

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE
M. Ing.

PAR
Pier-Marc COMTOIS-RIVET

SYSTÈME DE NAVIGATION INERTIELLE PAR FILTRAGE DE KALMAN INDIRECT
POUR UN SOUS-MARIN D'INSPECTION ROBOTISÉ

MONTREAL, LE 23 MARS 2012



Pier-Marc Comtois-Rivet, 2012



Cette licence [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

PRÉSENTATION DU JURY
CE MÉMOIRE OU THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Pascal Bigras, directeur de mémoire
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

Vincent Duchaine, codirecteur de mémoire
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

Guy Gauthier, président du jury
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

François Mirallès, examinateur externe
Institut de recherche d'Hydro-Québec

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 27 MARS 2012

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mon directeur de mémoire, M.Pascal Bigras pour son aide ainsi que les différents conseils tout au long de ma maîtrise.

Je remercie tout le personnel de l'IREQ qui m'a permis d'effectuer mon projet de recherche sur le sous-marin d'inspection. Je remercie Francis Lecomte pour son soutien technique lors des expérimentations sur la cellule robotique. Plus particulièrement, je remercie François Mirallès qui m'a appuyé et appris beaucoup de notions en navigation et robotique tout au long de mon mémoire.

Je remercie aussi tous les membres du club étudiant Dronolab de l'École de technologie supérieure pour leur soutien et leurs conseils.

Finalement, pour leurs soutiens financiers, je tiens à remercier le Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies ainsi que le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada

SYSTÈME DE NAVIGATION INERTIELLE PAR FILTRAGE DE KALMAN INDIRECT POUR UN SOUS-MARIN D'INSPECTION ROBOTISÉ

Pier-Marc, COMTOIS-RIVET

RÉSUMÉ

Les techniques conventionnelles de positionnement à l'aide d'un système de navigation inertielle sont reconnues pour dériver avec le temps. Elles offrent par conséquent de piètres performances pour les applications qui requièrent une grande précision comme les sous-marins d'inspection. Ce mémoire propose de fusionner les mesures d'un système de navigation inertielle à des mesures de positionnement absolues afin d'améliorer et de stabiliser l'estimation des orientations et des positions. Cette technique permettra au sous-marin d'inspection de l'Institut de Recherche d'Hydro-Québec (IREQ) de mieux référencer les anomalies des barrages inspectés.

L'objectif général du projet de recherche est d'intégrer par filtrage de Kalman indirect les mesures d'une centrale inertielle avec un système de positionnement absolu pour mesurer la position d'un sous-marin d'inspection. Afin d'atteindre cet objectif, le système de navigation inertielle est analysé et étudié. Les algorithmes sont d'abord testés en simulation avant d'être implantés dans un système réel. Par la suite, la validation des performances de la fusion de données est effectuée en imposant à la centrale inertielle réelle une trajectoire simulant les mouvements exacts du sous-marin. Un manipulateur robotique est utilisé pour réaliser cette trajectoire. Cette méthode innovatrice permet d'obtenir une bonne répétabilité. L'excellente précision de la position du robot facilite l'évaluation de la performance de l'algorithme.

Les résultats expérimentaux obtenus montrent que l'utilisation du filtrage indirect de Kalman comme solution au problème de positionnement d'un sous-marin d'inspection est valable. Cependant, certaines contraintes doivent être respectées afin que les performances de cet algorithme restent satisfaisantes.

Mots clés : Kalman, système de navigation, centrale inertielle, sous-marin robotisé

SYSTÈME DE NAVIGATION INERTIELLE PAR FILTRAGE DE KALMAN INDIRECT POUR UN SOUS-MARIN D'INSPECTION ROBOTISÉ

Pier-Marc, COMTOIS-RIVET

ABSTRACT

Conventional positioning techniques using an inertial navigation system are known to drift with time. They offer poor performance for applications requiring high precision such as underwater remotely operated vehicle (ROV). This thesis proposes to use an inertial navigation system and merge data with external measurement to improve orientations and positions stability. This technique will allow the Hydro-Québec Research Institute (IREQ) underwater inspection vehicle to better reference anomalies contain on dams surface.

The main objective of the research project is to integrate by indirect Kalman filter measures of an inertial system with an absolute underwater positioning system to estimate the position of an ROV. To achieve this goal, the inertial navigation system will be analyzed and studied. The algorithms will be first tested in simulation before being implemented in a real system. The performance of the data fusion will be validated by imposing real underwater vehicle movement to the inertial sensor. A robotic manipulator will move the sensors according to an ROV trajectory. This approach will provide a good repeatability. The excellent accuracy of the actual ROV position will facilitates the evaluation of the algorithms performance.

Experimental results as show that the use of an indirect Kalman filtering as a solution to the positioning problem of an underwater inspection vehicle is valid. However, some constraints must be respected so that the performance of the algorithm is satisfactory.

Keywords: Kalman, inertial navigation system, inertial measurement unit, ROV

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 Revue de littérature	7
1.1 Système de navigation inertielle (SNI)	7
1.2 Navigation acoustique	9
1.3 Types de couplages	10
1.4 Système de navigation complet	10
1.5 Cartographie et vision	11
CHAPITRE 2 Notions de navigation	13
2.1 Notation des vitesses	13
2.2 Repère de navigation	13
2.2.1 ECI (« Earth Centered Inertial »)	14
2.2.2 ECEF («Earth-Centered, Earth-Fixed»)	15
2.2.3 Tangentiel	15
2.2.4 Plateforme	16
2.3 Représentation d'attitude	17
2.3.1 Matrice de rotation	17
2.3.1.1 Changement de repère à l'aide des matrices de rotation	17
2.3.2 Angles d'Euler	18
2.3.3 Quaternion	19
2.3.4 Transformation des angles d'Euler en une matrice de rotation	20
2.3.5 Transformation d'un quaternion en une matrice de rotation	20
2.3.6 Transformation d'une matrice de rotation en angles d'Euler	21
2.4 Propagation d'une orientation dans le temps	21
2.4.1 Loi de propagation des angles d'Euler	21
2.4.2 Loi de propagation des quaternions	22
2.5 Modèle de gravité	22
2.6 Outils mathématiques en navigation	23
2.6.1 Produit vectoriel d'un vecteur de vitesse de rotation sous forme matricielle	23
2.6.2 Dérivé d'une matrice de rotation	23
2.6.3 Changement de repère d'une matricie	24
2.6.4 Erreur des petits angles	24
2.7 Conclusion	24
CHAPITRE 3 Système de navigation inertielle	25
3.1 Accéléromètres	26
3.2 Gyromètres	28
3.3 Composition des mouvements	29
3.3.1 Composition des vitesses	29

3.3.2	Composition des accélérations.....	29
3.4	Accélération dans le repère tangentiel	30
3.5	Accélération dans le repère de la plateforme	31
3.6	Sélection des équations d'un SNI	32
3.6.1	Schéma fonctionnel du système de navigation	34
3.7	Conclusion	35
CHAPITRE 4 Filtre de Kalman		37
4.1	Filtre de Kalman direct	37
4.2	Filtre de Kalman indirect	39
4.2.1	Description du filtre	39
4.2.2	Avantages.....	40
4.2.3	Variable d'état du système.....	41
4.2.4	Variable d'état de l'erreur	41
4.2.5	Vecteur d'entrée du bruit du modèle	42
4.3	Équation de l'erreur	42
4.3.1	Équation de l'erreur de position :.....	43
4.3.2	Équation de l'erreur de vitesse:.....	44
4.3.3	Équation de l'erreur d'orientation:.....	46
4.3.4	Modèle d'état	48
4.3.5	Mesures de la position	51
4.3.6	Mesures de l'attitude.....	53
4.3.7	Mesures de la vitesse	54
4.4	Équation du filtre de Kalman.....	55
4.4.1	Prédiction	55
4.4.2	Mise à jour	56
4.4.3	Mise à jour du système de navigation inertielle.....	57
4.5	Conclusion	58
CHAPITRE 5 Méthodologie d'expérimentation		59
5.1	Banc d'essai robotique.....	59
5.1.1	Avantages du banc d'essai	60
5.1.2	Inconvénients du banc d'essai	61
5.1.3	Repères.....	63
5.1.4	Synchronisation.....	65
5.1.5	État du robot.....	66
5.2	Trajectoire	66
5.2.1	Trajectoire 1 : «Lawnmower»	67
5.2.2	Trajectoire 2 : Sous-marin	68
5.3	Simulation des capteurs externes	69
5.3.1	Simulation de l'USBL.....	69
5.3.2	Simulation de l'attitude.....	70
5.3.3	Simulation du DVL.....	70
5.4	Répétabilité	71
5.5	Conclusion	72

CHAPITRE 6 Expérimentation : Système de navigation inertielle.....	73
6.1 La variance d'Allan.....	73
6.1.1 Caractérisation du SDI500.....	76
6.1.2 Catégorisation d'une centrale inertielle.....	80
6.2 Dérive de la centrale inertielle.....	81
6.2.1 Erreur en position.....	81
6.2.2 Désalignement.....	81
6.2.3 Biais sur accéléromètre.....	82
6.2.4 Biais gyromètre.....	82
6.3 Initialisation de la centrale inertielle.....	82
6.4 Résultat statique.....	85
6.4.1 Avec initialisation d'alignement et des biais.....	85
6.4.2 Système de navigation inertielle sans alignement.....	87
6.4.3 Système de navigation inertielle sans compensation des biais.....	90
6.4.4 Caractéristique de la dérive.....	92
6.5 Test dynamique.....	93
6.5.1 Repère pour la vitesse.....	95
6.6 Conclusion.....	97
CHAPITRE 7 Expérimentation : Filtre de Kalman.....	99
7.1 Simulation.....	100
7.2 Expérimentation sur le banc d'essai.....	102
7.2.1 Variance des capteurs de mesure absolue.....	103
7.2.2 Résultat : Trajectoire «Lawnmower».....	104
7.2.3 Trajectoire de type «Sous-Marin».....	110
7.2.4 Stabilité à long terme.....	113
7.2.5 Signaux de mesure fortement bruités.....	114
7.2.6 Signaux de mesure faiblement bruités.....	116
7.2.7 Dérive du système sans référence d'attitude.....	117
7.2.8 Mesures externes à 10 Hz.....	119
7.2.9 Initialisation de l'attitude et des biais.....	122
7.2.10 Mesures externes à 2 Hz.....	123
7.2.11 Mise en œuvre d'une centrale inertielle à faibles coûts.....	125
7.3 Conclusion.....	128
CONCLUSION.....	129
RECOMMANDATIONS.....	131
BIBLIOGRAPHIE.....	133

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 5-1	Comparaison des méthodes d'expérimentation60
Tableau 6-1	Pente sur le graphique d'Allan.....76
Tableau 6-2	Caractéristiques du capteur76
Tableau 6-3	Instabilité du biais des gyromètres.....78
Tableau 6-4	Cheminement aléatoire angulaire78
Tableau 6-5	Instabilité des biais d'accéléromètre79
Tableau 6-6	Cheminement aléatoire de vitesse.....80
Tableau 6-7	Catégorisation des centrales inertielles80
Tableau 6-8	Biais présents sur les gyromètres84
Tableau 6-9	Rotation de la Terre84
Tableau 6-10	Comparaison de la dérive selon la calibration92
Tableau 7-1	Écart type des mesures externes103
Tableau 7-2	Erreur Rms d'attitude.....111
Tableau 7-3	Bruit fort sur les signaux de mesures115
Tableau 7-4	Bruit faible sur les signaux de mesures.....116
Tableau 7-5	Comparaison de l'erreur RMS de position selon le bruit sur les mesures117
Tableau 7-6	Comparaison de l'erreur RMS de position126

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 0.1 Sous-marin d’inspection Maski	1
Figure 2.1 Positions des repères	14
Figure 2.2 Repère ECI.....	14
Figure 2.3 Repère tangentiel	15
Figure 2.4 Repère de la plateforme	16
Figure 3.1 Structure du système de navigation inertielle	25
Figure 3.2 Vecteur de gravité local	27
Figure 3.3 Système de navigation inertiel	35
Figure 4.1 Filtre de Kalman	38
Figure 4.2 Structure du filtrage indirect	39
Figure 4.3 Algorithme du filtrage de Kalman	58
Figure 5.1 Représentation du système réel.....	62
Figure 5.2 Représentation du système simulé à l’aide d’un robot manipulateur	62
Figure 5.3 Repères sur le banc d’essai	63
Figure 5.4 Position entre les repères	63
Figure 5.5 Séquence de synchronisation	66
Figure 5.6 Trajectoire « Lawnmower ».....	67
Figure 5.7 Trajectoire : Sous-marin	68
Figure 5.8 Orientation trajectoire : Sous-marin.....	69
Figure 5.9 Reproductibilité.....	71
Figure 6.1 Pente du graphique d’Allan	74
Figure 6.2 Écart type d’Allan : Gyromètres	77

Figure 6.3	Écart type d'Allan : Accéléromètres	79
Figure 6.4	Erreur en position.....	85
Figure 6.5	Dérive d'orientation	86
Figure 6.6	Dérive de position sans alignement	88
Figure 6.7	Erreur sur le désalignement d'un degré	89
Figure 6.8	Dérive d'attitude sans la compensation des biais	90
Figure 6.9	Comparaison de la dérive avec et sans calibration	91
Figure 6.10	Dérive de la vitesse	92
Figure 6.11	Dérive lors d'une trajectoire dynamique.....	93
Figure 6.12	Dérive de l'attitude en dynamique.....	95
Figure 6.13	Comparaison entre la représentation dans deux repères	96
Figure 7.1	Simulation de la position dans le filtrage de Kalman	100
Figure 7.2	Simulation de l'attitude par filtrage de Kalman.....	101
Figure 7.3	Estimation de la trajectoire par filtrage de Kalman	104
Figure 7.4	Estimation de l'attitude par filtrage de Kalman	106
Figure 7.5	Estimation de vitesse par filtrage de Kalman	107
Figure 7.6	Estimation de la position par filtrage de Kalman.....	108
Figure 7.7	Erreur d'estimation de la position.....	109
Figure 7.8	Estimation de l'orientation avec une trajectoire de sous-marin.....	110
Figure 7.9	Estimation de la position avec une trajectoire de sous-marin.....	111
Figure 7.10	Estimation de la trajectoire du sous-marin en trois dimensions	112
Figure 7.11	Stabilité de la trajectoire	113
Figure 7.12	Stabilité de l'erreur	114
Figure 7.13	Suivi de trajectoire avec des mesures fortement bruitées	115

