

Modélisation numérique et optimisation d'une métasurface non linéaire aux fréquences térahertz (THz)

par

Gervais Dolvis LEUTCHO

MÉMOIRE PAR ARTICLE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE
SUPÉRIEURE COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE
LA MAÎTRISE AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE
M. Sc. A.

MONTREAL, LE 6 MAI 2024

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC



Gervais Dolvis Leutcho, 2024



Cette licence Creative Commons signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

PRÉSENTATION DU JURY
CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. François Blanchard, directeur de mémoire
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Richard Al Hadi, président du jury
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

Mme Ouassima Akhrif, membre du jury
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 8 AVRIL 2024

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait pas été possible sans l'aide et le soutien de nombreuses personnes, et je leur en suis profondément reconnaissant.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, le Professeur François Blanchard, pour son soutien inébranlable tout au long de ce travail. Sa contribution financière et matérielle, ses encouragements constants, ainsi que le temps précieux qu'il m'a consacré ont été d'une valeur incalculable pour la réalisation de ce mémoire. Je suis convaincu que notre collaboration future sera tout aussi fructueuse, et j'attends avec impatience de continuer à travailler avec lui.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements au Professeure Lyne Woodward pour nos nombreuses discussions et son expertise précieuse. Ses encouragements et sa confiance en ce travail m'ont été d'un soutien inestimable, m'aidant à rester motivé tout au long du processus. Je suis convaincu que nos futures collaborations seront tout aussi fructueuses, et j'attends avec impatience de continuer à travailler ensemble.

Mes remerciements vont également à mes collègues de l'équipe Tera-ETS pour nos nombreux échanges au fil des années passées ensemble. Je suis également reconnaissant pour le soutien offert par le laboratoire LaCIME.

Enfin, je tiens à remercier très chaleureusement toute ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs conseils précieux qui m'ont permis de surmonter les nombreux défis rencontrés en cours de route.

Modélisation numérique et optimisation d'une métasurface non linéaire aux fréquences térahertz (THz)

Gervais Dolvis Leutcho

RÉSUMÉ

La gamme de fréquences de 300 GHz à 10 THz dans le spectre électromagnétique (EM), définie comme la fenêtre térahertz (THz), se situe entre les domaines électronique et optique. De nombreuses résonances fondamentales des matériaux coïncident avec cette plage, et les ondes THz permettent d'interagir avec elles pour diverses applications. D'autre part, il existe un intérêt croissant pour le contrôle de la propagation du rayonnement électromagnétique au moyen de structures artificielles disposées périodiquement ou aléatoirement, composées de diélectriques, de métaux ou d'autres matériaux. Ces structures artificielles en 2D, de nature sub-longueur d'onde, qui se comportent comme un milieu continu pour les ondes électromagnétiques, sont appelées métasurfaces. Cependant, les métasurfaces non linéaires sont considérées comme offrant une grande flexibilité, une multifonctionnalité et leurs réponses non linéaires peuvent être utilisées pour des communications sécurisées. Il est clair que ces applications, et éventuellement de nouvelles, nécessitent une compréhension et une maîtrise adéquates de toutes les propriétés non linéaires qu'elles présentent. C'est pourquoi nous proposons un modèle mathématique qui décrit au mieux les caractéristiques d'excitation du résonateur non linéaire à anneau divisé dans la gamme de fréquences THz. Les phénomènes complexes, y compris les oscillations périodiques et le chaos, causés par le mouvement des porteurs de charges sous un rayonnement électromagnétique intense à la fente du matériau, sont mis en évidence à l'aide d'outils tels que l'exposant de Lyapunov à deux paramètres, les diagrammes de bifurcation, les spectres de fréquences, le profil temporel et l'image de phase. Les régions du matériau où se produisent l'hystérésis et la multistabilité sont révélées et étudiées en détail. Les régions d'hystérésis sont localisées au moyen de diagrammes à deux paramètres, tandis que la multistabilité est caractérisée au moyen du bassin d'attraction. Enfin, le théorème d'Helmholtz est exploité pour évaluer l'énergie physique nécessaire pour favoriser la propagation de l'onde électromagnétique et soutenir une oscillation continue dans le matériau.

Mots-clés : Métasurface térahertz; rayonnement EM; dynamique des porteurs de charge; multistabilité; bifurcation; chaos

Numerical modeling and optimization of a nonlinear metasurface at terahertz (THz) frequencies

Gervais Dolvis Leutcho

ABSTRACT

The frequency range from 300 GHz to 10 THz in the electromagnetic (EM) spectrum, simply defined as the terahertz (THz) window, lies between the fields of electronics and optics. Many fundamental resonances of materials coincide with this range, and THz waves are suitable to interact with them for various applications. From the other side, there is an increasing interest in controlling the propagation of EM radiation by means of periodically or randomly arranged artificial structures composed of dielectrics, metals, or other materials. Such artificial 2D arranged structures of sub-wavelength nature, which behave as a continuous medium for the EM waves, are called metasurfaces. However, nonlinear metasurfaces are considered to provide much flexibility, multifunctionality and their nonlinear responses can be used for secure communication. It is clear that these applications, and possibly new ones, require an adequate understanding and mastery of all the nonlinear properties they present. Therefore, a mathematical model is proposed that best describes the excitation characteristics of the nonlinear split-ring resonator in the THz frequency range. Complex phenomena including periodic oscillations and chaos, caused by the motion of charge carriers under intense EM radiation at the gap of the material are highlighted using tools such as the two-parameter Lyapunov exponent, bifurcation diagrams, frequency spectra, time profile, and phase image. Relevant regions of the material where hysteresis and multistability occur are revealed and studied in detail. Hysteresis regions are localized by means of two-parameter diagrams, while multistability is characterized by means of a cross-section basin of attraction. Finally, based on the Helmholtz formula, the physical energy to promote the EM wave propagation and to support a continuous oscillation in the material is evaluated.

Keywords: Terahertz metasurface; EM radiation; charge carrier dynamics; multistability; bifurcation; chaos

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE.....	6
1.1 Introduction.....	6
1.2 Le gap térahertz.....	6
1.3 Quelques propriétés des ondes térahertz et comparaison avec les longueurs d'onde du micro-onde et infrarouge	7
1.4 Les bases de l'optique.....	9
1.4.1 Les équations de Maxwell	9
1.4.2 Propagation de l'onde dans un matériau.....	11
1.4.3 Optique non linéaire.....	13
1.5 Métamatériaux et Metasurfaces	14
1.6 Non linéarité.....	15
1.7 Métasurfaces non linéaires.....	16
1.8 Le résonateur à anneau fendu	16
1.9 Phénomènes non linéaires dans les métasurfaces résonnantes	18
1.9.1 Génération de seconde harmonique (SHG)	18
1.9.2 Génération de troisième harmonique (THG)	19
1.9.3 SHG et THG dans le SRR.....	20
1.10 Métamatériau térahertz multifonctionnel utilisant un résonateur électrique symétrique et asymétrique à anneau divisé.....	25
1.11 Dynamique non linéaire complexe dans le SRR.....	29
1.11.1 Système dynamique	29
1.11.2 Système dynamique à temps continu.....	30
1.11.3 Théorie du chaos.....	31
1.11.4 Définition du chaos.....	32
1.11.5 Chaos et multistabilité dans le résonateur non linéaire à anneau fendu ...	32
1.12 Quelques applications du chaos et la multistabilité	35
1.13 Conclusion	36
CHAPITRE 2 MATÉRIELS ET MÉTHODES	39
2.1 Introduction.....	39
2.2 Méthodes analytiques.....	39
2.2.1 Dissipation et existence d'attracteurs	39
2.2.2 Points d'équilibre	41
2.2.3 Analyse de la stabilité linéaire	41
2.3 Méthode numérique	43
2.3.1 Runge-Kutta du quatrième ordre	43
2.3.2 Matériel et logiciels.....	44
2.4 Outils de caractérisation des comportements complexe non linéaires du SRR	44
2.4.1 Analyse du comportement de la bifurcation	45

2.4.2	Exposants de Lyapunov	46
2.4.3	Formes d'ondes temporelles.....	47
2.4.4	Diagrammes de phase	48
2.4.5	Spectre de fréquence	49
2.4.6	Bassin d'attraction	50
2.4.7	Exposants de Lyapounov à deux paramètres.....	51
2.5	Méthodes d'analyse du circuit équivalent du matériau non linéaire SRR.....	51
2.6	Conclusion	52
CHAPITRE 3	NONLINEAR DYNAMICS OF A SINGLE-GAP TERAHERTZ SPLIT-RING RESONATOR UNDER ELECTROMAGNETIC RADIATION	53
3.1	Introduction.....	54
3.2	Theoretical description.....	57
3.3	Energy of the nonlinear SRR material	60
3.4	Complex dynamics of the NSRR.....	64
3.4.1	Dynamic regions analysis	65
3.4.1.1	Bifurcation and route to chaos	66
3.4.1.2	Effect of the normalized loss parameter σ	69
3.4.1.3	Effect of the normalized amplitude μ	73
3.4.2	Dynamics in 2D parameter spaces and multistability.....	75
3.5	Conclusion	80
CONCLUSION.....		83
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES		85

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 3.1	Some examples and combination of coexisting solutions that can be obtained on the nonlinear SRR model for, $\beta = 0.4, \eta = 0.08$79

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1.1	Spectre électromagnétique avec illustration de la région térahertz	7
Figure 1.2	Transitions et interactions moléculaires dans la région térahertz du spectre électromagnétique Tiré de Pickwell Wallace (2006)	9
Figure 1.3	(a) Structure d'un résonateur à anneau fendu (SRR) et (b) son modèle électrique	17
Figure 1.4	Diagramme du niveau d'énergie du processus de génération de seconde harmonique (SHG) Tiré de Trinh (2015, p.9).....	18
Figure 1.5	Diagramme du niveau d'énergie du processus de génération de troisième harmonique (THG) Tiré de Trinh (2015, p.9).....	19
Figure 1.6	Expériences sur un échantillons de SRR avec une résonance magnétique fondamentale centrée sur une longueur d'onde de $1.5\mu m$	20
Figure 1.7	Comparaison de la réponse optique entre les métasurfaces PSRR et VSRR sous incidence normale avec la polarisation x	22
Figure 1.8	Simulations des composantes de champ électrique et magnétique d'un SRR avec une onde THz indente de 0.46 THz polarisé dans la direction y Tiré de Amirkhan et al., (2019)	23
Figure 1.9	Structure SRR a micro-gap (gauche) et réponses en fréquence du champ amplifié dans le gap pour différente valeurs de la largeur de gap d (droite)	25
Figure 1.10	Schémas de (a) eSRR-1 avec double couche, cellules unitaires de (b) eSRR-1, (c) eSRR-2, (d) eSRR-3, et (e) eSRR-4	26
Figure 1.11	Spectres de transmission de l'eSRR-1 en mode TE (a) et en mode TM (b)	27
Figure 1.12	Spectres de transmission de l'eSRR-2 en mode TE (a) et en mode TM (b)	28
Figure 1.12	(a) Schéma d'un modèle couplé de SRR sous différente configuration et (b) diagramme de bifurcation	33

Figure 1.13	(ligne du haut) Portraits de phases des signaux et (ligne du bas) les spectres de fréquence correspondante tracés sur une échelle logarithmique pour différent fréquence normalisée d'entraînement Ω	35
Figure 3.1	Schematic of the single-gap SRR metamaterial with its corresponding geometrical dimensions.....	58
Figure 3.2	Dynamic behavior of the NSRR in the (ω, σ) parameter space. The maps are plotted by increasing both parameter with initial condition $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$	64
Figure 3.3	(a) Bifurcation diagram of the SRR model considering the normalized driving frequency ω as the control parameter, swept in two directions.....	66
Figure 3.4	(first panel) Time series, (second panel) power spectra, (third panel) phase trajectories showing the route to chaos in the NSRR for different values of ω	67
Figure 3.5	(a1-c1) Bifurcation diagrams of the normalized charge (q) versus the loss parameter (σ) and the corresponding (a2-c2) maximum Lyapunov exponent.....	70
Figure 3.6	(a) Bifurcation diagram and its corresponding (b) maximum Lyapunov exponent of the SRR model (7)	72
Figure 3.7	Coexisting dynamic behaviors of the SRR material in the (μ, σ) parameter space for $\beta = 0.4, \eta = 0.08,$ and $\omega = 1.0$	74
Figure 3.8	(a) Coexisting bifurcation diagrams and its (b) Lyapunov exponent graphs showing the restricted regions of multistability for $\mu = 40,$ using initial condition $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$	76
Figure 3.9	Demarcation domain (i.e., basin of attraction) in the plane (q_0, i_0) illustrating different two coexisting behaviors (multistability) in the proposed SRR model for.....	78

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

EM	electromagnetic
2D	two-dimension
3D	three-dimension
SHG	second harmonic Generation
THG	third harmonic generation
SRR	split ring resonator
NSRR	nonlinear split ring resonator
PSRR	parallel split ring resonator
VSRR	vertical split ring resonator
MM	metamaterial
MS	metasurface
FH	fundamental harmonic
LN	lithium niobate
TE	transverse electric
TM	transverse magnetic
RK-4	fourth-order runge-kutta
FFT	fast fourier transform
DFT	discrete fourier transform
KCL	kirchhoff's current law
KVL	kirchhoff's voltage law
JJ	josephson junction

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

GHz	gigahertz
THz	téraherz
λ	longueur d'onde
ν	fréquence
\vec{E}	vecteur champ électrique
\vec{B}	vecteur induction magnétique
\vec{M}	aimantation
\vec{P}	polarisation
P_{NL}	polarisation non linéaire
\vec{D}	vecteur déplacement diélectrique
\hat{e}_z	vecteur unitaire suivant z
ϵ_0	permittivité électrique du vide
μ_0	perméabilité magnétique du vide
ϵ_r	permittivité relative
μ_r	perméabilité relative
ρ_{ext}	densité de charge
\vec{j}_{ext}	densité de courant
$\bar{\chi}_e$	susceptibilité électrique
$\bar{\chi}_m$	susceptibilité magnétique
r	coordonnée spatiale
T, t	temps

∇	opérateur nabla
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivée partielle
$\frac{d}{dt}$	dérivée totale
$I(z)$	intensité
c	vitesse de la lumière
k	vecteur d'onde
n	indice de réfraction
α	coefficient d'absorption
\propto	proportionnalité
L	inductance
C	capacité
Δ	différence
h	pas d'intégration
t_n	temps d'échantillonnage
λ_e, λ_{max}	exposant maximal de Lyapounov
M_J	matrice jacobienne
dQ	charge élémentaire

INTRODUCTION

0.1. Contexte et problématique

Avec la croissance rapide de l'utilisation des smartphones, des tablettes et de l'internet, de nombreux services et entreprises traditionnels existants sont de plus en plus remplacés par leur équivalent électronique/numérique. Cela se justifie par l'émergence des concepts/services tels que l'apprentissage en ligne, le commerce électronique, la banque en ligne, le télétravail, les cryptomonnaies, les vidéoconférences, le traitement en ligne des données biomédicales, etc. qui font partie de la vie quotidienne et de la société moderne. On assiste à cet effet à une forte demande d'interconnexions, de dispositifs de stockage de données à haute capacité, de transistors et de sécurisation des informations. Systématiquement, ces applications très exigeantes nécessitent des composants multifonctionnels de dimensions réduites (Lan, Wang et al. 2023).

Un autre problème est la demande sans cesse croissante de débits de données plus rapides qui pousse actuellement la communication sans fil vers les fréquences térahertz (THz) (Koenig, Lopez-Diaz et al. 2013, Han, Wu et al. 2019). Le rayonnement THz renvoie globalement aux ondes électromagnétiques dont les fréquences sont comprises entre 0.3 et 10 THz, soit entre $30\mu\text{m}$ et 3mm (He, Chen et al. 2020). Néanmoins, les ondes térahertz (THz) se situent à la frontière des domaines électronique et photonique du spectre électromagnétique. Du point de vue photonique/optique, l'énergie des photons dans la plage THz est nettement inférieure à celle de la lumière visible et de l'infrarouge proche. Par conséquent, la manipulation et le contrôle des ondes térahertz présentent des défis non négligeables. En d'autres termes, il manque considérablement de matériaux naturels qui interagiraient fortement avec ces ondes. Les matériaux artificiels connus sous le nom de métamatériaux/métasurfaces sont une solution qui continue à combler le "gap THz" tout en démontrant de multifonctionnalités dans ce spectre (Yen, Padilla et al. 2004, Withayachumnankul and Abbott 2009, Yu and Lin 2019). En effet, les métasurfaces (MSs) sont des structures bidimensionnelles des métamatériaux (MMs) artificiellement conçues, composées de métaux et de diélectrique, ou d'autres matériaux, qui possèdent de fortes capacités de manipulation des ondes

électromagnétiques et donc la réponse EM provient de l'oscillation des électrons dans les métaux très conducteurs. La conception des métasurfaces pour les ondes EM dans la bande spectrale THz est actuellement un domaine de recherche très actif en raison de la possibilité de créer des matériaux qui présentent de nouvelles réponses EM qui n'existent pas dans les matériaux naturels, avec diverses méthodes de production à faible coût émergeant chaque année (Guerboukha, Amarasinghe et al. 2021), ce qui coïncide avec la demande pressante des futures communications et technologies.

Les méta-atomes sont les principaux matériaux constitutifs des métasurfaces. Ils sont généralement constitués des éléments métalliques sub-longueur d'onde. Grâce à la nature sub-longueur d'onde de ces derniers, une interaction non linéaire entre la lumière et la matière peut se produire avec l'application d'un champ électromagnétique localisé et renforcé (Blanchard, Ooi et al. 2012). Cette particularité permet ainsi de développer des métasurfaces non linéaires dotés d'une dynamique nouvelle et complexe (Fan, Wei et al. 2011, Shadrivov, Lapine and Kivshar 2015, Abrashuly and Valagiannopoulos 2021, Valagiannopoulos 2022). Parmi les méta-atomes intéressants des métasurfaces, la structure du résonateur à anneau divisé (SRR) est bien connue dont l'espace constitue une barrière à la formation du courant circulant, favorisant ainsi l'accumulation des charges (Cai and Shalaev 2010). D'une part, des phénomènes non linéaires peuvent être induits par le mouvement des porteurs de charge dans un semi-conducteur suite l'application d'un champ électrique intense sur la surface du matériau (Razzari, Su et al. 2009). D'autre part, leur réponse (du matériau) peut varier en fonction d'une condition externe, ce qui est important pour la mise en œuvre de capteurs ayant des performances élevées et une grande sensibilité (Horestani, Fumeaux et al. 2012, Abduljabar, Rowe et al. 2014, Wen, Liang and Lin 2021). Enfin, leur sortie peut être ajustée en fonction d'un paramètre de contrôle et cette modulation versatile peut être utile pour les applications TIC (Nornikman, Ahmad et al. 2012, Horestani, Shaterian et al. 2016).

Parmi les comportements non linéaires générés dans ces matériaux, la multistabilité est l'un des phénomènes rares et intéressants qui doivent être révélés et étudiés. Rappelons que la multistabilité est caractérisée par la coexistence de plusieurs états stables pour un même

ensemble de paramètres du système. En communication, la multistabilité dans le système peut être exploitée pour accroître la sécurité de transmission des données. En robotique, elle peut être exploitée pour effectuer des tâches multiples sans modification des paramètres du matériau. Cette propriété multistable permet une bonne flexibilité de la métasurface car chaque réponse est liée à un état stable particulier dans l'espace d'état et le matériau peut passer d'un état à l'autre pour s'adapter à l'environnement le plus stable où il se trouve. Outre l'aspect technologique susmentionné des métasurfaces multistables, nous pouvons également souligner qu'elles peuvent être utilisées à des fins pédagogiques. En effet, ces phénomènes/propriétés sont d'un grand intérêt dans des cours tels que l'introduction des systèmes dynamiques non linéaire, enseignés au niveau du premier et du deuxième cycle universitaire, comme études de cas particulières. Le matériau non linéaire proposé peut donc servir d'exemple de modélisation grâce à son modèle électrique équivalent.

0.2. Objectifs

Les métasurfaces ont de nombreuses applications potentielles de leur comportement non linéaire. Toutefois, ces applications, voire de nouvelles applications, nécessitent une compréhension suffisante des comportements non linéaires de ces matériaux. Dans le cadre de ce travail, nous nous proposons de :

- (i) Tout d'abord, modéliser afin de dériver le modèle mathématique exact décrivant un méta-atome non linéaire à anneau divisé (single gap) térahertz, élément constitutif d'une métasurface.
- (ii) Ensuite, étudier numériquement les comportements dynamiques collectifs causés par le mouvement des porteurs de charges sous un champ EM intense au niveau du gap du matériau dans la gamme de fréquences térahertz (THz).
- (iii) Enfin, révéler le phénomène intéressant de multistabilité en examinant la sensibilité des conditions initiales sur le diagramme dynamique bidimensionnel.

0.3. Contributions

Dans cette recherche, nous nous intéresserons à l'étude dynamique complète d'un résonateur THz non linéaire à anneau divisé single gap afin de révéler différents comportements collectifs qui sont importants de connaître avant toute conceptualisation et pour de meilleures applications/exploitations en ingénierie. Au meilleur de notre connaissance, c'est pour la première fois qu'une telle étude est menée dans le SRR, dans la gamme de fréquences THz et démontrant des comportements extrêmement complexes, riches et variés.

Les différents résultats de nos travaux ont conduit à la publication d'un (01) article de journal et de deux (02) articles de conférences comme mentionnés ci-dessous :

Article de journal:

G. D. Leutcho, L. Woodward and F. Blanchard (2023). "Nonlinear dynamics of a single-gap terahertz split-ring resonator under electromagnetic radiation." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 33(10), 103131.

Articles de conference:

- (i) **G. D. Leutcho**, L. Woodward and F. Blanchard, "Hysteresis-induced multistability in a nonlinear Terahertz split ring resonator," *2023 48th International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves (IRMMW-THz)* pp. 1-2, doi: 10.1109/IRMMW-THz57677.2023.10299073.
- (ii) **G. D. Leutcho**, L. Woodward and F. Blanchard, "Multistability in a nonlinear THz split ring resonator," *2023 Photonics North (PN)*, pp. 1-2, doi: 10.1109/PN58661.2023.10223014.

0.4. Structure de la thèse

Cette thèse est rédigée sous forme d'articles. Ainsi, pour atteindre nos objectifs, notre travail est subdivisé comme suit : après cette introduction générale, une revue de littérature est

présentée dans le premier chapitre. Nous présentons ici quelques propriétés des ondes THz, Nous présentons également quelques notions théoriques essentielles sur l'optique non linéaire, la propagation d'onde dans un matériau ainsi que sur les métasurfaces. De même, une attention est portée sur quelques travaux effectués dans la littérature sur le cas du résonateur à anneau divisé.

Le deuxième chapitre est consacré à la méthode et à la méthodologie utilisées dans le cadre de cette thèse. Plus précisément, les outils analytiques et numériques employées dans ce document son discutés.

Le dernier chapitre présente et discute les résultats sur l'article de revue intitulé « Nonlinear dynamics of a single-gap terahertz split-ring resonator under electromagnetic radiation ». Une étude détaillée et approfondie de la dynamique du matériau est faite permettent ainsi de révéler une multitude de comportements non linéaires exhibés par ce matériau.

Enfin, cette thèse se termine par une conclusion générale qui résume les travaux effectués et propose quelques points/recommandations et améliorations pour de futures recherches.

CHAPITRE 1

REVUE DE LITTÉRATURE

1.1 Introduction

Grace au développement des technologies de l'information, des communications et de l'ingénierie informatique, on assiste de plus en plus à une forte demande d'interconnexions, de dispositifs de stockage de données à haute capacité, de transistors et de sécurisation des informations. Systématiquement, ces applications très exigeantes nécessitent des dimensions réduites, et les métasurfaces non linéaires THz peuvent être une alternative. Dans ce chapitre, une description des propriétés des ondes THz sera faite, ainsi que l'interaction onde-matière. Nous présenterons et discuterons quelques aspects théoriques essentiels à la compréhension des métasurfaces non linéaires, ainsi que quelques travaux menés dans la littérature sur le cas du résonateur à anneau fendu.

1.2 Le gap térahertz

De nos jours, la transmission rapide de données sans fil a connu une croissance exponentielle due à l'évolution des modes d'utilisation de l'information dans la vie quotidienne et dans la société moderne. Cette évolution implique la nécessité cruciale de communication sans fil très rapide (c'est-à-dire à très grande vitesse), en tout instant et à tout point (Vettikalladi, Sethi et al. 2019). Ainsi, pour faciliter et accélérer le transfert des informations/données, une éventuelle solution consiste à créer une bande de fréquences distincte, c'est-à-dire une onde électromagnétique THz dans un espace vide entre des micro-ondes et le domaine infrarouge (He, Chen et al. 2020). La région THz est une bande spectrale qui s'étend sur une plage de fréquence comprise entre 0,3 et 10 THz (Vettikalladi, Sethi et al. 2019). Pour référence, 1 THz correspond à 33.3 cm^{-1} , 4.14 meV , et a une longueur d'onde de $300 \mu\text{m}$. La Figure 1.1 donne une présentation globale du spectre électromagnétique (EM) où la bande THz peut être localisée par rapport aux autres spectres (Karmoude, Bennis et al. 2017). Bien que la plage de fréquence supérieure soit celle de l'infrarouge lointain et que la bande inférieure

correspond à celle des micro-ondes, cette région fait l'objet d'intenses travaux de recherches. Cependant, elle demeure la bande spectrale de fréquence non déterminée exploitée dans le domaine de la communication (Akyildiz, Jornet and Han 2014).

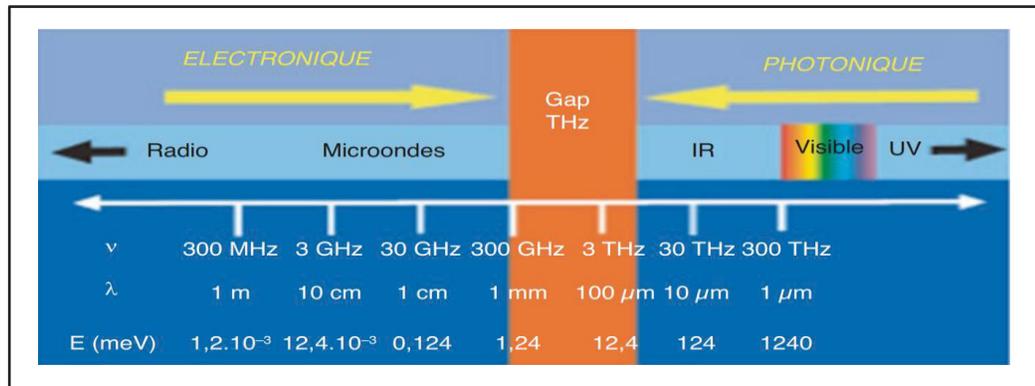


Figure 1.1 Spectre électromagnétique avec illustration de la région térahertz : ν est fréquence et λ la longueur d'onde
Tiré de Karmoude et al. (2017)

1.3 Quelques propriétés des ondes térahertz et comparaison avec les longueurs d'onde du micro-onde et infrarouge

Les ondes THz présentent diverses propriétés très remarquables qui peuvent être exploitées pour de nombreuses applications. Parmi ses propriétés intéressantes, quelques caractéristiques des ondes THz sont décrites ci-dessous :

- Les rayonnements THz (ou ondes T) peuvent pénétrer à travers des objets cachés, en particulier des emballages, des sacs de livres, du carton ondulé, des vêtements, des chaussures, etc. pour trouver les objets nocifs qu'ils contiennent.
- La longueur d'onde (λ) des ondes THz étant plus courtes comparées aux longueurs d'onde du domaine micro-onde, ces ondes présentent une meilleure résolution spatiale. Résolution spatiale typique : 250 μm latéralement, 20 μm dans le sens axial (Pickwell and Wallace 2006).
- En raison de sa faible énergie de photon (de quelques meV, voir Figure 1.1), les ondes THz sont non nocives et non ionisantes pour les organismes vivants.

- Moins de dispersion que les IR/optiques en raison des longueurs d'onde plus élevées (Pickwell and Wallace 2006).
- Absorption considérable des molécules d'eau; étirements et torsion des liaisons hydrogènes

Comme le montre la Figure 1.2, la région THz présente de multiples propriétés chimiques et physiques, de même que de nombreuses vibrations moléculaires, en particulier des vibrations de liaisons à basse fréquence, des vibrations de phonons cristallins, des rotations moléculaires, des étirements et des torsions de liaisons hydrogène (Pickwell and Wallace 2006).

La plage THz présente plusieurs avantages par rapport aux dispositifs industriels fonctionnels opérants dans la région des micro-ondes et infrarouges :

- Les THz peuvent offrir une plus grande largeur de bande, comparé à la gamme des micro-ondes qui est utilisée pour une variété de services et donc la bande passante est limitée.
- Comparé à l'infrarouge, les rayonnements THz pénètrent des matériaux diélectriques et sont moins susceptibles aux diffusions de Rayleigh et de Mie. En revanche, le THz a une perte de signal plus faible dans des situations atmosphériques spécifiques telles que les brouillards (Praveena, Ponnappalli and Umamaheswari 2022).

