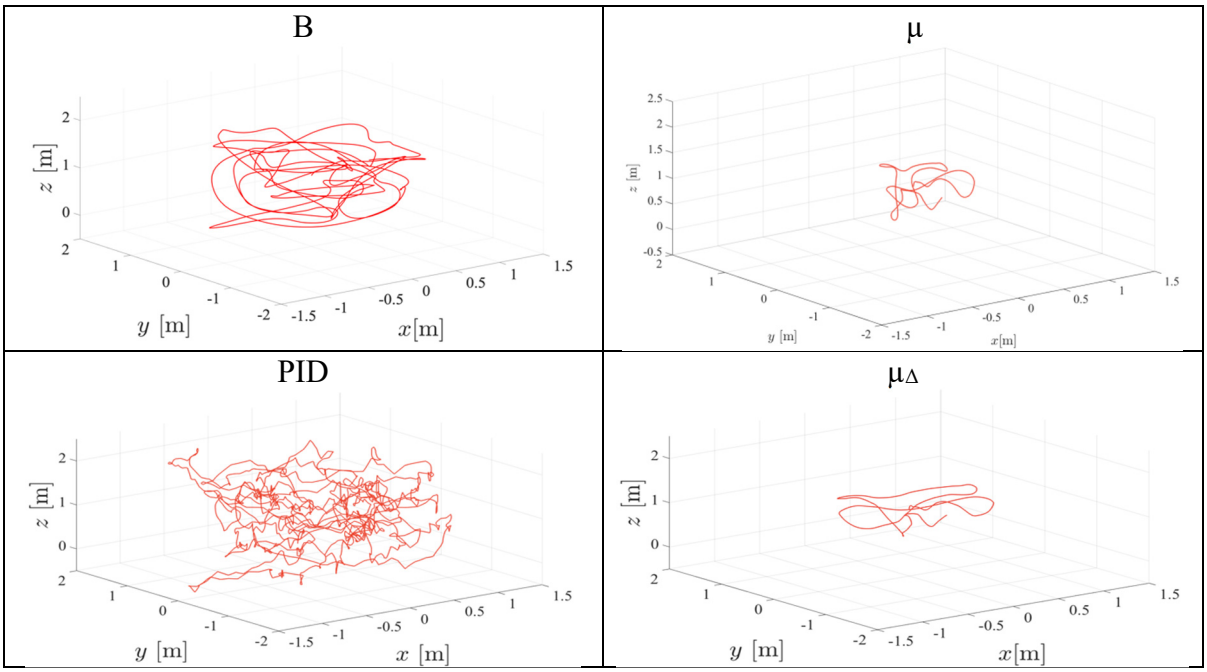
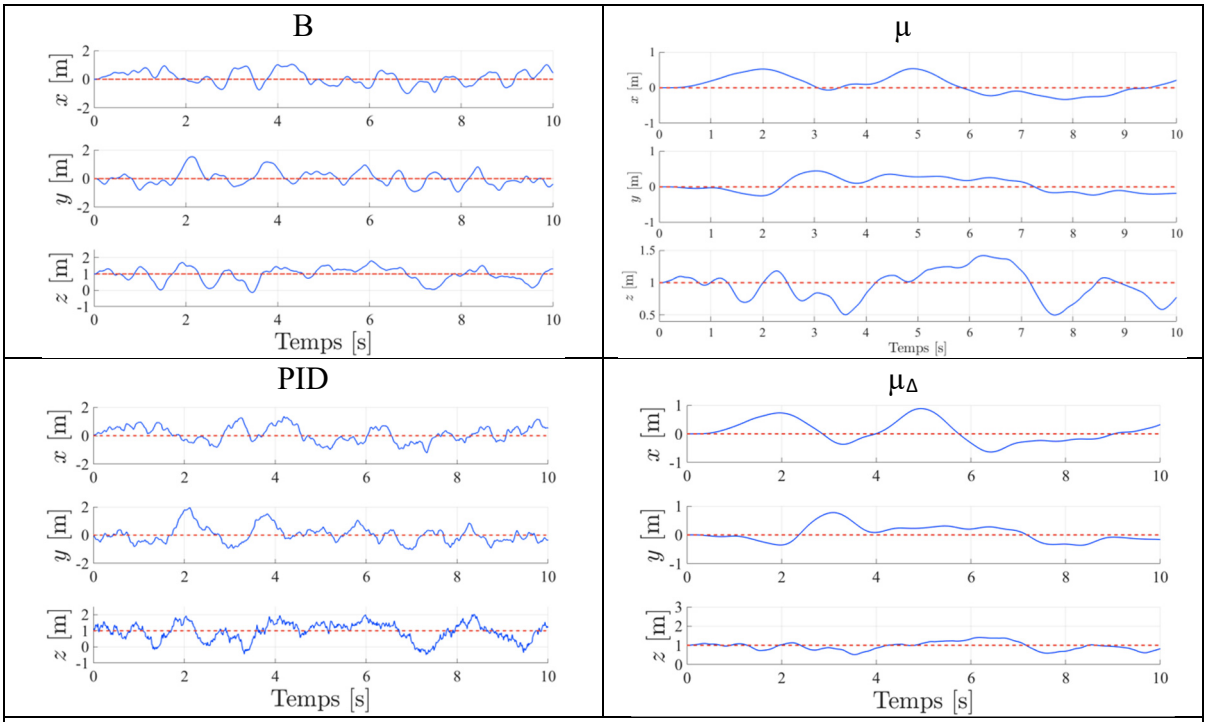


Figure 7.79 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone



(Noter le changement d'échelle)

Figure 7.80 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, μ, μ$_\Delta$, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone

Tableau 7.23 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ$_\Delta$, PID appliqués sur le modèle linéaire du processus

	B	PID	μ	μ$_\Delta$
σ_{xyz}	0.4143	0.4741	0.2314	0.2366
σ_x	0.4828	0.5522	0.2495	0.3900
σ_y	0.4983	0.5846	0.2095	0.2817
σ_z	0.4324	0.5525	0.2373	0.2207
$max(e_x)$	1.0412	1.3483	0.5353	0.8826
$max(e_y)$	1.5259	1.9469	0.4472	0.7745
$max(e_z)$	1.7927	2.0157	1.4192	1.4092

Comme illustré à la Figure 7.81 les commandes μ et μ$_\Delta$ obtiennent des variations réalistes des angles ϕ et θ comprises entre ±0.5 rad. Les amplitudes des angles ϕ et θ obtenues par les compensateurs B et PID sont trop importantes et engendrent le décrochage de l'appareil.

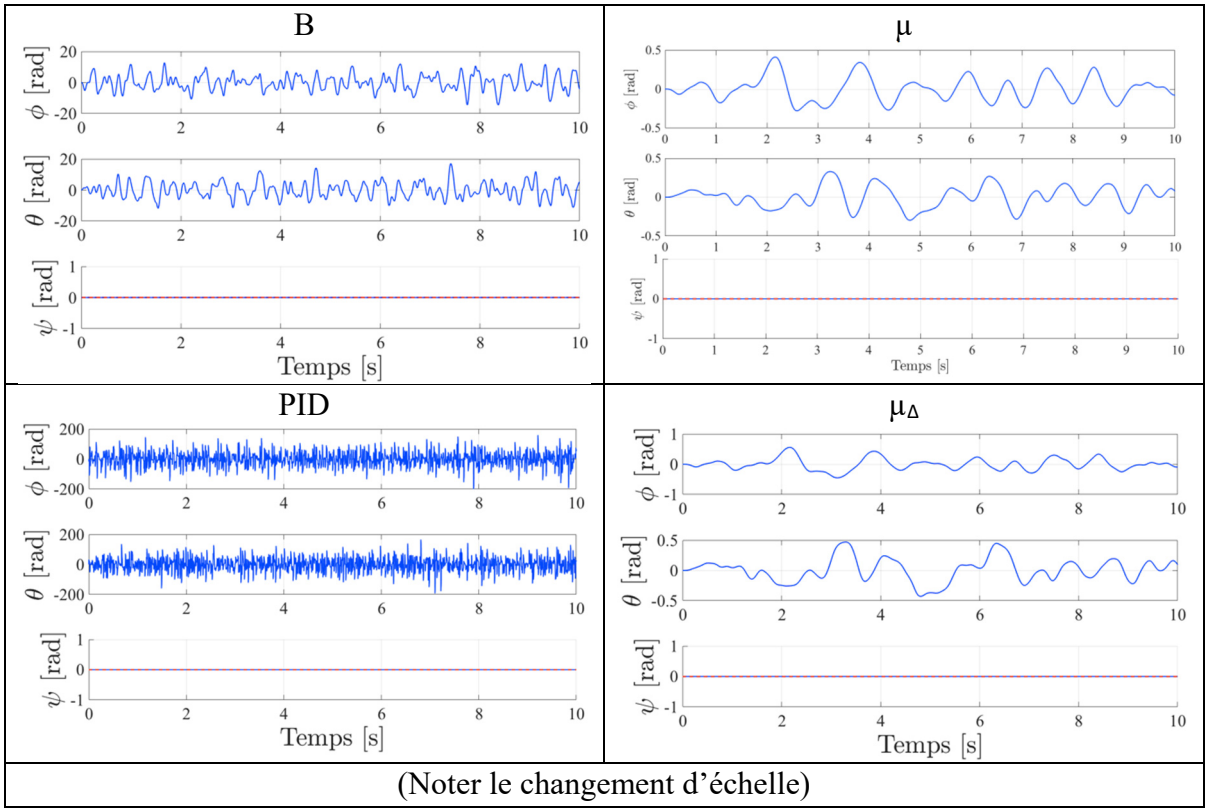


Figure 7.81 Variations des angles ϕ, θ, ψ pour un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone

La variation des commandes u_ϕ (bleue), u_θ (bleue), et u_z générées par les compensateurs μ et μ_Δ tel qu'illustré à la Figure 7.82 sont semblables et sont bien plus faibles que celles obtenues avec les commandes B et PID.

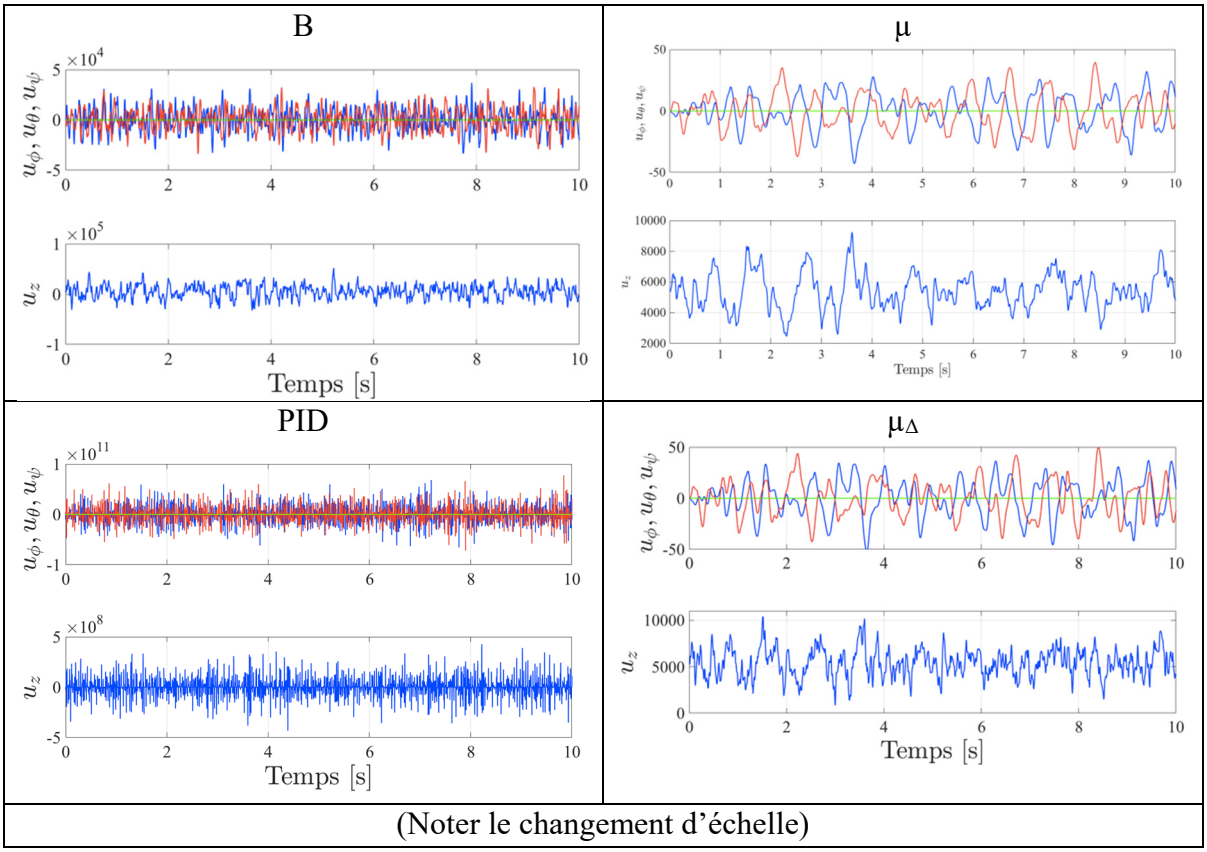


Figure 7.82 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone

Les erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) sont représentées à la Figure 7.83 pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID.

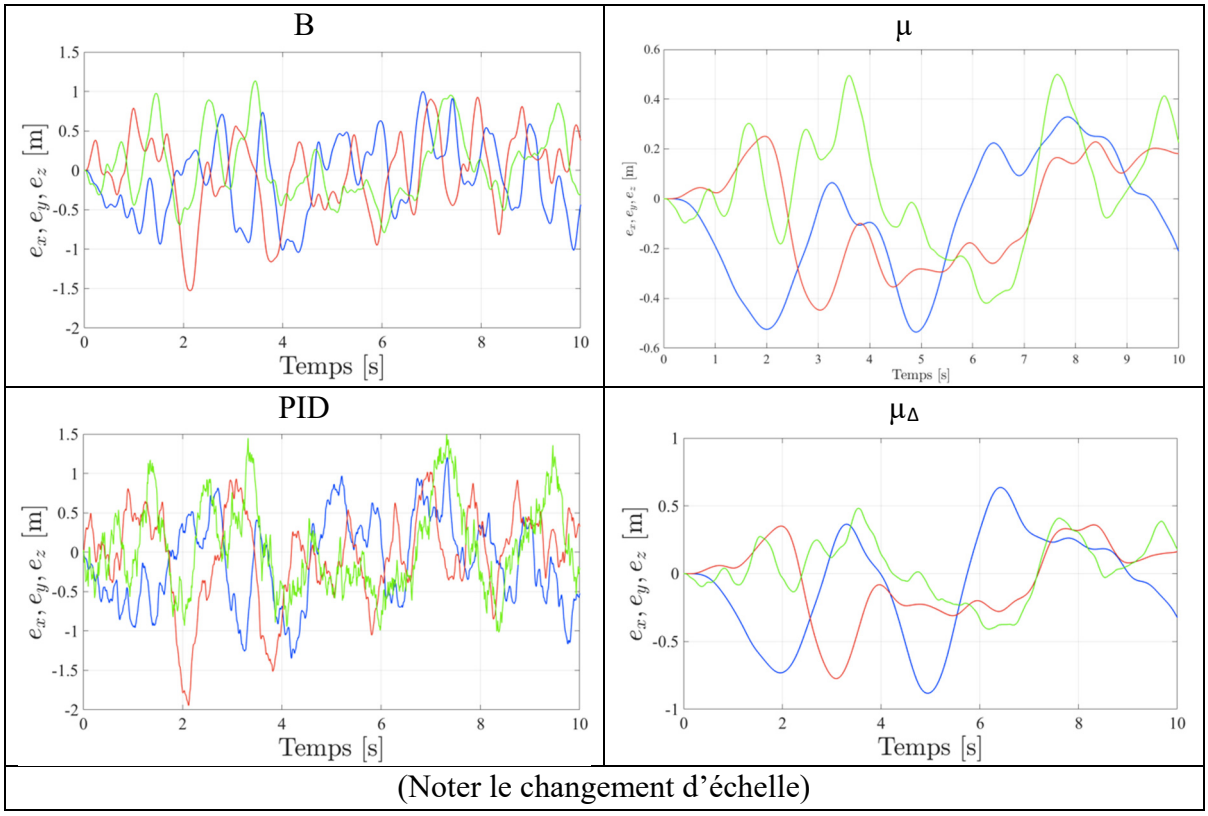


Figure 7.83 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone

Malgré d'importantes variations, les vitesses de rotation illustrées à la Figure 7.84 semblent plus réalisables dans le cas des compensateurs μ et μ_Δ. Les compensateurs B et PID obtiennent des vitesses de rotation non réalisables.

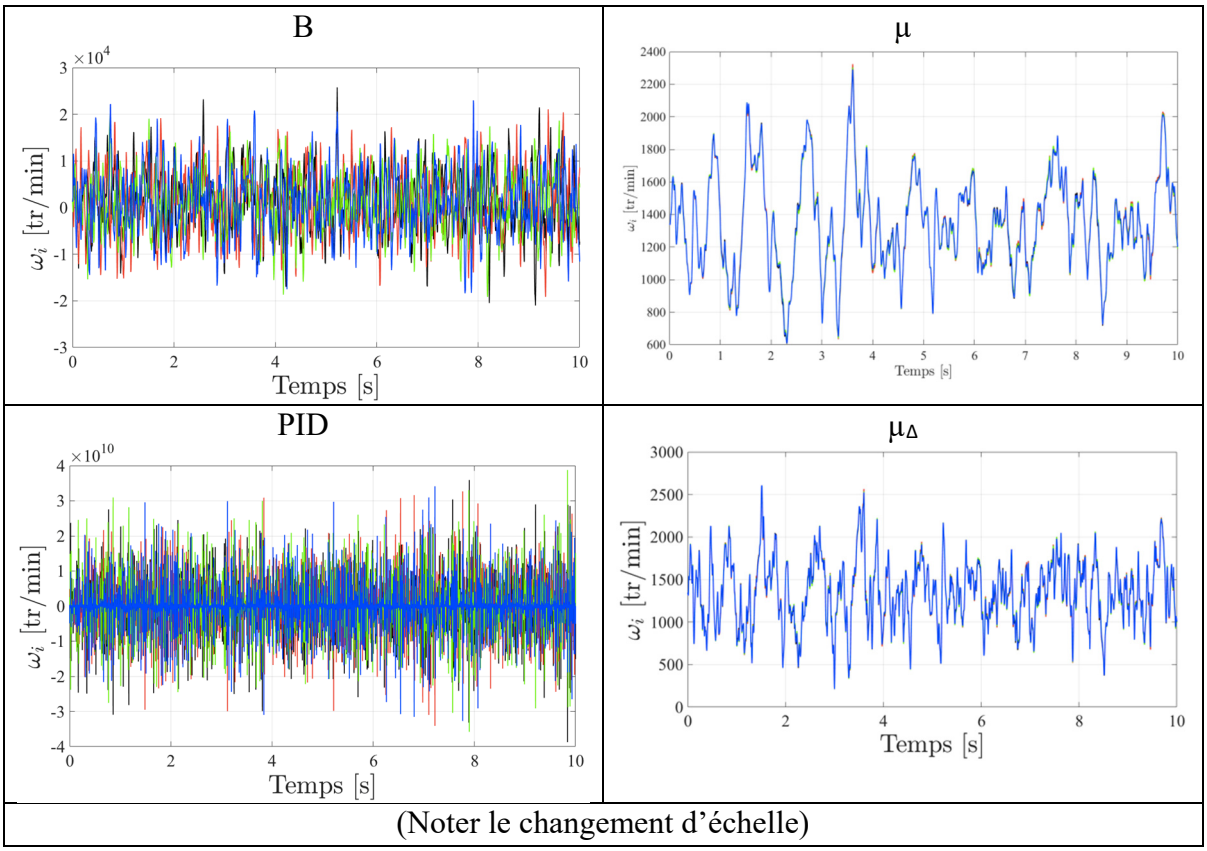


Figure 7.84 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire de drone

7.4.1.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

Pour obtenir des résultats cohérents lorsque les commandes linéaires B, H_2, H_∞ sont appliquées au modèle non linéaire de drone (3.5.3), il a été nécessaire de diminuer la valeur de la DSP à 12e-6 m^2/Hz. Les résultats pour les déplacements sur *x, y, z* sont évalués à la Figure 7.85 et la Figure 7.86 ainsi qu'au Tableau 7.24. Le compensateur B est le plus robuste, car les amplitudes des variations autour de la position de vol stationnaire sont les plus faibles, suivi de proche par les compensateurs H_∞ et H_2 qui présentent une plus grande difficulté à maintenir une position statique.

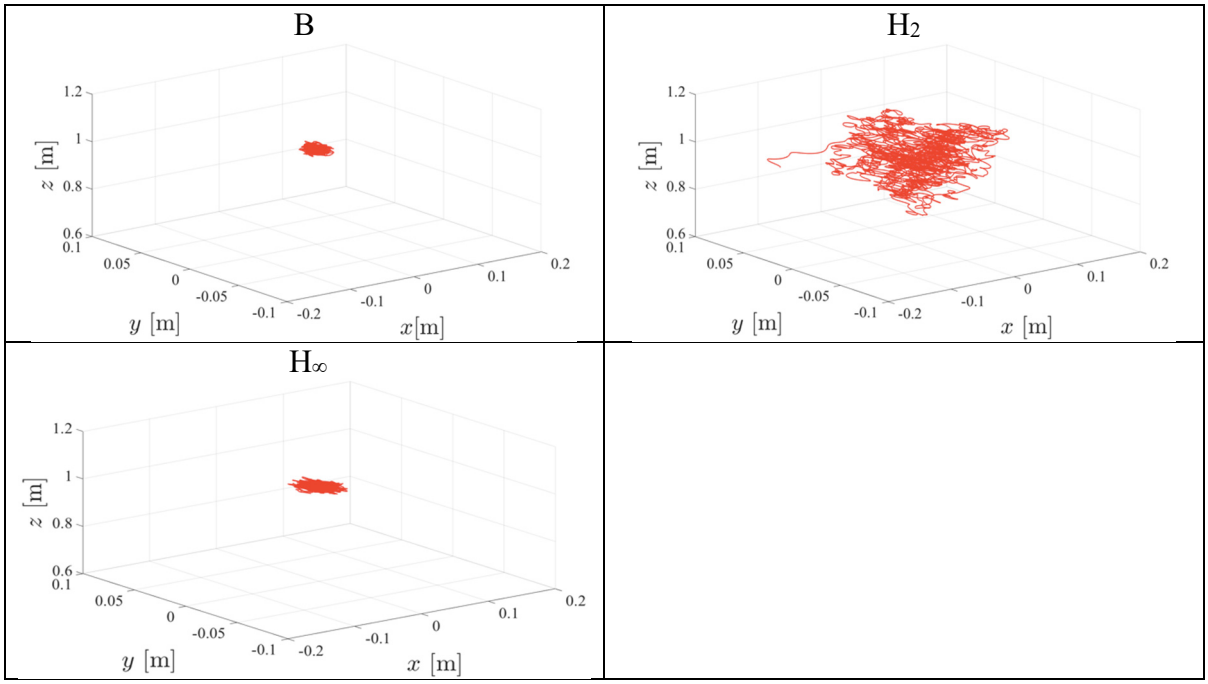


Figure 7.85 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone

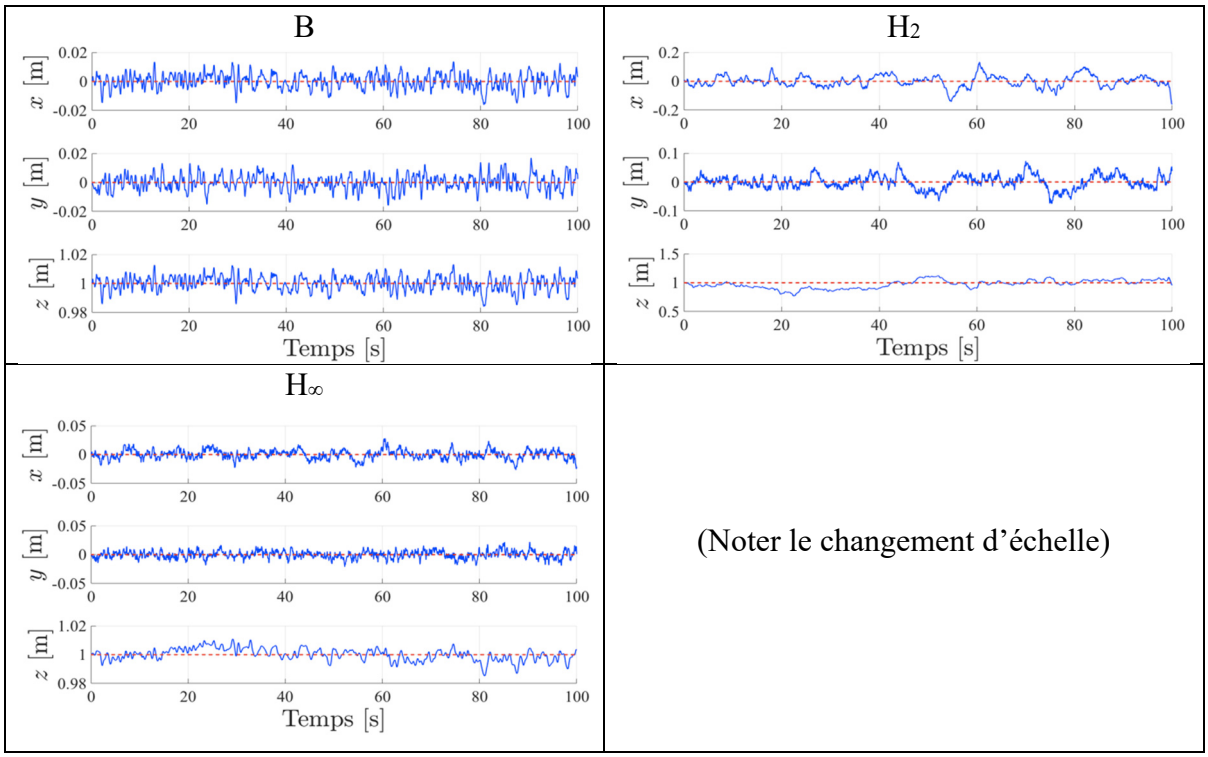


Figure 7.86 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Tableau 7.24 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle linéaire du processus

	B	H_2	H_∞
σ_{xyz}	0.0050	0.0715	0.0042
σ_x	0.0052	0.0400	0.0079
σ_y	0.0052	0.0234	0.0065
σ_z	0.0050	0.0713	0.0042
$max(e_x)$	0.0161	0.1603	0.0282
$max(e_y)$	0.0169	0.0750	0.0221
$max(e_z)$	1.0131	1.1202	1.0108

Les angles ϕ et θ illustrés à la Figure 7.87 montrent des variations réalisables dans le cas du compensateur B, mais pas pour les compensateurs H_2 et H_∞.

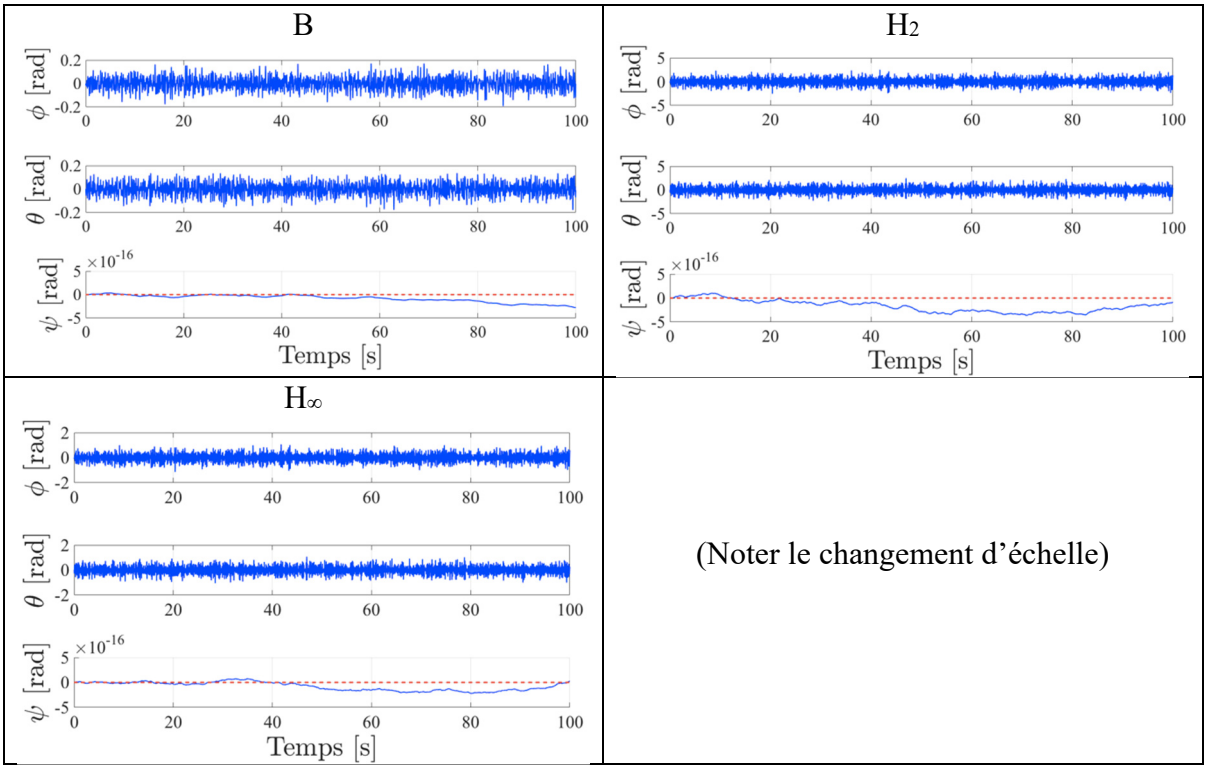


Figure 7.87 Déplacements autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Les amplitudes des couples *L, M, N* tracées à la Figure 7.88 sont plus faibles et donc potentiellement plus réalisables dans le cas du compensateur B. Le compensateur H_∞ obtient des amplitudes de couples plus importantes et le compensateur H_2 encore plus importantes.

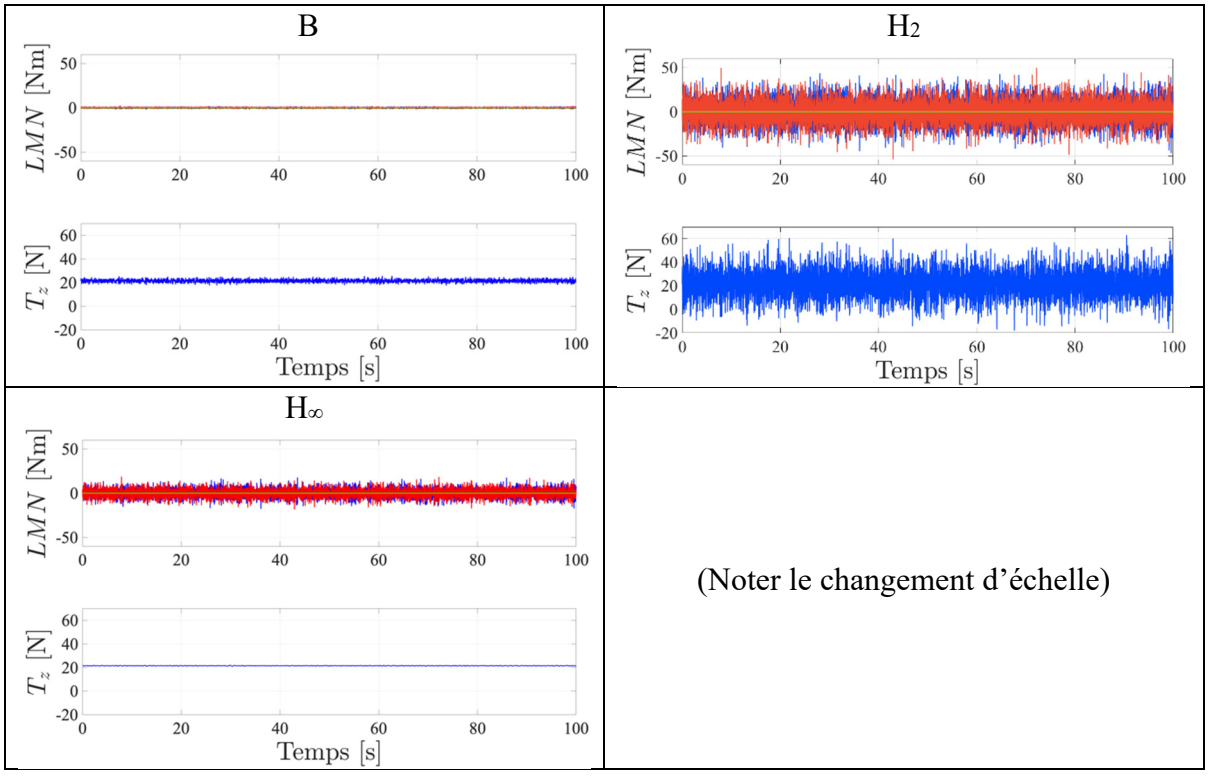


Figure 7.88 Commandes *L, M, N, T_z* lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Les erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) sont représentées à la Figure 7.89 pour les compensateurs B, H_2 et H_∞.

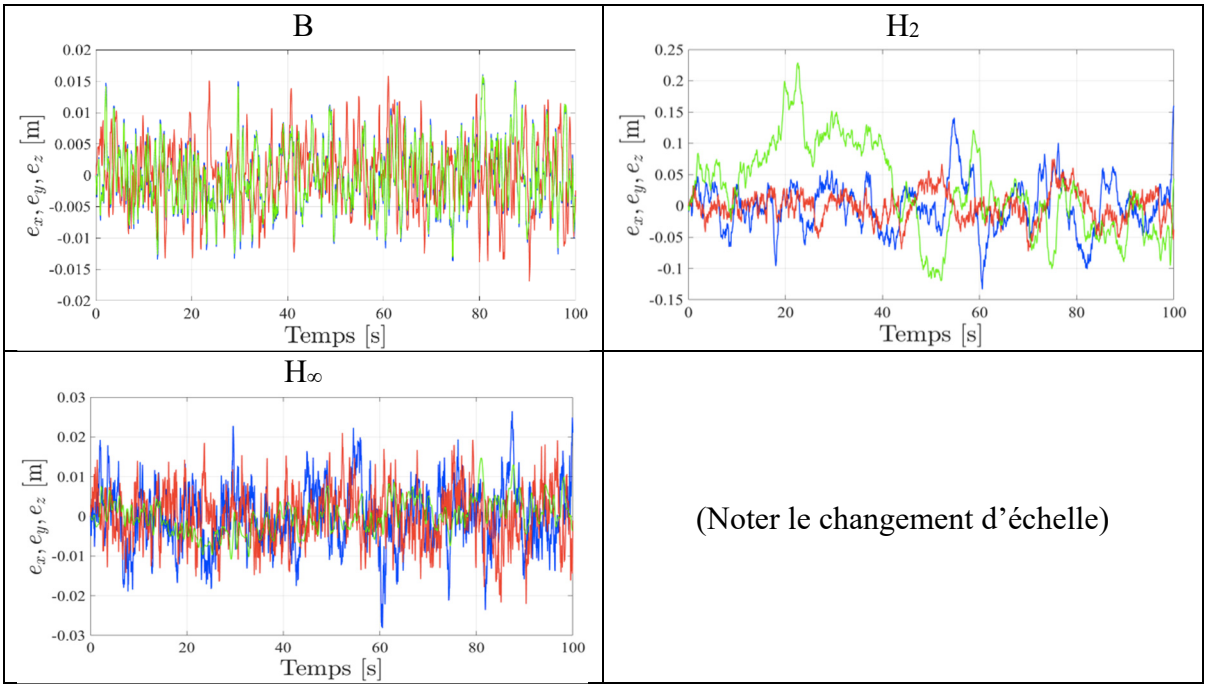


Figure 7.89 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) sont tracées à la Figure 7.90 pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ . La commande B possède des amplitudes de vitesses de rotation cohérentes, alors que les commandes H_2 et H_∞ présentent des amplitudes importantes et risques de provoquer la saturation des actionneurs (particulièrement la commande H_2).

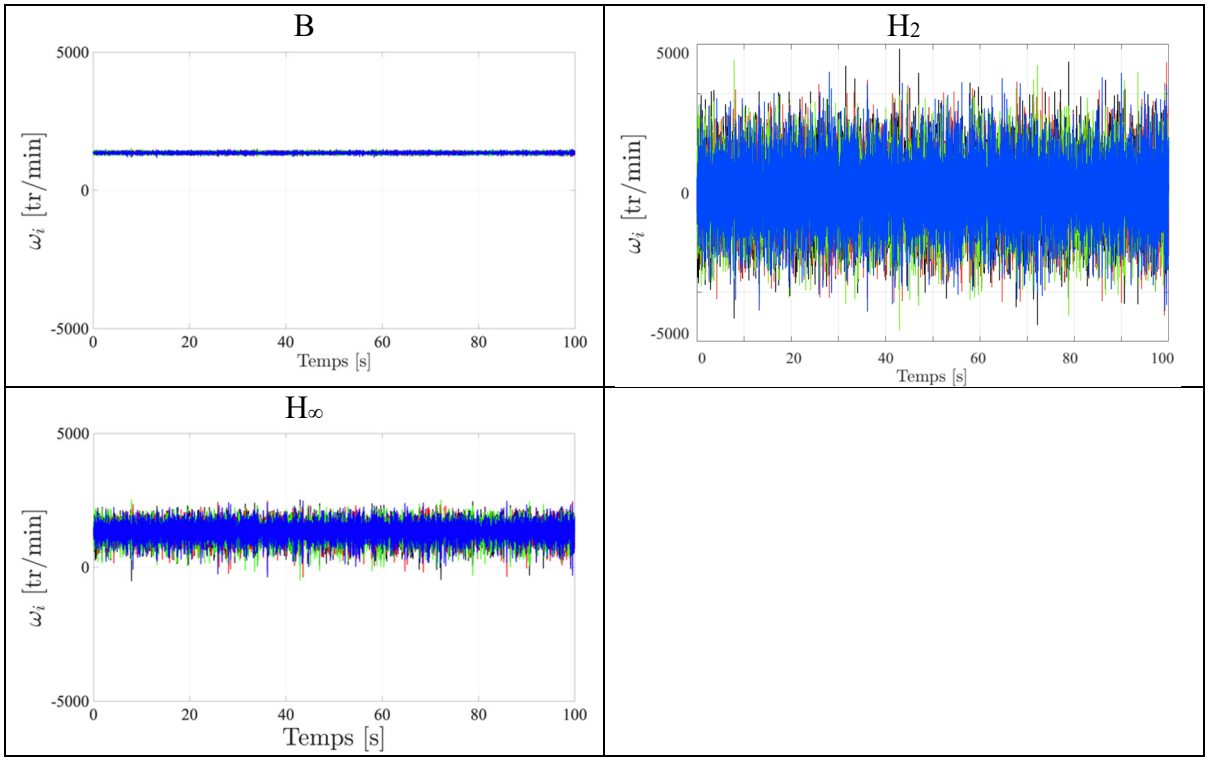


Figure 7.90 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ appliqués sur le modèle non linéaire de drone

7.4.1.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

Tout comme dans la partie 7.4.1.4 la DSP est fixée à 12e-4 m^2/Hz. Les conditions de tests sont donc les mêmes pour les compensateurs B, H_2, H_∞ et B, μ, μ_Δ, PID. Les compensateurs μ_Δ puis μ génèrent des résultats plus robustes comme l'attestent les faibles déplacements sur *x, y, z* en présence de perturbation en sortie illustrés à la Figure 7.91 et la Figure 7.92 ainsi que dans le Tableau 7.25. Le compensateur B obtient des résultats acceptables et le compensateur PID diverge.

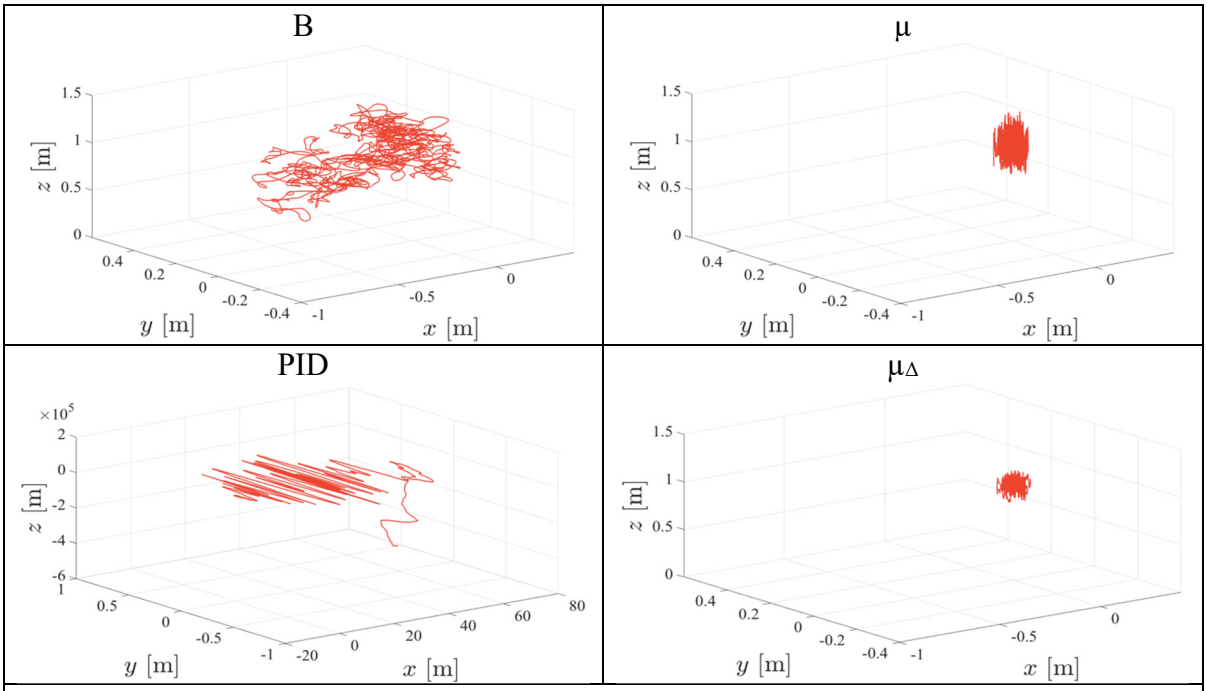
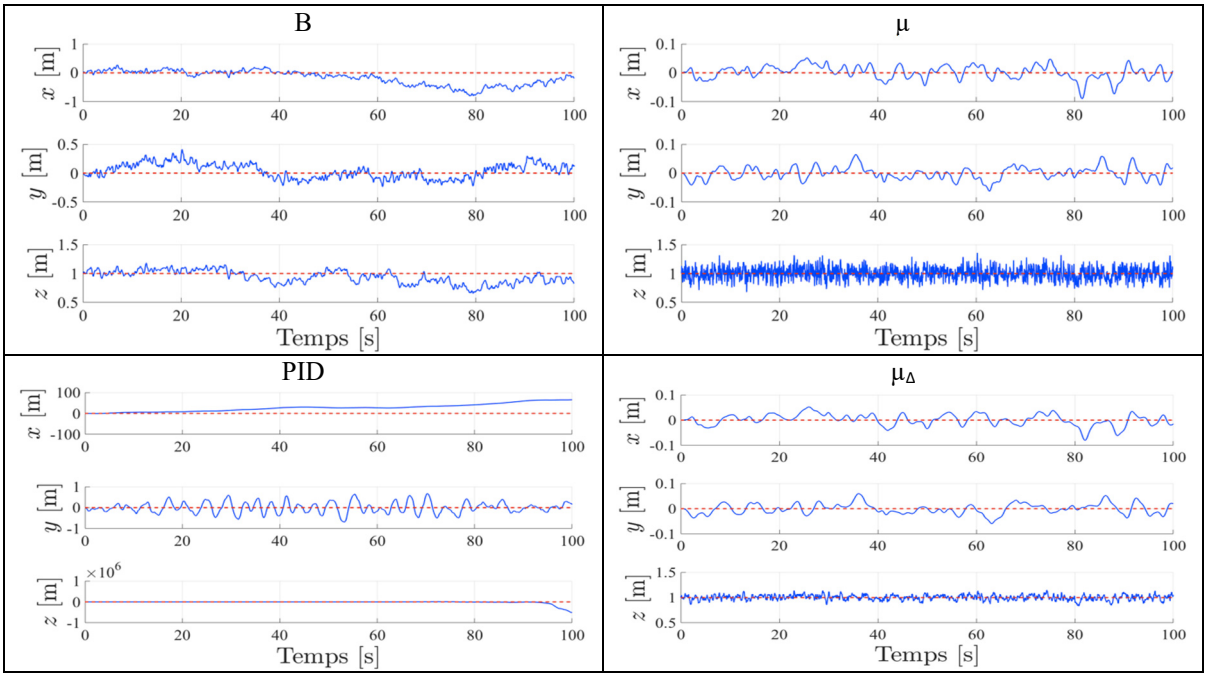


Figure 7.91 Déplacements sur *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone



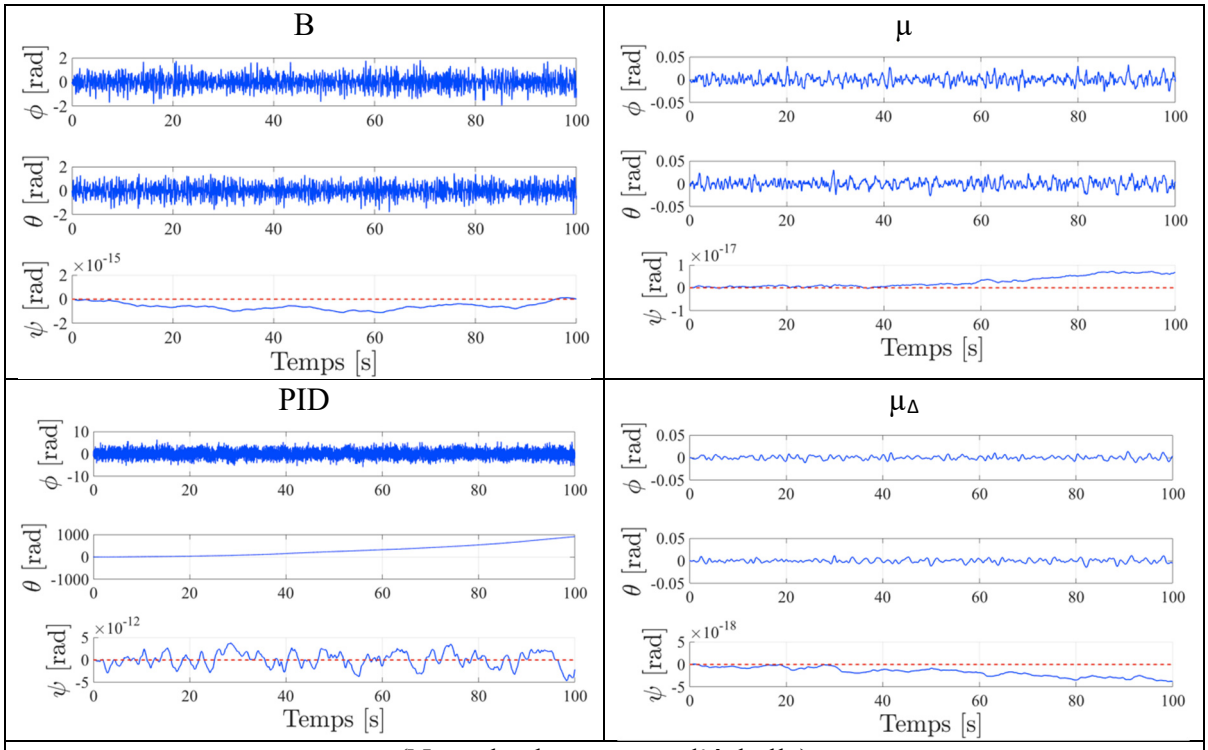
(Noter le changement d'échelle)

Figure 7.92 Variations des axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Tableau 7.25 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire du processus

	B	PID	μ	μ_Δ
σ_{xyz}	0.0805	6.9823e+04	0.0983	0.052
σ_x	0.2490	18.24	0.0235	0.028
σ_y	0.1258	0.2592	0.0217	0.021
σ_z	0.1119	7.0213e+04	0.0983	0.052
$max(e_x)$	0.8030	65.37	0.0894	0.08
$max(e_y)$	0.4112	0.69	0.0646	0.06
$max(e_z)$	1.1805	5.0614e+05	1.3573	1.15

L'amplitude des variations des angles ϕ et θ tracées à la Figure 7.93 montre des commandes μ et μ_Δ réalistes comprises entre ±0.05 rad, tandis que les commandes B et PID génèrent des amplitudes trop importantes qui provoqueront probablement le décrochage de l'appareil.



(Noter le changement d'échelle)

Figure 7.93 Déplacement autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Les commandes en couple *L, M, N* représentés à la Figure 7.94 possèdent de faibles amplitudes pour les commandes μ et μ_Δ. Le compensateur B obtient des amplitudes de couple plus grandes et le compensateur PID entraînerait la saturation des actionneurs. Seules les amplitudes de la commande en poussée T_z de la commande B semblent assez faibles pour être réalisables.

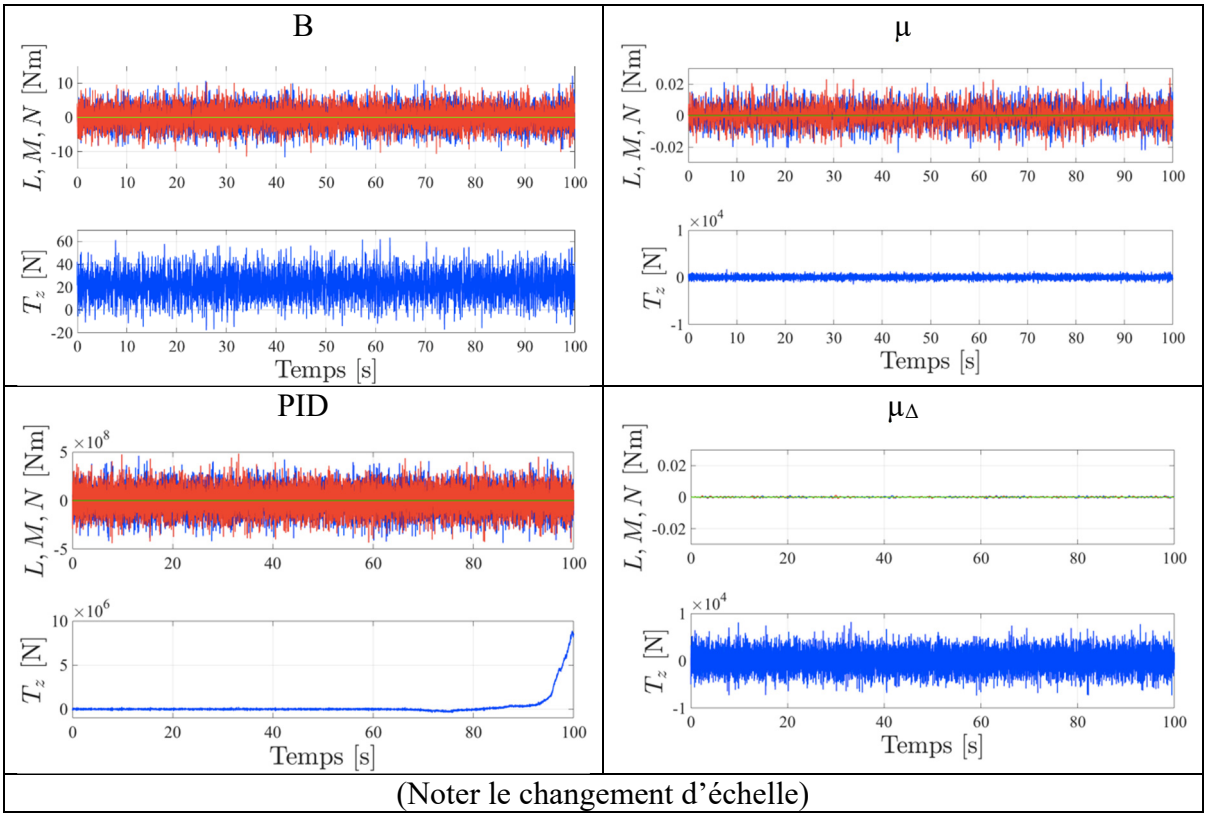


Figure 7.94 Commandes *L, M, N,* T_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Les erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) sont illustrées à la Figure 7.95 pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID. Le compensateur PID obtient des amplitudes des signaux d'erreurs irréalistes, car trop importantes. Les compensateurs B, μ et μ_Δ obtiennent des amplitudes des signaux d'erreurs suffisamment faibles pour être réalistes.

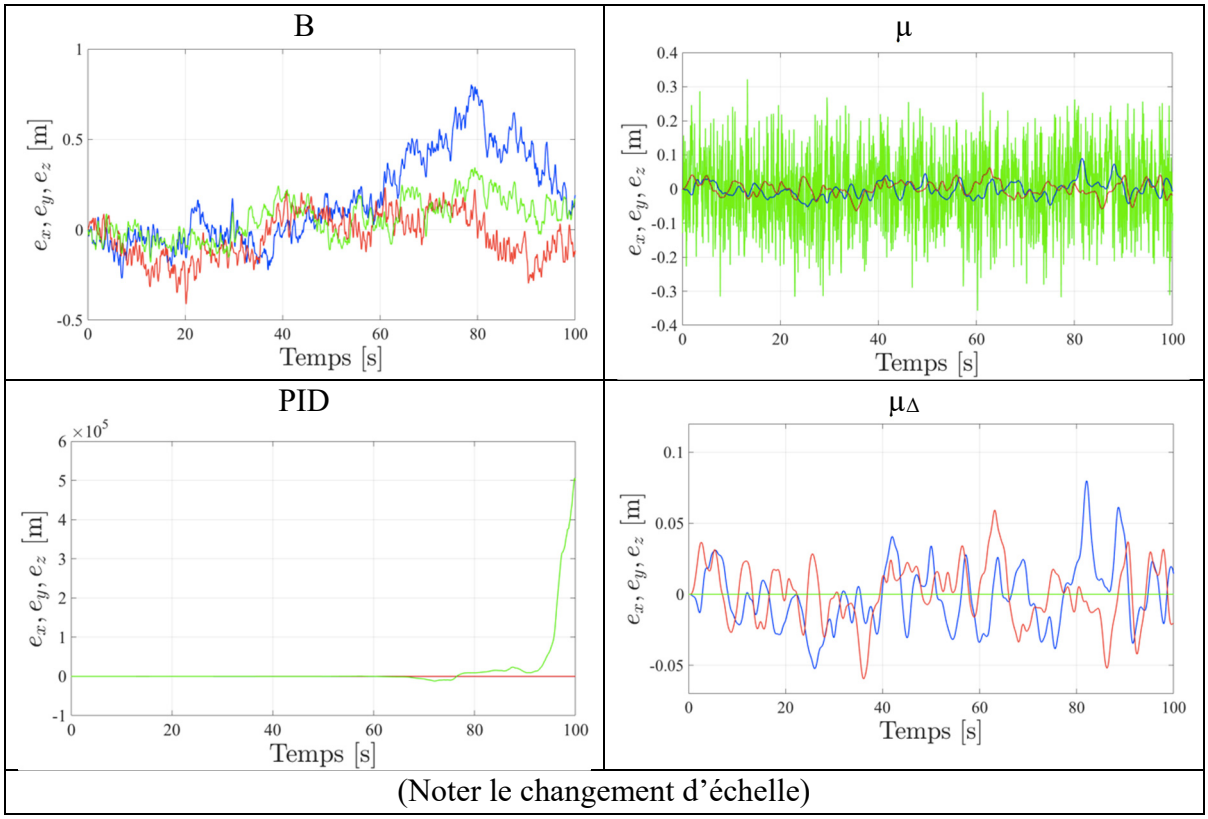


Figure 7.95 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) pour les compensateurs μ_Δ et PID, illustrées à la Figure 7.96 sont irréalisables, car leurs amplitudes importantes satureraient la boucle de commande. Les commande B et μ obtiennent des amplitudes des vitesses de rotations des moteurs qui semblent réalisables.

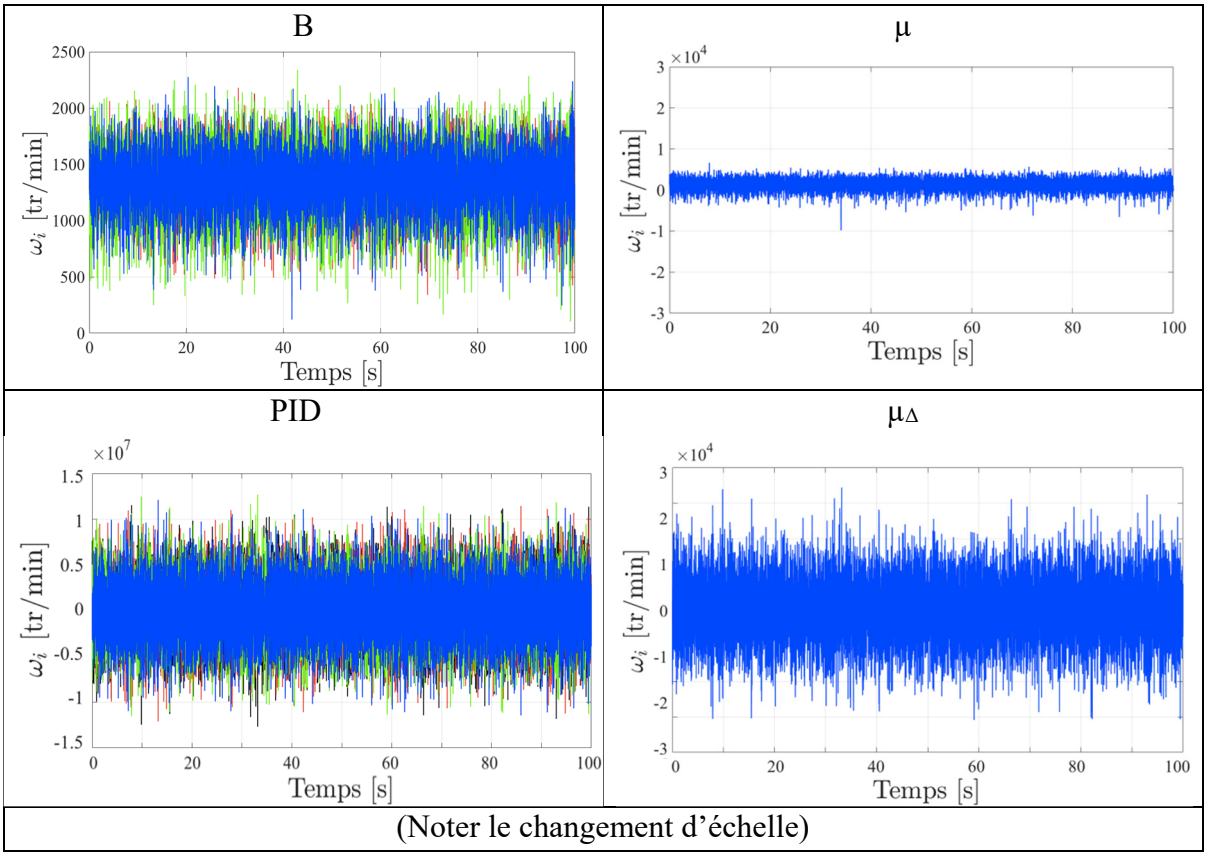


Figure 7.96 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID appliqués sur le modèle non linéaire de drone

7.4.1.6 Commandes backstepping et hiérarchique

La DSP utilisée pour tester la robustesse des compensateurs backstepping et hiérarchique en présence de perturbation en sortie est de 0.12 m^2/Hz. On observe sur la Figure 7.97 et à la Figure 7.98 ainsi qu'au Tableau 7.26 que les commandes backstepping et hiérarchique présentent une bonne robustesse en présence de perturbation sur la sortie, les déplacements sur les axes *x* et *y* présentent des amplitudes similaires. Sur l'axe *z* c'est la commande backstepping qui semble la plus avantageuse puisqu'elle reste plus proche de l'altitude de consigne.

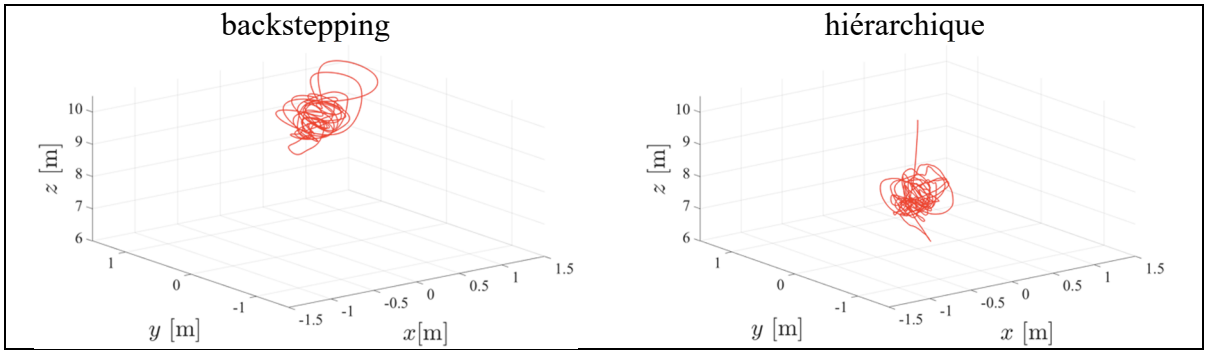


Figure 7.97 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

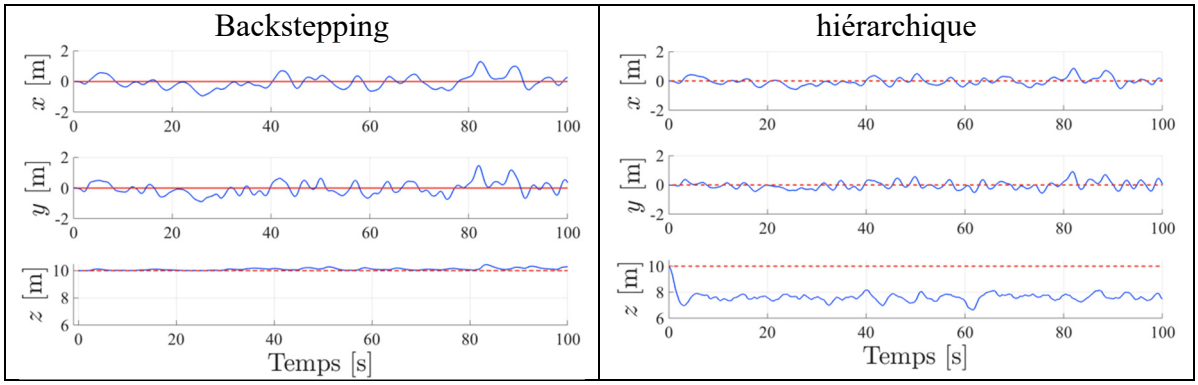


Figure 7.98 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Tableau 7.26 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

	backstepping	hiérarchique
σ_{xyz}	0.2751	0.2738
σ_x	0.4067	0.3523
σ_y	0.4149	0.4100
σ_z	0.0828	0.3334
$max(e_x)$	1.2921	1.1744
$max(e_y)$	1.4642	1.4472
$max(e_z)$	0.4445	3.3225

Les variations de l'amplitude des angles ϕ et θ pour les compensateurs backstepping et hiérarchique sont inférieures à ± 0.2 rad, ce qui semble réalisable en pratique.