Figure 7.14	Estimation avec mesure faiblement bruitée	116
Figure 7.15	Dérive de position sans aide de l'orientation	118
Figure 7.16	Dérive de la position sans aide d'attitude	119
Figure 7.17	Suivi de trajectoire (10 Hz)	120
Figure 7.18	Estimation de l'attitude(10 Hz).....	121
Figure 7.19	Comparaison avec et sans initialisation	122
Figure 7.20	Suivi de trajectoire (2 Hz).....	123
Figure 7.21	Estimé de la position (2 Hz)	124
Figure 7.22	Suivi de trajectoire avec un SNI de faible coût.....	125
Figure 7.23	Comparaison entre les centrales inertielles.....	127

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

AHRS	Attitude and Heading Reference System
ARW	Angle Random Walk
AUV	Autonomous Underwater Vehicule
DCM	Direction Cosine Matrix
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DVL	Doppler Velocity Log»
ECEF	Earth Centered, Earth Fixed
ECI	Earth Centered Inertial
FOG	Fiber Optic Gyroscope
HSI	High Speed Interface
IMU	Inertial Measurement Unit
IREQ	Institut de Recherche d'Hydro-Québec
LBL	Long Base Line
MEMS	MicroElectroMechanical Systems
RMS	Root Mean Square
ROV	Remote operated vehicule
SLAM	Simultaneous Localization and Mapping
USBL	Ultra-Short BaseLine

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES

$\mathbf{p}_{a/b}^a$	Position du repère b par rapport a exprimé dans le repère a
\mathbf{R}_a^b	Matrice de rotation d'un repère a vers un repère b
$\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{v}$	Vitesse
$\ddot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{a}$	Accélération
$\boldsymbol{\omega}$	Vitesse de rotation
$\boldsymbol{\omega}_{i/e}$	Vitesse de rotation de la Terre par rapport au repère inertiel
Ω	Forme matricielle d'un produit croisé de la vitesse de rotation
φ	Roulis
θ	Tangage
ψ	Lacet
\mathbf{q}	Quaternion
\mathbf{k}	Vecteur unitaire des paramètres d'Euler
δ	Rotation autour du vecteur unitaire des paramètres d'Euler
$\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Paramètre d'un quaternion
$\boldsymbol{\Omega}^j$	Matrice de propagation angulaire
\mathbf{W}	Matrice de propagation de quaternion
ϕ	Latitude
\mathbf{g}	Vecteur de gravité
$\tilde{\mathbf{g}}$	Vecteur de gravité local
$\delta\rho$	L'erreur des petits angles
\mathbf{f}	Force spécifique
$\mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g$	Biais des accéléromètres et gyromètres
$\hat{\mathbf{b}}_a, \hat{\mathbf{b}}_g$	Biais estimé des accéléromètres et gyromètres
η	Bruit blanc
\mathbf{x}	Vecteur d'état
$\delta\mathbf{x}^-$	Vecteur d'erreur de l'état a priori
$\delta\mathbf{x}^+$	Vecteur d'erreur de l'état a posteriori
\mathbf{y}	Vecteur de mesure
$\delta\mathbf{y}$	Vecteur d'erreur de mesure
\mathbf{F}, \mathbf{G}	Matrice du modèle d'état
\mathbf{H}	Matrice de sortie du modèle
\mathbf{Q}	Matrice de covariance du bruit
\mathbf{R}	Matrice de covariance du bruit de mesure
\mathbf{P}	Matrice de covariance
\mathbf{P}_0	Matrice de covariance initiale
Φ	Matrice de propagation de l'erreur discrète
γ	Matrice exponentielle
$\delta\mathbf{p}$	Vecteur d'erreur de position
$\delta\mathbf{v}$	Vecteur d'erreur de vitesse
σ^2	Variance
σ	Écart type
τ	Grandeur de l'échantillonnage pour la méthode d'Allan

<i>i</i>	Repère inertiel
<i>o</i>	Repère de l'effecteur du manipulateur robotique
<i>r</i>	Repère de la base du manipulateur robotique
<i>t</i>	Repère tangentiel
<i>e</i>	Repère ECEF
<i>p</i>	Repère de la plateforme
<i>c</i>	Repère de la centrale inertielle

INTRODUCTION

Hydro-Québec est une grande société d'État en distribution, transport et production d'électricité. La grande majorité de la production électrique du Québec provient de l'hydroélectricité. Hydro-Québec possède 571 barrages et ouvrages régulateurs un peu partout sur les rivières du Québec.¹ La plupart d'entre eux sont âgés et nécessitent d'être inspectés et entretenus régulièrement pour continuer à être opérés de façon sécuritaire ainsi que pour allonger leur durée de vie. Souvent, des scaphandriers doivent effectuer des travaux d'inspection qui sont à la fois dangereux et dispendieux. En effet, pour la sécurité des travailleurs, plusieurs sections du barrage doivent être fermées, ce qui entraîne une perte de profit majeur pour l'entreprise. Puisque certains barrages sont immergés à plus de 200 mètres de profondeur et que les parties à inspecter peuvent être situées dans des endroits restreints, il est parfois impossible d'effectuer ces travaux.



Figure 0.1 Sous-marin d'inspection Maski

C'est pourquoi l'Institut de Recherche d'Hydro-Québec a développé le sous-marin d'inspection Maski (Figure 0.1). Ce sous-marin permet de réduire les coûts liés aux inspections des structures immergées de façons sécuritaires. Piloté par une équipe à la surface,

¹ Source : Hydro-Québec

le sous-marin nécessite un système de navigation fiable et performant. Un système de positionnement permet au robot sous-marin d'être commandé avec précision, mais aussi de mieux connaître les emplacements des anomalies observées sur les barrages. L'exactitude de la position des défauts observés est importante afin de générer un rapport d'inspection précis pour les travaux d'entretien futurs.

Actuellement, le système de navigation du Maski souffre de plusieurs problèmes :

- i) les capteurs inertiels permettent d'obtenir l'information sur le mouvement du sous-marin, mais les mesures dérivent. De façon générale, un système de navigation inertielle (SNI) permet d'obtenir la position, la vitesse et l'attitude d'un mobile. Cependant, dû à la nature instable des systèmes inertiels, l'orientation, la vitesse et la position souffrent d'une dérive constante et doivent être régulièrement calibrées. Ainsi, le système de navigation du Maski doit être constamment ajusté en chantier afin de limiter la dérive d'orientation. Ces calibrations sont complexes et augmentent la durée des inspections réduisant ainsi la capacité de production du barrage;
- ii) lorsque, ponctuellement, un capteur de position est défaillant et ne fournit plus de signaux, il n'est plus possible d'estimer la position du robot et l'inspection doit être interrompue. De surcroît, avant même qu'elles soient détectées, ces erreurs d'estimation de la position du sous-marin peuvent entraîner de graves conséquences au niveau du contrôle en temps réel;
- iii) normalement, un système de boussoles électroniques permet au sous-marin de connaître son orientation. Cependant, le robot d'inspection circule près d'un barrage hydro-électrique constitué principalement de béton armé. Ce type de béton renferme de nombreuses tiges d'acier afin de renforcer la structure. Ces tiges ferromagnétiques perturbent grandement les boussoles du sous-marin les rendant la plupart du temps inutilisables. Malheureusement, la boussole électronique est l'un des rares instruments stables capables de fournir l'orientation du véhicule. Les gyromètres permettent

également d'estimer l'orientation de la plateforme en intégrant la variation de l'orientation. Cependant, ce résultat dérive lentement avec l'accumulation de l'erreur créée par l'intégration.

Pour ces raisons, l'équipe de développement du Maski a comme objectif la conception d'un nouveau système de navigation permettant de réduire significativement la dérive présente sur l'attitude et de permettre une mesure de position fiable en tout temps. La conception d'un système de navigation simple et fiable, calibré en laboratoire, est essentielle pour effectuer les inspections adéquatement.

Le problème de la navigation est de connaître l'état d'un véhicule (position, vitesse et orientation) en temps réel, par rapport à un repère défini. Plusieurs capteurs permettent d'estimer la position réelle du robot. Chaque capteur possède leurs avantages et leurs inconvénients. Largement utilisées en navigation aérienne, les ondes GPS ne traversent pas la surface de l'eau, il est donc impossible d'obtenir le positionnement global d'un sous-marin avec ce capteur lorsqu'il est immergé. Il faut donc faire appel à d'autres types de capteurs. En navigation sous-marine, les capteurs acoustiques sont grandement utilisés puisque ce type d'ondes se propage bien sous l'eau. Des balises acoustiques permettent d'obtenir directement la position du sous-marin. Cependant, ces capteurs possèdent une fréquence de rafraîchissement faible. De plus, ces capteurs sont vulnérables aux perturbations présentes sur les sites d'inspections. La solution est donc de recueillir des données provenant de plusieurs sources distinctes. Le défi consiste ensuite à réaliser une estimation optimale de la position, de la vitesse et de l'orientation à partir de plusieurs capteurs de nature différente.

L'objectif de ce mémoire est de développer un système de navigation inertielle fusionné à des mesures de position externe (provenant d'autres types de capteurs) pour un sous-marin d'inspection. Une solution par filtrage de Kalman est préconisée pour atteindre cet objectif. Un algorithme de filtrage indirect de Kalman est formulé, mis en œuvre et évalué. Le comportement du système de navigation est étudié dans diverses circonstances. Une analyse est effectuée afin de connaître l'effet du niveau de bruit ainsi que de la fréquence de

rafraîchissement des différents capteurs sur la précision du système de navigation proposé. Une solution de navigation fonctionnelle et relativement simple d'utilisation afin de faciliter les inspections des parois des barrages hydro-électriques est donc préconisée. Ce système permettra d'obtenir une estimation temps réel précise et fiable de la position, la vitesse et l'attitude du sous-marin.

Ce mémoire est divisé en 7 parties:

- le chapitre 1 porte sur la revue de littérature concernant les différents systèmes de navigations appliqués à un véhicule sous-marin;
- le chapitre 2 porte sur les notions de base des systèmes de navigation. Les notions fondamentales sur la représentation des positions et des orientations sont abordées ainsi que les outils mathématiques spécifiques à ce domaine;
- le chapitre 3 décrit les notions théoriques relatives aux systèmes de navigation inertielle. Les algorithmes composant un système de navigation inertielle ainsi que la mécanisation d'une centrale inertielle sont présentés. Les équations qui composent le système de navigation sont développées selon plusieurs repères;
- le chapitre 4 décrit théoriquement le filtrage de Kalman indirect. Un modèle d'erreur d'une SNI est développé. Finalement, une solution de navigation complète fusionnant les mesures inertielles aux signaux de mesure absolue est présentée;
- le chapitre 5 décrit la méthodologie utilisée pour l'expérimentation. L'algorithme de navigation sera mis en œuvre et validé sur un banc d'essai robotisé. Ce système permettra d'évaluer les performances du système de navigation soumises à des trajectoires réalistes par l'entremise d'un bras robotisé. Les signaux de mesures externes sont simulés et soumis au système de navigation qui lui est mise en œuvre en temps réel;

- le chapitre 6 présente les expérimentations effectuées sur le système de navigation inertielle afin d'analyser l'effet de certains paramètres. Une attention particulière est accordée aux techniques d'initialisation. Dans cette section, une analyse de bruits provenant des capteurs inertiels est accomplie par la méthode de la variance d'Allan;
- le chapitre 7 présente une simulation du filtrage de Kalman proposé au chapitre 4. Ensuite, les résultats sur un système réel empruntant diverses trajectoires effectué par un manipulateur robotique sont présentés et discutés. Le robot est dans ce cas utilisé pour simuler le mouvement du sous-marin de façon à pallier à un manque ponctuel d'équipement nécessaire au système de mesure du sous-marin;

CHAPITRE 1

Revue de littérature

1.1 Système de navigation inertielle (SNI)

L'utilisation des capteurs inertiels en navigation est un standard établi depuis longtemps. Cette technique consiste à intégrer les mesures inertielles et de boussole afin de retrouver la position, la vitesse et l'orientation du véhicule. (Gade, 2009)

Dans la grande majorité des cas, les systèmes de navigation inertielle actuels utilisent des composants liés plutôt que des plateformes à cadre mobile (« *gimbal* »). Le cadre mobile utilise le principe de conservation du moment angulaire sur la rotation d'un disque alors qu'un système à composant lié ne possède aucune pièce mobile. Plusieurs techniques de modélisation sont présentées dans (Titterton et Weston, 2004). Cet ouvrage permet d'expliquer les différentes techniques classiques pour effectuer la mécanisation d'une centrale inertielle, un capteur composé d'accéléromètres et de gyroscopes permettant de mesurer les déplacements. Aussi, les équations sont présentées par rapport aux différents repères utilisés en navigation.

Souvent, les systèmes de navigation inertielle s'appuient sur des principes physiques de cinématique de corps rigides, desquels peuvent être développées les équations de modélisation. Parmi les différences observées entre les références consultées, les repères utilisés et la représentation de l'orientation sont les plus significatives. Dans son article, (Shuster et Junkins, 1993) présente les représentations d'attitude les plus courantes en navigation. Chaque représentation possède ses avantages. Dans (Miller et al., 2010), l'auteur préfère utiliser une représentation sous la forme d'angles d'Euler qui bénéficie d'une interprétation physique simple, alors que dans (Savage, 1998) et dans de nombreux autres articles, les quaternions ou les matrices de rotation (*Direction cosine matrix*, *DCM*) sont utilisés pour leur simplicité de calcul et l'absence de singularité de représentation.

Les développements dans ce domaine s'effectuent principalement au niveau aéronautique puisque l'utilisation principale des systèmes de navigation inertielle se situe au niveau de la navigation aérienne. Bien que la théorie des systèmes de navigation soit connue, l'utilisation dans un cadre d'inspection sous-marine apporte de nouveaux défis. Cependant, la théorie et les concepts fondamentaux s'appliquent aussi bien à la navigation sous-marine qu'à la navigation aérienne. Certains ouvrages comme «*Aided navigation*» (Farrell, 2008) discute des idées fondamentales des systèmes de navigation et des GPS, mais présente aussi une section liée à la navigation inertielle aidée par un capteur acoustique pour les applications sous-marines.

Beaucoup de théories ont été développées autour des analyses d'erreur et de la calibration des gyroscopes et des accéléromètres des centrales inertielles. En effet, une bonne calibration et une connaissance des sources d'erreurs permettent d'améliorer la qualité des données et ainsi la performance de la navigation (Woodman, 2007).

Dans (El-Sheimy, Haiying et Xiaoji, 2008), les auteurs proposent et démontrent l'utilisation de la technique de la variance d'Allan (Allan, 1966) afin de caractériser les erreurs d'une centrale inertielle. Cette technique d'analyse de la stabilité fréquentielle consiste à effectuer des opérations simples sur la variance d'une série de données acquise d'une centrale inertielle afin d'en évaluer les bruits. Cette technique permet de facilement identifier les types et la grandeur des bruits présents dans les mesures des capteurs inertiels. Ces informations peuvent être aussi acquises d'une densité spectrale de puissance (PSD) qui caractérise les variables aléatoires gaussiennes. Cependant, dans le domaine de la navigation inertielle, la variance d'Allan est principalement utilisée puisqu'il s'agit maintenant d'un standard (IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros, 2006).