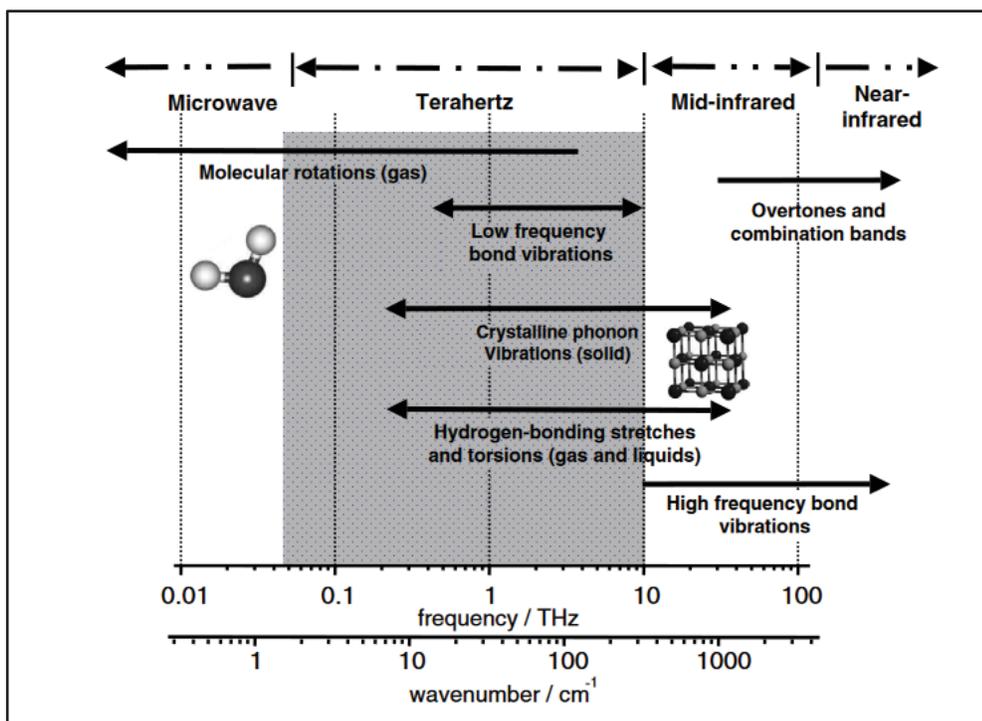


Figure 1.2 Transitions et interactions moléculaires dans la région térahertz du spectre électromagnétique
Tiré de Pickwell Wallace (2006)

1.4 Les bases de l'optique

Cette section traite quelques théories de l'optique non linéaire. Les équations de Maxwell sont introduites pour une description de base de l'interaction lumière-matière. Ensuite, la propagation dans un matériau est introduite pour comprendre son comportement et ses réponses à l'onde incidente. Une introduction à l'optique non linéaire est présentée.

1.4.1 Les équations de Maxwell

Pour présenter l'interaction de la lumière avec la matière, nous commençons par l'ensemble des équations macroscopiques de Maxwell qui décrivent les phénomènes électromagnétiques en général. Elles sont connectées et se formulent comme suit dans un milieu diélectrique et isotrope.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \vec{D} = \rho_{ext}, \\ \nabla \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = j_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec les champs macroscopiques \vec{D} (vecteur déplacement diélectrique), \vec{B} (vecteur induction magnétique), \vec{E} (vecteur champ électrique), et \vec{H} (le vecteur champ magnétique), ρ_{ext} et j_{ext} désignent la densité externe de charge et de courant, respectivement.

Lorsque les champs magnétiques et électriques \vec{H} , \vec{E} agissent sur les matériaux, ils peuvent induire ou réorienter les dipôles magnétiques et électriques. Le moment dipolaire électrique par unité de volume à l'intérieur du matériau est caractérisé par la polarisation \vec{P} , tandis que le moment magnétique par unité de volume est décrit par l'aimantation \vec{M} . Les relations constitutives liant ses composantes ont la forme suivante

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.2)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1.3)$$

avec ϵ_0 la permittivité électrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

En considérant une réponse linéaire des matériaux, les champs P et M , sont couplés aux fonctions de réponse correspondantes par

$$\vec{P}(r, t) = \int \epsilon_0 \bar{\chi}_e(r - r', t - t') \vec{E}(r', t') dt' d^3r', \quad (1.4)$$

$$\vec{M}(r, t) = \int \mu_0 \bar{\chi}_m(r - r', t - t') \vec{H}(r', t') dt' d^3r'. \quad (1.5)$$

où r représente la coordonnée spatiale. $\bar{\chi}_e$ et $\bar{\chi}_m$ sont respectivement, les susceptibilités électrique et magnétique, représentent des tenseurs de rang deux. La formule générale des susceptibilités décrite ci-dessus peut être simplifiée si des caractéristiques particulières du matériau sont remplies. Dans les milieux isotropes, les tenseurs sont des scalaires car les dipôles ont une orientation parallèle ou antiparallèle aux champs incidents/appliqués. Les

tenseurs sont indépendants de la coordonnée spatiale dans un milieu homogène ayant une réponse locale. Ainsi, les relations (1.4) et (1.5) prennent les formes

$$\vec{P}(r, t) = \epsilon_0 \int \bar{\chi}_e(t - t') \vec{E}(r, t') dt', \quad (1.6)$$

$$\vec{M}(r, t) = \mu_0 \int \bar{\chi}_m(t - t') \vec{H}(r, t') dt'. \quad (1.7)$$

Par transformée de Fourier, les expressions de \vec{P} et \vec{M} dans le domaine fréquentiel sont obtenues.

$$\vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\omega), \quad (1.8)$$

$$\vec{M}(\omega) = \mu_0 \chi_m(\omega) \vec{H}(\omega). \quad (1.9)$$

Les équations constitutives (1.2) et (1.3) peuvent être réécrites comme suit

$$\vec{D} = \epsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)] \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}, \quad (1.10)$$

$$\vec{B} = \mu_0 [1 + \chi_m(\omega)] \vec{H} = \mu_0 \mu(\omega) \vec{H}, \quad (1.11)$$

où $\epsilon(\omega) = \epsilon_r$ et $\mu(\omega) = \mu_r$ désignent respectivement, la permittivité électrique relative et la perméabilité magnétique relative du matériau.

Dans les manuels habituels, l'aimantation des matériaux par des champs électromagnétiques à des fréquences optiques est souvent négligée, car les matériaux naturels existants ne présentent aucune réponse magnétique pour les longueurs d'onde dans le visible. La particularité des métamatériaux repose sur l'idée que des valeurs artificielles pour ϵ_r , μ_r modifient la réponse des matériaux lorsqu'ils sont illuminés par une onde, ce qui donne lieu à des phénomènes inhabituels.

1.4.2 Propagation de l'onde dans un matériau

La sous-section précédente a présenté et décrit les fondamentaux de l'interaction du champ électromagnétique avec la matière. Cependant, la lumière en tant qu'onde EM demeure masquée dans les équations de Maxwell. Pour mettre en évidence l'onde progressive comme une solution aux équations de Maxwell, nous pouvons les réécrire sous la forme

$$\nabla^2 E - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (1.12)$$

$$\nabla^2 B - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

En utilisant l'ansatz d'une onde plane pour le champ électrique et le champ magnétique

$$E(r, t) = E_0 e^{i(kr - \omega t)} + cc, \quad (1.14)$$

$$B(r, t) = B_0 e^{i(kr - \omega t)} + cc, \quad (1.15)$$

avec cc le conjugué complexe. La relation de dispersion peut être déduite

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega) = k_0^2 \tilde{n}^2(\omega). \quad (1.16)$$

Cette relation de dispersion lie la fréquence ω de l'onde au vecteur d'onde k à travers la vitesse de la lumière dans le vide $c = (\sqrt{\epsilon_0 \mu_0})^{-1}$ et l'indice de réfraction complexe

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)}. \quad (1.17)$$

Comparer aux matériaux artificiels, la réponse magnétique aux fréquences optiques de la plupart des matériaux naturels peut être négligée et il est justifié de prendre $\mu(\omega) = 1$. Le comportement de l'indice de réfraction est donc déterminé par la permittivité complexe $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ par

$$\tilde{n} = n + ik = \sqrt{\epsilon_1 + i\epsilon_2} \quad (1.18)$$

avec

$$\epsilon_1 = n^2 - k^2 \quad (1.19)$$

$$\epsilon_2 = 2nk \quad (1.20)$$

$$k = \frac{\epsilon_2}{2n} \quad (1.21)$$

$$n = \frac{1}{2} \left(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \right) \quad (1.22)$$

La propagation de l'onde dans le matériau est fortement influencée par l'indice de réfraction, puisqu'il affecte directement le vecteur d'onde k . Pour une onde plane se propageant dans la direction z , le vecteur d'onde a la forme

$$k_z = (n + ik) \frac{\omega}{c} \hat{e}_z \quad (1.23)$$

avec \hat{e}_z le vecteur unitaire orienté suivant z . Pour l'onde plane (1.14), le champ électrique peut être exprimé comme suit

$$E(z, t) = E_0 \underbrace{e^{i\omega(n(\omega)z/c - t)}}_{\text{propagation}} \times \underbrace{e^{-(\omega k(\omega)z/c)}}_{\text{atténuation}}. \quad (1.24)$$

Nous remarquons ici que l'indice de réfraction réelle (partie réelle de \tilde{n}) $n(\omega)$ définit la propagation de l'onde dans le matériau, tandis que la partie imaginaire $k(\omega)$ est responsable de l'atténuation de l'onde et donc appelée coefficient d'extinction. Ce coefficient est corrélé au coefficient d'absorption α de la loi de Beer (Mayerhöfer, Pahlow and Popp 2020),

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}. \quad (1.25)$$

Il décrit la décroissance exponentielle de l'intensité $I(z)$ d'une onde se propageant dans un milieu absorbant suivant la direction z . Le phénomène est mieux interprété en utilisant la relation $I(z, t) \propto |E(z, t)|^2$ sur (2.24) et en comparant le résultat avec (1.25). Il s'ensuit donc que

$$\alpha(\omega) = \frac{2\omega k(\omega)}{c}. \quad (1.26)$$

1.4.3 Optique non linéaire

La théorie ondulatoire de la lumière est basée sur le principe de superposition. Les ondes qui se propagent dans un milieu linéaire peuvent se superposer sans se perturber. Cependant, dans les milieux non linéaires, les phénomènes sont un peu différents, et le principe de superposition de Huygens devient alors invalide. La description de la réponse du matériau à un champ EM dans la section précédente n'est applicable que dans le cas de faibles intensités du champ. En présence des champs intenses, la polarisation diélectrique répond de façon non linéaire au champ électrique de la lumière. Il en résulte une interaction des champs à travers le matériau.

Pour décrire théoriquement ce comportement dans l'approximation du dipôle électrique, nous définissons la polarisation non linéaire comme un développement de puissance du champ électrique externe sous la forme d'une expansion de Taylor

$$P(E) = \epsilon_0 [\chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots + \chi^{(m)}E^m]. \quad (1.27)$$

où $\chi^{(m)}$, $m > 1$ est la susceptibilité d'ordre m du milieu optique et représente un tenseur de rang $m + 1$. Le premier terme de (1.27) joue un rôle important dans l'optique linéaire et est lié aux phénomènes optiques conventionnels tels que la réflexion, la réfraction, l'absorption et la diffusion. Toutefois, en présence de champs intenses, les termes d'ordre supérieur de (1.27) induisent une réponse optique non linéaire. Dans le domaine fréquentiel, l'équation d'onde peut s'écrire

$$\nabla^2 E(\omega) - \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} E(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} P_{NL} \quad (1.28)$$

Avec

$$P_{NL}(E) = \epsilon_0 [\chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots + \chi^{(m)} E^m]. \quad (1.29)$$

La polarisation non linéaire (P_{NL}) dans le second membre de l'équation d'onde (2.28) se comporte comme une force motrice.

1.5 Métamatériaux et Metasurfaces

Bien que les métamatériaux aient suscité un grand intérêt dans la recherche, leurs propriétés dépendent principalement de la réponse globale des méta-atomes disposés dans l'espace. Pour les applications sur puce, une seule ou plusieurs couches de méta-atomes sont souhaitables. Les metasurfaces sont des plateformes/structures uniques pour le contrôle de la propagation des ondes électromagnétiques qui peuvent briser cette limitation et réduire les interactions lumière-matière à une échelle inférieure à la longueur d'onde. Une metasurface est généralement constituée d'une couche optiquement fine de méta-atome tel que des nanoparticules, dont la taille est bien inférieure à la longueur d'onde (Ali, Mitra and Aïssa 2022). Chaque méta-atome fonctionne comme une antenne optique capable de confiner la lumière et d'introduire de brusques changements d'amplitude et de phase dans le front d'onde. Les méta-atomes sont flexibles en termes de forme, de matériaux composites et de périodicité, ce qui offre une liberté suffisante pour contrôler la distribution du champ local et la propagation des ondes. Comme pour les métamatériaux, il est possible d'obtenir de nouvelles caractéristiques, telles que des chemins lumineux reconfigurables, la formation de

faisceaux, etc. en intégrant des composants variable, un milieu de gain ou des éléments/matériaux non linéaires dans les métasurfaces (Ali, Mitra and Aïssa 2022).

1.6 Non linéarité

Les effets optiques non linéaires jouent un rôle important dans la mise en œuvre de diverses fonctionnalités photoniques, telles que le stockage de données optiques, le traitement des signaux optiques, la commutation ultrarapide, les communications optiques, etc. Tout matériau naturel possède des non-linéarités lorsqu'il interagit avec un champ électromagnétique (EM) suffisamment puissant. Cependant, les non-linéarités naturelles sont intrinsèquement faibles (Krasnok, Tymchenko and Alù 2018). Pour obtenir une efficacité élevée, la réponse non linéaire d'un milieu qui s'étend sur plusieurs longueurs d'onde est souvent nécessaire. L'intégration de matériaux intrinsèquement non linéaires dans des métasurfaces par ailleurs linéaires permet de produire des composites métamatériaux non linéaires, qui sont très intéressants en raison de leur capacité à améliorer et à contrôler les processus non linéaires d'une manière qui n'est pas possible avec les cristaux non linéaires conventionnels, les polymères et d'autres matériaux (Rose, Larouche and Smith 2011, Kozyrev, Shadrivov and Kivshar 2014, Cui, Li et al. 2017, Sharma and Jana 2021). En outre, les grandes susceptibilités non linéaires propres aux matériaux constitutifs des méta-atomes permettent d'envisager de nouvelles possibilités d'adaptation de phase (Rose, Huang and Smith 2011, Suchowski, O'Brien et al. 2013) et de nombreux autres phénomènes non linéaires (Rose, Powell et al. 2013, Kozyrev, Shadrivov and Kivshar 2014, Cui, Li et al. 2017).

En particulier, les métaux, qui constituent la majeure partie des méta-atomes, offrent un compromis intéressant dans le contexte des métasurfaces non linéaires. D'une part, les susceptibilités non linéaires déjà substantielles des métaux peuvent être encore améliorées en amplifiant le champ local près des surfaces métalliques (Cai and Shalaev 2010, Kang, Rohrbach et al. 2022). D'autre part, les métaux en vrac ne supportent pas la propagation d'ondes par eux-mêmes et présentent des pertes optiques significatives (Cai and Shalaev 2010). En résumé, la propagation des ondes dans les métaux ne permet pas d'obtenir de

grandes longueurs d'interaction aux fréquences optiques, mais leurs propriétés localisées sont prometteuses pour obtenir des performances élevées à des échelles inférieures à la longueur d'onde.

1.7 Métasurfaces non linéaires

La capacité d'améliorer les interactions entre la lumière et la matière et de contrôler la polarisation optique locale permet aux métasurfaces d'être exploitées pour produire des effets optiques non linéaires (Krasnok, Tymchenko and Alù 2018, Ali, Mitra and Aïssa 2022), ainsi que des dynamiques non linéaire très complexes (Cui, Li et al. 2017, Sharma and Jana 2021). Dans les fréquences THz en particulier, la concentration des rayonnements THz incidentes assouplit les exigences relatives à l'intensité du champ, ce qui permet de générer des ondes THz de grande intensité. Différents paramètres, tels que la polarisation, l'intensité et la phase, peuvent être contrôlés en modifiant la géométrie et l'anisotropie de la forme des métasurfaces. Cette méthode permet une manipulation efficace de l'interaction non linéaire. En particulier, les métasurfaces non linéaires conçus à base des nanostructures plasmoniques sont les structures les plus adaptés pour améliorer la réponse optique non linéaire en raison de la forte amplification du champ EM local causée par la résonance plasmonique, qui accroît l'efficacité de la pompe. Les matériaux comme le graphène, certains matériaux semi-conducteurs tels que l'arséniure de gallium (GaAs), l'arséniure d'indium-gallium (InGaAs), sont des exemples de matériaux qui peuvent être utilisés pour induire les effets non linéaires dans la métasurface (Su, Blanchard et al. 2009, Blanchard, Golde et al. 2011, Tani, Blanchard and Tanaka 2012, Razavipour, Yang et al. 2015). D'autres types de non linéarité peuvent également être retrouvés dans (Blanchard, Nkeck et al. 2022, Valagiannopoulos 2022).

1.8 Le résonateur à anneau fendu

Nous allons dans cette sous-section examiner de plus près la conception d'une métasurface permettant d'obtenir un moment magnétique ou un moment dipolaire à des fréquences du spectre EM, à savoir le résonateur à anneau fendu (SRR). En effet, le résonateur à anneau

fendu, initialement proposé par Pendry en 1999 (Pendry, Holden et al. 1999), est le métatome le plus répandu pour obtenir une réponse résonante, ainsi que des phénomènes non linéaires sous excitation des ondes électromagnétiques. Il s'agit particulièrement d'une simple structure métallique en forme de U dans laquelle des champs électriques et magnétiques externes peuvent induire un courant oscillant à l'intérieur du matériau. En général, les charges accumulées provoquent un moment dipolaire électrique et le courant circulant induit un moment dipolaire magnétique dans le SRR (Fan, Strikwerda et al. 2012, Yu and Lin 2019).

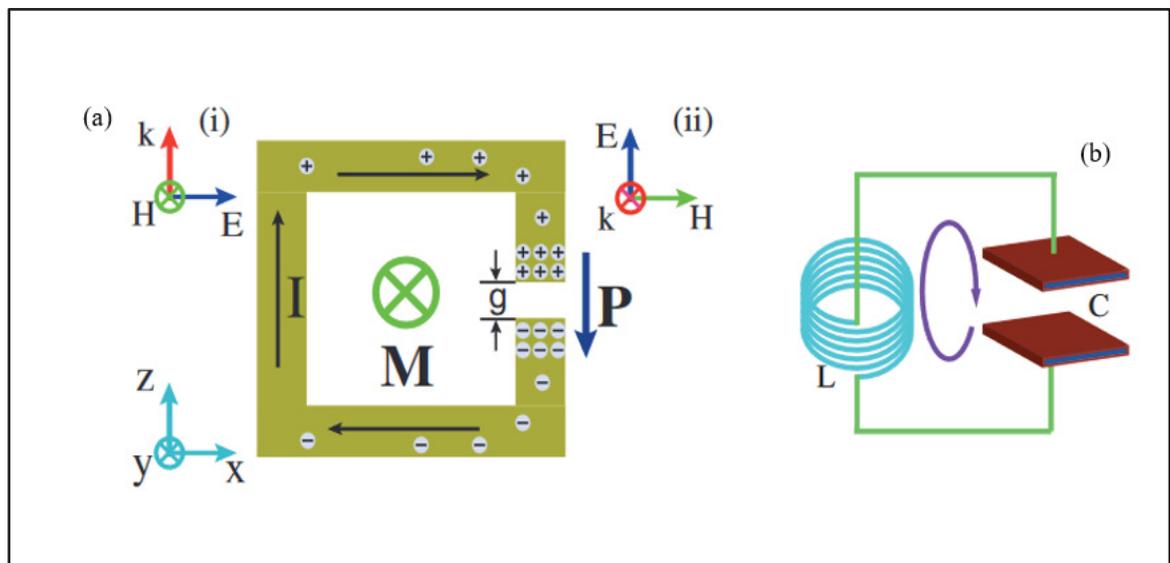


Figure 1.3 (a) Structure d'un résonateur à anneau fendu (SRR) et (b) son modèle électrique : les dipôles excités induits par l'onde EM incidente sur le SRR sous différentes polarisations (i), (ii). k est le vecteur d'onde, E est le champ électrique incident et H le champ magnétique. P et M représentent les moments dipolaires électrique et magnétique, respectivement,
Tiré de Fan et al., (2012)

Avec la polarisation de l'onde EM incidente indiquée à la Figure 1.3(a)-(i), le champ électrique est parallèle aux armatures du condensateur et le champ magnétique est normal au plan de l'anneau. La variation du flux magnétique crée alors un courant dans l'anneau, qui charge le condensateur (d'après la loi de Faraday). Le courant induit oscillant dans l'anneau est équivalent à un circuit LC. Ainsi, en se référant au circuit équivalent effectif de la Figure 1.3(b), l'auto-inductance de l'anneau est assimilée à une inductance L et la fente se comporte comme une capacité C . Dans ce cas (Figure 1.3(a)-(i)), il n'y a pas couplage du champ

électrique (bien que cette polarisation s'accompagne d'une résonance dipolaire électrique à plus haute fréquence) et la résonance LC est entièrement induite par le champ magnétique. Une métasurface (ou métamatériau) composée de méta-atome SRR dans ce mode de polarisation est considérée comme une métasurface (ou métamatériau) magnétique (Yu and Lin 2019). De même, pour une métasurface électrique, le champ électrique entraîne un courant circulant à la place du champ magnétique et la résonance LC est purement induite par un champ électrique (Figure 1.3(a)-(ii)). Les comportements non linéaires peuvent être induits dans le SRR en confinant un rayonnement intense dans la fente du matériau ou en introduisant une non linéarité dans la jonction formée du condensateur tout en focalisant un champ intense. Dans la section qui suit, nous présenterons quelques comportements non linéaires provoqués par le champ dans ce type de matériau.

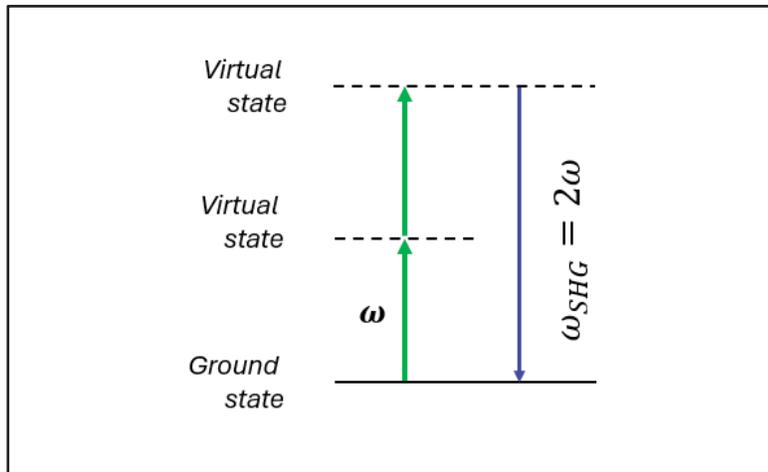


Figure 1.4 Diagramme du niveau d'énergie du processus de génération de seconde harmonique (SHG)
Tiré de Trinh (2015, p.9)

1.9 Phénomènes non linéaires dans les métasurfaces résonnantes

1.9.1 Génération de seconde harmonique (SHG)

La création d'un photon très énergétique (à la fréquence dite de seconde harmonique (SH)) à partir de deux photons moins énergétiques (à la fréquence dite de l'harmonique fondamentale (FH)) d'un seul faisceau d'excitation, est un processus optique non linéaire de second ordre.

Dans ce processus (SHG), les deux photons à la fréquence optique ω d'un faisceau laser d'entrée sont transmis par deux états virtuels du système et transformés en un seul photon à la fréquence optique 2ω (voir Figure 1.4). La SHG est généralement obtenue en explorant le processus $\chi^{(2)}$ dans des matériaux cristallins sans symétrie centrale, tels que le Niobate de lithium (LN) (Zhang, Wu et al. 2023). Au niveau moléculaire, c'est le processus non linéaire le plus puissant par rapport aux non-linéarités d'ordre supérieur (Zhang, Wu et al. 2023).

1.9.2 Génération de troisième harmonique (THG)

La création d'un photon très énergétique (à la fréquence appelée troisième harmonique (TH)) à partir de trois photons d'harmonique fondamentale (FH) de basse énergie d'un seul faisceau d'excitation, est un processus optique non linéaire du troisième ordre. Dans ce processus non linéaire, trois photons de fréquence identique ω sont mélangés pour générer un nouveau photon de fréquence 3ω comme présente le schéma de l'énergie électronique à la Figure 1.5 (Trinh 2015). En revanche, la THG peut être obtenue dans n'importe quel matériau au moyen de la susceptibilité non linéaire du troisième ordre $\chi^{(3)}$. Au niveau moléculaire, il est plus faible que la non-linéarité de deuxième ordre évoquée précédemment.

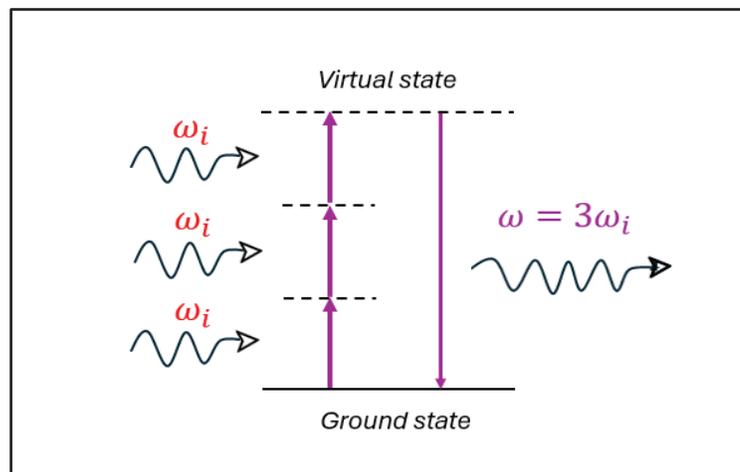


Figure 1.5 Diagramme du niveau d'énergie du processus de génération de troisième harmonique (THG)
Tiré de Trinh (2015, p.9)

1.9.3 SHG et THG dans le SRR

Le renforcement du champ obtenu avec les métasurfaces conçu à base des résonateurs à anneau fendu présentant des gaps extrêmement réduits (à l'échelle micro ou nanométrique) et les non-linéarités intrinsèques des métaux ont permis d'obtenir des processus optiques non linéaires efficaces, y compris la génération de seconde harmonique (SHG) dans le domaine térahertz et gigahertz (Merbold, Bitzer and Feurer 2011, Tsai, Chung et al. 2019), voir la génération de troisième harmonique (Klein, Wegener et al. 2008). Dans ces références, la réponse non linéaire du matériau dépend de la polarisation de l'onde incidente, de l'orientation ou la taille globale du méta-atome SRR, ainsi que l'intensité du champ confiné dans le gap du matériau. La Figure 1.4 résume les résultats de la génération de seconde et de la troisième harmonique.

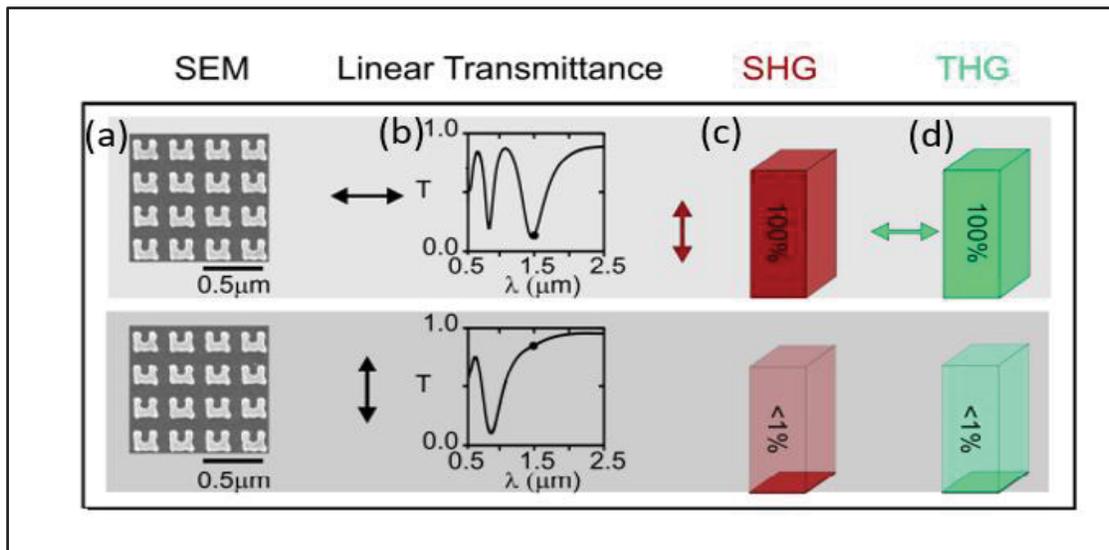


Figure 1.6 Expériences sur un échantillons de SRR avec une résonance magnétique fondamentale centrée sur une longueur d'onde de $1.5\mu\text{m}$: (a) microstructure électronique de l'échantillon, (b) les spectres de transmittance linéaire mesurés, (c) l'intensité du signal SHG mesuré pour une excitation centrée sur une longueur d'onde de $1.5\mu\text{m}$, et (d) l'intensité du signal THG correspondant. Les flèches indiquent la polarisation linéaire incidente (noir), la polarisation linéaire mesurée du SHG (rouge) et celle du THG (vert)

Tiré de Klein M.W. et al., (2008)

La colonne de gauche présente les microstructures électroniques à base du SRR des échantillons. L'épaisseur de l'or étant de 25nm . Pour une polarisation incidente horizontale, la résonance magnétique-dipôle fondamentale des SRRs est excitée de manière résonante (Klein, Wegener et al. 2008) et les signaux SHG et THG les plus prononcés sont observés comme le montre la Figure 1.6 (ligne supérieure). Cependant, aucuns signaux SHG et THG important sont trouvés lorsque les mêmes SRRs sont excités avec une polarisation incidente linéaire verticale (ligne inférieure de la Figure 1.6(a)). On peut donc noter que la réponse dépend bien de la polarisation de l'onde incidente.