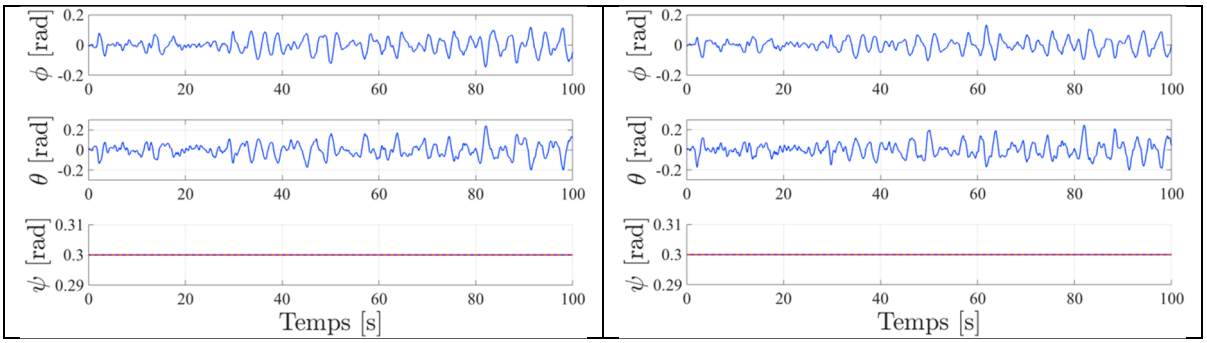


Figure 7.99 Déplacements autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Un léger avantage semble se dégager pour le compensateur backstepping concernant les commandes en couples *L, M, N* avec des amplitudes sensiblement plus faibles relativement au compensateur hiérarchique tel qu'illustré à la Figure 7.100. L'avantage est d'autant plus net pour la commande en poussée T_z du compensateur backstepping qui présente des amplitudes bien plus faibles et une absence de bruit contrairement au compensateur hiérarchique.

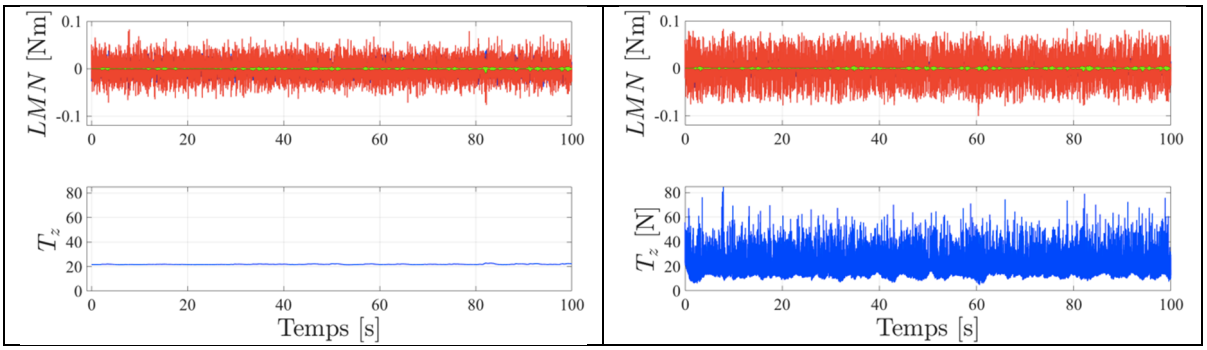


Figure 7.100 Commandes *L, M, N,* T_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les erreurs e_x (rouge), e_y (bleue), e_z (verte) sont représentées à la Figure 7.101.

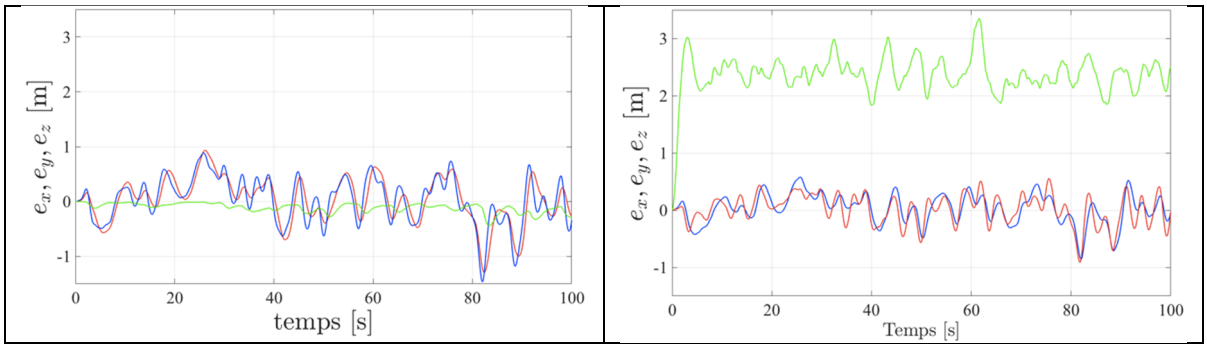


Figure 7.101 Erreurs e_x (rouge), e_y (bleue), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Tout comme pour les commandes en couple L, M, N et en poussée T_z, les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) du compensateur backstepping présentent des amplitudes moins importantes ainsi que l'absence de bruit contrairement à la commande hiérarchique comme le montre la Figure 7.102.

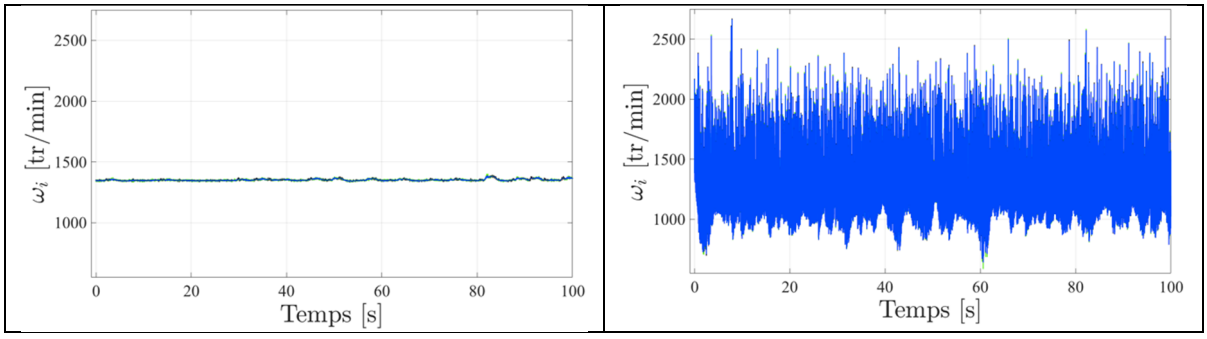


Figure 7.102 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

7.4.1.7 Discussion

Cette partie avait pour objectif d'évaluer la robustesse des algorithmes de commandes B, H_2, H_∞, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique en présence de perturbation sur la sortie. Pour être en mesure de visualiser les effets de la perturbation en sortie sur le positionnement du drone le long des axes x, y, z, différentes puissances de DSP ont été appliquées selon le type et la structure de commande.

Lorsque les commandes B, H_2, H_∞ (DSP = 0.075 m^2/Hz), μ, μ_Δ et PID (DSP = 0.12 m^2/Hz) sont appliquées respectivement aux modèles linéaires de drone pour une structure de commande en cascade (3.5.1), puis séparées (3.5.2) les algorithmes présentant la meilleure robustesse sont les commandes μ et μ_Δ. Les commandes B, H_2, et H_∞ obtiennent des résultats satisfaisants, c.-à.-d. des variations sur *x, y, z* restant relativement proche de la consigne de position de vol stationnaire, tandis que la commande PID obtient les variations d'amplitudes les plus importantes sur *x, y, z* mettant en avant une plus faible robustesse.

On note une meilleure robustesse dans le cas de la commande B entre la structure de translation/rotation en cascade et celle en translation/rotation séparée.

Nous avons évalué dans cette section à partir des figures illustrant l'allure des angles ϕ, θ et des vitesses de rotation des moteurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, pour une référence de vol stationnaire d'une durée de 10 s. Des amplitudes trop importantes des angles ϕ, θ (considérons au-delà de ± 1 rad) risquent de provoquer le décrochage de l'appareil. De plus, en se rappelant que la vitesse de vol stationnaire est $\omega_0 = 1345$ tr/min, des amplitudes trop importantes des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 risquent de saturer les actionneurs. Le Tableau 7.27 permet de mettre en évidence (zones colorées), les structures de commandes étudiées entre les sections 7.4.1.2 à 7.4.1.6 présentant, des amplitudes importantes des angles ϕ, θ ou des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 risquant de provoquer le décrochage du drone ou la saturation des actionneurs.
On remarque que les commandes linéaires B, H_2, H_∞, PID présentent systématiquement un risque de décrochage du drone lorsqu'elles sont appliquées au modèle linéaire de drone. Le risque de décrochage du drone semble évité lorsque les commandes linéaires B, H_∞, μ et μ_Δ sont appliqués au modèle non linéaire de drone. Les commandes B, H_∞ et μ parviennent à s'affranchir du risque de saturation des actionneurs lorsque que le processus linéaire est considéré. Pour un processus non linéaire seules les commandes B, H_∞, backstepping et hiérarchique sont susceptibles d'éviter simultanément un risque de décrochage du drone et de saturation des actionneurs.

Tableau 7.27 Structures de commandes étudiées à la section 7.4.1 présentant pour des conditions de vol stationnaire en présence de perturbation en sortie, des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées)

	Linéaire (7.4.1.2)			Linéaire (7.4.1.3)				Non linéaire (7.4.1.4)			Non linéaire (7.4.1.5)				Non linéaire (7.4.1.6)
	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	backstepping hiérarchique
Risque de décrochage?															
Risque de saturation des actionneurs?															

7.4.2 Suivi de trajectoire hélicoïdale en présence de perturbation en sortie

7.4.2.1 Conditions de test

Les conditions de tests pour une consigne de vol hélicoïdal définie en (7.3) sont identiques à celles décrites en 7.3.4.1, sauf que l'ajout de perturbation en sortie sur les axes *x, y, z* tel que décrit en 7.4.1.1 permet d'évaluer la robustesse des algorithmes de commandes dans des conditions de vol dynamique. La DSP de la perturbation en sortie sera ici également variable selon le type de processus et de compensateur utilisés. Les métriques relevées seront les écarts types tels qu'à la partie 7.4.1.1. ainsi que le maximum des erreurs e_x, e_y, e_z.

7.4.2.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

La DSP utilisée ici est de 0.012 m^2/Hz. Comme le montre la Figure 7.103 et la Figure 7.104 ainsi que le Tableau 7.28 les trois compensateurs B, H_2 et H_∞ obtiennent des résultats similaires concernant les déplacements sur *x, y, z.*

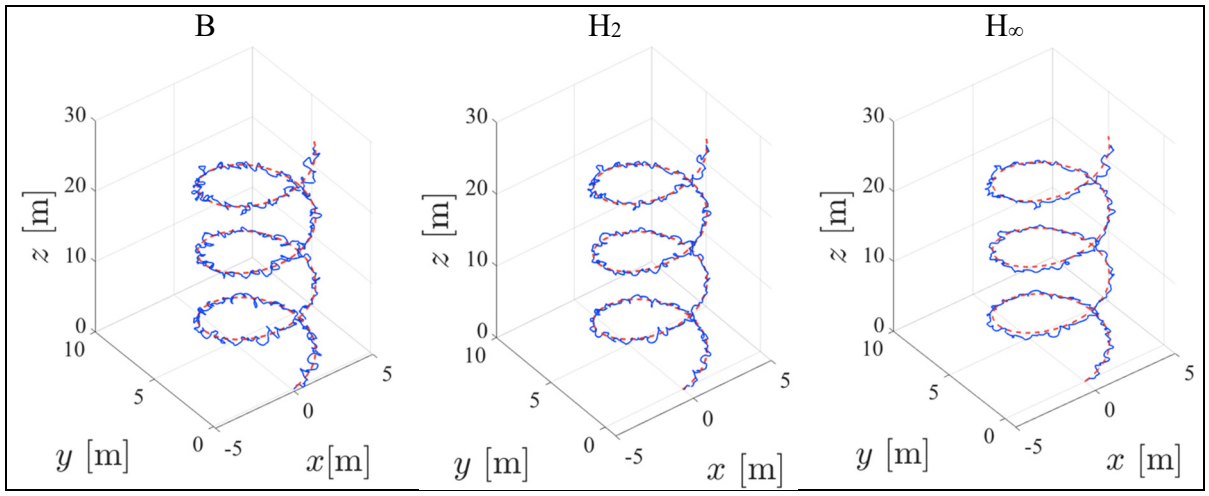


Figure 7.103 Déplacements en bleu sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

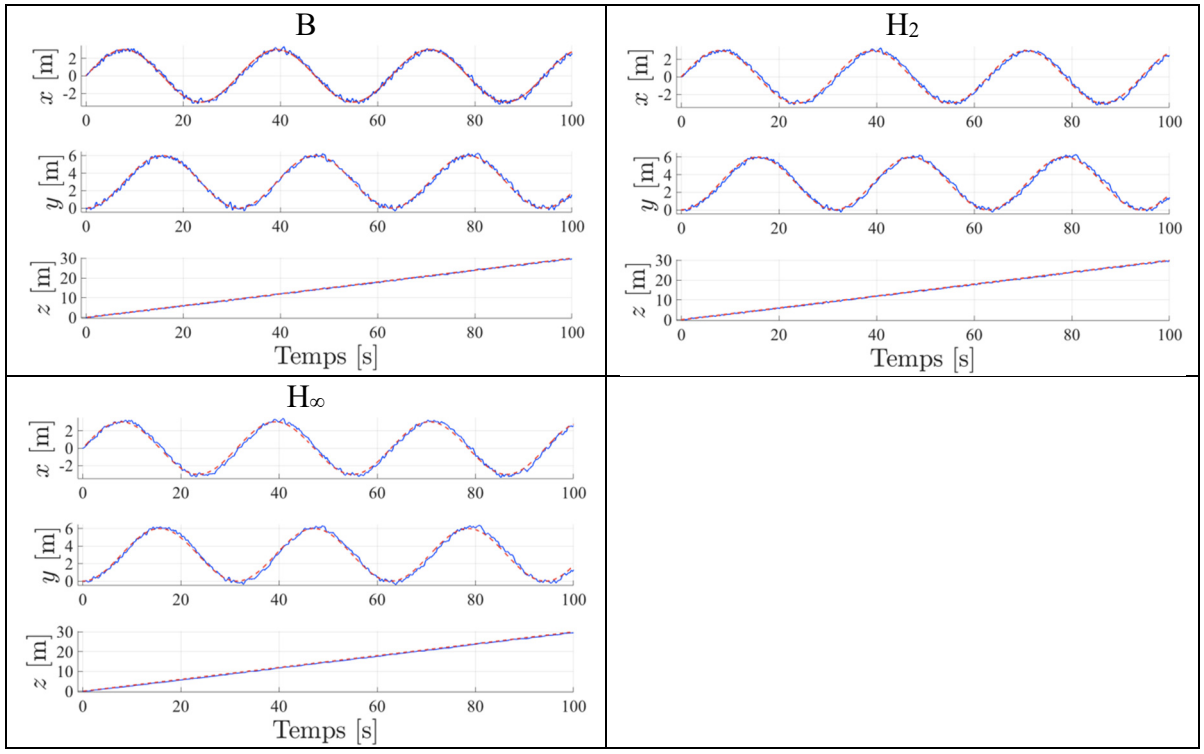


Figure 7.104 Déplacements en bleu sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

Tableau 7.28 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus linéaire lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4)

	B	H_2	H_∞
σ_{xyz}	0.1382	0.1758	0.1132
σ_x	0.1987	0.2436	0.2560
σ_y	0.1935	0.2385	0.2564
σ_z	0.1572	0.1533	0.0924
$max(e_x)$	0.6367	0.6079	0.6581
$max(e_y)$	0.6205	0.7054	0.6903
$max(e_z)$	0.5906	0.6037	0.5809

Les variations, lors d'une consigne hélicoïdale sur *x, y, z* définie en (7.4), des angles ϕ et θ illustrées à la Figure 7.105 montrent des amplitudes à la limite de la réalisabilité pour les commandes H_2 et H_∞ tandis que la commande B obtient des amplitudes trop importantes et provoquerait le décrochage de l'appareil.

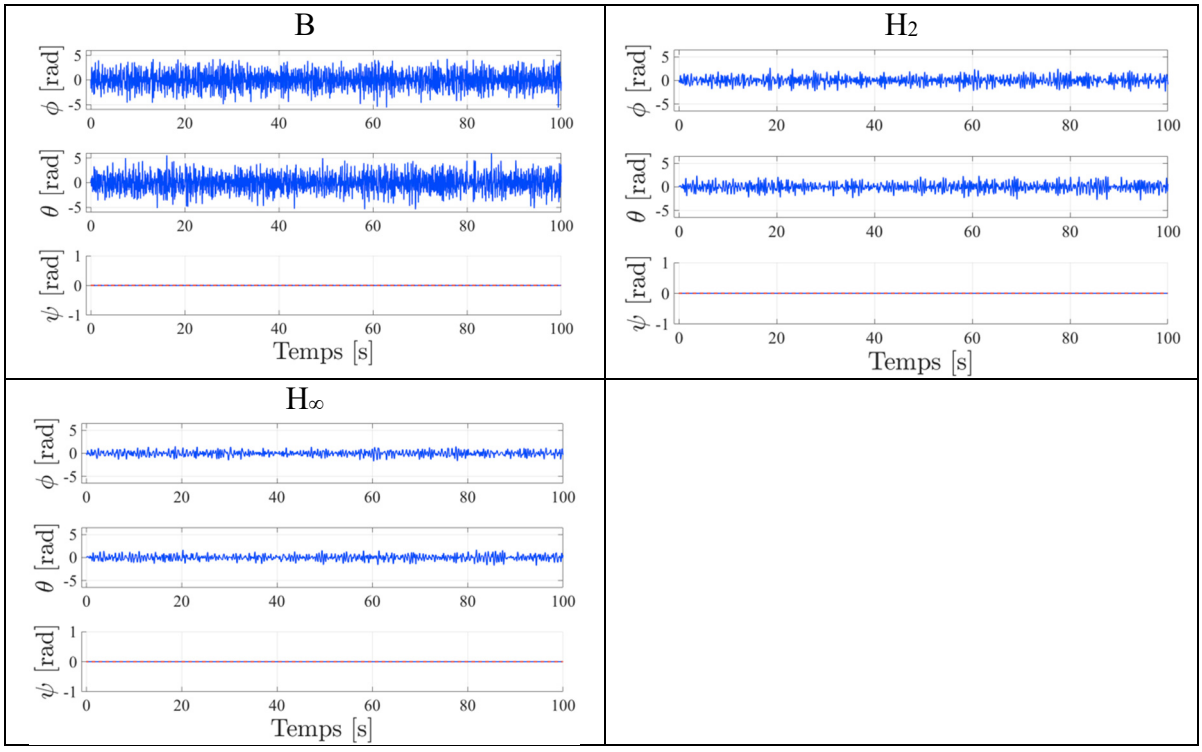


Figure 7.105 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

Les erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) sont reportées à la Figure 7.106. On remarque que les erreurs sont moins bruitées dans le cas du compensateur H∞.

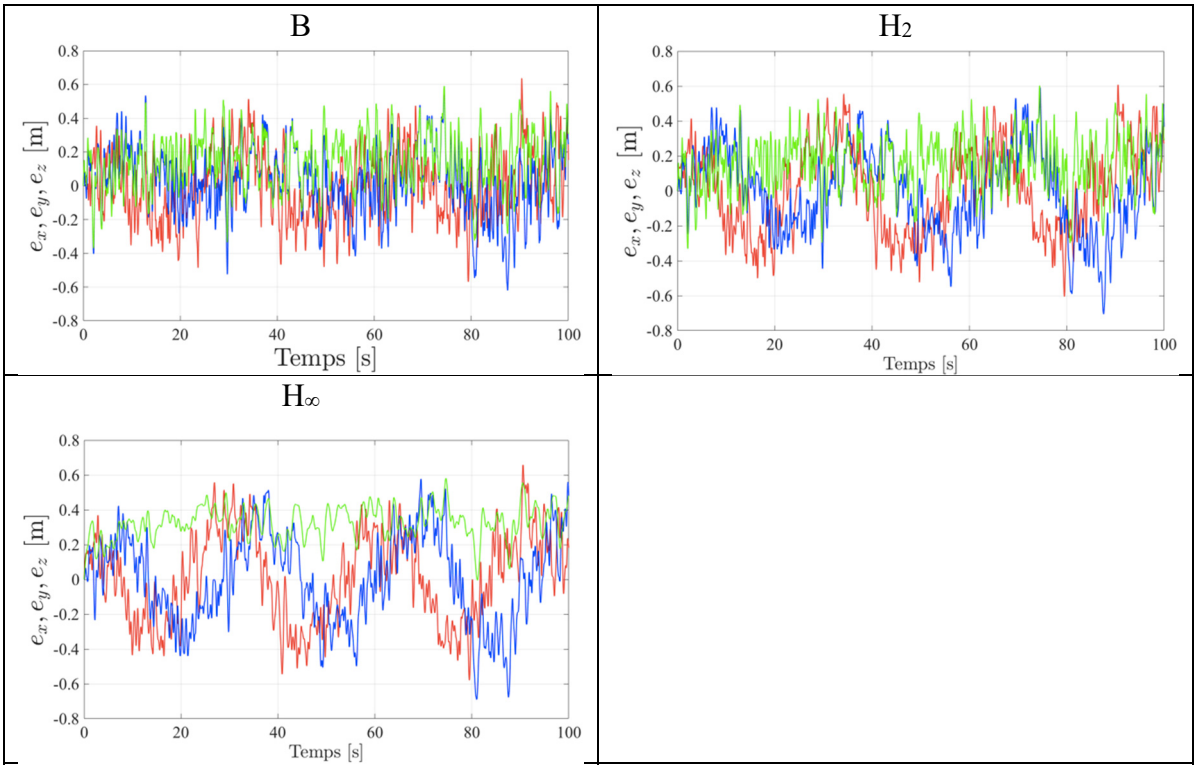


Figure 7.106 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H∞ sur le processus linéaire

Pour les trois compensateurs B, H_2 et H∞ on observe à la Figure 7.107 des amplitudes des commandes en couples u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte) et en poussée u_z importantes, mettant en exergue une forte probabilité de saturer les actionneurs.

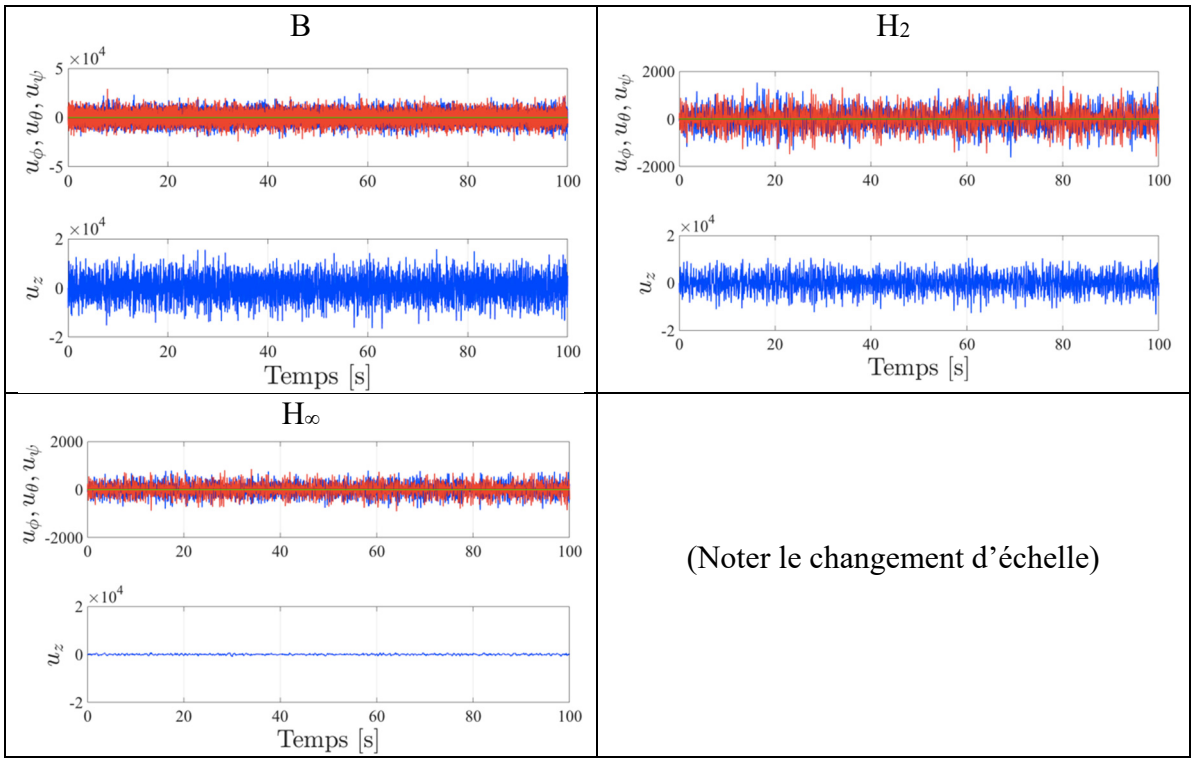


Figure 7.107 Commandes u_ϕ(bleue), u_θ(rouge), u_ψ(verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

Les amplitudes des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) semblent suffisamment faibles pour être réalistes à la Figure 7.108 dans le cas du compensateur H_∞. Les compensateurs B et H_2 présentent des amplitudes très importantes.

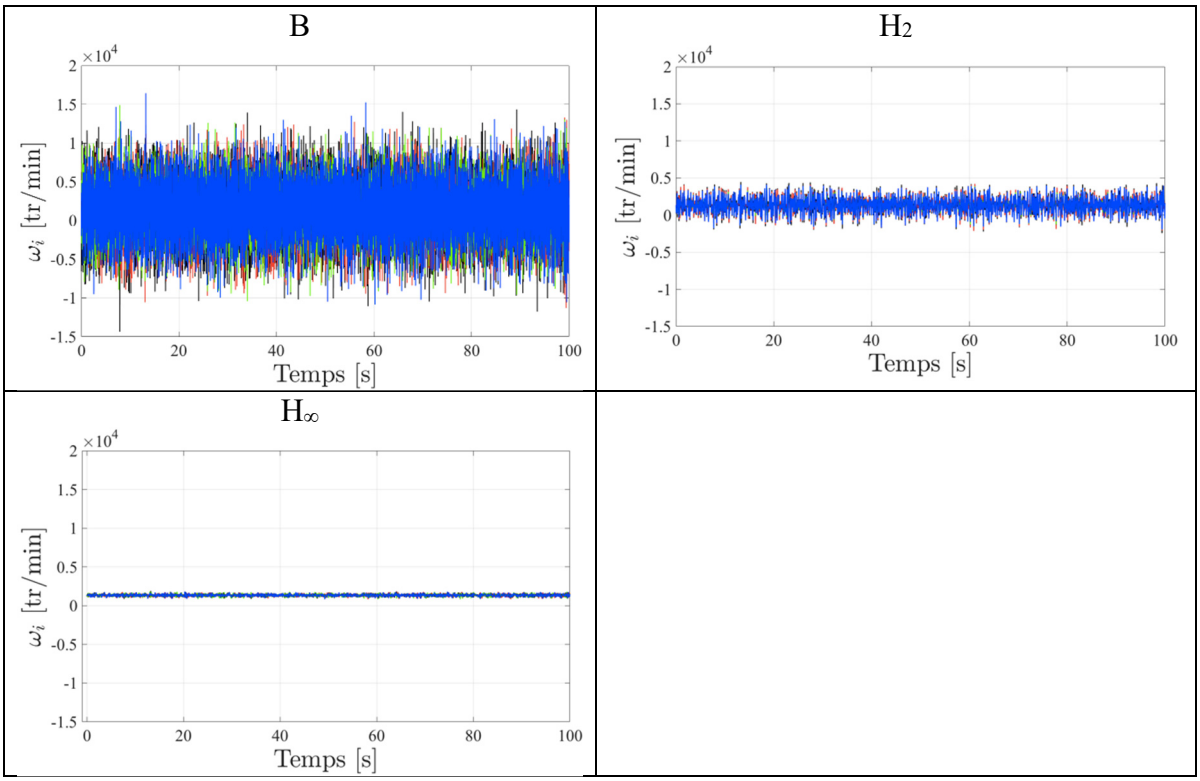


Figure 7.108 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

7.4.2.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

Tout comme la partie précédente avec les compensateurs B, H_2 et H_∞ la DSP est de 0.012 m^2/Hz. Les résultats les plus robustes comme le montre la Figure 7.109 et la Figure 7.110 ainsi que le Tableau 7.29 sont obtenus avec le compensateur μ, suivi de près par le compensateur μ_Δ. Les compensateurs B et PID parviennent à suivre la référence, mais avec une trajectoire plus nerveuse.

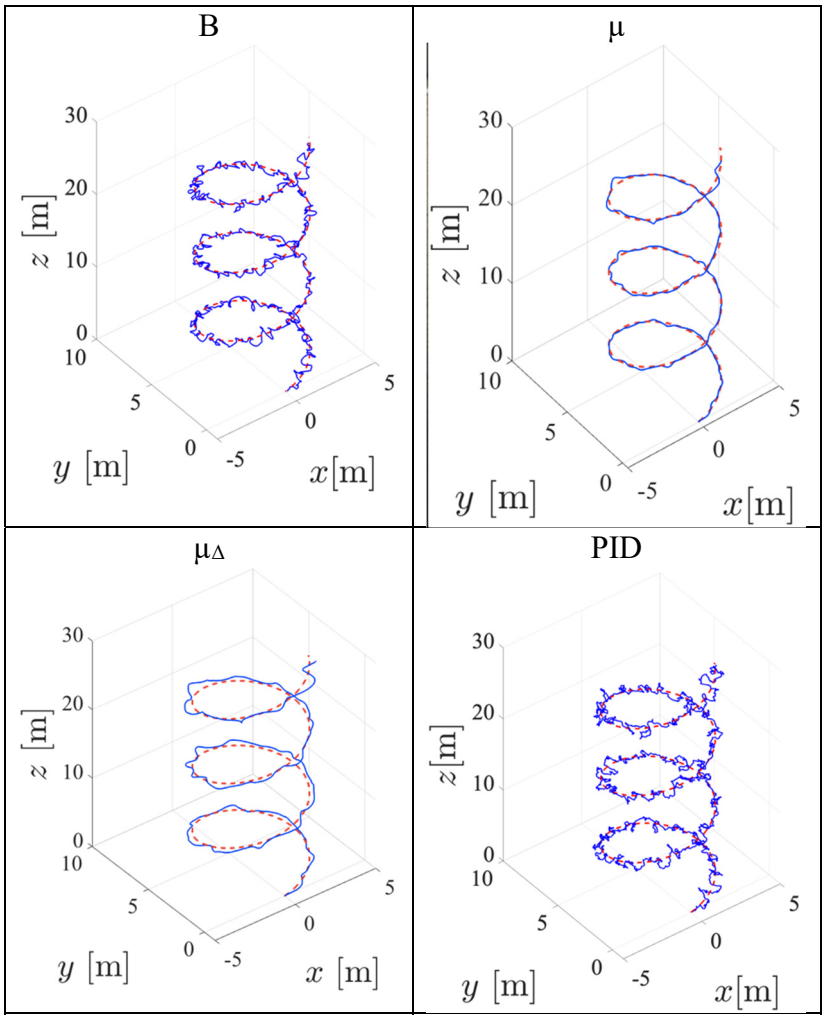


Figure 7.109 Déplacements en 3D sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire

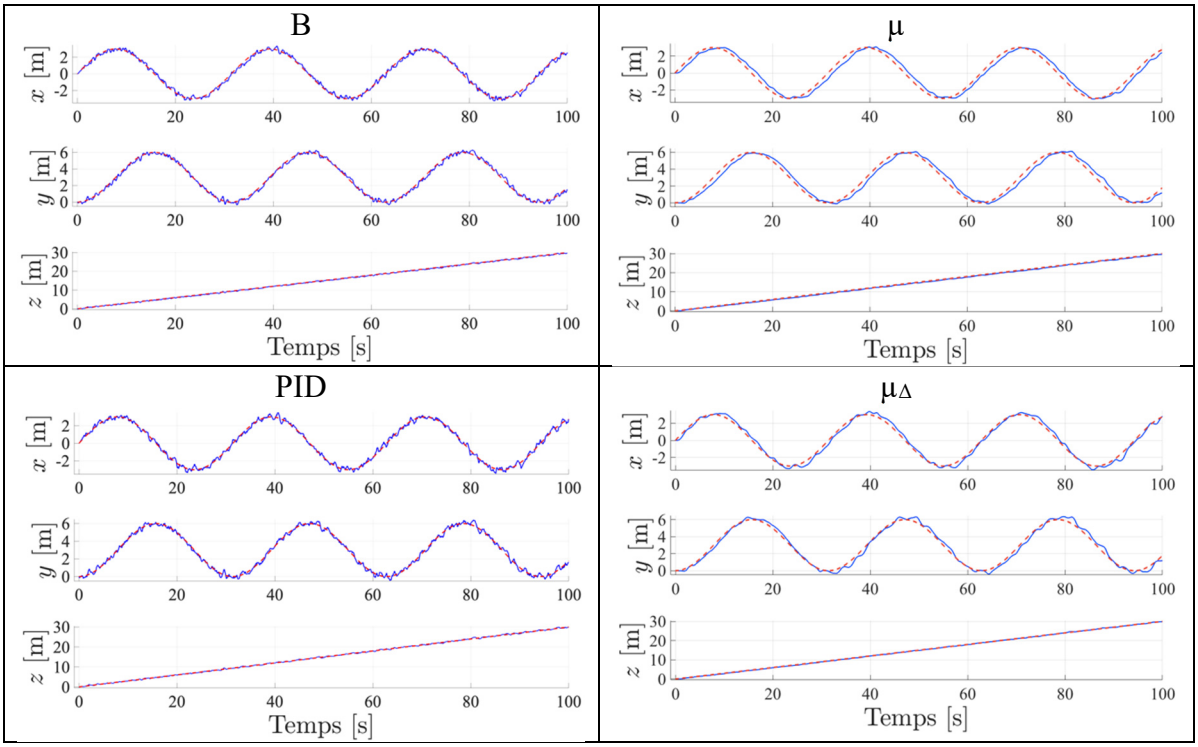


Figure 7.110 Déplacements sur les axes *x, y, z* en fonction du temps lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge et définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire

Tableau 7.29 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID sur le processus linéaire dans le cas d'une consigne hélicoïdale

	B	μ	μ_Δ	PID
σ_{xyz}	0.1585	0.0987	0.1289	0.1665
σ_x	0.2057	0.4354	0.3004	0.2103
σ_y	0.2005	0.4235	0.3039	0.2100
σ_z	0.1585	0.0978	0.1044	0.2047
$max(e_x)$	0.6677	0.7465	0.8202	0.7414
$max(e_y)$	0.6267	0.8824	0.7972	0.6677
$max(e_z)$	0.5906	0.5744	0.3204	0.6985

La Figure 7.111 illustre des variations d'amplitudes des angles ϕ et θ réalistes pour les commandes μ et μ_Δ. Les amplitudes plus importantes des angles ϕ et θ pour les commandes B et PID provoqueront probablement le décrochage du drone.

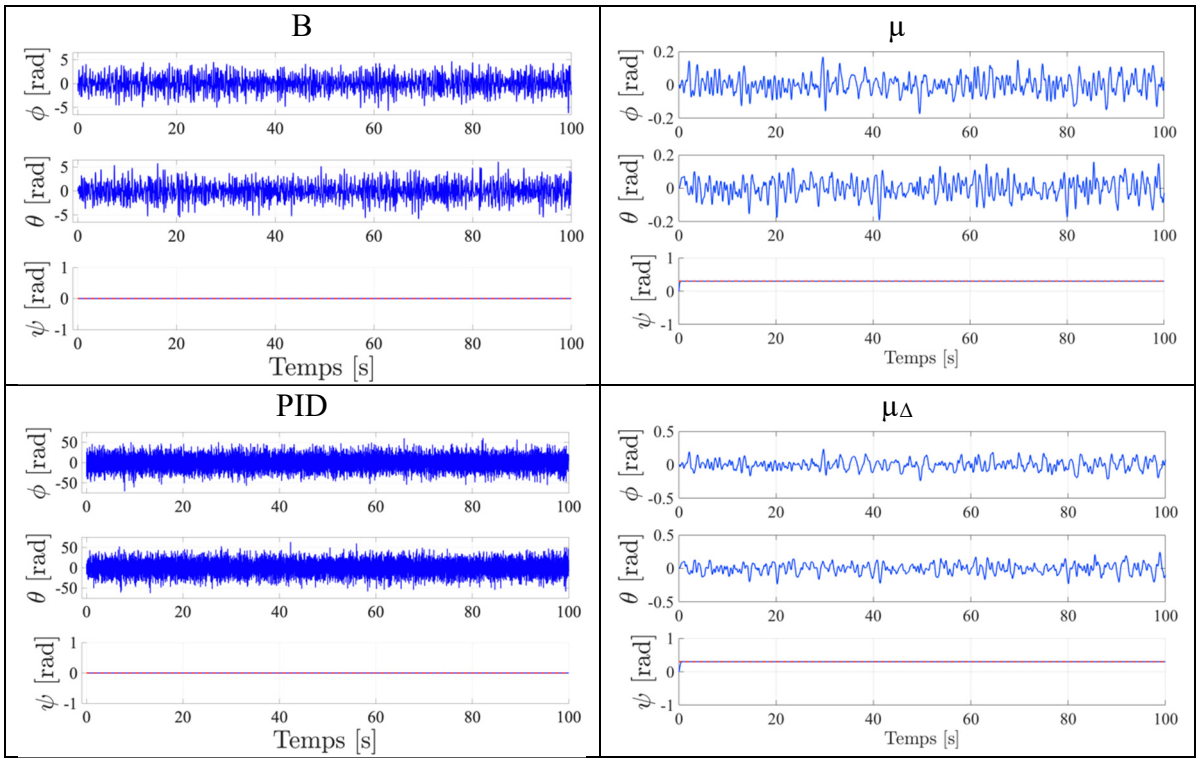


Figure 7.111 Déplacements des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire

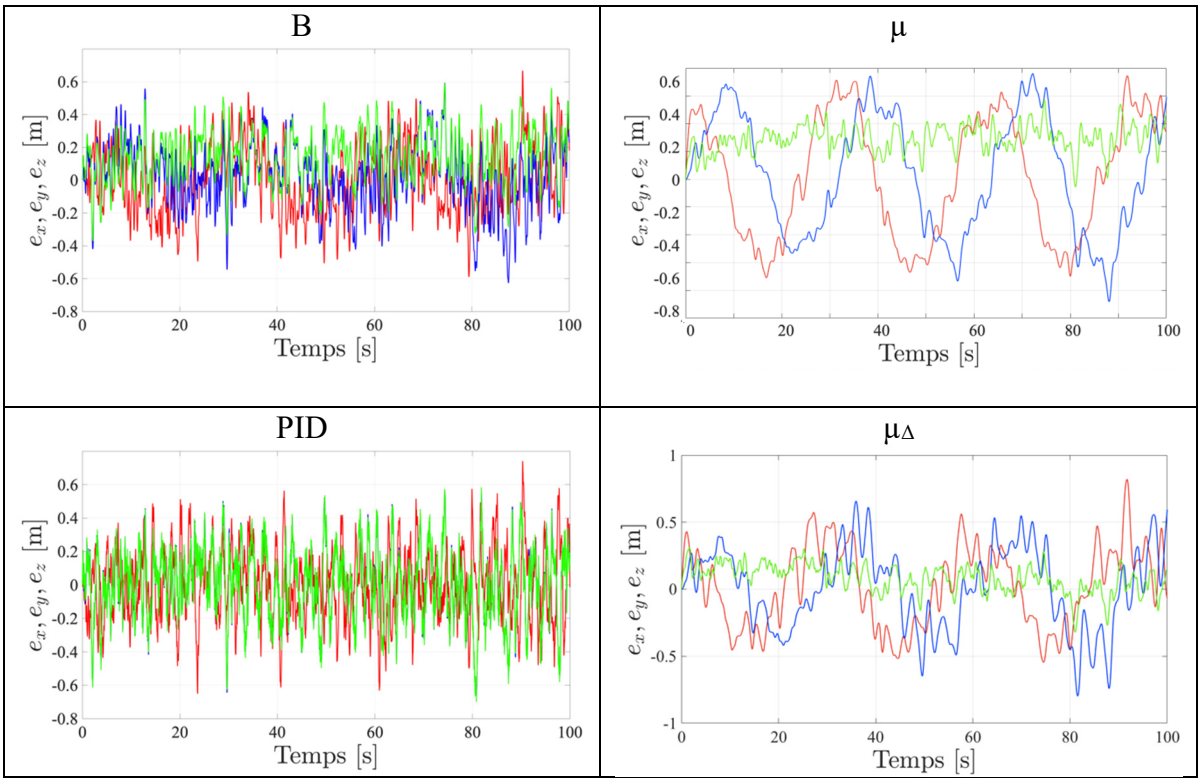


Figure 7.112 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire

Tel qu'illustré Figure 7.113 les amplitudes des commandes en couple u_ϕ (bleue), u_θ (rouge) sont très grande pour les compensateurs B et PID, le risque de décrochage est alors important. Les commandes en couple u_ϕ, u_θ des compensateurs μ et μ_Δ semblent bien plus réalisables. Malgré une amplitude de commande en poussée u_z plus faible dans le cas des compensateurs μ et μ_Δ, celle-ci reste importante et risque de saturer les actionneurs.

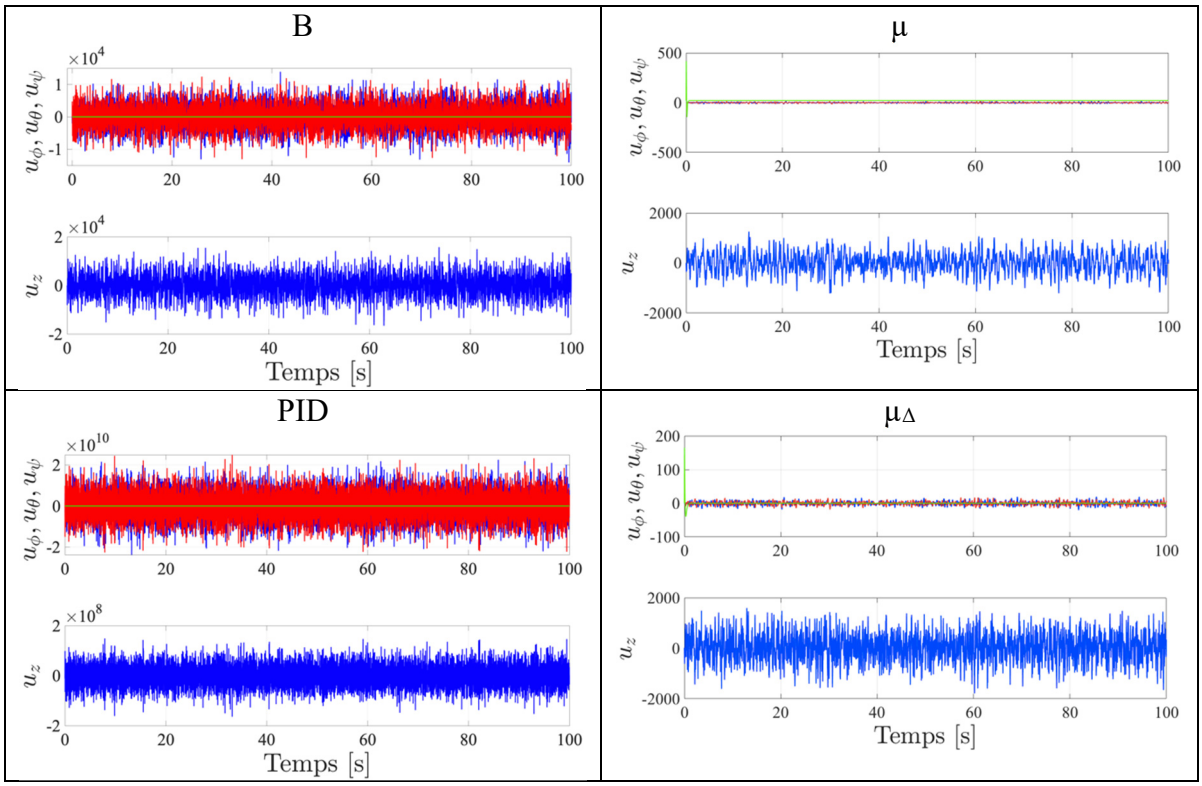


Figure 7.113 Commandes u_ϕ (bleue), u_θ (rouge), u_ψ (verte), u_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire

Comme le montre la Figure 7.114, seule la commande μ présente des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) avec des amplitudes suffisamment faibles pour être réalisables. Bien que les amplitudes de ces vitesses soient relativement importantes et bruitées. Les commandes B, μ_Δ et PID présentent quant à elles des amplitudes importantes risquant fortement de saturer les actionneurs.

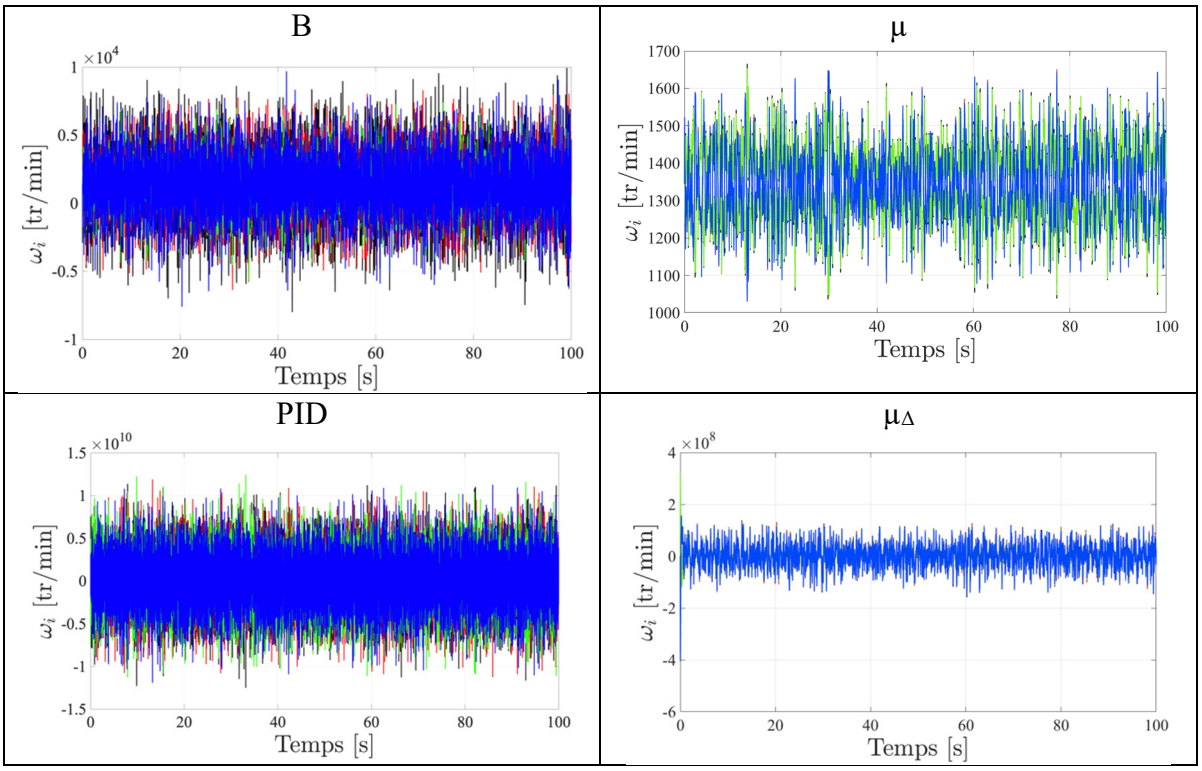


Figure 7.114 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID sur le processus linéaire

7.4.2.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

La valeur de DSP a été réduite ici à 4e-5 m^2/Hz (contre 0.012 m^2/Hz pour les deux parties précédentes). Cette réduction s'explique, car le processus $P(s)$ est désormais non linéaire (3.35) et que les algorithmes de commandes B, H_2 et H_∞ ont été conçue dans des conditions de vol stationnaire. L'ajout de perturbation en sortie peut donc rapidement éloigner les compensateurs B, H_2 et H_∞ du point de fonctionnement de leur conception et les mener à l'instabilité.

Comme le montre le suivit de trajectoire en bleue sur la Figure 7.115 et la Figure 7.116 ainsi que les résultats du Tableau 7.30 lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), le compensateur H_2 parvient difficilement à suivre la trajectoire de référence en pointillé rouge. Les commandes B et H_∞ obtiennent un suivit de trajectoire plus précise. Une précision de positionnement sensiblement identique est observée le long des *x, y* pour les commandes H_∞

et B, légèrement meilleure sur l'axe *z* pour la commande B. Mais contrairement à la commande H_∞, la commande B ne présentent aucune dérive le long de l'axe *z*.

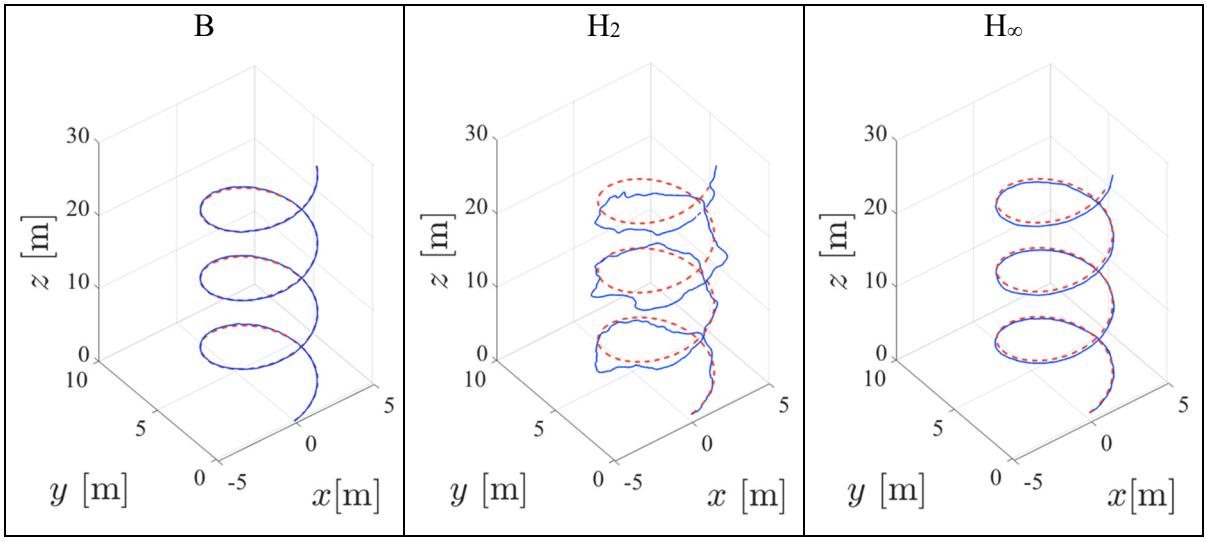


Figure 7.115 Déplacements en 3D sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

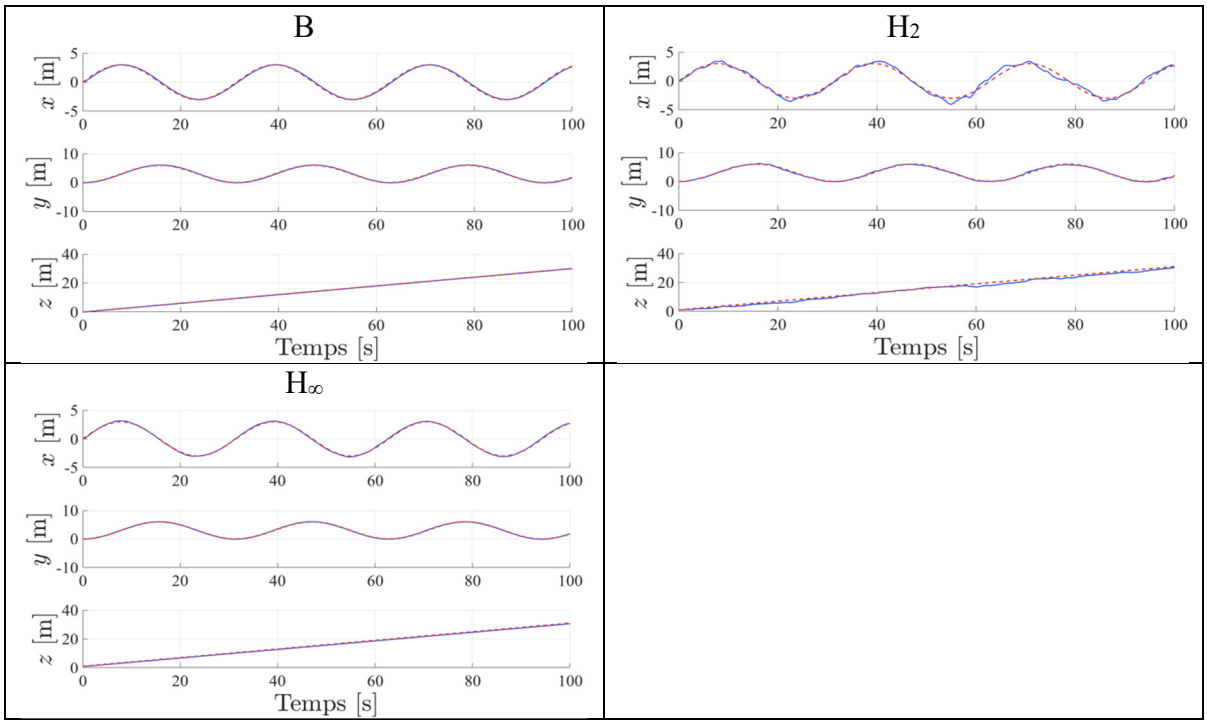


Figure 7.116 Variations des axes *x, y, z* pour une consigne hélicoïdale définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

Tableau 7.30 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2 et H_∞ sur le processus non linéaire dans le cas d'une consigne hélicoïdale

	B	H_2	H_∞
σ_{xyz}	0.0647	0.2224	0.0405
σ_x	0.1156	0.3768	0.0861
σ_y	0.0990	0.1542	0.0615
σ_z	0.0167	0.5658	0.0580
$max(e_x)$	0.1834	1.0457	0.1789
$max(e_y)$	0.1685	0.4989	0.1338
$max(e_z)$	0.0891	2.1851	0.4354

Les variations des amplitudes des angles ϕ et θ illustrées à la Figure 7.117 évoluent entre ± 0.3 rad pour la commande B, ce qui semble réalisable d'un point de vue pratique. Les variations d'amplitudes des angles ϕ et θ pour les commandes H_2 (± 5 rads) et H_∞ (± 2 rads) sont trop importantes et provoqueraient le décrochage du drone.

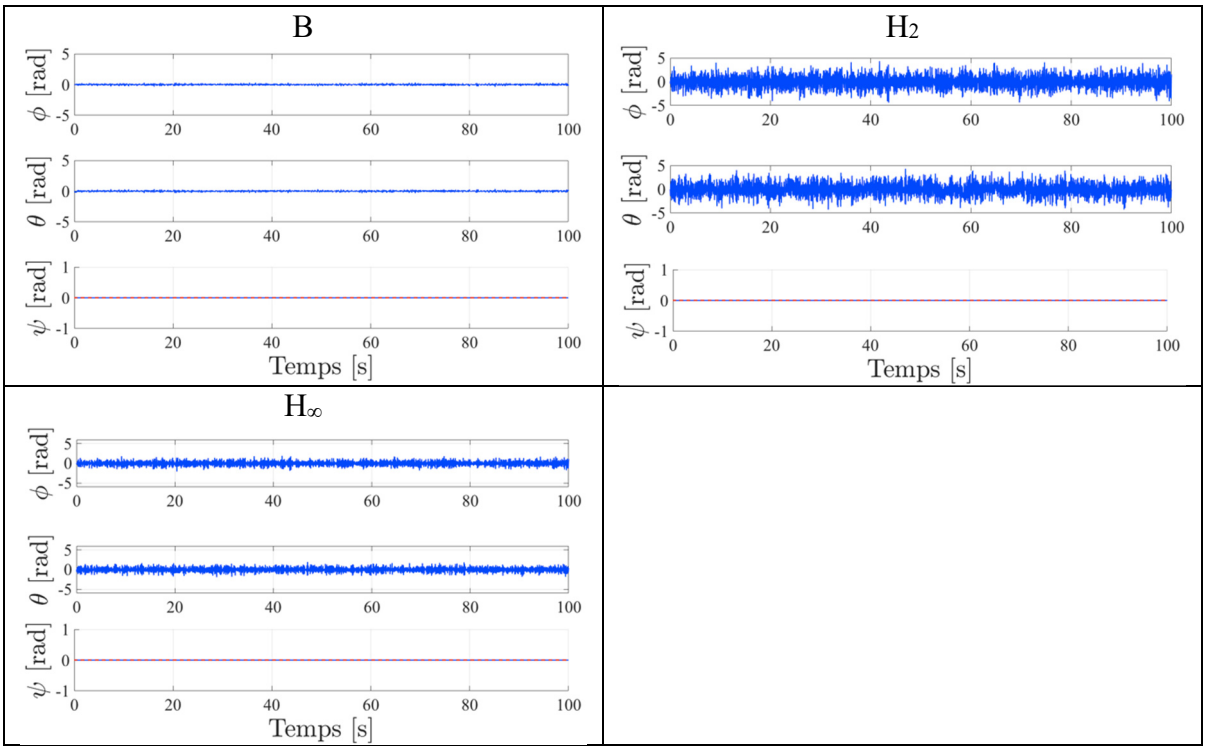


Figure 7.117 Variations des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

Les erreurs de positions e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), sont représentées à la Figure 7.118. On observe une augmentation de l'erreur e_z avec le temps sur l'axe z pour la commande H_∞ alors que la commande B parvient à maintenir cette erreur faible. Les amplitudes de l'erreur de position e_z sont plus importantes et dépassent les 2 m dans le cas de la commande H_2.

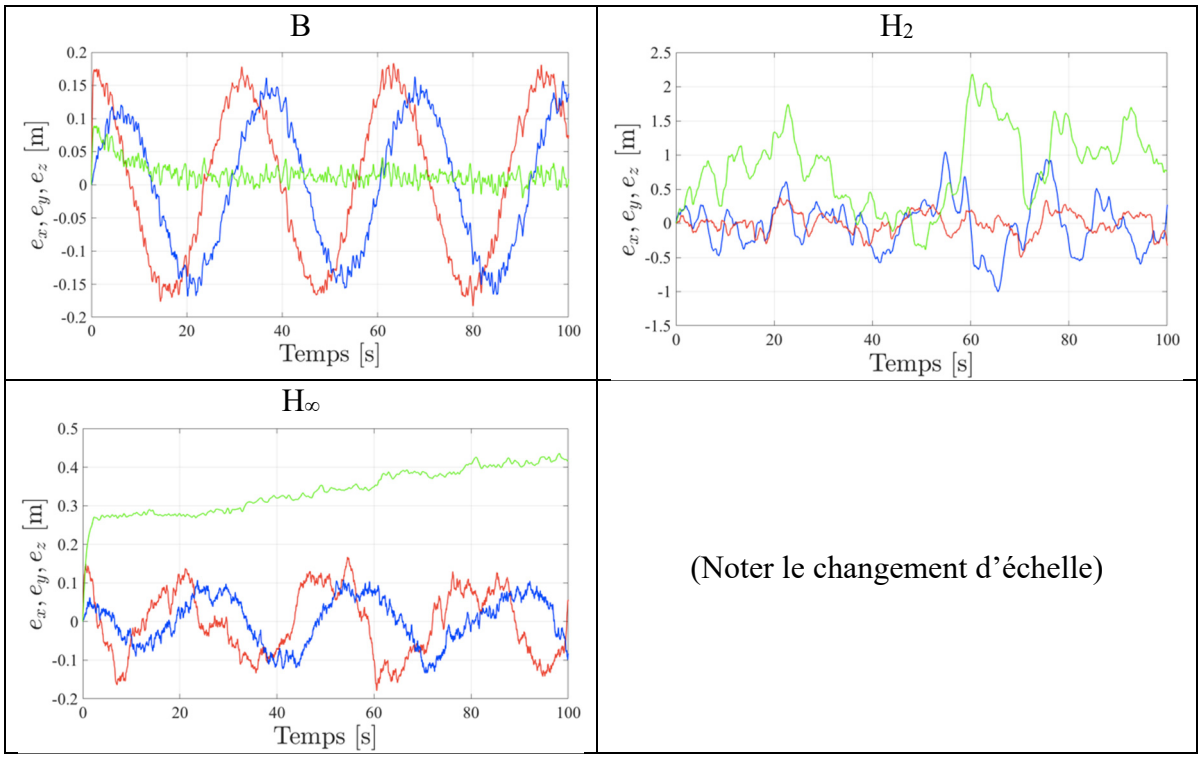


Figure 7.118 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

Les variations des amplitudes des couples de commandes L (bleu), M (rouge), illustrées à la Figure 7.119 lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), montre des variations bien plus faibles dans le cas du compensateur B. Puis, viens les compensateurs H_∞ et H_2. Les variations d'amplitude de la force de poussée T_z semblent suffisamment faibles pour être réalisable dans le cas des compensateurs B et H_∞ tandis que le compensateur H_2 obtient des variations d'amplitude de la force de poussée T_z trop importante pour être réalisable (saturation des actionneurs).