Généralement, la position obtenue via une centrale inertielle peut dériver de façon significative en fonction du temps puisqu'elle subit une double intégration lors du calcul de

la position (Farrell, 2008); ce qui rend son utilisation dans un sous-marin d'inspection presque impossible. C'est pourquoi diverses techniques de mesure complémentaire doivent être utilisées.

1.2 Navigation acoustique

Les ondes des systèmes GPS ne traversent pas la surface de l'eau, ce qui rend leur utilisation comme capteur de position absolue impossible dans le cadre d'un robot d'inspection immergé. Les sous-marins utilisent plutôt des capteurs acoustiques puisque ce type d'ondes se propage bien sous l'eau (Papantonopoulos, Panagou et Alexandri, 2009). Il s'agit de capteurs de positionnement basés sur le temps de propagation d'une onde acoustique dans l'eau. Plusieurs balises disposées sous l'eau émettent des signaux acoustiques. En calculant les temps de propagation des signaux provenant des différentes balises, il est possible pour le récepteur du sous-marin de calculer sa position. Les principaux capteurs utilisés en positionnement aquatique sont les «*Ultra Short Baseline*» (USBL) et «*Long Baseline*» (LBL). Actuellement, peu de gens utilisent les capteurs acoustiques seuls. La combinaison de différents capteurs avec un système de navigation inertielle est largement exploitée dans les applications sous-marines (Morgado et al., 2006).

Malgré qu'il existe, plusieurs méthodes de fusion de données, le filtrage de Kalman et ses différentes extensions (par exemple : le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman «*unscented*») sont utilisés dans la plupart des cas. De façon générale, le filtre de Kalman permet d'estimer l'état d'un système en fonction de son modèle et d'un ensemble de mesures de ses sorties. La fusion des mesures est alors possible en augmentant judicieusement le nombre de sorties du système à l'aide des mesures ajoutées (Welch et Bishop, 2006).

Malgré l'utilisation prépondérante du filtre de Kalman, quelques exceptions existent. Par exemple l'article de (An et al., 1997) propose l'utilisation d'un système de logique floue pour effectuer la fusion des capteurs du sous-marin autonome «*Ocean Explorer*». Pour leur part, (Morgado et al., 2006) propose de fusionner les données provenant d'un système de

navigation inertielle avec un positionnement par USBL à l'aide d'un filtre de Kalman étendu avec rétroaction. Cette technique de filtrage possède des avantages par rapport à un filtre sans rétroaction. En effet, dans (Ragel et Farooq, 2005), les auteurs démontrent que l'estimation obtenue avec l'utilisation d'un filtre sans rétroaction a tendance à diverger dans ce type d'application.

1.3 Types de couplages

Dans la littérature, deux architectures différentes se distinguent lorsqu'il s'agit de fusionner les mesures d'un capteur acoustique aux mesures d'une centrale inertielle à l'aide du filtre de Kalman. La première est une fusion avec faible couplage. Cette technique consiste à fusionner directement la position. La position se calcule par triangulation à l'extérieur du filtre. Cette technique conventionnelle est grandement utilisée pour sa simplicité. La seconde architecture se base sur une fusion considérée comme fortement couplée. Elle consiste à directement fusionner les mesures de temps des capteurs acoustiques en utilisant un modèle du capteur dans son milieu. Ces deux architectures sont comparées dans (Morgado et al., 2006). Ils évaluent les performances globales en simulant un système de navigation faiblement et fortement couplé. Leurs résultats démontrent que leur architecture de filtre de Kalman fortement couplé offre des avantages, principalement au niveau des performances ainsi qu'au niveau de la robustesse lors de la perte d'une balise, par rapport à une architecture conventionnelle à faible couplage.

1.4 Système de navigation complet

Dû à la complexité des systèmes de navigation, il est rare de trouver une formulation directe du filtrage de Kalman où les orientations, les vitesses et les positions sont directement accessibles à travers le modèle dynamique du système. Lorsqu'il s'agit de fusionner un système de navigation inertielle avec des mesures externes, la formulation indirecte de Kalman est préconisée puisqu'elle s'appuie sur l'estimation des erreurs d'un SNI plutôt que sur l'état complet. Dans (Roumeliotis, Sukhatme et Bekey, 1999), les auteurs expliquent qu'une formulation indirecte possède des caractéristiques quasi linéaires et ce qui rend

l'utilisation du filtre de Kalman linéaire plus adéquate. De plus, elle possède une dynamique plus lente.

L'une des tendances actuelle dans la navigation sous-marine consiste à présenter des systèmes plus complets avec un grand nombre de mesures externes et un couplage fort entre les composants (Miller et al., 2010) (Morgado et al., 2006) (Ridao et al., 2011). Par exemple, des capteurs comme le «*Doppler Velocity Log*» (DVL) permettent d'obtenir une information additionnelle sur la vitesse du véhicule sous l'eau.

Dans (Miller et al., 2010), l'auteur présente un système de navigation complet qui fusionne par filtrage de Kalman les mesures d'un système de navigation inertielle avec des capteurs de pression, DVL, USBL, et d'attitude. Ce système complet permet d'estimer avec plus de précision l'état du sous-marin. Cette configuration permet d'estimer les biais de la centrale inertielle permettant d'augmenter les performances globales du système. Puisqu'il s'agit d'un filtrage fortement couplé avec plusieurs capteurs externes, l'estimation continue d'être fonctionnelle malgré les pertes complètes ou partielles des signaux de mesure de certains capteurs. Cette solution offre donc un système particulièrement robuste.

De leurs côtés, (Hegrenaes, Berglund et Hallingstad, 2008) proposent une approche intéressante basée sur le modèle du sous-marin. Cette approche consiste à mettre en œuvre un filtrage indirect de Kalman traditionnel et à ajouter le modèle dynamique du sous-marin comme un capteur externe. Dans cet article, les auteurs démontrent que l'ajout du modèle comme signal de mesure dans le filtrage de Kalman procure un gain de précision et de robustesse.

1.5 Cartographie et vision

Avec l'arrivée de processeurs plus performants, de nouvelles stratégies d'estimation et de fusion liées à la cartographie et la vision commencent à émerger. De plus, les capteurs de vision sont complètement intégrés à l'intérieur du véhicule contrairement aux mesures

acoustiques où une infrastructure composée de balise doit être mise en place à l'extérieure du sous-marin. Par exemple, (Eustice, Pizarro et Singh, 2008) proposent un système de navigation augmenté par un système de vision pour la navigation à proximité des fonds marins. Cette technique lie de façons robustes un SNI et un algorithme de cartographie et de localisation simultanée (SLAM) par filtrage de Kalman étendu. D'autres chercheurs intègrent des sonars au système de navigation afin de réaliser de la cartographie et localisation simultanée (Tena Ruiz et al., 2004). D'autre part, (Gracias et al., 2003) utilise une mosaïque constituée d'images du fond marin pour naviguer. Ces auteurs proposent une méthodologie pour créer a posteriori une carte du fond marin. Une fois la mosaïque construite, le véhicule est en mesure de connaître sa position en comparant sa vision actuelle du fond avec la carte visuelle préalablement mémorisée. Cependant, ces techniques sont restreintes à certaines applications spécifiques d'un sous-marin téléopéré ou autonome ROV/AUV rendant leurs mises en œuvre dans le monde de l'inspection plus difficile.

CHAPITRE 2

Notions de navigation

Dans ce chapitre, les notions de navigation fondamentales comme les repères, les représentations d'attitude ainsi que leur propagation dans le temps seront présentées. Même s'il existe plusieurs représentations d'orientation entre deux repères, seulement les trois les plus utilisés, soit les angles d'Euler, les quaternions et les matrices de rotation seront approfondis. Par la suite, les notions mathématiques liées à la navigation seront présentées.

2.1 Notation des vitesses

Dans la section suivante, les repères utilisés en navigation seront définis et expliqués, mais auparavant, la notation des vitesses doit être définie. Dans ce mémoire, la vitesse angulaire $\omega_{b/c}^a$ désigne une vitesse du repère c par rapport au repère b exprimée dans le repère a . Il est également important de noter que $\omega_{b/c}$ désigne la vitesse du repère c par rapport au repère b exprimée dans le repère inertiel. La même notation est également utilisée pour les vitesses linéaires, mais en utilisant le symbole $\mathbf{v}_{b/c}^a$.

2.2 Repère de navigation

Pour la navigation, des tétraèdres sont utilisés afin de représenter un système d'axes orthogonaux. Ces axes se trouvent à l'origine du système de coordonnées. Il existe plusieurs repères différents autour desquelles les équations de navigation peuvent être développées. Les principaux sont maintenant présentés.

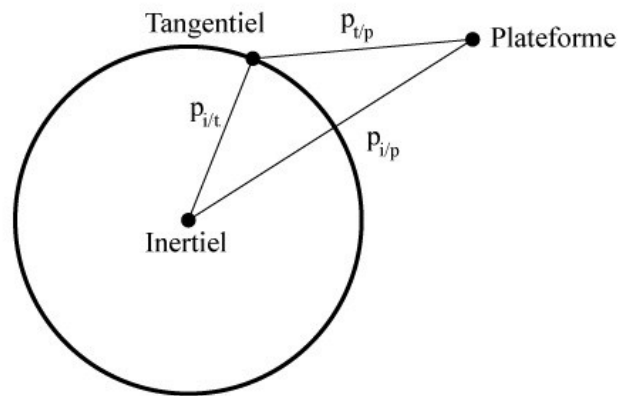


Figure 2.1 Positions des repères

La Figure 2.1 exprime les différentes positions des repères de navigation ainsi que leurs notations. Dans cette figure, $\mathbf{p}_{t/p}$ désigne la position du repère de la plateforme par rapport au repère tangentiel, $\mathbf{p}_{i/t}$ désigne la position du repère tangentiel par rapport au repère inertiel et $\mathbf{p}_{i/p}$ désigne la position du repère de la plateforme par rapport au repère inertiel. En général, on considère que le repère inertiel ne bouge pas.

2.2.1 ECI (« Earth Centered Inertial »)

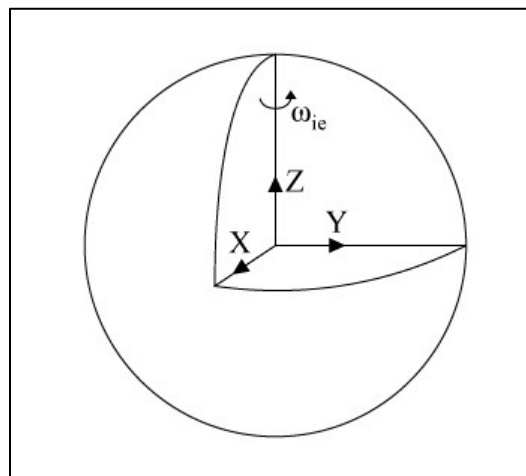


Figure 2.2 Repère ECI
Adaptée de Farrell (2008, p. 23)

L'ECI est un repère inertiel. Ce repère de référence est placé au centre de la Terre et ne tourne pas avec la Terre. Comme illustré par la Figure 2.2, l'axe z s'aligne avec l'axe de rotation de la Terre. Dans ce mémoire, ce repère sera défini par l'indice i .

2.2.2 ECEF («Earth-Centered, Earth-Fixed»)

Le repère ECEF se retrouve au centre de la Terre à la même position que le repère ECI. Cependant, ce repère tourne avec la terre. Son axe x est aligné avec le premier méridien (Greenwich) sur le plan équatorial et son axe z est dans le même axe que celui de la rotation de la Terre. Dans ce document, le repère ECEF sera défini par l'indice e . Ce repère tourne autour de l'axe z à la même vitesse que la Terre. Cette vitesse est déterminée par l'équation suivante :

$$\omega_{i/e} = 7.2921 * 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i/e}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_{i/e} \end{bmatrix}$$

où $\boldsymbol{\omega}_{i/e}^i$ est la vitesse angulaire du repère e par rapport au repère i exprimé dans le repère i .

2.2.3 Tangentiel

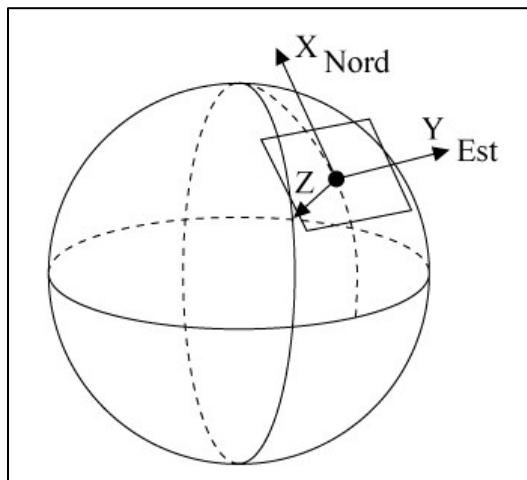


Figure 2.3 Repère tangentiel
Adaptée de Farrell (2008, p.25)

Tel qu'indiqué sur la Figure 2.3, l'origine du repère tangentiel est située à la surface de la Terre autour d'un point de référence. Son axe z pointe vers le centre de la Terre alors que l'axe x pointe vers le nord géographique. Ce repère est équivalent au repère NED («*North East Down*») utilisé en aviation. Il tourne conjointement avec la Terre. Il est intéressant de noter que contrairement aux applications avioniques qui impliquent des déplacements sur de grandes distances, les applications de robotique sous-marine impliquent de petits déplacements locaux autour du repère tangentiel. Pour cette raison, ce repère peut souvent être considéré comme fixe pour ces applications. Dans ce document, le repère tangentiel sera défini par l'indice t .

2.2.4 Plateforme

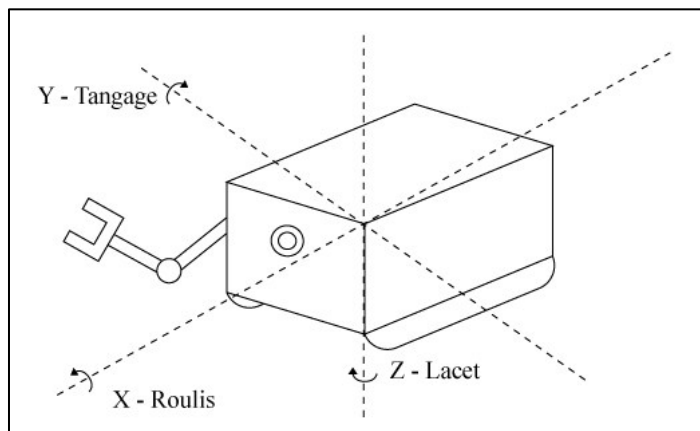


Figure 2.4 Repère de la plateforme

Comme son nom l'indique, le repère de la plateforme est fixé à une plateforme mobile qui est en général un véhicule (voir la Figure 2.4). Le repère se déplace donc avec la plateforme. L'axe x pointe vers le devant du véhicule. L'attitude d'un véhicule est souvent définie avec le roulis (rotation autour de l'axe x), le tangage (rotation autour de l'axe y) et le lacet (rotation autour de l'axe z). Ces angles peuvent aussi être désignés par une des conventions des angles d'Euler. Dans ce document, le repère de la plateforme sera défini par l'indice p .