Suivant l'orientation géométrique du méta-atome, Tsai et ses collaborateurs ont démontré qu'il est possible de confiner le champ dans le résonateur et d'amplifier l'intensité pour induire des phénomènes non linéaires significatifs (Tsai, Chung et al. 2019). En effet, dans une configuration plane et sous excitation normale, les résonateurs à anneau divisé parallèle (PSRR) sont fortement couplés au champ électrique incident polarisé le long de la barre de base du résonateur (direction x dans la Figure 1.7), mais ne réagissent pas au champ magnétique incident. Par conséquent, les PSRR ne se connectent qu'à une partie de l'énergie électromagnétique incidente. Par contre, dans la configuration verticale (VSRR) dont le champ électrique est polarisé parallèlement à la barre de base du résonateur constituant le matériau, et que le champ magnétique est perpendiculaire à la fente/gap, le champ électrique et magnétique contribuent tous deux à l'excitation de la réponse dipolaire magnétique des résonateurs dans cette position verticale. Par conséquent, il génère des champs localisés plus puissants dans les gaps (voir Figure 1.7(f)). La Figure 1.7 (a), (d) présente les métasurfaces constitués des résonateurs (méta-atome) à gap unique dans les deux configurations décrites plus haut (c'est-à-dire, plane et verticale) ainsi que leurs spectres d'absorption (bleu), transmission (rouge) et réflexion (verte) correspondant. Les deux échantillons de métasurfaces exhibent une résonance magnétique à des longueurs d'onde différentes. Cette différence peut être due au milieu diélectrique au voisinage des deux SRR. Le mode fondamental de la métasurface constitué du résonateur à structure plane est situé à une plus grande longueur d'onde que celui de la métasurface à méta-atome vertical.

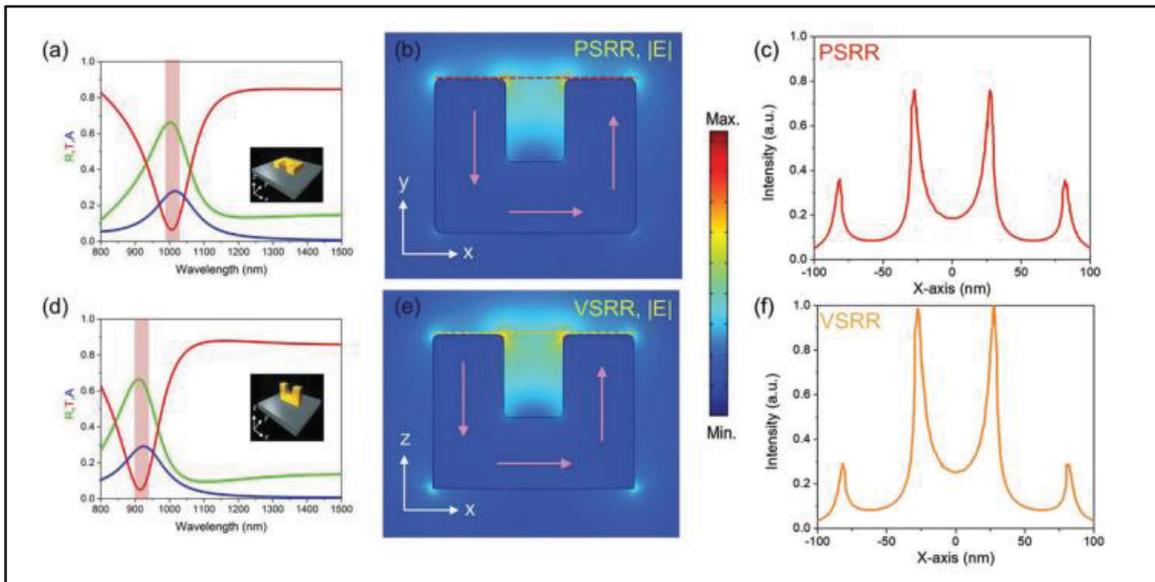


Figure 1.7 Comparaison de la réponse optique entre les métasurfaces PSRR et VSRR sous incidence normale avec la polarisation x : a) Réflexion (courbe verte), transmittance (courbe rouge) et absorption (courbe bleue) simulées pour PSRR. b) Champ électrique induit à la longueur d'onde de 1008 nm du mode magnétique fondamental des PSRR. c) Distribution de l'intensité à travers la ligne pointillée (au-dessus du bord structural de 0.1 nm) indiquée en (b). d) Réflexion, transmission et absorption simulées pour VSRR. e) Champ électrique induit à la longueur d'onde de 910 nm du mode magnétique fondamental des VSRR. f) Distribution de l'intensité sur la ligne pointillée (au-dessus du bord structural de 0,1 nm) indiquée en (e)

Tiré de Tsai et al., (2019)

Le champ magnétique oscillant, confiné au bord de la fente, est associé à ces courants induits qui tournent en boucle autour du SRR. On peut également faire cette observation en comparant la Figure 1.7 (b), (e) qui révèle que la métasurface à méta-atome vertical (VSRR) supporte une intensité de champ électrique plus forte que la métasurface à méta-atome plane (PSRR). La Figure 1.7 (c), (f) confirme et supporte ces investigations. Le champ électrique et magnétique contribuent tous deux à l'excitation de la réponse dipolaire magnétique des résonateurs dans cette position verticale. Par conséquent, il génère des champs localisés plus puissants dans les gaps (voir Figure 1.7(f)). La Figure 1.7 (a), (d) présente les métasurfaces constitués des résonateurs (méta-atome) à gap unique dans les deux configurations décrites plus haut (c'est-à-dire, plane et verticale) ainsi que leurs spectres d'absorption (bleu), transmission (rouge) et réflexion (verte) correspondant. Les deux échantillons de

métasurfaces exhibent une résonance magnétique à des longueurs d'onde différentes. Cette différence peut être due au milieu diélectrique au voisinage des deux SRR. Le mode fondamental de la métasurface constitué du résonateur à structure plane est situé à une plus grande longueur d'onde que celui de la métasurface à méta-atome vertical. Le champ magnétique oscillant, confiné au bord de la fente, est associé à ces courants induits qui tournent en boucle autour du SRR. On peut également faire cette observation en comparant la Figure 1.7 (b), (e) qui révèle que la métasurface à méta-atome vertical (VSRR) supporte une intensité de champ électrique plus forte que la métasurface à méta-atome plane (PSRR). La Figure 1.7 (c), (f) confirme et supporte ces investigations.

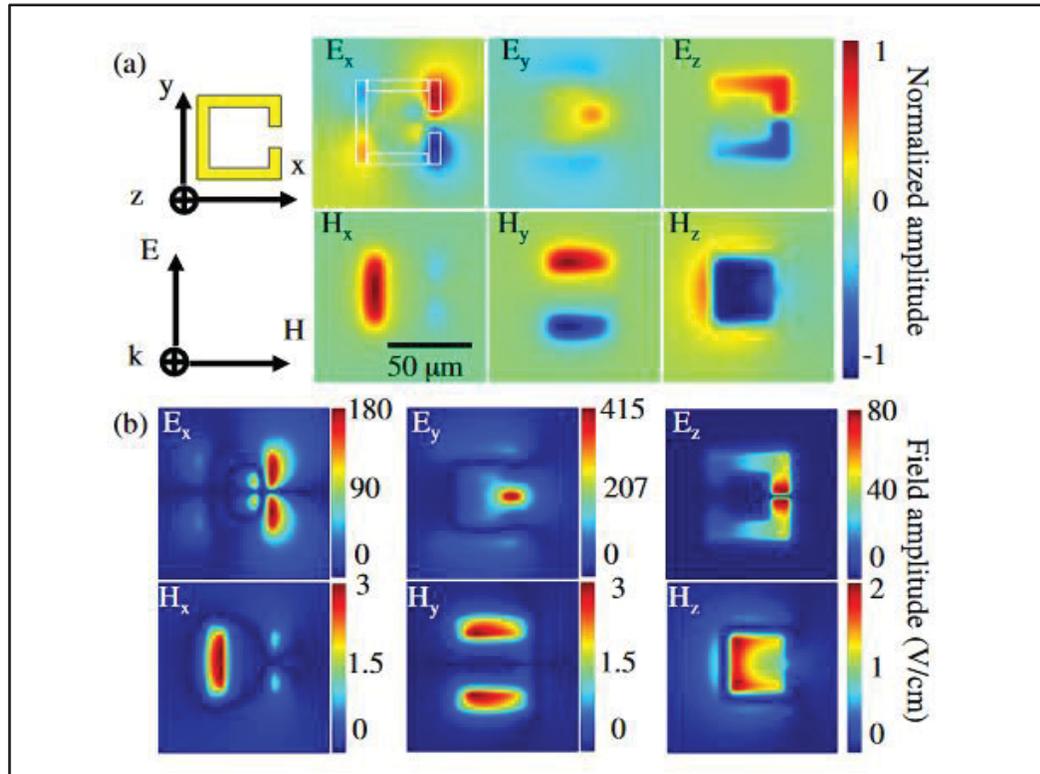


Figure 1.8 Simulations des composantes de champ électrique et magnétique d'un SRR avec une onde THz indente de 0.46 THz polarisé dans la direction y
Tiré de Amirkhan et al., (2019)

De même, il est aussi démontré que la distribution des composantes du champ électrique et magnétique peut être différente pour la même polarisation de l'onde incidente comme illustré à la figure 1.8 (Amirkhan, Sakata et al. 2019). La figure 1.8(a) montre la partie réelle du

champ EM normalisé, dans lequel chaque champ est normalisé avec sa réponse maximale. La figure 1.8(b) illustre la valeur absolue de chaque composante du champ électrique et magnétique à la résonance LC. Chaque image montre les amplitudes maximales du champ local dans le SRR excité par un champ THz polarisé suivant l'axe des y . On remarque que la distribution du champ diffère d'une composante à l'autre dans la structure. La composante E_y présente l'amélioration du champ électrique dans la fente avec une intensité très élevée comme le montre la figure 1.8(b). Différentes orientations de la structure du SRR (modification de la polarisation de l'onde incidente) résultent en une modification du champ dans le gap du matériau (Amirkhan, Sakata et al. 2019).

Une autre stratégie permettant de confiner un fort champ et induire des comportements non linéaires dans le SRR consiste à réduire sa taille (Merbold, Bitzer and Feurer 2011). Cette technique permet également de réaliser les metasurfaces jusqu'aux fréquences THz et optiques. En effet, l'onde incidente sur le SRR induit un flux de courant sur la surface du métal qui entraîne une accumulation de porteurs de charge dans le gap. Cette charge capacitive entraîne à son tour une augmentation du champ électrique à l'intérieur de l'espace vide de plusieurs ordres de grandeur. Ainsi, en ajustant les paramètres structurels du SRR (en particulier largeur du gap), la réponse non linéaire peut être maximisée comme le montre la Figure 1.9. La Figure 1.9(a)-(c) présente les champs obtenus dans la fente du SRR (colonne de gauche, Figure 1.9) pour différentes largeurs de la fente d . On observe que plus la largeur de la fente est faible, plus la fréquence de résonance diminue. En outre, l'intensité du champ dans la fente augmente considérablement avec la diminution de d . En comparant la réponse pour deux valeurs de d , on peut constater par exemple que l'intensité du champ pour $d = 1\mu m$ est pratiquement 17 fois plus grande que l'intensité du champ pour $d = 10\mu m$.

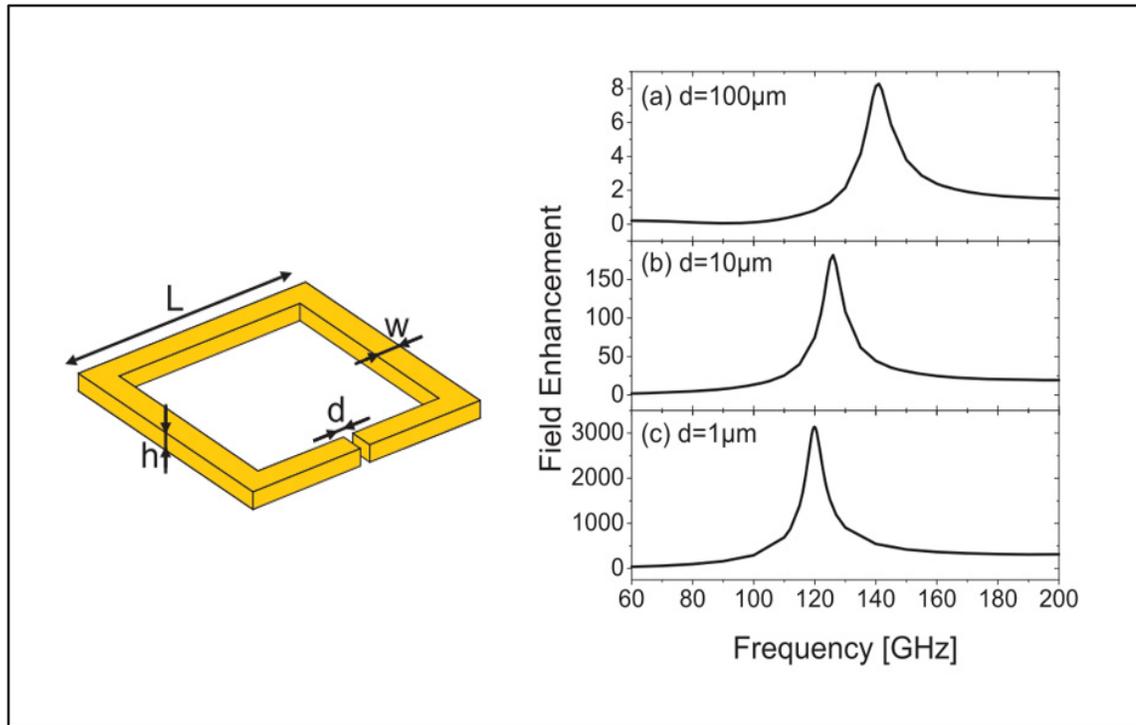


Figure 1.9 Structure SRR a micro-gap (gauche) et réponses en fréquence du champ amplifié dans le gap pour différentes valeurs de la largeur de gap d (droite) :
 (a) $d = 100\mu\text{m}$, (b) $d = 10\mu\text{m}$ et (c) $d = 1\mu\text{m}$
 Tiré de Merbold et al., (2011)

1.10 Métamatériau térahertz multifonctionnel utilisant un résonateur électrique symétrique et asymétrique à anneau divisé

Les métasurfaces conçues à base du SRR peuvent montrer également des caractéristiques importantes telles que la résonance multiple ou le déplacement de la fréquence de résonance, la modulation de l'intensité de résonance et les caractéristiques de commutation de résonance (Yu and Lin 2019). Ces différentes propriétés sont obtenues par ajustement des paramètres physiques de la structure du matériau, la polarisation de l'onde incidente, ou en couplant un même résonateur. Une illustration typique est présentée par (Yu and Lin 2019) dont les effets de couplage électromagnétique sont étudiés en considérant quatre types de résonateurs électriques à anneau fendu (eSRR). La Figure 1.10 montre les schémas des eSRR proposés, adaptés respectivement à une, deux, trois et quatre fentes. Par simplicité, les noms eSRR-1, eSRR-2, eSRR-3 et eSRR-4 sont utilisés pour désigner le résonateur à une fente, deux fentes, trois fentes et quatre fentes comme l'indique la Figure 1.10 (b-e). Les paramètres

géométriques correspondants des eSRR sont représentés dans la Figure 1.10 (b) et sont choisis de sorte à avoir des fréquences dans la bande THz. L'environnement de logiciel commercial Lumerical est exploité pour les simulations.

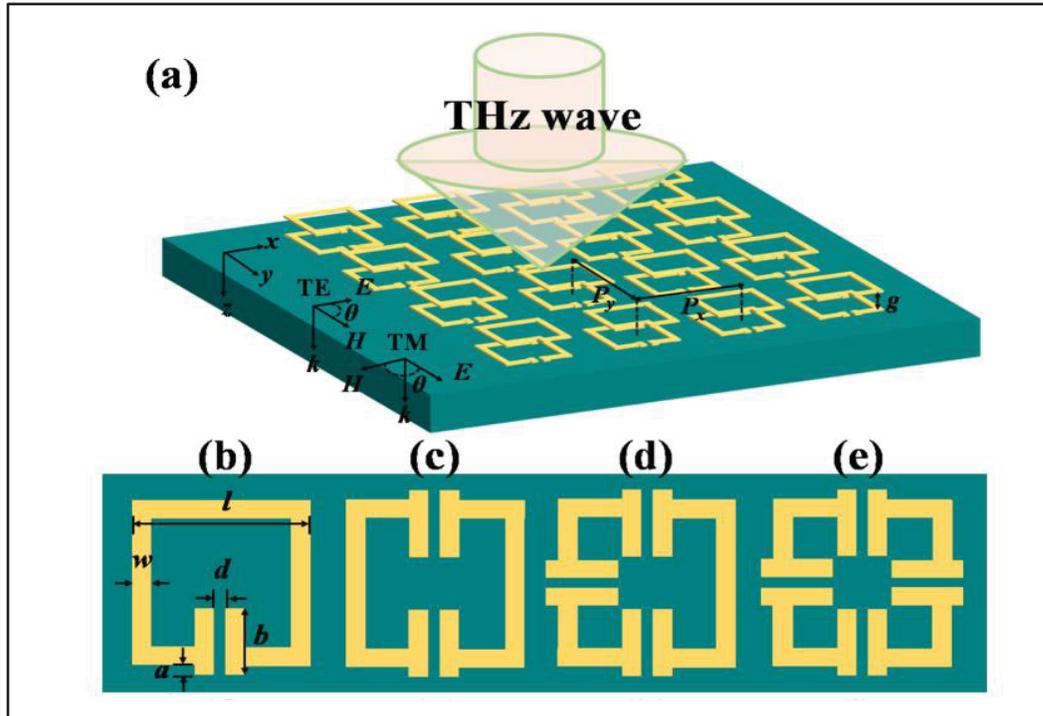


Figure 1.10 Schémas de (a) eSRR-1 avec double couche, cellules unitaires de (b) eSRR-1, (c) eSRR-2, (d) eSRR-3, et (e) eSRR-4 : Les coordonnées des ondes TE et TM incidentes sont indiquées en (a) et les paramètres géométriques de la cellule unitaire sont indiquées en (b)

Tiré de Yu et Lin (2019)

Les réponses du couplage électromagnétique en champ proche indiquent la résonance causée par la résonance LC (inductive-capacitive) entre les eSRR. Afin d'examiner les paramètres optimisés des eSRRs, les interactions de l'onde THz incidentes avec les variations de la longueur de la fente (paramètre b) et de l'angle de polarisation entre les eSRRs sont comparées.

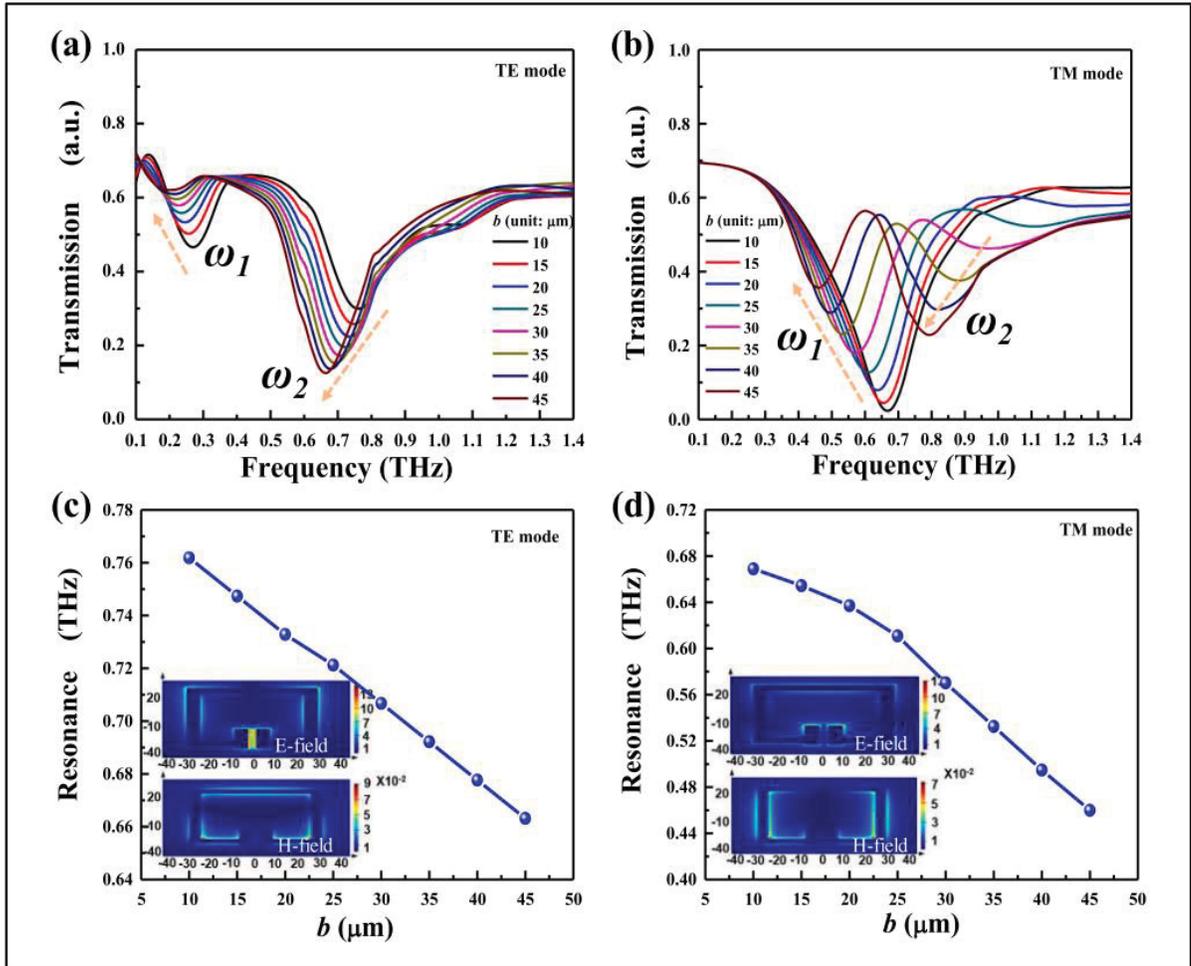


Figure 1.11 Spectres de transmission de l'eSRR-1 en mode TE (a) et en mode TM (b) : les relations entre la valeur de b et la résonance de (a) et (b) sont tracées en (c) et (d), respectivement; les images insérées de (c) et (d) sont des distributions de champ E et de champ H de l'eSRR-1 avec $b = 20 \mu\text{m}$ contrôlées à 0,69 THz et 0,62

THz pour les modes TE et TM, respectivement

Tiré de Yu et Lin (2019)

Le résultat de simulation obtenu avec le résonateur électrique à anneau fondu (à gap unique eSRR-1) est présenté à la Figure 1.11. On observe qu'en mode électrique transverse (TE), le SRR présente une double résonance donc la gamme de fréquence est comprise entre 0.1 THz à 0,66 THz et quel que soit la valeur du paramètre b variant entre $10\mu\text{m}$ et $45\mu\text{m}$ (voir Figure 1.11(a)). Par contre, en mode TM (transverse magnétique), la résonance double tend à disparaître au fur et à mesure que b augmente. Ceci est matérialisée à la Figure 1.11(b) où l'unique résonance initiale est observée à 0,67 THz pour $b = 10\mu\text{m}$. Toujours en mode TM,

lorsque est $b < 15\mu m$, le model présente la fonction de commutation de résonance à bande unique et de résonance double bande lorsque est $b > 15\mu m$. Les Figures 1.11(c)-(d) présentent les courbes caractéristiques de la résonance en fonction du paramètre b . On peut bien remarquée qu'elles ont une tendance assez linéaire et décroissante. Cette caractéristique confirme le fait que la fréquence de résonance diminue lorsque b augment. Ces résonances peuvent être observées dans les images des énergies de champ E et H insérées dans les Figures 1.11(c)-(d), qui sont dominées par le mode LC.

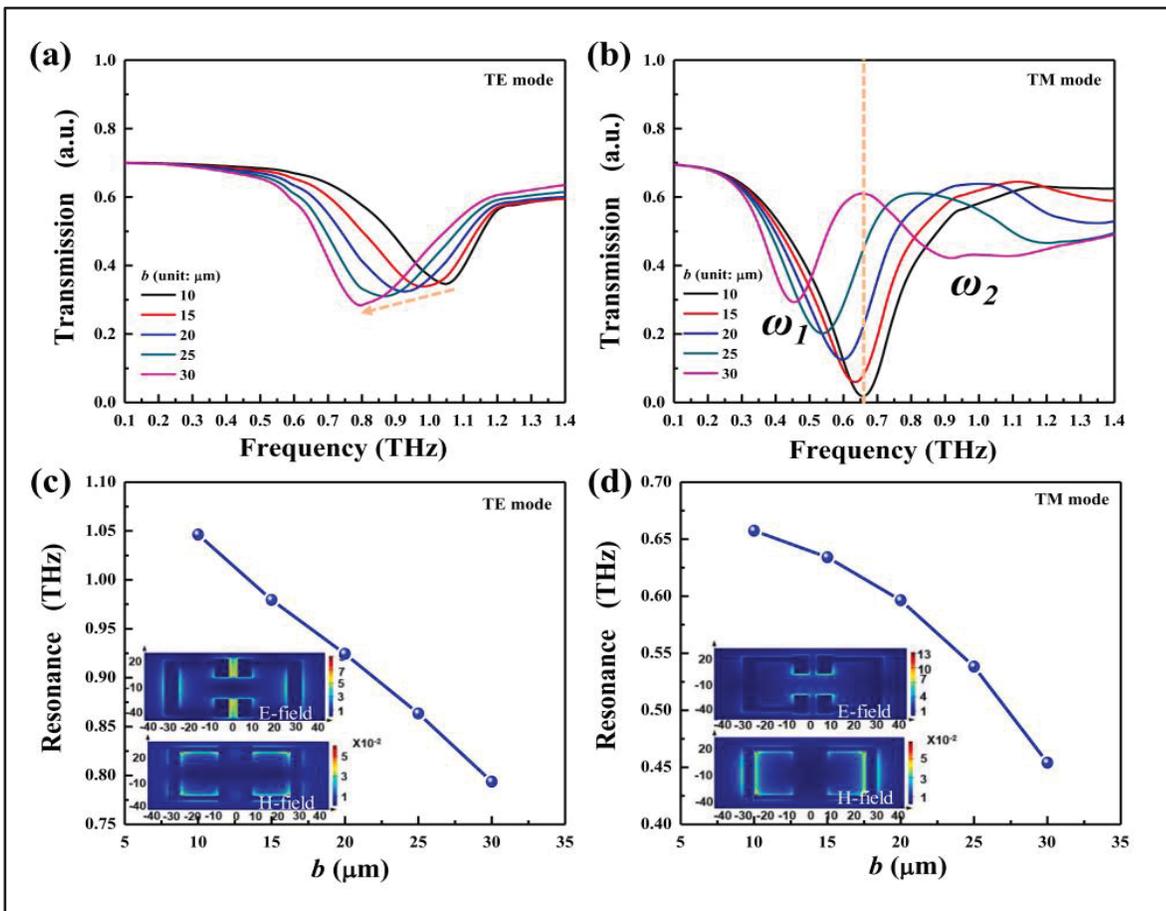


Figure 1.12 Spectres de transmission de l'eSRR-2 en mode TE (a) et en mode TM (b) : les relations entre la valeur de b et la résonance de (a) et (b) sont représentées en (c) et (d), respectivement; les images insérées de (c) et (d) sont des distributions de champ E et de champ H de l'eSRR-2 avec $b = 20\mu m$ contrôlées à 0,90 THz et 0,59 THz pour les modes TE et TM, respectivement

Tiré de Yu et Lin (2019)

La Figure 1.12 montre les résultats de simulation obtenus sur la métasurface de la figure 1.10 lorsque le eSRR-1 est remplacé par le eSRR-2. Les analyses similaires peuvent être observées. Nous avons présenté et décrit quelques réponses non linéaires qui peuvent être observées dans les metasurfaces à méta-atome SRR ou dans une cellule unitaire SRR. Ces réponses sont en général dues au renforcement du champ dans la structure et la non-linéarité du matériau. Cependant l'une des questions que se posent des chercheurs est celle de savoir comment ces phénomènes non linéaires peuvent être induits ou initiés. Quel peut être la complexité des réponses d'une telle structure et comment les comprendre. Comment est la dynamique des porteurs induits dans le matériau sous incidence EM. La section suivante présente une approche basée sur la modélisation de telle structure pour étudier et analyser la dynamique de ces porteurs.

1.11 Dynamique non linéaire complexe dans le SRR

1.11.1 Système dynamique

Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant son évolution dans le temps. En d'autres termes, il s'agit d'un modèle décrivant l'évolution temporelle d'un système, composé d'un ensemble de variables formant le vecteur d'état (Lorenz 1963). Les systèmes dynamiques peuvent donc être observés en chimie, en biologie, en physique, et même dans les sciences sociales.

