

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE  
M. Ing.

PAR  
Philippe LAVOIE

SYSTÈME DE NAVIGATION HYBRIDE GPS/INS À FAIBLE COÛT POUR LA  
NAVIGATION ROBUSTE EN ENVIRONNEMENT URBAIN

MONTRÉAL, LE 4 JUILLET 2012

©Tous droits réservés, Philippe Lavoie, 2012

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

**PRÉSENTATION DU JURY**

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. René Jr. Landry, directeur de mémoire  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. David Bensoussan, président du jury  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Arnaud Chanu, membre du jury  
iMetrik Global Inc.

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 1<sup>ER</sup> JUIN 2012

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE



## REMERCIEMENTS

Ce mémoire est le résultat d'un périple extraordinaire qui m'a fait grandir en tant que personne, autant sur le plan personnel que professionnel. Il est non seulement le reflet de mes efforts, mais reflète également les efforts de plusieurs autres personnes qui m'ont encouragé dans cette aventure.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, le Professeur René Jr. Landry, pour avoir cru en moi et m'avoir soutenue durant toutes ces années. Il a su me transmettre sa passion ainsi que ses connaissances pour la navigation. Merci pour toutes les opportunités, les projets appliqués et les nombreux contacts avec l'industrie, ce sont des expériences professionnelles inestimables.

J'aimerais également remercier mes collègues de laboratoire, particulièrement Di Li pour son aide relativement à la navigation inertielle et au filtrage de Kalman, Marc-Antoine Fortin pour son support en lien avec la navigation par satellite ainsi que Kaveh Mollaiyan pour le partage de ses connaissances en traitement du signal numérique.

De plus, j'aimerais remercier le Conseil de recherches en science naturelle et en génie du Canada, le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies ainsi que l'École de technologie supérieure, qui m'ont permis de me consacrer entièrement à mes études grâce à un financement substantiel.

Enfin, un merci particulier à mes parents André Lavoie et Anne-Marie Gagnon pour leur soutien inconditionnel ainsi qu'à ma conjointe Émilie Simoneau pour l'amour et la patience qu'elle m'a démontré tout au long de ce projet. Sans eux, l'aboutissement de cette maîtrise n'aurait pas été possible. Par-dessus tout, je tiens à dédier cet ouvrage à ma fille Béatrice, qui au cours des derniers mois, m'a aidé à garder espoir dans les moments difficiles.



# SYSTÈME DE NAVIGATION HYBRIDE GPS/INS À FAIBLE COÛT POUR LA NAVIGATION ROBUSTE EN ENVIRONNEMENT URBAIN

Philippe LAVOIE

## RÉSUMÉ

Les systèmes de guidage actuellement utilisés pour la navigation automobile sont principalement basés sur l'utilisation autonome d'un récepteur GPS. Ces systèmes présentent néanmoins des pertes de performances importantes lorsqu'ils sont soumis à un environnement difficile. Afin de répondre à cette problématique, plusieurs auteurs proposent l'intégration des systèmes GPS et INS à l'intérieur d'un seul système hybride. Toutefois, l'utilisation de capteurs inertiels à faible coût demeure encore aujourd'hui le principal obstacle à la commercialisation de ces systèmes hybrides GPS/INS étant donné le manque de calibration ainsi que la nature hautement stochastique des erreurs de mesure de ces capteurs. Ce mémoire propose la réalisation d'un système de navigation hybride GPS/INS à faible coût pour la navigation robuste en environnement difficile. Les résultats obtenus démontrent que l'utilisation d'un tel modèle permet d'améliorer considérablement la stabilité de la solution de navigation en canyon urbain sévère comparativement à l'utilisation autonome d'un récepteur GPS. Il a également été démontré que la méthode d'intégration par couplage serré permettrait une diminution de l'ordre de 40% des erreurs de positionnement en environnement difficile comparativement à la méthode d'intégration par couplage lâche.

Cet ouvrage propose également la mise en place d'une nouvelle approche pour la calibration des capteurs inertiels. Cette méthode basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu permet d'obtenir des performances équivalentes aux méthodes itératives classiques tout en facilitant l'implémentation de la procédure de calibration à l'intérieur d'un système temps réel. L'impact de la calibration des capteurs sur la solution de navigation a été évalué et les résultats obtenus démontrent qu'une calibration adéquate permettrait de réduire de plus de 50% les erreurs de positionnement, de vitesse et d'orientation en canyon urbain sévère.

Par la suite, une étude du comportement stochastique des capteurs inertiels à faible coût basée sur l'analyse de la variance d'Allan et de la fonction d'autocorrélation des mesures a été réalisée. Cette étude a permis d'identifier et de quantifier les erreurs présentes sur les mesures de manière à développer un modèle d'estimation adéquat. Il a été démontré que l'utilisation d'un tel modèle permet une diminution supplémentaire des erreurs de positionnement en canyon urbain de l'ordre de 10%.

Finalement, une méthode de détermination de l'orientation d'une centrale inertielle à faible coût basée principalement sur l'utilisation des mesures de magnétomètres a été réalisée. Des essais ont démontré que l'utilisation de cette méthode permet d'obtenir l'orientation du véhicule avec une précision d'environ 5°.

**Mots-clés :** INS, GPS, Magnétomètres, Filtrage de Kalman, Calibration





## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE .....	7
1.1 Navigation par satellite en environnement difficile.....	7
1.2 Systèmes de navigation hybrides GPS/INS .....	8
1.3 Synthèse des différents modèles d'intégration GPS/INS.....	11
1.3.1 Intégration non couplée.....	11
1.3.2 Intégration par couplage lâche .....	12
1.3.3 Intégration par couplage serré.....	13
1.3.4 Intégration profonde.....	15
1.4 Navigation inertielle à faible coût.....	17
1.4.1 Calibration des erreurs déterministes.....	17
1.4.2 Identification en ligne des erreurs stochastiques .....	20
1.4.3 Utilisation de magnétomètres .....	21
1.4.4 Utilisation de modèles de connaissance.....	23
CHAPITRE 2 CONCEPTS FONDAMENTAUX EN NAVIGATION .....	25
2.1 Géométrie de la terre.....	25
2.2 Repères utilisés en navigation.....	28
2.2.1 Repère inertiel terrestre (I).....	28
2.2.2 Repère fixe terrestre (E).....	29
2.2.3 Repère local (L) .....	32
2.2.4 Repère de navigation (N).....	32
2.2.5 Repère du mobile (B).....	33
2.2.6 Repère des capteurs (S).....	34
2.2.7 Relation entre le repère fixe terrestre et le repère de navigation .....	34
2.3 Représentations de l'attitude d'un mobile .....	36
2.3.1 Matrice des cosinus de direction.....	36
2.3.2 Angles d'Euler .....	37
2.3.3 Quaternion unitaire .....	40
2.4 Équations de propagation de l'attitude .....	43
2.4.1 Propagation de la matrice des cosinus de direction .....	43
2.4.2 Équation de propagation d'un quaternion unitaire.....	44
2.5 Modélisation du vecteur de gravité terrestre.....	45
2.6 Modélisation du taux de transport.....	48
CHAPITRE 3 SYSTÈME DE POSITIONNEMENT GLOBAL PAR SATELLITE .....	51
3.1 Principe de trilatération.....	51
3.2 Mesures de pseudo-distance .....	53
3.3 Mesures de décalage Doppler .....	55
3.4 Sources d'erreurs du système GPS .....	57

3.4.1	Erreurs d'horloge des satellites et du récepteur .....	57
3.4.2	Délais ionosphériques .....	58
3.4.3	Délais troposphériques.....	59
3.4.4	Effet de la géométrie des satellites sur la précision du positionnement .....	59
3.4.5	Autres sources et budget d'erreur sur la pseudo-distance.....	61
3.5	Modèle de propagation d'erreur du système GPS .....	61
3.5.1	Modèle de propagation d'erreur PV .....	62
3.5.2	Modèle de propagation de l'erreur d'horloge du récepteur .....	63
CHAPITRE 4 SYSTÈME DE NAVIGATION INERTIELLE .....		65
4.1	Architecture des systèmes INS .....	65
4.1.1	Systèmes à plateforme stabilisée .....	65
4.1.2	Système à composantes liées .....	67
4.2	Principes de base de la navigation inertielle.....	68
4.3	Rétrospective des capteurs inertiels .....	69
4.3.1	Accéléromètres .....	69
4.3.2	Gyroscopes.....	70
4.3.3	Magnétomètres.....	71
4.4	Sources d'erreur des capteurs inertiels .....	72
4.4.1	Erreurs de nature déterministe .....	72
4.4.2	Erreurs de nature stochastique .....	75
4.5	Modèles de mesure des capteurs inertiels.....	76
4.5.1	Modèle de mesure des accéléromètres.....	76
4.5.2	Modèle de mesure des gyroscopes.....	77
4.5.3	Modèle de mesure des magnétomètres .....	77
4.6	Développement de l'algorithme de navigation inertielle.....	78
4.6.1	Équation de propagation de l'attitude .....	79
4.6.2	Transformation de l'accélération .....	80
4.6.3	Équation de propagation de la vitesse.....	81
4.6.4	Équation de propagation de la position.....	81
4.7	Modèle de propagation d'erreur du système INS .....	82
4.7.1	Modèle d'angle psi.....	82
4.7.2	Équation de propagation d'erreur de vitesse.....	84
4.7.3	Équation de propagation d'erreur de position.....	86
4.7.4	Équation de propagation d'erreur de l'attitude .....	87
4.7.5	Résumé.....	89
CHAPITRE 5 FILTRE DE KALMAN ET DÉFINITION DES MODÈLES D'INTÉGRATION .....		91
5.1	Forme générale des modèles d'intégration .....	91
5.1.1	Forme discrétisée équivalente.....	92
5.2	Estimation d'état .....	94
5.2.1	Estimation optimale et filtre de Kalman .....	96
5.2.2	Linéarisation et filtre de Kalman étendu.....	98
5.2.3	Utilisation des vecteurs d'erreur .....	101

5.3	Développement des principaux modèles d'intégration utilisés .....	102
5.3.1	Modèle du système GPS seul.....	102
5.3.2	Modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche.....	108
5.3.3	Modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré .....	111
5.3.4	Modélisation des erreurs de capteur .....	114
CHAPITRE 6 ESTIMATION DES ERREURS DE CAPTEUR ET ALIGNEMENT INITIAL D'UNE PLATEFORME DE NAVIGATION .....		115
6.1	Calibration des erreurs de nature déterministe.....	115
6.1.1	Méthode multi-position.....	117
6.1.2	Résolution à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt.....	118
6.1.3	Adaptation de la méthode multi-position pour l'utilisation d'un filtre de Kalman.....	120
6.1.4	Tests et résultats des algorithmes de calibration.....	122
6.2	Analyse de la variance d'Allan .....	135
6.2.1	Effet combiné des différentes sources de bruit .....	137
6.2.2	Précision de l'analyse de la variance d'Allan .....	138
6.2.3	Tests et analyse des résultats.....	139
6.3	Autocorrélation des mesures de capteurs inertiels.....	147
6.3.1	Pré-traitement des mesures brutes .....	149
6.3.2	Identification des paramètres du processus de Gauss-Markov .....	150
6.3.3	Précision de l'analyse de la fonction d'autocorrélation .....	151
6.3.4	Tests et analyse des résultats.....	152
6.4	Alignement initial d'une plateforme de navigation inertielle haut de gamme.....	163
6.4.1	Alignement grossier .....	163
6.4.2	Alignement fin .....	164
6.4.3	Tests et analyse des résultats.....	169
6.5	Détermination de l'attitude d'une plateforme de navigation inertielle à faible coût ..	171
6.5.1	Initialisation de l'attitude .....	171
6.5.2	Estimation itérative de l'attitude.....	174
6.5.3	Tests et analyse des résultats.....	177
CHAPITRE 7 ÉVALUATION DES PERFORMANCES DU SYSTÈME EN ENVIRONNEMENT URBAIN.....		183
7.1	Présentation des scénarios de test .....	183
7.1.1	Architecture matérielle.....	183
7.1.2	Scénario en environnement idéal .....	186
7.1.3	Scénario en environnement difficile .....	190
7.2	Analyse des performances des différents modèles d'intégration.....	193
7.2.1	Analyse des performances du système GPS seul.....	193
7.2.2	Analyse des performances du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche .....	203
7.2.3	Analyse des performances du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré.....	215
7.2.4	Conclusion sur les performances des différents modèles d'intégration.....	225

7.3	Analyse des performances du système à faible coût en environnement difficile .....	226
7.3.1	Modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré pour l'utilisation d'une centrale inertielle à faible coût.....	227
7.3.2	Impact de la calibration des capteurs sur la solution de navigation à faible coût en environnement difficile .....	233
7.3.3	Impact du modèle d'estimation des erreurs stochastiques sur la solution de navigation à faible coût en environnement difficile .....	240
7.3.4	Conclusion sur les performances du système à faible coût.....	250
CONCLUSION		253
RECOMMANDATIONS .....		257
ANNEXE I CONVENTIONS DE NOTATION, SYMBOLES ET CONSTANTES UTILISÉES.....		259
ANNEXE II PROPRIÉTÉS D'UNE MATRICE DE COSINUS DE DIRECTION .....		263
ANNEXE III PROPRIÉTÉS D'UN QUATERNION UNITAIRE .....		265
ANNEXE IV ARCHITECTURE GLOBALE DU SYSTÈME GPS .....		271
ANNEXE V CALCUL DE LA POSITION ET DE LA VITESSE DES SATELLITES GPS		277
ANNEXE VI CALCUL DES PARAMÈTRES DE DILUTION DE PRÉCISION DU SYSTÈME GPS.....		281
ANNEXE VII ALGORITHME DE LEVENBERG-MARQUARDT .....		283
ANNEXE VIII DÉTECTEUR D'ÉTAT QUASI-STATIONNAIRE.....		287
ANNEXE IX CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES DES CENTRALES INERTIELLES UTILISÉES.....		289
ANNEXE X RÉSULTATS DE LA CALIBRATION PAR L'ALGORITHME LM.....		293
ANNEXE XI IDENTIFICATION DES DIFFÉRENTS TYPES DE BRUIT PAR L'ANALYSE DE LA VARIANCE D'ALLAN.....		297
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE.....		305

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1 Avantages et inconvénients des systèmes GPS et INS .....	9
Tableau 3.1 Résumé des valeurs nominales des erreurs de mesure de pseudo-distance sur le récepteur RxGNSS .....	61
Tableau 5.1 Équations de l'estimateur d'état.....	95
Tableau 5.2 Équations du filtre de Kalman .....	98
Tableau 5.3 Équations du filtre de Kalman Étendu .....	100
Tableau 5.4 Équations du filtre de Kalman Étendu basé sur l'estimation du vecteur d'erreur d'état.....	101
Tableau 6.1 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle HG1700 à l'aide du filtre de Kalman.....	124
Tableau 6.2 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle nIMU à l'aide du filtre de Kalman.....	125
Tableau 6.3 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide du filtre de Kalman .....	125
Tableau 6.4 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle HG1700 à l'aide du filtre de Kalman .....	128
Tableau 6.5 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle nIMU à l'aide du filtre de Kalman.....	129
Tableau 6.6 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide du filtre de Kalman .....	129
Tableau 6.7 Paramètres calculés à l'aide du modèle IGRF.....	132
Tableau 6.8 Résultats de la calibration des magnétomètres de la centrale inertielle nIMU à l'aide du filtre de Kalman .....	133
Tableau 6.9 Résultats de la calibration des magnétomètres de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide du filtre de Kalman .....	133
Tableau 6.10 Paramètres d'enregistrement pour l'analyse de la variance d'Allan.....	139
Tableau 6.11 Coefficients de bruit de mesure pour l'IMU HG1700 .....	141

Tableau 6.12 Coefficients de bruit de mesure pour l'IMU nIMU .....	143
Tableau 6.13 Coefficients de bruit de mesure pour l'IMU iNEMO V2 .....	145
Tableau 6.14 Paramètres d'enregistrement pour l'analyse de la fonction d'autocorrélation	152
Tableau 6.15 Paramètres du processus de Gauss-Markov pour l'IMU HG1700 .....	155
Tableau 6.16 Paramètres du processus de Gauss-Markov pour l'IMU nIMU .....	157
Tableau 6.17 Paramètres du processus de Gauss-Markov pour l'IMU iNEMO V2 .....	159
Tableau 6.18 Incertitude statistique de l'analyse de la fonction d'autocorrélation.....	160
Tableau 6.19 Résultats de l'alignement grossier .....	169
Tableau 6.20 Séquence d'orientations réalisée .....	177
Tableau 6.21 Paramètres d'enregistrement .....	178
Tableau 7.1 Précision horizontale RMS en fonction de la configuration du système SPAN	184
Tableau 7.2 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS seul en environnement idéal .	198
Tableau 7.3 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS seul en environnement difficile	203
Tableau 7.4 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....	208
Tableau 7.5 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....	214
Tableau 7.6 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage serré en environnement idéal .....	219
Tableau 7.7 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage serré en environnement difficile .....	225
Tableau 7.8 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile.....	232
Tableau 7.9 Erreur quadratique moyenne de la solution calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût .....	240
Tableau 7.10 Erreur quadratique moyenne de la solution calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques.....	250

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1-1 Techniques utilisées pour la navigation par satellite en environnement difficile ....	8
Figure 1-2 Synergie existant entre les systèmes GPS et INS.....	10
Figure 1-3: Intégration GPS/INS non couplée.....	12
Figure 1-4 Intégration GPS/INS par couplage lâche .....	13
Figure 1-5 Intégration GPS/INS par couplage serré.....	14
Figure 1-6 Intégration profonde GPS/INS.....	16
Figure 1-7 Erreurs de mesures typiques : (a) biais; (b) facteur d'échelle; (c) non linéarités; (d) asymétrie; (e) zone morte; (f) discrétisation; .....	18
Figure 2-1 Surfaces équipotentielles et Géoïde .....	25
Figure 2-2 Ellipsoïde de révolution .....	26
Figure 2-3 Ondulation du Géoïde .....	27
Figure 2-4 Altitude ellipsoïdale, élévation et ondulation.....	27
Figure 2-5 Repère inertiel terrestre (ECI).....	28
Figure 2-6 Repère fixe terrestre (ECEF).....	29
Figure 2-7 Coordonnées géodésiques (latitude, longitude et altitude ellipsoïdale).....	30
Figure 2-8 Repère NED (en rouge) et ENU (en bleu) .....	32
Figure 2-9 Repère du mobile .....	34
Figure 2-10 Séquence de rotation caractérisant la relation entre le repère de navigation et le repère fixe terrestre.....	35
Figure 2-11 Cosinus de direction.....	37
Figure 2-12 Rotation de l'angle de lacet.....	38
Figure 2-13 Rotation de l'angle de tangage.....	38
Figure 2-14 Rotation de l'angle de roulis .....	39

Figure 2-15 Quaternion unitaire.....	41
Figure 2-16 Position du mobile représentée selon un plan équatorial.....	46
Figure 2-17 Exemple de la variation du nord vrai en région polaire.....	49
Figure 3-1 Principe de trilatération appliqué à un système à deux dimensions.....	52
Figure 3-2 Principe de trilatération appliqué à un système à trois dimensions.....	53
Figure 3-3 Calcul du temps de transmission à partir des mesures de code.....	54
Figure 3-4 Effet de la géométrie des satellites et de l'UERE sur le positionnement 2D : a) bonne géométrie; b) mauvaise géométrie.....	60
Figure 3-5 Modèle de propagation PV.....	62
Figure 4-1 Système de navigation inertielle à plateforme stabilisée.....	66
Figure 4-2 Algorithme de navigation typique d'un système à plateforme stabilisée.....	66
Figure 4-3 Algorithmes de navigation des systèmes à composantes liées.....	67
Figure 4-4 Architecture typique d'un système INS à composantes liées.....	69
Figure 4-5 Technologies d'accéléromètres et performances théoriques.....	70
Figure 4-6 Technologies de gyroscopes et performances théoriques.....	71
Figure 4-7 Erreur de mauvais alignement entre le repère des capteurs et le repère du mobile.....	72
Figure 4-8 Effet des erreurs de mesure sur le lieu géométrique des magnétomètres.....	73
Figure 4-9 Repère de la plateforme, repère de calcul et les trois angles psi.....	83
Figure 5-1 Représentation typique d'un estimateur d'état.....	95
Figure 6-1 Séquence de 18 rotations utilisée pour la méthode multi-position.....	118
Figure 6-2 Pseudo-code de la méthode de Levenberg-Marquardt.....	119
Figure 6-3 Honeywell HG1700 (Novatel SPAN™).....	122
Figure 6-4 MEMSense nIMU.....	122
Figure 6-5 STMicroelectronics iNEMO V2.....	122
Figure 6-6 Norme des mesures brutes et calibrées des accéléromètres.....	126



Figure 6-7 Norme des mesures brutes et calibrées des gyroscopes .....	130
Figure 6-8 Norme des mesures brutes et calibrées des magnétomètres.....	134
Figure 6-9 Structure de données utilisée pour l'analyse de la variance d'Allan.....	135
Figure 6-10 Exemple d'analyse de la variance d'Allan .....	137
Figure 6-11 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les accéléromètres de l'IMU HG1700 .....	140
Figure 6-12 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les gyroscopes de l'IMU HG1700.....	141
Figure 6-13 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les accéléromètres de l'IMU nIMU .....	142
Figure 6-14 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les gyroscopes de l'IMU nIMU .....	143
Figure 6-15 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les accéléromètres de l'IMU iNEMO V2.....	144
Figure 6-16 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les gyroscopes de l'IMU iNEMO V2 .....	145
Figure 6-17 Pourcentage d'incertitude de l'analyse de la variance d'Allan en fonction de la période d'agrégat.....	146
Figure 6-18 Fonction d'autocorrélation d'un processus de Gauss-Markov de premier ordre	149
Figure 6-19 Mesures brutes et filtrées d'un accéléromètre à faible coût .....	150
Figure 6-20 Autocorrélation des mesures d'accéléromètres de l'IMU HG1700 .....	153
Figure 6-21 Autocorrélation des mesures de gyroscopes de l'IMU HG1700 .....	154
Figure 6-22 Autocorrélation des mesures d'accéléromètres de l'IMU nIMU .....	156
Figure 6-23 Autocorrélation des mesures de gyroscopes de l'IMU nIMU .....	156
Figure 6-24 Autocorrélation des mesures d'accéléromètres de l'IMU iNEMO V2 .....	158
Figure 6-25 Autocorrélation des mesures de gyroscopes de l'IMU iNEMO V2 .....	159
Figure 6-26 Simulation d'un processus de Gauss-Markov (5 premiers essais) .....	161
Figure 6-27 Autocorrélation des processus de Gauss-Markov simulés (5000 essais).....	162

## XVIII

Figure 6-28 Estimation des angles d'Euler .....	170
Figure 6-29 Vecteurs de gravité et de champ magnétique exprimés selon le repère de navigation .....	173
Figure 6-30 Détermination des angles d'Euler pour la centrale inertielle iNEMO V2 .....	179
Figure 6-31 Détermination des angles d'Euler pour la centrale inertielle nIMU .....	179
Figure 6-32 Erreur sur les angles d'Euler .....	180
Figure 6-33 Perturbations observées sur les mesures provenant des magnétomètres de la centrale inertielle nIMU .....	181
Figure 7-1 Schéma bloc de l'architecture matérielle utilisée pour les essais dynamiques ....	184
Figure 7-2 Véhicule de test.....	185
Figure 7-3 Architecture matérielle réelle utilisée pour les essais dynamiques.....	186
Figure 7-4 Vue d'ensemble du scénario en environnement idéal .....	187
Figure 7-5 Profil d'altitude du scénario en environnement idéal .....	187
Figure 7-6 Vue rapprochée du quartier résidentiel de La Prairie.....	188
Figure 7-7 Vue rapprochée du quartier résidentiel de St-Luc.....	188
Figure 7-8 Nombre de satellites visibles en fonction du temps en environnement idéal .....	189
Figure 7-9 Pourcentage de temps observé pour un nombre de satellites visibles donné en environnement idéal .....	189
Figure 7-10 Vue d'ensemble du scénario en environnement difficile .....	190
Figure 7-11 Profil d'altitude du scénario en environnement difficile .....	191
Figure 7-12 Vue rapprochée du canyon urbain.....	191
Figure 7-13 Nombre de satellites visibles en fonction du temps en environnement difficile	192
Figure 7-14 Pourcentage de temps observé pour un nombre de satellites visibles donné en environnement difficile .....	193
Figure 7-15 Indicateur de stabilité de la solution en environnement idéal .....	195
Figure 7-16 Position géodésique calculée par le modèle GPS seul en environnement idéal	196

Figure 7-17 Erreur de position pour le modèle GPS seul en environnement idéal.....196

Figure 7-18 Vitesse calculée par le modèle GPS seul en environnement idéal.....197

Figure 7-19 Erreur de vitesse pour le modèle GPS seul en environnement idéal.....197

Figure 7-20 Indicateur de stabilité de la solution en environnement urbain.....199

Figure 7-21 Trajectoire calculée à l'aide du modèle GPS seul en environnement difficile ..199

Figure 7-22 Position géodésique calculée par le modèle GPS seul en environnement difficile200

Figure 7-23 Erreur de position pour le modèle GPS seul en environnement difficile.....201

Figure 7-24 Vitesse calculée par le modèle GPS seul en environnement difficile.....202

Figure 7-25 Erreur de vitesse pour le modèle GPS seul en environnement difficile.....202

Figure 7-26 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....204

Figure 7-27 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....205

Figure 7-28 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....206

Figure 7-29 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....206

Figure 7-30 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....207

Figure 7-31 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal .....208

Figure 7-32 Trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....209

Figure 7-33 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile.....210

Figure 7-34 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....211

Figure 7-35 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....212

Figure 7-36 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....	212
Figure 7-37 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....	213
Figure 7-38 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile .....	214
Figure 7-39 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal .....	216
Figure 7-40 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal .....	216
Figure 7-41 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal .....	217
Figure 7-42 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal .....	217
Figure 7-43 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal.....	218
Figure 7-44 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal.....	218
Figure 7-45 Trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile. ....	220
Figure 7-46 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile .....	221
Figure 7-47 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile .....	221
Figure 7-48 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile .....	222
Figure 7-49 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile .....	223
Figure 7-50 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile.....	224
Figure 7-51 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile.....	224

Figure 7-52 Trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration.....	227
Figure 7-53 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile .....	228
Figure 7-54 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile .....	229
Figure 7-55 Vue rapprochée de l'erreur de position pour une section où les signaux GPS ne sont pas disponibles.....	229
Figure 7-56 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile .....	230
Figure 7-57 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile .....	230
Figure 7-58 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile.....	231
Figure 7-59 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile.....	232
Figure 7-60 Trajectoire calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût.....	234
Figure 7-61 Position géodésique calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût.....	235
Figure 7-62 Erreur de position calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût.....	235
Figure 7-63 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de la calibration pour une section où les signaux GPS ne sont pas disponibles.....	236
Figure 7-64 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de la calibration pour une section en canyon urbain sévère .....	236
Figure 7-65 Vitesse calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût .....	237
Figure 7-66 Erreur de vitesse calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût.....	238
Figure 7-67 Angles d'Euler calculés en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût.....	239

Figure 7-68 Erreur sur les angles d'Euler calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût .....	239
Figure 7-69 Biais des accéléromètres estimés pour la centrale inertielle nIMU .....	242
Figure 7-70 Biais des gyroscopes estimés pour la centrale inertielle nIMU .....	243
Figure 7-71 Température à l'intérieur de la centrale inertielle nIMU.....	243
Figure 7-72 Trajectoire calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques	244
Figure 7-73 Position géodésique calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques.....	245
Figure 7-74 Erreur de position calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques.....	245
Figure 7-75 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de l'estimation des erreurs stochastiques pour une section où les signaux GPS ne sont pas disponibles.....	246
Figure 7-76 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de l'estimation des erreurs stochastiques pour une section en canyon urbain sévère .....	246
Figure 7-77 Vitesse calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques ....	247
Figure 7-78 Erreur de vitesse calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques.....	248
Figure 7-79 Angles d'Euler calculés en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques.....	249
Figure 7-80 Erreur sur les angles d'Euler calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques .....	249

## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

DCM	Direction Cosine Matrix
DOP	Dilution Of Precision
DR	Dead Reckoning
ECEF	Earth Centered Earth Fixed
ECI	Earth Centered Inertial
EDOP	East Dilution Of Precision
EGM96	Earth Gravity Model of 1996
EKF	Extended Kalman Filter
ENU	East North Up
ÉTS	École de technologie supérieure
GDOP	Geometric Dilution Of Precision
GPS	Global Positioning System
HDOP	Horizontal Dilution Of Precision
IAGA	International Association of Geomagnetism and Aeronomy
IGRF	International Geomatnetic Reference Field
IMU	Inertial Measurement Unit
INS	Inertial Navigation System
LACIME	Laboratoire de Communication et d'Intégration de la MicroÉlectronique
LM	Levenberg-Marquardt
MEMS	MicroElectroMechanical System
MSL	Mean Sea Level

## XXIV

NDOP	North Dilution Of Precision
NED	North East Down
PDOP	Position Dilution Of Precision
PRN	PseudoRandom Noise
RF	RadioFréquences
RxGNSS	Récepteur GNSS développé au laboratoire LACIME
SPIRE	SPace Inertial Reference Equipment
TDOP	Time Dilution Of Precision
UERE	User Equivalent Range Error
VDOP	Vertical Dilution Of Precision
WGS84	World Geodetic System of 1984
ZUPT	Zero velocity UPdaTe



## INTRODUCTION

Le système de positionnement global par satellite (GPS – *Global Positioning System*) fait désormais partie intégrante de notre quotidien et forme d'ailleurs la base de la plupart des systèmes de navigation actuellement utilisés autant pour les applications civiles, commerciales, militaires ou gouvernementales. Dans le contexte actuel, connaître la position et l'orientation de son véhicule est devenu un besoin primordial, ce qui est d'autant plus vrai lors de déplacements dans un environnement étranger. Bien que les technologies présentes dans les récepteurs GPS actuels offrent une grande précision à faible coût, une dégradation importante de la fiabilité de la solution fournie par ces systèmes est observable lorsqu'ils sont soumis à un environnement difficile ou à de fortes dynamiques. L'auteur entend par environnement difficile un environnement dans lequel les signaux GPS sont fortement atténués ou bloqués (volontairement ou non), un environnement souffrant d'une mauvaise géométrie des satellites, ou encore un environnement propice à la propagation par trajets multiples. Ce type d'environnement est principalement présent à l'intérieur de bâtiments, en zone forestière dense ainsi qu'en milieu urbain.

Dans de telles conditions, une alternative possible serait d'utiliser un système de navigation complètement autonome tel qu'un système de navigation inertielle (INS – *Inertial Navigation System*). Ces systèmes qui étaient auparavant destinés uniquement à la navigation commerciale et militaire de haut niveau sont de plus en plus accessibles à la commercialisation avec l'apparition sur le marché de capteurs inertiels à faible coût, basés sur la technologie des microsystèmes électromécaniques (MEMS – *Microelectromechanical System*). La précision d'un INS étant indépendante de l'environnement extérieur, il est ainsi possible d'obtenir un positionnement lorsque les signaux GPS sont fortement atténués ou complètement bloqués. Cependant, la dégradation rapide de la solution de navigation causée par les erreurs importantes présentes sur les mesures fournies par les capteurs MEMS limite grandement leur utilisation de manière autonome ou semi-autonome. Il devient alors pertinent d'étudier les méthodes possibles afin de corriger ces erreurs de mesure, ce qui permettrait alors une utilisation en continu de la technologie INS à faible coût.

La problématique étudiée dans ce mémoire est donc liée à la fois aux difficultés rencontrées par les systèmes GPS en environnement difficile et à la dégradation rapide de la solution provenant des systèmes INS à faible coût. Une solution prometteuse à cette problématique consiste à utiliser les mesures provenant de différents systèmes ayant des caractéristiques complémentaires afin d'estimer de manière optimale la solution de navigation à l'aide d'un estimateur (p. ex. le filtre de Kalman). Plusieurs études ont par ailleurs démontré que l'utilisation conjointe des systèmes GPS et INS permettrait de profiter des forces de chacun des systèmes tout en compensant leurs faiblesses respectives. Certaines questions doivent toutefois être posées quant à la réalisation d'un tel système de navigation hybride à faible coût, ce qui amène l'étude de plusieurs sous-problèmes :

- Est-il possible de concevoir un système de navigation hybride GPS/INS précis et robuste basé uniquement sur des mesures de capteurs à faible coût?
- Est-ce que l'utilisation d'un système de navigation hybride GPS/INS en environnement difficile aura un impact significatif sur la robustesse et la précision de la solution de navigation comparativement aux systèmes GPS utilisés seuls?
- Est-il possible d'estimer adéquatement les paramètres d'erreurs fortement non linéaires des capteurs inertiels MEMS à faible coût uniquement à l'aide de méthodes d'estimation linéaires telles que le filtre de Kalman?
- Est-ce que la modélisation des erreurs déterministes et stochastiques des capteurs inertiels peut permettre aux systèmes INS à faible coût d'être utilisés de manière autonome sur une période de temps acceptable (30 secondes)?

L'objectif principal de ce mémoire qui permettra de répondre à cette problématique de recherche est la réalisation d'un système de navigation hybride précis et robuste, basé principalement sur les technologies GPS et INS à faible coût. De cet objectif principal découlent les objectifs spécifiques suivants :

- 1) caractériser les sources d'erreur sur les mesures provenant des capteurs inertiels à faible coût afin de mieux les modéliser;
- 2) mettre en œuvre une procédure de calibration des erreurs déterministes et stochastiques des capteurs inertiels à faible coût;
- 3) introduire l'utilisation de mesures de magnétomètres pour l'alignement initial d'une centrale inertielle à faible coût;
- 4) étudier différents paradigmes d'intégration GPS/INS, réaliser le développement de ces modèles et en évaluer les performances de ces derniers comparativement à celles d'un récepteur GPS utilisé de manière autonome.

Afin d'atteindre ces objectifs, une démarche en plusieurs phases sera entreprise. Tout d'abord, une revue de la littérature sera réalisée afin d'étudier l'état de l'art actuel relativement à l'utilisation en environnement difficile des systèmes GPS et INS à faible coût ainsi qu'aux différentes méthodes permettant leur intégration. Cette revue permettra entre autre d'établir une ligne directrice par la sélection des différentes techniques qui seront utilisées dans le cadre de ce mémoire afin de concevoir un système adapté aux objectifs du projet. Par la suite, les techniques retenues seront étudiées en détail puis modélisées à l'aide de l'outil de simulation Simulink du logiciel Matlab de manière à valider leur fonctionnement dans un environnement contrôlé à l'aide de données simulées idéales. L'objectif de cette étape est de valider en laboratoire le fonctionnement des différents algorithmes développés sans avoir à réaliser de tests sur route qui peuvent parfois représenter un investissement important en temps et en argent. De plus, l'utilisation de données idéales permet de minimiser les sources d'erreurs ce qui facilite grandement le développement et le déverminage des algorithmes. Des mesures réelles enregistrées lors de tests sur route seront ensuite intégrées en post traitement aux algorithmes simulés de manière à valider leur comportement face aux erreurs de mesure. Lorsque le modèle sera validé en simulation, il sera implémenté en langage C afin de permettre des tests en temps réel impliquant l'utilisation de centrales inertielles de grades tactique et commercial. Le système sera d'abord testé dans un environnement idéal (visibilité complète des satellites, absence de propagation par trajets multiples et faible dynamique du véhicule), puis dans un environnement difficile

(canyon urbain, feuillage dense ou présence de propagation par trajets multiples), de manière à en évaluer les performances comparativement à un récepteur GPS utilisé seul. Le récepteur GPS utilisé pour le développement des algorithmes est un prototype développé par le groupe de recherche en navigation du laboratoire LACIME (laboratoire de communication et d'intégration de la microélectronique) de l'École de technologie supérieure (ÉTS) lors de travaux antérieurs (Chavagnieux, 2007; Delaporte, 2009; Fortin, Guay et Landry, 2009; Guay, 2010; Lamontagne, 2009; Sauriol, 2008). En plus d'être un récepteur multifréquences et multiconstellations, ce récepteur qui sera nommé RxGNSS dans le cadre de ce mémoire est entièrement ouvert, ce qui permet un développement plus facile des algorithmes et un accès total aux différents signaux nécessaires.

Le premier chapitre de ce mémoire présente une revue détaillée de la littérature relativement à l'intégration des systèmes GPS et INS pour la navigation à faible coût en environnement urbain ainsi qu'aux différentes approches utilisées afin d'améliorer la robustesse de ces systèmes. Le deuxième chapitre définit les concepts fondamentaux en navigation tel que les différents repères orthogonaux utilisés, les représentations de l'attitude et leurs équations de propagation ainsi que les modèles de gravité et de taux de transport. Les chapitres 3 et 4 présentent respectivement la théorie derrière les systèmes GPS et INS, notamment leur principe de fonctionnement, les mesures utilisées à l'intérieur de ces systèmes de même que leurs sources d'erreurs respectives. Le cinquième chapitre établit un cadre théorique traitant de l'estimation d'état, plus particulièrement du filtre de Kalman et présente également le développement des modèles d'intégration GPS/INS ainsi que du modèle d'estimation du biais des capteurs inertiels. Le chapitre 6 présente le développement des algorithmes d'alignement initial et de calibration d'une centrale inertielle et étudie également le comportement stochastique des différents capteurs utilisés. Finalement, le chapitre 7 évalue les performances des différents algorithmes développés à l'intérieur de deux scénarios de test réels. Le premier scénario représente un environnement idéal et est utilisé afin d'obtenir des résultats témoins tandis que le second scénario représente un environnement difficile en canyon urbain sévère permettant de mettre à l'épreuve les différents algorithmes

Les travaux de recherche réalisés dans le cadre de cette maîtrise apportent des contributions importantes dans le domaine de la navigation hybride à faible coût. Tout d'abord, le couplage entre les systèmes GPS et INS de faible coût est un sujet connu et d'actualité, mais qui est encore faiblement exploité d'un point de vue commercial. L'utilisation d'une approche basée sur l'intégration serrée plutôt que le couplage lâche, tel qu'il est question dans ce mémoire, permettrait une meilleure estimation des paramètres d'erreur des capteurs bas de gamme et résulterait ainsi en une solution beaucoup plus fiable en milieu difficile. La commercialisation d'un tel système aurait un impact significatif, conférant l'accessibilité et les avantages de la navigation inertielle hybride à des appareils à faible coût comme des téléphones cellulaires, des véhicules routiers, des avions personnels et des aéronefs sans pilote. Les travaux réalisés dans le cadre de ce projet démontrent clairement les avantages du couplage serré et proposent également différentes approches permettant d'améliorer de façon significative la robustesse et la précision de la solution de navigation en canyon urbain sévère.

Parmi ces solutions, cette maîtrise propose la mise en place d'une nouvelle approche pour la calibration des capteurs inertiels. Cette méthode est basée sur la résolution de la méthode multi-position publiée initialement par Syed et al. (2007) à l'aide d'un filtre de Kalman étendu plutôt qu'avec une méthode itérative classique (p.ex. méthode de Gauss-Newton, algorithme de Levenberg-Marquardt, etc.) (El-Diasty et Pagiatakis, 2008; Fong, Ong et Nee, 2008; Skog et Händel, 2006; Syed et al., 2007). Cette nouvelle méthode est équivalente aux approches itératives en termes de précision, mais a l'avantage d'être beaucoup plus simple à implémenter à l'intérieur d'un système temps réel. Un article scientifique portant sur cette nouvelle méthode est actuellement en rédaction et l'auteur de ce mémoire vise une publication internationale telle que la conférence *Position Location and Navigation Systems* (PLANS).

Par la suite, les travaux réalisés proposent également l'estimation en ligne des erreurs stochastiques des capteurs inertiels à faible coût. Les modèles d'estimation développés à l'intérieur de ce mémoire sont des modèles bien connus et détaillés dans la littérature mais

cet ouvrage contribue au niveau de l'identification et de la qualification des erreurs. En effet, ce document présente une démarche détaillée des méthodes d'analyse de la variance d'Allan et d'analyse de la fonction d'autocorrélation des mesures et discute également des limites de ces analyses, ce qui est rarement présenté de manière intégrale dans la littérature. Cette procédure détaillée facilitera grandement les travaux futurs réalisés à l'ÉTS en lien avec le développement de modèles d'estimation stochastiques plus adaptés.

Dans un autre ordre d'idée, les travaux liés à l'utilisation de mesures de magnétomètres pour la détermination de l'orientation d'une centrale inertielle à faible coût pourraient servir directement dans différents projets de recherche, particulièrement en navigation corporelle et en navigation à l'intérieur de bâtiments. La méthode de détermination de l'attitude qui a été développée en collaboration avec le Dr. Di Li propose une nouvelle approche pour l'initialisation de l'attitude offrant un estimé initial plus précis et absent de singularité. Cette méthode a d'ailleurs inspiré la rédaction de deux articles scientifiques (Li et al., 2009; 2011).

Finalement, bien que de nombreux défis restent encore à surmonter pour la commercialisation d'un système hybride GPS/INS pour la navigation à faible coût en environnement difficile, les différents algorithmes et méthodes réalisés dans le cadre de ce projet ne sauraient passer inaperçue dans l'industrie. Les compagnies œuvrant dans le domaine du positionnement et du guidage en environnement urbain (le suivi des véhicules volés, la surveillance et la gestion d'un parc automobile, les services de taxation à l'utilisation etc.) sont continuellement à la recherche de nouvelles idées afin d'améliorer la robustesse et la précision en environnement difficile. L'utilisation de modèles d'estimation non-linéaires, de modèles de contrainte ainsi que la redondance des mesures inertielles représentent des avenues intéressantes qui permettraient de réduire les erreurs liées à l'utilisation de capteurs inertiels à faible coût. Ces idées commencent à être étudiées dans l'industrie et c'est pourquoi l'ÉTS doit maintenir ses efforts de recherche dans cette direction afin de rester parmi les leaders dans ce domaine.

## **CHAPITRE 1**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

Depuis quelques années, un accroissement important de l'intérêt porté par l'industrie envers la navigation à faible coût en environnement urbain se fait ressentir. Cet accroissement motive de plus en plus les groupes de recherche en navigation à tenter d'adresser une solution à cette problématique d'actualité. Jusqu'à présent, les systèmes développés sont majoritairement basés sur l'utilisation des systèmes de positionnement par satellite mais, avec l'amélioration constante dans le domaine des capteurs inertiels basés sur la technologie MEMS, l'apparition sur le marché de systèmes de navigation hybrides GPS/INS abordables est à prévoir au cours des prochaines années.

#### **1.1 Navigation par satellite en environnement difficile**

Les systèmes de positionnement par satellite sont utilisés depuis plusieurs années dans le domaine de la navigation aérienne, navale et automobile, mais leur utilisation en environnement difficile reste encore très limitée. Des études réalisées par Lachapelle et Townsend (1992), Peterson, Hartnett et Ottman (1995) ainsi que par Miller et al. (1995) démontrent bien la dégradation importante des signaux GPS lorsqu'ils sont soumis à ce type d'environnement. Les méthodes développées au cours des deux dernières décennies afin de répondre à cette problématique peuvent généralement être classées selon trois catégories distinctes soient l'utilisation de signaux RF (radiofréquences) complémentaires, l'utilisation de techniques avancées en traitement du signal et l'utilisation de capteurs externes. La Figure 1-1 présente une vue d'ensemble de ces techniques.

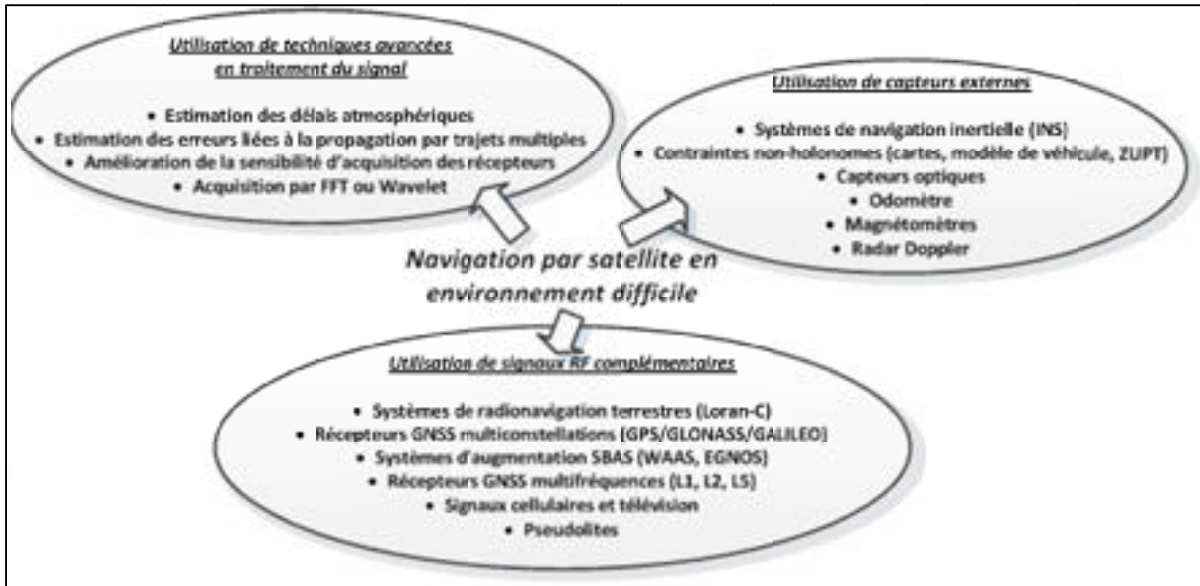


Figure 1-1 Techniques utilisées pour la navigation par satellite en environnement difficile

Le projet de recherche présenté dans le cadre de ce mémoire cible essentiellement l'utilisation de capteurs externes. Plus particulièrement, ce projet propose l'utilisation de capteurs inertiels, de magnétomètres et de contraintes non-holonomes afin de mettre en place un système de navigation hybride robuste. Par conséquent, les autres méthodes ne seront pas détaillées davantage.

## 1.2 Systèmes de navigation hybrides GPS/INS

Contrairement aux systèmes de positionnement par satellite, les systèmes de navigation inertielle sont entièrement autonomes et ne nécessitent l'usage d'aucun signal externe afin de calculer une solution de navigation. Ainsi, ils ne sont pas affectés par l'environnement dans lequel ils évoluent et offrent donc une alternative idéale aux récepteurs GPS en environnement difficile. Cependant, étant donné les erreurs inhérentes sur les mesures de capteurs inertiels (gyroscopes et accéléromètres), la solution de navigation calculée par les systèmes INS n'est pas parfaite et tend à dériver avec le temps. Selon Schmidt (2004) cette dérive peut atteindre jusqu'à 500 m/h et ce, même pour les systèmes INS autonomes de haut



niveau utilisés pour des applications militaires de grande précision. Il est donc nécessaire de corriger périodiquement cette erreur à l'aide de mesures externes telles que celles provenant d'un système GPS de manière à contenir cette dernière en-dessous d'un seuil tolérable. Le Tableau 1.1 présente les avantages et inconvénients de l'utilisation de chacun des systèmes GPS et INS de manière indépendante, mettant ainsi en évidence la synergie qui existe entre ces derniers et motivant par le fait même leur intégration.

Tableau 1.1 Avantages et inconvénients des systèmes GPS et INS  
Adapté de Schmidt et Phillips (2004, p. 4)

	<b>Avantages</b>	<b>Inconvénients</b>
<b>GPS Autonome</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erreurs restreintes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Taux d'échantillonnage faible</li> <li>• Aucune information sur l'attitude du mobile</li> <li>• Sensible au brouillage</li> </ul>
<b>INS Autonome</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Taux d'échantillonnage élevé</li> <li>• Informations en translation et en rotation</li> <li>• Entièrement autonome (insensible au brouillage)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erreurs non restreintes</li> </ul>

L'intégration GPS/INS n'est pas un concept innovateur en soi. En effet, l'utilisation de ces systèmes hybrides est connue depuis longtemps et très bien détaillée dans la littérature. Cox (1978); 1980) est l'un des premiers auteurs à présenter de manière détaillée la théorie de ces systèmes intégrés. Selon lui, les avantages de l'intégration GPS/INS sont perceptibles à différents niveaux autant pour l'acquisition de signaux GPS de faible intensité que pour la poursuite de ces derniers en environnement difficile. Selon Schmidt et Phillips (2004), les avantages d'une solution hybride GPS/INS découlent principalement de la synergie qui existe entre ces systèmes et qui est illustrée à la Figure 1-2.

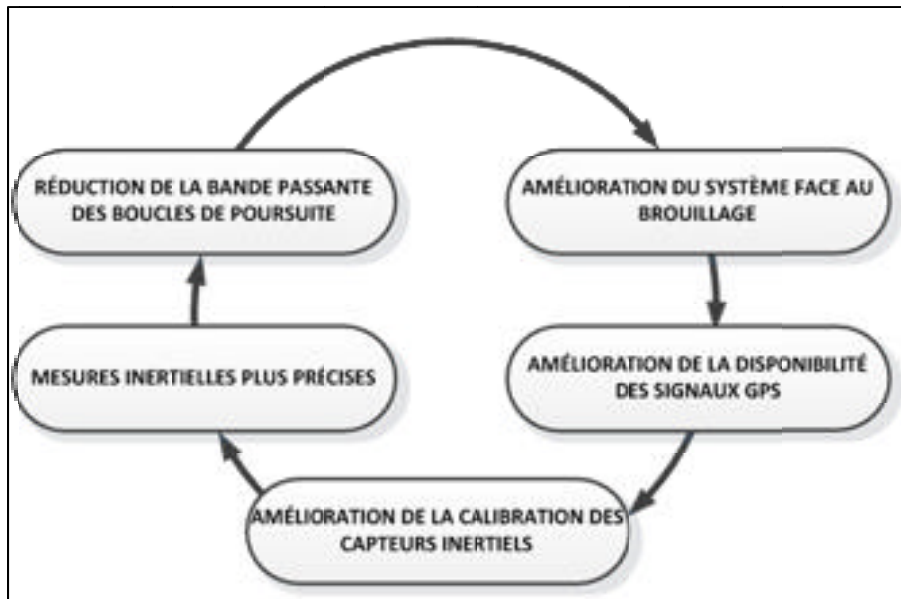


Figure 1-2 Synergie existant entre les systèmes GPS et INS  
Adaptée de Schmidt et Phillips (2004, p. 5)

Cette synergie, est principalement caractérisée par les quatre points suivants (Schmidt et Phillips, 2004) :

- 1) les méthodes conventionnelles d'intégration GPS/INS permettent d'utiliser les mesures inertielles afin d'assister les boucles de poursuite (code et porteuse) du récepteur GPS de manière à permettre une réduction considérable de leur largeur de bande respective. Ainsi, le récepteur accepte un niveau moindre de bruit et parvient à poursuivre des signaux de plus faible intensité;
- 2) les systèmes inertiels peuvent fournir une solution continue même lorsque les signaux GPS deviennent inaccessibles. La connaissance de la position et de la vitesse du mobile permet de réduire considérablement le temps de réacquisition des signaux GPS à la suite d'un décrochage du récepteur;
- 3) l'utilisation des mesures GPS à l'intérieur d'un filtre de navigation permet d'estimer les erreurs de biais des capteurs inertiels. Ainsi, la précision de la solution de navigation calculée par les systèmes INS est considérablement améliorée, augmentant du même coup l'impact des points 1) et 2);

- 4) l'utilisation d'un système INS au cœur du système de navigation permet de se libérer de la contrainte d'avoir quatre satellites en ligne de vue afin de calculer une solution de navigation. De plus, chacun des satellites joue un rôle important dans le calcul de la solution de navigation hybride GPS/INS même lorsque la visibilité est réduite.

### **1.3 Synthèse des différents modèles d'intégration GPS/INS**

L'intégration des systèmes GPS et INS peut être réalisée à différents niveaux, allant de l'utilisation dissociée des deux systèmes sans réelle interaction entre eux jusqu'à une intégration profonde fusionnant ces systèmes à l'intérieur d'un même filtre adaptatif. Schmidt et Phillips (2004) présentent une revue détaillée des méthodes qui forment l'état de l'art actuel dans le domaine de l'intégration GPS/INS.

#### **1.3.1 Intégration non couplée**

L'intégration non couplée est la méthode la plus simple utilisée dans la littérature afin d'intégrer les solutions GPS et INS à l'intérieur d'un même instrument (Greenspan, 1996; Rönnbäck, 2008; Schmidt et Phillips, 2004). Tel que présenté à la Figure 1-3, cette architecture présente un système en boucle ouverte et ne comporte pratiquement aucune interaction entre les systèmes GPS et INS. Bien que cette méthode d'intégration présente certains avantages tels que la redondance de la solution de navigation ainsi que l'indépendance totale des systèmes, très peu d'études récentes en font l'utilisation. En effet, l'intégration par couplage lâche est généralement préférée à cette méthode puisqu'elle offre de meilleures performances pour très peu d'efforts supplémentaires de développement.

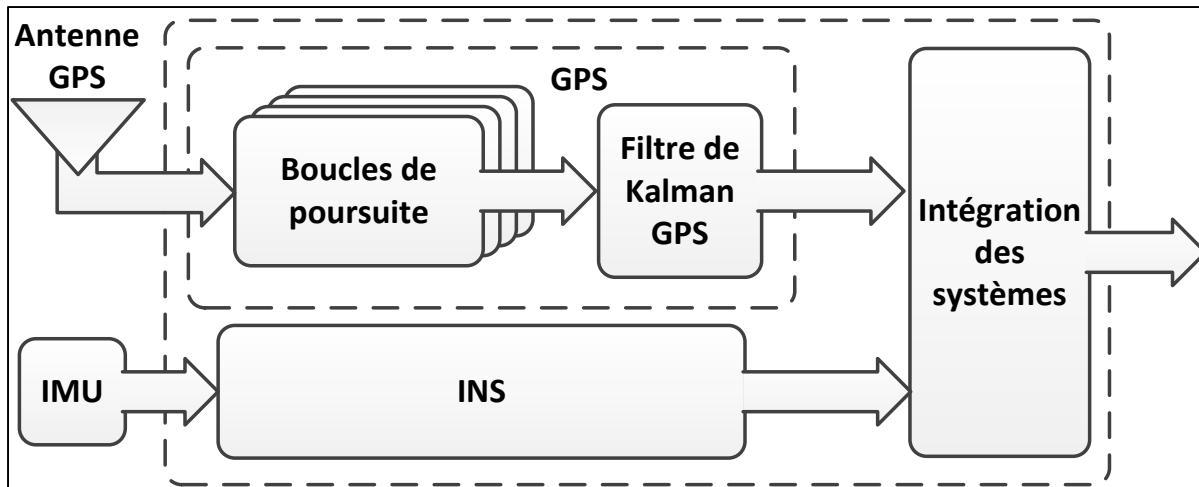


Figure 1-3: Intégration GPS/INS non couplée

### 1.3.2 Intégration par couplage lâche

L'intégration par couplage lâche (en anglais : *loosely-coupled integration*) permet de maintenir l'indépendance et la redondance des solutions GPS et INS en plus d'offrir une solution de navigation couplée plus robuste (Schmidt et Phillips, 2004). En effet, contrairement à l'intégration GPS/INS non couplée, l'intégration par couplage lâche présente une architecture en boucle fermée qui permet la correction de certains paramètres d'erreur du système INS. Cette méthode d'intégration est généralement présentée dans la littérature comme étant composée de trois entités distinctes soient la solution GPS seule, la solution INS seule et la solution couplée GPS/INS. Cette vision de l'architecture telle que présentée à la Figure 1-4, est partagée par plusieurs auteurs (Georgy, 2010; Karamat, 2009; Shin, 2002; Yang, 2008). Dans cette architecture, un filtre adaptatif (généralement un filtre de Kalman) est utilisé afin de coupler les solutions GPS et INS (position et vitesse) de manière à estimer certains paramètres d'erreurs du système. De manière générale, les paramètres estimés correspondent aux erreurs de position, de vitesse et d'attitude de la solution INS, mais certains auteurs présentent un modèle plus complet qui permet également l'estimation des erreurs de biais sur les mesures de capteurs inertiels (Niu et El-Sheimy, 2005; Petovello, 2003).

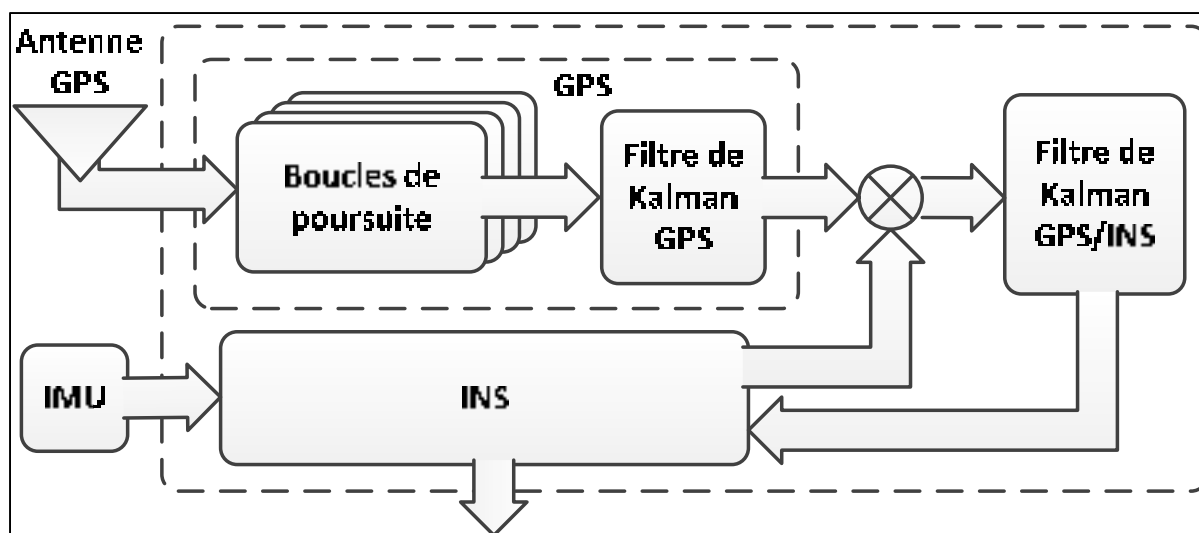


Figure 1-4 Intégration GPS/INS par couplage lâche

Le principal avantage du couplage lâche comparativement aux méthodes d'intégration plus avancées repose sur l'utilisation directe de la solution de navigation des systèmes GPS et INS. Ainsi, cette méthode peut facilement être appliquée aux produits commerciaux à faible coût.

### 1.3.3 Intégration par couplage serré

L'intégration par couplage serré (en anglais : *tightly-coupled integration*) possède plusieurs avantages par rapport aux autres méthodes présentées précédemment. Tout d'abord, cette architecture n'utilise qu'un seul filtre adaptatif (voir Figure 1-5) permettant ainsi d'éliminer l'erreur liée à la mise en cascade des différents filtres. Selon Schmidt et Phillips (2004), une architecture cascadée est loin d'être optimale et peut rendre le système difficile à paramétrer et à ajuster. Petovello (2003) affirme également que l'utilisation d'un seul filtre adaptatif permet un partage d'information statistiquement plus robuste entre les états du système en plus de permettre une réduction significative du niveau de bruit lors du filtrage des mesures GPS.

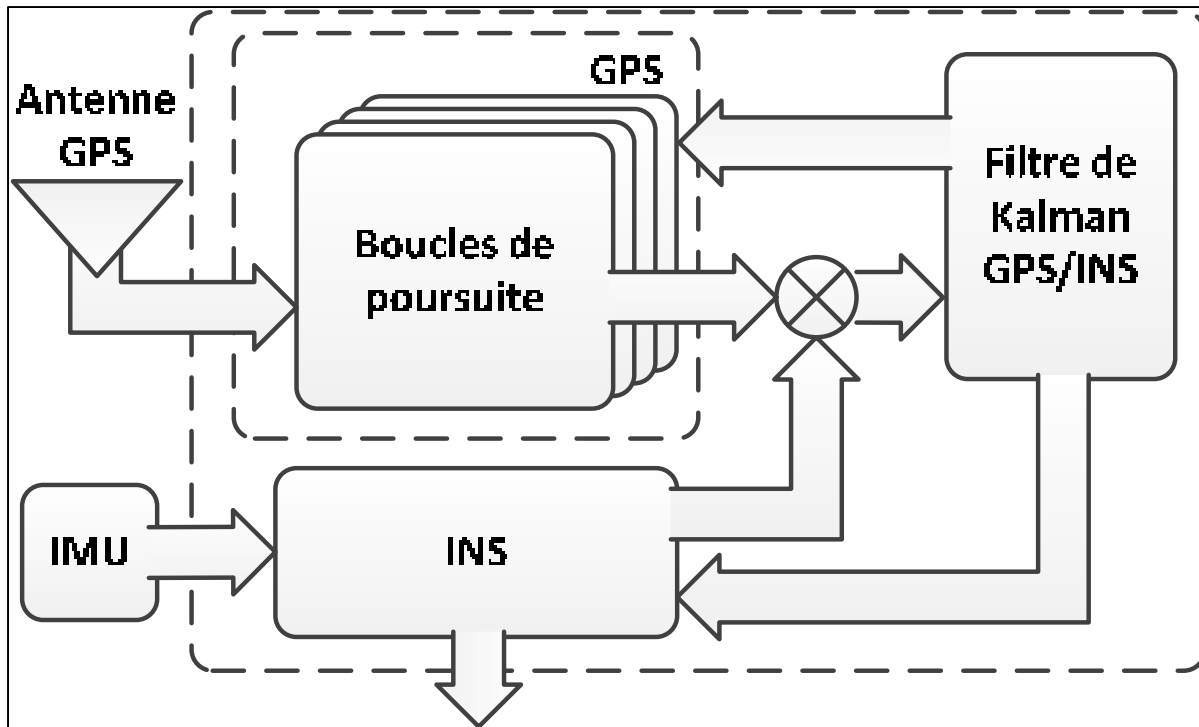


Figure 1-5 Intégration GPS/INS par couplage serré

Un autre avantage du couplage serré réside dans la nature des mesures utilisées à l'intérieur du filtre adaptatif. En effet, plutôt que d'utiliser la solution de navigation, cette architecture propose l'utilisation des mesures brutes provenant des boucles de poursuite du récepteur. Ces mesures peuvent provenir soit de la boucle de poursuite du code (mesures de pseudo-distance et de variation de pseudo-distance), ou encore de la boucle de poursuite de la porteuse (mesures de phase de la porteuse et de décalage Doppler). Dans les deux cas, les mesures provenant de chacun des satellites visibles sont utilisées à l'intérieur du filtre GPS/INS, ce qui permet d'éliminer la nécessité d'avoir en tout temps quatre satellites en ligne de vue avec le récepteur afin de réaliser l'estimation des paramètres d'erreur du système INS. Cette nécessité reste cependant présente lors de la mise en route du système de manière à obtenir la position initiale du récepteur.

Finalement, certains auteurs utilisent également les mesures d'accélération provenant des capteurs inertiels de manière à estimer le décalage Doppler causé par la dynamique du véhicule (Greenspan, 1996; Kreye, Eissfeller et Ameres, 2004). Selon Li (2009), cette

caractéristique permet d'améliorer les performances d'un récepteur GPS ainsi que ses capacités à maintenir une solution de navigation lorsque ce dernier est soumis à de fortes dynamiques. La dynamique du véhicule étant prise en compte par le système INS, il est ainsi possible de réduire de manière significative la largeur de bande des boucles de poursuite du récepteur, diminuant ainsi le niveau de bruit admis par ce dernier (Alban, Akos et Rock, 2003; Chiou, 2005; Gao et Lachapelle, 2006).

#### **1.3.4 Intégration profonde**

L'idée derrière l'intégration profonde, également appelée intégration par couplage très serré (en anglais : *deep integration* ou *ultra-tightly-coupled integration*), provient principalement du concept de boucles de poursuite vectorielles utilisées dans certains récepteurs GPS. Dans une architecture GPS/INS très serrée telle que celle présentée à la Figure 1-6, un filtre adaptatif unique travaillant directement au niveau des composantes en phase (I) et en quadrature (Q) des signaux GPS vient remplacer les filtres classiques de boucle de poursuite du récepteur (Babu, Wang et Rao, 2008; Gao, 2007; Gao et Lachapelle, 2006; Groves, Mather et Macaulay, 2007; Kreye, Eissfeller et Ameres, 2004; Li, 2009; Soloviev, van Graas et Gunawardena, 2004; Watson *et al.*, 2007). Ce filtre est utilisé afin d'estimer à la fois la solution de navigation, les paramètres de correction INS ainsi que les commandes à appliquer aux oscillateurs contrôlés numériquement.

Selon Kreye, Eissfeller et Ameres (2004), l'avantage principal de l'intégration profonde provient du fait que les boucles de poursuite du récepteur GPS ne sont désormais plus indépendantes et ne sont plus basées uniquement sur les mesures d'un seul satellite. Ainsi, même dans une situation où le ratio signal sur bruit est faible, les mesures de boucle de poursuite peuvent tout de même être estimées et générées ce qui rend le récepteur plus robuste au décrochage en environnement difficile (Kreye, Eissfeller et Ameres, 2004).

Gao et Lachapelle (2006) présentent un tableau récapitulatif de certains avantages de l'intégration profonde GPS/INS en environnement difficile. Tout d'abord, selon les auteurs

de cette étude, l'intégration profonde permettrait la poursuite des signaux GPS jusqu'à 30 dB plus faible que dans les récepteurs GPS standards. De plus, tout comme dans le cas de l'intégration GPS/INS par couplage serré, l'information provenant des mesures INS peut être utilisée afin d'accélérer le processus d'acquisition et de ré-acquisition des signaux GPS. Finalement, l'intégration profonde assurerait un estimé précis des observations de phase de la porteuse permettant ainsi de réduire ou même d'éliminer complètement les erreurs de saut de cycle.

Cependant, tel que mentionné par Groves, Mather et Macaulay (2007), le principal inconvénient de l'intégration profonde provient du fait que cette méthode nécessite des modifications importantes dans l'architecture du récepteur GPS. En effet, cette approche nécessite une restructuration complète des boucles de poursuite du récepteur GPS ainsi que l'ajout d'un filtre adaptatif complexe. C'est principalement pour cette raison que cette méthode ne sera pas utilisée dans le cadre de ce mémoire.

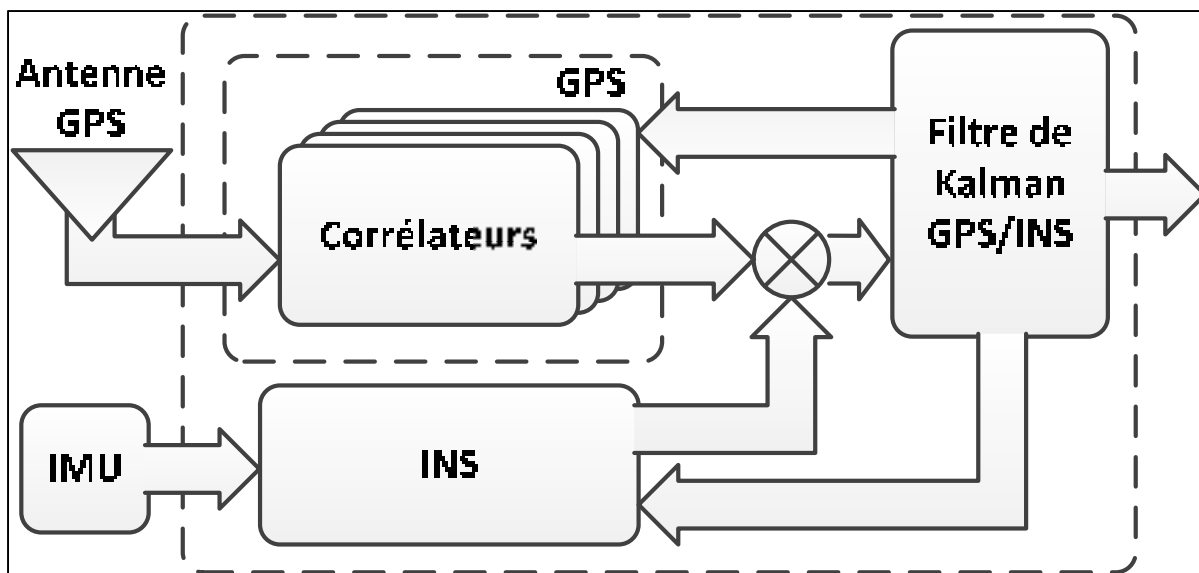


Figure 1-6 Intégration profonde GPS/INS



## **1.4 Navigation inertielle à faible coût**

L'apparition récente sur le marché des capteurs inertiels à faible coût a permis une expansion majeure du domaine d'application des systèmes INS. Ainsi, de nombreux domaines s'intéressent désormais à cette technologie, tels que le secteur biomédical, la navigation pédestre ainsi que la capture de mouvements pour l'industrie du cinéma et des jeux vidéo. Contrairement aux systèmes haut de gamme utilisés depuis de nombreuses années et ayant atteint un certain niveau de maturité, les performances des systèmes INS à faible coût restent encore très limitées lorsqu'utilisés de manière complètement autonome. Des études récentes ont toutefois été réalisées dans le but d'améliorer ces performances. Selon Giroux (2004), les méthodes développées dans le cadre de ces études peuvent être basées sur différentes approches dont l'amélioration de la mesure, l'ajout de capteurs externes, l'identification en ligne des erreurs de capteurs et l'utilisation de modèles de connaissance. Ces différentes approches seront d'ailleurs étudiées et utilisées dans ce mémoire.

### **1.4.1 Calibration des erreurs déterministes**

Les erreurs de nature déterministe présentes sur les mesures de capteurs inertiels telles que le biais, l'erreur de mauvais alignement et le facteur d'échelle sont parmi les principales sources d'erreur des systèmes INS à faible coût. La Figure 1-7 présente notamment une vue d'ensemble des erreurs de mesures typiques présentes sur les mesures provenant des capteurs inertiels. De manière générale, ces erreurs peuvent être estimées et éliminées par l'utilisation d'une méthode de calibration adéquate.

Une technique répandue dans la littérature afin de calibrer les capteurs inertiels haut de gamme est la méthode à 6 positions présentée entre autre par Titterton et Weston (2004). Cette procédure consiste à mesurer, à l'aide des capteurs inertiels, la force d'attraction gravitationnelle ainsi qu'une vitesse de rotation connue selon 6 orientations prédéfinies. Les mesures sont par la suite comparées à des valeurs de références à l'intérieur d'un algorithme d'estimation des moindres carrés de manière à déterminer les différents paramètres de calibration. Cette méthode requiert cependant le maintien d'une vitesse de rotation constante

ainsi qu'un alignement précis entre les axes du capteur et ceux du repère local, ce qui nécessite généralement l'usage d'une table tournante de haute précision (Artese et Trecroci, 2008; El-Diasty et Pagiatakis, 2008; Rogers, 2003; Syed *et al.*, 2007; Titterton et Weston, 2004).

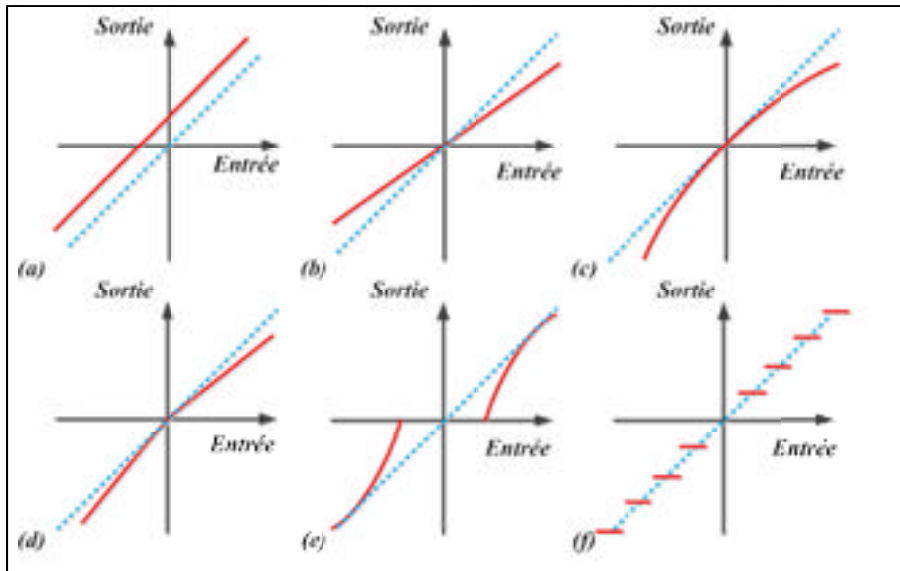


Figure 1-7 Erreurs de mesures typiques : (a) biais; (b) facteur d'échelle; (c) non linéarités; (d) asymétrie; (e) zone morte; (f) discrétisation;  
Adaptée de Grewal, Weill et Andrews (2007, p. 337)

Afin d'éliminer cette nécessité, Shin et El-Sheimy (2002) ont mis sur pied une approche de calibration appelée méthode multi-position qui peut être réalisée sans l'aide d'aucun instrument externe. Selon cette méthode, l'alignement précis des axes du capteur avec ceux du repère local n'est pas nécessaire et le vecteur de référence utilisé pour la calibration des gyroscopes provient de la rotation de la Terre plutôt que d'une table tournante (Shin et El-Sheimy, 2002). Selon El-Diasty et Pagiatakis (2008), la rotation terrestre est cependant trop faible pour être ressentie par les gyroscopes à faible coût résultant ainsi en une mauvaise estimation des paramètres de calibration. Syed et al. (2007) présentent notamment des résultats démontrant l'impact que peut avoir de telles erreurs de calibration sur la solution de navigation. Ainsi, l'utilisation de cette approche pour des capteurs inertiels à faible coût devrait se limiter uniquement à la calibration des accéléromètres.

Les travaux en lien avec la méthode de calibration multi-position ont par la suite été poursuivis et publiés par Syed et al. (2007). Dans cette étude, les auteurs présentent une version modifiée de la méthode multi-position originale qui utilise désormais 26 mesures plutôt que 18 et qui permettrait une estimation précise des paramètres de biais, d'erreur de mauvais alignement et de facteur d'échelle des gyroscopes à faible coût. L'idée présentée par les auteurs dans cette étude consiste à utiliser une table tournante simple à un seul axe afin de réaliser la calibration des gyroscopes plutôt que d'utiliser la mesure de vitesse de rotation de la Terre. Cependant, tout comme pour la méthode à 6 positions présentée par Titterton et Weston (2004), l'utilisation d'une table tournante dont le prix dépasse largement le coût de production des capteurs inertiels de type MEMS rend cette méthode non envisageable dans le cadre d'une application à très faible coût, tel qu'il est question dans ce mémoire.

Ainsi, en ce qui concerne les capteurs inertiels à faible coût, la littérature présente plusieurs études concluantes concernant la calibration des accéléromètres (Artese et Trecroci, 2008; Lotters *et al.*, 1998; Skog et Händel, 2006; Syed *et al.*, 2007; Wang, Hsu et Liu, 2010), mais reste très limitée en ce qui concerne la calibration des gyroscopes sans l'utilisation d'instrument externe. Looney (2010) de même que Wang, Hsu et Liu (2010) présentent cependant une méthode simple permettant la calibration des erreurs de biais constant des gyroscopes à faible coût. Cette méthode ne permet toutefois pas de calibrer les erreurs d'alignement et de facteur d'échelle de ces derniers.

Finalement, une étude réalisée par Fong, Ong et Nee (2008) présente une nouvelle approche qui permettrait la calibration de l'ensemble des paramètres d'erreur des gyroscopes à faible coût sans l'utilisation d'équipement externe et ce, en se basant uniquement sur le vecteur de gravité terrestre.

### 1.4.2 Identification en ligne des erreurs stochastiques

En plus des erreurs de nature déterministes présentées précédemment, des erreurs de nature stochastique peuvent également contaminer les mesures de capteurs inertiels. Afin d'identifier et de caractériser ces erreurs aléatoires, une méthode fréquemment utilisée dans la littérature est l'analyse de la variance d'Allan (Allan, 1966). Cette méthode consiste en une analyse dans le domaine temporel qui permet de déterminer la nature des processus aléatoire contribuant au bruit de mesure (IEEE, 1996). Cette analyse est présentée dans plusieurs études (El-Sheimy, Haiying et Xiaoji, 2008; Hou et El-Sheimy, 2003; Li *et al.*, 2010; Sabatini, 2006) et sera détaillée davantage à la section 6.2.

Les erreurs stochastiques sont généralement divisées en deux catégories soient les composantes à haute et à basse fréquence. De manière générale, les composantes à haute fréquence, telles que le bruit blanc, peuvent être éliminées à l'aide de techniques de filtrage. Dans cette optique, El-Sheimy, Nassar et Noureldin (2004) ainsi que De Agostino (2008) présentent une méthode de filtrage par ondelettes qui permettrait d'éliminer ces composantes à haute fréquences sans altérer les informations importantes contenues sur le signal. Selon De Agostino (2008), cette approche permettrait de réduire considérablement l'incertitude sur les mesures de capteur augmentant du même coup la précision du système de navigation inertielle.

D'autre part, les composantes à basse fréquence, telles que l'instabilité du biais, le bruit corrélé et le bruit thermique doivent quant à elles être modélisées à l'aide d'un modèle mathématique adéquat afin de pouvoir être précisément estimées et corrigées. Dans la littérature, différents modèles sont utilisés tels que le modèle de biais constant, de marche aléatoire et de processus de Gauss-Markov (El-Diasty, El-Rabbany et Pagiatakis, 2007; Farrell, 2008). Gebre-Egziabher (2002) ainsi que Flenniken (2005) présentent une méthode d'estimation basée sur l'utilisation d'un modèle de Markov de premier ordre qui permettrait la correction en ligne des paramètres de dérive du biais des capteurs inertiels. Cette approche

est également utilisée par différents auteurs tels que Petovello (2003), Niu et El-Sheimy (2005), Zhiqiang et Gebre-Egziabher (2008) ainsi que Wall et Bevly (2006).

Nassar et al. (2003); Nassar (2004); Nassar, Schwarz et El-Sheimy (2004) affirment cependant que dans le cas des capteurs inertiels à faible coût de type MEMS, l'utilisation d'un modèle de Markov de premier ordre n'est pas vraiment adapté. Ces auteurs suggèrent alors l'utilisation de modèles de Gauss-Markov d'ordre plus élevé et proposent également l'utilisation d'un modèle autorégressif de deuxième ordre et plus. Selon eux, l'utilisation d'un modèle autorégressif permettrait une meilleure flexibilité que le modèle de Gauss-Markov. Cette approche est également utilisée par Park et Gao (2006). Cependant, l'augmentation de l'ordre du modèle entraîne une augmentation significative de la complexité du filtre adaptatif utilisé. Ainsi, de manière à simplifier ce filtre, les modèles d'ordre plus élevé ne seront pas étudiés davantage dans le cadre de ce mémoire.

### **1.4.3 Utilisation de magnétomètres**

Il est bien connu que l'ajout de capteurs externes aux systèmes de navigation inertielle permet l'amélioration globale de la solution de navigation. Les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire ciblent particulièrement l'utilisation du système GPS, tel que discuté la section 1.2, mais également l'utilisation de magnétomètres pour la détermination de l'attitude initiale du système. Les magnétomètres sont des instruments permettant de mesurer l'amplitude et la direction d'un champ magnétique pouvant provenir soit du champ magnétique terrestre (Gebre-Egziabher *et al.*, 2006; 2000; 2001; Lee *et al.*, 2010; Renaudin, Afzal et Lachapelle, 2010), ou encore être généré de manière artificielle par l'usage de marqueurs magnétiques (Farrell et Barth, 2001; Yunchun et Farrell, 2003). Lorsque comparée à une valeur de référence, cette mesure devient un excellent indicateur de l'attitude du mobile, d'où l'intérêt de combiner ces instruments aux systèmes de navigation inertielle.

Lors du développement d'un tel système, il est important de considérer que les magnétomètres sont des instruments très sensibles aux perturbations du champ magnétique

local telles que les erreurs de fer doux et de fer dur qui seront détaillées davantage à la section 4.4. Selon Renaudin, Afzal et Lachapelle (2010), si elles ne sont pas considérées, ces perturbations peuvent causer des erreurs importantes d'attitude lors du calcul de la solution de navigation.

Gebre-Egziabher et al. (2006); Gebre-Egziabher et al. (2001) présentent notamment une méthode de calibration des magnétomètres basée sur l'utilisation d'un algorithme d'estimation non linéaire permettant de calibrer non seulement les erreurs de fer doux et de fer dur mais également les erreurs de biais, de facteur d'échelle et de mauvais alignement présentes sur les mesures de magnétomètres. Selon les auteurs de cette étude, le principal avantage de cette technique est qu'elle ne nécessite l'usage d'aucune référence externe de cap. Cette méthode est plutôt basée sur l'idée que lorsque deux magnétomètres sont disposés de manière orthogonale, le lieu géométrique des mesures de champ magnétique provenant de ces derniers devrait former une sphère centrée à zéro dont le rayon devrait être égal à l'amplitude du champ magnétique terrestre.

Dans le cadre d'une étude visant le développement d'un système de navigation hybride GPS/Magnétomètres, Guo et al. (2008) utilisent une méthode de calibration similaire à celle présentée par Gebre-Egziabher et al. (2006); Gebre-Egziabher et al. (2001), mais comportant une étape supplémentaire. En plus de réaliser la calibration initiale des magnétomètres, les auteurs de cette étude utilisent un algorithme d'estimation des moindres carrés afin d'estimer les erreurs résiduelles causées par des perturbations ponctuelles du champ magnétique présentes dans l'environnement de test. Ces erreurs sont représentées par une série de Fourier dont les paramètres sont estimés à partir des mesures de magnétomètres et des mesures GPS.

Finalement, Renaudin, Afzal et Lachapelle (2010) présentent une nouvelle approche basée sur l'idée que le lieu géométrique formé par les mesures non calibrées de la triade de magnétomètres devrait former un ellipsoïde de révolution. Selon cette étude, la calibration des erreurs de magnétomètres peut être réalisée en deux étapes, soient la détermination de

l'équation de l'ellipsoïde par la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la détermination des paramètres de calibration basée sur l'équation de l'ellipsoïde. Contrairement à la technique présentée par Gebre-Egziabher et al. (2006); Gebre-Egziabher et al. (2001) qui impose certaines limitations au modèle d'erreur des magnétomètres, cette méthode n'apporte aucune simplification ce qui permet la détermination de l'ensemble des paramètres de calibration (Renaudin, Afzal et Lachapelle, 2010).

#### **1.4.4 Utilisation de modèles de connaissance**

Un modèle de connaissance est un modèle mathématique permettant de caractériser la dynamique normale d'un mobile. Ainsi, ces modèles permettent généralement de définir certaines contraintes sur le véhicule utilisé en définissant des états improbables dans lesquels le système de navigation ne devrait jamais entrer.

Dans cette optique, Georgy (2010) présente l'utilisation d'un système de navigation hybride GPS/INS basé sur l'utilisation d'un filtre adaptatif non-linéaire et utilisant les contraintes non holonomes d'un véhicule terrestre. Ces contraintes sont principalement basées sur le principe qu'un véhicule automobile n'est normalement pas en mesure de se déplacer de façon latérale ou verticale mais est plutôt contraint à se déplacer selon son axe longitudinal. Ainsi, dans ce type de système, les contraintes non holonomes peuvent être utilisées en tant qu'observations continues, et peuvent généralement être appliquées au système sous la forme d'une mise-à-jour des vitesses nulles (ZUPT – *Zero Velocity Update*). Grejner-Brzezinska, Toth et Yi (2002) ainsi que Niu et El-Sheimy (2005) présentent également de systèmes similaires basés sur l'utilisation de ZUPT et de contraintes non holonomes dans le cadre d'études réalisées dans le domaine de la navigation automobile.

Godha, Lachapelle et Cannon (2006) présentent quant à eux un système de navigation inertielle monté sur un soulier permettant la navigation pédestre à l'intérieur des bâtiments. Dans cette étude, les auteurs utilisent principalement la technique de ZUPT afin de contenir les erreurs du système, mais ils introduisent également un autre type de modèle de

connaissance, soit la détermination de la posture du sujet (c.-à-d. talon soulevé, orteils soulevés, talon au sol, pied à plat etc.). Les travaux en lien avec cette idée ont également été poursuivis et publiés par Kwakkel, Godha et Lachapelle (2007). D'autres études similaires ont également été publiées au cours des dernières années (Faulkner et Chestnut, 2008; Faulkner *et al.*, 2010).



## CHAPITRE 2

### CONCEPTS FONDAMENTAUX EN NAVIGATION

De manière à pouvoir modéliser un système de navigation, il est d'abord nécessaire de bien définir certains concepts fondamentaux. Ce chapitre présentera d'abord la géométrie de la Terre ainsi que les différents repères orthogonaux utilisés dans le cadre de ce projet. Par la suite, le concept d'attitude ainsi que ses différentes représentations seront présentés. Finalement, la modélisation du vecteur de gravité ainsi que du taux de transport sera détaillée.

#### 2.1 Géométrie de la terre

Dans un monde idéal, la surface de la Terre serait uniforme et pourrait être représentée facilement par une équation mathématique, ce qui faciliterait grandement les calculs à l'intérieur des algorithmes de navigation.

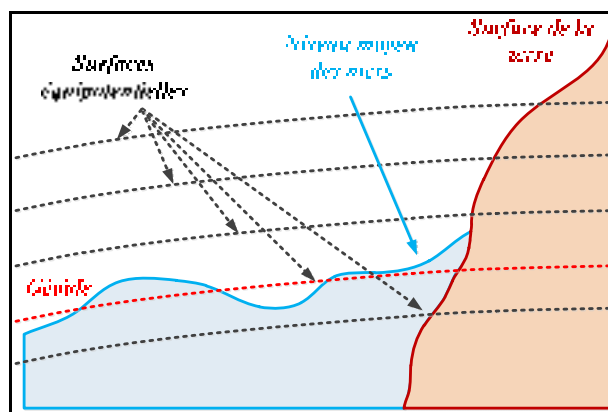


Figure 2-1 Surfaces équipotentielles et Géoïde  
Adaptée de Bekir (2007)

La réalité est cependant bien différente et la surface de la Terre est plutôt modélisée comme étant une surface équipotentielle du champ gravitationnel terrestre appelée géoïde qui est, par définition, la surface équipotentielle s'avoisinant le mieux au niveau moyen des mers (MSL –

*Mean Sea Level*) (voir Figure 2-1). Dans le cadre de ce projet, le modèle gravitationnel de la Terre de 1996 (*EGM96 – Earth Gravitational Model of 1996*) est utilisé afin d’estimer le géoïde. C’est notamment ce dernier qui est utilisé présentement par la révision de 1984 du système géodésique mondial (*WGS84 – World Geodetic System of 1984*). Le géoïde est mathématiquement complexe et peu pratique lorsqu’il est question de réaliser les calculs à l’intérieur d’un algorithme de navigation. C’est principalement pour cette raison que les ellipsoïdes de référence furent définis. Ainsi, la surface de la Terre peut également être représentée mathématiquement par un ellipsoïde de révolution (voir Figure 2-2) qui, par définition, s’apparente le mieux à la surface du géoïde en termes de moindres carrés. Les paramètres de l’ellipsoïde de référence, tels que définis par le système géodésique mondial WGS84, sont présentés au Tableau-A I-3.

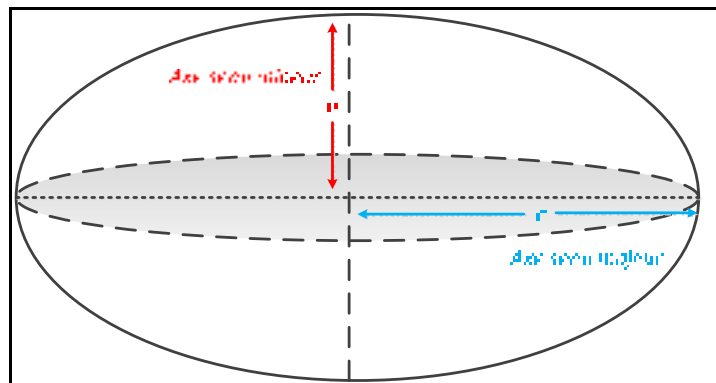


Figure 2-2 Ellipsoïde de révolution

Étant donné les irrégularités au niveau du champ gravitationnel terrestre, la différence d’altitude entre le géoïde et l’ellipsoïde de référence n’est pas constante d’un endroit à l’autre du globe mais tend plutôt à onduler, tel qu’illustré à la Figure 2-3. Ceci met en évidence un conflit potentiel qui pourrait survenir lors de la représentation de l’altitude d’un mobile. Afin d’éviter cette confusion, les termes élévation et altitude ellipsoïdale ont été définis (voir Figure 2-4).