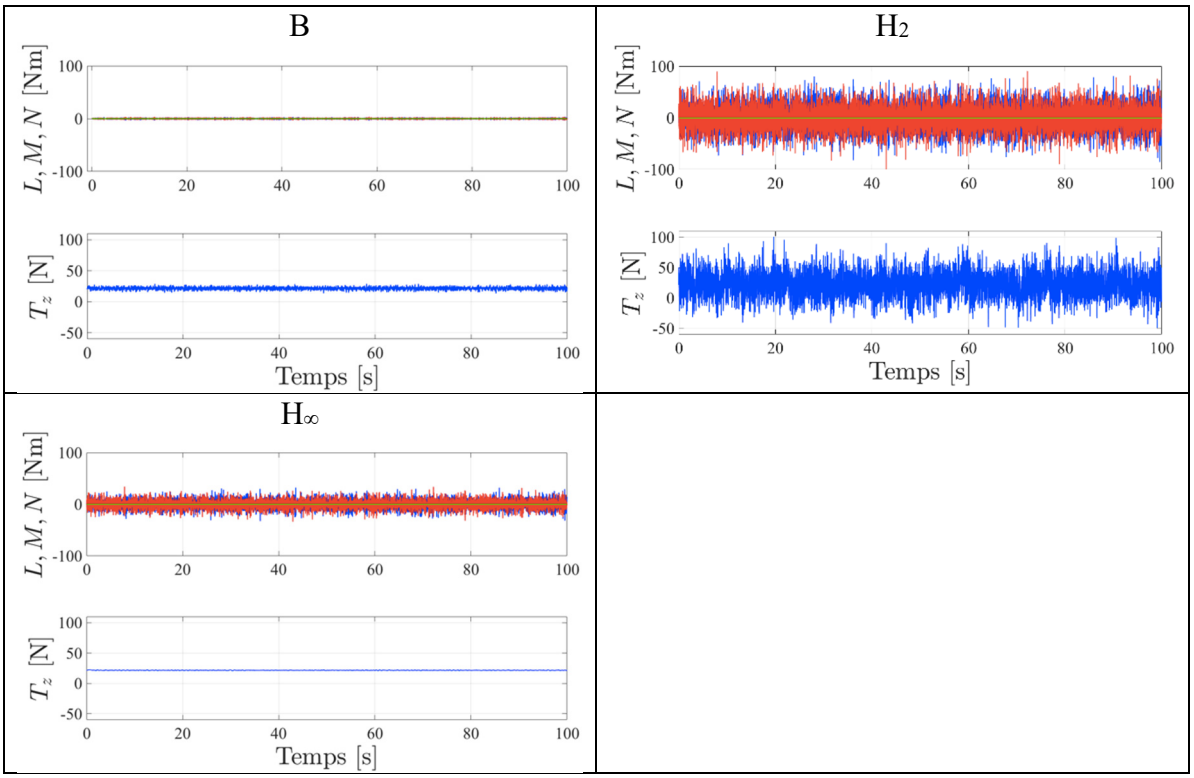


Figure 7.119 Commandes L (bleue), M (rouge), N (verte), T_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

Les amplitudes des vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), tracées à la Figure 7.120 sont trop importantes pour être réalisées et provoqueraient très certainement la saturation des actionneurs.

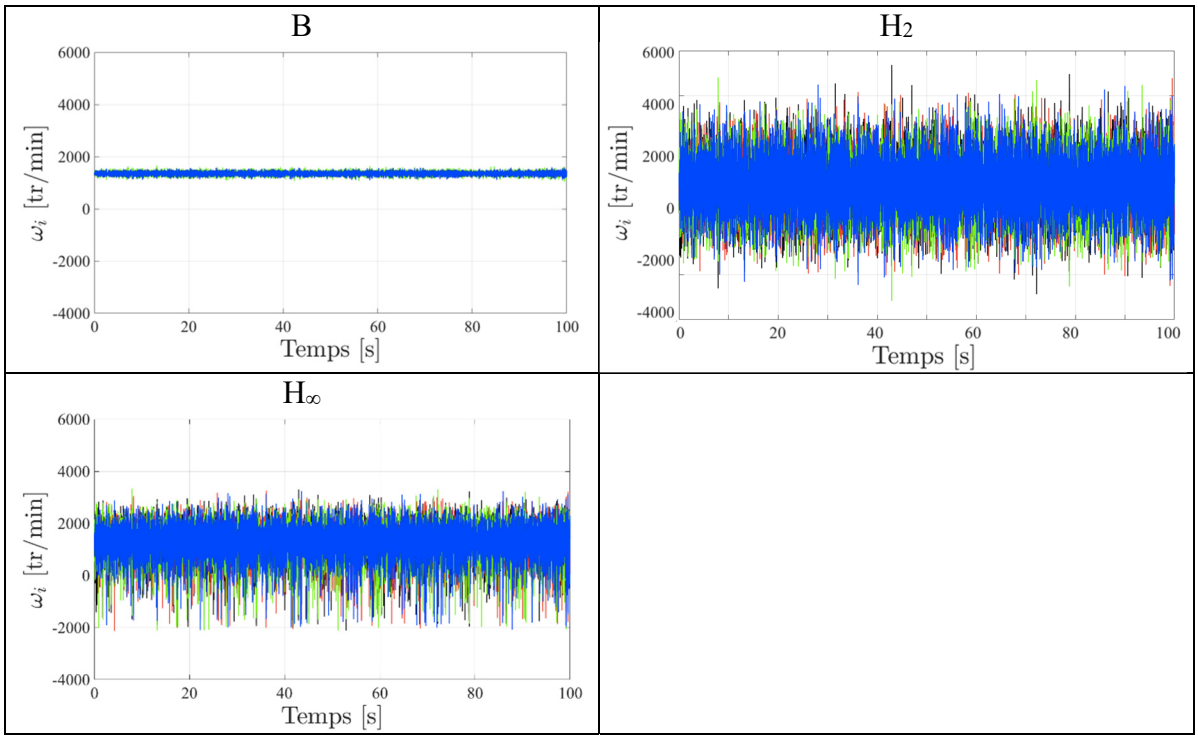


Figure 7.120 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

7.4.2.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

La DSP utilisée pour modéliser l'amplitude de la perturbation sur la sortie est de 6e-4 m^2/Hz. La précision du suivit lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), sur les axes *x, y, z* est représentée en bleue à la Figure 7.121 et à la Figure 7.122. Le Tableau 7.31 reporte les écarts type ainsi que les erreurs maximums pour les trois axes *x, y, z*. Une bonne précision du suivi de trajectoire est observée pour les compensateurs B, μ et μ_Δ tandis que le compensateur PID parvient difficilement à suivre la trajectoire de référence.

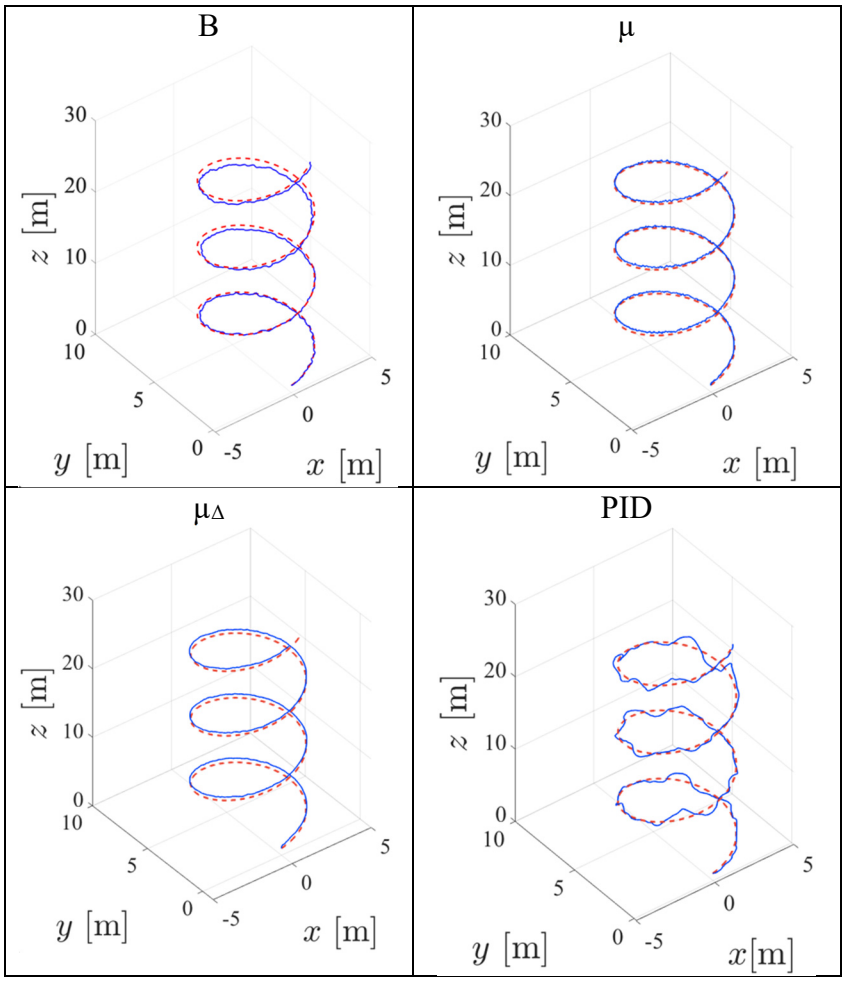


Figure 7.121 Déplacements en 3D sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID

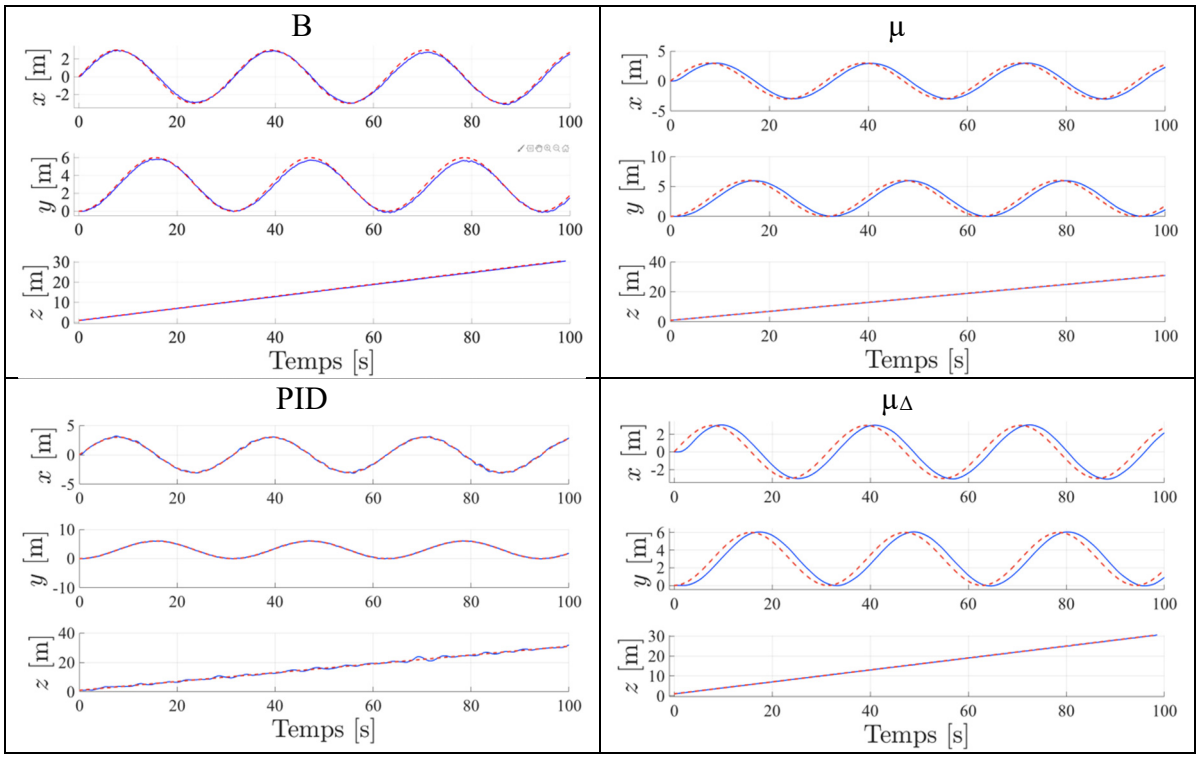


Figure 7.122 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), sur le processus non linéaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, μ, μΔ, PID

Tableau 7.31 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, μ, μΔ, PID sur le processus non linéaire dans le cas d'une consigne hélicoïdale

	B	μ	μΔ	PID
σ_{xyz}	0.0996	0.3241	0.3573	0.5297
σ_x	0.1622	0.6142	0.7504	0.1988
σ_y	0.1579	0.6040	0.7367	0.0883
σ_z	0.0794	0.2559	0.0380	1.5579
$max(e_x)$	0.4152	1.5455	1.0776	0.5745
$max(e_y)$	0.5020	1.6086	1.0994	0.2588
$max(e_z)$	0.3495	1.0548	0.1720	5.1878

Les variations d'amplitudes des angles ϕ et θ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), illustrées à la Figure 7.123 sont réalistes (± 0.05 rad <) pour les compensateurs μ et μΔ. Le

compensateur B obtient des variations d'amplitudes des angles ϕ et θ certainement à la limite de la réalisabilité avec des valeurs maximums d'environs (±1 rad). Le compensateur PID obtient des variations comprises entre ± 5 rads et provoquera probablement le décrochage de l'appareil et/ou la saturation des actionneurs.

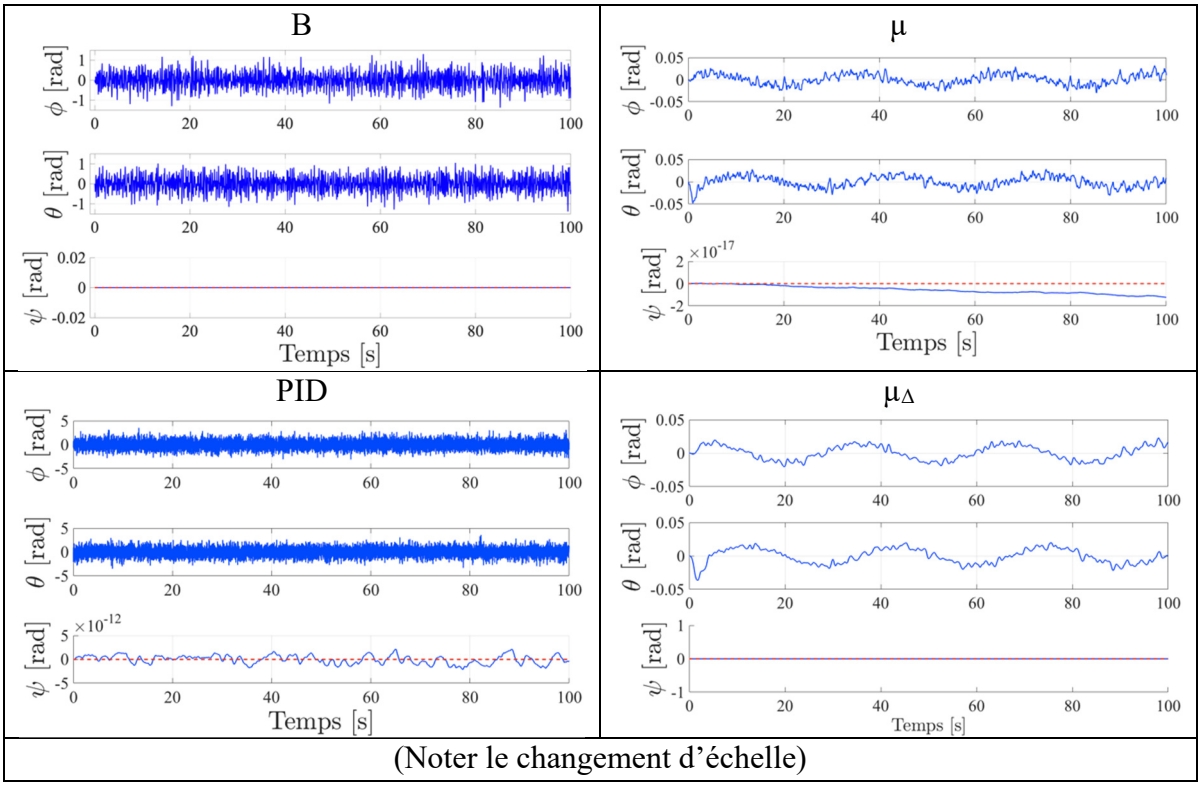


Figure 7.123 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID

Tel que représenté à la Figure 7.124 la commande B obtient des amplitudes des erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) les plus faibles, mais l'amplitude de ces erreurs augmente avec le temps. Les commandes μ et μ_Δ montrent des amplitudes d'erreurs sensiblement plus importantes, mais constantes dans le temps tandis que le PID obtient des variations d'erreurs bien plus importantes.

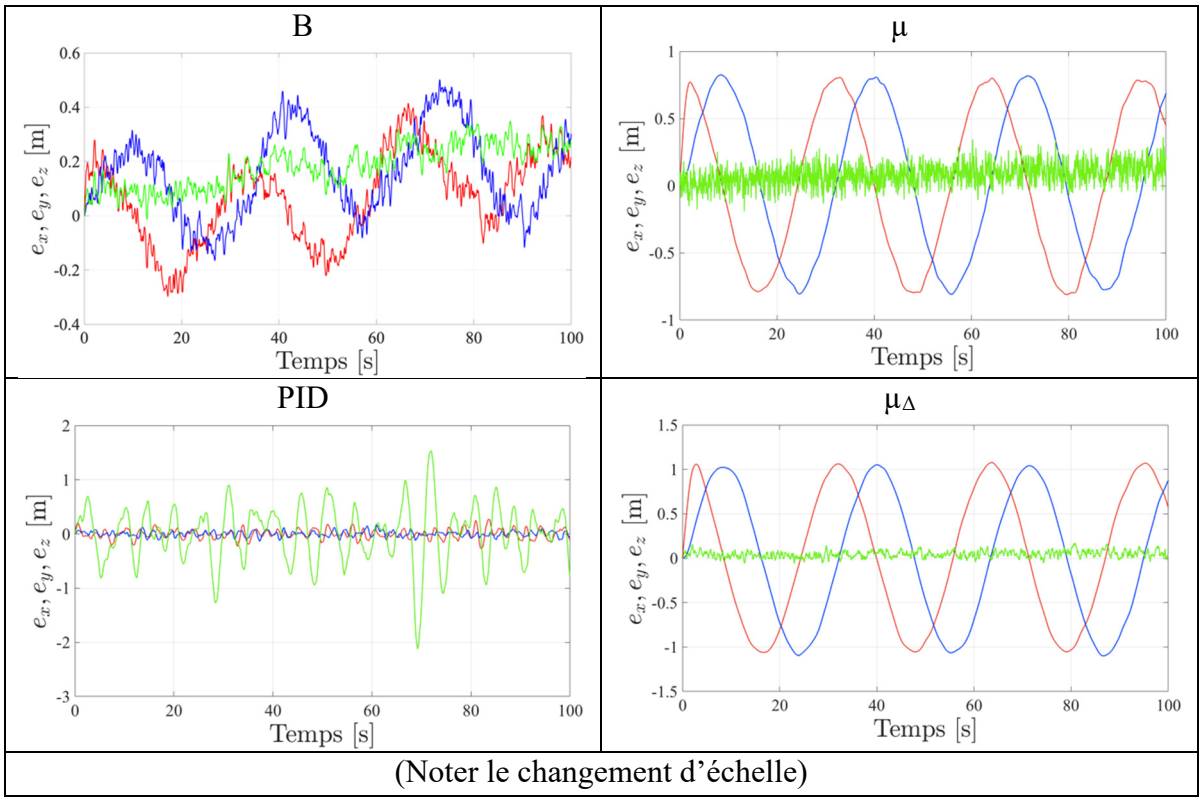


Figure 7.124 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID

L'amplitude des entrées de commandes en couple L (bleue), M (rouge), N (verte), lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), illustrées à la Figure 7.125 sont les plus faibles et probablement réalisable dans le cas des compensateurs μ et μ_Δ. Tandis que, le compensateur B obtient des variations d'amplitude bien plus importante risquant de saturer les actionneurs. Concernant l'entrée de commande en poussée T_z, c'est le compensateur B qui obtient les variations les plus faibles et donc les plus réalisables alors que, les compensateurs μ et μ_Δ obtiennent des variations d'amplitudes importantes qui engendreront probablement la saturation des actionneurs. Le compensateur PID obtient des variations d'amplitudes très importantes pour chacune des entrées de commandes L, M, N, T_z et saturera les actionneurs.

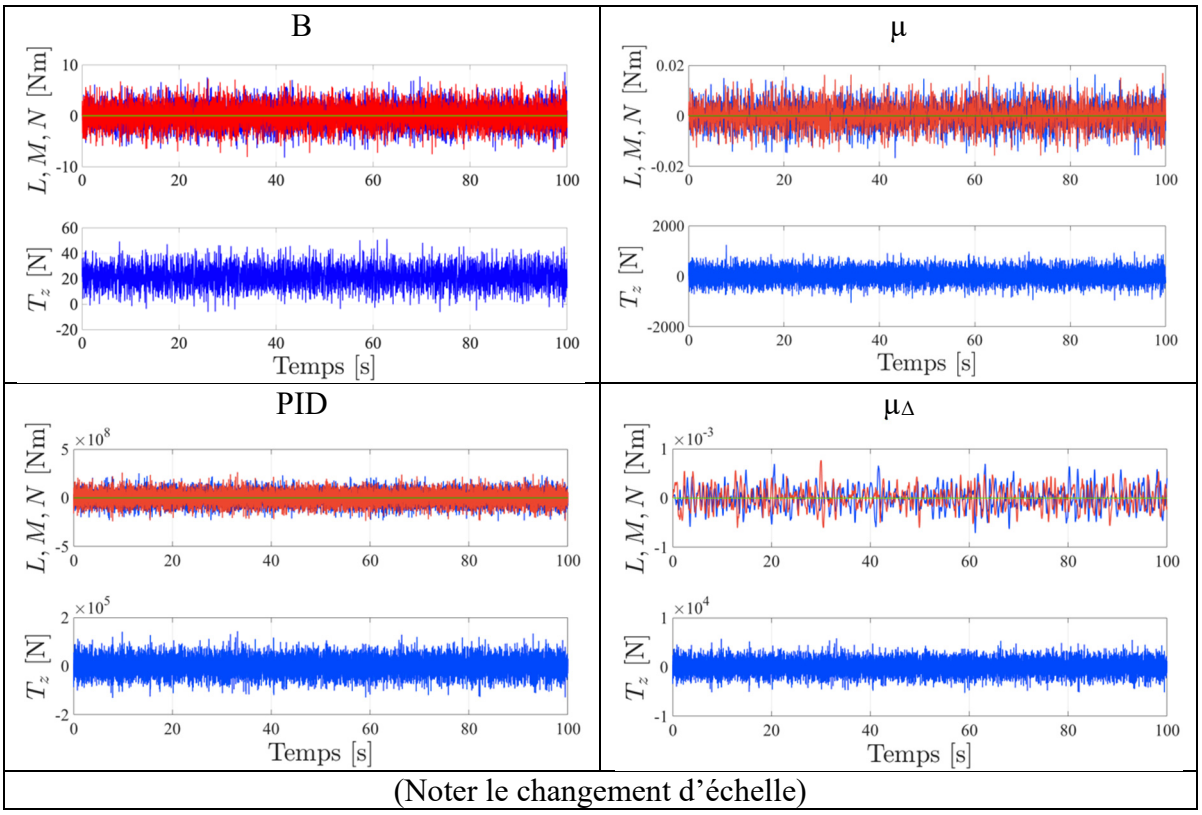


Figure 7.125 Commandes L (bleue), M (rouge), N (verte), T_z lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), présence de perturbation en sortie avec le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID

Les amplitudes des vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), tracées à la Figure 7.126 sont très importantes et non-réalisable à cause de la saturation des actionneurs pour les commandes μ, μ_Δ où PID. Seule la commande B génère des amplitudes des vitesses de rotation des moteurs évitant la saturation des actionneurs.

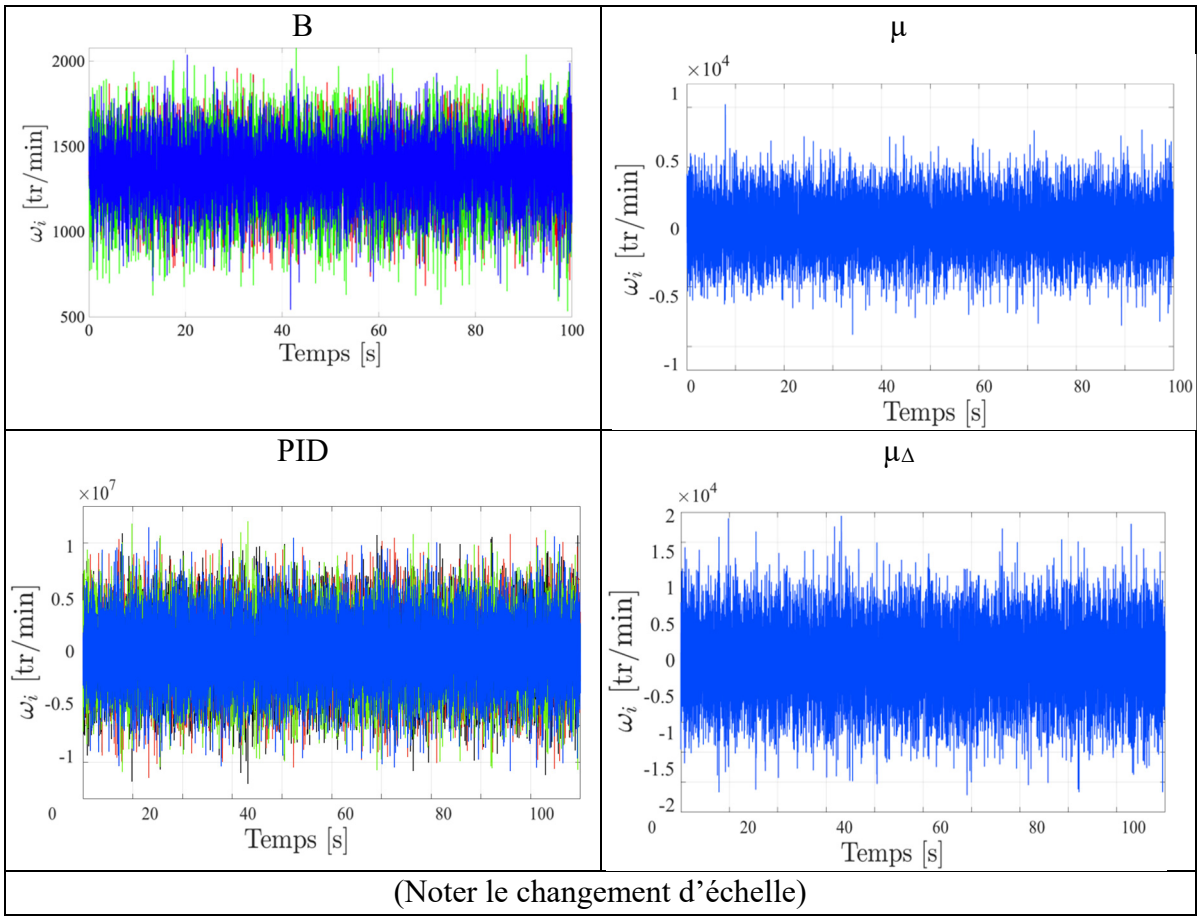


Figure 7.126 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie sur le processus non linéaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ, PID

7.4.2.6 Commandes backstepping et hiérarchique

Pour les commandes backstepping et hiérarchique la DSP a été augmentée à 0.012 m^2/Hz. Les résultats illustrés à la Figure 7.127 et à la Figure 7.128 ainsi qu'au Tableau 7.32 montrent un suivit de trajectoire (bleue) de la consigne hélicoïdale (pointillé rouge) précis de la part des deux commandes backstepping et hiérarchique.

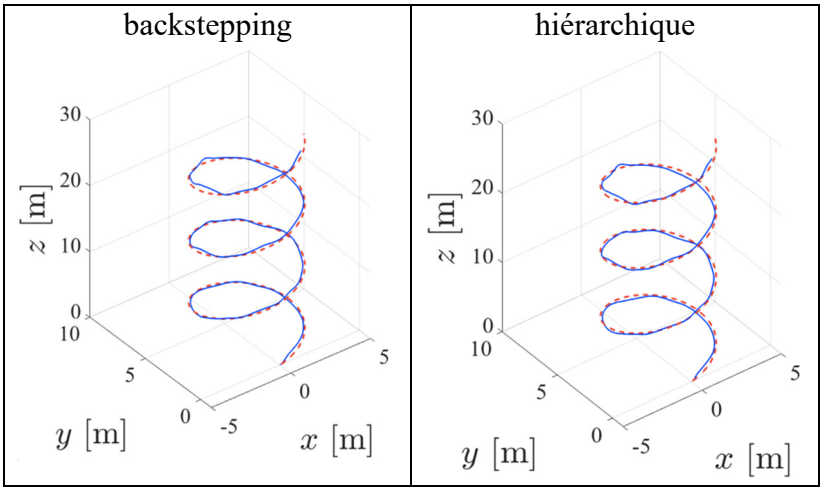


Figure 7.127 Déplacements en 3D sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

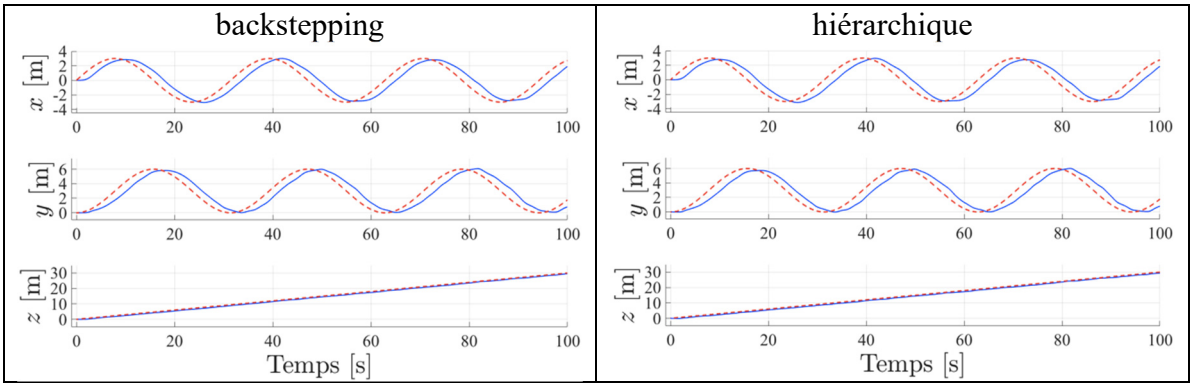


Figure 7.128 Variations sur *x, y, z* lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Tableau 7.32 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs backstepping et hiérarchique dans le cas d'une consigne hélicoïdale

	backstepping	hiérarchique
σ_{xyz}	0.4432	0.4498
σ_x	0.9556	0.9402
σ_y	0.9258	0.9062
σ_z	0.0831	0.1022
$max(e_x)$	1.4345	1.1019
$max(e_y)$	1.5159	1.4729
$max(e_z)$	0.6945	0.8033

Les commandes backstepping et hiérarchique obtiennent de faibles variations d'amplitudes des angles ϕ et θ lors d'une consigne hélicoïdale en (7.4), comme représentées à la Figure 7.129. Avec ces faibles variations d'angles le décrochage du drone devrait être évité.

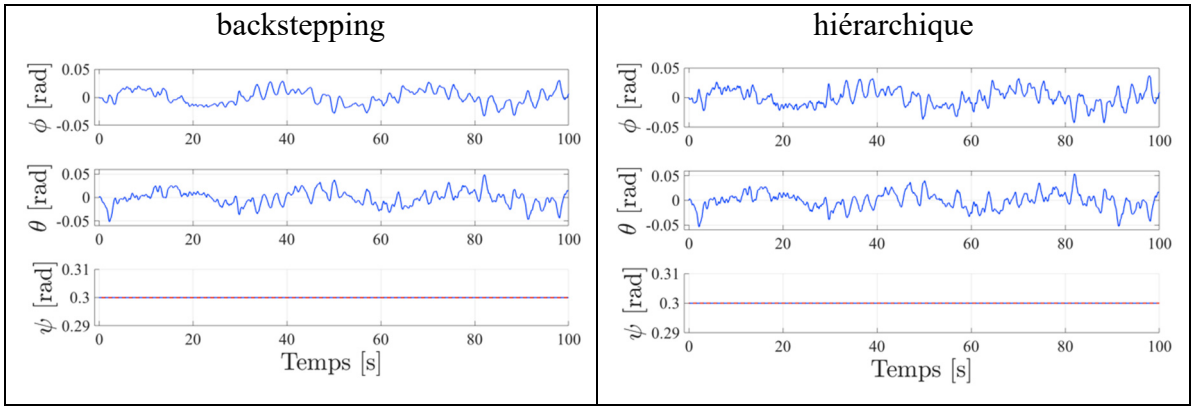


Figure 7.129 Déplacement des angles ϕ, θ, ψ lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les variations des amplitudes des erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'une consigne hélicoïdale définie en (7.4), reportées à la Figure 7.130 sont relativement faibles et identiques, pour les commandes backstepping et hiérarchique.

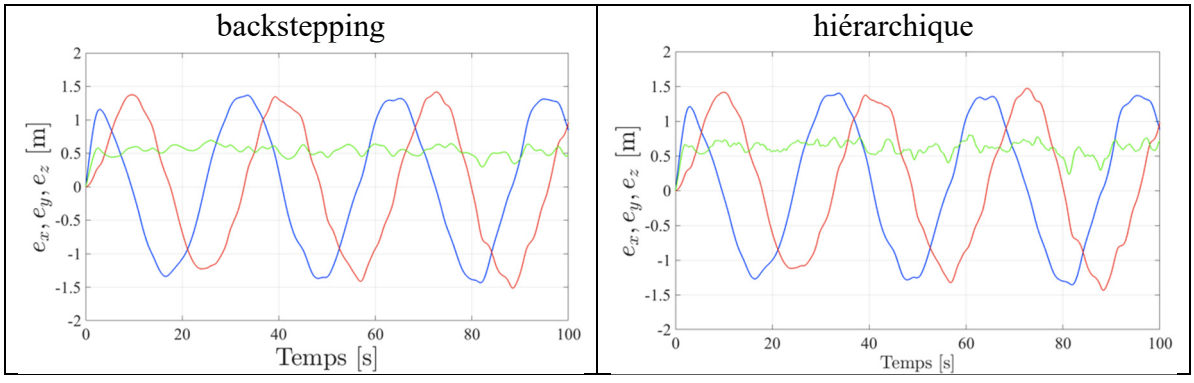


Figure 7.130 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) pour une consigne hélicoïdale définie en (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les variations d'amplitude des commandes en couples L (bleue), M (rouge), N (verte) illustrées à la Figure 7.131 lors d'une consigne hélicoïdale en pointillé rouge définie en (7.4), sont faibles

et réalistes pour les compensateurs backstepping et hiérarchique. Néanmoins, la commande hiérarchique présente des amplitudes plus importantes concernant les commandes L et M. La commande en poussée T_z du compensateur par backstepping possède de faibles variations d'amplitudes autour de la valeur de la poussée de vol stationnaire T_{z0} = 21.6 N. Le compensateur hiérarchique obtient une commande en poussée T_z avec des amplitudes plus importantes, mais ce signal contient de nombreuses variations semblables à du bruit.

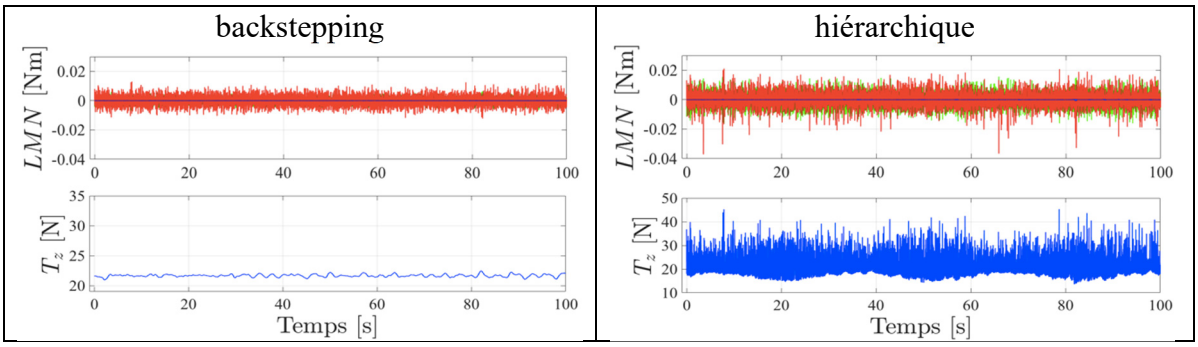


Figure 7.131 Commandes L (bleue), M (rouge), N (verte), T_z lors de la consigne hélicoïdale (7.4), avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

Les vitesses de rotation des moteurs ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) représentées à la Figure 7.132 varient autour de la vitesse de vol stationnaire ω_0 = 1345 tr/min. Pour la commande par backstepping les variations d'amplitudes de ces vitesses de rotation sont faibles et réalisables. Pour la commande hiérarchique, les importantes variations d'amplitude observées sur T_z à la Figure 7.131 se sont reportées dans les allures des vitesses de rotation des moteurs. Ce comportement pourrait générer un comportement nerveux de l'appareil.

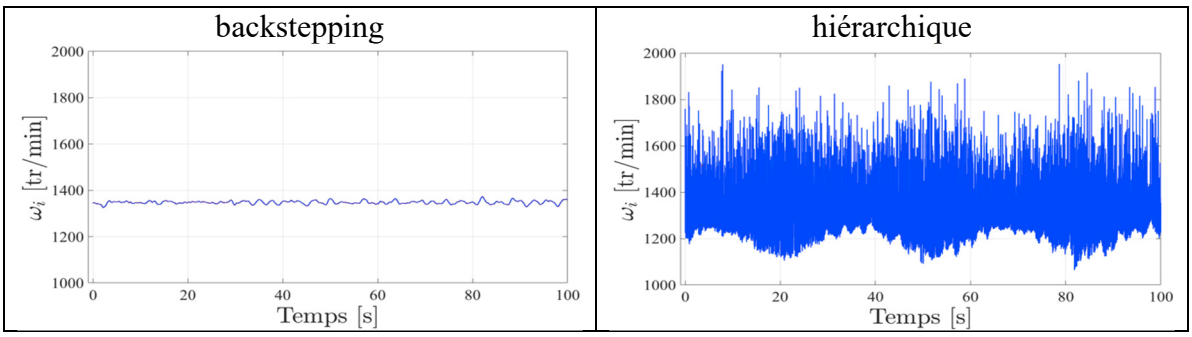


Figure 7.132 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'une consigne hélicoïdale, avec perturbation en sortie pour les compensateurs backstepping et hiérarchique

7.4.2.7 Discussion

Nous avons évalué dans cette partie la robustesse des algorithmes de commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique lors d'un suivi de trajectoire hélicoïdale telle que défini en (7.4), avec la présence de perturbation sur la sortie. Pour être en mesure de visualiser les effets de la perturbation en sortie sur le positionnement du drone le long des axes *x, y, z* des puissances de DSP différentes ont été appliquées selon le type de commande et de structure de commande : système de translation/rotation en cascade (3.5.1) (3.5.3) ou séparée (3.5.2) (3.5.4) ; linéaire (3.5.1) (3.5.2) ou non linéaire (3.5.3) (3.5.4).

Lorsque les commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ et PID sont appliquées au modèle linéaire de drone (3.59) les algorithmes présentant la meilleure robustesse sont les commandes μ et μ_Δ. Les commandes B, H_2, H_∞ et B obtiennent des résultats satisfaisants, c.-à.-d. des variations sur *x, y, z* avec des amplitudes acceptables, tandis que la commande PID obtient les variations les plus importantes sur *x, y, z* et donc la plus faible robustesse.

Les puissances de DSP de la perturbation en sortie simulée pour le modèle non linéaire (3.35) de drone sont : de 4e-5 m^2/Hz pour les commandes B, H_2, H_∞ dans le cas de la structure de commande en translation/rotation en cascade (3.5.3) ; 6e-4 m^2/Hz pour les commandes B, μ, μ_Δ, PID pour la structure de commande en rotation/translation séparée (3.5.4) ; 1.2^e-3 m^2/Hz pour les commandes backstepping et hiérarchique (3.5.4). Les déplacements sur les axes *x, y, z* étant du même ordre de grandeur pour chacune des commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique cela montre une bien meilleure capacité des commandes backstepping et hiérarchique en termes de robustesse, puisque l'amplitude du vent appliquée dans le cas de ces deux commandes B est bien plus important.

On remarque également une augmentation constante des erreurs de traînées sur *x, y, z* pour la commande B lorsque sa structure de commande est celle de commande en translation/rotation séparée (3.5.3). Or, ces erreurs sont maintenues constantes lorsque la structure de commande est en translation/rotation en cascade (3.5.4).

Cette section a étudié à partir des figures illustrant l'allure des angles ϕ, θ et des vitesses de rotation des moteurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, pour un suivi de trajectoire de référence hélicoïdale définie en (7.3) en présence de perturbation en sortie. Des amplitudes trop importantes des angles ϕ, θ (considérons au-delà de ± 1 rad) risquent de provoquer le décrochage de l'appareil. De plus, en se rappelant que la vitesse de vol stationnaire est $\omega_0 = 1345$ tr/min, des amplitudes trop importantes des vitesses de rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 risquent de saturer les actionneurs. Le Tableau 7.33 permet de mettre en évidence (zones colorées), les structures de commandes étudiées entre les sections 7.4.2.2 à 7.4.2.6 présentant, des amplitudes importantes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 risquant de provoquer le décrochage du drone ou la saturation des actionneurs. On remarque l'absence de risque de décrochage et saturation des actionneurs pour les commandes H_∞ et μ lorsque le processus linéaire est considéré. Avec le processus non linéaire seul les commandes B, backstepping et hiérarchique évitent simultanément le décrochage et la saturation des actionneurs.

Tableau 7.33 Structures de commandes étudiées à la section 7.4.2 présentant pour une trajectoire de référence hélicoïdale définie en (7.3) en présence de vent, des amplitudes des angles ϕ, θ ou des vitesses rotation ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risquant de provoquer le décrochage ou la saturation des actionneurs (zones colorées)

Processus	Linéaire (7.4.2.2)			Linéaire (7.4.2.3)				Non linéaire (7.4.2.4)			Non linéaire (7.4.2.5)				Non linéaire (7.4.2.6)
Commande	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	backstepping hiérarchique
Risque de décrochage?															
Risque de saturation des actionneurs?															

7.4.3 Délais sur la mesure

7.4.3.1 Conditions de test

La multiplicité des capteurs et la distance à parcourir par les données sont susceptibles de générer un retard sur les mesures et risque éventuellement déstabiliser le système. Dans cette partie nous allons évaluer l'influence du retard dans la boucle de commande lorsqu'il se situe sur le retour de position. Le schéma utilisé est celui de la Figure 7.133 ou nous retrouvons :

- Le vecteur d'entrée de consigne $r(t) = [x_d, y_d, z_d, \psi_d]^T$;
- Le vecteur d'erreur $e(t) = [e_x, e_y, e_z, e_\psi]^T$;
- Le vecteur de commande $u(t) = [u_x, u_y, u_z, u_\psi]^T$;
- Le vecteur de sortie $y(t) = [x, y, z, \psi]^T$;
- Le vecteur de sortie mesurée $y_m = [x_m, y_m, z_m, \psi_m]^T$.

Le compensateur est noté $C(s)$, le processus $P(s)$ et le *Délais* = e^{-sT} sur les positions sera exprimé en "ms". Nous laissons le soin au lecteur de faire le rapprochement entre ce schéma simplifié et les architectures de commande détaillées au CHAPITRE 3 selon le type de compensateur employé :

- B, H_2, H_∞ linéaires pour la structure de commande (3.5.1) ;
- B, H_2, H_∞ non linéaires pour la structure de commande (3.5.3) ;
- B, μ, μ_Δ, PID linéaire pour la structure de commande (3.5.2) ;
- B, μ, μ_Δ, PID non linéaire pour la structure de commande (3.5.4) ;
- Backstepping et hiérarchique pour la structure de commande (3.5.3).

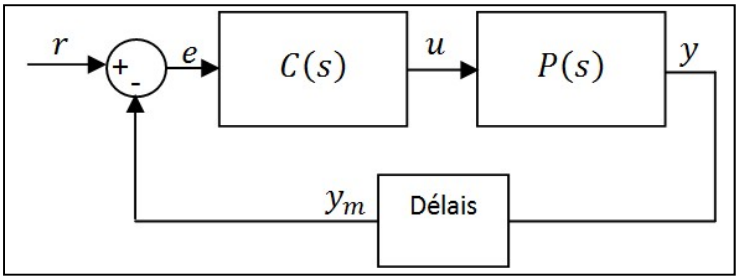


Figure 7.133 Insertion des délais sur la mesure dans la boucle de commande

Pour évaluer la capacité des algorithmes de commande B, H_2, H_∞ ; B, μ, μ_Δ, PID ; backstepping et hiérarchique à maintenir leur niveau de performance nominal en présence de délais, nous allons mesurer l'écart type σ_i définie en (7.5) de l'erreur e_i (avec i = {$x\theta$} ou {$y\phi$}, z, ψ) entre la réponse unitaire nominale y et celle obtenue en présence de délais y_m sur une durée de 10 s. Les simulations sont réalisées indépendamment les unes des autres, c.-à-d. que la réponse unitaire est évaluée pour un seul axe/angle à la fois.

7.4.3.2 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

1) Délais sur le retour de mesure des axes {$x\theta$} ou {$y\phi$}

Comme indiqué dans le Tableau 7.34 le délai de mesure ajouté sur le retour de position de l'axe {$x\theta$} ou {$y\phi$} varie entre 10 ms et 200 ms. En s'appuyant également sur la Figure 7.134 on s'aperçoit que les compensateurs H_2 et H_∞ obtiennent une robustesse semblable et plus performante que le compensateur B qui voit l'apparition d'oscillations plus prononcées sur sa réponse temporelle.

Tableau 7.34 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ dans le cas d'un processus linéaire

Délai [ms]	B	H_2	H_∞
10	0.004	0.0029	0.0029
50	0.0219	0.0151	0.0151
100	0.0504	0.0322	0.0321
200	0.1371	0.0748	0.0737

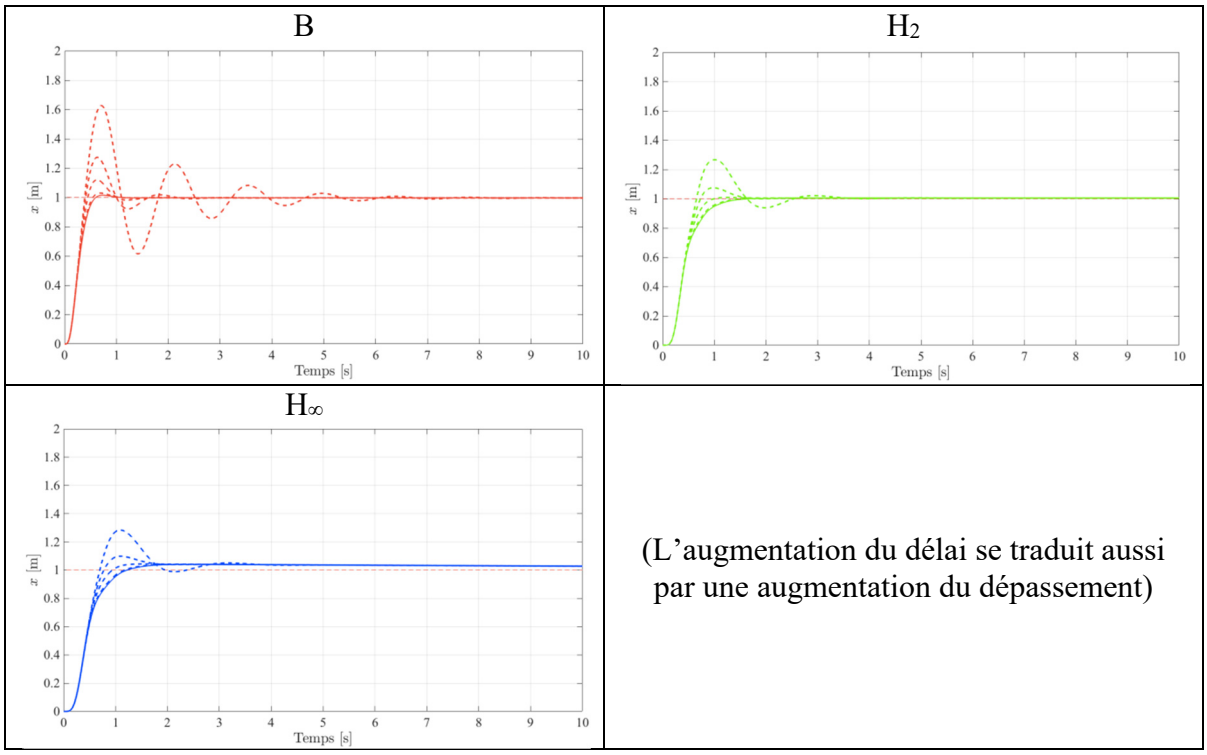


Figure 7.134 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour un processus linéaire

2) Délais sur le retour de mesure de l'axe *z*

Les résultats pour l'axe *z* sont relayés au Tableau 7.35 et à la Figure 7.135 pour un délai sur la position compris entre 10 ms et 200 ms. Le compensateur H_∞ s'avère présenter la meilleure robustesse puis, vient le compensateur H_2 avec l'apparition d'oscillations et enfin le compensateur B avec des oscillations plus soutenues.

Tableau 7.35 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ dans le cas d'un processus linéaire

Délai [ms]	B	H_2	H_∞
10	0.0038	0.0034	0.0018
50	0.0207	0.0186	0.0094
100	0.0473	0.0414	0.0194
200	0.1371	0.1082	0.0421

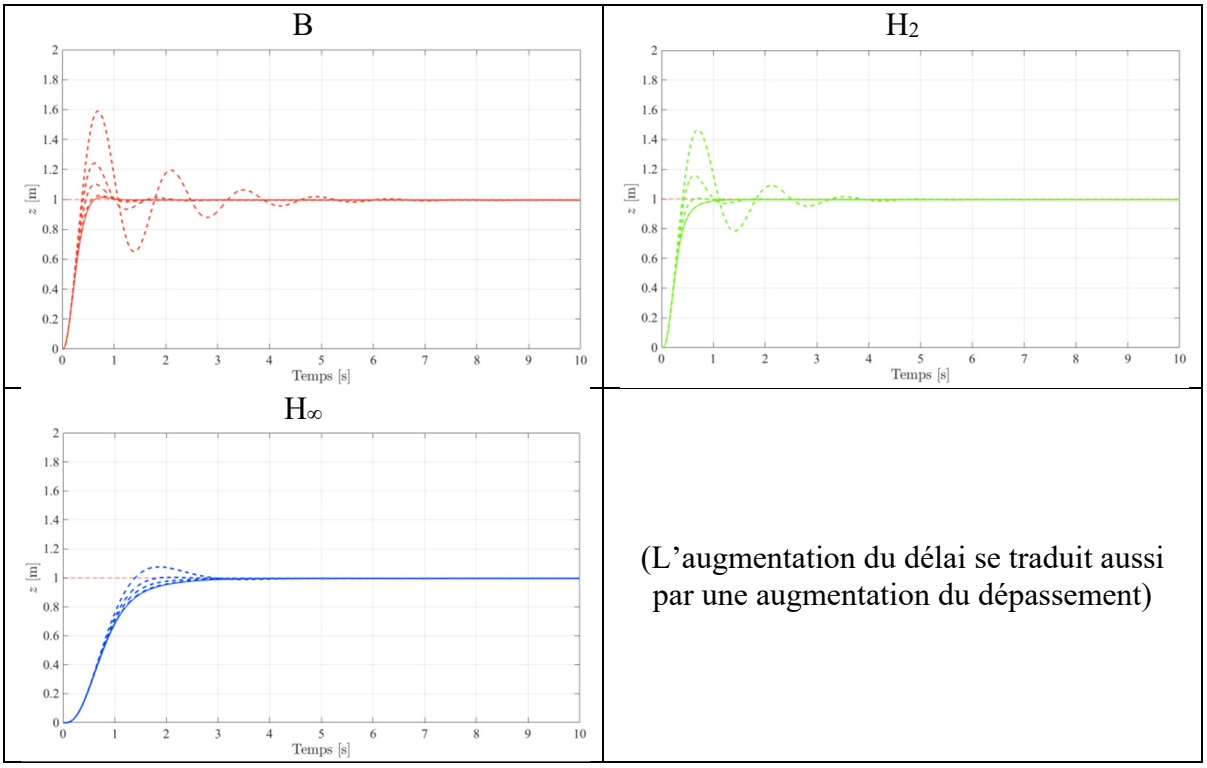


Figure 7.135 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe z et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour un processus linéaire

3) Délais sur le retour de mesure de l'angle ψ

Pour conserver des allures de réponse temporelles cohérentes autour de l'angle ψ le délai maximum a été réduit à un maximum de 50 ms (voir Tableau 7.36). Les réponses unitaires illustrées à la Figure 7.136 montrent ici également une meilleure robustesse de la part de la commande H_∞, la commande H_2 étant un peu moins robuste et des oscillations apparaissent avec la commande B dont la performance en termes de robustesse est moins convaincante.

Tableau 7.36 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ dans le cas d'un processus linéaire

Délai [ms]	B	H_2	H_∞
10	0.0084	0.0006	0.0039
23	0.0221	0.0150	0.0092
36	0.0411	0.0254	0.0149

50	0.0731	0.0386	0.0214

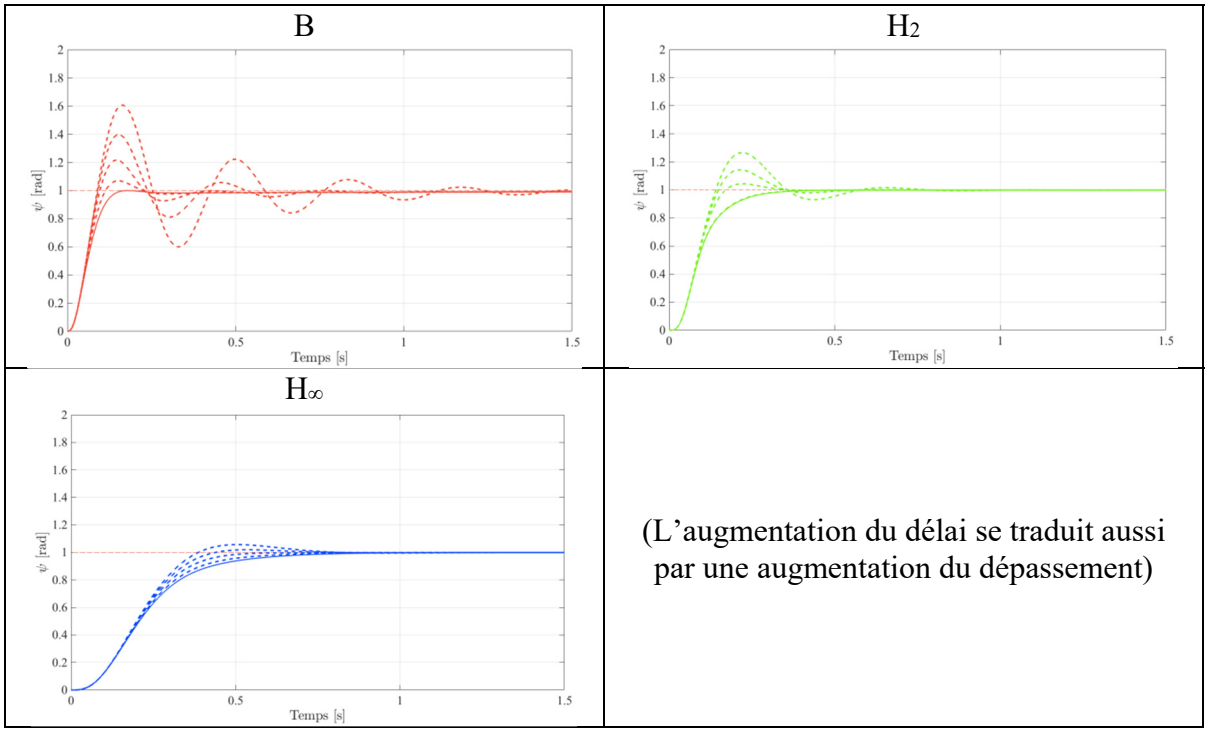


Figure 7.136 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge) , H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour un processus linéaire

7.4.3.3 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

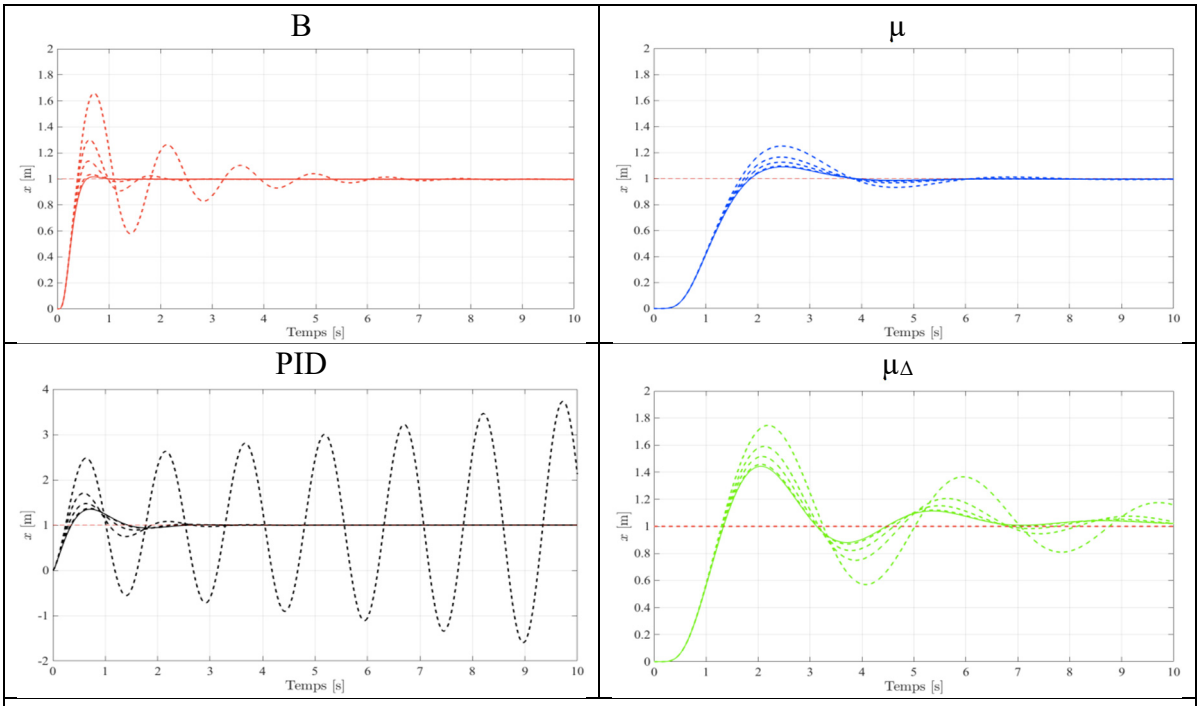
1) Délais sur le retour de mesure des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

En se référant au Tableau 7.37 et à la Figure 7.137 concernant la réponse unitaire sur l'axe $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, on constate que la commande μ est la plus robuste. Les commandes B et μ_Δ parviennent à conserver une réponse temporelle convergeant, mais avec l'apparition d'oscillations. Le compensateur PID quant à lui tend à diverger avec l'augmentation du délai.