Définition 1.1: *Un système dynamique est formellement défini comme un espace d'états X , un ensemble de temps T , et une règle R qui spécifie comment l'état évolue avec le temps. La règle R est une fonction définie dans le domaine $X \times T$ et le codomaine X , c'est-à-dire un ensemble $R: X \times T \rightarrow X$. La fonction de règle R signifie que R prend deux entrées, $R = R(x_0, t)$, où $x_0 \in X$ est l'état initial (à l'instant $t = 0$, par exemple) et $t \in T$ est un instant futur. En d'autres termes, $R(x_0, t)$ donne l'état à l'instant t si l'état initial est x_0 .*

On peut catégoriser les systèmes dynamiques en deux classes : (a) à temps continu et (b) à temps discret. Dans le cadre de ce travail, notre étude sera restreinte aux systèmes dynamiques à temps continu.

1.11.2 Système dynamique à temps continu

Un système dynamique à temps continu est décrit par un système d'équation différentielles défini sur un ensemble ξ de \mathbb{R} par (Smale 1967)

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) \quad (1.30)$$

avec

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \xi \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T \in \xi \subset \mathbb{R}^n$$

Les composants $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ du champ de vecteurs $f(X)$ sont définis sur ξ et de classe C^∞ , à valeur dans \mathbb{R} .

Définition 1.2 (Dang-Vu and Delcarte 2000): Une solution de (1.30) est une application strictement dérivable définie sur un domaine non vide $I \subset \mathbb{R}^+$, $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow x(t)$ et vérifiant, $\forall t \in I$,

$$(x, t) \in \mathbb{R}^n \times I$$

et

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t).$$

- À tout couple (X_0, t_0) est associé une unique solution du système défini par l'équation (1.30).
- Le système (1.30) est dit non autonome lorsque f dépend explicitement du temps. Dans le cas échéant, le système est dit autonome.

Dans ce travail, le matériau étudié est illuminé par un champ EM. Par conséquent, le modèle étudié sera défini comme étant un système non autonome.

Définition 1.3: Les variables qui décrivent complètement l'état du système dynamique sont appelées variables d'état. L'ensemble de toutes les valeurs possibles des variables d'état est l'espace d'état.

Définition 1.4: Si $X(x_0, t)$ est une solution de (1.30) pour un point initial x_0 , la trajectoire dans l'espace d'état passant au point initial x_0 est l'ensemble des points $\{x(t, x_0), \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1.5: L'ensemble $\{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ définit l'orbite du système (1.30).

Définition 1.6 (Dang-Vu and Delcarte 2000): Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que A est un ensemble invariant (i.e. $\varphi_t(A) = A$ pour tout t). On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) \equiv \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A, \text{ avec } \varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur. Lorsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t > 0} \varphi_t(V)$$

Est appelé le bassin d'attraction de A . C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A .

L'attracteur le plus simple est un point fixe. Un deuxième type d'attracteur pour un champ de vecteur est le cycle limite (c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches).

1.11.3 Théorie du chaos

La théorie du chaos est une théorie scientifique multidisciplinaire qui traite des modèles dynamiques déterministes qui présente un comportement fondamental d'instabilité appelé « sensibilité aux conditions initiales et aux paramètres », ce qui les confère un caractère non prédictibles sur le « long » terme (Sprott 2010). Le Chaos est couramment défini comme un

comportement imprévisible (ou aléatoire) issue d'un système dynamique gouverné par des équations déterministes.

1.11.4 Définition du chaos

Il est difficile de donner une définition standard du chaos. Néanmoins, quelques caractéristiques suivantes doivent être présentes dans un système dynamique pour qu'il soit considéré comme chaotique (Lorenz 1963, Sprott 2010).

- **La non linéarité** : un système chaotique possède au moins une non linéarité.
- **La sensibilité aux valeurs initiales**: Une légère variation des conditions initiales peut entraîner à un comportement totalement différent dans l'état final du système.
- **Le déterminisme** : un système chaotique est un système qui obéit à des lois d'évolution non-probabilistes. Le déterminisme provient du fait que le système est défini par sa condition initiale et sa dynamique.
- **L'irrégularité** : Un ordre dissimulé comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.
- **L'imprévisible** : à cause de la sensibilité aux valeurs initiales, qui peuvent être connues uniquement à un degré fini de précision.

Définition 1.7: *L'application $f: S \rightarrow S$ (où S est un ensemble) est dite chaotique sur S si :*

- (i) *f exhibe/manifeste une sensibilité aux valeurs initiales.*
- (ii) *f est topologiquement transitive.*
- (iii) *Les trajectoires périodiques sont denses dans S .*

1.11.5 Chaos et multistabilité dans le résonateur non linéaire à anneau fendu

Dans cette section, nous présentons quelques études menées sur la dynamique chaotique et la multistabilité dans le SRR non linéaire tout en relevant quelques manquements et limites. Rappelons tout d'abord que la multistabilité est la coexistence de deux ou plusieurs types d'états stables (attracteurs) dans un système donné pour un même ensemble de paramètres, à partir de conditions initiales différentes. Ce phénomène très répandu a déjà fait l'objet d'une

attention particulière dans les systèmes optiques, notamment les lasers (Solari, Eschenazi et al. 1987, Kovanis, Gavrielides et al. 1995, Liu, Chen et al. 1997, Hwang and Liu 1999, Wieczorek, Krauskopf and Lenstra 1999). Étudier des attracteurs coexistant dans les systèmes laser est particulièrement intéressant d'un point de vue fondamental et présente en même temps une grande utilité pour les applications. Par exemple, la commutation entre des sorties ayant des intensités et des propriétés spectrales différentes peut trouver des applications dans les communications optiques ou les portes logiques.

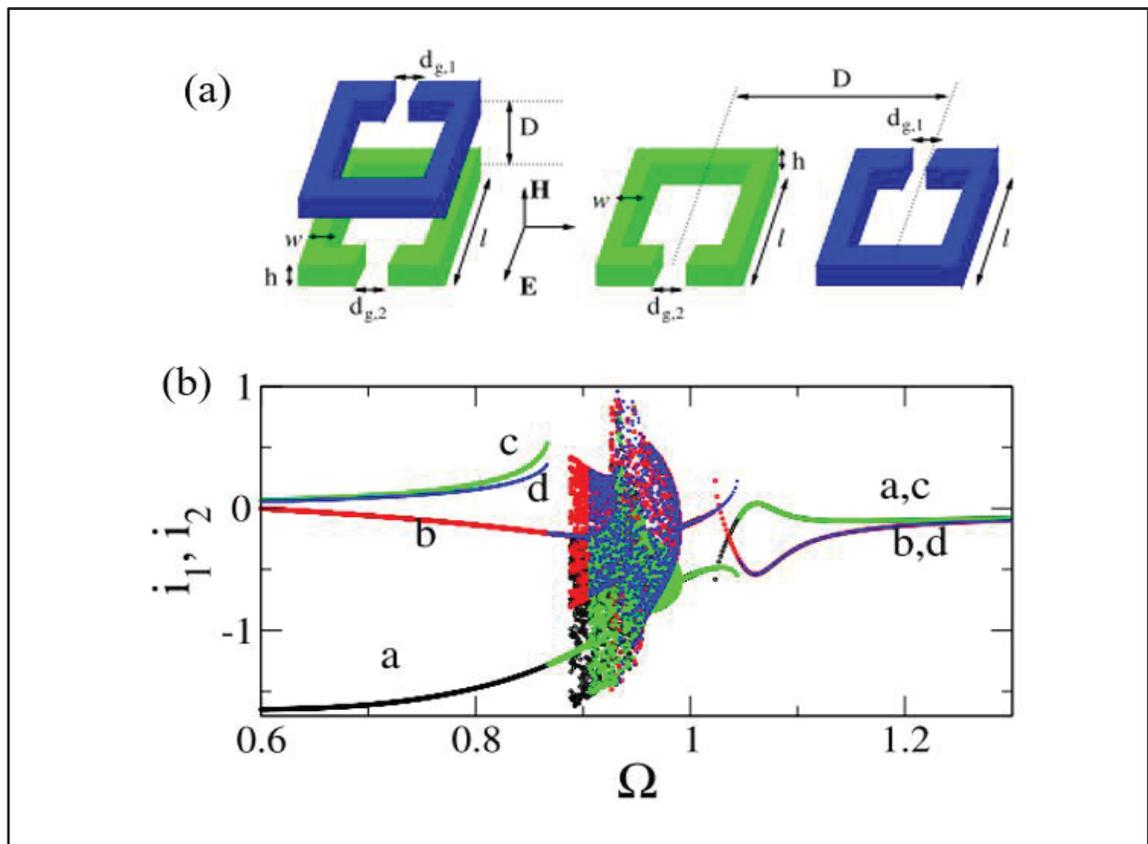


Figure 1.13 (a) Schéma d'un modèle couplé de SRR sous différentes configurations et (b) diagramme de bifurcation : montrant la dynamique de chaque courant dans le matériau en fonction de la fréquence normalisée d'entraînement Ω , pour $\delta = 0.95$, $\gamma = 0.01$, $\chi = 1/6$, $\lambda = 0.12$ et $\varepsilon_0 = 0.06$. Pour Ω décroissant, i_1 correspond à la courbe noire et i_2 au tracé en rouge; pour Ω croissant, i_1 correspond à la courbe en vert et i_2 au tracé en bleu
Tiré Lazarides et al., (2010)

La coexistence entre les sorties périodiques et les sorties à intensité constante (la bi-stabilité) a été observée au cours des expériences avec un laser à semi-conducteur injecté optiquement (Liu, Chen et al. 1997, Hwang and Liu 1999). Les travaux de Lazarides et ses équipes ont été menés afin de mettre en évidence l'existence du chaos et de la multistabilité dans le résonateur non linéaire couplé à anneau fendu (Lazarides, Molina et al. 2010, Lazarides, Hizanidis and Tsironis 2020, Shena, Lazarides and Hizanidis 2020). Dans leurs recherches, ils considèrent le couplage magnétique entre deux SRRs en forme de U dans une configuration plane et dérive le modèle non linéaire permettant d'étudier la dynamique du matériau (Lazarides, Molina et al. 2010). À l'aide du diagramme de bifurcation comme l'exemple présenté à la Figure 1.13, les auteurs ont pu observer la coexistence de deux états périodiques stables lorsque la fréquence normalisée d'entraînement varie. Cette figure montre qu'un comportement chaotique est observé lorsque la fréquence normalisée d'entraînement est comprise approximativement entre 0.89 et 0.99. Cette bande chaotique correspond à une largeur d'environ $\Delta\omega \approx 0.1$ qui est relativement très étroite. Plus tard, cette équipe souligne que les deux états stables observés dans le modèle SRR sont associés à la non linéarité du matériau. De même, ils précisent que la non linéarité peut être induite dans ce matériau en ajoutant (ou en incorporant) tout type d'élément non linéaire dans le gap de la structure. C'est ainsi que tout récemment, les auteurs ont commencé à étudier l'effet de la non linéarité du type Jonction Josephson (JJ) sur la dynamique des nouveaux modèles de SRRs couplés appelés SQUID (SQUID pour Superconducting QUantum Interference Device). Le résultat le plus frappant de cette dernière catégorie de SRR est que le modèle exhibe une dynamique chaotique avec la résonance (Shena, Lazarides and Hizanidis 2020) ou même les états chimères (Lazarides, Hizanidis and Tsironis 2020). La Figure 1.14 illustre les différents comportements et transitions périodiques (Figure 1.14(a-c)) et chaotiques (Figure 1.14(d), (e)) observés dans ce modèle pour différentes valeurs normalisées de la fréquence d'entraînement. Les spectres de fréquences sont utilisés pour confirmer les comportements périodiques et chaotiques étudiés. Il est important de préciser que tous les modèles non linéaires SRR étudiés jusqu'à présent et présentant une dynamique irrégulière (chaotique) sont faits pour fonctionner à une fréquence de quelques gigahertz (GHz). Dans ces travaux, les mécanismes qui permettent l'émergence du chaos, de la multistabilité et des bifurcations

coexistantes du NSRR ne sont pas expliqués. Plus important encore, aucun travail n'a été réalisé sur le comportement dynamique de ce matériau non linéaire fonctionnant à la fréquence THz. Pour des applications/exploitations potentielles, il est important d'étudier la dynamique globale dans un espace à deux paramètres, ce qui n'a jamais été fait auparavant. Les différentes contributions de ce travail porteront sur ces questions ou limites.

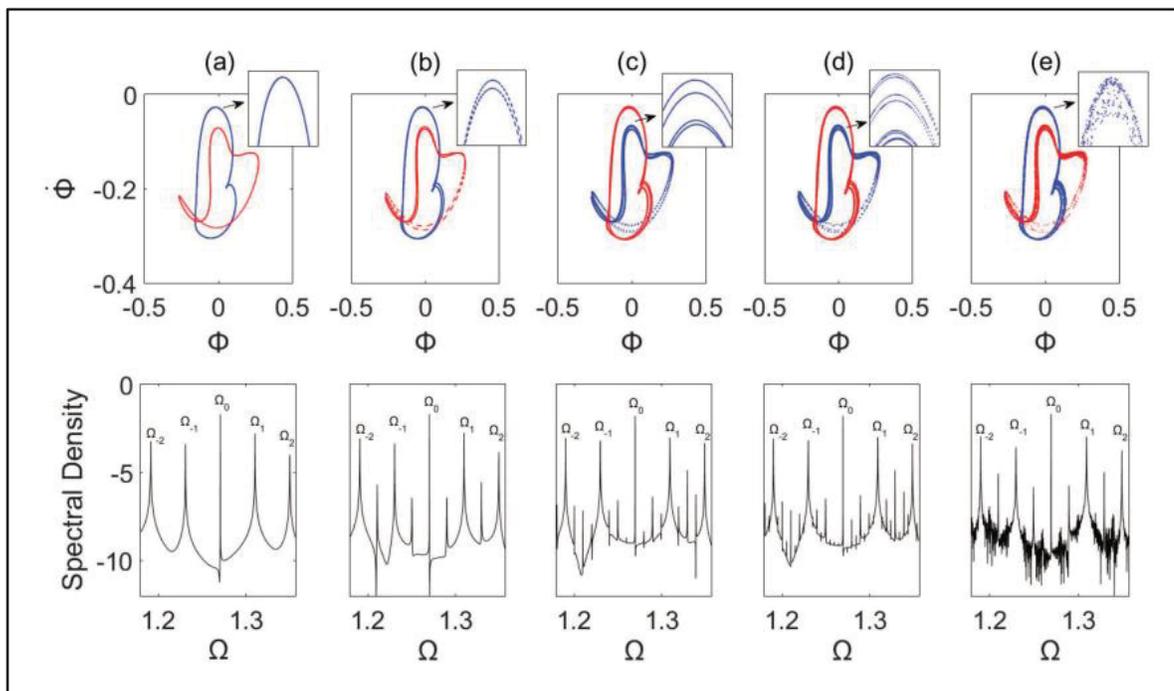


Figure 1.14 (ligne du haut) Portraits de phases des signaux et (ligne du bas) les spectres de fréquence correspondante tracés sur une échelle logarithmique pour différent fréquence normalisée d'entraînement Ω : (a) $\Omega = 1.2705$, (b) $\Omega = 1.27$, (c) $\Omega = 1.2694$, (d) $\Omega = 1.26931$, et (e) $\Omega = 1.26923$. Les signaux en bleu et rouge sont associés à chaque SQUID

Tiré Shena et al., (2020)

1.12 Quelques applications du chaos et la multistabilité

Communication sécurisée : Les signaux chaotiques peuvent être utilisés pour crypter et décrypter des informations, offrant ainsi un niveau de sécurité élevé. Les techniques de cryptage basées sur le chaos sont difficiles à décrypter, ce qui les rend intéressantes pour les systèmes de communication sécurisés (Banerjee and Kurths 2014, Shaukat, Arshid et al.

2020, De Dieu, Ruben et al. 2022, Wu, Zhang et al. 2022). La synchronisation chaotique peut être utilisée pour des protocoles d'échange de clés sécurisés, améliorant ainsi la sécurité des systèmes cryptographiques.

Cryptage des données (images et vidéos) : Les systèmes chaotiques sont utilisés pour protéger les données sensibles, telles que les transactions financières et les informations personnelles, en les convertissant en signaux chaotiques difficiles à déchiffrer sans la clé de synchronisation correcte (Ahmad and Hwang 2015, Nguyen, Pham-Nguyen et al. 2020). Le cryptage chaotique est utilisé dans le cryptage d'images et de vidéos pour protéger le contenu multimédia d'un accès non autorisé ou d'une falsification.

Dynamique non linéaire : Les systèmes chaotiques sont utilisés dans l'étude des phénomènes dynamiques non linéaires, aidant les chercheurs à comprendre les comportements complexes des systèmes physiques, biologiques et chimiques. Les modèles chaotiques sont utilisés pour étudier la dynamique des populations, les relations prédateur-proie et le comportement des écosystèmes, contribuant ainsi à la recherche écologique et aux efforts de conservation (Rössler 1976, Rössler 1977, Rossler 1979). Les réactions chaotiques et les systèmes chimiques sont étudiés pour mieux comprendre les processus chimiques complexes, ce qui pourrait permettre d'améliorer les processus industriels et les matériaux.

Ingénierie biomédicale et neurosciences : Les réseaux de neurones chaotiques sont étudiés pour mieux comprendre le fonctionnement du cerveau, la synchronisation neuronale et les troubles tels que l'épilepsie (Skarda and Freeman 1990, Iasemidis and Sackellares 1996).

1.13 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un bref aperçu du domaine des métasurfaces non linéaire à base du résonateur à anneau fendu et discuté comment l'interaction entre l'onde électromagnétique et ces matériaux peuvent induire des dynamiques très complexe. Au regard des résultats assez pertinents présentés dans la littérature jusqu'à présent sur la dynamique non linéaire de ces matériaux, nous avons remarqué que ces travaux se sont

limités à fréquence de quelques gigahertz. Avec les intérêts que la bande térahertz apporte, il sera important de modéliser et étudier la dynamique non linéaire de métasurface à méta-atome SRR dans cette gamme de fréquences afin de connaître ses régimes de fonctionnement qui peuvent être exploités pour diverses fonctionnalités/applications.

CHAPITRE 2

MATÉRIELS ET MÉTHODES

2.1 Introduction

Ce chapitre présente les différentes méthodes et logiciels qui seront exploités pour atteindre les objectifs énoncés dans ce mémoire. Les méthodes fondamentales des sciences non linéaires nécessaires à l'analyse des systèmes chaotiques sont présentées. Le chapitre est structuré comme suit : la sous-section 2.2 présente la méthode numérique utilisée pour résoudre le modèle mathématique du matériau SRR décrit dans cette thèse. La section 2.3 est consacrée aux outils de calcul pour la caractérisation des comportements dynamiques complexes non linéaires. Les méthodes d'analyse de la structure équivalente du matériau non linéaire sont présentées dans la section 2.4.

2.2 Méthodes analytiques

Cette section présente quelques études préliminaires basées sur la dissipation et l'existence d'attracteurs et les points d'équilibre avec l'analyse de leur stabilité linéaire utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires (ODE) décrivant la dynamique du système.

2.2.1 Dissipation et existence d'attracteurs

L'évaluation du taux de contraction du volume de l'oscillateur fournit des informations préliminaires sur l'existence d'attracteurs dans un système dynamique. Rappelons brièvement que le taux de contraction du volume d'un système dynamique à temps continu, décrit par l'équation (1.30), est donné par:

$$\Lambda = \text{Div}f \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

Théorème [Théorème de la divergence] (Dang-Vu and Delcarte 2000): Soient ϕ_t le flot de (1.30), c'est-à-dire une solution au point initial x_0 , V un volume de l'espace des phases au temps $t = 0$, $V(t) = \phi_t(V)$ l'image de V par ϕ_t , on a :

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = \int_V \text{Div}f dx_1 \dots dx_n, \quad \text{Div}f \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Preuve (Dang-Vu and Delcarte 2000) : par définition :

$$\phi_t(x) = \begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ \vdots \\ u_n(x, t) \end{bmatrix}$$

où

$$u_i(x, t) = x_i + t f_i(x) + O(t^2) \quad i = 1, \dots, n$$

car $\phi_t(x)$ est une solution de (1.30). On a, d'après la formule de changement de variable dans une intégrale multiple :

$$V(t) = \int_V \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| dx. \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \equiv \det \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right].$$

On en déduit :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| dx.$$

Comme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{cases} t \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + O(t^2) & \text{si } i \neq j, \\ 1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + O(t^2) & \text{si } i = j, \end{cases}$$

on en déduit :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| = 1 + t \text{Div}f + O(t^2). \quad (2.3)$$

D'où en dérivant (2.3) par rapport à t et en faisant $t \rightarrow 0$, on obtient (2.2).

En particulier si

$$\text{Div}f = \Lambda = \text{Cte},$$

on a alors :

$$\frac{dV}{dt} = \Lambda \int_V dx = \Lambda V,$$

d'où

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \Lambda.$$

En intégrant, nous obtenons :

$$V(t) = V_0 e^{\Lambda t}, \quad V_0 = V(0)$$

Qui tend vers zéro quand $t \rightarrow 0$ et $\Lambda < 0$.

Remarque : une valeur négative de Λ ($\Lambda < 0$) entraîne une diminution exponentielle rapide (c'est-à-dire amortie) du volume dans l'espace d'état. Le système dynamique est dissipatif et peut développer des attracteurs. Dans le cas où $\Lambda = 0$, le volume de l'espace des phases est conservé et le système dynamique est conservatif. Si $\Lambda > 0$, le volume de l'espace des phases s'étend et il n'existe donc que des points fixes ou des cycles instables, voire des répulseurs chaotiques (Hilborn 2000).

2.2.2 Points d'équilibre

Dans l'étude de la dynamique d'un système non linéaire, l'analyse des points d'équilibre possibles, de leur stabilité, et des bifurcations susceptibles d'apparaître à la suite des changements de paramètres est essentielle. Considérons le système dynamique général donné à l'équation (1.30). Les points d'équilibre \bar{x} du système (en l'absence de toute excitation extérieure) sont donnés par

$$\frac{dX}{dt} = f(\bar{x}) = 0 \tag{2.4}$$

c'est-à une solution qui ne change pas dans le temps.

2.2.3 Analyse de la stabilité linéaire

Après la recherche des points d'équilibre, l'une des questions les plus importantes dans les systèmes dynamiques non linéaires est l'exploration leur stabilité. En considérant toujours

l'équation différentielle ordinaire (1.30) pour laquelle les points d'équilibre sont obtenus à partir de l'équation (2.4), l'analyse de la stabilité linéaire consiste à étudier la trajectoire dans le temps du système légèrement perturbé à partir du point d'équilibre \bar{x} . Par conséquent, la solution x peut être écrite comme la somme du point d'équilibre \bar{x} et d'une petite perturbation δx

$$x = \bar{x} + \delta x \quad (2.5)$$

En combinant les équations (1.30) et (2.5) et en linéarisant autour du point d'équilibre \bar{x} , on obtient l'équation variationnelle (2.6).

$$\delta \dot{x} = M_J \delta x \quad (2.6)$$

Où $M_J = \partial f / \partial X$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est la matrice jacobienne calculée aux points d'équilibre du système. Les valeurs propres associées à la matrice M_J ci-dessus sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique (2.7).

$$\det(M_J - \lambda I_d) = 0 \quad (2.7)$$

où λ sont les valeurs propres du système décrit par l'équation (2.7) et I_d est la matrice identité. La stabilité du point d'équilibre est déterminée par les valeurs propres comme suit (Strogatz 1994):

- Si toutes les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne M_J ont une partie réelle négative, le point d'équilibre est stable ;
- Si au moins une des valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne M_J a une partie réelle positive, alors le point d'équilibre est instable.

Il est important de mentionner que certains cas plus complexes sont rencontrés où le système ne possède aucun point d'équilibre, ou bien où les points d'équilibre sont de type non hyperbolique (Wei, Sprott and Chen 2015, Singh and Roy 2018). Ces formalismes mathématiques constituent les principes de base de l'analyse de stabilité linéaire des systèmes non linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires autonomes. Dans le cas des systèmes non autonomes, l'approche peut être différente (Chithra, Fozin et al. 2021).

2.3 Méthode numérique

Les méthodes analytiques ne peuvent fournir que des solutions restreintes dans l'analyse des équations différentielles non linéaires. Une caractérisation dynamique plus complexe telle que le comportement irrégulier (comme le chaos) nécessite une autre approche utilisant des méthodes numériques. Les méthodes numériques sont axées sur des algorithmes qui sont implémentés au moyen des ordinateurs pour résoudre différents types de problèmes. Les ordinateurs nous permettent d'obtenir les réponses/solutions approximatives à des problèmes analytiques difficiles à résoudre et de visualiser ces solutions. Dans ce mémoire, l'intégration numérique du modèle non linéaire décrivant la dynamique du matériau SRR sera effectuée à l'aide de l'algorithme de Runge-Kutta du quatrième ordre (en anglais RK-4, pour fourth order Runge-Kutta). Une fois que la solution de chaque variable d'état est disponible, des techniques numériques plus appropriées telles que la transformée de Fourier discrète (en anglais DFT, pour discrete Fourier transform) ou l'exposant de Lyapunov sont appliquées pour décrire plus d'informations (spectres de fréquence, dynamique régulière ou irrégulière) sur le système à l'étude.

Il est important de souligner que même si la littérature fournit plusieurs outils de calcul numérique ((Kuznetsov, Kuznetsov and Kuznetsov 1998, Ruelle 2014) et les références qui s'y trouvent), tout au long de cette thèse, les calculs sont basés sur les codes développés par l'auteur pour plus d'efficacité et pour éviter les erreurs qui peuvent survenir dans l'utilisation de logiciels/outils spécialisés qui ne sont pas bien maîtrisés (par l'auteur) ou qui n'offrent pas les flexibilités requises. Pour tous les résultats numériques obtenus dans cette thèse, la grille de temps est toujours fixée à $\Delta\tau = 2 \times 10^{-3}$ et les calculs sont effectués avec des variables et des constantes en double précision. Pour chaque paramètre, le système est intégré pendant un temps suffisamment long et les solutions sont enregistrées après l'élimination de la phase transitoire.

2.3.1 Runge-Kutta du quatrième ordre

Toute cette thèse est basée sur l'étude des propriétés dynamiques non linéaires (irrégulières) d'un matériau térahertz à anneau divisé (en anglais SRR, pour split ring resonator) sous

l'effet d'une radiation électromagnétique intense. Ainsi, seule l'intégration numérique de nos équations différentielles non linéaires peut nous permettre de bien approximer les solutions du problème analytiquement complexe et difficile à résoudre, et aussi de visualiser ces solutions. L'algorithme adapté est celui de Runge-Kutta du quatrième ordre (RK-4). En effet, parmi la multitude de méthodes d'intégration numérique, la méthode RK-4 offre un bon équilibre entre coût de calcul, stabilité et efficacité (Strogatz 2018). La solution x_{n+1} en fonction de x_n et t_n est donnée par le calcul suivant :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.8)$$

avec,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, t_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= f(x_n + hk_3, t_n + h) \end{aligned} \quad (2.9)$$

où h est pas d'intégration et t_n le temps d'échantillonnage à la nième itération.

Toute l'analyse numérique et les investigations plus poussées/détaillées dans ce mémoire seront d'abord basées sur l'intégration numérique RK-4 du système modélisant le matériau SRR (défini par un ensemble d'équations différentielles ordinaires (ODE) non autonomes).

2.3.2 Matériel et logiciels

Au cours de cette thèse, nous avons utilisé un ordinateur de bureau haute performance fonctionnant sous le système d'exploitation Window 10 Entreprise LTSC (LTSC, pour Long-Term Servicing Channel) édition intégrale avec de nombreux logiciels dont Word, SolidWorks, Matlab, Turbo pascal et DEV++.

2.4 Outils de caractérisation des comportements complexe non linéaires du SRR

Les propriétés dynamiques des systèmes non linéaires sont généralement étudiées au moyen d'un certain nombre d'outils de diagnostic tels que les diagrammes de bifurcation, l'exposant

maximal de Lyapunov, les séries temporelles, les spectres de fréquence, les diagrammes de phase, le bassin d'attraction, pour n'en citer que quelques-uns. Ils fournissent une compréhension quantitative et générale du chaos dans les systèmes non linéaires. Ainsi, cette sous-section fournit une brève description sur les techniques computationnelles qui sont employées pour caractériser les différents propriétés/états dynamiques du matériau non linéaire SRR étudiés dans ce mémoire.

2.4.1 Analyse du comportement de la bifurcation

Comprendre comment le comportement qualitatif d'un modèle dynamique change lorsqu'un paramètre varie est l'objectif principal de l'analyse de bifurcation. Lorsqu'un système subit un changement significatif qui entraîne un nouvel ensemble de comportements dynamiques, on parle de bifurcation. Les bifurcations apparaissent comme des modifications de la structure du portrait de phase dans l'analyse du plan de phase. Lors des phénomènes de bifurcation, les points d'équilibre, les cycles limites ou d'autres aspects de l'image de phase peuvent apparaître, disparaître, être remplacé par un autre, ou changer de stabilité lorsqu'un paramètre change (Chitra and Kuriakose 2008, Javed, Ali et al. 2023).