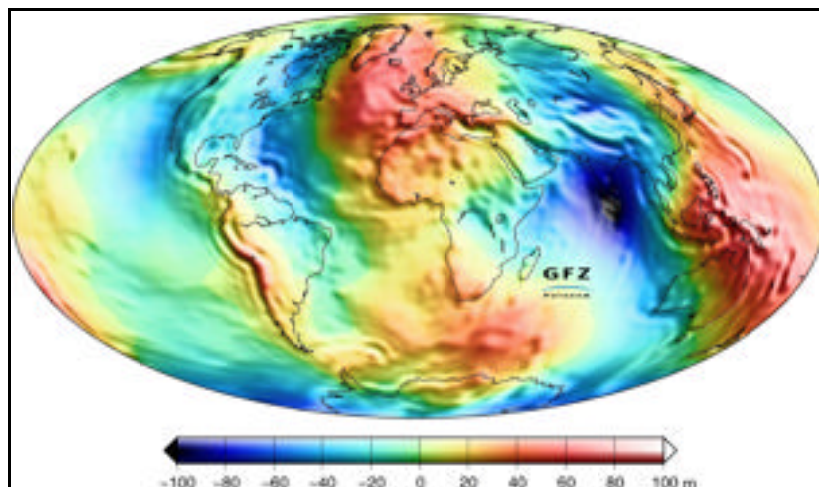


Figure 2-3 Ondulation du Géoïde  
Tirée de GFZ-Potsdam (2004)

Ainsi, l'élévation ( $H$ ) représente l'altitude au-dessus du géoïde tandis que l'altitude ellipsoïdale ( $h$ ) représente l'altitude au-dessus de l'ellipsoïde de référence. Le terme ondulation ( $N$ ) est également utilisé afin de représenter la différence entre l'altitude ellipsoïdale et l'élévation. D'autres paramètres importants de la Terre sont également définis par le système WGS84 tels que la vitesse de rotation de la Terre ( $\omega_{IE}$ ) ainsi que la constante gravitationnelle ( $GM$ ) (voir *Tableau-A I-3*).

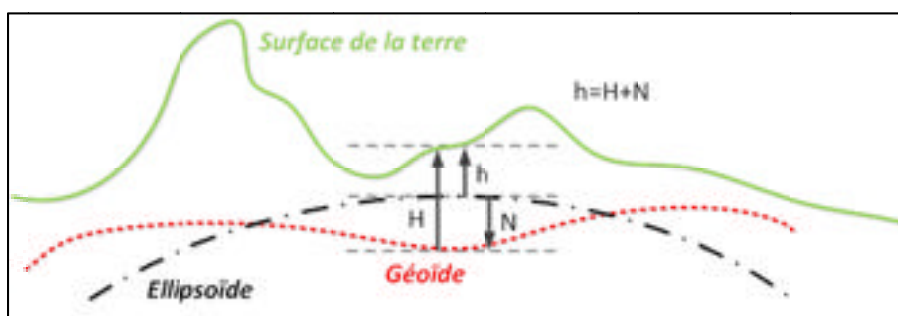


Figure 2-4 Altitude ellipsoïdale, élévation et ondulation

## 2.2 Repères utilisés en navigation

### 2.2.1 Repère inertiel terrestre (I)

Le repère inertiel terrestre (ECI – *Earth Centered Inertial*) est un repère orthogonal dont l'origine coïncide avec le centre de masse de la Terre et dont les axes Y et Z sont orientés respectivement en direction de l'axe de rotation de la Terre et du point d'équinoxe du printemps<sup>1</sup>. L'axe X est quant à lui orienté de manière à compléter la règle de la main droite, pour ainsi former un repère orthogonal, tel qu'illustré sur la Figure 2-5. Un repère inertiel est un repère qui ne tourne ni accélère par rapport au reste de l'univers et dans lequel les lois de Newton s'appliquent. Tous les capteurs inertiels mesurent une quantité physique par rapport au repère inertiel terrestre (I) et exprimée selon le repère du mobile (B) d'où la notation  $\underline{x}_{IB}^B$ . Pour plus de détails sur la notation ainsi que sur les différentes constantes qui seront utilisées dans ce mémoire, le lecteur est invité à consulter le Tableau-A I-1.

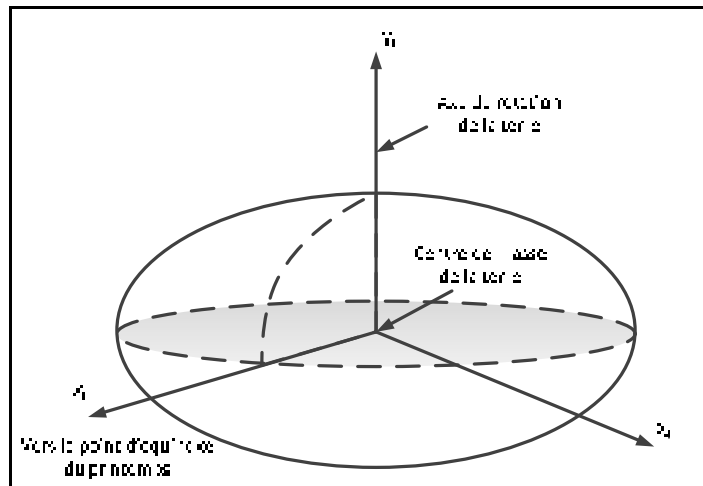


Figure 2-5 Repère inertiel terrestre (ECI)

<sup>1</sup> Le point d'équinoxe du printemps est défini comme étant le point d'intersection entre le plan équatorial de la Terre et le plan de l'orbite de rotation de la terre autour du soleil

### 2.2.2 Repère fixe terrestre (E)

Le repère fixe terrestre (ECEF – *Earth Centered Earth Fixed*) est un repère orthogonal dont l'origine fixé au centre de masse de la Terre. Ainsi, le repère ECEF tourne avec la Terre et possède donc une vitesse de rotation constante par rapport au repère ECI tel que (Farrell, 2008) :

$$\omega_{IE} \approx \left( \frac{1 + 365.25 \text{ cycle}}{(365.25)(24)h} \right) \left( \frac{2\pi \text{ rad/cycle}}{3600 \text{ s/h}} \right) = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (2.1)$$

Les axes Y et Z de ce repère sont orientés respectivement en direction de l'axe de rotation de la Terre et du méridien de Greenwich tandis que l'axe X complète la règle de la main droite, pour ainsi former un repère orthogonal, tel qu'illustré à la Figure 2-6.

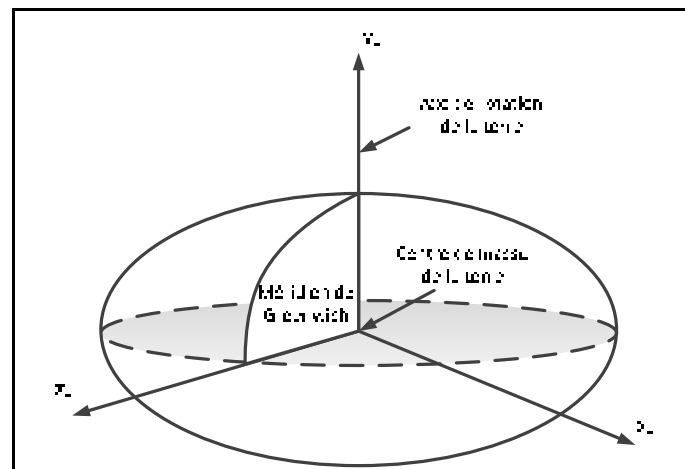


Figure 2-6 Repère fixe terrestre (ECEF)

Le repère ECEF peut être utilisé afin d'exprimer une position selon des coordonnées cartésienne ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ) mais également selon des coordonnées géodésiques (voir Figure 2-7). Les coordonnées géodésiques sont exprimées en terme de latitude ( $\phi$ ), de longitude ( $\lambda$ ) et d'altitude ellipsoïdale ( $h$ ) qui sont définis tel que :

**Latitude ( $\phi$ )** : Angle formé, sur un plan méridien, entre le plan équatorial et le rayon de courbure normal de la Terre ( $R_N$ ).

**Longitude ( $\lambda$ )** : Angle formé, sur un plan équatorial, entre le méridien de Greenwich et la projection du point d'intérêt sur un plan équatorial.

**Altitude ellipsoïdale ( $h$ )** : Distance entre le point d'intérêt et l'ellipsoïde de référence, mesurée au-dessus de l'ellipsoïde et selon un axe perpendiculaire à celui-ci.

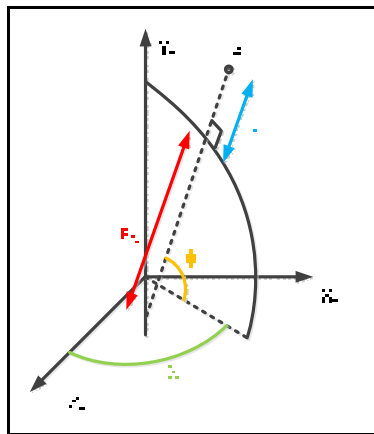


Figure 2-7 Coordonnées géodésiques  
(latitude, longitude et altitude ellipsoïdale)

La transformation entre les coordonnées cartésiennes et géodésiques peut être réalisée à l'aide d'équations mathématiques. Dans le cas où les coordonnées géodésiques sont connues, les coordonnées cartésiennes sont calculées à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ (R_N(1 - e^2) + h) \sin \lambda \\ (R_N + h) \cos \phi \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.3)$$

dans lesquelles :

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (2.4)$$

où :

$x, y, z$  : coordonnées cartésiennes ECEF

- $\phi, \lambda, h$  : coordonnées géodésiques ECEF  
 $a$  : axe semi-majeur de l'ellipsoïde de référence (voir *Tableau-A I-3*)  
 $e$  : excentricité de l'ellipsoïde de référence  
 $f$  : coefficient d'aplatissement de l'ellipsoïde de référence  
 $R_N$  : rayon de courbure normal de la Terre

Dans le cas opposé où les coordonnées cartésiennes sont connues, la longitude peut être obtenue directement à partir de l'équation (2.2) tel que :

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) \quad (2.5)$$

Les paramètres de latitude et d'altitude ellipsoïdale doivent cependant être calculés à l'aide d'une méthode itérative. Cette méthode itérative est réalisée en deux étapes soient (Farrell, 2008):

1) L'initialisation des paramètres tel que :

$$h = 0 \quad (2.6)$$

$$R_N = a \quad (2.7)$$

$$p = \sqrt{z^2 + x^2} \quad (2.8)$$

2) L'itération des équations suivantes jusqu'à la convergence des données :

$$\sin \phi = \frac{y}{(1 - e^2)R_N + h} \quad (2.9)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y + e^2 R_N \sin \phi}{p}\right) \quad (2.10)$$

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.11)$$

$$h = \frac{p}{\cos \phi} - R_N \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Repère local (L)

Le repère local est un repère orthogonal centré sur le mobile et dont le plan X-Y est tangent à l'ellipsoïde de référence d'où son surnom de plan tangent. Tel qu'illustré à la Figure 2-8, les axes X, Y et Z de ce repère sont orientés respectivement selon le nord vrai, l'est et le bas, ce qui explique pourquoi il est également appelé repère NED (*North East Down*) dans la littérature. C'est par rapport à ce repère local que l'attitude du mobile est généralement représentée.

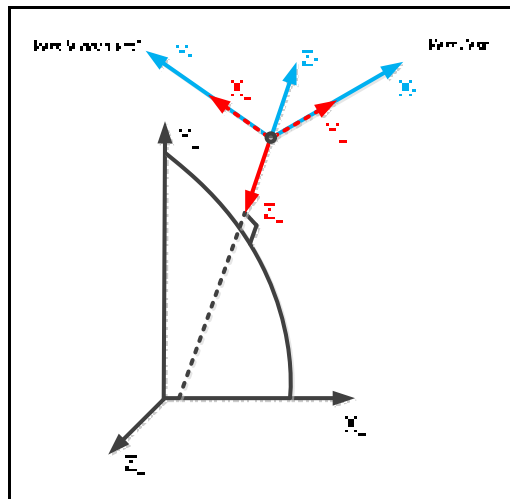


Figure 2-8 Repère NED (en rouge) et ENU (en bleu)

### 2.2.4 Repère de navigation (N)

Le repère de navigation est le repère orthogonal selon lequel les équations de navigation sont représentées. Dans certaines études, le repère de navigation coïncide avec le repère local mais, dans le cadre de ce mémoire, les équations de navigation sont plutôt calculées selon un repère ENU (*East North Up*). Ainsi, les axes X, Y et Z du repère de navigation sont orientées respectivement selon l'est, le nord vrai et le haut tel qu'illustré sur la Figure 2-8. Tout comme le repère local, le repère de navigation est centré sur le mobile et son plan X-Y est tangent à l'ellipsoïde de référence. Il existe une relation directe et inverse entre le repère local et le repère de navigation, tel que :



$$\underline{v}^N = \mathbf{C}_L^N \underline{v}^L \quad (2.13)$$

$$\underline{v}^L = \mathbf{C}_L^N \underline{v}^N \quad (2.14)$$

$$\mathbf{C}_L^N = \mathbf{C}_N^L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

où :

$\underline{v}^N$  : vecteur exprimé selon le repère de navigation

$\underline{v}^L$  : vecteur exprimé selon le repère local

$\mathbf{C}_L^N, \mathbf{C}_N^L$  : matrices de rotation entre le repère local et le repère de navigation

Le concept de matrices de rotation ou matrices des cosinus de direction (DCM – *Direction Cosine Matrix*) sera présenté à la section 2.3.1.

### 2.2.5 Repère du mobile (B)

Le repère du mobile (en anglais : *body frame*) est un repère orthogonal fixé au cadre rigide du véhicule et dont l'origine coïncide généralement avec le centre de masse de ce dernier. Les axes X, Y et Z de ce repère sont orientés respectivement vers l'avant (selon l'axe longitudinal), la droite et le bas du véhicule tel qu'illustré sur la Figure 2-9. Les mesures inertielles utilisées par l'algorithme INS sont généralement exprimées selon ce repère.

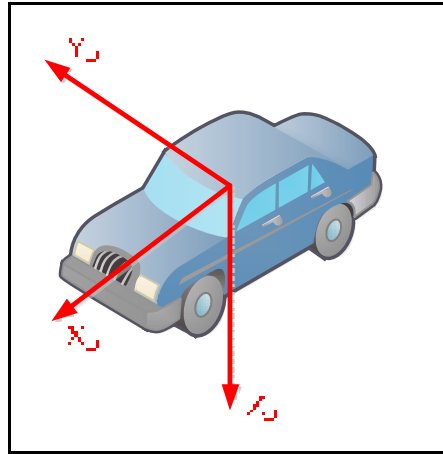


Figure 2-9 Repère du mobile

### 2.2.6 Repère des capteurs (S)

Le repère des capteurs est celui selon lequel les mesures inertielles brutes sont obtenues. Dans plusieurs études, le repère des capteurs est directement utilisé comme repère du mobile, ce qui est cependant quelque peu erroné lorsque l'on prend en considération les erreurs d'alignement, de biais et de facteur d'échelle inhérentes aux mesures provenant des capteurs inertiels. L'équation suivante présente la relation mathématique qui existe entre le repère du mobile et le repère des capteurs.

$$\underline{v}^B = \mathbf{E}(\underline{v}^S + \underline{b}) \quad (2.16)$$

où :

$\mathbf{E}$  : matrice combinée d'erreur de mauvais alignement et de facteur d'échelle

$\underline{b}$  : vecteur de biais de mesure

Plus de détails sur la nature des erreurs de capteurs seront présentés à la section 4.4.

### 2.2.7 Relation entre le repère fixe terrestre et le repère de navigation

Il existe une relation mathématique permettant de transformer la représentation d'un vecteur exprimé selon le repère de navigation vers une représentation selon le repère fixe terrestre.

Cette relation découle d'une séquence de deux rotations correspondant à une rotation en sens horaire de l'angle de latitude ( $\phi$ ) autour de l'axe x du repère de navigation suivie d'une rotation en sens antihoraire de l'angle de longitude ( $\lambda$ ) autour de l'axe y résultant. Cette séquence est illustrée sur la Figure 2-10.

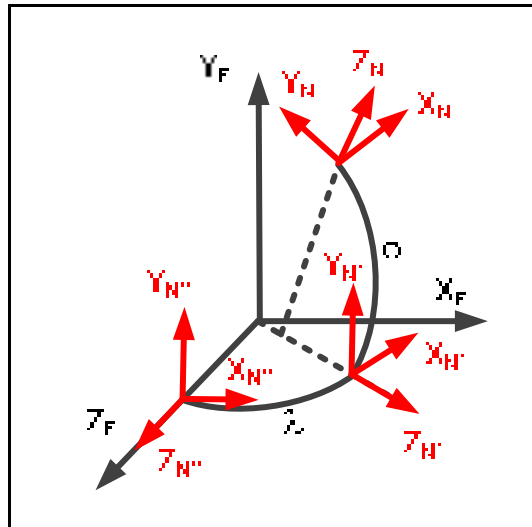


Figure 2-10 Séquence de rotation caractérisant la relation entre le repère de navigation et le repère fixe terrestre

Cette série de rotations peut être représentée mathématiquement par le concept de matrices des cosinus de direction tel que:

$$C_N^E = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \phi & \cos \phi \sin \lambda \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où :

$C_N^E$  : matrice de rotation entre le repère de navigation et le repère fixe de la Terre

Cette matrice peut être utilisée afin de transformer la représentation d'un vecteur à partir du repère de navigation vers le repère fixe terrestre tel que :

$$\underline{v}^E = \mathbf{C}_N^E \underline{v}^N \quad (2.18)$$

Par définition, l'inverse d'une DCM correspond à sa transposée (*voir ANNEXE II*). Ainsi, la relation inverse est définie par l'expression suivante :

$$\underline{v}^N = (\mathbf{C}_N^E)^{-1} \underline{v}^E = (\mathbf{C}_N^E)^T \underline{v}^E = \mathbf{C}_E^N \underline{v}^E \quad (2.19)$$

### 2.3 Représentations de l'attitude d'un mobile

L'attitude d'un mobile peut être représentée selon différentes formes. Dans le cadre de ce mémoire, trois principales représentations sont utilisées soient la matrice des cosinus de direction, les angles d'Euler et le quaternion unitaire.

#### 2.3.1 Matrice des cosinus de direction

Tel que démontré à quelques reprises dans les sections précédentes, une matrices des cosinus de direction, également appelées matrices de rotation, permet de transformer la représentation d'un vecteur entre deux repères tel que :

$$\underline{v}^A = \mathbf{C}_B^A \underline{v}^B \quad (2.20)$$

Les matrices des cosinus de direction seront notées  $\mathbf{C}_B^A$  dans ce mémoire, où l'indice B représente le repère initial et l'exposant A représente le repère de destination. Selon cette notation, une DCM caractérise la rotation nécessaire à appliquer au repère B afin de le superposer avec le repère A. Cette matrice est entièrement caractérisée par le cosinus des angles formés entre les axes des deux repères (*voir Figure 2-11*), tel que :

$$\mathbf{C}_B^A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\beta_1) & \cos(\gamma_1) \\ \cos(\alpha_2) & \cos(\beta_2) & \cos(\gamma_2) \\ \cos(\alpha_3) & \cos(\beta_3) & \cos(\gamma_3) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

où :

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  : angles formés respectivement entre les axes x, y et z du repère de destination et l'axe x du repère initial
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  : angles formés respectivement entre les axes x, y et z du repère de destination et l'axe y du repère initial
- $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  : angles formés respectivement entre les axes x, y et z du repère de destination et l'axe z du repère initial

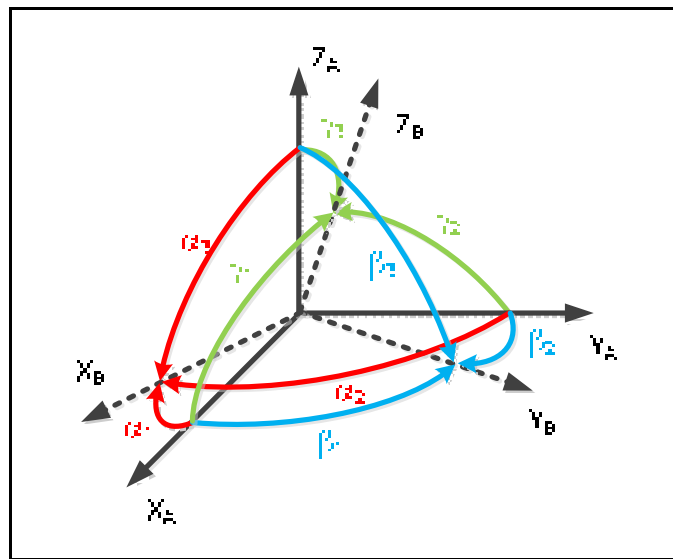


Figure 2-11 Cosinus de direction

Lorsque ce concept est utilisé afin de définir l'orientation du repère du mobile par rapport au repère local, il est un excellent indicateur de l'orientation du véhicule par rapport au nord vrai, à l'est et à l'axe vertical. C'est pourquoi plusieurs auteurs utilisent la matrice  $C_B^L$  afin de représenter l'attitude d'un mobile. Les principales propriétés d'une DCM sont détaillées à l'ANNEXE II.

### 2.3.2 Angles d'Euler

L'attitude d'un mobile peut également être représentée par les angles d'Euler qui caractérisent l'orientation du repère du mobile par rapport au repère local. Ainsi, en considérant un repère quelconque comme étant initialement aligné avec le repère local,

l'orientation du repère du mobile peut être obtenue par une série de trois rotations successive le long de chacun des axes du repère local (voir Figures 2.12 à 2.14). D'un auteur à l'autre, l'ordre dans lequel les rotations sont effectuées peut varier. Dans le cadre de ce mémoire, la séquence utilisée est la suivante :

- 1) une rotation de l'angle de lacet ( $\psi$ ) autour de l'axe z du repère local :

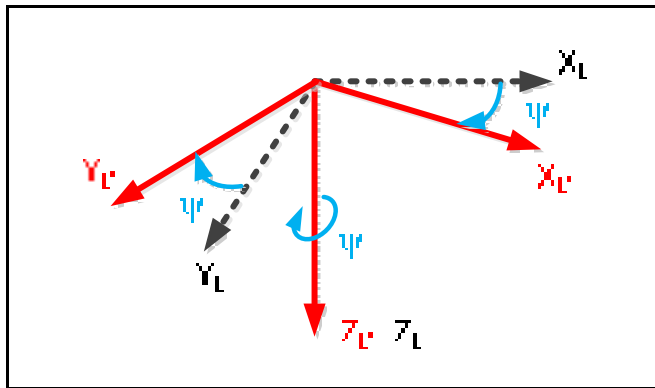


Figure 2-12 Rotation de l'angle de lacet

- 2) une rotation de l'angle de tangage ( $\theta$ ) autour de l'axe y résultant :

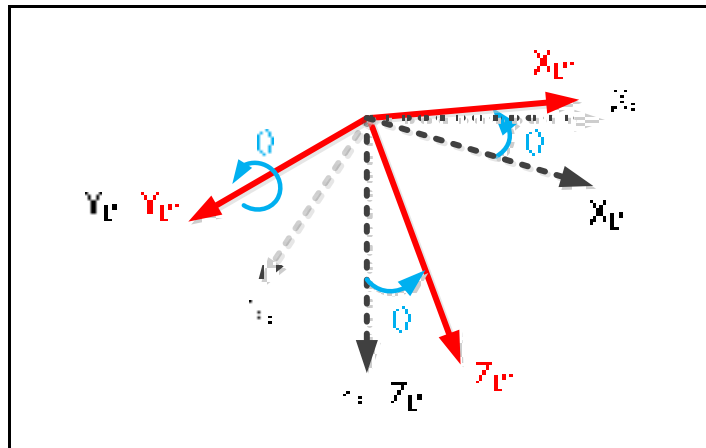


Figure 2-13 Rotation de l'angle de tangage

- 3) une rotation de l'angle de roulis ( $\phi$ ) autour de l'axe x résultant :

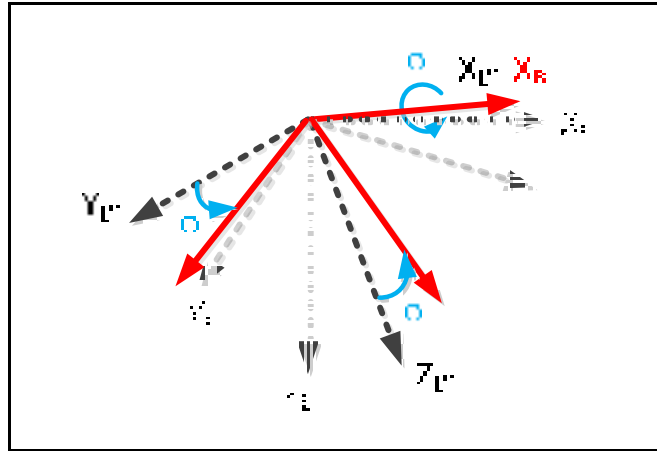


Figure 2-14 Rotation de l'angle de roulis

Les angles d'Euler, définissent ainsi une représentation unique de l'orientation du repère du mobile par rapport au repère local. Mathématiquement, la séquence d'angles d'Euler peut être représentée par le concept de matrices des cosinus de direction présenté précédemment tel que :

$$\mathbf{C}_B^L = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \theta \cos \psi \\ c_{12} &= -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ c_{13} &= \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ c_{21} &= \cos \theta \sin \psi \\ c_{22} &= \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ c_{23} &= -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ c_{31} &= -\sin \theta \\ c_{32} &= \sin \phi \cos \theta \\ c_{33} &= \cos \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

où :

$\phi, \theta, \psi$  : angles d'Euler (roulis, tangage et lacet)

$c_{ij}$  : élément de la rangée  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{C}_B^L$

$\mathbf{C}_B^L$  : matrice de rotation entre le repère du mobile et le repère local

Cette relation permet ainsi d'exprimer la matrice de rotation  $\mathbf{C}_B^L$  en fonction des angles d'Euler. L'inverse est également possible et est défini tel que:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}} \quad (2.24)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}} \quad (2.25)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}} \quad (2.26)$$

Les équations (2.25) et (2.26) sont cependant valides seulement lorsque la valeur absolue de l'angle de tangage est différente de  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ). Dans le cas opposé, les éléments  $c_{11}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{32}$  et  $c_{33}$  tendent tous vers zéro, selon l'équation (2.23), et les angles de roulis et de lacet deviennent indéterminés.

### 2.3.3 Quaternion unitaire

Finalement, l'attitude d'un mobile peut être représentée par un quaternion unitaire formé de quatre paramètres soient une composantes scalaire ainsi que trois composantes représentant les éléments d'un vecteur. Le terme quadrivecteur est utilisé dans la littérature afin d'exprimer un tel vecteur à quatre composantes. L'expression générale du quaternion unitaire est la suivante :

$$q = a + b \cdot \underline{i} + c \cdot \underline{j} + d \cdot \underline{k} \quad (2.27)$$



$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où :

$q$  : quaternion unitaire

$a, b, c, d$  : éléments du quaternion unitaire  $q$

Selon la représentation par quaternion unitaire, l'orientation d'un repère par rapport à un autre peut être entièrement caractérisée par un vecteur unitaire et une amplitude de rotation. Par exemple, considérons les repères A et B illustrés à la Figure 2-15 comme étant initialement alignés. Considérons par la suite que le repère A est tourné d'une amplitude de  $\zeta$  radians autour d'un vecteur unitaire  $\underline{u}$  tel qu'illustré sur la Figure 2-15.

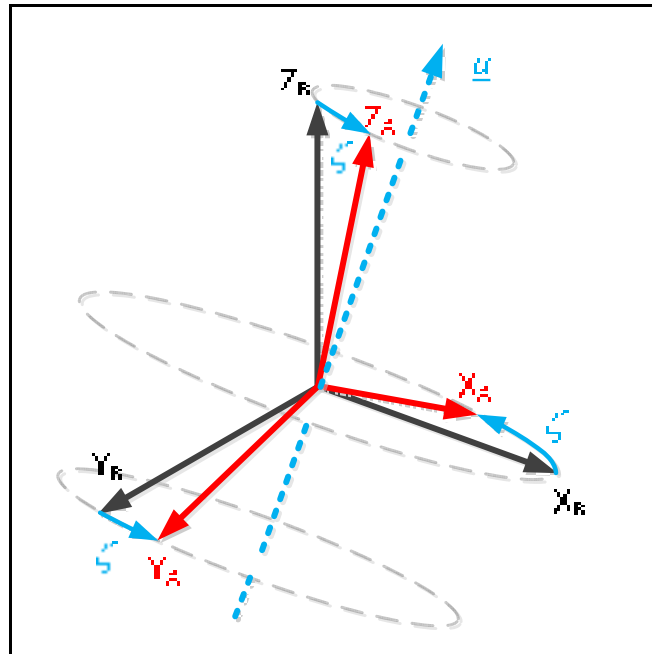


Figure 2-15 Quaternion unitaire

Le quaternion unitaire permettant de représenter la transformation du repère A vers le repère B est défini par l'expression suivante :

$$q_A^B = \begin{bmatrix} \cos(\zeta/2) \\ [\underline{u}]^B \cdot \sin(\zeta/2) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où :

$q_A^B$  : quaternion unitaire entre le repère A et le repère B

$\zeta$  : amplitude de rotation

$[\underline{u}]^B$  : vecteur unitaire exprimé selon le repère B

Tout comme la matrice des cosinus de direction, le quaternion unitaire peut également être utilisé afin de transformer la représentation d'un vecteur entre différents repères tel que :

$$q_B = q_A^B \otimes q_A \otimes (q_A^B)^{-1} \quad (2.30)$$

dans laquelle :

$$q_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{v}^A \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$q_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{v}^B \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

où :

$\otimes$  : multiplication de quaternion (*voir* ANNEXE III)

En appliquant le concept de quaternion unitaire à la représentation de l'orientation du repère du mobile par rapport au repère local, l'attitude d'un mobile peut ainsi être exprimée par le quaternion  $q_B^L$ . Il existe une relation mathématique permettant d'exprimer la matrice de rotation  $\mathbf{C}_B^L$  en fonction des éléments du quaternion unitaire  $q_B^L$  tel que :

$$\mathbf{C}_B^L = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

L'inverse est également possible et est défini tel que :

$$q_B^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \\ (c_{32} - c_{23})/4a \\ (c_{13} - c_{31})/4a \\ (c_{21} - c_{12})/4a \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Il est cependant important de noter que lorsque l'élément  $a$  du quaternion tend vers zéro, l'équation (2.34) n'est plus valide et une méthode plus complexe doit alors être utilisée afin de représenter le quaternion unitaire en fonction de la matrice de rotation. Finalement, les angles d'Euler peuvent également être déterminés directement à partir des éléments du quaternion unitaire tel que :

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{2(cd - ab)}{1 - 2(b^2 + c^2)} \right) \quad (2.35)$$

$$\theta = \sin^{-1}(-2(bd + ac)) \quad (2.36)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{2(bc - ad)}{1 - 2(c^2 + d^2)} \right) \quad (2.37)$$

Contrairement aux équations (2.24)-(2.26), les équations présentées ci-dessus ne contiennent aucune singularité, ce pourquoi plusieurs auteurs préfèrent utiliser le quaternion unitaire plutôt que la matrice de rotation afin de représenter l'attitude d'un mobile. Dans le cadre de ce mémoire, les deux représentations seront utilisées. Pour plus de détails sur les différentes propriétés du quaternion unitaire, le lecteur est invité à consulter l'ANNEXE III.

## 2.4 Équations de propagation de l'attitude

### 2.4.1 Propagation de la matrice des cosinus de direction

La forme générale de l'équation de propagation d'une matrice des cosinus de direction est présentée à l'ANNEXE II. Il est possible d'appliquer ce concept à la matrice des cosinus de direction  $\mathbf{C}_B^L$ , mais tout d'abord, réécrivons cette dernière en fonction du repère inertiel terrestre tel que :

$$\mathbf{C}_B^L = \mathbf{C}_I^L \mathbf{C}_B^I \quad (2.38)$$

En appliquant une dérivée temporelle à cette équation, nous obtenons l'expression suivante :

$$\dot{\mathbf{C}}_B^L = \mathbf{C}_I^L \dot{\mathbf{C}}_B^I + \dot{\mathbf{C}}_I^L \mathbf{C}_B^I \quad (2.39)$$

Finalement, en utilisant l'expression générale de l'équation de propagation d'une DCM donnée par l'équation (A II-9), nous pouvons réécrire l'équation de propagation de la matrice  $\mathbf{C}_B^L$  comme étant :

$$\dot{\mathbf{C}}_B^L = \mathbf{C}_I^L \mathbf{C}_B^I (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IL}^B \times) \mathbf{C}_I^L \mathbf{C}_B^I \quad (2.40)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_B^L = \mathbf{C}_B^L (\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IL}^B \times) \mathbf{C}_B^L \quad (2.41)$$

#### 2.4.2 Équation de propagation d'un quaternion unitaire

Tel que mentionné précédemment, le quaternion unitaire sera également utilisé dans ce mémoire afin de représenter l'attitude d'un mobile. Ainsi, il est également important de définir l'équation de propagation de ce paramètre. La forme générale de l'équation de propagation d'un quaternion est présentée à l'ANNEXE III. Il est possible d'appliquer ce concept au quaternion  $q_B^L$  tel que (Savage, 2000) :

$$\dot{q}_B^L = \frac{1}{2} q_B^L \otimes \omega_{IB}^B - \frac{1}{2} \omega_{IL}^L \otimes q_B^L \quad (2.42)$$

dans laquelle :

$$\omega_{IB}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\omega}_{IB}^B \end{bmatrix} \quad \omega_{IL}^L = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\omega}_{IL}^L \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

où :

- $\dot{q}_B^L$  : dérivée temporelle du quaternion unitaire  $q_B^L$
- $\omega_{IB}^B, \omega_{IL}^L$  : quadrivecteurs formés à partir des vecteurs  $\underline{\omega}_{IB}^B$  et  $\underline{\omega}_{IL}^L$

## 2.5 Modélisation du vecteur de gravité terrestre

Le champ gravitationnel terrestre n'est pas uniforme à la surface de la Terre, mais tend plutôt à varier en fonction de la latitude et de l'altitude où se trouve le mobile. Dans le cadre ce mémoire, le modèle mathématique utilisé afin de caractériser le champ gravitationnel terrestre à l'intérieur de l'algorithme INS est celui présenté par Savage (2000) qui définit la force d'attraction gravitationnelle selon le système d'équations suivant :

pour  $h \geq 0$  :

$$g_r = -\frac{\mu}{R^2} \left[ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 (3 \cos^2 \phi - 1) - 2 J_3 \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \cos \phi (5 \cos^2 \phi - 3) - \dots \right] \quad (2.44)$$

$$\frac{g_\phi}{\sin \phi} = 3 \frac{\mu}{R^2} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \left[ J_2 \cos \phi + \frac{1}{2} J_3 \frac{R_0}{R} (5 \cos^2 \phi - 1) + \dots \right] \quad (2.45)$$

pour  $h < 0$  :

$$g_r = \frac{R}{R_S} g_{r_S} \quad (2.46)$$

$$\frac{g_\phi}{\sin \phi} = \frac{R}{R_S} \left( \frac{g_\phi}{\sin \phi} \right)_S \quad (2.47)$$

où :

- $h$  : altitude ellipsoïdale
- $\underline{R}$  : vecteur représentant la distance entre le centre de masse de la Terre et la position du mobile
- $R$  : norme du vecteur  $\underline{R}$
- $\underline{R}_S$  : vecteur représentant la distance entre le centre de masse de la Terre et un point à la surface de l'ellipsoïde de référence
- $R_S$  : norme du vecteur de  $\underline{R}_S$
- $g_r$  : composante de la force d'attraction gravitationnelle orientée selon  $\underline{R}$
- $g_\phi$  : composante de la force d'attraction gravitationnelle orientée perpendiculaire à  $\underline{R}$  dans le plan méridien local

$\mu$  : produit de la masse de la Terre et de la constante gravitationnelle universelle (voir *Tableau-A I-3*)

$\phi$  : angle formé entre l'axe polaire de la Terre et  $\underline{R}$

$R_0$  : rayon équatorial terrestre (voir *Figure 2-16 et Tableau-A I-3*)

$J_2, J_3, \dots$  : constantes empiriques qui sont fonction de la distribution de la masse de la Terre (voir *Tableau-A I-3*)

$g_{r_s'} \left( \frac{g_\phi}{\sin \phi} \right)_s$  : valeurs calculées à l'aide des équations

(2.44) et (2.45), en

considérant que  $\underline{R} = \underline{R}_S$

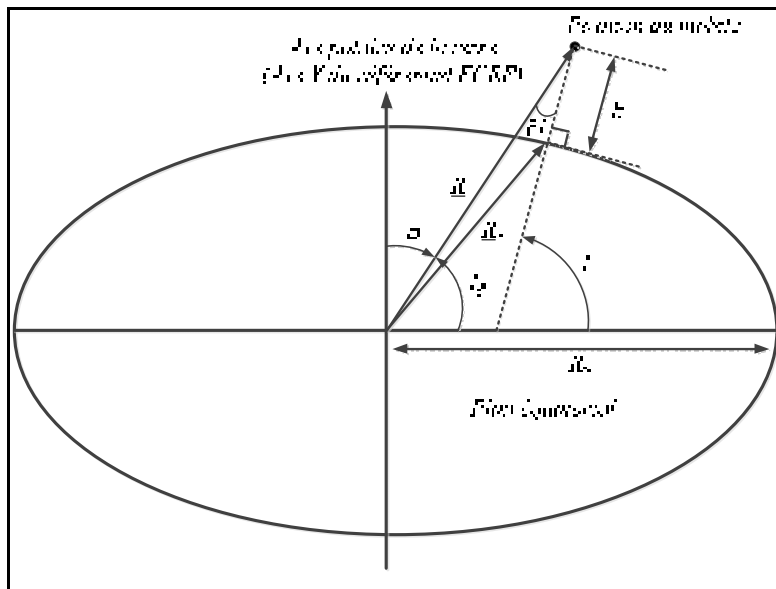


Figure 2-16 Position du mobile représentée selon un plan équatorial  
Tirée de Savage (2000, p. 5-5)

Afin de faciliter les calculs à l'intérieur de l'algorithme de navigation, le vecteur de gravité peut être exprimé selon ses composantes nord et verticale, tel que (Savage, 2000) :

$$g_{Up} = g_r \cos \partial l - \left( \frac{g_\phi}{\sin \phi} \right) \left( \frac{\sin \phi}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) \left( \frac{\sin \partial l}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) (1 - d_{23}^2) \quad (2.48)$$

$$\frac{g_{Nord}}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} = - \left( \frac{g_\phi}{\sin \phi} \right) \left( \frac{\sin \phi}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) \cos \partial l - g_r \left( \frac{\sin \partial l}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) \quad (2.49)$$

où :

- $g_{Up}, g_{Nord}$  : composantes nord et verticale du vecteur de gravité
- $d_{ij}$  : élément de la rangée  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{C}_N^E$
- $\partial l$  : différence entre la latitude géodésique et la latitude géocentrique  
aussi connue sous le nom de déflexion verticale

En plus de la force d'attraction gravitationnelle, une force centripète causée par la rotation de la Terre est également ressentie à la surface du globe. C'est pour cette raison que plusieurs auteurs modélisent le vecteur de gravité *plumb-bob* qui correspond à la combinaison de la force d'attraction gravitationnelle terrestre et de la force centripète. Selon Savage (2000), l'expression générale du vecteur de gravité *plumb-bob* est la suivante :

$$\underline{g}_p = \underline{g}_r - \underline{\omega}_e \times (\underline{\omega}_e \times \underline{R}) \quad (2.50)$$

dans laquelle :

$$\underline{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

où :

- $\underline{g}_p$  : vecteur de gravité *plumb-bob*
- $\underline{\omega}_e$  : vecteur de vitesse de rotation de la Terre
- $\omega_e$  : norme du vecteur  $\underline{\omega}_e$  (voir Tableau-A I-3)

Tout comme la force d'attraction gravitationnelle, le vecteur de gravité *plumb-bob* peut également être exprimé selon ses composantes nord et verticale, tel que (Savage, 2000) :

$$g_{PUp} = g_{Up} + (R_S' + h)\omega_e^2(1 - d_{23}^2) \quad (2.52)$$

$$\frac{g_{PNord}}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} = \left( \frac{g_{Nord}}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) - (R_S' + h)\omega_e^2 d_{23} \quad (2.53)$$

où :

$g_{PUp}, g_{PNord}$  : composantes nord et verticale du vecteur de gravité *plumb-bob*

$R_S'$  : norme modifiée du vecteur  $\underline{R}_S$

Finalement, ce vecteur peut être exprimé selon les axes du repère de navigation de manière à faciliter les calculs à l'intérieur de l'algorithme INS (Savage, 2000) :

$$g_P^N = \begin{bmatrix} \left( \frac{g_{PNord}}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) d_{21} \\ \left( \frac{g_{PNord}}{\sqrt{1 - d_{23}^2}} \right) d_{22} \\ g_{PUp} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

## 2.6 Modélisation du taux de transport

Le taux de transport  $\underline{\rho}^N$  est défini comme étant la rotation angulaire du repère de navigation par rapport au repère fixe terrestre, exprimé selon le repère de navigation (Savage, 2000). Ainsi, par définition :

$$\underline{\rho}^N = \underline{\omega}_{EN}^N \quad (2.55)$$

Ce paramètre est important à l'intérieur de l'algorithme de navigation car il permet de maintenir le repère de navigation parfaitement aligné selon une orientation prédéfinie. En



effet, lorsque le mobile est en déplacement, l'orientation de la verticale, de l'est et du nord vrai varient tel qu'illustré sur la Figure 2-17.

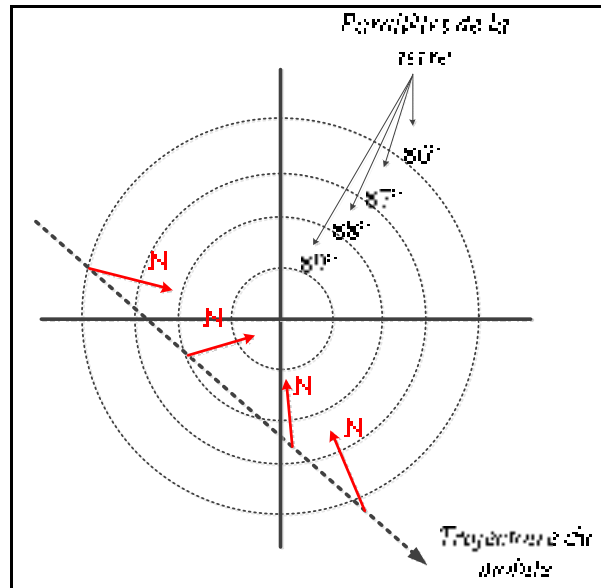


Figure 2-17 Exemple de la variation du nord vrai en région polaire

Dans le cadre de ce mémoire, la composante horizontale du taux de transport est utilisée afin de maintenir l'axe Z du repère de navigation perpendiculaire à la surface de l'ellipsoïde de référence, tandis que la composante verticale du taux de transport est utilisée afin de maintenir les axes X et Y du repère de navigation alignés respectivement selon l'est et le nord vrai. Selon Savage (2000), le taux de transport peut être calculé à l'aide de l'équation suivante :

$$\underline{\rho}^N = \mathbf{F}_C^N(\underline{u}_{ZN}^N \times \underline{v}^N) + \rho_{ZN} \underline{u}_{ZN}^N \quad (2.56)$$

dans laquelle :

$$\rho_{ZN} = \rho_{YN} \tan l \quad (2.57)$$

$$\underline{u}_{ZN}^N = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (2.58)$$

$$\mathbf{F}_C^N = \begin{bmatrix} \frac{1}{rl}(1 + d_{21}^2 f_{eh}) & \frac{1}{rl} d_{21} d_{22} f_{eh} & 0 \\ \frac{1}{rl} d_{21} d_{22} f_{eh} & \frac{1}{rl}(1 + d_{22}^2 f_{eh}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$f_e = \frac{(1 - e)^2 - 1}{1 + d_{23}^2 [(1 - e)^2 - 1]} \quad (2.60)$$

$$f_h = \frac{1}{1 + h/R_S'} \quad (2.61)$$

$$f_{eh} = f_e f_h \quad (2.62)$$

$$rl = rl_S + h \quad (2.63)$$

$$rl_S = (1 - e)^2 \frac{R_S'^3}{R_0^2} \quad (2.64)$$

où :

- $\underline{\rho}^N$  : taux de transport exprimé selon le repère de navigation
- $\mathbf{F}_C^N$  : matrice de courbure de la Terre exprimée selon le repère de navigation
- $\underline{u}_{ZN}^N$  : vecteur unitaire orienté selon l'axe Z du repère de navigation
- $\underline{v}^N$  : vitesse du mobile exprimé selon le repère de navigation
- $\rho_{YN}, \rho_{ZN}$  : composantes en Y et en Z du taux de transport
- $l$  : latitude géodésique
- $rl$  : rayon de courbure local de la Terre
- $e$  : inverse du coefficient d'aplatissement de l'ellipsoïde de référence  
(voir *Tableau-A I-3*)

## CHAPITRE 3

### SYSTÈME DE POSITIONNEMENT GLOBAL PAR SATELLITE

Le lancement du programme GPS au cours des années 1970 est la suite logique d'une série de projets menés par le gouvernement américain et dont l'objectif principal était de développer un système de positionnement de haute précision offrant une couverture mondiale continue et pouvant être utilisée pour des applications à dynamique élevée (Kaplan et Hegarty, 2006). C'est en 1978 que le premier satellite GPS fut lancé mais ce n'est qu'en 1993 que le système fut totalement opérationnel avec une constellation de 24 satellites. De manière à alléger ce chapitre, l'architecture actuelle du système GPS ainsi que la structure des différents signaux émis par les satellites seront présentées à l'ANNEXE IV. De plus, le système d'équations utilisé afin de calculer la position et la vitesse des satellites GPS seront présentées à l'ANNEXE V. Ce chapitre se concentrera sur le principe de trilatération, sur la définition des mesures disponibles sur le système ainsi que sur les différentes sources d'erreur du système GPS. Le modèle de propagation d'erreur qui sera utilisé à l'intérieur des différents algorithmes de navigation utilisés dans ce projet sera également présenté.

#### 3.1 Principe de trilatération

De manière générale, les récepteurs GPS fonctionnent selon le principe de trilatération. Ce principe consiste en une approche géométrique permettant de déterminer la position d'un point dans l'espace à partir de mesures de distance par rapport à certains repères connus (satellites dans le cas du système GPS). La Figure 3-1, illustre ce principe pour un système à deux dimensions. En exprimant de façon mathématiquement ce système, il est possible de constater que nous avons affaire à un système à deux équations et deux inconnus tel que :

$$r_A = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} \quad (3.1)$$

$$r_B = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \quad (3.2)$$

où :

- $r_A, r_B$  : mesures de distance connues entre le point P et les points A et B  
 $x_A, y_A$  : coordonnées connues du point A  
 $x_B, y_B$  : coordonnées connues du point B  
 $x_P, y_P$  : coordonnées inconnues du point P

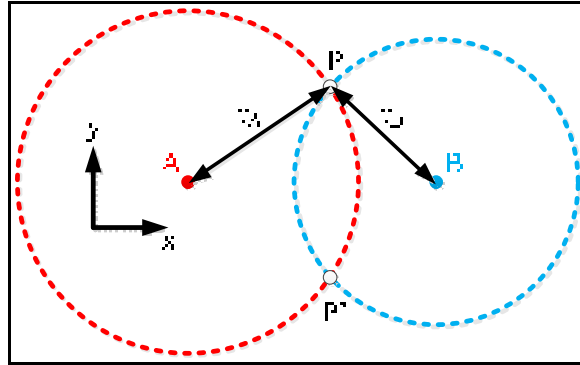


Figure 3-1 Principe de trilatération appliqué à un système à deux dimensions

Cependant, tel qu'illustré sur la Figure 3-1, il existe une certaine ambiguïté entre les points P et P'. Afin de résoudre cette dernière, il serait généralement nécessaire d'utiliser l'équation provenant d'un troisième point de repère. Or, pour le système GPS, il est tout à fait plausible d'assumer que les coordonnées du point recherché seront celles situées le plus près de la surface de la Terre, ce qui permet de lever le doute sur cette ambiguïté. Ce principe de trilatération peut être appliqué de façon similaire pour le positionnement en trois dimensions tel qu'illustré sur la Figure 3-2. Un tel système peut ainsi être exprimé mathématiquement par le système à trois équations suivant :

$$r_A = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 + (z_A - z_P)^2} \quad (3.3)$$

$$r_B = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2 + (z_B - z_P)^2} \quad (3.4)$$

$$r_C = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2 + (z_C - z_P)^2} \quad (3.5)$$

Ainsi, les coordonnées d'un récepteur GPS peuvent être obtenues en solutionnant ce système non linéaire à trois équations. Toutefois, dans le cas d'un récepteur GPS, il est nécessaire d'utiliser une quatrième équation afin de résoudre l'incertitude temporelle.

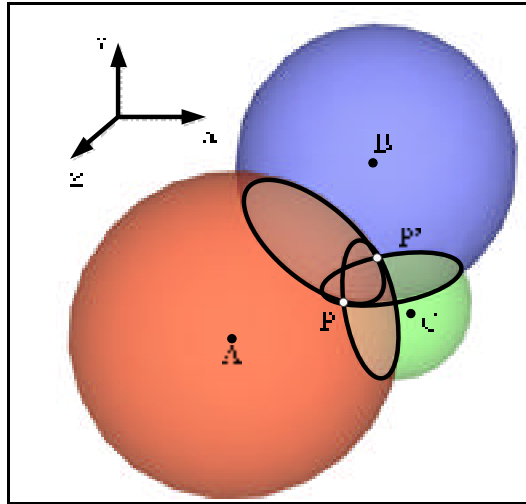


Figure 3-2 Principe de trilatération appliqué à un système à trois dimensions

### 3.2 Mesures de pseudo-distance

Les mesures de distance séparant le récepteur GPS des différents satellites peuvent être calculées à partir des temps de transmission et de réception des signaux. En effet, étant donné que les signaux GPS se propagent à la vitesse de la lumière, cette mesure de distance peut être calculée par l'équation suivante :

$$d = c \cdot \Delta t \quad (3.6)$$

où :

- $d$  : mesure de distance entre le récepteur et le satellite
- $c$  : vitesse de la lumière,  $c = 2.99792458 \times 10^8$
- $\Delta t$  : temps de propagation du signal GPS

L'approche classique afin de déterminer le temps de propagation des signaux GPS consiste, en partie, à utiliser la différence de phase entre le code d'étalement généré localement et celui provenant du satellite en question tel qu'illustré sur la Figure 3-3, adaptée de Kaplan et Hegarty (2006). En effet, en considérant que l'horloge du satellite et celle du récepteur sont parfaitement synchronisés, lorsque le satellite transmet son code PRN (*Pseudorandom*

*Noise*), le récepteur génère une réplique exacte et en phase de ce code. Après un certain temps, équivalent au temps de propagation du signal GPS, le code PRN transmis par le satellite sera perçu par le récepteur avec une certaine différence de phase et un nombre ambigu de période de code (voir Figure 3-3). En multipliant cette différence de phase par la vitesse de la lumière, la distance entre le satellite et le récepteur est obtenue.

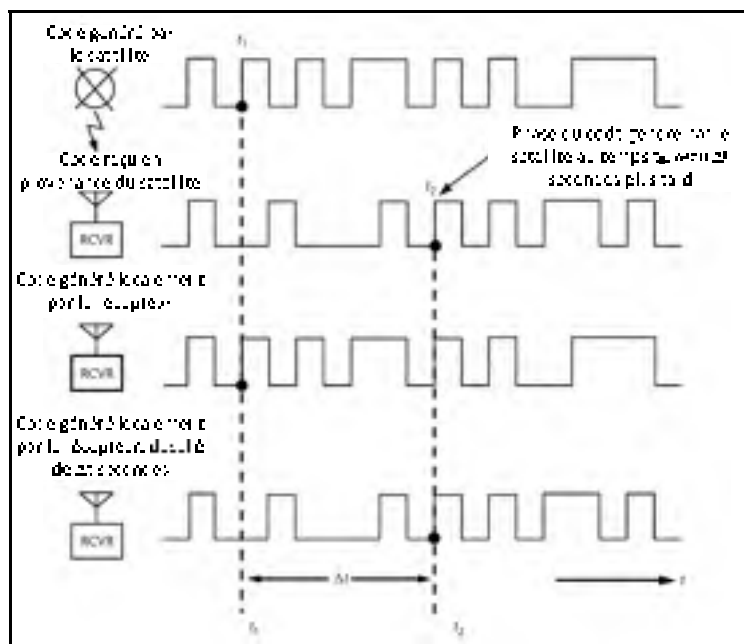


Figure 3-3 Calcul du temps de transmission à partir des mesures de code  
Adaptée de Kaplan et Hegarty (2006, p. 52)

L'hypothèse voulant que les deux horloges soient parfaitement synchronisées est cependant erronée et les mesures de distance séparant le récepteur GPS et les différents satellites se retrouvent plutôt contaminées par une erreur de synchronisation appelée biais d'horloge. De plus, les signaux GPS peuvent également être contaminés par différentes sources d'erreur, telles que les erreurs atmosphériques, affectant ainsi le temps de propagation du signal. C'est pour ces raisons que le terme pseudo-distance est généralement utilisé plutôt que le terme distance afin de caractériser cette mesure. Ainsi, la pseudo-distance représente la distance mesurée séparant le récepteur d'un satellite, en incluant les différentes erreurs associées tel que :

$$\rho = d + c \cdot \delta t + \eta_\rho \quad (3.7)$$

où :

- $\rho$  : mesure de pseudo-distance
- $\delta t$  : biais d'horloge du récepteur
- $\eta_\rho$  : erreurs supplémentaires affectant la mesure de pseudo-distance

Basé sur le principe de trilatération présenté à la section 3.1, la mesure de pseudo distance d'un satellite peut être définie tel que :

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + b_{clk} + \eta_\rho \quad (3.8)$$

où :

- $\rho_i$  : mesure de pseudo-distance du satellite  $i$
- $x, y, z$  : coordonnées du récepteur GPS
- $x_i, y_i, z_i$  : coordonnées du satellite  $i$
- $b_{clk}$  : erreur de pseudo-distance associé au biais d'horloge ( $b_{clk} = c \cdot \delta t$ )

### 3.3 Mesures de décalage Doppler

L'effet Doppler caractérise le décalage de fréquence d'une onde électromagnétique entre l'émission et la réception qui survient lorsqu'une vitesse relative existe entre l'émetteur et le récepteur. Ce concept est défini par l'expression suivante :

$$\Delta f = -\frac{(v_s - v_r)}{\lambda} \quad (3.9)$$

où :

- $\Delta f$  : décalage de fréquence (effet Doppler)
- $v_s$  : vitesse de l'émetteur (source)
- $v_r$  : vecteur du récepteur
- $\lambda$  : longueur d'onde de l'onde électromagnétique

Cette définition peut s'appliquer au système GPS. En effet, le décalage Doppler d'un signal GPS est défini comme l'écart entre la fréquence porteuse reçue par le récepteur et celle émise par un satellite (1575.42 MHz pour L1). L'effet Doppler appliqué au système GPS peut donc être défini tel que :

$$D_i = -\frac{(\underline{v}_i - \underline{v})}{\lambda_1} \quad (3.10)$$

où :

- $D_i$  : décalage Doppler du satellite  $i$
- $\underline{v}$  : vecteur de vitesse du récepteur GPS
- $\underline{v}_i$  : vecteur de vitesse du satellite  $i$
- $\lambda_1$  : longueur d'onde de la porteuse ( $\lambda_1 = \frac{c}{L_1} = \frac{c}{1575.42 \text{ MHz}}$ )

La vitesse relative entre le récepteur et un satellite peut également être exprimée en termes de variation de la mesure de pseudo-distance. En effet, la variation de la pseudo-distance d'un satellite est définie comme la projection de la vitesse relative entre le récepteur et ce satellite selon la ligne de visée vers ce dernier. Basé sur cette définition, la mesure de variation de la pseudo-distance peut être obtenue tel que :

$$\dot{\rho}_i = \underline{e}_i(\underline{v}_i - \underline{v}) = -\underline{e}_i(\underline{v} - \underline{v}_i) = D_i \lambda_1 \quad (3.11)$$

dans laquelle :

$$\underline{e}_i = \frac{[(x_i - x) \quad (y_i - y) \quad (z_i - z)]}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}} \quad (3.12)$$

où :

- $\underline{e}_i$  : vecteur unitaire orienté selon la ligne de visée vers le satellite  $i$
- $\dot{\rho}_i$  : variation de pseudo-distance du satellite  $i$

De façon similaire, la mesure de variation de la pseudo-distance peut être obtenue par une dérivée temporelle de l'équation (3.8) tel que :



$$\dot{\rho}_i = \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{d\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}}{dt} + \frac{db_{clk}}{dt} + \frac{d\eta_\rho}{dt} \quad (3.13)$$

$$\dot{\rho}_i = -\underline{e}_i(\underline{v} - \underline{v}_i) + d_{clk} + \eta_\rho \quad (3.14)$$

où :

$d_{clk}$  : dérive de l'horloge ( $d_{clk} = \frac{db_{clk}}{dt}$ )

$\eta_\rho$  : erreurs supplémentaires affectant la mesure de variation de pseudo-distance ( $\eta_\rho = \frac{d\eta_\rho}{dt}$ )

### 3.4 Sources d'erreurs du système GPS

Les mesures provenant des signaux GPS sont contaminées par différentes sources d'erreur. De manière générale, ces erreurs peuvent provenir soit des satellites, soit du récepteur, ou encore être causée par la propagation des signaux. De plus, la géométrie des satellites constitue également un facteur important pouvant affecter la précision de la solution de navigation calculée par un récepteur GPS.

#### 3.4.1 Erreurs d'horloge des satellites et du récepteur

Malgré l'utilisation d'horloges atomiques de haute précision (horloge au césium et au rubidium), l'horloge à bord des satellites n'est pas parfaite et son instabilité peut affecter la mesure de pseudo-distance calculée par les récepteurs GPS. Selon El-Rabbany (2002), l'erreur sur la mesure de temps peut atteindre jusqu'à 17 ns ce qui correspond en terme de pseudo-distance à environ 5.1 m. Les performances de ces horloges sont cependant minutieusement observées par les stations au sol du segment de contrôle du système GPS et l'information sur la dérive de ces dernières est calculée et transmise aux usagers à l'intérieur du message de navigation. L'erreur causée par l'instabilité de l'horloge des satellites peut donc être corrigée directement sans aucun calcul supplémentaire, ce qui n'est cependant pas le cas pour l'erreur d'horloge des récepteurs GPS qui doit plutôt être estimée à l'intérieur du filtre de navigation.

L'horloge utilisée à l'intérieur des récepteurs GPS commerciaux consiste généralement en une horloge peu coûteuse au quartz dont l'erreur est beaucoup plus importante que celle présente sur l'horloge des satellites. De plus, cette erreur est généralement instable et elle ne peut généralement pas être considérée comme constante. Ainsi, les paramètres de biais d'horloge et de dérive d'horloge doivent être constamment estimés à l'intérieur du filtre de navigation du récepteur GPS afin d'atteindre un certain niveau de précision. Dans le cadre de ce mémoire, ces paramètres seront estimés à l'intérieur du filtre de Kalman du récepteur GPS.

### 3.4.2 Délais ionosphériques

La propagation des signaux GPS au travers de l'ionosphère représente une des principales sources d'erreur sur la mesure de pseudo-distance pouvant atteindre jusqu'à 15 m au zénith et jusqu'à 50 m pour les satellites à faible degré d'élévation (Sauriol, 2008). Selon Sauriol (2008), l'utilisation d'un masque d'élévation de  $10^\circ$  permettrait de réduire l'effet de cette erreur à environ 10 m ( $1\sigma$ )<sup>2</sup>. Les délais ionosphériques sont principalement causés par le fait que les radiations solaires et cosmiques présentes dans cette couche atmosphérique provoquent l'ionisation des atomes et molécules gazeuses, générant ainsi des électrons libres pouvant interférer avec le signal GPS. L'intensité de ce phénomène dépend de plusieurs facteurs dont l'heure, la saison, la position géographique et les activités solaires et géomagnétiques, ce qui fait en sorte que cette erreur est très difficile à prédire. Le récepteur RxGNSS utilisé dans le cadre de ce mémoire propose l'utilisation d'un modèle de correction dont les paramètres sont diffusés à même le message de navigation (Sauriol, 2008). Ce modèle n'est pas parfait, mais il permet tout de même de réduire d'environ 50% les erreurs introduites par la ionosphère, les limitant à environ 5 m ( $1\sigma$ ) (GPSW, 2010; Sauriol, 2008).

---

<sup>2</sup> L'expression  $1\sigma$  signifie l'erreur à un écart type et représente le niveau de confiance attribué à cette erreur. Basé sur une distribution normale et centrée,  $1\sigma$  représente une probabilité de 68.3%.

Pour plus de détails sur ce modèle, le lecteur est invité à consulter le mémoire de Sauriol (2008).

### **3.4.3 Délais troposphériques**

La troposphère constitue également une couche gazeuse problématique pour la propagation des signaux GPS. Cette dernière est principalement composée de gaz secs et de vapeur d'eau, ce qui provoque le phénomène de réfraction des signaux GPS, créant ainsi un délai de propagation qui affecte directement la mesure de pseudo-distance. Ce délai est généralement de l'ordre de 2.5 m ( $1\sigma$ ) au zénith et de 25 m ( $1\sigma$ ) à  $5^\circ$  d'élévation pour un utilisateur situé au niveau de la mer (Sauriol, 2008). Il existe certains modèles dans la littérature permettant de réduire considérablement l'effet de cette couche atmosphérique sur la propagation des signaux GPS, dont le modèle troposphérique d'EGNOS (Penna, Dodson et Chen, 2001). C'est d'ailleurs ce dernier qui a été implémenté par Sauriol (2008) à l'intérieur du récepteur RxGNSS utilisé dans le cadre de ce projet. Pour plus de détails sur ce modèle, le lecteur est invité à consulter le mémoire de Sauriol (2008).

### **3.4.4 Effet de la géométrie des satellites sur la précision du positionnement**

Tel que mentionné précédemment, la position d'un récepteur GPS est calculé à partir du principe de trilatération. Jusqu'à présent, nous avons considéré que les mesures de distance utilisées par ce concept étaient connues et sans erreur, ce qui n'est cependant pas le cas dans la réalité. En effet, dans un environnement réaliste, des erreurs aléatoires sont présentes sur les mesures de distance et par conséquent, la position obtenue n'est plus un point exact mais plutôt une région statistique, tel qu'illustré sur la Figure 3-4. Le terme erreur équivalente de distance pour l'utilisateur (UERE – *User Equivalent Range Error*) est utilisé dans la littérature afin de désigner l'ensemble des erreurs pouvant affecter la mesure de pseudo-distance.

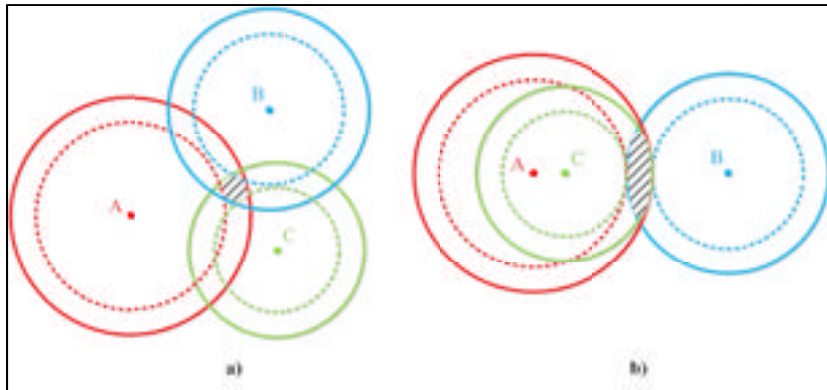


Figure 3-4 Effet de la géométrie des satellites et de l'UERE sur le positionnement 2D : a) bonne géométrie; b) mauvaise géométrie

En observant la Figure 3-4, il est donc possible de constater que la disposition géométrique des satellites utilisés lors du calcul de la position du récepteur influence directement la superficie de la surface statistique représentant l'incertitude sur la position calculée. La Figure 3-4 illustre deux cas opposés représentant une bonne géométrie ainsi qu'une mauvaise géométrie des satellites. Ainsi, la précision de la solution de navigation est directement affectée par la disposition géométrique des satellites GPS.

L'indice de dilution de précision (DOP – *Dilution Of Precision*) est utilisé dans la littérature afin de caractériser l'incertitude sur la solution de navigation causée par une mauvaise géométrie des satellites. L'indice DOP est généralement décomposé en plusieurs indices dont les principaux sont les suivants :

- dilution de précision géométrique (GDOP);
- dilution de précision de position (PDOP);
- dilution de précision de temps (TDOP);
- dilution de précision verticale (VDOP);
- dilution de précision horizontale (HDOP);
- dilution de précision horizontale selon l'est (EDOP);
- dilution de précision horizontale selon le nord (NDOP).

Pour plus de détails sur le calcul de ces paramètres, le lecteur est invité à consulter l'ANNEXE VI.

### 3.4.5 Autres sources et budget d'erreur sur la pseudo-distance

Il existe d'autres sources d'erreur affectant les mesures GPS que celles présentées précédemment, mais ces dernières ne seront pas estimées ni compensées dans le cadre de ce projet. Par conséquent, elles ne seront pas détaillées d'avantage dans ce mémoire. Le Tableau 3.1, tiré de Guay (2010), présente toutefois un résumé des différentes sources d'erreur du système GPS ainsi que l'ordre de grandeur qu'elles occupent en termes d'erreur sur la mesure de pseudo-distance. Tel que mentionné par Guay (2010), ces résultats proviennent de tests réels réalisés sur le récepteur RxGNSS qui est utilisé dans le cadre de ce mémoire. Ces paramètres seront donc utilisés à l'intérieur de la matrice de covariance de mesure du filtre de Kalman afin de définir l'incertitude sur les mesures de pseudo-distance.

Tableau 3.1 Résumé des valeurs nominales des erreurs de mesure de pseudo-distance sur le récepteur RxGNSS  
Tiré de Guay (2010, p. 132)

Type d'erreur	UERE [m]
Erreurs sur le calcul de position des satellites	2
Synchronisation des horloges	1,5
Délai troposphérique	1
Délai ionosphérique	5
Bruit du récepteur	0,6
Multitrajets	1 à 10
<b>Total</b>	<b>11,1 à 20,1</b>

### 3.5 Modèle de propagation d'erreur du système GPS

La littérature présente plusieurs modèles afin de caractériser l'erreur à l'intérieur d'un récepteurs GPS. Le choix du modèle dépend principalement de l'application visée. En effet,

pour un récepteur utilisé dans le cadre d'une application statique, un modèle possédant uniquement les états d'erreur de position et d'erreur d'horloge (modèle P) est suffisant. Or, pour des applications à dynamiques modérées (p. ex. navigation automobile), l'estimation de l'erreur de vitesse (modèle PV) est préférable. Pour des applications à forte dynamique (p. ex. navigation aérienne), certains auteurs vont même jusqu'à utiliser un modèle incluant l'estimation de l'erreur d'accélération (modèle PVA). Dans le cadre de ce projet, un modèle PV sera utilisé.

### 3.5.1 Modèle de propagation d'erreur PV

Le modèle de propagation PV est généralement utilisé pour des systèmes GPS dont la dynamique s'apparente à un déplacement à vitesse presque constante. Selon ce modèle illustré à la Figure 3-5, l'entrée du système (accélération) consiste en un bruit blanc Gaussien qui est par la suite intégré à deux reprises de manière à obtenir successivement la vitesse et la position du mobile.

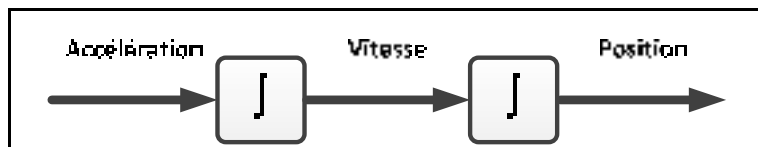


Figure 3-5 Modèle de propagation PV

Le modèle de propagation PV est donc défini tel que :

$$\dot{\underline{R}}^E = \underline{V}^E \quad (3.15)$$

$$\dot{\underline{V}}^E = \underline{\eta}_V \quad (3.16)$$

où :

$\underline{R}^E$  : vecteur de position du récepteur GPS exprimé selon le repère fixe terrestre

$\underline{V}^E$  : vecteur de vitesse du récepteur GPS exprimé selon le repère fixe terrestre

$\underline{\eta}_V$  : vecteur de bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $S_p$

Étant donné que l'accélération du mobile est aléatoire et imprévisible, il est impossible pour le récepteur de calculer parfaitement sa vitesse et sa position. Ainsi, seul l'estimé suivant peut être obtenu :

$$\dot{\hat{R}}^E = \hat{V}^E \quad (3.17)$$

$$\dot{\hat{V}}^E = 0 \quad (3.18)$$

où :

$\hat{\quad}$  : caractérise la valeur estimée telle que calculée par le récepteur GPS

Il existe donc une erreur entre l'état réel du mobile et celui calculé par le récepteur GPS. Cette erreur, représente la différence entre l'estimé et la valeur réelle tel que :

$$\delta \underline{\dot{R}}^E = \underline{\dot{R}}^E - \dot{\hat{R}}^E = \underline{V}^E - \hat{V}^E = \delta \underline{V}^E \quad (3.19)$$

$$\delta \underline{\dot{V}}^E = \underline{\dot{V}}^E - \dot{\hat{V}}^E = \underline{\eta}_V \quad (3.20)$$

où :

$\delta \underline{R}^E$  : vecteur d'erreur de position exprimé selon le repère fixe terrestre

$\delta \underline{V}^E$  : vecteur d'erreur de vitesse exprimé selon le repère fixe terrestre

Ainsi, les équations de propagation de l'erreur de position et de vitesse du récepteur GPS peuvent être données par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{\dot{V}}^E \\ \delta \underline{\dot{R}}^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{V}^E \\ \delta \underline{R}^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\eta}_V \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.5.2 Modèle de propagation de l'erreur d'horloge du récepteur

L'horloge à bord des récepteurs GPS peut contenir une erreur importante pouvant affecter le calcul des pseudo-distances. Cette erreur tend généralement à varier dans le temps et, par

conséquent, doit être estimée à chaque instant. En présence d'un nombre suffisant de satellites visibles, cette erreur peut être estimée et corrigée adéquatement. Il est toutefois important de bien modéliser la dynamique de cette dernière afin que l'estimé soit fidèle à l'erreur réelle. Plusieurs auteurs définissent l'erreur d'horloge comme étant formé d'un biais ayant une certaine dérive tel que :

$$\begin{bmatrix} \dot{b}_{clk} \\ \dot{d}_{clk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{clk} \\ d_{clk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_b \\ \eta_d \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

où :

- $b_{clk}, d_{clk}$  : biais d'horloge et dérive d'horloge
- $\eta_b$  : bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $S_f$
- $\eta_d$  : bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance  $S_g$

Ainsi, le biais d'horloge du récepteur est modélisé comme un processus de marche aléatoire. Tout comme pour la position et la vitesse, le récepteur GPS n'est pas en mesure de connaître exactement la valeur du biais et de la dérive de l'horloge et seul un estimé peut être obtenu tel que :

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{b}}_{clk} \\ \hat{\dot{d}}_{clk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{clk} \\ \hat{d}_{clk} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Ainsi, les équations de propagation d'erreur du biais et de la dérive de l'horloge peuvent être définies par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{b}_{clk} \\ \delta \dot{d}_{clk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta b_{clk} \\ \delta d_{clk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_b \\ \eta_d \end{bmatrix} \quad (3.24)$$



## CHAPITRE 4

### SYSTÈME DE NAVIGATION INERTIELLE

C'est en 1953 que le professeur Charles Stark Draper fait la démonstration du premier système de navigation inertielle entièrement autonome : le *Space Inertial Reference Equipment* (SPIRE). Ce système fut développé avant tout afin de répondre à une problématique commune aux systèmes de radionavigation existant à cette époque, soit la facilité de pouvoir brouiller les radiofréquences dans la bande d'opération de ces derniers, les rendant inutiles en territoire hostile. C'est d'ailleurs pour cette raison que le gouvernement américain finança la recherche dans le domaine inertiel avec la motivation de développer un système de navigation inertielle entièrement autonome. Depuis, de nombreuses études ont été entreprises dans ce domaine et les systèmes INS ont désormais atteint un certain niveau de maturité. Ce chapitre présentera dans un premier temps l'architecture des systèmes INS de même que les principes de base de la navigation inertielle. Par la suite, les différents capteurs utilisés seront présentés ainsi que leur modèle de mesure respectif. Finalement, les équations mathématiques définissant l'algorithme INS seront détaillées de même que le modèle de propagation d'erreur utilisé pour ce projet.

#### 4.1 Architecture des systèmes INS

##### 4.1.1 Systèmes à plateforme stabilisée

Avant 1970, les systèmes de navigation inertielle étaient tous basés sur le principe des plateformes stabilisée, aussi appelées plateformes à cardans dont l'architecture est présentée à la Figure 4-1. Selon cette architecture, des gyroscopes sont utilisés afin de contrôler des servomoteurs servant à stabiliser une plateforme située à l'intérieur d'un cardan central sur laquelle sont disposés des accéléromètres. Ces derniers sont ainsi maintenus selon une orientation fixe par rapport au repère inertiel terrestre et se retrouvent par le fait même isolés de toute rotation possible du véhicule. Basé sur cette approche, l'algorithme de navigation repose sur deux tâches simples soit la correction des mesures d'accéléromètres pour la

composante de gravité suivi d'une double intégration des mesures corrigées afin d'obtenir respectivement la vitesse et la position du mobile par rapport au repère inertiel terrestre. La Figure 4-2 résume bien cette procédure.

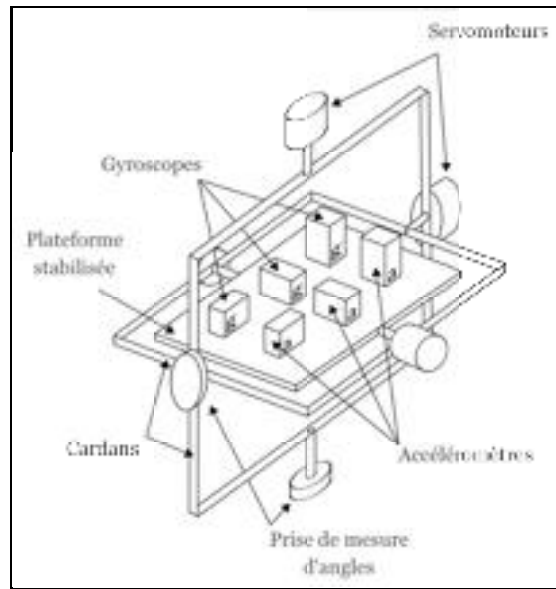


Figure 4-1 Système de navigation inertielle à plateforme stabilisée  
Adaptée de Woodman (2007, p. 6)

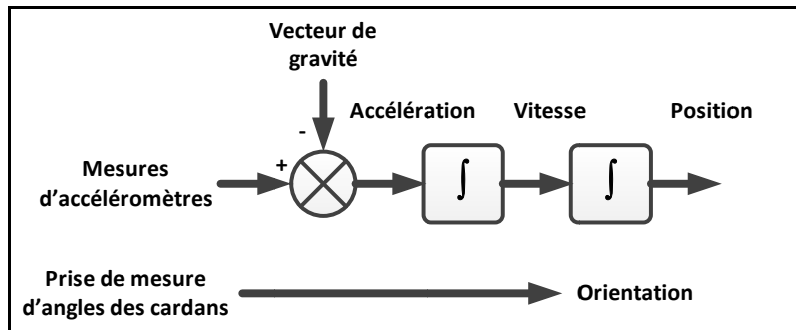


Figure 4-2 Algorithme de navigation typique d'un système à plateforme stabilisée

Bien que ces systèmes à cardans soient reconnus encore aujourd'hui pour leur stabilité, leur précision et leur fiabilité, ils comportent néanmoins plusieurs inconvénients majeurs qui limitent leur utilisation dans le cadre de certaines applications. Notamment, les systèmes INS

à plateforme stabilisées requièrent un assemblage mécanique complexe, généralement dispendieux et difficile d'entretien.

#### 4.1.2 Système à composantes liées

Afin de trouver une alternative aux systèmes à plateforme stabilisée, l'industrie s'est demandée : « Pourquoi ne pas se débarrasser des cardans stabilisateurs et simplement lier les composantes des capteurs sur le cadre rigide du mobile? » (King, 1998, p. 143). Cette nouvelle approche suggérait alors d'utiliser les gyroscopes afin de mesurer les vitesses de rotation du mobile plutôt que de s'en servir comme stabilisateur pour la plateforme inertielle. Ainsi, les quantités physiques ne seraient plus mesurées selon le repère inertiel terrestre mais plutôt selon un repère fixé sur le mobile impliquant alors une stabilisation mathématique plutôt que mécanique. Cette architecture vient remplacer du même coup la complexité mécanique des systèmes à cardans par une complexité mathématique et logicielle. Les systèmes de navigation inertielle à composantes liées étaient nés (en anglais : *strapdown inertial navigation systems*).

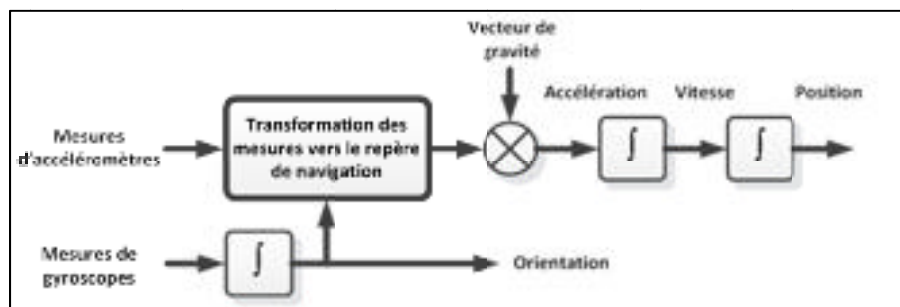


Figure 4-3 Algorithmes de navigation des systèmes à composantes liées

L'architecture typique d'un tel système est illustrée sur la Figure 4-3, sur laquelle il est possible de constater une augmentation du niveau de complexité de l'algorithme de navigation comparativement à celui des systèmes à plateforme stabilisée.

## 4.2 Principes de base de la navigation inertielle

Les systèmes de navigation inertielle sont des systèmes entièrement autonomes permettant de calculer la position, la vitesse et l'attitude d'un véhicule basé uniquement sur des mesures d'accélération linéaires et de vitesses angulaires provenant de capteurs inertiels (c.-à-d. gyroscopes et accéléromètres). Contrairement aux systèmes GPS, les systèmes INS ne sont pas des systèmes de positionnement absolu mais font plutôt parti de la grande famille des systèmes de navigation à l'estime (DR – *Dead Reckoning*), c'est à dire qu'ils permettent uniquement de calculer le déplacement d'un mobile à partir de son état initial.

De manière générale, un système INS est constitué de deux principaux éléments soient une centrale inertielle (IMU – *Inertial Measurement Unit*) et un ordinateur de calculs. L'IMU consiste en un assemblage d'accéléromètres et de gyroscopes disposés de manière à mesurer respectivement l'accélération (plus précisément les forces spécifiques) et la vitesse angulaire d'une plateforme en mouvement selon trois axes orthogonaux. L'ordinateur de calculs quant à lui s'occupe d'exécuter les équations dynamiques du système inertiel de manière à calculer l'attitude, la vitesse et la position du mobile selon la séquence suivante :

- 1) le vecteur de vitesses angulaires mesuré par les gyroscopes est intégré afin de mettre à jour l'attitude du mobile;
- 2) la nouvelle attitude du mobile est utilisée afin de transformer la représentation du vecteur de forces spécifiques vers le repère de navigation;
- 3) les composantes de force d'attraction gravitationnelle, de force centripète et d'accélération de Coriolis sont retirées du vecteur de forces spécifiques afin d'obtenir uniquement l'accélération du mobile selon le repère de navigation;
- 4) l'accélération est intégrée afin d'obtenir la vitesse du mobile;
- 5) la vitesse est intégrée afin d'obtenir la position du mobile.

La Figure 4-4 illustre bien l'architecture typique d'un système INS à composantes liées tel que celui qui sera utilisé dans le cadre de ce mémoire.

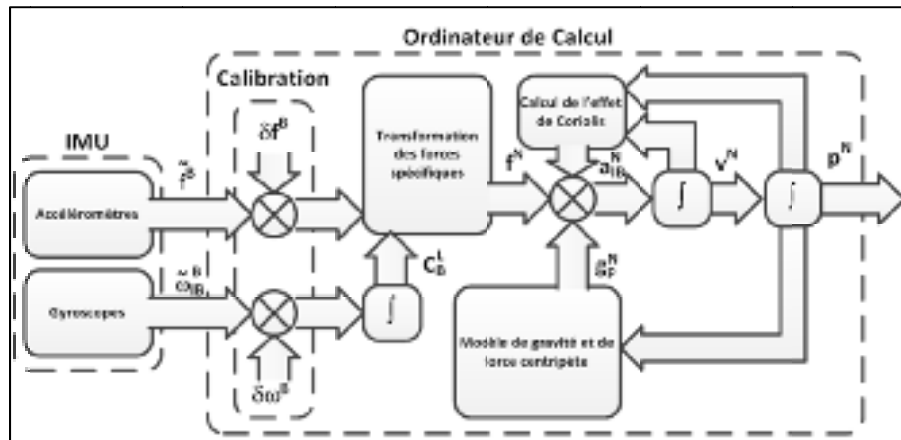


Figure 4-4 Architecture typique d'un système INS à composants liés

### 4.3 Rétrospective des capteurs inertiels

#### 4.3.1 Accéléromètres

Les accéléromètres sont des instruments permettant de déterminer l'accélération linéaire d'un objet par rapport au repère inertiel terrestre. De manière plus spécifique, la grandeur physique mesurée par ces derniers est appelée force spécifique et elle comprend, en plus de l'accélération du mobile, la force d'attraction gravitationnelle, la force centripète ainsi que l'effet de Coriolis causé par la rotation de la Terre et le taux de transport. Le principe de fonctionnement des accéléromètres varie grandement selon l'application à laquelle le capteur est destiné mais également au budget dédié à sa fabrication. La grande majorité des accéléromètres à faible coût fonctionnent selon le principe des systèmes masse-ressort ou des systèmes à poutre vibrante (Johnson, 2006). La Figure 4-5 présente une vue d'ensemble des différents types d'accéléromètres utilisés en navigation inertielle, de même qu'un aperçu de leurs performances théoriques.

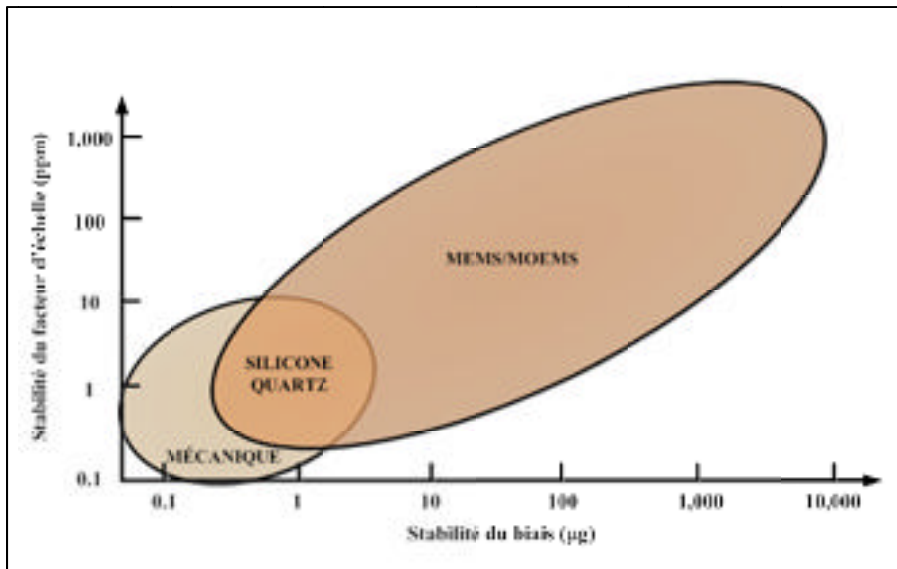


Figure 4-5 Technologies d'accéléromètres et performances théoriques  
Adaptée de Schmidt (2004, p. 7)

L'objectif de ce mémoire n'étant pas de faire une revue exhaustive des différentes technologies d'accéléromètres, ces dernières ne seront pas détaillées d'avantage. Le lecteur est cependant invité à consulter certains ouvrages de référence (Amand et Deval, 1992; Johnson, 2006; Lawrence, 1998).

### 4.3.2 Gyroscopes

Les gyroscopes sont des instruments permettant de mesurer les vitesses angulaires d'un objet par rapport au repère inertiel terrestre. Ces instruments sont, pour la majorité, basés soit sur l'effet gyroscopique, sur l'effet Sagnac, ou encore sur l'effet de Coriolis. Tout comme pour les accéléromètres, il existe plusieurs technologies de gyroscopes pouvant généralement être regroupées selon trois grandes familles soient les gyroscopes mécaniques, les gyroscopes optiques et les gyroscopes vibrants. La Figure 4-6 présente une vue d'ensemble des différents types de gyroscopes utilisés en navigation inertielle, de même qu'un aperçu de leurs performances théoriques.

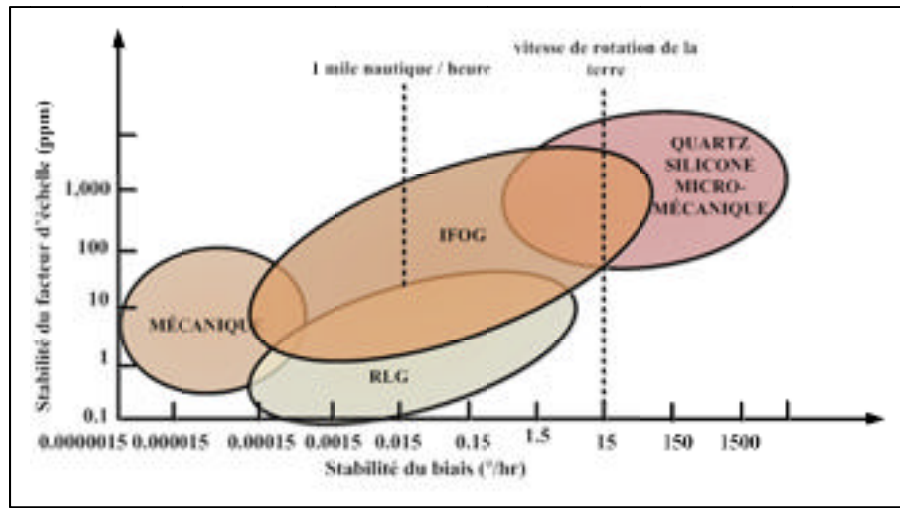


Figure 4-6 Technologies de gyroscopes et performances théoriques  
Adaptée de Schmidt (2004, p. 4)

L'objectif de ce mémoire n'étant pas de faire une revue exhaustive des différentes technologies de gyroscopes, ces dernières ne seront pas détaillées d'avantage. Le lecteur est cependant invité à consulter certains ouvrages de référence (Armenise *et al.*, 2010; Lawrence, 1998; Radix, 2000; Woodman, 2007).

### 4.3.3 Magnétomètres

Bien que les magnétomètres ne soient généralement pas considérés comme étant des capteurs inertiels, plusieurs IMU à faible coût basées sur la technologie MEMS comprennent désormais, en plus d'une triade d'accéléromètres et de gyroscopes, une triade de magnétomètres. Cette architecture facilite notamment la détermination de l'attitude d'une centrale inertielle à faible coût, tel qu'il sera présenté à la section 6.5. Les magnétomètres sont des instruments permettant de mesurer le champ magnétique local qui est généralement constitué d'une combinaison du champ magnétique terrestre et de perturbations locales. Ces perturbations locales, qui seront présentées plus en détails à l'intérieur de la section 4.4.1, peuvent soit provenir de sources permanentes fixées au capteur, ou encore faire partie de l'environnement extérieur.

## 4.4 Sources d'erreur des capteurs inertiels

### 4.4.1 Erreurs de nature déterministe

Les erreurs de nature déterministe, également appelées erreurs systématiques, sont des erreurs non aléatoires qui peuvent généralement être éliminées à l'aide d'une méthode de calibration adéquate. Dans le cadre de ce mémoire, le biais, le facteur d'échelle et l'erreur de mauvais alignement des capteurs inertiels seront étudiés de même que les erreurs de fer dur et de fer doux des magnétomètres.

**Mauvais alignement :** L'erreur de mauvais alignement fait référence à une erreur d'orthogonalité présente à l'intérieur de la centrale inertielle. Ainsi, plutôt qu'être parfaitement orthogonaux, les axes du repère des capteurs peuvent parfois être quelque peu inclinés (*voir Figure 4-7*). Du à cette non-orthogonalité, une excitation selon un axe unique du repère des capteurs peut provoquer une mesure erronée le long des autres axe de ce même repère.