Tableau 7.37 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID dans le cas d'un processus linéaire

Délais [ms]	B	μ	μ_Δ	PID
10	0.0042	0.0023	0.0063	0.0074
50	0.0230	0.0120	0.0341	0.0419
100	0.0534	0.0252	0.0762	0.1047

200	0.1585	0.0553	0.1918	1.4495



(L'augmentation du délai se traduit aussi par une augmentation du dépassement)
(Noter le changement d'échelle)

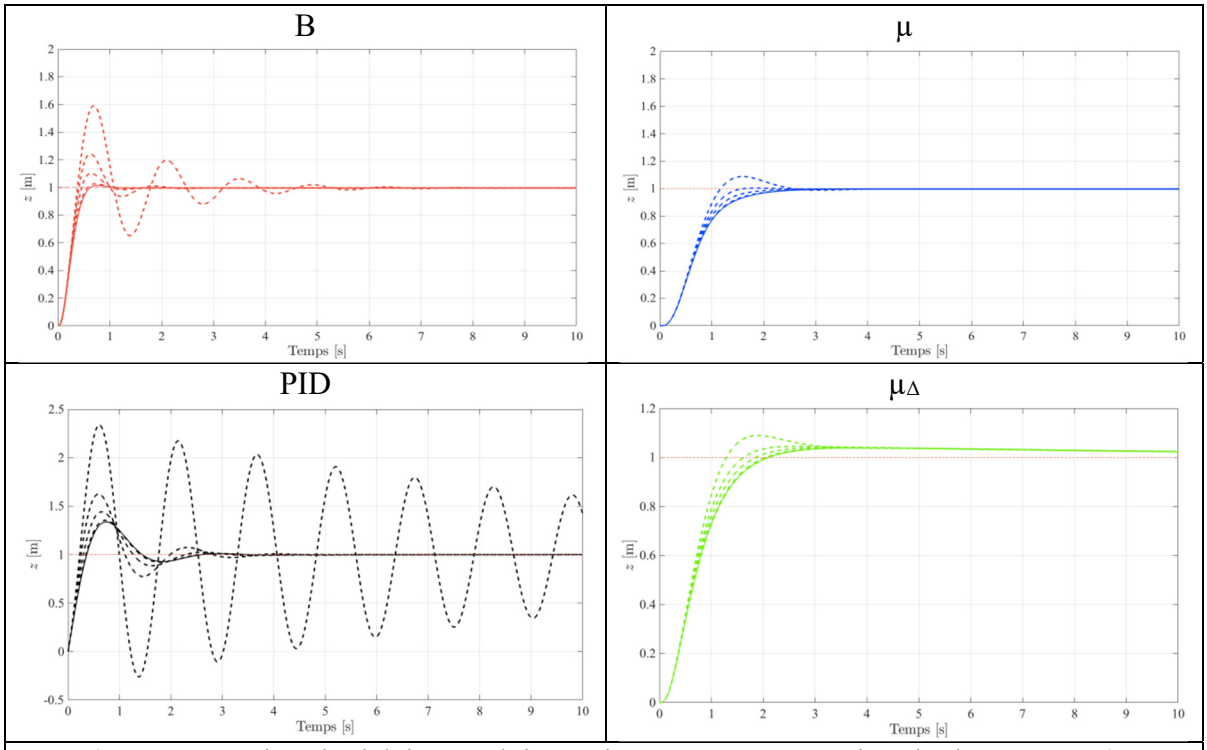
Figure 7.137 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), μ (bleu) , PID (noir), μ_Δ (vert) dans le cas d'un processus linéaire

2) Délais sur le retour de mesure de l'axe *z*

La réponse temporelle unitaire sur l'axe *z* illustrée Figure 7.138 et au Tableau 7.38 montrent une bonne robustesse de la part des commandes μ et μ_Δ, malgré une augmentation du délai allant jusqu'à 200 ms. La commande B se montre un peu moins performante avec l'apparition d'oscillations, mais parvient à converger contrairement à la commande PID qui obtient une réponse temporelle proche des oscillations pures lors du délai maximum.

Tableau 7.38 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID dans le cas d'un processus linéaire

Délais [ms]	B	μ	μ_Δ	PID
10	0.0038	0.002	0.0019	0.0071
50	0.0207	0.0101	0.0097	0.0395
100	0.0472	0.0211	0.0200	0.0955



(L'augmentation du délai se traduit aussi par une augmentation du dépassement)
(Noter le changement d'échelle)

200	0.1370	0.0460	0.0432	0.6681

Figure 7.138 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe z et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), μ (bleu) , PID (noir), μ_Δ (vert) dans le cas d'un processus linéaire

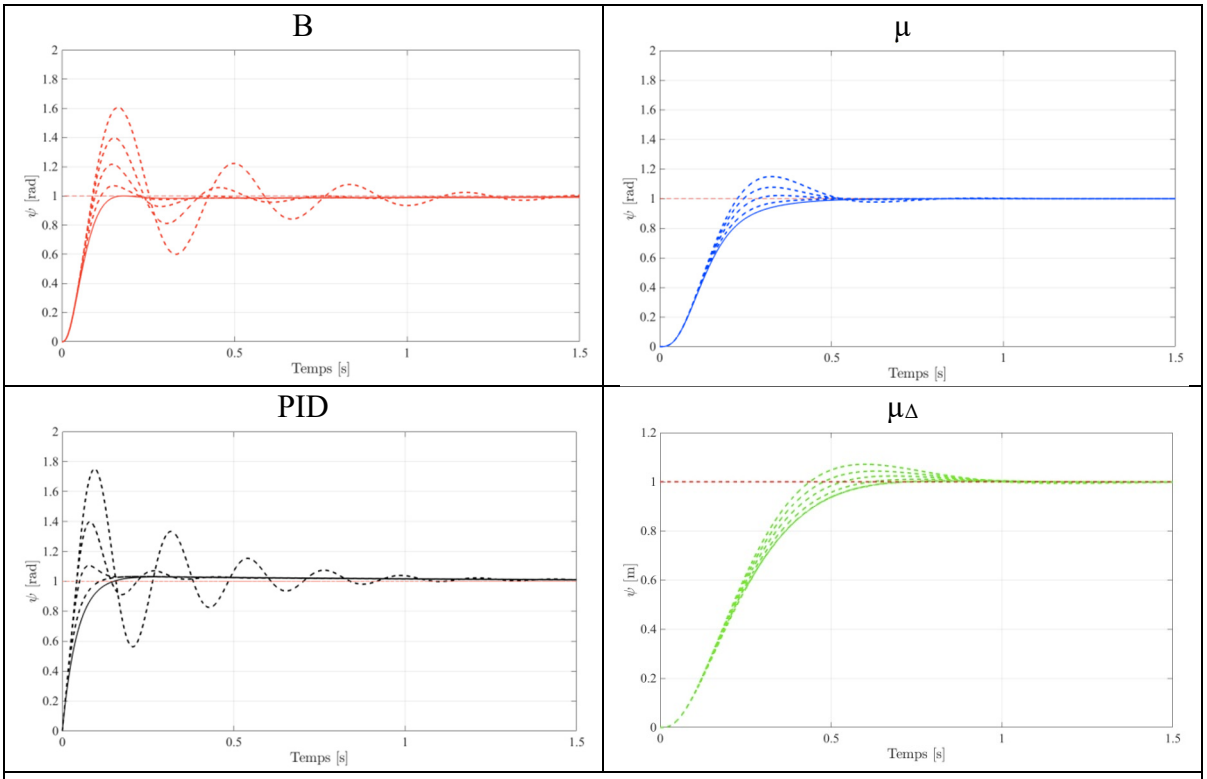
3) Délais sur le retour de mesure de l'angle ψ

Les résultats de la réponse unitaire autour de l'angle ψ avec l'ajout d'un délai de mesure sont reportés au Tableau 7.39 et à la Figure 7.139. Les compensateurs μ et μ_Δ montrent ici une bonne robustesse tandis que les compensateurs B et PID présentent de légères oscillations lors d'une augmentation du délai de mesure.

Tableau 7.39 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID dans le cas d'un processus linéaire

Délai [ms]	B	μ	μ_Δ	PID
10	0.0084	0.0050	0.0037	0.0086
23	0.0221	0.0120	0.0088	0.0224

36	0.0411	0.0197	0.0141	0.0421
50	0.0731	0.0289	0.0202	0.0816



(L'augmentation du délai se traduit aussi par une augmentation du dépassement)
(Noter le changement d'échelle)

Figure 7.139 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), μ (bleu) , PID (noir), μ_Δ (vert) dans le cas d'un processus linéaire

7.4.3.4 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

1) Délais sur le retour de mesure des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

L'effet du délai de mesure sur l'axe $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ lorsque les commandes B, H_2 et H_∞ sont appliquées sur le processus non linéaire est illustré à la Figure 7.40 et au Tableau 7.40. Les performances de la commande H_2 en termes robustesse ne sont pas satisfaisantes puisque des oscillations pures apparaissent sur la réponse temporelle pour un délai de 200 ms. Les commandes B et H_∞ se montrent plus robustes avec l'apparition d'oscillations, mais amortie pour le délai maximum de 200 ms.

Tableau 7.40 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ pour le processus non linéaire

Délai [ms]	B	H_2	H_∞
10	4.7873e-04	0.0013	2.6968e-04
50	0.0027	0.0021	0.0015
100	0.0062	0.0045	0.0034
200	0.0168	0.1950	0.0098

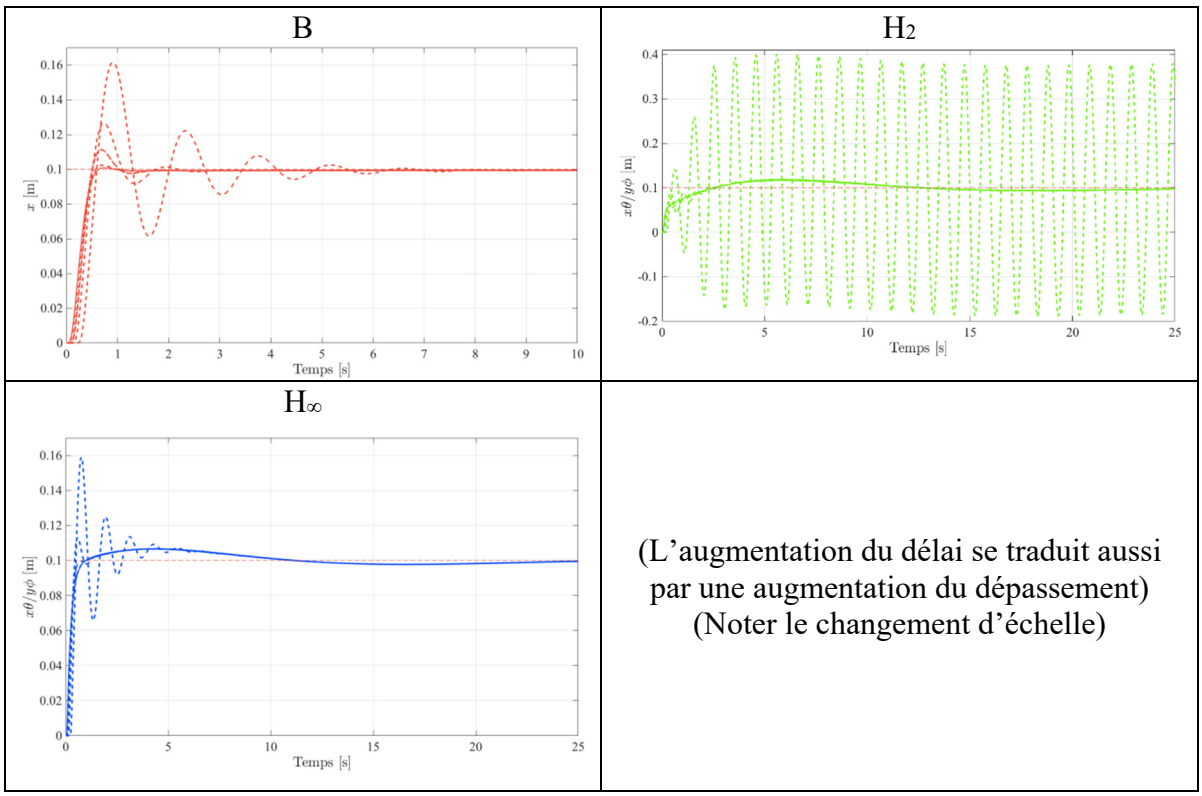


Figure 7.140 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour le processus non linéaire

2) Délais sur le retour de mesure de l'axe *z*

Lorsque le délai est ajouté sur le retour de position de l'axe z la commande H_∞ présente une bonne robustesse comme illustrée à la Figure 7.141 et au Tableau 7.41. La commande B parvient à maintenir des résultats acceptables avec l'apparition d'oscillation amortis pour un délai maximum de 200 ms. La commande H_2 voit apparaître des oscillations pures pour un délai de 200 ms, ses performances en termes de robustesse sont donc moins convaincantes.

Tableau 7.41 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ pour le processus non linéaire

Délais [ms]	B	H_2	H_∞
10	4.4398e-04	4.5235e-04	1.8334e-04
50	0.0025	0.0028	9.59e-04
100	0.0059	0.0074	0.0020
200	0.0166	2.7728e+05	0.0044

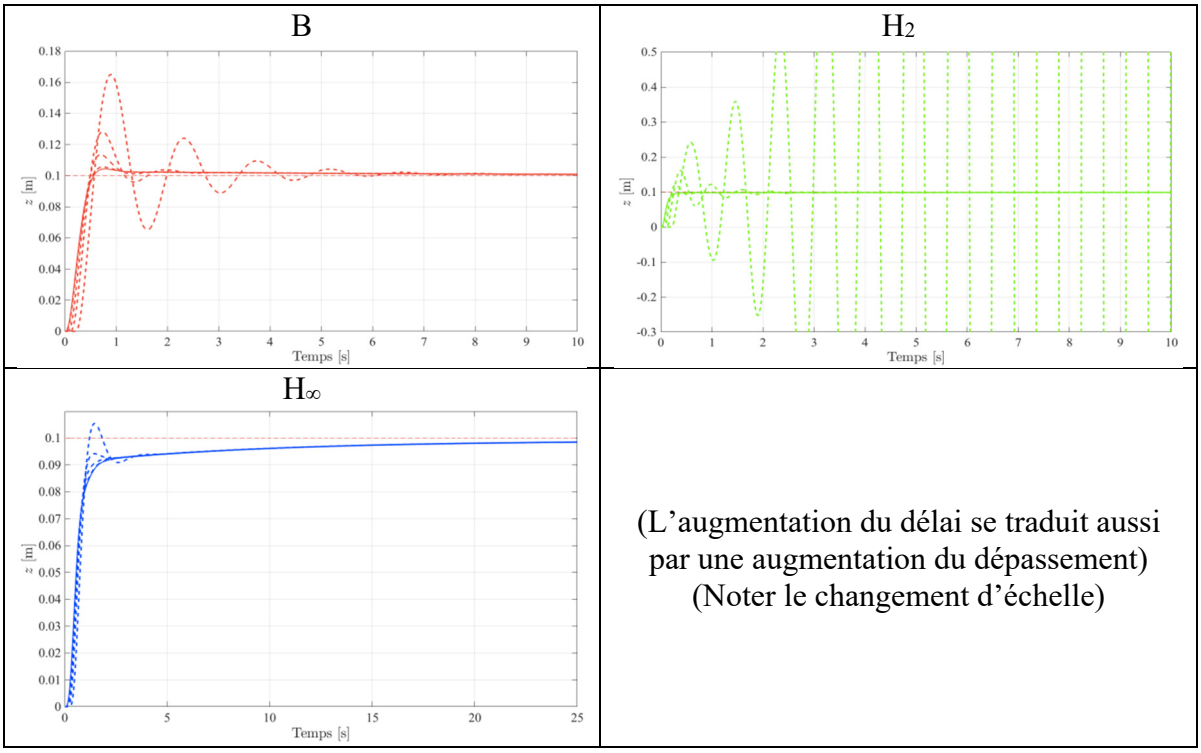


Figure 7.141 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe z et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour le processus non linéaire

3) Délais sur le retour de mesure de l'angle ψ

Les variations de la réponse temporelle avec l'ajout d'un délai sur le retour de mesure de l'angle ψ sont présentées au Tableau 7.42 et à la Figure 7.142. La commande B montre une bonne robustesse. Les commandes H_2 et H_∞ obtiennent des réponses temporelles oscillatoires amorties, la robustesse des performances est donc moins convaincante.

Tableau 7.42 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ pour le processus non linéaire

Délais [ms]	B	H_2	H_∞
1	1.7843e-04	0.0013	0.0014
5	9.3436e-04	0.0074	0.0083
10	0.0020	0.0174	0.0207
15	0.0031	0.0329	0.0454

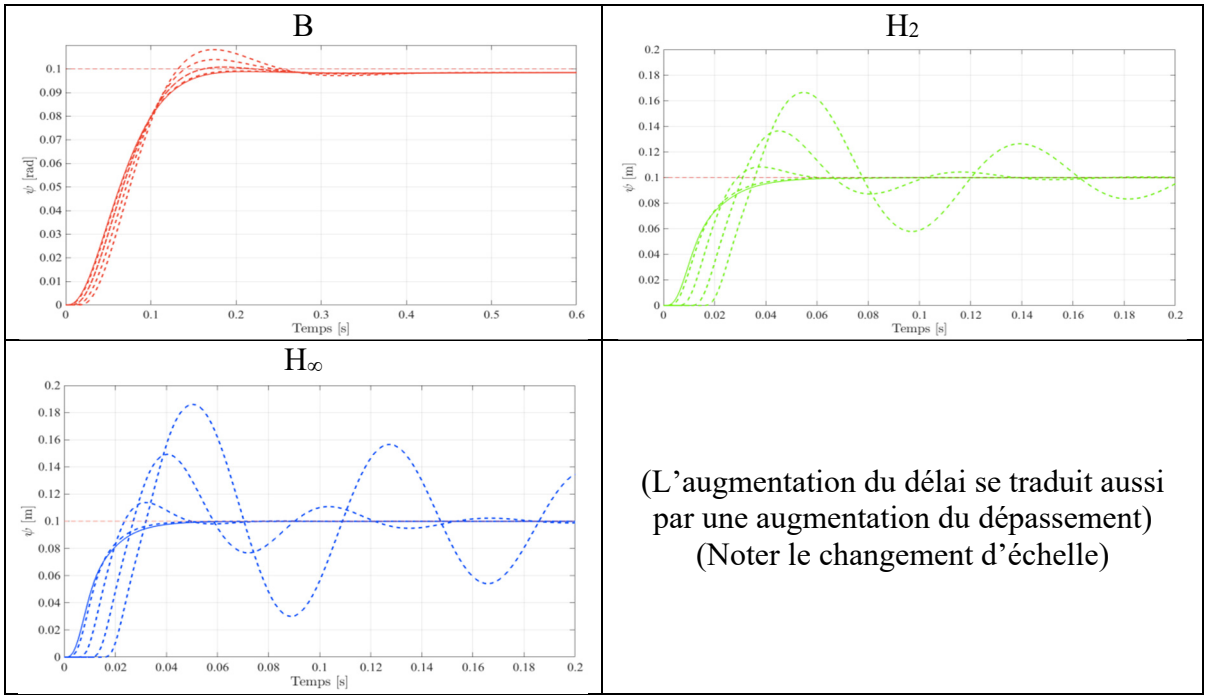


Figure 7.142 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B (rouge), H_2 (vert), H_∞ (bleu) pour le processus non linéaire

7.4.3.5 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

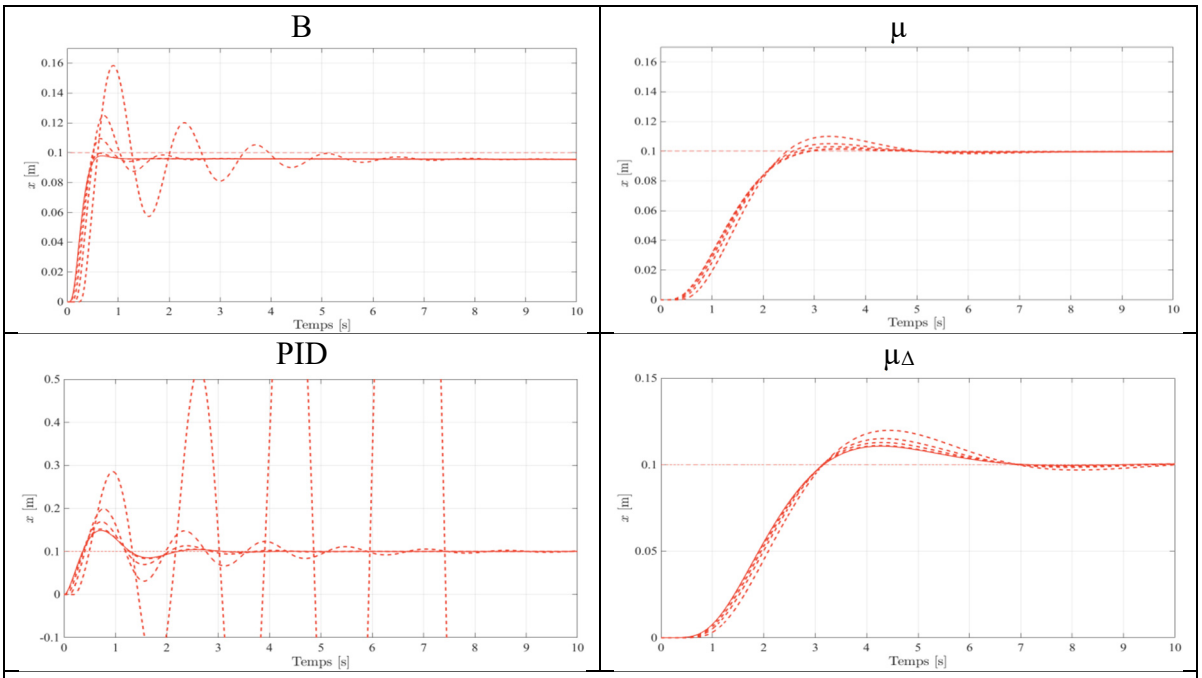
1) Délais sur le retour de mesure des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

Comme nous l'apercevons au Tableau 7.43 et à la Figure 7.143, la commande PID diverge lors de l'ajout d'un délai de mesure de 200 ms pour l'axe $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$. Les commandes μ et μ_Δ génèrent un faible écart entre la réponse unitaire nominale (trait plein) et celles avec délais

(trait en pointillé), leurs robustesses est donc plus convaincantes. L'augmentation du délai de mesure s'accompagne d'oscillations amorties sur la réponse unitaire de la commande B.

Tableau 7.43 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire

Délais [ms]	B	μ	μ_Δ	PID
10	5.0792e-04	2.1586e-04	2.4921e-04	9.3527e-04
50	0.0028	0.0011	0.0013	0.0061
100	0.0065	0.0023	0.0026	0.0201
200	0.0171	0.0049	0.0055	3.064



(L'augmentation du délai se traduit aussi par une augmentation du dépassement)
(Noter le changement d'échelle)

Figure 7.143 Réponses unitaires nominales (trait plein) sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ avec délais de mesure (trait en pointillé), pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ (processus non linéaire)

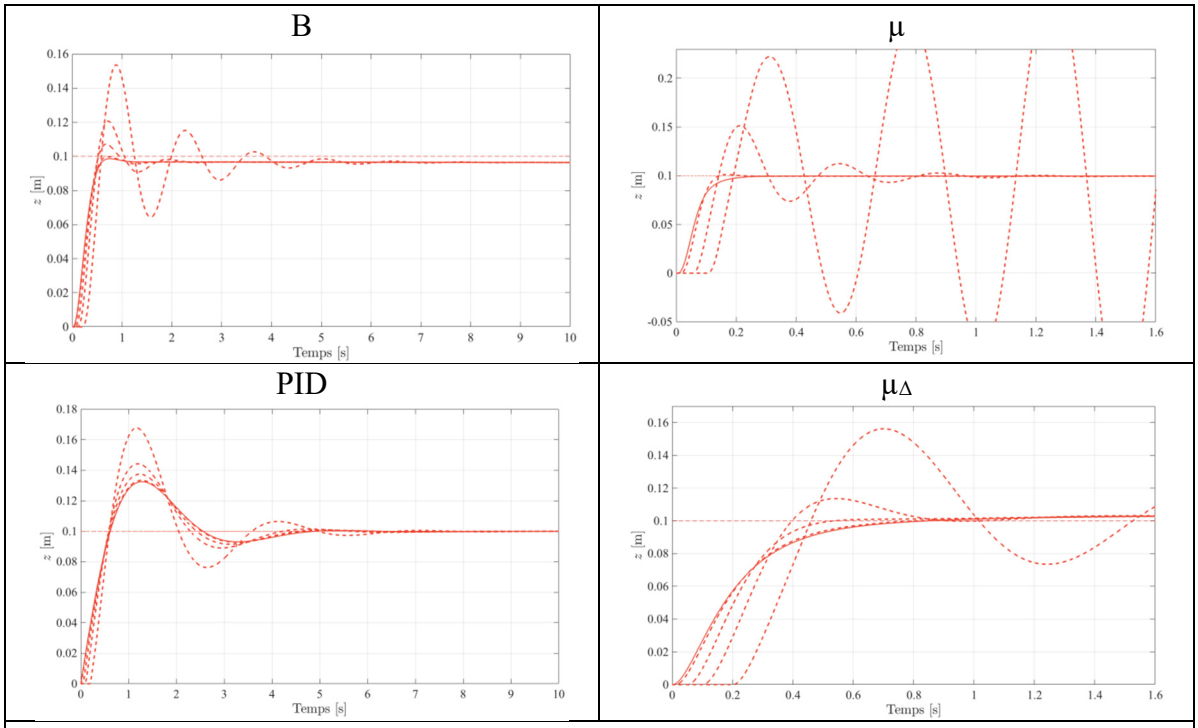
2) Délais sur le retour de mesure de l'axe *z*

Lorsqu'un délai de mesure est ajouté sur le retour de position de l'axe *z*, les commandes μ et μ_Δ voient l'apparition d'oscillations de fortes amplitudes sur leurs réponses temporelles illustrées à la Figure 7.144 et au Tableau 7.44. La robustesse des commandes B et PID est plus

convaincantes avec des oscillations des réponses temporelles mieux amorties lors de l'augmentation du délai de mesure.

Tableau 7.44 Écart type σ_z pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire

Délai [ms]	B	μ	μ_Δ	PID
10	6.0321e-04	1.4238e-03	9.5279e-04	3.9457e-04
50	0.0146	0.026	0.0054	0.0022
100	0.0165	0.1813	0.0124	0.0049
200	0.0226	∞	0.0335	0.0129



(L'augmentation du délai se traduit aussi par une augmentation du dépassement)
(Noter le changement d'échelle)

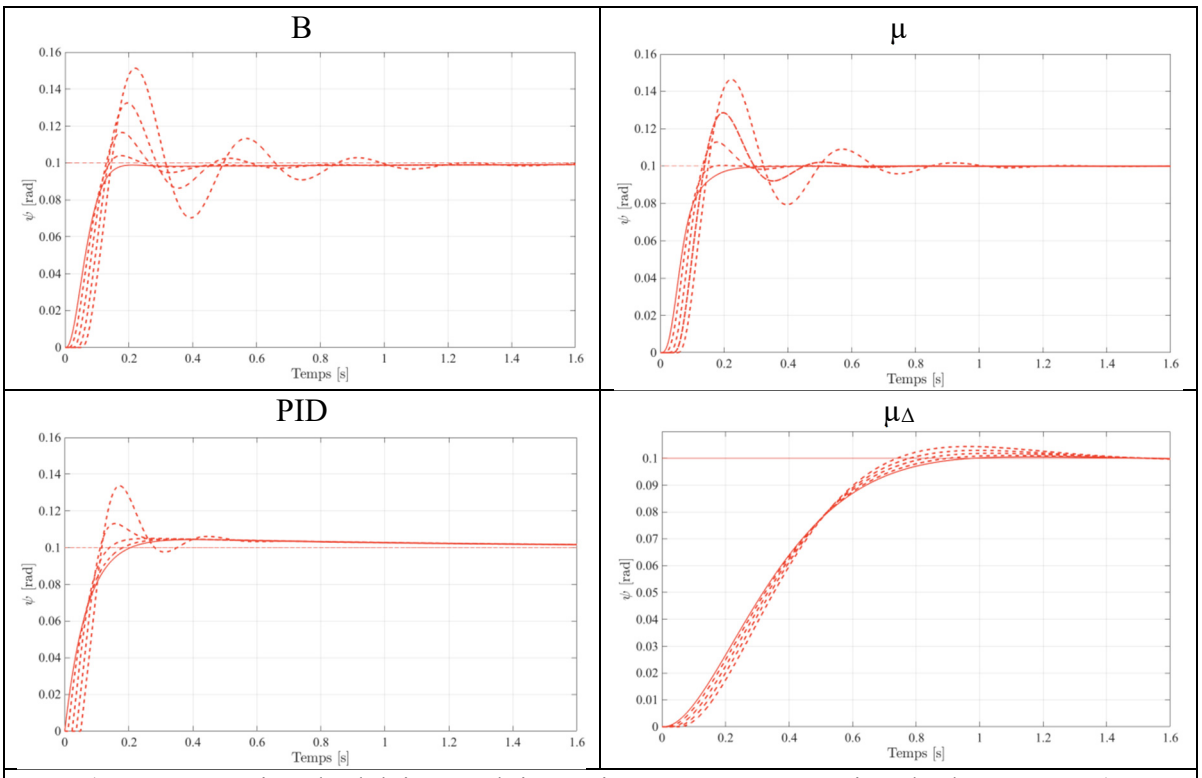
Figure 7.144 Réponses unitaires nominales en trait plein sur z et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire

3) Délais sur le retour de mesure de l'angle ψ

Comme le montrent le Tableau 7.45 et la Figure 7.145 la robustesse des commandes PID et μ_Δ est convaincante autour de l'angle ψ puisque les réponses temporelles en pointillés restent proches de la réponse nominale en trait plein malgré l'augmentation du délai de mesure.

Tableau 7.45 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ, PID sur le processus non linéaire

Délai [ms]	B	μ	μ_Δ	PID
10	0.0022	0.0023	8.1440e-04	0.0017
23	0.0059	0.0060	0.0019	0.0043
36	0.0106	0.0103	0.0031	0.0075
50	0.0174	0.0161	0.0044	0.0118



(L'augmentation du délai se traduit aussi par une augmentation du dépassement)
(Noter le changement d'échelle)

Figure 7.145 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : B, μ, PID, μ_Δ sur le processus non linéaire

7.4.3.6 Commandes backstepping et hiérarchique

Comme le montrent le Tableau 7.46, le Tableau 7.47 et le Tableau 7.48 concernant les écarts types $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$, σ_z et σ_ψ, les délais de mesure maximaux (1000 ms) utilisés dans cette partie sont plus importants que ceux utilisés dans les deux parties précédentes 7.4.3.4 et 7.4.3.5

(maximum 200 ms). Cela atteste d'une robustesse des performances plus convaincantes pour les commandes backstepping et hiérarchique relativement aux commandes B, H_2, H_∞, μ, μ_Δ et PID lors de l'ajout d'un délai de mesure sur le retour de position d'un processus non linéaire.

1) Délais sur le retour de mesure des axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$

Nous observons sur la Figure 7.146 un faible éloignement de la réponse temporelle sur l'axe $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ avec l'ajout de délai en pointillé, relativement à la réponse nominale en trait plein. Ces performances robustes sont sensiblement meilleures dans le cas de la commande backstepping comme le montrent les relevés des écarts types $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ au Tableau 7.46.

Tableau 7.46 Écart type $\sigma_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$ pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique

Délai [ms]	backstepping	hiérarchique
10	5.7160e-04	7.4508e-04
250	0.0150	0.0201
500	0.0319	0.0437
1000	0.0722	0.1058

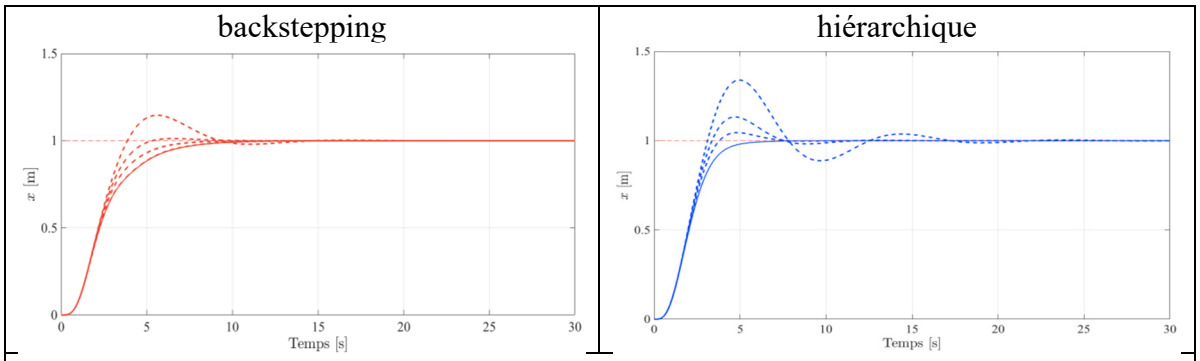


Figure 7.146 Réponses unitaires nominales en trait plein sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : backstepping (rouge), hiérarchique (bleu)

2) Délais sur le retour de mesure de l'axe z

Tel qu'illustré à la Figure7.147 et au Tableau 7.47 la commande hiérarchique voit apparaître des oscillations amorties lors de l'augmentation du délai de mesure de position à 1000 ms sur

l'axe *z*. La commande par backstepping parvient à conserver de bonnes performances robustes malgré l'augmentation du délai.

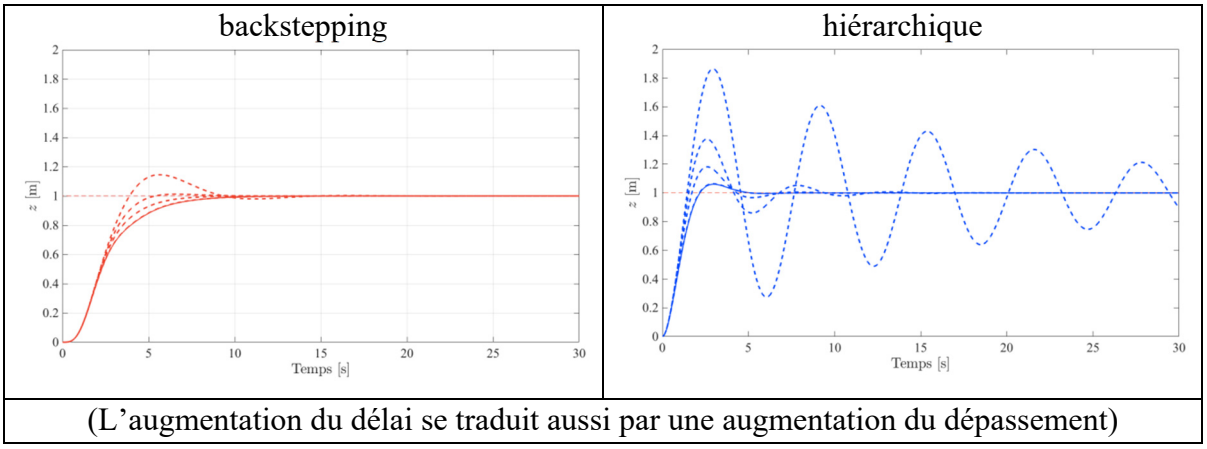


Figure 7.147 Réponses unitaires nominales en trait plein sur l'axe *z* et en pointillés avec ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : backstepping (rouge), hiérarchique (bleu)

Tableau 7.47 Écart type σ_z pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique

Délai [ms]	backstepping	hiérarchique
10	5.6907e-04	0.0011
250	0.0150	0.0326
500	0.0318	0.0796
1000	0.0722	0.3479

3) Délais sur le retour de mesure de l'angle ψ

Concernant la réponse temporelle autour de l'angle ψ illustrée au Tableau 7.48 et à la Figure 7.148, les commandes backstepping et hiérarchique présentent des oscillations amorties pour un délai de mesure maximum de 1000 ms. Étant donné que ce délai de mesure maximum est important, nous pouvons considérer que les deux commandes backstepping et hiérarchique présentent des bonnes performances en termes de robustesse.

Tableau 7.48 Écart type σ_ψ pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique

Délai [ms]	backstepping	hiérarchique
10	9.6778e-04	9.6778e-04
250	0.0270	0.0270
500	0.0629	0.0629
1000	0.2070	0.2070

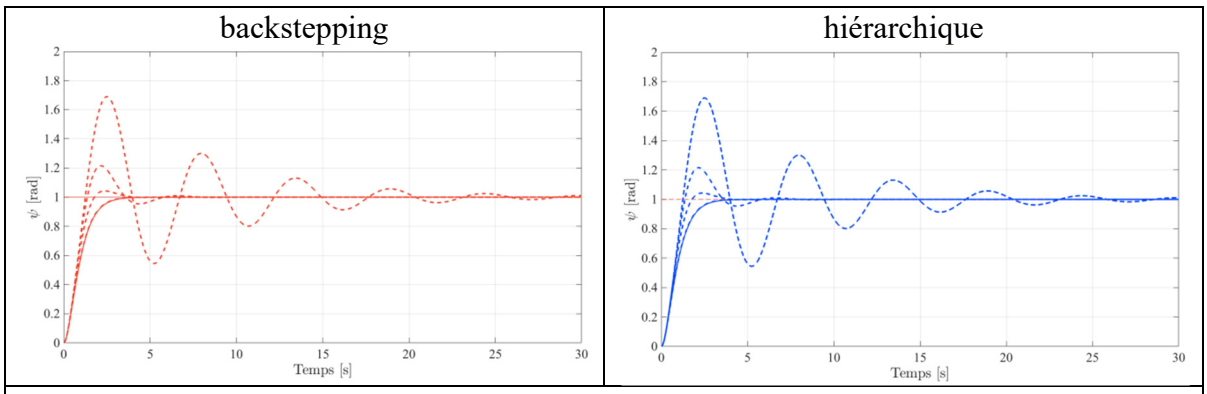


Figure 7.148 Réponses unitaires nominales en trait plein autour de l'angle ψ et en pointillés avec l'ajout de délais de mesure, pour les compensateurs : backstepping (rouge), hiérarchique (bleu)

7.4.3.7 Discussion

La robustesse des commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID sur un modèle linéaire (3.59), puis non linéaire (3.35) de drone ainsi que les commandes backstepping et hiérarchique en présence d'un délai de mesure pour chacun des retours de position sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ a été analysé au cours de cette section.

Lorsque les compensateurs B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID sont appliquées sur un modèle linéaire de drone, les commandes H_2, H_∞, μ et μ_Δ présentent une bonne robustesse vis-à-vis d'un délai de mesure sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ. La commande B obtient une robustesse moins convaincante tandis que la commande PID obtient de loin la moins bonne robustesse.

Dans le cas où le processus non linéaire est considéré, ce sont les commandes backstepping et hiérarchique qui obtiennent la meilleure robustesse. En effet, le délai de mesure maximum considéré sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ sans déstabiliser la réponse unitaire est de 1000 ms pour les commandes backstepping et hiérarchique contre 200 ms pour les commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID. On constate une forte dégradation de la robustesse vis-à-vis d'un délai de mesure pour la commande H_2 lorsqu'elle est appliquée à un modèle non linéaire de drone. De même pour les commandes H_∞, μ et μ_Δ, mais dans une moindre mesure. La commande B conserve des résultats satisfaisants en termes de robustesse pour un délai de mesure sur les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ.

Le Tableau 7.49 met en évidence (zones colorées), les résultats de cette section (du Tableau 7.34 au Tableau 7.48) des algorithmes de commande présentant le plus faible écart type par rapport à la réponse nominale à un échelon selon les axes $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ, lors de l'ajout de délais sur le retour de sortie y.

Tableau 7.49 Résumé des meilleures performances temporelles (zones colorées) pour une réponse à un échelon en présence de délais sur le retour de mesure, entre les commandes : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID appliqué sur un modèle linéaire et non linéaire de processus ; backstepping et hiérarchique appliqué à un modèle non linéaire de processus

Processus	Linéaire (7.4.3.2)			Linéaire (7.4.3.3)				Non linéaire (7.4.3.4)			Non linéaire (7.4.3.5)				Non linéaire (7.4.3.6)
Commande	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	B	H_2	H_∞	B	μ	μ_Δ	PID	backstepping hiérarchique
$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$															
z															
ψ															

7.5 Consommation d'énergie et gains

7.5.1 Conditions de test

La faible durée des batteries est un facteur limitant le temps de missions des drones et représente une contrainte importante à l'expansion de la technologie des drones. L'influence des compensateurs sur la consommation d'énergie apparaît comme un aspect important à prendre en compte lors de la conception d'une boucle de commande. Pour une entrée unitaire d'une durée de 10 s, les objectifs suivants sont visés en se référant à la Figure 7.10 :

1. Évaluer la consommation d'énergie des signaux d'erreur $e(t)$;
2. Évaluer la consommation d'énergie des signaux de commande $u(t)$;
3. Évaluer la norme H_2 du compensateur $C(s)$;
4. Évaluer la norme H_∞ du compensateur $C(s)$;
5. Évaluer la norme H_∞ des signaux de commandes $u(t)$.

7.5.1.1 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus linéaire

1) Énergie du signal d'erreur $e(t)$

L'énergie consommée par les signaux d'erreurs e_z, $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$, e_ψ en entrée des compensateurs B, H_2 et H_∞ pour les axes x, z et autour de l'angle ψ, lors d'une entrée unitaire de 10 s est reportée au Tableau 7.50. Le compensateur B est celui qui consomme le moins, puis viennent les compensateurs H_2 et H_∞.

Tableau 7.50 Énergie et maximum des signaux d'erreur e_z, $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$, e_ψ lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

	B	H_2	H_∞
$e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$	0.21	0.34	0.372
e_z	0.19	0.21	0.611
e_ψ	4.59e-2	7.1e-2	0.164

2) Énergie et maximum du signal de commande $u(t)$

Relativement aux signaux d'erreur $e(t)$ du Tableau 7.50 la consommation d'énergie des signaux de commande $u(t)$ reportée au Tableau 7.51 est importante pour les trois compensateurs. Le compensateur H_∞ consomme le moins tandis le compensateur H_2 vient juste après et le compensateur B est celui qui consomme le plus. Le maximum des signaux de commande u_{zmax}, $u_{\{x\theta\}max}$ ou $\{y\phi\}max$ et $u_{\psi max}$ sont plus faibles avec le compensateur H_∞, la commande H_2 obtient des maximas plus importants et la commande B davantage encore.

Tableau 7.51 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

Sortie	B	H_2	H_∞
$u_{\{x\theta\}}$ ou $\{y\phi\}$	5.21e5	4.7e4	1.57e4
u_z	5.46e6	5.89e6	2.2e5
u_ψ	1.16e6	4.92e5	3.14e4
$u_{\{x\theta\}max}$ ou $\{y\phi\}max$	4730	525	263
u_{zmax}	6850	6795	766
$u_{\psi max}$	6375	4375	558

3) Énergie et gain maximum des compensateurs $C(s)$

Le compensateur H_∞ est celui qui obtient une norme-2 la moins élevée et dont le gain maximum est le moins important comme le montre le Tableau 7.52. Le compensateur H_2 génère une norme-2 et un gain maximum plus important que H_∞ et la commande B davantage encore.

Tableau 7.52 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus linéaire

Sortie	B	H_2	H_∞
$\|\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}\|_2$	96.24	72.1	67.25
$\|z\|_2$	92	89.97	66.7
$\|\psi\|_2$	97.92	89.07	69.89
$\|\{x\theta\}$ ou $y\phi\|$	79.2	66.45	59.6
$\|z\|$	79.45	80.78	61.5
$\|\psi\|$	79.05	75.9	58.9

7.5.1.2 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus linéaire

1) Énergie du signal d'erreur $e(t)$

Comme le montre le Tableau 7.53, les compensateurs B et PID génèrent une consommation d'énergie des signaux d'erreurs $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}(t)$, $e_z(t)$ et $e_\psi(t)$ les plus faibles. Les commandes μ et μ_Δ génèrent une consommation d'énergie des signaux d'erreurs $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}(t)$ et $e_z(t)$ plus importante.

Tableau 7.53 Énergie et maximum des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus linéaire

Sortie	B	μ	μ_Δ	PID
$e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$	0.2108	0.8977	0.9771	0.1821
e_z	0.1941	0.5215	0.5113	0.167
e_ψ	0.0459	0.1068	0.1708	0.02127

2) Énergie et maximum du signal de commande $u(t)$

La consommation d'énergie des signaux de commande $u_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}(t)$, $u_z(t)$ et $u_\psi(t)$ ainsi que leurs maximas $u_{\{x\theta\}max \text{ ou } \{y\phi\}\ max}(t)$, $u_{zmax}(t)$, et $u_{\psi max}(t)$ sont reportés au Tableau 7.54. Les commandes μ et μ_Δ montrent une consommation d'énergie et des amplitudes maximales des signaux de commande les plus faibles tandis que, la commande B obtient pour ces grandeurs des amplitudes plus importants. La commande PID obtient des valeurs systématiquement très importantes, laissant supposer une consommation excessive et une saturation des actionneurs.

Tableau 7.54 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID

Sortie	B	μ	μ_Δ	PID
$u_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$	5.46e6	5.54e5	2.95e5	1.26e9
u_z	5.84e5	25.5	36.55	7.55e13
u_ψ	1.16e6	1.13e5	2.11e4	1.39e11
$u_{\{x\theta\}max \text{ ou } \{y\phi\}max}$	6850	1084	1179	2.78e7
u_{zmax}	3070	8.4	11	4.23e9
$u_{\psi max}$	6370	1315	551	1.06e8

3) Énergie et gain maximum des compensateurs $C(s)$

Les compensateurs μ et μ_Δ montrent une consommation d'énergie ainsi qu'un maximum de gains les plus faibles comme le montre Tableau 7.55. La commande B obtient des résultats sensiblement pour ces grandeurs. La commande par PID est en surconsommation et en saturation à cause des gains proportionnels et intégraux dont on pourrait éventuellement limiter l'effet avec des filtres passe-bas et/ou passe-haut.

Tableau 7.55 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs B, μ, μ_Δ et PID

Sortie	B	μ	μ_Δ	PID
$\|x$ ou $y\|_2$	31	2.5	8	∞
$\|z\|_2$	92	71	73	∞
$\|\theta$ ou $\phi\|_2$	78	39	37	∞
$\|\psi\|_2$	98	79	72	∞
$\|x$ ou $y\|$	16	-4.6	-0.06	∞
$\|z\|$	79	64	64	∞
$\|\theta$ ou $\phi\|$	60	31	28	∞
$\|\psi\|$	79	66	56	∞

7.5.1.3 Commandes B, H_2, H_∞ appliquées au processus non linéaire

1) Énergie du signal d'erreur $e(t)$

Le Tableau 7.56 montre des faibles consommations d'énergie pour les signaux d'erreurs $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}(t)$, $e_z(t)$ et $e_\psi(t)$ en entrée des trois commandes B, H_2 et H_∞.

Tableau 7.56 Énergie des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

	B	H_2	H_∞
$e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$	2.072e-3	3.62e-3	1.76e-3
e_z	1.94e-3	0.80e-3	4.48-3
e_ψ	0.49e-3	0.11e-3	8.78e-5

2) Énergie et maximum des signaux de commande *L, M, N* et T_z

Comme le montre le Tableau 7.57, les énergies des signaux de commandes *L, M, N* ainsi que leurs maximums L_{max}, M_{max}, N_{max} sont plus faibles dans le cas de la commande B, les commandes H_∞ puis H_2 obtiennent des grandeurs plus élevées. Dans le cas du signal de commande en poussée T_z, c'est la commande H_∞ qui obtient une consommation d'énergie et une amplitude du signal la plus faible, la commande B obtenant des résultats plus grands. La commande H_2 génère pour ces mêmes variables des résultats plus importants.

Tableau 7.57 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

	B	H_2	H_∞
L ou *M*	0.04987	28.12	4.756
N	1.08e-3	0.174	0.3138
T_z	3.511	80.26	0.5131
L_{max} ou M_{max}	1.22	24.5	10
N_{max}	0.2	5.56	8.25
T_{zmax}	27	62.7	22.84

3) Énergie et gain maximum des compensateurs *C*(*s*)

L'énergie consommée et le maximum des gains dans les compensateurs B, H_2 et H_∞ sont reportés au Tableau 7.58. On remarque que la commande B obtient une consommation d'énergie bien plus faible sur $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et ψ relativement aux commandes H_2 et H_∞. Sur l'axe *z* c'est la commande H_∞ qui consomme le moins d'énergie tandis que la consommation de la commande B est sensiblement plus grande et celle de la commande H_2 est bien plus importante.

La commande B obtient les plus faibles gains maximums pour les compensateurs sur $\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$ et ψ. Alors que les commandes H_2 et H_∞ obtiennent des résultats semblables et sensiblement plus élevés relativement à la commande B. Sur l'axe *z* c'est la commande H_∞ qui obtient le gain maximum le plus faible, vient ensuite les commandes B et H_2.

Tableau 7.58 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs : B, H_2, H_∞ sur le processus non linéaire

	B	H_2	H_∞
$\|\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}\|_2$	167	3781	1409
$\|z\|_2$	319	3121	42.23
$\|\psi\|_2$	24	1225	2013
$\|\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}\|$	27.4	59	51.5
$\|z\|$	37.5	57.3	28.1
$\|\psi\|$	8.8	40.7	43.8

7.5.1.4 Commandes B, μ, μ_Δ, PID appliquées au processus non linéaire

1) Énergie du signal d'erreur *e*(*t*)

Tel que le montre le Tableau 7.59 la consommation des signaux d'erreurs $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}(t)$, $e_z(t)$ et $e_\psi(t)$ en entrée des quatre compensateurs B, μ, μ_Δ et PID est faible.

Tableau 7.59 Énergie et maximum des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire

Sortie	B	μ	μ_Δ	PID
$e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$	2.3e-3	1.02e-2	1.57e-3	2.67e-3
e_z	2.07e-3	4.7e-4	1.30e-3	2.76e-3
e_ψ	4.9e-4	5.21e-4	2.37e-3	3.28e-4

2) Énergie des signaux de commande *L, M, N* et T_z

En se référant au Tableau 7.60, la consommation d'énergie des signaux *L, M, N* ainsi que leurs maximums L_{max}, M_{max}, N_{max} est plus faible dans le cas des commandes μ et μ_Δ ; la commande B présente des résultats plus importants.

La consommation du signal de commande en poussée T_z ainsi que son maximum sont les plus faibles dans le cas de la commande B. La commande PID obtient les valeurs les plus élevées, quel que soit le signal de commande considéré.

Tableau 7.60 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire

Sortie	B	μ	μ_Δ	PID
L ou M	3.87e-3	8.67e-7	3.2e-8	3.2e9
N	1.08e-3	1.32e-3	7.95e-6	66.69
T_z	3.46	302.9	168.2	336
L_{max} ou M_{max}	0.8	3.1e-3	2.1e-4	2.6e7
N_{max}	0.2	0.2	1e-02	2300
T_{zmax}	5.5	103	450	1.5e4

3) Énergie et gain maximum des compensateurs $C(s)$

Comme le montre le Tableau 7.61 la consommation d'énergie ainsi que le maximum du gain des compensateurs B, μ, μ_Δ sont du même ordre de grandeur. Le compensateur PID montre une consommation excessive ainsi qu'une saturation des actionneurs.

Tableau 7.61 Norme 2 et ∞ pour les compensateurs : B, μ, μ_Δ et PID sur le processus non linéaire

Sortie	B	μ	μ_Δ	PID
$\|x$ ou $y\|_2$	50.08	80.62	∞	∞
$\|z\|_2$	31.5	11.26	15.54	∞
$\|\phi$ ou $\theta\|_2$	26.6	21.02	9.5	∞
$\|\psi\|_2$	27.65	25.01	1.2	∞
$\|x$ ou $y\|$	37.5	64.19	73.27	∞
$\|z\|$	16.2	15.53	17.93	∞
$\|\phi$ ou $\theta\|$	8.36	7.24	23.19	∞
$\|\psi\|$	8.79	10.86	19.06	∞

7.5.1.5 Commandes backstepping et hiérarchique

1) Énergie du signal d'erreur $e(t)$

Les consommations d'énergie des signaux d'erreur $e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}(t)$, $e_z(t)$ et $e_\psi(t)$ en sortie des compensateurs backstepping et hiérarchique, reportées au Tableau 7.62, sont sensiblement identiques et faibles pour les deux commandes.

Tableau 7.62 Énergie et maximum des signaux d'erreur lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique

	backstepping	hiérarchique
$e_{\{x\theta\} \text{ ou } \{y\phi\}}$	0.0186	0.0183
e_z	18.6e-3	8.17e-3
e_ψ	6.25e-3	6.15e-3

2) Énergie et maximum des signaux de commande *L, M, N* et T_z

Comme le montre le Tableau 7.63 les consommations d'énergie des signaux des commandes *L, M, N,* T_z ainsi que leurs maximas L_{max}, M_{max}, N_{max}, T_{zmax} sont sensiblement identiques entre les commandes backstepping et hiérarchique.

Tableau 7.63 Énergie et maximum des signaux de commande lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs : backstepping et hiérarchique

Sortie	backstepping	hiérarchique
L ou *M*	1.07e-8	1.69e-8
N	3.89e-5	3.89e-5
T_z	4616	4619
L_{max} ou M_{max}	8.3e-5	1.3e-4
N_{max}	3.88e-7	3.88e-7
T_{zmax}	21.8	21.95

7.5.1.6 Discussion

Cette partie avait pour objectifs d'évaluer la performance en termes de consommation d'énergie et en gain des algorithmes de commande : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique. Ainsi plusieurs études ont été réalisées le long des axes $\{x\theta\}$, $\{y\phi\}$, *z* et autour de l'angle ψ : énergie des signaux d'erreurs de position ; énergie des signaux de commandes ; maximum des signaux de commandes pour éviter la saturation des actionneurs ; énergie des compensateurs ; gain maximum des compensateurs.

On constate pour l'ensemble des commandes linéaires et non linéaire, que l'énergie des signaux d'erreurs de position sur les axes $\{x\theta\}$, $\{y\phi\}$, z et autour de l'angle ψ sont très faibles, relativement à l'énergie des signaux de commandes u_x, u_y, u_z, u_ψ (compensateurs linéaires) ou L, M, N, T_z (compensateurs non linéaires).

Concernant les commandes linéaires, la minimisation du maximum des signaux d'erreurs et de commandes, ainsi que des norme-2 et ∞ des compensateurs sur les axes x, y, z et autour des angles ϕ, θ, ψ est la mieux réalisée par les compensateurs μ et μ_Δ. Ensuite, la commande H_∞ obtient de bonnes performances concernant ces résultats et la commande H_2 est moins convaincante. La minimisation de l'énergie, du gain des signaux de commandes et des compensateurs semblent être généralement à la limite du réalisable avec la commande B. On note cependant une amélioration lors du découplage de la structure de commande en système de translation et rotation séparée (3.5.2) (3.5.4) avec une diminution de ces valeurs relativement à la structure de commande en cascade (3.5.1) (3.5.3). La commande PID quant à elle est systématique en surconsommation et en saturation.

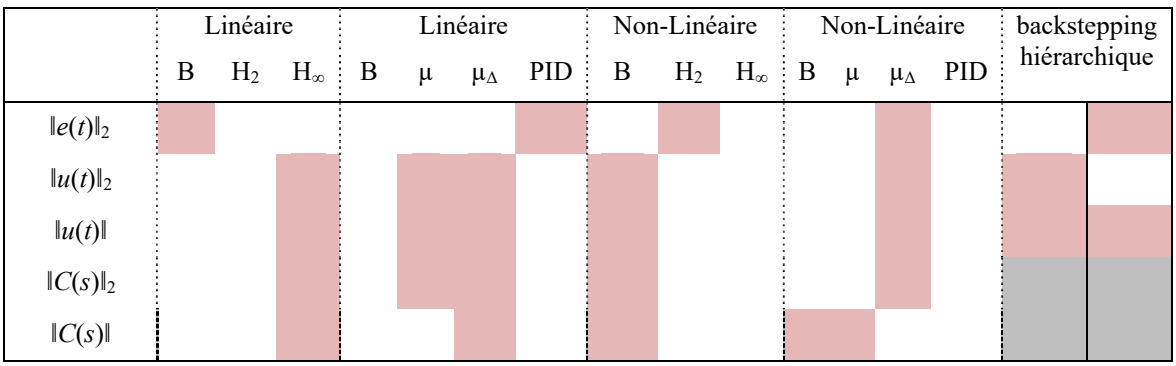
Concernant les signaux de commande L, M, N, T_z dans le cas d'une modélisation non linéaire du processus, nous constatons des bonnes performances de la commande B pour minimiser l'énergie et le maximum de ces signaux sur les axes x, y, z et autour de l'angle ψ. Les commandes μ, μ_Δ, backstepping et hiérarchique obtiennent pour ces minimisations des résultats similaires exceptés concernant l'axe z ou les résultats sont moins convaincants. La minimisation de l'énergie et du maximum des signaux de commande L, M, N, T_z sur les axes x, y, z et autour de l'angle ψ est moins convaincante avec les commandes H_2 et H_∞ tandis que, la commande PID est systématiquement en surconsommation.

L'énergie consommée dans les compensateurs μ et μ_Δ puis B avec la structure de commande en translation/rotation séparée (3.5.2) (3.5.4) est généralement la plus faible sur les axes x, y, z et autour de l'angle ψ. La commande H_∞ est moins convaincante notamment sur l'axe z et autour de l'angle ψ. La commande H_2 montre une forte consommation d'énergie pour l'ensemble des axes/angles et la commande PID davantage encore.

Le gain maximum des compensateurs est généralement plus faible sur les axes *x, y, z* et autour de l'angle ψ pour les commandes B (avec la structure de commande en translation/rotation séparée (3.5.2) (3.5.4)), μ puis μ_Δ, ce qui ce qui suggère une probabilité moindre de saturer les actionneurs. Les commandes B (avec la structure de commande en translation/rotation en cascade (3.5.1) (3.5.3)) et H_∞ obtiennent globalement des gains sur les axes *x, y, z* et autour de l'angle ψ sensiblement plus élevé et sont plus susceptibles de saturer les actionneurs. La commande PID obtient des gains importants et est systématiquement en saturation.

Les résultats de cette section (à partir des Tableau 7.50 à Tableau 7.63), sont mises en évidence dans le Tableau 7.64 (zones colorées pour les plus convaincants) concernant l'énergie des signaux d'erreurs $e(t)$, de commande $u(t)$, des compensateurs $C(s)$ ainsi que le gain maximum des signaux de commande $u(t)$ (u_x, u_y, u_z, u_ψ dans le cas du processus linéaire et *L, M, N,* T_z dans le cas du processus non linéaire) et des compensateurs $C(s)$ pour l'ensemble des algorithmes de commande, soit : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique. Notons que les cases colorées en gris correspondent à l'impossibilité d'évaluer les normes 2 et ∞ des commandes par backstepping et hiérarchique. En effet, l'obtention des normes 2 et ∞ se fait à partir du diagramme de Bode du compensateur qui n'est pas accessible dans le cas d'algorithme de commande non linéaire tel que les commandes backstepping et hiérarchique.

Tableau 7.64 Résumé des meilleures performances (zones colorées) concernant l'énergie des signaux d'erreurs $\|e(t)\|_2$, de commande $\|u(t)\|_2$, des compensateurs $\|C(s)\|_2$ ainsi que le gain maximum des signaux de commande $\|u(t)\|$ et des compensateurs $\|C(s)\|$ pour l'ensemble des algorithmes de commande, soit : B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID, backstepping et hiérarchique



7.6 Extension : Conception de la commande B avec limitation de l'amplitude du signal de commande

Nous avons vu dans les sections 7.3 et 7.4 que la commande B appliquée à un modèle linéaire de drone présente la réponse temporelle généralement la plus rapide. Néanmoins, les amplitudes des signaux de commande $u(t)$ qui en découlent risquent d'être sensiblement trop importantes et peuvent mener à une moins bonne robustesse moins satisfaisante.

Une conception du compensateur B tenant compte du signal de commande $u(t)$ limité que l'on nommera la commande B_u est proposée dans cette partie selon les trois étapes suivantes : tout d'abord, une présentation succincte de l'utilisation du logiciel GeoGebra inspiré de (Benkhellat, 2017), a permis d'obtenir les paramètres des nouveaux compensateurs B_u dans les directions x ou y et z, pour le modèle linéaire de drone avec les boucles de commande de rotation (plus rapide) et de translation (plus lente) en cascade décrite en 3.5.1 ; Ensuite, nous comparerons les performances obtenues, entre le nouveau compensateur B_u et l'ancien compensateur B le long des axes x et y pour les fonctions de sensibilité $S_{ru}(s)$ et $S_{ey}(s)$, la transmission $T(s)$ et la réponse unitaire sur la sortie $y(t)$; Enfin, nous comparerons les résultats obtenus la commande B_u à ceux obtenus à la section 7.4.2.2 concernant les commandes B, H_2 et H_∞.

7.6.1 Utilisation d'une méthode graphique pour la conception du compensateur B

Une solution permettant de réduire l'amplitude des signaux de commande, tout en conservant de bonnes performances temporelles est proposé dans (Benkhellat, 2017). Une explication succincte de cette méthode utilisant le logiciel de géométrie GeoGebra, peut se faire en s'appuyant sur la Figure 7.149.

Sur la partie de gauche se trouve l'ancienne (en rouge) et la nouvelle (en verte) boucle ouverte $J(s)$ pour la commande B appliquée sur les axes x ou y du modèle linéaire avec les systèmes de translation et rotation en cascade du drone décrit en 3.5.1. Le cercle de sensibilité $S_{ey}(s)$

dessiné en bleu permet de limiter le maximum de la sensibilité et d'influencer l'amplitude du signal de commande $u(t)$. Remarquons que le gain de la courbe verte tend plus rapidement vers zéro que la courbe rouge, tout en ayant un gain en basse fréquence plus important.

Sur la partie de droite nous retrouvons dans le cas de l'ancien compensateur B (dont la boucle ouverte correspondante est représentée en rouge sur la section de gauche de cette figure) l'allure de la sensibilité $S_{ey}(s)$ (en jaune) et de la transmission $T(s)$ (en verte foncée), puis, en vert clair la valeur de ε permettant de limiter la valeur de la sensibilité en basse fréquence et en rouge la limitation du maximum M_s de la sensibilité. Finalement, la courbe noire indique l'allure du transfert de la commande $U(s)$ dont le maximum peut être limité et pris en compte dans l'obtention du compensateur B. Notons que dans ce cas le maximum est plus élevé que dans le cas qui va suivre à la Figure 7.150.