Le comportement dynamique du système peut ainsi, passer de régulier (périodique ou quasi-périodique) à irrégulier (chaotique) en suivant différentes voies. Ces différentes voies vers les oscillations irrégulières sont représentées par un diagramme de bifurcation, qui est une représentation graphique d'attracteurs échantillonnés dans une section de Poincaré et fournit un bon résumé visuel des transitions entre les différents types de mouvements/oscillations qui peuvent se produire lorsqu'un paramètre du système varie (Chitra and Kuriakose 2008). Un diagramme de bifurcation typique comporte un axe horizontal qui correspond au paramètre de contrôle et un axe vertical qui correspond aux valeurs échantillonnées à l'état stable de l'une des variables du système. Dans ce mémoire, tous les diagrammes de bifurcation sont tracés en prenant les maxima de la série temporelle et en traçant les valeurs en fonction du paramètre de contrôle. Ainsi, pour une valeur spécifique du paramètre de contrôle, si l'oscillation est périodique unique, il correspondra à un point unique dans le tracé de bifurcation correspondante. Au fur et à mesure que la valeur du paramètre de contrôle

augmente, le nombre de points augmente en fonction de l'évolution du mouvement vers un doublement de période ou vers un comportement chaotique (Chitra and Kuriakose 2008). Il est à noter que les bifurcations locales et globales sont les deux grandes catégories de bifurcations que l'on rencontre fréquemment dans les systèmes dynamiques. Lorsque des états stables entrent en collision, cela induit une modification topologique locale de l'espace des phases dans le voisinage immédiat de la collision; on parle alors de bifurcation locale (par exemple, bifurcation nœud selle (en anglais, « Saddle-node bifurcation »), bifurcation de Hopf et bifurcation de dédoublement de période). Cependant, lorsque deux manifolds (c'est-à-dire, en géométrie différentielle, un espace mathématique lisse (hautement différentiable)) entrent en collision et échangent leur stabilité, la structure de l'espace des phases peut être globalement affectée; on parle alors de bifurcation globale (par exemple, bifurcation homoclinique et bifurcation hétéro-clinique). Ces derniers types de bifurcation ne sont pas étudiés dans ce mémoire.

2.4.2 Exposants de Lyapunov

Nommés d'après Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, un mathématicien Russe, les exposants de Lyapunov décrivent le taux de divergence ou de convergence de trajectoires proches de l'attracteur dans différentes directions de l'espace des phases. Les exposants de Lyapunov sont essentiels pour déterminer si un système dynamique est chaotique. Ils permettent une évaluation numérique de la sensibilité du système aux conditions initiales et peuvent montrer si le système se comporte de manière chaotique. Le système est sensible aux conditions initiales si au moins un exposant de Lyapunov est positif. Cette sensibilité est une caractéristique importante du comportement chaotique.

Considérons un système évoluant à partir de deux conditions initiales légèrement différentes x et $x + \xi$. Après k itérations, la divergence des deux trajectoires peut être représentée comme suit (Strogatz 1994, Hilborn 2000).

$$\xi(n) = \xi e^{\lambda_e k} \quad (2.10)$$

où λ_e , l'exposant de Lyapunov, donne le taux moyen de divergence. Si λ_e est négatif, les deux trajectoires proches convergent et l'évolution n'est pas chaotique. Si λ_e est positif, les trajectoires voisines divergent et l'évolution est sensible aux conditions initiales et donc

chaotique. Autrement dit, des exposants de Lyapunov positifs révèlent l'existence d'une divergence exponentielle de la trajectoire et la dépendance sensible aux conditions initiales, ce qui indique le chaos et la nature imprévisible du système. Nous pouvons définir de la même manière les exposants de Lyapunov pour les systèmes continus. Considérons un système à n -dimensions représenté par l'équation (2.4).

$$\dot{x} = f(x, t), f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

Considérons deux trajectoires proches dans l'espace des phases à n -dimensions à partir de conditions initiales légèrement différentes x_0 et $x'_0 = x_0 + \delta x_0$ respectivement. Leur évolution temporelle donnera les vecteurs x et $x + \delta x$. Afin de trouver l'évolution temporelle de δx , nous linéarisons l'équation (2.4) de manière à obtenir

$$\delta \dot{x} = M_J(x) \times \delta x \quad (2.12)$$

où M_J est la matrice jacobienne de f . L'exposant de Lyapunov du système peut être défini comme suit :

$$\lambda_e(x_0, \delta x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{d(x_0, t)}{d(x_0, 0)} \right) \quad (2.13)$$

où $d(x_0, t)$ est la distance entre les trajectoires x et x' (mesurée par l'exposant de Lyapunov λ_e). Il existe n exposants de Lyapunov pour un système à n dimensions et ils sont indépendants des conditions initiales choisies pour l'évaluation. L'ensemble des exposants de Lyapunov est appelé spectre de Lyapunov. Les systèmes hyperchaotiques ont plus d'un exposant de Lyapunov positif. Le calcul du spectre de Lyapunov ne peut pas être effectué à l'aide de méthodes théoriques. En général, le calcul du spectre de Lyapunov est effectué à l'aide de méthodes numériques. Plusieurs méthodes numériques pour le calcul du spectre de Lyapunov sont décrites dans (Habib and Ryne 1995, Williams 1997, Rangarajan, Habib and Ryne 1998). L'algorithme de Wolf (Wolf, Swift et al. 1985) est l'une des méthodes couramment utilisées pour calculer l'ensemble des exposants de Lyapunov.

2.4.3 Formes d'ondes temporelles

L'analyse et l'interprétation des données recueillies au fil du temps constituent l'objet de l'analyse des séries temporelles. Elle peut être utilisée dans le contexte des systèmes non

linéaires pour étudier le comportement des variables d'état d'un système dans le temps. L'examen des comportements périodique révèle des fluctuations cycliques qui se produisent de manière répétée sur des intervalles de temps prédéterminés. Pour une étude approfondie, la stationnarité, c'est-à-dire l'état dans lequel les paramètres statistiques sont constants, est essentielle (Javed, Ali et al. 2023). En outre, la série temporelle est un outil théorique clé utilisé pour quantifier le comportement irrégulier/chaotique du système (Hilborn 2000). En général, la visualisation des séries temporelles est une technique directe ou triviale pour l'analyse du comportement complexe du système. La série temporelle donnant l'évolution d'un comportement périodique à l'apparence d'une trace uniforme, et le spectre correspondant à une fréquence fondamentale. En revanche, pour un comportement quasi-périodique ou chaotique, les séries temporelles semblent oscillantes, ce qui est généralement la signature de phénomènes non linéaires (Rocha, Andruccioli and Medrano-T 2010). Dans ce cas, le spectre correspondant comporte un nombre illimité de fréquences. Nous pouvons également utiliser l'enveloppe de la série temporelle pour déterminer la dynamique du système. Lorsque l'enveloppe est plate, le comportement associé est périodique. Dans le cas contraire, le comportement est quasi-périodique ou chaotique.

2.4.4 Diagrammes de phase

Une méthode graphique appelée analyse du plan de phase est utilisée pour représenter et comprendre le comportement des systèmes non linéaires. Elle consiste à tracer les trajectoires des variables d'état du système dans le plan de phase, un espace bidimensionnel. Les propriétés dynamiques du système, telles que la position, la vitesse, la charge, le courant ou la concentration, sont souvent représentées par des variables d'état. Plusieurs caractéristiques cruciales du système peuvent être révélés en examinant le portrait de phase, qui est la combinaison de toutes les trajectoires dans le plan de phase. Ces caractéristiques comprennent les cycles limites (trajectoires fermées), la stabilité des points d'équilibre (qu'il s'agisse d'attracteurs ou de répulseurs), les points d'équilibre du système (où les trajectoires se rejoignent ou convergent) et d'autres aspects qualitatifs de la dynamique du système. L'analyse du plan de phase fournit des informations sur le comportement du système, notamment sur l'existence de solutions en régime permanent, d'oscillations ou de

comportements périodiques, et sur les transitions entre différents états dynamiques (Sprott 2010, Li and Hu 2023). Ainsi, un système stationnaire ou d'équilibre est représenté par un point fixe dans le plan de phase. Un système périodique est représenté par des trajectoires irrégulières dans le plan de phase, appelées cycle limite. Un comportement chaotique est caractérisé par des trajectoires irrégulières dans le plan de phase, appelé attracteur étrange. La principale limitation de cet outil est qu'il est très difficile de distinguer la quasi-périodicité du comportement chaotique. Le spectre de fréquence ou la section de Poincaré (Dang-Vu and Delcarte 2000) est l'outil numérique le plus efficace pour mettre en évidence le comportement chaotique des systèmes non linéaires. Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser le spectre de fréquence. Les variables d'état représentant les portraits de phase dans ce mémoire sont la charge et le courant.

2.4.5 Spectre de fréquence

L'analyse du spectre de fréquence ou du spectre de puissance des signaux présente un grand intérêt pour les applications technologiques. Leur analyse est basée sur l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (sigle anglais : FFT ou fast Fourier transform) qui est implémenté sous forme de transformée de Fourier discrète (sigle en anglais : DFT ou discrete Fourier transform) dans certains langages de programmation avancés tels que Matlab ou Mathematica, pour n'en citer que quelques-uns. Ils fournissent une autre caractérisation très intéressante du comportement irrégulier. Le spectre de puissance donne donc le contenu fréquentiel de la variation temporelle des états/variables dynamiques et permet également de distinguer le comportement régulier du comportement irrégulier. Les oscillations régulières sont représentées par des lignes discrètes des fréquences correspondantes et des différentes harmoniques (le nombre de périodicités est compté à partir du pic maximal sur le côté gauche). Le comportement irrégulier, qui est complètement apériodique, est indiqué par un bruit à large bande (c'est-à-dire un large spectre de puissance continu) (Lakshmanan and Rajaseekar 2012). Toutefois, dans le cas d'un comportement quasi-périodique, lorsqu'un signal comporte de nombreuses composantes périodiques, les pics peuvent se confondre et le spectre peut presque ressembler à un large continuum (les pics se situent à toutes les combinaisons linéaires de deux (ou trois) fréquences fondamentales).

2.4.6 Bassin d'attraction

Les sections précédentes ont supposé qu'un modèle non linéaire donné n'a qu'un seul état stable pour un ensemble donné de paramètres, et donc, par l'hypothèse ergodique, que l'exposant de Lyapunov est le même pour toutes les conditions initiales. En fait, de nombreux systèmes dynamiques (non linéaires) ont plusieurs états stables coexistants, parfois même une infinité. En outre, même en présence d'un seul état stable, certaines conditions initiales peuvent aller à l'infini plutôt qu'à l'attracteur, auquel cas l'infini peut être considéré comme un état stable. Les différents états stables peuvent avoir des propriétés très différentes, telles que les exposants de Lyapunov et la dimension, et peuvent apparaître dans toutes les combinaisons : points d'équilibre, cycles limites, tores et attracteurs chaotique. Le nombre et le type d'état stable peuvent changer radicalement au fur et à mesure que les paramètres varient. Chaque état stable est donc contenu dans un bassin d'attraction, qui est la région de l'espace d'état dans laquelle les conditions initiales se rapprochent de l'attracteur lorsque $t \rightarrow \infty$. Le chaos nécessitant généralement un espace d'état tridimensionnel, les bassins des attracteurs chaotiques sont des volumes (ou des hyper-volumes de dimensions supérieures) à l'intérieur desquels réside l'attracteur. Les bassins peuvent s'étendre à l'infini, mais ils ont généralement une limite qui peut elle-même être une fractale. Il peut y avoir des centaines d'états stables coexistants avec des limites de bassin fractales qui sont très proches de presque tous les points de l'espace d'état. Les systèmes présentant des états stables multiples sont dits multistables. L'existence possible des états stable multiples signifie qu'il est impératif de rechercher différentes conditions initiales ainsi que différents paramètres pour déterminer si le système est capable de présenter un chaos. Dans certains cas, les paramètres sont ajustés dans les tracés sans réinitialiser les conditions initiales à chaque changement afin de rester dans la région chaotique. Ces tracés présentent parfois une hystérésis, direction opposée. Il est souvent possible d'identifier des états stables multiples (coexistant) de cette manière, mais une méthode plus générale consiste à essayer de nombreuses conditions initiales différentes et à calculer pour chaque cas une valeur telle que l'exposant de Lyapunov.

2.4.7 Exposants de Lyapounov à deux paramètres

Lorsque le système implique deux paramètres ou plus, il est plus convenable et plus intéressant de représenter les régions pour lesquelles les exposants sont positives, nulles et négatives dans le plan à deux paramètres. Cette représentation est appelée régions dynamiques d'exposants de Lyapounov à deux paramètres. Elle permet d'analyser le système en construisant des diagrammes colorés appropriés tout en faisant varier deux paramètres du système, la couleur étant associée à la valeur de l'exposant de Lyapounov défini. L'une des originalités de ce travail est qu'en étudiant les propriétés non linéaires du matériau sous investigation dans la région dynamique à deux paramètres, il est plus facile de le caractériser et d'optimiser la réponse en sortie. Le modèle issu de notre modélisation étant d'ordre deux, nous utiliserons le plus grand exposant de Lyapounov pour définir les régions dynamiques car il est le seul à être positif dans certaines régions des deux paramètres de contrôle. Les diagrammes colorés seront obtenus en calculant numériquement l'exposant maximal de Lyapounov sur une grille de 500×500 de la plage des paramètres choisis. En outre, le système a été intégré avec l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre avec une taille de pas fixe égale à 0.002. L'annexe A présente l'organigramme utilisé pour obtenir les régions dynamiques d'exposants de Lyapounov à deux paramètres présentés dans cette thèse. Cette méthode peut être mise en œuvre dans n'importe quel langage de programmation approprié (C, C++, Turbo Pascal, Matlab, Fortran, etc.).

2.5 Méthodes d'analyse du circuit équivalent du matériau non linéaire SRR

Les lois de Kirchhoff sur les circuits sont deux égalités qui traitent du courant (loi de Kirchhoff sur le courant (KCL)) et de la différence de potentiel (loi de Kirchhoff sur la tension (KVL)) dans la théorie des circuits électriques. Ces lois sont fondamentales dans l'analyse de tout dispositif qui peut avoir un modèle électrique équivalent (Robbins and Miller 2012) et s'énoncent comme suit :

KCL : *La somme algébrique des courants dans un réseau de conducteurs se rejoignant en un point/noeud est nulle.* Cette loi s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\sum_{j=1}^m I_j = 0 \quad (2.14)$$

où m est le nombre total de branches dont les courants se dirigent vers le nœud ou s'en éloignent.

KVL : *La somme algébrique des tensions dans toute boucle fermée est égale à zéro.*

Elle se traduit par la relation mathématique suivante

$$\sum_{j=1}^n v_j = 0 \quad (2.15)$$

où n est le nombre total de tensions mesurées.

Ces lois, associées à d'autres analyses fondamentales et bien connues des circuits électriques (comme la loi d'Ohm), seront utilisées pour établir le modèle mathématique équivalent décrivant notre matériau non linéaire.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les méthodes théoriques et numériques pour l'étude de la dynamique du modèle du matériau SRR non linéaire ont été présentées. En outre, différents outils d'analyse tels que les diagrammes de bifurcation, l'exposant maximal de Lyapunov, les séries temporelles, les diagrammes de phases, le spectre de fréquence, le bassin d'attraction et les diagrammes d'espace à deux paramètres ont été utilisés pour étudier et caractériser le comportement régulier, irrégulier ou multistable dans le matériau SRR non linéaire.

CHAPITRE 3

NONLINEAR DYNAMICS OF A SINGLE-GAP TERAHERTZ SPLIT-RING RESONATOR UNDER ELECTROMAGNETIC RADIATION

Gervais Dolvis Leutcho ^a, Lyne Woodward ^a, François Blanchard ^a

^aDépartement de Génie Électrique, École de technologie supérieure,
1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, Québec, Canada H3C 1K3

Paper published in *Chaos AIP*, October 2023

Abstract: Research into metasurfaces is developing rapidly and is topical due to their importance and applications in various fields such as communications, cryptography, and sensing, to name a few. These materials are artificially engineered to manipulate/control electromagnetic (EM) waves, in order to present a particular functionality. In this regard, nonlinear metasurfaces may present particular functionalities that remain to be discovered. In this paper, we numerically investigate the dynamic behaviors caused by the motion of charge carriers under intense EM field at the gap of a single nonlinear split-ring resonator (NSRR) in the terahertz (THz) frequency range. We derive the mathematical model that is used to examine the excitation properties of the NSRR, and then demonstrate various tuning regions. Analysis of the two-dimensional parameter-space reveals that the NSRR exhibits periodic, chaotic patterns as the amplitude of the excitation field and the loss parameter vary. However, this chaotic behavior disappears when the loss parameter is very large. The period doubling that confirms the transition between the periodic and chaotic modes is explored using the bifurcation diagram. The sensitivity of the initial conditions (ICs) is examined on three dynamic region plots. Our results correctly demonstrate that the NSRR exhibits the attractive phenomenon of multistability. The coexistence of two stable states is studied and confirm on the basin of attractions for a fixed set of amplitude or loss parameters. The energy balance of the proposed model is well analyzed on the dynamic states and parameters to characterize the different oscillation regimes. The study of the multistability in the work represents an important first step towards the development of photonic memory devices in the THz frequency range.

Lead paragraph

Materials and devices that exhibit non-linearities are capable of generating complex dynamics such as multistability, hysteresis, bifurcation and chaos. These effects can be used for secure communication. In this study, the researchers investigated the complete dynamics of a single-gap, split-ring nonlinear THz resonator. They examined the regions where periodic and chaotic patterns can emerge, as well as the mechanisms of hysteresis and multistability. They also evaluated the demarcation regions to validate coexisting states and estimated the energy required to maintain continuous oscillation in the material. This study provides a valuable reference for researchers working on nonlinear metamaterials and metasurfaces.

3.1 Introduction

Nowadays, the exploitation of metasurfaces for technological applications in various fields is becoming increasingly important due to their unique characteristic of interacting with electromagnetic (EM) waves and achieving various functionalities (Chen, Zhu and Capasso 2020). Intelligent reflecting surfaces are a good example of an emerging transmission technology that is now essential in wireless communications for 5G and beyond (Yurduseven, Assimonis and Matthaiou 2020). Indeed, metasurfaces are artificially arranged structures composed of metals and dielectrics, or other materials, that possess powerful EM wave manipulation capabilities¹. Interestingly, the fabrication of metasurfaces for EM waves in the terahertz (THz) frequency range (i.e., from 300 GHz to 10 THz) is a burgeoning area of research (Tao, Strikwerda et al. 2009, Ju, Geng et al. 2011, Xu, Xie and Ying 2017), with various low-cost production methods appearing every year (Cao, Nallappan et al. 2020, Guerboukha, Amarasinghe et al. 2021), coinciding with the pressing demand for future communications.

Unit cells or meta-atoms (usually made up of sub-wavelength metallic components) are the main constituents of metasurfaces. Due to the sub-wavelength nature of the unit cell, a nonlinear light-matter interaction can occur with the application of a localized and enhanced

EM field (Blanchard, Ooi et al. 2012, Luo 2018). This feature enables the realization of nonlinear photonic devices with new and complex dynamics (Fan, Wei et al. 2011, Shadrivov, Lapine and Kivshar 2015, Abrashuly and Valagiannopoulos 2021). Among the important unit cells of metasurfaces, the split-ring resonator (SRR) structure is a well-known meta-atom whose gap forms a barrier to the formation of the circulating current, thus facilitating charge accumulation (Cai and Shalaev 2010). Nonlinear phenomena such as time and space dependent oscillations, stable oscillations, etc., can be caused by the movement of charge carriers in a semiconductor following the application of an intense electric field by a beam incident on the material surface (Razzari, Su et al. 2009). Consequently, the nonlinearity of the material will be better exploited by introducing it into the gap, i.e., where the electric field is strengthened (Blanchard, Ooi et al. 2012), subsequently referred to as a nonlinear split-ring resonator (NSRR).

It has been shown that materials or devices with nonlinearities are capable of generating rich and complex dynamics, such as multistability, hysteresis, bifurcations and chaos (Miandoab 2021, Tametang Meli, Leutcho and Yemele 2021, Njitacke, Ramakrishnan et al. 2022, Valagiannopoulos 2022). Interestingly, these effects are interrelated and can be used as building blocks of a secure communication strategy (Pecora and Carroll 2015, Hassan and Hammuda 2019, Tang, Li et al. 2021, Njitacke, Nkapkop et al. 2022). Among these nonlinear effects, let's recall that multistability is characterized by the coexistence of several stable states for the same set of system parameters, while a bifurcation occurs when a small variation of a parameter in a nonlinear process leads to a qualitative change of the system's behavior. On the other hand, chaos can play an essential role in the separation and stabilization of several stable states in a nonlinear system, often achieved by using different initial conditions (Bao, Zhang et al. 2022, Boya, Ramakrishnan et al. 2023). Consequently, the dependence of the state of a nonlinear system on its history gives rise to the notion of hysteresis, which is the basis of memory devices (Powell, Shadrivov et al. 2007, Abrashuly and Valagiannopoulos 2021). Graphene-based materials are good examples where the effect of nonlinearity has been used to generate both chaotic and periodic sequences (Feng and Shi 2018, Mir and Tahani 2020). In retrospect, Lazarides et al., studied a coupled nonlinear split-

ring resonator model and reveal the regions where chaotic and periodic oscillations can be found (Lazarides, Molina et al. 2010). The authors also highlighted the domain of coexisting stable states as a function of two energy states. However, the model has been proposed to operate at the frequency of a few gigahertz (GHz). A numerical study of chimera states in a ring-shaped metasurface, also known as a superconducting quantum interference device (SQUID) metasurface, has been carried out (Lazarides, Hizanidis and Tsironis 2020). The proposed ring-like metasurface structure was interrupted by a Josephson junction (JJ) nonlinearity. The shape and emergence of the chimera states found were controlled by the dc flux gradient and the sinusoidal field amplitude. To the authors' knowledge, no research work has examined the mechanism that allows the emergence of chaos, multistability, and coexisting bifurcations from NSRR in the literature. More importantly, no work has been done on the dynamical behavior of this nonlinear material operating at THz frequency. For potential applications/exploits, it is important to study the global dynamics in two-parameter space, which has not been done before. All these aspects motivate the interest of this work.

Here, we address the complete dynamics of a nonlinear single-gap split-ring THz resonator. We first derive the exact mathematical equation that models the NSRR material, which is then reduced to an ordinary differential equation. Dynamics in the two-parameter spatial diagram is used to discover regions where periodic patterns and chaos may emerge. The bifurcation diagram is then used to present the chaos mechanism. The two-parameter Lyapunov exponent and the bifurcation diagram used to locate relevant domains with hysteresis and multistability signatures are also investigated. Since the choice of appropriate initial conditions is crucial in NSRR multistable regions, we evaluate the demarcation regions (i.e., the cross section of the basin of attraction) to find each coexisting state. By examining the demarcation regions of different initial states, we are able to validate the multistable states that can be obtained in the phase space. In particular, by exploiting the Helmholtz formalism, we estimate the energy required to promote wave propagation and maintain a continuous oscillation in the the NSRR. Ultimately, the detailed dynamics studied in this work constitute a valuable reference for researchers interested in nonlinear metamaterials and metasurfaces such as the NSRR, to better understand the self-tuning

mechanisms as well as the nonlinear effects induced by the incident EM wave on the material.

The paper is organized as follows: Sec. 3.2 presents the theoretical description of the nonlinear split-ring resonator and the corresponding mathematical model used for our study is derived. The Hamilton energy of the proposed model is evaluated using the Helmholtz formula in Sec. 3.3. Sec. 3.4 deals with the different behaviors of NSRR. For example, the dynamics in the parameter spaces is studied to reveal its different oscillation regimes. We also exploit the bifurcation diagram to examine the transition between regular oscillations (periodic states) and non-regular oscillations (chaotic states). In addition, the sensitivity of initial conditions on the model is highlighted and explored in two-parameter space diagrams, and the important phenomenon of multistability is revealed. This work is finally summarized in Sec. 3.5 with a conclusion.

3.2 Theoretical description

The schematic diagram of a 3D unit-cell SRR metasurface studied in this paper is shown in Fig. 3.1. In this structure, l is the length, w is the line width, d represents the gap of the slit and h is the thickness.

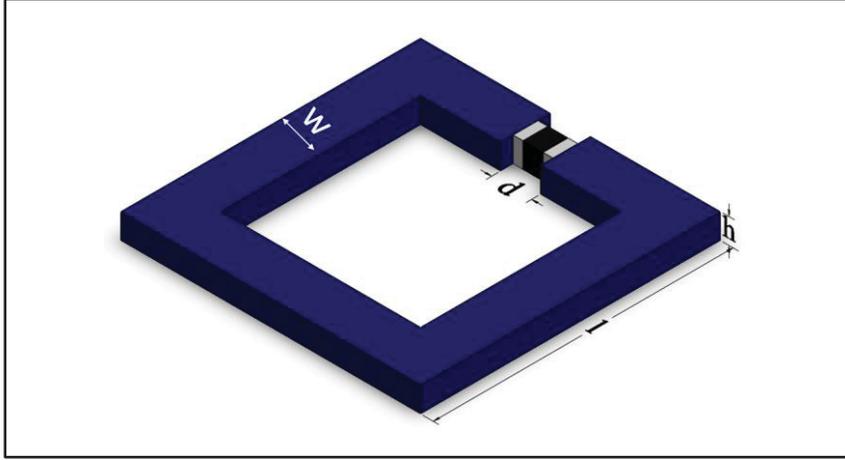


Figure 3.1 Schematic of the single-gap SRR metamaterial with its corresponding geometrical dimensions:
 $l = 60\mu\text{m}$, $d = 4\mu\text{m}$, $w = 6\mu\text{m}$, $h = 300\text{nm}$

These parameters represent the effective or geometric parameters of the SRR. In this geometrical configuration, the current I flowing in the SRR ring is induced by the magnetic field component H . The SRR is modeled by an equivalent circuit that has a self-inductance L connected in series with its resistor R , and a nonlinear (voltage-dependent) gap capacitance $C(V)$. The expression of this latter (i.e., $C(V)$) is given by Eq. (3.1) (Powell, Shadrivov et al. 2007).

$$C(V) = \frac{C_0}{(1 - V/V_\xi)^\gamma} = C_0(1 - V/V_\xi)^{-\gamma}, \quad (3.1)$$

where γ , V_ξ , and C_0 represent the gradient coefficient, intrinsic potential and zero-bias junction capacitance, respectively. Knowing that the charge element dQ accumulated in the gap is defined by Eq. (3.2) as follows

$$dQ = C(V)dV = [C_0(1 - V/V_\xi)^{-\gamma}]dV, \quad (3.2)$$

the time-dependent total charge $Q(t)$ can be obtained using the initial condition $Q(V = 0) = 0$ as follows

$$Q = \frac{C_0 V_\xi}{1 - \gamma} \left[1 - \left(1 - \frac{V}{V_\xi} \right)^{1-\gamma} \right]. \quad (3.3)$$

Thus, the voltage V can be calculated as follows

$$V(Q) = V_\xi \left[1 - {}^{1-\gamma} \sqrt{\left(1 - \frac{(1-\gamma)Q}{V_\xi C_0} \right)} \right] \quad (3.4)$$

Assuming there is no saturation oscillation, i.e., $V_\xi > (1-\gamma)|Q/C_0|$, and performing a Taylor series expansion (to order 3 around $Q(V=0) = 0$) of equation (4), the potential $V(Q)$ can be re-expressed as follows:

$$V(Q) = \frac{Q}{C_0} - \frac{\gamma}{2C_0^2 V_\xi} Q^2 + \frac{\gamma(2\gamma-1)}{6C_0^3 V_\xi^2} Q^3, \quad (3.5)$$

where Q is the charge accumulated in the oscillator gap. Applying Kirchhoff's voltage law to the nonlinear inductor-resistor-capacitor oscillator, considering that the nonlinear SRR is placed in an alternating EM field (but only its magnetic component contributes to the current induced in the ring) yields Eq. (3.6):

$$L \frac{dI}{dt} + RI + V(Q) = F(t) \quad (3.6)$$

where $F(t) = E_0 \cos(\Omega t)$ is the induced electromotive force of amplitude E_0 and frequency Ω that results from the applied EM field with suitable polarization. Combining Eqs. (5) and (6), and by defining the following transformation,

$$\sigma = R \sqrt{\frac{C_0}{L}}, \quad \beta = \frac{\gamma Q_c}{2V_\xi C_0}, \quad \eta = \frac{\gamma(2\gamma-1)Q_c^2}{6V_\xi^2 C_0^2}, \quad \mu = \frac{E_0 C_0}{Q_c}, \quad \tau = t/\sqrt{LC_0}, \quad q = Q/Q_c, \quad \omega = \Omega \sqrt{LC_0},$$

$$Q_c = V_\xi C_0, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$$

we derive the normalized ordinary differential equation (ODE) modeling the nonlinear SRR oscillator:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \sigma \frac{dq}{d\tau} + q - \beta q^2 + \eta q^3 = \mu \cos(\omega\tau) \quad (3.7)$$

where q is the normalized charge, σ the loss parameter, μ the normalized amplitude of the electromotive force resulting from the applied EM field, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ is the oscillation frequency of the circuit, $d/d\tau$ represents the first derivative with respect to normalized time τ . The magnitude of the characteristic electric field E_c is linked to the gap d by $E_c = V_\xi/d$. As previously indicated, in Fig.1, the gap/slit represents the capacitance and the metal frame (ring) materializes the inductance. These equivalent electronic components are related to the physical geometrical parameters of the SRR as follows³⁰

$$L = \frac{\mu_0 l^2}{h}, \quad (3.8)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r w h}{d}$$

where ε_0 and μ_0 denote the permittivity and permeability of vacuum, respectively, and ε_r is the relative permittivity of the material within the gap. To establish the fundamental oscillation frequency of the nonlinear SRR material, we consider its nonlinear resistor – inductor – capacitor (RLC) model with ohmic resistance, self-inductance, and nonlinear (voltage-dependent) capacitance. Indeed, according to Equations (3.6) and (3.7), the eigenfrequency ω_0 of the SRR model can be found linearizing Eq. (3.7) in a lossless, entrainment-free case. Hence, $C = C_0$. The fundamental oscillation frequency is expressed accordingly as follows

$$f_{LC} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} = \left(\frac{c_0}{2\pi l\sqrt{\varepsilon_r}}\right) \sqrt{\frac{d}{w}} \quad (3.9)$$

where c_0 is the speed of light in free space (i.e., in vacuum) and $\varepsilon_r = 2.82$. Throughout this work, we consider the constituent geometrical parameters of the SRR for which we operate at the frequency of $f_0 = f_{LC} = 0.39THz$. That is $l = 60\mu m$, $d = 4\mu m$, $w = 6\mu m$, $h = 300nm$.