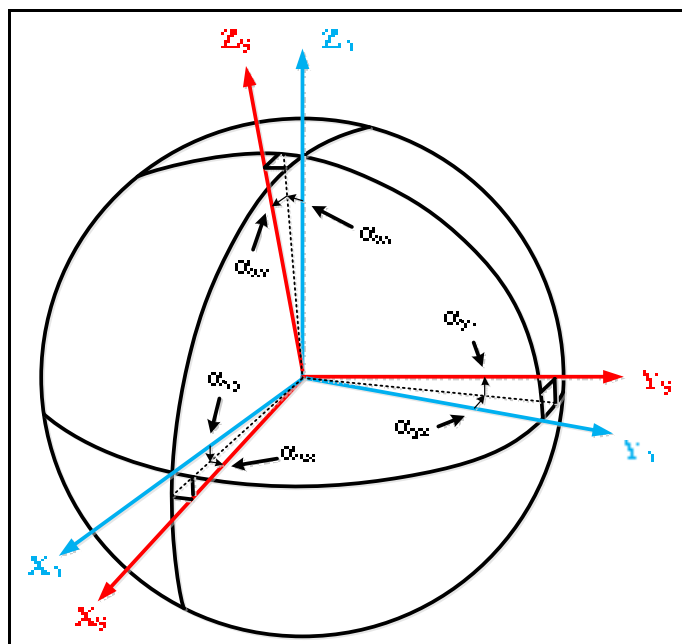


Figure 4-7 Erreur de mauvais alignement entre le repère des capteurs et le repère du mobile  
Adaptée de Skog et Händel (2006, p. 2)



**Biais :** fait référence à un écart constant présent entre la mesure de sortie des capteurs inertiels et la valeur de référence mesurée par ces derniers. Cette erreur est indépendante de l'amplitude de la mesure et est également présente même en l'absence d'excitation en entrée.

**Facteur d'échelle :** est défini comme étant un ratio constant entre la mesure de sortie des capteurs inertiels et la valeur de référence mesurée par ces derniers. Cette erreur est généralement exprimée en pourcentage et ne possède ainsi aucune unité.

**Erreur de fer dur :** proviennent généralement de sources magnétiques ou électromagnétiques permanentes fixées à l'assemblage de capteurs. Par exemple, ces erreurs peuvent provenir d'un support, de vis ou d'écrous constituées de matériaux ferromagnétiques, ou encore des composantes électroniques montées directement sur le circuit imprimé du capteur. Ces perturbations locales du champ magnétique terrestre évoluent avec l'assemblage de capteurs affectant ainsi les mesures de ce dernier de la même façon que le ferait un biais constant (voir Figure 4-8).

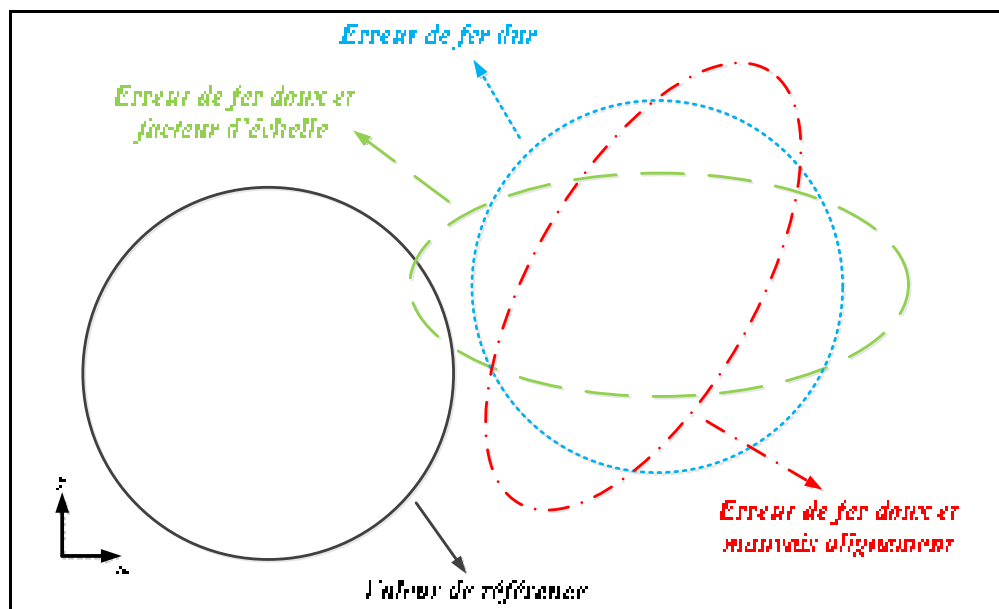


Figure 4-8 Effet des erreurs de mesure sur le lieu géométrique des magnétomètres  
Adaptée de Gebre-Egziabher et al. (2006)

**Erreur de fer doux :** proviennent quant à elles de sources magnétiques ou électromagnétiques externes présentes dans l'environnement dans lequel évoluent les capteurs. Ces perturbations peuvent provenir de structures ou d'objets composés de matériaux ferromagnétiques, ou encore d'instruments électroniques ou de câblage présents dans l'environnement de test. Les erreurs de fer doux sont fixes dans l'espace et affectent les mesures de magnétomètres de façon similaire aux erreurs de mauvais alignement et de facteur d'échelle (voir Figure 4-8).

Afin de pouvoir estimer adéquatement ces sources d'erreur, il est nécessaire de bien les modéliser. Dans le cadre de ce mémoire, les erreurs de nature déterministe seront modélisées selon le modèle présenté par Skog et Händel (2006) :

$$\underline{v}^B = \mathbf{MS}(\underline{v}^S + \underline{b}) \quad (4.1)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{yz} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où :

- $\underline{v}^B$  : vecteur de mesures exprimé selon le repère du mobile
- $\underline{v}^S$  : vecteur de mesures exprimé selon le repère des capteurs
- $\mathbf{M}$  : matrice de mauvais alignement
- $\mathbf{S}$  : matrice de facteur d'échelle
- $\underline{b}$  : vecteur de biais de mesure
- $\alpha_{ij}$  : angles permettant d'aligner le repère des capteurs avec le repère du mobile (voir Figure 4-7)

$s_{ij}$  : facteur d'échelle selon x, y et z

Afin de simplifier la notation et de réduire le nombre d'inconnus lors de la calibration, les matrices de mauvais alignement et de facteur d'échelle seront combinées à l'intérieur d'une seule matrice tel que (Fong, Ong et Nee, 2008) :

$$\underline{v}^B = \mathbf{E}(\underline{v}^S + \underline{b}) \quad (4.5)$$

où :

$\mathbf{E}$  : matrice combinée de l'erreur de mauvais alignement et du facteur d'échelle

Les différents paramètres de ce modèle d'erreur doivent être estimés à l'aide d'un algorithme de calibration initial. La section 6.1 présentera les deux algorithmes utilisés dans le cadre de ce projet afin de réaliser la calibration des capteurs inertiels.

#### 4.4.2 Erreurs de nature stochastique

Les erreurs de nature stochastique sont des erreurs aléatoires qui, contrairement aux erreurs de nature déterministe, ne peuvent généralement pas être éliminées lors de la calibration initiale. Dans le cadre de ce mémoire, le bruit blanc de même que bruit corrélé seront étudiés.

**Bruit blanc** : est caractérisé par un bruit dont la fonction de densité spectrale de puissance est constante à toutes les fréquences.

**Bruit corrélé** : est caractérisé par un bruit dont la fonction d'autocorrélation est de forme exponentielle décroissante. En ce qui concerne les capteurs inertiels, ce processus aléatoire possède généralement un temps de corrélation élevé ce qui fait en sorte qu'il est observable principalement lors de tests de longue durée.

Le bruit blanc peut généralement être défini comme un processus aléatoire suivant une distribution normale (Gaussienne) de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  tel que :

$$x \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.6)$$

où :

$x$  : processus aléatoire suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$

En ce qui concerne le bruit corrélé, cette erreur peut généralement être modélisée comme un processus de Gauss-Markov de premier ordre défini tel que (Farrell, 2008) :

$$\dot{x} = -\beta x + \eta \quad (4.7)$$

où :

$\beta$  : constante de temps du processus de Gauss-Markov  
 $\eta$  : bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$

Les différents paramètres définissant ce processus peuvent être obtenus à partir d'analyses statistiques sur les mesures inertielles telles que l'analyse de la fonction d'autocorrélation des mesures, ou encore une analyse de la variance d'Allan. Ces dernières seront présentées en détail aux sections 6.2 et 6.3.

## 4.5 Modèles de mesure des capteurs inertiels

L'objectif de cette section est de présenter les modèles utilisés afin de modéliser les mesures provenant des capteurs inertiels à l'intérieur des algorithmes des navigations utilisés dans le cadre de ce mémoire.

### 4.5.1 Modèle de mesure des accéléromètres

Le vecteur de mesures provenant des accéléromètres est le vecteur de forces spécifiques qui est modélisé tel que :

$$\underline{\tilde{f}}^B = \underline{f}^B + \underline{\delta f}^B + \underline{\eta}_f \quad (4.8)$$

où :

- $\underline{\tilde{f}}^B$  : vecteur de forces spécifiques mesuré par les accéléromètres
- $\underline{f}^B$  : vecteur de forces spécifiques réel
- $\underline{\delta f}^B$  : vecteur d'erreur de la mesure de forces spécifiques
- $\underline{\eta}_f$  : vecteur de bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{\eta_f}^2$

Ainsi, deux sources d'erreur additives sont considérées par ce modèle : le vecteur de biais et le vecteur de bruit blanc.

#### 4.5.2 Modèle de mesure des gyroscopes

Le vecteur de mesures provenant des gyroscopes est le vecteur de vitesses angulaires qui est modélisé tel que :

$$\underline{\tilde{\omega}}_{IB}^B = \underline{\omega}_{IB}^B + \underline{\delta \omega}^B + \underline{\eta}_\omega \quad (4.9)$$

où :

- $\underline{\tilde{\omega}}_{IB}^B$  : vecteur de vitesses angulaires mesuré par les gyroscopes
- $\underline{\omega}_{IB}^B$  : vecteur de vitesse angulaire réel
- $\underline{\delta \omega}^B$  : vecteur d'erreur de la mesure de vitesses angulaires
- $\underline{\eta}_\omega$  : vecteur de bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{\eta_\omega}^2$

Tout comme pour le modèle de mesure des accéléromètres, le vecteur de bruit blanc ainsi que le vecteur de biais sont considérés afin de modéliser les mesures de gyroscopes.

#### 4.5.3 Modèle de mesure des magnétomètres

Le vecteur de mesures provenant des magnétomètres est le vecteur de champ magnétique qui est modélisé tel que :

$$\underline{\tilde{m}}^B = \underline{m}^B + \delta\underline{m}^B + \underline{\eta}_m \quad (4.10)$$

où :

$\underline{\tilde{m}}^B$  : vecteur de champ magnétique terrestre mesuré par les magnétomètres

$\underline{m}^B$  : vecteur de champ magnétique terrestre réel

$\delta\underline{m}^B$  : vecteur de perturbations du champ magnétique local

$\underline{\eta}_m$  : vecteur de bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{\eta_m}^2$

Ainsi, le bruit blanc ainsi que les perturbations du champ magnétique local sont considérées par ce modèle. Il existe différents modèles afin de calculer le vecteur théorique de champ magnétique terrestre. Le modèle utilisé dans le cadre de ce mémoire est le modèle IGRF (*International Geomagnetic Reference Field*) mis en place par l'association internationale de géomagnétisme et d'aéronomie (IAGA – *International Association of Geomagnetism and Aeronomy*) et publié sur le site officiel de cette association (IAGA, 2010). Ce modèle ne sera pas détaillé d'avantage dans ce mémoire.

#### 4.6 Développement de l'algorithme de navigation inertielle

Tel que discuté à la section 4.2, les équations de navigation sont implémentées à l'intérieur d'un ordinateur de calcul dont les principales tâches sont énumérées ci-dessous :

- 1) l'intégration des vitesses angulaires mesurées par les gyroscopes afin de mettre à jour l'attitude du mobile (propagation de l'attitude);
- 2) l'utilisation de la nouvelle attitude du mobile afin de transformer la représentation du vecteur de forces spécifiques vers le repère de navigation (transformation de l'accélération);
- 3) le calcul des composantes de force d'attraction gravitationnelle, de force centripète et d'accélération de Coriolis afin d'extraire l'accélération du mobile des mesures de forces spécifiques;

- 4) l'intégration de l'accélération afin d'obtenir la vitesse du mobile (propagation de la vitesse);
- 5) l'intégration de la vitesse afin d'obtenir la position du mobile (propagation de la position).

La section suivante présentera les équations mathématiques définissant ces étapes

#### 4.6.1 Équation de propagation de l'attitude

L'attitude du mobile à l'intérieur de l'algorithme INS est obtenue par l'intégration de l'équation de propagation de la matrice des cosinus de direction ou du quaternion unitaire qui caractérisent l'orientation du repère du mobile par rapport au repère local. Tel que défini aux équations (2.41) et (2.42), ces équations différentielles sont fonction de la vitesse de rotation du repère du mobile et du repère local par rapport au repère inertiel terrestre tel que :

$$\dot{\mathbf{C}}_B^L = \mathbf{C}_B^L(\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IL}^L \times)\mathbf{C}_B^L \quad (4.11)$$

$$\dot{q}_B^L = \frac{1}{2} q_B^L \otimes \omega_{IB}^B - \frac{1}{2} \omega_{IL}^L \otimes q_B^L \quad (4.12)$$

La vitesse de rotation du repère du mobile par rapport au repère inertiel terrestre est mesurée directement par les gyroscopes tel que défini à l'équation (4.9), tandis que la vitesse de rotation du repère local par rapport au repère inertiel terrestre doit être calculée à partir de la vitesse de rotation de la Terre et du taux de transport tel que :

$$\underline{\omega}_{IL}^L = \mathbf{C}_N^L(\underline{\omega}_{IE}^N + \underline{\omega}_{EN}^N) \quad (4.13)$$

dans laquelle :

$$\underline{\omega}_{IE}^N = (\mathbf{C}_N^E)^T \underline{\omega}_{IE}^E \quad (4.14)$$

$$\underline{\omega}_{IE}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{IE} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\underline{\omega}_{EN}^N \equiv \underline{\rho}^N \quad (4.16)$$

où :

$\mathbf{C}_N^L$  : matrice de rotation caractérisant l'orientation du repère de navigation par rapport au repère local tel que défini à l'équation (2.15)

$\mathbf{C}_N^E$  : matrice de rotation caractérisant l'orientation du repère de navigation par rapport au repère fixe terrestre tel que défini à l'équation (2.17)

$\omega_{IE}$  : vitesse de rotation de la Terre par rapport au repère inertiel terrestre tel que défini à l'équation (2.1)

$\underline{\rho}^N$  : taux de transport caractérisant la vitesse de rotation du repère de navigation par rapport au repère fixe terrestre, exprimé selon le repère de navigation tel que défini à l'équation (2.56)

#### 4.6.2 Transformation de l'accélération

Le vecteur de forces spécifiques mesuré par les accéléromètres doit d'abord être transformé à partir du repère du mobile vers le repère de navigation avant de pouvoir être utilisé pour le calcul de la vitesse du mobile à l'intérieur de l'algorithme INS. Cette manipulation est réalisée à l'aide de l'une des équations suivantes :

$$\underline{f}^N = \mathbf{C}_N^L \left( \mathbf{C}_B^L \underline{f}^B \right) \quad (4.17)$$

$$\underline{f}^N = \mathbf{C}_N^L (q_B^L f^B (q_B^L)^{-1}) \quad (4.18)$$

où :

$\underline{f}^N, f^N$  : vecteur de force spécifiques exprimé selon le repère de navigation et sa représentation en quadrivecteur

$\underline{f}^B, f^B$  : vecteur de force spécifiques exprimé selon le repère du mobile et sa représentation en quadrivecteur



### 4.6.3 Équation de propagation de la vitesse

La vitesse du mobile à l'intérieur de l'algorithme INS est obtenue par l'intégration de l'accélération de ce dernier par rapport au repère inertiel terrestre. Ainsi, afin de calculer la vitesse du mobile, il est d'abord nécessaire d'extraire cette mesure d'accélération du vecteur de forces spécifiques mesuré par les accéléromètres. Pour ce faire, il est nécessaire de décomposer ce vecteur selon ses différentes composantes soient l'accélération du mobile, le vecteur de gravité et les accélérations de Coriolis tel que :

$$\underline{f}^N = \underline{a}_{IB}^N - \underline{g}_p^N + (\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{JE}^N) \times \underline{V}^N \quad (4.19)$$

où :

- $\underline{a}_{IB}^N$  : vecteur d'accélération du mobile par rapport au repère inertiel terrestre, exprimé selon le repère de navigation
- $\underline{g}_p^N$  : vecteur de gravité *plump-bob* tel que défini par l'équation (2.54)
- $\underline{V}^N$  : vecteur de vitesse du mobile exprimé selon le repère de navigation

En manipulant l'équation (4.19), l'expression de l'accélération du mobile par rapport au repère inertiel terrestre et exprimée selon le repère de navigation peut être obtenue :

$$\underline{\dot{V}}^N = \underline{a}_{IB}^N = \underline{f}^N + \underline{g}_p^N - (\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{JE}^N) \times \underline{V}^N \quad (4.20)$$

### 4.6.4 Équation de propagation de la position

La position du mobile à l'intérieur de l'algorithme INS est calculée par l'intégration des équations de propagation de l'altitude ellipsoïdale et de la matrice des cosinus de direction  $\underline{C}_N^E$  qui caractérise l'orientation du repère de navigation par rapport au repère fixe terrestre. Ces équations différentielles sont définies telles que :

$$\dot{\underline{C}}_N^E = \underline{C}_N^E (\underline{\rho}^N \times) \quad (4.21)$$

$$\dot{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{V}^N \quad (4.22)$$

où :

$h$  : altitude ellipsoïdale

La latitude et la longitude du mobile peuvent être obtenues directement à partir de la matrice  $\mathbf{C}_N^E$  tel que :

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{d_{23}}{\sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2}} \right) \quad (4.23)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{d_{13}}{d_{33}} \right) \quad (4.24)$$

où :

$\phi$  : latitude géodésique

$\lambda$  : longitude géodésique

$d_{ij}$  : élément de la rangée  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{C}_N^E$

## 4.7 Modèle de propagation d'erreur du système INS

Un modèle de propagation d'erreur permet de modéliser le comportement des paramètres d'erreur d'un système ainsi que leurs effets sur la solution de navigation. Ces modèles sont généralement utilisés à l'intérieur d'un estimateur afin d'estimer et de corriger les erreurs et d'améliorer la solution de navigation. Deux principaux modèles sont utilisés dans la littérature : le modèle d'angle psi et le modèle d'angle phi. Bien que présentés différemment, ces deux modèles sont équivalents et ils offrent des performances similaires (Pusa, 2009). La section suivante présentera la théorie du modèle d'angle psi qui a été choisi pour ce mémoire.

### 4.7.1 Modèle d'angle psi

Tout d'abord, définissons deux nouveaux repères orthogonaux :

**Repère de la plateforme (P) :** représente le repère selon lequel les mesures inertielles sont transformées afin de résoudre les équations de navigation

**Repère de calcul (C) :** représente le repère local réel exprimé à la position où se situe l'ordinateur de calcul

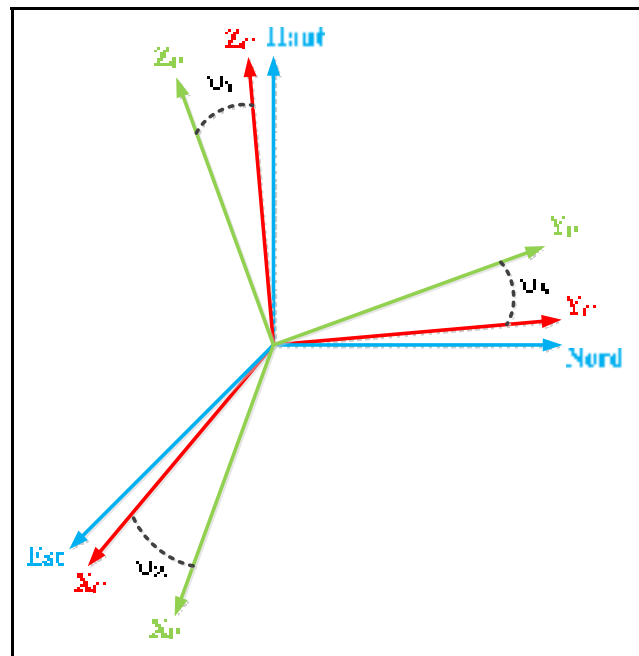


Figure 4-9 Repère de la plateforme, repère de calcul et les trois angles psi

Ces deux repères sont illustrés à la Figure 4-9. Ainsi, selon ce modèle, les équations de navigation sont résolues selon le repère de calcul plutôt que le repère de navigation réel. De plus, ce modèle propose qu'il existe une erreur angulaire  $\psi$  entre les axes du repère de calcul et ceux du repère de la plateforme. Basé sur cette définition et selon le principe de matrice des cosinus de direction, il existe une relation mathématique entre ces deux repères tel que :

$$\mathbf{C}_C^P = \begin{bmatrix} c\psi_z & s\psi_z & 0 \\ -s\psi_z & c\psi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi_y & 0 & -s\psi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ s\psi_y & 0 & c\psi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi_x & s\psi_x \\ 0 & -s\psi_x & c\psi_x \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{C}_C^P = \begin{bmatrix} c\psi_y c\psi_z & c\psi_x s\psi_z + c\psi_z s\psi_x s\psi_y & s\psi_x s\psi_z - c\psi_x c\psi_z s\psi_y \\ -c\psi_y s\psi_z & c\psi_x c\psi_z - s\psi_x s\psi_y s\psi_z & c\psi_z s\psi_x + c\psi_x s\psi_y s\psi_z \\ s\psi_y & -c\psi_y s\psi_x & c\psi_x c\psi_y \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

où :

$\mathbf{C}_C^P$  : matrice rotation caractérisant l'orientation du repère de calcul par rapport au repère de la plateforme

$\psi_x, \psi_y, \psi_z$  : erreur angulaire entre les axes X, Y et Z du repère de calcul et du repère de la plateforme

$c\psi, s\psi$  : fonctions cosinus et sinus de l'erreur angulaire  $\psi$

En supposant que l'erreur angulaire  $\psi$  est très petite, l'hypothèse suivante peut être posée :

$$c\psi = 1 \quad (4.27)$$

$$s\psi = \psi \quad (4.28)$$

Ainsi, en négligeant les termes de deuxième ordre et plus, l'équation (4.26) peut être réduite à :

$$\mathbf{C}_C^P = \begin{bmatrix} 1 & \psi_z & -\psi_y \\ -\psi_z & 1 & \psi_x \\ \psi_y & -\psi_x & 1 \end{bmatrix} = \left( I - \underline{\psi} \times \right) \quad (4.29)$$

Cette relation sera utilisée tout au long de cette section afin de définir les équations de propagation d'erreur de vitesse, de position et d'attitude du système INS.

#### 4.7.2 Équation de propagation d'erreur de vitesse

Tout d'abord, l'équation de propagation de la vitesse (définie à l'équation (4.20)) peut être exprimée selon le repère de calcul tel que :

$$\underline{\dot{V}}^C = \underline{f}^C + \underline{g}_p^C - (\underline{\omega}_{EN}^C + 2\underline{\omega}_{IE}^C) \times \underline{V}^C \quad (4.30)$$

Cependant, étant donné que les forces spécifiques mesurées par les accéléromètres sont transformées vers le repère de la plateforme et non vers le repère de calcul, le vecteur de forces spécifiques  $\underline{f}^C$  n'est pas disponible directement et seul un estimé de ce dernier peut être obtenu. L'expression de cet estimé est donné par :

$$\underline{\hat{f}}^C = \underline{f}^P - \delta \underline{f}^P \quad (4.31)$$

Le système INS est donc en mesure d'obtenir uniquement un estimé de l'équation de propagation de la vitesse tel que :

$$\underline{\hat{V}}^C = \left( \underline{f}^P - \delta \underline{f}^P \right) + \underline{\hat{g}}_p^C - \left( \underline{\omega}_{EN}^C + 2\underline{\omega}_{IE}^C \right) \times \underline{\hat{V}}^C \quad (4.32)$$

où :

- $\underline{\hat{V}}^C$  : estimé du vecteur de vitesse du mobile tel que calculé par le système INS
- $\underline{\hat{g}}_p^C$  : estimé du vecteur de gravité tel que calculé par le système INS

Le modèle de propagation d'erreur de vitesse basé sur le modèle d'angle psi correspond à la différence entre l'équation de propagation réelle et celle de l'estimé tel que :

$$\delta \underline{\dot{V}}^C = \underline{\dot{V}}^C - \underline{\dot{\hat{V}}}^C \quad (4.33)$$

$$\delta \underline{\dot{V}}^C = \left( \underline{C}_P^C \underline{f}^P - \underline{f}^P \right) - \left( \underline{\omega}_{EN}^C + 2\underline{\omega}_{IE}^C \right) \times \left( \underline{V}^C - \underline{\hat{V}}^C \right) + \delta \underline{f}^P + \left( \underline{g}_p^C - \underline{\hat{g}}_p^C \right) \quad (4.34)$$

L'équation (4.34) peut être réécrite de sorte que :

$$\delta \underline{\dot{V}}^C = \underline{f}^P \times \underline{\psi} - \left( \underline{\omega}_{EN}^C + 2\underline{\omega}_{IE}^C \right) \times \delta \underline{V}^C + \delta \underline{f}^P + \delta \underline{g}_p^C \quad (4.35)$$

dans laquelle :

$$\delta \underline{V}^C = \underline{V}^C - \underline{\hat{V}}^C \quad (4.36)$$

$$\delta \underline{g}_p^C = \underline{g}_p^C - \hat{\underline{g}}_p^C \quad (4.37)$$

$$\underline{C}_P^C = (\underline{C}_C^P)^T = (I - \underline{\psi} \times)^T = (I + \underline{\psi} \times) \quad (4.38)$$

$$(-\underline{\psi} \times) \underline{f}^P = \underline{f}^P \times \underline{\psi} \quad (4.39)$$

### 4.7.3 Équation de propagation d'erreur de position

L'erreur de position peut être définie comme l'erreur présente sur le vecteur de position du mobile calculé par rapport au centre de la Terre. L'expression de cette erreur selon le repère fixe terrestre est donné par :

$$\delta \underline{R}^E = \underline{R}^E - \hat{\underline{R}}^E \quad (4.40)$$

où :

$\underline{R}^E$  : vecteur de position réel du mobile par rapport au centre de la Terre, exprimé selon le repère fixe terrestre

$\hat{\underline{R}}^E$  : estimé du vecteur de position tel que calculé par le système INS et exprimé selon le repère fixe terrestre

$\delta \underline{R}^E$  : vecteur d'erreur de position exprimé selon le repère fixe terrestre

Ce vecteur de position peut être exprimé en fonction de la vitesse du mobile selon l'expression suivante :

$$\dot{\underline{R}}^E = \underline{V}^E = \underline{C}_C^E \underline{V}^C \quad (4.41)$$

$$\underline{R}^E = \int \underline{C}_C^E \underline{V}^C \quad (4.42)$$

De la même façon, l'estimé du vecteur de position peut être donné par :

$$\hat{\underline{R}}^E = \int \underline{C}_C^E \hat{\underline{V}}^C \quad (4.43)$$

$$\underline{\hat{R}}^E = \int \mathbf{C}_C^E (\underline{V}^C - \delta \underline{V}^C) \quad (4.44)$$

Le vecteur d'erreur de position peut alors être obtenu en combinant les équations (4.40), (4.42) et (4.44) tel que :

$$\delta \underline{R}^E = \int \mathbf{C}_C^E \underline{V}^C - \int \mathbf{C}_C^E (\underline{V}^C - \delta \underline{V}^C) \quad (4.45)$$

$$\delta \underline{R}^E = \int \mathbf{C}_C^E \underline{V}^C - \int \mathbf{C}_C^E \underline{V}^C + \int \mathbf{C}_C^E \delta \underline{V}^C \quad (4.46)$$

$$\delta \underline{R}^E = \int \mathbf{C}_C^E \delta \underline{V}^C \quad (4.47)$$

Ce vecteur d'erreur peut également être exprimé selon le repère de calcul tel que :

$$\delta \underline{R}^C = \mathbf{C}_E^C \int \mathbf{C}_C^E \delta \underline{V}^C \quad (4.48)$$

$$\delta \underline{\dot{R}}^C = \dot{\mathbf{C}}_E^C \delta \underline{R}^E + \delta \underline{V}^C \quad (4.49)$$

En appliquant l'équation (A II-9) à la matrice  $\dot{\mathbf{C}}_E^C$ , l'équation (4.49) peut être manipulée de manière à obtenir l'équation de propagation d'erreur de la position :

$$\delta \underline{\dot{R}}^C = (-(\underline{\omega}_{EC}^C \times) \mathbf{C}_E^C) \delta \underline{R}^E + \delta \underline{V}^C \quad (4.50)$$

$$\delta \underline{\dot{R}}^C = -\underline{\omega}_{EC}^C \times \delta \underline{R}^C + \delta \underline{V}^C \quad (4.51)$$

#### 4.7.4 Équation de propagation d'erreur de l'attitude

Le système de navigation inertielle considère les axes du repère de la plateforme comme étant initialement alignés avec ceux du repère de calcul. Lorsque le mobile est en mouvement, les axes du repère de calculs sont soumis à une vitesse angulaire  $\omega_{IC}^C$ . Cependant, étant donné que les gyroscopes possèdent une certaine erreur, la vitesse angulaire

du repère de la plateforme par rapport au repère inertiel terrestre peut être définie selon l'expression suivante :

$$\underline{\omega}_{IP}^P = \underline{\omega}_{IC}^C + \underline{\varepsilon}^P \quad (4.52)$$

où :

- $\underline{\omega}_{IP}^P$  : vitesse angulaire du repère de la plateforme par rapport au repère inertiel terrestre, exprimé selon le repère de la plateforme
- $\underline{\omega}_{IC}^C$  : vitesse angulaire du repère de calcul par rapport au repère inertiel terrestre, exprimé selon le repère de calcul
- $\underline{\varepsilon}^P$  : vecteur d'erreur de mesure des gyroscopes exprimé selon le repère de la plateforme

En multipliant les deux côtés de l'équation (4.52) par la matrice des cosinus de direction  $\mathbf{C}_C^P$  et en manipulant le résultat, l'équation de propagation d'erreur de l'attitude peut être obtenue tel que :

$$\mathbf{C}_C^P \underline{\omega}_{IP}^P = \mathbf{C}_C^P \underline{\omega}_{IC}^C + \mathbf{C}_C^P \underline{\varepsilon}^P \quad (4.53)$$

$$\left( \mathbf{I} - \underline{\psi}^P \times \right) \underline{\omega}_{IP}^P = \mathbf{C}_C^P \underline{\omega}_{IC}^C + \left( \mathbf{I} - \underline{\psi}^P \times \right) \underline{\varepsilon}^P \quad (4.54)$$

$$\underline{\omega}_{IP}^P + \left( \underline{\omega}_{IP}^P \times \right) \underline{\psi}^P = \underline{\omega}_{IC}^C + \underline{\varepsilon}^P \quad (4.55)$$

$$\underline{\dot{\psi}}^P = - \left( \underline{\omega}_{IP}^P \times \right) \underline{\psi}^P + \underline{\varepsilon}^P \quad (4.56)$$

dans laquelle :

$$\underline{\dot{\psi}}^P = \underline{\omega}_{CP}^P = \underline{\omega}_{IP}^P - \underline{\omega}_{IC}^C \quad (4.57)$$

où :

- $\underline{\omega}_{CP}^P$  : vitesse angulaire du repère de la plateforme par rapport au repère de calcul, exprimé selon le repère de la plateforme



#### 4.7.5 Résumé

En résumé, les équations de propagation d'erreur du système INS peuvent être exprimées selon le repère de navigation sous la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{V}^N \\ \delta \dot{R}^N \\ \dot{\psi}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{IE}^N) & \mathbf{F}_{12} & (\mathbf{C}_{B\underline{f}^B}^N) \times \\ \mathbf{I} & -(\underline{\omega}_{EN}^N \times) & 0 \\ 0 & 0 & -(\underline{\omega}_{IN}^N \times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{V}^N \\ \delta \underline{R}^N \\ \underline{\psi}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \underline{f}^N \\ 0 \\ \delta \underline{\omega}_{IB}^N \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{g}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{R} & 0 \\ 0 & 0 & F(h) \frac{g}{R} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$F(h) = \begin{cases} -1, & h < 0 \\ 2, & h \geq 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

$$\delta \underline{\omega}_{IB}^B = \underline{\varepsilon}^N \quad (4.61)$$

où :

$g$  : magnitude du vecteur de gravité

$R$  : distance linéaire entre le centre de la Terre et la position du véhicule



## CHAPITRE 5

### FILTRE DE KALMAN ET DÉFINITION DES MODÈLES D'INTÉGRATION

Les chapitres 3 et 4 ont permis de présenter les systèmes GPS et INS ainsi que leur modèle d'erreur respectif. Jusqu'à maintenant, ces deux systèmes ont toutefois été présentés de manière totalement indépendante et leur intégration n'a pas encore été abordée. La principale motivation derrière l'intégration de ces systèmes de navigation est de permettre l'estimation de certains paramètres d'erreur, ce qui peut généralement être réalisé à l'aide d'un estimateur d'état. Ce chapitre présentera la théorie derrière l'estimateur qui sera utilisé dans le cadre de ce mémoire soit le filtre de Kalman. Dans un premier temps, la forme générale utilisée afin de définir les différents modèles d'intégration ainsi que les concepts d'estimation d'état et d'estimation optimale seront présentés. Suite à cette théorie, les différents modèles utilisés pour ce projet seront détaillés.

#### 5.1 Forme générale des modèles d'intégration

La forme générale de la représentation d'état utilisée dans le cadre de ce mémoire afin de définir les différents modèles d'intégration est appelée forme canonique contrôlable. Cette dernière est généralement utilisée pour définir les problèmes d'estimation. La forme canonique contrôlable est définie selon le système d'équations suivant :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{F} \cdot \underline{x}(t) + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p(t) \quad (5.1)$$

$$\underline{z}(t) = \mathbf{H} \cdot \underline{x}(t) + \underline{\eta}_m(t) \quad (5.2)$$

où :

$\underline{x}(t)$  : vecteur d'état du système

$\underline{\eta}_p(t)$  : vecteur de bruit du système

$\underline{z}(t)$  : vecteur d'observations (ou de mesures)

$\underline{\eta}_m(t)$  : vecteur de bruit de mesures

$\mathbf{F}$  : matrice de transition du vecteur d'état caractérisant la propagation de ce

dernier

**G** : matrice caractérisant le lien entre le vecteur de bruit du système et les différents états

**H** : matrice d'observabilité caractérisant le lien entre le vecteur d'état et le vecteur de mesures

Afin de satisfaire aux exigences du filtre de Kalman, ce modèle est construit avec l'hypothèse que le vecteur de bruit du système  $\underline{\eta}_p(t)$  ainsi que le vecteur de bruit de mesure  $\underline{\eta}_m(t)$  sont constitués uniquement de bruit blanc Gaussien suivant une loi normale dont les paramètres sont les suivants :

$$\underline{\eta}_p(t) \sim N(0, \mathbf{Q}_c(t)) \quad (5.3)$$

$$\underline{\eta}_m(t) \sim N(0, \mathbf{R}(t)) \quad (5.4)$$

où :

$\mathbf{Q}_c(t)$  : matrice de covariance du bruit du système

$\mathbf{R}(t)$  : matrice de covariance du bruit de mesures

### 5.1.1 Forme discrétisée équivalente

De manière générale, les équations de navigation peuvent être exprimées à l'aide d'équations en temps continu. Toutefois, lors de leur implémentation à l'intérieur d'un système embarqué, ces dernières doivent être traitées numériquement par l'ordinateur de calcul. Ainsi, ces dernières doivent être discrétisées. La forme discrète de l'équation (5.1) est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{x}(t_{k+1}) = \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, t_k) \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \underline{\eta}_p(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

où :

$\boldsymbol{\phi}(i, j)$  : matrice de transition du vecteur d'état à partir de l'instant  $j$  vers l'instant  $i$

Cette équation peut également être écrite selon la forme abrégée équivalente suivante :

$$\underline{x}_{k+1} = \boldsymbol{\phi}_k \underline{x}_k + \underline{\eta}_{p_k} \quad (5.6)$$

où :

- $\boldsymbol{\phi}_k$  : forme discrétisée de la matrice de transition du vecteur d'état
- $\underline{\eta}_{p_k}$  : forme discrétisée du vecteur de bruit du modèle dynamique, représentée par une séquence de bruit blanc Gaussien dont la matrice de covariance est connue et définie tel que  $E [\underline{\eta}_{p_k} \underline{\eta}_{p_k}^T] = \mathbf{Q} \mathbf{d}_k$

Selon cette définition, et en considérant que la matrice de transition  $F(t)$  est constante (ou presque constante) entre deux époques successives du modèle dynamique, la matrice de transition du vecteur d'état peut être évaluée numériquement à l'aide de l'équation suivante (Bar-Shalom, Li et Kirubarajan, 2001) :

$$\boldsymbol{\phi}_k = e^{\mathbf{F}(t) \cdot \Delta t} \quad (5.7)$$

où :

- $\Delta t$  : différence de temps entre deux époques successives du système discrétisé

Cette équation peut être approximée à l'aide d'une série de Taylor tel que :

$$\boldsymbol{\phi}_k = e^{\mathbf{F}(t) \cdot \Delta t} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{F}(t) \cdot \Delta t)^n}{n!} = I + \mathbf{F}(t) \cdot \Delta t + \frac{(\mathbf{F}(t) \cdot \Delta t)^2}{2} + \dots \quad (5.8)$$

Afin que le système présenté par l'équation (5.6) soit équivalent à celui présenté à l'équation (5.5),  $\underline{\eta}_{p_k}$  doit satisfaire l'égalité suivante :

$$\underline{\omega}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \underline{\eta}_p(\tau) d\tau \quad (5.9)$$

$$\underline{\omega}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{F}(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{G}(\tau) \underline{\eta}_p(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

Ainsi, la matrice de covariance du vecteur de bruit du modèle dynamique  $\mathbf{Qd}_k$  peut être évaluée numériquement par l'expression suivante :

$$\mathbf{Qd}_k = E \left[ \underline{\eta}_p \underline{\eta}_p^T \right] \quad (5.11)$$

$$\mathbf{Qd}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}_c(\tau) \mathbf{G}(\tau)^T \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, \tau)^T d\tau \quad (5.12)$$

Finalement, cette expression peut être approximée par une série de Taylor tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{Qd}_k \approx & \mathbf{Q}\Delta t + (\mathbf{FQ} + \mathbf{QF}^T) \frac{\Delta t^2}{2} + (\mathbf{F}^2\mathbf{Q} + 2\mathbf{FQF}^T + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^T)^2) \frac{\Delta t^3}{6} \\ & + (\mathbf{F}^3\mathbf{Q} + 3\mathbf{F}^2\mathbf{QF}^T + 3\mathbf{FQ}(\mathbf{F}^T)^2 + \mathbf{Q}(\mathbf{F}^T)^3) \frac{\Delta t^4}{24} \end{aligned} \quad (5.13)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{GQ}_c\mathbf{G}^T \quad (5.14)$$

## 5.2 Estimation d'état

L'estimation d'état est un concept utilisé dans le domaine du contrôle lorsque la connaissance de certains paramètres d'un système est nécessaire, mais que ces derniers ne peuvent être directement mesurés. C'est notamment le cas pour les systèmes GPS et INS dans lesquels plusieurs paramètres d'erreur doivent être obtenus mais seulement quelques mesures externes sont disponibles. L'estimation d'état est un processus récursif qui peut être décomposé en deux phases soient la prédiction et la correction, tel qu'illustré sur la Figure 5-1.

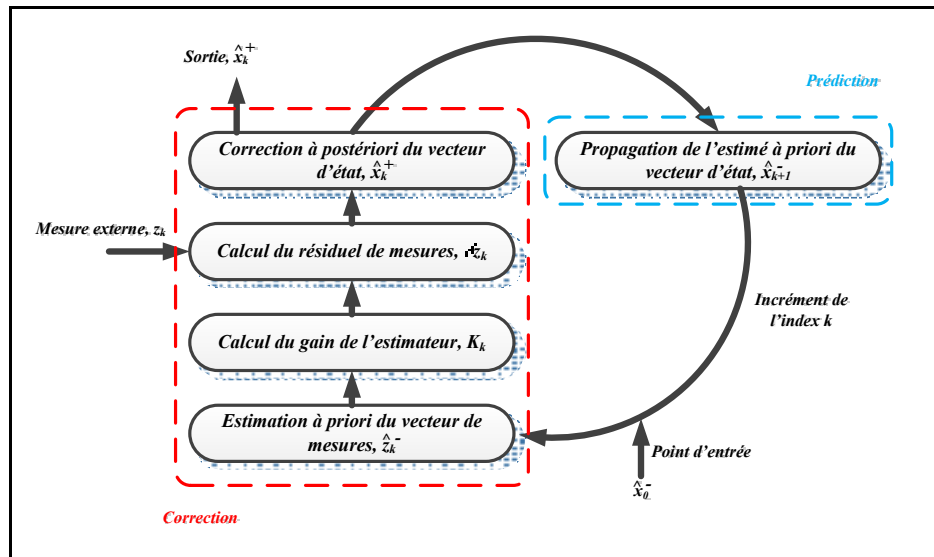


Figure 5-1 Représentation typique d'un estimateur d'état

La prédiction consiste à propager l'estimé du vecteur d'état en se basant uniquement sur sa valeur actuelle ainsi que sur la dynamique du système. La correction consiste quant à elle à corriger l'estimé du vecteur d'état en se basant sur le vecteur de mesures observé. L'implémentation d'un estimateur d'état est résumée au Tableau 5.1.

Tableau 5.1 Équations de l'estimateur d'état

Étape	Équation
1) Initialisation du système	$\hat{x}_0^-$
2) Estimation à priori du vecteur de mesures	$\hat{z}_k^- = \mathbf{H}_k \cdot \hat{x}_k^-$
3) Calcul du gain de l'estimateur	$\mathbf{K}_k$
4) Attente d'une nouvelle mesure	$\underline{z}_k$
5) Calcul du résiduel de mesure	$\delta \underline{z}_k = (\underline{z}_k - \hat{z}_k^-)$
6) Correction à postérieure du vecteur d'état	$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot \delta \underline{z}_k$
7) Propagation de l'estimé à priori du vecteur d'état pour l'itération suivante	$\hat{x}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \cdot \hat{x}_k^+$
8) Incrément de l'index $k$ et retour à l'étape 2)	$k = k + 1$

La matrice de gain  $\mathbf{K}_k$  de l'estimateur d'état peut être obtenue selon différentes approches. Dans le cadre de ce mémoire, cette dernière sera calculée selon le concept d'estimation optimale.

### 5.2.1 Estimation optimale et filtre de Kalman

Un estimateur optimal est un estimateur d'état dont le gain est calculé dynamiquement de manière à optimiser certains critères de performance du système. Un des critères d'optimisation largement utilisé est l'erreur quadratique moyenne de l'estimé. L'estimateur optimal basé sur ce critère d'optimisation est appelé le filtre de Kalman. Définissons d'abord l'erreur sur l'estimé à priori du vecteur d'état ainsi que la matrice de covariance y étant associée :

$$\underline{e}_k^- = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^- \quad (5.15)$$

$$\mathbf{P}_k^- = E[\underline{e}_k^- \underline{e}_k^{-T}] = E[(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^-)(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^-)^T] \quad (5.16)$$

où :

$\underline{e}_k^-$  : vecteur d'erreur à priori

$\mathbf{P}_k^-$  : matrice de covariance d'erreur à priori

Selon les équations de l'estimateur d'état présentées à la section précédente, l'estimé à postérieur du vecteur d'état peut être obtenu par une combinaison linéaire du vecteur de mesures bruité et de l'estimé à priori tel que :

$$\hat{\underline{x}}_k^+ = \hat{\underline{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^-) \quad (5.17)$$

La matrice de covariance d'erreur associée à cet estimé à postérieur peut être calculée à partir de l'expression suivante :



$$\mathbf{P}_k^+ = E[\underline{e}_k^+ \underline{e}_k^{+T}] = E[(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^+)(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^+)^T] \quad (5.18)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E\left[\left(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^-)\right)\left(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\underline{x}}_k^-)\right)^T\right] \quad (5.19)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (5.20)$$

La diagonale de cette matrice de covariance d'erreur contient donc la variance de l'erreur d'estimation de chacun des états du système. Ainsi, la trace de cette matrice représente la somme de ces variance et constitue par le fait même un indicateur non biaisé de l'erreur quadratique moyenne de l'estimé. Le gain du filtre de Kalman, généralement appelé gain de Kalman, peut donc être sélectionné de manière à minimiser la trace de la matrice  $\mathbf{P}_k$ . Ceci peut être réalisé en posant l'égalité suivante :

$$\frac{d(\text{trace } \mathbf{P}_k)}{d\mathbf{K}_k} = 0 = -2(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^-)^T + 2\mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (5.22)$$

En substituant  $\mathbf{K}_k$  à l'intérieur de l'équation (5.20) par son expression donnée par l'équation (5.22) et en manipulant le résultat, il est possible de simplifier l'expression de la matrice  $\mathbf{P}_k^+$  tel que :

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (5.23)$$

En reprenant les équations de l'estimateur d'état présentées précédemment et en y ajoutant la propagation de la matrice de covariance d'erreur ainsi que le calcul du gain de Kalman, l'algorithme du filtre de Kalman peut être résumé selon les équations présentées au Tableau 5.2.

Tableau 5.2 Équations du filtre de Kalman

Étape	Équation
1) Initialisation du système	$\hat{\underline{x}}_0^-$ $\mathbf{P}_0^-$
2) Estimation à priori du vecteur de mesures	$\hat{\underline{z}}_k^- = \mathbf{H}_k \cdot \hat{\underline{x}}_k^-$
3) Calcul du gain de l'estimateur	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$
4) Attente d'une nouvelle mesure	$\underline{z}_k$
5) Calcul du résiduel de mesure	$\delta \underline{z}_k = (\underline{z}_k - \hat{\underline{z}}_k^-)$
6) Correction à posteriori du vecteur d'état et de la matrice de covariance associée	$\hat{\underline{x}}_k^+ = \hat{\underline{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot \delta \underline{z}_k$ $\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$
7) Propagation de l'estimé à priori du vecteur d'état et de la matrice de covariance associée pour l'itération suivante	$\hat{\underline{x}}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \cdot \hat{\underline{x}}_k^+$ $\mathbf{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{P}_k^+ \boldsymbol{\phi}_k^T + \mathbf{Q}_k$
8) Incrément de l'index $k$ et retour à l'étape 2)	$k = k + 1$

### 5.2.2 Linéarisation et filtre de Kalman étendu

Plusieurs modèles dynamiques utilisés en navigation sont non linéaires et, par conséquent, ne peuvent pas être directement exprimés selon la forme générale donnée par les équations (5.1) et (5.2). La linéarisation de ces systèmes autour d'un vecteur d'état optimal est d'abord nécessaire afin qu'ils puissent être exprimés selon cette forme standard. Tout d'abord, définissons un système non linéaire tel que :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p \quad (5.24)$$

$$\underline{z} = h(\underline{x}) + \underline{\eta}_m \quad (5.25)$$

où :

$f, h$  : fonctions non linéaires

Supposons ensuite qu'un vecteur d'état optimal  $\underline{x}^*$  est connu et définie tel que :

$$\underline{x}^* = \underline{x} - \delta \underline{x} \quad (5.26)$$

où :

$\underline{x}^*$  : trajectoire d'état optimale

$\delta \underline{x}$  : vecteur d'erreur d'état

Ainsi, les équations (5.24) et (5.25) peuvent être réécrites comme étant fonction de ce vecteur d'état optimal et du vecteur d'erreur d'état tel que :

$$\dot{\underline{x}}^* + \delta \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}^* + \delta \underline{x}) + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p \quad (5.27)$$

$$\underline{z} = h(\underline{x}^* + \delta \underline{x}) + \underline{\eta}_m \quad (5.28)$$

En supposant que le vecteur d'erreur d'état est très petit, il est possible d'approximer les fonctions non linéaires  $f$  et  $h$  à l'aide d'une série de Taylor. En considérant seulement les termes de premier ordre, le résultat obtenu est le suivant :

$$\dot{\underline{x}}^* + \delta \dot{\underline{x}} \approx f(\underline{x}^*) + \left. \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} \delta \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p \quad (5.29)$$

$$\underline{z} \approx h(\underline{x}^*) + \left. \frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} \delta \underline{x} + \underline{\eta}_m \quad (5.30)$$

En sélectionnant un vecteur d'état optimal répondant à l'égalité  $\dot{\underline{x}}^* = f(\underline{x}^*)$ , la forme générale linéarisée suivante est obtenue :

$$\delta \dot{\underline{x}} = \mathbf{F} \cdot \delta \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p \quad (5.31)$$

$$\delta \underline{z} = \mathbf{H} \cdot \delta \underline{x} + \underline{\eta}_m \quad (5.32)$$

où :

$$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} \quad (5.33)$$

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^*} \quad (5.34)$$

$$\delta \underline{z} = \underline{z} - h(\underline{x}^*) \quad (5.35)$$

Une approche largement utilisée en navigation pour la linéarisation des systèmes consiste à utiliser directement l'estimé à postériori du vecteur comme vecteur d'état optimal pour la linéarisation des équations. Cette approche est appelée filtre de Kalman étendu (EKF – *Extended Kalman Filter*). C'est d'ailleurs ce dernier qui sera utilisé pour l'ensemble des algorithmes développés dans le cadre de ce mémoire. L'algorithme du filtre de Kalman étendu peut être résumé selon les équations présentées au Tableau 5.3.

Tableau 5.3 Équations du filtre de Kalman Étendu

Étape	Équation
1) Initialisation du système	$\hat{\underline{x}}_0^-$ $\mathbf{P}_0^-$
2) Estimation à priori du vecteur de mesures	$\hat{\underline{z}}_k^- = h(\hat{\underline{x}}_k^-)$
3) Calcul du gain de l'estimateur	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$
4) Attente d'une nouvelle mesure	$\underline{z}_k$
5) Correction à postériori du vecteur d'état et de la matrice de covariance d'erreur associée	$\hat{\underline{x}}_k^+ = \hat{\underline{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot (\underline{z}_k - \hat{\underline{z}}_k^-)$ $\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$
6) Propagation de l'estimé à priori du vecteur d'état et de la matrice de covariance associée pour l'itération suivante	$\hat{\underline{x}}_{k+1}^- = f(\hat{\underline{x}}_k^+)$ $\mathbf{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{P}_k^+ \boldsymbol{\phi}_k^T + \mathbf{Q}_k$
7) Incrément de l'index $k$ et retour à l'étape 2)	$k = k + 1$

### 5.2.3 Utilisation des vecteurs d'erreur

Dans certaines applications, les modèles de propagation d'erreur sont directement connus, ce qui permet d'éviter la linéarisation des modèles. En effet, en utilisant le vecteur d'erreur d'état plutôt que le vecteur d'état à l'intérieur des équations du filtre de Kalman étendu, les équations générales (5.31) et (5.32) peuvent être utilisées directement sans avoir à approximer les matrices à l'aide des séries de Taylor. L'algorithme du filtre de Kalman étendu basé sur l'utilisation du vecteur d'erreur d'état peut être résumé selon les équations présentées au Tableau 5.4.

Tableau 5.4 Équations du filtre de Kalman Étendu basé sur l'estimation du vecteur d'erreur d'état

Étape	Équation
1) Initialisation du système	$\delta \hat{\underline{x}}_0^-$ $\mathbf{P}_0^-$
2) Estimation à priori du vecteur d'erreur de mesures	$\delta \hat{\underline{z}}_k^- = \mathbf{H}_k \cdot \delta \hat{\underline{x}}_k^-$
3) Calcul du gain de l'estimateur	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$
4) Attente d'une nouvelle mesure et calcul du vecteur d'erreur de mesure	$\delta \underline{z}_k = \underline{z}_k - h(\hat{\underline{x}}_k^-)$
5) Correction à postériori du vecteur d'erreur d'état et de la matrice de covariance d'erreur associée	$\delta \hat{\underline{x}}_k^+ = \delta \hat{\underline{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \cdot (\delta \underline{z}_k - \delta \hat{\underline{z}}_k^-)$ $\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$
6) Propagation de l'estimé à priori du vecteur d'erreur d'état et de la matrice de covariance associée pour l'itération suivante	$\delta \hat{\underline{x}}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \cdot \delta \hat{\underline{x}}_k^+$ $\mathbf{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\phi}_k \mathbf{P}_k^+ \boldsymbol{\phi}_k^T + \mathbf{Q}_k$
7) Correction du vecteur d'état et remise à zéro du vecteur d'erreur d'état	
8) Incrément de l'index $k$ et retour à l'étape 2)	$k = k + 1$

### 5.3 Développement des principaux modèles d'intégration utilisés

Dans le cadre de ce projet de recherche, deux principaux modèles d'intégration ont été réalisés soit le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche et le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré. De plus, afin de pouvoir comparer les performances de ces modèles à un récepteur GPS utilisé de manière autonome, un modèle GPS seul a été développé. La section suivante présentera les détails de chacun de ces modèles.

#### 5.3.1 Modèle du système GPS seul

L'algorithme développé pour le système GPS seul propose l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu basé sur l'estimation du vecteur d'erreur d'état suivant :

$$\delta \underline{x} = [\delta \underline{V}^E \quad \delta \underline{R}^E \quad \delta b_{clk} \quad \delta d_{clk}]^T \quad (5.36)$$

où :

- $\delta \underline{V}$  : erreur de vitesse
- $\delta \underline{R}$  : erreur de position
- $\delta b_{clk}$  : biais d'horloge du récepteur GPS (*voir* Section 3.5)
- $\delta d_{clk}$  : dérive de l'horloge du récepteur GPS

Ainsi, ce filtre est utilisé afin d'estimer simultanément huit états d'erreur du récepteur GPS soit trois états d'erreurs de position, trois états d'erreur de vitesse, un état d'erreur de biais d'horloge ainsi qu'un état d'erreur de dérive d'horloge.

##### 5.3.1.1 Modèle de propagation d'erreur du système GPS seul

Le modèle de propagation d'erreur utilisé par ce filtre combine le modèle de propagation d'erreur PV avec le modèle de propagation d'erreur d'horloge présentés aux équations (3.21) et (3.24). Ainsi, la représentation en temps continue du système développé peut être exprimée selon la forme suivante :

$$\delta \dot{\underline{x}} = \mathbf{F} \cdot \delta \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p \quad (5.37)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{V}^E \\ \delta \dot{R}^E \\ \delta \dot{b}_{clk} \\ \delta \dot{d}_{clk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V^E \\ \delta R^E \\ \delta b_{clk} \\ \delta d_{clk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_v \\ \eta_b \\ \eta_d \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

L'équation (5.8) peut être utilisée afin de calculer la forme discrétisée de la matrice de transition du vecteur d'erreur suivante :

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Tel que mentionné à la section 3.5, les paramètres de variance associés au vecteur de bruit de mesure du modèle d'erreur PV et du modèle d'erreur d'horloge sont définis tel que :

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} S_p & 0 & 0 \\ 0 & S_f & 0 \\ 0 & 0 & S_g \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Puisque les matrices  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont constantes, la forme discrétisée de la matrice de covariance de bruit de mesure calculée à partir de l'équation (5.13) est également constante et définie tel que :

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} S_p \Delta t & 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_p \Delta t & 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_p \Delta t & 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ S_p \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_p \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & S_p \frac{\Delta t^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_f \Delta t + S_g \frac{\Delta t^3}{3} & S_g \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_g \frac{\Delta t^2}{2} & S_g \Delta t \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Afin de construire cette matrice, les paramètres  $S_p$ ,  $S_f$  et  $S_g$  ont été sélectionnés selon les spécifications du récepteur RxGNSS données par Sauriol (2008) tel que :

$$S_p = 10^9 \quad S_f = 10^5 \quad S_g = 10^4 \quad (5.42)$$

### 5.3.1.2 Modèle de mesure du système GPS seul

Les mesures utilisées à l'intérieur du filtre de Kalman pour le modèle GPS seul sont les mesures de pseudo-distance et de variation de pseudo-distance des différents satellites. Tout d'abord, les mesures de pseudo-distance sont définies par l'équation (3.8) tel que :

$$\rho_i^E = \sqrt{(x_i^E - R_x^E)^2 + (y_i^E - R_y^E)^2 + (z_i^E - R_z^E)^2} + b_{clk} + \eta_{\rho_i} \quad (5.43)$$

Ainsi, le vecteur de mesures associé aux mesures de pseudo-distance peut être défini par l'expression suivante :

$$\underline{z}_\rho = h_\rho(\underline{x}) + \underline{\eta}_\rho \quad (5.44)$$



$$\underline{z}_\rho = \begin{bmatrix} \rho_1^E \\ \rho_2^E \\ \vdots \\ \rho_n^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1^E - R_x^E)^2 + (y_1^E - R_y^E)^2 + (z_1^E - R_z^E)^2 + b_{clk}} \\ \sqrt{(x_2^E - R_x^E)^2 + (y_2^E - R_y^E)^2 + (z_2^E - R_z^E)^2 + b_{clk}} \\ \vdots \\ \sqrt{(x_n^E - R_x^E)^2 + (y_n^E - R_y^E)^2 + (z_n^E - R_z^E)^2 + b_{clk}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{\rho_1} \\ \eta_{\rho_2} \\ \vdots \\ \eta_{\rho_n} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Ensuite, selon l'équation (3.14), la mesure de variation de pseudo-distance peut être définie tel que :

$$\dot{\rho}_i^E = -\underline{e}_i^E (\underline{V}^E - \underline{v}_i^E) + d_{clk} + \underline{\eta}_{\dot{\rho}} \quad (5.46)$$

Ce qui permet de former le vecteur de mesures associé aux mesures de variation de pseudo-distance suivant :

$$\underline{z}_{\dot{\rho}} = h_{\dot{\rho}}(\underline{x}) + \underline{\eta}_{\dot{\rho}} \quad (5.47)$$

$$\underline{z}_{\dot{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1^E \\ \dot{\rho}_2^E \\ \vdots \\ \dot{\rho}_n^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{e}_1^E (\underline{V}^E - \underline{v}_1^E) + d_{clk} \\ -\underline{e}_2^E (\underline{V}^E - \underline{v}_2^E) + d_{clk} \\ \vdots \\ -\underline{e}_n^E (\underline{V}^E - \underline{v}_n^E) + d_{clk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{\dot{\rho}_1} \\ \eta_{\dot{\rho}_2} \\ \vdots \\ \eta_{\dot{\rho}_n} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Ces deux vecteurs de mesures sont clairement non linéaires par rapport au vecteur d'état et doivent par conséquent être linéarisés autour d'un vecteur d'état optimal  $\hat{\underline{x}}$  afin d'être utilisés par le filtre de Kalman. Cette procédure telle que définie par l'équation (5.34) est réalisée comme suit :

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial h(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\hat{\underline{x}}} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{H}_\rho = \begin{bmatrix} 0 & \left. \frac{\partial h_{\rho_1}(\underline{x})}{\partial \underline{R}^E} \right|_{\underline{R}^E = \hat{\underline{R}}^E} & 1 & 0 \\ 0 & \left. \frac{\partial h_{\rho_2}(\underline{x})}{\partial \underline{R}^E} \right|_{\underline{R}^E = \hat{\underline{R}}^E} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \left. \frac{\partial h_{\rho_n}(\underline{x})}{\partial \underline{R}^E} \right|_{\underline{R}^E = \hat{\underline{R}}^E} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{H}_\rho = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial h_{\rho_1}(\underline{x})}{\partial \underline{V}^E} \right|_{\underline{V}^E = \hat{\underline{V}}^E} & 0 & 0 & 1 \\ \left. \frac{\partial h_{\rho_2}(\underline{x})}{\partial \underline{V}^E} \right|_{\underline{V}^E = \hat{\underline{V}}^E} & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial h_{\rho_n}(\underline{x})}{\partial \underline{V}^E} \right|_{\underline{V}^E = \hat{\underline{V}}^E} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

dans laquelle :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{V}^E \\ \underline{R}^E \\ b_{clk} \\ d_{clk} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\left. \frac{\partial h_{\rho_i}(\underline{x})}{\partial \underline{R}^E} \right|_{\underline{R}^E = \hat{\underline{R}}^E} = \begin{bmatrix} (\hat{R}_x^E - x_i) \\ \sqrt{(x_i - \hat{R}_x^E)^2 + (y_i - \hat{R}_y^E)^2 + (z_i - \hat{R}_z^E)^2} \\ (\hat{R}_y^E - y_i) \\ \sqrt{(x_i - \hat{R}_x^E)^2 + (y_i - \hat{R}_y^E)^2 + (z_i - \hat{R}_z^E)^2} \\ (\hat{R}_z^E - z_i) \\ \sqrt{(x_i - \hat{R}_x^E)^2 + (y_i - \hat{R}_y^E)^2 + (z_i - \hat{R}_z^E)^2} \end{bmatrix}^T = -\underline{e}_i^E \quad (5.53)$$

$$\left. \frac{\partial h_{\rho_i}(\underline{x})}{\partial \underline{V}^E} \right|_{\underline{V}^E = \hat{\underline{V}}^E} = -\underline{e}_i^E \quad (5.54)$$

Ainsi, le modèle de mesure linéarisé peut être défini par l'expression suivante :

$$\delta \underline{z} = \begin{bmatrix} \delta z_\rho \\ \delta \underline{z}_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\rho \\ \mathbf{H}_{\dot{\rho}} \end{bmatrix} \cdot \delta \underline{x} + \begin{bmatrix} \eta_\rho \\ \underline{\eta}_{\dot{\rho}} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \rho_1^E \\ \delta \rho_2^E \\ \vdots \\ \delta \rho_n^E \\ \delta \dot{\rho}_1^E \\ \delta \dot{\rho}_2^E \\ \vdots \\ \delta \dot{\rho}_n^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{e}_1^N & 1 & 0 \\ 0 & -\underline{e}_2^N & 1 & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & -\underline{e}_n^N & 1 & 0 \\ -\underline{e}_1^N & 0 & 0 & 1 \\ -\underline{e}_2^N & 0 & 0 & 1 \\ & \vdots & & \\ -\underline{e}_n^N & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{V}^E \\ \delta \underline{R}^E \\ \delta b_{clk} \\ \delta d_{clk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{\rho_1} \\ \eta_{\rho_1} \\ \vdots \\ \eta_{\rho_n} \\ \eta_{\dot{\rho}_1} \\ \eta_{\dot{\rho}_2} \\ \vdots \\ \eta_{\dot{\rho}_1} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Tel que discuté à la section 3.4, le bruit présent sur les mesures de pseudo-distance du système GPS dépend de plusieurs facteurs dont les délais atmosphériques, la propagation des signaux par trajets multiples ainsi que la mauvaise géométrie des satellites. Ainsi, la matrice de covariance associée au bruit de mesure devrait généralement être calculée dynamiquement à chaque itération du filtre de Kalman en fonction du niveau d'erreur contenu sur chacune des mesures. Cependant, afin de simplifier l'implémentation de l'algorithme, cette matrice est considérée comme constante et est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\rho}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\rho}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\rho}}^2 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

où :

$\sigma_\rho^2$  : variance sur la mesure de pseudo-distance

$\sigma_{\dot{\rho}}^2$  : variance sur la mesure de variation de pseudo-distance

Les paramètres  $\sigma_\rho^2$  et  $\sigma_{\dot{\rho}}^2$  ont été sélectionnés selon les recommandations de Sauriol (2008) tel que :

$$\sigma_\rho^2 = 1 \quad \sigma_\rho^2 = 0.1 \quad (5.58)$$

### 5.3.2 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche

L'algorithme d'intégration GPS/INS par couplage lâche développé dans le cadre de ce projet repose sur la combinaison de la solution de navigation (position et vitesse) de chacun des deux systèmes à l'intérieur d'un filtre de Kalman étendu afin d'estimer le vecteur d'erreur d'état suivant :

$$\delta \underline{x} = [\delta \underline{V}^N \quad \delta \underline{R}^N \quad \underline{\psi}^N]^T \quad (5.59)$$

où :

$\underline{\psi}$  : erreur d'angle PSI (*voir* Section 4.7)

Ainsi, ce modèle est utilisé afin d'estimer neuf états d'erreur du système de navigation soit trois états d'erreur de position, trois états d'erreur de vitesse ainsi que trois états d'erreur d'attitude.

#### 5.3.2.1 Modèle de propagation d'erreur du couplage lâche

Le modèle de propagation d'erreur utilisé pour l'intégration GPS/INS par couplage lâche est basé sur le modèle de propagation d'erreur d'angle psi résumé à l'équation (4.58). Ainsi, la représentation en temps continue du système développé peut être définie tel que :

$$\delta \dot{\underline{x}} = \mathbf{F} \cdot \delta \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{\eta}_p \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta \dot{V}^N \\ \delta \dot{R}^N \\ \dot{\psi}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{IE}^N) \times & \mathbf{F}_{12} & (\mathbf{C}_B^N f^B) \times \\ \mathbf{I} & -(\underline{\omega}_{EN}^N \times) & 0 \\ 0 & 0 & -(\underline{\omega}_{IN}^N \times) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V^N \\ \delta R^N \\ \psi^N \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_B^N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_B^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_f \\ \eta_\omega \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

dans laquelle :

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{g}{R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{R} & 0 \\ 0 & 0 & F(h) \frac{g}{R} \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

$$F(h) = \begin{cases} -1, & h < 0 \\ 2, & h \geq 0 \end{cases} \tag{5.63}$$

Contrairement au modèle présenté pour le système GPS seul, la matrice de transition du vecteur d'erreur d'état n'est pas constante et doit plutôt être recalculée à chaque itération. Ce calcul est réalisé à l'aide de l'équation (5.8). Selon l'équation (5.61), le vecteur de bruit du système est constitué du bruit de mesure des capteurs inertiels. Ainsi, la matrice de covariance associée est définie tel que :

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \sigma_{\eta_f}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta_f}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\eta_f}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\eta_\omega}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\eta_\omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\eta_\omega}^2 \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

où :

$\sigma_{\eta_f}^2$  : variance du bruit des accéléromètres

$\sigma_{\eta_\omega}^2$  : variance du bruit des gyroscopes

Les paramètres  $\sigma_{\eta_f}^2$  et  $\sigma_{\eta_\omega}^2$  peuvent être déterminés par une analyse statistique des mesures brutes provenant des capteurs inertiels. Ces paramètres varient grandement d'un capteur à l'autre et doivent être calculés pour chacun des capteurs utilisés. La section 6.2 présente les résultats de cette analyse.

### 5.3.2.2 Modèle de mesure du couplage lâche

L'intégration GPS/INS par couplage lâche est basée sur l'observation des erreurs de position et de vitesse du système, qui sont obtenues par le calcul de l'erreur entre l'estimé (calculées par l'algorithme INS) et la mesure (fournies par le récepteur GPS). Ainsi, les erreurs de position et de vitesse du système sont directement observables et le modèle de mesure utilisé par le filtre de Kalman est donné par l'expression suivante :

$$\delta \underline{z} = \mathbf{H} \cdot \delta \underline{x} + \underline{\eta}_m \quad (5.65)$$

$$\begin{bmatrix} \delta V^N \\ \delta R^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta V^N \\ \delta R^N \\ \psi^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_V \\ \eta_R \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Le vecteur d'erreur de mesures de ce système est constitué des erreurs de position et de vitesse fournies par le système GPS. Puisque ces dernières dépendent directement des erreurs contenues sur les mesures de pseudo-distance des satellites, la matrice de covariance associée au bruit de mesure devrait être calculée dynamiquement tout comme pour le système GPS seul. Toutefois, afin de simplifier l'implémentation du filtre, cette matrice est considérée comme constante et elle est définie tel que :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_V^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_V^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_R^2 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

où :

$\sigma_R^2$  : variance sur la mesure de position fournie par le récepteur GPS

$\sigma_V^2$  : variance sur la mesure de vitesse fournie par le récepteur GPS

La valeur des paramètres  $\sigma_R^2$  et  $\sigma_V^2$  ont été sélectionnées suite à une analyse statistique de la solution de navigation du système GPS dans des conditions stationnaires. Suite à cette analyse, les valeurs conservatrices suivantes ont été utilisées :

$$\sigma_R^2 = 100 \quad \sigma_V^2 = 1 \quad (5.68)$$

### 5.3.3 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré

Le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré est basé sur l'utilisation des mesures de pseudo-distance du récepteur GPS à l'intérieur d'un filtre de Kalman étendu afin d'estimer le vecteur d'erreur d'état suivant :

$$\delta \underline{x} = [\delta \underline{V}^N \quad \delta \underline{R}^N \quad \underline{\psi}^N \quad \delta b_{clk} \quad \delta d_{clk}]^T \quad (5.69)$$

Ce modèle est donc utilisé afin d'estimer 11 états d'erreur du système de navigation soit trois états d'erreur de position, trois états d'erreur de vitesse, trois états d'erreur d'attitude, un état d'erreur de biais d'horloge ainsi qu'un état d'erreur de dérive d'horloge.

#### 5.3.3.1 Modèle de propagation d'erreur du couplage serré

L'intégration GPS/INS par couplage serré consiste essentiellement à combiner les modèles de propagation d'erreur des systèmes GPS et INS à l'intérieur d'un filtre de Kalman unique. Le modèle de propagation d'erreur résultant combine donc le modèle de propagation d'erreur d'angle psi avec le modèle de propagation d'erreur d'horloge du système GPS présentés respectivement aux équations





### 5.3.3.2 Modèle de mesure du couplage serré

Le modèle de mesure utilisé pour l'intégration GPS/INS par couplage serré est similaire à celui du système GPS seul (équation (5.56)), mais exprimé selon le repère de navigation tel que :

$$\delta \underline{z} = \mathbf{H} \cdot \delta \underline{x} + \underline{\eta}_m \quad (5.73)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \rho_1^N \\ \delta \rho_2^N \\ \vdots \\ \delta \rho_n^N \\ \delta \dot{\rho}_1^N \\ \delta \dot{\rho}_2^N \\ \vdots \\ \delta \dot{\rho}_n^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{e}_1^N & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\underline{e}_2^N & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\underline{e}_n^N & 0 & 1 & 0 \\ -\underline{e}_1^N & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\underline{e}_2^N & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\underline{e}_n^N & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{V}^N \\ \delta \underline{R}^N \\ \underline{\psi}^N \\ \delta b_{clk} \\ \delta d_{clk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{\rho_1} \\ \eta_{\rho_2} \\ \vdots \\ \eta_{\rho_n} \\ \eta_{\dot{\rho}_1} \\ \eta_{\dot{\rho}_2} \\ \vdots \\ \eta_{\dot{\rho}_n} \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

La matrice de covariance du bruit de mesure associée à ce modèle est la même que pour le modèle GPS seul et est définie tel que :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\rho^2 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

dans laquelle :

$$\sigma_\rho^2 = 1 \quad \sigma_{\dot{\rho}}^2 = 0.1 \quad (5.76)$$

### 5.3.4 Modélisation des erreurs de capteur

Dans le cadre de ce mémoire, le biais de mesure contenu sur les mesures provenant des accéléromètres, des gyroscopes et des magnétomètres est considéré comme une source de bruit corrélé ayant un temps de corrélation élevé. Par conséquent, cette erreur peut être modélisée comme un processus de Gauss-Markov de premier ordre défini tel que :

$$\delta \dot{\underline{x}} = \mathbf{F} \delta \underline{x} + \underline{\eta} \quad (5.77)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_z \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

où :

$\underline{\eta}$  : vecteur de bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{\eta}^2$

$\beta$  : inverse de la constante de temps du processus de Gauss-Markov

Les paramètres du bruit blanc ainsi que du processus de Gauss-Markov dépendent directement des capteurs utilisés et peuvent généralement être obtenus par une analyse statistique des mesures expérimentales. Cette procédure sera présentée en détail aux sections 6.2 et 6.3.

## CHAPITRE 6

### ESTIMATION DES ERREURS DE CAPTEUR ET ALIGNEMENT INITIAL D'UNE PLATEFORME DE NAVIGATION

L'utilisation d'un système de navigation inertielle requiert la connaissance de la position, de la vitesse et de l'attitude initiale du véhicule. Généralement, la position ainsi que la vitesse initiale peuvent être obtenues à l'aide de mesures externes provenant d'un récepteur GPS, ce qui n'est toutefois pas le cas pour son attitude. Ainsi, en l'absence de mesures externes permettant d'obtenir directement l'orientation du véhicule, une méthode d'alignement initial basée sur l'utilisation des mesures inertielles doit être utilisée. Or, tel qu'il a été discuté au chapitre 4, les mesures provenant des capteurs inertiels peuvent être contaminées par différentes sources d'erreur, ce qui peut fausser les résultats lors de l'alignement initial du véhicule. L'estimation et la correction de ces erreurs est d'abord nécessaire. Ce chapitre présentera, dans un premier temps, les méthodes utilisées afin d'estimer les erreurs de nature déterministe des capteurs inertiels. Par la suite, deux approches différentes permettant d'analyser les erreurs de nature stochastique seront présentées. Finalement, les méthodes utilisées dans le cadre de ce projet afin de réaliser l'alignement initial du système seront détaillées.

#### 6.1 Calibration des erreurs de nature déterministe

Tel que mentionné au chapitre 4, les erreurs systématiques telles que le biais, le facteur d'échelle et les erreurs de mauvais alignement peuvent généralement être éliminées à l'aide d'une méthode de calibration. La section suivante présentera deux différentes méthodes de calibration utilisées dans le cadre de ce mémoire. Tout d'abord, reformulons l'équation (4.5) de manière à mettre en évidence les 12 paramètres qui doivent être estimés par cette méthode de calibration :

$$\underline{v}^B = \mathbf{E}(\underline{v}^S + \underline{b}) \quad (6.1)$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}^S + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \right) \quad (6.2)$$

Ces paramètres peuvent être regroupés à l'intérieur du vecteur d'état suivant :

$$\underline{x} = [e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, b_x, b_y, b_z]^T \quad (6.3)$$

Le problème d'optimisation formulé pour la calibration des capteurs inertiels est basé sur la détermination d'un vecteur d'état optimal permettant de minimiser une fonction de coût. La forme générale de la fonction de coût utilisée pour la calibration des capteurs inertiels peut être définie tel que (Fong, Ong et Nee, 2008; Skog et Händel, 2006) :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \|\underline{u}_k\|^2 - \|h(\underline{v}_k^S, x)\|^2 \right)^2 \quad (6.4)$$

dans laquelle :

$$h(\underline{v}_k^S, x) = \mathbf{E}(\underline{v}_k^S + \underline{b}) \quad (6.5)$$

où :

$F(x)$  : fonction de coût

$N$  : nombre total de mesures enregistrées

$\underline{u}_k$  : vecteur de référence selon l'orientation  $k$

$\underline{v}_k^S$  : vecteur de mesures obtenu selon l'orientation  $k$ , exprimé selon le repère des capteurs

Ainsi, la fonction de coût représente la somme, selon  $N$  différentes orientations, de l'écart entre le vecteur mesuré et le vecteur de référence. Pour chaque type de capteur, le vecteur de référence utilisé est différent. Dans le cadre de ce mémoire, le vecteur de gravité, le vecteur de vitesse de rotation de la Terre ainsi que le vecteur de champ magnétique terrestre sont utilisés respectivement comme référence pour la calibration des accéléromètres, des gyroscopes et des magnétomètres. L'utilisation de ces vecteurs connus impose cependant une

contrainte non négligeable à la méthode de calibration soit que seul ces phénomènes physiques doivent exciter l'IMU lors de la prise de mesures. Ainsi, pour chacune des orientations, l'IMU doit absolument être maintenue selon un état stationnaire, c'est-à-dire sans aucune accélération ni rotation externe, autrement, les résultats de la calibration se retrouveraient faussés.

En analysant la forme que prend la fonction de coût exprimée à l'équation (6.4), il est possible de constater que le problème de la calibration des capteurs inertiels peut être formulé comme un problème non linéaire d'estimation des moindres carrés possédant 12 inconnus soit les 9 paramètres de la matrice combinée de facteur d'échelle et de mauvais alignement et les 3 paramètres de biais. Ainsi, de manière à résoudre ce dernier, un minimum de 12 observations différentes est nécessaire. C'est pour cette raison que les mesures provenant des capteurs inertiels doivent généralement être enregistrées selon un minimum de 12 orientations différentes. En réalité, étant donné l'instabilité des capteurs à faible coût, il est généralement préférable d'enregistrer des mesures redondantes de manière à obtenir un système surdéterminé, c'est-à-dire un système possédant plus d'équations que d'inconnus. C'est d'ailleurs sur cette idée qu'est basée la méthode multi-position qui sera présentée à la section suivante.

### **6.1.1 Méthode multi-position**

La méthode multi-position est une méthode de calibration présentée initialement par Shin et El-Sheimy (2002) et reprise par la suite par plusieurs autres auteurs (Skog et Händel, 2006; Syed *et al.*, 2007; Fong, Ong et Nee, 2008). Cette méthode consiste principalement à enregistrer les mesures inertielles provenant d'une centrale inertielle à faible coût selon différentes orientations fixes de manière à former un système d'équations surdéterminé. Ce système d'équations est ensuite comparé à des valeurs théoriques de référence à l'intérieur d'un algorithme d'estimation des moindres carrés afin d'estimer les 12 paramètres de calibration permettant de minimiser l'erreur entre les mesures enregistrées et les valeurs de référence. Bien que certains auteurs utilisent une séquence d'enregistrement différente, la

séquence originale suggérait 18 orientations minutieusement sélectionnées de manière à ce que chacun des axes du repère de capteur soit excité également lors de la prise de mesures (voir Figure 6-1). L'algorithme de résolution utilisé afin de résoudre ce problème peut varier d'un auteur à l'autre. Dans le cadre de ce mémoire, la méthode de Levenberg-Marquardt (LM) a d'abord été utilisée, puis une adaptation de la méthode multi-position a ensuite été réalisée afin de permettre l'utilisation d'un filtre de Kalman.

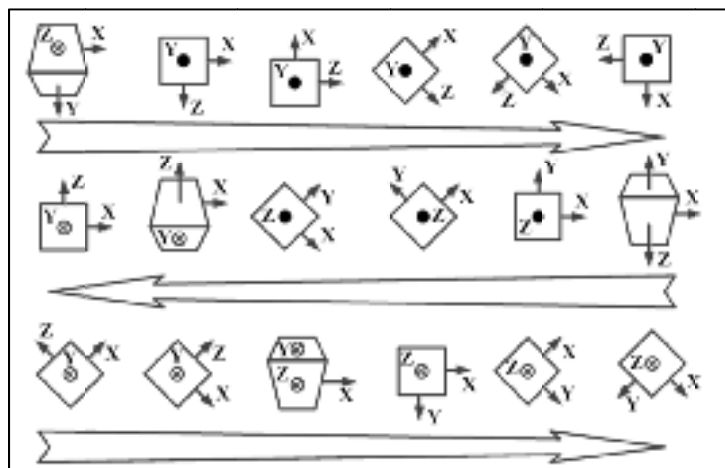


Figure 6-1 Séquence de 18 rotations utilisée pour la méthode multi-position  
Adaptée de Syed et al. (2007)

### 6.1.2 Résolution à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt est un algorithme d'optimisation itératif permettant de résoudre rapidement certains problèmes liés à la minimisation d'une fonction de coût, notamment les problèmes non linéaires des moindres carrés tel qu'il est question pour la calibration des capteurs inertiels. Cet algorithme qui s'apparente aux algorithmes de Gauss-Newton et de descente de gradient, consiste à calculer de manière itérative une perturbation à ajouter au vecteur d'état précédent afin de réduire la fonction de coût. L'algorithme LM dont les détails sont présentés à l'ANNEXE VII peut être résumé par le pseudo-code illustré à la Figure 6-2.

```

Initialisation :

v = 0;  x = x0;
A = J(x)TJ(x);  g = J(x)Tf(x);
μ = τ * max{aii};

Tant que le minimum n'est pas trouvé :

Résoudre :

(A + μI)hLM = -g;

Si ||hLM|| < seuil :

Le minimum est trouvé

Sinon :

xnouveau = x + hLM;
ρ =  $\frac{F(x) - F(x_{nouveau})}{L(0) - L(h_{LM})}$ ;

Si ρ > 0 (le pas est acceptable):

x = xnouveau ;
A = J(x)TJ(x);  g = J(x)Tf(x);
μ = μ * max{ $\frac{1}{3}$ , 1 - (2ρ - 1)3}
v = 2

Sinon :

μ = μv;  v = 2v;

```

Figure 6-2 Pseudo-code de la méthode de Levenberg-Marquardt

Le vecteur d'état utilisé par cet algorithme afin de résoudre le problème de la calibration des capteurs inertiels est celui présenté à l'équation (6.3) et la fonction de coût associée est celle défini à l'équation (6.4). Bien que cette méthode permette de déterminer efficacement les paramètres de calibration des capteurs inertiels (*voir section 6.1.4*), elle possède néanmoins certains inconvénients qui peuvent causer problème lors de son implémentation à l'intérieur d'un algorithme temps réel. En effet, tout comme les autres méthodes de résolution itératives, la méthode LM est basée sur le traitement différé d'un bloc de données préalablement enregistré. Lorsque le nombre de données à traiter est important, ces méthodes itératives deviennent lourdes et peu efficaces étant donné la charge élevée de calcul requise pour chaque itération (Bertsekas, 1994). C'est en quelque sorte ce qui survient pour la calibration des capteurs inertiels. En effet, pour une centrale inertielle quelconque dont la fréquence d'échantillonnage serait de 100 Hz et qui serait maintenue à chaque orientation durant une

période de 5 secondes, 9000 mesures seraient enregistrées lors de la procédure de calibration, ce qui nécessiterait une charge énorme de calcul pour un algorithme itératif. Toutefois, afin d'éviter ce problème, les mesures enregistrées peuvent être moyennées de manière à obtenir une seule mesure par orientation. Ceci vient cependant ajouter un certain niveau de complexité à l'algorithme temps réel puisque les mesures brutes doivent d'abord être manipulées avant d'être traitées. Ce problème d'implémentation a d'ailleurs poussé l'auteur de ce mémoire à adapter la méthode multi-position afin de permettre l'utilisation en temps réel d'un filtre de Kalman.

### 6.1.3 Adaptation de la méthode multi-position pour l'utilisation d'un filtre de Kalman

Afin d'éviter la procédure laborieuse de pré-traitement des mesures discutée à la section précédente, une méthode de résolution incrémentale peut être utilisée plutôt que les méthodes itératives mentionnées précédemment. En effet, lors de l'utilisation d'une méthode incrémentale, les données ne sont pas traitées par bloc mais plutôt une à une et le vecteur d'état peut être mis à jour graduellement lors de la réception de chacune de ces données (Bertsekas, 1994). Il n'est donc pas nécessaire de moyennner les données étant donné que l'ensemble de ces dernières peuvent être utilisées à l'intérieur de l'algorithme sans pour autant le rendre plus complexe. L'approche incrémentale suggérée par l'auteur de ce mémoire est basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman dont le vecteur d'état est celui défini à l'équation (6.3) tel que :

$$\underline{x} = [e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, b_x, b_y, b_z]^T \quad (6.6)$$

Étant donné que la calibration des capteurs est généralement réalisée sur une courte période de temps (maximum quelques minutes), il est tout à fait juste de modéliser chacun de ces états comme étant des constantes aléatoires. Ainsi, l'équation de propagation du vecteur d'état peut être définie par l'expression suivante :



$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{F} \cdot \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{\omega} \quad (6.7)$$

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{I} \cdot \underline{x} \quad (6.8)$$

De plus, l'algorithme de calibration est fondé sur l'hypothèse qu'un vecteur de référence connu peut être calculé à chaque itération du filtre de Kalman (p.ex. vecteur de gravité pour la calibration des accéléromètres). C'est d'ailleurs la norme élevée au carré de ce vecteur de référence qui est utilisée comme observation à l'intérieur du filtre de Kalman. Ainsi, le modèle de mesure peut être donné par l'expression suivante :

$$z = h(\underline{x}) + \eta \quad (6.9)$$

$$z = \|\mathbf{E}(\underline{v}^S + \underline{b})\|^2 + \eta \quad (6.10)$$

Ce modèle de mesure est donc clairement non-linéaire par rapport au vecteur d'état, par conséquent il doit être linéarisé basé sur le principe du filtre de Kalman étendu présenté à la section 5.2.2. Sans aucune connaissance préalable des différents paramètres de calibration, le meilleur estimé du vecteur d'état initial est de supposer que les capteurs ne possèdent aucune erreur déterministe mais avec une certaine incertitude (modélisée à l'intérieur de la matrice de covariance initiale). Dans cette optique, les conditions initiales du filtre de Kalman sont les suivantes :

$$\underline{x}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (6.11)$$

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}(\sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_E^2 \ \sigma_b^2 \ \sigma_b^2 \ \sigma_b^2) \quad (6.12)$$

où :

$\text{diag}(\ )$  : matrice diagonale

$\sigma_E^2$  : variance initiale des éléments de la matrice combinée de facteur d'échelle et de mauvais alignement

$\sigma_b^2$  : variance initiale des éléments du vecteur de biais

Finalement, étant donné que cet algorithme traite chacune des données sans distinction, il est important de pouvoir spécifier à ce dernier lorsque certaines mesures sont erronées. Étant

donné que l'algorithme est basé sur l'hypothèse que les capteurs sont maintenus selon un état stationnaire, les mesures ne devraient pas être traitées (ou devraient être traitées avec une importance moindre) lorsque cette hypothèse n'est pas respectée. Ceci peut être géré en utilisant un détecteur d'état stationnaire tel que celui présenté à l'ANNEXE VIII et en manipulant le paramètre de covariance des mesures  $R$  du filtre de Kalman. En effet, en imposant une très grande valeur au paramètre de covariance des mesures lorsque le mobile est en mouvement, le filtre de Kalman n'attribue aucune importance aux mesures lorsque l'hypothèse d'état stationnaire n'est pas respectée. La valeur des paramètres de covariance d'erreur  $\sigma_E^2$  et  $\sigma_b^2$  ainsi que celle du paramètre de covariance de mes mesures  $R$  du filtre de Kalman ont été sélectionnés de manière expérimentale afin de permettre une convergence rapide de l'algorithme de calibration.

#### 6.1.4 Tests et résultats des algorithmes de calibration

Les deux algorithmes de calibration développés dans le cadre de ce mémoire ont été utilisés afin de déterminer les paramètres de calibration initiaux des trois centrales inertielles présentées aux figures 6.3 à 6.5.



Figure 6-3 Honeywell HG1700  
(Novatel SPAN™)



Figure 6-4 MEMSense  
nIMU



Figure 6-5  
STMicroelectronics  
iNEMO V2

Les caractéristiques techniques détaillées de ces centrales inertielles sont fournies à l'ANNEXE IX. Les trois centrales inertielles utilisées pour ce projet sont composées d'une triade d'accéléromètres et d'une triade de gyroscopes. De plus, les deux unités de mesures à

faible coût sont également munies d'une triade de magnétomètres. Les algorithmes de calibration présentés précédemment sont basés sur la méthode multi-position, ainsi, les mesures provenant de chacune des centrales inertielles sont enregistrées selon 18 orientations prédéfinies. Lors de l'enregistrement des mesures, les centrales inertielles sont disposées à l'intérieur d'un support ayant la forme d'un prisme rectangulaire. Ceci permet d'éliminer les surfaces irrégulières de ces capteurs et de faciliter la prise de mesures à plat. De plus, afin de faciliter la prise de mesures à 45°, un bloc ayant la forme d'un prisme triangulaire est également utilisé. Pour les tests présentés dans cette section, 10 essais différents échelonnés sur une durée totale de 8 heures ont été réalisés et traités par les deux algorithmes de calibration. Cependant, seuls les résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman seront présentés puisque les deux algorithmes ont fournis des résultats équivalents. Les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt sont présentés à l'ANNEXE X.

#### **6.1.4.1 Calibration des accéléromètres**

La calibration des accéléromètres est basée sur l'observation du vecteur de gravité qui est utilisé comme référence à l'intérieur des algorithmes. Les composantes théoriques de ce vecteur sont calculées à l'aide du modèle de gravité présenté à la section 2.5 et sont considérées comme constantes tout au long de la procédure de calibration. En condition stationnaire et en l'absence d'erreur, la norme des mesures provenant des accéléromètres devrait être égale à celle du vecteur de gravité théorique. Toutefois, lorsque les mesures sont contaminées, cette hypothèse n'est plus valide et la norme mesurée peut être bien différente de la valeur de référence.

Les mesures brutes provenant des accéléromètres de chacune des trois centrales inertielles sont présentées à la Figure 6-6. En analysant ces figures, il est possible de constater que pour les deux centrales inertielles à faible coût, la norme des mesures varie de façon significative en fonction de l'orientation de la centrale inertielle. Ce comportement résulte directement de la présence d'erreurs importantes de facteur d'échelle et de mauvais alignement sur les mesures de ces IMU. En ce qui concerne les mesures provenant de la centrale inertielle

HG1700, cet effet n'est pas perceptible. En effet, la norme des mesures enregistrées semble être la même peu importe l'orientation de l'unité. Ceci pourrait s'expliquer par l'absence (ou la présence très faible) d'erreurs de nature déterministe sur les mesures provenant de cette centrale inertielle. Les mesures enregistrées lors des 10 essais ont été traitées par les deux algorithmes de calibration. Les résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman sont présentés aux tableaux 6.1 à 6.3 tandis que ceux obtenus à l'aide de l'algorithme LM sont présentés à l'ANNEXE X.

Tout d'abord, en analysant les résultats présentés au Tableau 6.1, il est possible de constater que les paramètres de calibration estimés pour la centrale inertielle HG1700 sont très près de l'estimé initial (c.-à-d. matrice identité et biais nul). Cela démontre clairement que les erreurs déterministes contenues sur les accéléromètres de cet IMU sont très faibles et que leur impact sur la solution de navigation devrait être négligeable. Il est donc possible de conclure que les accéléromètres de cette centrale inertielle sont déjà très bien calibrés par le fabricant et que l'utilisation d'une procédure de calibration supplémentaire est superflue.