2.3 Représentation d'attitude

Il existe plusieurs représentations de l'orientation dans un espace à trois dimensions. Parce que ces représentations sont théoriquement équivalentes, il est possible de transformer l'orientation d'une représentation à l'autre (Titterton et Weston, 2004). Dans les paragraphes qui suivent, les représentations de l'orientation qui seront utilisées dans ce mémoire sont présentées.

2.3.1 Matrice de rotation

Une matrice de rotation représente l'orientation tridimensionnelle sous forme matricielle. Elle est composée de neuf paramètres représentés dans une matrice 3 par 3. La matrice possède jusqu'à trois degrés de liberté; c'est-à-dire que parmi ses neuf paramètres, il y en a tout au plus trois qui sont indépendants. Cette matrice s'appelle aussi DCM («*Direction Cosine Matrix*»).

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice de rotation respecte les propriétés suivantes :

- son déterminant est toujours égal à un,
- elle est orthogonale : $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$,
- la norme de chacune de ses colonnes est unitaire.

2.3.1.1 Changement de repère à l'aide des matrices de rotation

Une matrice de rotation contient l'information sur l'orientation, elle permet donc de projeter un vecteur d'un repère à l'autre. Par exemple, la matrice \mathbf{R}_b^a indique l'orientation du repère b par rapport au repère a , mais elle permet aussi de projeter un vecteur \mathbf{v} exprimé dans le repère b sur le repère a de la façon suivante :

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{R}_b^a \mathbf{v}^b \quad (2.3)$$

Cette projection peut également être inversée en inversant la matrice :

$$\mathbf{R}_b^{aT} = \mathbf{R}_b^{a-1} = \mathbf{R}_a^b \quad (2.4)$$

2.3.2 Angles d'Euler

Les angles d'Euler représentent trois rotations distinctes successives autour de trois axes orthogonaux. Quoiqu'il existe douze conventions possible pour ces axes, celle utilisée dans ce mémoire, qui se nomme Roulis-Tangage-Lacet, considère les axes z , y et x associés aux trois rotations suivantes:

- Roulis (φ) représente une rotation autour de l'axe x ;
- Tangage (θ) représente une rotation autour de l'axe y ;
- Lacet (ψ) représente une rotation autour de l'axe z .

Cette convention respecte la règle de la main droite. Par exemple,

- une rotation autour de z de x vers y est positive;
- une rotation autour de y de z vers x est positive;
- une rotation autour de x de y vers z est positive.

La représentation de l'orientation par les angles d'Euler est couramment utilisée puisqu'elle possède une interprétation physique. Cependant, puisqu'il s'agit de trois rotations, les angles d'Euler sont très propices au phénomène de blocage de cadran communément appelé singularité de représentation. Ce problème engendre une perte d'un degré de liberté lorsque deux des trois axes se trouvent dans la même direction durant la rotation. Ce type de dégénérescence ne provient pas de la physique du problème traité, mais de la formulation employée. De plus, cette représentation est vulnérable aux erreurs d'intégrations numériques à cause de ses non-linéarités. Elle est donc moins précise.

2.3.3 Quaternion

Les quaternions unitaires (ou paramètres d'Euler) représentent une alternative aux angles d'Euler. Les quaternions s'appuient sur une représentation de l'orientation à l'aide d'une rotation δ autour de l'axe d'un vecteur unitaire \mathbf{k} . Les quatre paramètres sont définis par une fonction des trois composantes du vecteur \mathbf{k} et de la grandeur de la rotation δ (Titterton et Weston, 2004) :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta/2) \\ k_x \sin(\delta/2) \\ k_y \sin(\delta/2) \\ k_z \sin(\delta/2) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Un des avantages de la représentation de l'orientation par un quaternion unitaire est son conditionnement numérique qui est particulièrement bon du fait que sa norme est toujours unitaire :

$$\eta^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 1 \quad (2.6)$$

2.3.4 Transformation des angles d'Euler en une matrice de rotation

Il est possible de transformer les angles d'Euler en matrice de rotation. Avec la convention zyx , la matrice de rotation se construit à partir de trois matrices de rotation :

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_x^T \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.7)\end{aligned}$$

2.3.5 Transformation d'un quaternion en une matrice de rotation

Le quaternion peut être transformé sous la forme d'une matrice de rotation homogène ou non. Ces deux représentations sont équivalentes :

Matrice homogène :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Matrice non homogène

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 + q_2 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.3.6 Transformation d'une matrice de rotation en angles d'Euler

Cette transformation extrait les angles d'Euler des composantes d'une matrice de rotation :

$$\begin{aligned}\text{Roulis } (\varphi) &= \tan^{-1}\left(\frac{R_{32}}{R_{33}}\right) \\ \text{Tangage } (\theta) &= \sin^{-1}(-R_{31}) \\ \text{Lacet } (\psi) &= \tan^{-1}\left(\frac{R_{21}}{R_{11}}\right)\end{aligned}\tag{2.10}$$

2.4 Propagation d'une orientation dans le temps

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir les vitesses angulaires à partir d'orientation. Cependant, il s'agit toujours de propager dans le temps les orientations. Ces transformations sont réalisables par les lois de propagation décrite ci-dessous. (Titterton et Weston, 2004)

2.4.1 Loi de propagation des angles d'Euler

Cette loi de propagation est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}^j &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{\Theta}} &= \mathbf{\Omega}^j \boldsymbol{\omega}_{t/p}^p\end{aligned}\tag{2.11}$$

où $\dot{\mathbf{\Theta}}$ représente la variation de l'orientation sous forme d'angle d'Euler et $\boldsymbol{\omega}_{t/p}^p$ représente la vitesse de rotation de la plateforme par rapport au repère tangentiel exprimée dans le repère de la plateforme. La matrice $\mathbf{\Omega}^j$ représente la jacobienne de propagation des orientations. Elle possède une singularité lorsque θ vaut ± 90 degrés. Cette particularité est un désavantage important de la représentation sous forme d'angles d'Euler.

2.4.2 Loi de propagation des quaternions

La propagation du quaternion dans le temps peut s'effectuer à l'aide de deux méthodes différentes :

1) Matrice de propagation à partir d'un quaternion:

$$\mathbf{\Omega}^j = \begin{bmatrix} \eta & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \eta & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \eta \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{\Theta}} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^j \boldsymbol{\omega}_{t/p}^p \quad (2.12)$$

où $\dot{\mathbf{\Theta}}$ représente la variation de l'orientation sous forme de quaternion et $\boldsymbol{\omega}_{t/p}^p$ représente la vitesse de rotation de la plateforme par rapport au repère tangentiel exprimée dans le repère de la plateforme.

2) Matrice de propagation à partir des vitesses de rotation:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{\Theta}} = \frac{1}{2} * \mathbf{W} \mathbf{q} \quad (2.13)$$

où $\dot{\mathbf{\Theta}}$ représente la variation de l'orientation sous forme de quaternion et \mathbf{q} représente l'orientation de la plateforme par rapport au repère tangentiel sous forme de quaternion. La matrice \mathbf{W} est construite à partir des vitesses de rotation de la plateforme.

2.5 Modèle de gravité

L'attraction gravitationnelle n'est pas constante selon la position sur Terre. En effet, cette force dépend de la latitude (ϕ) et du rayon de la Terre qui ne sont pas constants puisque la Terre n'est pas parfaitement ronde, mais plutôt ovale. Il faut donc avoir recours à un modèle de gravité afin d'estimer sa valeur avec plus de précision. Le modèle de gravité utilisé est

défini par le WGS84 (World Geodetic System, 1984). Selon la latitude sur le géoïde terrestre, il est donné par :

$$g(\phi) = 9.7803267714 \left(\frac{1 + 0.00193185138639 \sin^2(\phi)}{\sqrt{1 - 0.00669437999013 \sin^2(\phi)}} \right) \frac{m}{s^2} \quad (2.14)$$

2.6 Outils mathématiques en navigation

2.6.1 Produit vectoriel d'un vecteur de vitesse de rotation sous forme matricielle

Dans ce document, le produit vectoriel du vecteur de la vitesse de rotation sera exprimé sous forme matricielle en utilisant l'équivalence suivante. (Farrell, 2008)

$$\boldsymbol{\omega}_{a/b}^b \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_{a/b}^b \mathbf{v} \quad (2.15)$$

où $\boldsymbol{\omega}_{a/b}^b$ est un vecteur de vitesse angulaire constitué des trois composantes ω_x , ω_y et ω_z , \times est l'opérateur du produit vectoriel, \mathbf{v} est un vecteur quelconque et $\boldsymbol{\Omega}_{a/b}^b$ est un opérateur antisymétrique défini de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Omega}_{a/b}^b = skew(\boldsymbol{\omega}_{a/b}^b) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.6.2 Dérivé d'une matrice de rotation

Une matrice de rotation se dérive dans le temps à l'aide de l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{R}}_b^a = \boldsymbol{\Omega}_{a/b}^b \mathbf{R}_b^a \quad (2.17)$$

2.6.3 Changement de repère d'une matricie

Le changement de repère associé à l'opérateur défini par l'équation (2.16) ne s'effectue pas directement avec une matrice de rotation comme pour le changement de repère d'un vecteur. En effet, ce changement de repère doit plutôt être effectué de la façon suivante (Farrell, 2008):

$$\mathbf{\Omega}^b = \mathbf{R}_a^b \mathbf{\Omega}^a \mathbf{R}_b^a \quad (2.18)$$

2.6.4 Erreur des petits angles

Une notion importante est la notion de l'erreur des petits angles. Ce concept est important puisqu'il permet de calculer l'erreur entre la vraie matrice de rotation et celle estimée. Il s'agit d'une approximation infinitésimale entre deux matrices de rotation. Voici les liens qui unissent les matrices de rotation à leurs estimations (Miller et al., 2010):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_p^t &= (\mathbf{I} - [\delta\mathbf{p} \times]) \mathbf{R}_p^t \\ \mathbf{R}_p^t &= (\mathbf{I} + [\delta\mathbf{p} \times]) \hat{\mathbf{R}}_p^t \\ \hat{\mathbf{R}}_t^p &= \mathbf{R}_t^p (\mathbf{I} + [\delta\mathbf{p} \times]) \\ \mathbf{R}_t^p &= \hat{\mathbf{R}}_t^p (\mathbf{I} - [\delta\mathbf{p} \times]) \end{aligned} \quad (2.19)$$

où $[\delta\mathbf{p} \times] = \text{skew}(\delta\mathbf{p})$ est une matrice antisymétrique représentant le vecteur de l'erreur des petits angles $\delta\mathbf{p}$. Elle représente l'erreur entre deux matrices de rotation.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les principaux repères et outils mathématiques utilisés en navigation ont été présentés. Ces concepts seront utilisés dans le reste du mémoire afin de faire la conception du système de navigation inertielle.

CHAPITRE 3

Système de navigation inertielle

Dans ce chapitre, les équations cinématiques d'un système de navigation inertielle seront développées. Deux séries d'équations seront construites par rapport à deux repères : le repère tangentiel et celui de la plateforme.

Un système de navigation inertielle (SNI) est un ensemble d'accéléromètres et gyromètres. Une fois couplée par des algorithmes, ce système permet de déduire la position, la vitesse et l'orientation d'une plateforme mobile. La Figure 3.1 montre le schéma fonctionnel d'un système de navigation inertielle.

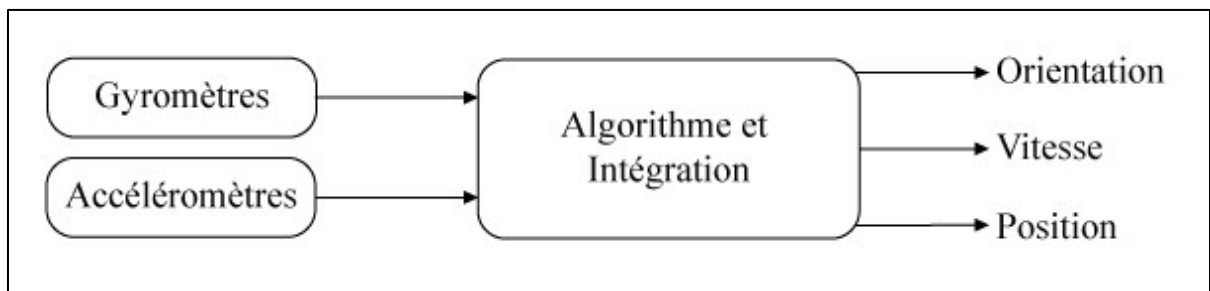


Figure 3.1 Structure du système de navigation inertielle

Les algorithmes contenus dans un système de navigation inertielle s'appellent la mécanisation d'une unité de mesure inertielle (IMU). Les équations permettront d'obtenir l'accélération du module dans le repère de la plateforme et dans le repère tangentiel fixe. Cette accélération sera intégrée deux fois afin de retrouver la position.

3.1 Accéléromètres

L'accéléromètre mesure directement les accélérations de la plateforme par rapport à un repère inertiel. Cependant, sur Terre, les forces gravitationnelles, centripètes et de Coriolis doivent être compensées.

Le principe de base d'un accéléromètre (Savage, 1998) est une masse, dont le mouvement est restreint par un ressort ou des ressorts, dans une ou plusieurs dimensions. Lorsque le capteur subit une accélération, la masse cherche à rester au repos et déforme le ou les ressorts. Cette déformation peut être mesurée pour obtenir l'accélération. L'accéléromètre mesure une accélération souvent appelée force spécifique ou accélération propre. Une force spécifique se décrit comme une accélération non gravitationnelle. Il s'agit de l'accélération par rapport à une chute libre. Cette force spécifique contient donc l'accélération de la plateforme de laquelle doit être soustraite l'accélération gravitationnelle ainsi que l'accélération centripète causée à la rotation de la Terre. Cette mesure est par rapport à un repère inertiel.