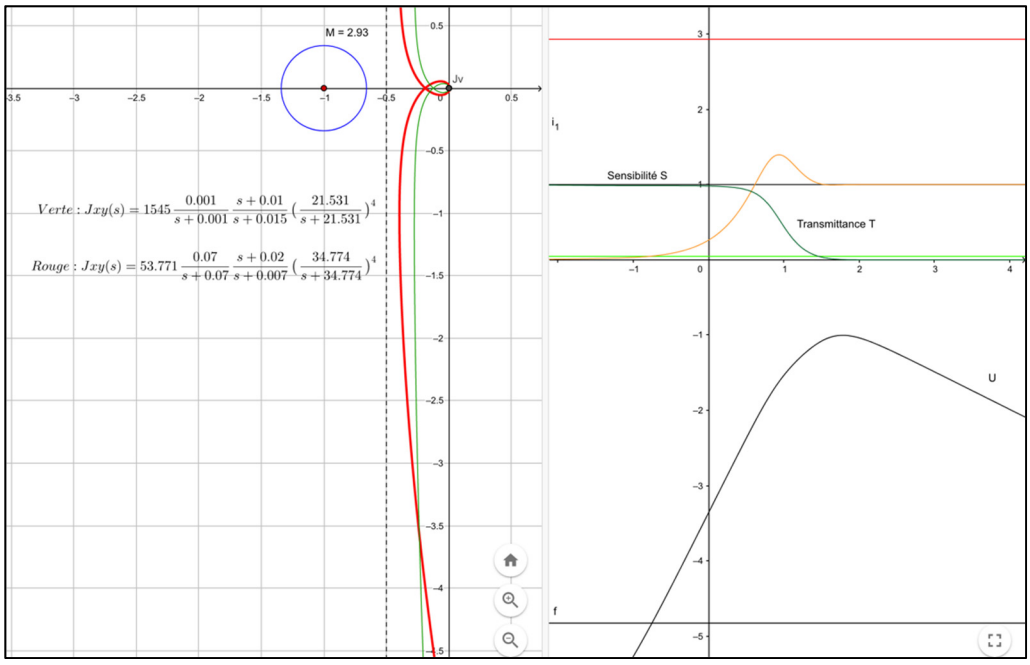


Figure 7.149 Conception de la commande B pour des axes x et y avec GeoGébra avec sur la partie de gauche : commande B (rouge) ; commande B_u (vert) ; Cercle de sensibilité $S_{ey}(s)$ (bleu). À droite pour le compensateur B uniquement : Sensibilité $S_{ey}(s)$ (jaune) ; Transmittance $T(s)$ (verte foncée) ; ε (vert clair) ; M_s (rouge) ; $U(s)$ (noir)

Tout comme pour la Figure 7.149, la partie de gauche de la Figure 7.150 illustre les boucles ouvertes $J(s)$ en rouge pour le compensateur B et en vert pour le compensateur B_u, appliquée sur les axes x ou y du modèle linéaire avec les systèmes de translation et rotation en cascade du drone décrit en 3.5.1. La différence apparaît sur la partie de droite qui désormais correspond au réglage du compensateur B_u. Nous constatons une diminution du maximum de la sensibilité (courbe jaune) et une réduction du maximum du signal de commande $U(s)$ (courbe noire)

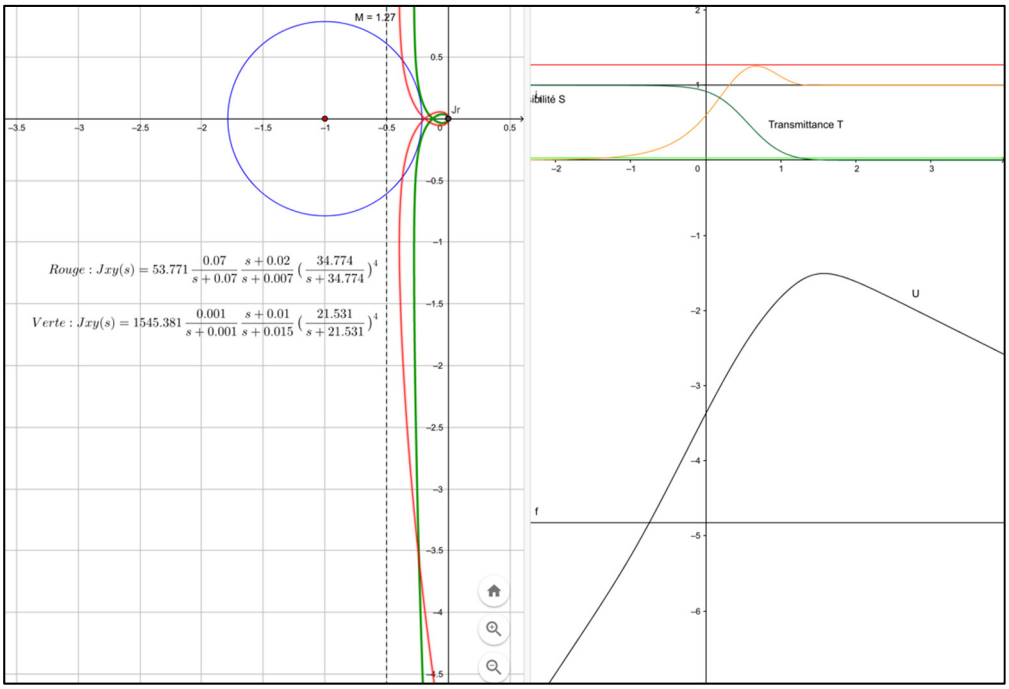


Figure 7.150 Conception de la commande B pour des axes x et y avec GeoGebra avec sur la partie de gauche : la commande B (rouge) ; la commande B_u (vert) ; Cercle de sensibilité $S_{ey}(s)$ (bleu). À droite pour le compensateur B_u uniquement : Sensibilité $S_{ey}(s)$ (jaune) ; Transmittance $T(s)$ (verte foncée) ; ε (vert clair) ; M_s (rouge) ; $U(s)$ (noir)

Remarquons pour la commande B illustrée en rouge à la Figure 7.149, que le maximum M_s (cercle bleu sur la partie gauche de la figure et trait rouge sur la partie de droite) associé est plus élevé comparativement à la valeur obtenue avec la commande B_u à la Figure 7.150, traduisant ainsi une nervosité (bien qu'acceptable) et des signaux de commande sensiblement

plus élevés de la part de la commande B par rapport à la commande B_u. Le Tableau 7.65 montre les valeurs des paramètres obtenues pour les compensateurs B et B_u sur les axes x ou y et z.

Tableau 7.65 Valeurs obtenues pour les compensateurs B et B_u sur les axes x ou y et z

		k_{1i}	ω_{1i}	ω_{2i}	z_{1i}	p_{1i}	k_i
B	$C_x = C_y$	53	0.07	34	0.02	0.08	4
B_u	$C_x = C_y$	1540	0.001	20.33	0.01	0.015	4
B	C_z	38	0.1	18	0.1	0.015	2
B_u	C_z	51	0.1	34.13	0.14	0.015	2

7.6.2 Comparaison entre l'ancien et le nouveau compensateur B pour le modèle linéaire de drone en cascade sur *x* ou *y* décrit en 3.5.1.

Interprétons les résultats obtenus lorsque l'ancien compensateur B et le nouveau compensateur B_u conçus le long des axes x ou y et dont les paramètres sont reportés au Tableau 7.65, sont appliqués au modèle linéaire de drone avec boucle de commande en cascade décrite en 3.5.1. En se référant à la Figure 7.1, l'équation (7.7) définit la sensibilité $S_{ru}(s)$, soit le rapport entre la commande de référence $r(t)$ et le signal de commande $u(t)$:

$$S_{ru}(s) = C(s)\big(1 + P(s)C(s)\big)^{-1} \tag{7.7}$$

La Figure 7.151 illustre pour les axes x ou y l'allure de la sensibilité $S_{ru}(s)$ du compensateur B (rouge) et du compensateur B_u (bleu). Nous observons une diminution à 58 dB du maximum de la sensibilité $S_{ru}(s)$ contre 79.2 dB auparavant. La fréquence de ce maximum est également diminuée puisqu'elle passe de 55.4 rads/s à 37.5 rads/s.

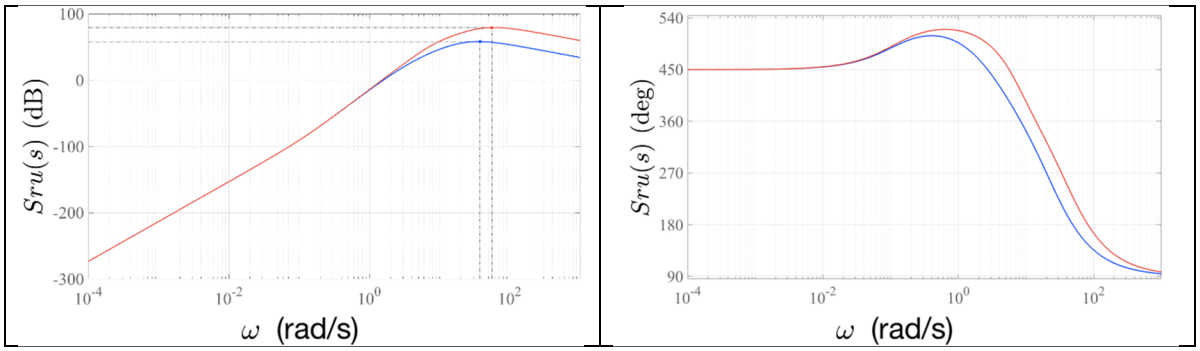


Figure 7.151 Allures de la sensibilité $S_{ru}(s)$ sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu). À gauche l'amplitude et à droite la phase

L'allure de la sensibilité $S_{ey}(s)$ pour les axes x ou y du compensateur B (rouge) et du compensateur B_u (bleu) est illustrée à la Figure 7.152. On remarque une diminution du minimum de la sensibilité passant de -46.6 dB à -60.1 dB entre l'ancien et le nouveau compensateur B. De même le maximum M_s passe de 2.93 dB à 2.03 dB pour des fréquences respectives de 8.75 rads/s et 4.36 rads/s.

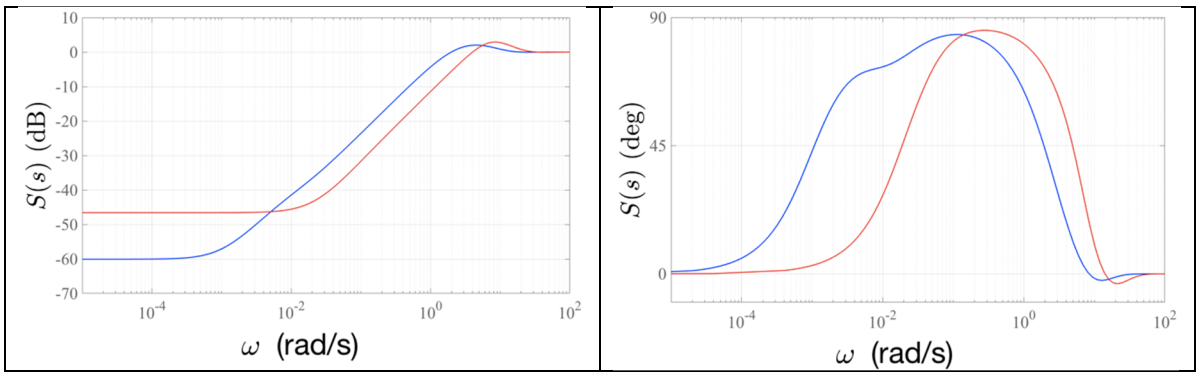


Figure 7.152 Allures de la sensibilité $S_{ey}(s)$ sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu). À gauche l'amplitude et à droite la phase

L'allure de la transmission $T(s)$ pour les axes x ou y du compensateur B (rouge) et du compensateur B_u (bleu) est illustrée à la Figure 7.152. Nous constatons une diminution de la bande passante en boucle fermée de 6.5 rads/s à 2.2 rads/s.

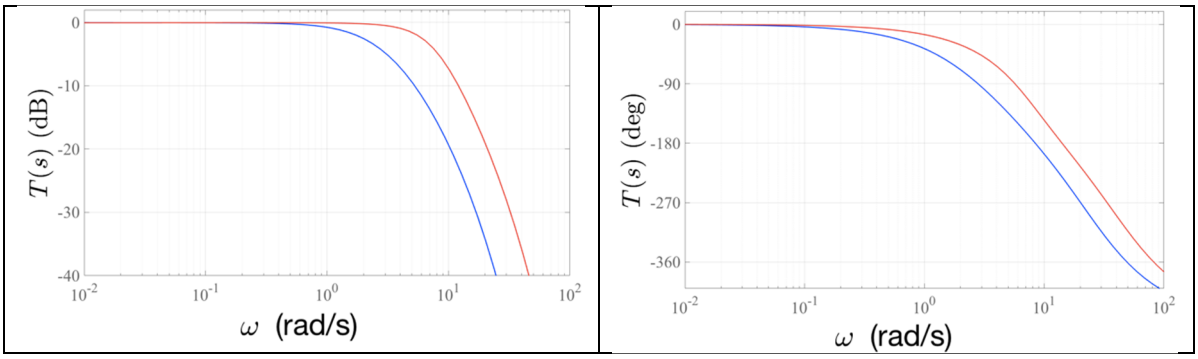


Figure 7.153 Transmissions $T(s)$ sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu). À gauche l'amplitude et à droite la phase

La réponse temporelle pour un échelon unitaire sur x ou y est illustrée à la Figure 7.154 pour les compensateurs B (rouge) et B_u (bleu). Comme le confirme également le Tableau 7.66 les temps d'établissements $t_{s2\%}$, $t_{s5\%}$ et $t_{r\%}$ sont sensiblement plus lents (1,5 à 2,43 fois) dans le cas du compensateur B_u. Cependant, aucun dépassement n'est constaté avec le compensateur B_u, ce qui laisse présager une moins grande nervosité relativement à la commande B conçue précédemment. À titre indicatif, le Tableau 7.66 reporte également les résultats du Tableau 7.7 concernant les compensateurs H_2 et H_∞.

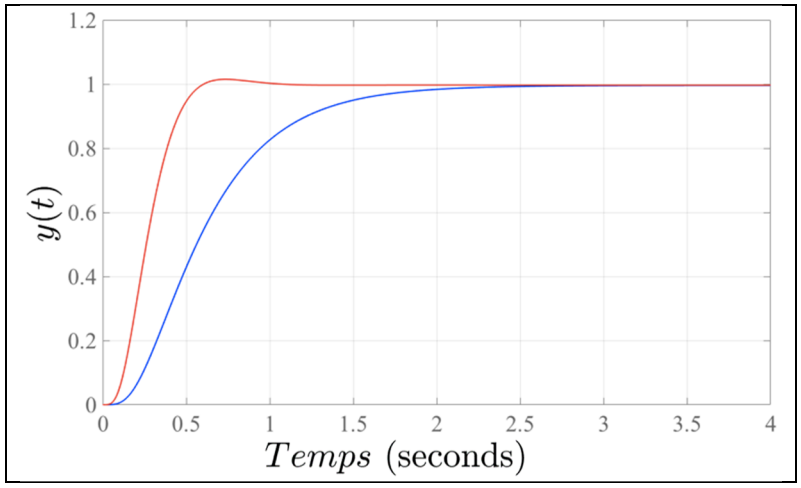


Figure 7.154 Réponses à un échelon sur x ou y pour le compensateur B (rouge) et le compensateur B_u (bleu)

Les performances temporelles obtenues le long de l'axe *z* sont reportées au Tableau 7.66. Les remarques faites pour *x* ou *y* au paragraphe précédent sont également valables pour l'axe *z*.

Tableau 7.66 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2, H_∞ et B_u sur le modèle linéaire du drone 3.5.1

Sortie		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z
$t_{s2\%}$ [s]	B	0.75	0.52
	H_2	1.24	0.71
	H_∞	11.6	2.63
	B_u	1.82	2.07
$t_{s5\%}$ [s]	B	0.5	0.57
	H_2	1.01	0.92
	H_∞	0.98	2.02
	B_u	1.5	1.67
$t_{r\%}$ [s]	B	0.42	0.41
	H_2	0.61	0.86
	H_∞	1.75	0.8
	B_u	1.32	1.36
e_{ss} [%]	B	0	0
	H_2	0	0
	H_∞	2	0
	H_2	0	0

Tableau 7.66 Performances temporelles lors d'une entrée unitaire pour les compensateurs B, H_2, H_∞ et B_u sur le modèle linéaire du drone 3.5.1 (suite)

Sortie		$\{x\theta\}$ ou $\{y\phi\}$	z
D [%]	B	2	1
	H_2	0	0

	H_∞	4	0
	B_u	0	0

7.6.3 Comparaison avec les résultats obtenus en 7.4.1 pour un vol stationnaire

Cette partie reprend les conditions de test de vol stationnaire en présence de perturbation sur la sortie tel que décrit en 7.4.1.1. À des fins de comparaison les résultats concernant les commandes B, H_2 et H_∞ y sont reportées, avec l'ajout de ceux obtenus avec la commande B_u. Pour une DSP de 0.075 m^2/Hz insérée sur les sorties *x, y, z* lors d'un vol stationnaire nous observons à la Figure 7.155 et à la Figure 7.156 ainsi qu'au Tableau 7.67, que la commande B_u est la plus robuste puisque ses variations sur *x, y, z* sont les plus faibles, puis viennent les commandes H_∞, H_2 et B.

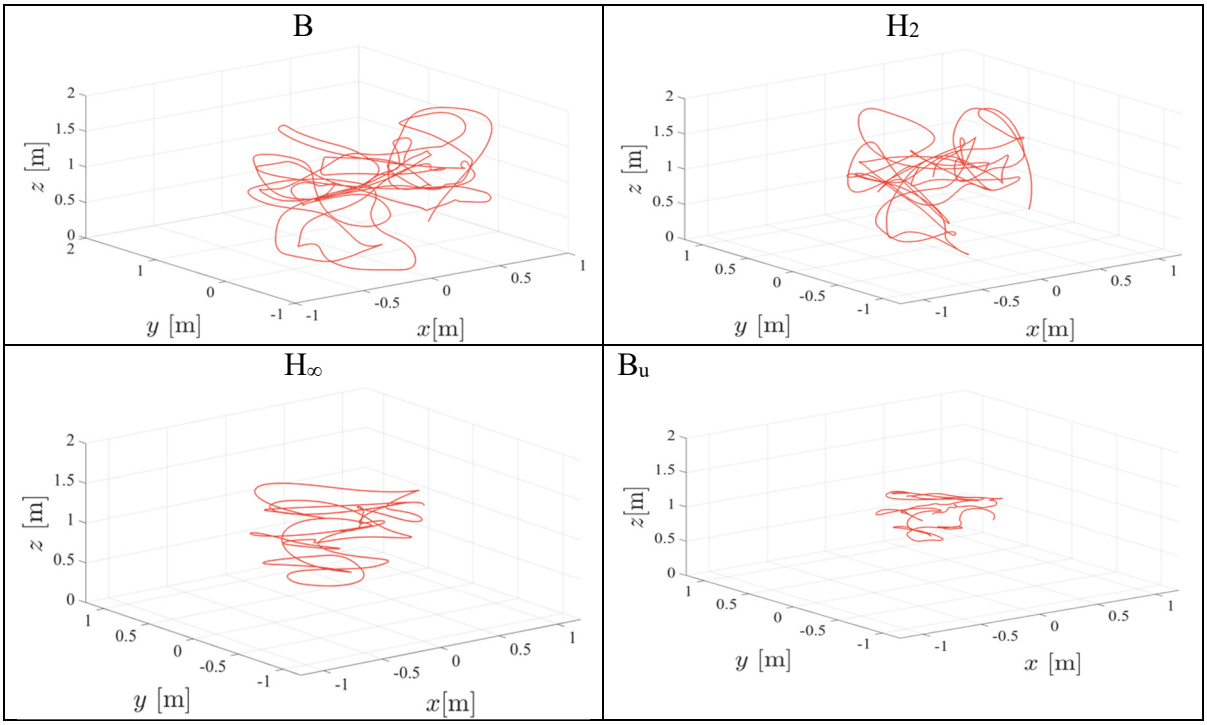


Figure 7.155 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de vent pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone

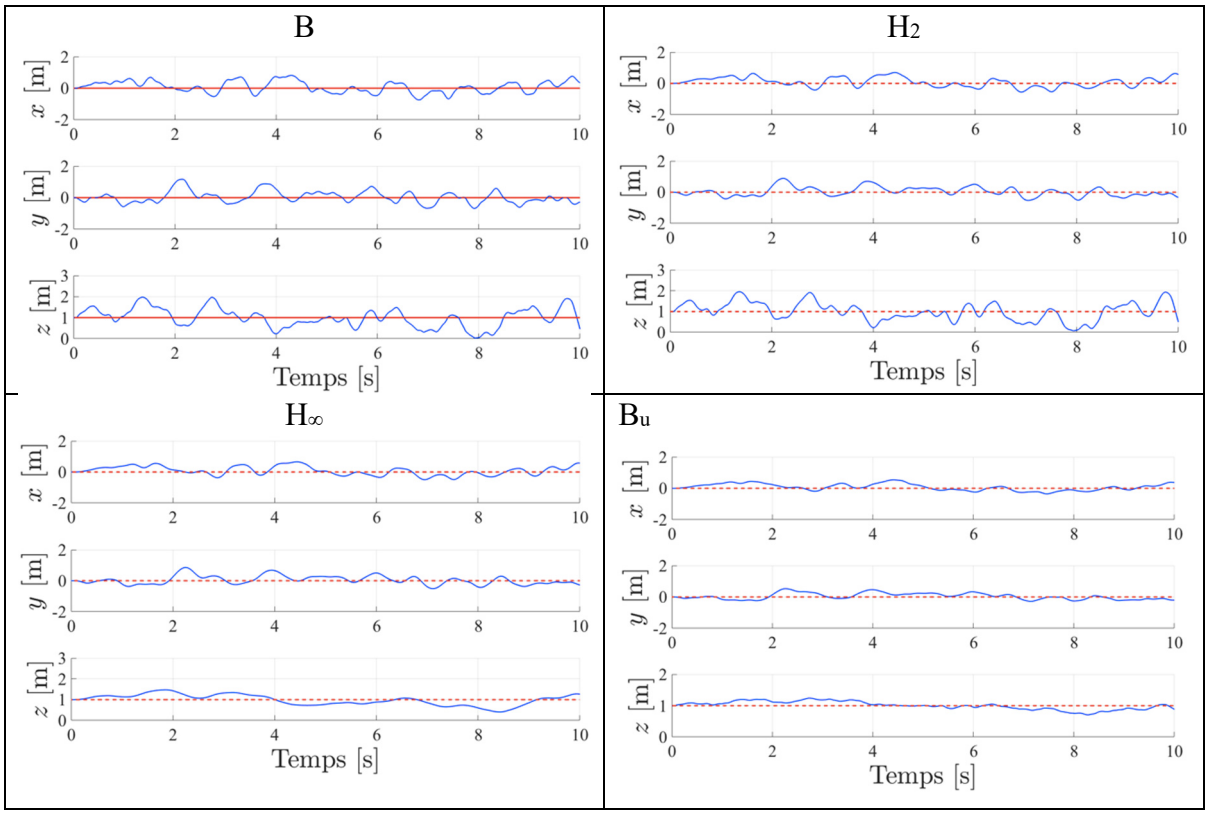


Figure 7.156 Déplacements sur les axes *x, y, z* lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone

Tableau 7.67 Écart type σ_i et maximum de l'erreur e_i pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire du processus

	B	H_2	H_∞	B_u
σ_{xyz}	0.3729	0.3809	0.2560	0.1393
σ_x	0.3598	0.2954	0.2830	0.2142

σ_y	0.3786	0.2916	0.2814	0.2021
σ_z	0.4467	0.4333	0.2572	0.1279
$max(e_x)$	0.8175	0.6970	0.6594	0.5395
$max(e_y)$	1.1678	0.8890	0.8576	0.5283
$max(e_z)$	1.9517	1.9517	1.4724	1.2412

Dans ces conditions de test les amplitudes des angles ϕ et θ illustrées à la Figure 7.157 sont importantes pour les trois commandes et engendrent le décrochage de l'appareil. On note toutefois que les variations des angles de la commande B_u sont environ cinq fois plus faibles que celles de la commandes B, et environ deux fois plus faibles que celles obtenues avec les commandes H_2 et H_∞.

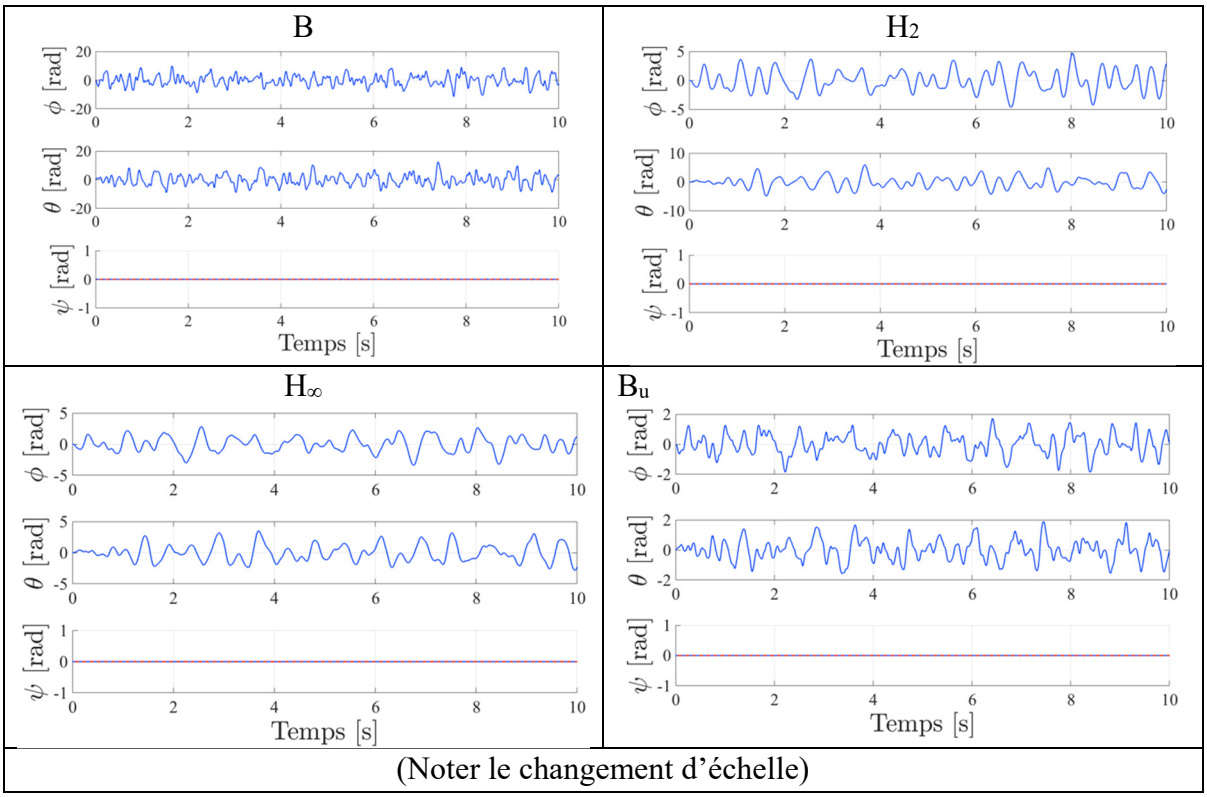


Figure 7.157 Déplacements autour des angles ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone

L'amplitude des commandes u_ϕ et u_θ tracées à la Figure 7.158 sont bien plus faibles dans le cas des compensateurs H_2, H_∞ et B_u. Concernant la poussée u_z les compensateur H_∞ et B_u obtiennent de relativement faibles variations d'amplitude. On note une nette diminution de l'ensemble des amplitudes des signaux de commande avec la commande B_u, comparativement à la commande B.

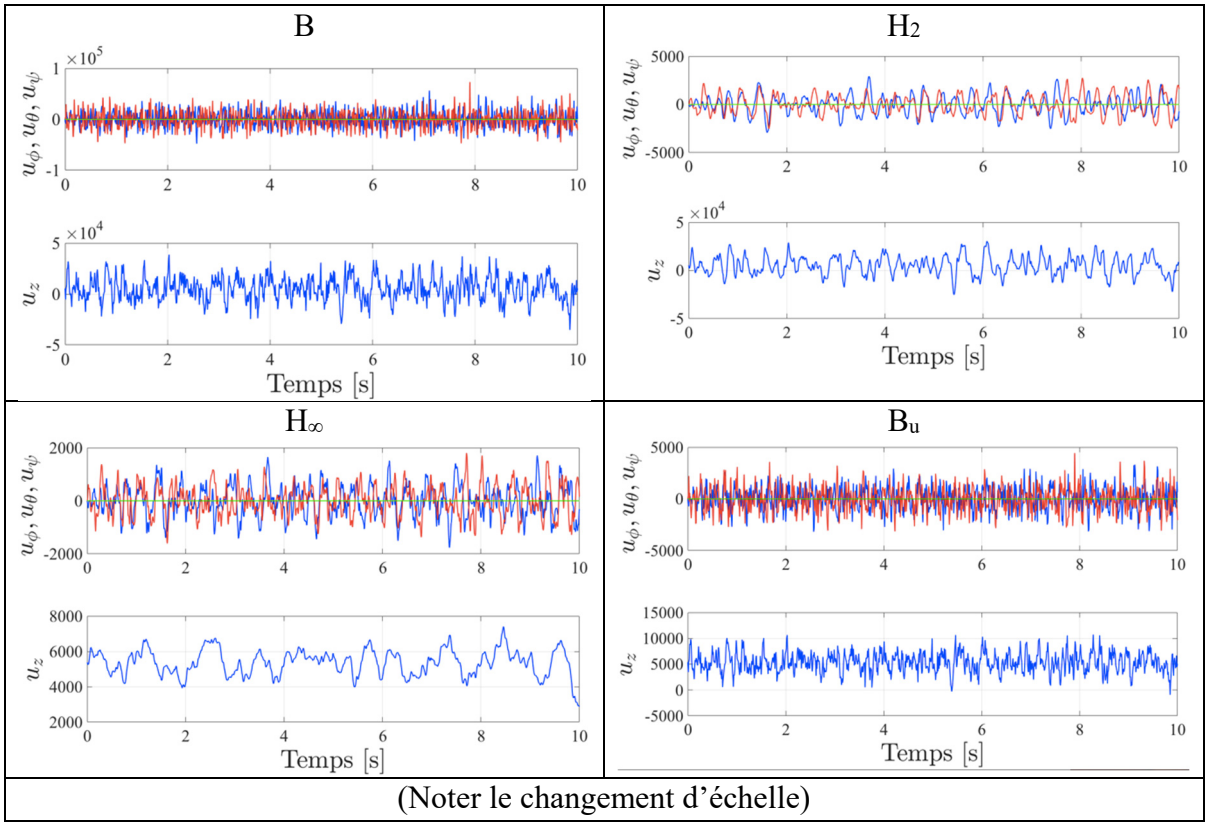


Figure 7.158 Commandes u_ϕ(bleue), u_θ(rouge), u_ψ(verte), u_z lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone

Les variations des erreurs e_x(bleue), e_y (rouge) et e_z (verte) sont représentées à la Figure 7.159. Le compensateur B_u obtient les plus faibles amplitudes.

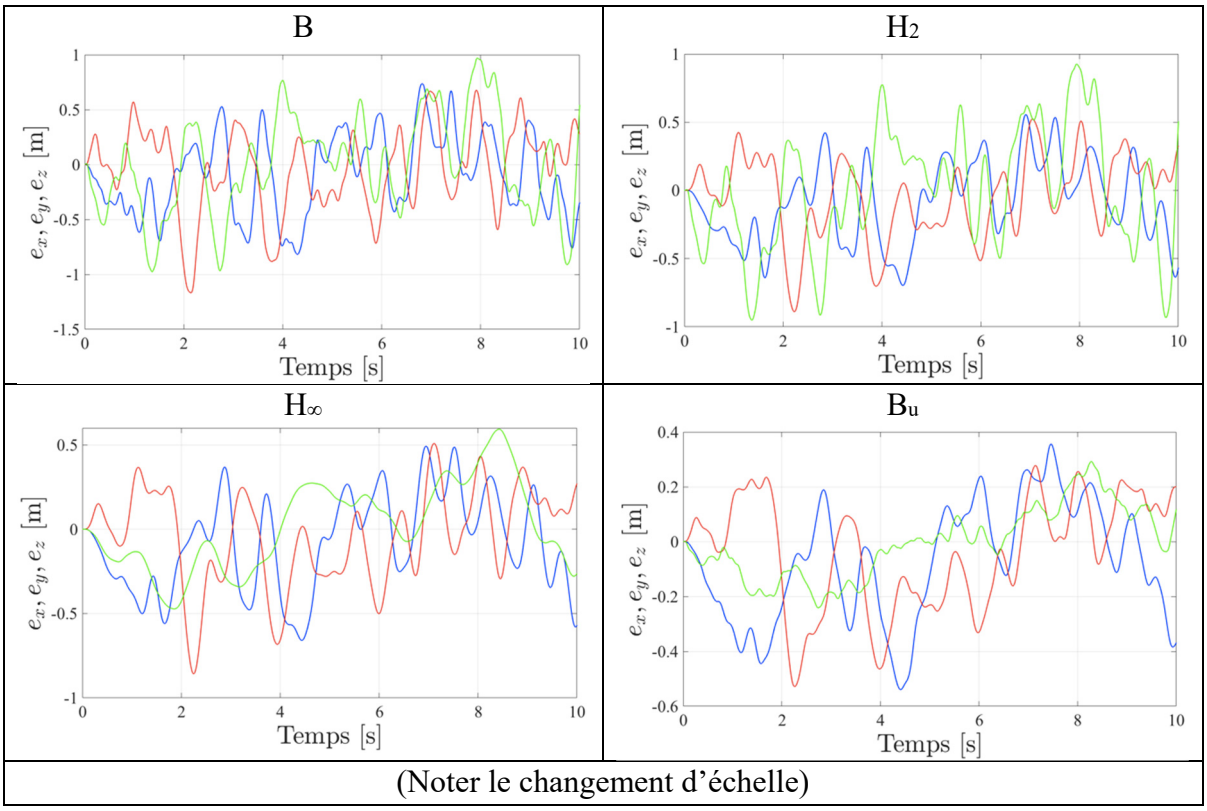


Figure 7.159 Erreurs e_x (bleue), e_y (rouge), e_z (verte) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone

L'évolution des vitesses de rotation ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) illustrées à la Figure 7.160, montre une nette diminution des amplitudes des vitesses de rotation entre les compensateurs B et B_u. De la sorte, le compensateur B_u obtient des amplitudes des vitesses de

rotation plus faibles que celles obtenues avec la commande H_2 et à peine plus élevées que celles obtenues avec la commande H_∞.

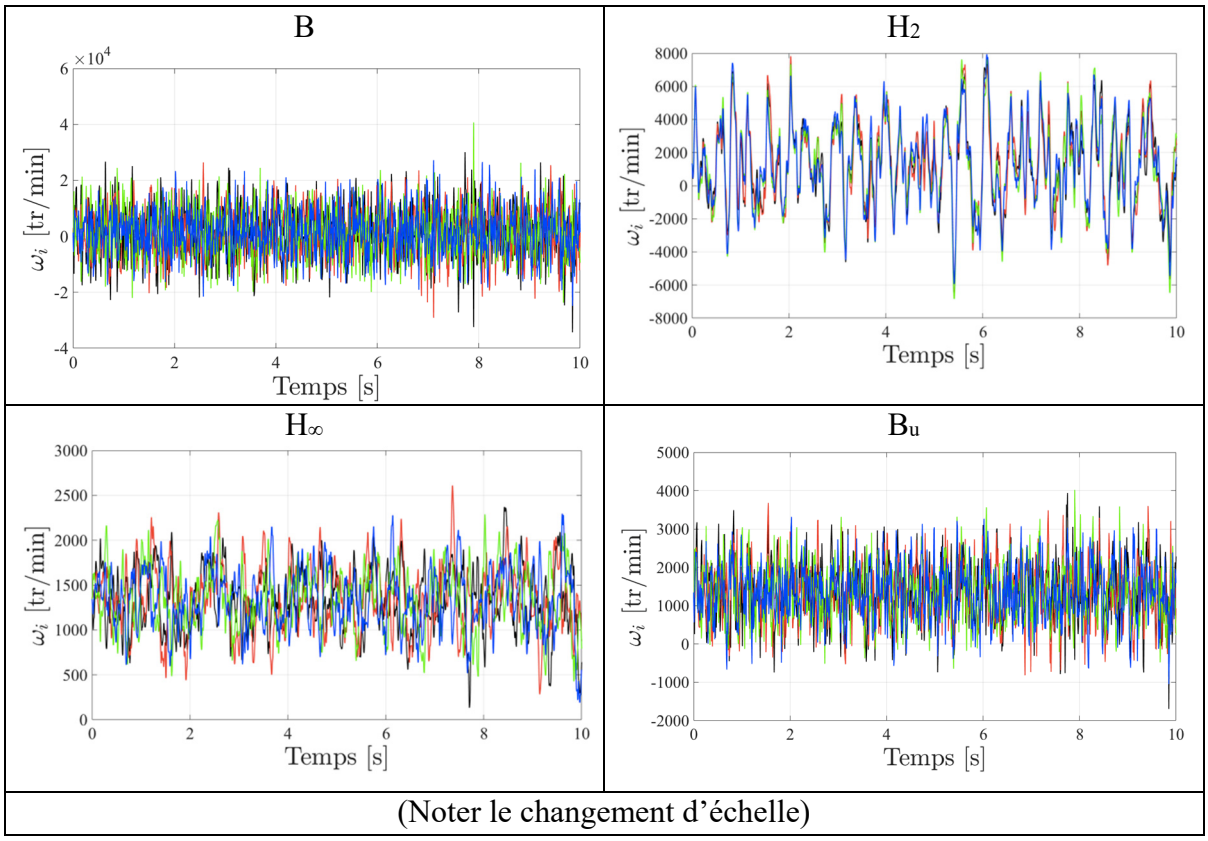


Figure 7.160 Vitesses ω_1 (noire), ω_2 (rouge), ω_3 (verte), ω_4 (bleue) lors d'un vol stationnaire en présence de perturbation en sortie pour les compensateurs B, H_2, H_∞, B_u appliqués sur le modèle linéaire de drone

7.7 Conclusion intermédiaire

- **Analyse fréquentielle**

La première section de ce chapitre nous a permis d'évaluer les performances dans le domaine fréquentiel des commandes B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID lorsqu'appliquées à un modèle linéaire de drone. Des résultats convaincants ont été obtenus sur les boucles ouvertes avec une augmentation des BP lors de l'ajout des compensateurs relativement à la boucle ouverte avec le drone seul. La minimisation de la sensibilité en dessous d'une même faible valeur ε en BF pour $\omega < \omega_1$ et en dessous d'un même maximum M_s pour toute les fréquences ω a servi de point de comparaison entre les commandes B, H_2, H_∞, B, μ, une allure de la transmission $T(s)$ sans dépassement et une large BP en découle. Des dépassements fréquentiels plus importants ont été constatés sur le maximum de la sensibilité et de la transmission pour les commandes μ_Δ et PID. La réduction des bruits sur les signaux de commande a été constatée, excepté pour le PID qui poursuit son amplification pour les HF.

- **Analyse temporelle**

L'étude des performances temporelles dans des conditions de vol stationnaire a permis de constater les bonnes performances des algorithmes de commande B, H_2, H_∞, B et μ en termes de rapidité, précision et de minimisation du dépassement. Les commandes μ_Δ et PID présentent des résultats plus nerveux avec d'éventuels dépassements conséquents. Les commandes H_2, H_∞, μ et μ_Δ parviennent à éviter les risquent de décrochage et de saturation des actionneurs uniquement lorsque le processus linéaire est considéré, alors que la commande B parvient à éviter les risques de décrochage et de saturation des actionneurs avec les processus linéaires et non linéaires. La commande PID sature systématiquement les actionneurs, que l'on considère le processus linéaire ou non linéaire. Bien que les réponses temporelles des commandes par backstepping et hiérarchique soient plus lentes, elles présentent l'avantage de générer des amplitudes réalistes des signaux de commande. De plus, ces deux commandes performent mieux pour maintenir leur niveau de performances lors de trajectoire de vol exigeante.

- **Analyse de robustesse**

L'analyse de robustesse a montré une bonne habilité à maintenir une position stable malgré la présence de perturbation sur la sortie, pour les commandes μ et μ_Δ, suivies des commandes B, H_∞ et H_2, la commande PID étant la moins robuste. Cependant, seules les commandes μ (dans

le cas du processus linéaire), B (dans le cas du processus non linéaire), backstepping et hiérarchique présentent une bonne robustesse tout en conservant des signaux de commande réalistes (c.à.d. évitant les risques de décrochage du drone et de saturation des actionneurs).

- **Consommation d'énergie**

La consommation d'énergie des signaux d'erreurs et de commande ainsi que l'amplitude des gains des compensateurs ont été évalués. La consommation d'énergie par le compensateur PID est systématiquement trop importante pour être considérée dans une application pratique. Les commandes B, μ, μ_Δ H_∞ et H_2 présentent des consommations d'énergie similaires, avec néanmoins une consommation légèrement plus importante dans le cas de la commande B ce qui est en quelque sort le contre coup pour obtenir des performances temporelles plus rapides et plus précises. Les commandes non linéaires par backstepping et hiérarchique consomment le moins d'énergie puisque pour des amplitudes de perturbation bien plus importantes l'ampleur de leurs consommations d'énergie reste systématiquement inférieure ou égale à celles des commandes linéaires.

- **Conception de la commande B par méthode graphique avec limitation du signal de commande**

Des amplitudes des signaux de commande sensiblement trop importantes avaient été relevées dans la section 7.5 dans le cas du compensateur B. Dans cette section une approche pour limiter l'amplitude de ces signaux de commandes, tout en conservant de bons résultats temporels a été proposé.

Ainsi, nous avons obtenu à l'aide d'une méthode graphique (GeoGebra), deux nouveaux compensateurs pour les axes *x* ou *y* et *z* dans le cas d'une boucle de commande en cascade sur le processus linéaire décrit en 3.5.1. Ainsi, dans le cas d'un vol stationnaire, au moyen d'un compromis avec une réponse temporelle à échelon sensiblement plus lente relativement à la commande B, la commande B_u à permis d'obtenir des résultats plus robustes au regard d'une perturbation tout en minimisant les amplitudes des angles et des signaux de commande. Ces

résultats sont très encourageants puisqu'ils sont également globalement meilleurs que ceux obtenus avec les commandes H_2 et H_∞.

- **Remarques générales**

Notons que de manière générale, le passage d'une structure de commande avec système en cascade à une structure de commande avec système de rotation (plus rapide) et translation (plus lente) séparée, permet d'améliorer les performances de la commande B.

Nous avons constaté dans cette section que l'application des commandes linéaires B, H_2, H_∞, B, μ, μ_Δ, PID au modèle linéaire du drone est une bonne approche pour évaluer et comparer les performances des commandes linéaires entre elles. Notons toutefois que le modèle linéaire est très éloigné du modèle non linéaire, notamment en termes de gain et de couplages, il est ainsi délicat de conclure concernant l'applicabilité sur drone réel de ces commandes.

- **Amélioration possible**

Certaines améliorations restent envisageables pour notre étude. Tout d'abord les BP des transmissions pourraient être élargies avec l'insertion de préfiltre en entrée pour chacune des commandes. Cela permettrait d'accélérer davantage les réponses temporelles et également d'annuler les dépassements du PID. Cependant, pour confirmer l'intérêt de ces améliorations, il s'agirait de s'assurer que la BP des capteurs du drone sur lequel on veut implémenter l'algorithme soit suffisamment élevée. Concernant l'étude de robustesse, deux améliorations peuvent être apportées : prise en compte d'une plage de variation négative d'incertitudes paramétriques et tester d'autres types de bruit sur la sortie, notamment en fonction de la fréquence.

Finalement, la moyenne quadratique est une métrique qui capture les résultats sous un angle particulier. Il s'agirait alors d'utiliser des métriques supplémentaires (L_∞, H_∞ , etc) pour tester la robustesse des commandes sous un angle différent.

CHAPITRE 8

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS AVEC LE QUADRICOPTÈRE F450J

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux de la thèse et se divise en 5 sections. La première section vise à expliquer le dimensionnement de la maquette du quadricoptère F450J (F450 étant le nom du châssis et J pour distinguer ce drone en particulier) conçu dans le cadre de cette thèse à partir de la technologie PX4[5]. Nous exposons dans cette section une méthode pour le dimensionnement de l'architecture matérielle et expliquons le fonctionnement de l'architecture logicielle open source du contrôleur de vol PX4.

La seconde et la troisième section de ce chapitre reprennent et adapte l'approche proposée dans (Zemam, 2012) pour la conception d'un banc de test visant à valider le bon dimensionnement de l'équilibrage de chaque bras (1 bras contenant : ESC + moteur + hélice) du drone F450J. Puis, une méthode analytique est utilisée pour estimer la matrice d'inertie du drone F450J nécessaire à la conception du compensateur B pour les tests expérimentaux.

La section 4 explique une méthode de conception de la commande B destinée à être implémentée dans le drone F450J à partir du PID présent par défaut dans le contrôleur de vol PX4 de ce drone. La dernière section compare les résultats expérimentaux obtenus lors des vols stationnaires réalisés en extérieur entre la commande B et la commande PID du manufacturier.

7.8 Présentation du fonctionnement (matériel et logiciel) et conception du quadricoptère F450J basé sur l'autopilote Open Source PX4

Le terme PX4 désigne un autopilote professionnel conçu par des développeurs issus des secteurs industriel et académique. Le concept Open Source rend cette expertise accessible à

[5] https://dev.px4.io/en/

une communauté mondiale et permet de bénéficier du support ainsi que de l'expérience des autres utilisateurs. Les nombreuses possibilités de cette communauté permettent de propulser différents types d'appareils tels que des bateaux, des avions, des engins aux sols ...

Notre attention se portera exclusivement sur la configuration reliée aux quadricoptères. Un avantage de cette solution est l'accès direct au logiciel embarqué (firmware) permettant ainsi de modifier le type de contrôleur de vol implémenté en C++ ainsi que l'acquisition d'un grand nombre de données lors d'un vol. Enfin le faible coût de cette solution permet de mettre au point une première solution tout en minimisant les pertes en cas d'échec.

Nous présentons tout d'abord l'architecture matérielle du drone F450J, avec le détail du rôle de chacun composant et de la méthodologie utilisée pour les choisir. Ensuite l'architecture logicielle du contrôleur de vol PX4 présent dans le F450J est expliquée.

7.8.1 Architecture matérielle du quadricoptère F450J

L'architecture matérielle du drone autonome F450J de type quadricoptère peut être illustrée comme à la Figure 8.1. Nous pouvons distinguer les éléments embarqués sur le châssis du drone : le contrôleur de vol autopilote ; le système de propulsion ; le système d'alimentation ; les organes de communication embarqués ; les capteurs externes au contrôleur.

Puis les éléments de la station au sol : la station de contrôle (ordinateur et logiciel QGC) ; récepteur radio 3DR au sol ; radio commande. Le rôle des éléments de chacune de ces deux parties sera présenté successivement par la suite. Le choix du matériel ainsi que son dimensionnement seront expliqués et justifiés dans ce qui va suivre. L'ANNEXE III reportant le nom, les liens manufacturiers ainsi que le coût sans les frais de port du matériel.

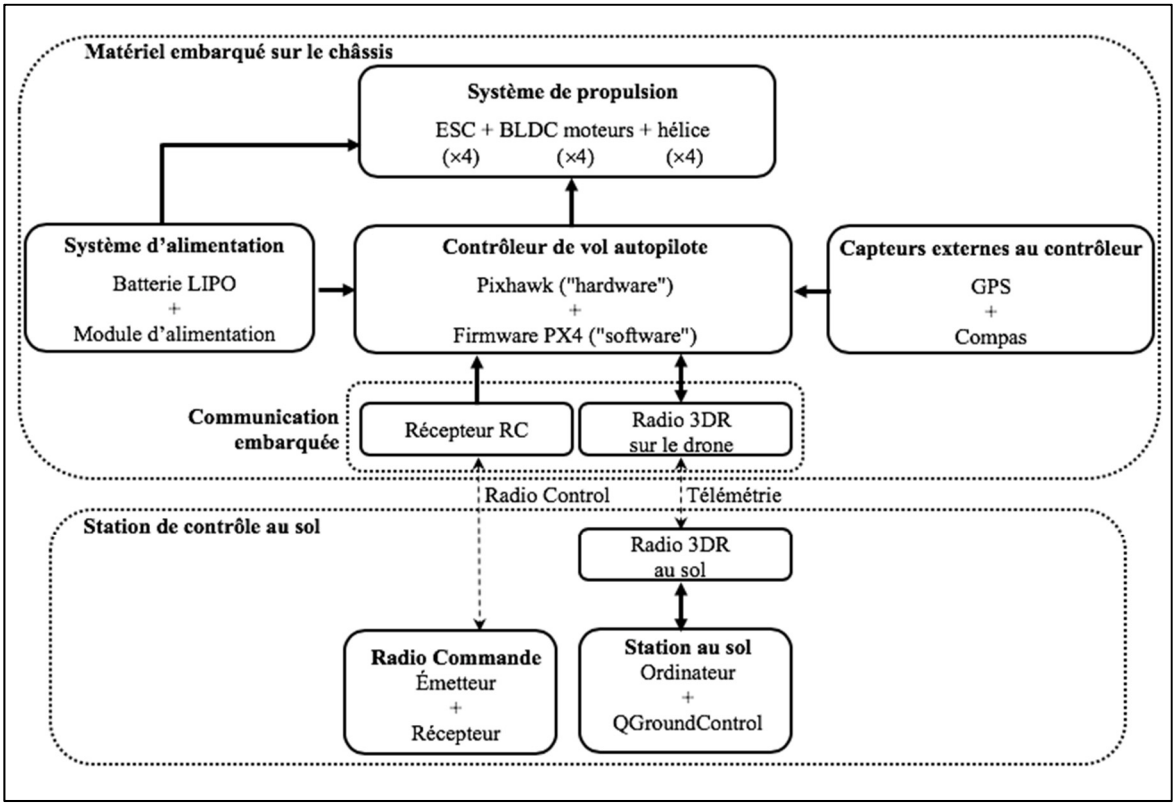


Figure 8.1 Configuration matérielle du quadricoptère F450J basée sur l'autopilote PX4

7.8.1.1 Matériel embarqué sur le châssis du quadricoptère F450J

Cette section vise à décrire chacune des parties du drone F450J visible à la Figure 8.2 et dont le schéma bloc a été présenté à la Figure 8.1.



Figure 8.2 Drone F450J

1. Châssis

Le châssis permet d'embarquer tout le matériel nécessaire pour effectuer un vol. Il doit présenter suffisamment de place pour installer convenablement les organes de commande, les capteurs, la propulsion, l'alimentation et la communication tout en étant le plus léger possible. Celui qui a été choisi est le F450 de chez DJI. Les axes des quatre moteurs dessinent un carré de 45 cm de diagonale avec un poids total de 295 g. Ses bras en nylon polyamide sont conçus pour résister aux chocs et son PCB intégré en fibre de glace permet de faciliter la connexion des ESC (Electronic Speed Controller) à la batterie.

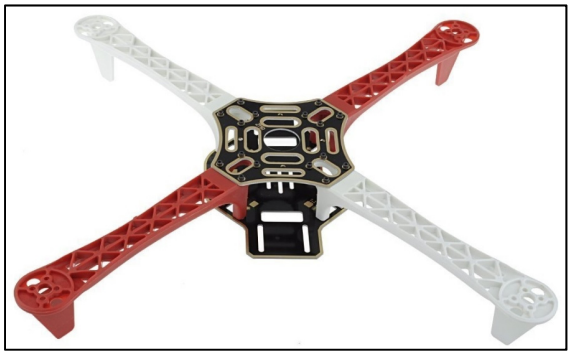


Figure 8.3 Châssis F450 de chez DJI[6]

2. Système de propulsion

Pour chaque bras du drone F450J (4 au total) le système de propulsion est composé d'une hélice, d'un moteur et d'un convertisseur d'énergie de type ESC. L'ensemble des quatre bras doit permettre de générer suffisamment de poussée T_z (exprimée en N) pour soulever le poids du drone. Le dimensionnement de ces trois parties (moteur, ESC, hélice) permettant de maintenir le drone en vol est détaillé dans ce qui suit.

Moteurs

La masse m_d du drone F450J à vide a été estimée à l'aide d'une balance à environs m_d = 1,11176 kg. La masse de la batterie m_b varie selon la capacité de celle-ci. Dans le cas le

[6] https://www.sumozade.com/f450-quadcopter-drone-frame

plus défavorable, c.-à-d. pour une masse et une capacité importante, une batterie de 4000 mAh qui pèse environ 434,2 g[7]. La masse totale maximum du drone F450J va donc avoisiner les $m \approx m_d + m_b \approx 1{,}546$ kg et la puissance mécanique minimum nécessaire pour pouvoir soulever une telle masse est de $T_z = mg \approx 15{,}17$ N (avec $g \approx 9.81$ m^3/kg/s^2). Soit une poussée par moteur de 15,17/4 $\approx 3{,}79$ N (4 moteurs), ce qui équivaut également à 3,79/9,81 ≈ 0,386 kg. Le moteur sans balais DC (Direct Current – Courant Continu) qui a été choisi pour réaliser cette performance est le "Turnigy D2836/9 950KV Brushless Outrunner Motor" visible à la Figure 8.4. Ces spécifications reportées au Tableau 3.1 nous indiquent que sa poussée maximum est 850 g, ce qui est amplement suffisant pour pallier aux 386 g nécessaires pour chaque moteur tel que calculé précédemment.

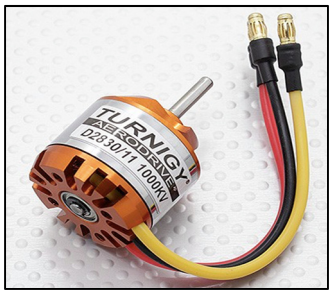


Figure 8.4 Moteur sans balais DC drone F450J[8]

Tableau 8.1 Spécification **du moteur DC Turnigy** D2836/9 950 KV

Adaptée pour les batteries	**:**	**2~4 Cell /7.4~14.8 V**
RPM	**:**	**950 kv**
Courant maximum admissible	:	23.2 A
Courant à vide	:	1 A
Puissance maximum	:	243 W
Résistance interne	:	0.070 ohm
Poids	:	70 g
Diamètre de l'arbre moteur	:	4 mm
Dimensions	**:**	**28x36 mm**

[7] "ZOP Power 14.8v 4000 mAh 30c Lipo Battery Xt60 Plug"

[8] https://hobbyking.com/en_us/d2830-11-1000kv-brushless-motor.html?___store=en_us

Prop size	:	**7.4V/12x6 14.8V/9x6**
Poussée maximum	:	**850 g**

D'autres critères nous ont dirigés vers ce choix, dont les principaux sont : son poids relativement léger (70 g) ; ses dimensions appropriées pour être montées sur le châssis sélectionné (compatibilité de l'emplacement des vis entre le châssis et les moteurs) ; son adaptabilité avec les batteries (LIPO - **2~4 Cell/7.4~14.8 V**) utilisées pour ce type d'application.

ESC

Les ESC (Electronic Speed Controller) sont des convertisseurs (1 par moteur) de puissance situés entre la batterie LIPO et les moteurs. Leur rôle est de convertir la tension continue provenant de la batterie LIPO vers le moteur en un signal rectangulaire de largeur variable, d'où le terme PWM (Pulse Width modulation où MLI - Modulation de Largeur d'Impulsion). La tension maximale U_{uw} se trouve entre la borne *u* et la masse *w* sur la Figure 8.5 **et la tension U_{vw} représente la valeur efficace de la tension.**

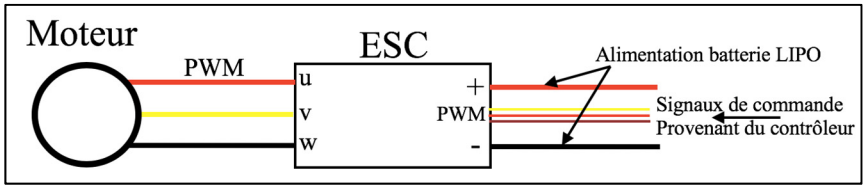


Figure 8.5 Connexion d'ESC à un moteur

La Figure 8.6 **illustre un exemple de jeu de signal de commande typique pour alimenter le moteur. Cela consiste en un signal rectangulaire U_{uw}** (situé entre les bornes *u* et *w*) évoluant entre la tension haute nommée U_{vw} pendant une durée t_1 et une tension nulle sur le reste de la période *T*. Le signal obtenu met en rotation le moteur et fait varier sa vitesse de rotation **(tr/min ou rad/s)** selon le rapport cyclique α que l'on peut définir par :

$$\alpha = \frac{t_1}{T} \tag{8.1}$$

On déduit à partir de l'équation (8.1) **que la vitesse de rotation du moteur sera d'autant plus grande que le rapport cyclique tend vers 1. Le temps t_1 est définie par le contrôleur de vol et correspond indirectement comme nous le verrons par la suite aux commandes en couples L, M, N et en poussée T_z.**

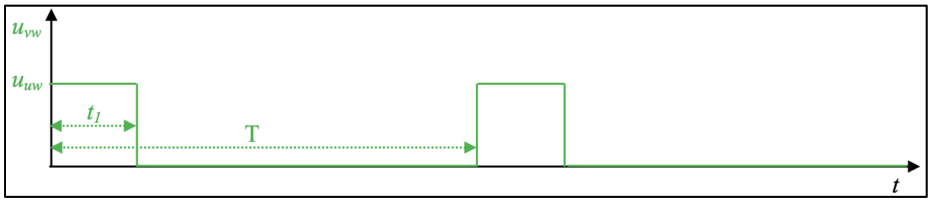


Figure 8.6 Exemple de signaux PWM

Le principal critère pour le choix des ESC est le courant admissible. Ils doivent être capables de fournir le pic maximal de courant que peut générer le moteur (23,2 A pour notre moteur - Tableau 3.1**) ainsi que le courant nécessaire pour fonctionner en régime continu. Ici le courant à vide de notre moteur est de 1 A, nous pouvons supposer que le courant ne dépasse pas les 10 A en régime continu, c.-à-d. pour la plupart des phases de vol. Notre choix d'ESC s'est porté vers le "**Emax Simonk Series **20 A For Quadcopter QAV250" visible à la** Figure 8.7**. Le Tableau 8.2 montre un extrait de la documentation technique de cette série d'ESC, avec surligné en jaune celui qui a été spécifiquement choisi. Le courant continu de l'ESC choisi va jusqu'à 20 A avec un maximum de 25 A, ce qui est suffisant pour combler les besoins d'alimentation du moteur évoqués ci-dessus. Notons que la tension de sortie (BEC output) est de 5 V, ce qui correspond à la tension repérée par U_{vw} à la** Figure 8.6**.**



Figure 8.7 ESC **20A QAV250**[9]

Tableau 8.2 Extrait de la documentation technique des "ESC Emax Simonk Series **20A For Quadcopter QAV250" (zone colorée)**

Article	Courant continu	Courant de rupture (10A)	Batterie (cellule)	Dimension	Poids (g)	ESC mode	ESC output	Programmable
12A	12A	15A	2~3	22*17*7	8	Linéaire	1A/5V	Oui
20A	20A	25A	2~3	55*28*7	28	Linéaire	2A/5V	Oui
25A	25A	30A	2~3	55*28*7	28	Linéaire	2A/5V	Oui
30A	30A	40A	2~3	55*28*7	28	Linéaire	2A/5V	Oui
40A	40A	50A	2~6	73*28*12	41	Interrupteur	3A/5V	Oui

Hélices

Le dimensionnement d'une hélice est une partie complexe. Commençons par énoncer les principes généraux suivants :

- **À pas égal, plus le diamètre de l'hélice est important moins elle aura besoin de tourner vite pour générer une même poussée ;**
- **Plus l'hélice tourne rapidement plus elle va imposer du stress sur le châssis et plus les vibrations des pâles vont être importantes. Pour un vol stable, il est donc préférable d'avoir une hélice avec un diamètre important et une vitesse de rotation lente, ce qui tend également à augmenter l'autonomie ;**
- **Le comportement du drone peut approximativement être défini selon la vitesse de rotation des hélices de la manière suivante :**
  - 12 000 tr/min max pour un vol « nerveux : sportif, vitesse, acrobatique » ;
  - 10 000 tr/min max pour un vol « normal : entre-deux » ;
  - 8 000 tr/min max pour un vol « stable : prise de vue, ballade ».
- **Le choix du nombre de pâles de l'hélice est influencé par les aspects suivants :**

[9] https://www.banggood.com/Emax-Simonk-Series-12A-20A-25A-30A-40A-ESC-For-Quadcopter-QAV-250-p-918126.html

- **Pour un diamètre équivalent, l'augmentation du nombre de pâles augmente la poussée fournie par l'hélice. Pour un espace réduit, il est donc parfois nécessaire d'augmenter le nombre de pâles ;**
- **Une hélice tripale par exemple aura une poussée plus importante qu'une hélice bipale de même diamètre, mais son rendement sera inférieur pour les raisons suivantes : augmentation des vibrations ; efforts sur le châssis plus important ; traînée induite plus importante à cause de l'augmentation de la surface alaire ;**
- **Plus la surface alaire est importante (augmentation du nombre de pâles), plus la traînée induite sera importante et sa consommation énergétique augmentera en conséquence.**

- Petit pas géométrique (définition du pas géométrique ci-dessous*) : plus grande traction à faible vitesse, mais vitesse maximale limitée ;
- Grand pas géométrique : plus petite traction à faible vitesse, mais vitesse maximale élevée.

***Pour rappel le pas géométrique d'une hélice est défini par la** distance parcourue notée "Pas" sur la Figure 8.8, par l'hélice pour un tour de rotation autour de son axe.

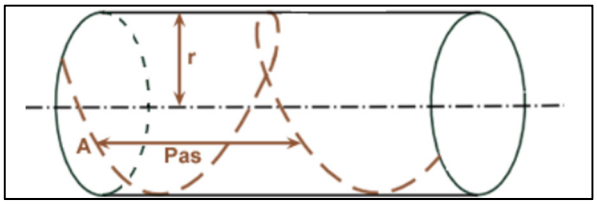


Figure 8.8 Pas géométrique d'une hélice[10]

Notons que les contraintes d'encombrement dans notre cas sont relativement faibles, nous privilégierons donc des hélices à uniquement deux pâles pour rechercher un rendement optimal et ainsi une minimisation de la consommation d'énergie. Le Tableau 8.3 **extrait du site internet de l'entreprise Dronelis[11] résume les paramètres importants à**

[10] https://www.lavionnaire.fr/HeliceHelices.php
[11] https://www.dronelis.com/choix-des-moteurs-et-des-helices-pour-un-drone/

prendre en compte pour le choix d'une hélice. Pour rappel le moteur qui a été choisi est à 950 KV (Tableau 3.1**), cela nous fixe d'office dans une gamme de Vol normal, ce qui est acceptable pour nos objectifs futurs de test de vol stationnaire et de scénario avec des trajectoires "calmes" pour tester nos algorithmes. La gamme de Vol stable aurait aussi convenu, mais correspond à** 700 – 900 KV, ce qui aurait peut-être été un peu faible pour soulever le drone. Dernier point, la durée de nos tests de vol n'excédera pas quelques minutes, car la durée des batteries est généralement de l'ordre de 10 min. En nous référant au Tableau 8.3 **nous avons donc intérêt à prendre une longueur d'hélice la plus importante possible dans la gamme de vol normale pour augmenter la poussée disponible (malgré l'augmentation de la consommation) et un pas géométrique le plus faible possible pour également augmenter la poussée. Les considérations énoncées ci-dessus conduisent à choisir l'hélice suivante :** 1045 Propeller 10 in 10x4.5[12].