Tableau 6.1 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle HG1700 à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	1.000	$2.52 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>12</sub></b>	0.000	0.000	-0.000	0.001	0.000	0.002	-0.000	0.000	0.001	0.002	0.001	$4.36 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>13</sub></b>	0.000	-0.000	0.000	-0.001	-0.000	0.000	0.001	0.001	-0.000	0.001	0.000	$2.64 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.000	0.000	0.001	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000	$2.77 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>22</sub></b>	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	$5.15 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.000	-0.000	0.001	-0.000	-0.000	0.001	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	$3.13 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>31</sub></b>	0.000	-0.001	-0.000	-0.000	0.000	-0.001	0.001	0.001	-0.000	-0.000	0.000	$2.56 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.001	0.000	-0.001	0.000	$2.13 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000	$6.01 \times 10^{-9}$
<b>b<sub>x</sub></b>	0.001	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	$7.78 \times 10^{-8}$
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.001	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	$1.01 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.001	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	$9.94 \times 10^{-8}$

Tableau 6.2 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle nIMU à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	4.13 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>12</sub></b>	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	1.96 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>13</sub></b>	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	5.00 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>21</sub></b>	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	2.28 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>22</sub></b>	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.001	1.002	1.002	1.002	6.27 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>23</sub></b>	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	1.05 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>31</sub></b>	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	4.30 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>32</sub></b>	0.001	0.001	0.000	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	1.10 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>33</sub></b>	1.003	1.004	1.005	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.32 x 10 <sup>-7</sup>
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.009	-0.009	-0.010	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	5.37 x 10 <sup>-8</sup>
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	6.83 x 10 <sup>-8</sup>
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.013	-0.014	-0.014	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	1.07 x 10 <sup>-7</sup>

Tableau 6.3 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.983	0.982	0.981	0.981	0.981	0.981	0.980	0.981	0.981	0.981	0.981	4.12 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>12</sub></b>	0.019	0.020	0.020	0.019	0.020	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	1.15 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	8.80 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>21</sub></b>	0.020	0.020	0.020	0.019	0.020	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	1.03 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>22</sub></b>	0.988	0.988	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	2.37 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>23</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	8.16 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	8.81 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>32</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	-0.001	-0.000	7.25 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>33</sub></b>	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951	0.951	0.950	0.951	0.951	0.951	1.03 x 10 <sup>-7</sup>
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.005	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	3.40 x 10 <sup>-7</sup>
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.012	-0.012	-0.011	-0.011	-0.011	-0.011	-0.012	-0.011	-0.012	-0.012	-0.012	1.05 x 10 <sup>-7</sup>
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.029	-0.036	-0.037	-0.037	-0.038	-0.038	-0.038	-0.037	-0.036	-0.036	-0.036	6.98 x 10 <sup>-6</sup>

Les résultats obtenus suggèrent également la présence faible mais non négligeable d'erreurs déterministes sur les mesures d'accéléromètres provenant de la centrale inertielle nIMU.

Selon le Tableau 6.2, ces erreurs sont de l'ordre de 0.1 % et 0.4 % respectivement pour le facteur d'échelle et le mauvais alignement et entre 2 mg et 13 mg pour le biais. La centrale inertielle iNEMO V2 semble cependant être beaucoup plus contaminée par les erreurs déterministes. En effet, selon les résultats présentés au Tableau 6.3, les erreurs de facteur d'échelle et de mauvais alignement peuvent atteindre jusqu'à 5 % et 2 % respectivement et les erreurs de biais varient entre 3 mg et 37 mg. Ces résultats mettent en évidence le manque de calibration des capteurs à faible coût ainsi que l'importance de l'utilisation d'une procédure de calibration. En effet, la Figure 6-6 démontre clairement que l'application des paramètres de calibration sur les mesures brutes permet d'éliminer de façon significative les erreurs déterministes contenues sur les accéléromètres à faible coût.

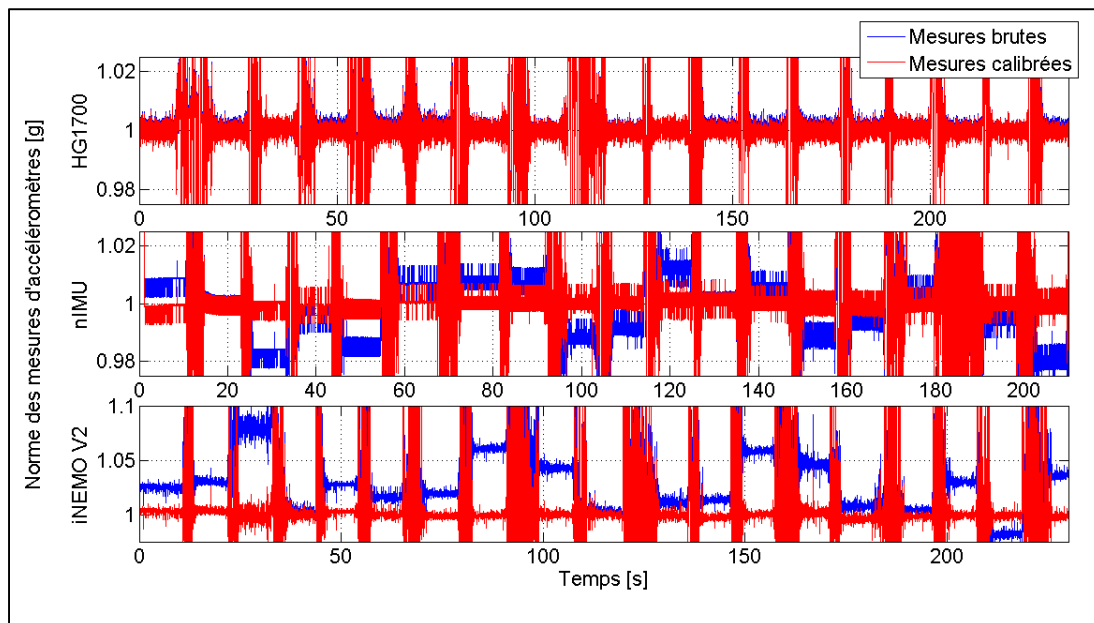


Figure 6-6 Norme des mesures brutes et calibrées des accéléromètres

Les 10 essais réalisés ont été échelonnés sur une période de 8 heures et il est possible de constater une très faible variation des paramètres de calibration des accéléromètres durant cette période. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de réaliser la procédure de calibration avant chaque test, mais plutôt périodiquement lorsque les paramètres de calibration ne semblent plus être valides. Plusieurs auteurs affirment que les paramètres de calibration

peuvent varier en fonction de l'usure du capteur et de la température ambiante. Ainsi, afin d'être plus rigoureux, il serait nécessaire de conduire une étude sur le comportement à long terme des paramètres de calibration et de considérer l'impact des variations de température à l'intérieur de l'algorithme. Ces considérations ne seront toutefois pas prises en compte dans le cadre de ce mémoire.

Enfin, en comparant les résultats obtenus par le filtre de Kalman avec ceux obtenus par l'algorithme LM présentés à l'ANNEXE X, il est possible de constater une grande similitude des paramètres estimés par les deux méthodes de calibration. Il est donc possible de conclure que l'utilisation du filtre de Kalman offre des performances comparables à la méthode classique basée sur l'utilisation de l'algorithme LM pour la calibration des accéléromètres.

#### **6.1.4.2 Calibration des gyroscopes**

La calibration des gyroscopes est réalisée de façon similaire à la calibration des accéléromètres mais en utilisant le vecteur de rotation de la terre comme vecteur de référence à l'intérieur des algorithmes. Ce dernier est considéré comme constant et son amplitude est donnée par l'équation (2.1) tel que :

$$\omega_{IE} \approx 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (6.13)$$

En conditions stationnaires et en l'absence d'erreur, les gyroscopes devraient uniquement mesurer ce vecteur, toutefois, lorsque la centrale inertielle est contaminée par certaines erreurs déterministes, la norme mesurée peut être différente de cette valeur de référence. C'est le cas pour plusieurs centrales inertielles à faible coût, notamment pour la centrale inertielle iNEMO V2 tel qu'illustré sur la Figure 6-7. En ce qui concerne les centrales inertielles HG1700 et nIMU, ce phénomène est beaucoup moins présent. En analysant cette figure, il est également possible de constater que contrairement aux accéléromètres, la norme des mesures enregistrées pour les gyroscopes ne semble pas varier en fonction de l'orientation de la centrale inertielle, et ce même pour les capteurs à faible coût. Ceci ne

garantit toutefois pas l'absence d'erreur de mauvais alignement et de facteur d'échelle sur les capteurs, mais indique seulement que le vecteur d'excitation est peut-être trop faible pour que ces erreurs soient perceptibles. Pour cette même raison, il pourrait être très difficile, voire impossible, pour l'algorithme de calibration d'estimer adéquatement ces paramètres. Les mesures enregistrées pour les 10 essais ont été traitées par les deux algorithmes de calibration. Les résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman sont présentés aux tableaux 6.4 à 6.6 tandis que ceux obtenus à l'aide de l'algorithme LM sont présentés à l'ANNEXE X.

Tout d'abord, il est possible de constater que pour les trois centrales inertielles, la matrice combinée de facteur d'échelle et de mauvais alignement estimée est pratiquement égale à la matrice identité. L'algorithme n'est donc pas en mesure d'obtenir un meilleur estimé de cette matrice que l'estimé initial. Ceci vient confirmer l'hypothèse mentionnée précédemment voulant que l'amplitude du vecteur observé soit trop faible pour permettre l'estimation des paramètres de facteur d'échelle et de mauvais alignement. Pour pouvoir estimer adéquatement ces derniers, il serait nécessaire d'utiliser un vecteur de référence ayant une amplitude plus élevée, par exemple, en utilisant une table tournante de haute précision.

Tableau 6.4 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle HG1700 à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$4.67 \times 10^{-11}$
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	$1.57 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	$3.88 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	$3.49 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$4.02 \times 10^{-11}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	$8.67 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	$6.04 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	$3.06 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$6.40 \times 10^{-11}$
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	$1.62 \times 10^{-10}$
<b>b<sub>y</sub></b>	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	$1.65 \times 10^{-10}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	$6.42 \times 10^{-11}$



Tableau 6.5 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle nIMU à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.997	0.997	0.997	0.991	0.999	0.998	0.999	0.998	0.998	0.998	0.997	4.65 x 10 <sup>-6</sup>
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	-0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	6.07 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>13</sub></b>	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	1.02 x 10 <sup>-9</sup>
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	-0.001	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	6.08 x 10 <sup>-8</sup>
<b>e<sub>22</sub></b>	0.992	0.986	0.994	0.995	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.996	1.88 x 10 <sup>-5</sup>
<b>e<sub>23</sub></b>	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	6.88 x 10 <sup>-9</sup>
<b>e<sub>31</sub></b>	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	1.02 x 10 <sup>-9</sup>
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	6.89 x 10 <sup>-9</sup>
<b>e<sub>33</sub></b>	0.996	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.999	0.999	0.999	1.28 x 10 <sup>-6</sup>
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.001	-0.006	-0.004	-0.011	-0.005	-0.005	-0.006	-0.005	-0.006	-0.006	-0.006	5.98 x 10 <sup>-6</sup>
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.000	0.008	0.004	-0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	7.60 x 10 <sup>-6</sup>
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.002	-0.004	-0.005	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	1.76 x 10 <sup>-6</sup>

Tableau 6.6 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.981	0.980	0.990	0.981	0.981	0.980	0.991	0.990	0.963	0.991	0.983	7.45 x 10 <sup>-5</sup>
<b>e<sub>12</sub></b>	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.71 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>13</sub></b>	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001	0.002	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.001	5.91 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>21</sub></b>	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.69 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>22</sub></b>	0.985	0.991	0.999	0.967	0.991	0.995	0.997	0.996	0.988	0.998	0.991	8.81 x 10 <sup>-5</sup>
<b>e<sub>23</sub></b>	0.001	0.001	0.001	-0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.000	0.001	2.94 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>31</sub></b>	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001	0.002	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.001	6.15 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>32</sub></b>	0.001	0.001	0.001	-0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.000	0.001	3.05 x 10 <sup>-7</sup>
<b>e<sub>33</sub></b>	1.012	1.007	1.010	1.005	0.949	0.976	1.010	1.012	0.992	1.011	0.998	4.29 x 10 <sup>-4</sup>
<b>b<sub>x</sub></b>	0.017	0.019	0.018	0.021	0.019	0.021	0.018	0.019	0.016	0.017	0.019	2.73 x 10 <sup>-6</sup>
<b>b<sub>y</sub></b>	0.046	0.046	0.049	0.042	0.049	0.050	0.048	0.047	0.049	0.047	0.047	4.97 x 10 <sup>-6</sup>
<b>b<sub>z</sub></b>	0.119	0.117	0.117	0.116	0.110	0.112	0.117	0.118	0.114	0.116	0.116	7.15 x 10 <sup>-6</sup>

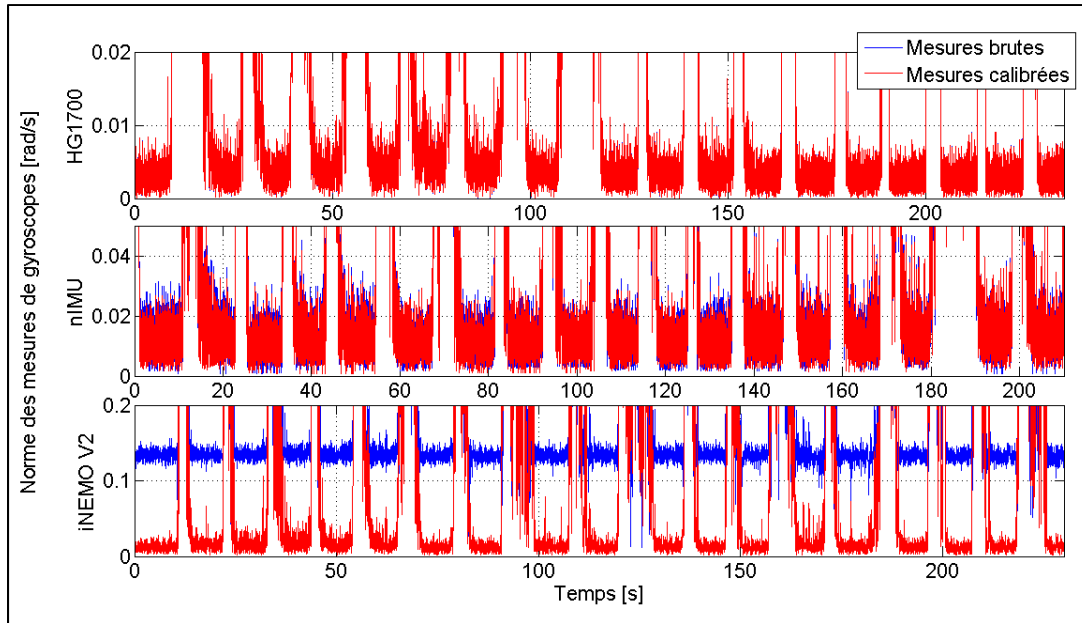


Figure 6-7 Norme des mesures brutes et calibrées des gyroscopes

Les résultats présentés au Tableau 6.6 suggèrent également la présence d'un biais important allant de 0.019 rad/s à 0.119 rad/s sur les mesures provenant des gyroscopes de la centrale inertielle iNEMO V2. Tel qu'illustré à la Figure 6-7, la correction de ces paramètres estimés permet de réduire considérablement les erreurs contenues sur les mesures de gyroscopes de cet IMU. Toutefois, pour les deux autres capteurs, le biais estimé est beaucoup plus faible et l'impact de la procédure de calibration est moins perceptible comme la Figure 6-7. Pour la centrale inertielle nIMU, ces erreurs sont de l'ordre de  $10^{-3}$  rad/s et bien qu'elles puissent paraître plutôt faibles, elles ne sont pas négligeables. Pour la centrale inertielle HG1700, les paramètres estimés sont de l'ordre de  $10^{-4}$  rad/s, ce qui est au-dessous du niveau de bruit du capteur, et par conséquent, ces erreurs sont négligeables. Il est donc possible de conclure que les gyroscopes de cet IMU sont déjà très bien calibrés par le manufacturier et que l'utilisation d'une procédure de calibration supplémentaire est superflue.

Par la suite, étant donné la variance très faible des paramètres de calibration, il est possible de considérer ces derniers comme étant constants pour une période de temps donnée. Les tests réalisés dans le cadre de ce mémoire étaient échelonnés sur une période de 8 heures, par conséquent, l'auteur ne peut certifier la validité des paramètres de calibration pour une durée

supérieure. Dans de telles conditions, il serait préférable de réaliser la procédure de calibration à nouveau afin d'éviter d'introduire des erreurs supplémentaires dans le système.

Finalement, en comparant les résultats des deux algorithmes, il est possible d'observer une grande similitude pour l'ensemble des paramètres de calibration estimés. Ainsi, il est possible de conclure que la méthode de calibration basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman permet d'obtenir des performances comparables à l'approche basée sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour la calibration des gyroscopes.

#### **6.1.4.3 Calibration des magnétomètres**

La procédure pour la calibration des magnétomètres est similaire à celle utilisée pour les accéléromètres et les gyroscopes mais en utilisant le vecteur de champ magnétique terrestre comme référence à l'intérieur des algorithmes. Ce dernier est considéré comme constant pour la durée totale des tests et il est calculé à l'aide du logiciel « Geomag 7.0 » développé par l'IAGA (IAGA, 2010) dans lequel est implémenté le modèle IGRF-11 qui permet de calculer les paramètres locaux du vecteur de champ magnétique terrestre en fonction de la position géodésique et de la date. Les paramètres calculés pour les tests réalisés dans cette section sont présentés au Tableau 6.7.

En l'absence d'erreur et de perturbation locales, les magnétomètres devraient uniquement mesurer ce vecteur, toutefois, lorsque la centrale inertielle est contaminée par certaines erreurs déterministes, la norme mesurée peut être différente de cette valeur de référence. Contrairement aux accéléromètres et aux gyroscopes, les erreurs déterministes présentes sur les mesures de magnétomètres ne se limitent pas qu'aux erreurs du capteur (facteur d'échelle, mauvais alignement et biais) mais peuvent également être causée par l'environnement extérieur (p. ex. erreurs de fer dur et de fer doux discutés à la section 4.4). La Figure 6-8 qui présente la norme des mesures enregistrées par les magnétomètres des deux centrales inertielles à faible coût illustrent clairement l'effet des erreurs déterministes sur les mesures de magnétomètres.

Tableau 6.7 Paramètres calculés à l'aide du modèle IGRF

<b>Description</b>	<b>Valeur</b>	<b>Unité</b>
<b>Date</b>	2012.12	an
<b>Latitude</b>	45.414	°
<b>Longitude</b>	-73.500	°
<b>Élévation</b>	10	m
<b>Composante Nord</b>	17.575	μT
<b>Composante Est</b>	-4.664	μT
<b>Composante Verticale (Bas)</b>	51.219	μT
<b>Déclinaison Horizontale</b>	-14.867	°
<b>Inclinaison Verticale</b>	70.450	°

En analysant ces figures, il est d'abord possible de constater les variations élevées de la norme du vecteur de champ magnétique local mesuré par les magnétomètres. Ces variations peuvent être causées par les erreurs de facteur d'échelle, de mauvais alignement et de biais, mais également par les perturbations externes du champ magnétique local, c'est-à-dire les erreurs de fer dur et de fer doux. Les erreurs de fer dur proviennent directement du capteur (composantes électroniques, circuit d'alimentation, vis et écrous ferromagnétiques, etc.) tandis que les erreurs de fer doux sont générés par l'environnement extérieur (câbles, source d'alimentation, ordinateur, etc.).

Les mesures enregistrées pour les 10 essais ont été traitées par les deux algorithmes de calibration. Les résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman sont présentés aux tableaux 6.8 et 6.9 tandis que ceux obtenus à l'aide de l'algorithme LM sont présentés à l'ANNEXE X.

Tableau 6.8 Résultats de la calibration des magnétomètres de la centrale inertielle nIMU à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.301	1.285	1.285	1.299	1.303	1.239	1.298	1.287	1.287	1.299	1.288	$3.52 \times 10^{-4}$
<b>e<sub>12</sub></b>	0.091	0.113	0.010	0.150	0.063	-0.154	0.096	0.033	0.083	0.193	0.068	$8.84 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.081	-0.060	-0.214	-0.122	-0.154	-0.195	-0.101	-0.036	-0.068	-0.036	-0.107	$4.02 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>21</sub></b>	0.081	0.064	0.195	-0.041	0.104	0.302	0.058	0.175	0.079	-0.023	0.099	$1.05 \times 10^{-2}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.039	1.024	1.068	1.031	1.035	1.064	1.052	1.036	1.029	0.996	1.037	$4.34 \times 10^{-4}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.156	0.095	0.270	0.115	0.162	0.057	0.190	0.107	0.057	0.063	0.127	$4.65 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.070	-0.144	0.151	-0.014	0.030	0.119	-0.022	-0.137	-0.063	-0.129	-0.028	$1.06 \times 10^{-2}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.179	0.252	0.049	0.254	0.183	0.237	0.112	0.221	0.264	0.278	0.203	$5.42 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>33</sub></b>	0.871	0.905	0.832	0.892	0.869	0.888	0.860	0.886	0.885	0.904	0.879	$4.91 \times 10^{-4}$
<b>b<sub>x</sub></b>	4.816	4.828	4.750	4.477	4.739	4.214	5.002	4.573	4.715	4.484	4.660	$5.09 \times 10^{-2}$
<b>b<sub>y</sub></b>	8.936	9.008	9.313	9.559	9.241	8.967	9.612	9.451	9.649	9.384	9.312	$7.18 \times 10^{-2}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-1.509	-2.238	-1.862	-2.339	-1.775	1.754	-2.171	-1.673	-2.241	-2.974	-1.703	1.65

Tableau 6.9 Résultats de la calibration des magnétomètres de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide du filtre de Kalman

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.326	1.332	1.335	1.326	1.320	1.330	1.322	1.312	1.317	1.318	1.324	$5.47 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.002	0.024	-0.023	-0.039	0.024	0.061	0.025	-0.043	-0.015	-0.031	-0.002	$1.18 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.012	-0.018	-0.010	-0.000	0.022	0.115	0.074	0.069	-0.137	0.000	0.010	$4.70 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.009	-0.035	0.003	0.005	-0.026	-0.056	-0.031	0.020	0.020	0.015	-0.009	$6.94 \times 10^{-4}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.359	1.378	1.387	1.375	1.375	1.375	1.379	1.382	1.372	1.378	1.376	$5.40 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>23</sub></b>	-0.158	-0.023	0.011	-0.036	0.035	0.039	-0.081	0.033	0.050	0.077	-0.005	$5.06 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>31</sub></b>	0.021	0.025	0.013	0.033	-0.025	-0.105	-0.064	-0.046	0.124	0.039	0.002	$4.13 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.162	0.028	-0.019	0.034	-0.026	-0.046	0.080	-0.062	-0.091	-0.100	-0.004	$6.64 \times 10^{-3}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.296	1.312	1.318	1.311	1.324	1.325	1.313	1.324	1.332	1.330	1.318	$1.18 \times 10^{-4}$
<b>b<sub>x</sub></b>	-13.39	-13.17	-13.50	-13.41	-13.08	-13.52	-13.16	-13.38	-13.37	-13.55	-13.35	$2.67 \times 10^{-2}$
<b>b<sub>y</sub></b>	0.051	0.142	0.122	0.023	0.076	0.188	-0.126	0.022	-0.636	-0.030	-0.017	$5.53 \times 10^{-2}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.619	-0.570	-0.539	-0.501	-0.314	-0.451	-0.314	-0.628	-0.761	-0.761	-0.546	$2.48 \times 10^{-2}$

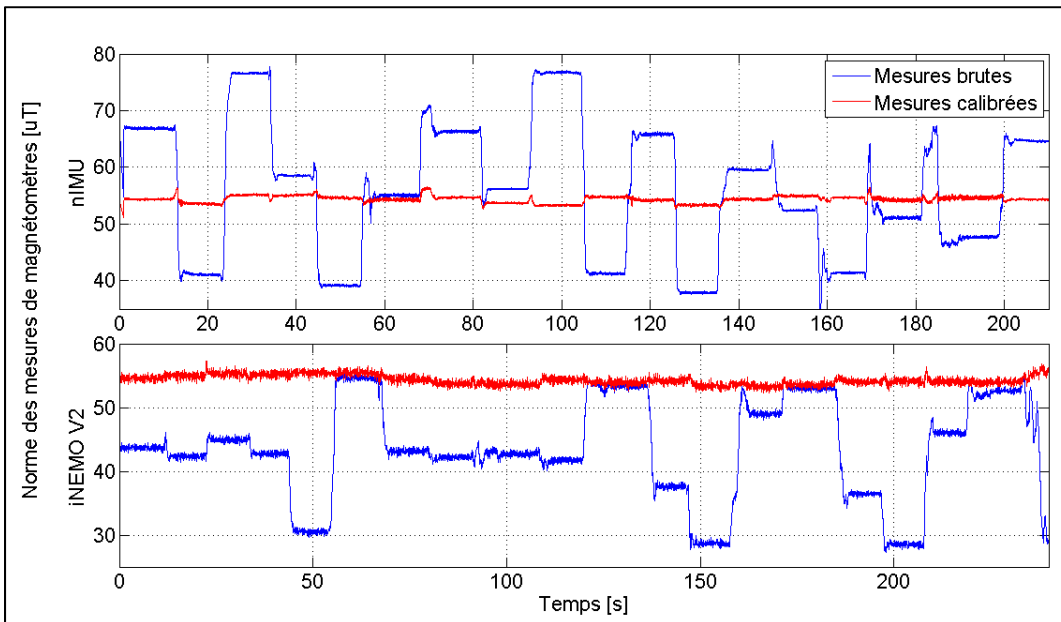


Figure 6-8 Norme des mesures brutes et calibrées des magnétomètres

Tout d'abord, en analysant les résultats obtenus, il est possible de constater la présence d'erreurs importantes de facteur d'échelle sur les mesures provenant des deux centrales inertielles à faible coût. Ces erreurs sont comprises entre 3.7 % et 28.8 % pour la centrale inertielle nIMU et entre 32.4 % et 37.6 % pour la centrale inertielle iNEMO V2. De plus, les mesures provenant de la centrale inertielle nIMU sont également contaminées par des erreurs importantes de mauvais alignement et/ou de fer doux. En effet, ces erreurs varient entre 2.8 % et 20.3 % ce qui n'est toutefois pas le cas pour la centrale inertielle iNEMO V2 dont l'erreur maximale est de l'ordre de 1%. Par la suite, il est également possible d'observer la présence d'erreurs importantes de biais et/ou de fer dur sur les mesures provenant des deux centrales inertielles. Ces erreurs sont comprises entre 1.70  $\mu\text{T}$  et 9.31  $\mu\text{T}$  pour la centrale inertielle nIMU et entre 0.02  $\mu\text{T}$  et 13.35  $\mu\text{T}$  pour la centrale inertielle iNEMO V2.

La Figure 6-8, illustre clairement l'impact positif de la procédure de calibration sur les mesures provenant des magnétomètres à faible coût. En effet, en appliquant les paramètres estimés par la procédure de calibration sur les données brutes, il est possible de réduire de manière significative les erreurs de nature déterministes présentes sur les mesures.

Contrairement aux résultats obtenus pour la calibration des accéléromètres et des gyroscopes, la variance des paramètres calculée à partir des 10 essais est relativement élevée. Ceci résulte principalement du fait que les erreurs de fer dur et de fer doux sont directement affectées par l'environnement dans lequel la procédure de calibration est effectuée. Ainsi, si cet environnement n'est pas contrôlé, il est possible que les perturbations locales du champ magnétique varient grandement entre les prises de mesures. Il est donc évident que pour les magnétomètres, la procédure de calibration doit être réalisée avant chaque essai de manière à tenir compte des perturbations locales présentes dans l'environnement de test.

Finalement, tout comme pour la calibration des autres capteurs, le filtre de Kalman semble fournir des performances comparables à l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour la calibration des magnétomètres.

## 6.2 Analyse de la variance d'Allan

L'analyse de la variance d'Allan est une méthode permettant d'étudier le comportement stochastique d'un signal dans le domaine temporel. Cette méthode permet entre autre de caractériser tout processus aléatoire contenu dans un signal. Elle permet donc de mieux modéliser le bruit de mesure des capteurs inertiels, pour ainsi mieux l'estimer, et par conséquent, mieux le corriger. L'analyse de la variance d'Allan consiste dans un premier temps à enregistrer  $N$  mesures consécutives échantillonnées avec une période  $\Delta t$ . Ces mesures sont ensuite regroupées en agrégats constitués de  $n$  mesures consécutives (avec  $n < N/2$ ), chaque agrégat ayant une période  $\tau = n\Delta t$ , tel qu'illustré sur la Figure 6-9.

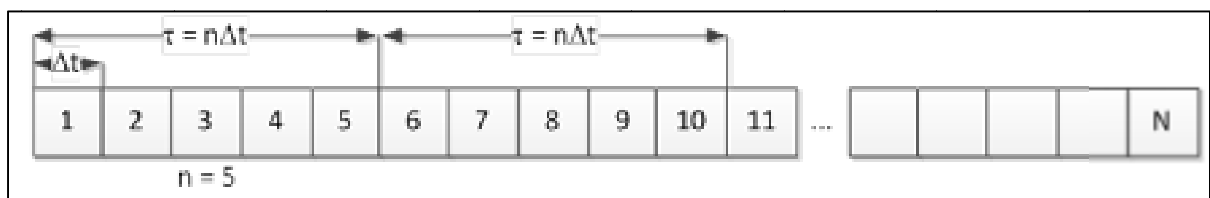


Figure 6-9 Structure de données utilisée pour l'analyse de la variance d'Allan

En considérant  $\omega_i$  comme étant la mesure instantanée d'un capteur inertielle, la moyenne de chacun des agrégats peut être calculée tel que :

$$\bar{\omega}_k(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_{(k-1)n+j} \quad k = 1, \dots, N/n \quad (6.14)$$

où :

- $\bar{\omega}_k$  : moyenne des mesures contenues dans l'agrégat  $k$
- $\tau$  : période d'agrégat
- $n$  : nombre de mesures par agrégat
- $N$  : nombre total de mesures
- $K$  : nombre d'agrégats complets pouvant être formés ( $K = N/n$ )

La variance d'Allan pour une période d'agrégat donnée peut être calculée directement à partir de cette moyenne à l'aide de l'équation suivante (IEEE, 1996) :

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{n(K-1)} \sum_{k=1}^{K-1} (\bar{\omega}_{k+1}(\tau) - \bar{\omega}_k(\tau))^2 \quad (6.15)$$

où :

- $\sigma_A^2(\tau)$  : variance d'Allan calculée pour une période d'agrégat  $\tau$  donnée

Ainsi, en faisant varier la période d'agrégat, une courbe caractéristique peut être tracée (*voir Figure 6-10*). L'analyse de cette courbe permet l'identification des différentes composantes de bruit présentes sur le signal ainsi que leur amplitude respective.



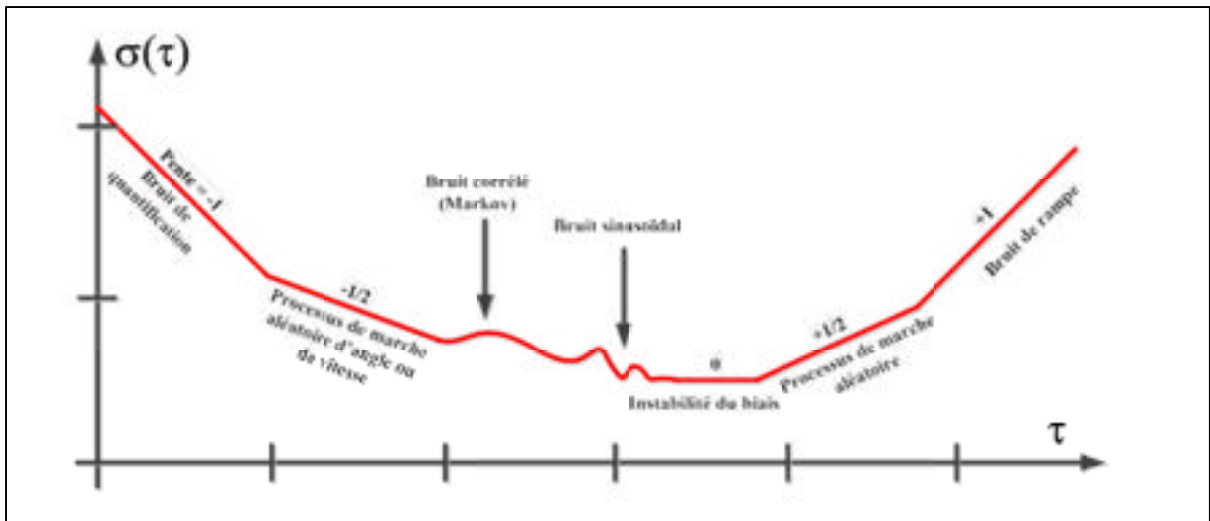


Figure 6-10 Exemple d'analyse de la variance d'Allan  
Adaptée de IEEE (1996, p. 74)

Des standards ont été établis dans la littérature concernant les sources possibles de bruit pouvant contaminer les mesures inertielles (Hou, 2004; IEEE, 1996). Notamment, L'*Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE) a publié un document (IEEE, 1996) reconnu par l'*American National Standard Institute* (ANSI) qui présente les caractéristiques ainsi que les méthodes d'identification de différents types de bruit présents sur les mesures de capteurs inertiels. Ce document présente entre autre la courbe de variance d'Allan caractéristique pour différentes sources de bruit dont le bruit de quantification, le bruit blanc, le bruit corrélé, l'instabilité du biais, le processus de marche aléatoire ainsi que le bruit de rampe. Les techniques d'identification des différents types de bruit définies par IEEE (1996) sont présentées à l'ANNEXE XI.

### 6.2.1 Effet combiné des différentes sources de bruit

Les figures présentées à l'ANNEXE XI illustrent les courbes caractéristiques pour des signaux qui ne contiendraient qu'une seule source d'erreur. Cependant, les mesures inertielles sont généralement contaminées par plusieurs sources d'erreur différentes et la courbe caractéristique résultante peut différer légèrement des courbes théoriques, rendant l'identification des paramètres de bruit plus complexe. En effet, puisque les différentes

sources de bruit sont mutuellement indépendantes, la variance d'Allan totale du signal correspond à la somme des variances respectives de chacun des bruits tel que :

$$\sigma_A^2(T) = \sigma_{A-Q}^2(T) + \sigma_{A-N}^2(T) + \sigma_{A-Qc}^2(T) + \sigma_{A-B}^2 + \sigma_{A-K}^2 + \sigma_{A-R}^2 \quad (6.16)$$

où :

- $\sigma_{A-Q}^2(\tau)$  : variance d'Allan du bruit de quantification
- $\sigma_{A-N}^2(\tau)$  : variance d'Allan du bruit blanc
- $\sigma_{A-Qc}^2(\tau)$  : variance d'Allan du processus de Markov
- $\sigma_{A-B}^2(\tau)$  : variance d'Allan de l'instabilité du biais
- $\sigma_{A-K}^2(\tau)$  : variance d'Allan du processus de marche aléatoire
- $\sigma_{A-R}^2(\tau)$  : variance d'Allan du bruit de rampe

Ainsi, chacune des sources de bruit présentes sur le signal affecte la courbe caractéristique résultante. Il est donc important de prendre en considération l'impact de l'ensemble des sources d'erreur lors de l'identification des différents coefficients de bruit.

### 6.2.2 Précision de l'analyse de la variance d'Allan

Selon IEEE (1996), le pourcentage d'erreur sur l'estimation de la variance d'Allan varie en fonction du nombre total de données enregistrées et du nombre de mesures par agrégat tel que :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2 \left( \frac{N}{n} - 1 \right)}} \quad (6.17)$$

où :

- $\varepsilon$  : pourcentage d'erreur sur l'estimé de la variance d'Allan

Ainsi, afin d'obtenir un estimé suffisamment juste de la variance d'Allan et des différents paramètres d'erreur, les données brutes provenant des capteurs inertiels doivent être

enregistrées sur une longue période. Or, plus le nombre de données enregistrées augmente, plus la charge de calcul nécessaire est élevée. Il est donc essentiel de faire un compromis sur la précision de l'estimé en fonction de la puissance de calcul disponible.

### 6.2.3 Tests et analyse des résultats

L'analyse de la variance d'Allan est utilisée afin d'étudier le comportement stochastique des trois centrales inertielles utilisées dans le cadre de ce mémoire. Les mesures brutes provenant de chacune de ces centrales inertielles ont été enregistrées en l'absence de toute perturbation (mouvement, impact, vibration, etc.) sur une période supérieure à 8 heures. Le Tableau 6.10 présente les paramètres d'enregistrement pour chacune des centrales inertielles.

Tableau 6.10 Paramètres d'enregistrement pour l'analyse de la variance d'Allan

	<b>Fréquence d'échantillonnage</b> <b>[Hz]</b>	<b>Durée</b> <b>[h]</b>
<b>Honeywell HG1700</b>	100	19
<b>MEMSense nIMU</b>	150	10
<b>STMicroelectronics iNEMO V2</b>	50	18

L'algorithme d'analyse de la variance d'Allan utilisé afin de traiter les mesures provenant des trois IMU a été implémenté sous Matlab. Les coefficients de bruit ont d'abord été mesurés directement sur les courbes logarithmiques obtenues selon la méthode présentée à la section précédente, puis, une courbe théorique tenant compte de l'ensemble des sources de bruit a été tracée. Les coefficients ont par la suite été ajustés afin de faire coïncider la courbe théorique avec la courbe expérimentale. En suivant cette procédure, il a été possible de déterminer avec plus de précision la valeur des coefficients tout en tenant compte de la propriété additive de la variance d'Allan présentée à l'équation (6.16).

### 6.2.3.1 Centrale inertielle Honeywell HG1700

Les figures 6.11 et 6.12 présentent la courbe caractéristique de l'écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour la centrale inertielle HG1700. La Figure 6-11 illustre clairement la dominance du bruit de quantification et de rampe sur les mesures provenant de chacun des axes d'accéléromètre.

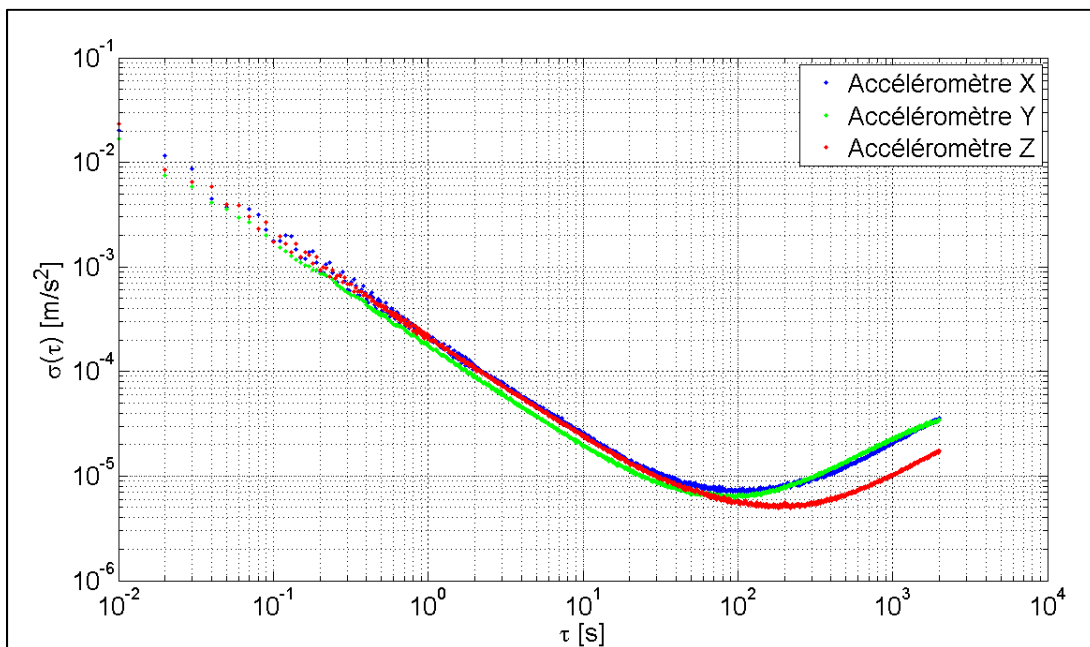


Figure 6-11 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les accéléromètres de l'IMU HG1700

Sur cette même figure, il est également possible d'identifier une composante non négligeable de bruit blanc ainsi qu'un processus de marche aléatoire. Selon les résultats présentés à la Figure 6-12, les mesures provenant des gyroscopes seraient quant à elles principalement contaminées par le bruit blanc et le bruit de quantification. Le Tableau 6.11 présente les différents coefficients de bruit obtenus suite à l'analyse de la variance d'Allan pour la centrale inertielle HG1700.

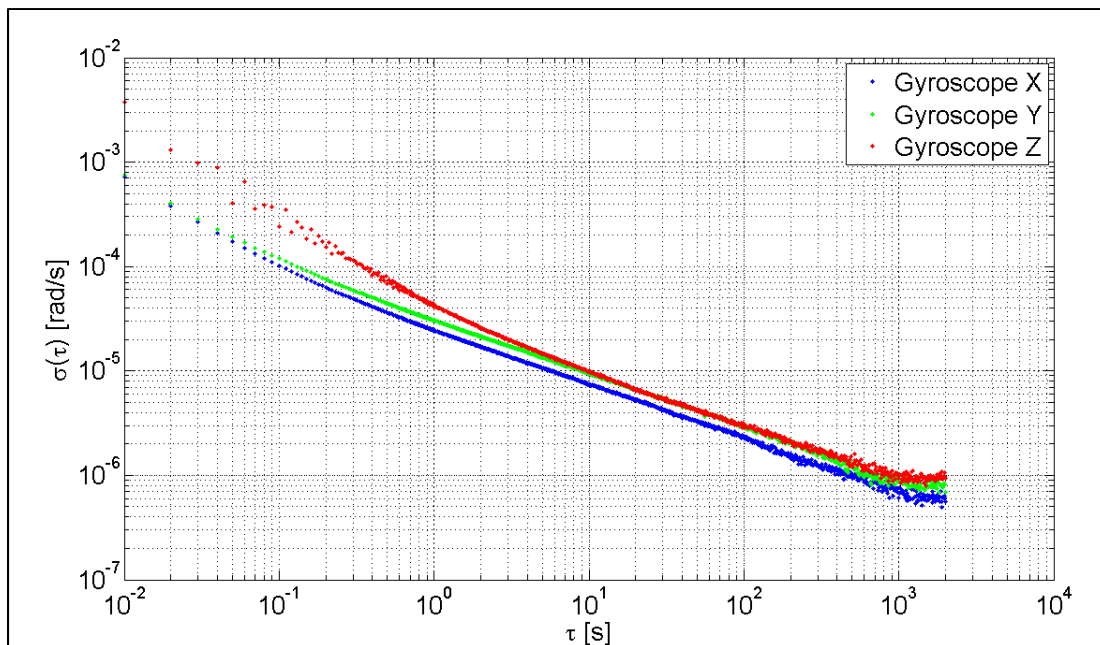


Figure 6-12 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les gyroscopes de l'IMU HG1700

Tableau 6.11 Coefficients de bruit de mesure pour l'IMU HG1700

	<b>Bruit de quantification</b> <b>Q</b> <b>[m/s]</b> <b>[rad]</b>	<b>Bruit blanc</b> <b>N</b> <b>[m/s<sup>3/2</sup>]</b> <b>[rad/s<sup>1/2</sup>]</b>	<b>Marche aléatoire</b> <b>K</b> <b>[m/s<sup>5/2</sup>]</b> <b>[rad/s<sup>3/2</sup>]</b>	<b>Rampe</b> <b>R</b> <b>[m/s<sup>3</sup>]</b> <b>[rad/s<sup>2</sup>]</b>
<b>Acc. X</b>	$1.2 \times 10^{-4}$	$4.0 \times 10^{-5}$	$9.0 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-8}$
<b>Acc. Y</b>	$1.0 \times 10^{-4}$	$3.5 \times 10^{-5}$	$8.5 \times 10^{-7}$	$2.0 \times 10^{-8}$
<b>Acc. Z</b>	$1.2 \times 10^{-4}$	$4.2 \times 10^{-5}$	$4.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-8}$
<b>Gyr. X</b>	$4.0 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-5}$	-	-
<b>Gyr. Y</b>	$4.0 \times 10^{-6}$	$2.9 \times 10^{-5}$	-	-
<b>Gyr. Z</b>	$1.5 \times 10^{-5}$	$3.0 \times 10^{-5}$	-	-

### 6.2.3.2 Centrale inertielle MEMSense nIMU

Les résultats obtenus suite à l'analyse de la variance d'Allan pour la centrale inertielle nIMU sont présentées aux figures 6.13 et 6.14. Sur la Figure 6-13, il est possible d'identifier la présence de bruit de quantification, de bruit blanc, de bruit corrélé et de processus de marche aléatoire sur les trois axes d'accéléromètres de cette centrale inertielle. De plus, une composante d'instabilité du biais peut également être identifiée sur les mesures provenant des accéléromètres X et Z. En ce qui concerne l'accéléromètre Y, la composante de bruit corrélé est dominante et semble éclipser l'effet de l'instabilité du biais, ce qui pourrait expliquer la tendance différente de cette courbe comparativement aux deux autres.

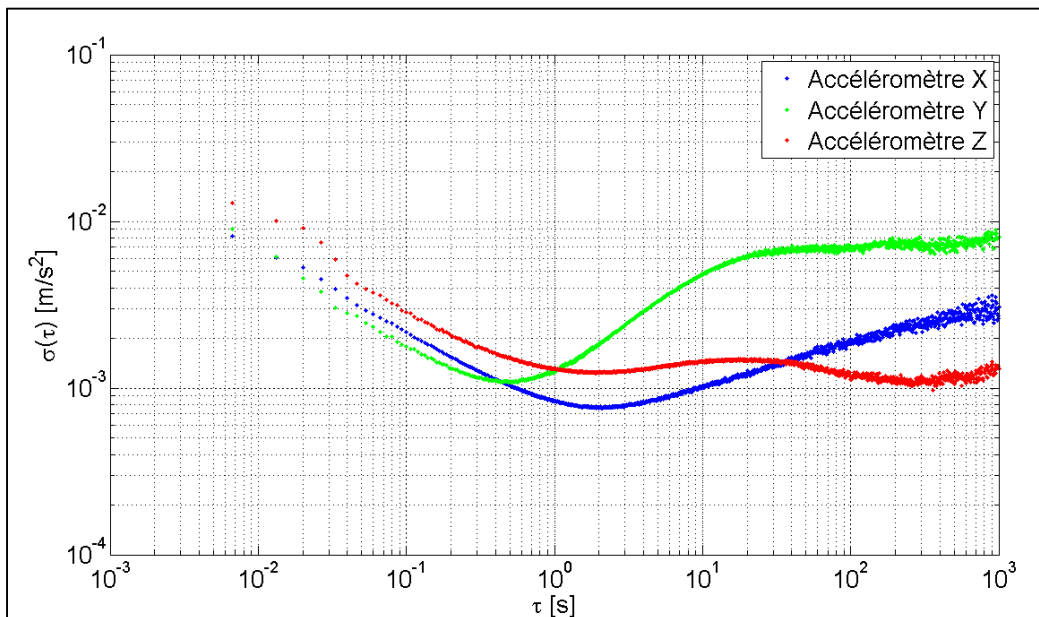


Figure 6-13 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les accéléromètres de l'IMU nIMU

Les gyroscopes de cette centrale inertielle semblent tous avoir le même comportement stochastique. En effet, selon les résultats présentés à la Figure 6-14, les sources d'erreur dominantes pour chacun des axes de gyroscope sont le bruit blanc, le bruit corrélé ainsi que l'instabilité du biais. Le Tableau 6.12 présente les différents coefficients de bruit obtenus suite à l'analyse de la variance d'Allan pour la centrale inertielle nIMU.

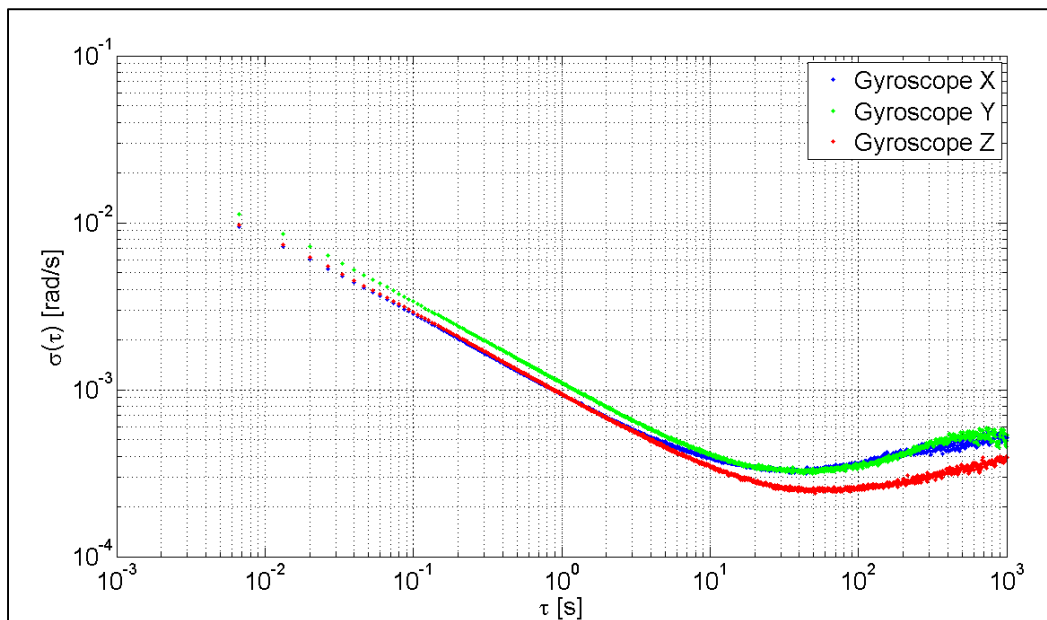


Figure 6-14 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les gyroscopes de l'IMU nIMU

Tableau 6.12 Coefficients de bruit de mesure pour l'IMU nIMU

	<b>Bruit de quantification</b> <b>Q</b> [m/s] [rad]	<b>Bruit blanc</b> <b>N</b> [m/s <sup>3/2</sup> ] [rad/s <sup>1/2</sup> ]	<b>Bruit corrélé</b> <b>Qc</b> [m/s <sup>5/2</sup> ] [rad/s <sup>3/2</sup> ]	<b>Instabilité du biais</b> <b>B</b> [m/s <sup>2</sup> ] [rad/s]	<b>Marche aléatoire</b> <b>K</b> [m/s <sup>5/2</sup> ] [rad/s <sup>3/2</sup> ]
<b>Acc. X</b>	1.0 x 10 <sup>-5</sup>	6.5 x 10 <sup>-4</sup>	4.5 x 10 <sup>-4</sup>	7.0 x 10 <sup>-4</sup>	2.0 x 10 <sup>-4</sup>
<b>Acc. Y</b>	2.3 x 10 <sup>-5</sup>	5.5 x 10 <sup>-4</sup>	2.0 x 10 <sup>-3</sup>	-	4.5 x 10 <sup>-4</sup>
<b>Acc. Z</b>	4.0 x 10 <sup>-5</sup>	8.5 x 10 <sup>-4</sup>	9.2 x 10 <sup>-4</sup>	1.2 x 10 <sup>-3</sup>	5.0 x 10 <sup>-5</sup>
<b>Gyr. X</b>	-	9.0 x 10 <sup>-4</sup>	5.0 x 10 <sup>-5</sup>	3.5 x 10 <sup>-4</sup>	-
<b>Gyr. Y</b>	-	1.1 x 10 <sup>-3</sup>	5.5 x 10 <sup>-5</sup>	3.2 x 10 <sup>-4</sup>	-
<b>Gyr. Z</b>	-	9.3 x 10 <sup>-4</sup>	1.0 x 10 <sup>-5</sup>	2.6 x 10 <sup>-4</sup>	-

### 6.2.3.3 Centrale inertielle STMicroelectronics iNEMO V2

Les figures 6.15 et 6.16 présentent les résultats de l'analyse de la variance d'Allan pour la centrale inertielle iNEMO V2. Sur la Figure 6-15, il est possible d'identifier la présence de bruit de quantification, de bruit blanc, d'instabilité du biais ainsi que de processus de marche aléatoire sur chacun des trois axes d'accéléromètre. De plus, il est possible d'identifier une composante de bruit corrélé sur les mesures provenant des accéléromètres X et Z ainsi qu'une composante de bruit de rampe sur les mesures provenant de l'accéléromètre Y.

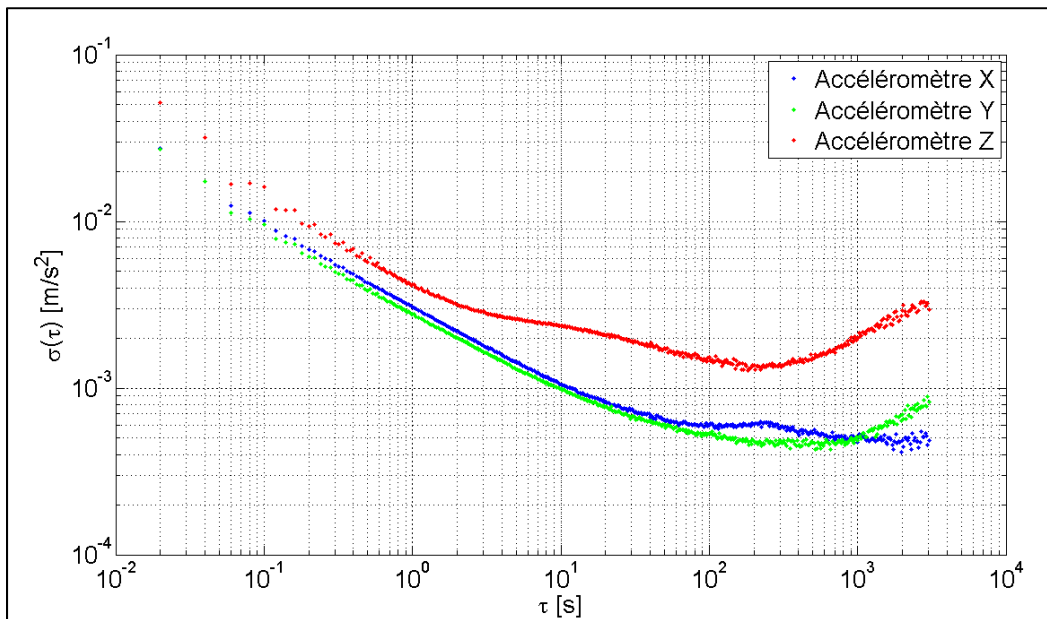


Figure 6-15 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les accéléromètres de l'IMU iNEMO V2

La Figure 6-16 démontre quant à elle la dominance du bruit blanc et de l'instabilité du biais sur les mesures des gyroscopes de cette centrale inertielle. Cette analyse a également permis d'identifier la présence d'un processus de marche aléatoire sur les trois axes de gyroscopes. Finalement, toujours sur cette figure, une composante de bruit corrélé a été identifiée sur les mesures provenant du gyroscope Z ainsi qu'une composante de bruit de rampe sur les mesures provenant du gyroscope X. Le Tableau 6.13 présente les différents coefficients de bruit obtenus suite à l'analyse de la variance d'Allan pour la centrale inertielle iNEMO V2.



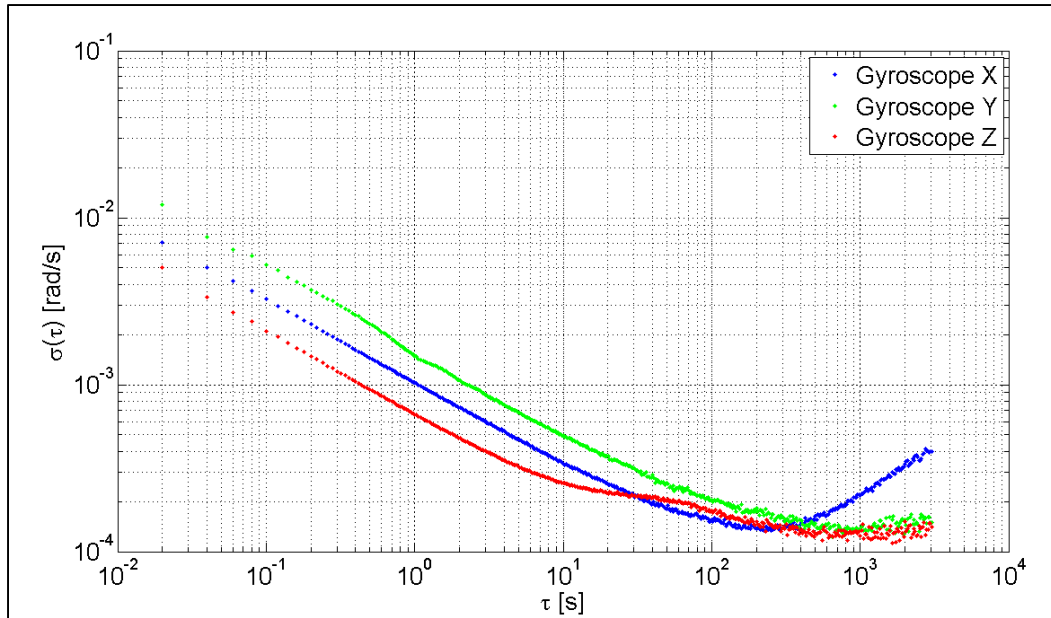


Figure 6-16 Écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat pour les gyroscopes de l'IMU iNEMO V2

Tableau 6.13 Coefficients de bruit de mesure pour l'IMU iNEMO V2

	<b>Bruit de quantification</b> <b>Q</b> [m/s] [rad]	<b>Bruit blanc</b> <b>N</b> [m/s <sup>3/2</sup> ] [rad/s <sup>1/2</sup> ]	<b>Bruit corrélé</b> <b>Qc</b> [m/s <sup>5/2</sup> ] [rad/s <sup>3/2</sup> ]	<b>Instabilité du biais</b> <b>B</b> [m/s <sup>2</sup> ] [rad/s]	<b>Marche aléatoire</b> <b>K</b> [m/s <sup>5/2</sup> ] [rad/s <sup>3/2</sup> ]	<b>Rampe</b> <b>R</b> [m/s <sup>3</sup> ] [rad/s <sup>2</sup> ]
<b>Acc. X</b>	1.5 x 10 <sup>-4</sup>	3.1 x 10 <sup>-3</sup>	1.1 x 10 <sup>-4</sup>	4.5 x 10 <sup>-4</sup>	1.2 x 10 <sup>-5</sup>	-
<b>Acc. Y</b>	1.5 x 10 <sup>-4</sup>	2.8 x 10 <sup>-3</sup>	-	6.5 x 10 <sup>-4</sup>	1.0 x 10 <sup>-5</sup>	3.0 x 10 <sup>-7</sup>
<b>Acc. Z</b>	3.5 x 10 <sup>-4</sup>	4.0 x 10 <sup>-3</sup>	2.0 x 10 <sup>-3</sup>	1.2 x 10 <sup>-3</sup>	1.0 x 10 <sup>-4</sup>	-
<b>Gyr. X</b>	-	1.0 x 10 <sup>-3</sup>	-	1.5 x 10 <sup>-4</sup>	8.0 x 10 <sup>-6</sup>	1.5 x 10 <sup>-7</sup>
<b>Gyr. Y</b>	-	1.5 x 10 <sup>-3</sup>	-	1.9 x 10 <sup>-4</sup>	3.0 x 10 <sup>-6</sup>	-
<b>Gyr. Z</b>	-	6.7 x 10 <sup>-4</sup>	8.5 x 10 <sup>-5</sup>	1.3 x 10 <sup>-4</sup>	3.5 x 10 <sup>-6</sup>	-

#### 6.2.3.4 Analyse de la précision des résultats

Afin que les résultats obtenus suite à l'analyse de la variance d'Allan soient significatifs, il est important de considérer la précision théorique de cette méthode. En effet, tel qu'il a été mentionné à la section 6.2.2, étant donné la taille finie des enregistrements utilisés pour cette analyse, les paramètres de bruit estimés peuvent contenir un certain niveau d'incertitude. Ce niveau d'incertitude peut être calculé à l'aide de l'équation (6.17). La Figure 6-17 présente la courbe d'incertitude théorique obtenue pour les trois centrales inertielles étudiées dans le cadre de ce projet.

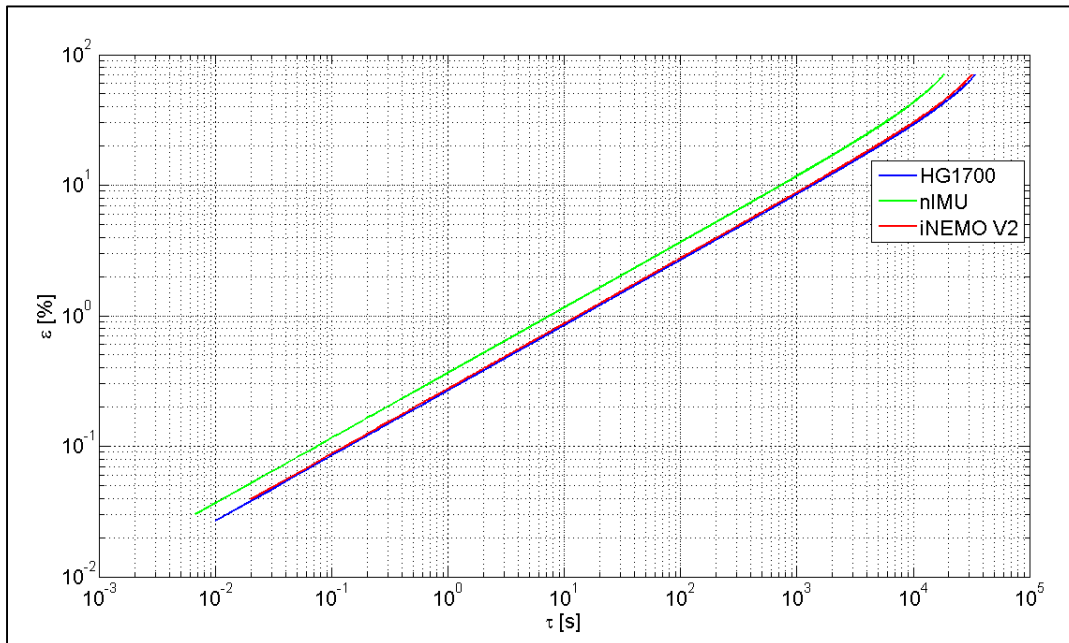


Figure 6-17 Pourcentage d'incertitude de l'analyse de la variance d'Allan en fonction de la période d'agrégat

Selon les résultats présentés à cette figure, il est possible de constater que pour une période d'agrégat inférieure à 1000 secondes, la précision de l'estimé est suffisamment grande (incertitude inférieure à 10%). Par conséquent, les paramètres estimés dans le cadre de ce mémoire à l'aide de cette analyse pourront être utilisés sans problème à l'intérieur d'un modèle d'estimation des erreurs stochastiques.

### **6.2.3.5 Conclusion sur les tests**

En somme, l'analyse de la variance d'Allan s'est avéré être une méthode efficace afin d'identifier et de quantifier les différentes sources d'erreur stochastique contaminant les mesures des trois centrales inertielles utilisées dans le cadre de ce projet. Les paramètres d'erreur obtenus suite à cette analyse seront utilisés afin de développer un modèle d'estimation adapté à chacune des centrales inertielles.

Les résultats de cette analyse confirment que la centrale inertielle de grade tactique HG1700 est beaucoup moins contaminée par les erreurs de nature stochastique que les deux autres IMU de type MEMS de grade commercial (nIMU et iNEMO V2). Ceci s'explique entre autre par les technologies utilisées à l'intérieur de la centrale inertielle (accéléromètres servo et gyrolaser vs technologies MEMS), mais également par les efforts de conception et d'assemblage mis en place par le manufacturier (développement et calibration à l'unité vs production à la chaîne). Selon les résultats obtenus, les mesures provenant de la centrale inertielle HG1700 ne contiendraient pas (sur la plage de fréquence observée) de bruit corrélé et d'instabilité du biais, contrairement aux mesures provenant des centrales inertielles à faible coût. L'absence de ces sources d'erreur constitue un indice clair d'une meilleure stabilité à long terme (basse fréquence) des mesures inertielles.

La présence d'une composante importante d'instabilité du biais sur les mesures provenant des centrales inertielles de type MEMS à faible coût pourrait causer problème lors de l'estimation des erreurs stochastiques. En effet, le modèle d'estimation utilisé dans le cadre de ce mémoire tient uniquement compte de la présence de bruit blanc, de bruit corrélé (processus de Markov) et de processus de marche aléatoire.

## **6.3 Autocorrélation des mesures de capteurs inertiels**

L'autocorrélation est un outil mathématique utilisé en traitement du signal afin d'analyser la corrélation croisée d'un signal avec lui-même. Cet outil permet entre autre de détecter certaines régularités ou certains profils répétés contenus dans un signal. La fonction

d'autocorrélation pour un processus aléatoire stationnaire est définie tel que (Brown et Hwang, 1997) :

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (6.18)$$

Dans le cadre de ce projet, l'autocorrélation est utilisée afin d'étudier le comportement stochastique des capteurs inertiels. Plus précisément, cet outil mathématique est utilisé afin de mieux caractériser le bruit corrélé présent sur les mesures inertielles. Tel que mentionné précédemment, le bruit corrélé est modélisé comme étant un processus de Gauss-Markov de premier ordre. La fonction d'autocorrélation caractérisant ce processus aléatoire est définie tel que (Brown et Hwang, 1997) :

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \quad (6.19)$$

où :

- $R(\ )$  : fonction d'autocorrélation du processus aléatoire
- $\tau$  : intervalle de temps de l'autocorrélation
- $\beta$  : constante de temps du processus de Gauss-Markov

Le processus de Gauss-Markov possède donc une fonction d'autocorrélation de forme exponentielle décroissante (*voir Figure 6-18*), ce qui signifie que les mesures d'un tel processus sont de moins en moins corrélées entre elles lorsque l'écart temporel entre les mesures augmente.

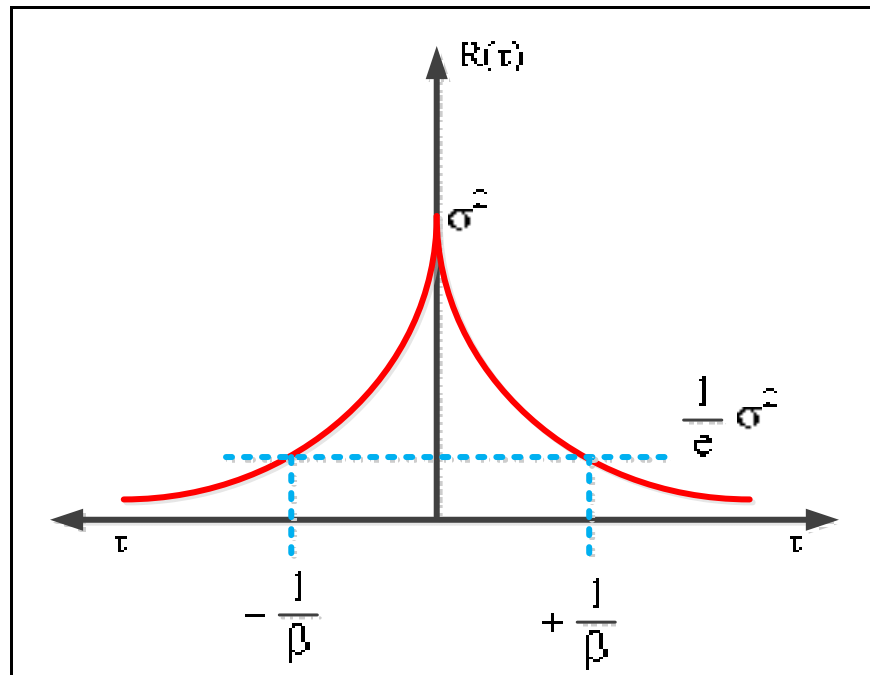


Figure 6-18 Fonction d'autocorrélation d'un processus de Gauss-Markov de premier ordre

### 6.3.1 Pré-traitement des mesures brutes

Lors de l'analyse de la fonction d'autocorrélation, il est important d'isoler le processus stochastique que l'on désire observer afin que la courbe obtenue ait une signification. Selon les résultats obtenus à la section 6.2, le processus de Gauss-Markov présent sur les mesures inertielles survient à basse fréquence. Il est donc important de filtrer les mesures brutes afin d'éliminer les composantes à haute fréquence contenues sur le signal. Pour ce faire, Hou (2004) propose l'utilisation d'une transformée en ondelettes qui permet d'éliminer les composantes de bruit à haute fréquence tout en conservant l'information pertinente du processus de Gauss-Markov.

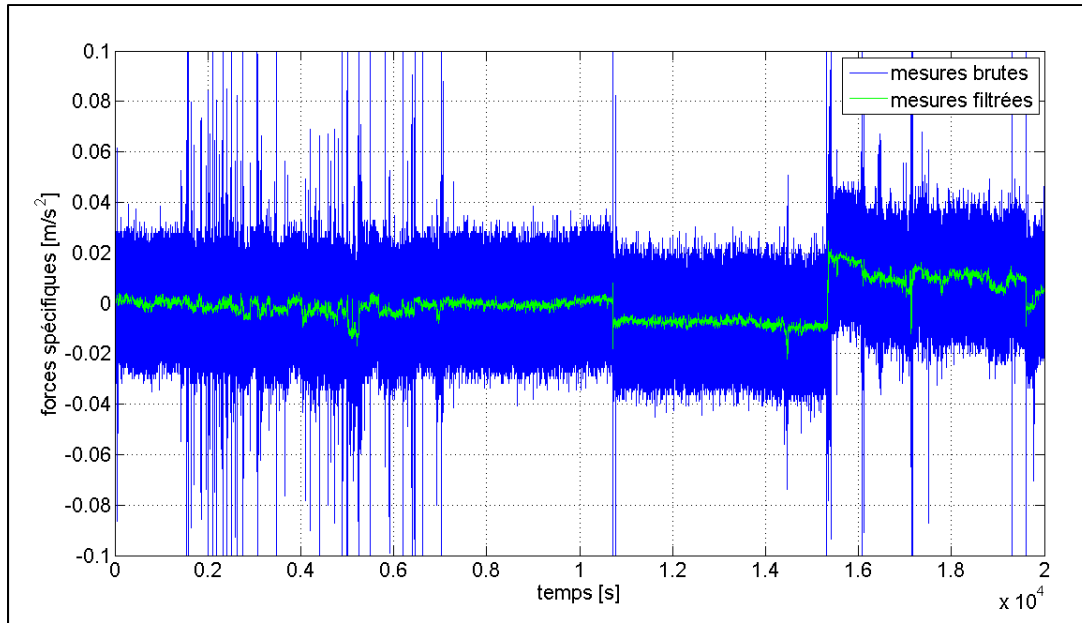


Figure 6-19 Mesures brutes et filtrées d'un accéléromètre à faible coût

La Figure 6-19 présente les mesures brutes provenant d'un accéléromètre à faible coût avant et après l'utilisation d'un filtre par ondelettes. Cette figure illustre clairement la présence de composantes de bruit à haute fréquences sur le signal brute initial, masquant partiellement le processus de Gauss-Markov. Suite à la transformée en ondelettes, les composantes à haute fréquence se trouvent grandement atténuées et le processus de Gauss-Markov devient plus évident. C'est sur ce signal filtré que la fonction d'autocorrélation doit être appliquée afin que la courbe caractéristique obtenue soit suffisamment définie pour pouvoir en extraire les différents paramètres.

### 6.3.2 Identification des paramètres du processus de Gauss-Markov

Tel que défini à l'équation (4.7), le processus de Gauss-Markov de premier ordre est défini par l'expression suivante (Farrell, 2008) :

$$\dot{x} = -\beta x + \eta \quad (6.20)$$

Ainsi, ce processus est entièrement défini par deux paramètres soit la constante de temps  $\beta$  et la variance  $\sigma^2$ . Ces deux paramètres peuvent être obtenus directement sur la courbe caractéristique de la fonction d'autocorrélation du processus de Gauss-Markov tel qu'illustré à la Figure 6-18.

### 6.3.3 Précision de l'analyse de la fonction d'autocorrélation

La définition de la fonction d'autocorrélation présentée à l'équation (6.18) est basée sur l'utilisation d'un nombre infini de mesures. Or, pour une application réelle, l'enregistrement de données doit être réalisé sur une période finie, ce qui a pour effet d'introduire une incertitude sur le calcul de la fonction d'autocorrélation (Brown et Hwang, 1997). Selon Brown et Hwang (1997), la variance de la fonction d'autocorrélation calculée à partir de mesures expérimentales pour un processus de Gauss-Markov est donnée par l'expression suivante :

$$VAR[V(\tau)] \leq \frac{2\sigma^4}{\beta T} \quad (6.21)$$

où :

$T$  : durée totale de l'enregistrement de données  
 $V(\tau)$  : fonction d'autocorrélation calculée à partir des mesures expérimentales

Toujours selon Brown et Hwang (1997), l'incertitude statistique de l'estimé est défini comme le ratio de l'écart type de la variance obtenue de manière expérimentale par rapport à la variance réelle du processus. Ainsi, il est possible d'exprimer le pourcentage d'incertitude de l'estimé en fonction de la durée d'enregistrement et de la constante de temps du processus de Gauss-Markov observé tel que :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\beta T}} \quad (6.22)$$

où :

$\varepsilon$  : incertitude statistique de l'estimé, exprimé en pourcentage

Ainsi, plus le ratio entre la durée totale d'enregistrement et le temps de corrélation est élevé, plus l'estimé sera précis.

### 6.3.4 Tests et analyse des résultats

Dans le cadre de ce mémoire, la fonction d'autocorrélation est utilisée afin de caractériser le bruit corrélé présent sur les mesures provenant de chacune des trois centrales inertielles utilisées pour ce projet. Les mesures brutes utilisées pour cette analyse sont les mêmes que celles utilisées pour l'analyse de la variance d'Allan à la section 6.2.3. Cependant, étant donné la charge élevée de calcul nécessaire afin de réaliser la fonction d'autocorrélation sous Matlab, le nombre de données utilisées est restreint à 4 million. Le Tableau 6.14 présente les paramètres d'enregistrement utilisés pour chacune des centrales inertielles.

Tableau 6.14 Paramètres d'enregistrement pour l'analyse de la fonction d'autocorrélation

	<b>Fréquence d'échantillonnage</b> <b>[Hz]</b>	<b>Durée</b> <b>[h]</b>
<b>Honeywell HG1700</b>	100	11.1
<b>MEMSense nIMU</b>	150	7.4
<b>STMicroelectronics iNEMO V2</b>	50	18

Un pré-traitement visant à éliminer les composantes à hautes fréquences a été effectué sur les mesures brutes avant de procéder au calcul de la fonction d'autocorrélation. Une transformée en ondelettes de la famille d'ondelettes orthogonales Daubechies-2 a été utilisée afin de réaliser cette étape et le niveau de décomposition de la transformée a été choisi indépendamment pour chaque enregistrement de données. Les paramètres du processus de Gauss-Markov ont été identifiés directement à partir des courbes obtenues.



### 6.3.4.1 Centrale inertielle Honeywell HG1700

La Figure 6-20 présente les fonctions d'autocorrélation expérimentales obtenues pour chacun des trois axes d'accéléromètres de la centrale inertielle HG1700. Sur cette figure, il est clairement possible d'identifier la courbe d'autocorrélation caractéristique d'un processus de Gauss-Markov ayant un temps de corrélation élevé. De plus, sur chacune des courbes, il est également possible de constater la présence d'une pointe prononcée aux alentours de  $\tau = 0$ . Cette pointe émerge directement de la présence de bruit blanc sur les mesures d'accéléromètres. En effet, le bruit blanc est caractérisé par une fonction d'autocorrélation ayant la forme de la fonction dirac. Ainsi, même avec l'utilisation de la transformée en ondelettes, une composante résiduelle de bruit blanc est toujours présente sur les mesures.

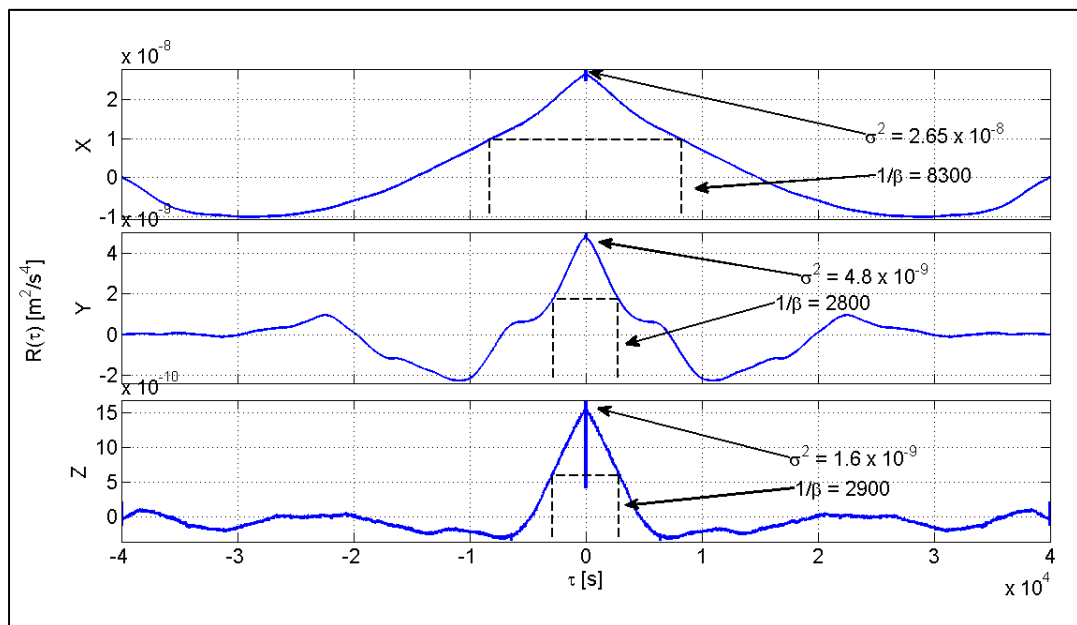


Figure 6-20 Autocorrélation des mesures d'accéléromètres de l'IMU HG1700

Finalement, les paramètres du processus de Gauss-Markov mesurés pour les accéléromètres Y et Z sont du même ordre de grandeur, ce qui n'est toutefois pas le cas pour l'accéléromètre X dont le temps de corrélation est de beaucoup supérieur.

La Figure 6-21 présente quant à elle les fonctions d'autocorrélation expérimentales obtenues pour chacun des trois axes de gyroscopes de cette même centrale inertielle. Cette figure illustre clairement la présence d'un processus de Gauss-Markov sur les mesures enregistrées dont le temps de corrélation est beaucoup plus court que celui obtenu pour les accéléromètres. De plus, la variance de ce processus aléatoire est très faible (de l'ordre de  $10^{-11}$ ) ce qui pourrait expliquer pourquoi il n'était pas visible lors de l'analyse de la variance d'Allan. Finalement, contrairement aux accéléromètres, les paramètres de la fonction d'autocorrélation obtenus pour les gyroscopes sont du même ordre de grandeur.

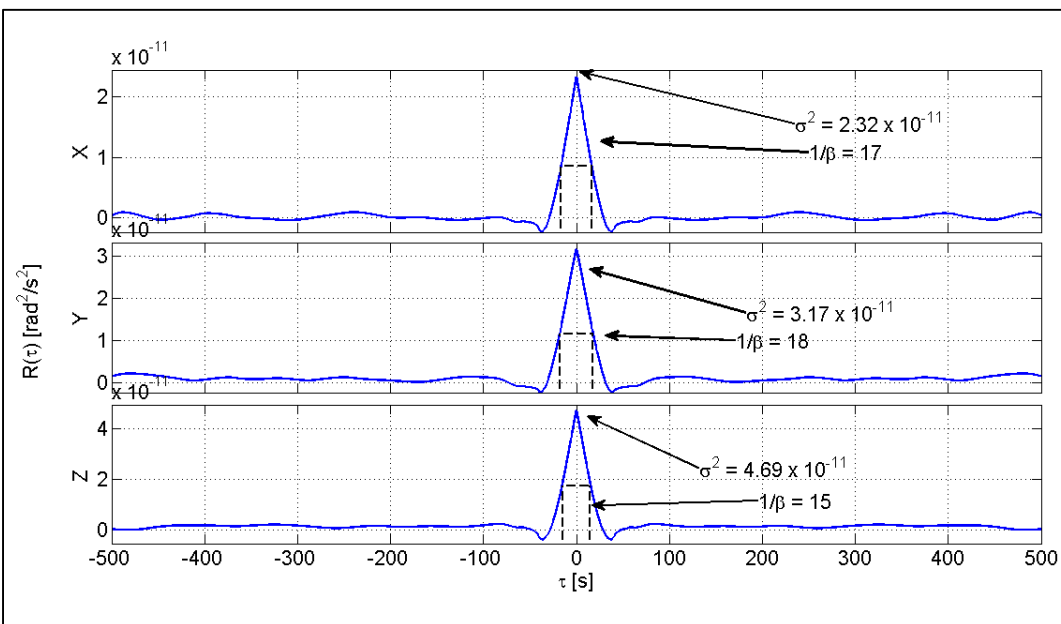


Figure 6-21 Autocorrélation des mesures de gyroscopes de l'IMU HG1700

Le Tableau 6.15 présente la valeur des paramètres des processus de Gauss-Markov obtenus suite à l'analyse de la fonction d'autocorrélation expérimentale de la centrale inertielle HG1700.

Tableau 6.15 Paramètres du processus de Gauss-Markov pour l'IMU HG1700

	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> /s <sup>4</sup> ][rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$\beta$ [s <sup>-1</sup> ]
<b>Accéléromètre X</b>	$2.65 \times 10^{-8}$	1/8300
<b>Accéléromètre Y</b>	$4.80 \times 10^{-9}$	1/2800
<b>Accéléromètre Z</b>	$1.60 \times 10^{-9}$	1/2900
<b>Gyroscope X</b>	$2.32 \times 10^{-11}$	1/17
<b>Gyroscope Y</b>	$3.17 \times 10^{-11}$	1/18
<b>Gyroscope Z</b>	$4.69 \times 10^{-11}$	1/15

#### 6.3.4.2 Centrale inertielle MEMSense nIMU

Les fonctions d'autocorrélation obtenues de manière expérimentale pour chacun des trois axes d'accéléromètres de la centrale inertielle nIMU sont présentées à la Figure 6-22. Tout comme pour la centrale inertielle HG1700, cette figure illustre clairement la présence d'un processus de Gauss-Markov ayant un temps de corrélation élevé. Ce temps de corrélation semble être similaire d'un axe à l'autre, ce qui n'est toutefois pas le cas pour la variance qui varie grandement.

Les résultats obtenus pour les gyroscopes de cette même centrale inertielle sont quant à eux présentés à la Figure 6-23. Sur cette figure, il est possible de constater la présence d'un processus de Gauss-Markov sur les mesures provenant des trois axes de gyroscopes. Les paramètres mesurés pour chacun des gyroscopes semblent être du même ordre de grandeur l'exception du temps de corrélation du gyroscope Y qui est beaucoup plus court que pour les deux autres axes.

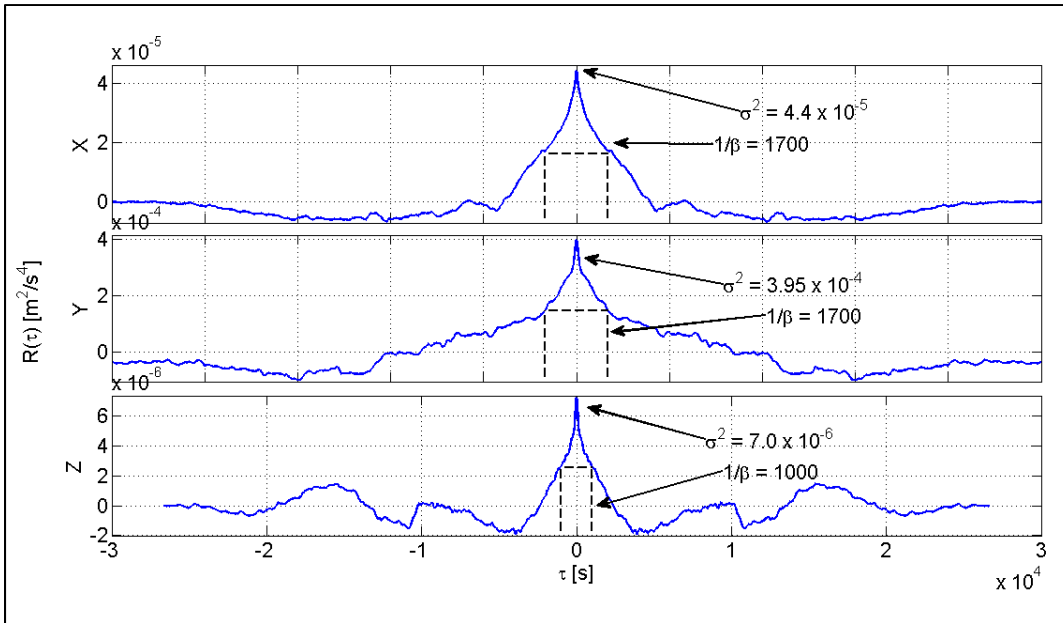


Figure 6-22 Autocorrélation des mesures d'accéléromètres de l'IMU nIMU

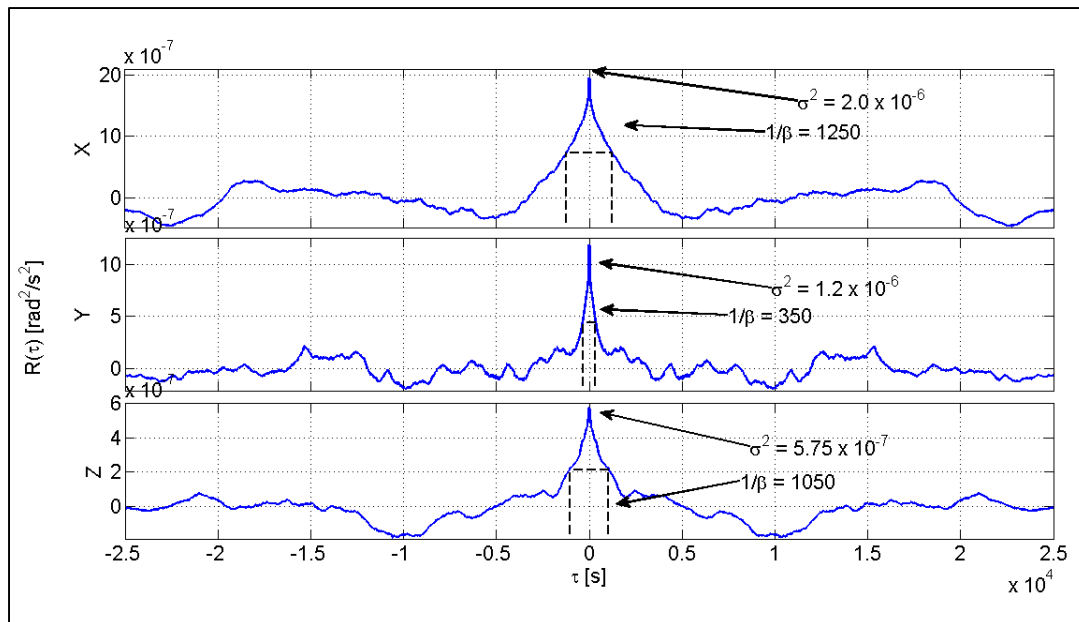


Figure 6-23 Autocorrélation des mesures de gyroscopes de l'IMU nIMU

Le Tableau 6.16 présente la valeur des paramètres des processus de Gauss-Markov obtenus suite à l'analyse de la fonction d'autocorrélation expérimentale de la centrale inertielle nIMU.

Tableau 6.16 Paramètres du processus de Gauss-Markov pour l'IMU nIMU

	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> /s <sup>4</sup> ][rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$\beta$ [s <sup>-1</sup> ]
<b>Accéléromètre X</b>	4.40 x 10 <sup>-5</sup>	1/1700
<b>Accéléromètre Y</b>	3.95 x 10 <sup>-4</sup>	1/1700
<b>Accéléromètre Z</b>	7.00 x 10 <sup>-6</sup>	1/1000
<b>Gyroscope X</b>	2.00 x 10 <sup>-6</sup>	1/1250
<b>Gyroscope Y</b>	1.20 x 10 <sup>-6</sup>	1/350
<b>Gyroscope Z</b>	5.75 x 10 <sup>-7</sup>	1/1050

#### 6.3.4.3 Centrale inertielle STMicroelectronics iNEMO V2

La Figure 6-24 présente les fonctions d'autocorrélation expérimentales obtenues à partir des mesures d'accéléromètres de la centrale inertielle iNEMO V2. Tout comme pour les deux autres centrales inertielles, cette figure illustre clairement la présence de bruit corrélé sur les mesures enregistrées. Toutefois, les résultats obtenus démontrent un temps de corrélation plus élevé que pour les deux autres centrales inertielles étudiées. Finalement, il est possible de constater que les paramètres obtenus sont similaires pour chacun des accéléromètres à l'exception du temps de corrélation de l'accéléromètre X qui est beaucoup plus long que pour les deux autres axes.