Cette force spécifique se décrit comme suit (Farrell, 2008) :

$$\mathbf{f}_{i/p}^p = \mathbf{a}_{i/p}^p - \mathbf{g}_{i/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^t \quad (3.1)$$

où $\mathbf{a}_{i/p}^p$ est l'accélération de la plateforme par rapport au repère inertiel exprimée dans le repère de la plateforme, $\mathbf{g}_{i/p}^p$ est l'accélération gravitationnelle exprimée dans le repère de la plateforme (cette valeur est variable selon la position sur terre) et $\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^t$ est l'accélération centripète liée à la rotation de la Terre. L'accélération centripète peut se combiner avec la force de gravité pour donner le vecteur de gravité local (Figure 3.2):

$$\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t = \mathbf{g}_{i/p}^t - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^p \quad (3.2)$$

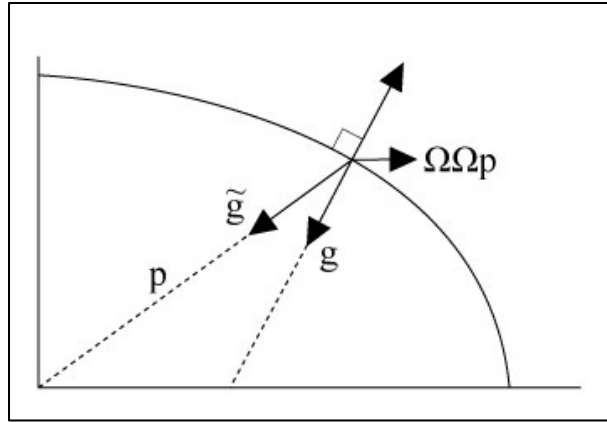


Figure 3.2 Vecteur de gravité local
Adapté de Farrell (2008, p.383)

La force spécifique se décrit alors par

$$\mathbf{f}_{ip}^p = \mathbf{a}_{i/p}^p - \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \quad (3.3)$$

De façon générale, la mesure de l'accéléromètre peut être décrite par un procédé aléatoire avec un biais.

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{f}_{i/p}^p + \mathbf{b}_a + \boldsymbol{\eta}_a \quad (3.4)$$

où \mathbf{y}_a est la mesure de l'accéléromètre, \mathbf{b}_a est un biais considéré comme une variable aléatoire qui se propage dans le temps ($\dot{\mathbf{b}}_a$) selon un cheminement aléatoire² et $\boldsymbol{\eta}_a$ est un vecteur de bruit blanc caractérisé par une distribution normale centrée à zéro avec une variance $\sigma_a^2 : N(0, \sigma_a^2 I)$.

L'estimé de la mesure d'accélération se décrit alors par :

$$\hat{\mathbf{f}}_{ip}^p = \mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{b}}_a \quad (3.5)$$

où $\hat{}$ désigne une estimation.

² Ce terme est connu sous nom de « random walk » et désigne une trajectoire discrète composée de pas aléatoire successif.

3.2 Gyromètres

Les gyromètres d'une centrale inertielle sont des capteurs essentiels pour la mesure de l'orientation (Savage, 1998). Dans l'application du sous-marin, une centrale inertielle à composant liée est utilisée. Les termes gyromètres et gyroscopes sont souvent confondus. Ils désignent un capteur mesurant les vitesses de rotation par rapport à un repère inertiel. Puisque la navigation s'effectue sur Terre, les vitesses de rotation provenant du gyromètre doivent être compensées pour la rotation de la Terre afin de retrouver la vitesse de rotation réelle du véhicule.

Le repère tangentiel est fixe sur la Terre et tourne avec cette dernière. La rotation de ce repère est donc la même que celle de la Terre. Par conséquent, $\omega_{i/e} = \omega_{i/t}$. Ainsi, la vitesse angulaire de la plateforme par rapport au repère tangentiel est définie par :

$$\omega_{t/p}^p = \omega_{i/p}^p - \mathbf{R}_t^p \omega_{i/e}^t \quad (3.6)$$

où $\omega_{i/p}^p$: est la mesure provenant des gyromètres et $\omega_{i/e}^t$ est la vitesse angulaire de la Terre. Les gyromètres offrent une mesure de vitesse angulaire. Afin de retrouver l'orientation dans l'espace de la plateforme, il faut projeter les vitesses angulaires et les propager dans le temps pour ensuite procéder à leurs intégrations. En intégrant $\dot{\Theta}$, l'orientation est obtenue selon la représentation choisie. Ce résultat décrit la rotation actuelle de la plateforme par rapport au repère tangentiel. Par exemple, pour une représentation de l'orientation sous forme d'angles d'Euler, l'équation complète de l'orientation de la plateforme provient de la combinaison d'une des lois de propagations de l'orientation selon la représentation choisie (2.11) ou (2.12) avec l'équation (3.6) :

$$\dot{\Theta} = \Omega^j (\omega_{i/p}^p - \mathbf{R}_t^p \omega_{i/e}^t) \quad (3.7)$$

La mesure des gyromètres se décrit également par un procédé aléatoire avec un biais :

$$\mathbf{y}_g = \omega_{i/p}^p + \mathbf{b}_g + \boldsymbol{\eta}_g \quad (3.8)$$

où \mathbf{y}_b est la mesure de l'accéléromètre, \mathbf{b}_g est un biais considéré comme une variable aléatoire qui se propage dans le temps ($\dot{\mathbf{b}}_g$) selon un cheminement aléatoire et $\boldsymbol{\eta}_g$ est un vecteur de bruit blanc caractérisé par une distribution normale centrée à zéro ayant une variance équivalente aux gyromètres : $N(0, \sigma_g^2 I)$.

L'estimé de la mesure des gyromètres se décrit alors par :

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/p}^p = \mathbf{y}_g - \hat{\mathbf{b}}_g \quad (3.9)$$

3.3 Composition des mouvements

3.3.1 Composition des vitesses

La vitesse absolue est la vitesse d'entraînement ajoutée à la vitesse relative. La vitesse d'entraînement est considérée comme la vitesse de la plateforme par rapport au repère inertiel si la plateforme était fixe par rapport au repère tangentiel. Donc :

$$\mathbf{v}_{i/p} = \mathbf{v}_{t/p} + \mathbf{v}_{i/t} + \boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{p}_{t/p} \quad (3.10)$$

où $\mathbf{v}_{i/p}$ représente la vitesse absolue, $\mathbf{v}_{t/p}$ représente la vitesse relative et $\mathbf{v}_{i/t} + \boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{p}_{t/p}$ représente la vitesse d'entraînement.

3.3.2 Composition des accélérations

Afin de retrouver les accélérations, le théorème de Coriolis est appliqué sur la vitesse absolue. L'accélération absolue est donc une composition de l'accélération relative, d'entraînement et de Coriolis :

$$\mathbf{a}_{i/p} = \mathbf{a}_{t/p} + \mathbf{a}_{i/t} + \boldsymbol{\Omega}_{i/t} \boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{p}_{t/p} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t} \mathbf{p}_{t/p} + 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{v}_{t/p} \quad (3.11)$$

où $\mathbf{a}_{i/p}$ représente l'accélération absolue alors que $\mathbf{a}_{t/p}$ représente l'accélération relative et $2\boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{v}_{t/p}$ représente l'accélération de Coriolis. L'accélération d'entraînement est composée de $\boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{p}_{t/p}$ (l'accélération d'Euler), $\boldsymbol{\Omega}_{i/t} \boldsymbol{\Omega}_{i/t} \mathbf{p}_{t/p}$ (l'accélération centripète) et de $\mathbf{a}_{i/t}$.

3.4 Accélération dans le repère tangentiel

Le modèle de navigation utilise les équations standards de cinématiques d'un corps rigide défini par (3.10) et (3.11). Étant donné qu'un sous-marin voyage seulement autour d'un site d'inspection, le repère tangentiel peut être considéré comme immobile par rapport au centre de la Terre. Dans ce contexte, les équations de cinématique peuvent projeter l'accélération dans le repère tangentiel :

$$\mathbf{a}_{i/p}^t = \mathbf{a}_{t/p}^t + \mathbf{a}_{i/t}^t + \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^t + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^t + 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.12)$$

Puisque le repère tangentiel est supposé fixe par rapport au centre de la Terre, l'accélération de ce plan est nulle $\mathbf{a}_{i/t}^t = 0$. Pour la même raison, la vitesse de rotation de la terre et du repère tangentiel est équivalente, donc $\boldsymbol{\omega}_{i/e}^t = \boldsymbol{\omega}_{i/t}^t$. De plus, la vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}_{i/t}^t$ de la Terre est constante par le fait même, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^p = 0$.

L'accélération devient donc :

$$\mathbf{a}_{i/p}^t = \mathbf{a}_{t/p}^t + \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^p + 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.13)$$

Puisque l'accélération par rapport au repère tangentiel ($\mathbf{a}_{t/p}^t$) est la variable recherchée, l'équation s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{a}_{t/p}^t = \mathbf{a}_{i/p}^t - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^p - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.14)$$

L'accélération de la plateforme sera mesurée par un accéléromètre, il est alors intéressant de réécrire les équations pour y intégrer le concept de force spécifique ou accélération propre discuté dans la section 3.1 : Accéléromètres. Dans une application sur Terre, l'accélération $\mathbf{a}_{i/p}^t$ est composée d'une force spécifique $\mathbf{f}_{i/p}^t$ ainsi que du vecteur de gravité $\mathbf{g}_{i/p}^t$. Ainsi,

selon (3.1) et (3.14),

$$\mathbf{a}_{i/p}^t = \mathbf{f}_{i/p}^t + \mathbf{g}_{i/p}^t + \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{p}_{t/p}^t \quad (3.15)$$

En utilisant le concept de vecteur de gravité local (équation (3.2)), l'accélération $\mathbf{a}_{i/p}^t$ devient :

$$\mathbf{a}_{i/p}^t = \mathbf{f}_{i/p}^t - \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \quad (3.16)$$

L'équation de l'accélération de la plateforme par rapport au repère tangentiel s'écrit donc :

$$\mathbf{a}_{t/p}^t = \mathbf{f}_{i/p}^t + \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.17)$$

Puisque l'accéléromètre fournit ses informations dans le repère de la plateforme, il est plus intéressant d'écrire les équations sous la forme :

$$\mathbf{a}_{t/p}^t = \mathbf{R}_p^t \mathbf{f}_{i/p}^p + \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.18)$$

Les accélérations seront intégrées afin de retrouver les vitesses. Il est donc plus simple de réécrire l'équation sous la forme :

$$\dot{\mathbf{v}}_{t/p}^t = \mathbf{R}_p^t \mathbf{f}_{i/p}^p + \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.19)$$

3.5 Accélération dans le repère de la plateforme

Cependant, si l'accélération désirée est dans le repère de la plateforme l'équation doit être transformée. La vitesse dans le repère de la plateforme est :

$$\mathbf{v}_{t/p}^p = \mathbf{R}_t^p \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.20)$$

Afin de retrouver l'accélération de la plateforme, la dérivée de la vitesse dans le repère de la plateforme doit être effectuée.

$$\dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p = \dot{\mathbf{R}}_t^p \mathbf{v}_{t/p}^t + \mathbf{R}_t^p \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^t \quad (3.21)$$

En dérivant la matrice de rotation et en substituant $\dot{\mathbf{v}}_{t/p}^t$ par l'équation (3.19), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= (-\boldsymbol{\Omega}_{t/p}^p \mathbf{R}_t^p) \mathbf{R}_t^p \mathbf{v}_{t/p}^p + \mathbf{R}_t^p (\mathbf{f}_{i/p}^p + \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t) \\
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\Omega}_{t/p}^p \mathbf{v}_{t/p}^p + \mathbf{R}_t^p (\mathbf{f}_{i/p}^p + \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t) \\
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= -(\boldsymbol{\Omega}_{i/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^p) \mathbf{v}_{t/p}^p + \mathbf{f}_{i/p}^t + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^p \mathbf{v}_{t/p}^p \\
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\Omega}_{i/p}^p \mathbf{v}_{t/p}^p + \mathbf{f}_{i/p}^t + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^p \mathbf{v}_{t/p}^p \\
 \boxed{\dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= \mathbf{f}_{i/p}^p + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{R}_t^p \mathbf{v}_{t/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/p}^p \mathbf{v}_{t/p}^p} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

L'équation (3.22) décrit l'accélération de la plateforme exprimée dans le repère de la plateforme (Miller et al., 2010).

3.6 Sélection des équations d'un SNI

Bien qu'il existe plusieurs méthodes de représentation d'une orientation, une représentation sous forme de quaternion sera conservée pour le système de navigation inertielle. Une meilleure précision numérique et l'absence de singularité de représentation sont les raisons pour lesquelles les quaternions ont été retenus.

En résumé, le modèle cinématique du véhicule est décrit par une combinaison des équations (3.22), (3.19) et (3.7). Voici ce modèle par rapport au repère tangentiel, puis au repère de la plateforme.

Repère tangentiel :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t &= \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^t \\
 \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \boldsymbol{\Omega}^j (\boldsymbol{\omega}_{i/p}^p - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\omega}_{i/e}^t) \\
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^t &= \mathbf{R}_t^p \mathbf{f}_{i/p}^p + \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - 2\boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{v}_{t/p}^t \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Repère de la plateforme :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t &= \mathbf{R}_p^t \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p \\
 \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \boldsymbol{\Omega}^j(\boldsymbol{\omega}_{i/p}^p - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\omega}_{i/e}^t) \\
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= \mathbf{f}_{i/p}^p + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{R}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/p}^p \mathbf{v}_{t/p}^p
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le modèle par rapport au repère de la plateforme sera conservé puisqu'il offre une plus grande simplicité lors de la fusion de donnée comme démontré dans le chapitre sur le filtrage de Kalman.

Les équations (3.5) et (3.8) modélisant les mesures inertielles sont ajoutées aux équations de navigation afin d'obtenir les équations complètes de navigation (Miller et al., 2010) ainsi que le modèle d'estimation correspondant.

Équation de navigation

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t &= \mathbf{R}_p^t \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p \\
 \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \boldsymbol{\Omega}^j(\mathbf{y}_g - \mathbf{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\omega}_{i/e}^t) \\
 \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= (\mathbf{y}_a - \mathbf{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a) + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \mathbf{R}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - (\mathbf{y}_g - \mathbf{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g) \times \mathbf{v}_{t/p}^p
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Équation de navigation estimée

$$\begin{aligned}
 \hat{\dot{\mathbf{p}}}_{t/p}^t &= \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\dot{\mathbf{v}}}_{t/p}^p \\
 \hat{\dot{\boldsymbol{\Theta}}} &= \hat{\boldsymbol{\Omega}}^j(\mathbf{y}_g - \hat{\mathbf{b}}_g - \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/e}^t) \\
 \hat{\dot{\mathbf{v}}}_{t/p}^p &= (\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{b}}_a) + \hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p - (\mathbf{y}_g - \hat{\mathbf{b}}_g) \times \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Différentes méthodes d'intégration numérique peuvent être utilisées pour propager les équations de navigation dans le temps. Cependant, une intégration numérique rectangulaire a été retenue dans ce projet en raison de sa simplicité et de sa précision suffisante pour les cas traités. De façon générale, cette approximation de l'intégrale s'exprime comme suit :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \Delta t \quad (3.27)$$

où \mathbf{x} est le vecteur d'état composé des positions, des vitesses et des orientations et Δt est le pas d'intégration choisi.