3.3 Energy of the nonlinear SRR material

In metasurface, each EM wave propagates with its associated transport energy. In addition to causing the material to vibrate (e.g., displacement and oscillation of charge carriers), this energy facilitates and optimizes the output response. Energy can be generated directly from the system's internal storage tanks or from other external sources. When it comes from internal sources, the energy is linked to the system's parameters or state variables of the system. In fact, the inductor and capacitor are the two reservoirs that derive and pump energy from the SRR material during the emergence of nonlinear oscillation modes. These various nonlinear phenomena are initiated by the field enhancement in the gap of the material. The Hamiltonian is calculated by taking into account the different energy fields involved during wave propagation in the NSRR. Indeed, in addition to energy from conservative sources

(capacitor and inductor), we consider the contribution due to imposed EM radiation, which injects energy to replenish the dissipation. We denote by W_C and W_L the energy in the capacitor and inductor, respectively, and by W_{ext} the energy contributed by the external field. Therefore, the field energy from these sources is calculated as

$$\begin{cases} W_L = \frac{1}{2}LI^2 \\ W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} \\ W_{ext} = -QE_0\cos(\Omega t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Thus, the field energy W in the nonlinear SRR material can be evaluated as follows

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} - QE_0\cos(\Omega t) \quad (3.11) \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{Q_c^2}{C_0V_\xi^2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{Q_c^2}{C_0V_\xi^2}q^2 - \frac{E_0C_0}{Q_c}\frac{Q_c^2}{C_0V_\xi^2}\cos(\omega\tau)q \right] V_\xi^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{E_0C_0}{Q_c}\cos(\omega\tau)q \right) C_0V_\xi^2 \\ &= HH_0; \quad (H_0 = C_0V_\xi^2) \end{aligned}$$

An equivalent dimensionless form of the Hamiltonian function H is derived as follows

$$H(q, i) = \frac{W}{C_0V_\xi^2} = \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{2}q^2 - \mu\cos(\omega\tau)q \quad (3.12)$$

Here, the second variable $i = dq/d\tau$ is the normalized current. We can note here that W comprises two terms. A dimensionless term H represents the Hamiltonian energy of the nonlinear SRR oscillator, and the term H_0 is nothing but the unit of energy for the nonlinear SRR material. To confirm the reliability of this scheme, an identical Hamiltonian as the form in Eq. (3.12) must be derived from the NSRR model (3.7). We therefore refer to Helmholtz's theorem (Ma 2022, Xie, Zhou and Ma 2023). Indeed, the Helmholtz theorem states that any vector field $F(\zeta)$ can be decomposed in the vector form containing two kinds of physical fields^{32,33}: a conservative field $F_c(q, i)$ and dissipative field $F_d(q, i)$. Also, based on this theorem, the Hamiltonian H of the dimensionless dynamical system (3.7) modeling the nonlinear SRR metasurface can be estimated under the following conditions.

$$\begin{cases} \nabla H^T J(q, i) \nabla H = \nabla H^T F_c(q, i) = 0 \\ \frac{dH}{d\tau} = \nabla H^T R(q, i) \nabla H = \nabla H^T F_d(q, i) \end{cases} \quad (3.13)$$

where ∇H represents the gradient vector of the Hamiltonian function $H(q, i)$. From a physical point of view, $F_c(q, i)$ and $F_d(q, i)$ derive from the decomposition of the complex field $F(q, i)$, which constitutes the magnetic field in the induction coil and the field in the capacitor of the nonlinear SRR. On other hand, the complex field $F(q, i)$ is the sum of the gradient vector field $F_d(q, i)$, which involves the total divergence of $F(q, i)$, and its divergence-free vector $F_c(q, i)$, which supports the total rotational tensor. It is therefore clear that $J(q, i)$ is an asymmetric matrix, and $R(q, i)$ a symmetric matrix (i.e., a diagonal matrix). Therefore, model (3.7) can be decomposed and rewritten as follows

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dq}{d\tau} \\ \frac{di}{d\tau} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i \\ -q + \mu \cos(\omega\tau) - \sigma i + \beta q^2 - \eta q^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i \\ -q + \mu \cos(\omega\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma i + \beta q^2 - \eta q^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

where the sub-vector field can be written as follows

$$F_c(q, i) = \begin{pmatrix} i \\ -q + \mu \cos(\omega\tau) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$F_d(q, i) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma i + \beta q^2 - \eta q^3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

From Eq. (3.15), the Hamiltonian function H of the investigated nonlinear SRR model (3.7) should satisfy Eq. (3.17) following to the criterion stated in Eq. (13)

$$\nabla H^T F_c(q, i) = (i) \frac{\partial H(q, i)}{\partial q} + (-q + \mu \cos(\omega\tau)) \frac{\partial H(q, i)}{\partial i} = 0 \quad (3.17)$$

The solution of the partial differential equation (3.17) is identical to the Hamiltonian $H(q, i)$ established in (3.12). Furthermore, the conditions expressed in Eq. (3.13) must also be consistent with the Hamiltonian function $H(q, i)$. As regards the second condition, the change of $H(q, i)$ with respect to normalized time τ is calculated as follows

$$\frac{dH(q, i)}{d\tau} = \nabla H^T F_d(q, i)$$

$$\begin{aligned}
&= (q - \mu \cos(\omega\tau), i) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta q^2 - \eta q^3 - \sigma i \end{pmatrix} \\
&= (q - \mu \cos(\omega\tau)) \times 0 + i(\beta q^2 - \eta q^3 - \sigma i) \\
&= i \left(\beta q^2 - \eta q^3 - \sigma \frac{dq}{d\tau} \right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

The last two operations involve finding the matrices $J(q, i)$ and $R(q, i)$ that satisfy the relations $J(q, i)\nabla H = F_c(q, i)$ and $R(q, i)\nabla H = F_d(q, i)$ respectively. After a few algebraic calculations, we obtain these matrices as follows

$$J(q, i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$R(q, i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta q^2 - \eta q^3 - \sigma i}{i} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Equation (3.12) shows that the Hamiltonian energy $H(q, i)$ depends on the two-state variables (i.e., charge (q) and current (i)) of the nonlinear SRR model and verify the Helmholtz formula (i.e., the stability criterion (3.13)). Any changes of these variables have direct impact on the energy level. This Hamiltonian function also depends on external forcing (which derives from the energy injected by the imposed EM field). This energy therefore exists and is reliable. We can conclude that the capacitor and the coil transfer sufficient energy from an electric field and a magnetic field to maintain continuous nonlinear oscillations in the system. The resonator regulates its energy value close to a certain energy level in presenting sole stable mode. In presence of multiple stable modes, the energy level can vary from one mode to another. External EM field can change the energy shunting between the capacitive and inductive channels, and it explains the mode transition in excitable media under continuous polarization and magnetization. Each stable state has its own energy level. This energy level varies according to the initial state from which the system converged to this stable state. It can change according to the condition that converges to the same solution. As a result, the EM wave can propagate through the material with different energy levels. This variation in energy due to the initial condition can lead to different responses for certain range of parameters range, thus inducing multistability behavior in the nonlinear material.

3.4 Complex dynamics of the NSRR

As mentioned above, a metasurface can be tuned in real time by introducing a nonlinearity into the gap of a single unit cell, such as the gap of an SRR. The result is a nonlinear material sensitive to varying initial conditions. Consequently, nonlinear phenomena such as multistability can be considered a desirable property of future THz devices (e.g., adjustable lenses, adaptative mirrors, etc.). Thus, the complex and plethoric dynamics of the single-gap NSRR will be studied in this section using two-parameter plots, phase images, a cross-section of the demarcation region (or basin of attraction), the maximum Lyapunov exponent with corresponding bifurcation diagrams, and frequency spectra.

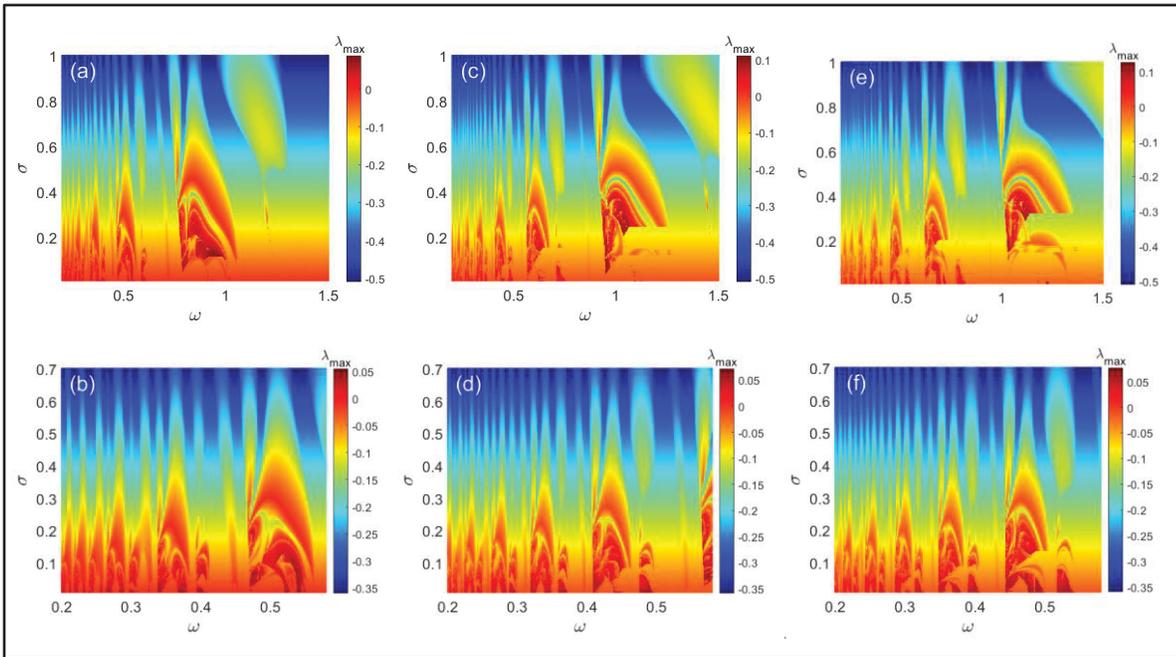


Figure 3.2 Dynamic behavior of the NSRR in the (ω, σ) parameter space. The maps are plotted by increasing both parameter with initial condition $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$:

- (a)-(b) for $\mu = 20$, (c)-(d) for $\mu = 35$, and (e)-(f) for $\mu = 45$. The graphs on the lower panel are the zoomed versions of the graphs on the upper panel
 Color is linked with the magnitude of the largest Lyapunov exponent
 The other parameters were fixed to $\beta = 0.4, \eta = 0.08$

3.4.1 Dynamic regions analysis

To rapidly analyze the global dynamics of the single-gap NSRR metasurface, two-parameter graphs are considered. Such graphs are obtained by estimating the maximum Lyapunov exponent for each iteration when two control parameters of the NSSR model vary from one value (i.e., min) to another (i.e., max). The expected/calculated value of the Lyapunov exponent is thus used to characterize each dynamic behavior of the NSRR model. On those diagrams, two main dynamic regions are studied and the Lyapunov exponent enables to differentiate the zone of irregular patterns (i.e., positive Lyapunov exponent) from that of regular patterns (i.e., negative Lyapunov exponent) exhibited by the NSRR model. Each dynamic region reported here was computed using the algorithm in Wolf et al., (Wolf, Swift et al. 1985) and analyzing the maximum Lyapunov exponent (MLE), which indicates the type of dynamic for each chosen pair of values of the normalized driving frequency ω and the loss parameter σ . The NSRR model was numerically integrated by using the fourth-order Runge-Kutta technique, with a step size equal to 0.002. All variables were in double precision floating point format and the codes ran on quad-core ViewSonic with an Intel core i7 processor. Also, a 500×500 grid was used to discretize the value range of each diagram. Actually, the sharpness for 60×60 , 80×80 , 100×100 up to 500×500 grid was evaluated. Unsurprisingly, the 500×500 grid led to better sharpness, hence its choice. On the other hand, the numerical integration step was fixed to 0.002 which turned out to be the best choice with regards to precision and computational time. The result based on the above computation scheme is shown in Fig. 3.2, where the NSRR behaviors in the two-parameter space can be completely observed. These diagrams are computed in the parameters space (ω, σ) for three different values of the external signal amplitude (i.e., $\mu = 20$, $\mu = 35$, and $\mu = 45$). To be more precise, to construct the first dynamic region in Fig. 3.2(a)-(b) depending on the fixed control parameters ω and σ , we always keep the values of the initial condition ($q_0 = 0.15$, $i_0 = 0.1$) fixed. System (3.7) is numerically integrated and the Lyapunov exponent is calculated for each couple of parameters. Initially, we set $(\omega, \sigma) = [0.2, 0.01]$, ω is scanned from this initial value to its extreme value $\omega = 1.5$ before σ increments. The integration process is repeated until all parameter ranges are swept (i.e., until

ω and σ reach their maximum values $\omega = 1.5$ and $\sigma = 1.0$) and all Lyapunov exponents calculated. The second and third dynamic regions shown in Fig. 3.2(c)-(d) and Fig. 3.2(e)-(f) are generated using the same approach as the first one, as described above, but with $\mu = 35$ and $\mu = 45$ respectively. This type of phase diagram is useful to observe the complete behavior and some striking phenomenon (see section 3.4.2). As we can see in Fig. 3.2 (upper panel), the irregular patterns (i.e., red regions) alternate with regular patterns (i.e., the rest of the regions) when both parameters are varied in their respective range. In other words, there is a shift of the irregular patterns along the driving frequency ω (see the enlarged version in the lower panel). The chaotic states ($\lambda_{max} > 0$) are spread in regions where the value of the loss parameter σ is low. Low values of σ means less losses, and consequently, radiation in the gap is more intense.

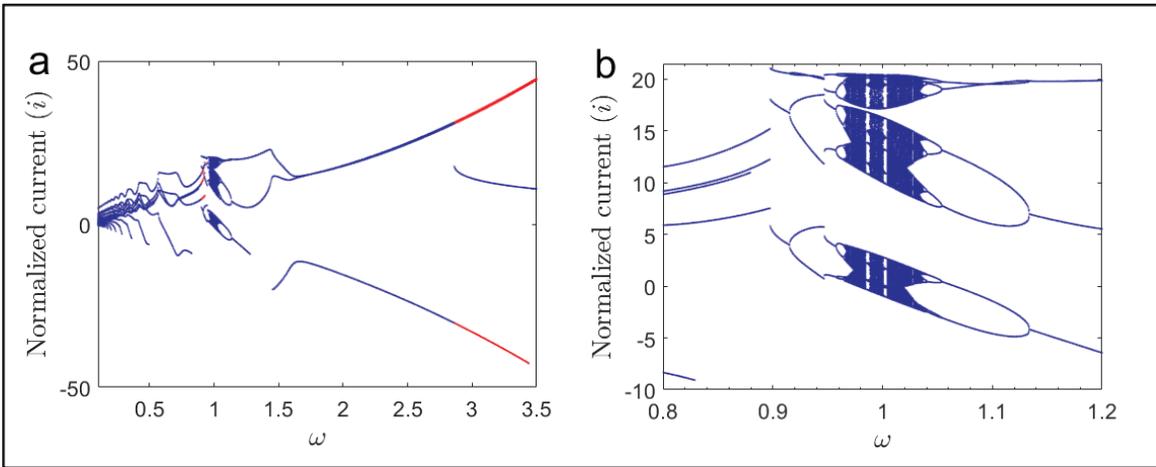


Figure 3.3 (a) Bifurcation diagram of the SRR model considering the normalized driving frequency ω as the control parameter, swept in two directions: The blue and red diagrams correspond to decreasing and increasing ω , respectively, (b) a zoomed version of diagram (a) for $\mu = 35$, $\sigma = 0.38$, $\beta = 0.4$, and $\eta = 0.08$, with initial point $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$

3.4.1.1 Bifurcation and route to chaos

We have demonstrated in the previous section the presence of irregular behavior (chaos) in the NSRR model by varying two control parameters. However, it is important to find the transition that leads to chaos in the model, which is the aim of this section. Recall that for a

non-autonomous system, chaos is characterized by a positive Lyapunov exponent (λ_{max}) and periodic oscillations by negative λ_{max} . To investigate this first transition of irregular oscillation mode (chaos), we consider the normalized driving frequency ω as a control parameter. For this purpose, the loss parameter is set to $\sigma = 0.38$ where we observe several chaotic states in Fig. 3.2. Thus, the bifurcation diagram of the system is presented in Fig. 3.3 showing diverse dynamical modes that can be found when the normalized driving frequency varied. This bifurcation diagram exhibits the following rare sequence: mixed-mode oscillations when $\omega < 0.5$; periodic oscillations for $0.5 < \omega \leq 0.96$. Note that mixed-mode oscillations characterize the dynamic regime in which the system alternates between low-amplitude (silent phase) and high-amplitude (active phase) oscillations (Mboyo Kouayep, Talla Mbé and Wofo 2023). When ω is slightly above 0.5, the multiple lines of the bifurcation diagram that induce mixed-mode oscillations decrease and the system enters a periodic oscillation regime.

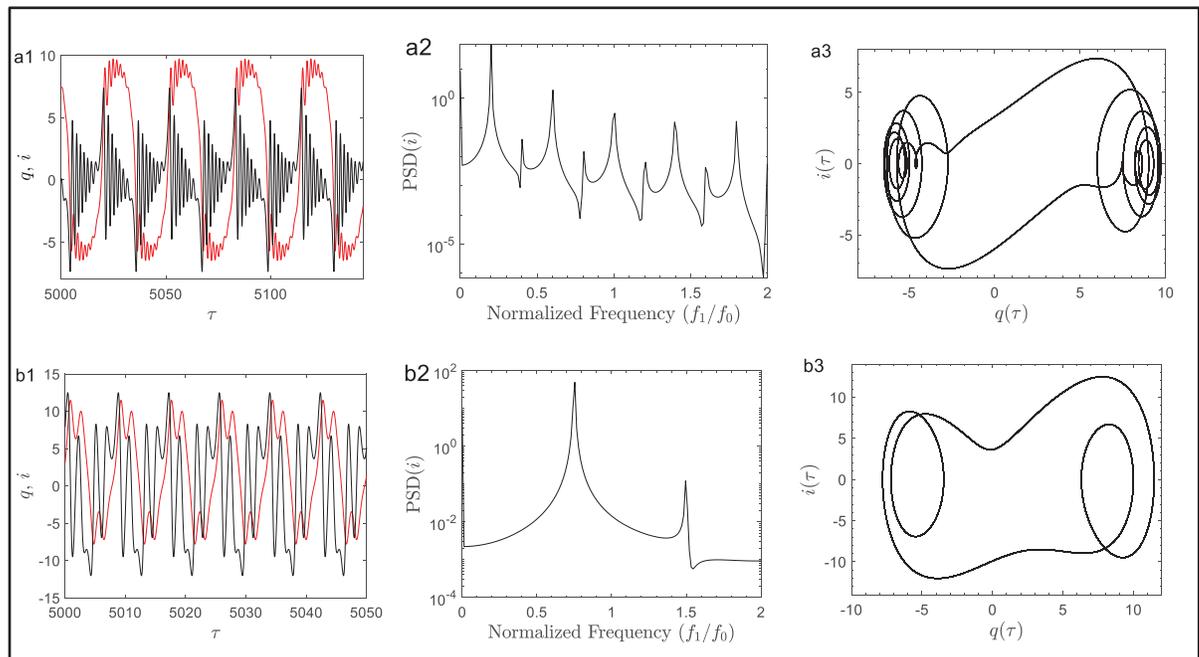


Figure 3.4 (first panel) Time series, (second panel) power spectra, (third panel) phase trajectories showing the route to chaos in the NSRR for different values of ω :

(a1-a3) $\omega = 0.2$, (b1-b3) $\omega = 0.75$, (c1-c3) $\omega = 0.95$,
 (d1-d3) $\omega = 1.013$, and (e1-e3) $\omega = 1.08$

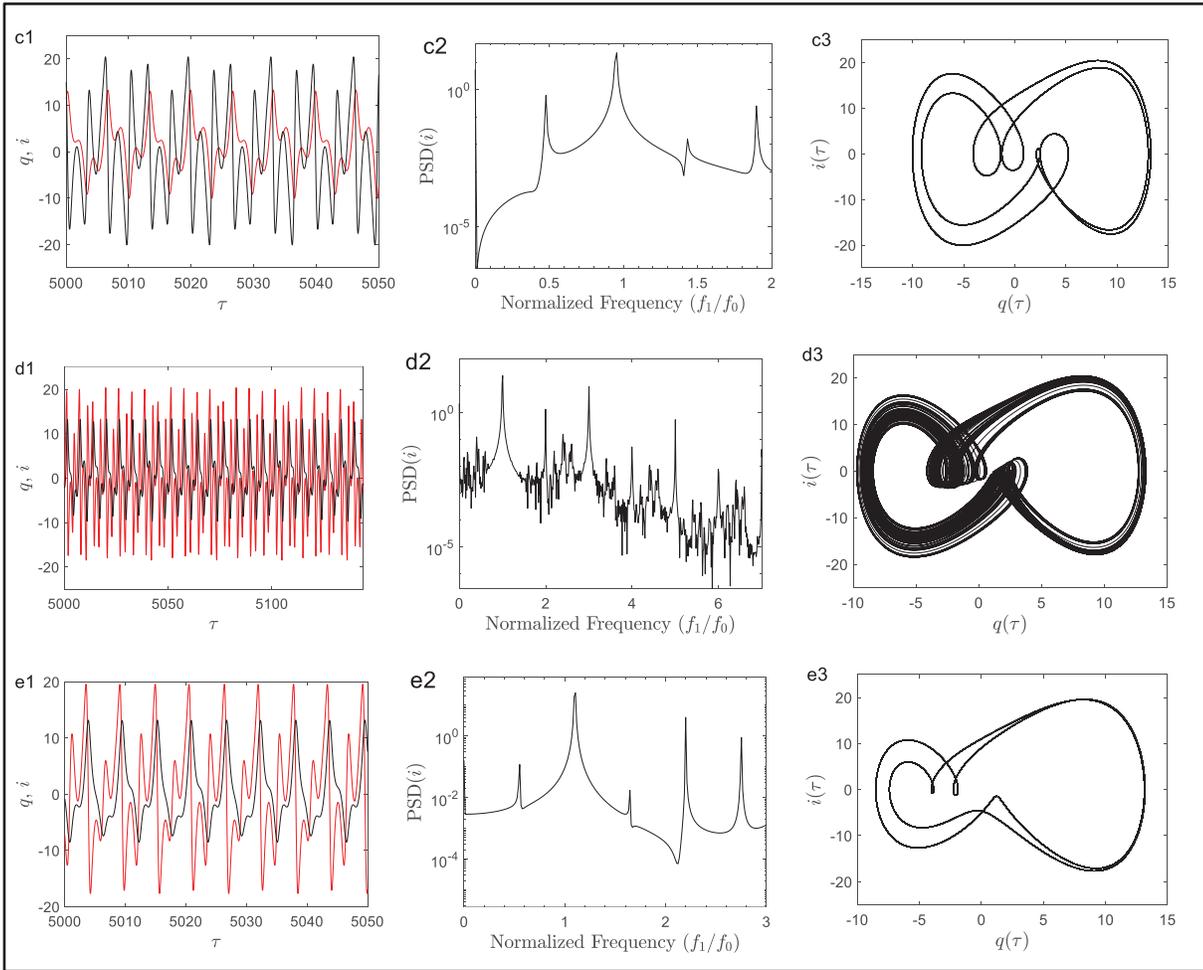


Figure 3.4. (first panel) Time series, (second panel) power spectra, (third panel) phase trajectories showing the route to chaos in the NSRR for different values of ω :

(a1-a3) $\omega = 0.2$, (b1-b3) $\omega = 0.75$, (c1-c3) $\omega = 0.95$,
 (d1-d3) $\omega = 1.013$, and (e1-e3) $\omega = 1.08$ (suite)

At $\omega \approx 0.915$ a period-doubling pattern is observed (see the zoom of Fig. 3.3(b)) until chaos is formed approximately at $\omega = 0.967$. For $\omega \geq 1.04$, the system becomes completely periodic again. The chaotic bands are observed in a narrow region of the normalized driving frequency and are surrounded by two periodic regimes. Figure 3.4 shows the time traces, the spectral response and the phase portraits of the NSRR model in each oscillation regime of the normalized driving frequency described above. Thus, for $\omega = 0.2$ (See Fig. 3.4(a1) - (a3)), mixed-mode oscillations appear in the time series, with a fundamental frequency f_1 (with $f_1 = \omega f_0$) of 0.078 THz and several harmonics as indicated by the spectral profile. When

$\omega = 0.75$ (Fig. 3.4(b1) – (b3)), the system switches to a period-1 oscillation regime, the times series is near to a harmonic oscillation where the fundamental frequency is obtained approximately at 0.29 THz matching the largest peak amplitude in the spectral response (Fig. 3.4(b2)) and its first harmonic corresponds to the frequency of 0.58 THz. For $\omega = 0.95$, the periodic waveform has two different peak amplitudes, as depicted in the time traces of Fig. 3.4(c1). The fundamental frequency is obtained at 0.37 THz.

A single subharmonic frequency corresponding to $f_1/2$ (at 0.185 THz) appears in the power spectrum (Fig. 3.4(c2)). The periodicity of the waveform is confirmed by the phase portrait shown in Fig. 3.4(c3) where two loops can be counted (i.e., period-2). When $\omega = 1.013$, the dynamics of the system is typically dominated by a chaotic behavior. The temporal profile in Fig. 3.4(d1) demonstrates this behavior with different amplitude oscillations. Its spectral response shows its fundamental frequency around 0.4THz with an infinite number of sub-harmonics (Fig. 3.4(d2)). The corresponding phase image also shows infinite loops indicating a chaotic signature (Fig. 3.4(d3)). The system falls again in the periodic regime at $\omega = 1.08$ with almost the same oscillation amplitudes as shown in the time traces of Fig. 3.4(e1). On this time series, one can identify two different peaks of the current or normalized charge. The first peak corresponds to the fundamental frequency of 0.42THz while the second peak appearing near 0.21THz (i.e., at half of the fundamental) corresponds to the sub-harmonic frequency. The NSRR model exhibits periodic oscillation, as evidenced by the 2-T period oscillation on the phase portrait of Fig. 3.4(e3).

3.4.1.2 Effect of the normalized loss parameter σ

Now, we set the value of the normalized driven frequency of the NSRR to its chaotic regime, in particular to $\omega = 1.0$ and the loss parameter σ serves as the control parameter. The bifurcation diagrams showing the dynamics of the normalized charges in the NSRR are depicted in Fig. 3.5. The graphs are plotted for three values of normalized amplitude μ ($\mu = 30$, $\mu = 35$, and $\mu = 45$). For each graph, we observed that when the loss parameter is very low, the model starts with periodic oscillations until reaching a critical value σ_{c1} above which it directly switches to the irregular/chaotic oscillation mode.