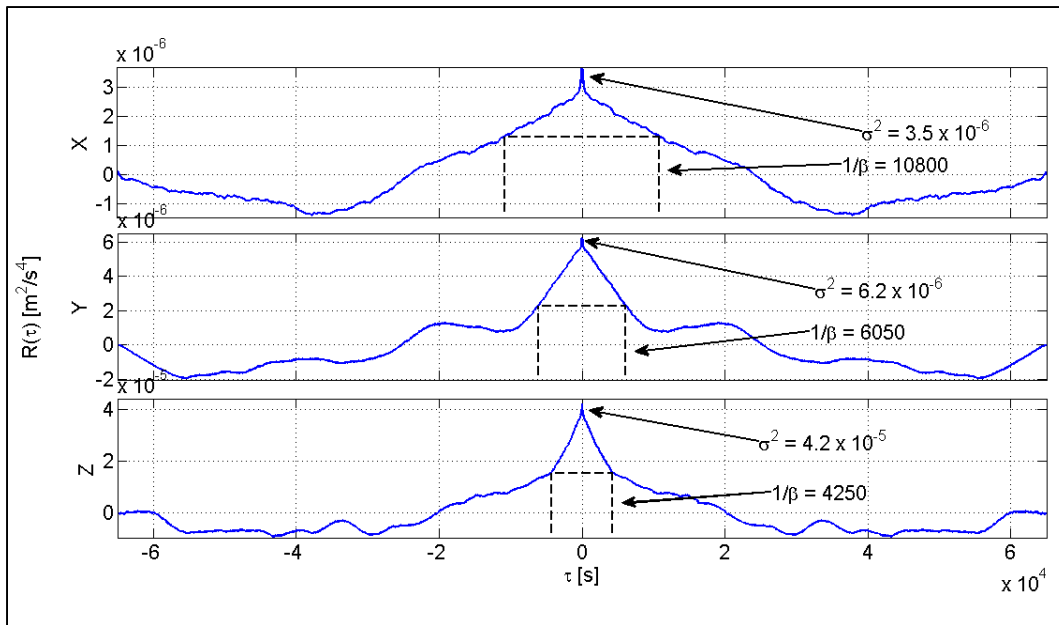


Figure 6-24 Autocorrélation des mesures d'accéléromètres de l'IMU iNEMO V2

La Figure 6-25 présente quant à elle les fonctions d'autocorrélation expérimentales obtenues à partir des mesures de gyroscopes de cette centrale inertielle. Cette figure illustre clairement la présence d'un processus de Gauss-Markov sur les mesures provenant des trois axes de gyroscopes. De plus, il est également possible de constater une similitude des paramètres obtenus pour chacun des axes de gyroscopes à l'exception du temps de corrélation du gyroscope Y qui est plus long que pour les deux autres axes.

Le Tableau 6.17 présente la valeur des paramètres des processus de Gauss-Markov obtenus suite à l'analyse de la fonction d'autocorrélation expérimentale de la centrale inertielle nIMU.

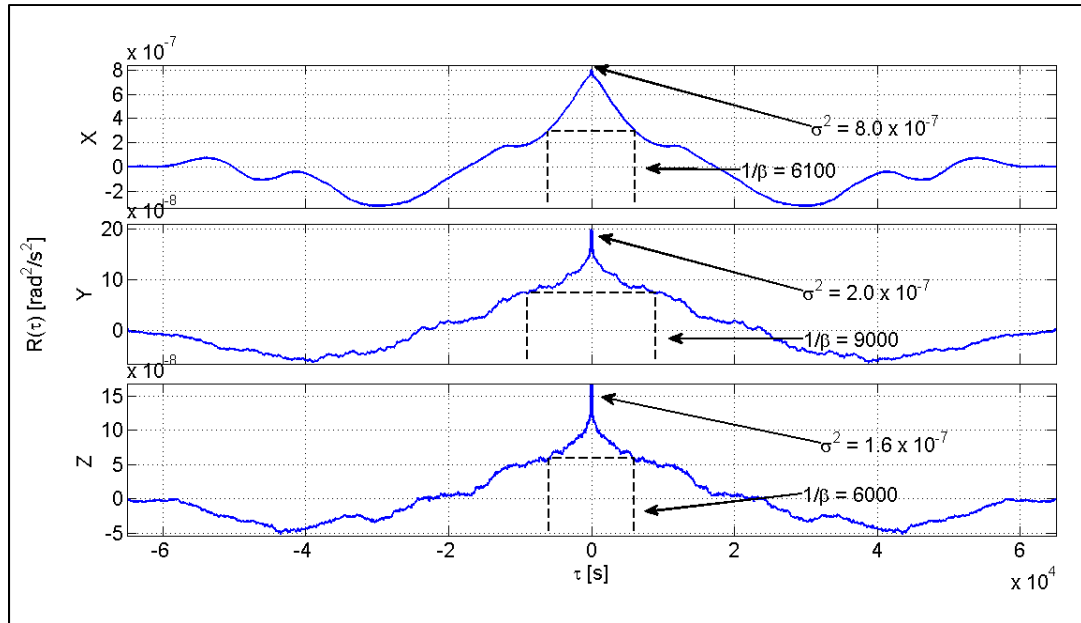


Figure 6-25 Autocorrélation des mesures de gyroscopes de l'IMU iNEMO V2

Tableau 6.17 Paramètres du processus de Gauss-Markov pour l'IMU iNEMO V2

	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> /s <sup>4</sup> ][rad <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	$\beta$ [s <sup>-1</sup> ]
<b>Accéléromètre X</b>	$3.50 \times 10^{-6}$	1/10800
<b>Accéléromètre Y</b>	$6.20 \times 10^{-6}$	1/6050
<b>Accéléromètre Z</b>	$4.20 \times 10^{-5}$	1/4250
<b>Gyroscope X</b>	$8.00 \times 10^{-7}$	1/6100
<b>Gyroscope Y</b>	$2.00 \times 10^{-7}$	1/9000
<b>Gyroscope Z</b>	$1.60 \times 10^{-7}$	1/6000

#### 6.3.4.4 Analyse de la précision des résultats

Tel qu'il a été mentionné à la section 6.3.3, il est important de considérer l'incertitude statistique des résultats obtenus suite à l'analyse de la fonction d'autocorrélation expérimentale. En effet, étant donné la taille finie des enregistrements utilisés pour cette

analyse, les paramètres des processus de Gauss-Markov obtenus peuvent contenir une erreur importante. Le Tableau 6.18 présente l'incertitude statistique calculée à l'aide de l'équation (6.21) pour chacun des capteurs analysés.

Tableau 6.18 Incertitude statistique de l'analyse de la fonction d'autocorrélation

	<b>Acc. X</b>	<b>Acc. Y</b>	<b>Acc. Z</b>	<b>Gyr. X</b>	<b>Gyr. Y</b>	<b>Gyr. Z</b>
<b>HG1700</b>	64.42%	37.42%	38.08%	2.92%	3.00%	2.74%
<b>nIMU</b>	35.71%	35.71%	27.39%	30.62%	16.20%	28.06%
<b>iNEMO V2</b>	57.66%	43.16%	36.17%	43.16%	52.64%	42.98%

Selon les résultats présentés à ce tableau, le niveau d'incertitude statistique de la majorité des paramètres estimés est très important (entre 16% et 64 %). Seule l'estimation des paramètres des gyroscopes de la centrale inertielle HG1700 sont suffisamment précis avec une incertitude de seulement 3%. Par conséquent, les paramètres estimés doivent être utilisés avec précaution à l'intérieur du modèle d'estimation puisque l'utilisation de paramètres erronés pourrait nuire à l'estimation des erreurs stochastiques et même introduire des erreurs supplémentaires à l'intérieur du système.

Un outil de simulation a été mis en place sous Matlab afin d'illustrer l'impact de l'incertitude statistique sur l'analyse de la fonction d'autocorrélation expérimentale. Cet outil a été utilisé afin de générer de manière aléatoire 5000 réalisations d'un processus de Gauss-Markov dont les paramètres  $\sigma^2$  et  $\beta$  ainsi que la durée totale de l'enregistrement et la fréquence d'échantillonnage sont identiques aux mesures des centrales inertielles étudiées dans le cadre de ce projet. La Figure 6-26 présente 5 des 5000 signaux générés à partir des paramètres de l'accéléromètre X de la centrale inertielle HG1700.



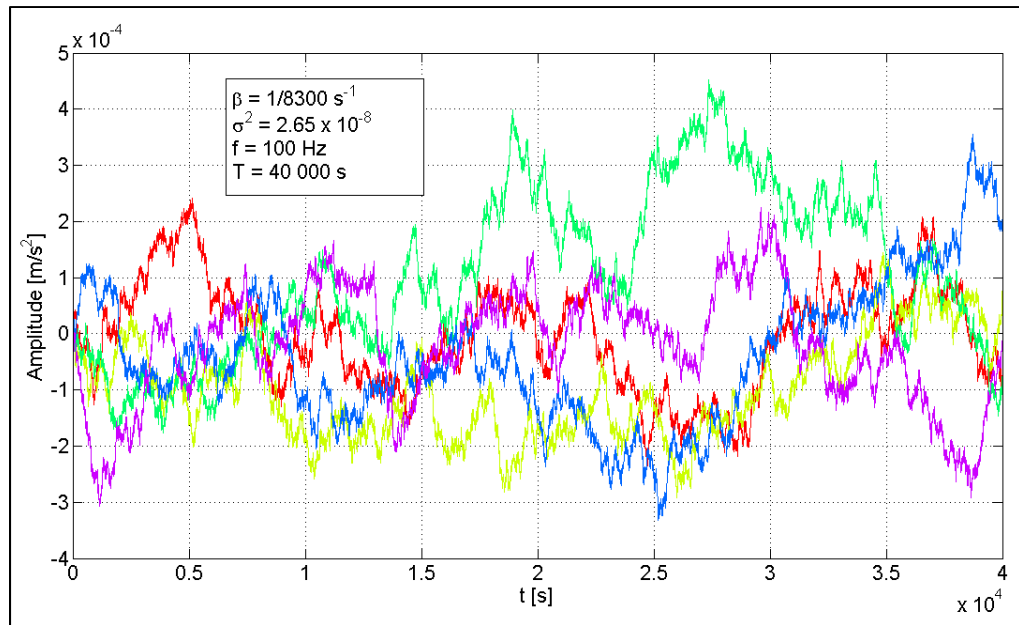


Figure 6-26 Simulation d'un processus de Gauss-Markov (5 premiers essais)

Une fonction d'autocorrélation expérimentale a ensuite été calculée pour chacun des 5000 signaux générés et les résultats sont présentés à la Figure 6-27. Cette figure met clairement en évidence l'incertitude sur l'estimation des paramètres du processus de Gauss-Markov obtenus à partir de la fonction d'autocorrélation expérimentale. En effet, pour chacune des réalisations du processus de Gauss-Markov simulé, la fonction d'autocorrélation expérimentale est très différente. Ceci remet donc en question la pertinence des résultats obtenus à l'aide de cette analyse.

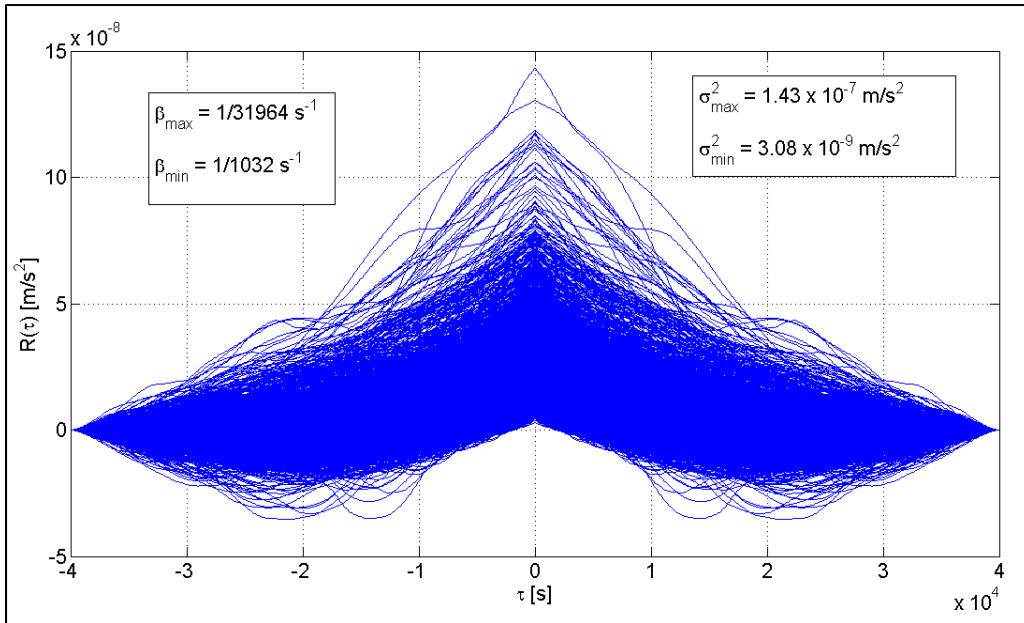


Figure 6-27 Autocorrélation des processus de Gauss-Markov simulés (5000 essais)

### 6.3.4.5 Conclusion sur les tests

En somme, l'analyse de la fonction d'autocorrélation s'est avéré un outil pratique afin d'estimer les paramètres du processus de Gauss-Markov présent sur les mesures des trois centrales inertielles utilisées dans le cadre de ce projet. Or, seulement les paramètres obtenus pour les gyroscopes de la centrale inertielle HG1700 sont suffisamment précis pour être utilisés directement à l'intérieur d'un modèle d'estimation des erreurs stochastique. Pour les autres capteurs, un niveau élevé d'incertitude était présent sur les résultats de l'analyse et les résultats ont seulement permis d'obtenir un ordre de grandeur des paramètres du modèle. Une analyse plus en profondeur serait nécessaire afin d'estimer avec plus de précision la valeur des paramètres. Pour ce faire, deux approches différentes pourraient être mise en place soit :

- 1) réaliser l'analyse sur une plus grande période;
- 2) réaliser l'analyse à plusieurs reprises et moyenner les résultats.

La première approche pourrait sembler adéquate, cependant, il est important de considérer que plus la taille des données à analyser est élevée, plus la charge de calcul nécessaire

augmente. Ainsi, en considérant les limites logicielles actuelles, cette approche n'est pas envisageable. Dans un contexte réel, la seconde approche est donc plus adéquate et c'est cette dernière qui est recommandée par l'auteur de ce mémoire.

## 6.4 Alignement initial d'une plateforme de navigation inertielle haut de gamme

L'alignement initial est une procédure essentielle et critique au bon fonctionnement de tout système de navigation inertielle. Cette procédure consiste à déterminer l'attitude initiale d'un mobile par l'initialisation de la matrice de rotation  $\mathbf{C}_B^L$  ou du quaternion unitaire  $q_B^L$ . De manière générale, l'alignement initial peut être décomposé en deux étapes soit l'alignement grossier permettant d'obtenir un estimé grossier de l'attitude et l'alignement fin permettant de peaufiner cet estimé.

### 6.4.1 Alignement grossier

L'alignement grossier est une procédure utilisée afin de déterminer rapidement l'alignement vertical (inclinaison) initial d'une centrale inertielle par rapport au repère local. L'alignement grossier est basé sur le principe que lorsque la centrale inertielle est dans un état quasi-stationnaire, le vecteur de forces spécifiques mesuré par les accéléromètres devrait être égal au vecteur de gravité. En négligeant les composantes horizontales du vecteur de gravité et en émettant l'hypothèse que ce dernier agit exclusivement selon l'axe Z du repère local, l'expression suivante est valide (Savage, 2000) :

$$\underline{u}_{ZL}^B = -\frac{\underline{a}_{SF}^B}{a_{SF}} \quad (6.23)$$

où :

$\underline{u}_{ZL}^B$  : vecteur unitaire orienté selon l'axe Z du repère local, exprimé selon le repère du mobile

$\underline{a}_{SF}^B$  : vecteur de forces spécifiques mesurées par les accéléromètres

$a_{SF}$  : norme du vecteur  $\underline{a}_{SF}^B$

Ce vecteur unitaire est ensuite utilisé afin d'initialiser la troisième rangée de la matrice  $\mathbf{C}_B^L$ . En effet, cette matrice peut être exprimée en fonction des vecteurs unitaires orientés selon chacun des axes du repère local tel que :

$$\mathbf{C}_B^L = [\underline{u}_{XL}^B \quad \underline{u}_{YL}^B \quad \underline{u}_{ZL}^B]^T \quad (6.24)$$

où :

$\underline{u}_{XL}^B, \underline{u}_{YL}^B$  : vecteurs unitaire orienté respectivement selon l'axe X et Y du repère local, exprimés selon le repère du mobile

Les deux autres rangées de la matrice  $\mathbf{C}_B^L$  sont en quelque sorte initialisées de manière arbitraire en respectant les propriétés d'une matrice des cosinus de direction (matrice unitaire et orthogonale). Selon Savage (2000), ces composantes peuvent être calculées à l'aide des équations suivantes :

$$c_{21} = 0 \quad (6.25)$$

$$c_{22} = c_{33} / \sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2} \quad (6.26)$$

$$c_{23} = -c_{32} / \sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2} \quad (6.27)$$

$$c_{11} = c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32} \quad (6.28)$$

$$c_{12} = c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33} \quad (6.29)$$

$$c_{13} = c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31} \quad (6.30)$$

où :

$c_{ij}$  : élément de la rangée  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\mathbf{C}_B^L$

## 6.4.2 Alignement fin

La procédure d'alignement grossier présentée à la section précédente permet uniquement d'obtenir un estimé rapide de l'alignement vertical de la centrale inertielle et ne procure

aucune information pertinente sur son alignement horizontal. C'est pour cette raison qu'une procédure d'alignement fin doit être réalisée suite à l'alignement grossier afin de déterminer avec précision l'alignement vertical et horizontal de la centrale inertielle. Cette procédure est généralement basée sur l'utilisation combinée des mesures de forces spécifiques et de vitesses angulaires provenant respectivement des accéléromètres et des gyroscopes. Il existe plusieurs approches afin de réaliser l'alignement fin d'une centrale inertielle dont la méthode d'alignement quasi-stationnaire présentée par Savage (2000). Cette méthode itérative est basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman afin d'estimer et de corriger les erreurs résiduelles d'alignement vertical de la matrice  $\mathbf{C}_B^N$  tout en estimant les composantes horizontales du vecteur de rotation de la Terre. Selon Savage (2000), l'alignement fin est basé sur le système d'équations suivant :

$$\dot{\mathbf{C}}_B^N = \mathbf{C}_B^N(\underline{\omega}_{IB}^B \times) - (\underline{\omega}_{IE}^N \times)\mathbf{C}_B^N \quad (6.31)$$

$$\underline{\omega}_{IE}^N = \underline{\omega}_{IE_H}^N + \underline{u}_{ZN}^N \omega_e \sin l \quad (6.32)$$

$$\underline{\dot{v}}_H^N = (\mathbf{C}_B^N \underline{a}_{SF}^B)_H \quad (6.33)$$

$$\Delta \underline{\dot{R}}_H^N = \underline{v}_H^N \quad (6.34)$$

où :

- $\mathbf{C}_B^N$  : matrice de rotation caractérisant l'orientation du repère du mobile par rapport au repère de navigation
- $\underline{\omega}_{IB}^B$  : vecteur de vitesses angulaires mesuré par les gyroscopes
- $\underline{\omega}_{IE}^N$  : vecteur de vitesse de rotation de la Terre
- $H$  : indice qui désignent les composantes horizontales du vecteur associé
- $\omega_e$  : vitesse de rotation de la Terre ( $\omega_e = 7.292115 \text{ rad/s}$ )
- $l$  : latitude géodésique
- $\underline{v}^N$  : vecteur de vitesse du mobile par rapport à la Terre
- $\Delta \underline{R}^N$  : vecteur de dérive de position

Ces équations appelées équations d'avant plan définissent le vecteur de rotation de la Terre ainsi que la propagation de l'attitude, de la vitesse et de la position du mobile. Les équations d'erreur associées à ces dernières sont les suivantes (Savage, 2000) :

$$\delta \underline{\dot{\omega}}_{IEH}^N = 0 \quad (6.35)$$

$$\underline{\dot{\gamma}}_H^N = \delta \underline{\omega}_{IEH}^N - \mathbf{I}_H \mathbf{C}_B^N \delta \omega_{Rand} \quad (6.36)$$

$$\delta \underline{\dot{v}}_H^N = \mathbf{I}_H g (\underline{u}_{ZN}^N \times) \underline{\gamma}_H^N - \mathbf{I}_H g (\underline{u}_{ZN}^N \times) \mathbf{C}_B^N \delta \alpha_{Quant} + \mathbf{I}_H \mathbf{C}_B^N \delta \underline{a}_{Rand} \quad (6.37)$$

$$\delta \Delta \underline{\dot{R}}_H^N = \delta \underline{v}_H^N + \mathbf{I}_H \mathbf{C}_B^N \delta v_{Quant} \quad (6.38)$$

où :

$\underline{\gamma}_H^N$  : vecteur d'erreur angulaire associé à la matrice  $\mathbf{C}_B^N$

$g$  : norme du vecteur de gravité ( $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$\delta \underline{\omega}_{Rand}$  : vecteur de bruit blanc aléatoire des gyroscopes

$\delta \underline{\alpha}_{Quant}$  : vecteur de bruit de quantification des accéléromètres

$\delta \underline{a}_{Rand}$  : vecteur de bruit blanc aléatoire des accéléromètres

$\delta \underline{v}_{Quant}$  : vecteur de bruit de quantification des gyroscopes

En se basant sur la structure du filtre de Kalman étendu présentée à la section 5.2.2, ces équations peuvent être réécrites tel que :

$$\delta \underline{\dot{x}} = \mathbf{F} \cdot \delta \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{\omega} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \underline{\dot{\omega}}_{IEH}^N \\ \underline{\dot{\gamma}}_H^N \\ \delta \underline{\dot{v}}_H^N \\ \delta \Delta \underline{\dot{R}}_H^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_H g (\underline{u}_{ZN}^N \times) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{\omega}_{IEH}^N \\ \underline{\gamma}_H^N \\ \delta \underline{v}_H^N \\ \Delta \underline{R}_H^N \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{I}_H \mathbf{C}_B^N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_H g (\underline{u}_{ZN}^N \times) \mathbf{C}_B^N & \mathbf{I}_H \mathbf{C}_B^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_H \mathbf{C}_B^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{\omega}_{Rand} \\ \delta \underline{\alpha}_{Quant} \\ \delta \underline{a}_{Rand} \\ \delta \underline{v}_{Quant} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.40)$$

En considérant que la centrale inertielle est maintenue selon un état quasi-stationnaire tout au long de la procédure d'alignement fin, le vecteur de déplacement du mobile calculé à partir des équations d'avant plan devrait toujours être nul. Par conséquent, toute dérive du vecteur de position est systématiquement causée par une erreur d'alignement. Le vecteur de dérive de la position est donc utilisé comme observation à l'intérieur du filtre de Kalman et le modèle de mesure peut être défini tel que :

$$\delta \underline{z} = \mathbf{H} \cdot \delta \underline{x} + \underline{v} \quad (6.41)$$

$$[\delta \underline{R}_H^N] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \delta \underline{\omega}_{JE_H}^N \\ \underline{\gamma}_H^N \\ \delta \underline{v}_H^N \\ \Delta \underline{R}_H^N \end{bmatrix} + [\Delta \underline{R}_{Vib}^N] \quad (6.42)$$

où :

$\Delta \underline{R}_{Vib}^N$  : perturbations aléatoires de la position horizontale de la centrale inertielle causées par la vibration du véhicule

À chaque itération du filtre de Kalman, le vecteur d'erreur d'état est utilisé afin de corriger les équations d'avant plan de sorte que :

$$\underline{\omega}_{JE_H}^N(+) = \underline{\omega}_{JE_H}^N(-) + \delta \underline{\omega}_{JE_H}^N \quad (6.43)$$

$$\mathbf{C}_B^N(+) = \mathbf{C}_B^N(-) + \left[ \frac{-\sin \gamma_H}{\gamma_H} (\underline{\gamma}_H^N \times) + \frac{1 - \cos \gamma_H}{\gamma_H^2} (\underline{\gamma}_H^N \times)^2 \right] \mathbf{C}_B^N(-) \quad (6.44)$$

$$\underline{v}_H^N(+) = \underline{v}_H^N(-) + \delta \underline{v}_H^N \quad (6.45)$$

$$\Delta \underline{R}_H^N(+) = \Delta \underline{R}_H^N(-) + \delta \Delta \underline{R}_H^N \quad (6.46)$$

où :

(+) : désigne la valeur après la correction

(-) : désigne la valeur avant la correction

À la suite de la procédure d'alignement fin, des erreurs résiduelles sont toujours présentes sur l'estimé de la matrice  $\mathbf{C}_B^N$  et du vecteur  $\underline{\omega}_{JE_H}^N$ . Ces erreurs proviennent de la négligence des

composantes horizontales du vecteur de gravité utilisé pour les équations d'avant plan. Ces composantes sont négligées puisqu'il est initialement impossible de les calculer sans la connaissance préalable de l'alignement horizontal de la centrale inertielle. Étant donné que cet alignement est connu suite à la procédure d'alignement fin (information contenue à l'intérieur de l'estimé du vecteur de vitesse de rotation de la Terre), il est alors possible de corriger ces erreurs à l'aide des équations suivantes (Savage, 2000) :

$$\mathbf{C}_B^{L2} = \mathbf{C}_N^L \mathbf{C}_{N1}^{N2} \mathbf{C}_L^N \mathbf{C}_B^{L1} \quad (6.47)$$

$$\underline{\omega}_{IEH}^{N2} = [\mathbf{C}_{N1}^{N2} (\underline{\omega}_{IEH}^{N1} + \underline{u}_{ZN}^N \omega_{IEZ_{N1}})]_H \quad (6.48)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{C}_{N1}^{N2} = I - (\underline{E} \times) + \frac{1}{1+D} (\underline{E} \times)^2 \quad (6.49)$$

$$D = -\frac{1}{g_p} \underline{g}_p^N \cdot \underline{u}_{ZN}^N \quad (6.50)$$

$$\underline{E} = -\frac{1}{g_p} \underline{g}_p^N \times \underline{u}_{ZN}^N \quad (6.51)$$

où :

$L1, N1$  : l'annotation 1 désigne un repère avant la correction des erreurs résiduelles

$L2, N2$  : l'annotation 2 désigne un repère après la correction des erreurs résiduelles

Finalement, l'information concernant l'alignement horizontal de la centrale inertielle qui est contenue à l'intérieur de l'estimé du vecteur de rotation de la Terre suite à la procédure d'alignement fin peut être appliquée à la matrice  $\mathbf{C}_B^L$  à l'aide de l'équation suivante (Savage, 2000) :

$$\mathbf{C}_B^{L3} = \mathbf{C}_N^L \mathbf{C}_{N2}^{N3} \mathbf{C}_L^N \mathbf{C}_B^{L2} \quad (6.52)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{C}_{N2}^{N3} = [\underline{u}_{X_{N3}}^{N2} \quad \underline{u}_{Y_{N3}}^{N2} \quad \underline{u}_{Z_{N3}}^{N2}]^T \quad (6.53)$$



$$\underline{u}_{ZN3}^{N2} = \underline{u}_{ZN}^N \quad (6.54)$$

$$\underline{u}_{YN3}^{N2} = \frac{1}{\omega_{IEH}} \underline{\omega}_{IEH}^N \quad (6.55)$$

$$\underline{u}_{XN3}^{N2} = \underline{u}_{YN3}^{N2} \times \underline{u}_{ZN3}^{N2} \quad (6.56)$$

où :

$L3, N3$  : l'annotation 3 désigne un repère après l'ajout des composantes horizontales

### 6.4.3 Tests et analyse des résultats

De manière à valider le fonctionnement de l'algorithme d'alignement initial présenté précédemment, un enregistrement stationnaire de 15 minutes provenant de la centrale inertielle HG1700 a été réalisé. En plus des mesures inertielles brutes, la solution de navigation calculée par le système SPAN de la compagnie Novatel a également été enregistrée comme référence afin d'y comparer les résultats. Le Tableau 6.19 présente les résultats obtenus suite au processus d'alignement grossier. Il est donc possible de constater qu'à la suite de cette procédure, seuls les angles de roulis et de tangage sont initialisés. Tel que mentionné précédemment, ceci provient du fait que cette méthode utilise uniquement le vecteur de forces spécifiques et que ce dernier ne contient aucune information utile sur l'alignement horizontal de la plateforme. Par conséquent, l'angle de lacet est volontairement initialisé à 0°.

Tableau 6.19 Résultats de l'alignement grossier

	Angle [°]
<b>Roulis</b>	-0.0176
<b>Tangage</b>	-0.2675
<b>Lacet</b>	0.0

La Figure 6-28 présente quant à elle les résultats obtenus suite à la procédure itérative d'alignement fin. Sur cette figure, il est d'abord possible de constater que les trois angles

d'Euler calculés par cette procédure sont tous très près des valeurs fournies par la solution commerciale provenant du système SPAN ce qui confirme la validité de l'algorithme développé. De plus, il est possible de constater une convergence presque instantanée des angles de roulis et de tangage, ce qui est possible grâce à la procédure d'alignement grossier qui fournit un estimé initial précis de ces angles. Toutefois, en ce qui concerne l'angle de lacet, aucun estimé initial n'est connu et l'algorithme met beaucoup plus de temps à converger vers la solution. Selon les résultats présentés obtenus, l'algorithme d'alignement fin converge vers un état d'équilibre après environ 200 secondes. Il est donc important que le véhicule soit maintenu dans un état stationnaire au minimum durant cette période lors de la réalisation de la procédure d'alignement initial.

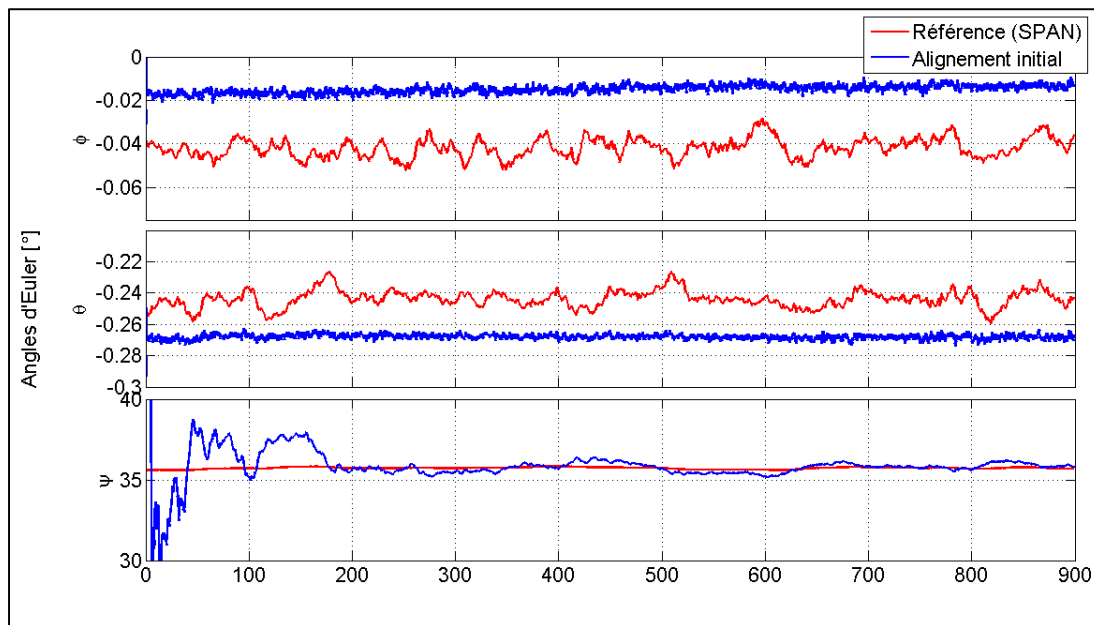


Figure 6-28 Estimation des angles d'Euler

La méthode d'alignement initial a également été testée sur les centrales inertielle nIMU et iNemo V2, toutefois le niveau de bruit élevé contenu sur les mesures provenant des gyroscopes à faible coût est trop important pour permettre la convergence de l'algorithme. Ainsi, une approche différente qui sera présentée à la section suivante doit être utilisée afin de réaliser l'alignement initial de ces capteurs à faible coût.

## 6.5 Détermination de l'attitude d'une plateforme de navigation inertielle à faible coût

La méthode d'alignement initial présentée à la section précédente est basée sur l'observation des vecteurs de gravité et de rotation de la Terre. Toutefois, pour la majorité des centrales inertielles à faible coût, le niveau de bruit contenu sur les gyroscopes est trop important pour pouvoir estimer adéquatement le vecteur de rotation de la Terre et par conséquent, la procédure présentée ne peut pas être utilisée. Des études récentes suggèrent plutôt d'utiliser le vecteur de champ magnétique terrestre mesuré par des magnétomètres plutôt que le vecteur de rotation de la Terre afin de déterminer l'attitude de la plateforme. C'est d'ailleurs sur cette idée qu'est basée la méthode de détermination de l'attitude développée dans le cadre de ce projet. Cette méthode propose dans un premier temps d'utiliser un processus d'initialisation afin de déterminer grossièrement les valeurs initiales de l'attitude. Par la suite, fondée sur ces valeurs initiales, un processus itératif en boucle fermée basé sur l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu est utilisé afin de peaufiner cet estimé initial mais également de réaliser l'estimation en ligne de l'attitude lorsque la plateforme est en mouvement.

### 6.5.1 Initialisation de l'attitude

Deux principales approches sont présentées dans la littérature afin de réaliser l'initialisation de l'attitude d'une centrale inertielle à faible soit la technique des vecteurs correspondants et la technique de compas magnétique (Farrell, 2008). La méthode utilisée par l'auteur de ce mémoire est dérivée de la technique des vecteurs correspondants et est principalement basée sur la résolution du problème de Wahba (1966) qui consiste à déterminer les 9 éléments d'une matrice des cosinus de direction permettant de minimiser l'erreur entre la représentation d'un vecteur selon deux repères orthogonaux. L'expression générale de ce problème est donnée par l'équation suivante (Wahba, 1966) :

$$L(\mathbf{C}_A^B) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k |\hat{\underline{v}}^B - \mathbf{C}_A^B \hat{\underline{v}}^A|^2 \quad (6.57)$$

où :

- $L()$  : fonction de coût à minimiser  
 $\mathbf{C}_A^B$  : matrice de rotation entre les repères A et B  
 $a_k$  : facteur de pondération  
 $\underline{\hat{v}}^A, \underline{\hat{v}}^B$  : expressions du vecteur  $\underline{\hat{v}}$  selon les repères A et B

De manière générale, la résolution de ce système à 9 inconnus nécessiterait la connaissance d'au moins trois vecteurs selon chacun des deux repères étudiés. Toutefois, selon Wahba (1966), la connaissance de deux vecteurs est suffisante à condition que ces derniers ne soient ni nuls ni colinéaires. Fondé sur cette idée, le vecteur de gravité et de champ magnétique terrestres peuvent être utilisés afin d'initialiser la matrice  $\mathbf{C}_B^N$  (Farrell, 2008). Tout d'abord la relation entre le repère du mobile et le repère de navigation peut être définie par l'expression suivante :

$$\underline{v}^B = \mathbf{C}_B^N \underline{v}^N \quad (6.58)$$

Sachant que les vecteurs  $\underline{u}_{XN}$ ,  $\underline{u}_{YN}$  et  $\underline{u}_{ZN}$  correspondent aux vecteurs unitaires orientés selon les axes X, Y et Z du repère de navigation, la projection de ces derniers le long des axes de ce même repère est donnée tel que :

$$\underline{u}_{XN}^N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_{YN}^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_{ZN}^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

En substituant ces équations à l'intérieur de l'équation (6.58), il est possible d'exprimer la matrice  $\mathbf{C}_B^N$  en fonction de la projection des vecteurs unitaires le long des axes du repère du mobile tel que :

$$\mathbf{C}_B^N = \begin{bmatrix} (\underline{u}_{XN}^B)^T \\ (\underline{u}_{YN}^B)^T \\ (\underline{u}_{ZN}^B)^T \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Par définition, l'axe Z du repère de navigation est aligné selon le vecteur de gravité  $\underline{g}$  et le vecteur de champ magnétique  $\underline{m}$  réside quant à lui dans le plan X-Z tel qu'illustré à la Figure 6-29.

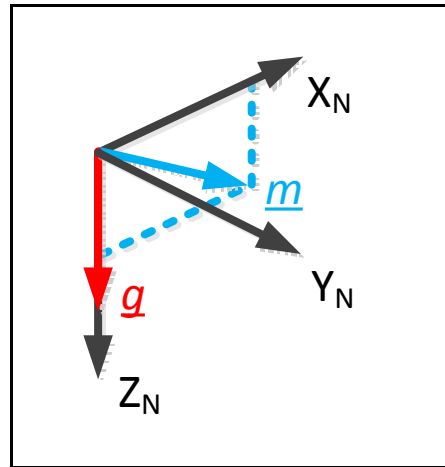


Figure 6-29 Vecteurs de gravité et de champ magnétique exprimés selon le repère de navigation

Puisque le repère de navigation est orthogonal, le vecteur  $\underline{m}$  est perpendiculaire à l'axe Y et par conséquent, le résultat du produit croisé entre les vecteurs  $\underline{g}$  et  $\underline{m}$  est forcément orienté selon cet axe. Sachant que les projections des vecteurs de gravité et de champ magnétique le long des axes du référentiel du mobile peuvent être mesurées respectivement par les accéléromètres et les magnétomètres (en condition stationnaire) et considérant la propriété que le produit croisé entre deux vecteurs unitaires résulte également en un vecteur unitaire, le vecteur  $\underline{u}_{Y_N}^B$  peut être calculé tel que :

$$\underline{u}_{Y_N}^B = \underline{u}_g^B \times \underline{u}_m^B \quad (6.61)$$

où :

$\underline{u}_g^B, \underline{u}_m^B$  : projections des vecteurs unitaires de  $\underline{g}$  et  $\underline{m}$  le long des axes du repère du mobile

De plus, suivant le même raisonnement, le vecteur  $\underline{u}_{XN}^B$  peut être calculé par l'expression suivante :

$$\underline{u}_{XN}^B = \underline{u}_{YN}^B \times \underline{u}_g^B \quad (6.62)$$

Finalement, en substituant les équations (6.61) et (6.62) à l'intérieur de l'équation (6.60) et en considérant que le vecteur  $\underline{g}$  est aligné le long de l'axe Z du repère de navigation, la matrice  $\mathbf{C}_B^N$  peut être initialisée à l'aide de l'équation suivante :

$$\mathbf{C}_B^N = \begin{bmatrix} (\underline{u}_g^B \times \underline{u}_m^B \times \underline{u}_g^B)^T \\ (\underline{u}_g^B \times \underline{u}_m^B)^T \\ (\underline{u}_g^B)^T \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

### 6.5.2 Estimation itérative de l'attitude

Le processus itératif d'estimation de l'attitude développé dans le cadre de ce projet est basé sur une publication de Gebre-Egziabher et al. (2000) qui propose l'estimation de l'attitude d'une centrale inertielle à faible coût sans l'utilisation de gyroscopes. Toutefois contrairement au modèle présenté dans cette publication, la méthode mise en place par l'auteur de ce mémoire suggère d'utiliser les mesures de gyroscopes afin de mettre à jour à un taux élevé l'attitude de la centrale inertielle tout en utilisant les mesures d'accéléromètres et de magnétomètres comme observation à l'intérieur d'un filtre de Kalman étendu afin de corriger périodiquement (à taux réduit) les erreurs d'attitude accumulées par l'intégration des mesures de gyroscopes. De plus, ce modèle propose également l'estimation en ligne des erreurs de mesure des gyroscopes. Le vecteur d'erreur d'état utilisé pour ce modèle est donc défini tel que :

$$\delta \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{q}_e \\ \delta \underline{\omega}^B \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

où :

- $\underline{q}_e$  : vecteur d'erreur d'attitude exprimée en terme de quaternion unitaire  
 $\delta\underline{\omega}^B$  : vecteur d'erreur aléatoires des gyroscopes

Selon ce modèle, les erreurs d'attitude sont représentées sous la forme d'erreur de quaternion. De manière générale, l'équation d'erreur d'un quaternion unitaire est donnée par l'expression suivante :

$$q = \hat{q} \otimes q_e \quad (6.65)$$

dans laquelle :

$$q_e = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{q}_e \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

où :

- $\hat{q}$  : estimé du quaternion unitaire  
 $q_e$  : erreur du quaternion

En différenciant l'équation (6.65) et en appliquant l'équation de propagation du quaternion unitaire  $q_B^N$  présentée à l'équation (2.42), l'équation de propagation de l'erreur du quaternion peut être donnée par :

$$\underline{\dot{q}}_e = \frac{1}{2}(\underline{\omega}_{IB}^B - \underline{\hat{\omega}}_{IB}^B) - (\underline{\hat{\omega}}_{IB}^B \times) \underline{q}_e \quad (6.67)$$

dans laquelle :

$$\underline{\omega}_{IB}^B = \underline{\tilde{\omega}}_{IB}^B - \delta\underline{\omega}^B - \underline{\omega}_g \quad (6.68)$$

$$\underline{\hat{\omega}}_{IB}^B = \underline{\tilde{\omega}}_{IB}^B \quad (6.69)$$

En augmentant cette équation avec l'équation d'erreur de mesure des gyroscopes présentée à la section 4.5.2, le modèle d'erreur du système peut être défini :

$$\delta\dot{x} = \mathbf{F} \cdot \delta x + \mathbf{G} \cdot w \quad (6.70)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{q}}_e \\ \delta \underline{\dot{\omega}}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\underline{\hat{\omega}}_{IB}^B \times) & -\frac{1}{2} \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{F}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_e \\ \delta \underline{\omega}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega}_g \\ \underline{\eta}_g \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Tel que mentionné précédemment, le modèle de mesure utilisé est basé sur celui présenté initialement par Gebre-Egziabher et al. (2000) selon lequel les mesures d'accéléromètres et de magnétomètres sont utilisées comme observations à l'intérieur d'un estimateur d'état. Ce modèle est développé autour de la définition même de l'erreur de quaternion qui peut être exprimée en termes de perturbation de la matrice des cosinus de direction  $\mathbf{C}_N^B$  selon l'équation suivante :

$$\mathbf{C}_B^N(q_e) = \begin{bmatrix} 1 & -2q_3 & 2q_2 \\ 2q_3 & 1 & -2q_1 \\ -2q_2 & 2q_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

où :

$q_1, q_2, q_3$  : éléments du vecteur  $\underline{q}_e$

En substituant cette définition à l'intérieur à l'équation (6.58), la relation suivante peut être obtenue :

$$\delta \underline{v}^N = -2(\underline{v}^N \times) \underline{q}_e \quad (6.73)$$

En appliquant cette relation aux vecteurs de gravité et de champ magnétique terrestres, il est possible de former le modèle de mesure suivant :

$$\delta \underline{z} = \mathbf{H} \cdot \delta \underline{x} + \underline{v} \quad (6.74)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{g}^N \\ \delta \underline{m}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(\underline{g}^N \times) & 0 \\ -2(\underline{m}^N \times) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_e \\ \delta \underline{\omega}^B \end{bmatrix} \quad (6.75)$$



### 6.5.3 Tests et analyse des résultats

Afin de valider le fonctionnement de l'algorithme de détermination de l'attitude développé dans le cadre de ce mémoire, un test dynamique a été réalisé. Ce test d'une durée d'environ 200 secondes comprend une série de rotations successives selon chacun des axes de la centrale inertielle. Le Tableau 6.20 résume la séquence d'orientations réalisée. Les valeurs indiquées sur ce tableau sont approximatives ( $\pm 2^\circ$ ) puisque l'auteur de ce mémoire n'était pas en mesure d'aligner avec plus de précision la centrale inertielle selon les orientations désirées.

Tableau 6.20 Séquence d'orientations réalisée

	<b>Roulis</b> [°]	<b>Tangage</b> [°]	<b>Lacet</b> [°]
<b>1</b>	0	0	0
<b>2</b>	0	0	- 90
<b>3</b>	0	0	- 180
<b>4</b>	0	0	- 270
<b>5</b>	0	0	- 360
<b>6</b>	0	0	- 270
<b>7</b>	0	0	- 180
<b>8</b>	0	0	- 90
<b>9</b>	0	0	0
<b>10</b>	+ 25	0	0
<b>11</b>	- 25	0	0
<b>12</b>	0	0	0
<b>13</b>	0	+ 25	0
<b>14</b>	0	- 40	0
<b>15</b>	0	+ 40	0
<b>16</b>	0	0	0

Lors de ce test, les trois centrales inertielles présentées à la section 6.1.4 ont été utilisées conjointement. Ces dernières ont été solidement fixées ensemble de manière à ce que leurs axes respectifs soient alignés du mieux que possible durant les manipulations. Les mesures d'accéléromètres, de gyroscopes et de magnétomètres provenant des deux centrales inertielles à faible coût ont été enregistrées durant cette procédure de même que la solution de navigation calculée par le système SPAN de la compagnie Novatel. Les paramètres d'enregistrement de ce test sont résumés au Tableau 6.21. Les mesures brutes enregistrées

ont d'abord été calibrées à l'aide de la méthode présentée à la section 6.1.3 de manière à éliminer les erreurs déterministes contenues sur les données.

Tableau 6.21 Paramètres d'enregistrement

	<b>Fréquence d'échantillonnage [Hz]</b>
<b>Solution de référence (Novatel SPAN)</b>	10
<b>MEMSense nIMU</b>	150
<b>STMicroelectronics iNEMO V2</b>	50

Les figures 6.30 et 6.31 illustrent les angles d'Euler calculés pour les deux centrales inertielles à faible coût. Chacune de ces figures présente à la fois les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme de détermination de l'attitude développé, la solution de référence calculée par le système SPAN ainsi que les angles d'Euler calculés par l'intégration des mesures de gyroscopes. L'erreur observée entre les résultats obtenus et la solution de référence est présentée à la Figure 6-32. Tout d'abord, il est possible d'observer une divergence rapide des angles d'Euler pour les deux centrales inertielles lorsque les gyroscopes sont utilisés de manière autonome afin de mettre à jour l'attitude de la plateforme. Cette divergence est de l'ordre 5 à 10 °/min pour chacun des axes des deux centrales inertielles étudiées. Ceci met donc clairement en évidence la nécessité d'utiliser une méthode robuste de détermination de l'attitude afin de contenir cette divergence et d'assurer une stabilité à long terme au système de navigation.

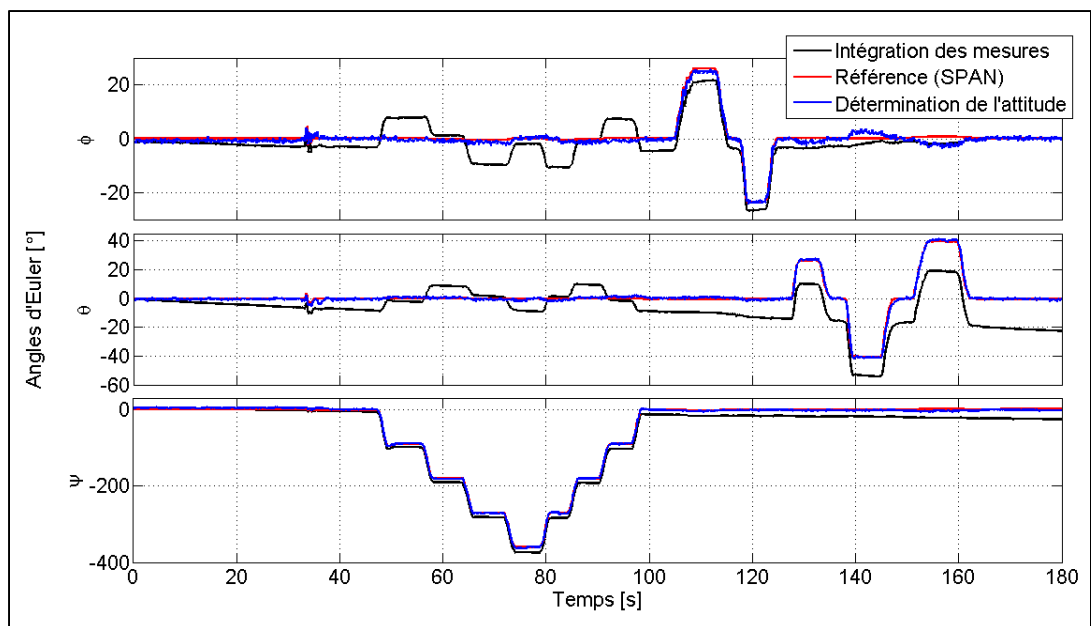


Figure 6-30 Détermination des angles d'Euler pour la centrale inertielle iNEMO V2

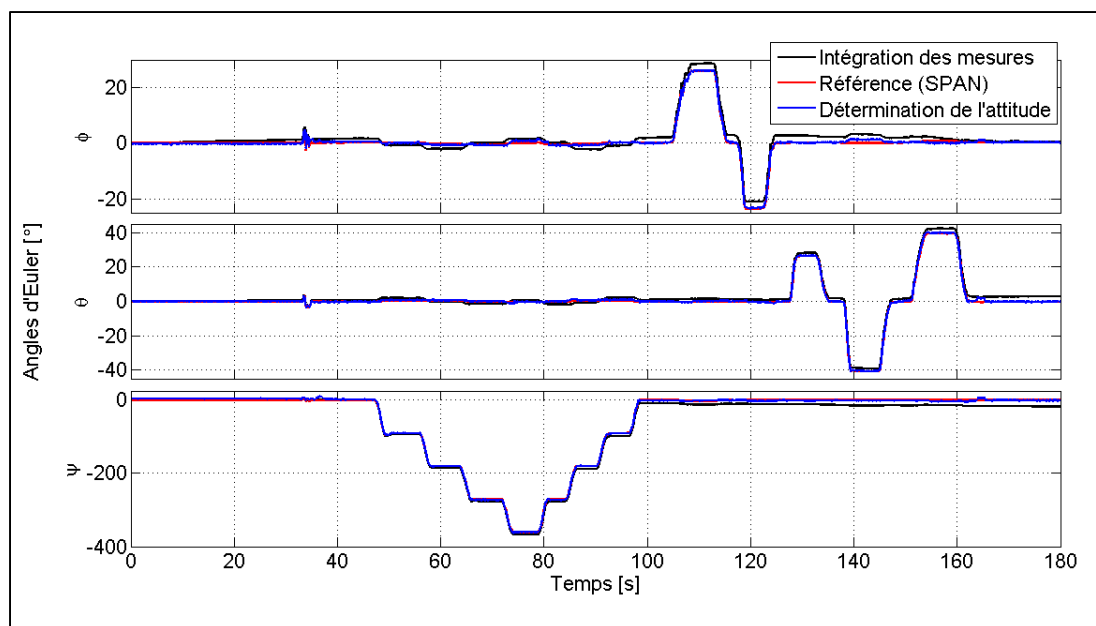


Figure 6-31 Détermination des angles d'Euler pour la centrale inertielle nIMU

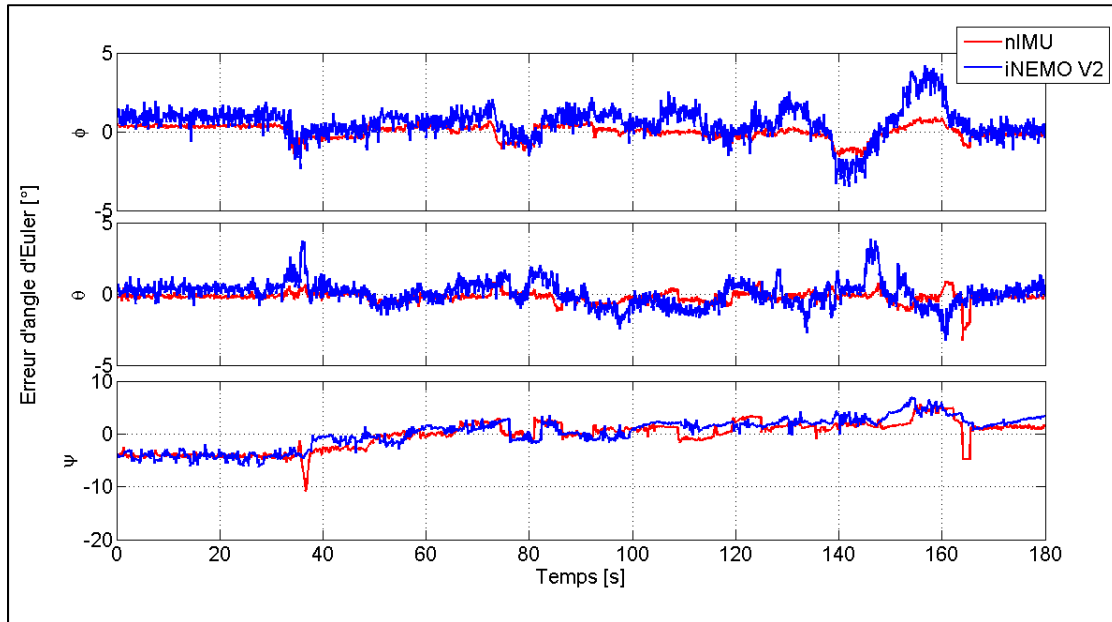


Figure 6-32 Erreur sur les angles d'Euler

En analysant les courbes d'erreur obtenues, il est possible de constater une erreur maximale d'environ  $2^\circ$  pour l'estimation des angles de roulis et de tangage de la centrale inertielle nIMU. Pour la centrale inertielle iNEMO V2, l'erreur maximale observée sur la détermination de ces angles est légèrement supérieure soit d'environ  $5^\circ$ . En ce qui concerne l'angle de lacet, l'erreur observée est de l'ordre de  $5^\circ$  en moyenne pour les deux centrales inertielles, mais des erreurs ponctuelles de l'ordre de  $10^\circ$  sont également présentes sur les résultats provenant de la centrale inertielle nIMU. Ces erreurs pourraient provenir de différentes sources, mais dans ce cas-ci, elles proviennent de perturbations ponctuelles du champ magnétique local tel qu'illustré sur la Figure 6-33. La provenance de ces perturbations est inconnue de l'auteur de ce mémoire. Afin d'éviter que ces perturbations affectent la solution de navigation, il serait préférable de mettre en place une procédure permettant de détecter ces dernières afin d'indiquer au filtre de Kalman lorsque les mesures de magnétomètres sont erronées.

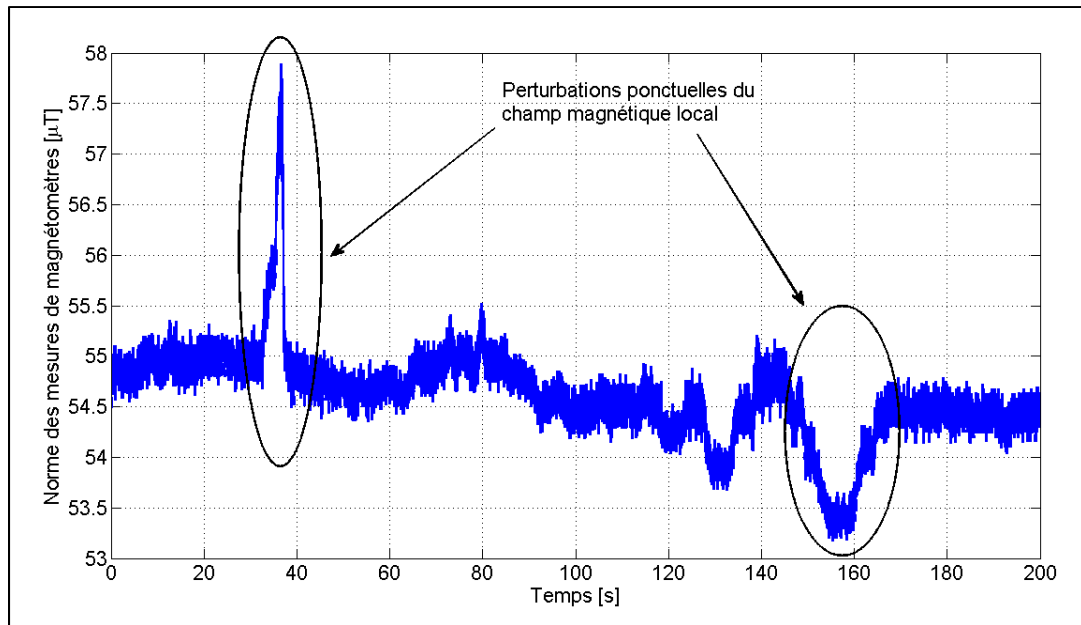


Figure 6-33 Perturbations observées sur les mesures provenant des magnétomètres de la centrale inertielle nIMU

Finalement, en comparant l'erreur obtenue pour chacune des deux centrales inertielles étudiées, il est possible de constater que la solution calculée à l'aide de la centrale inertielle nIMU est plus stable (moins d'oscillation) que celle obtenue à l'aide de la centrale inertielle iNEMO V2. Cette différence peut s'expliquer par le fait que les mesures utilisées par le filtre de Kalman (mesures d'accéléromètres et de magnétomètres) sont beaucoup moins bruitées pour la centrale inertielle nIMU que pour l'iNEMO V2.

En somme, la méthode développée dans le cadre de ce mémoire permet de déterminer avec précision l'attitude d'une centrale inertielle à faible coût. Basé sur les résultats obtenus et en éliminant les erreurs causées par les perturbations ponctuelles du champ magnétique local, il est tout à fait raisonnable de prétendre que la méthode développée permettrait de contenir les erreurs d'attitude d'une centrale inertielle à faible coût en dessous de  $5^\circ$ . Ce niveau de performance est acceptable pour la plupart des applications à faible coût destinées au secteur du divertissement (p. ex. navigation corporelle, animation 3D, jeux vidéo, etc.), mais n'est pas acceptable pour des applications de haute précision (p. ex. domaine biomédical, guidage de projectiles, guidage d'un aéronef sans pilote, etc.).



## **CHAPITRE 7**

### **ÉVALUATION DES PERFORMANCES DU SYSTÈME EN ENVIRONNEMENT URBAIN**

Ce chapitre présente l'évaluation des performances des différents modèles d'intégration développés dans le cadre de ce projet. Tout d'abord, les deux scénarios de test réalisés seront détaillés de même que l'architecture matérielle utilisée pour les essais. Par la suite, les résultats obtenus pour chacun des modèles d'intégration seront analysés et une comparaison des performances des différents systèmes sera réalisée. Les résultats seront ensuite analysés afin d'évaluer les performances des différents systèmes lors de l'utilisation d'une centrale inertielle à faible coût. Finalement, une étude sera conduite afin d'évaluer l'impact de la calibration des erreurs déterministes et de l'estimation en-ligne des erreurs stochastiques.

#### **7.1 Présentation des scénarios de test**

Deux scénarios différents ont été élaborés afin d'évaluer les performances des algorithmes réalisés dans le cadre de ce projet. Tout d'abord, un scénario en environnement idéal a été réalisé afin d'obtenir des résultats témoins. Par la suite, un scénario en environnement difficile a été réalisé de manière à évaluer l'impact d'un tel environnement sur la solution de navigation GPS autonome ainsi que les apports réels des différents algorithmes développés. Avant chaque test, une procédure rigoureuse de calibration et d'alignement initial a été effectuée pour chacune des centrales inertielles utilisées.

##### **7.1.1 Architecture matérielle**

L'architecture matérielle utilisée est la même pour chacun des deux scénarios de tests. Cette dernière est détaillée à la Figure 7-1.

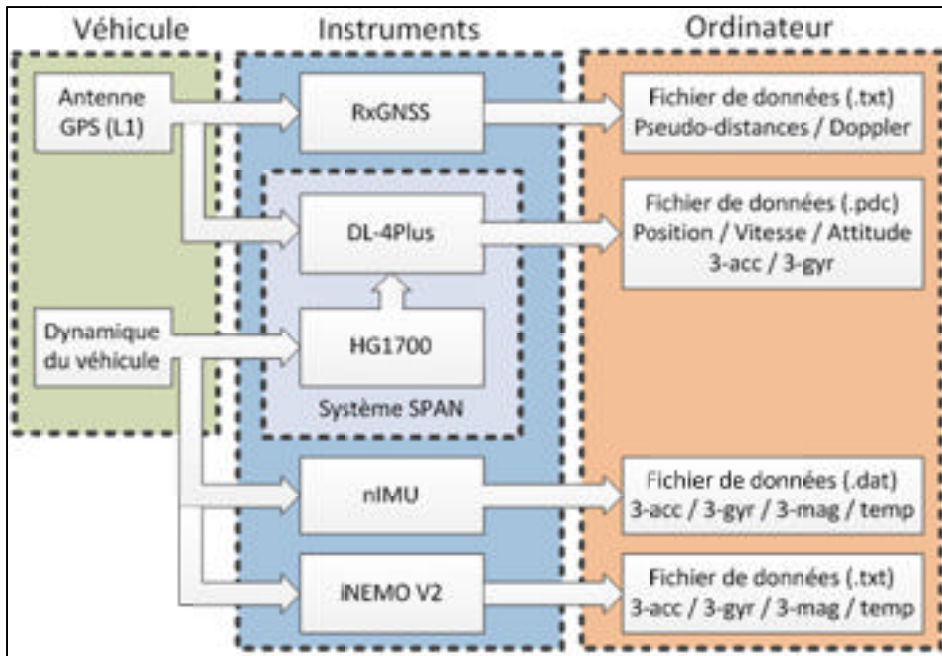


Figure 7-1 Schéma bloc de l'architecture matérielle utilisée pour les essais dynamiques

Selon cette architecture, un système SPAN de la compagnie Novatel est utilisé comme solution de référence. Ce système est composé d'un récepteur commercial DL-4Plus et d'une centrale inertielle de grade tactique HG1700. Selon le fabricant, les performances de ce système en fonction de la configuration sélectionnée sont données au Tableau 7.1 (Novatel, 2011). La configuration utilisée dans le cadre de ce projet est le positionnement par point unique (L1).

Tableau 7.1 Précision horizontale RMS en fonction de la configuration du système SPAN

Paramètre	Précision Horizontale RMS [m]
<b>Positionnement par point unique (L1)*</b>	1.5
<b>Positionnement par point unique (L1/L2)</b>	1.2
<b>SBAS</b>	0.6
<b>DGPS</b>	0.4



Le système SPAN est également utilisé afin d'enregistrer les mesures brutes d'accéléromètres et de gyroscopes provenant de la centrale inertielle HG1700 afin de pouvoir les utiliser à l'intérieur des algorithmes développés. De plus, le récepteur RxGNSS est utilisé afin d'enregistrer les mesures de pseudo-distance et de fréquence Doppler des différents satellites utilisés pour le calcul de la solution GPS seule ainsi que pour l'intégration par couplage serré. Finalement, les centrales inertielles nIMU et iNEMO V2 sont branchées à un ordinateur portable afin d'enregistrer les mesures brutes d'accéléromètres, de gyroscopes et de magnétomètres ainsi que la température. Une seule antenne (L1) est utilisée afin de recevoir les signaux GPS. Ces signaux sont amplifiés puis distribués aux deux récepteurs utilisés à l'aide d'un diviseur RF. Les figures 7.2 et 7.3 illustrent l'architecture réelle utilisée lors des tests.



Figure 7-2 Véhicule de test



Figure 7-3 Architecture matérielle réelle utilisée pour les essais dynamiques

### 7.1.2 Scénario en environnement idéal

Le scénario en environnement idéal a été choisi afin de permettre au récepteur GPS d'obtenir une visibilité optimale tout au long de la trajectoire soit d'avoir au moins 6 satellites en ligne de vue directe en tout temps. Ce scénario procure ainsi une solution de navigation témoin pour les différents algorithmes permettant alors de quantifier leurs performances dans un environnement idéal. La trajectoire réalisée a été effectuée sur la rive-sud de Montréal, plus précisément dans les municipalités de La Prairie et de St-Luc. Cette région est principalement constituée de quartiers résidentiels et est éloignée des gratte-ciels, des zones forestières denses et de tout autre environnement difficile pouvant perturber la solution de navigation. La trajectoire de référence obtenue par le système SPAN est illustrée aux figures 7.4 et 7.5.



Figure 7-4 Vue d'ensemble du scénario en environnement idéal

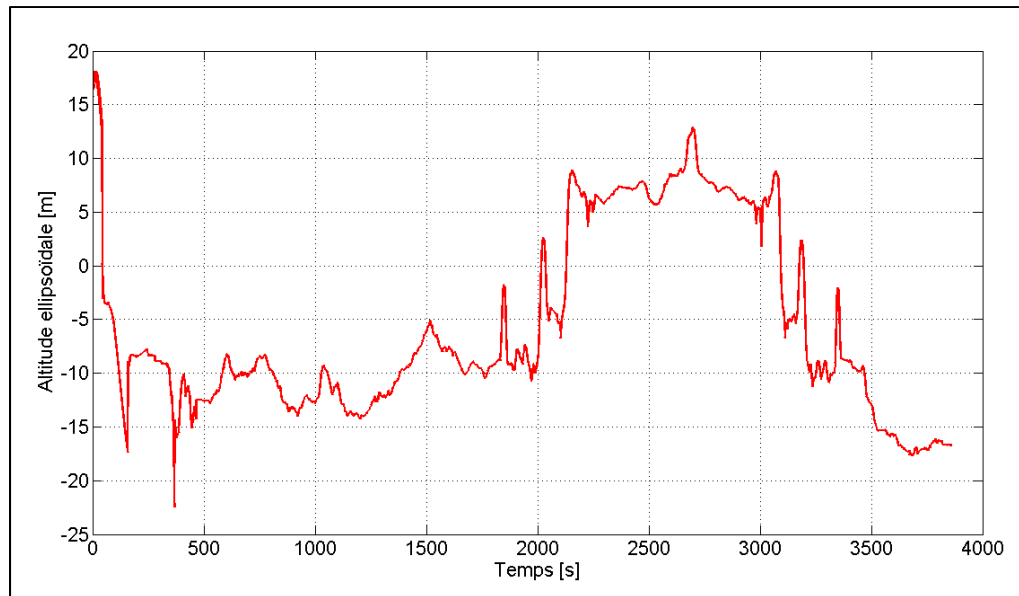


Figure 7-5 Profil d'altitude du scénario en environnement idéal

Ce scénario peut être caractérisé par trois portions distinctes soit une première portion réalisée dans un quartier résidentiel de La Prairie, une seconde portion réalisée sur la route 104 entre les deux municipalités et une troisième portion réalisée dans un quartier résidentiel de St-Luc. Les figures 7.6 et 7.7 présentent une vue rapprochée de la trajectoire réalisée dans chacun des deux quartiers résidentiels.



Figure 7-6 Vue rapprochée du quartier résidentiel de La Prairie



Figure 7-7 Vue rapprochée du quartier résidentiel de St-Luc

Finalement, la Figure 7-8 présente le nombre de satellites visibles en fonction du temps pour la durée totale du scénario de test. Ces données peuvent également être présentées de manière à illustrer le pourcentage de temps pour lequel un nombre donné de satellites étaient visibles (voir Figure 7-9). À partir de ces données, il est possible de déterminer que pour 99.7% de la durée totale du scénario, plus de 6 satellites étaient visibles permettant ainsi au récepteur GPS d'obtenir en tout temps une solution de navigation robuste et précise.

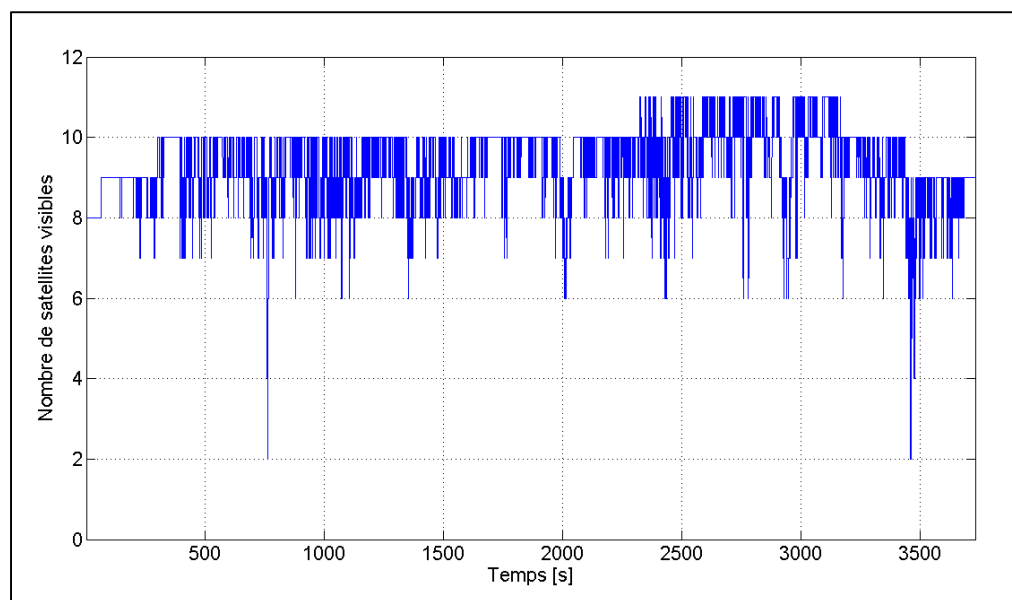


Figure 7-8 Nombre de satellites visibles en fonction du temps en environnement idéal

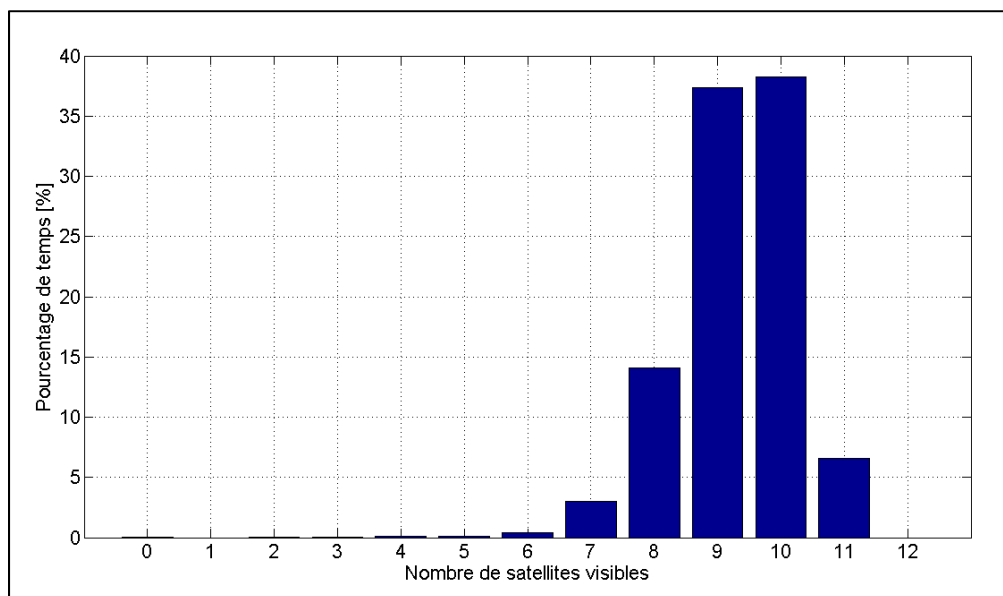


Figure 7-9 Pourcentage de temps observé pour un nombre de satellites visibles donné en environnement idéal

### 7.1.3 Scénario en environnement difficile

Le scénario en environnement difficile a été choisi de manière à refléter un canyon urbain sévère typique des grands centres urbains. Ce scénario permet donc de mettre à l'épreuve les différents algorithmes développés et de quantifier leurs performances dans un environnement difficile. La trajectoire réalisée a été effectuée au centre-ville de Montréal et est constituée de canyons urbains étroits, de tunnels et de viaducs. La trajectoire de référence obtenue par le système SPAN est illustrée aux figures 7.10 et 7.11.



Figure 7-10 Vue d'ensemble du scénario en environnement difficile



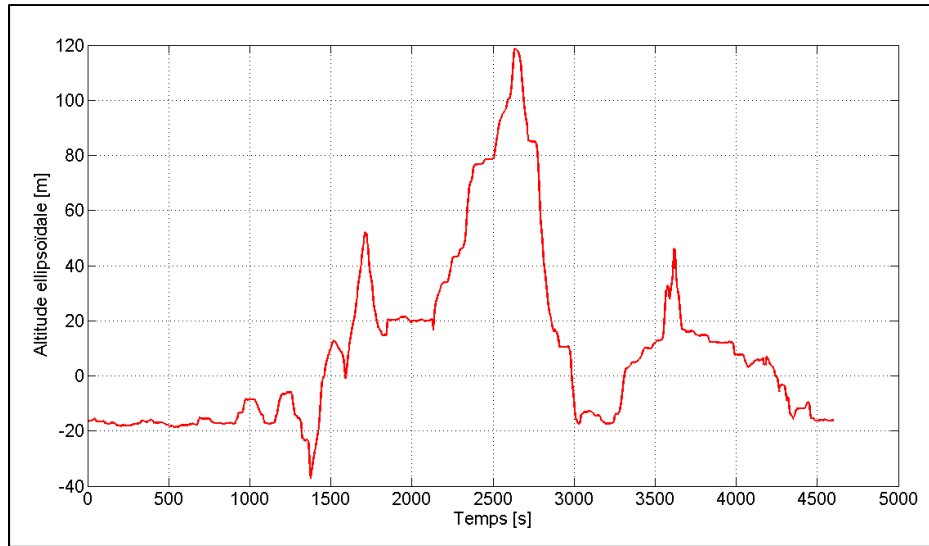


Figure 7-11 Profil d'altitude du scénario en environnement difficile

Ce scénario peut être caractérisé par quatre portions distinctes soit une portion réalisée en canyon urbain sévère dans le Vieux-Port de Montréal, une portion réalisée sur les autoroutes 720 et 15 comprenant plusieurs tunnels et viaducs, une portion dégagée réalisée sur la rue Jean-Talon et sur le chemin de la Côte-des-Neiges ainsi qu'une seconde portion en canyon urbain sévère réalisée au Centre-Ville de Montréal. La Figure 7-12 présente une vue rapprochée de la portion du test réalisée en canyon urbain.



Figure 7-12 Vue rapprochée du canyon urbain

Finalement, la Figure 7-13 présente le nombre de satellites visibles en fonction du temps pour la durée totale du scénario de test. Ces données peuvent également être présentées de manière à illustrer le pourcentage de temps pour lequel un nombre donné de satellites étaient visibles (voir Figure 7-14). À partir de ces données, il est possible de déterminer que pour 22.8% de la durée totale du scénario, moins de 4 satellites étaient visibles. Les deux portions du scénario réalisées en canyon urbain ainsi que celle réalisée à l'intérieur du tunnel Ville-Marie contribuent notamment fortement à ce faible niveau de visibilité des satellites comme le démontre la Figure 7-13. Compte tenu de ces conditions difficiles, il est attendu que la solution obtenue à l'aide du système GPS seule manque de précision et soit parfois même interrompue.

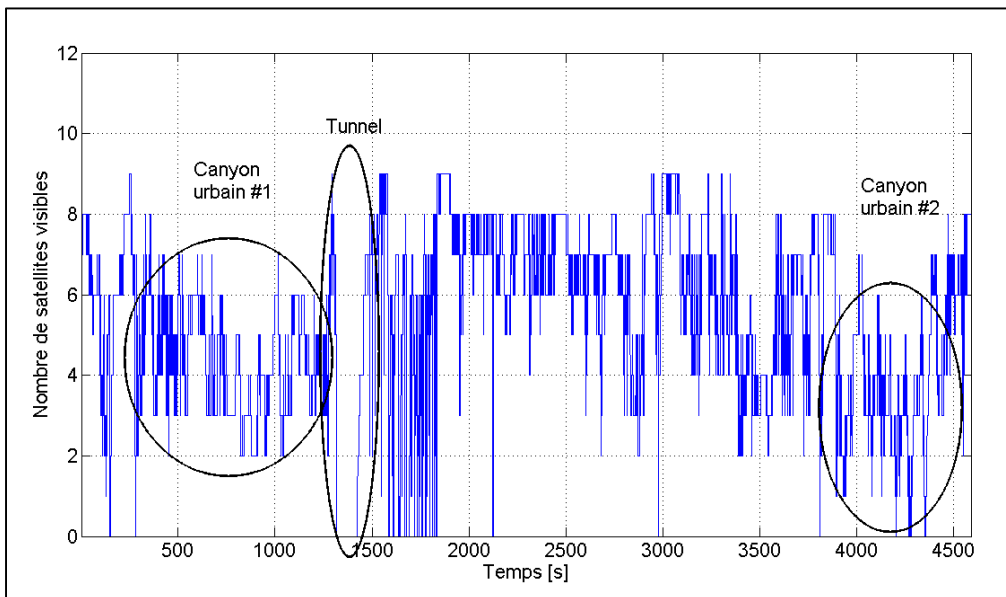


Figure 7-13 Nombre de satellites visibles en fonction du temps en environnement difficile



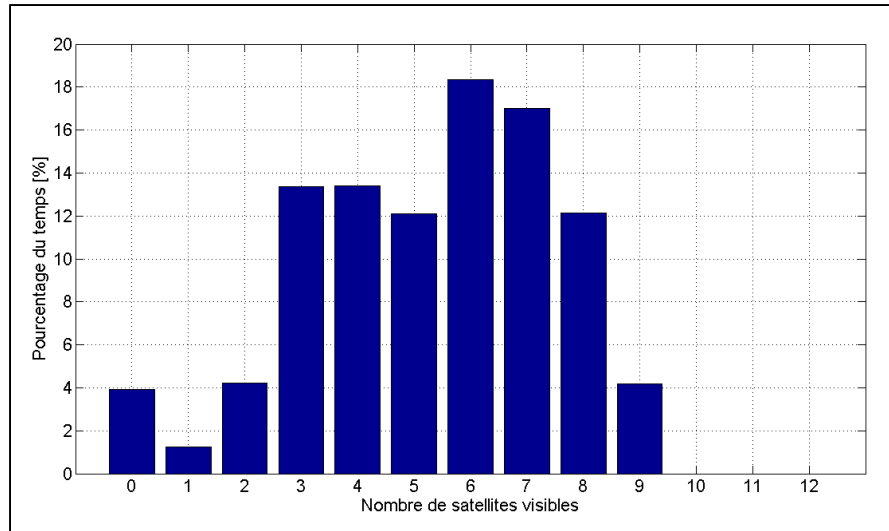


Figure 7-14 Pourcentage de temps observé pour un nombre de satellites visibles donné en environnement difficile

## 7.2 Analyse des performances des différents modèles d'intégration

La section suivante présentera les résultats des tests effectués pour chacun des deux scénarios. Les résultats présentés dans cette section pour l'intégration GPS/INS seront basés uniquement sur l'utilisation de la centrale inertielle de grade tactique HG1700. L'analyse du système à faible coût sera réalisée à la section suivante. Dans un premier temps, les performances du système GPS seul seront présentées. Par la suite, les deux modèles d'intégration GPS/INS étudiés seront analysés et comparés.

### 7.2.1 Analyse des performances du système GPS seul

Les performances du système GPS seul seront évaluées à l'intérieur des deux scénarios présentés précédemment. 6 paramètres seront évalués soit 3 paramètres de position et 3 paramètres de vitesse. Le modèle utilisé sera le même pour les deux essais et correspond au modèle présenté à la section 5.3.1. L'algorithme développé sera démarré à froid, c'est-à-dire sans aucune connaissance initiale de la position. De plus, de manière à permettre une convergence plus rapide de la solution de navigation en cas de perte des signaux GPS, une position de référence sera mise à jour régulièrement lorsque le système sera considéré

comme stable depuis assez longtemps. Cette position de référence sera utilisée comme position initiale à l'intérieur du filtre de Kalman lorsque le système deviendra instable

La stabilité à l'intérieur de l'algorithme est évaluée selon la logique présentée par Sauriol (2008), c'est-à-dire que la solution de navigation est considérée comme stable lorsque l'erreur entre la pseudo-distance calculée et observée (résiduel de mesure) pour l'ensemble des satellites visibles est inférieure à 100 mètres pour 20 itérations consécutives du filtre de Kalman. De plus, le système est considéré comme instable lorsque le résiduel de mesure pour un satellite est supérieur à 100 mètres. Les résultats qui seront présentés dans cette section correspondent uniquement à la solution de navigation calculée lorsque le système est stable. Dans le cas contraire, aucun résultat ne sera présenté.

#### **7.2.1.1 Système GPS seul en environnement idéal**

Le scénario en environnement idéal permet au récepteur d'avoir une excellente visibilité des signaux satellites pour la durée totale du test. Il est donc tout à fait logique de s'attendre à ce que le récepteur GPS performe bien dans cet environnement. En analysant les résultats obtenus, il est d'abord possible de constater que la solution de navigation calculée par le modèle est perdue à seulement deux reprises au cours de la trajectoire réalisée comme le démontre la Figure 7-15 qui présente l'indicateur de stabilité du système. Dans les deux cas, le décrochage du récepteur GPS est d'une durée d'environ 5 secondes et est causé par un nombre insuffisant de satellites visibles (*voir Figure 7-8*).

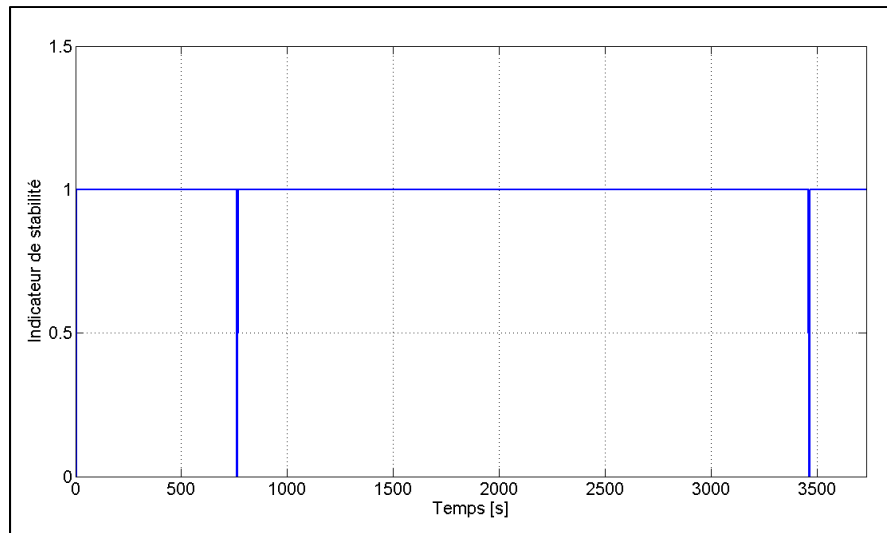


Figure 7-15 Indicateur de stabilité de la solution en environnement idéal

La position géodésique calculée par le modèle GPS seul est présentée à la Figure 7-16 et l'erreur de position associée est illustrée à la Figure 7-17. Cette erreur représente l'écart entre la solution calculée par ce modèle et la référence obtenue à l'aide du système SPAN. Selon ces figures, l'erreur maximale observée est de l'ordre de 10 mètres pour le positionnement horizontal et de l'ordre de 20 mètres pour le positionnement vertical. L'erreur quadratique moyenne (RMS : *Root Mean Square*) a également été calculée pour la durée totale du test et les résultats sont présentés au Tableau 7.2. L'erreur verticale est reconnue pour être une lacune majeure des récepteurs GPS utilisés de manière autonome puisqu'il est très difficile d'obtenir une bonne géométrie verticale des satellites. Pour que la solution verticale calculée soit optimale, il serait désirable de traiter les signaux provenant de satellites distribués sur 360° autour de l'utilisateur. Or, puisque les signaux ne traversent pas le sol, les satellites situés en dessous de l'horizon ne peuvent être observés, limitant grandement la précision verticale du système.

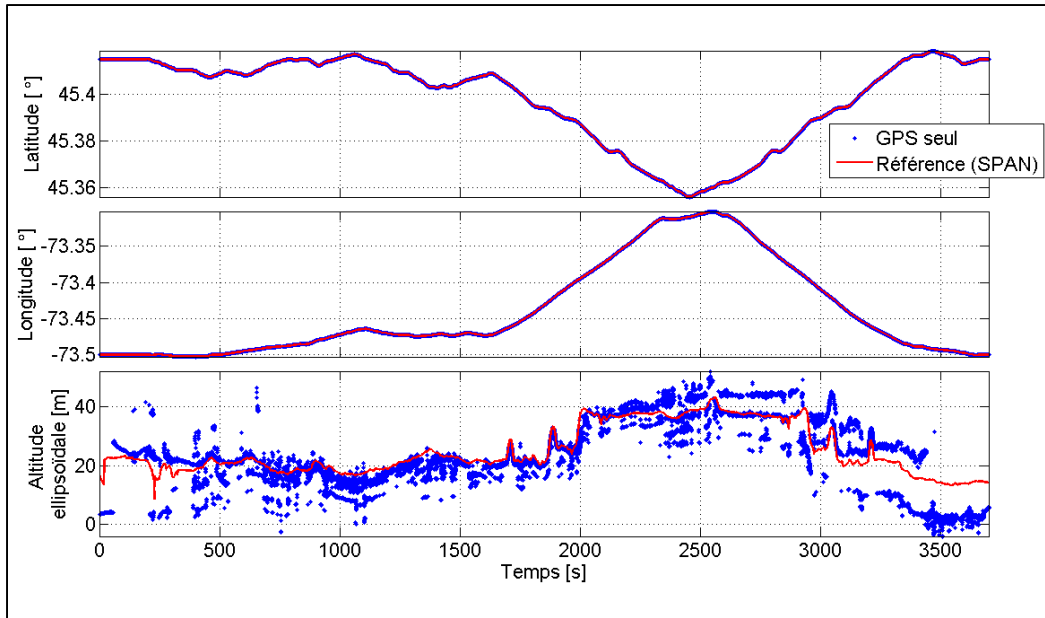


Figure 7-16 Position géodésique calculée par le modèle GPS seul en environnement idéal

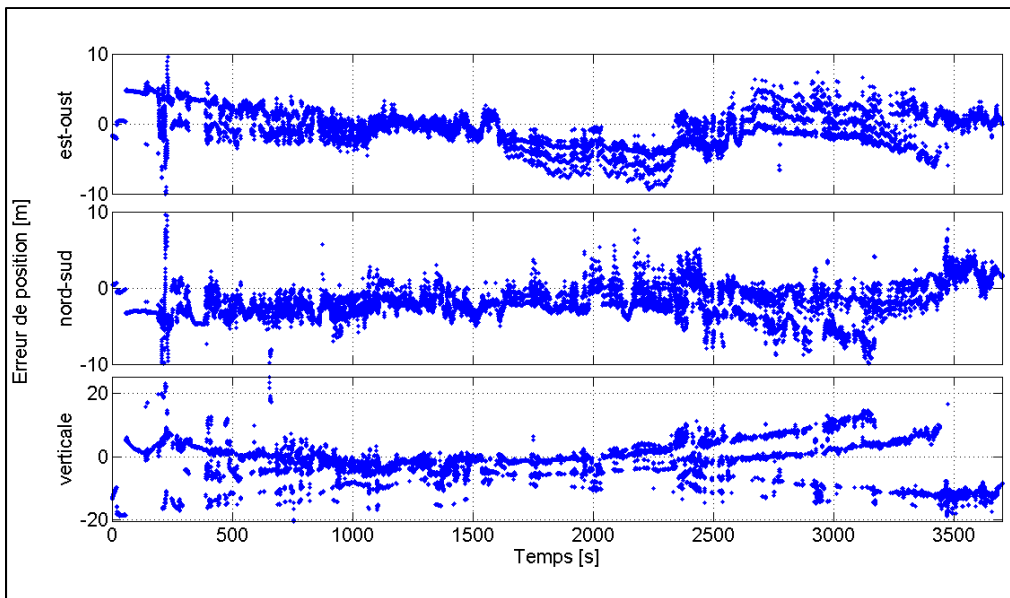


Figure 7-17 Erreur de position pour le modèle GPS seul en environnement idéal

Le vecteur de vitesse calculé par le modèle GPS seul est exprimé selon le repère de navigation à la Figure 7-18 et l'erreur associée est illustrée à la Figure 7-19. Selon les résultats présentés, l'erreur maximale observée sur chacun des axes est de l'ordre de 1 m/s.

L'erreur RMS de vitesse calculée pour la durée totale du test est également présentée au Tableau 7.2.