3.6.1 Schéma fonctionnel du système de navigation

La Figure 3.3 résume les équations et les algorithmes composant le système de navigation inertielle avec une accélération dans le repère de la plateforme. Dans ce chapitre, les algorithmes composant un système de navigation inertielle ont été développés et seront utilisés dans ce mémoire.

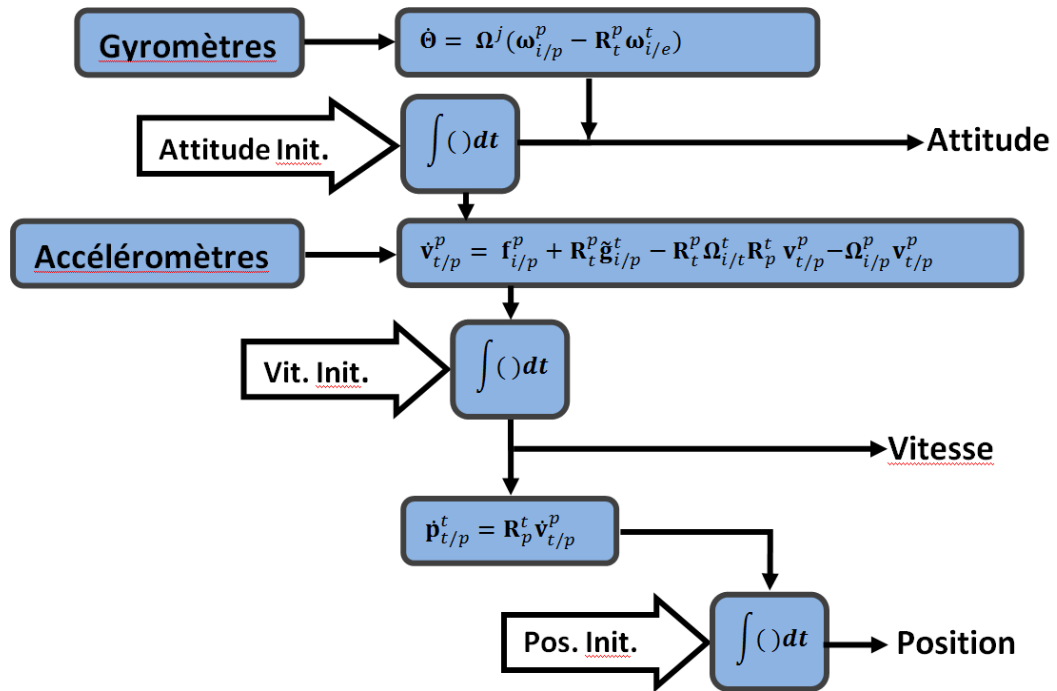


Figure 3.3 Système de navigation inertiel

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les équations formant un système de navigation inertielle ont été développées. Le système de navigation inertielle permet d'estimer la position, la vitesse ainsi que l'attitude du mobile à partir de mesures d'accéléromètres et de gyromètres. Les équations développées dans le repère de la plateforme seront utilisées pour le reste de ce mémoire.

CHAPITRE 4

Filtre de Kalman

Dans ce chapitre, un filtre de Kalman indirect appliqué au problème de la navigation sous-marine est présenté. Cet algorithme est inspiré des travaux de Paul A. Miller dans son article « Autonomous Underwater Vehicle Navigation » (Miller et al., 2010). Ces travaux représentent bien l'état de l'art le plus récent dans ce domaine. En effet, dans son article, Miller propose un filtrage de Kalman fortement couplé avec une estimation en ligne des biais présents sur les gyroscopes et les accéléromètres. Dans ce mémoire, la théorie et la mise en œuvre d'une version simplifiée et modifiée de cet algorithme pour un couplage faible sont présentées. De plus, l'estimation des biais n'est pas réalisée en ligne. Tout d'abord, la structure de base est décrite et le filtre de Kalman est développé à l'aide de la formulation indirecte, qui est plus avantageuse que la formulation classique pour la navigation. Avec cette formulation, le filtre de Kalman effectue ses corrections selon l'erreur relative aux mesures et leurs variances plutôt que directement par rapport aux signaux de sortie. Pour chaque capteur présent sur le sous-marin (attitude, vitesse et position), les matrices de mesures et de bruits sont construites.

4.1 Filtre de Kalman direct

Un filtre de Kalman est défini comme étant une série de calculs récursifs permettant d'obtenir une meilleure estimation des variables d'état d'un système avec une correction proportionnelle à l'erreur entre une prédiction des sorties et des mesures.

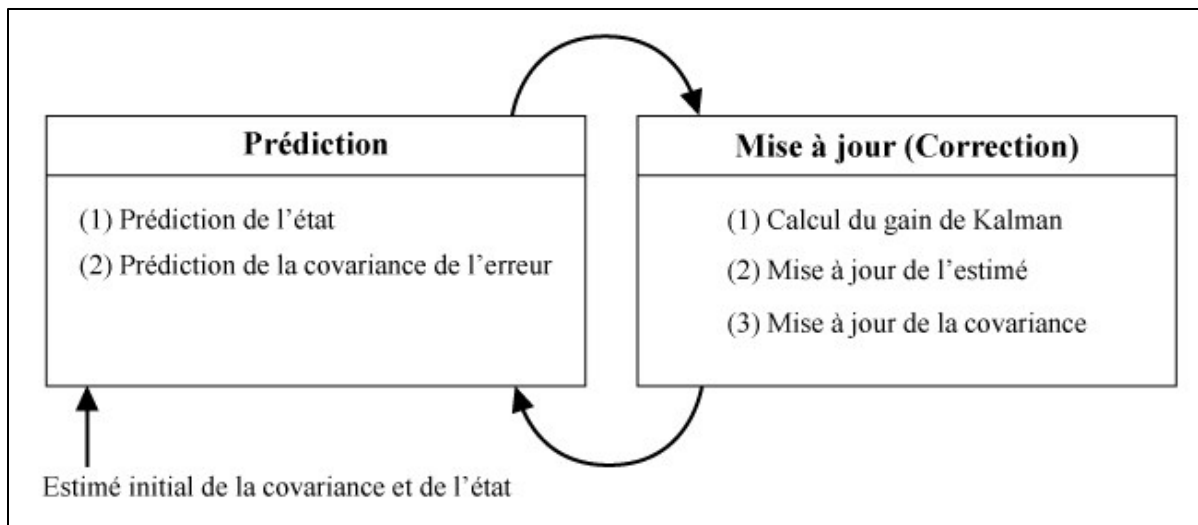


Figure 4.1 Filtre de Kalman
Adapté de Bishop (2006, p.6)

Tel que montré sur la Figure 4.1, le filtrage s'effectue en deux phases distinctes : la prédiction et la mise à jour. Dans un filtre de Kalman direct, des signaux de capteurs primaires attaquent l'entrée d'un modèle d'état qui représente la dynamique du système. Ce modèle permet de prédire les états à estimer. Dans cette phase de prédiction, la covariance de l'erreur est aussi prédite. Par la suite, cette estimation est comparée et corrigée par l'erreur entre les sorties estimées et les mesures. Cette correction, qui s'appelle la mise à jour, est pondérée par le gain de Kalman qui se calcule à partir de la variance des signaux de mesure et du modèle. Si peu de confiance est accordée à un capteur (grande variance de ses signaux), ce dernier influencera peu l'estimation. L'estimation provenant du filtrage de Kalman offre un estimé optimal du vecteur d'état du système au sens du minimum de la variance, sous l'hypothèse d'un système linéaire affecté par un bruit blanc. Quoique limitée aux systèmes linéaires, cette technique permet d'obtenir une meilleure estimation fusionnée d'un ensemble de capteurs que chacun d'eux prit séparément (Siegart et Nourbakhsh, 2004).

Le filtre de Kalman s'appuie également sur l'hypothèse d'un bruit de mesure blanc; ce qui est une autre limitation importante. Différentes variantes du filtrage de Kalman permettent de surmonter ces limitations.

4.2 Filtre de Kalman indirect

Un filtre de Kalman indirect estime l'erreur entre les sorties et les mesures plutôt que l'état. La structure et les équations du filtre indirect sont identiques à celles d'un filtre de Kalman classique. La formulation du système est cependant différente. Dans une structure indirecte, les erreurs et les biais des équations de navigation sont estimés afin de les corriger. Cette estimation permet de corriger et de stabiliser le système de navigation inertielle qui est indépendant du filtre. Les mesures externes au filtre sont construites à partir de l'erreur entre les valeurs estimées par le système de navigation inertielle et des capteurs complémentaires.

4.2.1 Description du filtre

Voici un schéma représentant un filtre de Kalman indirect utilisé dans le cadre d'un système de navigation assisté par des capteurs de mesures absolues.

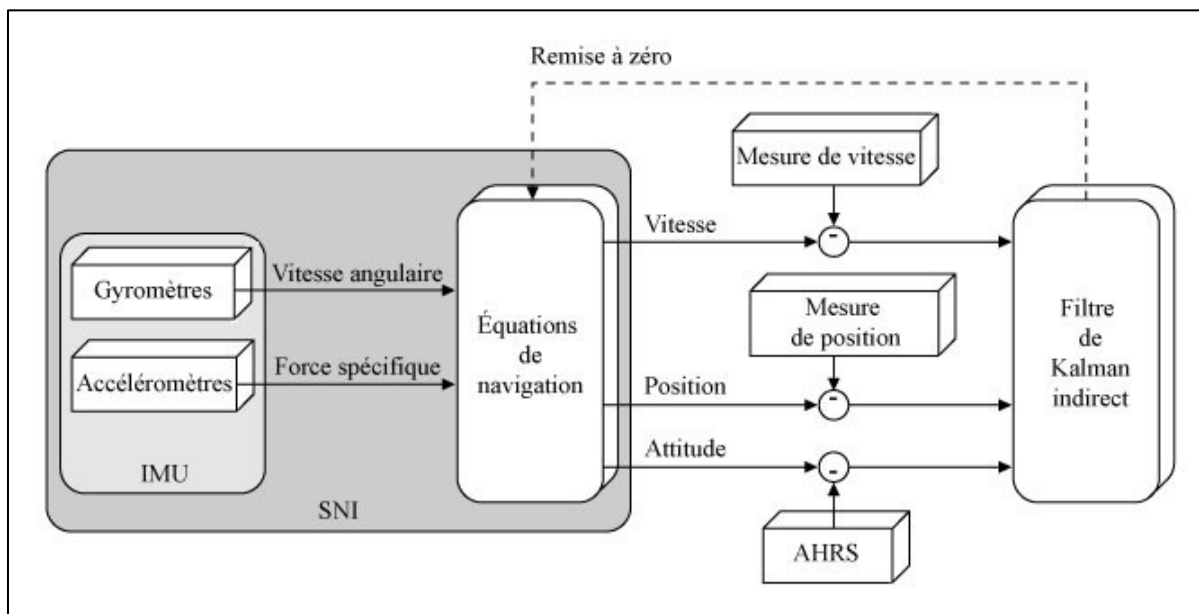


Figure 4.2 Structure du filtrage indirect
Adaptée de Gade (2009, p.32)

La Figure 4.2 représente la structure classique d'un système de navigation sous-marine. Le système de navigation inertielle est indépendant et estime la position, la vitesse et l'attitude du sous-marin par intégration des équations de navigation. Ensuite, ces estimations sont comparées aux signaux d'un USBL pour la position, d'un DVL pour la vitesse ainsi que d'un AHRS pour l'attitude. Cette comparaison permet d'obtenir l'erreur de position, de vitesse et d'attitude. Ces erreurs servent de mesures au filtre de Kalman indirect. Dans le filtrage indirect, le modèle dynamique est composé des équations d'erreurs de position, de vitesse et d'attitude selon le repère retenu dans les équations de navigation inertielle. Finalement, la dérive du système de navigation est corrigée par l'estimation provenant du filtrage de Kalman. Les vecteurs \mathbf{b}_a et \mathbf{b}_g sont les biais qui sont estimés durant la séquence d'initialisation. Ils ne sont donc pas estimés par le filtre de Kalman indirect.

4.2.2 Avantages

Le premier avantage de cette formulation est l'indépendance du système de navigation inertielle (SNI). Si le filtre de Kalman tombait en panne ou fournissait des valeurs absurdes, le système de navigation inertielle continuerait de fonctionner seul. Cette caractéristique est vitale pour un sous-marin puisque si un problème de ce type survenait lors d'une inspection, l'opérateur devrait être en mesure de ramener le sous-marin à la surface en toute sécurité.

Le second avantage est lié à la linéarité du système et à son comportement à basse fréquence. La dynamique des systèmes à estimer se caractérise par un comportement non linéaire à haute fréquence. Il est donc difficile d'estimer cette dynamique de façon précise avec un filtre de Kalman traditionnel. Par contre, le filtrage indirect permet d'estimer l'erreur de mesure plutôt que l'état. Parce que les erreurs peuvent être considérées comme des petits signaux, une linéarisation de la dynamique d'erreur engendre un modèle relativement précis. De plus, la formulation indirecte possède une dynamique beaucoup plus lente que celle de la formulation directe. En effet, avec cette formulation, le système de navigation inertielle s'occupe d'estimer le comportement haute fréquence du sous-marin alors que le filtrage

corrige lentement la dérive de ce dernier. Cette particularité permet de réduire la fréquence de rafraîchissement du filtre et d'être beaucoup plus efficace au niveau des calculs.

Lors de la mise en œuvre, un filtrage de Kalman direct est limité par la connaissance de la matrice de covariance du bruit des signaux de sortie du modèle. Dans ce cas, la formulation de l'équation de sortie du système est telle qu'il peut être difficile de comprendre le lien entre le bruit sur chaque capteur et le bruit résultant sur chaque sortie. La matrice de covariance du bruit du modèle perd donc son sens physique. Cette matrice est donc difficile à estimer, ce qui limite la mise en œuvre du filtre. Cependant, avec l'utilisation d'un filtrage de Kalman indirect, le modèle d'état représente l'erreur de mesure. La covariance du bruit est donc directement représentée par la variance des capteurs inertiels. Ces valeurs sont connues puisqu'elles sont fournies par le manufacturier ou mesurables en laboratoire. Dans ce mémoire, ces valeurs sont trouvées par une analyse de la déviation d'Allan (Chapitre 6.1).

4.2.3 Variable d'état du système

Pour le cas étudié dans ce mémoire, les variables d' tats du système sont définies comme suit :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{p}_{t/p}^t \ \mathbf{q}_\theta \ \mathbf{v}_{t/p}^p]^T \quad (4.1)$$

où $\mathbf{p}_{t/p}^t$ représente la position du véhicule par rapport au repère tangentiel, \mathbf{q}_θ représente l'orientation du véhicule par rapport au repère tangentiel exprimé en quaternion et $\mathbf{v}_{t/p}^p$ représente la vitesse du véhicule dans le repère de la plateforme.