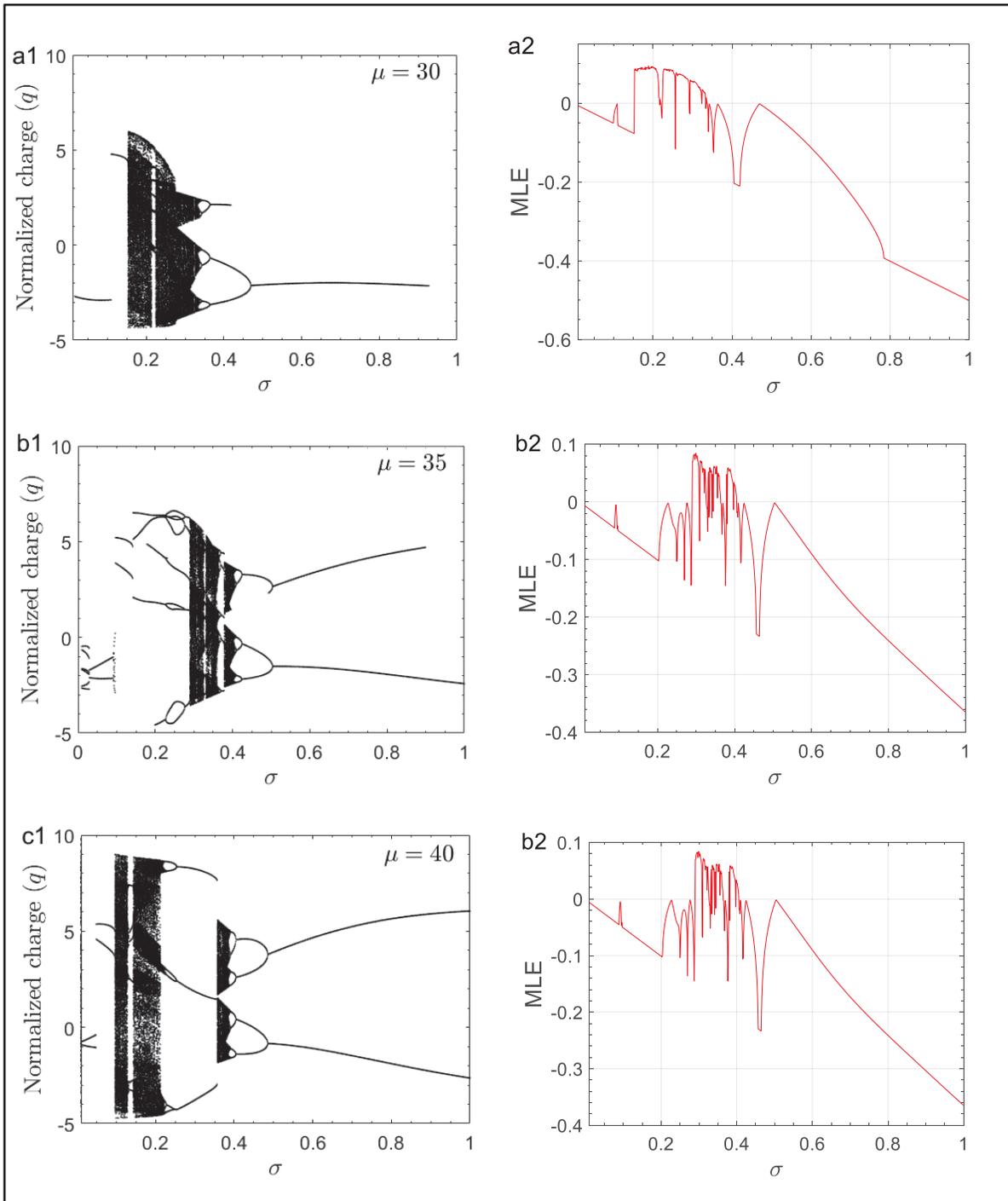


Figure 3.5 (a1-c1) Bifurcation diagrams of the normalized charge (q) versus the loss parameter (σ) and the corresponding (a2-c2) maximum Lyapunov exponent for three different values of the normalized excitation force amplitude μ . These graphs are obtained in the upward direction with initial condition $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$. The rest of the parameters are fixed as: $\beta = 0.4, \eta = 0.08$, and $\omega = 1.0$

These critical values correspond to $\sigma_{c1} \approx 0.15$ (Fig. 3.5(a1)), $\sigma_{c1} \approx 0.29$ (Fig. 3.5(b1)), and $\sigma_{c1} \approx 0.1$ (Fig. 3.5(c1)). Above the critical values σ_{c1} , the NSRR oscillates in the chaotic regime while presenting some tiny periodic windows. However, this periodic window is much larger for the case $\mu = 45$ (Fig. 3.5c). When σ reaches again the critical values $\sigma_{c2} \approx 0.305$ for Fig. 3.5(a1), $\sigma_{c2} \approx 0.4$ for Fig. 3.5(b1), and $\sigma_{c2} \approx 0.4$ for Fig. 3.5(c1), the model falls once again to the periodic regimes where only regular oscillations can be observed. The NSRR model tends to follow a single oscillation mode for high values of σ . The chaotic regime in the three cases described above has a width ($\Delta\sigma_c = \sigma_{c2} - \sigma_{c1}$) of $\Delta\sigma_c \approx 0.155$ for $\mu = 30$, $\Delta\sigma_c \approx 0.11$ for $\mu = 35$, and $\Delta\sigma_c \approx 0.3$ for $\mu = 45$. The maximum Lyapunov exponent (Figs. 3.5 (a2)–(c2)) associated with each bifurcation diagram well confirms the observed behaviors. Each chaotic regime has a positive Lyapunov exponent while for periodic regimes, the Lyapunov exponent remains negative (except at the period-doubling point where this Lyapunov exponent is zero) since the model is non-autonomous. Furthermore, the width $\Delta\sigma_c$ (with positive Lyapunov exponent) also corroborates with the chaotic regions in Figs. 3.5 (a1) –(c1). It should be noted that when σ increase, chaos occurs quite abruptly via crisis phenomenon while when this parameter is decreasing, chaos appears following a period doubling transition.

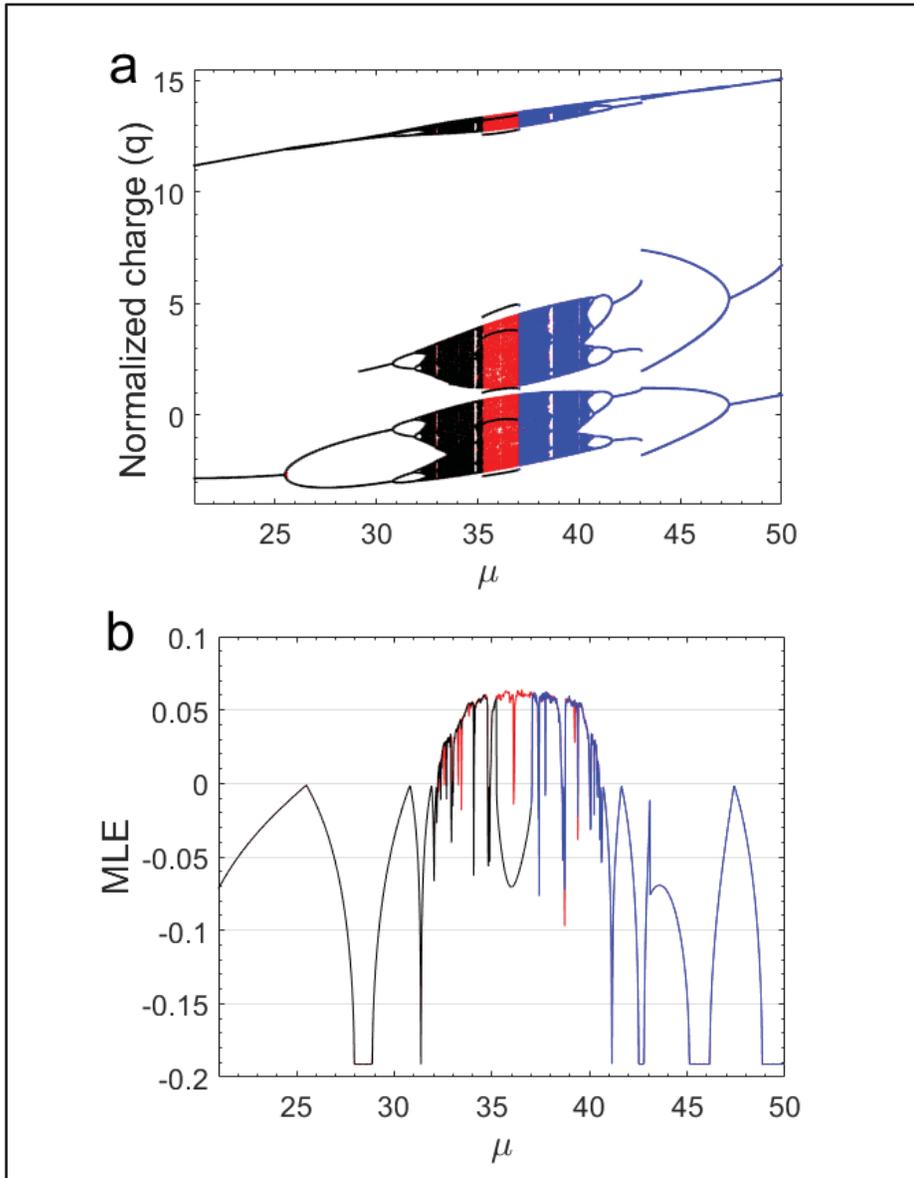


Figure 3.6 (a) Bifurcation diagram and its corresponding (b) maximum Lyapunov exponent of the SRR model (7) when increasing the external force amplitude μ from 21 to 50 (red diagram) with initial point $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$. The black curve segment is obtained by decreasing μ from 37 to 21 with the initial point $(q_0 = 2.5, i_0 = 0.1)$ and the blue segment is obtained by increasing μ from 37 to 50 with initial point $(q_0 = 2.5, i_0 = 0.1)$. A tiny window of coexisting bifurcations can be seen in the range $\mu \approx [35 - 37]$

The rest of the parameters are fixed as:

$$\sigma = 0.38, \beta = 0.4, \eta = 0.08, \text{ and } \omega = 1.0$$

3.4.1.3 Effect of the normalized amplitude μ

To study the effect of normalized amplitude on NSRR dynamics, we set the loss parameter $\sigma = 0.38$ for the same oscillation frequency $f_0 = 0.39THz$. Also, the normalized driven frequency is kept equal to $\omega = 1.0$. Following the same procedure as in Sect. 3.4.1.1, the bifurcation diagrams and the corresponding maximum Lyapunov exponent are plotted in Fig. 3.6 using μ as a control parameter. The bifurcation diagram in Fig. 3.6(a) shows the peak of the normalized charge when μ varies from 21 to 50. Three different data are plotted and layered using two distinct initial conditions. Indeed, the red plot is obtained by increasing μ from 21 to 50 with the initial point $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$, and the black one is plotted by decreasing μ from 37 to 21 with the initial point $(q_0 = 2.5, i_0 = 0.1)$ while the blue plot is obtained by increasing μ from 37 to 50 with initial point $(q_0 = 2.5, i_0 = 0.1)$. As shown in Fig. 6(a), the NSRR model starts with regular oscillations (for which periodic states can be generated) followed by irregular oscillations (i.e., chaotic states) and then falls back to the regular regime as the control parameter increases or decreases. More precisely, from $\mu = 21$ to $\mu_{c1} \approx 32$, we observe a periodic oscillation mode with an interesting period-doubling scenario. Beyond the critical value μ_{c1} , the NSRR model enters a chaotic regime until reaching the second critical value $\mu_{c2} \approx 41$. When μ is slightly higher than μ_{c2} , NSRR follows an additional periodic oscillation mode with an inverse period-doubling sequence. The chaotic regime is thus demarcated by two boundaries μ_{c1} and μ_{c2} of width $\Delta\mu_c = \mu_{c2} - \mu_{c1}$. However, a small coexisting bifurcation window appears in the chaotic regime, relatively in the range of $\mu \approx 35$ to $\mu \approx 37$. This complex behavior is discussed in more detail in Section 3.4.2. The bifurcation diagram (red) and the associated maximum Lyapunov exponent in Fig. 3.6(b) show exactly the same behaviors in each range of μ . The width $\Delta\sigma_c$ is always the same with the positive Lyapunov exponent as signature. It's important to mention that the transition or path to chaos when μ is selected as the control parameter is indeed that of period-doubling on both sides (i.e., if μ increases or decreases). Compared with Fig. 3.5, there is no sudden regime change. Similarly, there are no mixed-mode oscillations.

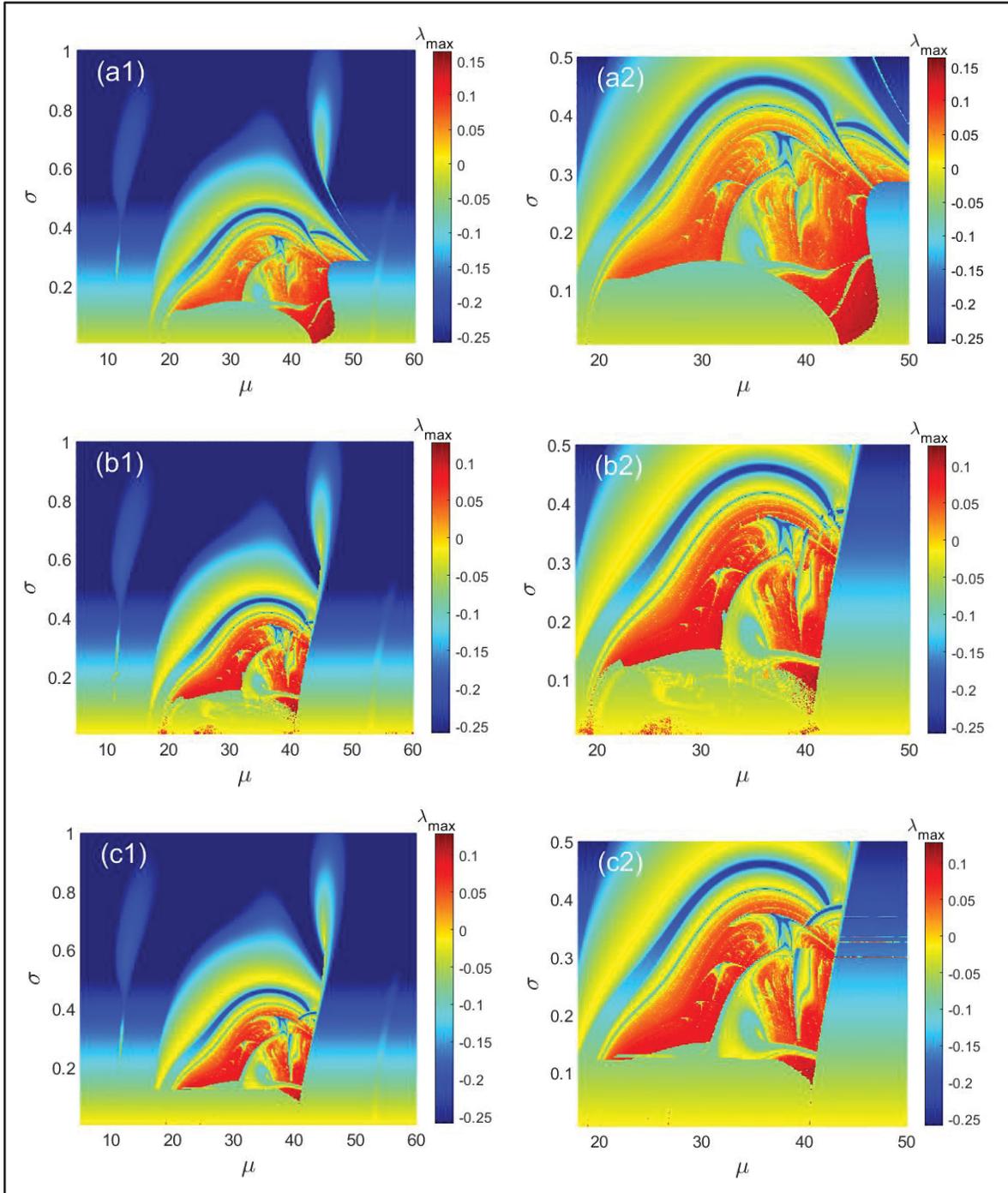


Figure 3.7 Coexisting dynamic behaviors of the SRR material in the (μ, σ) parameter space for $\beta = 0.4$, $\eta = 0.08$, and $\omega = 1.0$: The maps are plotted by sweeping in the upward or backward direction each parameter. The maps (a1)-(a2) and (b1)-(b2) are obtained by increasing the parameters with the initial conditions $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$ and $(q_0 = \sigma, i_0 = 0.1)$ respectively, while the (c1)-(c2) map is obtained by decreasing the control parameters with initial condition $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$. The different coexisting zones can be quickly represented in the charts. Color is linked with the magnitude of the largest Lyapunov exponent

3.4.2 Dynamics in 2D parameter spaces and multistability

In this section, the dynamical scenario of the NSRR material modeled by Eq. (3.7) is reported numerically. More precisely, we investigated three dynamic regions in the normalized parameter space (μ, σ) , with the control interval $5.0 \leq \mu \leq 60$ and $0.01 \leq \sigma \leq 1.0$. Here, the study of dynamic regions was calculated using the same method as presented in Section IV.1. Indeed, numerical integration was performed using the fourth-order Runge-Kutta technique, with a step size of 2×10^{-3} . This time, however, an 800×800 grid was employed to discretize the parameter range of each graph. To draw the 2D parameter space, we interpret the Lyapunov exponents by examining the magnitude of the largest Lyapunov exponent (λ_{max}). Indeed, if for a pair of parameters (μ, σ) , $\lambda_{max} < 0$, we have regular SRR dynamic and a periodic solution can be projected into phase space. If $\lambda_{max} > 0$, the associated dynamics are irregular and we can see a chaotic solution in the phase plane. For a quasi-periodic solution, $\lambda_{max} = 0$. We mention here that each parameter space is obtained within the same range of different parameter for the two control parameters with the same initial conditions (ICs). Our aim, by studying these three dynamic regions in the same 2D parameter space, is to quickly visualize/catch the possible domains of the nonlinear material, where the occurrence of multistability can be found. If this exciting phenomenon exists, these three parameter space diagrams will present different areas, increasing the probability of multistability.

The dynamic of the nonlinear model (3.7) in the parameter space is shown in Fig. 3.7, for $5.0 \leq \mu \leq 60$ and $0.01 \leq \sigma \leq 1.0$ as mentioned above. These diagrams are obtained when we increase or decrease the two parameters from the same initial state. In particular, the graphs in 3.7(a1)-(a2) and Fig. 3.7(b1)-(b2) are obtained by sweeping up the values of parameters following the same procedure described in section IV.1 starting from $(q_0 = 0.15, i_0 = 0.1)$ and $(q_0 = \sigma, i_0 = 0.1)$ respectively. For the case depicted in Fig. 3.7(b), the initial condition q_0 varies as a function of parameter σ . That is, q_0 is updated at each iteration, each time σ varies from 0.01 to 1.0 (Fig. 3.7(b1)) or from 0.01 to 0.5 (Fig. 3.7(b2)). It is one of the strategies used to track some hidden and parallel branches that cannot be observed when the initial condition is fixed.

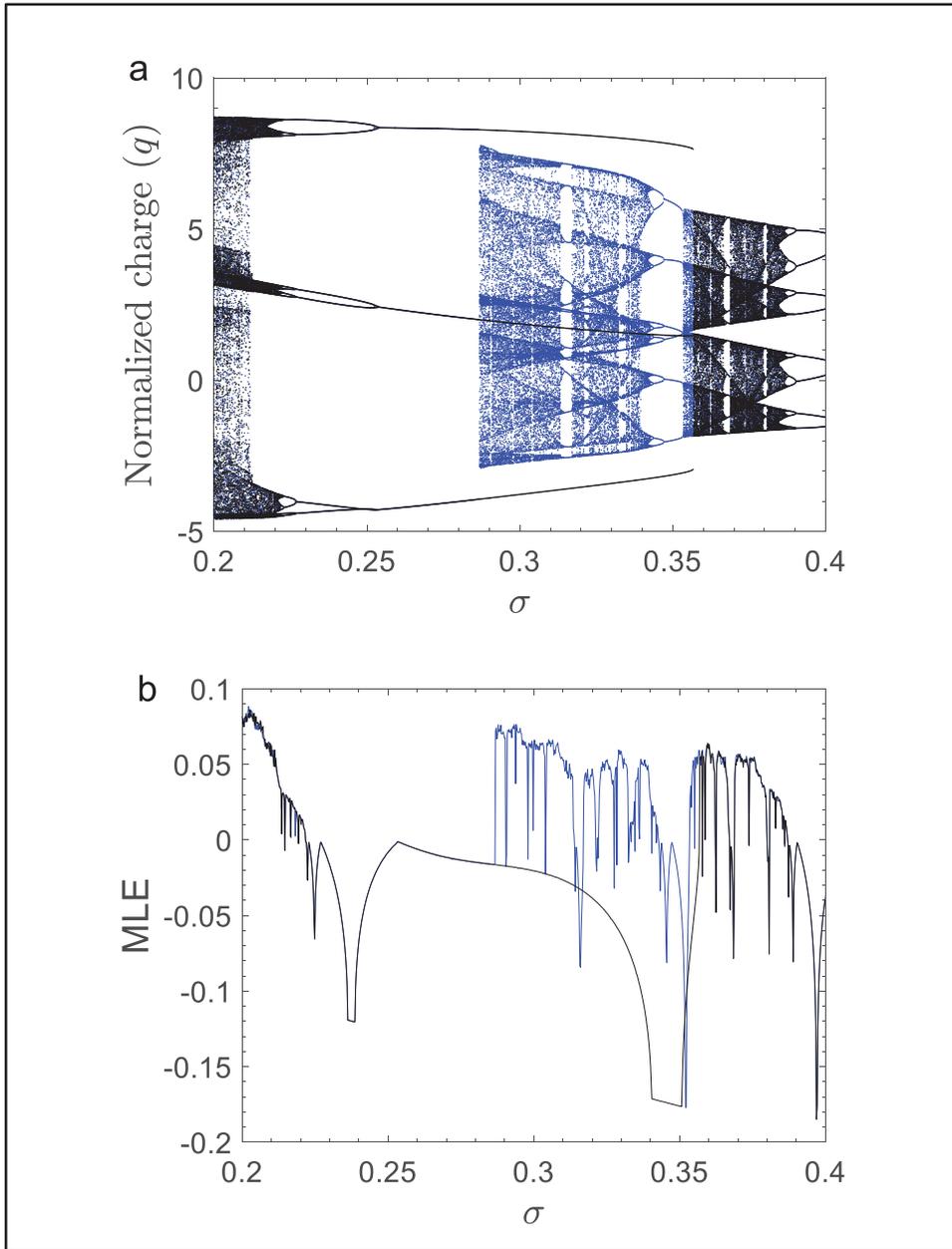


Figure 3.8 (a) Coexisting bifurcation diagrams and its (b) Lyapunov exponent graphs showing the restricted regions of multistability for $\mu = 40$, using initial condition ($q_0 = 0.15, i_0 = 0.1$): Upward sweeping corresponds to black diagram and backward sweeping correspond to blue. The region of multistability is located approximately in the interval $\sigma \in [0.29 - 0.36]$. Other parameters are set as:
 $\mu = 40, \beta = 0.4, \eta = 0.08$, and $\omega = 1.0$

For the last diagram in Fig. 3.7(c1)-(c2), the strategy is still similar, but the control parameters are swept downwards. In fact, μ is swept from the initial value $\mu = 60$ to its end

value $\mu = 5.0$. Next, σ is decremented by a repetitive process until $\mu = 5.0$ and $\sigma = 0.01$ are considered in the calculation. In this case, the solution is tracked with the same initial condition ($q_0 = 0.15, i_0 = 0.1$). The enlarged versions (Fig. 3.7(a2), 7(b2) and 3.7(c2)) reveal more details, especially in the chaotic regions (red area) and in some periodic windows (yellow and cyan areas). It's worth mentioning that two important oscillation modes are revealed in Fig. 3.7. The regular mode which are periodic oscillations represented by the blue, cyan, and yellow domains, and the irregular mode which are chaotic oscillations characterized by the red zones. However, the presence of some tiny periodic windows, particularly in the chaotic zones, suggests multistable behavior in the nonlinear model. Indeed, if we look carefully at the graphs in Fig. 3.7, we can rapidly and easily conclude that they are not identical. One of these differences figures prominently in the ranges $\mu = [40, 50]$ and $\sigma = [0.01, 0.5]$ for each graph. In Fig. 3.7(a), and the mentioned range, there is a chaotic region (red) and periodic region (cyan/yellows), while in the other two diagrams (i.e., Fig. 3.7(b) and (c)) there are only periodic regions. Another comparison can be captured in the parameters range $\mu = [19, 39]$ and $\sigma = [0.01, 0.14]$. In this range, the first diagram shows a completely periodic region, while in the other two plots, the periodic zones are mixed with small chaotic zones (red dashed color). The above analyses sufficiently demonstrate that, following the initial value selected for the numerical integration of the NSRR model (7), the long-term dynamical behavior is different. As a result, the nonlinear model (7) can exhibit different coexisting attractors/solutions for a fixed set of parameters (μ, σ) , and by using appropriate initial conditions. That is, when all the parameters are set, different combinations of the normalized amplitude μ and the loss parameter σ will either converge to a chaotic pattern or a periodic solution, only by varying the initial condition. This behavior represents a key signature of multistability.

Multistability, which reveals the coexistence of two or more different patterns, is best illustrated using the bifurcation diagram shown in Fig. 3.8. More precisely, Fig. 3.8(a) depicts the peaks of the normalized charge calculated when the parameter σ is swept in the upward (black) and downward (blue) directions from the initial conditions ($q_0 = 0.15, i_0 = 0.1$) for $\mu = 40$. In other words, we obtain the black diagram by increasing the loss parameter σ beginning from $\sigma = 0.2$ to $\sigma = 0.4$ while the blue diagram is obtained by

decreasing the loss parameter from $\sigma = 0.4$ to $\sigma = 0.2$. As a result, one can perfectly observe on this graph a window of multistability that appears relatively in the range $\sigma \in [0.29 - 0.36]$ and for which, a chaotic branch in blue coexists with a periodic branch in black. The largest Lyapunov exponent (LE) assigned to the superimposed graphs in Fig. 8a is shown in Fig. 8b and good agreement can be observed between each exponent domain and its bifurcation diagram. In the multistable regions of the LE (i.e., in the range $\sigma \in [0.29 - 0.36]$), the difference between both Lyapunov exponents in Fig.8b is straightforward and therefore confirms Fig. 8a. As an example, by choosing σ in the interval $0.29 \leq \sigma \leq 0.36$, we can capture in the phase plane the coexistence of a chaotic solution with a periodic one.

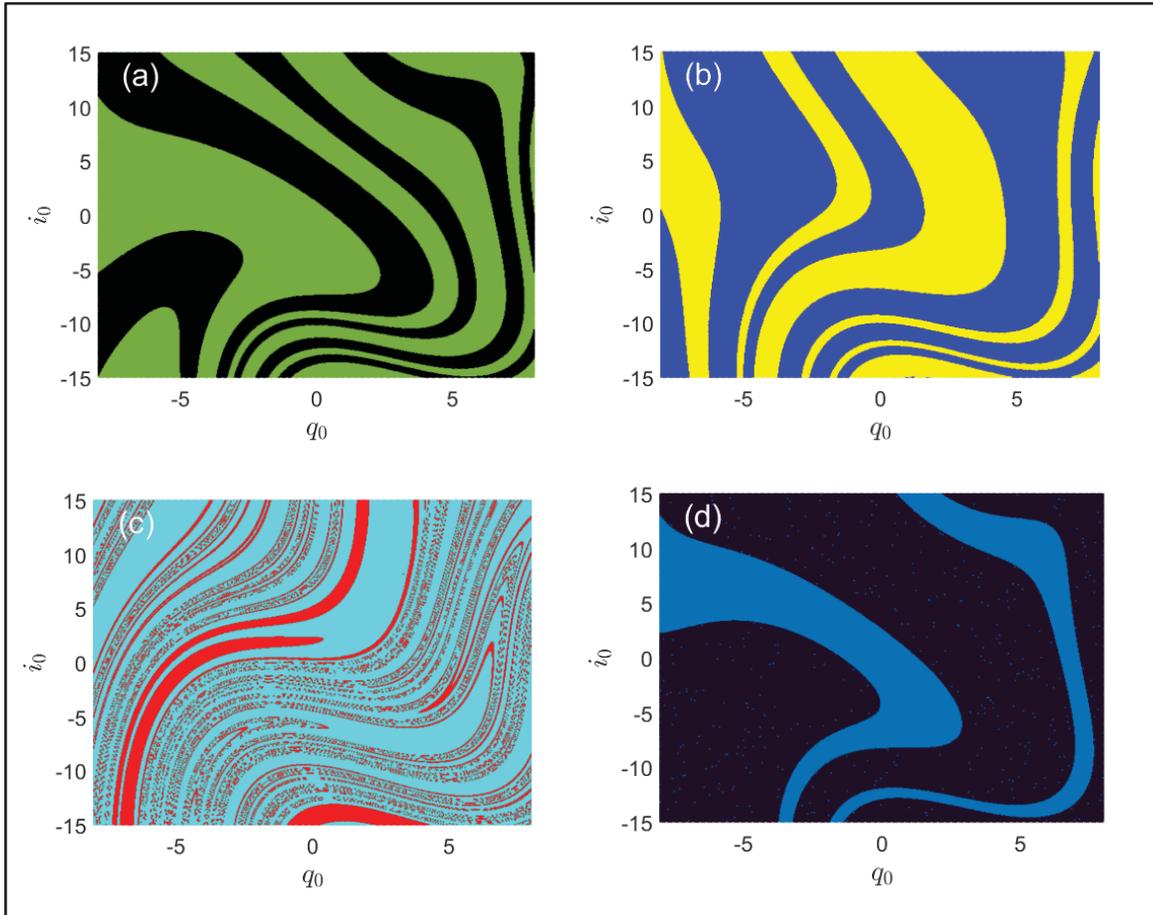


Figure 3.9 Demarcation domain (i.e., basin of attraction) in the plane (q_0, i_0) illustrating different two coexisting behaviors (multistability) in the proposed SRR model for: (a) $\mu = 40$, $\omega = 1.0$ and $\sigma = 0.3$, (b) $\mu = 37$, $\omega = 1.0$, and $\sigma = 0.38$, (c) $\mu = 35$, $\omega = 1.0285$ and $\sigma = 0.38$, and (d) $\mu = 40$, $\omega = 1.0$ and $\sigma = 0.34$, (see Table 3.1 for more details on the type of coexistence)

The demarcation regions of the initial conditions (basin of attraction) associated with certain coexisting stable states are shown in Fig. 3.9. Indeed, Fig. 3.9 shows a pair (q_0, i_0) of initial condition in cross-section of the basin of attraction for a different combination of the parameters σ , μ , and ω . In particular, Fig. 3.9(a) highlights the coexistence of double-scrolling chaos in green with the period-1 limit cycle in black. The case illustrated in Fig. 9b demonstrates the coexistence of the period-3 limit cycle in yellow with a chaotic solution in blue.