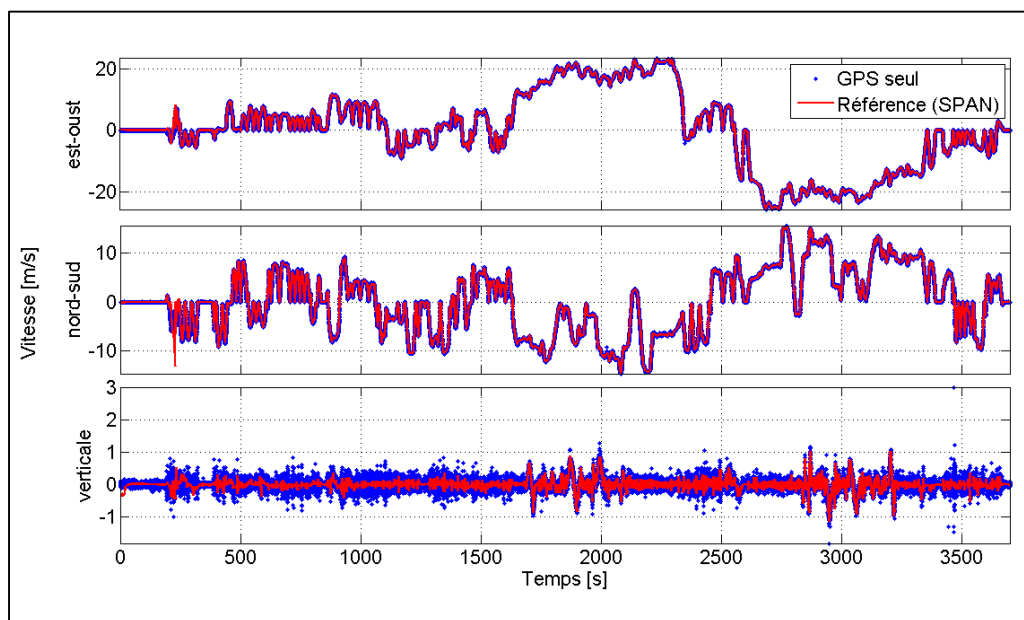


Figure 7-18 Vitesse calculée par le modèle GPS seul en environnement idéal

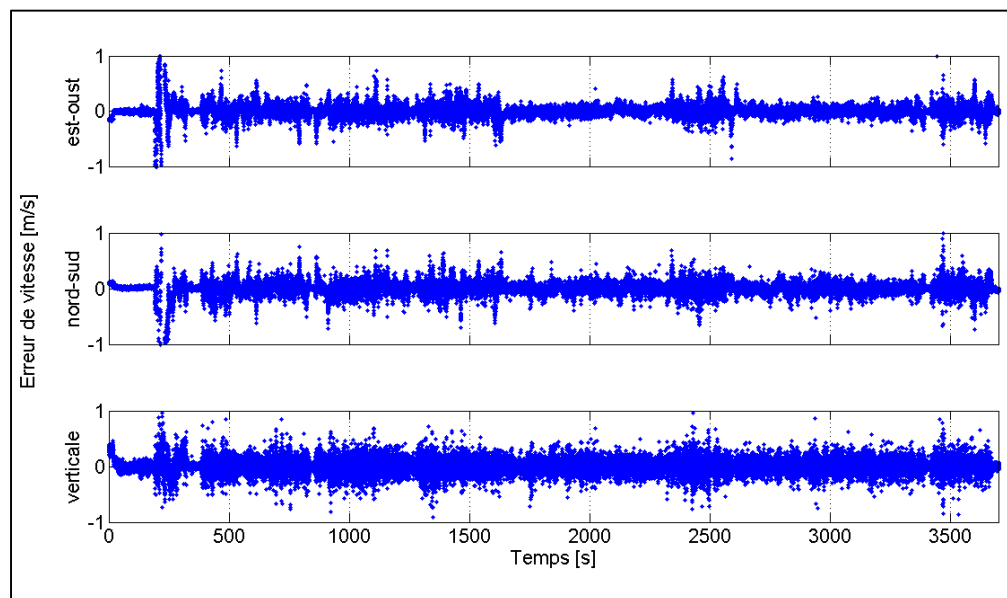


Figure 7-19 Erreur de vitesse pour le modèle GPS seul en environnement idéal

Tableau 7.2 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS seul en environnement idéal

	<b>Erreur RMS</b>
<b>Position est-ouest</b>	2.32 m
<b>Position nord-sud</b>	2.63 m
<b>Position verticale</b>	6.63 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.09 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.10 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.13 m/s

#### 7.2.1.2 Système GPS seul en environnement difficile

Le scénario en environnement difficile comporte trois sections problématiques soit deux sections en canyon urbain sévère (Vieux-Port et Centre-Ville de Montréal) ainsi qu'une section à l'intérieur d'un tunnel (tunnel Ville-Marie). Il est tout à fait logique de s'attendre à une dégradation importante des performances du système GPS seul dans de telles conditions. La Figure 7-20 qui présente l'indicateur de stabilité du système GPS pour le scénario en environnement difficile vient confirmer cette hypothèse. Sur cette figure, il est possible de constater que le récepteur GPS décroche ponctuellement à plusieurs reprises au cours de la trajectoire, principalement en canyon urbain ce qui est également visible à la Figure 7-21. De plus, à certains endroits, la solution est perdue pour une durée supérieure à 30 secondes (p. ex. à l'intérieur du tunnel Ville-Marie).

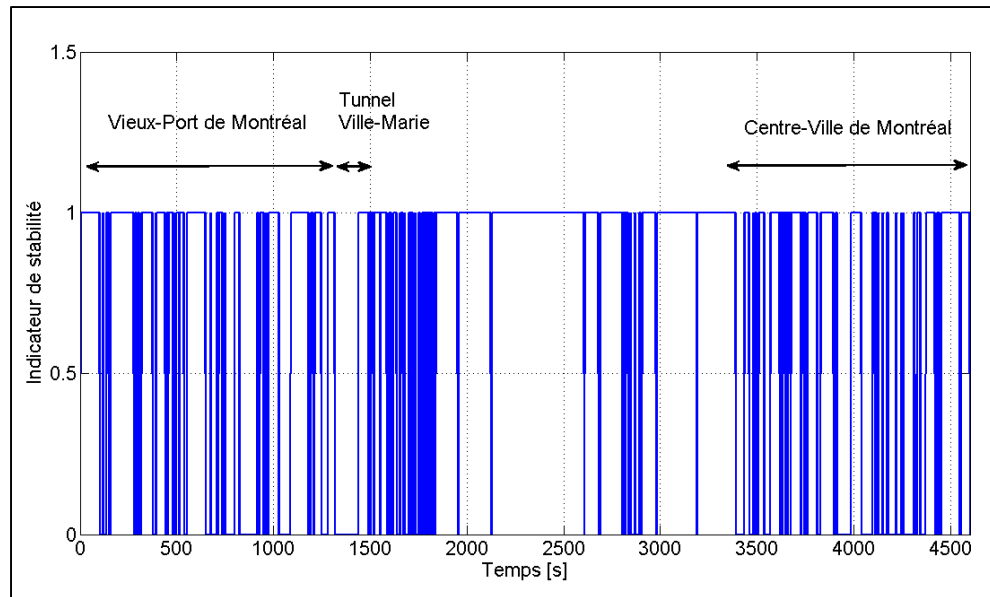


Figure 7-20 Indicateur de stabilité de la solution en environnement urbain



Figure 7-21 Trajectoire calculée à l'aide du modèle GPS seul en environnement difficile

Les figures 7.22 et 7.23 présentent respectivement la position géodésique calculée par le modèle GPS seul ainsi que l'erreur de positionnement. Tout d'abord, il est possible de constater une différence flagrante entre les résultats obtenus en canyon urbain et ceux obtenus en environnement idéal. L'erreur quadratique moyenne a également été calculée

pour les deux portions du scénario réalisées en canyon urbain qui correspondent respectivement aux 1300 premières et aux 1600 dernières secondes du test. Les résultats de cette analyse sont présentés au Tableau 7.3. Selon la Figure 7-23, l'erreur maximale observée peut atteindre jusqu'à 20 mètres à l'horizontal et 100 mètres à la verticale. De plus, à certains endroits où la solution de navigation est sur le point de diverger, l'erreur horizontale et verticale peut atteindre jusqu'à 250 et 1500 mètres respectivement.

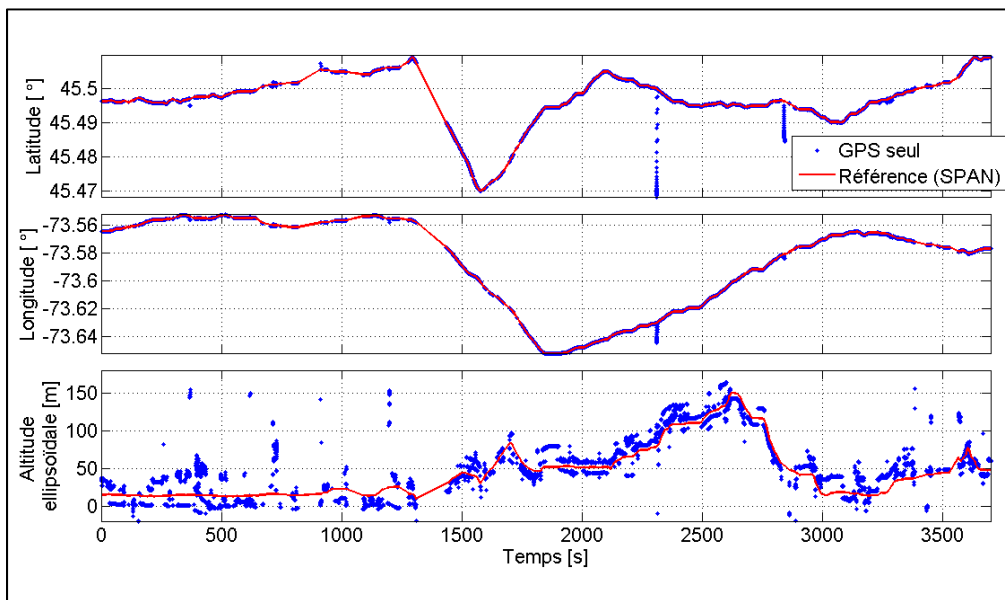


Figure 7-22 Position géodésique calculée par le modèle GPS seul en environnement difficile



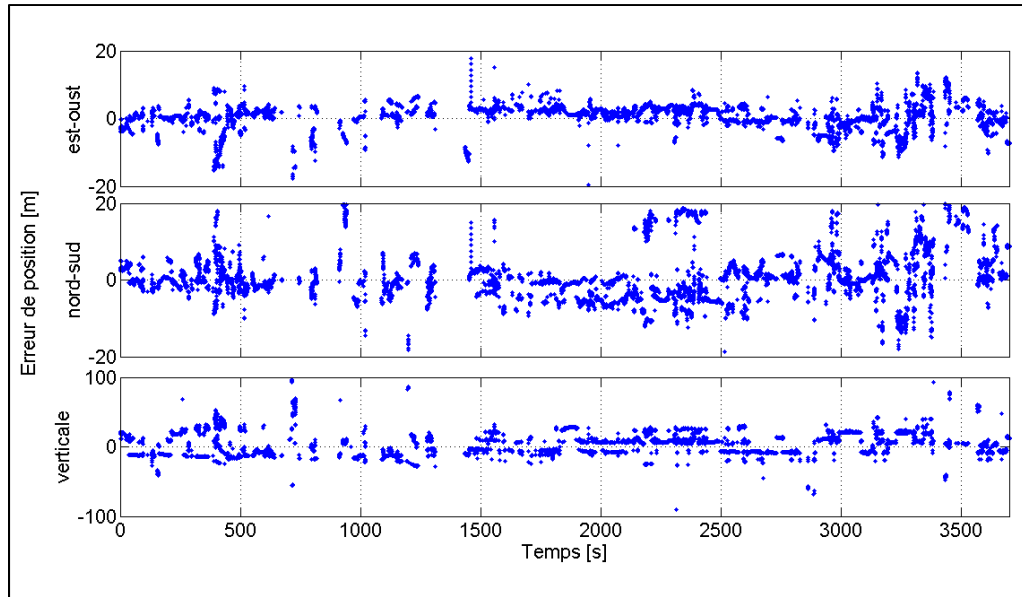


Figure 7-23 Erreur de position pour le modèle GPS seul en environnement difficile

La vitesse calculée ainsi que l'erreur associée sont présentées aux figures 7.24 et 7.25. L'erreur RMS pour les deux sections en canyon urbain a également été calculée et les résultats sont présentés au Tableau 7.3. En comparant ces résultats avec ceux présentés au tableau, il est possible de constater une augmentation significative de cette erreur comparativement au scénario en environnement idéal. De plus, l'erreur maximale observée en environnement urbain peut atteindre jusqu'à 3 m/s à l'horizontal et 7 m/s à la verticale. Finalement, tout comme pour la position, il est possible d'observer une erreur significative lorsque le système est sur le point de diverger. Cette erreur peut atteindre jusqu'à 300 m/s.

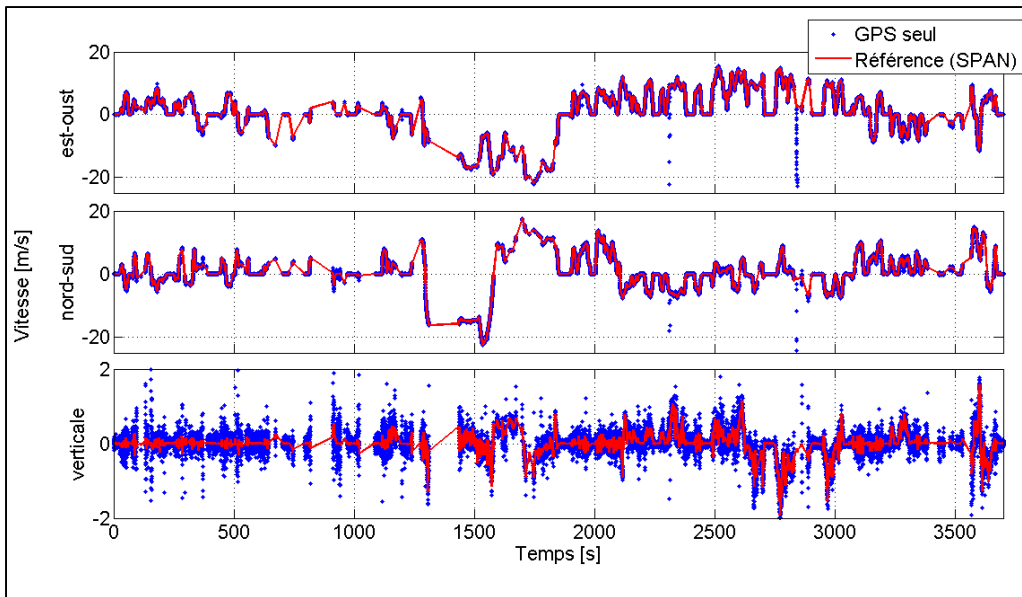


Figure 7-24 Vitesse calculée par le modèle GPS seul en environnement difficile

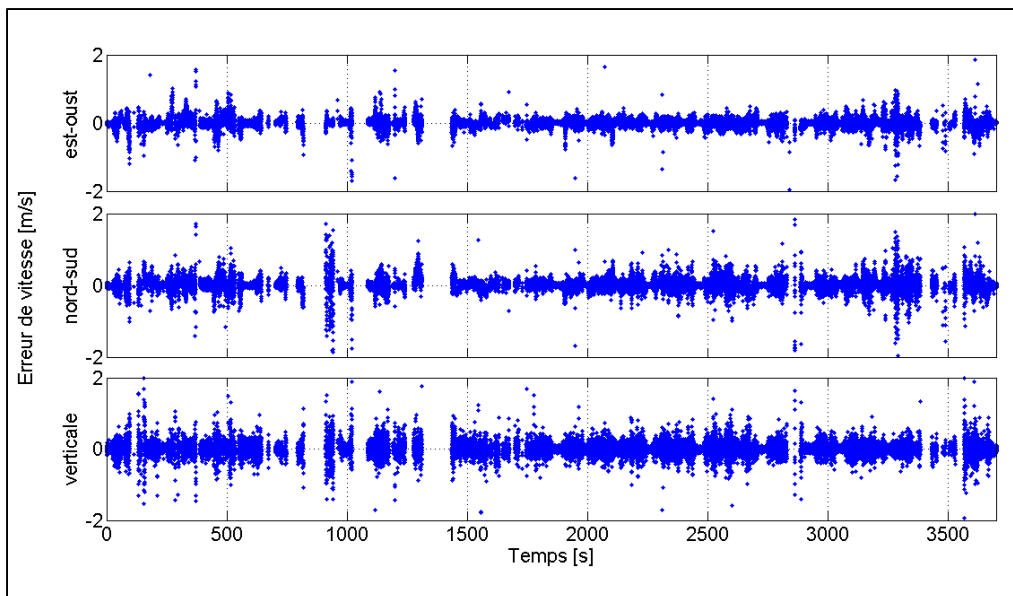


Figure 7-25 Erreur de vitesse pour le modèle GPS seul en environnement difficile

Tableau 7.3 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS seul en environnement difficile

	<b>Erreur RMS Canyon urbain #1</b>	<b>Erreur RMS Canyon urbain #2</b>
<b>Position est-ouest</b>	12.87 m	9.73 m
<b>Position nord-sud</b>	15.30 m	15.26 m
<b>Position verticale</b>	23.61 m	18.19 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.16 m/s	0.16 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.21 m/s	0.21 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.27 m/s	0.20 m/s

### 7.2.2 Analyse des performances du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche

Les performances du modèle d'intégration par couplage lâche seront évaluées à l'intérieur des deux scénarios présentés précédemment. Pour ce modèle, 9 paramètres seront évalués soit 3 paramètres de position, 3 paramètres de vitesse et 3 paramètres d'attitude. Le modèle utilisé sera le même pour les deux essais et correspond au modèle présenté à la section 5.3.2. Dans les deux cas, le système a été initialisé à partir des mesures de position et de vitesse provenant du modèle GPS seul et à partir de l'attitude calculée à l'aide de la méthode d'alignement initiale présentée à la section 6.4.

#### 7.2.2.1 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

Les résultats obtenus à la section précédente ont démontré qu'à l'intérieur d'un environnement idéal, la solution de navigation calculée par un récepteur GPS utilisé de manière autonome est relativement précise. Toutefois, il est attendu que l'ajout d'une centrale inertielle ait un impact significatif sur la stabilité à court terme de la solution (c.-à-d. moins de sauts et d'oscillation) en plus de fournir un estimé de l'attitude du véhicule tout au long de la trajectoire. Tout d'abord, les figures 7.26 et 7.27 présentent respectivement la position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche

ainsi que l'erreur de positionnement associée exprimée selon le repère de navigation. Selon la Figure 7-27, l'erreur de position maximale observée est d'environ 5 mètres pour le positionnement horizontal et 15 mètres pour le positionnement vertical. L'erreur quadratique moyenne a également été calculée pour la durée totale du test et elle est présentée au Tableau 7.4. En comparant ces résultats avec ceux obtenus par le modèle GPS seul, il est possible de constater une légère amélioration du positionnement.

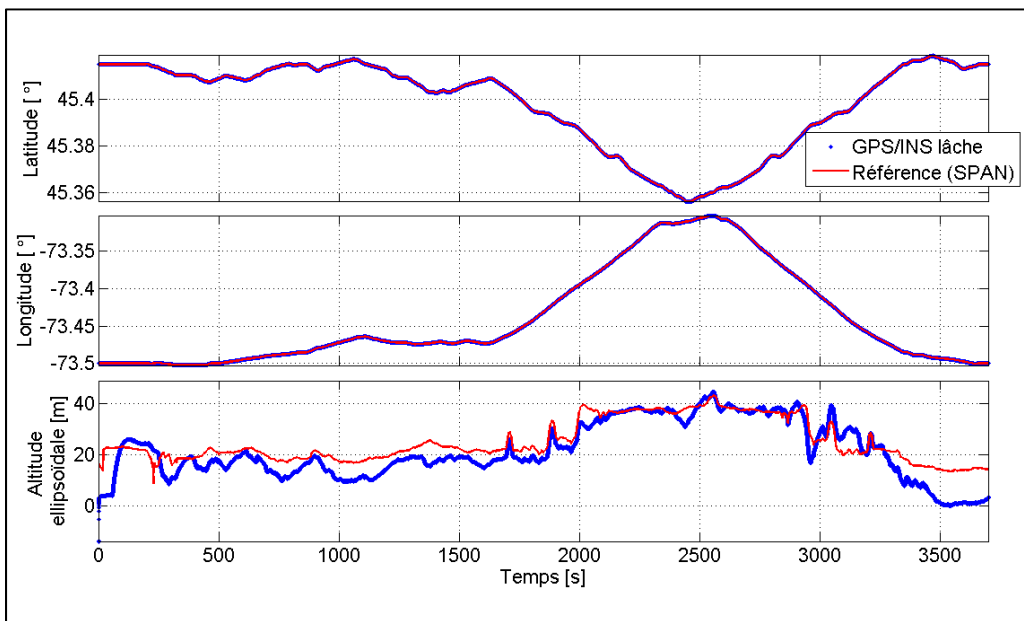


Figure 7-26 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

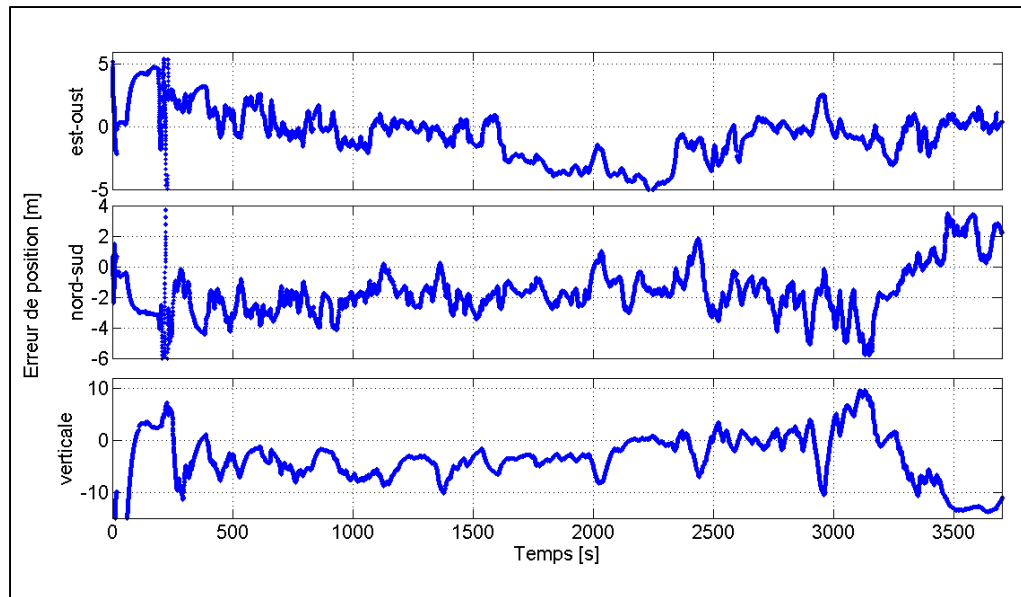


Figure 7-27 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

La vitesse calculée à l'aide de ce modèle ainsi que l'erreur associée sont présentées aux figures 7.28 et 7.29. Selon ces résultats, l'erreur maximale observée est de l'ordre de 0.2 m/s sur chacun des axes. L'erreur RMS de vitesse a également été calculée pour la durée totale du test et les résultats sont présentés au Tableau 7.4. Tout comme pour la position, ces résultats démontrent une légère amélioration comparativement au modèle GPS seul.

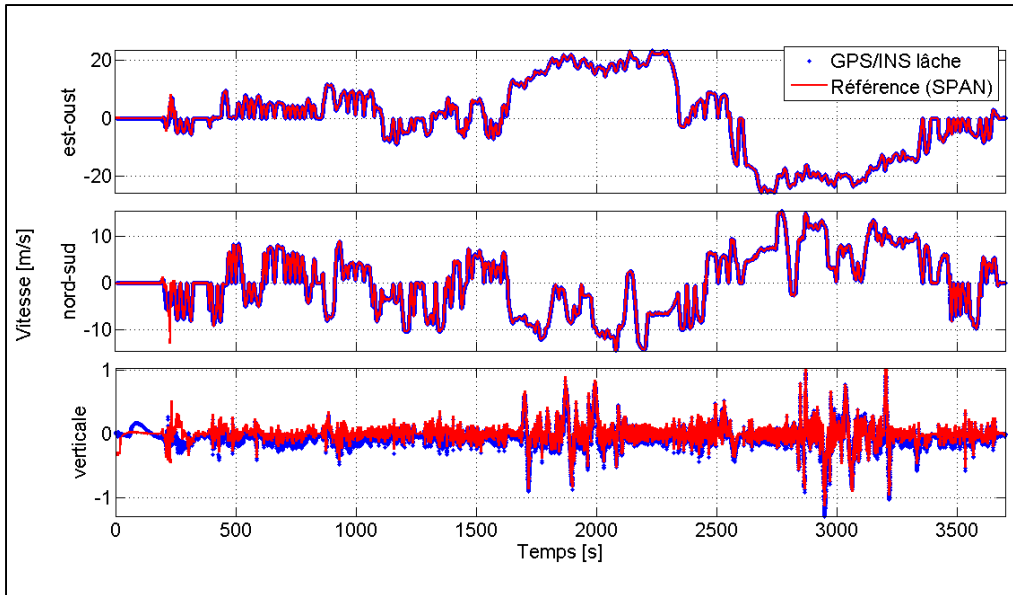


Figure 7-28 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

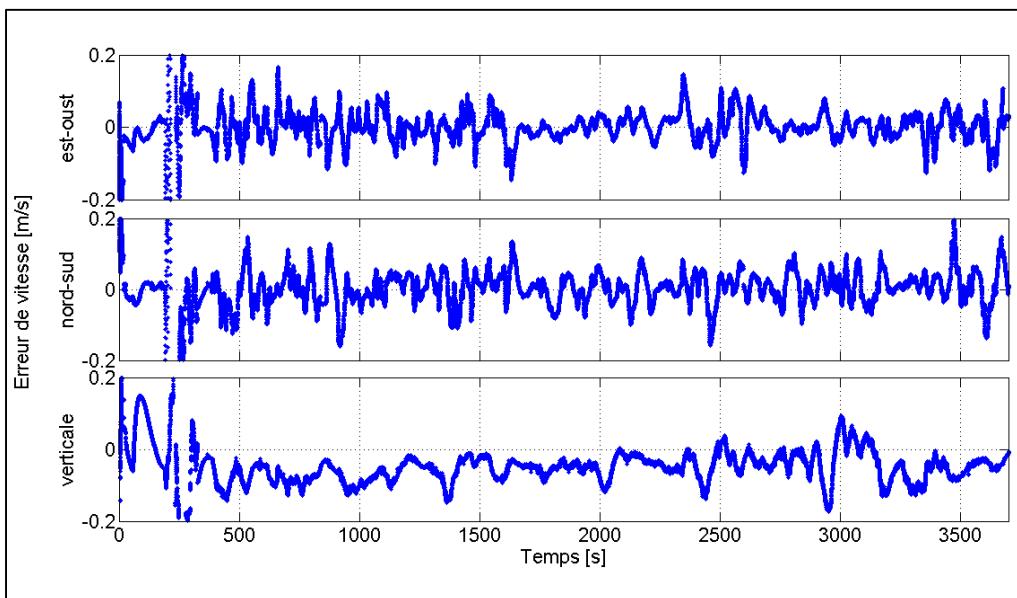


Figure 7-29 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

Finalement, en ce qui attrait à l'orientation du véhicule, les angles d'Euler calculés à l'aide de ce modèle d'intégration sont illustrés à la Figure 7-30. De plus, l'erreur associée ainsi que

l'erreur quadratique moyenne sont respectivement présentées à la Figure 7-31 et au Tableau 7.4. Sur ces figures, il est d'abord possible d'observer une erreur de l'ordre d'un degré sur l'estimé initial des trois angles d'Euler. Cette erreur est toutefois rapidement corrigée par le filtre de Kalman lorsque le véhicule entre en mouvement. L'erreur d'orientation maximale observée (en excluant l'erreur initiale) est de l'ordre de  $0.1^\circ$  pour les angles de roulis et de tangage et de l'ordre de  $0.2^\circ$  pour l'angle de lacet. Il est donc possible d'affirmer que le modèle d'intégration par couplage lâche permet non seulement de corriger efficacement la position et la vitesse mais également de corriger l'accumulation d'erreur d'orientation causée par les erreurs de mesure présentes sur les capteurs inertiels.

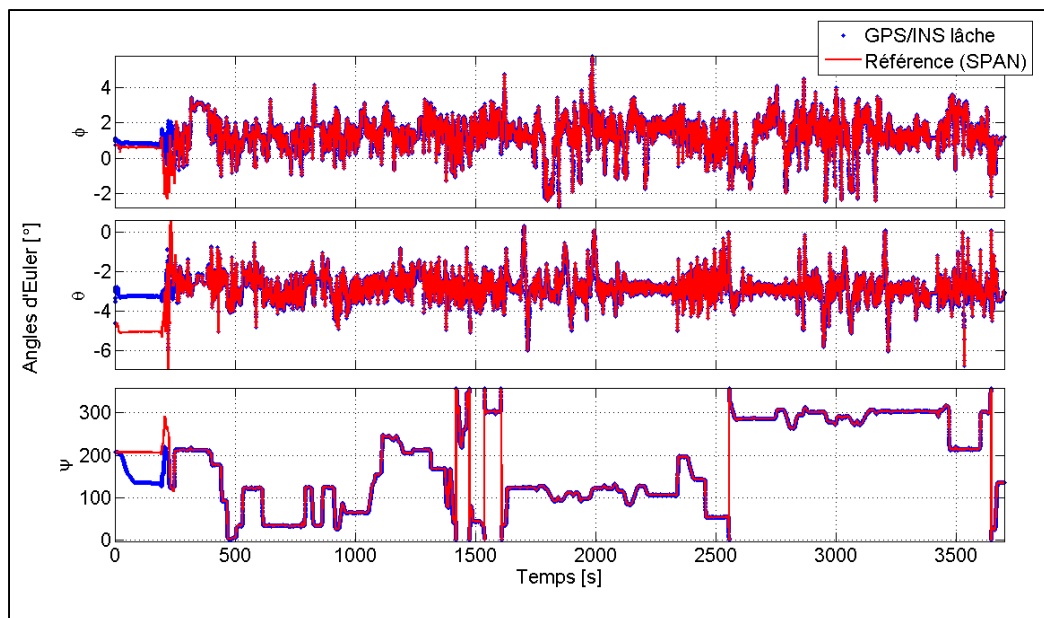


Figure 7-30 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

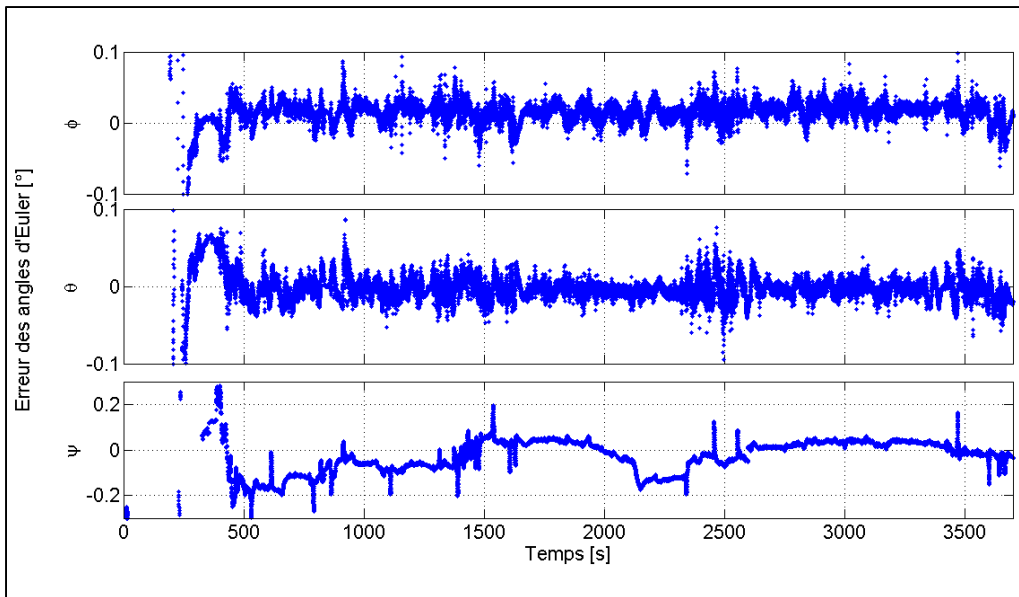


Figure 7-31 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

Tableau 7.4 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage lâche en environnement idéal

	<b>Erreur RMS</b>
<b>Position est-ouest</b>	1.94 m
<b>Position nord-sud</b>	2.26 m
<b>Position verticale</b>	5.69 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.04 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.05 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.06 m/s
<b>Angle de roulis</b>	0.02 °
<b>Angle de tangage</b>	0.01 °
<b>Angle de lacet</b>	0.08 °



### 7.2.2.2 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

Les résultats obtenus à la section 7.2.1.2 ont clairement démontré les lacunes du modèle GPS seul lorsqu'utilisé en canyon urbain sévère. Il est attendu que l'intégration des systèmes GPS et INS par la méthode du couplage lâche permette une amélioration significative de la stabilité de la solution en environnement difficile. Tout d'abord, la Figure 7-32 présente une vue d'ensemble de la trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche. Sur cette figure, il est possible de constater que contrairement au modèle GPS seul, ce dernier est en mesure de fournir une solution continue tout au long de la trajectoire réalisée.



Figure 7-32 Trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

Toutefois, lorsque le nombre de satellites visibles tombe au-dessous de 4, la solution de navigation est calculée uniquement par l'intégration des mesures inertielles et tend alors à diverger avec le temps. Pour les sections de la trajectoire où les signaux GPS étaient momentanément perdus (durée inférieure à 10 secondes), l'erreur de positionnement reste faible et la solution hybride calculée est acceptable (erreur < 10 mètres), ce qui n'est cependant pas le cas pour les sections où le blocage des signaux GPS persiste au-delà de 10

secondes. En effet, dans cette situation, la solution de navigation diverge de manière significative et peut atteindre plusieurs centaines de mètres en quelques minutes.

Les figures 7.33 et 7.34 illustrent la position géodésique calculée par le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche ainsi que l'erreur de position associée. Selon ces figures, l'erreur de position maximum observée est de l'ordre de 100 mètres et survient à quelques reprises en canyon urbain ainsi qu'à l'intérieur du tunnel Ville-Marie. L'erreur RMS a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.5. Il faut être prudent lorsque l'on compare ces résultats avec ceux présentés au Tableau 7.3 puisque l'erreur quadratique moyenne calculée pour le modèle GPS seul ne tenait pas compte des portions où la solution de navigation n'était pas disponible.

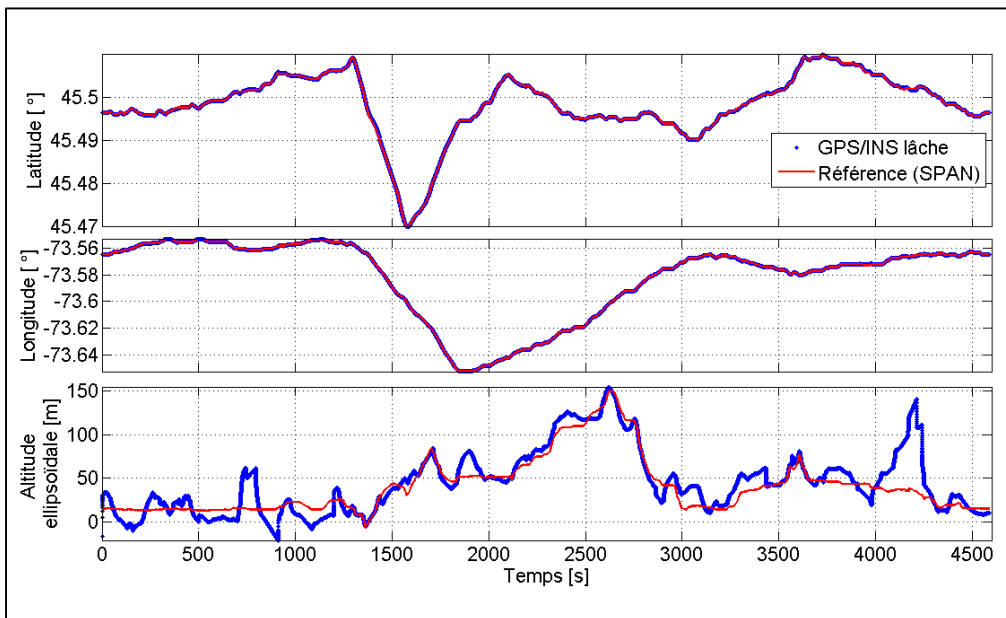


Figure 7-33 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

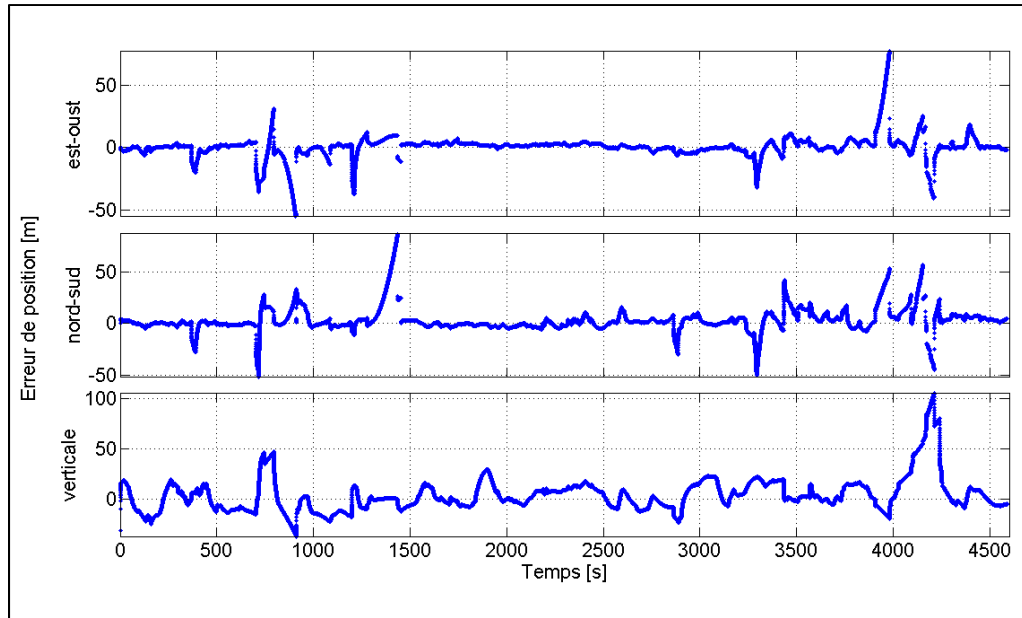


Figure 7-34 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

La vitesse calculée par ce même modèle d'intégration ainsi que l'erreur de vitesse associée sont présentées aux figure 7.35 et 7.36. Sur ces figures, il est possible de constater que tout comme pour la position, la vitesse calculée en l'absence d'une solution GPS tend à diverger avec le temps. L'erreur de vitesse maximum observée pour ce scénario est de l'ordre de 1 m/s à l'horizontal et de l'ordre de 0.5 m/s à la verticale. De plus, l'erreur RMS de vitesse a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.5. Pour la même raison que pour l'erreur quadratique moyenne de position, ces résultats ne peuvent être comparés à ceux présentés au Tableau 7.3.

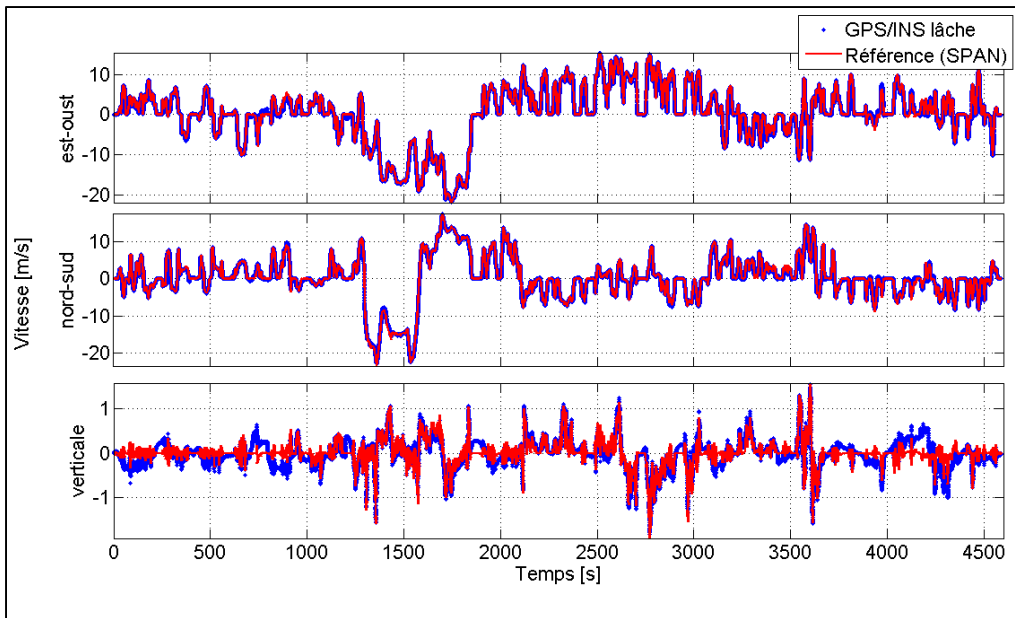


Figure 7-35 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

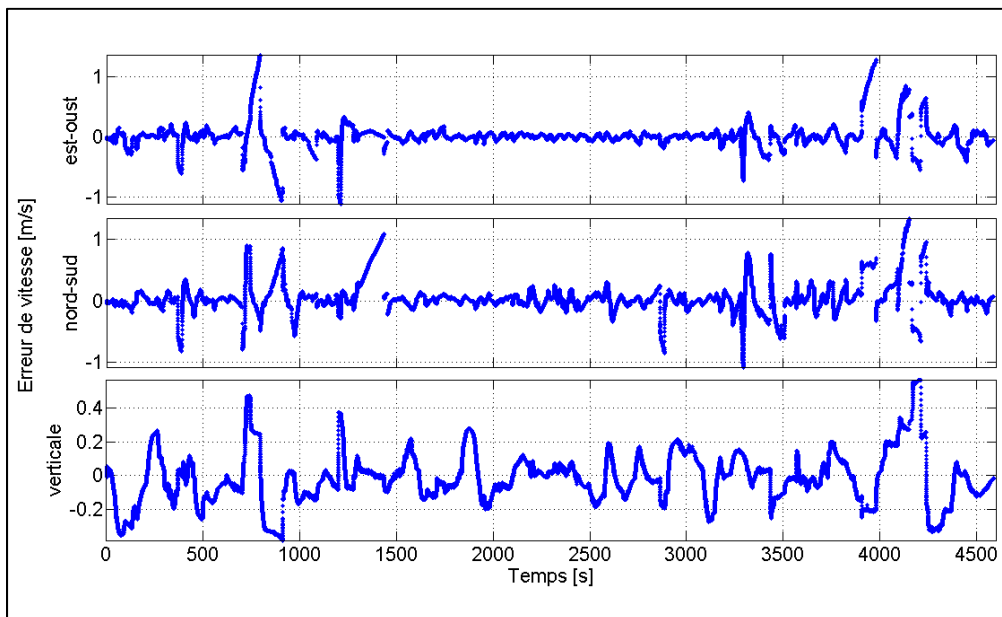


Figure 7-36 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

Finalement, en ce qui concerne l'orientation du véhicule, les angles d'Euler calculés à l'aide de ce modèle sont présentés à la Figure 7-37. L'erreur d'orientation associée est également illustrée à la Figure 7-38. Selon ces figures, l'erreur maximale entre la solution calculée et la référence provenant du système SPAN est d'environ  $0.2^\circ$  pour les angles de roulis et de tangage et de  $1^\circ$  pour l'angle de lacet. De plus, l'erreur RMS calculée pour les deux sections en canyon urbain est présentée au Tableau 7.5. Cette erreur est relativement faible compte tenue du blocage fréquent des signaux GPS. La précision élevée de l'estimé de l'attitude du véhicule est principalement rendu possible grâce à l'utilisation d'une centrale inertielle haut de gamme, et plus particulièrement grâce au faible niveau d'erreur contenue sur les gyroscopes de cette dernière.

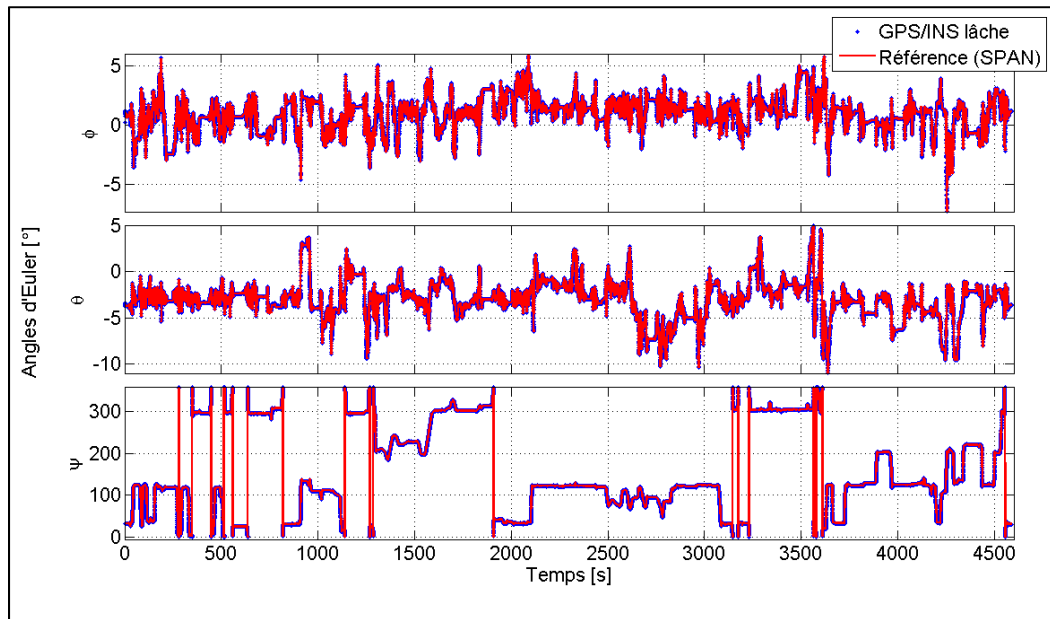


Figure 7-37 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

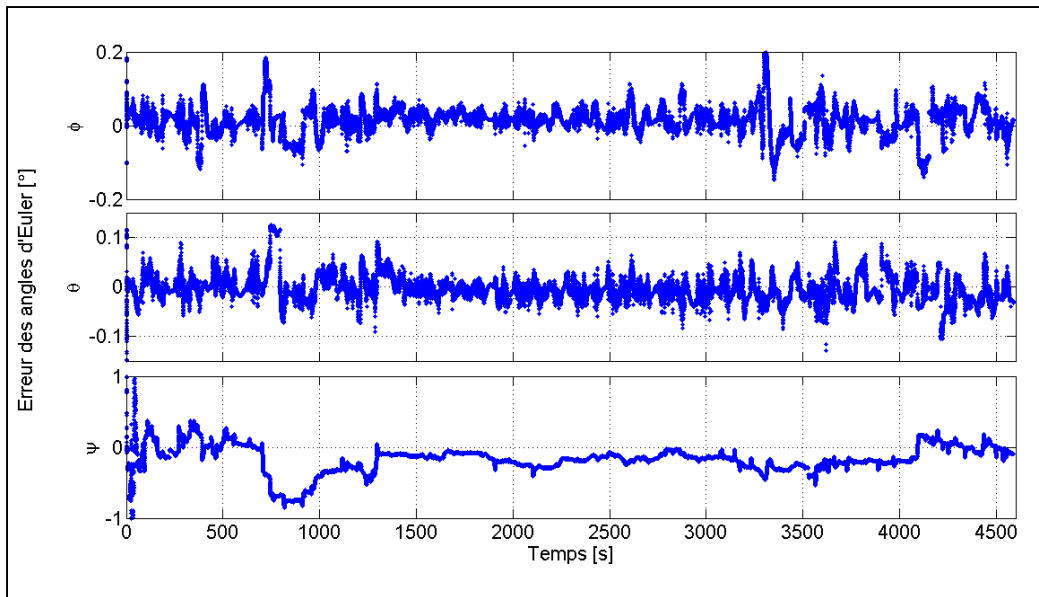


Figure 7-38 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

Tableau 7.5 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage lâche en environnement difficile

	Erreur RMS	
	Canyon urbain #1	Canyon urbain #2
<b>Position est-ouest</b>	7.41 m	14.37 m
<b>Position nord-sud</b>	8.16 m	15.29 m
<b>Position verticale</b>	14.37 m	28.92 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.16 m/s	0.35 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.22 m/s	0.35 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.18 m/s	0.20 m/s
<b>Angle de roulis</b>	0.05°	0.04°
<b>Angle de tangage</b>	0.03°	0.03°
<b>Angle de lacet</b>	0.30°	0.16°

### **7.2.3 Analyse des performances du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré**

Les performances du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré ont été évaluées à l'intérieur des deux scénarios de tests présentés à la section 7.1. Pour ce modèle, 9 paramètres seront évalués soit 3 paramètres de position, 3 paramètres de vitesse et 3 paramètres d'attitude. Le modèle utilisé sera le même pour les deux essais et correspond au modèle présenté à la section 5.3.3. Tout comme pour le modèle d'intégration par couplage lâche, le système a été initialisé à partir des mesures de position et de vitesse provenant du modèle GPS seul et à partir de l'attitude calculée à l'aide de la méthode d'alignement initiale présentée à la section 6.4.

#### **7.2.3.1 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal**

Les résultats obtenus aux sections précédentes ont démontré le bon fonctionnement de chacun des modèles à l'intérieur du scénario en environnement idéal. Il est donc logique de s'attendre à ce que le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré performe bien dans cet environnement. Les 7.39 à 7.44 présentent la position, la vitesse et l'orientation du véhicule calculées à l'aide de ce modèle de même que leur erreur respective. L'erreur quadratique moyenne a également été calculée pour chacun des paramètres évalués et les résultats obtenus sont présentés au Tableau 7.6. En comparant ces résultats avec ceux obtenus pour les autres modèles, il est possible de constater que l'erreur RMS observée est très similaire (parfois supérieure, parfois inférieure) à celle obtenue à l'aide du modèle d'intégration par couplage lâche. Il est donc possible d'affirmer qu'en conditions idéales, les deux modèles d'intégration GPS/INS développés offrent des résultats équivalents. Suite à cette constatation, les résultats obtenus pour ce scénario ne seront pas analysés d'avantages.

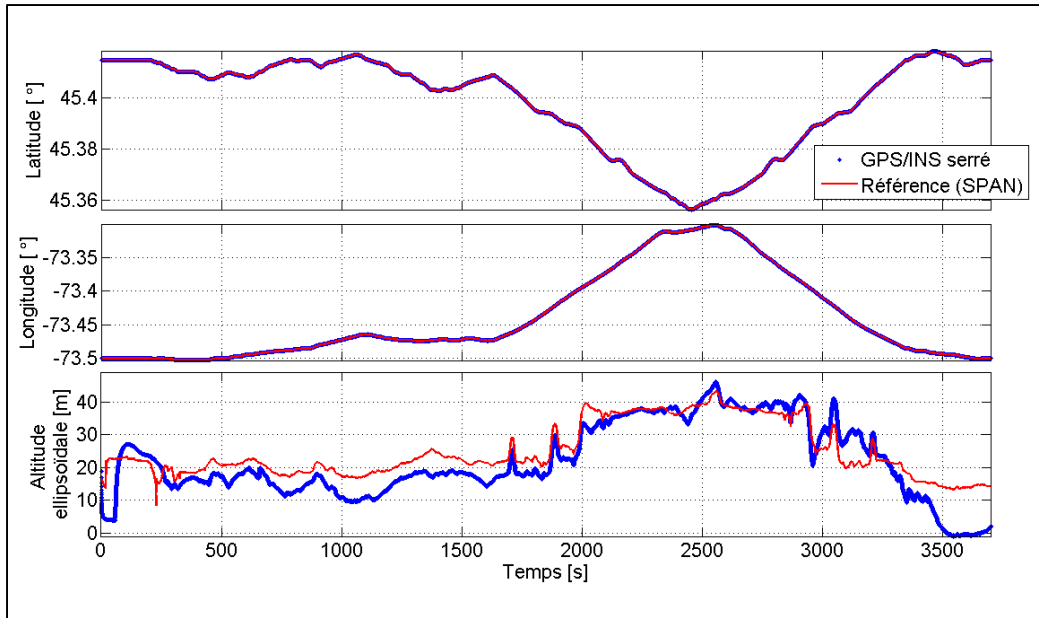


Figure 7-39 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal

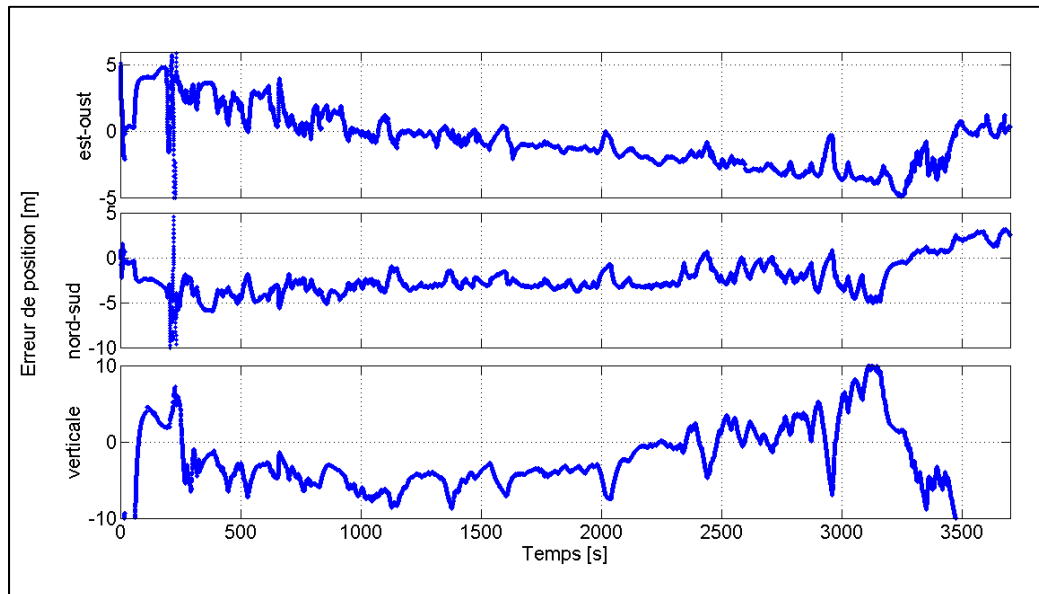


Figure 7-40 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal



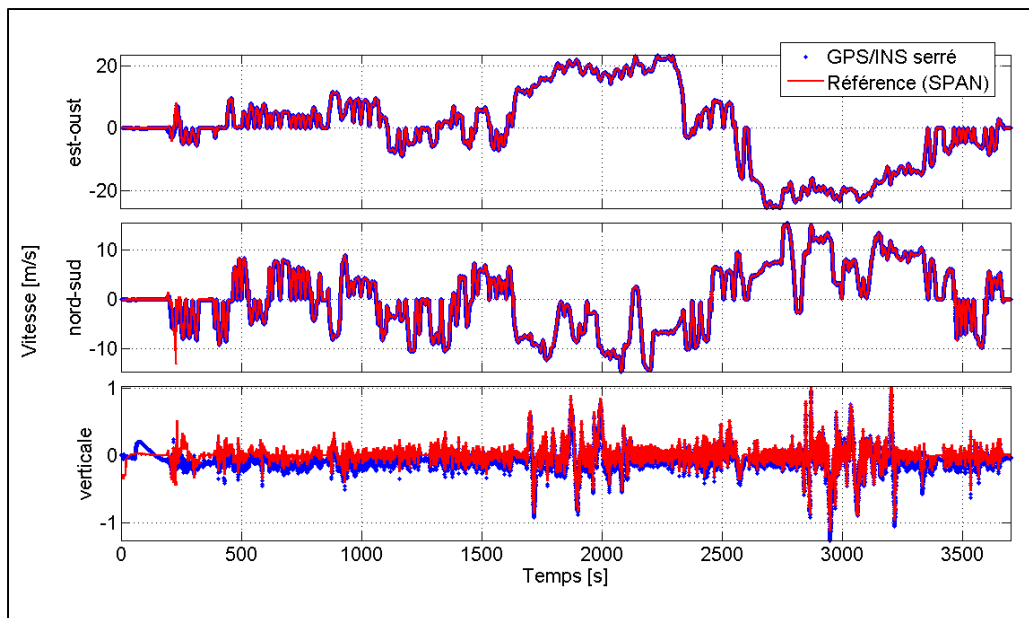


Figure 7-41 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal

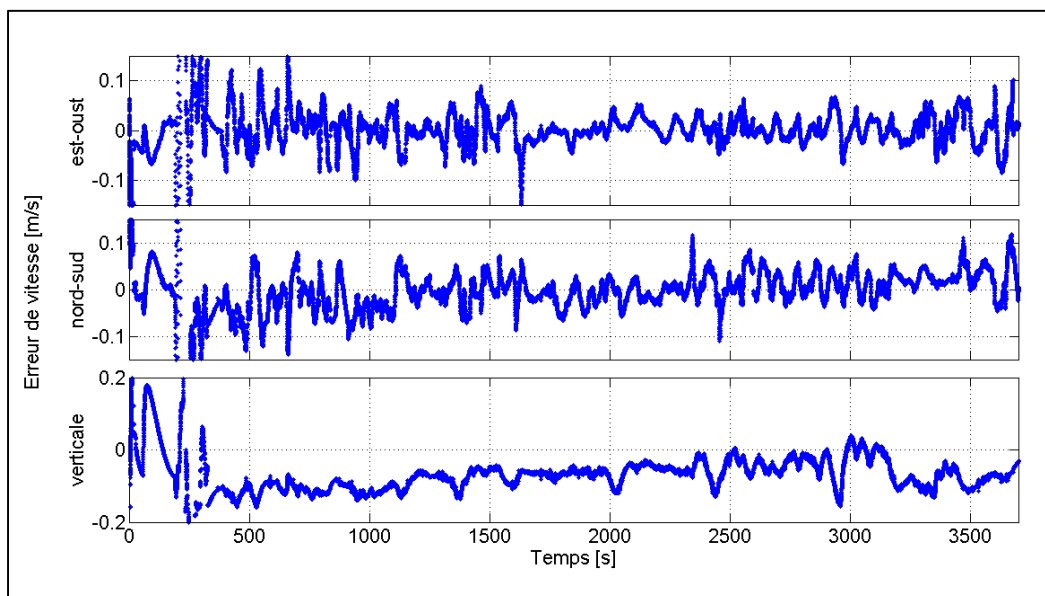


Figure 7-42 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal

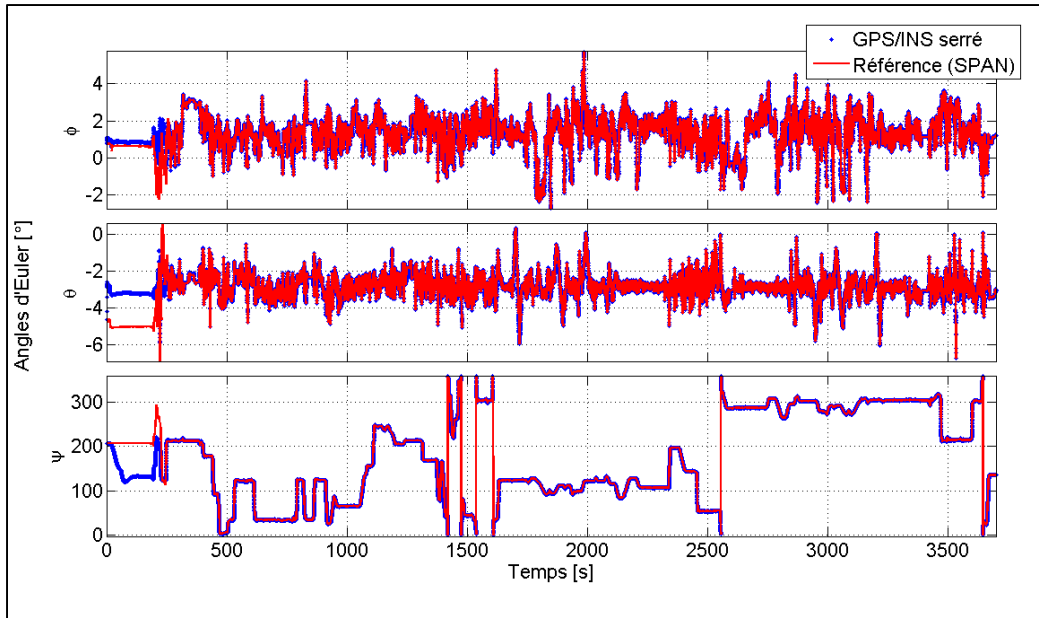


Figure 7-43 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal

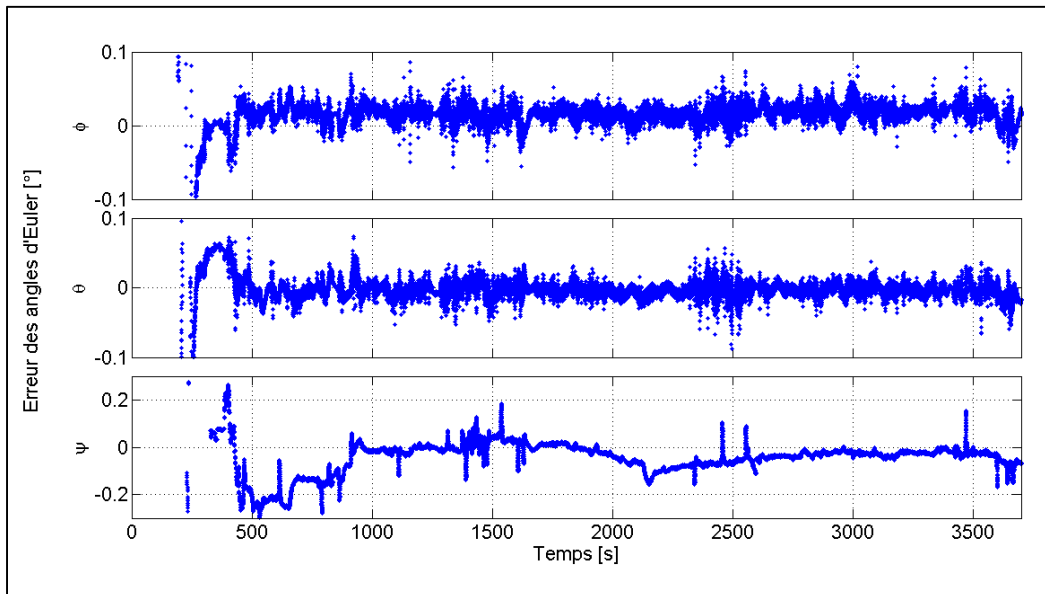


Figure 7-44 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement idéal

Tableau 7.6 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage serré en environnement idéal

	<b>Erreur RMS</b>
<b>Position est-ouest</b>	2.00 m
<b>Position nord-sud</b>	2.85 m
<b>Position verticale</b>	5.74 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.03 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.04 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.08 m/s
<b>Angle de roulis</b>	0.02 °
<b>Angle de tangage</b>	0.01 °
<b>Angle de lacet</b>	0.08 °

### 7.2.3.2 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

Les résultats obtenus à la section 7.2.2.2 ont démontré une amélioration significative des performances du système en environnement difficile lors de l'utilisation du modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche. Toutefois, une dégradation rapide de la solution de navigation est observable lorsque le nombre de satellites visibles descend en dessous de 4. Rappelons que cette situation est observable pour 22.8% du scénario réalisé (*voir Figure 7-14*). En analysant uniquement les deux sections en canyon urbain sévère et en excluant le tunnel Ville-Marie, cette proportion augmente à 27.1%. Dans ces conditions, le modèle GPS seul n'est pas en mesure de calculer une solution de navigation et aucune mesure externe ne peut alors être utilisée par le modèle d'intégration GPS/INS par couplage lâche. Durant ces pannes du système GPS, la solution de navigation obtenue est uniquement basée sur les calculs du système de navigation inertielle et tend donc à diverger. Or, en analysant le scénario plus attentivement, il est possible de constater que la situation où aucun satellite n'est visible ne survient que pour seulement 1% de la trajectoire réalisée en environnement urbain ce qui motive particulièrement l'utilisation d'une approche par couplage serré qui

n'est pas limité par le nombre de satellites visibles. En utilisant ce modèle d'intégration, des mesures externes sont disponibles 99% du temps afin d'assister la solution INS. Il est donc logique de s'attendre à une amélioration significative des performances du système comparativement à la méthode d'intégration par couplage lâche. Tout d'abord, la Figure 7-45 présente une vue d'ensemble de la trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré. Il est alors possible de constater que la solution calculée par ce modèle est très près de la référence fournie par le système SPAN et que les deux courbes sont pratiquement superposées tout au long de la trajectoire.



Figure 7-45 Trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile.

Les figures 7.46 et 7.47 présentent la position géodésique calculée par le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré ainsi que l'erreur de position associée. Tout comme pour le modèle d'intégration par couplage lâche, l'erreur de positionnement maximum observée survient en canyon urbain ainsi qu'à l'intérieur du tunnel Ville-Marie. Cependant, pour le couplage serré, l'erreur est réduite à 40 mètres. L'erreur RMS a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.7. En comparant ces résultats avec ceux obtenus pour le couplage lâche présentés au Tableau 7.5, une diminution moyenne de 41.5% de l'erreur de positionnement est observable lorsque le modèle GPS/INS par couplage serré est utilisé.

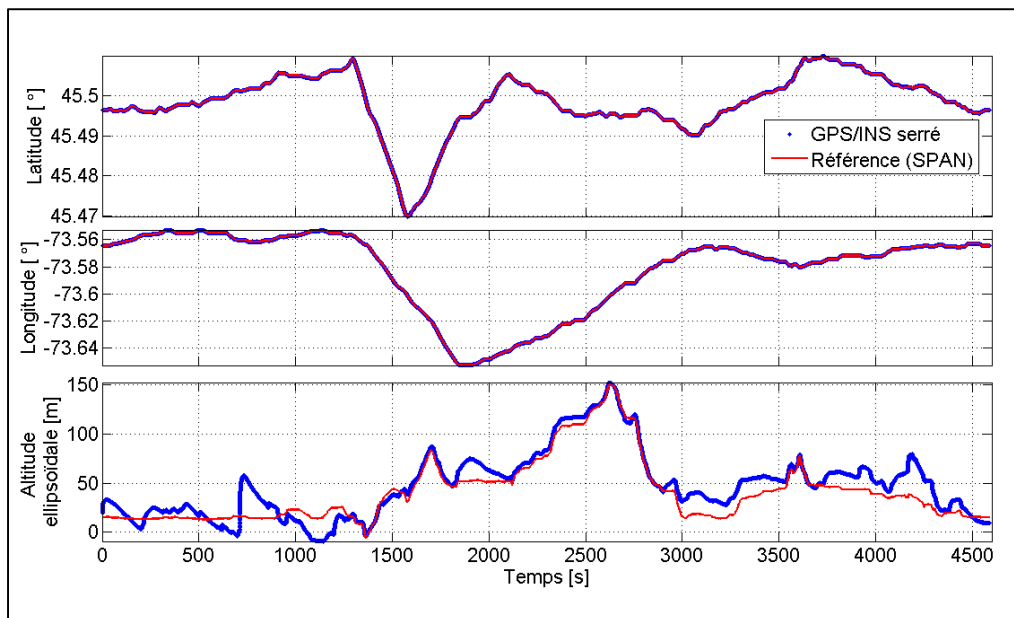


Figure 7-46 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

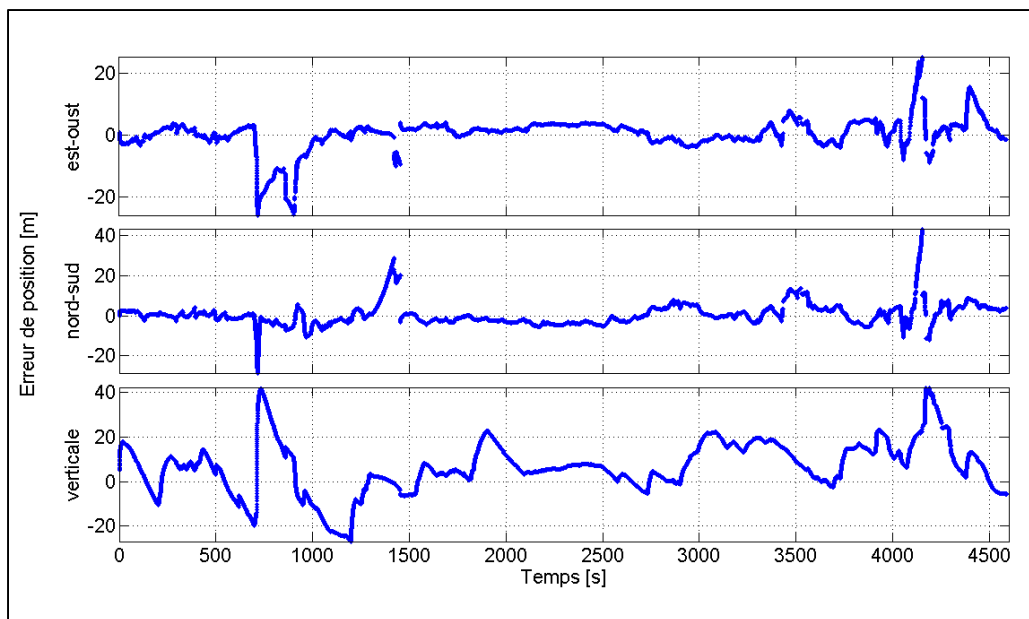


Figure 7-47 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

La vitesse calculée par ce même modèle d'intégration ainsi que l'erreur de vitesse associée sont présentées aux figures 7.48 et 7.49. L'erreur de vitesse maximum observée est de l'ordre de 1 m/s à l'horizontal et de l'ordre de 0.2 m/s à la verticale. De plus, l'erreur RMS de vitesse calculée pour les deux sections en canyon urbain est au Tableau 7.7. En comparant ces résultats avec ceux obtenus pour le couplage lâche, une diminution moyenne de 52.8% de l'erreur de vitesse est observable lorsque le modèle GPS/INS par couplage serré est utilisé.

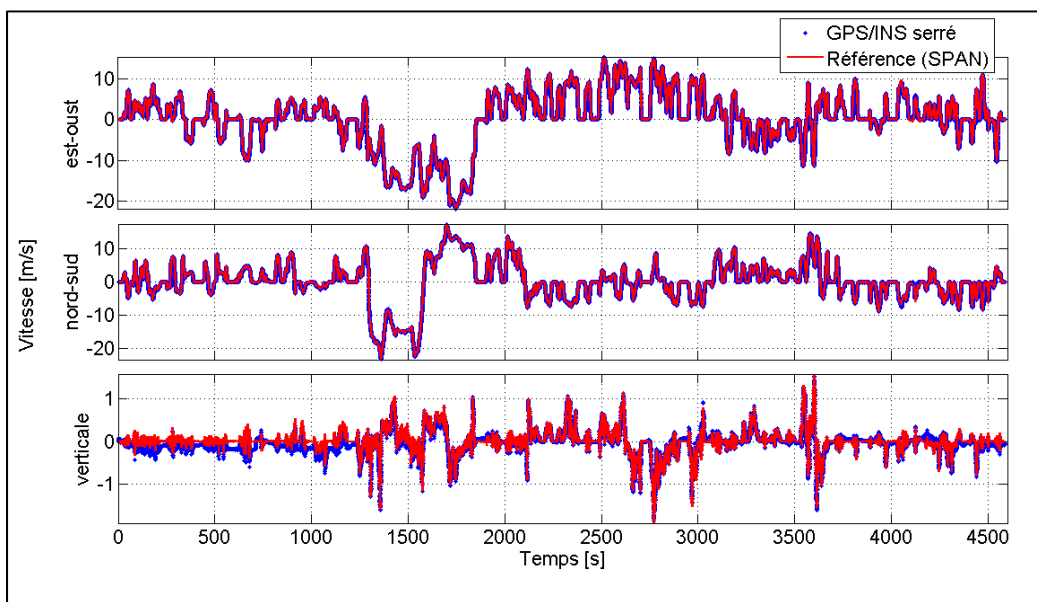


Figure 7-48 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

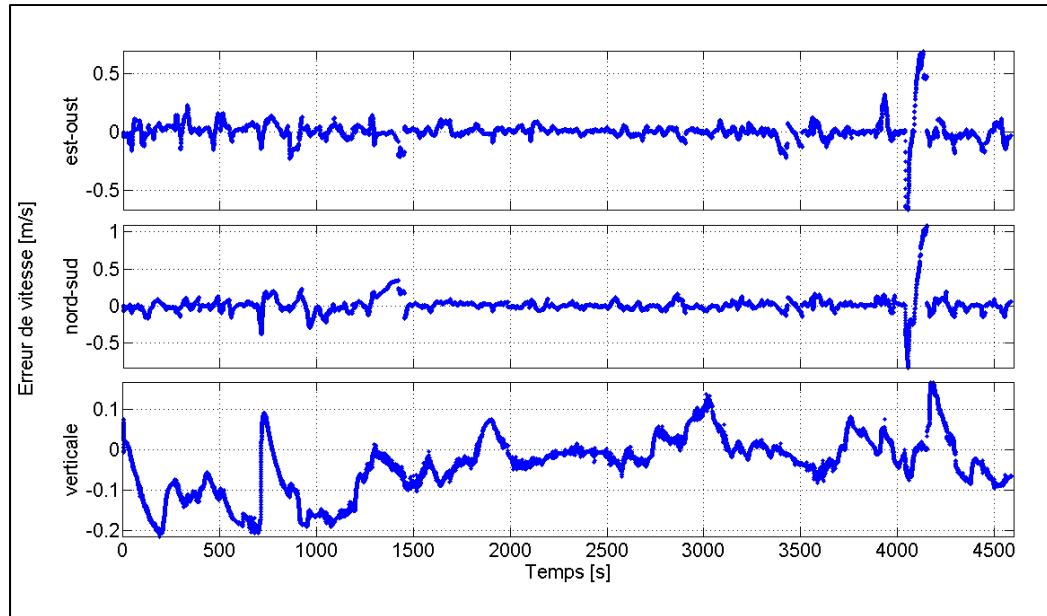


Figure 7-49 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

Enfin, en ce qui concerne l'orientation du véhicule, les angles d'Euler calculés à l'aide de ce modèle sont présentés à la Figure 7-50. L'erreur d'orientation associée est également illustrée à la Figure 7-51. Selon ces figures, l'erreur maximale entre la solution calculée et la référence provenant du système SPAN est d'environ  $0.1^\circ$  pour les angles de roulis et de tangage et de  $0.5^\circ$  pour l'angle de lacet. De plus, l'erreur RMS calculée pour les deux sections en canyon urbain est présentée au Tableau 7.7. Toujours en comparant ces résultats avec ceux obtenus pour le couplage lâche, une diminution moyenne de 38.6% de l'erreur sur les angles d'Euler est observable lorsque le modèle GPS/INS par couplage serré est utilisé.

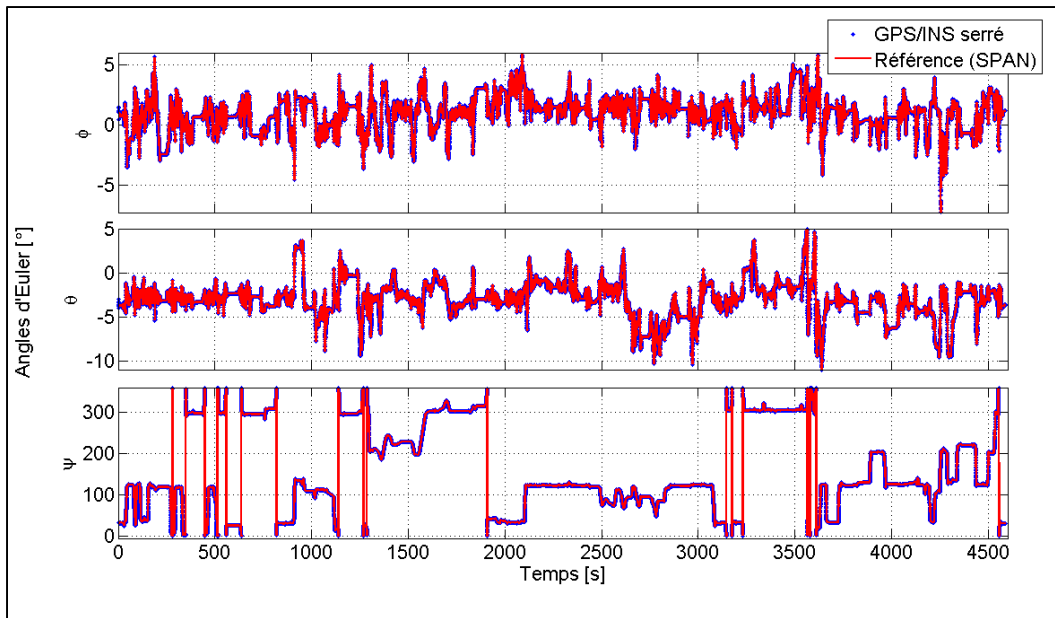


Figure 7-50 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

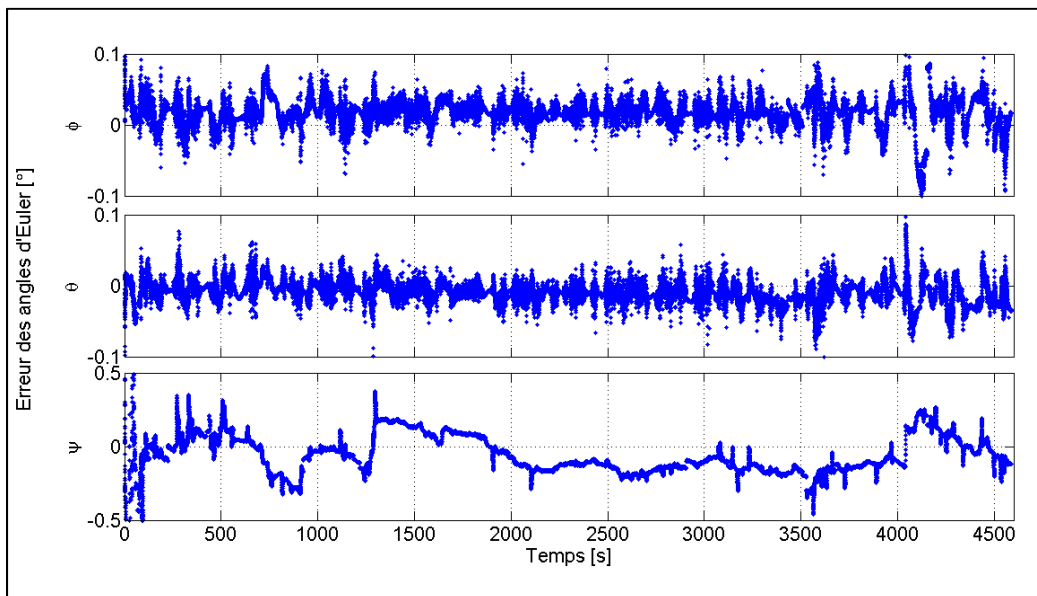


Figure 7-51 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en environnement difficile



Tableau 7.7 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage serré en environnement difficile

	<b>Erreur RMS Canyon urbain #1</b>	<b>Erreur RMS Canyon urbain #2</b>
<b>Position est-ouest</b>	5.33 m	6.26 m
<b>Position nord-sud</b>	3.26 m	7.05 m
<b>Position verticale</b>	13.26 m	16.47 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.06 m/s	0.17 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.07 m/s	0.22 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.13 m/s	0.06 m/s
<b>Angle de roulis</b>	0.02°	0.04°
<b>Angle de tangage</b>	0.01°	0.02°
<b>Angle de lacet</b>	0.16°	0.12°

#### 7.2.4 Conclusion sur les performances des différents modèles d'intégration

Les tests réalisés dans cette section ont permis de valider le fonctionnement des différents algorithmes pour l'utilisation d'une centrale inertielle de grade tactique. Tout d'abord, il a été possible de démontrer que le modèle PV utilisé à l'intérieur du récepteur GPS convient très bien à la dynamique d'un véhicule automobile. De plus, les résultats obtenus ont permis de valider la stabilité du modèle GPS seul en environnement idéal. Toutefois, la précision du positionnement de ce modèle semble être limitée à environ  $\pm 10$  mètres. Par la suite les lacunes du récepteurs GPS utilisé de manière autonome en environnement urbain ont été exposées. Ces lacunes sont principalement caractérisées par des erreurs de positionnement importantes ainsi qu'un décrochage fréquent du récepteur.

Il a ensuite été possible de démontrer que l'intégration des systèmes GPS et INS par la méthode du couplage lâche pouvait offrir une certaine amélioration sur la stabilité, la robustesse et la précision de la solution de navigation en plus de rendre possible l'estimation de l'orientation du véhicule. Cette amélioration est d'autant plus prononcée en

environnement urbain. En effet, cette méthode permet d'éliminer complètement les zones mortes (sans solution de navigation) du scénario en environnement difficile qui étaient présentes lors de l'utilisation du modèle GPS seul et apporte une stabilité accrue à la solution de positionnement (moins d'oscillation). Toutefois, lorsque les signaux GPS sont indisponibles pour une durée prolongée, la solution de navigation calculée tend à diverger et devient rapidement erronée. Une divergence de l'ordre de 100 mètres en 2 minutes a pu être observée à l'intérieur de ce scénario.

Finalement, il a été démontré que la méthode d'intégration GPS/INS par couplage serré offre des performances équivalentes à la méthode d'intégration GPS/INS par couplage lâche en environnement idéale et qu'elle la surpasse de manière significative en environnement difficile. En effet, une diminution moyenne de 41.5%, 52.8% et 38.6% des erreurs de position, de vitesse et d'orientation ont pu être observées à l'intérieur des sections réalisées en canyon urbain. Cette amélioration provient principalement du fait que l'approche par couplage serré utilise les mesures brutes provenant de chacun des satellites de manière indépendante et n'est alors pas limitée à un nombre minimum de satellites visibles comme c'est le cas pour la méthode d'intégration GPS/INS par couplage lâche. Ceci permet donc d'utiliser des mesures externes 99% du temps en environnement urbain comparativement à seulement 72.9% du temps pour le couplage lâche.

### **7.3 Analyse des performances du système à faible coût en environnement difficile**

La section précédente a permis de comparer les différents modèles d'intégration GPS/INS avec la solution d'un récepteur GPS utilisé de manière autonome. Cependant, cette analyse a été réalisée uniquement pour l'utilisation de la centrale inertielle HG1700. La section suivante vise à analyser les performances des différents modèles lors de l'utilisation de la centrale inertielle à faible coût nIMU en environnement difficile. Dans un premier temps, la calibration des capteurs ne sera pas prise en compte de même que le modèle d'estimation des erreurs. La contribution réelle de ces modèles sera évaluée par la suite. Puisqu'il a été démontré à la section précédente que la méthode d'intégration GPS/INS par couplage serré

était nettement supérieure à l'intégration par couplage lâche en environnement difficile, seule cette approche sera évaluée dans cette section.

### 7.3.1 Modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré pour l'utilisation d'une centrale inertielle à faible coût

Les capteurs inertiels à faible coût sont reconnus pour leur niveau d'erreur important qui cause généralement une divergence très rapide de la solution de navigation en l'absence de mesures externes. Or, à l'intérieur d'un canyon urbain sévère tel qu'il est question pour le scénario réalisé, les mesures externes (GPS) sont souvent absentes et il est donc attendu que la solution obtenue uniquement par l'utilisation d'une méthode d'intégration GPS/INS par couplage serré classique fournisse une solution instable en environnement difficile. La Figure 7-52 qui illustre la trajectoire calculée par cette méthode confirme cette hypothèse. En effet, bien que la solution obtenue soit précise pour les sections où la visibilité des satellites est excellente, l'erreur de positionnement en canyon urbain est très élevée.



Figure 7-52 Trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

Les figures 7.53 et 7.54 présentent la position géodésique calculée par ce modèle ainsi que l'erreur de positionnement associée. Sur ces figures, il est possible de constater l'instabilité

de la solution à l'intérieur des deux sections en canyon urbain sévère. En effet, à l'intérieur de ces sections, l'erreur de position peut atteindre à plusieurs reprises des pics de plus de 200 mètres d'erreur sur chacun des axes. De plus, lorsque le véhicule traverse le tunnel Ville-Marie, la divergence de la solution est immédiate et l'erreur observée à la sortie du tunnel après 2 minutes de navigation autonome est de l'ordre de 10 kilomètres. Sur la Figure 7-55, il est possible de constater qu'après seulement 30 secondes de blocage des signaux GPS, l'erreur de position est de l'ordre de 300 mètres. L'erreur quadratique moyenne de position a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.8. Cette erreur est de l'ordre de 50 mètres (horizontal et vertical) pour la première section en canyon urbain et de l'ordre de 20 mètres horizontal et 50 mètres vertical pour la seconde section.

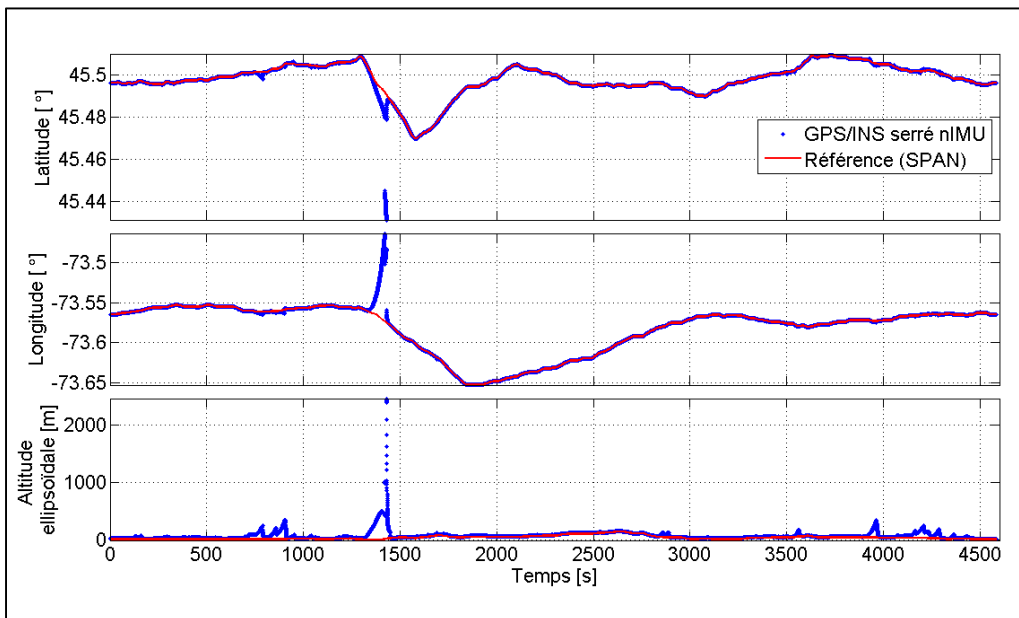


Figure 7-53 Position géodésique calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

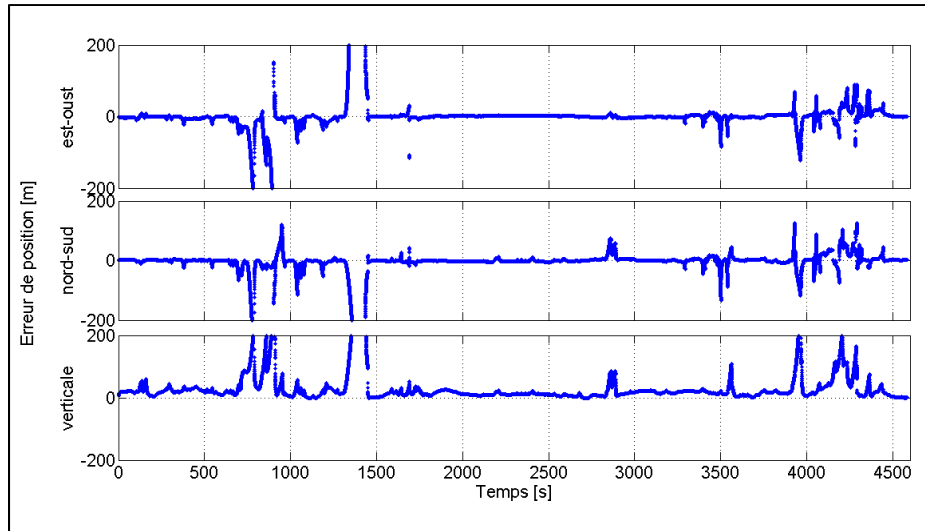


Figure 7-54 Erreur de position pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

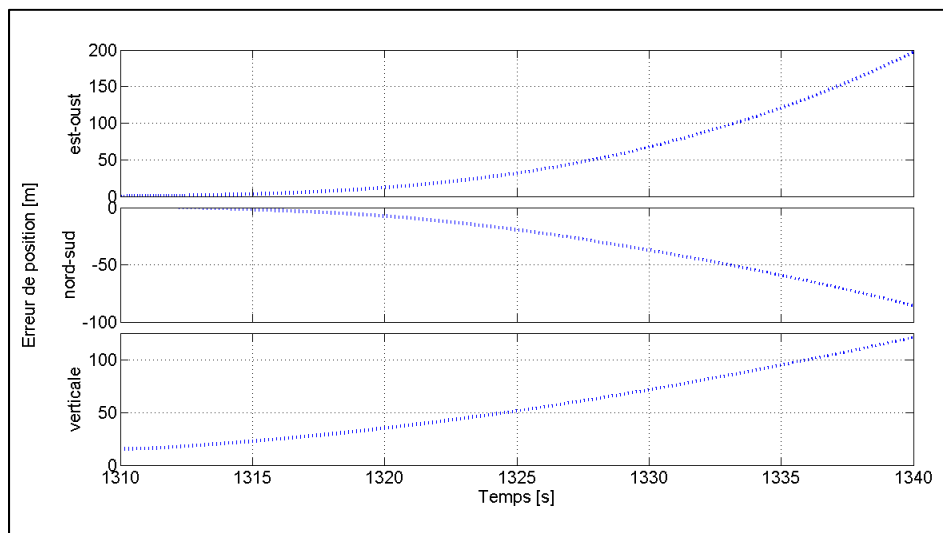


Figure 7-55 Vue rapprochée de l'erreur de position pour une section où les signaux GPS ne sont pas disponibles

La vitesse calculée par ce modèle selon le repère de navigation ainsi que l'erreur associée sont présentées aux 7.56 et 7.57. Tout comme pour la position, la vitesse calculée est très instable lorsque le véhicule traverse un canyon urbain sévère et diverge très rapidement à

l'intérieur du tunnel Ville-Marie. L'erreur RMS de vitesse pour les deux sections en canyon urbain a également été calculée et les résultats sont présentés au Tableau 7.8.