Tableau 8.3 Description des différents types de vol en fonction des dimensions de l'hélice

	Vol nerveux	Vol normal	Vol stable
Hélice (longueur en pouces)	8	8 – 10	10 – 11
Pas géométrique (en pouces)	5	4,5 – 5	4 – 4,5
RPM ou tr/min max	12 000	10 000	8 000
KV	1 100 – 1 400	900 – 1 100	700 – 900

Les caractéristiques principales de l'hélice 1045 Propeller 10 in 10x4.5 sont reportées au Tableau 8.4. Remarquons que les moteurs (et par extension les hélices) d'un quadricoptère tournent en sens opposés deux à deux, il s'ensuit la définition des hélices tournantes dans le sens horaire par CW (Clock Wise - horaire) et dans le sens antihoraire CCW par (Counter Clock Wise - antihoraire) tout comme le représente la Figure 8.9.

[12]https://www.banggood.com/1045-Propeller-10in-10x4-5-CWCCW-For-Quadcopter-And-Multirotor-p-933186.html?rmmds=myorder



Figure 8.9 Hélices CCW du drone F450J[13]

Tableau 8.4 Caractéristiques principales de l'hélice 1045
Propeller 10 in 10x4.5

Nom	:	1045 Propeller
Diamètre de l'hélice	:	10 in / 25.4 cm
Pas géométrique	:	4.5 in
Diamètre d'alésage	:	6 mm en avant et 9 mm à l'arrière
Poids	:	14 g / paire
Matière	:	Plastique

Les performances d'une hélice peuvent être définies par les coefficients adimensionnels de portance C_T et de puissance C_P présents dans l'expression de la force de portance T (N) et la force de puissance P_p (W) :

$$T = 4C_T \rho r^4 \omega^2 / \pi^2 \tag{8.2}$$

$$P_p = 4C_p \rho r^5 \omega^3 / \pi^3 \tag{8.3}$$

Avec ρ la densité de l'air (1,225 kg/m^3) et r le rayon de l'hélice (m).

Des expressions (8.2) et (8.3) nous déduisons qu'un rayon important r permet de diminuer la vitesse de rotation pour une même valeur de T et de P_p, il s'ensuit une diminution de la consommation d'énergie.

[13]https://www.banggood.com/1045-Propeller-10in-10x4-5-CWCCW-For-Quadcopter-And-Multirotor-p-933186.html?rmmds=myorder&ID=224&cur_warehouse=CN

L'efficacité énergétique, influencée par les coefficients C_T et C_P est également importante pour caractériser les performances d'une hélice. Nous verrons à la partie 7.9 comment évaluer avec un banc de test l'évolution de ces coefficients en fonction de la vitesse de rotation des moteurs. Cela nous permettra de valider le bon fonctionnement des quatre systèmes de propulsions (le drone à quatre bras) ainsi que l'équilibrage du drone.

3. Système d'alimentation

Le système d'alimentation est composé d'une batterie de type LIPO (Lithium Polymère) et d'un module de puissance.

Batterie LIPO

La batterie rechargeable LIPO est couramment utilisée dans le domaine des drones, car sa forte capacité énergétique permet d'encaisser d'importants pics de courant présent au décollage ou lors de phase de vol avec des trajectoires agressives. Ce type de batterie est caractérisée par un nombre de cellules dont la tension nominale aux bornes de chaque cellule est de 3,7 V ; par une capacité exprimée en mAh et un taux de décharge.

L'objectif de la batterie LIPO est d'alimenter le système de propulsion (essentiellement les moteurs en termes de consommation) et le contrôleur de vol. L'objectif est de choisir une batterie avec une puissance suffisamment importante pour alimenter le système de propulsion et soulever le poids du drone F450J (batterie incluse). On a vu précédemment que chaque moteur peut avoir des pics de courant jusqu'à 23,2 A. Le nombre de moteurs étant de 4 la batterie devra être capable de supporter un maximum de 23,2×4 = 92,8A. Notre choix s'est porté sur la batterie **"ZOP Power 11.1 V 3300 mAh 3S 35C Lipo Battery XT60 Plug" visible à la** Figure 8.10**. Avec une capacité de 3,3Ah et un taux de décharge de 35C**[14] **elle peut**

[14] Un taux de décharge de 35C signifie que la batterie est capable de fournir 35 fois sa capacité (ici 3.3Ah) pendant 10s. Soit 35×3.3 = 115.5A dans notre cas (http://www.dronekas.com/drone-choisir-batterie-lipo/#Le_taux_de_decharged8217une_batterie_LIPO).

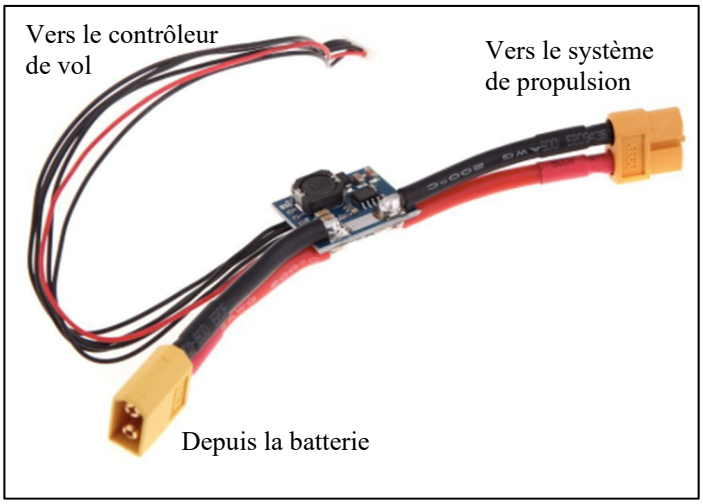
encaisser un pic de courant maximum de 3,3×35 = 115,5 A, ce qui est supérieur à celui nécessaire au système de propulsion (92,8 A).



Figure 8.10 Batterie LIPO 11,1V ; 35C ; 3300 mAh[15]

APM Power Module 5.3V DC BEC

Le module APM Power (Advanced Power Management) visible à la Figure 8.11 est utilisé pour transmettre l'état de la batterie en termes de tension et de courant au contrôleur de vol. Il permet donc de calculer la puissance restante de la batterie pour estimer le temps de vol restant. De plus, le module est également doté de la fonction BEC (Battery Eliminator Circuit) dont le rôle est de stabiliser l'alimentation fournie au système de propulsion.



[15] https://www.banggood.com/fr/ZOP-Power-11_1V-3300MAH-3S-35C-Lipo-Battery-XT60-Plug-p-955392.html?cur_warehouse=CN

Figure 8.11 APM Power Module 5.3V DC BEC[16]

4. Le contrôleur de vol Pixhawk V2 embarqué sur le drone F450J et les capteurs internes à l'IMU (Unité de mesure inertielle – Inertial Measurement Units)

Le contrôleur de vol est le principal organe de commande du drone. Celui-ci embarque le logiciel embarqué nécessaire pour commander les signaux PWM envoyés aux ESC à partir d'une consigne envoyée par la station au sol et ainsi faire varier la vitesse de rotation des moteurs. Un des rôles clés du contrôleur de vol du drone est la commande de sa hauteur z, sa position horizontale sur x et y, son attitude ψ, sa vitesse angulaire Ω et sa vitesse linéaire $\dot{\xi}$ (Mahony, 2012). Le plus souvent le contrôleur de vol comprend un IMU dont le rôle est d'intégrer les données spatiales des capteurs comme l'accéléromètre, le gyroscope et le magnétomètre pour estimer une localisation spatiale du drone en termes : d'orientation (angles de roulis), de tangage et de lacet, de vitesse linéaire et de position linéaire. Le contrôleur de vol qui a été choisi pour ce projet est le Pixhawh V.2.



https://docs.px4.io/en/flight_controller/pixhawk.html

Figure 8.12 Contrôleur de vol Pixhawk embarqué sur le drone F450J

[16] http://www.buyinsave.com/index.php?route=product/product&product_id=96

Les principales caractéristiques des capteurs présents dans le Pixhawk sont reportées au Tableau 8.5. On porte ici particulièrement notre attention sur la précision et la BP des capteurs puisque ces deux données sont les principaux critères pouvant limiter les performances des algorithmes de commande que nous avons développés.

Tableau 8.5 Caractéristiques principales des capteurs internes au Pixhawk V2

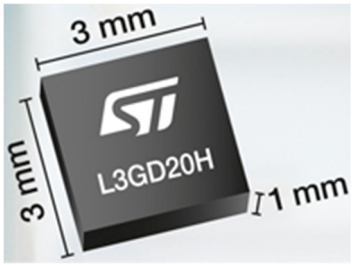
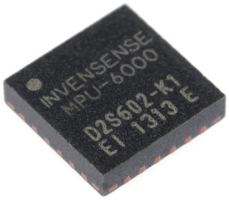
Capteurs	Numéro de série	Caractéristiques principales
Gyroscope[17]	ST Micro L3GD20H 16 bits 	• 3 axes (*x, y, z*) ; • ±245/±500/±2000 °/sec ; • BP : Jusqu'à 211 Hz.

Tableau 8.5 Caractéristiques principales des capteurs internes au Pixhawk V2 (suite)

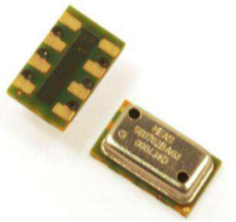
Capteurs	Numéro de série	Caractéristiques principales
Accéléromètre / magnétomètre[18]	ST Micro LSM303D 14 bits 	• 3 champs magnétiques et 3 canaux d'accélérations ; • Échelle d'accélération linéaire complète de ±2/±4/±6/±8/±16 *g* ; • Acc : BP jusqu'à 1600 Hz ; Mag : BP jusqu'à 100 Hz.
Accéléromètre / gyroscope[19]	Invensense MPU 6000 	Accéléromètre • 3-axes ; • Sortie digitale pour accéléromètre trois axes avec une gamme de fonctionnements programmables ; • Sortie digitale, programmable selon les échelles : ±2 g, ±4 g, ±8 g et ±16g ; • Fréquence de sortie des données variant entre 4 Hz et 1000 Hz. Gyroscope

[17]https://www.st.com/content/ccc/resource/technical/document/application_note/40/31/95/25/a2/18/40/b3/DM00119037.pdf/files/DM00119037.pdf/jcr:content/translations/en.DM00119037.pdf
[18] https://www.pololu.com/file/0J703/LSM303D.pdf
[19] https://store.invensense.com/datasheets/invensense/MPU-6050_DataSheet_V3%204.pdf

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

Sortie digitale selon les axes x, y, et z pour des taux angulaires programmables selon les échelles : ±250, ±500, ±1000 et ±2000 °/sec ;
Les fréquences mécaniques du gyroscope sont les suivantes :
<table>
<tr><th>Axe</th><th>min</th><th>typique</th><th>max</th><th>Unité</th></tr>
<tr><td>x</td><td>30</td><td>33</td><td>36</td><td>kHz</td></tr>
<tr><td>y</td><td>27</td><td>30</td><td>33</td><td>kHz</td></tr>
<tr><td>z</td><td>24</td><td>27</td><td>30</td><td>kHz</td></tr>
</table>

La fréquence de sortie programmable varie entre 4 Hz et 8 kHz.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Baromètre[20]</td>
<td>MEAS MS5611
  </td>
<td>

Résolution du module : 10 cm
Temps de réponse :
0.5 / 1.1 / 2.1 / 4.1 /8.22 ms.

</td>
</tr>
</table>

5. Capteur externe au contrôleur de vol

Le GPS externe NEO-M8N GPS visible à la Figure 8.13 est installé sur le drone F450J et permet d'obtenir les positions linéaires *x, y, z*. Sa précision horizontale est d'environ ± 2.5 m et son taux de rafraîchissement des données varie de 5 à 10 Hz.



Figure 8.13 GPS externe NEO-M8N GPS[21]

[20]https://www.te.com/commerce/DocumentDelivery/DDEController?Action=showdoc&DocId=Data+Sheet%7FMS5611-01BA03%7FB3%7Fpdf%7FEnglish%7FENG_DS_MS5611-01BA03_B3.pdf%7FCAT-BLPS0036

[21] https://www.unmannedtechshop.co.uk/ublox-neo-m8n-gps-with-compass-rom/

6. Communication embarquée

La communication embarquée sur le drone F450J comprend deux types de modules. Le premier "Radio Telemetry OSD 3DR 915 Mhz" (Figure 8.14 (a)) est un émetteur récepteur dont le rôle est double : transmettre les consignes de vol depuis la station au sol au contrôleur de vol Pixhawk ; recueillir les informations sur l'état du drone F450J (position, vitesse, tension et courant, nombre de GPS détectés ...) provenant du Pixhawk vers la station au sol.

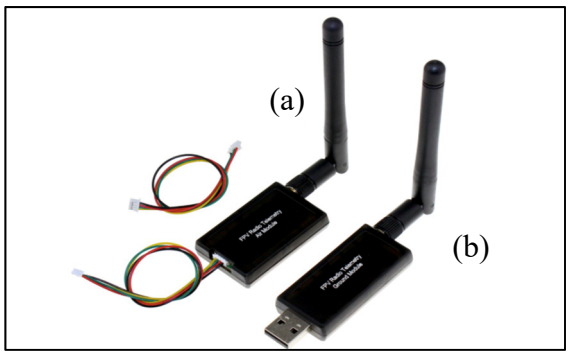


Figure 8.14 Télémétrie OSD 3DR[22] : sur le drone F450J (a) ; sur l'ordinateur (b)

Le second module de communication "FlySky FS-R9B[28]" est visible à la Figure 8.15. Ce module fonctionne uniquement en récepteur et son rôle est de transmettre la consigne de vol venant de la radio commande vers le contrôleur de vol Pixhawk.

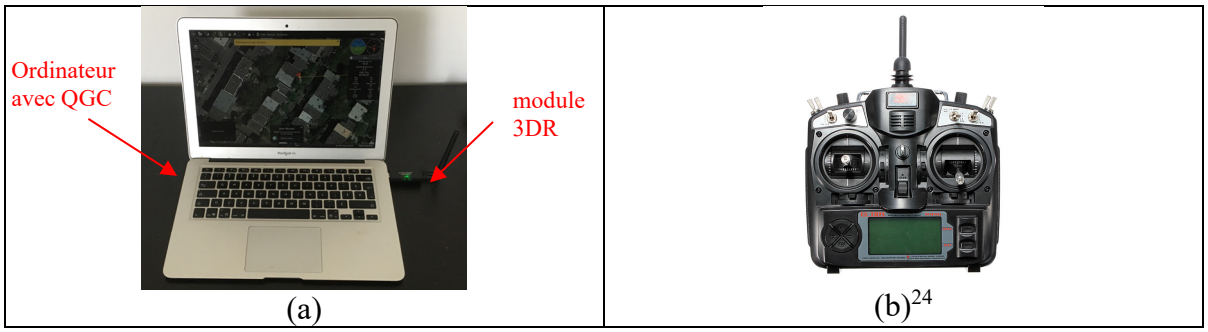


Figure 8.15 Récepteur FlySky FS-R9B[23] de la radio commande

[22] https://www.worthpoint.com/worthopedia/pixhawk-px4-4-flight-controller-neo-1859954060
[23] https://www.xt-xinte.com/FlySKY-FS-8ch-2-4G-RX-FS-R9B-Upgrade-RC-transmitter-receiver-for-TH9X-9ch-transmitter-FS-TH9X-remote-control-p134038.html

7.8.1.2 Station de contrôle au sol utilisée pour diriger le quadricoptère F450J

La station au sol illustrée à la Figure 8.16a utilisée pour diriger le drone F450J est composée d'un ordinateur sur lequel est installé le logiciel QGC (QGroundControl), le module de télémétrie 3DR qui est complémentaire à celui décrit à la Figure 8.14 et la radio commande FS-TH9X permettant de communiquer avec le récepteur Flysky de la Figure 8.16.



(a) (b)[24]

Figure 8.16 Station au sol : ordinateur avec QGC + module 3DR (a); Radio commande (b)

La Figure 8.17 montre un exemple de mission planifiée avec QGC[25]. Typiquement cela consiste en une série de déplacement en direction de point de passage. Ici à partir de la position d'origine ("home") numérotée 0, le drone décolle ("Take off") vers le point de passage numéro 1, puis se dirige vers les points de passage 2 et 3. Plusieurs informations sont accessibles comme le nombre de satellites GPS (10 dans la Figure 8.17), l'altitude, le courant de la batterie ...

[24] https://in.pricena.com/en/product/flysky-fs-th9x-2-4g-radio-control-rc-controller-9ch-transmitter-r9b-8ch-receiver-price-in-india-8661201
[25] http://qgroundcontrol.com



Figure 8.17 Exemple de planification de mission de vol avec QGC[26]

7.8.2 Architecture du logiciel interne au contrôleur de vol PX4 embarqué sur le quadricoptère F450J

Dans cette section nous expliquons tout d'abord le fonctionnement général du logiciel interne du contrôleur de vol PX4 embarqué sur le drone F450J. Ensuite le rôle de la "flight stack" est détaillé. Les deux dernières parties expliquent le fonctionnement des contrôleurs de position linéaire et d'attitude implémentés par défaut dans le contrôleur de vol PX4. Notons que la notation utilisée dans cette partie est celle employée par la communauté PX4 et diffère sensiblement de celle utilisée jusqu'à présent dans cette thèse.

[26] https://dev.px4.io/en/qgc/

7.8.2.1 Architecture du logiciel PX4 utilisée dans contrôleur de vol du quadricoptère F450J

Le diagramme ci-dessous détaille le contenu général des modules constituant le PX4[27]. La partie supérieure du diagramme contient les modules du "middleware" que l'on peut regrouper selon trois parties : Storage, External connectivity et Drivers. Tandis que la partie inférieure montre les modules de la "flight stack" (Commande de vol / Flight Control) (Voir page suivante).

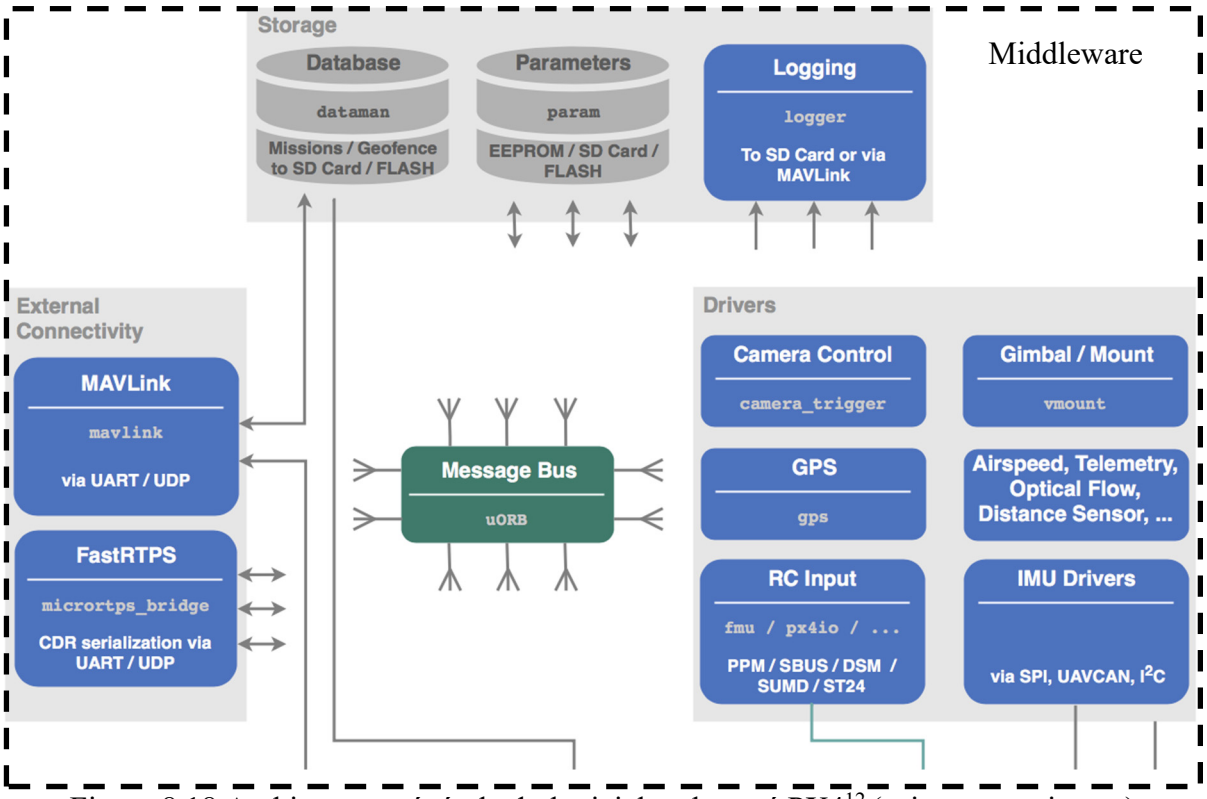


Figure 8.18 Architecture générale du logiciel embarqué PX4[12] (suite page suivante)

[27] https://dev.px4.io/en/concept/architecture.html

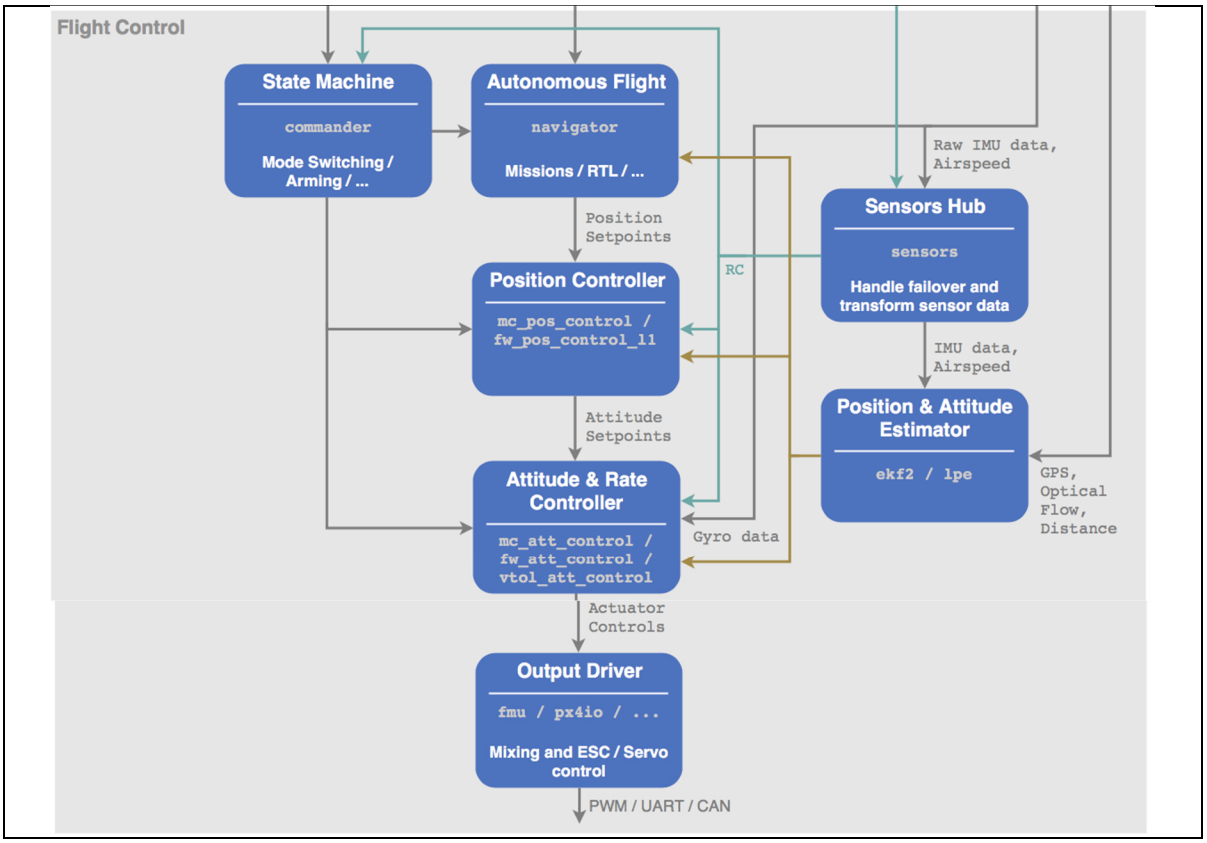


Figure 8.18 hitecture générale du logiciel embarqué PX4 (suite)

7.8.2.2 Flight stack du logiciel PX4 utilisée dans le contrôleur de vol du drone F450J

La "flight stack[28]" est un ensemble d'algorithmes de guidage, de navigation et de contrôle pour les drones autonomes. Il comprend des contrôleurs pour avions à voilure fixe, multirotors et VTOL (Vertical Take Off and Landing), ainsi que des estimateurs d'attitude et de position.

Le diagramme de la Figure 8.19 montre une vue d'ensemble des modules composant la "flight stack" et les principaux signaux utilisés. Le module "Capteurs" transmet l'accélération $a_{IMU} = [a_{xIMU}, a_{yIMU}, a_{zIMU}]^T$, la vitesse angulaire $\Omega_{IMU} = [\phi_{IMU}, \theta_{IMU}, \psi_{IMU}]^T$ et le champ

[28] https://dev.px4.io/en/concept/architecture.html

magnétique terrestre dans les trois axes m_{IMU} mesurés par l'IMU ainsi que les positions linéaires $r_{GPS} = [x_{GPS}, y_{GPS}, z_{GPS}]^T$ mesurées par le GPS. Le module "Estimateur de position" utilise des filtres de Kalman pour transmettre les estimations sur : les positions linéaires $\hat{r} = [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]^T$; vitesses $\hat{v} = \left[\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z\right]^T$ linéaires ; positions angulaires $\hat{\phi}, \hat{\theta}$; les vitesses angulaires $\hat{\omega}^b = \left[\hat{\dot{\phi}}^b, \hat{\dot{\theta}}^b\right]^T$ dans le référentiel inertiel ; la vitesse réelle (TAS – True AirSpeed) ; la vitesse indiquée (IAS – Indicated AirSpeed).

Nous pouvons ensuite distinguer deux modes de fonctionnement. Dans le mode de fonctionnement en mission, le module "Contrôleur de position" reçoit ses consignes de positions linéaires $r_{sp} = [x_{sp}, y_{sp}, z_{sp}]^T$ et angulaire ψ_{sp} à partir du module "Navigateur[29]" puis, transmet les consignes d'attitudes $\Psi_{sp} = [\phi_{sp}, \theta_{sp}, \psi_{sp}]^T$ au module "Contrôleur d'attitude et de vitesse angulaire". Dans le deuxième mode de fonctionnement dit manuel, c'est la radiocommande (module "RC") qui transmet les consignes d'élévation en altitude z_{sp} au module "Contrôleur de position" et en attitude Ψ_{sp} au module "contrôleur d'attitude et de vitesse angulaire".

Les sorties des deux contrôleurs fournissent au module "Mixeur" les commandes en couple $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ autour des trois axes et en poussée z_{sp}. À partir du vecteur de commande u et de la commande en poussée z_{sp} le module "Mixeur" transmet les signaux $PWMi$, $\{i = 1, ... 4\}$ aux ESC et fait varier la vitesse de rotation (module "Moteurs") notés $\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]^T$.

Les variables de la Figure 8.19 ont les dimensions suivantes :

- 4×1 : $PWM_{1, ...,4}$, $\omega_{1, ...,4}$, u ;
- 3×1 : a_{IMU}, Ω_{IMU}, m_{IMU}, r_{GPS}, $\hat{r}$, r_{sp}, $\hat{v}$, $\hat{\omega}^b$, Ψ_{sp} ;
- 1×1 : ψ_{sp}, Z_{sp}.

[29] Le module "navigation" reçoit une série de consigne enregistrées au préalable par l'utilisateur (via un logiciel du type QGroundControl par exemple).

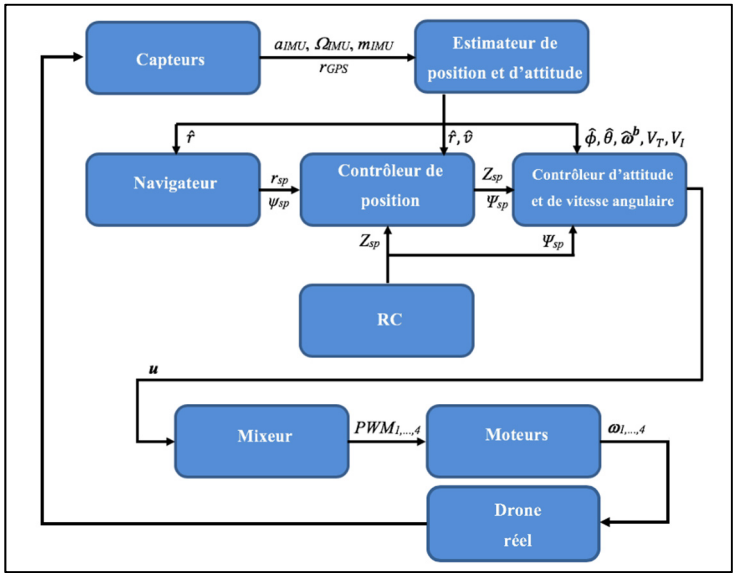


Figure 8.19 Aperçue de la "flight stack"
Extrait et adaptée du site de développement du PX4[30]

7.8.2.3 Contrôleur de position linéaire présent par défaut dans le logiciel PX4 utilisé dans le contrôleur de vol du quadricoptère F450J

Le contrôleur de position linéaire est constitué de deux boucles de commandes imbriquées illustrées à la Figure 8.20. La première (externe) est constituée uniquement d'un compensateur proportionnel P et permet de transmettre à la deuxième boucle (interne) la consigne en vitesse $v_{sp} = [v_{xsp}, v_{ysp}, v_{zsp}]^T$ à partir de l'erreur de position $\Delta r = [\Delta x, \Delta y, \Delta z]^T$ entre la consigne de position linéaire r_{sp} et sa valeur estimée $\hat{r}$.

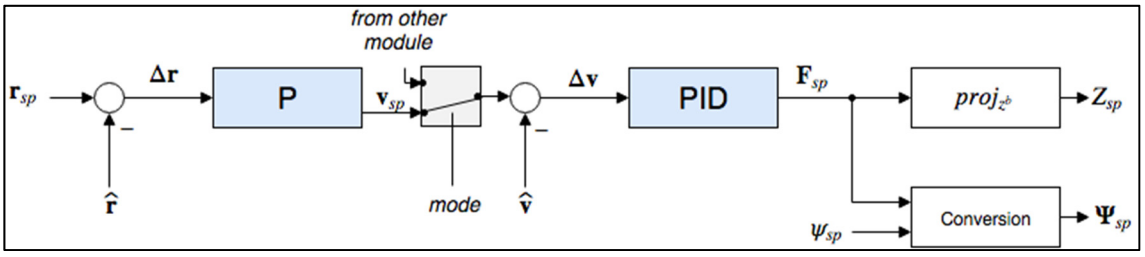


Figure 8.20 Contrôleur de position et vitesse linéaire PX4[31]

[30] https://dev.px4.io/en/concept/architecture.html
[31] https://dev.px4.io/en/flight_stack/controller_diagrams.html

Selon le mode de fonctionnement choisi, la boucle de position peut être contournée à l'aide du multiplexeur représenté entre la boucle externe et la boucle interne.

Ensuite l'erreur de vitesse $\Delta v = [\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z]^T$ obtenue à partir de la consigne v_{sp} et de l'estimation de la vitesse est traité par un compensateur PID pour obtenir la commande en poussée F_{sp}. Cette commande est ensuite transcrite dans le repère de la base avec la projection vectorielle $proj_{z^b}$ pour donner Z_{sp} qui va être utilisée pour obtenir les commandes des moteurs. La commande F_{sp} est également utilisée avec la commande en angle ψ_{sp} pour obtenir le vecteur Ψ_{sp}. Cette boucle de vitesse comprend également un filtre anti-windup (non représenté sur la figure) pour assurer que l'intégrale du compensateur PID ne diverge pas si l'erreur de vitesse Δv venait à durer dans le temps.

7.8.2.4 Contrôleur d'attitude présent par défaut dans le logiciel PX4 utilisé dans le contrôleur de vol du quadricoptère F450J

Le contrôleur d'attitude illustré à la Figure 8.21 est composé de deux boucles en cascade. La première boucle (externe) calcule l'erreur entre la consigne d'attitude ϕ_{sp}, θ_{sp} et l'attitude estimée $\hat{\phi}, \hat{\theta}$ qui est multipliée par un gain (contrôleur P) pour générer les consignes de vitesse $\dot{\phi}_{sp}$, $\dot{\theta}_{sp}$. Le contrôleur de lacet, génère sa consigne $\dot{\psi}_{sp}$ à partir des consignes ϕ_{sp}, θ_{sp} et de la vitesse vraie TAS (True Air Speed) en utilisant les contraintes de coordination de virage (bloc noté "turn coordination") pour minimiser l'effet des accélérations latérales, générées lorsque l'aéronef est en dérapage[32]. Le contrôleur de taux de lacet contribue également à contrer les effets de lacet indésirable[33] et à minimiser le mode de roulis néerlandais. Le vecteur de consigne en vitesse angulaire $\dot{\Psi}_{sp} = [\dot{\phi}_{sp}, \dot{\theta}_{sp}, \dot{\psi}_{sp}]^T$ est formé puis transcrit dans le référentiel F_b du drone via la matrice Jacobienne J_l^b pour obtenir $\omega_{sp}^b = [\dot{\phi}_{sp}^b, \dot{\theta}_{sp}^b, \dot{\psi}_{sp}^b]^T$.

---

[32] Un aéronef est dit en vol "symétrique" lorsque sa trajectoire de vol est parallèle au flux d'air. Lorsque sa trajectoire n'est pas parallèle au flux d'air, on parle de vol "dissymétrique" ou en dérapage.
[33] https://youtu.be/sNV_SDDxuWk

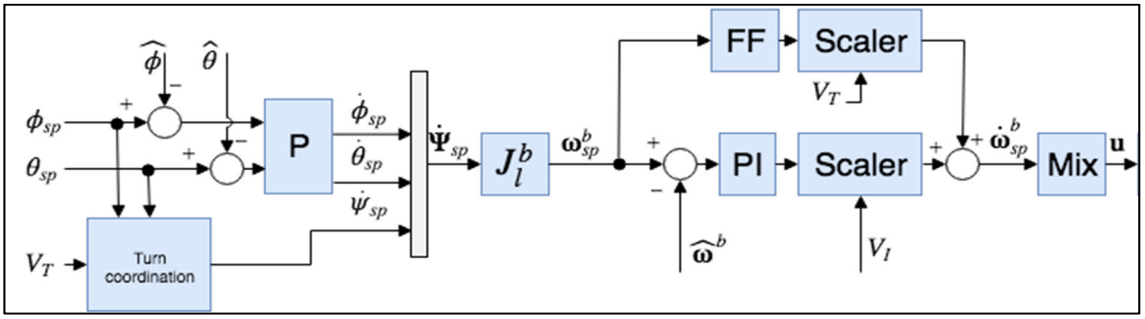


Figure 8.21 Contrôleur d'attitude PX4[34]

Ensuite, la boucle interne transmet l'erreur entre la consigne de vitesse angulaire ω_{sp}^b et la vitesse angulaire estimée $\hat{\omega}^b$ au compensateur PI pour générer l'accélération angulaire souhaitée $\dot{\omega}_{sp}^b$. Le gain anticipatif FF permet de linéariser l'amortissement aérodynamique illustré à la Figure 8.22 et reliant le coefficient de portance C_T avec l'angle d'incidence α.

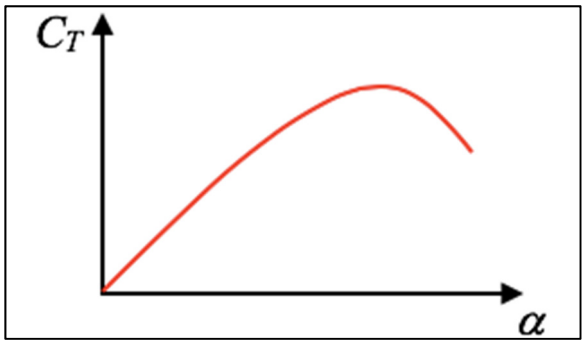


Figure 8.22 Allure de
l'amortissement aérodynamique

Comme nous pouvons l'apercevoir à la Figure 8.21 le filtre anticipatif FF et le compensateur PI sont associés à un bloc nommé "Scaler" (Mise à l'échelle) en sortie. Pour expliquer le rôle de ces blocs, remarquons tout d'abord que la sortie du bloc "Mix" (Mixeur) est composée des commandes en couples u. Or, ces couples générés à partir de la commande en accélération $\dot{\omega}_{sp}^b$ obtenue en sommant la sortie du compensateur PI et du filtre anticipatif FF sont fortement

[34] https://dev.px4.io/en/flight_stack/controller_diagrams.html

influencés par la vitesse relative V_T et la densité de l'air (plus précisément par la pression dynamique). Si aucune mise à l'échelle (rôle du bloc "Scaler") de la vitesse n'est effectuée, la boucle interne de contrôle ajustée pour une certaine vitesse de croisière fera osciller l'avion à une vitesse plus élevée ou donnera de mauvaises performances de suivi à basse vitesse. Plus de détail concernant le contenu des blocs "Scaler" est disponible sur le site de développement du PX4[35]. Notons que la performance de l'algorithme développé dans l'étage "Scaler" dépend fortement de la qualité du signal de mesure de la vitesse V_T.

7.8.2.5 Liens entre les variables d'estimations de l'état du drone et la précision des capteurs utilisés dans l'IMU du Pixhawk embarqué sur le quadricoptère F450J

Nous avons vu aux parties 7.8.2.3 et 7.8.2.4 que les variables mesurées utilisées dans les algorithmes de commande de vol sont les suivantes : l'attitude R_η ; la vitesse angulaire $\dot{R}_\eta$; la vitesse linéaire v et les postions linéaires x, y, z. Afin d'améliorer les performances de la commande, certaines de ces variables sont estimées à partir des capteurs présents dans le contrôleur de vol (IMU) et à l'extérieur du contrôleur de vol (GPS). Le Tableau 8.6 permet de faire le lien entre les variables nécessaire à la commande et la qualité (généralement satisfaisante) des variables mesurées utilisées dans le contrôleur de vol en termes de précision et de largeur de BP. Le capteur qui semble le plus limitatif est le GPS avec une précision de seulement ±2.5 m au mieux et une BP maximum de 10 Hz.

Tableau 8.6 Synthèse de la qualité des mesures utilisées dans le contrôleur de vol en fonction des capteurs de notre application réelle

Attitude et vitesse angulaire	$\hat{R}_\eta$ $\hat{\dot{R}}_\eta$	Estimée à partir du gyroscope (Ω_{IMU}), de l'accéléromètre ($\bar{a}_{IMU}$) et du magnétomètre (m_{IMU}) : • Généralement bonne précision (jusqu'à 2000 °/s (Ω_{IMU}) ; ±2 g pour 16 bit ($\bar{a}_{IMU}$) ; ±2 G pour 16 bit (m_{IMU})) et large BP (jusqu'à 8 kHz (Ω_{IMU}) ; 1600 Hz ($\bar{a}_{IMU}$) ; 100 Hz (m_{IMU})).

[35] https://dev.px4.io/en/flight_stack/controller_diagrams.html

Tableau 8.6 Synthèse de la qualité des mesures utilisées dans le contrôleur de vol en fonction des capteurs de notre application réelle (suite)

Vitesse horizontale	$\hat{v}_h$	Estimée à partir de l'accéléromètre ($a_h^{F_b} = \mathbb{P}_h \hat{R}_\eta a_{IMU}^{F_i}$) : • Le même accéléromètre que ci-dessus peut être utilisé, avec une précision de ±2 g pour 16 bits et une large BP d'environ 1600 Hz.
Position linéaire sur *z*	*z*	Obtenue directement à partir du baromètre : • Bonne précision (10 cm) et large BP (allant jusqu'à 2 kHz)
Positions linéaires sur *x, y*	*x, y*	Obtenues à partir du GPS • Précision moyenne (±2.5 m) et BP limité (10 Hz max)

7.9 Banc d'essai pour valider le dimensionnement des bras et l'équilibrage du quadricoptère F450J

Nous avons détaillé dans la section 8.1 le dimensionnement du quadricoptère F450J que nous utilisons dans le cadre de cette thèse. L'objectif de cette partie est de valider à partir de la méthodologie proposée dans (Zemam, 2012) le bon fonctionnement de chacun des bras du drone F450J et d'estimer ses symétries. Ainsi, pour chaque système de propulsion (ESC + moteur + Hélice) nous allons estimer à l'aide d'un banc de test représenté à la Figure 8.33 les coefficients :

- C_T : Permet de s'assurer que chaque système de propulsion dégage suffisamment de portance pour maintenir le drone en vol stationnaire et effectuer des trajectoires de vols. Nous pourrons évaluer ce paramètre avec l'expression (8.3) : $T = 4C_T \rho r^4 \omega^2 / \pi^2$;
- *Cp* : Permet de vérifier la consommation de chaque moteur. Ce paramètre sera déterminé à partir de l'expression (8.4) $P_p = 4C_p \rho r^5 \omega^3 / \pi^3$;
- α : Le rapport cyclique $\alpha = t_1/T$ exprimé en (8.2) permet d'évaluer le gain entre le moteur et la vitesse de rotation. Il est mesuré avec l'oscilloscope via la tension de sortie des ESC.

Notons que chaque sous-système de propulsion est testé indépendamment. Lorsque le moteur tourne et génère de la poussée par l'intermédiaire de l'hélice, le bras sur lequel il est fixé pivote

en "direction du lecteur" et le système mécanique vient en butée contre la balance permettant ainsi de relever une valeur *m* en kg sur la balance. Dans ce cas nous pouvons calculer la poussée générer par $T = 0{,}24mg$, avec *m* la masse relevée sur la balance, *g* la constante d'accélération gravitationnelle (9,81 Nm^2/kg^2) et 0,24 le rapport entre la longueur du bras horizontal du système de pivot (qui vient en butée sur la balance) et celui de la longueur verticale du système de pivot (celui sur lequel est accroché le sous-système de propulsion). Le rôle des autres éléments nommé sur la Figure 8.33 est décrit ci-dessous :

- Voltmètre : Mesure la valeur efficace de la tension en Volt en sortie de l'ESC ;
- Balance : Mesure le poids en kg généré par le système de propulsion ;
- Tachymètre : Mesure la vitesse de rotation du moteur en tr/min ;
- RC : Permet de contrôler la force de poussée générée par le système de propulsion, influence le rapport cyclique ;
- Oscilloscope : Permet de visualiser l'allure de la tension en fonction du temps en sortie de l'ESC et de mesurer le rapport cyclique $\alpha = t_1/T$;
- Station au sol : Permet de mesurer le courant débité par la batterie via la télémétrie.

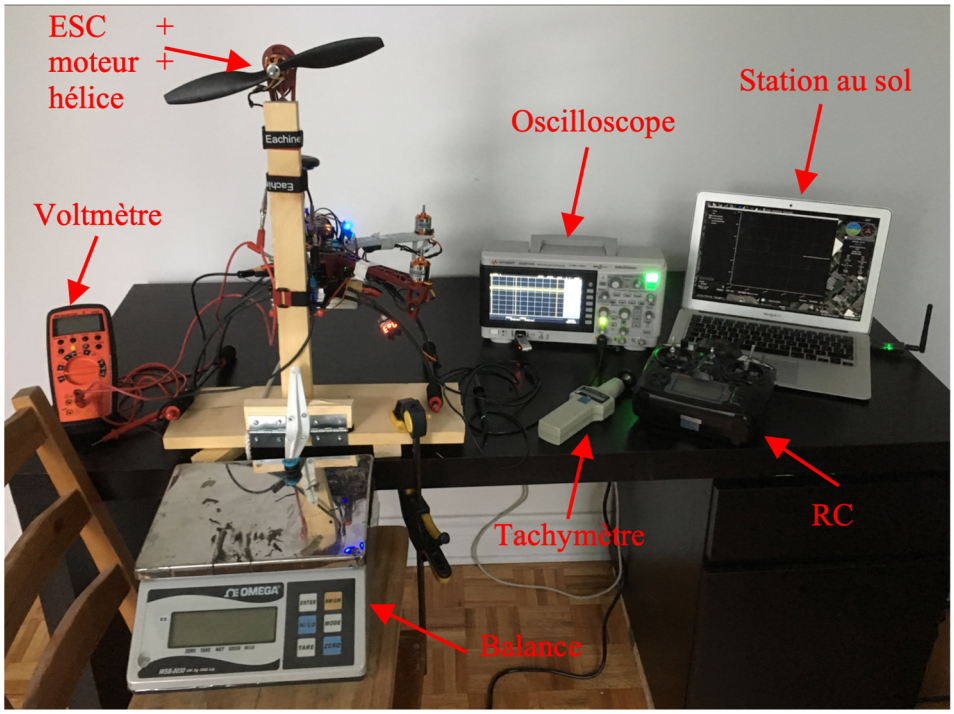


Figure 8.23 Banc de test pour valider le dimensionnement du système de propulsion du drone F450J

Nous parlerons ici des moteurs M_1, M_2, M_3 et M_4 en référence à leur emplacement numéroté de 1 à 4 dans la configuration en X du drone illustré à la Figure 8.24. Le sens de rotation des moteurs est indiqué par la direction des flèches.

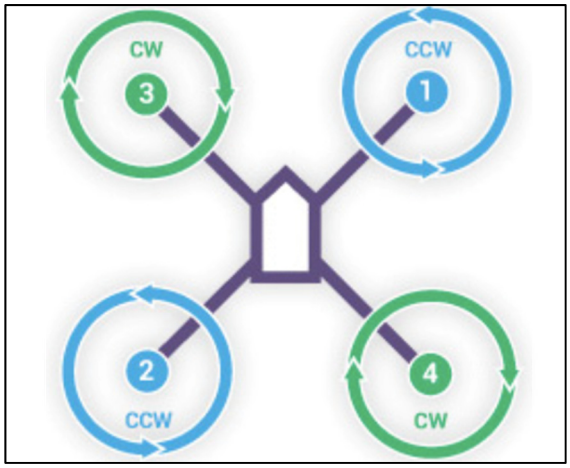


Figure 8.24 Configuration en X du quadricoptère F450J, emplacement et sens de rotation des moteurs[36]

7.9.1 Évaluation du coefficient C_T pour chaque bras du quadricoptère F450J

Dans cette section nous allons évaluer à l'aide du banc de test décrit à la Figure 8.23 les coefficients de portances C_T pour chaque bras du drone F450J. La Figure 8.25 montre en pointillé le rapport mesuré entre la vitesse de rotation ω et la poussée T pour les moteurs M_1, M_2, M_3 et M_4, où $T = 0{,}24mg$ est obtenu à partie de la mesure de m avec la balance, $g = 9.81$ Nm^2/kg^2 et la vitesse de rotation ω en tr/min est mesurée avec la tachymétrie. En trait plein nous apercevons une approximation quadratique de ce rapport du type $T = x\omega^2$, où x est fixée par la méthode essais erreur. Remarquons que selon la partie 7.8.1.1, la poussée minimale nécessaire au niveau de chaque système de propulsion pour maintenir le drone en vol

[36] http://ardupilot.org/copter/docs/frame-type-configuration.html

stationnaire est de 3,79 N, ce qui est amplement atteint pour les 4 moteurs et correspond à des vitesses de rotation d'environs 1300 - 1400 tr/min.

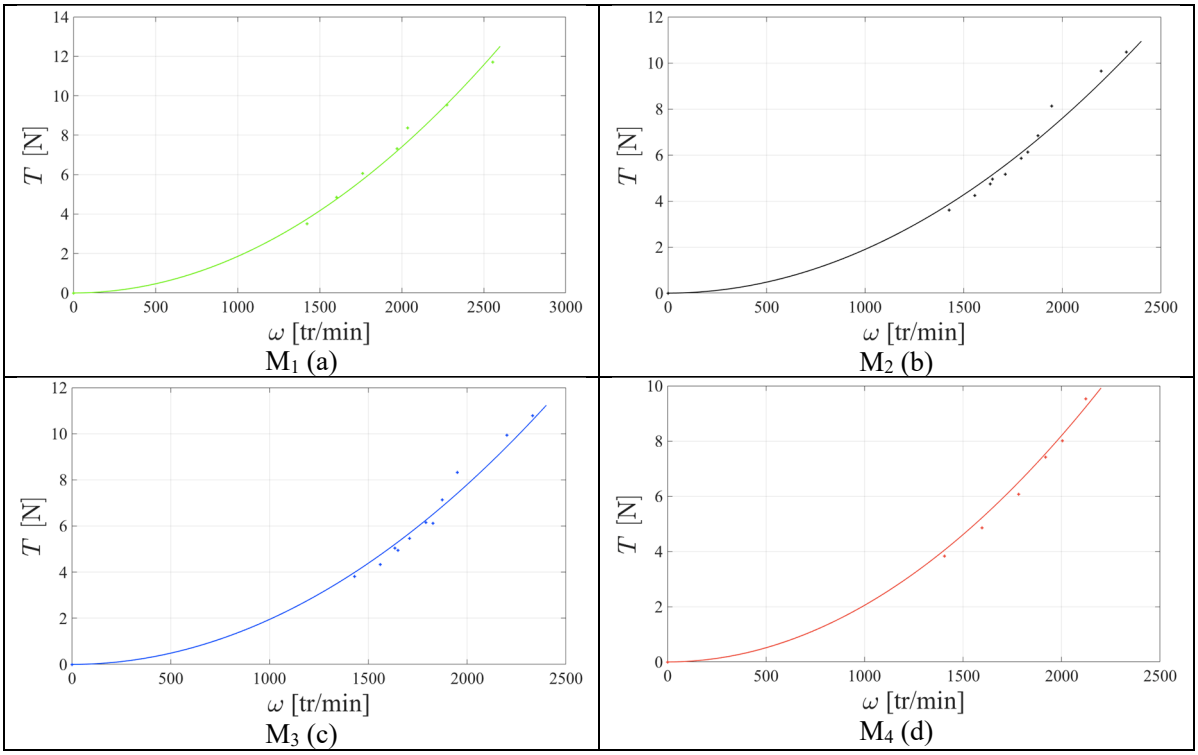


Figure 8.25 T en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $x\omega^2$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c), M_4 (d)

Sachant que $T = 4C_T\rho r^4\omega^2/\pi^2 \approx x\omega^2$; ρ = 1,225 kg/m^3 ; le diamètre de l'hélice est de 10 pouces, soit un rayon r de 12.7cm. Une approximation du coefficient C_T est donnée par :

$$C_T = \frac{x\pi^2}{4\rho r^4} \tag{8.4}$$

Le Tableau 8.7 résume les résultats obtenus pour les coefficients C_T. On observe des valeurs sensiblement similaires, ce qui est positif dans l'optique d'un drone équilibré.

Tableau 8.7 Approximations du coefficient C_T pour les moteurs M_1, M_2, M_3 et M_4

Moteur	x	C_T
M_1	$1{,}85.10^{-6}$	0.0143

M_2	$1{,}90.10^{-6}$	0.0147
M_3	$1{,}95.10^{-6}$	0.0151
M_4	$2{,}05.10^{-6}$	0.0159

La Figure 8.26 permet de comparer directement la poussée T en fonction de la vitesse ω pour les moteurs M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu) et M_4 (rouge). L'écart entre les moteurs est plus faible en basse vitesse (drone plus équilibré) et d'autant plus élevé que la vitesse augmente (drone moins équilibré).

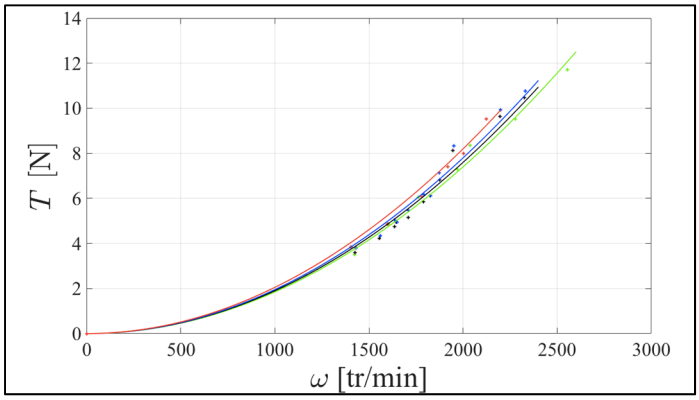


Figure 8.26 T en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $x\omega^2$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu), M_4 (rouge)

7.9.2 Évaluation du coefficient C_P pour chaque bras du quadricoptère F450J

Dans cette section nous allons évaluer à l'aide du banc de test décrit à la Figure 8.23 les coefficients de portances C_P pour chaque bras du drone F450J.

La Figure 8.27 montre en pointillé le rapport mesuré entre la vitesse de rotation ω et la puissance P_p pour les moteurs M_1, M_2, M_3 et M_4. Où $P_p = UI$ est obtenu avec la mesure du voltmètre pour la tension U (V) et le courant I (A) à partir de la télémétrie et de la station au sol. La vitesse de rotation ω en tr/min est mesurée avec la tachymétrie. En trait plein nous apercevons une approximation de ce rapport du type $P_p = k\omega^3$, où k est fixé par la méthode

essais/erreur. Nous remarquons que les moteurs atteignent une consommation d'environ 25 W pour une vitesse de rotation approximativement de 2500 tr/min.

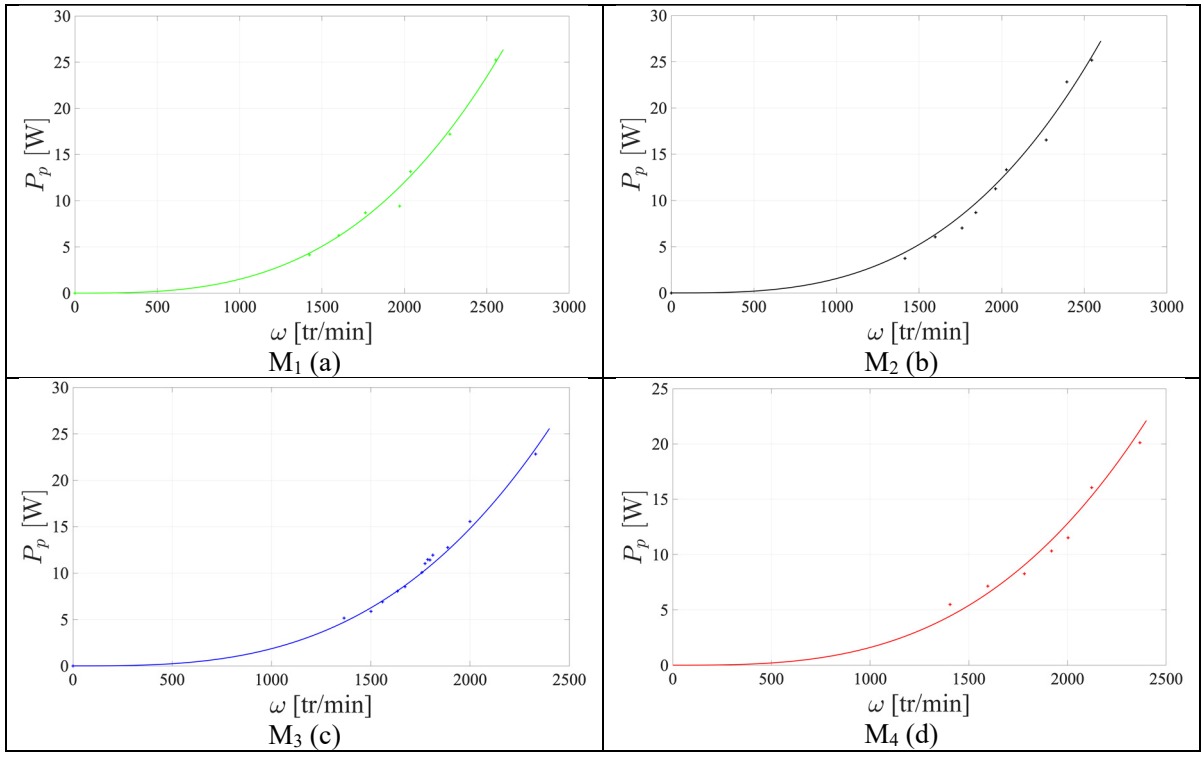


Figure 8.27 P_p en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k\omega^3$ en trait plein pour les moteurs : M1 (a), M2 (b), M3 (c), M4 (d)

Sachant que $P_p = 4C_p\rho r^5\omega^3/\pi^3 \approx k\omega^3$; ρ = 1,225 kg/m^3 ; le diamètre de l'hélice est de 10 pouces, soit un rayon de 12.7 cm ; une approximation du coefficient C_p est donnée par :

$$C_p = \frac{k\pi^3}{4\rho r^5} \tag{8.5}$$

Le Tableau 8.8 résume les résultats obtenus pour les coefficients C_p. On observe des valeurs sensiblement similaires, ce qui est positif dans l'optique d'un drone équilibré.

Tableau 8.8 Approximations du coefficient C_p pour les moteurs M1, M2, M3 et M4

Moteur	x	C_p

M_1	$1{,}5.10^{-9}$	2.8729e-04
M_2	$1{,}55.10^{-9}$	2.9687e-04
M_3	$1{,}85.10^{-9}$	3.5433e-04
M_4	$1{,}6.10^{-9}$	3.0645e-04

La Figure 8.28 permet de comparer directement la puissance P en fonction de la vitesse ω pour les moteurs M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu) et M_4 (rouge).

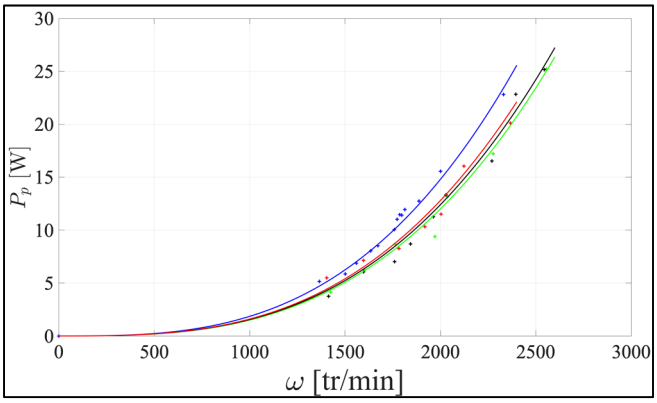


Figure 8.28 P_p en fonction de ω, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k\omega^3$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu), M_4 (rouge)

7.9.3 Évaluation du gain α pour chaque moteur du quadricoptère F450J

Dans cette section nous allons évaluer à l'aide du banc de test décrit à la Figure 8.23 le rapport cyclique α pour chaque bras du drone F450J.

La Figure 8.29 montre en pointillé le rapport mesuré entre le rapport cyclique α_i, où $i = \{1, 2 \ldots 4\}$, et la poussée T_i pour les quatre moteurs M_i. Où α_i est obtenu avec l'oscilloscope en mesurant le rapport t_1/T décrit à l'équation (8.1). Nous remarquons que la période T est de 131 ms dans notre cas. La poussée T_i étant obtenue avec la balance telle que décrite en 7.9.1. En trait plein nous apercevons une approximation linéaire du type $T_i = k_i\alpha_i$ ou k_i caractérise le coefficient directeur de la droite.

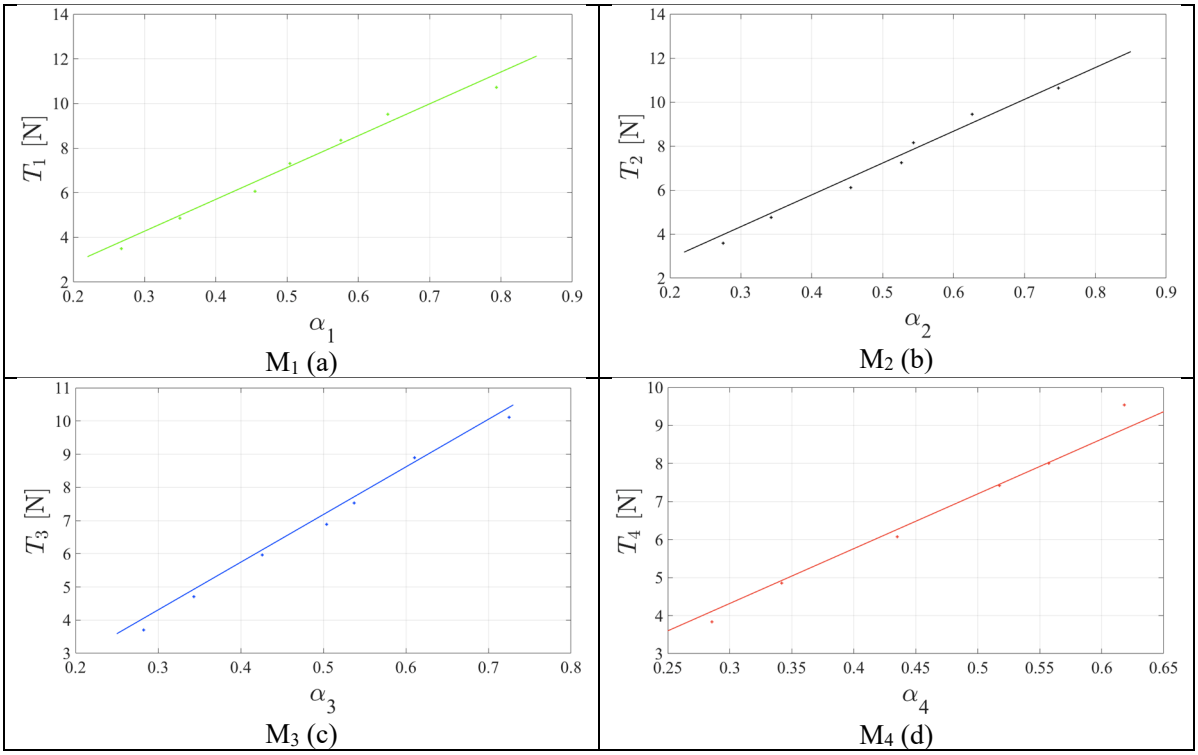


Figure 8.29 T en fonction de α, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k_i\alpha_i$ en trait plein pour les moteurs : M1 (a), M2 (b), M3 (c), M4 (d)

En s'appuyant sur le Tableau 8.9 on observe que le coefficient directeur k_i de la courbe $T_i = k_i\alpha_i$ est relativement proche entre chaque système de propulsion. Ce qui permet de déduire que le drone est relativement bien équilibré entre les différents systèmes de propulsion.