Tableau 3.1 Some examples and combination of coexisting solutions that can be obtained on the nonlinear SRR model for, $\beta = 0.4, \eta = 0.08$

Cases	Parameters	Types of coexisting solutions	Initial conditions
$\mu = 40$ and $\omega = 1.0$	$\sigma = 0.3$	Double scroll Chaos coexists with period-1 limit cycle	See Fig. 3.9(a)
	$\sigma = 0.34$	Chaotic period-2 state coexists with period-1 limit cycle	See Fig. 3.9(d)
	$\sigma = 0.35$	Coexistence of two limit cycles	$(-2, 0.1)$ and $(-1, 0.1)$
$\mu = 35$ and $\sigma = 0.38$	$\omega = 1.0285$	Chaotic period-2 state coexists with periodic solution	$(0.75, 0.1)$ and $(-1.5, 0.1)$ or See Fig. 3.9(c)
$\omega = 1$ and $\sigma = 0.38$	$\mu = 37$	Period-3 limit cycle coexists with chaotic state	$(-1, 0.1)$ and $(0.5, 0.1)$ or See Fig. 3.9(b)

Similarly, Fig. 3.9(c) shows regions of complex initial states where a chaotic period-2 pattern coexists with a periodic solution. Another interesting situation is illustrated in Fig. 3.9(d), where a chaotic period-2 solution (black) coexists with a period-1 cycle (blue). Our aim here was to identify and characterize the coexisting states using the basin of attraction as shown in Fig. 3.9. Further details on the type and characteristics of the different coexisting solutions are summarized in Table 3.1. For the first three rows (second column of Table 1), the values of the loss parameter σ are chosen within the coexisting regions of the bifurcation diagram in

Fig. 3.8, as previously indicated. The case where the normalized amplitude $\mu = 37$ is also selected from the coexisting regions in Fig. 3.6. Finally, the case where $\omega = 1.0285$ is obtained from the tiny multistable region in Fig. 3.3(a).

3.5 Conclusion

In summary, this study has addressed the complex behaviors of the single-gap nonlinear split-ring resonator (NSRR) in the THz frequency domain. We studied the dynamics as a function of various parameters, and different tuning regions revealed the range of regular and irregular oscillation modes. Based on nonlinear analysis tools, we demonstrated the different scenarios leading to chaos. Firstly, when the normalized drive frequency was taken as the control parameter, irregular patterns emerged via mixed-mode oscillations followed by limit-cycle oscillations. Then, when the loss parameter was used to examine the dynamics of the NSRR, chaotic states appeared abruptly via a crisis mechanism if the loss parameter increased or following a period-doubling sequence if the loss parameter decreased. Finally, when we used normalized amplitude to control the dynamics, the transition to chaos was confirmed through period-doubling regardless of the direction of the sweep. In all the cases studied above, we identified regime of irregular behavior that can be exploited for several applications, and our results revealed that chaotic states appear between two periodic regimes, and this is observed for very low values of the loss parameter.

In addition to all these complex dynamics reported in this work, we also analyzed the sensitivity of initial conditions on two-parameter space diagrams. The results of our investigations demonstrated that, for certain sets of parameter values (i.e., normalized amplitude, drive frequency or loss), the choice of suitable initial conditions is crucial, as it leads to the coexistence of different stable states called “multistability”. Our results have shown that this multistable behavior is attributable to the hysteresis effect in the model. Thus, the coexistence of two different stable states was found and localized on the demarcation regions of the initial conditions (basin of attraction). It’s worth mentioning here that the property of generating two or more outputs depending on the past input values is the key effect of memory devices in a variety of photonic (including for the THz range(Blanchard,

Nkeck et al. 2022)), quantum, electronic, biological, and chemical systems(Valagiannopoulos 2022). Therefore, the work carried out in this paper represents a fundamental prerequisite for the conceptualization and fabrication of a feasible nonlinear device, for example to develop a multistable THz metasurface. In future work, an analytical study using Jacobi elliptic functions will be considered to see how all these nonlinear phenomena might play out.

ACKNOWLEDGMENT

The authors acknowledge financial support from NSERC grant number RGPIN-2023-03322, and the CRC tier2 grant number CRC-2019-00127 on Spatiotemporal encryption of THz light.

CONFLICT OF INTEREST

The authors have no conflicts to disclose.

DATA AVAILABILITY

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

CONCLUSION

L'objectif principal de ce travail était d'étudier les propriétés dynamiques et multistables du résonateur non linéaire à anneau fendu illuminé par un rayonnement électromagnétique (EM) dans la gamme de fréquence térahertz (THz). Pour atteindre cet objectif, ce mémoire a été structuré comme suit : le premier chapitre présente une brève revue de littérature sur certains aspects fondamentaux des comportements dynamiques complexes, notamment les oscillations régulières, irrégulières et la multistabilité.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté quelques méthodes et outils existants nécessaires à l'analyse et à la caractérisation des comportements dynamiques non linéaires. Ces outils comprennent des méthodes analytiques et numériques. Pour les méthodes analytiques, nous avons discuté des techniques d'analyse des points d'équilibre et de l'existence d'états stables. En ce qui concerne les analyses numériques, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre pour implémenter plusieurs programmes nécessaires à la caractérisation des oscillations régulières et irrégulières dans le système. Il s'agit des diagrammes de bifurcation, de l'exposant maximal de Lyapunov, des formes d'ondes temporelles, des spectres de fréquence, des diagrammes de phase, des diagrammes dynamiques à deux paramètres et du bassin d'attraction.

Le troisième chapitre présente les résultats de nos études ainsi que quelques discussions. En suivant la méthodologie élaborée au chapitre deux, nous avons commencé la première section par la modélisation de la structure du matériau, à partir de laquelle nous avons dérivé le modèle permettant d'analyser sa dynamique. Nous avons établi l'expression de la fréquence d'oscillation et montré qu'elle dépend de certains paramètres géométriques du matériau, à savoir la longueur et la largeur de l'anneau, ainsi que la largeur du gap. Suivant les paramètres utilisés, les comportements complexes étudiés sont obtenus à la fréquence de 0.39 THz .

À partir de la description du matériau et de son modèle physique, la section suivante traite du bilan énergétique permettant la propagation des ondes dans la structure. Les réservoirs de stockage d'énergies sont considérés et les différents champs d'énergie nécessaires à la

propagation des ondes dans le matériau sont évalués. Le résultat de calcul obtenu montre que l'énergie permettant de maintenir les oscillations continues dans le système et d'optimiser ses réponses de sorties dépend bien des deux états dynamiques du système (courant et la charge) et vérifie le théorème de stabilité de Helmholtz. Nos calculs tiennent compte aussi de la contribution due au rayonnement EM, qui injecte de l'énergie pour compenser la dissipation. Le champ EM externe modifie ainsi le transfert d'énergie entre les canaux capacitifs et inductifs, ce qui explique la transition de mode dans les milieux excitable soumis à une polarisation et à une magnétisation continue. Le résultat issu de ce calcul nous permet de conclure donc que l'onde EM peut se propager dans le matériau avec différents niveaux d'énergie. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux comportements dynamiques complexes observés dans ce matériau. Nos recherches ont révélé que le modèle obtenu présente des oscillations régulières et irrégulières. Les diagrammes spatiaux à deux paramètres ont été utilisés pour visualiser ces régions d'oscillations. Le diagramme de bifurcation, les formes d'onde temporelles ainsi que les spectres de fréquences nous ont permis de présenter le mécanisme du chaos. Des exposant de Lyapunov à deux paramètres ont été utilisés pour analyser et localiser les domaines d'hystérésis et de multistabilité. Les résultats obtenus de cette analyse ont démontré la coexistence de deux états stables dans une large gamme de paramètres de contrôle. Les différents bassins des conditions initiales des deux signaux coexistant dans notre système a également été représenté et discuté.

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abduljabar, A. A., D. J. Rowe, A. Porch and D. A. Barrow (2014). "Novel microwave microfluidic sensor using a microstrip split-ring resonator." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **62**(3): 679-688.
- Abrashuly, A. and C. Valagiannopoulos (2021). "Photonic memory with nonlinear plasmonic nanotubes." *APL Materials* **9**(10).
- Abrashuly, A. and C. Valagiannopoulos (2021). "Photonic memory with nonlinear plasmonic nanotubes." *APL Materials* **9**(10): 101111.
- Ahmad, J. and S. O. Hwang (2015). "Chaos-based diffusion for highly autocorrelated data in encryption algorithms." *Nonlinear Dynamics* **82**: 1839-1850.
- Akyildiz, I. F., J. M. Jornet and C. Han (2014). "Terahertz band: Next frontier for wireless communications." *Physical communication* **12**: 16-32.
- Ali, A., A. Mitra and B. Aïssa (2022). "Metamaterials and metasurfaces: A review from the perspectives of materials, mechanisms and advanced metadevices." *Nanomaterials* **12**(6): 1027.
- Amirkhan, F., R. Sakata, K. Takiguchi, T. Arikawa, T. Ozaki, K. Tanaka and F. Blanchard (2019). "Characterization of thin-film optical properties by THz near-field imaging method." *JOSA B* **36**(9): 2593-2601.
- Banerjee, S. and J. Kurths (2014). *Chaos and cryptography: a new dimension in secure communications*, Springer. **223**: 1441-1445.
- Bao, H., J. Zhang, N. Wang, N. Kuznetsov and B. Bao (2022). "Adaptive synapse-based neuron model with heterogeneous multistability and riddled basins." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **32**(12): 123101.
- Blanchard, F., D. Golde, F. Su, L. Razzari, G. Sharma, R. Morandotti, T. Ozaki, M. Reid, M. Kira and S. Koch (2011). "Effective mass anisotropy of hot electrons in nonparabolic conduction bands of n-doped InGaAs films using ultrafast terahertz pump-probe techniques." *Physical review letters* **107**(10): 107401.
- Blanchard, F., J. E. Nkeck, L. Guiramand, S. Zibod, K. Dolgaleva, T. Arikawa and K. Tanaka (2022). "Two-dimensional space-time terahertz memory in bulk SrTiO₃." *Optica* **9**(9): 980-986.

- Blanchard, F., K. Ooi, T. Tanaka, A. Doi and K. Tanaka (2012). "Terahertz spectroscopy of the reactive and radiative near-field zones of split ring resonator." *Optics express* **20**(17): 19395-19403.
- Boya, B. F. B. A., B. Ramakrishnan, J. Y. Effa, J. Kengne and K. Rajagopal (2023). "Effects of bias current and control of multistability in 3D hopfield neural network." *Heliyon*: e13034.
- Cai, W. and V. M. Shalaev (2010). *Optical metamaterials*, Springer.
- Cao, Y., K. Nallappan, H. Guerboukha, G. Xu and M. Skorobogatiy (2020). "Additive manufacturing of highly reconfigurable plasmonic circuits for terahertz communications." *Optica* **7**(9): 1112-1125.
- Chen, W. T., A. Y. Zhu and F. Capasso (2020). "Flat optics with dispersion-engineered metasurfaces." *Nature Reviews Materials* **5**(8): 604-620.
- Chithra, A., T. F. Fozin, K. Srinivasan, E. M. Kengne, A. T. Kouanou and I. R. Mohamed (2021). "Complex dynamics in a memristive diode bridge-based MLC circuit: coexisting attractors and double-transient chaos." *International Journal of Bifurcation and Chaos* **31**(03): 2150049.
- Chitra, R. N. and V. Kuriakose (2008). *Studies on Chaos and Synchronization in ac-driven Josephson junctions*, Cochin University of Science and Technology.
- Cui, W.-n., H.-x. Li, M. Sun and L.-b. Bu (2017). "Gap solitons in a chain of split-ring resonator dimers." *Physics Letters A* **381**(23): 1950-1954.
- Dang-Vu, H. and C. Delcarte (2000). *Bifurcations et chaos: une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, Ellipses Ed. Marketing.
- De Dieu, N. J., F. S. V. Ruben, T. Nestor, N. T. Zeric and K. Jacques (2022). "Dynamic analysis of a novel chaotic system with no linear terms and use for DNA-based image encryption." *Multimedia Tools and Applications* **81**(8): 10907-10934.
- Fan, K., A. C. Strikwerda, R. D. Averitt and X. Zhang (2012). "Three-dimensional magnetic terahertz metamaterials using a multilayer electroplating technique." *Journal of Micromechanics and Microengineering* **22**(4): 045011.
- Fan, Y., Z. Wei, J. Han, X. Liu and H. Li (2011). "Nonlinear properties of meta-dimer comprised of coupled ring resonators." *Journal of Physics D: Applied Physics* **44**(42): 425303.

- Feng, W. and L. Shi (2018). "Nonlinear dynamics in a terahertz-driven double-layer graphene diode." *Journal of Semiconductors* **39**(12): 124012.
- Guerboukha, H., Y. Amarasinghe, R. Shrestha, A. Pizzuto and D. M. Mittleman (2021). "High-volume rapid prototyping technique for terahertz metallic metasurfaces." *Optics Express* **29**(9): 13806-13814.
- Habib, S. and R. D. Ryne (1995). "Symplectic calculation of Lyapunov exponents." *Physical review letters* **74**(1): 70.
- Han, C., Y. Wu, Z. Chen and X. Wang (2019). "Terahertz communications (TeraCom): Challenges and impact on 6G wireless systems." *arXiv preprint arXiv:1912.06040*.
- Hassan, M. F. and M. Hammuda (2019). "A new approach for constrained chaos synchronization with application to secure data communication." *Journal of the Franklin Institute* **356**(12): 6697-6723.
- He, Y., Y. Chen, L. Zhang, S. Wong and Z. Chen (2020). An overview of terahertz antennas. *China Commun.* 17 (7), 124–165.
- Hilborn, R. C. (2000). *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*, Oxford university press.
- Horestani, A. K., C. Fumeaux, S. F. Al-Sarawi and D. Abbott (2012). "Displacement sensor based on diamond-shaped tapered split ring resonator." *IEEE Sensors Journal* **13**(4): 1153-1160.
- Horestani, A. K., Z. Shaterian, J. Naqui, F. Martin and C. Fumeaux (2016). "Reconfigurable and tunable S-shaped split-ring resonators and application in band-notched UWB antennas." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **64**(9): 3766-3776.
- Hwang, S. and J. Liu (1999). "Attractors and basins of the locking–unlocking bistability in a semiconductor laser subject to strong optical injection." *Optics communications* **169**(1-6): 167-176.
- Iasemidis, L. D. and J. C. Sackellares (1996). "REVIEW: Chaos Theory and Epilepsy." *The Neuroscientist* **2**(2): 118-126.
- Javed, S., A. Ali, J. Ahmad and R. Hussain (2023). "Study the dynamic behavior of bifurcation, chaos, time series analysis and soliton solutions to a Hirota model." *Optical and Quantum Electronics* **55**(12): 1114.
- Ju, L., B. Geng, J. Horng, C. Girit, M. Martin, Z. Hao, H. A. Bechtel, X. Liang, A. Zettl and Y. R. Shen (2011). "Graphene plasmonics for tunable terahertz metamaterials." *Nature nanotechnology* **6**(10): 630-634.

- Kang, B. J., D. Rohrbach, F. D. Brunner, S. Bagiante, H. Sigg and T. Feurer (2022). "Ultrafast and low-threshold THz mode switching of two-dimensional nonlinear metamaterials." *Nano letters* **22**(5): 2016-2022.
- Karmoude, F., H. Bennis, R. Dakir, M. Latrach, L. El Abdellaoui and A. Errkik (2017). A new compact rectangular planar antenna for THz applications. *Proceedings of the 2nd International Conference on Computing and Wireless Communication Systems*.
- Klein, M. W., M. Wegener, N. Feth and S. Linden (2008). "Experiments on second- and third-harmonic generation from magnetic metamaterials: erratum." *Optics Express* **16**(11): 8055-8055.
- Koenig, S., D. Lopez-Diaz, J. Antes, F. Boes, R. Henneberger, A. Leuther, A. Tessmann, R. Schmogrow, D. Hillerkuss and R. Palmer (2013). "Wireless sub-THz communication system with high data rate." *Nature photonics* **7**(12): 977-981.
- Kovanis, V., A. Gavrielides, T. Simpson and J.-M. Liu (1995). "Instabilities and chaos in optically injected semiconductor lasers." *Applied physics letters* **67**(19): 2780-2782.
- Kozyrev, A. B., I. V. Shadrivov and Y. S. Kivshar (2014). "Soliton generation in active nonlinear metamaterials." *Applied Physics Letters* **104**(8).
- Krasnok, A., M. Tymchenko and A. Alù (2018). "Nonlinear metasurfaces: a paradigm shift in nonlinear optics." *Materials Today* **21**(1): 8-21.
- Kuznetsov, Y. A., I. A. Kuznetsov and Y. Kuznetsov (1998). *Elements of applied bifurcation theory*, Springer.
- Lakshmanan, M. and S. Rajaseekar (2012). *Nonlinear dynamics: integrability, chaos and patterns*, Springer Science & Business Media.
- Lan, F., L. Wang, H. Zeng, S. Liang, T. Song, W. Liu, P. Mazumder, Z. Yang, Y. Zhang and D. M. Mittleman (2023). "Real-time programmable metasurface for terahertz multifunctional wave front engineering." *Light: Science & Applications* **12**(1): 191.
- Lazarides, N., J. Hizanidis and G. Tsironis (2020). "Controlled generation of chimera states in SQUID metasurfaces using DC flux gradients." *Chaos, Solitons & Fractals* **130**: 109413.
- Lazarides, N., M. I. Molina, G. P. Tsironis and Y. S. Kivshar (2010). "Multistability and localization in coupled nonlinear split-ring resonators." *Physics Letters A* **374**(19-20): 2095-2097.
- Li, Z. and H. Hu (2023). "Chaotic pattern, bifurcation, sensitivity and traveling wave solution of the coupled Kundu–Mukherjee–Naskar equation." *Results in Physics* **48**: 106441.

- Liu, J., H. Chen, X. Meng and T. Simpson (1997). "Modulation bandwidth, noise, and stability of a semiconductor laser subject to strong injection locking." *IEEE Photonics Technology Letters* **9**(10): 1325-1327.
- Lorenz, E. N. (1963). "Deterministic nonperiodic flow." *Journal of atmospheric sciences* **20**(2): 130-141.
- Luo, X. (2018). "Subwavelength optical engineering with metasurface waves." *Advanced Optical Materials* **6**(7): 1701201.
- Ma, J. (2022). "Biophysical neurons, energy, and synapse controllability: a review." *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*: 1-21.
- Mayerhöfer, T. G., S. Pahlow and J. Popp (2020). "The Bouguer-Beer-Lambert law: Shining light on the obscure." *ChemPhysChem* **21**(18): 2029-2046.
- Mboyo Kouayep, R., J. H. Talla Mbé and P. Woafu (2023). "Power spectrum analysis of time-delayed optoelectronic oscillators with wide and narrow band nonlinear filters." *Optical and Quantum Electronics* **55**(1): 62.
- Merbald, H., A. Bitzer and T. Feurer (2011). "Second harmonic generation based on strong field enhancement in nanostructured THz materials." *Optics express* **19**(8): 7262-7273.
- Miandoab, E. M. (2021). "Onset of chaos in nano-resonators based on strain gradient theory: Numerical analysis." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **101**: 105864.
- Mir, M. and M. Tahani (2020). "Graphene-based mass sensors: Chaotic dynamics analysis using the nonlocal strain gradient model." *Applied Mathematical Modelling* **81**: 799-817.
- Nguyen, N., L. Pham-Nguyen, M. B. Nguyen and G. Kaddoum (2020). "A low power circuit design for chaos-key based data encryption." *IEEE Access* **8**: 104432-104444.
- Njitacke, Z. T., J. D. D. Nkapkop, V. F. Signing, N. Tsafack, M. E. Sone and J. Awrejcewicz (2022). "Novel extreme multistable tabu learning neuron: circuit implementation and application to cryptography." *IEEE Transactions on Industrial Informatics*.
- Njitacke, Z. T., B. Ramakrishnan, K. Rajagopal, T. F. Fozin and J. Awrejcewicz (2022). "Extremely rich dynamics of coupled heterogeneous neurons through a Josephson junction synapse." *Chaos, Solitons & Fractals* **164**: 112717.
- Nornikman, H., B. H. Ahmad, M. Z. A. Abd Aziz and A. Othman (2012). Effect of single complimentary split ring resonator structure on microstrip patch antenna design. 2012 IEEE symposium on wireless technology and applications (iswta), IEEE.

- Pecora, L. M. and T. L. Carroll (2015). "Synchronization of chaotic systems." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **25**(9): 097611.
- Pendry, J. B., A. J. Holden, D. J. Robbins and W. Stewart (1999). "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena." *IEEE transactions on microwave theory and techniques* **47**(11): 2075-2084.
- Pickwell, E. and V. Wallace (2006). "Biomedical applications of terahertz technology." *Journal of Physics D: Applied Physics* **39**(17): R301.
- Powell, D. A., I. V. Shadrivov, Y. S. Kivshar and M. V. Gorkunov (2007). "Self-tuning mechanisms of nonlinear split-ring resonators." *Applied Physics Letters* **91**(14): 144107.
- Praveena, A., V. S. Ponnappalli and G. Umamaheswari (2022). "Terahertz Antenna Technology for Detection of Explosives and Weapons: A Concise Review." *Smart Antennas: Latest Trends in Design and Application*: 331-342.
- Rangarajan, G., S. Habib and R. D. Ryne (1998). "Lyapunov exponents without rescaling and reorthogonalization." *Physical Review Letters* **80**(17): 3747.
- Razavipour, H., W. Yang, A. Guermoune, M. Hilke, D. G. Cooke, I. Al-Naib, M. M. Dignam, F. Blanchard, H. A. Hafez and X. Chai (2015). "High-field response of gated graphene at terahertz frequencies." *Physical Review B* **92**(24): 245421.
- Razzari, L., F. Su, G. Sharma, F. Blanchard, A. Ayeshehshim, H.-C. Bandulet, R. Morandotti, J.-C. Kieffer, T. Ozaki and M. Reid (2009). "Nonlinear ultrafast modulation of the optical absorption of intense few-cycle terahertz pulses in n-doped semiconductors." *Physical Review B* **79**(19): 193204.
- Robbins, A. and W. Miller (2012). "Circuit Analysis: Theory and Practice 5th edn (Stamford, CT: Cengage Learning)."
- Rocha, R., G. L. Andruccioli and R. O. Medrano-T (2010). "Experimental characterization of nonlinear systems: a real-time evaluation of the analogous Chua's circuit behavior." *Nonlinear Dynamics* **62**: 237-251.
- Rose, A., D. Huang and D. R. Smith (2011). "Controlling the second harmonic in a phase-matched negative-index metamaterial." *Physical review letters* **107**(6): 063902.
- Rose, A., S. Larouche and D. R. Smith (2011). "Quantitative study of the enhancement of bulk nonlinearities in metamaterials." *Physical Review A* **84**(5): 053805.

- Rose, A., D. A. Powell, I. V. Shadrivov, D. R. Smith and Y. S. Kivshar (2013). "Circular dichroism of four-wave mixing in nonlinear metamaterials." *Physical Review B* **88**(19): 195148.
- Rossler, O. (1979). "An equation for hyperchaos." *Physics Letters A* **71**(2-3): 155-157.
- Rössler, O. E. (1976). "An equation for continuous chaos." *Physics Letters A* **57**(5): 397-398.
- Rössler, O. E. (1977). "Chaos in abstract kinetics: Two prototypes." *Bulletin of mathematical biology* **39**: 275-289.
- Ruelle, D. (2014). *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*, Elsevier.
- Shadrivov, I. V., M. Lapine and Y. S. Kivshar (2015). *Nonlinear, tunable and active metamaterials*, Springer.
- Sharma, N. and S. Jana (2021). "Dissipative soliton dynamics and switching in split ring resonator based metamaterial with multi-photon absorption and diffusion." *Physics Letters A* **398**: 127261.
- Shaukat, S., A. Arshid, A. Eleyan, S. A. SHAH and J. AHMAD (2020). "Chaos theory and its application: an essential framework for image encryption." *Chaos Theory and Applications* **2**(1): 17-22.
- Shena, J., N. Lazarides and J. Hizanidis (2020). "Multi-branched resonances, chaos through quasiperiodicity, and asymmetric states in a superconducting dimer." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **30**(12).
- Singh, J. P. and B. K. Roy (2018). "Five new 4-D autonomous conservative chaotic systems with various type of non-hyperbolic and lines of equilibria." *Chaos, Solitons & Fractals* **114**: 81-91.
- Skarda, C. A. and W. J. Freeman (1990). "Chaos and the new science of the brain." *Concepts in neuroscience* **1**(2): 275-285.
- Smale, S. (1967). "Differentiable dynamical systems." *Bulletin of the American mathematical Society* **73**(6): 747-817.
- Solari, H., E. Eschenazi, R. Gilmore and J. Tredicce (1987). "Influence of coexisting attractors on the dynamics of a laser system." *Optics communications* **64**(1): 49-53.
- Sprott, J. C. (2010). *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*, World Scientific.
- Strogatz, S. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos Addison-Wesley*. Reading, MA.

- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, CRC press.
- Su, F. H., F. Blanchard, G. Sharma, L. Razzari, A. Ayesheshim, T. Cocker, L. Titova, T. Ozaki, J.-C. Kieffer and R. Morandotti (2009). "Terahertz pulse induced intervalley scattering in photoexcited GaAs." *Optics express* **17**(12): 9620-9629.
- Suchowski, H., K. O'Brien, Z. J. Wong, A. Salandrino, X. Yin and X. Zhang (2013). "Phase mismatch-free nonlinear propagation in optical zero-index materials." *Science* **342**(6163): 1223-1226.
- Tametang Meli, M. I., G. D. Leutcho and D. Yemele (2021). "Multistability analysis and nonlinear vibration for generator set in series hybrid electric vehicle through electromechanical coupling." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **31**(7): 073126.
- Tang, Y., Q. Li, W. Dong, M. Hu and R. Zeng (2021). "Optical chaotic communication using correlation demodulation between two synchronized chaos lasers." *Optics Communications* **498**: 127232.
- Tani, S., F. Blanchard and K. Tanaka (2012). "Ultrafast carrier dynamics in graphene under a high electric field." *Physical review letters* **109**(16): 166603.
- Tao, H., A. Strikwerda, K. Fan, W. Padilla, X. Zhang and R. Averitt (2009). "Reconfigurable terahertz metamaterials." *Physical review letters* **103**(14): 147401.
- Trinh, D. T. (2015). *Linear electrooptic microscopy: applications to micro and nano-structured materials*, Cachan, Ecole normale supérieure.
- Tsai, W. Y., T. L. Chung, H. H. Hsiao, J. W. Chen, R. J. Lin, P. C. Wu, G. Sun, C. M. Wang, H. Misawa and D. P. Tsai (2019). "Second harmonic light manipulation with vertical split ring resonators." *Advanced Materials* **31**(7): 1806479.
- Valagiannopoulos, C. (2022). "Multistability in coupled nonlinear metasurfaces." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **70**(7): 5534-5540.
- Vettikalladi, H., W. T. Sethi, A. F. B. Abas, W. Ko, M. A. Alkanhal and M. Himdi (2019). "Sub-THz antenna for high-speed wireless communication systems." *International Journal of Antennas and Propagation* **2019**: 1-9.
- Wei, Z., J. Sprott and H. Chen (2015). "Elementary quadratic chaotic flows with a single non-hyperbolic equilibrium." *Physics Letters A* **379**(37): 2184-2187.
- Wen, Y., Z. Liang and Y.-S. Lin (2021). "Tunable Perfect Meta-Absorber with High-Sensitive Polarization Characteristic." *Advanced Photonics Research* **2**(3): 2000027.

- Wieczorek, S., B. Krauskopf and D. Lenstra (1999). "A unifying view of bifurcations in a semiconductor laser subject to optical injection." *Optics communications* **172**(1-6): 279-295.
- Williams, G. (1997). *Chaos theory tamed*, CRC Press.
- Withayachumnankul, W. and D. Abbott (2009). "Metamaterials in the terahertz regime." *IEEE Photonics Journal* **1**(2): 99-118.
- Wolf, A., J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano (1985). "Determining Lyapunov exponents from a time series." *Physica D: nonlinear phenomena* **16**(3): 285-317.
- Wu, H., Y. Zhang, H. Bao, Z. Zhang, M. Chen and Q. Xu (2022). "Initial-offset boosted dynamics in memristor-sine-modulation-based system and its image encryption application." *AEU-International Journal of Electronics and Communications* **157**: 154440.
- Xie, Y., P. Zhou and J. Ma (2023). "Energy balance and synchronization via inductive-coupling in functional neural circuits." *Applied Mathematical Modelling* **113**: 175-187.
- Xu, W., L. Xie and Y. Ying (2017). "Mechanisms and applications of terahertz metamaterial sensing: a review." *Nanoscale* **9**(37): 13864-13878.
- Yen, T.-J., W. Padilla, N. Fang, D. Vier, D. Smith, J. Pendry, D. Basov and X. Zhang (2004). "Terahertz magnetic response from artificial materials." *science* **303**(5663): 1494-1496.
- Yu, Y. and Y.-S. Lin (2019). "Multi-functional terahertz metamaterial using symmetrical and asymmetrical electric split-ring resonator." *Results in Physics* **13**: 102321.
- Yurduseven, O., S. D. Assimonis and M. Matthaiou (2020). "Intelligent reflecting surfaces with spatial modulation: An electromagnetic perspective." *IEEE Open Journal of the Communications Society* **1**: 1256-1266.
- Zhang, L., X. Wu, Z. Hao, R. Ma, F. Gao, F. Bo, G. Zhang and J. Xu (2023). "Second-harmonic and cascaded third-harmonic generation in generalized quasiperiodic poled lithium niobate waveguides." *Optics Letters* **48**(7): 1906-1909.