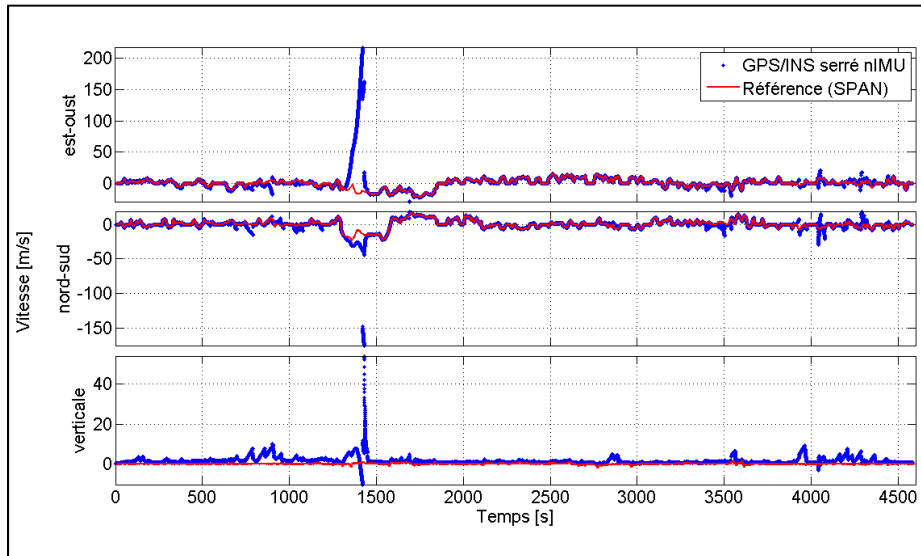


Figure 7-56 Vitesse calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

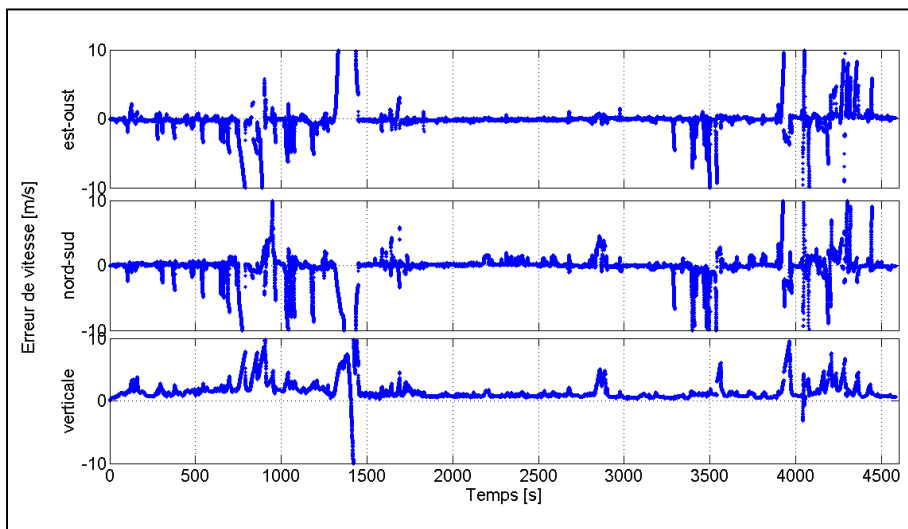


Figure 7-57 Erreur de vitesse pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

L'orientation du véhicule calculée par ce modèle ainsi que l'erreur associée est présentée aux 7.58 et 7.59. Sur ces figures, il est possible de constater une erreur importante lorsque le véhicule traverse un canyon urbain. En effet, des pics d'erreur pouvant atteindre jusqu'à  $10^\circ$  sont régulièrement observables sur chacun des axes du véhicule. De plus, à la sortie du tunnel Ville-Marie, l'erreur d'orientation accumulée lors du blocage des signaux GPS atteint jusqu'à  $20^\circ$  sur les axes de roulis et de tangage et jusqu'à  $40^\circ$  sur l'axe de lacet. Finalement, Il est également possible d'observer une erreur importante de l'ordre de  $60^\circ$  sur l'angle de lacet à la toute fin de la trajectoire. Bien que la source exacte de cette erreur soit inconnue de l'auteur de ce mémoire, la raison pour laquelle cette dernière prend un certain temps avant d'être corrigée est que le véhicule est à l'arrêt durant cette période et que selon le modèle utilisé, l'erreur sur l'angle de lacet ne peut être corrigée que lorsque le véhicule est en mouvement. L'erreur RMS des angles d'Euler a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.8.

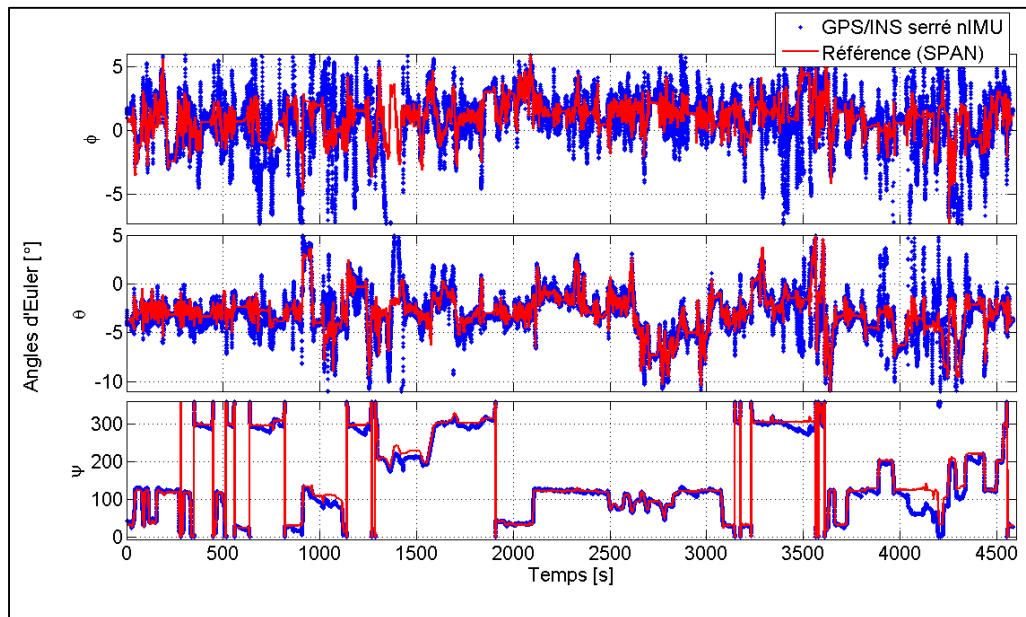


Figure 7-58 Angles d'Euler calculés à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

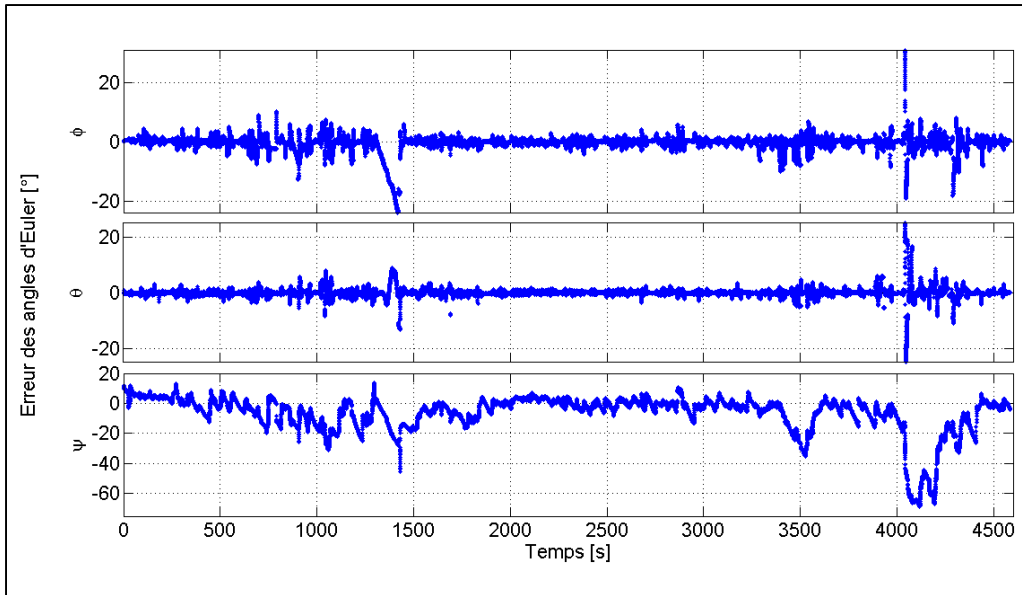


Figure 7-59 Erreur sur les angles d'Euler pour le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

Tableau 7.8 Erreur quadratique moyenne de la solution GPS/INS par couplage serré à faible coût en environnement difficile

	<b>Erreur RMS Canyon urbain #1</b>	<b>Erreur RMS Canyon urbain #2</b>
<b>Position est-ouest</b>	45.15 m	17.56 m
<b>Position nord-sud</b>	40.93 m	21.27 m
<b>Position verticale</b>	57.94 m	46.93 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	2.53 m/s	1.99 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	2.54 m/s	2.84 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	2.58 m/s	1.93 m/s
<b>Angle de roulis</b>	2.00°	2.60°
<b>Angle de tangage</b>	1.17°	2.40°
<b>Angle de lacet</b>	9.83°	21.78°



La solution obtenue à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré pour l'utilisation d'une centrale inertielle à faible coût est très instable en environnement difficile et les avantages de ce modèle comparativement à la solution GPS autonome sont uniquement perceptibles lorsque les signaux GPS sont momentanément perdus (durée inférieure à 10 secondes). Ceci motive donc l'utilisation des méthodes de correction des erreurs déterministes et stochastiques contenues sur les mesures inertielles.

### 7.3.2 Impact de la calibration des capteurs sur la solution de navigation à faible coût en environnement difficile

Afin d'évaluer l'impact de la calibration des capteurs inertiels à faible coût sur la solution de navigation en environnement difficile, la procédure de calibration basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu présentée à la section 6.1.3 a été réalisée au tout début du scénario. Étant donné que les mesures de magnétomètres ne sont pas utilisées, seul les accéléromètres et les gyroscopes ont été calibrés. Les résultats de cette procédure de calibration sont présentés ci-dessous :

$$\mathbf{E}_a = \begin{bmatrix} 1.00092 & 0.00014 & -0.00015 \\ 0.00014 & 0.99913 & 0.00037 \\ -0.00015 & 0.00037 & 1.00187 \end{bmatrix} \quad \underline{b}_a = \begin{bmatrix} -0.0118 \\ -0.0016 \\ -0.0146 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$\mathbf{E}_g = \begin{bmatrix} 1.00000 & 0.00000 & -0.00000 \\ 0.00000 & 1.00000 & -0.00000 \\ -0.00000 & -0.00000 & 1.00000 \end{bmatrix} \quad \underline{b}_g = \begin{bmatrix} -0.0017 \\ 0.0003 \\ -0.0041 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

À première vue, ces erreurs peuvent sembler être relativement faibles et négligeables, mais il sera démontré dans cette section que la correction de ces dernières permet d'améliorer de façon significative la solution de navigation. Tout d'abord, la Figure 7-60 illustre la trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en tenant compte des paramètres de calibration. Sur cette figure, il est possible de remarquer une amélioration notable de la stabilité de la solution à plusieurs endroits, particulièrement en canyon urbain.



Figure 7-60 Trajectoire calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

Les figures 7.61 et 7.62 présentent la position géodésique calculée en tenant compte des paramètres de calibration ainsi que l'erreur de position associée. Sur ces figures, il est possible de constater une amélioration de la stabilité de la solution à l'intérieur des deux sections en canyon urbain sévère. En effet, l'amplitude des pics d'erreur observables à l'intérieur de ces sections a diminué de façon significative, ce qui peut être observé à la Figure 7-64 qui présente l'erreur de position d'une section du scénario en environnement difficile. Toutefois, lorsque le véhicule traverse le tunnel Ville-Marie, une divergence rapide de la solution est toujours observable. À la sortie du tunnel cette erreur est désormais de l'ordre de 5 kilomètres, ce qui correspond à une amélioration significative. Cette amélioration est mise en évidence à la Figure 7-63, sur laquelle il est possible de constater qu'après 30 secondes de blocage des signaux GPS, l'erreur de position est passée d'environ 300 mètres à environ 90 mètres. L'erreur quadratique moyenne de position a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.9. En moyenne, une diminution de 57.5% de l'erreur de position est observable lorsque les paramètres de calibration sont considérés.

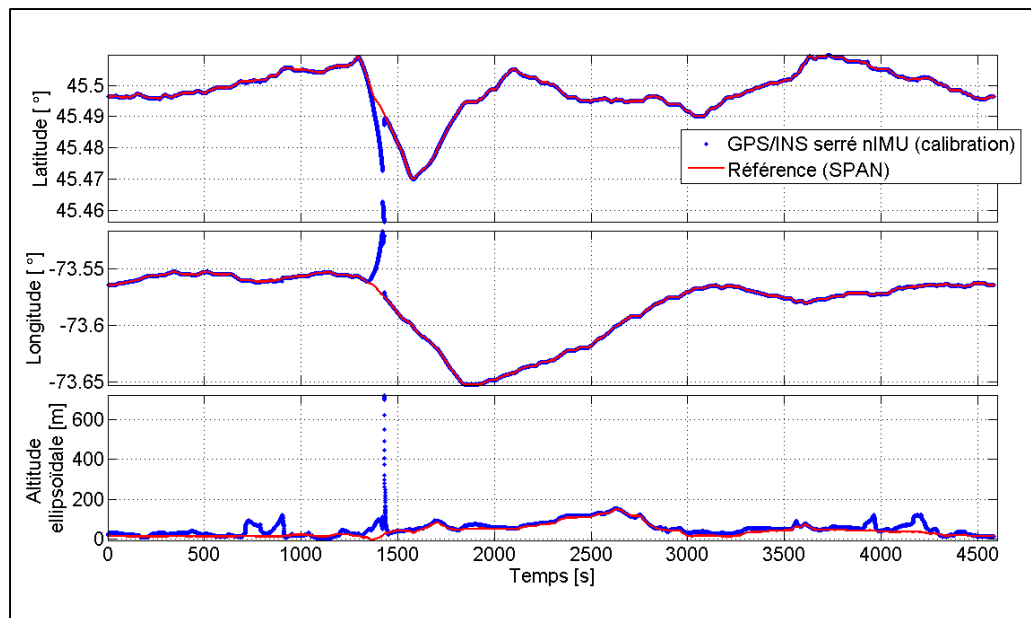


Figure 7-61 Position géodésique calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

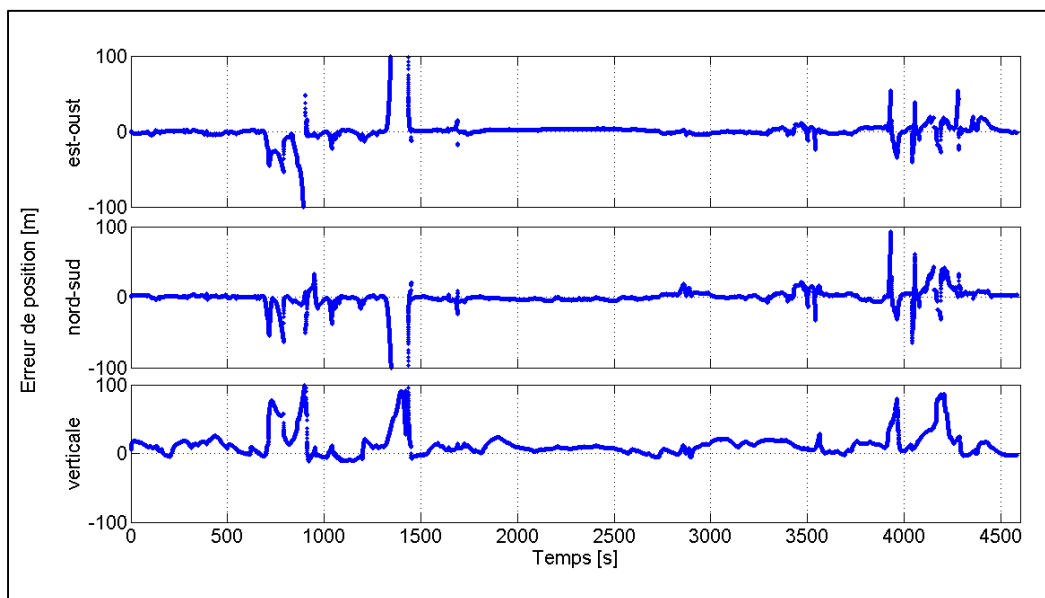


Figure 7-62 Erreur de position calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

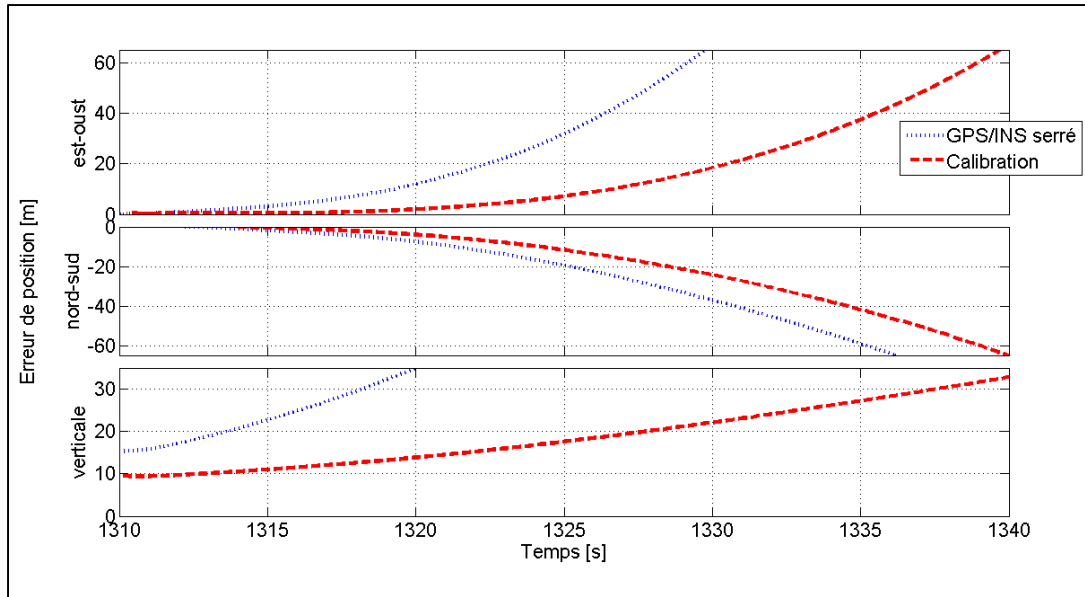


Figure 7-63 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de la calibration pour une section où les signaux GPS ne sont pas disponibles

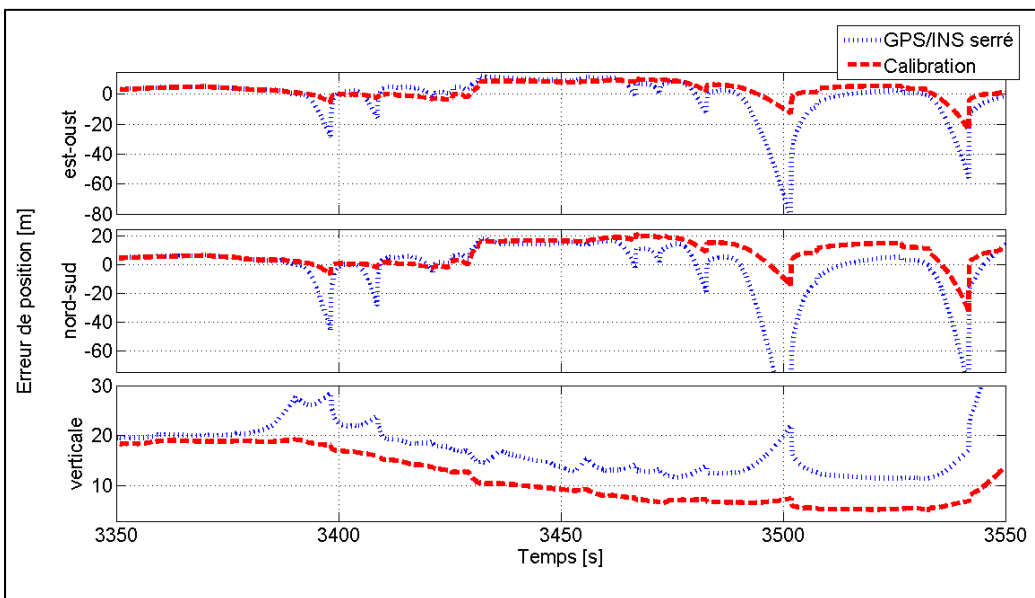


Figure 7-64 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de la calibration pour une section en canyon urbain sévère

La vitesse calculée par ce modèle selon le repère de navigation en tenant compte des paramètres de calibration ainsi que l'erreur associée sont présentées aux figures 7.65 et 7.66.

Tout comme pour la position, il est également possible d'observer une amélioration de la stabilité de la vitesse calculée lorsque le véhicule traverse un canyon urbain sévère. De plus, la divergence observée à la sortie du tunnel Ville-Marie a également diminuée de manière significative. L'erreur RMS de vitesse pour les deux sections en canyon urbain a également été calculée et les résultats sont présentés au Tableau 7.9. En moyenne, une diminution de 66.7% de l'erreur de vitesse est observable lorsque les paramètres de calibration sont considérés.

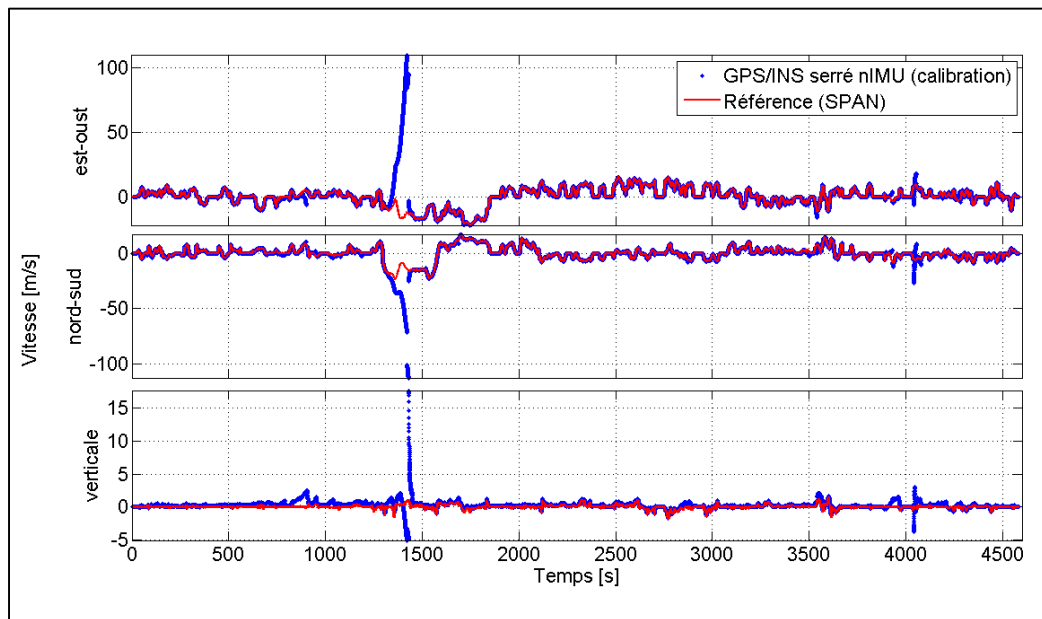


Figure 7-65 Vitesse calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

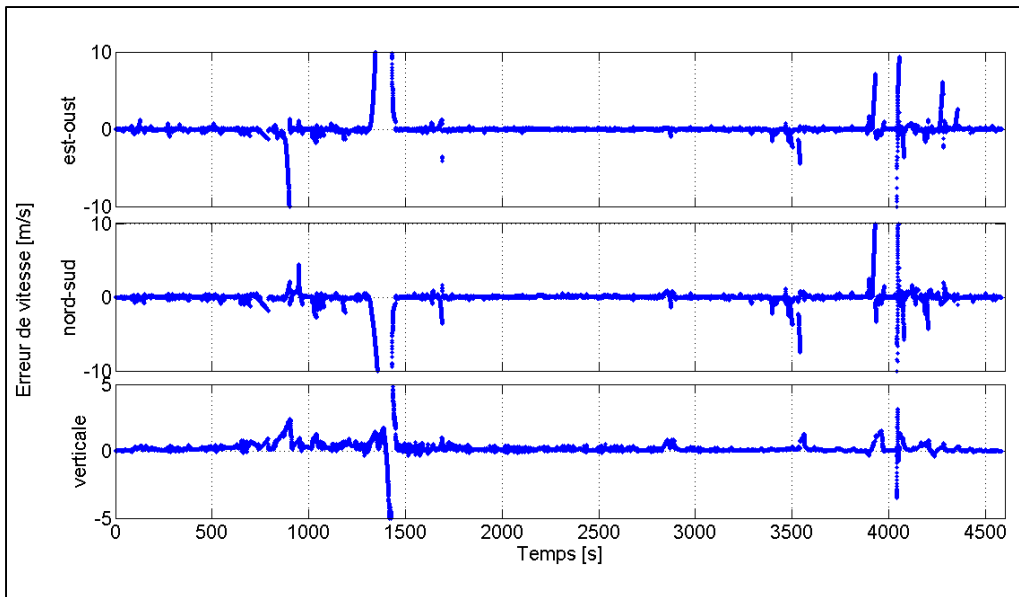


Figure 7-66 Erreur de vitesse calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

Finalement, l'orientation du véhicule calculée en tenant compte des paramètres de calibration ainsi que l'erreur associée est présentée aux 7.67 et 7.68. En comparant ces figures avec celles présentées à la section précédente, il est possible de constater une amélioration significative de la stabilité des angles d'Euler. En effet, les pics d'erreur importants qui étaient observables en canyon urbain ont pratiquement disparus et l'erreur obtenue à la sortie du tunnel Ville-Marie est désormais de l'ordre de  $10^\circ$  sur chacun des axes. L'erreur significative qui était observables vers la fin de la trajectoire est cependant toujours présente, mais cette dernière est désormais de l'ordre de  $50^\circ$ . L'erreur RMS des angles d'Euler a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.9. En moyenne, une diminution de 50.6% de l'erreur sur les angles d'Euler est observable lorsque les paramètres de calibration sont considérés.

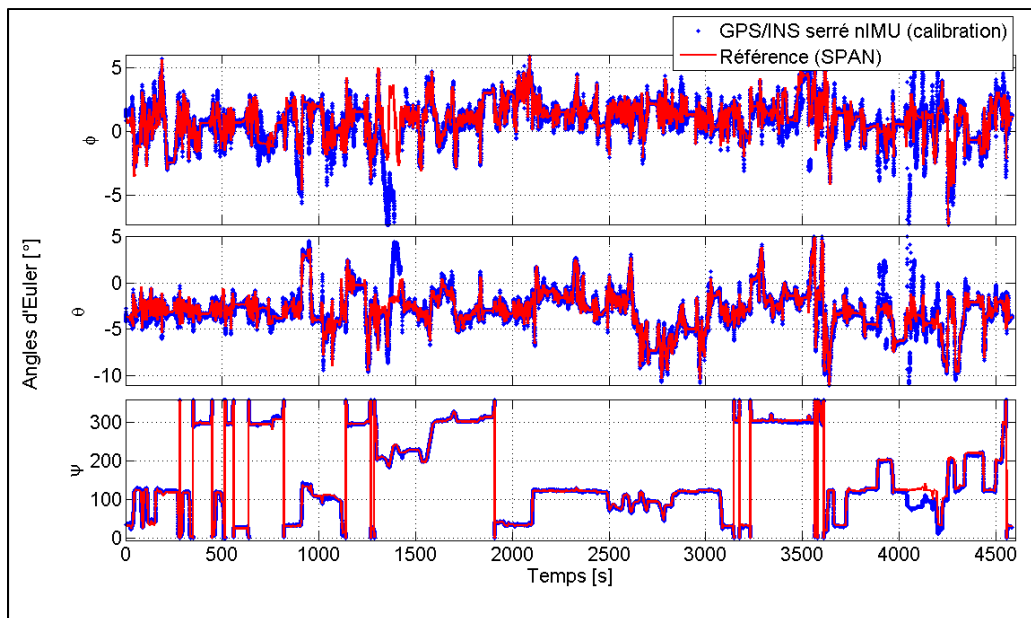


Figure 7-67 Angles d'Euler calculés en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

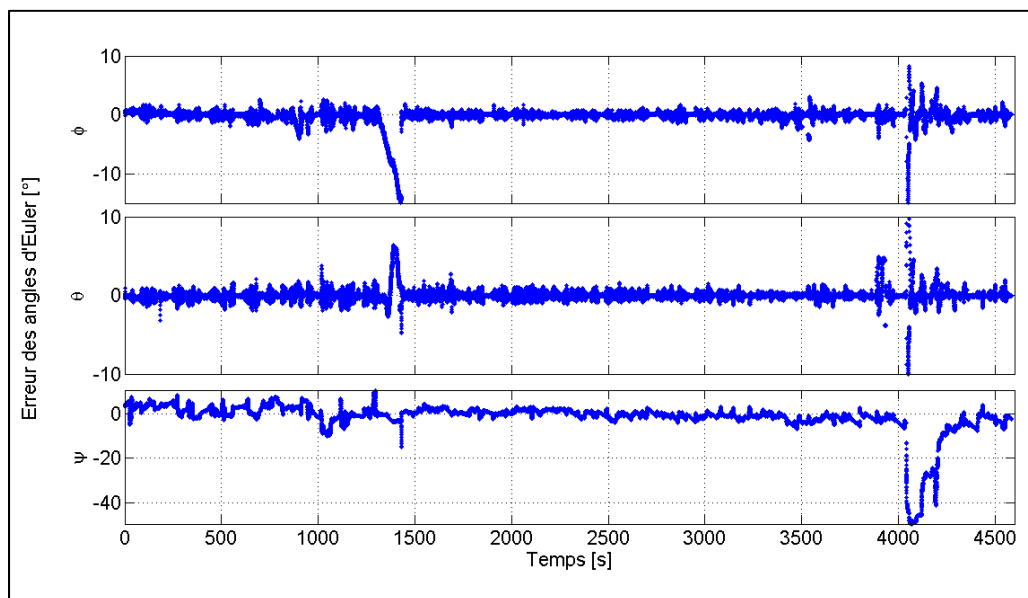


Figure 7-68 Erreur sur les angles d'Euler calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

Tableau 7.9 Erreur quadratique moyenne de la solution calculée en tenant compte des paramètres de calibration des capteurs inertiels à faible coût

	<b>Erreur RMS Canyon urbain #1</b>	<b>Erreur RMS Canyon urbain #2</b>
<b>Position est-ouest</b>	18.86 m	8.04 m
<b>Position nord-sud</b>	9.91 m	11.34 m
<b>Position verticale</b>	24.65 m	22.21 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.91 m/s	1.04 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.52 m/s	1.53 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.52 m/s	0.33 m/s
<b>Angle de roulis</b>	0.69°	1.85°
<b>Angle de tangage</b>	0.46°	1.42°
<b>Angle de lacet</b>	3.53°	12.34°

### 7.3.3 Impact du modèle d'estimation des erreurs stochastiques sur la solution de navigation à faible coût en environnement difficile

De manière à évaluer l'impact de l'estimation des erreurs stochastiques des capteurs inerties à faible coût sur la solution de navigation en environnement difficile, le modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré a été augmenté par le modèle d'estimation des erreurs stochastiques des accéléromètres et des gyroscopes présenté à la section 5.3.4. Le modèle résultant est le suivant :

$$\delta \dot{\underline{x}} = \mathbf{F} \cdot \delta \underline{x} + \mathbf{G} \cdot \underline{w} \quad (7.3)$$



$$\begin{bmatrix} \delta \dot{V}^N \\ \delta \dot{R}^N \\ \dot{\psi}^N \\ \delta \dot{b}_{clk} \\ \delta \dot{d}_{clk} \\ \delta \dot{f}^B \\ \delta \dot{\omega}_{IB}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{V}^N \\ \delta \underline{R}^N \\ \underline{\psi}^N \\ \delta b_{clk} \\ \delta d_{clk} \\ \delta f^B \\ \delta \underline{\omega}_{IB}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_B^N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_B^N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\eta}_f \\ \underline{\eta}_\omega \\ \underline{\eta}_b \\ \underline{\eta}_d \\ \underline{\eta}_{\delta f} \\ \underline{\eta}_{\delta \omega} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

dans lequel :

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -(\underline{\omega}_{EN}^N + 2\underline{\omega}_{IE}^N) & \mathbf{F}_{12} & (\mathbf{C}_B^N \underline{f}^B) \times & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & -(\underline{\omega}_{EN}^N \times) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\underline{\omega}_{IN}^N \times) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -\beta_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_\omega \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Ce modèle permet donc d'estimer les 11 états du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en plus des 6 états de biais des capteurs inertiels. L'ordre de grandeur des paramètres de bruit du modèle stochastique a été sélectionnée basé sur les résultats des analyses de la variance d'Allan et de la fonction d'autocorrélation des mesures tel que :

$$\beta_f = 1/1500 \quad \beta_\omega = 1/1000 \quad (7.7)$$

$$\underline{\eta}_f \sim N(0, 5 \cdot 10^{-4}) \quad \underline{\eta}_\omega \sim N(0, 10^{-3}) \quad (7.8)$$

$$\underline{\eta}_{\delta f} \sim N(0, 5 \cdot 10^{-5}) \quad \underline{\eta}_{\delta \omega} \sim N(0, 5 \cdot 10^{-7}) \quad (7.9)$$

Tout d'abord, les figures 7.69 et 7.70 présentent les paramètres de biais estimés respectivement pour les accéléromètres et les gyroscopes de la centrale inertielle nIMU pour la durée totale du scénario en environnement difficile. Il est donc possible de constater une

variation importante de ces derniers à l'intérieur du même scénario (durée d'environ une heure). La source la plus probable de cette variation est la variation de température à l'intérieur de la centrale inertielle qui est illustrée à la Figure 7-71. En comparant l'allure des courbes de biais et de température, il est possible de constater une corrélation importante qui vient fortement appuyer l'hypothèse émise précédemment. Il serait donc intéressant, dans des travaux futurs, d'étudier cette piste afin d'améliorer le modèle d'estimation des erreurs stochastiques.

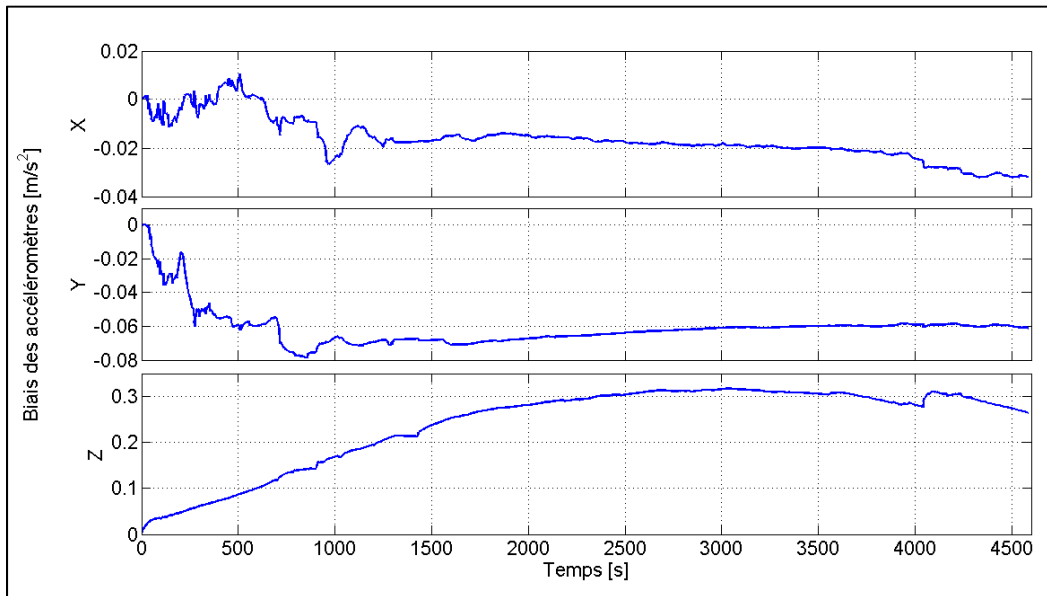


Figure 7-69 Biais des accéléromètres estimés pour la centrale inertielle nIMU

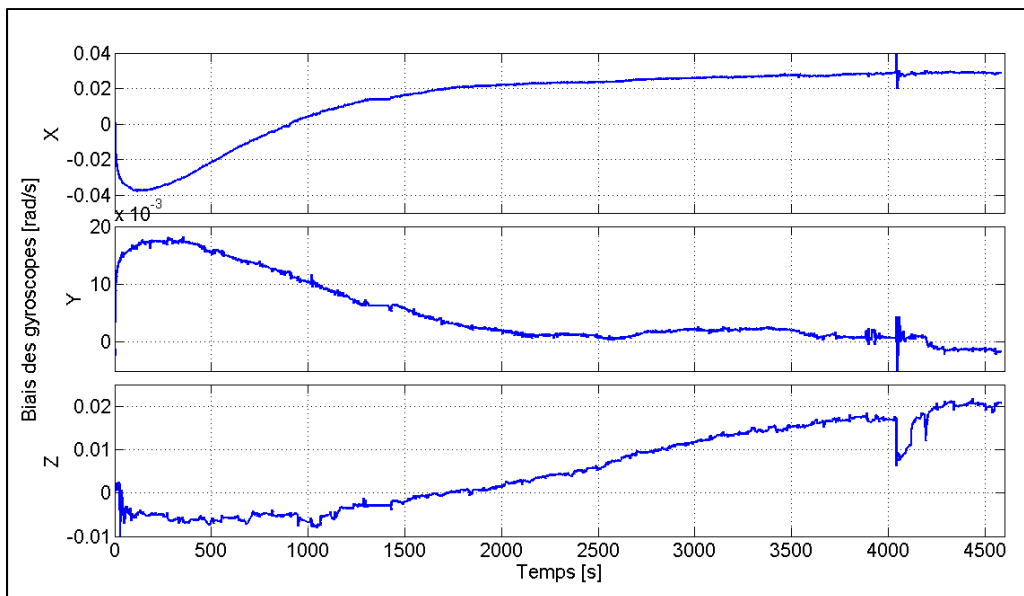


Figure 7-70 Biases des gyroscopes estimés pour la centrale inertielle nIMU

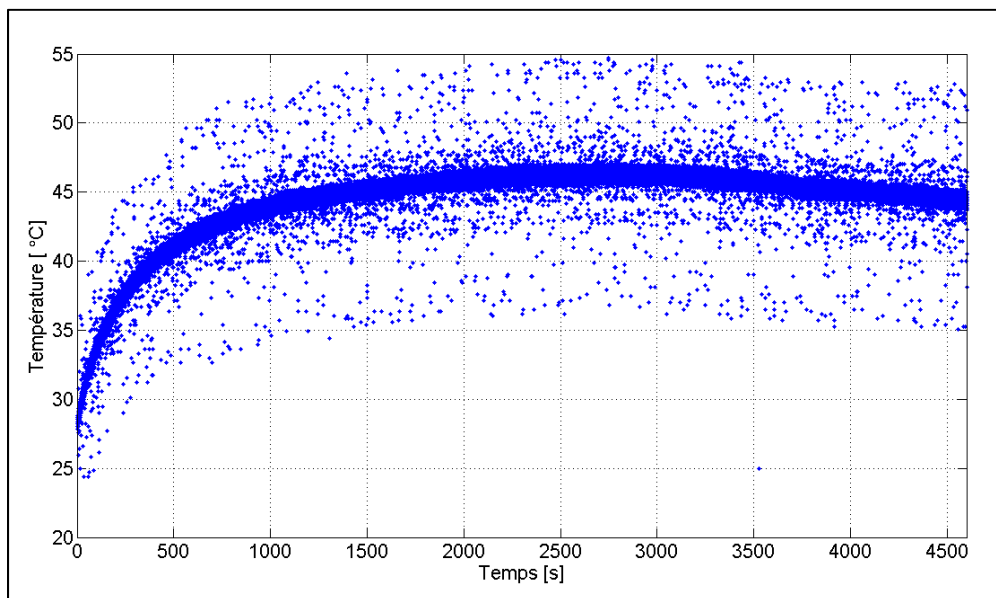


Figure 7-71 Température à l'intérieur de la centrale inertielle nIMU

La Figure 7-72 illustre la trajectoire calculée à l'aide du modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré en tenant compte à la fois des paramètres de calibration ainsi que des

paramètres de biais estimés. Sur cette figure, il n'est pas vraiment possible de distinguer l'impact de l'estimation des erreurs stochastiques.



Figure 7-72 Trajectoire calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

Les figures 7.73 et 7.74 présentent la position géodésique ainsi que l'erreur associée obtenue à l'aide de ce modèle. Sur ces figures, il est possible de constater une légère amélioration de la stabilité de la solution, principalement en environnement urbain. En effet, l'amplitude des pics d'erreur observés a légèrement diminué, ce qui peut être observé à la Figure 7-76 qui présente l'erreur de position d'une section en environnement difficile. De plus, il est possible d'observer une diminution importante de l'erreur observée à la sortie du tunnel Ville-Marie. Cette erreur est passée d'environ 5 km à environ 3 km. Cette amélioration est mise en évidence à la Figure 7-75, sur laquelle il est possible de constater qu'après 30 secondes de blocage des signaux GPS, l'erreur de position est passée d'environ 90 mètres à environ 45 mètres. L'erreur quadratique moyenne de position a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.10. En moyenne, une diminution de 10.8% de l'erreur de position est observable lorsque l'estimation des erreurs stochastiques est réalisée.

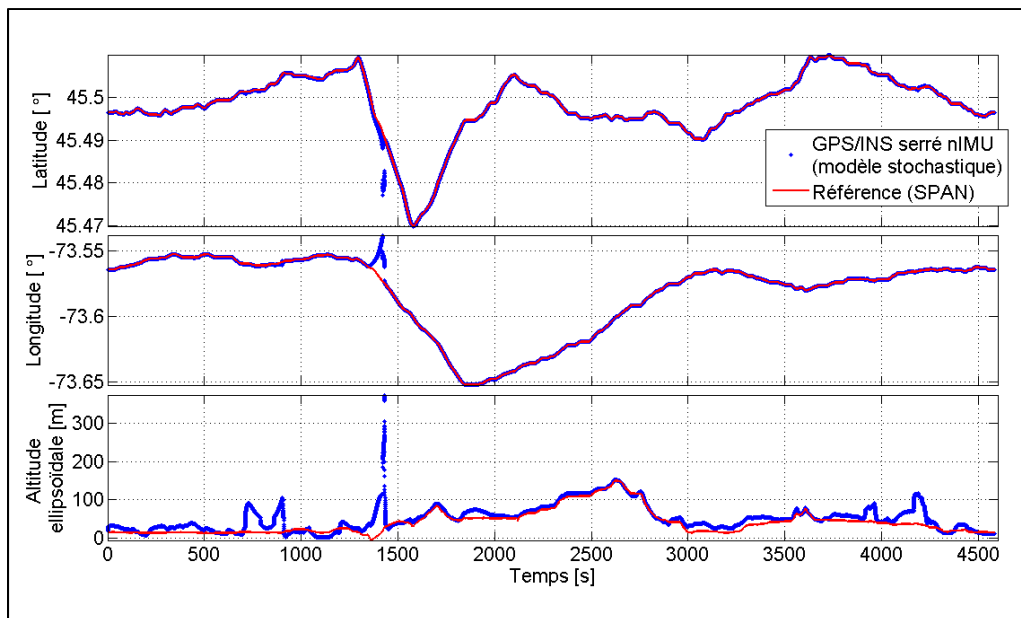


Figure 7-73 Position géodésique calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

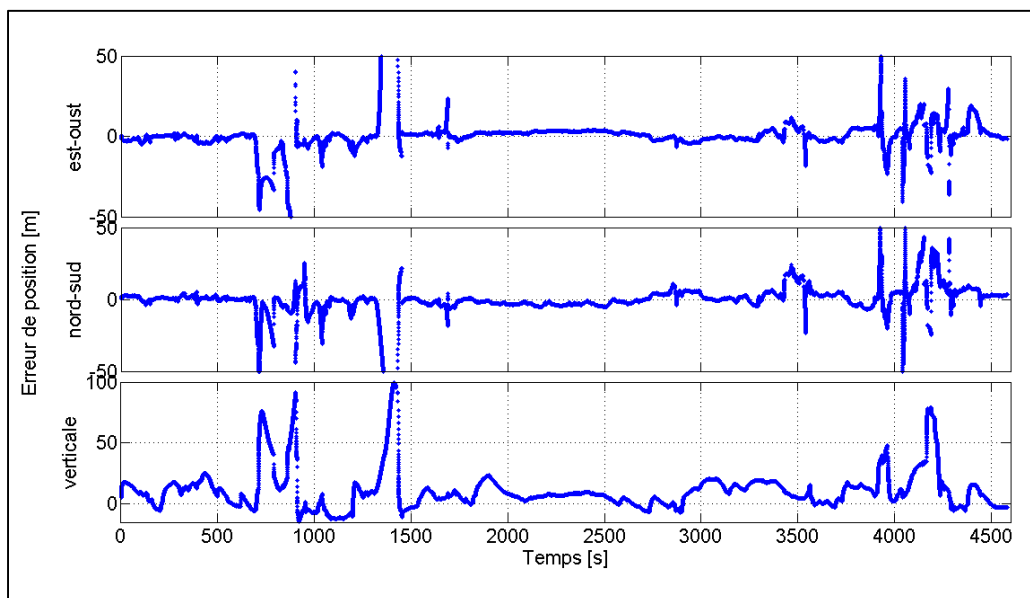


Figure 7-74 Erreur de position calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

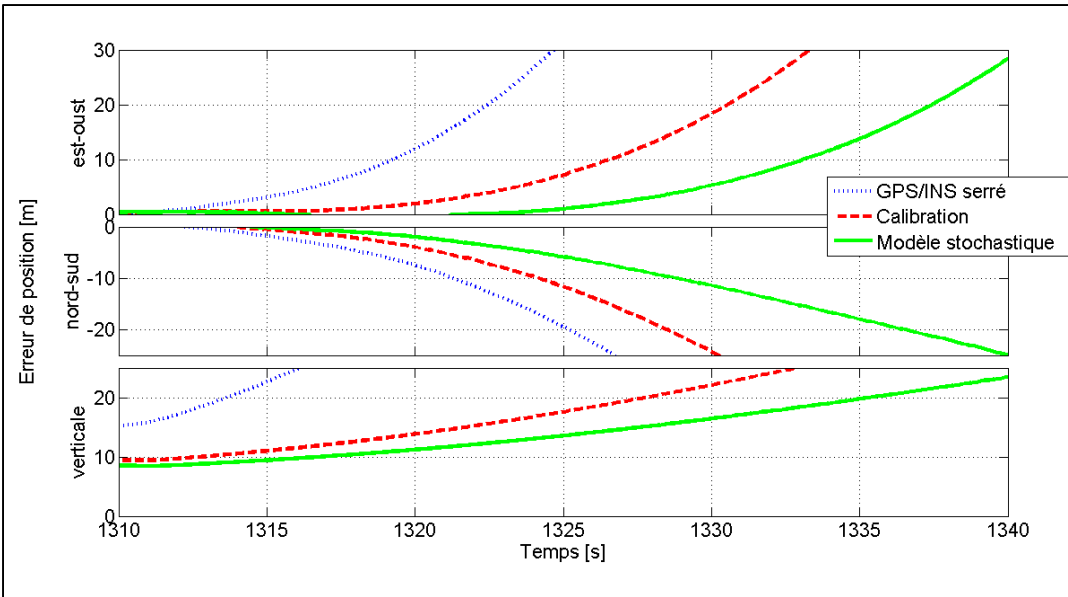


Figure 7-75 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de l'estimation des erreurs stochastiques pour une section où les signaux GPS ne sont pas disponibles

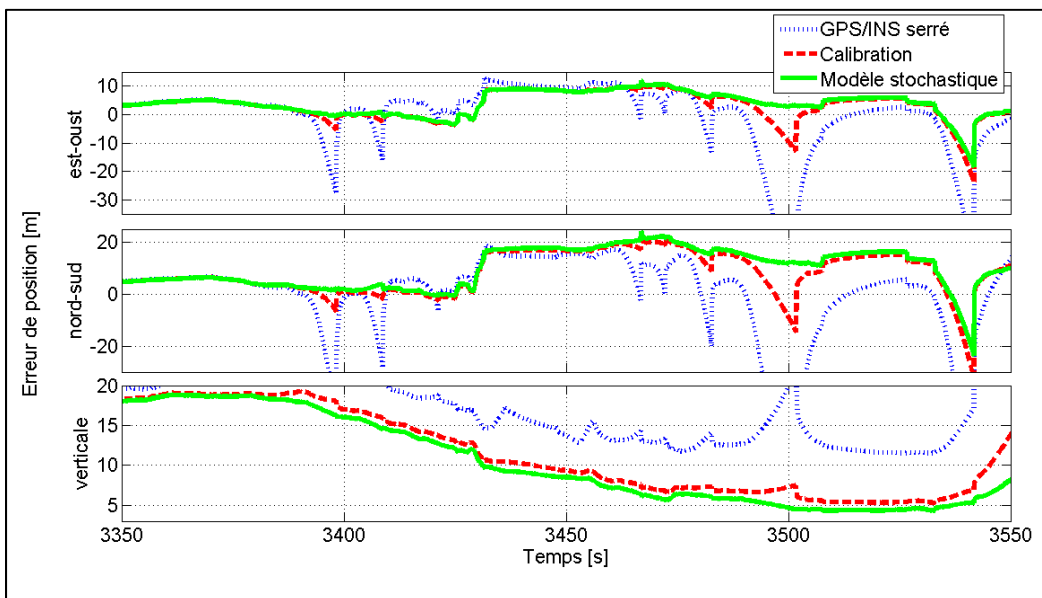


Figure 7-76 Vue rapprochée de l'erreur de position démontrant l'impact de l'estimation des erreurs stochastiques pour une section en canyon urbain sévère

La vitesse calculée à l'aide de ce modèle ainsi que l'erreur associée sont présentées aux figures 7.77 et 7.78. Tout comme pour la position, il est possible d'observer une légère

amélioration de la stabilité de la vitesse calculée lorsque le véhicule traverse un canyon urbain sévère. De plus, la divergence observée à la sortie du tunnel Ville-Marie a également diminuée. L'erreur RMS de vitesse pour les deux sections en canyon urbain a également été calculée et les résultats sont présentés au Tableau 7.10. En moyenne, une diminution de 16.1% de l'erreur de vitesse est observable lorsque l'estimation des erreurs stochastiques est réalisée.

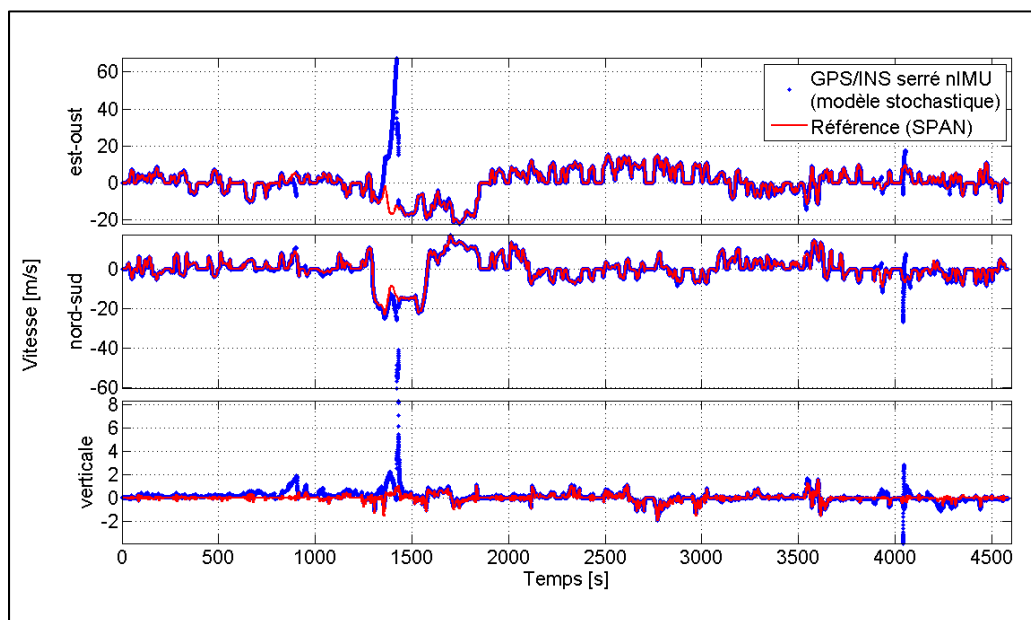


Figure 7-77 Vitesse calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

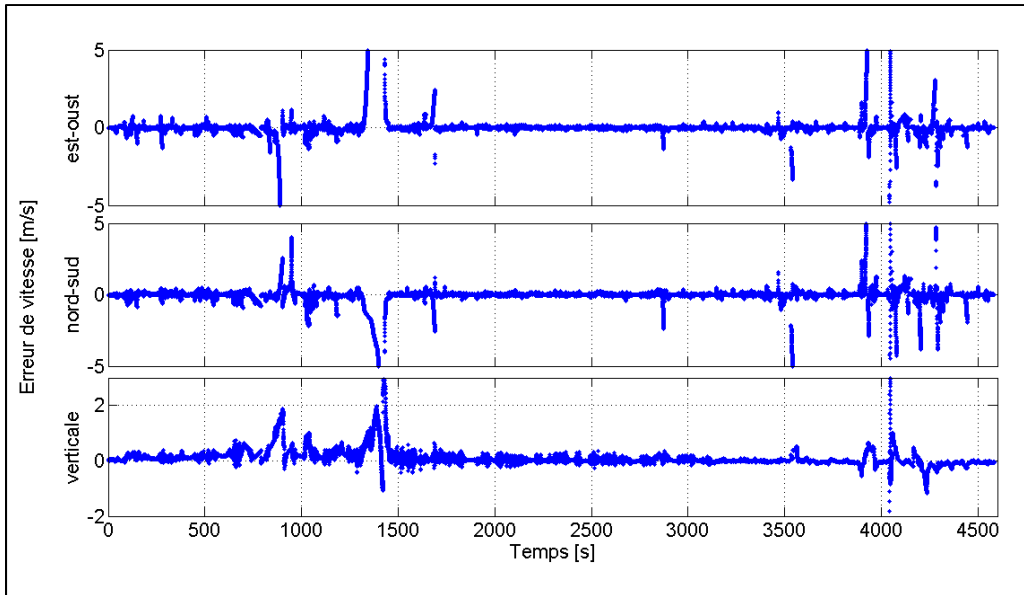


Figure 7-78 Erreur de vitesse calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

Finalement, l'orientation du véhicule calculée à l'aide de ce modèle ainsi que l'erreur associée est présentée aux figures 7.79 et 7.80. En comparant ces figures avec celles présentées à la section précédente, il est possible de constater une légère amélioration en environnement urbain. L'erreur significative présente à la fin de la trajectoire est toujours présente, mais cette dernière est désormais de l'ordre de  $40^\circ$ . L'erreur RMS des angles d'Euler a également été calculée pour les deux sections en canyon urbain et les résultats sont présentés au Tableau 7.10. En moyenne, une diminution de 7.0% de l'erreur sur les angles d'Euler est observable lorsque l'estimation des erreurs stochastiques est réalisée.



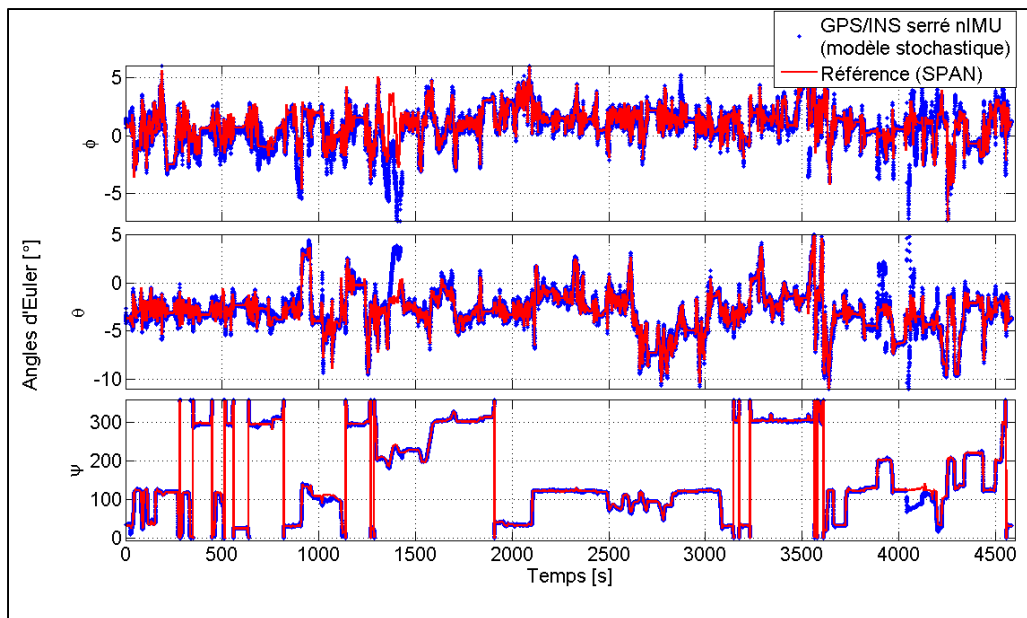


Figure 7-79 Angles d'Euler calculés en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

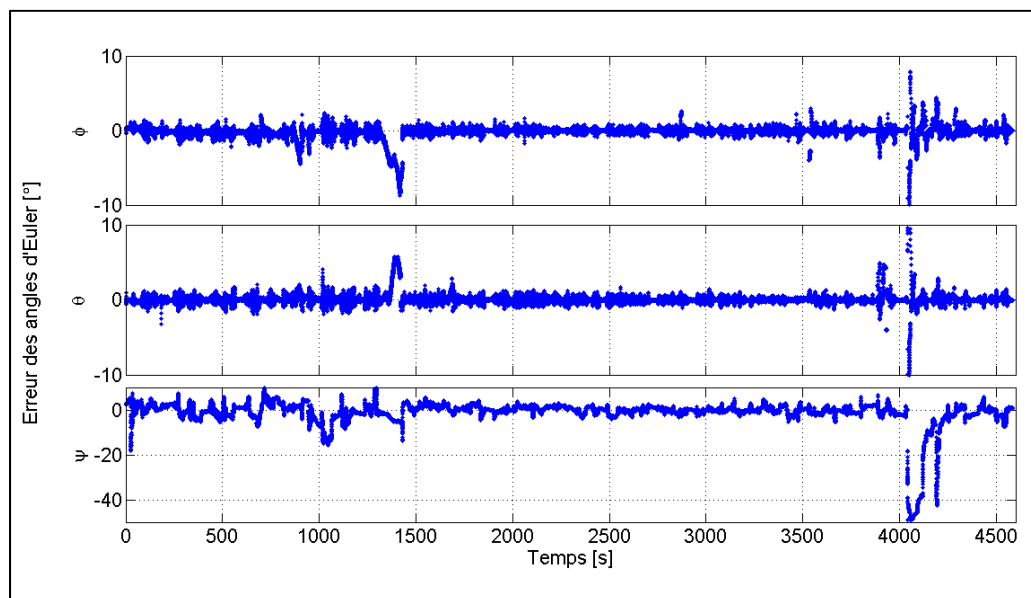


Figure 7-80 Erreur sur les angles d'Euler calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

Tableau 7.10 Erreur quadratique moyenne de la solution calculée en tenant compte de l'estimation des erreurs stochastiques

	<b>Erreur RMS Canyon urbain #1</b>	<b>Erreur RMS Canyon urbain #2</b>
<b>Position est-ouest</b>	17.75 m	7.11 m
<b>Position nord-sud</b>	7.91 m	10.69 m
<b>Position verticale</b>	22.40 m	19.48 m
<b>Vitesse est-ouest</b>	0.92 m/s	0.94 m/s
<b>Vitesse nord-sud</b>	0.40 m/s	1.44 m/s
<b>Vitesse verticale</b>	0.37 m/s	0.23 m/s
<b>Angle de roulis</b>	0.70°	1.77°
<b>Angle de tangage</b>	0.45°	1.40°
<b>Angle de lacet</b>	4.02°	10.27°

### 7.3.4 Conclusion sur les performances du système à faible coût

Les tests réalisés dans cette section ont permis de valider l'algorithme d'intégration GPS/INS par couplage serré pour l'utilisation d'une centrale inertielle à faible coût en plus de démontrer l'impact significatif de la calibration des erreurs déterministes et de l'estimation en ligne des erreurs stochastiques. Tout d'abord, les résultats obtenus uniquement à l'aide de la méthode d'intégration GPS/INS par couplage serré ont permis de mettre en évidence l'instabilité de la solution de navigation calculée lorsque le véhicule se déplace en environnement difficile. En effet, il a été démontré qu'avec cette méthode, des pics d'erreur de position de l'ordre de 200 mètres étaient fréquemment observables en canyon urbain. De plus, il a été démontré qu'en l'absence prolongée des signaux GPS, l'erreur de positionnement obtenue par cette approche pouvait s'élever au-delà de 300 mètres en 30 secondes.

Par la suite, il a été démontré que l'utilisation d'une méthode adéquate de calibration des erreurs déterministes des capteurs inertiels a permis une amélioration significative de la

stabilité et de la précision de la solution de navigation en environnement difficile. Cette amélioration est d'abord caractérisée par une diminution importante des pics d'erreur de position en canyon urbain qui est passé de 200 à 100 mètres. De plus, la divergence de la solution de position a pu être réduite à environ 90 après 30 secondes d'absence complète des signaux GPS. L'impact de la calibration a également pu être observé sur le calcul de la vitesse et de l'orientation. En effet, de façon générale, une diminution d'environ 57.5%, 66.7% et 50.6% des erreurs de position, de vitesse et d'orientation a pu être observées.

Finalement, il a été démontré que l'ajout des états d'erreur stochastique des capteurs inertiels au modèle d'intégration GPS/INS par couplage serré classique a permis une diminution supplémentaire d'environ 10.8%, 16.1% et 7.0% des erreurs de position, de vitesse et d'orientation.



## CONCLUSION

Avec la demande grandissante de la part des consommateurs dans le secteur de la localisation personnelle (localisation automobile, téléphones intelligents, etc.) l'industrie s'efforce continuellement de mettre en place de nouvelles idées afin de développer des systèmes de plus en plus robustes et précis tout en respectant une contrainte importante : le coût. Dans cet ordre d'idées, l'intégration intelligente des mesures provenant d'une centrale inertielle à faible coût à celles d'un récepteur GPS fait partie des méthodes actuellement étudiées par les groupes de recherche en navigation. Ces capteurs à faible coût comportent néanmoins des erreurs de mesure importantes qui limitent grandement les performances de ce type de système hybride en environnement difficile. L'objectif principal de ce mémoire visait donc la réalisation d'un système de navigation hybride GPS/INS à faible coût pour la navigation robuste et précise en environnement urbain. Afin d'atteindre cet objectif principal, plusieurs objectifs spécifiques avaient été proposés.

Tout d'abord, les deux premiers objectifs spécifiques visaient la caractérisation des sources d'erreur contenues sur les mesures inertielles à faible coût ainsi que la mise en œuvre d'une procédure d'estimation et de calibration des erreurs déterministes et stochastiques. Suivant cette idée, une analyse des mesures inertielles à faible coût a d'abord été réalisée et les résultats ont clairement démontré la présence d'erreurs importantes de nature déterministes et par le fait même le manque de calibration des centrales inertielles à faible coût. Cette constatation a directement menée à la réalisation d'une procédure de calibration basée sur la méthode multi-position initialement publiée par Syed et al. (2007). La méthode développée dans le cadre de ce mémoire propose l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu plutôt qu'un algorithme d'optimisation itératif (p.ex. algorithme de Newton ou de Levenberg-Marquardt) afin de résoudre le système d'équations non-linéaire. La raison de l'utilisation d'un tel algorithme incrémental plutôt qu'itératif est de faciliter l'implémentation de la méthode de calibration à l'intérieur d'un système temps réel. Suite à cette étape, une étude approfondie du comportement stochastique des mesures inertielles à faible coût basée sur l'analyse de la variance d'Allan ainsi que sur l'analyse de la fonction d'autocorrélation des mesures a

permis d'identifier et de quantifier les composantes d'erreur dominantes sur les mesures et de mettre en place un modèle d'estimation adapté à la centrale inertielle utilisée.

Par la suite, le troisième objectif spécifique visait la réalisation d'une procédure d'alignement initial permettant de déterminer l'orientation d'une centrale inertielle à faible coût basée sur l'utilisation des mesures de magnétomètres. Afin d'atteindre cet objectif, une méthode de détermination de l'attitude a été réalisée. Dans un premier temps, cette méthode permet d'obtenir rapidement un estimé grossier des valeurs initiales de l'attitude du véhicule. Par la suite, un processus itératif en boucle fermée basé sur l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu est utilisé afin de peaufiner cet estimé initial et de réaliser l'estimation en ligne de l'attitude lorsque la plateforme est en mouvement. En somme, la méthode développée a permis de déterminer avec précision l'attitude d'une centrale inertielle à faible coût à l'intérieur d'un environnement contrôlé. En effet, en absence de perturbations du champ magnétique local, il a été démontré que la méthode développée permettrait de contenir les erreurs d'attitude d'une centrale inertielle à faible coût en dessous de  $5^\circ$ . Tel que discuté précédemment, ce niveau de performance est acceptable pour la plupart des applications à faible coût destinées au secteur du divertissement (p. ex. navigation corporelle, animation 3D, jeux vidéo, etc.), mais n'est pas acceptable pour des applications de haute précision (p. ex. domaine biomédical, guidage de projectiles, guidage d'un aéronef sans pilote, etc.). Il a également été démontré que cette méthode était très sensible aux perturbations locales du champ magnétique et qu'elle devenait rapidement instable lorsqu'utilisée dans un environnement hostile. Étant donné cette faiblesse il était préférable de ne pas utiliser cette méthode lors des essais en route et d'uniquement se servir des mesures de magnétomètres afin de déterminer l'orientation initiale du véhicule.

Finalement, le dernier objectif spécifique visait à étudier différents paradigmes d'intégration GPS/INS, à développer ces modèles et à en évaluer les performances en environnement difficile comparativement à celles d'un récepteur GPS utilisé de manière autonome. Pour y arriver, les systèmes GPS et INS ont d'abord été étudiés de façon indépendante ce qui a permis de modéliser les erreurs de ces systèmes afin de faciliter la réalisation des modèles

d'intégration. Deux modèles d'intégration ont ensuite été étudiés soit l'intégration par couplage lâche et l'intégration par couplage serré. Chacun de ces paradigmes ont été implémentés à l'intérieur d'un filtre de Kalman étendu et les performances de ces derniers ont été évaluées à l'intérieur de deux scénarios de tests. Le premier scénario a été réalisé en environnement idéal et a permis d'obtenir des résultats témoins permettant de valider le bon fonctionnement des différents algorithmes face à des données réelles idéales. Le second scénario a quant à lui été réalisé en environnement urbain et a permis de mettre à l'épreuve les différents algorithmes. Les résultats de ces tests ont d'abord démontré les lacunes majeures du récepteur GPS utilisé de manière autonome en environnement urbain. Par la suite, il a été démontré que l'intégration des mesures inertielles à un récepteur GPS permettait une amélioration significative de la robustesse et de la précision de la solution de navigation en canyon urbain sévère. De plus, il a été démontré que l'utilisation d'une méthode d'intégration par couplage serré permettait une diminution moyenne de 41.5%, 52.8% et 38.6% des erreurs de position, de vitesse et d'orientation en canyon urbain sévère comparativement au couplage lâche. Enfin, il a été possible d'évaluer l'impact réel d'une bonne calibration des erreurs déterministes et stochastiques contenues sur les capteurs inertiels à faible coût (objectif spécifiques 1 et 2). De façon générale, une diminution d'environ 57.5%, 66.7% et 50.6% des erreurs de position, de vitesse et d'orientation a pu être observée lorsque les paramètres de calibration des erreurs déterministes étaient pris en compte et une amélioration supplémentaire de l'ordre de 10.8%, 16.1% et 7.0% de ces erreurs a pu être observée lors de l'utilisation du modèle d'estimation en ligne des erreurs de nature stochastique.

L'objectif principal de ce projet de recherche a donc été atteint avec succès et les questions liées à la problématique ont pu être répondues de façon positive. Il est donc possible de concevoir un système de navigation hybride GPS/INS précis et robuste basé uniquement sur des mesures de capteurs à faible coût. De plus, il a été démontré que l'utilisation d'un système de navigation hybride GPS/INS en environnement difficile a un impact significatif sur la robustesse et la précision de la solution de navigation comparativement aux systèmes GPS utilisés seuls. Il a également été démontré qu'il est possible d'estimer adéquatement les

paramètres d'erreurs fortement non linéaires des capteurs inertiels MEMS à faible coût uniquement à l'aide de méthodes d'estimation linéaires telles que le filtre de Kalman. Finalement, il a été démontré que la modélisation des erreurs déterministes et stochastiques des capteurs inertiels permet aux systèmes INS à faible coût d'être utilisés de manière autonome sur une période de temps acceptable (30 secondes).

Les résultats de cette recherche représentent un pas important dans le développement d'un système robuste pour la navigation en environnement urbain. Les conclusions de cette étude permettront d'aller de l'avant avec cette idée et de développer de nouvelles idées innovantes qui permettront d'améliorer encore plus les performances d'un tel système en environnement difficile. De plus, bien que les travaux réalisés dans ce mémoire ciblent uniquement la navigation en environnement urbain, les méthodes développées pourraient être appliquées à d'autres domaines tels que la navigation à l'intérieur de bâtiments, la capture de mouvements pour l'industrie du cinéma et des jeux vidéo, le guidage d'aéronefs sans pilotes, etc., pour n'en nommer que quelques-uns.



## RECOMMANDATIONS

Le système de navigation hybride GPS/INS réalisé dans le cadre de ce projet de recherche possède des avantages certains comparativement à l'utilisation d'un récepteur GPS seul en environnement urbain. Toutefois, le système développé comporte des limites à plusieurs niveaux qui pourraient nuire à sa commercialisation. Dans cet ordre d'idées, certaines pistes intéressantes à étudier à l'intérieur de projets futurs seront discutées dans la section suivante.

Tout d'abord, en ce qui concerne la calibration des capteurs inertiels à faible coût, les résultats ont démontré que les paramètres estimés étaient relativement stables pour une durée allant jusqu'à 8 heures. Toutefois, aucune étude supplémentaire n'a été réalisée afin d'évaluer la stabilité à long terme des erreurs déterministes (1 semaine, 1 mois, 1 an, etc.). De plus, la méthode de calibration développée ne tenait pas compte de la température des capteurs, or, il a été démontré qu'il existait une corrélation élevée entre le biais des capteurs et la température de la centrale inertielle. Il serait donc intéressant de déterminer cette corrélation afin de mettre en place une méthode de calibration plus robuste. Finalement, il a été démontré qu'en l'absence d'excitation externe, il était difficile voire impossible d'estimer les paramètres de mauvais alignement et de facteur d'échelle des gyroscopes à faible coût. Il serait donc intéressant d'évaluer l'impact de l'utilisation d'une telle référence sur les résultats de calibration.

Par la suite, concernant l'identification, la quantification et l'estimation des erreurs de nature stochastiques, il a d'abord été possible de constater que l'allure que prend la courbe expérimentale d'autocorrélation des mesures inertielles n'est exactement celle d'un processus de Gauss-Markov de premier ordre mais semble plutôt être d'ordre plus élevé. Il serait alors intéressant d'étudier ces modèles stochastiques d'ordre plus élevé et d'en évaluer les performances comparativement à un modèle de premier ordre. De plus, il a été démontré que l'analyse de la fonction d'autocorrélation ainsi que l'analyse de la variance d'Allan pouvaient parfois manquer de précision. Il serait alors intéressant d'utiliser des échantillons de plus grande durée ou encore de réaliser des répétitions de Monte-Carlo de manière à augmenter la

précision de ces analyses. Finalement, tout comme pour la calibration, il serait intéressant que le modèle d'estimation des erreurs stochastiques puisse tenir compte de la température des capteurs.

De plus, en ce qui attrait à la détermination de l'attitude du véhicule, il a été démontré que la méthode développée pour les capteurs à faible coût était très sensible aux perturbations locales du champ magnétique, ce qui limite grandement son utilisation en navigation automobile. Il serait alors préférable de mettre en place une procédure permettant de détecter et d'éliminer ces perturbations. Dans cette optique, une piste intéressante à étudier est l'utilisation des mesures redondantes provenant de plusieurs triades de magnétomètres disposées de manière intelligente (Renaudin, Afzal et Lachapelle, 2010).

Finalement, pour ce qui est du système de navigation en soi, plusieurs pistes sont à étudier. Tout d'abord, la matrice de covariance du bruit de mesure utilisée à l'intérieur des modèles d'intégration a été considérée comme constante pour ce projet. Or, il serait tout à fait logique que cette matrice évolue de manière dynamique basé sur la géométrie des satellites ainsi que sur le ratio puissance sur bruit des signaux reçus. Le système développé pourrait grandement bénéficier de cette gestion dynamique en attribuant un niveau de confiance plus élevé aux mesures provenant des satellites les plus fiables. Par la suite, un autre ajout relativement simple dont pourrait bénéficier le système est l'exploitation des contraintes physiques du véhicule (le véhicule se déplace uniquement selon son axe longitudinal) ainsi que l'utilisation de contraintes telles que la mise-à-jour des vitesses nulles (ZUPT) et de la mise-à-jour des vitesses angulaires nulles (ZARU – *Zero Angular Rate Update*). Finalement, étant donné la nature fortement non-linéaire des erreurs des systèmes inertiels à faible coût, il pourrait être intéressant d'étudier les possibilités d'utiliser directement les équations de propagation d'erreur non-linéaires à l'intérieur d'un estimateur tel que le filtre particulaire ou encore le filtre de Kalman non parfumé plutôt que de linéariser ces équations à l'intérieur d'un filtre de Kalman étendu.

## ANNEXE I

### CONVENTIONS DE NOTATION, SYMBOLES ET CONSTANTES UTILISÉES

Tableau-A I-1 Liste des conventions de notation

Symbole	Description	Définition
$x$	scalaire (minuscule, non-souligné, non-gras)	
$\underline{x}$	vecteur (souligné)	
$x_i$	élément $i$ du vecteur $\underline{x}$	$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{X}$	matrice (majuscule gras)	
$x_{ij}$	élément de la rangée $i$ et de la colonne $j$ de la matrice $\mathbf{X}$	$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$
$(\underline{x} \times)$	matrice symétrique gauche formée à partir du vecteur $\underline{x}$	$(\underline{x} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$
$\underline{x}^A$	vecteur $\underline{x}$ exprimé selon le repère $A$	
$\underline{x}_{AB}^B$	quantité mesurée selon le repère $B$ par rapport au repère $A$ et exprimée selon le repère $B$	
$\underline{u}_{iA}^B$	vecteur unitaire orienté selon l'axe $i$ du repère $A$ et exprimé selon le repère $B$	
$\mathbf{C}_A^B$	matrice de rotation ou matrice de cosinus de direction selon laquelle l'indice $A$ est le repère initial et l'exposant $B$ est le repère de destination	$\underline{x}^B = \mathbf{C}_A^B \underline{x}^A$
$q_A^B$	quaternion unitaire caractérisant l'orientation du repère $A$ par rapport au repère $B$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{x}^B \end{bmatrix} = q_A^B \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{x}^A \end{bmatrix} \otimes (q_A^B)^{-1}$
$\tilde{x}$	valeur mesurée de $x$	
$\hat{x}$	valeur estimée de $x$	
$\delta x$	erreur sur la valeur estimée de $x$	$\delta x = x - \hat{x}$
$\dot{x}$	dérivée temporelle de $x$	$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Tableau-A I-2 Liste des symboles des différents repères

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>
<b><i>I</i></b>	repère inertiel terrestre
<b><i>E</i></b>	repère fixe terrestre
<b><i>L</i></b>	repère local
<b><i>N</i></b>	repère de navigation
<b><i>S</i></b>	repère des capteurs
<b><i>B</i></b>	repère du mobile
<b><i>P</i></b>	repère de la plateforme
<b><i>C</i></b>	repère de calcul

Tableau-A I-3 Liste des constantes

<b>Symbole</b>	<b>Description</b>	<b>Valeur</b>	<b>Unité</b>
<b>Principaux paramètres du WGS84</b>			
<i>a</i>	axe semi-majeur de l'ellipsoïde de référence	$a = 6378137$	[m]
<i>b</i>	axe semi-mineur de l'ellipsoïde de référence	$b = 6356752.314245$	[m]
$1/f, e$	inverse du coefficient d'aplatissement	$1/f = e = 298.257223563$	
$\omega_{IE}$	norme du vecteur de vitesse de rotation de la Terre	$\omega_{IE} = 7.292115 \times 10^{-5}$	[rad/s]
<i>GM</i>	constante gravitationnelle de la Terre	$GM = 3.986004418 \times 10^{14}$	[m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ]
<i>c</i>	vitesse de la lumière	$c = 2.99792458$	[m/s]
<b>Principaux paramètres du modèle de gravité</b>			
$\mu$	produit de la masse de la Terre et de la constante gravitationnelle universelle	$\mu = 1.40763635730 \times 10^{16}$	[pi <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ]
<i>J<sub>2</sub></i>	constante empiriques qui est fonction de la distribution de la masse de la Terre	$J_2 = 1.082627 \times 10^{-3}$	
<i>J<sub>3</sub></i>	constante empiriques qui est fonction de la distribution de la masse de la Terre	$J_3 = -2.5327 \times 10^{-6}$	
<i>R<sub>0</sub></i>	rayon équatorial terrestre	$R_0 = 2.0925604 \times 10^7$	[pi]
$\omega_e$	constante gravitationnelle de la Terre	$\omega_e = 7.292115 \times 10^{-5}$	[rad/s]

Tableau-A I-4 Liste des symboles par chapitres

	Symbole	Description	Section	Unités
Chapitre 2	$\phi$	Latitude géodésique	2.2	rad
	$\lambda$	Longitude géodésique		rad
	$h$	Altitude ellipsoïdale		m
	$R_N$	Rayon de courbure normal de la Terre		m
	$\phi$	Angle de roulis (roll)	2.3	rad
	$\theta$	Angle de tangage (pitch)		rad
	$\psi$	Angle de lacet (heading)		rad
	$\underline{R}$	Vecteur de position	2.5	m
	$\underline{g}_P$	Vecteur de gravité plump-bob		m/s <sup>2</sup>
	$\underline{\rho}$	Taux de transport	2.6	rad/s
Chapitre 3	$d$	Distance entre le récepteur et le satellite	3.2	m
	$\Delta t$	Temps de propagation du signal GPS		s
	$\rho$	Mesure de pseudo-distance		m
	$b_{clk}$	Erreur associée au biais d'horloge		m
	$\Delta f$	Décalage de fréquence (effet Doppler)	3.3	Hz
	$\lambda$	Longueur d'onde		m
	$D$	Décalage Doppler		Hz
	$\dot{\rho}$	Variation de pseudo-distance		m/s
	$\underline{e}$	Vecteur de ligne de visée vers un satellite		-
	$d_{clk}$	Erreur associée à la dérive d'horloge		m/s
	$\underline{R}$	Vecteur de position	3.5	m
	$\underline{V}$	Vecteur de vitesse		m/s
Chapitre 4	$\underline{M}$	Matrice de mauvais alignement des axes	4.4	-
	$\underline{S}$	Matrice de facteur d'échelle		-
	$\underline{b}$	Vecteur de biais		-
	$\underline{E}$	Matrice combinée de mauvais alignement et de facteur d'échelle		-
	$\beta$	Constante de temps du processus de Gauss-Markov		1/s
	$\underline{f}$	Vecteur de forces spécifiques (mesures d'accéléromètres)	4.5	m/s <sup>2</sup>
	$\underline{\omega}_{IB}$	Vecteur de vitesses angulaires (mesures de gyroscopes)		rad/s
	$\underline{m}$	Vecteur de champ magnétique (mesures de magnétomètres)		μT
	$\underline{a}$	Vecteur d'accélération	4.6	m/s <sup>2</sup>

	$\underline{\psi}$	Vecteur d'erreur angulaire (modèle d'angle psi)	4.7	rad
Chapitre 5	$\underline{x}$	Vecteur d'état	5.1	-
	$\underline{z}$	Vecteur de mesures		-
	$F$	Matrice de transition du vecteur d'état		-
	$G$	Matrice caractérisant le lien entre le vecteur de bruit du système et les différents états		-
	$H$	Matrice d'observabilité du système		-
	$Q_c$	Matrice de covariance du bruit du système		-
	$R$	Matrice de covariance du bruit des mesures		-
	$\phi$	Matrice de transition (discrétisée)		-
	$Q_d$	Matrice de covariance du bruit du système (discrétisée)		-
	$K$	Matrice de gain de Kalman	5.2	-
	$P$	Matrice de covariance des états		-

## ANNEXE II

### PROPRIÉTÉS D'UNE MATRICE DE COSINUS DE DIRECTION

Cette section présente les principales propriétés d'une matrice des cosinus de direction.

#### II.1 Matrice orthogonale

La matrice des cosinus de direction est une matrice orthogonale, c'est-à-dire que les lignes et les colonnes dont elle est formée sont des vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux. De cette propriété découlent les relations suivantes :

$$(\mathbf{C}_A^B)^T = (\mathbf{C}_A^B)^{-1} \quad (\text{A II-1})$$

$$(\mathbf{C}_A^B)^T = \mathbf{C}_B^A \quad (\text{A II-2})$$

$$(\mathbf{C}_A^B)^T \mathbf{C}_A^B = \mathbf{C}_A^B (\mathbf{C}_A^B)^T = \mathbf{I} \quad (\text{A II-3})$$

$$\det(\mathbf{C}_A^B) = 1 \quad (\text{A II-4})$$

#### II.2 Matrice de rotation

Les matrices des cosinus de direction sont des matrice de rotation, c'est-à-dire qu'elles permettent de transformer la représentation d'un vecteur entre deux repères tel que :

$$\underline{v}^B = \mathbf{C}_A^B \underline{v}^A \quad (\text{A II-5})$$

De plus, la multiplication de deux matrices des cosinus de direction résulte en une troisième tel que :

$$\mathbf{C}_A^C = \mathbf{C}_B^C \mathbf{C}_A^B \quad (\text{A II-6})$$

Ainsi, il est possible de simplifier la notation suivante :

$$\underline{v}^C = \mathbf{C}_B^C(\mathbf{C}_A^B \underline{v}^A) = \mathbf{C}_A^C \underline{v}^A \quad (\text{A II-7})$$

### II.3 Équation de propagation générale

L'effet de Coriolis peut être utilisé afin de définir l'équation de propagation d'une matrice des cosinus de direction (Savage, 2000). Ce phénomène survient lorsqu'un vecteur, constant selon un repère en rotation, est observé selon un repère inertiel non rotationnel. Ainsi, du point de vue d'un observateur situé dans ce second repère, le vecteur observé n'est plus constant, mais ses composantes tendent plutôt à varier dans le temps. L'expression générale de l'effet de Coriolis, tel que défini par Savage (2000), est la suivante :

$$\dot{\underline{v}}^A = \underline{\omega}_{AB}^A \times \underline{v}^A \quad (\text{A II-8})$$

où :

- $\dot{\underline{v}}^A$  : dérivée temporelle du vecteur  $\underline{v}^A$
- $\underline{\omega}_{AB}^A$  : vecteur de vitesse de rotation du repère B par rapport au repère A exprimé selon le repère A
- $\times$  : produit croisé

Ainsi, l'effet de Coriolis est directement proportionnel à la vitesse linéaire de déplacement de la masse à l'intérieur du repère rotationnel, mais également à la vitesse angulaire à laquelle tourne ce même repère par rapport au repère non rotationnel. En utilisant ce concept, l'équation de propagation d'une DCM est donnée par (Savage, 2000) :

$$\dot{\mathbf{C}}_B^A = \mathbf{C}_B^A(\underline{\omega}_{AB}^B \times) \quad (\text{A II-9})$$

où :

- $\underline{\omega}_{AB}^B \times$  : signifie la matrice symétrique gauche formée du vecteur  $\underline{\omega}_{AB}^B$  (voir ANNEXE I)



## ANNEXE III

### PROPRIÉTÉS D'UN QUATERNION UNITAIRE

Cette section présente les principales propriétés d'un quaternion unitaire tel que définies par Farrell (2008).

#### III.1 Multiplication de quaternions

L'addition (soustraction) de quaternions est réalisée par l'addition (soustraction) des éléments respectifs des deux partis. Toutefois, la multiplication de quaternions relève plutôt de la multiplication de nombres complexes. En effet, un quaternion peut être défini comme un nombre complexe à quatre paramètres tel que :

$$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad (\text{A III-1})$$

Selon les propriétés des nombres complexes et en considérant les paramètres  $i$ ,  $j$  et  $k$  comme orthogonaux, les propriétés suivantes s'appliquent :

$$\begin{array}{lll} i \cdot i = -1 & i \cdot j = k & i \cdot k = -j \\ j \cdot i = -k & j \cdot j = -1 & j \cdot k = i \\ k \cdot i = j & k \cdot j = -i & k \cdot k = -1 \end{array} \quad (\text{A III-2})$$

En appliquant la propriété de distributivité, il est possible d'écrire la multiplication de deux quaternions tel que :

$$\begin{aligned} q_1 \otimes q_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\ &+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ &+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\ &+ (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k \end{aligned} \quad (\text{A III-3})$$

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 & -d_1 \\ b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A III-4})$$

$$q_1 \otimes q_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 & -c_2 & -d_2 \\ b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 & -b_2 \\ d_2 & -c_2 & b_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A III-5})$$

La multiplication de quaternions n'est pas commutative :

$$q_1 \otimes q_2 \neq q_2 \otimes q_1 \quad (\text{A III-6})$$

La multiplication de quaternions est associative :

$$q_1 \otimes (q_2 \otimes q_3) = (q_1 \otimes q_2) \otimes q_3 \quad (\text{A III-7})$$

L'inverse d'un quaternion est donné par l'expression suivante :

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|} \quad (\text{A III-8})$$

dans laquelle  $\bar{q}$  représente le quaternion conjugué de  $q$  défini tel que :

$$\bar{q} = a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k \quad (\text{A III-9})$$

Le quaternion peut être exprimé selon la forme vectorielle suivante :

$$q = a + \underline{q} \quad \bar{q} = a - \underline{q} \quad (\text{A III-10})$$

dans laquelle :

$$\underline{q} = [b \quad c \quad d]^T \quad (\text{A III-11})$$

Ainsi, la multiplication de quaternions peut être réécrite tel que :

$$q_1 \otimes q_2 = a_1 a_2 - \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 + a_1 \cdot \underline{q}_2 + a_2 \cdot \underline{q}_1 + \underline{q}_1 \times \underline{q}_2 \quad (\text{A III-12})$$

En manipulant cette équation, il est possible d'obtenir l'expression suivante :

$$q_1 \otimes q_2 = \mathbf{Q}_{q_1} \cdot \underline{q}_2 = \overline{\mathbf{Q}}_{q_2} \cdot \underline{q}_1 \quad (\text{A III-13})$$

dans laquelle :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & -\underline{q}^T \\ \underline{q} & (a\mathbf{I} + [\underline{q} \times]) \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} a & -\underline{q}^T \\ \underline{q} & (a\mathbf{I} - [\underline{q} \times]) \end{bmatrix} \quad (\text{A III-14})$$

### III.2 Transformation de vecteurs

Tout comme les matrices des cosinus de direction, les quaternions unitaires peuvent être utilisés afin de transformer la représentation d'un vecteur entre deux repères tel que :

$$v^B = q_A^B \otimes v^A \otimes (q_A^B)^{-1} = q_A^B \otimes v^A \otimes \overline{q}_A^B \quad (\text{A III-15})$$

dans laquelle :

$$v^A = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{v}^A \end{bmatrix} \quad v^B = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{v}^B \end{bmatrix} \quad (\text{A III-16})$$

En exploitant la forme matricielle du quaternion, cette expression peut être réécrite tel que :

$$v^B = \mathbf{Q}_{q_A^B} \cdot \overline{\mathbf{Q}}_{\overline{q}_A^B} \cdot v^A \quad (\text{A III-17})$$

### III.3 Équation de propagation générale

Prenons un vecteur quelconque  $v^B$  dont la définition est donnée par l'équation (A III-15). La dérivée temporelle de ce vecteur peut alors être donnée par l'expression suivante :

$$\dot{v}^B = \dot{q}_A^B \otimes v^A \otimes \bar{q}_A^B + q_A^B \otimes v^A \otimes \dot{\bar{q}}_A^B \quad (\text{A III-18})$$

En considérant l'égalité  $v^A = \bar{q}_A^B \otimes v^B \otimes q_A^B$ , cette expression peut être réécrite tel que :

$$\dot{v}^B = \dot{q}_A^B \otimes \bar{q}_A^B \otimes v^B + v^B \otimes q_A^B \otimes \dot{\bar{q}}_A^B \quad (\text{A III-19})$$

En utilisant le fait que le quaternion est unitaire, il est possible de démontrer que la portion scalaire des produits  $\dot{q}_A^B \otimes \bar{q}_A^B$  et  $q_A^B \otimes \dot{\bar{q}}_A^B$  est égale à zéro. Il est également possible de démontrer que la portion vectorielle de ces produits est égale en amplitude mais de signe. Nous pouvons donc écrire :

$$\dot{q}_A^B \otimes \bar{q}_A^B = 0 + \underline{w} \quad (\text{A III-20})$$

$$q_A^B \otimes \dot{\bar{q}}_A^B = 0 - \underline{w} \quad (\text{A III-21})$$

La portion vectorielle de l'équation (A III-19) peut donc être écrite tel que :

$$\underline{\dot{v}}^B = 2\underline{w} \times \underline{v}^B \quad (\text{A III-22})$$

En comparant cette équation avec l'équation générale de l'effet de Coriolis donnée à l'équation (A II-8) il est possible de conclure que :

$$\underline{\omega}_{BA}^B = 2\underline{w} \quad (\text{A III-23})$$

Cette dernière peut être réécrite sous la forme de quaternion tel que :

$$\omega_{BA}^B = 2\dot{q}_A^B \otimes \bar{q}_A^B \quad (\text{A III-24})$$

En multipliant les deux côté de cette équation par le quaternion  $q_A^B$ , la forme générale de l'équation de propagation d'un quaternion peut être obtenue :

$$\dot{q}_A^B = \frac{1}{2} \omega_{BA}^B \otimes q_A^B \quad (\text{A III-25})$$



## ANNEXE IV

### ARCHITECTURE GLOBALE DU SYSTÈME GPS

Le système GPS tel que nous le connaissons aujourd'hui est composé de trois entités distinctes soient le segment spatial, le segment de contrôle et le segment usager. La Figure-A IV-1, tirée de El-Rabbany (2002), illustre bien chacune de ces entités ainsi que leurs interactions. Le segment usager représente les récepteurs GPS, le segment spatial représente la constellation de satellites en orbite autour de la Terre tandis que le segment de contrôle représente les stations et les antennnes situées au niveau du sol (*voir Figure-A IV-2*). L'objectif de ce mémoire n'étant pas de présenter en détail l'architecture complète du système GPS, seul le segment spatial sera détaillé d'avantage. Pour plus de détails sur les autres segments, le lecteur est invité à consulter des ouvrages de références tels que El-Rabbany (2002), Tsui (2005) ainsi que Kaplan et Hegarty (2006).