4.2.4 Variable d'état de l'erreur

Pour appliquer le filtre de Kalman indirect, le vecteur de l'état de l'erreur doit être défini. Pour le cas étudié, ce vecteur est défini comme suit :

$$\delta\mathbf{x} = [\delta\mathbf{p}_{t/p}^t \ \delta\boldsymbol{\rho} \ \delta\mathbf{v}_{t/p}^p]^T \quad (4.2)$$

Dans cette formulation tirée de (Miller et al., 2010), il est important de ne pas confondre $\delta \mathbf{p}_{t/p}^t$, la position, avec $\delta \mathbf{p}$, l'erreur des petits angles. L'erreur entre deux rotations $\boldsymbol{\theta}$ n'est pas linéaire contrairement à la vitesse ou la position linéaire. Le concept d'erreur des petits angles, qui a été introduit plus tôt dans ce mémoire (équation (2.19)) sera donc utilisé pour obtenir une approximation linéaire de cette erreur.

4.2.5 Vecteur d'entrée du bruit du modèle

Afin de modéliser l'erreur d'une SNI, le vecteur d'entrée représente le bruit sur l'erreur du modèle. Il est défini par :

$$\mathbf{u} = [\boldsymbol{\eta}_a^T \boldsymbol{\eta}_b^T]^T \quad (4.3)$$

où $\boldsymbol{\eta}_a$ et $\boldsymbol{\eta}_b$ représentent un vecteur de bruit blanc présent sur les mesures des trois axes des accéléromètres et des gyromètres.

4.3 Équation de l'erreur

Pour obtenir une prédiction de l'erreur, les équations d'état de l'erreur du système de navigation inertielle sont nécessaires. L'erreur est un vecteur défini comme étant la valeur réelle moins la valeur estimée :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (4.4)$$

Cette opération est appliquée à la position, la vitesse et l'orientation. Les termes du second ordre d'erreur influencent peu le résultat final puisqu'ils ont un impact minime sur le système puisque les signaux d'erreurs sont petits. Ces termes sont donc négligés. Le sous-marin se déplace sur de courtes distances. Il y a donc peu de changement de latitude lors de l'opération. Dans ce cas, $\tilde{\mathbf{g}}^t$ qui est normalement dépendant de la position sur Terre, est approximativement constant. Par conséquent, la gravité estimée est supposée la même que la gravité réelle :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t &= \widehat{\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t} \\ \delta \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

La vitesse de rotation du repère tangentiel exprimée par rapport au repère tangentiel $\mathbf{\Omega}_{i/t}^t$ varie seulement en fonction de la latitude. Lors d'une inspection sous-marine, le déplacement en latitude est négligeable. On considère donc que :

$$\begin{aligned}\omega_{i/t}^t &= \widehat{\omega_{i/t}^t} \\ \delta \omega_{i/t}^t &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

Puisque $\mathbf{\Omega}_{i/t}^t$ est construit directement à partir de $\omega_{i/t}^t$, le même résultat s'applique :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_{i/t}^t &= \widehat{\mathbf{\Omega}_{i/t}^t} \\ \delta \mathbf{\Omega}_{i/t}^t &= 0\end{aligned}\tag{4.7}$$

4.3.1 Équation de l'erreur de position :

D'abord, selon les équations de navigation (3.26)-(3.27), la dérivée de l'erreur de position peut s'écrire comme suit:

$$\delta \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t = \mathbf{R}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - \widehat{\mathbf{R}}_p^t \widehat{\mathbf{v}}_{t/p}^p\tag{4.8}$$

La matrice de rotation est remplacée par son estimé à l'aide de l'équation (2.19) (erreur des petits angles). Les termes d'erreurs du second ordre sont négligeables pour les raisons mentionnées plus tôt. Ensuite, la vitesse réelle est remplacée par l'estimation de la vitesse additionnée à son erreur d'estimation, de sorte que :

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t &= (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\rho} \times]) \widehat{\mathbf{R}}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - \widehat{\mathbf{R}}_p^t \widehat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \\ \delta \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t &= (\widehat{\mathbf{R}}_p^t + [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \widehat{\mathbf{R}}_p^t) (\delta \mathbf{v}_{t/p}^p + \widehat{\mathbf{v}}_{t/p}^p) - \widehat{\mathbf{R}}_p^t \widehat{\mathbf{v}}_{t/p}^p\end{aligned}\tag{4.9}$$

Ensuite, les termes quadratiques de l'erreur sont éliminés :

$$\delta \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t = \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \mathbf{v}_{t/p}^p + \delta \boldsymbol{\rho} \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \mathbf{v}_{t/p}^p + \delta \boldsymbol{\rho} \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p - \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \quad (4.10)$$

$$\boxed{\delta \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t = \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \mathbf{v}_{t/p}^p - \left[\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \times \right] \delta \boldsymbol{\rho}}$$

4.3.2 Équation de l'erreur de vitesse:

Selon les équations de navigation (3.25)-(3.26), la dérivée de l'erreur de vitesse peut ensuite être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p - \dot{\hat{\mathbf{v}}}_{t/p}^p \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= (\mathbf{y}_a - \mathbf{b}_a - \boldsymbol{\eta}_a) + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{R}_t^p \Omega_{i/t}^t \mathbf{R}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - (\mathbf{y}_g - \mathbf{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g) \times \\ &\quad \mathbf{v}_{t/p}^p - (\mathbf{y}_a - \hat{\mathbf{b}}_a) - \hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + (\mathbf{y}_g - \hat{\mathbf{b}}_g) \times \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \end{aligned} \quad (4.11)$$

où \mathbf{y}_a représente les mesures d'accéléromètres, $\hat{\mathbf{b}}_a$ et \mathbf{b}_a représentent les biais réels et estimés des accéléromètres, \mathbf{y}_g représente les mesures des gyromètres et $\hat{\mathbf{b}}_g$ ainsi que \mathbf{b}_g représentent les biais réel et estimé des gyromètres.

Les biais ne sont pas estimés par le filtrage; on considère donc que $\mathbf{b}_g - \hat{\mathbf{b}}_g = 0$. Ainsi, en simplifiant et en considérant de nouveau l'approximation des petits angles (équation 2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_a - \mathbf{b}_a + \hat{\mathbf{b}}_a - \boldsymbol{\eta}_a + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{R}_t^p \Omega_{i/t}^t \mathbf{R}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - \mathbf{y}_g \times \\ &\quad \mathbf{v}_{t/p}^p + \mathbf{b}_g \times \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \boldsymbol{\eta}_g \times \mathbf{v}_{t/p}^p - \hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \mathbf{y}_g \times \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p - \\ &\quad \hat{\mathbf{b}}_g \times \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\eta}_a + \mathbf{R}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{R}_t^p \Omega_{i/t}^t \mathbf{R}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p - \\ &\quad \mathbf{v}_{t/p}^p \times \boldsymbol{\eta}_g - \mathbf{y}_g \times \delta \mathbf{v}_{t/p}^p \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\boldsymbol{\eta}_a - \hat{\mathbf{R}}_t^p (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\delta\rho} \times]) \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t (\mathbf{I} + [\boldsymbol{\delta\rho} \times]) \hat{\mathbf{R}}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p - \mathbf{v}_{t/p}^p \times \\
& \boldsymbol{\eta}_g + \hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - ([\boldsymbol{\delta\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_t^p) \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \mathbf{y}_g \times \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p
\end{aligned} \quad (4.12)$$

Encore une fois, en réorganisant certains termes de l'équation, il est possible d'identifier et d'éliminer des termes d'erreurs du second ordre :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\eta}_a + \hat{\mathbf{R}}_t^p \left\{ \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\delta\rho} \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p + \boldsymbol{\delta\rho} \times \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p + \right. \\
& \left. \boldsymbol{\delta\rho} \times \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\delta\rho} \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \mathbf{v}_{t/p}^p + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \right\} - \mathbf{v}_{t/p}^p \times \boldsymbol{\eta}_g - ([\boldsymbol{\delta\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_t^p) \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t - \\
& \mathbf{y}_g \times \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\eta}_a + \hat{\mathbf{R}}_t^p \left\{ \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t [\boldsymbol{\delta\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_p^t (\hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p) + [\boldsymbol{\delta\rho} \times \right. \\
& \left.] \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t (\hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p) \right\} - \mathbf{v}_{t/p}^p \times \boldsymbol{\eta}_g + (\hat{\mathbf{R}}_t^p [\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \times] \boldsymbol{\delta\rho}) - \mathbf{y}_g \times \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\eta}_a + \hat{\mathbf{R}}_t^p \left\{ \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p - \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t [\boldsymbol{\delta\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\delta\rho} \times \right. \\
& \left. \hat{\mathbf{R}}_p^t \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p + [\boldsymbol{\delta\rho} \times] \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + \boldsymbol{\Omega}_{i/t}^t \boldsymbol{\delta\rho} \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p \right\} - \mathbf{v}_{t/p}^p \times \\
& \boldsymbol{\eta}_g + (\hat{\mathbf{R}}_t^p \tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \times \boldsymbol{\delta\rho}) - \mathbf{y}_g \times \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p
\end{aligned} \quad (4.13)$$

Selon (2.15) , il est possible de réécrire le terme $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t$ sous la forme $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t \times$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p &= -\boldsymbol{\eta}_a + \hat{\mathbf{R}}_t^p \left\{ -\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t [\boldsymbol{\delta\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + [\boldsymbol{\delta\rho} \times] \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \right\} - \mathbf{v}_{t/p}^p \\
& \times \boldsymbol{\eta}_g + (\hat{\mathbf{R}}_t^p [\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \times] \boldsymbol{\delta\rho}) - ([\mathbf{y}_g \times] + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t) \boldsymbol{\delta v}_{t/p}^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p = & -\boldsymbol{\eta}_a + \hat{\mathbf{R}}_t^p \left\{ -\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t \times [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p + [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \right\} - \mathbf{v}_{t/p}^p \\ & \times \boldsymbol{\eta}_g + (\hat{\mathbf{R}}_t^p [\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \times] \delta \boldsymbol{\rho}) - ([\mathbf{y}_g \times] + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t) \delta \mathbf{v}_{t/p}^p \end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalement, les matrices antisymétriques associées à un produit croisé possèdent la propriété suivante (Farrell, 2008) où \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} représentent des vecteurs quelconques de dimension trois:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} * \mathbf{w}^T) \mathbf{v} - (\mathbf{u} * \mathbf{v}^T) \mathbf{w} \quad (4.15)$$

En utilisant la propriété (4.15) sur la première ligne de la dernière équation de (4.14), il est possible d'exprimer la dérivée de l'erreur sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_{t/p}^p = & -\boldsymbol{\eta}_a + \hat{\mathbf{R}}_t^p \left\{ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t (\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p)^T - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t (\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p)^T + \right. \\ & \left. [\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \times] \right\} \delta \boldsymbol{\rho} - ([\mathbf{y}_g \times] + \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t) \delta \mathbf{v}_{t/p}^p - [\mathbf{v}_{t/p}^p \times] \boldsymbol{\eta}_g \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3.3 Équation de l'erreur d'orientation:

Afin de retrouver la dérivée de l'erreur des petits angles $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, il suffit de dériver l'erreur de la matrice de rotation dans laquelle la matrice estimée a d'abord était remplacée à l'aide de l'équation (2.19):

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{R}}_p^t &= [\delta \dot{\boldsymbol{\rho}} \times] \mathbf{R}_p^t + [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \dot{\mathbf{R}}_p^t \\ \delta \dot{\mathbf{R}}_p^t &= [\delta \dot{\boldsymbol{\rho}} \times] \mathbf{R}_p^t + [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \mathbf{R}_p^t \boldsymbol{\Omega}_{t/p}^p \end{aligned} \quad (4.17)$$

Il faut ensuite isoler le terme recherché $[\delta \dot{\boldsymbol{\rho}} \times]$ et remplacer $\delta \dot{\mathbf{R}}_p^t$ par $\dot{\mathbf{R}}_p^t - \hat{\mathbf{R}}_p^t$, utiliser de nouveau l'équation (2.18) pour finalement éliminer le terme quadratique :

$$\begin{aligned} [\delta \dot{\boldsymbol{\rho}} \times] &= (\dot{\mathbf{R}}_p^t - \hat{\mathbf{R}}_p^t) \mathbf{R}_p^p - [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \mathbf{R}_p^t \boldsymbol{\Omega}_{t/p}^p \mathbf{R}_p^p \\ [\delta \dot{\boldsymbol{\rho}} \times] &= (\boldsymbol{\Omega}_{t/p}^t - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t/p}^t + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t/p}^t [\delta \boldsymbol{\rho} \times]) - [\delta \boldsymbol{\rho} \times] \boldsymbol{\Omega}_{t/p}^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\delta \rho \times] &= (\Omega_{t/p}^t - \hat{\Omega}_{t/p}^t + \hat{\Omega}_{t/p}^t [\delta \rho \times]) - [\delta \rho \times] \delta \Omega_{t/p}^t - [\delta \rho \times] \hat{\Omega}_{t/p}^t \\
[\delta \rho \times] &= \Omega_{t/p}^t - \hat{\Omega}_{t/p}^t + \hat{\Omega}_{t/p}^t [\delta \rho \times] - [\delta \rho \times] \hat{\Omega}_{t/p}^t
\end{aligned} \tag{4.18}$$

où $\hat{\Omega}_{t/p}^t$ peut aussi s'écrire sous la forme $[\omega_{t/p}^t \times]$ selon l'équation (2.15). Alors, par calcul direct, on peut montrer que :

$$\hat{\Omega}_{t/p}^t [\delta \rho \times] - [\delta \rho \times] \hat{\Omega}_{t/p}^t = [(\omega_{t/p}^t \times \delta \rho) \times] \tag{4.19}$$

Sachant que $\hat{\Omega}_{t/p}^t = [\omega_{t/p}^t \times]$ et $[\delta \rho \times]$ représente deux matrices antisymétriques associées au produit vectoriel, l'équation (4.19) peut être utilisée pour réécrire l'équation (4.18) sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\rho} &= \omega_{t/p}^t - \hat{\omega}_{t/p}^t + \hat{\omega}_{t/p}^t \times \delta \rho \\
\delta \dot{\rho} &= \omega_{i/p}^t - \omega_{i/t}^t - \hat{\omega}_{i/p}^t - \hat{\omega}_{i/t}^t + (\hat{\omega}_{i/p}^t - \hat{\omega}_{i/t}^t) \times \delta \rho \\
\delta \dot{\rho} &= \mathbf{R}_p^t \omega_{i/p}^p - \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\omega}_{i/p}^p - \omega_{i/t}^t - \hat{\omega}_{i/t}^t + (\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\omega}_{i/p}^p - \hat{\omega}_{i/t}^t) \times \delta \rho
\end{aligned} \tag{4.20}$$