Tableau 8.9 Approximations du coefficient k_i pour les moteurs Mi

Moteur	k_i
M1	14,26
M2	14,46
M3	14,36
M4	14,40

De plus, en s'appuyant sur la Figure 8.30 nous observons que la poussée de vol stationnaire de 3,79 N correspond à un rapport cyclique $\alpha_i < 0.3$ pour les quatre moteurs. Le dimensionnement

de notre système est donc suffisant pour soulever le drone. De plus, cela laisse de la marge en termes de puissance disponible (au minimum ≈ 9.4 N pour le moteur M_4 en rouge) pour réaliser des trajectoires de vol plus dynamiques.

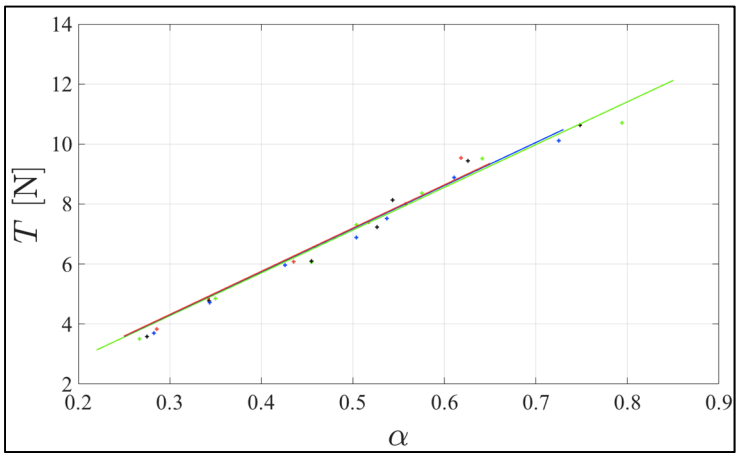
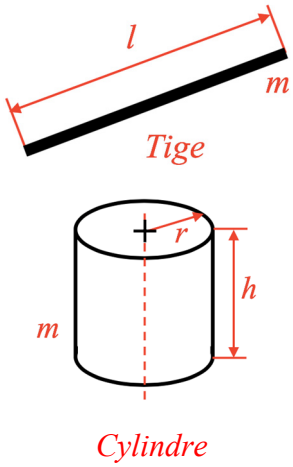


Figure 8.30 T_i en fonction de α_i, mesures pratiques en pointiller et fonctions approximées $k_i\alpha_i$ en trait plein pour les moteurs : M_1 (vert), M_2 (noir), M_3 (bleu), M_4 (rouge)

7.10 Calcul de la matrice d'inertie du quadricoptère F450J

Pour caractériser le quadricoptère F450J il est nécessaire d'estimer son moment d'inertie. Cette donnée est également utile dans la conception de l'algorithme de la commande B. Tel qu'indiqué dans (Mohammad A, 2016) une méthode précise pour estimer les moments d'inertie d'un drone consiste à utiliser un logiciel de CAD (Conception Assistée par Ordinateur). Cependant, cette méthode est généralement longue et complexe, nous nous tournerons donc dans cette section vers une méthode de calcul par approximation proposée dans (Zemam, 2012) que nous adapterons à notre système en assimilant le drone F450J en une somme de cylindre et de tige.

Commençons par rappeler les formules générales pour calculer les moments d'inertie d'une tige et d'un cylindre :



Inertie I de la tige : $I = \frac{ml^2}{2}$ (8.6)

- l : longueur de la tige en m ;
- m : masse de la tige en kg.

Inertie I du cylindre : $I = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$ (8.7)

- r : rayon du cylindre en m ;
- h : hauteur du cylindre en m ;
- m : masse du cylindre en kg.

En se référant à la Figure 8.31 divisons l'inertie répartie de chaque bord de l'axe x tel que :

$$I_{xx} = I_{xx1} + I_{xx2} \tag{8.8}$$

où I_{xx1} concerne l'inertie le long des bras b_3 et b_4 tandis que I_{xx2} concerne l'inertie le long des bras b_1 et b_2. Nous pouvons approximer l'inertie I_{xx1} avec (8.25) par une barre de longueur $L = 2l$ où $l = 23$ cm est la longueur d'un bras :

$$I_{xx1} = \frac{m_1 L^2}{2} = 2\, m_1 l^2 \tag{8.9}$$

avec m_1 la somme des masses suivantes :

$$m_1 \approx 2\left(m_{moteur} + m_{hélice} + m_{adapateur} + \frac{m_{châssis}}{4} + m_{ESC}\right)$$

$$m_1 \approx 2\left(0.07 + 0.014 + 0.015 + \frac{295}{4} + 0.028\right) \tag{8.10}$$

$$m_1 \approx 0.4015kg$$

Où $m_{adaptateur}$ représente la masse de l'adaptateur situé au-dessus de l'hélice localisée à la Figure 8.32 et permettant de la fixer au moteur.

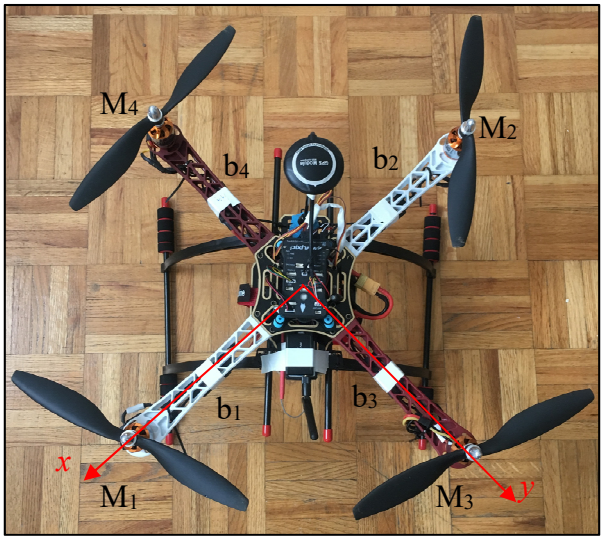


Figure 8.31 Localisation des moteurs M_1, ... M_4 et des bras b_1, ... b_4 sur le drone réel

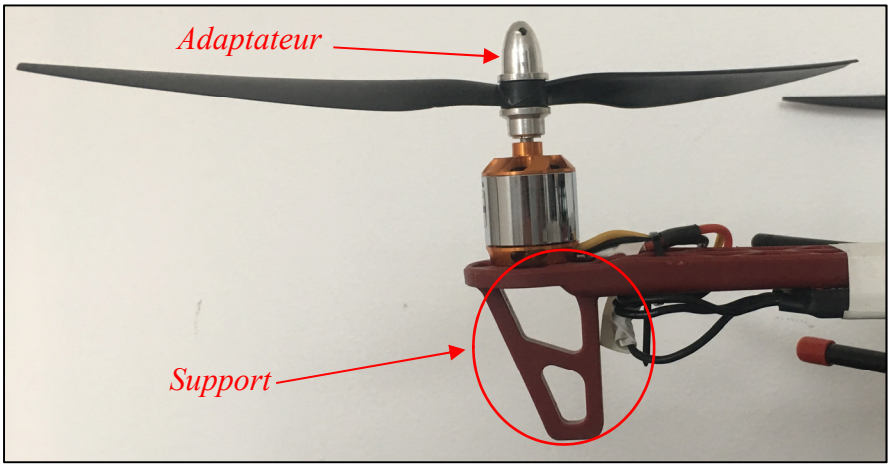


Figure 8.32 Localisation de l'adaptateur pour l'hélice et du support pour moteur

On obtient donc :

$$I_{xx1} = 2 \times 0.4015 \times 0.23^2 = 0.0425 \text{ kg.m}^2 \quad (8.11)$$

I_{xx2} décrit l'inertie reliée aux moteurs M_1 et M_2 de part et d'autre de l'axe x et peut être calculée à l'aide de la formule du cylindre (8.7). En considérant un premier cylindre de rayon r égal à celui du moteur et de hauteur h décrivant la distance entre le bas du *support* et le haut de

l'adaptateur puis, un second cylindre englobant le corps du drone avec un rayon r_h et une hauteur h_h, nous obtenons l'expression de l'inertie I_{xx2} :

$$I_{xx2} = 2\left(\frac{m_2 r^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{12}\right) + \left(\frac{m_h r_h^2}{4} + \frac{m_h h_h^2}{12}\right) \tag{8.12}$$

avec la masse m_2 reliée à l'axe d'un moteur :

$$\begin{aligned} m_2 &\approx m_{moteur} + m_{hélice} + m_{adapateur} + m_{support} \\ m_2 &\approx 0.07 + 0.014 + 0.015 + 0.018 \\ m_2 &\approx 0.117\ kg \end{aligned} \tag{8.13}$$

où $m_{support}$ désigne la partie servant de support au moteur localisé à la Figure 8.32.

Le diamètre r du corps d'un moteur vaut environ $r = 0.028$ m.
La hauteur h vaut :

$$\begin{aligned} h &\approx h_{moteur} + h_{hélice+adapateur} + h_{support} \\ h &\approx 0.022 + 0.036 + 0.015 \\ h &\approx 0.093\ m \end{aligned} \tag{8.14}$$

La masse m_h du corps du drone :

$$\begin{aligned} m_h &\approx m_{batterie} + m_{Pixhawk} + m_{GPS} + m_{3DR} + m_{transmitteur} + m_{buzzer} \\ &\quad + m_{voltmètre} + m_{connectivité} \\ m_h &\approx 0.432 + 0.062 + 0.045 + 0.02 + 0.033 + 0.002 + 0.07 + 0.4105 \\ m_h &\approx 1.075\ kg \end{aligned} \tag{8.15}$$

La hauteur h_h et le rayon r_h du cylindre contenant le corps du drone sont approximativement de 0.12 m et 0.0685 m. Ce qui donne une inertie I_{xx2} :

$$I_{xx2} \approx 2\left(\frac{0.117 \times 0.028^2}{4} + \frac{0.117 \times 0.093^2}{12}\right) + \left(\frac{1.075 \times 0.0685^2}{4} + \frac{1.075 \times 0.12^2}{12}\right)$$
$$I_{xx2} \approx 0.028\ kg.m^2 \tag{8.16}$$

Nous en déduisons l'inertie totale selon l'axe *x* :

$$I_{xx} \approx 0.0425 + 0.0026$$
$$I_{xx} \approx 0.0451\ kg.m^2 \tag{8.17}$$

En considérant que le drone est symétrique nous pouvons faire l'approximation suivante $I_{xx} \approx I_{yy}$. La dernière inertie à calculer selon l'axe *z* est I_{zz} et peut être décomposée en additionnant l'inertie du corps I_{zzh} et celle des quatre moteurs I_{zz1} :

$$I_{zzh} = \frac{m_h r_h^2}{2} \approx \frac{1.0175 \times 0.0685^2}{2} \approx 0.002387$$
$$I_{zz1} = 4 \times \frac{m_{prop} l^2}{2} \approx 4 \times \frac{0.2 \times 0.23^2}{2} \approx 0.02116. \tag{8.18}$$

Avec $m_{prop} \approx m_{moteur} + m_{hélice} + m_{adapateur} + m_{bras} + m_{ESC}$

$$m_{prop} \approx 0.07 + 0.014 + 0.033 + 0.055 + 0.028$$
$$m_{prop} \approx 0.2 \text{ kg}$$

On en déduit l'inertie par rapport à l'axe *z* :

$$I_{zz} = I_{zz1} + I_{zzh}$$
$$I_{zz} \approx 0.002387 + 0.02116 \tag{8.19}$$
$$I_{zz} \approx 0.023547$$

La matrice d'inertie *I* du quadricoptère peut alors être représentée par :

$$I \approx diag(0.0451 \quad 0.0451 \quad 0.0236) \tag{8.20}$$

Si l'on se réfère aux travaux existants dans (Mohammad, Alsharif et Holzel, 2016) pour un drone similaire (châssis/dimension/poids) les résultats obtenus pour la matrice d'inertie sont de $I = diag(0.0451, 0.0451, 0.0170)$. Soit une différence d'environ 2.2% relativement à l'équation (8.20) le long des axes *x, y* ce qui atteste d'une bonne précision concernant nos résultats.

Une différence de 38.8% le long de l'axe *z* entre l'inertie obtenue pour le drone F450J en (8.39) et celle présente dans l'article de (Mohammad, Alsharif et Holzel, 2016). Cette différence plus importante que celle observée pour les inerties I_{xx} et I_{yy} peut s'expliquer par le fait que le drone utilisé dans l'article de (Mohammad, Alsharif et Holzel, 2016) semble avoir moins de matériel (et donc de poids) présent au niveau corps du drone.

7.11 Définition des objectifs de performance de la commande B pour l'implémenter dans le contrôleur de vol du F450J

Les deux sections qui suivent présentent l'apport expérimental de cette thèse dans le domaine de la commande des drones. Tout d'abord nous expliquons une méthode de conception de la commande B à partir de la commande PID déjà existante dans le contrôleur Pixhawk du drone F450J. La section suivante présente les résultats expérimentaux obtenus avec la commande PID et la commande B obtenue avec cette méthode de design.

Nous avons vu en 7.8.2 que le contrôleur d'origine dans le PX4 de type PID est composé d'une chaîne de contrôle pour les positions linéaires et une chaîne de contrôle pour l'attitude. Dans cette section, l'objectif est de concevoir un compensateur B pour remplacer le contrôleur de la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ et $\dot{\theta}$, nommée *PI* sur la Figure 8.21. Plusieurs raisons expliquent le changement de seulement ces deux contrôleurs dans un premier temps : il est toujours préférable de modifier un modèle existant par petite partie, cela permet de mieux isoler le problème le cas échéant ; la qualité des mesures estimées (et donc des capteurs d'attitudes) de l'attitude est a priori suffisamment bonne (précisions, BP des capteurs et estimateurs) pour

viser une amélioration de la commande. Ce qui n'est pas le cas pour l'estimation des positions linéaires puisqu'elles dépendent principalement du GPS dont la BP est au maximum de 10 Hz et la précision de ±2.5 m ; pour implémenter le contrôleur dans le drone nous avons utilisé le convertisseur PSP[37] de Matlab en suivant la méthodologie développée dans (Zhong, 2015). Nous verrons dans un premier temps l'allure des compensateurs de vitesse angulaire de type PID déjà présent dans le PX4. Nous utiliserons ensuite ces compensateurs PID comme point de repère pour concevoir des compensateurs B correspondant avec des objectifs fréquentiels et temporels similaires. Notons que, les compensateurs PID présents dans le PX4 ont été obtenus en pratique par méthode essai/erreur, en suivant la méthodologie proposée sur le site de développement du PX4[38]. Ainsi, il est possible que ces compensateurs PID soient proches, mais pas nécessairement optimisés. Cependant, un intérêt de la méthode de comparaison proposée ici entre les commandes B et PID est de rester valable même si le compensateur PID présent dans le drone n'est pas parfaitement optimisé. En effet, cette approche consiste à égaler dans les fréquences intermédiaires le diagramme de Bode de la boucle ouverte pour les compensateurs B et PID. Ainsi, toute modification du compensateur PID se répercuterait sur le compensateur B et cela reviendrait donc à changer le point d'opération utilisé pour la comparaison. Nous évoquerons également à partir de ce point de repère comment viser des améliorations supplémentaires des performances du drone avec la commande B.

7.11.1 Gains des contrôleurs PID implémentés dans le contrôleur de vol Pixhawk du quadricoptère F450J

Nous allons détailler ici les fonctions de transferts des compensateurs $PID_{\dot{\phi}}$ et $PID_{\dot{\theta}}$ présentes dans le compensateur PI de la chaîne de commande en attitude illustrée à la Figure 8.21. Ces fonctions de transfert seront utilisées pour fixer des objectifs de conception de la commande B et l'implémenter dans le contrôleur de vol du quadricoptère F450J.

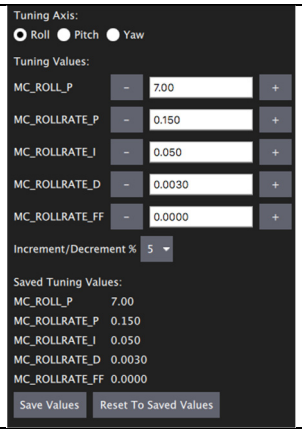
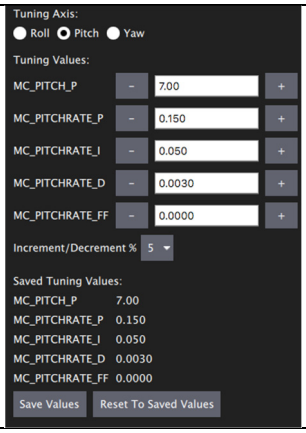
---

[37] https://www.mathworks.com/hardware-support/pixhawk.html
[38] https://docs.px4.io/en/config_mc/pid_tuning_guide_multicopter.html#thrust_curve

L'accès aux gains de ces compensateurs est réalisable avec le logiciel QGC dont des captures d'écran sont visibles dans le Tableau 8.10. Ainsi en se concentrant uniquement selon ϕ nous retrouvons un gain proportionnel K_p pour corriger la position angulaire nommée MC_ROLL_P égale à 7. Le compensateur de vitesse angulaire $PID_{\dot{\phi}}$ est quant à lui composé des gains K_p, K_i, K_d nommés respectivement MC_ROLLRATE_P, MC_ROLLRATE_I, MC_ROLLRATE_D et dont les valeurs numériques sont : 0,15 ; 0,05 et 0,003. Nous remarquons que, logiquement aux vues des symétriques du drone, les gains entre les chaînes de commande sur ϕ et θ sont identiques. Nous en déduisons l'expression du compensateur de vitesse angulaire $PID_{\dot{\phi}}$ qui servira de point de départ pour concevoir le compensateur B :

$$PID_{\dot{\phi}} = 0.150 + \frac{0.05}{s} + 0.003s \tag{8.21}$$

Tableau 8.10 Paramètres des compensateurs PID présents dans la chaîne de commande de l'attitude (ϕ et θ)

ϕ	θ
	
$PID_{\phi} = K_p$ $K_p = 7$ $PID_{\dot{\phi}} = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d$ $K_p = 0.150$ $K_i = 0.050$ $K_d = 0.0030$	$PID_{\theta} = K_p$ $K_p = 7$ $PID_{\dot{\theta}} = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d$ $K_p = 0.150$ $K_i = 0.050$ $K_d = 0.0030$

7.11.2 Objectifs de conception pour implémenter la commande B dans le contrôleur de vol PX4 du quadricoptère F450J

Présentons maintenant une méthode de conception de la commande B pour l'implémenter dans le contrôleur de vol PX4 du quadricoptère F450J. Notons qu'à ce stade de notre étude, la fonction de transfert du PID en (8.21) est implémenté expérimentalement dans le contrôleur de vol PX4 du quadricoptère F450J et a prouvée sa fonctionnalité lors de tests pratiques. Il a donc paru judicieux d'utiliser ce compensateur PID comme point de départ pour la conception dans un but expérimental de la commande B.

Les compensateurs B étudiés au Chapitre 7 ont été conçus pour commander la position angulaire avec une inertie différente du drone réel qui a été estimée en (8.20). Il s'agit donc d'adapter notre compensateur B utilisé en simulation en se référant à l'expression de $P(s)(5,5) = P_\theta(s)$ en (3.38) pour le processus $P_{\dot\theta}(s)$, correspondant à la dynamique de déplacement angulaire suivante (avec la nouvelle valeur d'inertie I_{yy} = 0.0441) :

$$P_{\dot\theta}(s) = sP_\theta(s) = \frac{1}{I_{yy}s} \approx \frac{1}{0.0441s} \approx \frac{22.68}{s} \tag{8.22}$$

En se référant au CHAPITRE 5, l'allure du compensateur B que nous avions conçu pour les commandes en position angulaire ϕ ou θ en (5.144) est :

$$C_\theta(s) = P_\theta^{-1}(s)\, k_1\, \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\, \frac{s+z}{s+p} \left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^k \tag{8.23}$$

Avec k_1 = 53 ; ω_1 = 0.07 ; ω_2 = 34 ; z = 0.08 ; p = 0.02 ; k = 2.
Le compensateur (8.23) était appliqué pour le déplacement en position angulaire du processus $P_\theta(s)$. Sauf que dans le cas présent notre compensateur $C_{\dot\theta}(s)$ est appliqué au processus $P_{\dot\theta}(s)$ relié à la dynamique de vitesse angulaire définie en (8.22), qui ne diffère que d'une dérivée par rapport à $P_\theta(s)$. Ce qui se caractérise dans le compensateur $C_{\dot\theta}(s)$ par un degré du numérateur

de $P_{\dot{\theta}}^{-1}(s)$ égale à 1 (au lieu de 2 pour $P_{\theta}^{-1}(s)$) et par conséquent une valeur de $k = 1$ au lieu de 2 dans l'équation (8.23). D'où l'expression suivante pour $C_{\dot{\theta}}(s)$:

$$C_{\dot{\theta}}(s) = P_{\dot{\theta}}^{-1}(s)\, k_1\, \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\, \frac{s+z}{s+p}\, \frac{\omega_2}{s+\omega_2}$$
$$C_{\dot{\theta}}(s) = \frac{s}{22.68}\, 53\, \frac{0.07}{s+0.07}\, \frac{s+0.08}{s+0.02}\, \frac{34}{s+34} \qquad (8.24)$$

La Figure 8.33 montre en rouge la boucle ouverte $J(s) = C_{\dot{\theta}}(s)P_{\dot{\theta}}(s)$ obtenue avec le compensateur B et en bleu lorsque c'est le compensateur $PID_{\dot{\phi}}(s)$ exprimé en (8.21) qui est en boucle ouverte avec le processus $P_{\dot{\theta}}(s)$ Défini-en (8.22). Nous remarquons un gain similaire entre ces deux boucles ouvertes pour les fréquences centrales. Ce qui donne un point de départ intéressant pour une première implémentation de la commande B dans le drone. Ensuite si cette implémentation fonctionne il sera possible de chercher à améliorer davantage les performances du système en modifiant le gain k_1 et les fréquences de coupures ω_1 et ω_2 présentes dans l'expression du compensateur B en (8.24) pour donner une allure semblable à la courbe verte (dans le cas de la Figure 8.33 : $k_1 = 280$, $\omega_1 = 0.06$ rad/s et $\omega_2 = 39$ rad/s) du compensateur B amélioré. Ce dernier compensateur requiert entre autres de la part des capteurs une BP plus large et une plus grande précision de mesure pour fonctionner correctement.

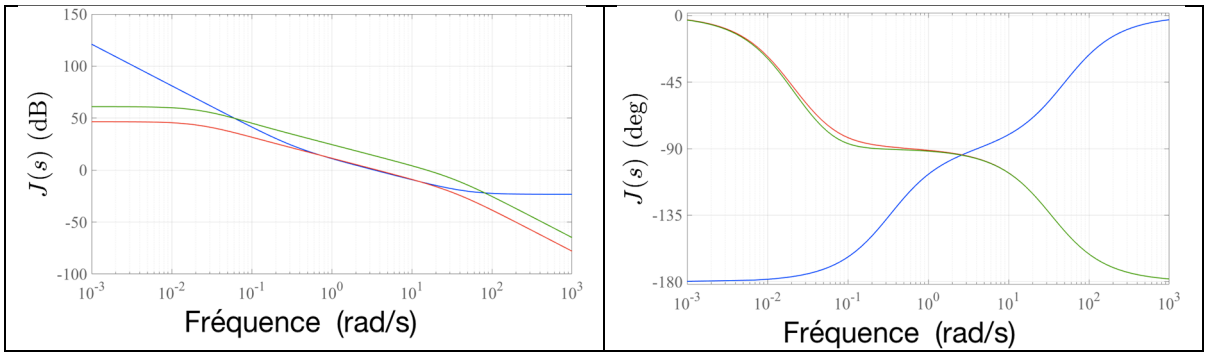


Figure 8.33 Bode de la boucle ouverte $J(s)$ avec à gauche l'amplitude et à droite la phase pour les compensateurs : $PID_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert)

Cette augmentation du gain k_1 vise, comme nous pouvons l'apercevoir sur le diagramme de Nyquist Figure 8.34 un meilleur suivi de $réel\{J(s)\} = -0.5$ lorsque les fréquences augmentent et font chuter le gain de la boucle ouverte. Les marges de gain reliées aux compensateurs PID, B et B amélioré étant respectivement de 88.3 deg, 64 deg et 65.7 deg.

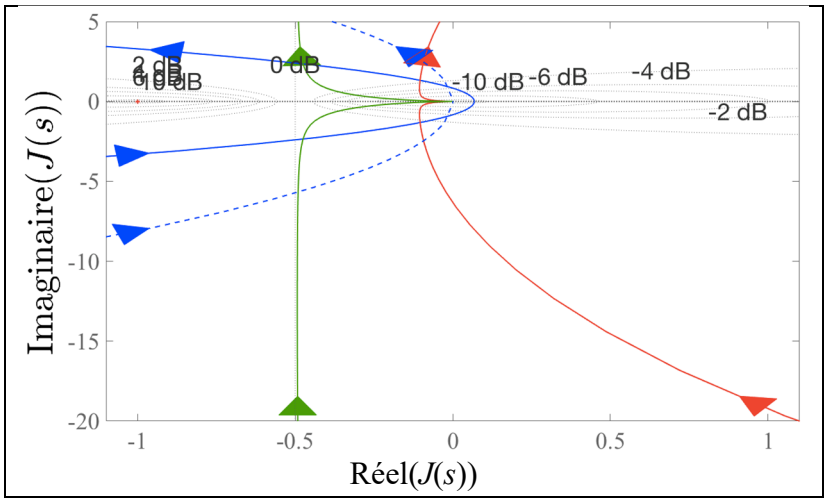


Figure 8.34 Nyquist de la boucle ouverte $J(s)$ pour les compensateurs : $PID_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert)

Les représentations fréquentielles des trois compensateurs sont illustrées à la Figure 8.35.

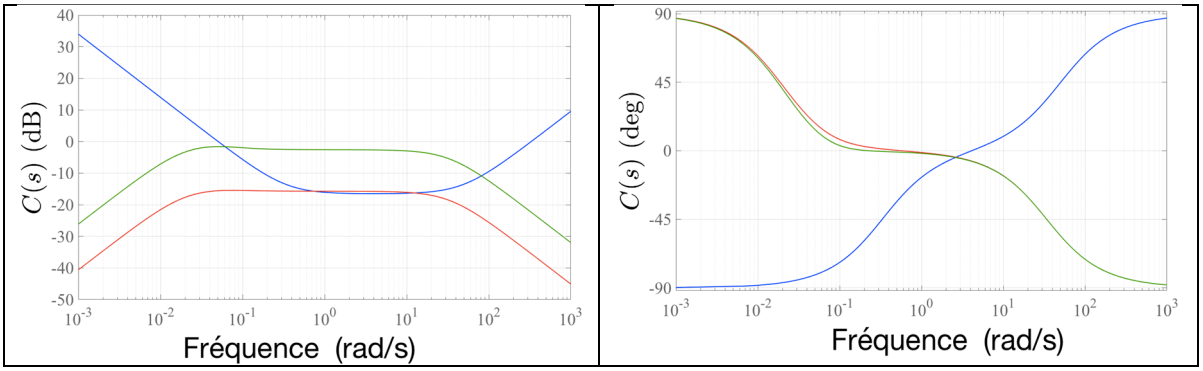


Figure 8.35 Bode des compensateurs (gains à gauche et phases à droite) : $PID_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert)

Les fonctions de transfert en boucle fermée $T(s)$ pour les trois compensateurs sont représentées à la Figure 8.36. Les compensateurs $PID_{\dot{\phi}}$ (en bleu) et B (en rouge) obtiennent une BP similaire

d'environ 3.5 rad/s et 4.16 rad/s. Cependant le compensateur $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ présente un léger dépassement fréquentiel de 0.575 dB qui se répercute par un dépassement de 7 % sur la réponse unitaire illustrée à la Figure 8.37. Un temps de réponse plus important (0.75 s pour la commande B en rouge et 2.56 s pour le PID en bleu) est également constaté. Le compensateur B amélioré (en vert) obtient sur le diagramme de Bode de la transmission une BP allant jusqu'à 24 rad/s. Malgré un dépassement sur la réponse temporelle de 7 % son temps de réponse est plus court avec 0.19 s. Cette amélioration ne sera perceptible que si les BP des capteurs et des signaux en sorties des estimateurs sont suffisamment grandes pour permettre cette performance. Le cas échéant il sera toujours possible de diminuer sensiblement cette BP pour rechercher une amélioration moindre des performances.

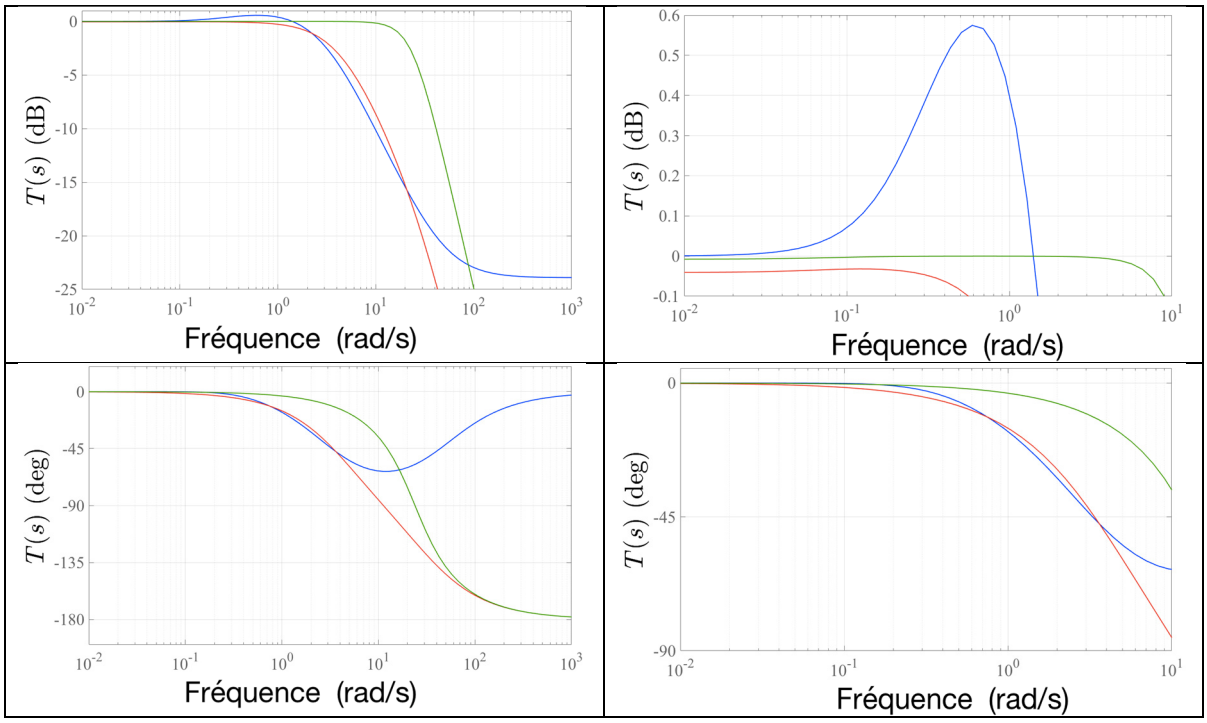


Figure 8.36 Bode des fonctions de transfert en boucle fermée $T(s)$ à gauche et zoom autour de 0 dB à droite pour les compensateurs (gains sur la première ligne et phases sur la deuxième ligne) : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert)

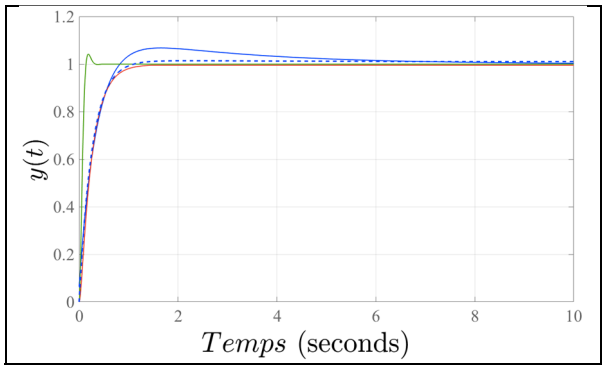


Figure 8.37 Réponse unitaire de la sortie $y(t)$ pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert)

Tableau 8.11 Performances temporelles pour une réponse à un échelon des compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$; B ; B amélioré

	PID	B	B amélioré
$t_{s2\%}$ [s]	4.69	0.99	0.238
t_r [s]	0.638	0.721	0.091
D [%]	7	0	4

Une consommation énergétique du signal de commande $u(t)$ sensiblement plus importante pour la commande B (rouge) serait à prévoir comparativement au $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) à la Figure 8.38. La commande B améliorée (verte) serait quant à elle plus énergivore, ce qui semble cohérent lorsque l'on améliore simultanément les performances temporelles et fréquentielles.

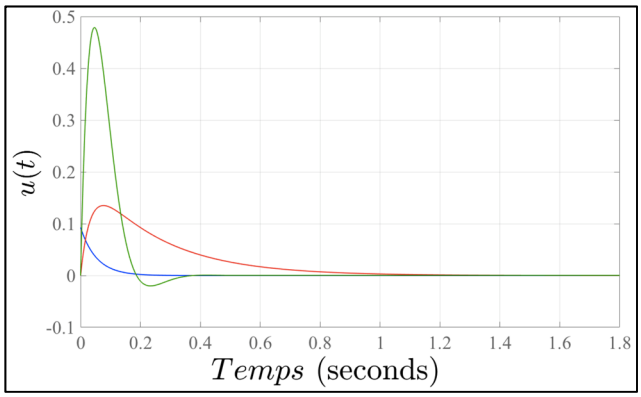


Figure 8.38 Réponse temporelle de la commande $u(t)$ pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge) ; B amélioré (vert)

7.12 Résultats expérimentaux obtenus avec les commandes PID et B sur le quadricoptère F450J

Dans cette partie nous allons comparer les résultats obtenus en pratique sur le drone F450J entre les commandes B et PID tels que décrits en (8.23) et en (8.21). Ces tests réalisés en extérieur visent à comparer les performances de ces deux compensateurs dans une situation de vol stationnaire sur une durée d'environ 100 s. Pour s'assurer de la fiabilité des résultats, les tests ont été réalisés la même journée dans des conditions ensoleillées et sans vent.

7.12.1 Vol stationnaire effectué expérimentalement avec le quadricoptère F450J

Les résultats pratiques présentés ici concernent un vol stationnaire avec le drone F450J d'une durée d'environ 100 s pour une consigne en altitude absolue de 2.5 m. Le terrain étant situé à 15 m d'altitude par rapport à la mer, le retour de mesure du GPS peut être interprété comme si la consigne de déplacement en altitude (axe z) est de 17.5 m. Les déplacements mesurés en 3D sur les axes x, y, z sont tracés à la Figure 8.39 et 2D sur les axes x, y à la Figure 8.40, en rouge pour la commande B et en bleu pour le PID. On observe que les déplacements sur x, y sont plus concentrés dans le cas de la commande B. Sur l'axe z les commandes PID et B obtiennent des résultats similaires.

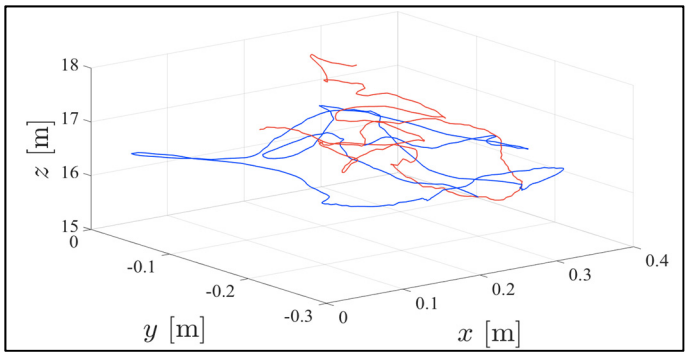


Figure 8.39 Mesures expérimentales avec le drone F450J des déplacements en 3D sur x, y, z pour un vol stationnaire pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; compensateur B (rouge)

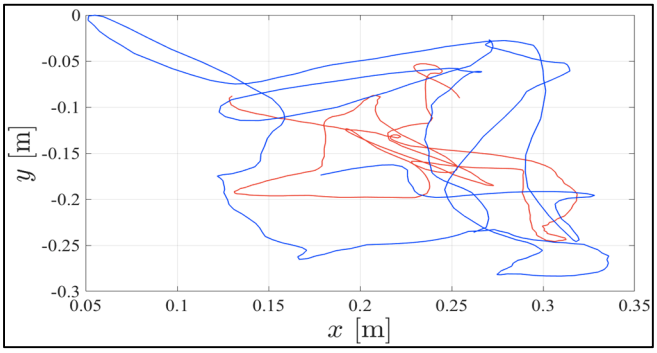


Figure 8.40 Mesures expérimentales avec le drone F450J des déplacements en 2D sur *x, y* lors d'un vol stationnaire pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge)

Les résultats dans le domaine temporel sur les axes *x, y, z* sont représentés à la Figure 8.41. Ces résultats confirment ceux illustrés précédemment à la Figure 8.39 et la Figure 8.40. On constate néanmoins que pour les deux compensateurs le drone ne se positionne pas autour des positions de références sur *x, y, z,* mais avec un décalage d'environ 15-20 cm sur *x, y* et d'environ 1 m sur l'axe *z*. L'imprécision du GPS peut expliquer ce type de phénomène.

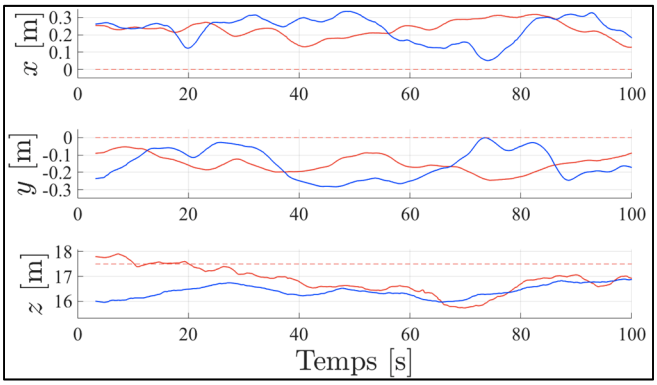


Figure 8.41 Mesures expérimentales avec le drone F450J des déplacements sur *x, y, z* lors d'un vol stationnaire pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge)

Le Tableau 8.14 montre l'écart moyen avec la consigne moy_i ainsi que l'écart type σ_i sur les axes $i = \{x, y, z\}$. On remarque notamment un écart type sensiblement plus faible avec la

commande B par rapport à la commande PID sur les axes x et y avec, dans le même temps des moyennes identiques pour les deux commandes.

Tableau 8.12 Moyenne moy_i et écart type σ_i pour les axes $i = x, y, z$

	PID	B
moy_x	0.233	0.233
moy_y	-0.151	-0.151
moy_z	16.4117	16.824
σ_x	0.0719	0.0473
σ_y	0.0857	0.0477
σ_z	0.2538	0.5280

Les amplitudes des angles ϕ, θ, ψ sont illustrées à la Figure 8.42 avec en rouge la commande B et en bleu la commande PID. Nous constatons la cohérence entre les déplacements des positions des angles ϕ, θ et les positions linéaires x, y tracées à la Figure 8.41. On remarque également que l'amplitude des angles ϕ, θ, ψ est plus faible dans le cas de la commande B comparativement au PID. Ce qui atteste d'un comportement moins nerveux de l'appareil.

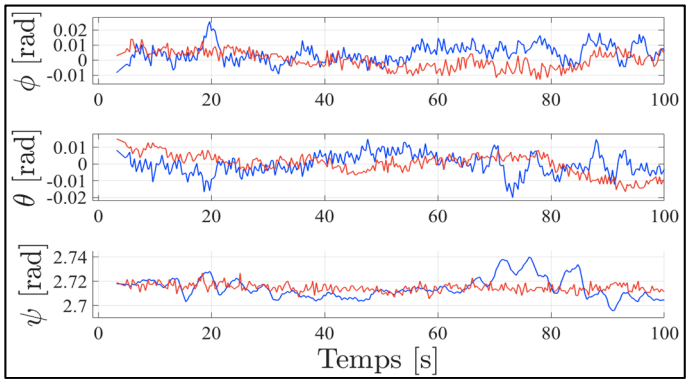


Figure 8.42 Mesures expérimentales avec le drone F450J des orientations angulaires ϕ, θ, ψ lors d'un vol stationnaire pour les compensateurs : $PID_{\dot{\phi}}$ (bleu) ; B (rouge)

Les commandes en vitesse ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 (c.-à-d. en sortie des compensateurs) sont illustrées à la Figure 8.43 en (a) pour la commande PID et en (b) pour la commande B. On constate que ces commandes en vitesses sont plus centrées autour de la vitesse de vol stationnaire dans le cas de la commande B, avec une amplitude sensiblement plus faible.

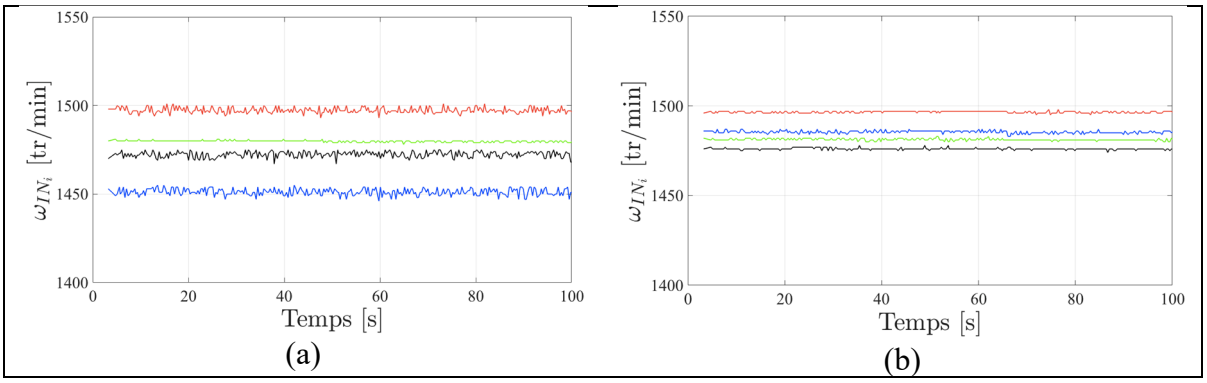


Figure 8.43 Commandes expérimentales avec le drone F450J en vitesse ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 envoyées au drone pour les compensateurs : PID$_{\dot{\phi}}$ (a) ; B (b)

Les commandes en couple *L, M, N* et en poussée T_z correspondantes aux commandes en vitesses ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 de la Figure 8.43 sont représentées à la Figure 8.44.

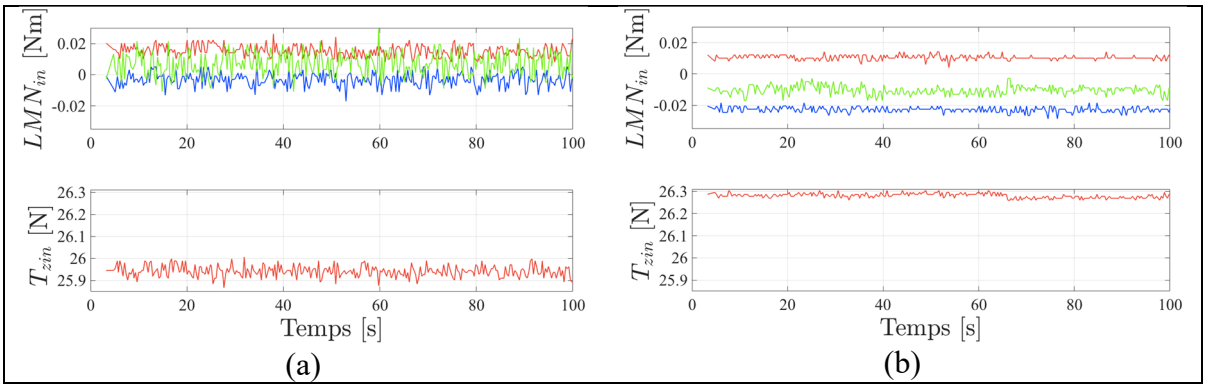


Figure 8.44 Commandes expérimentales avec le drone F450J en couples *L, M, N* et en poussée T_z envoyées au drone pour les compensateurs : PID$_{\dot{\phi}}$ (a) ; B (b)

Les mesures des vitesses ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 (c.-à-d. transmises par la télémétrie) sont illustrées à la Figure 8.45 en (a) pour la commande PID et en (b) pour la commande B. On constate que la commande B présente des résultats moins bruités et une amplitude plus faible par rapport à la

commande PID. Ce constat se répercute sur l'allure des mesures en couple *L, M, N* et en poussée T_z illustrées Figure 8.46.

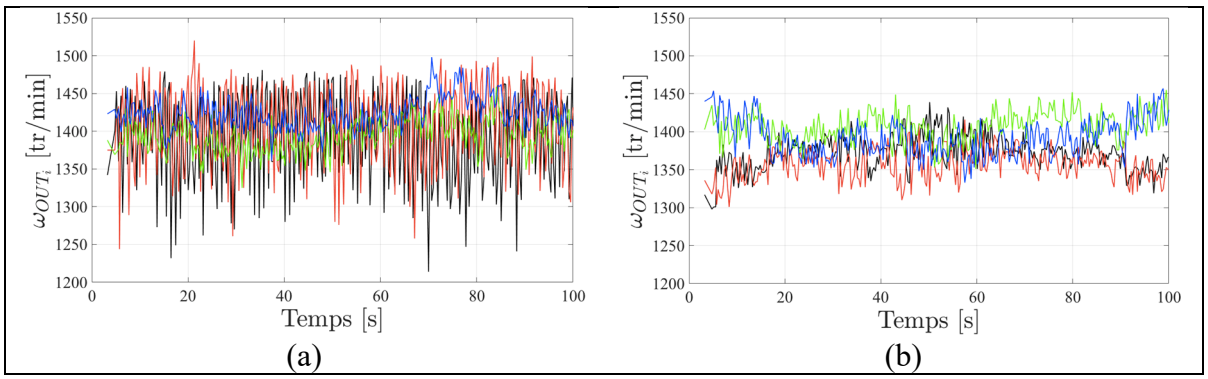


Figure 8.45 Mesures expérimentales avec le drone F450J des vitesses ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 venant du drone pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (a) ; B (b)

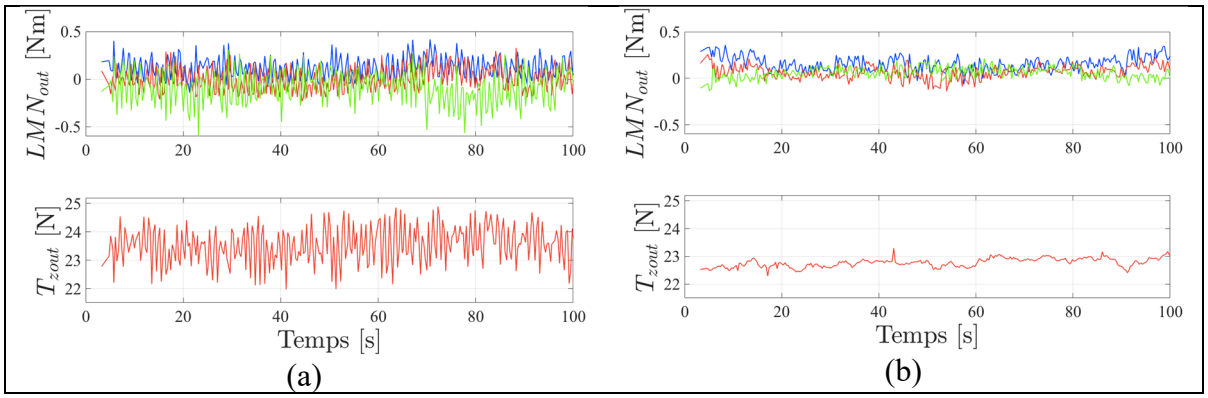


Figure 8.46 Mesures expérimentales avec le drone F450J en couples *L, M, N* et en poussée T_z venant du drone pour les compensateurs : $\text{PID}_{\dot{\phi}}$ (a) ; B (b)

Le Tableau 8.13 reporte plusieurs variables pour évaluer les performances des signaux de commandes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et *L, M, N*, T_z envoyés aux processus (indice IN) et mesurés en sortie du processus (indice OUT) pour les compensateurs PID et B. On y retrouve : les moyennes des normes H_2 (définies en (4.13)) moy($H_2(\omega_i)$), moy($H_2(L, M, N)$) et $H_2(T_z)$ des signaux de commande en vitesses ω_1 à ω_4, des couples *L, M, N* et de la poussée T_z envoyés au processus ; les écarts types (définis-en (7.4)) moy($\sigma(\omega_i)$), σ(moy(L, M, N)) et $\sigma(T_z)$ respectivement des signaux de commande en vitesses ω_1 à ω_4, des couples *L, M, N* et de la

poussée T_z mesurés en sortie du processus. On remarque en s'appuyant sur le Tableau 8.13 que la commande B obtient presque systématiquement une consommation d'énergie (norme H_2), sensiblement moins importante que la commande PID, que ce soit en entrée ou en sortie du processus. L'écart type est systématiquement plus faible avec la commande B, ce qui atteste d'une nervosité moindre comparativement à la commande PID.

Tableau 8.13 Norme H_2 et écart type σ des signaux transmis en entrée du drone (indice IN) et des signaux mesurés en sortie du drone (indice OUT), pour les compensateurs PID et B : vitesses de rotation ω_i (pour i = 1, ... , 4) ; couples L, M, N ; poussée T_z

	PID_{IN}	B_{IN}	PID_{OUT}	B_{OUT}
moy($H_2(\omega_i)$)	25599	25675	24297	23899
moy($\sigma(\omega_i)$)	1.4022	0.5892	40.3365	21.9264
moy($H_2(L, M, N)$)	2.0093	0.2547	2.8305	1.8152
σ(moy(L, M, N))	0.0052	0.0020	0.1398	0.0709
$H_2(T_z)$	448.5767	454.4331	407.1626	393.7986
$\sigma(T_z)$	0.0260	0.0102	0.6657	0.1576

7.13 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le dimensionnement du drone autopilote F450J utilisant le logiciel embarqué PX4. Ensuite un banc d'essai a permis de valider chaque bras moteur de la solution choisie et l'équilibrage du drone F450J en estimant les coefficients de portances C_T, de puissance C_p et les coefficients k_i des moteurs.

Puis, une approximation par le calcul nous a permis de déterminer la matrice des moments d'inertie du drone F450J. L'obtention de cette matrice d'inertie a permis de concevoir un compensateur B que l'on a implémenté dans le drone F450J pour commander la vitesse angulaire autour des axes horizontaux. La commande PID du manufacturier déjà présente par défaut dans le drone F450J servant de point de référence pour la conception du compensateur B.

Les tests expérimentaux en vol stationnaire ont montré une sensible amélioration de la précision sur les axes *x, y* pour la commande B relativement à la commande PID. De plus, la commande B montre par rapport à la commande PID une plus faible consommation et une moins grande nervosité des commandes en couple et en poussée puisqu'elles sont moins bruitées et possèdent des amplitudes plus faibles.

La version de la commande B améliorée évoquée en 8.4 n'a pas permis d'améliorer expérimentalement les performances obtenues avec la commande B. Plusieurs raisons peuvent être évoquées : certaines saturations présente dans le code source dont le rôle est d'assurer que le compensateur implémenté fonctionne dans une gamme de fonctionnements stable et sécuritaire pourrait brider la performance du compensateur ; dans le code source, les pentes d'accélération et de décélération sont limitées pour garantir le bon fonctionnement du drone ; la précision (±2,5 m) et la BP (10 Hz max) du GPS sont également des caractéristiques pouvant limiter les performances d'un compensateur plus performantes.

Plusieurs pistes sont à prendre en considération pour améliorer davantage les résultats expérimentaux : remplacer le GPS par un capteur RTK[39] permettrait d'avoir une précision de mesure de l'ordre de ±2,5 cm contre 2,5 m pour le GPS (BP à vérifier) ; implémenter directement la commande B dans le code source en C++ pour modifier l'ensemble des contrôleurs de vitesse et position, linéaire et angulaire ; réduire les contraintes (progressivement puisque ces contraintes sont présentent pour des raisons de sécurités) de saturation des actionneurs et la limitation des pentes d'accélérations et de décélérations.

[39] https://docs.px4.io/en/gps_compass/rtk_gps.html#supported-rtk-devices

CONCLUSION GÉNÉRALE

Une nouvelle méthode de commande, la commande B, a déjà montré sa capacité à combiner simultanément d'excellentes performances dans les domaines temporels et fréquentiels, comparé aux commandes robustes telles que la commande H_∞, sur un système SISO relativement simple : une boule en lévitation magnétique (D. Bensoussan, 2015b).

L'objectif des travaux de recherche présentés dans cette thèse était d'évaluer les performances de la commande B sur un système plus complexe, c.-à-d. MIMO. Ainsi, le contrôle d'un quadricoptère présente deux défis majeurs, idéals pour tester les performances de la commande sur un système multivariable : la complexité de sa commande puisqu'il est sous-actionné avec quatre entrées de commande (correspondant aux quatre vitesses de rotation des moteurs) pour six degrés de liberté que sont les trois axes linéaires x, y, z et les trois orientations spatiales ϕ, θ, ψ ; la multiplicité des capteurs de position du drone dans l'espace, est susceptible d'introduire de nombreuses incertitudes et délais de mesure dans la boucle commande ; enfin il existe une influence des couplages entre les moments sur les différents axes.

Pour situer les performances de la commande B, nous avons comparé dans cette thèse, ses performances avec les commandes linéaires PID, H_2, H_∞, μ-synthèse ainsi que les commandes non linéaires backstepping et hiérarchique. Ainsi, l'étude théorique poussée de chacune de ces commandes, combinée aux nombreuses simulations ont permis d'avoir une bonne appréciation des performances de la commande B dans son ensemble : fréquentielle ; temporelle ; robustesse et consommation d'énergie.

Un apport important de cette thèse est sa partie pratique où sont décrits le fonctionnement matériel et logiciel, ainsi que le dimensionnement et la validation du quadricoptère F450J basé sur la technologie PX4. Des tests extérieurs ont permis de comparer les performances lors d'un test de vol stationnaire entre les commandes PID et B. Les résultats obtenus avec la commande B sont encourageants, toutefois de nombreuses améliorations restent possibles, comme l'a

montré par exemple la commande B_u tenant compte de la limitation du signal de commande d'entrée au processus.

Le caractère multidisciplinaire de cette thèse couvre les domaines mécanique, électrique, aérodynamique, télécommunication et traitement du signal. De plus, les études poussées en théorie, simulation et pratique en font une thèse à forte valeur ajoutée sans les secteurs de la commande et plus particulièrement celui des drones.

Modélisation d'un quadricoptère

La première étape a consisté à modéliser les dynamiques de translation et de rotation d'un drone de type quadricoptère. Les équations de la dynamique nous ont permis d'obtenir un modèle de quadricoptère suffisamment consistant pour simuler le comportement du drone avec précision, tout en conservant la simplicité nécessaire à la synthèse des algorithmes. Le système non linéaire obtenu met en évidence de forts couplages entrées-sorties ainsi que l'effet prononcé des perturbations telles que les forces extérieures comme le vent et le couple gyroscopique. L'effet d'une perturbation extérieure générée par le vent sur la stabilité de la boucle de commande a été étudié en simulation. Cependant, les conditions de vol n'étant pas appropriées (vitesse trop faible et pas suffisamment exigeante), l'effet du couple gyroscopique sur la dynamique de la trajectoire de vol était trop faible pour être considéré dans la suite de l'étude.

Pour être en mesure de concevoir des compensateurs linéaires, des hypothèses de vol stationnaire ont été appliquées au modèle non linéaire du drone. Cela a donné lieu à deux modèles linéaires de drone, permettant de passer dans le domaine de Laplace pour concevoir les commandes linéaires : l'approximation linéaire du drone négligeant les non-linéarités ; la linéarisation de Taylor et sa représentation d'état négligeant les couplages.

L'approximation non linéaire de drone permet d'obtenir un modèle de drone fonctionnant avec des gains proches de celui du modèle non linéaire. Cette approche permet d'appliquer, sous

réserve d'une consigne de trajectoire de référence peu exigeante, les algorithmes de commande linéaire sur la modélisation non linéaire de drone. Cela offre la possibilité d'étudier les performances des commandes linéaires, lorsqu'appliquées à un modèle non linéaire de processus, au regard des couplages entrées-sorties et de leurs robustesses face aux incertitudes.

A contrario, le modèle de drone linéarisé selon Taylor pour des conditions de vols stationnaires résulte en un modèle diagonal. De plus, les gains du modèle du processus mis en jeu dans la modélisation linéaire par Taylor, sont très différents de ceux présents dans la modélisation non linéaire et rendent ce type de modèle relativement éloigné du modèle réel de drone. Cependant, cette approche permet d'appliquer les compensateurs linéaires sur des modèles linéaires de drone, donnant l'accès à la représentation d'état, qui est un outil pratique pour étudier la commandabilité et l'observabilité d'un système ainsi que de passer dans le domaine de Laplace et réaliser son étude fréquentielle.

Finalement, en considérant également les structures de commande en translation et rotation en cascade ou séparée, quatre configurations se dégagent : modélisation linéaire du processus avec commande en translation et rotation en cascade ; modélisation linéaire du processus avec commande en translation et rotation séparée ; modélisation non linéaire du processus avec commande en translation et en rotation en cascade ; modélisation non linéaire du processus avec commande en translation et en rotation séparée.

Conception des commandes linéaires et non linéaires

Dans cette thèse les cinq commandes linéaires B, PID, H_2, H_∞, μ-synthèse ont été appliquées sur des modèles linéaires, puis sur des modèles non linéaires de drone. En guise de référence (puisque fréquemment utilisées dans le domaine des drones), les commandes non linéaires backstepping et hiérarchique, ont également été appliquées sur le modèle non linéaire de drone. À des fins de comparaison, la conception des commandes B, H_2, H_∞ et μ-synthèse reposent sur un minimum et un maximum similaire de la fonction sensibilité. La commande PID vise quant à elle un temps de montée similaire à celui de la commande B. Sous ce prisme de comparaison

particulier, l'ensemble de ces commandes génèrent, eu égard à la consigne de trajectoire de référence, les signaux de commande en couples et en poussée en sortie des compensateurs nécessaires pour permettre au quadricoptère de poursuivre la mission qui lui est assignée. Un étage de conversion permet de traduire ces couples et cette poussée en vitesses de rotation des moteurs directement exploitable par le modèle considéré du drone.

La stabilité et les performances de la boucle de commande conçue avec la commande B sont basées sur des considérations de sensibilité. Celle-ci assure une faible erreur statique et un régime transitoire offrant des marges de phase et de gain optimisées pour une réponse temporelle ultrarapide et sans dépassement. Les commandes H_2, H_∞ et μ-synthèse reposent sur une modélisation de la boucle de commande sous forme standard, utilisant des fonctions de pondération sur les signaux de commande et d'erreur pour l'obtention d'un compensateur stable et robuste. La comparaison de ces compensateurs avec celui de la commande B a été réalisée en fonction de l'allure fréquentielle de la sensibilité, soit un gain de basse fréquence et gain de hautes fréquences identiques. La commande PID a été conçue par placement de pôles de manière à égaler le temps de montée de la réponse unitaire de la commande B. Finalement, les structures de commande par backstepping et hiérarchique assurent leur stabilité selon le critère de Lyapunov. Leurs réglages sont assurés par le placement des valeurs propres des variables d'erreurs et de leurs dérivées.

Travaux de simulation

Pour situer les performances de la commande B dans son domaine, une étape nécessaire a consisté à la comparer à d'autres commandes de références comme les commandes PID, H_2, H_∞ et μ-synthèse. Pour couvrir l'ensemble des performances des commandes utilisées, sous le prisme de comparaison évoqué dans la section précédente, l'analyse de plusieurs domaines a été abordée selon des critères : fréquentiels ; temporels ; robustesse et de la consommation d'énergie.

Il en ressort une consommation d'énergie sensiblement plus importante pour la commande B relativement aux commandes H_2, H_∞ et μ-synthèse. Cette consommation d'énergie

supplémentaire pour la commande B est sans doute nécessaire et justifiée pour combiner simultanément des bonnes performances dans les domaines fréquentiels, temporels et de robustesse. Les risques de saturation des actionneurs et le décrochage du drone sont peu constatés dans le cas d'une modélisation linéaire de drone. Cependant, lorsque les commandes B, H_2, H_∞ et μ-synthèse sont appliquées au modèle non linéaire du drone, les risques de saturation des actionneurs et de décrochage du drone sont plus importants.

Les performances de la commande PID peuvent sembler convaincantes dans les domaines fréquentiel et temporel (bien que la présence de dépassement et d'oscillation vient ternir certains résultats). Mais ses bonnes performances s'accompagnent d'une faible robustesse et d'une consommation d'énergie excessive générée par des amplitudes des signaux de commande trop importantes. Il s'ensuit fréquemment la saturation des actionneurs et le décrochage potentiel du drone.

Les performances temporelles des commandes backstepping et hiérarchique bien que stables, sont relativement lentes. Cependant, l'amplitude des signaux de commande étant faible cela laisse de la marge pour placer les valeurs propres des erreurs plus loin de l'axe imaginaire et ainsi accélérer les réponses temporelles. Toutefois, les performances de ces deux commandes sont beaucoup plus robustes que les commandes linéaires vis-à-vis des perturbations, et parviennent à conserver leur niveau de performance malgré l'augmentation des non-linéarités. Les consommations des signaux d'énergie et de commande sont bien plus faibles relativement aux commandes linéaires.