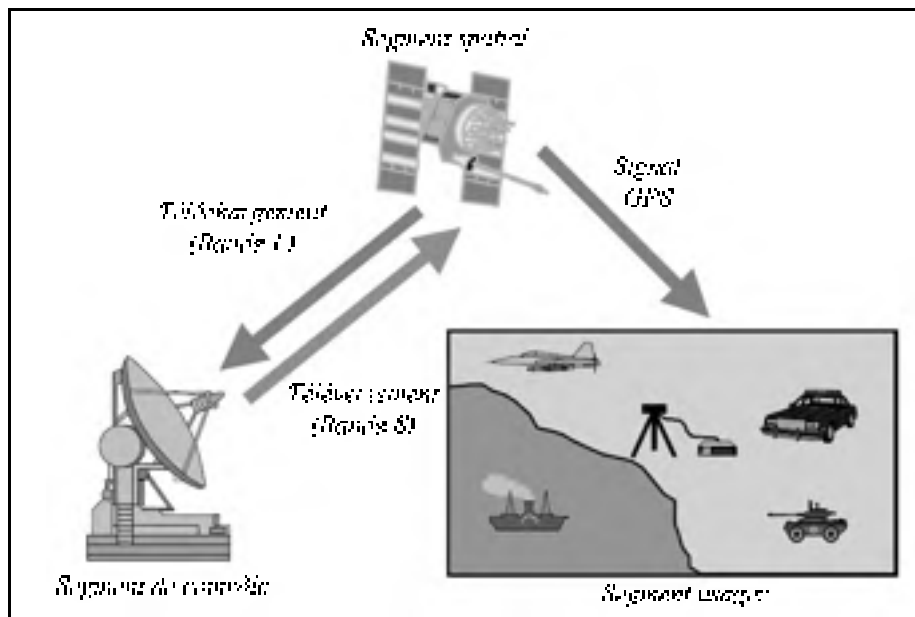


Figure-A IV-1 Segments du système GPS  
Adaptée de El-Rabbany (2002, p.3)

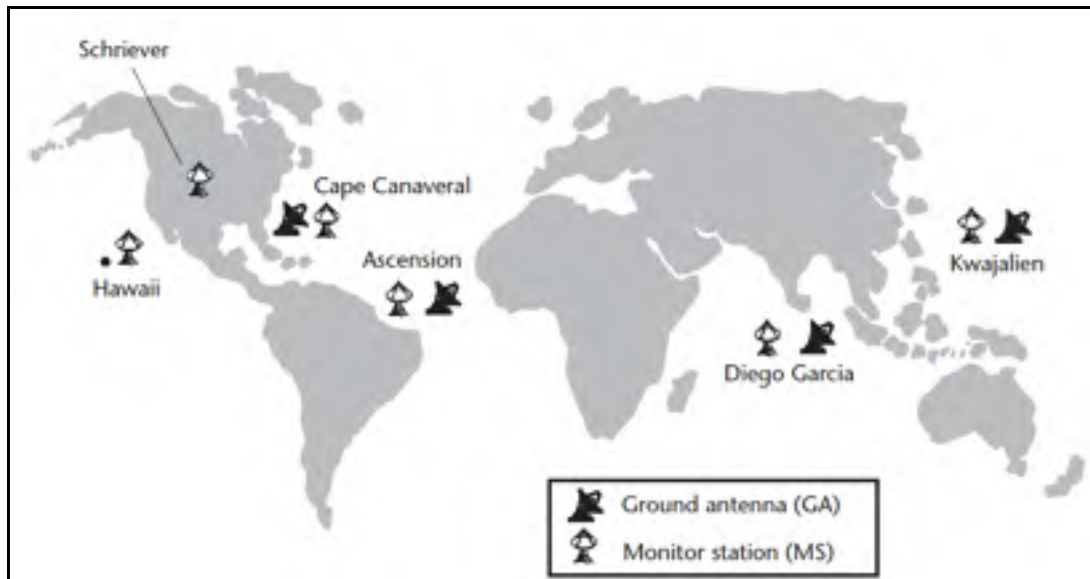


Figure-A IV-2 Distribution géographique des installations du segment de contrôle  
Tirée de Kaplan et Hegarty (2006, p. 88)

Le segment spatial du système GPS représente la constellation de satellites en orbite autour de la Terre. À l'heure actuelle, cette constellation comprend 32 satellites disposés selon 6 plans orbitaux espacés de  $60^\circ$  autour de l'équateur et inclinés à  $55^\circ$  par rapport au plan équatorial, tel qu'illustré à la Figure-A IV-3, tirée de Kaplan et Hegarty (2006). La trajectoire orbitale de chacun des satellites possède un rayon approximatif de 26 600 km et une période égale à la moitié d'un jour sidéral soit environ 11 heures, 58 minutes (Kaplan et Hegarty, 2006; Tsui, 2005). De plus, cette trajectoire orbitale est de forme elliptique (presque circulaire) et répond aux lois de Kepler. Selon cette architecture, le système GPS assure aux usagers un accès en ligne directe à au moins 4 satellites en tout temps et à n'importe quel endroit sur le globe (en négligeant les obstacles et les pôles). Les satellites d'une même orbite sont positionnés stratégiquement de manière à assurer une couverture accrue au niveau des zones d'intérêt ciblées par le département de la défense américaine, ce pourquoi que les satellites ne sont pas équidistants.



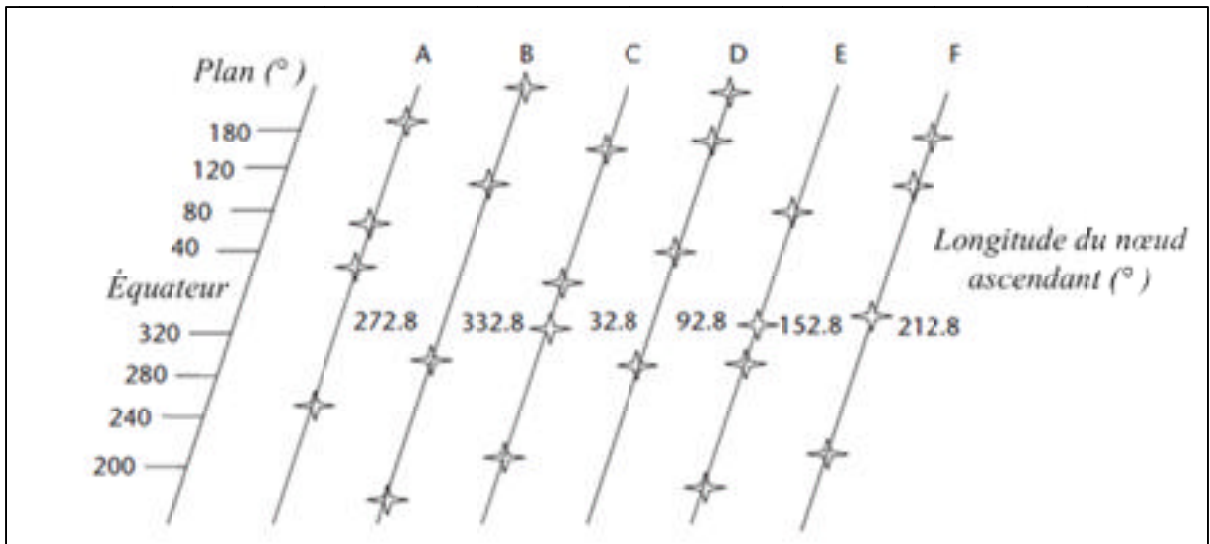


Figure-A IV-3 Projection planaire de la constellation de satellites GPS  
Adaptée de Kaplan et Hegarty (2006, p. 70)

Les signaux provenant des satellites GPS sont émis selon deux ondes porteuses sinusoïdales dénommées L1 et L2 dont les fréquences respectives sont de 1575.42 MHz et 1227.6 MHz. Chacune de ces porteuses est utilisée afin de transporter deux principales composantes du signal GPS soient le code pseudo-aléatoire, également appelé code d'étalement, ainsi que le message de navigation. Un code pseudo-aléatoire consiste en un flux de données numériques unique à chacun des satellites et généré à partir d'un algorithme mathématique. La fréquence L1 est modulée par deux codes PRN soient le code C/A (*Coarse Acquisition*) et le code P (*Precision*) tandis que la fréquence L2 est uniquement modulée par le code P. Le code C/A consiste en une séquence de Gold d'une longueur de 1023 bribes se répétant à toutes les millisecondes tandis que le code P est caractérisé par une séquence de 6 187 100 000 000 bribes se répétant à toutes les semaines. Ce dernier est encrypté et hautement confidentiel ce qui fait en sorte qu'il ne peut être utilisé que par les récepteurs GPS militaires. De ce fait, ce code ne sera pas utilisé dans le cadre de ce mémoire et ne sera donc pas davantage détaillé. La Figure-A IV-4, tirée de Küpper (2005), résume bien la structure des signaux émis par les satellites GPS.

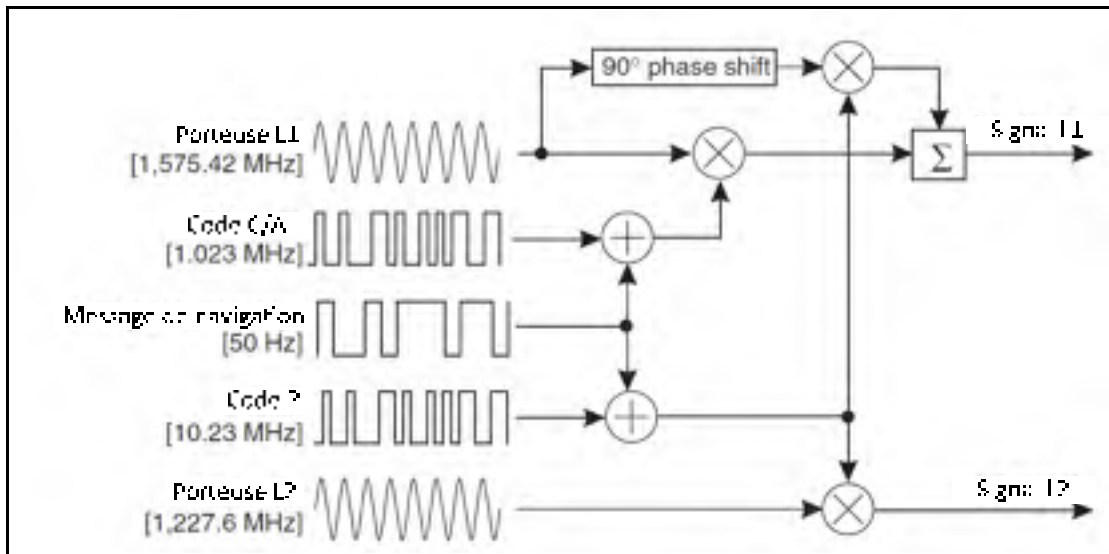


Figure-A IV-4 Structure des signaux GPS  
Adaptée de Küpper (2005, p. 168)

En plus du code pseudo-aléatoire, les signaux GPS sont modulés par un signal à 50 Hz appelé le message de navigation qui consiste en une trame de 1500 bits d'une durée de 30 secondes. Ce dernier est constitué de 5 sous-trames qui contiennent l'information nécessaire pour le positionnement du récepteur en temps réel et qui sont organisées tel que présenté à la Figure-A IV-5, tirée de Zogg (2002). En résumé (Zogg, 2002):

- la sous-trame 1 contient l'information sur le temps d'émission du satellite, incluant les paramètres de correction du délai de transmission et d'erreur d'horloge, en plus des informations sur la santé du satellite ainsi qu'un estimé de la précision sur le positionnement de ce dernier;
- les sous-trames 2 et 3 contiennent les données d'éphémérides qui procurent de l'information très précise sur l'orbite actuelle du satellite émetteur;
- les sous-trames 4 et 5 contiennent respectivement les données d'almanach des satellites 25 à 32 et 1 à 24 procurant ainsi l'information grossière sur l'orbite de ces derniers. L'information contenue dans ces sous-trames est trop volumineuse pour être envoyées dans une seule transmission, ce pourquoi elle est répartie en 25 pages. Ainsi, il nécessite 12.5 minutes à un récepteur GPS afin de recevoir l'intégralité du message de navigation.

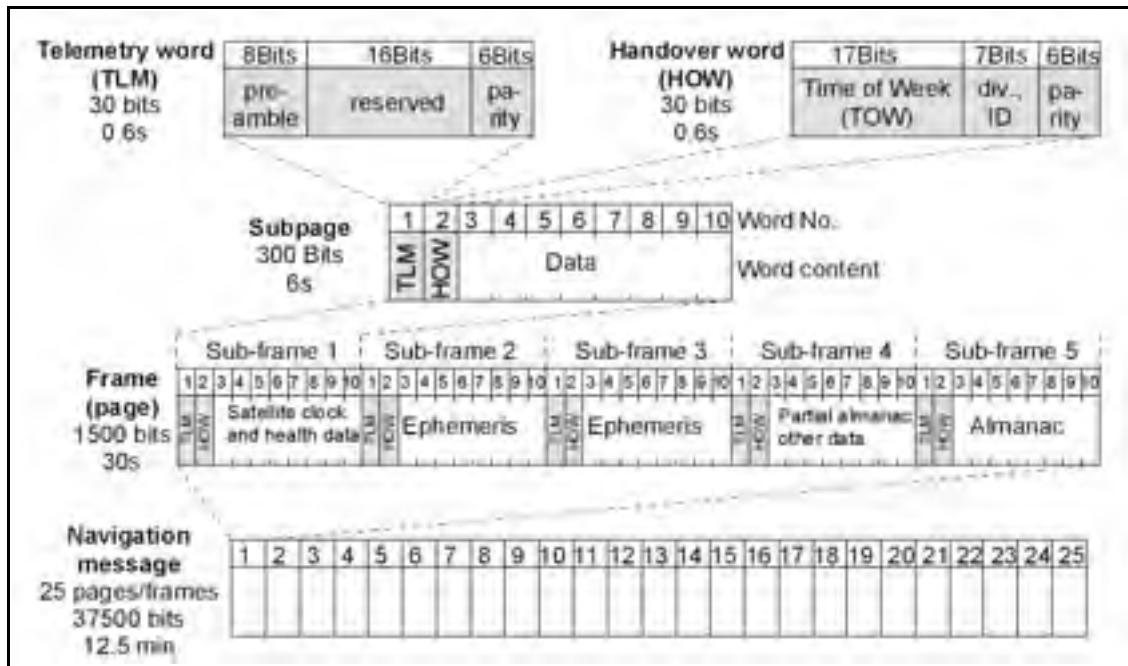


Figure-A IV-5 Vue d'ensemble du message de navigation  
Tirée de Zogg (2002, p. 26)



## ANNEXE V

### CALCUL DE LA POSITION ET DE LA VITESSE DES SATELLITES GPS

Afin de calculer la position d'un récepteur GPS à l'aide du principe de trilatération, il est d'abord nécessaire de calculer la position des différents satellites visibles. L'orbite des satellites GPS répond aux lois de Kepler, c'est-à-dire que :

- 1) L'orbite de chacun des satellites est une ellipse ayant comme foyer le centre de masse de la Terre.
- 2) Chacune des lignes reliant un satellite au centre de masse de la Terre balaie une surface équivalente en un temps donné.
- 3) Le carré de la période orbitale d'un satellite est proportionnel au cube de sa distance moyenne avec le centre de masse de la Terre.

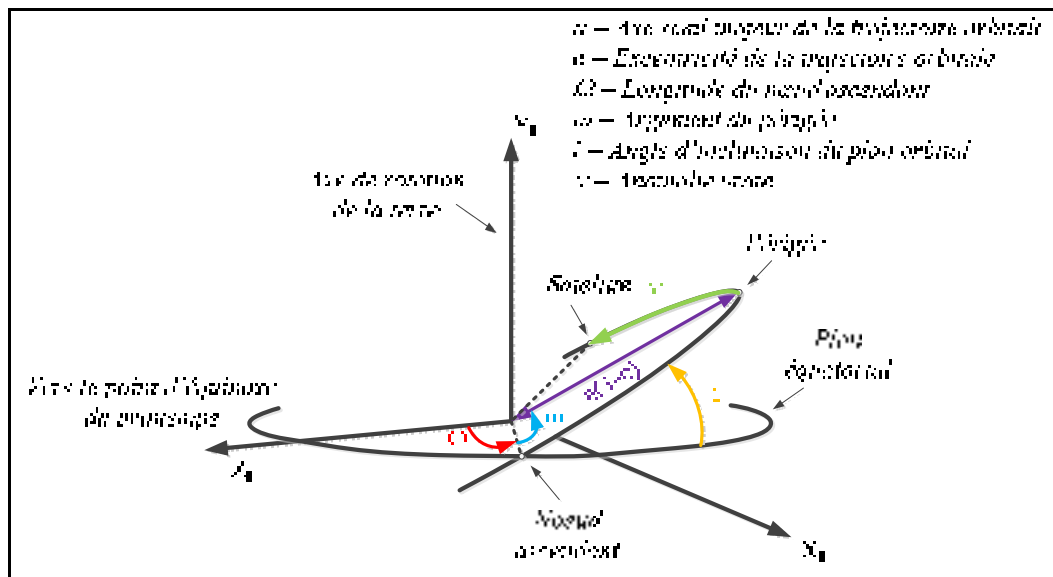


Figure-A V-1 Éléments de Kepler

À l'aide de 6 paramètres orbitaux appelés éléments de Kepler, il est possible de calculer la position instantanée de chacun des satellites GPS le long de leur orbite respective. Parmi ces éléments, l'axe semi-majeur  $a$  ainsi que l'excentricité  $e$  définissent la taille et la forme de

l'orbite d'un satellite tandis que l'anomalie vraie  $\nu$ , l'argument du périégée  $\omega$ , l'angle d'inclinaison  $i$  ainsi que la longitude du nœud ascendant  $\Omega$  définissent l'orientation du plan orbital ainsi que la position du satellite sur cette orbite (voir *Figure-A V-1*). Pour différentes raisons, l'orbite d'un satellite GPS peut être perturbée, le faisant dévier quelque peu de sa trajectoire optimale. Ainsi, les paramètres de Kepler ne peuvent pas être considérés comme constants mais doivent plutôt être surveillés et recalculés en temps réel. Cette tâche est effectuée par le segment de contrôle du système GPS qui réalise des calculs au niveau du sol et retransmet les corrections nécessaires aux différents satellites. Les paramètres orbitaux corrigés, présentés au Tableau-A V-1, sont ensuite transmis aux usagers par le biais d'éphémérides qui font partie intégrante du message de navigation. C'est à partir de ces derniers que la position et la vitesse des satellites au temps d'émission peuvent être calculées à l'intérieur du récepteur GPS. Le Tableau-A V-2 ainsi que le Tableau-A V-3 présentent un résumé des équations utilisées afin de réaliser ces calculs.

Tableau-A V-1 Paramètres orbitaux provenant des éphémérides GPS

Paramètres	Description	Unités
$t_{0e}$	Temps de référence de l'éphéméride	[s]
$\Delta t_{0e}$	Période de validité de l'éphéméride	[s]
$\sqrt{a}$	Racine carrée de l'axe semi-majeur	$[\sqrt{m}]$
$E$	Eccentricité	-
$i_0$	Angle d'inclinaison (au temps $t_{0e}$ )	rad
$\Omega_0$	Longitude du nœud ascendant	rad
$\omega$	Argument du périégée	rad
$M_0$	Anomalie moyenne (au temps $t_{0e}$ )	rad
$di/dt$	Taux de variation de l'angle d'inclinaison	rad/s
$\dot{\Omega}$	Taux de variation de la longitude du nœud ascendant	rad/s
$\Delta n$	Correction du mouvement moyen	rad/s
$C_{uc}$	Amplitude de la correction cosinus de l'argument de latitude	rad
$C_{us}$	Amplitude de la correction sinus de l'argument de latitude	rad
$C_{rc}$	Amplitude de la correction cosinus du rayon orbital	m
$C_{rs}$	Amplitude de la correction sinus du rayon orbital	m
$C_{ic}$	Amplitude de la correction cosinus de l'angle d'inclinaison	rad
$C_{is}$	Amplitude de la correction sinus de l'angle d'inclinaison	rad

Tableau-A V-2 Calcul de la position des satellites

Équation	Description
$a = (\sqrt{a})^2$	Axe semi-majeur
$n = \frac{\mu}{a^3} + \Delta n$	Mouvement moyen corrigé, $\mu = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
$t_k = t - t_{0e}$	Temps de l'époque éphéméride
$M_k = M_0 + n(t_k)$	Anomalie moyenne
$M_k = E_k - e \sin E_k$	Anomalie de l'excentricité (doit être solutionné itérativement afin de déterminer $E_k$ )
$\sin v_k = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E_k}{1 - e \cos E_k}$ $\cos v_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e \cos E_k}$	Anomalie vraie
$\phi_k = v_k + \omega$	Argument de latitude
$\delta\phi_k = C_{us} \sin(2\phi_k) + C_{uc} \cos(2\phi_k)$	Correction de l'argument de latitude
$\delta r_k = C_{rs} \sin(2\phi_k) + C_{rc} \cos(2\phi_k)$	Correction du rayon
$\delta i_k = C_{is} \sin(2\phi_k) + C_{ic} \cos(2\phi_k)$	Correction de l'inclinaison
$u_k = \phi_k + \delta\phi_k$	Argument de latitude corrigé
$r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta r_k$	Rayon corrigé
$i_k = i_0 + (di/dt)t_k + \delta i_k$	Inclinaison corrigée
$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)(t_k) - \dot{\Omega}_e t_{0e}$	Longitude corrigée du nœud, $\dot{\Omega}_e = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
$x_p = r_k \cos u_k$	Position en x selon le plan orbital
$y_p = r_k \sin u_k$	Position en y selon le plan orbital
$x_s = x_p \cos \Omega_k - y_p \cos i_k \sin \Omega_k$	Position ECEF en x
$y_s = x_p \sin \Omega_k + y_p \cos i_k \cos \Omega_k$	Position ECEF en y
$z_s = y_p \sin i_k$	Position ECEF en z

Tableau-A V-3 Calcul de la vitesse des satellites

Équation	Description
$\dot{E}_k = \frac{n}{1 - e \cos E_k}$	Variation de l'anomalie de l'excentricité
$\dot{\phi}_k = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E_k} \dot{E}_k$	Variation de l'argument de latitude
$\dot{u}_k = (1 + 2C_{us} \cos(2\phi_k) - 2C_{uc} \sin(2\phi_k)) \dot{\phi}_k$	Variation de l'argument de latitude corrigé
$\dot{r}_k = 2(C_{rs} \cos(2\phi_k) - C_{rc} \sin(2\phi_k)) \dot{\phi}_k + ae \sin E_k \dot{E}_k$	Variation du rayon corrigé
$\dot{X}_k = \dot{r}_k \cos u_k - r_k \sin u_k \dot{u}_k$	Variation de la position en x selon le plan orbital
$\dot{Y}_k = \dot{r}_k \sin u_k + r_k \cos u_k \dot{u}_k$	Variation de la position en y selon le plan orbital
$\frac{di_k}{dt} = 2(C_{is} \cos(2\phi_k) - C_{ic} \sin(2\phi_k)) \dot{\phi}_k + \frac{di}{dt}$	Variation de l'inclinaison corrigée
$\dot{\Omega}_k = \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e$	Variation de la longitude corrigée du nœud
$\dot{x}_s = \dot{X}_k \cos \Omega_k - \dot{Y}_k \cos i_k \sin \Omega_k + Y_k \sin i_k \sin \Omega_k \frac{di_k}{dt} - y_s \dot{\Omega}_k$	Vitesse ECEF en x
$\dot{y}_s = \dot{X}_k \sin \Omega_k + \dot{Y}_k \cos i_k \cos \Omega_k - Y_k \sin i_k \cos \Omega_k \frac{di_k}{dt} + x_s \dot{\Omega}_k$	Vitesse ECEF en y
$\dot{z}_s = \dot{Y}_k \sin i_k + Y_k \cos i_k \frac{di_k}{dt}$	Vitesse ECEF en z



## ANNEXE VI

### CALCUL DES PARAMÈTRES DE DILUTION DE PRÉCISION DU SYSTÈME GPS

Le calcul des différents indices de la dilution de précision peuvent être calculés à l'aide des équations suivantes (Sauriol, 2008) :

$$G = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & 1 \\ \underline{e}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{e}_n & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A VI-1})$$

$$H = (G^T G)^{-1} \quad (\text{A VI-2})$$

$$GDOP = \sqrt{H_{11} + H_{22} + H_{33} + H_{44}} \quad (\text{A VI-3})$$

$$PDOP = \sqrt{H_{11} + H_{22} + H_{33}} \quad (\text{A VI-4})$$

$$TDOP = \sqrt{H_{44}} \quad (\text{A VI-5})$$

où :

$\underline{e}_i$  : vecteur unitaire orienté selon la ligne de visée du satellite  $i$  tel que défini à l'équation (3.12)

L'indice PDOP peut être décomposé en composantes horizontale et verticale. Pour ce faire, il est d'abord nécessaire de calculer le vecteur de ligne de visée modifié à l'aide de l'équation suivante (Misra et Enge, 2006; Sauriol, 2008) :

$$\tilde{\underline{e}}_k = [\cos el_k \sin az_k \quad \cos el_k \cos az_k \quad \sin el_k] \quad (\text{A VI-6})$$

où :

$\tilde{\underline{e}}_k$  : vecteur de ligne de visée modifié pour le  $k^{\text{ième}}$  satellite

$el_k$  : angle d'élévation du  $k^{\text{ième}}$  satellite

$az_k$  : angle d'azimuth du  $k^{\text{ième}}$  satellite

De cette dernière, les matrices modifiées  $\tilde{G}$  et  $\tilde{H}$  peuvent être calculées, desquelles les paramètres EDOP, NDOP, HDOP, VDOP et TDOP peuvent être calculés (Sauriol, 2008) :

$$EDOP = \sqrt{\tilde{H}_{11}}; \quad NDOP = \sqrt{\tilde{H}_{22}}; \quad VDOP = \sqrt{\tilde{H}_{33}}; \quad TDOP = \sqrt{\tilde{H}_{44}} \quad (\text{A VI-7})$$

$$HDOP = \sqrt{EDOP^2 + NDOP^2} \quad (\text{A VI-8})$$

## ANNEXE VII

### ALGORITHME DE LEVENBERG-MARQUARDT

L'algorithme de Levenberg-Marquardt est un algorithme d'optimisation itératif permettant de résoudre certains problèmes liés à la minimisation d'une fonction de coût, notamment les problèmes non linéaires des moindres carrés. De manière générale, la résolution d'un problème non linéaire des moindres carrés consiste à déterminer un vecteur d'état optimal  $\underline{x}^*$  permettant de minimiser le coût total associé à  $N$  réalisations d'une fonction de coût  $f(\underline{x})$ . Ainsi, en considérant le vecteur  $\underline{f}(\underline{x})$  comme constitué de chacune des réalisations de la fonction de coût tel que  $\underline{f}(\underline{x}) = [f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})]^T$ , la résolution d'un tel problème se résume à déterminer le vecteur d'état optimal permettant de minimiser  $\|\underline{f}(\underline{x})\|$ . De manière équivalente :

$$\underline{x}^* = \underset{\underline{x}}{\operatorname{argmin}}\{F(\underline{x})\} \quad (\text{A VII-1})$$

dans laquelle :

$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (f_i(\underline{x}))^2 = \frac{1}{2} \|\underline{f}(\underline{x})\|^2 = \frac{1}{2} \underline{f}(\underline{x})^T \underline{f}(\underline{x}) \quad (\text{A VII-2})$$

L'idée derrière l'algorithme LM est de calculer, pour chaque itération, une perturbation  $\underline{h}_{lm}$  à ajouter au vecteur d'état précédent de manière à réduire la fonction de coût. Selon cette méthode, la perturbation à appliquer peut être obtenue par la résolution de l'égalité suivante (Madsen, Nielsen et Tingleff, 2004) :

$$(\underline{J}(\underline{x})^T \underline{J}(\underline{x}) + \mu \underline{I}) \underline{h}_{lm} = -\underline{J}(\underline{x})^T \underline{f}(\underline{x}) \quad (\text{A VII-3})$$

dans laquelle :

$$J(\underline{x}) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \quad (\text{A VII-4})$$

où :

- $J(\underline{x})$  : matrice jacobienne de  $f(\underline{x})$   
 $\mu$  : paramètre d'amortissement  
 $\underline{h}_{lm}$  : perturbation à ajouter au vecteur d'état

Le choix du paramètre d'amortissement varie d'un auteur à l'autre. Selon Madsen, Nielson et Tingleff (2004), ce paramètre devrait être sélectionné en fonction du facteur de qualité de la modélisation du comportement de  $F(\underline{x})$  autour du vecteur d'état. Ce facteur de qualité peut être obtenu à l'aide des équations suivantes (Madsen, Nielsen et Tingleff, 2004) :

$$\varrho = \frac{F(\underline{x}) - F(\underline{x} + \underline{h}_{lm})}{L(0) - L(\underline{h}_{lm})} \quad (\text{A VII-5})$$

$$L(0) - L(\underline{h}_{lm}) = \frac{1}{2} \underline{h}_{lm}^T (\mu \underline{h}_{lm} - J(\underline{x})^T f(\underline{x})) \quad (\text{A VII-6})$$

où :

- $\varrho$  : facteur de qualité du modèle  
 $L()$  : modèle du comportement de  $F(\underline{x})$  autour du vecteur d'état

Ainsi, le paramètre d'amortissement peut être calculé à chaque itération selon l'algorithme décisionnel suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{if}(\varrho > 0) \\
 & \quad \mu = \mu \cdot \max\left\{\frac{1}{3}, 1 - 2(2\varrho - 1)^3\right\} \\
 & \quad v = 2 \\
 & \text{else} \\
 & \quad \mu = \mu \cdot v \\
 & \quad v = 2v
 \end{aligned} \quad (\text{A VII-7})$$

De plus, toujours selon Madsen, Nielson et Tingleff (2004), la valeur initiale de ce paramètre devrait être sélectionnée tel que :

$$\mu_0 = \tau \cdot \max \left\{ \text{diag} \left[ J(\underline{x}_0)^T J(\underline{x}_0) \right] \right\} \quad (\text{A VII-8})$$

où :

$\tau$  : constante positive choisie par l'utilisateur en fonction de l'estimé initial du vecteur d'état

Le choix de la constante  $\tau$  est relativement critique pour l'algorithme et sa valeur devrait être sélectionnée en se basant sur la connaissance initiale du vecteur d'état, c'est-à-dire que plus  $\underline{x}_0$  semble être une bonne approximation de  $\underline{x}^*$ , plus la valeur de  $\tau$  devrait être petite. Finalement, étant donné que cette méthode est itérative, il est nécessaire de définir une condition d'arrêt. Puisque l'objectif de cet algorithme est de déterminer le minimum local de la fonction de coût, l'algorithme devrait s'arrêter lorsque la dérivée de la fonction de coût par rapport au vecteur d'état est nulle ou suffisamment petite. Ainsi, le critère d'arrêt suivant peut être utilisé :

$$J(\underline{x})^T f(\underline{x}) \leq \varepsilon \quad (\text{A VII-9})$$

où :

$\varepsilon$  : est une constante positive très petite sélectionnée par l'utilisateur



## ANNEXE VIII

### DÉTECTEUR D'ÉTAT QUASI-STATIONNAIRE

Le détecteur d'état quasi-stationnaire utilisé dans le cadre de ce projet est basé sur l'approche présentée par Jiménez *et al.* (2010) qui consiste à utiliser trois conditions de détection soit :

- C1 : Condition sur l'amplitude des forces spécifiques
- C2 : Condition sur la variance des forces spécifiques
- C3 : Condition sur l'amplitude es vitesses angulaires

Selon Jiménez *et al.* (2010), l'utilisation combinée de ces trois conditions rend le système plus robuste comparativement à d'autres détecteurs qui seraient basés uniquement sur l'une de ces conditions. La première condition stipule que pour que C1 soit valide, l'amplitude du vecteur de forces spécifiques doit être contenue entre deux seuils tel que :

$$C1 = \begin{cases} 1 & f_{min}^B < |\underline{\tilde{f}}_k^B| < f_{max}^B \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{A VIII-1})$$

où :

$f_{min}^B, f_{max}^B$  : seuils minimum et maximum de l'amplitude des forces spécifiques tolérés par le détecteur

$\underline{\tilde{f}}_k^B$  : vecteur de forces spécifiques, mesuré par les accéléromètres à l'instant  $k$

La seconde condition stipule que pour que C2 soit valide, la variance de l'amplitude du vecteur de forces spécifiques ne doit pas dépasser un certain seuil tel que :

$$C2 = \begin{cases} 1 & \sigma_{f_k}^2 < \sigma_{f_{max}}^2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{A VIII-2})$$

Dans laquelle :

$$\sigma_{f_k}^2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=k-n}^{k+n} \left( |\tilde{f}_i^B| - \overline{f_k^B} \right)^2 \quad (\text{A VIII-3})$$

où :

- $\sigma_{f_k}^2$  : variance de l'amplitude du vecteur de forces spécifique, calculée à l'instant  $k$
- $2n + 1$  : nombre d'échantillons utilisés dans le calcul de la variance
- $\overline{f_k^B}$  : moyenne de l'amplitude du vecteur de forces spécifique, calculée pour les  $2n + 1$  échantillons

Finalement, la troisième condition stipule que pour que C3 soit valide, l'amplitude du vecteur de vitesses angulaires doit être contenue en dessous d'un seuil tel que :

$$C3 = \begin{cases} 1 & |\tilde{\omega}_{IB_k}^B| < \omega_{max} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{A VIII-4})$$

où :

- $\omega_{max}^B$  : seuil maximum de l'amplitude des vitesses angulaires tolérées par le détecteur
- $\tilde{\omega}_{IB_k}^B$  : vecteur de vitesses angulaires, mesuré par les gyroscopes à l'instant  $k$

L'état quasi-stationnaire est déclaré seulement si les trois conditions sont valides.



## ANNEXE IX

### CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES DES CENTRALES INERTIELLES UTILISÉES

Les caractéristiques techniques présentées dans cette section pour chacune des trois centrales inertielles utilisées dans le cadre de ce projet sont tirées directement des fiches techniques fournies par les manufacturiers.

Tableau-A IX-1 Caractéristiques techniques de la centrale inertielle HG1700

Description	Valeur	Unité
Modèle	HG1700-AG11	-
Coût approximatif	> 10 000	\$
Fréquence d'échantillonnage	100	Hz
Dimensions	168 x 195 x 146	mm
Poids	4.5	kg
Puissance consommée	8	W
Température d'opération	-30 à 60	°C
<b>Accéléromètres</b>		
Portée	±50	g
Linéarité	500	ppm
Facteur d'échelle	300	ppm
Biais	2.0	mg
<b>Gyroscopes</b>		
Portée	±1 000	°/s
Biais	5.0	°/hr
Facteur d'échelle	150	Ppm
Bruit blanc	0.5	°/ $\sqrt{hr}$

Tableau-A IX-2 Caractéristiques techniques de la centrale inertielle nIMU

<b>Description</b>	<b>Valeur</b>	<b>Unité</b>
Modèle	NA02-0300F050	-
Coût approximatif	1 000	\$
Fréquence d'échantillonnage	150	Hz
Dimensions	46 x 23 x 13	mm
Poids	0.020	kg
Puissance consommée	1	W
Température d'opération	0 à 70	°C
<b>Accéléromètres</b>		
Portée	±2	g
Non-linéarité	0.4	%
Biais	30	mg
Bruit blanc	0.6	mg
<b>Gyroscopes</b>		
Portée	±300	°/s
Non-linéarité	0.1	%
Biais	1.5	°/s
Sensibilité transverse	1	%
Bruit blanc	0.56	°/s
<b>Magnétomètres</b>		
Portée	±1.9	gauss
Dérive	2700	ppm/°C
Non-linéarité	0.5	%
Sensibilité transverse	1	%
Bruit blanc	0.00056	gauss

Tableau-A IX-3 Caractéristiques techniques de la centrale inertielle iNEMO V2

<b>Description</b>	<b>Valeur</b>	<b>Unité</b>
Modèle	STEVAL-MKI062V2	-
Coût approximatif	200	\$
Fréquence d'échantillonnage	50	Hz
Dimensions	40 x 40 x 5	mm
Température d'opération	-30 à 85	°C
<b>Accéléromètres</b>		
Portée	±2	g
Biais	20	mg
Bruit blanc	218	$\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$
<b>Gyroscopes</b>		
Portée	±300	°/s
Non-linéarité	1	%
Bruit blanc	0.018	°/s $/\sqrt{\text{Hz}}$
<b>Magnétomètres</b>		
Portée	±1.3	gauss
Sensibilité transverse	1	%



## ANNEXE X

### RÉSULTATS DE LA CALIBRATION PAR L'ALGORITHME LM

Tableau-A X-1 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle HG1700 à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	$3.16 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.000	-0.000	0.001	0.000	0.001	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.001	$2.36 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>13</sub></b>	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.000	0.001	0.000	-0.001	0.000	0.000	$2.45 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>21</sub></b>	0.001	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	$2.10 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	$6.25 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.001	-0.000	0.000	-0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	$1.13 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>31</sub></b>	0.000	-0.000	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	$6.16 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.001	0.000	0.000	$1.13 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	$5.06 \times 10^{-9}$
<b>b<sub>x</sub></b>	0.001	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	$4.38 \times 10^{-8}$
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.001	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	$2.01 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	$5.53 \times 10^{-8}$

Tableau-A X-2 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle nIMU à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.004	1.003	1.003	1.003	$4.67 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>12</sub></b>	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	$5.79 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>13</sub></b>	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	$5.75 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>21</sub></b>	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	$5.79 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	$6.06 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.001	$1.25 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>31</sub></b>	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	$5.75 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.001	0.001	$1.25 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.004	1.003	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.004	1.003	1.004	$1.36 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.009	-0.009	-0.010	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	-0.009	$2.63 \times 10^{-8}$
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.002	-0.001	-0.002	-0.001	-0.002	-0.002	$6.07 \times 10^{-8}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	$4.09 \times 10^{-8}$

Tableau-A X-3 Résultats de la calibration des accéléromètres de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.982	0.981	0.981	0.980	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	0.981	$1.59 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>12</sub></b>	0.020	0.020	0.020	0.020	0.021	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	$9.02 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.001	$1.11 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>21</sub></b>	0.020	0.020	0.020	0.020	0.021	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	$9.02 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>22</sub></b>	0.988	0.988	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	$1.80 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>23</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	-0.000	-0.000	$4.55 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.001	$1.11 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>32</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.001	-0.000	-0.001	-0.000	-0.000	$4.55 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>33</sub></b>	0.951	0.952	0.952	0.952	0.952	0.952	0.952	0.951	0.952	0.952	0.952	$1.75 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.004	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	$2.17 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>y</sub></b>	-0.012	-0.012	-0.011	-0.011	-0.012	-0.011	-0.012	-0.011	-0.011	-0.012	-0.012	$6.16 \times 10^{-8}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.029	-0.036	-0.037	-0.038	-0.038	-0.038	-0.038	-0.038	-0.037	-0.037	-0.037	$6.91 \times 10^{-6}$

Tableau-A X-4 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle HG1700 à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$2.63 \times 10^{-11}$
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	$4.56 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	$2.18 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	$2.45 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$1.52 \times 10^{-11}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	$7.76 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	$3.54 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	$1.06 \times 10^{-15}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$5.20 \times 10^{-11}$
<b>b<sub>x</sub></b>	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	$2.26 \times 10^{-10}$
<b>b<sub>y</sub></b>	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	$2.66 \times 10^{-10}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	$1.72 \times 10^{-11}$

Tableau-A X-5 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle nIMU à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.998	0.999	0.998	0.999	0.999	0.999	0.998	0.999	0.995	0.999	0.998	$1.90 \times 10^{-6}$
<b>e<sub>12</sub></b>	0.000	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	$2.57 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>13</sub></b>	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.002	0.000	-0.000	$4.90 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>21</sub></b>	0.000	0.000	0.002	0.000	0.001	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	$2.57 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	$1.96 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	$4.17 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>31</sub></b>	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.002	0.000	-0.000	$4.90 \times 10^{-7}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	$4.17 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	$1.49 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>x</sub></b>	0.002	-0.004	-0.003	-0.007	-0.006	-0.006	-0.008	-0.007	-0.006	-0.008	-0.005	$9.13 \times 10^{-6}$
<b>b<sub>y</sub></b>	0.001	0.001	-0.000	0.002	0.001	0.003	0.004	0.002	0.005	0.003	0.002	$2.65 \times 10^{-6}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.005	-0.006	-0.005	-0.006	-0.006	-0.006	-0.006	-0.005	-0.007	-0.006	-0.006	$7.29 \times 10^{-7}$

Tableau-A X-6 Résultats de la calibration des gyroscopes de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	0.999	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	0.999	0.999	$1.26 \times 10^{-8}$
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	$9.71 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	$5.04 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	$9.72 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>22</sub></b>	0.999	0.998	0.998	0.998	0.999	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	$4.43 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>23</sub></b>	-0.003	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	$7.08 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	$4.98 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>32</sub></b>	-0.003	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	$7.03 \times 10^{-9}$
<b>e<sub>33</sub></b>	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	0.991	$9.81 \times 10^{-9}$
<b>b<sub>x</sub></b>	0.019	0.019	0.019	0.020	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.018	0.019	$1.41 \times 10^{-7}$
<b>b<sub>y</sub></b>	0.048	0.047	0.049	0.050	0.050	0.050	0.051	0.050	0.050	0.050	0.050	$1.40 \times 10^{-6}$
<b>b<sub>z</sub></b>	0.121	0.121	0.122	0.121	0.121	0.121	0.121	0.121	0.120	0.121	0.121	$3.16 \times 10^{-7}$

Tableau-A X-7 Résultats de la calibration des magnétomètres de la centrale inertielle nIMU à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.306	1.296	1.292	1.301	1.299	1.291	1.300	1.303	1.295	1.295	1.298	$2.35 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>12</sub></b>	0.088	0.093	0.086	0.084	0.086	0.081	0.092	0.084	0.085	0.085	0.086	$1.40 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>13</sub></b>	-0.082	-0.084	-0.080	-0.086	-0.081	-0.082	-0.079	-0.081	-0.085	-0.082	-0.082	$4.74 \times 10^{-6}$
<b>e<sub>21</sub></b>	0.076	0.083	0.069	0.072	0.075	0.073	0.083	0.075	0.071	0.076	0.075	$2.10 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.045	1.035	1.043	1.045	1.042	1.043	1.049	1.048	1.046	1.031	1.043	$3.13 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>23</sub></b>	0.180	0.172	0.171	0.174	0.174	0.182	0.170	0.177	0.172	0.166	0.174	$2.13 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>31</sub></b>	-0.066	-0.086	-0.059	-0.077	-0.068	-0.071	-0.067	-0.069	-0.061	-0.084	-0.071	$8.27 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.152	0.170	0.165	0.160	0.147	0.152	0.143	0.148	0.151	0.163	0.155	$7.53 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>33</sub></b>	0.862	0.880	0.876	0.876	0.865	0.868	0.861	0.867	0.866	0.882	0.870	$5.74 \times 10^{-5}$
<b>b<sub>x</sub></b>	4.897	4.808	4.748	4.643	4.771	4.790	4.914	4.737	4.602	4.575	4.749	$1.31 \times 10^{-2}$
<b>b<sub>y</sub></b>	9.283	8.834	9.528	9.410	9.551	9.618	9.846	9.834	9.954	8.903	9.476	$1.45 \times 10^{-1}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-1.653	-2.704	-2.800	-2.519	-2.348	-2.285	-2.263	-2.270	-2.562	-3.089	-2.449	$1.50 \times 10^{-1}$

Tableau-A X-8 Résultats de la calibration des magnétomètres de la centrale inertielle iNEMO V2 à l'aide de l'algorithme LM

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	$\mu$	$\sigma^2$
<b>e<sub>11</sub></b>	1.329	1.334	1.336	1.321	1.323	1.333	1.319	1.312	1.316	1.318	1.324	$6.95 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>12</sub></b>	-0.006	-0.002	-0.010	-0.021	0.003	0.008	-0.009	-0.013	-0.011	-0.011	-0.007	$7.03 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>13</sub></b>	0.012	0.000	-0.004	0.022	-0.000	0.003	0.010	0.020	-0.003	0.016	0.008	$9.17 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>21</sub></b>	-0.006	-0.003	-0.010	-0.022	0.002	0.008	-0.009	-0.013	-0.012	-0.011	-0.008	$7.02 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>22</sub></b>	1.373	1.383	1.388	1.378	1.374	1.377	1.387	1.380	1.392	1.382	1.381	$3.76 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>23</sub></b>	-0.000	-0.000	-0.004	-0.006	0.003	-0.005	-0.005	-0.011	0.001	-0.010	-0.004	$2.14 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>31</sub></b>	0.012	0.001	-0.003	0.022	-0.000	0.003	0.010	0.020	-0.003	0.017	0.008	$9.28 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>32</sub></b>	0.000	0.000	-0.004	-0.006	0.004	-0.005	-0.005	-0.010	0.001	-0.010	-0.004	$2.24 \times 10^{-5}$
<b>e<sub>33</sub></b>	1.293	1.315	1.319	1.315	1.324	1.332	1.324	1.330	1.331	1.328	1.321	$1.38 \times 10^{-4}$
<b>b<sub>x</sub></b>	-13.51	-13.23	-13.47	-13.46	-12.95	-13.42	-13.17	-13.39	-13.28	-13.42	-13.33	$3.02 \times 10^{-2}$
<b>b<sub>y</sub></b>	0.073	0.092	0.113	0.082	0.033	0.265	0.006	0.004	0.052	0.064	0.078	$5.54 \times 10^{-3}$
<b>b<sub>z</sub></b>	-0.641	-0.695	-0.679	-0.753	-0.541	-0.813	-0.519	-0.704	-0.816	-0.708	-0.687	$9.93 \times 10^{-3}$



## ANNEXE XI

### IDENTIFICATION DES DIFFÉRENTS TYPES DE BRUIT PAR L'ANALYSE DE LA VARIANCE D'ALLAN

#### XI.1 Bruit de quantification

Le bruit de quantification est présent à l'intérieur de la plupart des capteurs inertiels et il provient directement de la nature numérique de ces derniers. En effet, cette source d'erreur provient de la conversion du signal analogique vers numérique et est causée par l'écart entre le signal réel mesuré et la valeur numérique fournie par le convertisseur analogique-numérique. Selon l'IEEE (1996), la variance d'Allan du bruit de quantification est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{A-Q}^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2} \quad (\text{A XI-1})$$

où :

$Q$  : coefficient du bruit de quantification

Selon cette équation, le bruit de quantification est caractérisé par une pente de -1 sur le graphique logarithmique de l'écart type d'Allan  $\sigma_A(\tau)$  en fonction de la période d'agrégat  $\tau$  tel qu'illustré sur la Figure-A XI-1. La valeur du coefficient  $Q$  peut être obtenue directement sur cette courbe caractéristique en lisant la valeur de l'écart type d'Allan à  $\tau = \sqrt{3}$ .

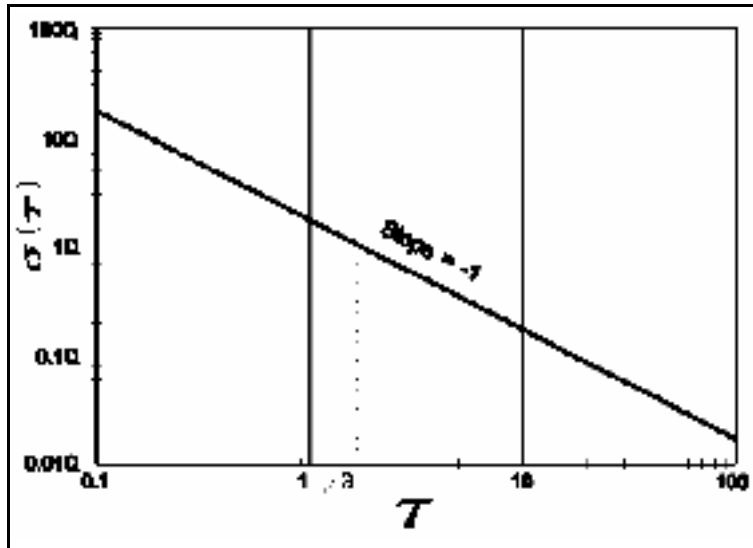


Figure-A XI-1 Courbe caractéristique du bruit de quantification  
Tirée de IEEE (1996)

## XI.2 Bruit blanc

Le bruit blanc présent sur les mesures inertielles se manifeste comme un processus de marche aléatoire angulaire (gyroscope) ou de vitesse (accéléromètres) lors de l'intégration des mesures. Toute source de bruit à haute fréquence dont le temps de corrélation est beaucoup plus petit que la fréquence d'échantillonnage du capteur peut contribuer à cette erreur. Selon l'IEEE (1996), l'équation caractérisant la variance d'Allan de ce bruit est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{A-N}^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau} \quad (\text{A XI-2})$$

où :

$N$  : coefficient du bruit blanc

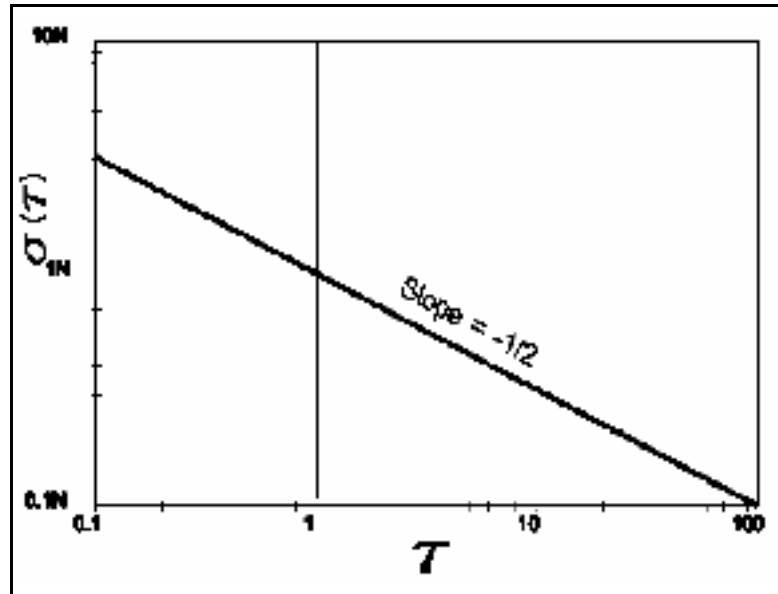


Figure-A XI-2 Courbe caractéristique du bruit blanc  
Tirée de IEEE (1996)

Selon cette équation, le bruit blanc est caractérisé par une pente de  $-1/2$  sur le graphique logarithmique de l'écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat (voir *Figure-A XI-2*). La valeur du paramètre  $N$  peut être obtenue directement sur cette courbe caractéristique en lisant la valeur de l'écart type d'Allan à  $\tau = 1$ .

### XI.3 Bruit corrélé ou processus de Markov

Le bruit corrélé, également appelé processus de Markov, est caractérisé par une fonction de densité spectrale de puissance qui décroît exponentiellement en fonction de la fréquence (voir *Figure 6-18*). Cette source de bruit peut provenir entre autre de la vibration ou de la résonance aléatoire des composantes mécaniques du capteur (IEEE, 1996). L'équation caractéristique de la variance d'Allan du bruit corrélé est donnée par l'expression suivante (IEEE, 1996) :

$$\sigma_{A-Q_c}^2(\tau) = \frac{(Q_c T_c)^2}{\tau} \left[ 1 - \frac{T_c}{2\tau} \left( 3 - 4e^{-\frac{\tau}{T_c}} + e^{-\frac{2\tau}{T_c}} \right) \right] \quad (\text{A XI-3})$$

où :

$Q_c$  : coefficient du bruit corrélé

$T_c$  : période de corrélation du processus de Markov

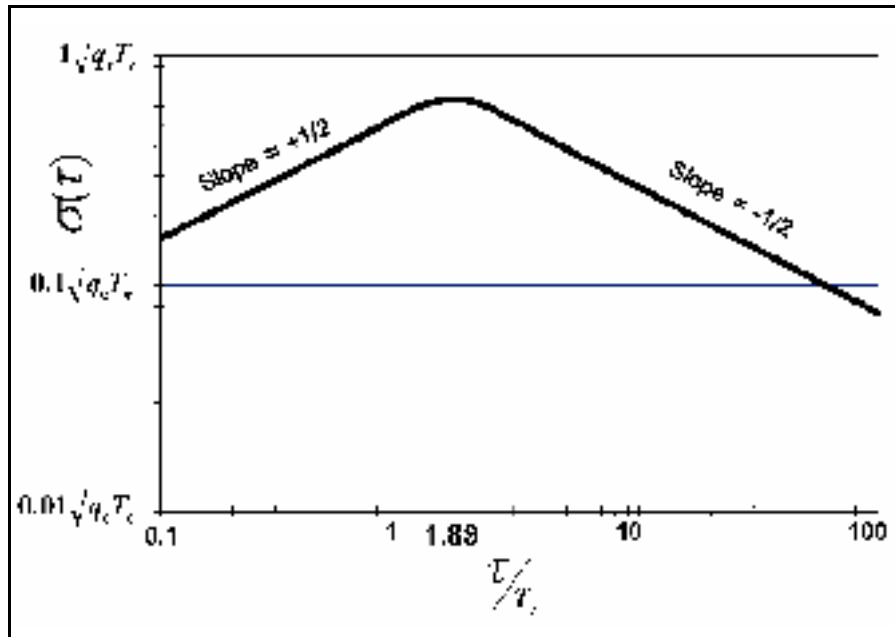


Figure-A XI-3 Courbe caractéristique du bruit corrélé (processus de Markov)  
Tirée de IEEE (1996)

En évaluant les limites de cette équation, il est possible de conclure que le bruit corrélé est caractérisé par une pente de  $+1/2$  pour  $\tau \ll T_c$  et de  $-1/2$  pour  $\tau \gg T_c$  sur le graphique logarithmique de l'écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat (voir Figure-A XI-3). La valeur du paramètre  $Q_c$  peut être obtenue directement sur cette courbe caractéristique selon la relation illustrée à la Figure-A XI-3.

#### XI.4 Instabilité du biais

L'instabilité du biais caractérise toute variation de la valeur nulle fournie par le capteur (biais) qui survient à basse fréquence. Cette source d'erreur peut être causée par une variation de température à l'intérieur du capteur, ou encore par une fluctuation de la tension de référence des composants électroniques de ce dernier. Selon l'IEEE (1996), la variance d'Allan caractérisant l'instabilité du biais est définie selon l'expression suivante :

$$\sigma_{A-B}^2(\tau) = \frac{2B^2}{\pi} \left[ \ln 2 - \frac{\sin^3 x}{2x^2} (\sin x + 4x \cos x) + C_i(2x) - C_i(4x) \right] \quad (\text{A XI-4})$$

dans laquelle :

$$x = \pi f_0 \tau \quad (\text{A XI-5})$$

où :

$B$  : coefficient de l'instabilité du biais

$f_0$  : fréquence de coupure du capteur

$C_i$  : fonction cosinus intégrale  $C_i(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$

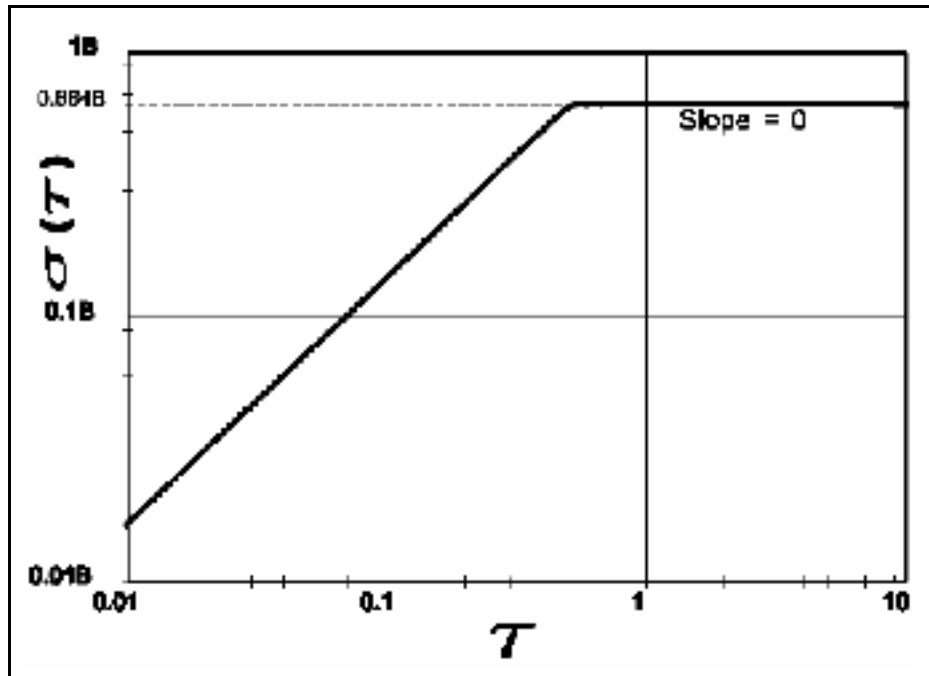


Figure-A XI-4 Courbe caractéristique de l'instabilité du biais  
Tirée de IEEE (1996)

En évaluant les limites de cette équation, il est possible de conclure que l'instabilité du biais est caractérisé par une pente de +1 pour  $\tau \ll 1/f_0$  et de 0 pour  $\tau \gg 1/f_0$  sur le graphique logarithmique de l'écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat (voir Figure-A

XI-4). La valeur du paramètre  $B$  peut être obtenue directement sur cette courbe caractéristique selon la relation illustrée à la Figure-A XI-4.

### XI.5 Processus de marche aléatoire

Le processus de marche aléatoire est une source d'erreur stochastique dont l'origine est incertaine. Selon l'IEEE (1996), le processus de marche aléatoire pourrait être un cas particulier de bruit corrélé dont la période de corrélation serait très grande. L'équation caractérisant la variance d'Allan de ce bruit est donnée par l'expression suivante (IEEE, 1996) :

$$\sigma_{A-K}^2(\tau) = \frac{K^2\tau}{3} \quad (\text{A XI-6})$$

où :

$K$  : coefficient du processus de marche aléatoire

Selon cette équation, le processus de marche aléatoire est caractérisé par une pente de +1/2 sur le graphique logarithmique de l'écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat (voir Figure-A XI-5). La valeur du paramètre  $K$  peut être obtenue directement sur cette courbe caractéristique en lisant la valeur de l'écart type d'Allan à  $\tau = 3$ .

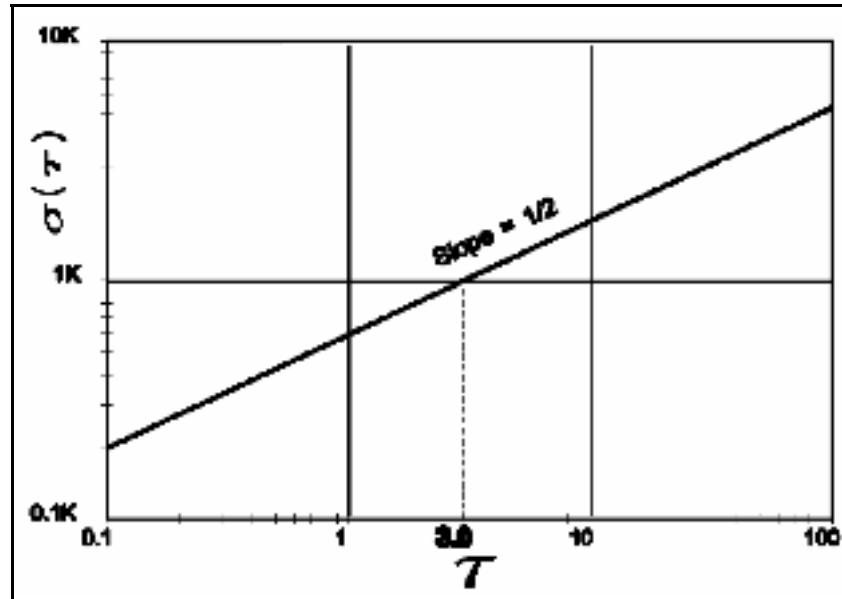


Figure-A XI-5 Courbe caractéristique du processus de marche aléatoire  
Tirée de IEEE (1996)

## XI.6 Bruit de rampe

Selon l'IEEE (1996), le bruit de rampe constitue une erreur de nature plutôt déterministe que stochastique. Cette erreur pourrait provenir d'une accélération persistante de faible intensité qui agirait sur la plateforme de navigation pour une longue période de temps (IEEE, 1996). L'équation caractéristique du bruit de rampe est donnée par l'expression suivante (IEEE, 1996) :

$$\sigma_{A-R}^2(\tau) = \frac{R^2 \tau^2}{2} \quad (\text{A XI-7})$$

où :

$R$  : coefficient du bruit de rampe

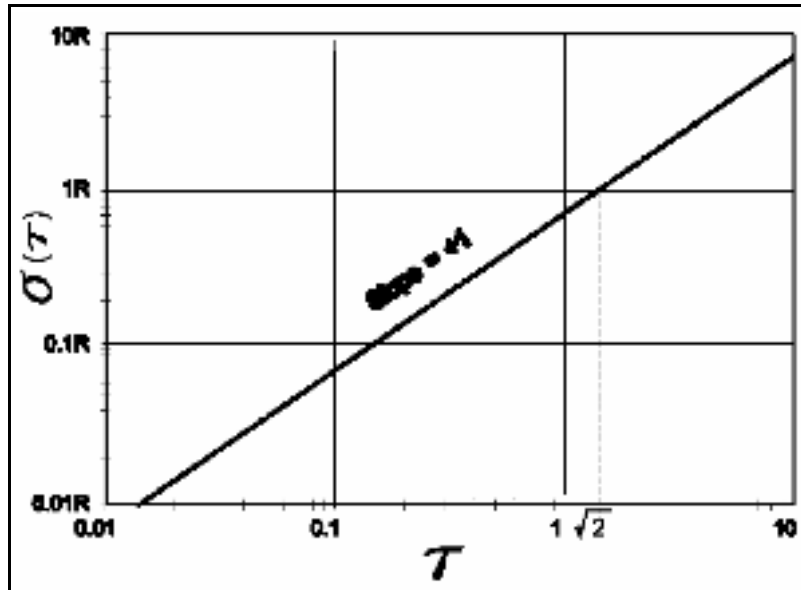


Figure-A XI-6 Courbe caractéristique du bruit de rampe  
Tirée de IEEE (1996)

Selon cette équation, le bruit de rampe est caractérisé par une pente de +1 sur le graphique logarithmique de l'écart type d'Allan en fonction de la période d'agrégat (voir *Figure-A XI-6*). La valeur du coefficient  $R$  peut être obtenue directement sur cette courbe en lisant la valeur de l'écart type d'Allan à  $\tau = \sqrt{2}$ .



## LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- Alban, Santiago, Dennis M. Akos et Stephen M. Rock. 2003. « Performances Analysis and Architectures for INS-Aided GPS Tracking Loops ». In *Proceedings of the 2003 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (Anaheim, CA, January 22-24, 2003), p. 611-622.
- Allan, D. W. 1966. « Statistics of atomic frequency standards ». *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, n° 2, p. 221-230.
- Amand, Yvon, et Alain Deval. 1992. « Accélération ». < [www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/grandeurs-mecaniques-42407210/acceleration-r1812/#](http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/grandeurs-mecaniques-42407210/acceleration-r1812/#) >. Consulté le 10 décembre 2010.
- Armenise, Mario N., Caterina Ciminelli, Francesco Dell'Olio et Vittorio M. N. Passaro. 2010. *Advances in gyroscope technologies*. Berlin ; Heidelberg: Springer.
- Artese, G., et A. Trecroci. 2008. « Calibration of a low cost mems ins sensor for an integrated navigation system ». In *XXIth ISPRS Congress*. (Beijing, CHINA, July 3-11, 2008), p. 877-882.
- Babu, Ravindra, Jinling Wang et Gottapu Rao. 2008. « Analysis of Ultra-tight GPS/INS Integrated System for Navigation Performance ». In *International Conference on Communications and Networking, 2008 (ICSCN '08)*. (January 4-6, 2008 ), p. 234-237.
- Bar-Shalom, Yaakov, Xiao-Rong Li et Thiagalingam Kirubarajan. 2001. *Estimation with applications to tracking and navigation : theory, algorithms and software*. New York: Wiley, xxiii, 558 p.
- Bekir, Esmat. 2007. *Introduction to modern navigation systems*. Singapore ; Hackensack, N.J.: World Scientific Publishing.
- Bertsekas, Dimitri P. 1994. *Incremental least squares methods and the extended Kalman filter*. Coll. « Lids-P », 2237. Cambridge, Mass.: Massachusetts Institute of Technology, Laboratory for Information and Decision Systems, 18 leaves p.
- Brown, Robert Grover, et Patrick Y. C. Hwang. 1997. *Introduction to random signals and applied Kalman filtering : with MATLAB exercises and solutions*, 3rd. New York: Wiley, xi, 484 p.
- Chavagnieux, Cédric. 2007. « Développement d'un récepteur hybride GPS/Galileo en environnement réel ». M.Ing., Ecole de Technologie Supérieure (Canada).

- Chiou, Tsung-Yu. 2005. « GPS Receiver Performance Using Inertial-Aided Carrier Tracking Loop ». In *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation ION GNSS 2005*. (Long Beach, CA, September 13-16, 2005), p. 2895-2910.
- Cox, D. B. 1978. « INTEGRATION OF GPS WITH INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS (MISCELLANEOUS TOPICS) ». *NAVIGATION*, vol. 25, n° 2, p. 236-245.
- Cox, D. B. 1980. « Integration of GPS With Inertial Navigation Systems ». In *Global Positioning System: Papers Published in NAVIGATION*. Vol. 1. The Institute of Navigation.
- De Agostino, M. 2008. « A multi-frequency filtering procedure for inertial navigation ». In *Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION*. (5-8 May 2008), p. 1115-1121.
- Delaporte, Thomas. 2009. « Logiciel temps reel utilisant un filtre de Kalman robuste et des signaux GPS double frequences pour un positionnement de haute precision ». M.Ing., Ecole de Technologie Superieure (Canada).
- El-Diasty, M., A. El-Rabbany et S. Pagiatakis. 2007. *Temperature variation effects on stochastic characteristics for low-cost MEMS-based inertial sensor error*, 18. 11. Bristol, ROYAUME-UNI: Institute of Physics, 8 p.
- El-Diasty, Mohammed, et Spiros Pagiatakis. 2008. « Calibration and Stochastic Modelling of Inertial Navigation Sensor Errors ». *Journal of Global Positioning Systems*, vol. 7, n° 2, p. 170-182.
- El-Rabbany, Ahmed. 2002. *Introduction to GPS : the global positioning system*. Coll. « Artech House mobile communications series ». Boston: Artech House, xv, 176 p.
- El-Sheimy, N., Hou Haiying et Niu Xiaoji. 2008. « Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance ». *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 57, n° 1, p. 140-149.
- El-Sheimy, N., S. Nassar et A. Noureldin. 2004. « Wavelet de-noising for IMU alignment ». *Aerospace and Electronic Systems Magazine, IEEE*, vol. 19, n° 10, p. 32-39.
- Farrell, Jay. 2008. *Aided navigation : GPS with high rate sensors*. Coll. « Electronic engineering ». New York: McGraw-Hill, xxi, 530 p.
- Farrell, Jay, et Matthew Barth. 2001. *Integration of GPS/INS and Magnetic Markers for Advanced Vehicle Control*. UCB-ITS-PRR-2001-38: University of California, Riverside, California.

- Faulkner, Todd, et Stephen Chestnut. 2008. « Impacto of Rapid Temperature Change on Firefighter Tracking in GPS-denied Environments Using Inexpensive MEMS IMUs ». In *Proceedings of the 2008 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (San Diego, CA, January 28 - 30, 2008), p. 828 - 834.
- Faulkner, W. T., R. Alwood, D. W. A. Taylor et J. Bohlin. 2010. « Altitude Accuracy While Tracking Pedestrians Using a Boot-mounted IMU ». In *Proceedings of IEEE/ION PLANS 2010*. (Indian Wells, CA, May 4 - 6, 2010), p. 90 - 96.
- Flenniken, IV, Warren S. . 2005. « Modeling Inertial Measurement Units and Analyzing the Effect of Their Errors in Navigation Applications ». Auburn, Alabama, Auburn University (United States).
- Fong, W. T., S. K. Ong et A. Y. C. Nee. 2008. « Methods for in-field user calibration of an inertial measurement unit without external equipment ». *Measurement Science & Technology*, vol. 19, n° 8.
- Fortin, M.-A., J.-C. Guay et R. Jr Landry. 2009. « Development of a Universal GNSS Tracking Channel ». In *Proceedings of the 22nd International Technical Meeting of The Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2009)*. (Savannah, GA, September 22 - 25, 2009), p. 259 - 272.
- Gao, Guojiang. 2007. « INS-assisted high sensitivity GPS receivers for degraded signal navigation ». Ph.D., University of Calgary (Canada).
- Gao, Guojiang, et Gérard Lachapelle. 2006. « INS-Assisted High Sensitivity GPS Receivers For Degraded Signal Navigation ». In *Proceedings of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation ION GNSS 2006*. (Fort Worth, TX, September 26 - 29, 2006), p. 2977 - 2989.
- Gebre-Egziabher, D., G. H. Elkaim, J. D. Powel et B. W. Parkinson. 2006. « Calibration of strapdown magnetometers in magnetic field domain ». *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 19, n° 2, p. 87-102.
- Gebre-Egziabher, D., G. H. Elkaim, J. D. Powell et B. W. Parkinson. 2000. « A gyro-free quaternion-based attitude determination system suitable for implementation using low cost sensors ». In *Position Location and Navigation Symposium, IEEE 2000*. (2000), p. 185-192.
- Gebre-Egziabher, Demoz. 2002. « Design and performance analysis of a low-cost aided dead reckoning navigator ». Ph. D. United States -- California, Stanford University, 270 p.
- Gebre-Egziabher, Demoz, Gabriel H. Elkaim, J. David Powell et Bradford K. Parkinson. 2001. « A Non-Linear, Optimal Two-Step Estimation Algorithm for Calibrating Solid-State Strapdown Magnetometers ». In *8th SAINT PETERSBURG*

*INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTEGRATED NAVIGATION SYSTEMS.*  
(Saint Petersburg, Russia, May 28-30, 2001).

Georgy, Jacques F. W. 2010. « Advanced nonlinear techniques for low cost land vehicle navigation ». Ph.D., Queen's University (Canada).

GFZ-Potsdam. 2004. « GFZ-Potsdam Science Results ». < <http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/>>.

Giroux, Richard. 2004. « Capteurs bas de gamme et systemes de navigation inertielle: Nouveaux paradigmes d'application ». Ph.D., Ecole de Technologie Superieure (Canada).

Godha, S., G. Lachapelle et M. E. Cannon. 2006. « Integrated GPS/INS System for Pedestrian Navigation in a Signal Degraded Environment ». In *Proceedings of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2006)*. (Fort Worth, TX, September 26 - 29, 2006), p. 2151 - 2164.

GPSW. 2010. *Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces (ICD)*. Interface Specification. IS-GPS-200E. El Segundo, CA. < <http://www.gps.gov/technical/icwg/IS-GPS-200E.pdf>>.

Greenspan, R. L. 1996. « GPS and Inertial Integration ». In *Global Positioning System: Theory and Applications, Volume II*, sous la dir. de Parkinson, Bradford W., James J. Spilker, Penina Axelrad et Per Enge. AIAA.

Grejner-Brzezinska, Dorota A., Charles K. Toth et Yudan Yi. 2002. « Bridging GPS Gaps in Urban Canyons: Can ZUPT Really Help? ». In *Proceedings of the 58th Annual Meeting of The Institute of Navigation and CIGTF 21st Guidance Test Symposium*. (Albuquerque, NM, June 24 - 26, 2002), p. 231 - 240.

Grewal, Mohinder S., Lawrence R. Weill et Angus P. Andrews. 2007. *Global positioning systems, inertial navigation, and integration*, 2nd. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience.

Groves, Paul D. , Christopher J. Mather et Alex A. Macaulay. 2007. « Demonstration of Non-coherent Deep INS/GPS Integration for Optimised Signal-to-noise Performance ». In *Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007)*. (Fort Worth, TX, September 25 - 28, 2007), p. 2627 - 2638.

Guay, Jean-Christophe. 2010. « Recepteur SBAS-GNSS logiciel pour des applications temps-reel ». M.Ing., Ecole de Technologie Superieure (Canada).

- Guo, Hang , Donghyun Kim, Richard Langley, Min Yu, Chengwu Zou et Wenwen Huang. 2008. « A New Method for Electronic Compass Magnetometer Calibration for Improving Azimuth Calculation in Magnetometer/GPS Integrated System ». In *Proceedings of the 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2008)*. (Savannah, GA, September 16 - 19, 2008), p. 1641 - 1648.
- Hou, H. , et N. El-Sheimy. 2003. « Inertial Sensors Errors Modeling Using Allan Variance ». In *Proceedings of the 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS/GNSS 2003)*. (Portland, OR, September 9 - 12, 2003), p. 2860 - 2867.
- Hou, Haiying. 2004. « Modeling Inertial Sensors Errors Using Allan Variance ». Calgary, University of Calgary.
- IAGA. 2010. « International Geomagnetic Reference Field ». < <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html> >.
- IEEE. 1996. « IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros ». *IEEE Std 647-1995*.
- Jiménez, A.R., F. Seco, J.C. Prieto et J. Guevara. 2010. « Indoor Pedestrian Navigation using an INS/EKF framework for Yaw Drift Reduction and a Foot-mounted IMU ». In *7th Workshop on Positioning, Navigation and Communication 2010*. (Dresden, Germany, 11-12 March 2010), p. 135-143.
- Johnson, Curtis D. 2006. *Process control instrumentation technology*, 8th. Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall, 694 p.
- Kaplan, Elliott D., et C. Hegarty. 2006. *Understanding GPS : principles and applications*, 2nd. Coll. « Artech House mobile communications series ». Boston: Artech House.
- Karamat, Tashfeen B. 2009. « Implementation of tightly coupled INS/GPS integration for land vehicle navigation ». M.A.Sc., Royal Military College of Canada (Canada).
- King, A. D. 1998. « Inertial Navigation - Forty Years of Evolution ». *GEC Review*, vol. 13, n° 3, p. 140-149.
- Kreye, Ch., B. Eissfeller et G. Ameres. 2004. *Architectures of GNSS/INS Integrations - Theoretical Approach and Practical Tests*. Institute of Geodesy and Navigation, University FAF (Germany).
- Küpper, Axel. 2005. *Location-based services : fundamentals and operation*. Chichester, England ; Hoboken, NJ: John Wiley, xix, 365 p.

- Kwakkel, S. P. , S. Godha et G. Lachapelle. 2007. « Foot and Ankle Kinematics During Gait Using Foot Mounted Inertial System ». In *Proceedings of the 2007 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (San Diego, CA, January 22 - 24, 2007), p. 1056 - 1064.
- Lachapelle, Gérard, et Bryan Townsend. 1992. « Hybrid GPS/Locan-C: An Effective Radionavigation Mix for Vehicular Navigation in Mountainous Areas ». In *Proceedings of the 48th Annual Meeting of The Institute of Navigation*. (June 29-1, 1992), p. 3-12.
- Lamontagne, Guillaume. 2009. « Conception et mise en oeuvre d'une tete de reception a echantillonnage direct RF pour les signaux de radionavigation par satellites ». M.Ing., Ecole de Technologie Superieure (Canada).
- Lawrence, Anthony. 1998. *Modern inertial technology : navigation, guidance, and control*, 2nd. Coll. « Mechanical engineering series ». New York: Springer, xvi, 278 p.
- Lee, Taikjin , Chongwon Kim, Seungil Jeon, Sanghoon Jeon, Ghangho Kim et Changdon Kee. 2010. « Pedestrian Indoor Navigation Algorithm based on the Pseudolite and Low-cost IMU with Magnetometers Including In-Flight Calibration ». In *Proceedings of the 2010 International Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (San Diego, CA, January 25 - 27, 2010), p. 230 - 235.
- Li, Di, R. Jr Landry, Philippe Lavoie, Jacques De Guise et Nicola Hagemester. 2009. « A Quaternion Based Robust Attitude Initial Alignment Approach for Using Low Cost MEMS/Magnetometer ». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, p. 14.
- Li, Di, R. Jr Landry, Philippe Lavoie, Jacques de Guise et Nicola Hagemester. 2011. « Validation of a Low-cost Attitude Determination System Using Wearable Inertial and Magnetic Sensors for Human Motion Tracking ». *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, p. 12.
- Li, L. , Y. Pan, D. A. Grejner-Brzezinska, C. K. Toth et H. Sun. 2010. « Allan Variance Analysis of the H764G Stochastic Sensor Model and its Application in Land Vehicle Navigation ». In *Proceedings of the 2010 International Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (San Diego, CA, January 25 - 27, 2010), p. 22 - 30.
- Li, Tao. 2009. « Use of Wheel Speed Sensors to Enhance a Reduced IMU Ultra-Tight GNSS Receiver ». M.Sc., University of Calgary (Canada).
- Looney, Mark (Analog Devices). 2010. « A simple calibration for MEMS gyroscopes ». *Electronics Design, Strategy, News*. < [www.edn.com/article/509352-A\\_simple\\_calibration\\_for\\_MEMS\\_gyroscopes.php](http://www.edn.com/article/509352-A_simple_calibration_for_MEMS_gyroscopes.php) >. Consulté le 27 mai 2011.

- Lotters, J. C., J. Schipper, P. H. Veltink, W. Olthuis et P. Bergveld. 1998. « Procedure for in-use calibration of triaxial accelerometers in medical applications ». *Sensors and Actuators a-Physical*, vol. 68, n° 1-3, p. 221-228.
- Madsen, K., H.B. Nielsen et O. Tingleff. 2004. *Methods for non-linear least squares problems* (April 2004), 2nd Edition. Technical University of Denmark.
- Miller, Lance, Bartlett Steven, Benjamin Peterson et Michael McKaughan. 1995. « Evaluation of Radionavigation Systems in an Urban Environment ». In *Proceedings of the 1995 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (Anaheim, CA, January 18-20, 1995), p. 293-302.
- Misra, Pratap, et Per Enge. 2006. *Global positioning system : signals, measurements, and performance*, 2nd. Lincoln, Mass.: Ganga-Jamuna Press, 569 p. p.
- Nassar, S. , K-P. Schwarz, N. El-Sheimy et A. Noureldin. 2003. « Modeling Inertial Sensor Errors Using Autoregressive (AR) Models ». In *Proceedings of the 2003 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (Anaheim, CA, January 22 - 24, 2003), p. 116 - 125.
- Nassar, Sameh. 2004. « Improving the inertial navigation system (INS) error model for INS and INS/DGPS applications ». NQ93636. Canada, University of Calgary (Canada), 178 p.
- Nassar, Sameh, Klaus-Peter Schwarz et Naser El-Sheimy. 2004. « INS and INS/GPS Accuracy Improvement Using Autoregressive (AR) Modeling of INS Sensor Errors ». In *Proceedings of the 2004 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (San Diego, CA, January 26 - 28, 2004), p. 936 - 944.
- Niu, Xiaoji, et Naser El-Sheimy. 2005. « The Development of a Low-cost MEMS IMU/GPS Navigation System for Land Vehicles Using Auxiliary Velocity Updates in the Body Frame ». In *Proceedings of the 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation ION GNSS 2005*. (Long Beach, CA, September 13-16, 2005), p. 2003-2012.
- Novatel. 2011. « SPAN-CPT ». < <http://webone.novatel.ca/assets/Documents/Papers/SPAN-CPT.pdf> >.
- Park, Minha, et Yang Gao. 2006. « Error Analysis and Stochastic Modeling of Low-cost MEMS Accelerometer ». *J. Intell. Robotics Syst.*, vol. 46, n° 1, p. 27-41.
- Penna, Nigel, Alan Dodson et Wu Chen. 2001. « Assessment of EGNOS Tropospheric Correction Model ». *The Journal of Navigation*, vol. 54, n° 01, p. 37-55.

- Peterson, Benjamin, Richard Hartnett et Geoffrey Ottman. 1995. « GPS Receiver Structures for the Urban Canyon ». In *Proceedings of the 8th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation ION GPS 1995*. (Palm Springs, CA, September 12-15 1995), p. 1323-1332.
- Petovello, Mark G. 2003. « Real-time integration of a tactical-grade IMU and GPS for high-accuracy positioning and navigation ». Ph.D., University of Calgary (Canada).
- Pusa, Joonas. 2009. « Strapdown inertial navigation system aiding with nonholonomic constraints using indirect Kalman filtering ». Tampere University of Technology, 66 p.
- Radix, Jean-Claude. 2000. « Gyroscopes et gyromètres mécaniques avec élément rotatif ». <<http://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/mesures-analyses-th1/grand-ours-mecaniques-42407210/gyroscopes-et-gyrometres-mecaniques-avec-element-rotatif-r1940/>>. Consulté le 10 décembre 2010.
- Renaudin, Valerie, Muhammad Haris Afzal et Gerard Lachapelle. 2010. « New method for magnetometers based orientation estimation ». In *Position Location and Navigation Symposium (PLANS), 2010 IEEE/ION*. (4-6 May 2010), p. 348-356.
- Rogers, Robert M. 2003. *Applied mathematics in integrated navigation systems*, 2nd. Coll. « AIAA education series ». Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, xvi, 330 p.
- Rönnbäck, Sven. 2008. « Development of a INS/GPS navigation loop for an UAV ». Master's Thesis. Luleå University of Technology (Sweden).
- Sabatini, Angelo Maria. 2006. *A wavelet-based bootstrap method applied to inertial sensor stochastic error modelling using the Allan variance*, 17. 11. Bristol, ROYAUME-UNI: Institute of Physics, 9 p.
- Sauriol, Bruno. 2008. « Mise en oeuvre en temps reel d'un recepteur hybride GPS-Galileo ». M.Ing., Ecole de Technologie Supérieure (Canada).
- Savage, Paul G. 2000. *Strapdown analytics*. Maple Plain, Minn.: Strapdown Associates.
- Schmidt, George T. 2004. *INS/GPS Technology Trends*. RTO-EN-SET-064: RTO NATO.
- Schmidt, George T., et Richard E. Phillips. 2004. *INS/GPS Integration Architectures*. RTO-EN-SET-064: RTO NATO.
- Shin, E. H., et N. El-Sheimy. 2002. « A new calibration method for strapdown inertial navigation systems ». *Zeitschrift für Vermessungswesen*, vol. 127, n° 1, p. 41-50.



- Shin, Eun-Hwan. 2002. « Accuracy improvement of low-cost INS/GPS for land applications ». M.Sc., University of Calgary (Canada).
- Skog, Isaac, et Peter Händel. 2006. « Calibration of a mems inertial measurement unit ». In *XVII IMEKO World Congress*. (Rio de Janeiro, Brazil, September 17-22, 2006), p. 17-22.
- Soloviev, Andrey , Frank van Graas et Sanjeev Gunawardena. 2004. « Implementation of Deeply Integrated GPS/Low-Cost IMU for Reacquisition and Tracking of Low CNR GPS Signals ». In *Proceedings of the 2004 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. (San Diego, CA, January 26 - 28, 2004), p. 923 - 935.
- Syed, Z. F., P. Aggarwal, C. Goodall, X. Niu et N. El-Sheimy. 2007. « A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems ». *Measurement Science & Technology*, vol. 18, n° 7, p. 1897-1907.
- Titterton, David H., et John L. Weston. 2004. *Strapdown inertial navigation technology*, 2nd. Reston, Va.: The Institution of Electrical Engineers and The American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Tsui, James Bao-yen. 2005. *Fundamentals of global positioning system receivers : a software approach*, 2nd. Coll. « Wiley series in microwave and optical engineering ». New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., xvi, 352 p.
- Wahba, Grace. 1966. « A least squares estimate of satellite attitude, Problems and Solutions section ». *SIAM Review*, vol. 8, n° 3.
- Wall, J. H., et D. M. Bevly. 2006. « Characterization of Inertial Sensor Measurements for Navigation Performance Analysis ». In *Proceedings of the 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2006)*. (Fort Worth, TX, September 26 - 29, 2006), p. 2678 - 2685.
- Wang, J. S., Y. L. Hsu et J. N. Liu. 2010. « An Inertial-Measurement-Unit-Based Pen With a Trajectory Reconstruction Algorithm and Its Applications ». *Ieee Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, n° 10, p. 3508-3521.
- Watson, Robert, Mark Petovello, Gérard Lachapelle et Richard Klukas. 2007. « Impact of Oscillator Errors on IMU-Aided GPS Tracking Loop Performance ». In *Proceedings of European Navigation Conference GNSS 2007*. (Geneva, Switzerland, May 29-31, 2007), p. 15.
- Woodman, Oliver J. 2007. *An introduction to inertial navigation*. UCAM-CL-TR-696. Cambridge, United Kingdom: University of Cambridge.

- Yang, Yong. 2008. « Tightly coupled MEMS INS/GPS integration with INS aided receiver tracking loops ». Ph.D., University of Calgary (Canada).
- Yunchun, Yang, et J. A. Farrell. 2003. « Magnetometer and differential carrier phase GPS-aided INS for advanced vehicle control ». *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 19, n° 2, p. 269-282.
- Zhiqiang, Xing, et D. Gebre-Egziabher. 2008. « Modeling and bounding low cost inertial sensor errors ». In *Position, Location and Navigation Symposium, 2008 IEEE/ION*. (5-8 May 2008), p. 1122-1132.
- Zogg, Jean-Marie. 2002. *GPS Basics: Introduction to the system --Application overview*. PDF.<[http://geology.isu.edu/geostac/Field\\_Exercise/GPS/GPS\\_basics\\_u\\_blox\\_en.pdf](http://geology.isu.edu/geostac/Field_Exercise/GPS/GPS_basics_u_blox_en.pdf)>. Consulté le June 3, 2011.