La dernière partie de cette section de simulation présente une approche supplémentaire (Commande B_u) pour la conception de la commande B. Cette approche graphique utilise le logiciel GeoGebra relayé dans (Benkhellat, 2017) et permet de prendre en compte une minimisation du signal de commande dans la conception du compensateur. Ainsi, nous avons constaté pour un vol stationnaire en présence de vent qu'une sensible réduction du temps d'établissement de la réponse temporelle a permis de réduire l'amplitude des angles (réduction

du risque de décrochage) et des signaux de commandes (réduction du risque de saturation des actionneurs), tout en étant plus robuste vis-à-vis des perturbations extérieures.

Conception d'un drone réel

La première section du chapitre de la partie expérimentale présente le fonctionnement général et le dimensionnement du drone F450J, basé sur la technologie PX4 et le logiciel de station au sol QGroundControl. Sont alors expliqués le fonctionnement et le rôle des capteurs embarqués sur le drone. La connexion, le fonctionnement et le dimensionnement du matériel embarqué sur le châssis du drone sont détaillés. L'architecture du logiciel interne embarqué dans le contrôleur de vol Pixhawk, principalement dans l'optique du contrôle des actionneurs est détaillée.

Les algorithmes d'estimations ont mis en évidence certaines imperfections (biais de mesure et dérive), pouvant altérer les performances de la boucle de commande. Les liens entre les estimateurs et les capteurs ont également mis en évidence des faibles bande passante et fréquence d'échantillonnage du GPS, pouvant éventuellement limiter les performances du drone F450J.

La construction d'un banc d'essai a permis de faire des tests aérodynamiques pour estimer des coefficients de puissances, de poussées et de rapport cycliques du quadricoptère F450J. Le bon fonctionnement des quatre bras moteur et un bon équilibrage du drone ont pu être constatés. De plus, les faibles dérives et biais de mesure des capteurs de l'IMU, notamment après quelques minutes de chauffe, ont confirmé leur bon fonctionnement.

Finalement l'estimation de la matrice d'inertie a été réalisée par sa modélisation physique. La précision des coefficients de la matrice d'inertie est suffisamment bonne pour avoir permis de concevoir des compensateurs B applicables en pratique.

Tests expérimentaux

L'optimisation du PID présent dans le contrôleur interne PX4 du drone F450J a été réalisée en pratique par la méthode essais-erreur. La connaissance approximative du modèle actuel de drone et le manque de structure ne permettaient pas d'avoir l'assurance d'un réglage optimal du compensateur PID. La méthode de comparaison alors proposée consiste à égaler le gain dans la bande passante intermédiaire entre les fonctions de transfert des commandes PID et B, pour le contrôle de l'attitude en vitesse. Ainsi, même si les conditions d'opérations changent sensiblement en optimisant davantage le contrôleur PID, le réajustement de la commande B au niveau de la bande passante intermédiaire permet de conserver des conditions de comparaison valable. Au final, c'est la gestion en basse fréquence et de la transition dans les hautes fréquences qui influencent la différence de performances entre les deux compensateurs.

Des tests de vols stationnaires ont permis de comparer les performances entre les compensateurs PID et B. Un déplacement sensible plus concentrique le long des axes x et y a été constaté avec la commande B. Mais l'amélioration majeure constatée avec l'application de la commande B, concerne la réduction de l'amplitude et de la nervosité des signaux de commandes et de mesures, en couple et en poussée (ou indirectement de la vitesse de rotation des moteurs), tout en réduisant leurs consommations d'énergie.

Suite des travaux sur la commande B

Cette thèse a été l'opportunité d'évaluer les performances d'une nouvelle méthode de commande linéaire : la commande B. La conception de cette commande reposant sur l'optimisation de la sensibilité, a été présentée pour les systèmes SISO, MIMO, stable et instable. Le détail du théorème de la commande B permettant d'appuyer la validité de ces différentes approches de conception a été exposé.

Un des avantages majeurs de cette méthode de commande est d'annuler la dynamique (la commande B est en partie basée sur l'inversion du processus) du processus et ainsi d'imposer à la boucle fermée la dynamique désirée. Ainsi une bonne connaissance de la fonction de

transfert du processus est suffisante pour rejoindre des résultats optimisés et conçus à l'avance. Le gain de temps pour la conception du compensateur est donc considérable comparativement à d'autres commandes du même ordre, tel que les commandes H_2, H_∞ et μ-synthèse. Du plus, l'ordre du compensateur B obtenu est généralement bien plus faible que celui des commandes H_2, H_∞ et μ-synthèse, ce qui en facilite son implantation dans une puce électronique.

Une première méthode pour optimiser les paramètres nécessaires à la conception de la commande B en trois étapes a été proposée : avec erreur statique ; sans erreur statique ; annulation du dépassement. Notons que cette tâche peut être longue, mais une fois les paramètres des compensateurs obtenus ils peuvent être réutilisés pour d'autres processus linéaires du même type. Par la suite une seconde méthode détaillée dans (Benkhellat & Bensoussan, 2017) reposant sur l'utilisation du logiciel Geogebra, a permis de régler très rapidement, précisément et intuitivement les paramètres des compensateurs B utilisés.

L'application de la commande B à un système 2×2 a démontré une très bonne capacité de la commande B à allier simultanément de bonne performance temporelle et fréquentielle (Houimdi, 2015). Sa capacité à découpler les entrées-sorties et ainsi à minimiser l'effet des couplages a pu être démontrée.

Perspectives de recherche futures

Bien que cette thèse bénéficie d'une partie théorique et de simulation extrêmement solide, permettant de situer une nouvelle méthode de commande performante, certains aspects reliés aux essais expérimentaux auraient pu être améliorés.

Tout d'abord une meilleure connaissance de la maquette utilisée permettrait un réglage plus précis du compensateur. Dans cette optique, bien que la modélisation du drone sous logiciel CAD soit longue, demande une expertise spécifique en mécanique et des ressources logicielles, elle permettrait une connaissance plus précise de la matrice d'inertie du drone.

Ensuite, la maquette du drone F450J peut être améliorée d'un point de vue matériel selon plusieurs aspects. Le modèle du châssis consiste à fixer quatre bras sur un support central fait en deux plaques à partir de vis. Ce type de structure présente l'avantage de pouvoir changer des parties (comme un bras) en cas de bris, mais est particulièrement sensible aux vibrations qui peuvent réduire la précision des mesures des capteurs, contrairement à un châssis monté d'un seul tenant, qui peut être moins sensible aux vibrations. En outre, remplacer le GPS par un capteur de type RTK[40] permettrait d'avoir une précision de mesure de l'ordre de ±2,5 cm contre 2,5 m pour le GPS (BP à vérifier), améliorant ainsi la précision du positionnement linéaire du drone.

D'un point de vue logiciel il s'agirait d'implémenter la commande B dans le code source (nécessite de savoir coder en C++) pour modifier les quatre contrôleurs de vitesse et de position, linéaire et angulaire, plutôt qu'un seul. La réduction des contraintes de saturation des actionneurs et de limitation des pentes d'accélération et de décélération permettrait de travailler avec des bandes passantes plus importantes. Un déplacement plus rapide, plus précis et plus robuste du drone peut alors être envisagé.

Enfin, de nombreuses commandes ont été conçues et testées en simulation, mais seulement deux ont été utilisées en pratique. Seules les conditions de vol stationnaires ont été exploitées en pratique ; plus de temps et un environnement extérieur adéquat (suffisamment de place et sécuritaire) ou une soufflerie auraient permis de tester les différents scénarios de vol exposés dans le chapitre de simulation et évaluer les performances des commandes dans des conditions de vol dynamique. D'autres situations de test qui peuvent arriver en pratique sont également d'intérêt pour tester la robustesse des algorithmes de commande, par exemple : l'ajout croissant de poids sur le drone pour un scénario donné ; des conditions de vol avec un moteur défaillant (réduction de sa poussée) ; une perte ponctuelle de communication. L'ajout d'un

---

[40] Technique de positionnement par satellite basée sur l'utilisation de mesures de la phase des ondes porteuses des signaux émis par les systèmes GPS, GLONASS ou Galileo.

système de positionnement du drone dans l'espace par flux optique[41] (Herisse, Hamel, Mahony, Francois-Xavier, & Russotto, 2014) aurait permis d'évaluer la stabilité d'une image recueillie lors d'un vol stationnaire pour les différents algorithmes de commande. Cette dernière fonctionnalité peut également être utilisée pour détecter et éviter les obstacles en déplaçant le drone en conséquence.

[41] Le positionnement par flux optique consiste à déplacer le drone, en le faisant suivre une trace au sol par un système de guidage optique.

ANNEXE I

LINÉARISATION DU MODÈLE DU QUADRICOPTÈRE

Pour obtenir une fonction linéarisée autour du point d'équilibre, nous utiliserons le développement de Taylor. Les termes de second ordre seront négligés devant les termes du premier ordre. De plus les accélérations seront considérées comme nulles pour ce point d'équilibre, soit : $\ddot{x_0} = \ddot{y_0} = \ddot{z_0} = \ddot{\Phi}_0 = \ddot{\theta}_0 = \ddot{\Psi}_0 = 0$

Les équations des accélérations linéaires et angulaires issues de (3.30) et (3.34) s'écrivent alors tel que :

$$\ddot{x} = \frac{(C_{\psi_0} S_{\theta_0} C_{\phi_0} + S_{\psi_0} S_{\phi_0})}{m} F_{b0} - \frac{A_x}{m} \dot{x_0} \tag{AI.1}$$

$$\ddot{y} = \frac{(S_{\psi_0} S_{\theta_0} C_{\phi_0} - C_{\psi_0} S_{\phi_0})}{m} F_{b0} - \frac{A_y}{m} \dot{y_0} \tag{AI.2}$$

$$\ddot{z} = \frac{C_{\theta_0} C_{\phi_0}}{m} F_{b0} - \frac{A_z}{m} \dot{z_0} + g \tag{AI.3}$$

$$\ddot{\Phi} = \frac{\tau_{\Phi_0}}{I_{xx}} - \frac{J_r}{I_{xx}} \dot{\theta}_0 \omega_{r_0} + \left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\right) \dot{\Psi}_0 \dot{\theta}_0 \tag{AI.4}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_{\theta_0}}{I_{yy}} - \frac{J_r}{I_{yy}} \dot{\Phi}_0 \omega_{r_0} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\Phi}_0 \dot{\Psi}_0 \tag{AI.5}$$

$$\ddot{\Psi} = \frac{\tau_{\Psi_0}}{I_{zz}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta}_0 \dot{\Phi}_0 \tag{AI.6}$$

L'application de la formule de Taylor pour l'accélération linaire sur l'axe x donne :

$$\Delta\ddot{x} = \frac{\partial\ddot{x}}{\partial\dot{x_0}}\Delta x + \frac{\partial\ddot{x}}{\partial\theta_0}\Delta\theta + \frac{\partial\ddot{x}}{\partial\phi_0}\Delta\phi + \frac{\partial\ddot{x}}{\partial\Psi_0}\Delta\Psi + \frac{\partial\ddot{x}}{\partial F_{b0}}\Delta F_b \tag{AI.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{x}}{\partial\dot{x_0}}\Delta x &= \frac{\partial}{\partial\dot{x_0}}\left(\frac{(C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}S_{\phi_0})}{m}F_{b0} - \frac{A_x}{m}\dot{x_0}\right)\Delta x \\ &= -\frac{A_x}{m}\Delta x\end{aligned} \tag{AI.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{x}}{\partial\theta_0}\Delta\theta &= \frac{\partial}{\partial\theta_0}\left(\frac{(C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}S_{\phi_0})}{m}F_{b_0} - \frac{A_x}{m}\dot{x_0}\right)\Delta\theta \\ &= \frac{C_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta\end{aligned} \tag{AI.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{x}}{\partial\phi_0}\Delta\phi &= \frac{\partial}{\partial\phi_0}\left(\frac{(C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}S_{\phi_0})}{m}F_{b_0} - \frac{A_x}{m}\dot{x_0}\right)\Delta\phi \\ &= \frac{-C_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0} + S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b_0}\Delta\phi\end{aligned} \tag{AI.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{x}}{\partial\Psi_0}\Delta\Psi &= \frac{\partial}{\partial\Psi_0}\left(\frac{(C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}S_{\phi_0})}{m}F_{b0} - \frac{A_x}{m}\dot{x_0}\right)\Delta\Psi \\ &= \frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi\end{aligned} \tag{AI.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{x}}{\partial F_{b0}}\Delta F_b &= \frac{\partial}{\partial F_{b0}}\left(\frac{(C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}C_{\phi_0})}{m}F_{b0} - \frac{A_x}{m}\dot{x_0}\right)\Delta F_b \\ &= \frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}\Delta F_b\end{aligned} \tag{AI.12}$$

D'où :

$$\Delta\ddot{x} = -\frac{A_x}{m}\Delta x + \frac{C_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta + \frac{-C_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0}+S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b_0}\Delta\phi + \tag{AI.13}$$

$$\frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+C_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi+\frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}\Delta F_b$$

L'application de la formule de Taylor pour l'accélération linéaire sur l'axe y donne :

$$\Delta\ddot{y}=\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\dot{y}_0}\Delta y+\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\theta_0}\Delta\theta+\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\phi_0}\Delta\phi+\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\Psi_0}\Delta\Psi+\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\phi_0}\Delta F_{b0} \tag{AI.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\dot{y}_0}\Delta y&=\frac{\partial}{\partial\dot{y}_0}\left(\frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}-\frac{A_y}{m}\dot{y}_0\right)\Delta y\\&=-\frac{A_y}{m}\Delta y\end{aligned} \tag{AI.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\theta_0}\Delta\theta&=\frac{\partial}{\partial\theta_0}\left(\frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}-\frac{A_y}{m}\dot{y}_0\right)\Delta\theta\\&=\frac{S_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta\end{aligned} \tag{AI.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\phi_0}\Delta\phi&=\frac{\partial}{\partial\phi_0}\left(\frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}-\frac{A_y}{m}\dot{y}_0\right)\Delta\phi\\&=\frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0}-C_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi\end{aligned} \tag{AI.17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{y}}{\partial\Psi_0}\Delta\Psi&=\frac{\partial}{\partial\Psi_0}\left(\frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}-\frac{A_y}{m}\dot{y}_0\right)\Delta\Psi\\&=\frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+S_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi\end{aligned} \tag{AI.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{y}}{\partial F_{b0}}\Delta F_b&=\frac{\partial}{\partial F_{b0}}\left(\frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}-\frac{A_y}{m}\dot{y}_0\right)\Delta F_b\\&=\frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}-C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}\Delta F_b\end{aligned} \tag{AI.19}$$

D'où l'expression linéarisé de l'accélération sur l'axe y :

$$\Delta\ddot{y} = -\frac{A_y}{m}\Delta y + \frac{S_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta + \frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0} - C_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi + \frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi + \frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} - C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}\Delta F_b \quad \text{(AI.20)}$$

L'application de la formule de Taylor pour l'accélération linéaire sur l'axe z donne :

$$\Delta\ddot{z} = \frac{\partial\ddot{z}}{\partial\dot{z_0}}\Delta z + \frac{\partial\ddot{z}}{\partial\theta_0}\Delta\theta + \frac{\partial\ddot{z}}{\partial\phi_0}\Delta\phi + \frac{\partial\ddot{z}}{\partial F_{b0}}\Delta F_b \quad \text{(AI.21)}$$

$$\frac{\partial\ddot{z}}{\partial\dot{z_0}}\Delta z = \frac{\partial\left(\frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0} - \frac{A_z}{m}\dot{z_0} + g\right)}{\partial\dot{z_0}}\Delta z = -\frac{A_z}{m}\Delta z \quad \text{(AI.22)}$$

$$\frac{\partial\ddot{z}}{\partial\theta_0}\Delta\theta = \frac{\partial\left(\frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0} - \frac{A_z}{m}\dot{z_0} + g\right)}{\partial\theta_0}\Delta\theta = \frac{-S_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta \quad \text{(AI.23)}$$

$$\frac{\partial\ddot{z}}{\partial\phi_0}\Delta\phi = \frac{\partial\left(\frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0} - \frac{A_z}{m}\dot{z_0} + g\right)}{\partial\phi_0}\Delta\phi = \frac{-C_{\theta_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi \quad \text{(AI.24)}$$

$$\frac{\partial\ddot{z}}{\partial F_{b0}}\Delta F_b = \frac{\partial\left(\frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0} - \frac{A_z}{m}\dot{z_0} + g\right)}{\partial F_{b0}}\Delta F_b = \frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}\Delta F_b \quad \text{(AI.25)}$$

D'où l'expression linéarisé de l'accélération linéaire sur l'axe z :

$$\Delta\ddot{z} = -\frac{A_z}{m}\Delta z - \frac{S_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta - \frac{C_{\theta_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi + \frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}\Delta F_b \tag{AI.26}$$

L'application de la formule de Taylor pour l'accélération linéaire sur l'angle ϕ donne :

$$\Delta\ddot{\Phi} = \frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\tau_{\Phi_0}}\Delta\tau_\phi + \frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\theta} + \frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\dot{\phi}_0}\Delta\dot{\phi} + \frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\omega_{r_0}}\Delta\omega_r \tag{AI.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\tau_{\Phi_0}}\Delta\tau_\phi &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\Phi_0}}{I_{xx}} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\omega_{r_0} + \left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0\dot{\theta}_0\right)}{\partial\tau_{\Phi_0}}\Delta\tau_\phi \\ &= \frac{\Delta\tau_\phi}{I_{xx}}\end{aligned} \tag{AI.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\theta} &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\Phi_0}}{I_{xx}} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\omega_{r_0} + \left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0\dot{\theta}_0\right)}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\theta} \\ &= \left(\left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{xx}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\theta}\end{aligned} \tag{AI.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\dot{\phi}_0}\Delta\dot{\phi} &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\Phi_0}}{I_{xx}} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\omega_{r_0} + \left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0\dot{\theta}_0\right)}{\partial\dot{\phi}_0}\Delta\dot{\phi} \\ &= 0\end{aligned} \tag{AI.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\Phi}}{\partial\omega_{r_0}}\Delta\omega_r &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\Phi_0}}{I_{xx}} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\omega_{r_0} + \left(\frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0\dot{\theta}_0\right)}{\partial\omega_{r_0}}\Delta\omega_r \\ &= -\frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\Delta\omega_r\end{aligned} \tag{AI.31}$$

D'où l'expression linéarisée de l'accélération angulaire $\ddot{\Phi}$:

$$\Delta\ddot{\Phi} = \frac{\Delta\tau_{\Phi}}{I_{xx}} + \left(\left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{xx}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\theta} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\Delta\omega_r \tag{AI.32}$$

L'application de la formule de Taylor pour l'accélération linéaire sur l'angle θ donne :

$$\Delta\ddot{\theta} = \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\tau_{\theta_0}}\Delta\tau_{\theta} + \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\Psi} + \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\dot{\Phi}_0}\Delta\dot{\Phi} + \frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\omega_{r_0}}\Delta\omega_r \tag{AI.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\tau_{\theta_0}}\Delta\tau_{\theta} &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\theta_0}}{I_{yy}} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\omega_{r_0} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\Psi}_0\right)}{\partial\tau_{\theta_0}}\Delta\tau_{\theta} \\ &= \frac{\Delta\tau_{\theta}}{I_{yy}}\end{aligned} \tag{AI.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\dot{\Psi}_0}\Delta\dot{\Psi} &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\theta_0}}{I_{yy}} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\omega_{r_0} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\Psi}_0\right)}{\partial\dot{\Psi}_0}\Delta\dot{\Psi} \\ &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\Psi}\end{aligned} \tag{AI.35}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\dot{\Phi}_0}\Delta\dot{\Phi} &= \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\theta_0}}{I_{yy}} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\omega_{r_0} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\Psi}_0\right)}{\partial\dot{\Phi}_0}\Delta\dot{\Phi} \\ &= \left(\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{yy}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\Phi}\end{aligned} \tag{AI.36}$$

$$\frac{\partial\ddot{\theta}}{\partial\omega_{r_0}}\Delta\omega_r = \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\theta_0}}{I_{yy}} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\omega_{r_0} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\Psi}_0\right)}{\partial\omega_{r_0}}\Delta\omega_r \tag{AI.37}$$

$$= -\frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\omega}_{r_0}\Delta\omega_r$$

L'expression linéarisée de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est :

$$\Delta\ddot{\theta} = \frac{\Delta\tau_\theta}{I_{yy}} + \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\Psi} + \left(\frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{yy}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\phi} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\omega}_{r_0}\Delta\omega_r \quad \text{(AI.38)}$$

L'application de la formule de Taylor pour l'accélération linaire sur l'angle ψ donne :

$$\Delta\ddot{\Psi} = \frac{\partial\ddot{\Psi}}{\partial\tau_{\psi_0}}\Delta\tau_\psi + \frac{\partial\ddot{\Psi}}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\theta} + \frac{\partial\ddot{\Psi}}{\partial\dot{\phi}_0}\Delta\dot{\phi} \quad \text{(AI.39)}$$

$$\frac{\partial\ddot{\Psi}}{\partial\tau_{\psi_0}}\Delta\tau_\psi = \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\psi_0}}{I_{zz}} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\dot{\Phi}_0\right)}{\partial\tau_{\psi_0}}\Delta\tau_\psi$$

$$= \frac{\Delta\tau_\psi}{I_{yy}} \quad \text{(AI.40)}$$

$$\frac{\partial\ddot{\Psi}}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\theta} = \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\psi_0}}{I_{zz}} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\dot{\Phi}_0\right)}{\partial\dot{\theta}_0}\Delta\dot{\theta}$$

$$= \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\theta} \quad \text{(AI.41)}$$

$$\frac{\partial\ddot{\Psi}}{\partial\dot{\phi}_0}\Delta\dot{\phi} = \frac{\partial\left(\frac{\tau_{\psi_0}}{I_{zz}} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\dot{\Phi}_0\right)}{\partial\dot{\phi}_0}\Delta\dot{\phi}$$

$$= \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\Delta\dot{\phi} \quad \text{(AI.42)}$$

D'où l'expression linéarisée de l'accélération angulaire $\ddot{\Psi}$:

$$\Delta\ddot{\Psi} = \frac{\Delta\tau_{\Psi}}{I_{yy}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}\ddot{\theta}_0\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\theta} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\ddot{\Phi}_0\Delta\dot{\phi} \qquad \text{(AI.43)}$$

Nous pouvons remarquer que les variations des accélérations s'expriment en fonction des variations de la force ΔF_b des moments $\Delta\tau_{\phi}$, $\Delta\tau_{\theta}$ et $\Delta\tau_{\Psi}$. Or les véritables entrées du système sont les vitesses angulaires des moteurs ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4. Recherchons alors les expressions des variations de la force et des moments à partir des quatre expressions (AI.44) à (AI.47) suivantes :

$$F_b = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \qquad \text{(AI.44)}$$

$$\tau_{\phi} = lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \qquad \text{(AI.45}$$

$$\tau_{\theta} = lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \qquad \text{(AI.46)}$$

$$\tau_{\Psi} = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \qquad \text{(AI.47)}$$

L'application de la formule de Taylor sur la force F_b décrite en (AI.44) donne :

$$\Delta F_b = \frac{\partial F_b}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial F_b}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial F_b}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 + \frac{\partial F_b}{\partial\omega_4}\Delta\omega_4 \qquad \text{(AI.48)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_b}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 &= \frac{\partial k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 \\ &= 2k\omega_1\Delta\omega_1\end{aligned} \qquad \text{(AI.49)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_b}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2 &= \frac{\partial k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2 \\ &= 2k\omega_2\Delta\omega_2\end{aligned} \qquad \text{(AI.50)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_b}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 &= \frac{\partial k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 \\ &= 2k\omega_3\Delta\omega_3\end{aligned} \qquad \text{(AI.51)}$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial \omega_4}\Delta\omega_4 = \frac{\partial k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)}{\partial \omega_4}\Delta\omega_4 = 2k\omega_4\Delta\omega_4 \quad \text{(AI.52)}$$

D'où l'expression linéarisée de la force F_b :

$$\Delta F_b = 2k(\omega_1\Delta\omega_1 + \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 + \omega_4\Delta\omega_4) \quad \text{(AI.53)}$$

L'application de la formule de Taylor sur le couple τ_Φ donne :

$$\tau_\Phi = lk(\omega_4^2 - \omega_2^2) \quad \text{(AI.54)}$$

$$\Delta\tau_\Phi = \frac{\partial \tau_\Phi}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial \tau_\Phi}{\partial \omega_4}\Delta\omega_4 \quad \text{(AI.55)}$$

$$\frac{\partial \tau_\Phi}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 = -2lk\omega_2\Delta\omega_2 \quad \text{(AI.56)}$$

$$\frac{\partial \tau_\Phi}{\partial \omega_4}\Delta\omega_4 = 2lk\omega_4\Delta\omega_4 \quad \text{(AI.57)}$$

D'où l'expression linéarisé du couple τ_Φ

$$\Delta\tau_\Phi = 2lk(\omega_4\Delta\omega_4 - \omega_2\Delta\omega_2) \quad \text{(AI.58)}$$

L'application de la formule de Taylor sur le couple τ_θ donne :

$$\tau_\theta = lk(\omega_3^2 - \omega_1^2) \quad \text{(AI.59)}$$

$$\Delta\tau_\theta = \frac{\partial\tau_\theta}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 + \frac{\partial\tau_\theta}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 \quad \text{(AI.60)}$$

$$\frac{\partial\tau_\theta}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 = 2lk\omega_3\Delta\omega_3 \quad \text{(AI.61)}$$

$$\frac{\partial\tau_\theta}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 = -2lk\omega_1\Delta\omega_1 \quad \text{(AI.62)}$$

D'où l'expression linéarisé du couple τ_θ :

$$\Delta\tau_\theta = 2lk(\omega_3\Delta\omega_3 - \omega_1\Delta\omega_1) \quad \text{(AI.63)}$$

L'application de la formule de Taylor sur le couple τ_ψ donne :

$$\tau_\psi = b(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad \text{(AI.64)}$$

$$\Delta\tau_\psi = \frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 + \frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_4}\Delta\omega_4 \quad \text{(AI.65)}$$

$$\frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_1}\Delta\omega_1 = 2b\omega_1\Delta\omega_1 \quad \text{(AI.66)}$$

$$\frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_2}\Delta\omega_2 = -2b\omega_2\Delta\omega_2 \quad \text{(AI.67)}$$

$$\frac{\partial\tau_\psi}{\partial\omega_3}\Delta\omega_3 = 2b\omega_3\Delta\omega_3 \quad \text{(AI.68)}$$

$$\frac{\partial \tau_{\psi}}{\partial \omega_4}\Delta\omega_4 = -2b\omega_4\Delta\omega_4 \tag{AI.69}$$

$$\Delta\tau_{\psi} = 2b(\omega_1\Delta\omega_1 - \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 - \omega_4\Delta\omega_4) \tag{AI.70}$$

Soit en résumé :

$$\begin{aligned} \Delta F_b &= 2k(\omega_1\Delta\omega_1 + \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 + \omega_4\Delta\omega_4) \\ \Delta\tau_{\phi} &= 2lk(\omega_4\Delta\omega_4 - \omega_2\Delta\omega_2) \\ \Delta\tau_{\theta} &= 2lk(\omega_3\Delta\omega_3 - \omega_1\Delta\omega_1) \\ \Delta\tau_{\psi} &= 2b(\omega_1\Delta\omega_1 - \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 - \omega_4\Delta\omega_4) \end{aligned} \tag{AI.71}$$

Lorsque l'on remplace les expressions des variations de la force ΔF_b et des moments $\Delta\tau_{\phi}$, $\Delta\tau_{\theta}$ et $\Delta\tau_{\psi}$ présent en (AI.71) dans les équations des accélérations (AI.13)(AI.20)(AI.26)(AI.32)(AI.37)(AI.43), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{x} = -\frac{A_x}{m}\Delta x + \frac{C_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta + \frac{-C_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0}+S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b_0}\Delta\phi + \\ \frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+C_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi + \\ \frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0}+S_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}2k(\omega_1\Delta\omega_1 + \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 + \\ \omega_4\Delta\omega_4) \end{aligned} \tag{AI.72}$$

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{y} = -\frac{A_y}{m}\Delta y + \frac{S_{\psi_0}C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta \\ + \frac{-S_{\psi_0}S_{\theta_0}S_{\phi_0} - C_{\psi_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi \\ + \frac{C_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} + S_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\Psi \\ + \frac{S_{\psi_0}S_{\theta_0}C_{\phi_0} - C_{\psi_0}S_{\phi_0}}{m}2k(\omega_1\Delta\omega_1 + \omega_2\Delta\omega_2 \\ + \omega_3\Delta\omega_3 + \omega_4\Delta\omega_4) \end{aligned} \tag{AI.73}$$

(AI.74)

$$\Delta\ddot{z} = -\frac{A_z}{m}\Delta z - \frac{S_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\theta - \frac{C_{\theta_0}S_{\phi_0}}{m}F_{b0}\Delta\phi + \frac{C_{\theta_0}C_{\phi_0}}{m}2k(\omega_1\Delta\omega_1 + \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 + \omega_4\Delta\omega_4)$$

$$\Delta\ddot{\Phi} = \frac{2lk(\omega_4\Delta\omega_4 - \omega_2\Delta\omega_2)}{I_{xx}} + \left(\left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\right)\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{xx}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\theta} - \frac{J_r}{I_{xx}}\dot{\theta}_0\Delta\omega_r \quad \text{(AI.75)}$$

$$\Delta\ddot{\theta} = \frac{2lk(\omega_3\Delta\omega_3 - \omega_1\Delta\omega_1)}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\Psi} + \left(\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\Psi}_0 - \frac{J_r}{I_{yy}}\omega_{r_0}\right)\Delta\dot{\phi} - \frac{J_r}{I_{yy}}\dot{\Phi}_0\dot{\omega}_{r_0}\Delta\omega_r \quad \text{(AI.76)}$$

$$\Delta\ddot{\Psi} = \frac{2b(\omega_1\Delta\omega_1 - \omega_2\Delta\omega_2 + \omega_3\Delta\omega_3 - \omega_4\Delta\omega_4)}{I_{yy}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\Phi}_0\Delta\dot{\theta} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}_0\Delta\dot{\phi} \quad \text{(AI.77)}$$

Dans les conditions d'un vol stationnaire, nous pouvons appliquer les conditions suivantes extraites du Tableau 3.1:

Tableau AI.1 Extrait du Tableau 3.1 concernant les simplications de la dynamique du drone en cas de vol stationnaire

Modes d'opération considérée		Simplification		
1	Vol stationnaire	$\phi = 0$	$\sin(\phi) = 0$	$\cos(\phi) = 1$
		$\theta = 0$	$\sin(\theta) = 0$	$\cos(\theta) = 1$
		$\psi = 0$	$\sin(\psi) = 0$	$\cos(\psi) = 1$
		$x = 0$	$y = 0$	$z = z_0$
		$\dot{x} = 0$	$\dot{y} = 0$	$\dot{z} = 0$

De plus les vitesses angulaires des moteurs sont égales à celles de vol stationnaire ω_0 telles que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_0$.

$$\begin{aligned} \Delta F_b &= 2k\omega_0(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 + \Delta\omega_4) \\ \Delta\tau_\phi &= 2lk\omega_0(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_2) \\ \Delta\tau_\theta &= 2lk\omega_0(\Delta\omega_3 - \Delta\omega_1) \\ \Delta\tau_\psi &= 2b\omega_0(\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 - \Delta\omega_4) \end{aligned} \tag{AI.78}$$

Les expressions des accélérations linéarisées deviennent alors :

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{x} &= -\frac{A_x}{m}\Delta\dot{x} - g\Delta\theta \\ \Delta\ddot{y} &= -\frac{A_y}{m}\Delta\dot{y} + g\Delta\phi \\ \Delta\ddot{z} &= -\frac{A_z}{m}\Delta\dot{z} + \frac{2k\omega_0(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 + \Delta\omega_4)}{m} \\ \Delta\ddot{\Phi} &= \frac{2lk\omega_0(\Delta\omega_4 - \Delta\omega_2)}{I_{xx}} \\ \Delta\ddot{\theta} &= \frac{2lk\omega_0(\Delta\omega_3 - \Delta\omega_1)}{I_{yy}} \\ \Delta\ddot{\Psi} &= \frac{2b\omega_0(\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2 + \Delta\omega_3 - \Delta\omega_4)}{I_{yy}} \end{aligned} \tag{AI.79}$$

Ce qui donne en intégrant :

$$\ddot{x} = -\frac{A_x}{m}\dot{x} - g\theta$$
$$\ddot{y} = -\frac{A_y}{m}\dot{y} + g\Phi$$
$$\ddot{z} = -\frac{A_z}{m}\dot{z} + \frac{2k\omega_0(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)}{m}$$

$$\ddot{\Phi} = \frac{2lk\omega_0(\omega_4 - \omega_2)}{I_{xx}} \qquad \text{(AI.80)}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{2lk\omega_0(\omega_3 - \omega_1)}{I_{yy}}$$
$$\ddot{\Psi} = \frac{2b\omega_0(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_{yy}}$$

ANNEXE II

CALCUL DE LA TRANSMISSION $T_{nn}(s)$

Calculons les transmissions de la boucle fermée *T(s)* pour un système à deux entrées et deux sorties. L'objectif sera d'appliquer la commande B, en vue d'obtenir une transmission quasi diagonale. $|T_{11}(s)| = |T_{22}(s)| \approx 1$ à l'intérieure de la bande passante d'intérêt et $|T_{21}(s)| << |T_{11}(s)|$ et $|T_{12}(s)| << |T_{22}(s)|$:

Soit
$$P(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)}\begin{bmatrix} s-1 & -7 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \quad \text{(AII.1)}$$

ou

$$P_{11}(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2(s-2)}$$

$$P_{12}(s) = \frac{-7}{(s+2)^2(s-2)} \quad \text{(AII.2)}$$

$$P_{21}(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)}$$

$$P_{22}(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2(s-2)}$$

De même
$$C(s) = k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s+s_0}{s+3} \end{bmatrix} \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^1$$

$$C_1(s) = k_1 \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2} \quad \text{(AII.3)}$$

$$C_2(s) = k_1 \frac{s+s_0}{s+3}\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2}$$

Pour obtenir l'expression de $T_{11}(s)$ on remplace les expressions de $P_{11}(s)$ à $P_{22}(s)$ en (AII.2) et $C_1(s)$, $C_2(s)$ en (AII.3) dans $T_{11}(s)$ en (5.90) :

Soit
$$T_{11} = \frac{P_{11}C_1 + C_1C_2(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})}{(I + P_{11}C_1)(I + P_{22}C_2) - P_{12}C_2P_{21}C_1}$$

$$num\big(T_{11}(s)\big) = \frac{s-1}{(s+2)^2(s-2)} k_1 \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2} + \tag{AII.4}$$
$$k_1^2 \frac{s+s_0}{s+3}\left[\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right]^2 \left(\frac{(s-1)(s+3)}{[(s+2)^2(s-2)]^2} - \frac{-7}{[(s+2)^2(s-2)]^2}\right)$$
$$= \frac{k_1\omega_1\omega_2(s-1)(s+3)(s+\omega_1)(s+\omega_2)(s+2)^2(s-2) + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+2s+4)}{(s+2)^4(s-2)^2(s+\omega_1)^2(s+\omega_2)^2(s+3)}$$

et
$$\begin{aligned} den\big(T_{11}(s)\big) &= (I + P_{11}C_1)(I + P_{22}C_2) - P_{12}C_2P_{21}C_1 \\ &= 1 + P_{22}C_2 + P_{11}C_1 + P_{11}P_{22}C_1C_2 - P_{12}C_2P_{21}C_1 \end{aligned} \tag{AII.5}$$

On remplace les expressions de $P_{11}(s)$ à $P_{22}(s)$ détaillées en (AII.2) et de $C_1(s)$, $C_2(s)$ détaillées en (AII.3) dans l'expression de $den\big(T_{11}(s)\big)$ (équation (AII.5)) pour obtenir :

$$\begin{aligned} den\big(T_{11}(s)\big) = 1 &+ \frac{s+3}{(s+2)^2(s-2)} k_1 \frac{s+s_0}{s+3}\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2} + \\ &\frac{s-1}{(s+2)^2(s-2)} k_1 \frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2} + \\ &\frac{(s-1)(s+3)}{(s+2)^4(s-2)^2} k_1^2 \frac{s+s_0}{s+3}\left(\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^2 \\ &\frac{-7}{(s+2)^4(s-2)^2} k_1^2 \frac{s+s_0}{s+3}\left(\frac{\omega_1}{s+\omega_1}\frac{\omega_2}{s+\omega_2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)[(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2) + \ldots + k_1\omega_1\omega_2(2s+s_0-1)] + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+2s+4)}{(s+2)^4(s-2)^2(s+\omega_1)^2(s+\omega_2)^2(s+3)} \tag{AII.6}$$

On en déduit alors l'expression de $T_{11}(s)$ à partir de (AII.4) et (AII.6) :

$$T_{11}(s) = \frac{num\big(T_{11}(s)\big)}{den\big(T_{11}(s)\big)}$$
$$= \frac{k_1\omega_1\omega_2(s-1)(s+3)(s+\omega_1)(s+\omega_2)(s+2)^2(s-2) + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+s+4)}{(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)[(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)+\cdots} \quad \text{(AII.7)}$$
$$\overline{\ldots + k_1\omega_1\omega_2(2s+s_0-1)] + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+2s+4)}$$

L'expression de $T_{22}(s)$ (5.93) s'obtient de la manière suivante :

$$T_{22}(s) = \frac{num\big(T_{22}(s)\big)}{den\big(T_{22}(s)\big)} = \frac{P_{22}C_2 + C_1C_2(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})}{den\big(T_{22}(s)\big)} \quad \text{(AII.8)}$$

Soit :

$$num\big(T_{22}(s)\big) = P_{22}C_2 + C_1C_2(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})$$
$$= \frac{k_1\omega_1\omega_2(s+s_0)[(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2) + k_1\omega_1\omega_2(s^2+2s+4)]}{(s+2)^4(s-2)^2(s+\omega_1)^2(s+\omega_2)^2(s+3)} \quad \text{(AII.9)}$$

Comme pour les relations (5.90) à (5.93) on a $den\big(T_{11}(s)\big) = den\big(T_{22}(s)\big)$. L'expression de $den\big(T_{11}(s)\big)$ étant détaillée en (AII.6) et de $num\big(T_{22}(s)\big)$ en (AII.9), on obtient pour $T_{22}(s)$:

$$T_{22}(s) = \frac{k_1\omega_1\omega_2(s+s_0)\big[(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2) + k_1\omega_1\omega_2\big(s^2+2s+4\big)\big]}{(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)[(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)+\cdots} \quad \text{(AII.10)}$$
$$\overline{\ldots + k_1\omega_1\omega_2(2s+s_0-1)] + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+2s+4)}$$

De même on obtient les expressions de $T_{12}(s)$ et $T_{21}(s)$:

$$T_{12}(s) = \frac{num\big(T_{12}(s)\big)}{den\big(T_{11}(s)\big)} = \frac{P_{12}C_2}{den\big(T_{11}(s)\big)}$$

$$\frac{-7k_1\omega_1\omega_2(s+s_0)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)}{(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)[(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)+\cdots} \quad \text{(AII.11)}$$

$$\overline{\ldots + k_1\omega_1\omega_2(2s+s_0-1)] + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+2s+4)}$$

$$T_{21}(s) = \frac{num\big(T_{21}(s)\big)}{den\big(T_{11}(s)\big)} = \frac{P_{21}C_1}{den\big(T_{11}(s)\big)}$$

$$\frac{k_1\omega_1\omega_2(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)}{(s+3)(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)[(s+2)^2(s-2)(s+\omega_1)(s+\omega_2)+\cdots} \quad \text{(AII.12)}$$

$$\overline{\ldots + k_1\omega_1\omega_2(2s+s_0-1)] + k_1^2\omega_1^2\omega_2^2(s+s_0)(s^2+2s+4)}$$

ANNEXE III

LISTE DU MATÉRIEL

Tableau AIII.1 Liste du matériel utilisé pour la conception du drone F450J

Nom	Lien internet	Prix unitaire	Nombre	Total
Drone seul				
Kit Pixhawk	https://www.robotshop.com/en/3dr-px4-pixhawk-advanced-autopilot-gps.html?gclid=EAIaIQobChMI2_vRwL6q3wIVCuDICh0AIAmhEAAYAiAAEgLRk_D_BwE	227.44	1	227.44
Moteurs	https://hobbyking.com/en_us/turnigy-d2836-9-950kv-brushless-outrunner-motor.html?gclid=CjwKCAjw8uLcBRACEiwAaL6MSSK4hnD672FJmObKU9OFP2ZUKn82j_8bX2UFGTXpAxR4rjFOihSvgxoC_mUQAvD_BwE&gclsrc=aw.ds	14	4	56
ESC	https://www.banggood.com/Emax-Simonk-Series-12A-20A-25A-30A-40A-ESC-For-Quadcopter-QAV-250-p-918126.html?rmmds=myorder	11.51	4	46.04
Hélices	https://www.banggood.com/1045-Propeller-10in-10x4-5-CWCCW-For-Quadcopter-And-Multirotor-p-933186.html?rmmds=myorder	2.18	4	8.72
Châssis	https://www.amazon.com/YoungRC-4-Axis-Airframe-Quadcopter-Landing/dp/B0776WLHX7/ref=pd_rhf_ee_s_cp_0_5?_encoding=UTF8&pd_rd_i=B0776WLHX7&pd_rd_r=HPKK1GQ53EHT4Y83PFTG&pd_rd_w=HRePT&pd_rd_wg=sLJUi&psc=1&refRID=HPKK1GQ53EHT4Y83PFTG=	18.99	1	18.99

Tableau AVI.1 Liste du matériel utilisé pour la conception du drone F450J (suite)

Nom	Lien internet	Prix unitaire	Nombre	Total
Batterie	https://www.aliexpress.com/item/Eachine-11-1V-2200mAh-3S-35C-XT60-Lipo-Battery-For-RC-Multirotors/32627294712.html	34.98	1	34.98
Warning buzzer	https://www.amazon.com/gp/product/B003Y6E6IE/ref=oh_aui_detailpage_o01_s00?ie=UTF8&psc=1	5.08	1	5.08
Total				**397.25**
Autre accessoire				
RC	https://www.amazon.ca/MagiDeal-FS-TH9X-Transmitter-FS-iA10B-Receiver/dp/B07FP1S7HP/ref=sr_1_5?ie=UTF8&qid=1536781058&sr=8-5&keywords=flysky+fs-th9x&dpID=41gzEeKiFLL&preST=_SY300_QL70_&dpSrc=srch	168.99	1	168.99
Chargeur LIPO	https://www.banggood.com/Wholesale-IMAX-B6-Digital-RC-Lipo-NiMH-battery-Balance-Charger-p-46220.html?rmmds=buy	34	1	34
Sac LIPO guard	https://www.banggood.com/Li-Po-Battery-Explosion-Proof-Safety-Bag-Charging-Sack-18x23x6cm-p-1017484.html?rmmds=search	5.23	1	5.23
Total				**208.22**

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A., R., & ValavanisP. (2011). *Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopters* (springer éd.). Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, p39. Repéré à http://www.springer.com/gp/book/9789400700222

A.Drouot, E.Richard, & M.Boutayeb. (2013). Hierarchical backstepping-based control of a Gun Launched MAV in crosswinds:Theory and experiment. *Automatica, 25*.

Abrahamsen, H. B. (2015). A remotely piloted aircraft system in major incident management: Concept and pilot, feasibility study. *BMC Emergency Medicine*. doi: 10.1186/s12873-015-0036-3. Repéré à https://bmcemergmed.biomedcentral.com/articles/10.1186/s12873-015-0036-3

Artstein, Z. (1983). Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 7*(11), 1163-1173. doi: https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90049-4. Repéré à http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0362546X83900494

Balas, C. (2007). *Modelling and linear control of a quadrotor* (Master Theses, Cranfield university Cranfield). Repéré à http://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordOId=8847641&fileOId=8859343

Bannwarth, J. X. J., Chen, Z. J., Stol, K. A., & MacDonald, B. A. (2016). Disturbance accomodation control for wind rejection of a quadcopter. Dans *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (pp. 695-701). doi: 10.1109/ICUAS.2016.7502632. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/ielx7/7497753/7502510/07502632.pdf?tp=&arnumber=7502632&isnumber=7502510

Beeby, S., Ensell, G., Kraft, M., & White, N. (2004). MEMS Mechanical Sensors. *Artech House, Inc*.

Benkhellat, L., & Bensoussan, D. (2017). Geogebra as a tool of design of ultrafast and robust controller. Dans *2017 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)* (pp. 815-818). doi: 10.1109/ICIT.2017.7915464

Bensoussan, D. (1984). Decentralized Control and Sensitivity Reduction of Weakly Coupled Systems. *International Journal of Control, 40*(6), p.1099-1118.

Bensoussan, D. (1984). *Sensitivity reduction in single-input single-output systems*. Montréal: École de technologie supérieure.

Bensoussan, D. (2008). *Commande moderne, Approche par modèles continus et discets* Presses internationales Polytechnique.

Bensoussan, D. (2014). *Brevet US nº US 8,831,755*.

Bensoussan, D. (2015, Nov. 23-25). *A new avenue of research in robust and ultrafast decentralized control* présentée à Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems, Cancun, Mexico.

Bensoussan, D. (2015). Robust and ultrafast response compensator for unstable invertible plants. *Automatica, 60*, p43-47. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2015.06.038. Repéré à http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109815002733

Bensoussan, D., & Brossard, J. (2017, October 19-21). *Robust and ultrafast decentralized control* présentée à 21st International Conference on System Theory, Control and Computing, Sinaia, Roumanie.

Bolandi, H. (2013). Attitude Control of a Quadrotor with Optimized PID Controller. *Intelligent Control and Automation, 4*, p335-342. Repéré à http://file.scirp.org/pdf/ICA_2013080911251379.pdf

Bouabdallah, S. (2007). *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying* (EPFL, Doctorat, Lausanne). Repéré à https://infoscience.epfl.ch/record/95939/files/EPFL_TH3727.pdf

Bouabdallah, S., Noth, A., & Siegwart, R. (2004, 28 Sept.-2 Oct.). *PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor* présentée à Intelligent Robots and Systems (IROS). Proceedings. IEEE/RSJ International Conference on. doi: 10.1109/IROS.2004.1389776

Boulet, B. (2017). *Cours de "Robust Control" à l'université McGill*. Montréal

Brossard, J., & Bensoussan, D. (2017). *A new robust and fast control applied to a quadcopter* présentée à CASI, Toronto.

Charland-Arcand, G. (2014). *Contrôle non linéaire par backstepping d'un hélicoptère de type quadrotor pour des applications autonomes* (ÉTS, Maîtrise, Montréal). Repéré à https://fr.scribd.com/document/311239944/CONTROLE-NON-LINEAIRE-PAR-BACKSTEPPING-D-UN-HELICOPTERE-DE-TYPE-QUADROTOR-POUR-DES-APPLICATIONS-AUTONOMES

Chen, X., & LiupingWang. (2015). Step response Identification of quadcopter UAV Using Frecency-sampling Filters. *IFAC Proceedings Volumes, 48*(28), p122-127. Repéré à http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315027354

Cheviron, T. (2008). *Contribution à la modélisation, à la commande et à l'observation de systèmes à entrées inconnues dans le cadre des systèmes volants autonomes* (École doctorale sciences et technologies de l'information et des matériaux Nantes).

Chovancová, A., Fico, T., Chovanec, Ľ., & Hubinsk, P. (2014). Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey). *Procedia Engineering, 96*, p172-181. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.139. Repéré à http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705814031981

D. Hartman, K. L., M. Mehrer, S. Moreno, J. Kim. (2014). Quadcopter Dynamic Modeling and Simulation *Drexel University*.

Derafa, L., Madani, T., & Benallegue, A. (2006). Dynamic Modelling and Experimental Identification of Four Rotors Helicopter Parameters. Dans *Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on* (pp. 1834-1839). doi: 10.1109/ICIT.2006.372515. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/ielx5/4237510/4237511/04237837.pdf?tp=&arnumber=4237837&isnumber=4237511

Desmet, J. (2016). Que pouvez-vous faire ou non avec un drone ? Repéré à http://elektrozine.be/fr/que-pouvez-vous-faire-ou-non-avec-un-drone/

DJI. (2018). The ultraportable Mavic Air features high-end flight performance and functionality for limitless exploration.

Doyle, J. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEEE, 129*(6), p242-250. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/4642148/

Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., & Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard H2 and Hinf in control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 34*(8), p831-847. doi: 10.1109/9.29425. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/29425/?reload=true

Drouot, A. (2013). Stratégies de commande pour la navigation autonome d'un drone projectile miniature.

Duc, G., & Font, S. (2000). *Commande Hinf et mu-analyse des outils pour la robustesse*.

Dunbabin, & Marques, L. (2012). Robots for environmental monitoring: Significant advancements and applications. *Robotics & Automation Magazine, IEEE, 19*(1), 24-39.

ElKholy, M. N. (2014). *Dynamic Modeling and Control of a Quadrotor Using Linear and Nonlinear Approaches* (Master of Science, The american university in Cairo Cair). Repéré à http://dar.aucegypt.edu/handle/10526/3965

Fay, G. (2001). Derivation of the Aerodynamic Forces for theb Mesicopter Simulation.

Fourati, H., Manamanni, N., & Handrich, Y. (2012). *Fusion de données, estimation de la posture et navigation à l'estime : Application au Bio-logging* (Grenoble).

Freudenberg, J., & Looze, D. (1985). Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 30*(6), 555-565. doi: 10.1109/TAC.1985.1104004. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=1104004

Gademer A, B. L., Rudant J-P. (2008). Integration of a multi-sensor system for rapid cartography in crisis situations. Repéré à https://www.slideshare.net/BessemIsitcom/5-realisation

Garcia, M., Normand, E., Page, H., Howieson, I., & Mccuiioch, M. (2005). Détection et identification chimique par spectroscopie QCL sur des prélèvements d'air réalisés par microdrones : Interaction du champ électromagnétique avec l'environnement. *Revue de l'électricité et de l'électronique*, 6-7.

Garcia, U. (2013). *Modelling and application of μ-synthesis for hovering quad-rotor* (English Language Faculty of Engineering, Sofia).

Garnier, T. (2007). *Méthodes combinées d'optimisation fréquentielle et temporelle appliquées à la commande d'un disque dur* (École de technologie Supérieur, Montréal).

Gayet, E. (2017). Des étudiants toulousains ont inventé un drone très utile pour le secours en montagne. Repéré

GÉNEVÉ, L. (2017). *Système de déploiement d'un robot mobile autonome basé sur des balises* (Strasbourg).

Ghadiok, V., Goldin, J., & Ren, W. A. (2012). On the design and development of attitude stabilization, vision-based navigation, and aerial gripping for a low-cost quadrotor. *Auton Robot, 33*(1-2), p41-48. Repéré à https://link.springer.com/article/10.1007/s10514-012-9286-z

GIGadgets. (2016). Flying Machine Enabled Construction. Repéré à https://www.youtube.com/watch?v=Fq8lyauFQvU

Gu, D.-W., Petkov, P. H., & Konstantinov, M. M. (2005). *Robust Control Design with Matlab*.

Hérissé, B. (2011). *Asservissement et Navigation Autonome d'un drone en environnement incertain par ot optique* (Nice Sophia Antipolis, Nice).

Horowitz, I. (2001). Survey of quantitative feedback theory (QFT). *International journal of robust and nonlinear control, 2*, pp. 255–291.

Houimdi, M.-A. (2015). *Ajustement d'un nouvel algorithme d'optimisation simultanée des réponses temporelles et fréquentielles* (confidentielle M.Sc.A. thesis, Montréal).

How, Behihke, B., Frank, A., Dale, D., & Vian, J. (2008). Real-time indoor autonomous vehicle test environment. *IEEE Control Systems, 28*(2), 51-64. doi: 10.1109/MCS.2007.914691. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=4472379

Huard, P. S., Barnier, N., Brisset, P., & Verfaillie, G. . (2009). *Planification de mission pour une patrouille de micro-drones* présentée à 4èmes Journées Francophones de Planification, Décision et Apprentissage pour la conduite de systèmes, Toulouse.

Hydro-Québec. (2017). Hydro-Québec franchit une étape importante dans le développement d'un drone autonome pour l'inspection des lignes de transport d'énergie. Repéré à http://nouvelles.hydroquebec.com/fr/nouvelles/191/hydro-quebec-franchit-une-etape-importante-dans-le-developpement-dun-drone-autonome-pour-linspection-des-lignes-de-transport-denergie/

JD. (2015). Une flotte de drones pour les grands comptes. Repéré à http://www.chantiersdefrance.fr/marches/carrieres-une-flotte-de-drones-pour-les-grands-comptes/

Jiřinec, T. (2011). *Stabilization and control of unmanned quadcopter* (Master, Luleå University of Technology, Suède). Repéré à http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1020192/FULLTEXT02.pdf

Lagneau, L. (2017). Tikad, un mini-drone armé conçu pour le combat urbain. Repéré à http://www.opex360.com/2017/07/06/tikad-un-mini-drone-arme-concu-pour-le-combat-urbain/

Legras, F., Glad, A., Simonin, O., & Charpillet, F. . (2008). *Partage d'autorité dans un essaim de drones auto-organisé* présentée à 6ème Journées Francophones des Systèmes Multi-Agents-JFSMA'08.

Leishman, R. C., Macdonald, J. C., Beard, R. W., & McLain, T. W. (2014). Quadrotors and Accelerometers: State Estimation with an Improved Dynamic Model. *IEEE Control Systems, 34*(1), p28-41. doi: 10.1109/MCS.2013.2287362. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6712956

Lisein, J., Bonnet, S., Lejeune, P., & Pierrot-Deseilligny M. (2014). Modélisation de la canopée forestière par photogrammétrie depuis des images acquises par drone. *Revue Française de Photogrammétrie et de Télédétection,* (206), 45-54.

Lisein, J., Pineux, N., Pierrot-Deseilligny, M., Degré, A., & Lejeune, P. (2014). DÉTECTION DE L'ÉROSION DANS UN BASSIN VERSANT AGRICOLE PAR COMPARAISON D'IMAGES MULTIDATES ACQUISES PAR DRONE. *In Colloque scientifique francophone: Drones et moyens légers aéroportés d'observation*.

Luukonen, T. (2011). *Modelling and control of quadcopter* (Aalto University, Aalto). Repéré à http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf

M., A. L., C., R. W., E., S. P., & A., A. R. (2013, 17-18 May 2013). *PID, LQR and LQR-PID on a quadcopter platform* présentée à Informatics, Electronics & Vision (ICIEV). doi: 10.1109/ICIEV.2013.6572698

Mahony, R., Kumar, V., & Corke, P. (2012). *Multirotor Aerial Vehicles: Modeling, Estimation, and Control of Quadrotor* présentée à IEEE Robotics & Automation Magazine. doi: 10.1109/MRA.2012.2206474. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/6289431/

Mainwaring, D. C., J. Polastre, R. Szewczyk, J. Anderson. (2012). *Wireless Sensor Networks for Habitat Monitoring* présentée à 1st ACM International Workshop on Wireless Sensor Networks and Applications.

Martin, P., & Salaun, E. (2010). *The true role of accelerometer feedback in quadrotor control* présentée à IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Anchorage, AK.

McFarland. (1997). *Finite Element Aircraft Simulation of Turbulence*.

McNabb, M. (2016). EHang Drone Taxi Ready for Takeoff in NV. Repéré à https://dronelife.com/2016/06/08/ehang-drone-taxi-ready-takeoff-nv/

Miller, D. S. (2011). *Open loop system identification of a micro quadrotor helicopter from closed loop data* (Master, University of Maryland). Repéré à http://drum.lib.umd.edu/handle/1903/12371

Miroslav Krstić, Loannis Kanellakopoulos, & Kokotović, P. (1995). *Nonlinear and Adaptative Control Design*.

Mohammad, A., Alsharif, & Holzel, M. S. (2016). *System Identification of a Quadcopter's Rotational Dynamics Using Android Flight Data* présentée à Conference on Control Applications, Buenos Aires, Argentina.

Momont, A. (2014). *Drones for Good* (Delft). Repéré à https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:36ce77ad-1b06-4149-8da4-a231dcdfec69

Montiel-Varela, A. State estimation for a quadrotor aircraft in gps denied environment *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p430-436. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/7502658/

Muratet, L., Doncieux, S., Meyer, J. A., Pirim, P., Druot, T., & BEV, P. (2003). *Système d'évitement d'obstacles biomimétique basé sur le flux optique. application à un drone à voilure fixe en environnement urbain simulé* présentée à Journées MicroDrones, Toulouse.

Nemati, A., & Kumar, M. (2014). Modeling and control of a single axis tilting quadcopter. Dans *2014 American Control Conference* (pp. 3077-3082). doi: 10.1109/ACC.2014.6859328. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/ielx7/6849600/6858556/06859328.pdf?tp=&arnumber=6859328&isnumber=6858556

Newsroom. (2015). Des drones pour éviter les noyades. Repéré à https://humanoides.fr/des-drones-pour-eviter-les-noyades/

Nicholas Fischer, R. K., Warren E. Dixon. (2013). LaSalle-Yoshizawa Corollaries for Nonsmooth Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control 58*(9), 2333 - 2338. doi: 10.1109/TAC.2013.2246900

ONERA. (2018). *Conception conjointe d'un imageur multi-capteurs dédié à la navigation des micro-drones en environnement dynamique* (Palaiseau).

Pinto, E., Marques, F., Mendonça, R., Lourenço, A., Santana, P., & Barata, J. (2014). An autonomous surface-aerial marsupial robotic team for riverine environmental monitoring: Benefiting from coordinated aerial, underwater, and surface level perception. Dans *2014 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014)* (pp. 443-450). doi: 10.1109/ROBIO.2014.7090371

Planner, A. (2018). APM Planner 2.0 is an open-source ground station application for MAVlink based autopilots including APM and PX4/Pixhawk that can be run on Windows, Mac OSX, and Linux. Repéré à http://ardupilot.org/planner2/

QGroundControl. (2018). Intuitive and Powerful Ground Control Station for PX4 and ArduPilot UAVs. Repéré à http://qgroundcontrol.com/

R. Mahony, T. Hamel, & Pflimlin, J.-M. (2008). Non-linear complementary filters on the special orthogonal group. *IEEE Trans. Automat, 53*(5), 1203.

Raffo, G. V. (2008). MPC with Nonlinear Hinf Control for Path Tracking of a Quad-Rotor Helicopter. *41*(2), p8564-8569. Repéré à http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016403277

Retif, J. M. (2008). *Automatique Régulation* Lyon: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

S. Bonnabel, P. Martin, & P. Rouchon. (2009). Non-linear symmetry-preserving observers on lie groups. *IEEE Trans. Automat. Contr., 54*(7), 1709-1713.

S. O. H. Madgwick, A. J. L. Harrison, & R. Vaidyanathan. (2011). *Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm* présentée à IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics.

Sabatino, F. (2015). *Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation* (Master, KTH, Stockholm). Repéré à https://www.kth.se/polopoly_fs/1.588039!/Thesis%20KTH%20-%20Francesco%20Sabatino.pdf

Saied, M., AlShamaa, D., Shraim, H., Francis, C., Lussier, B., & Fantoni, I. (2015). Model identification and validation for translational movements of an octorotor UAV. Dans *2015 Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)* (pp. p102-108). doi: 10.1109/RED-UAS.2015.7440996. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/7440996/

Saucedo, R. (1968). *Introduction to Continuous and Digital Control Systems*. MacMillan & Co LTD.

Shih-Ho, W., & Davison, E. (1973). On the stabilization of decentralized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 18*(5), p473-478. doi: 10.1109/TAC.1973.1100362. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=1100362

Tahir, Z. (2016). Design and Development of Optimal Control System for Quad Copter UAV. *Indian Journal of Science and Technology, 9*(25). Repéré à http://www.indjst.org/index.php/indjst/article/view/96611

Titterton, D. H., & & Weston, J. L. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology* (The institution of Electrical Engineers).

Tran, N. K. (2015). *Modeling and Control of a Quadrotor in a Wind Field* (McGill University).

Tzanev, T. (2014). Structural Input-output Properties of Low-order MIMO Interconnected Systems *Journal of Control Engineering and Technology, 4*(3), 22.

Vassal, A., & Deschaux, F. (2015). *Ajout d'un déphaseur complexe sur la commande de la boule en sustentation*. Montréal: École de Technologie Supérieure.

Weixuan Zhang, M. W. M., Raffaello D'Andrea. (2016). *A controllable flying vehicle with a single moving part* présentée à IEEE International Conference on Robotics and Automation, Stockholm, Sweden.

wirewireweb. (2018). Cheerson CX-10 CX10 Mini 2.4G 4CH 6 Axis Gyro RC Quadcopter. Repéré à https://www.wirewireweb.net/Cheerson-CX-10-CX10-Mini-24G-4CH-6-Axis-Gyro-RC-Quadcopter_p_27.html

Yazdi, N., Ayazi, F., & Najafi, K. (1998). Micromachined Inertial Sensors. *Proceedings of the IEEE, 86*(8).

Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control, 26*(2), p301-320. doi: 10.1109/TAC.1981.1102603. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/1102603/

Zames, G., & Bensoussan, D. (1983). Multivariable feedback, sensitivity, and decentralized control. *IEEE Transactions on Automatic Control, 28*(11), p1030-1035. doi: 10.1109/TAC.1983.1103172. Repéré à http://ieeexplore.ieee.org/document/1103172/

Zemam, S. (2012). *Conception Mécanique et Identification des paramètres Aérodynamiques et Electriques d'un Engin Volant Type QUADROTOR* (République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université des Sciences et de la Technologie d'Oran MOHAMED BOUDIAF).

Zhang, M. (2016). Autonomous Flight of a Quadrotor Using Multi-Camera Visual SLAM. *14*(3). Repéré à http://ncfrn.mcgill.ca:8090/NCFRN/en/members/pubs

Zhong, F. W. (2015). *Implementation of Simulink controller design on Iris+ quadrotor* (MONTEREY, CALIFORNIA).

Zhou, K., & Doyle, J. C. (1998). *Essentials of robust control* (Vol. 108). Prentice Hall. Repéré à https://fr.scribd.com/document/46969107/Essentials-of-Robust-Control