En utilisant la notion des petits angles pour obtenir $\hat{\mathbf{R}}_p^t$ et en éliminant les termes quadratiques, l'équation (4.20) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\delta \dot{\rho} &= (I + \delta \rho \times) \hat{\mathbf{R}}_p^t \omega_{i/p}^p - \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\omega}_{i/p}^p - \delta \omega_{i/t}^t - \delta \rho \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\omega}_{i/p}^p - \hat{\omega}_{i/t}^t \times \delta \rho \\
\delta \dot{\rho} &= \hat{\mathbf{R}}_p^t \omega_{i/p}^p + \delta \rho \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \omega_{i/p}^p - \hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\omega}_{i/p}^p - \delta \omega_{i/t}^t - \hat{\omega}_{i/t}^t \times \delta \rho \\
\delta \dot{\rho} &= \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \omega_{i/p}^p + \delta \rho \times \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \omega_{i/p}^p - \delta \omega_{i/t}^t - \hat{\omega}_{i/t}^t \times \delta \rho \\
\delta \dot{\rho} &= \hat{\mathbf{R}}_p^t \delta \omega_{i/p}^p - \delta \omega_{i/t}^t - \hat{\omega}_{i/t}^t \times \delta \rho
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Le terme $\delta \omega_{i/t}^t$ est éliminé grâce à l'équation (4.6). Puisque les biais sont estimés préalablement, on suppose que $\mathbf{b}_g = \hat{\mathbf{b}}_g$.

$$\delta \omega_{i/p}^p = \omega_{i/p}^p - \hat{\omega}_{i/p}^p$$

$$\begin{aligned}\delta\omega_{i/p}^p &= (\mathbf{y}_g - \mathbf{b}_g - \boldsymbol{\eta}_g) - (\mathbf{y}_g - \hat{\mathbf{b}}_g) \\ \delta\omega_{i/p}^p &= -\boldsymbol{\eta}_g\end{aligned}\tag{4.22}$$

L'erreur d'attitude se décrit donc par :

$$\delta\dot{\boldsymbol{\rho}} = -\hat{\mathbf{R}}_p^t \boldsymbol{\eta}_g - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \delta\boldsymbol{\rho}\tag{4.23}$$

4.3.4 Modèle d'état

Voici la structure du modèle d'état de l'erreur du système de navigation inertielle. Ces équations sont obtenues à partir du vecteur d'état défini par l'équation (4.2), du vecteur d'entrée défini par l'équation (4.3) et du développement des équations d'erreurs linéarisées, présenté aux sous-sections précédentes.

L'état prédit sous forme continue se décrit donc par le modèle d'état suivant:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{t})\delta\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\tag{4.24}$$

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{C} \delta\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{v}(\mathbf{t})\tag{4.25}$$

où $\delta\dot{\mathbf{x}}$ représente la variation du vecteur d'état de l'erreur, $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ est la matrice de la dynamique, $\mathbf{B}(\mathbf{t})$ est la matrice de couplage avec les variables d'entrée et \mathbf{C} est la matrice de couplage avec les variables de sortie. Aussi, $\delta\mathbf{x}$ représente le vecteur d'état de l'erreur tandis que \mathbf{u} représente l'entrée du système qui est, dans ce cas, le bruit de mesure de la centrale inertielle. Finalement, \mathbf{v} est une variable aléatoire représentant le bruit des mesures externes. Il est caractérisé par une distribution normale centrée à zéro ayant une variance σ_v : $N(0, \sigma_v)$.

Dans un filtre de Kalman indirect, le modèle représente une linéarisation de l'erreur du système de navigation inertielle. Donc de façon détaillée, l'équation (4.23) peut s'exprimer comme suit :

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{t/p}^t \\ \delta \boldsymbol{\rho} \\ \delta \mathbf{v}_{t/p}^p \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_a \\ \boldsymbol{\eta}_g \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

où les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont construites à partir des équations d'erreur (4.9), (4.16) et

(4.20):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -[\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p] & \hat{\mathbf{R}}_t^p \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{R}}_t^p \{ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t (\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p)^T - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i/t}^t (\hat{\mathbf{R}}_p^t \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p)^T \mathbf{I} + [\tilde{\mathbf{g}}_{i/p}^t \mathbf{x}] \} & -[\mathbf{y}_g \mathbf{x}] - \hat{\mathbf{R}}_t^p \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{i/t}^t \hat{\mathbf{R}}_p^t \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{I} & -\hat{\mathbf{R}}_t^p \\ 0 & -[\mathbf{v}_{t/p}^p \times] \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

L'équation de sortie sera présentée plus loin pour chacune des mesures externes. Un des avantages importants du filtrage de Kalman indirect est lié au sens physique de la matrice \mathbf{Q} , la matrice de covariance du bruit du modèle. Elle est représentée directement par les variances des capteurs primaires composant le modèle. Ces variances ont préalablement été identifiées par une analyse par la méthode d'Allan du bruit de la centrale inertielle :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \sigma_g^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Modèle d'état discret de l'erreur

Les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{Q} sont continues dans le domaine du temps. Ces matrices peuvent être discrétisées à l'aide d'une transformation décrite dans (Farrell, 2008). Des matrices de propagation équivalente dans le domaine discret sont extraites de l'équation suivante:

$$\mathbf{Y}_k = \exp \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{A}(k\Delta t) & \mathbf{B}(k\Delta t)\mathbf{Q}\mathbf{B}(k\Delta t)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}(k\Delta t)^T \end{bmatrix} \Delta t \right) = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{\Phi}_k^{-1}\mathbf{Q}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}_k^T \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

où $\mathbf{\Phi}$ et \mathbf{Q}_d sont des matrices qui décrivent le système dans le domaine discret et \mathbf{D} est une matrice quelconque non nulle tandis que Δt est la période d'échantillonnage. Ces matrices sont extraites de \mathbf{Y}_k selon l'échantillon.

Le modèle d'état discret de l'erreur est alors donné par les équations suivantes :

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.31)$$

$$\delta \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (4.32)$$

où $\delta \mathbf{x}$ représente le vecteur d'état de l'erreur, $\mathbf{\Phi}$ représente la matrice de propagation de l'état et \mathbf{H} est la matrice qui lie les états aux mesures. \mathbf{w}_k est la nouvelle entrée du système qui a changé de dimension à cause du processus de discrétisation du bruit blanc continue $u(t)$. Tel que détaillé par l'équation (4.30), ce processus de discrétisation permet également de calculer la matrice de covariance du bruit de la nouvelle entrée discrète qui est définie par \mathbf{Q}_d . \mathbf{v}_k représente le bruit de sortie. La covariance de ce bruit de mesure est définie par \mathbf{R} .

Les informations contenues dans \mathbf{H} , $\delta \mathbf{y}$ et \mathbf{R} sont différentes pour chaque capteur et sont combinées en un seul vecteur de sortie. Grâce à cette caractéristique, il est facile d'ajouter ou de retirer des capteurs. Ces ajouts ne nécessitent aucune modification de la matrice $\mathbf{\Phi}$. Cette caractéristique est intéressante dans le cadre d'un robot mobile où différents capteurs peuvent être changés au cours du développement. De plus, cette particularité permet d'effectuer des

corrections sur le système de navigation de façons asynchrones lorsqu'une nouvelle mesure est disponible.

Le vecteur $\delta \mathbf{y}$, ainsi que les matrices \mathbf{H} et \mathbf{R} sont une concaténation des différentes mesures disponibles sur le sous-marin:

$$\delta \mathbf{y} = [\delta \mathbf{y}_p^T \quad \delta \mathbf{y}_\theta^T \quad \delta \mathbf{y}_v^T]^T \quad (4.33)$$

où $\delta \mathbf{y}_p$ représente l'erreur de la mesure de position, $\delta \mathbf{y}_\theta$ celle de la mesure d'orientation et $\delta \mathbf{y}_v$ celle de la mesure de vitesse. La matrice de couplage de sortie peut également se décomposer comme suit :

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_p^T \quad \mathbf{H}_\theta^T \quad \mathbf{H}_v^T]^T \quad (4.34)$$

où \mathbf{H}_p représente la matrice de sortie de position, \mathbf{H}_θ représente la matrice de sortie de d'orientation et \mathbf{H}_v représente la matrice de sortie de vitesse. Aussi,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_v \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

où \mathbf{R}_p représente la matrice covariance du bruit de mesure de position, \mathbf{R}_θ représente la matrice de covariance du bruit de mesure d'orientation et \mathbf{R}_v représente la matrice de covariance du bruit de mesure de vitesse.

4.3.5 Mesures de la position

Le capteur externe fournit directement la position du sous-marin par rapport au repère tangentiel fixé au barrage. La mesure de position est donc :

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{p}_{t/p}^t + \boldsymbol{\eta}_p \quad (4.36)$$

où $\boldsymbol{\eta}_p$ est un bruit blanc de mesure avec une distribution normale d'espérance zéro et de variance $\sigma_p^2 : N(0, \sigma_p^2)$. La mesure résiduelle est alors définie par:

$$\boldsymbol{\delta y}_p = \mathbf{y}_p - \mathbf{p}_{t/p}^t \quad (4.37)$$

Matrice de sortie de position:

Le filtre utilise directement les mesures de position. Dans ce cas, la matrice d'extraction des paramètres de \mathbf{H} est une matrice identité au niveau de la position. De cette façon, les positions mesurées sont directement comparées à la position estimée par le modèle afin d'obtenir l'erreur de position. Donc,

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Matrice de bruit de mesure de position :

Le bruit présent sur les mesures est directement le bruit sur le capteur de position 3D :

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

4.3.6 Mesures de l'attitude

L'attitude est directement fournie par un capteur AHRS qui a comme signal de sortie les angles d'Euler selon la convention zyx. Cependant, l'erreur des petits angles entre la matrice de rotation estimée et mesurée est recherchée. Une transformation est donc nécessaire pour retrouver la valeur de $\delta \mathbf{p}$.

La mesure d'attitude est décrite par

$$\mathbf{y}_\theta = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}_\theta \quad (4.40)$$

où $\boldsymbol{\theta}$ représente l'orientation sous forme d'angle d'Euler provenant des mesures et $\boldsymbol{\eta}_\theta$ est un bruit blanc de mesure avec une distribution normale d'espérance zéro et de variance σ_θ^2 : $N(0, \sigma_\theta^2)$.

Les angles d'Euler provenant des mesures et les quaternions provenant de l'état du système sont alors transformés en matrice de rotation :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p^t &= \mathbf{R}_p^t(\mathbf{y}_\theta) \\ \hat{\mathbf{R}}_p^t &= \hat{\mathbf{R}}_p^t(\mathbf{q}_\theta) \end{aligned} \quad (4.41)$$

où \mathbf{q}_θ représente l'orientation du véhicule par rapport au repère tangentiel exprimé en quaternion.

Par la relation d'erreur des petits angles de équation (2.19), \times , la matrice antisymétrique de l'erreur des petits angles, peut être exprimé comme suit :

$$\delta \rho \times = \mathbf{R}_p^t \hat{\mathbf{R}}_p^{t-1} - \mathbf{I} \quad (4.42)$$

La valeur $\delta \rho$ s'extrait de $\delta \rho \times$ puisqu'il s'agit d'une matrice antisymétrique. Donc,

$$\delta \mathbf{y}_\theta = \delta \rho = [\delta \rho_x \quad \delta \rho_y \quad \delta \rho_z]^T \quad (4.43)$$

où chacun des termes du vecteur est extrait de

$$\delta \rho \times = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \rho_z & \delta \rho_y \\ \delta \rho_z & 0 & -\delta \rho_x \\ -\delta \rho_y & \delta \rho_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

La matrice de couplage d'orientation est donc données par

$$\mathbf{H}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

tandis que la matrice de bruit de mesure d'orientation est donnée par:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \sigma_{\delta \rho}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\delta \rho}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta \rho}^2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

4.3.7 Mesures de la vitesse

Le capteur fournit directement la vitesse du sous-marin dans le repère de la plateforme. Lors de l'expérimentation, la dérivée de la position de l'outil du robot manipulateur servira de mesure de vitesse. La mesure de vitesse est donc :

$$\mathbf{y}_v = \mathbf{v}_{t/p}^p + \boldsymbol{\eta}_v \quad (4.47)$$

où $\boldsymbol{\eta}_v$ est un bruit blanc de mesure avec une distribution normale d'espérance zéro et de variance σ_v^2 : $N(0, \sigma_v^2)$. La mesure résiduelle est donc:

$$\boldsymbol{\delta y}_v = \mathbf{y}_v - \hat{\mathbf{v}}_{t/p}^p \quad (4.48)$$

Le filtre utilise directement les mesures de la vitesse. La matrice d'extraction des paramètres est une matrice identité au niveau de la vitesse. De cette façon, les vitesses mesurées sont directement comparées à la vitesse estimée par le modèle afin d'obtenir l'erreur de vitesse :

$$\mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Aussi, le bruit présent sur les mesures est directement le bruit du capteur :

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

4.4 Équation du filtre de Kalman

Cette section définit les différentes équations qui composent le filtre de Kalman indirect (Woodman, 2007).

4.4.1 Prédiction

La prédiction de l'erreur se calcule par :

$$\boldsymbol{\delta x}_{k+1}^- = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{\delta x}_k \quad (4.51)$$

où $\boldsymbol{\delta x}_{k+1}^-$ représente l'erreur prédite par le modèle et $\boldsymbol{\delta x}_k$ représente le vecteur d'état de l'erreur. D'autre part, la prédiction de la covariance de l'état de l'erreur se calcule par :

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_d \quad (4.52)$$

où \mathbf{P}_k représente la covariance de l'erreur du modèle alors que \mathbf{P}_{k+1}^- représente la prédiction de la covariance et \mathbf{Q}_d représente la covariance du bruit du modèle.

4.4.2 Mise à jour

La suite des calculs consiste à corriger les valeurs prédites par le modèle à l'aide de signaux de mesure absolue via une correction proportionnelle au gain de Kalman. La mesure de l'erreur est définie comme étant la différence entre la valeur des signaux de mesure et la prédiction effectuée par le modèle :

$$\delta \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (4.53)$$

où \mathbf{H}_k représente la matrice qui permet de lier l'état \mathbf{x} à la mesure \mathbf{y} . Le gain de Kalman se calcule alors de la façon suivante :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (4.54)$$

où \mathbf{K}_k est le gain de Kalman, \mathbf{R}_k est la matrice de covariance du bruit de mesure et \mathbf{H}_k est la matrice de sortie qui lie le modèle aux mesures. La prochaine étape consiste à faire la mise à jour de l'état à l'aide de l'équation suivante :

$$\delta \mathbf{x}_k^+ = \delta \mathbf{x}_k^- + \mathbf{K}_k (\delta \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k^-) \quad (4.55)$$

L'innovation $(\delta \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k^-)$ exprime la différence entre l'état prédit par le modèle $(\mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k^-)$ et la mesure de l'erreur $\delta \mathbf{y}$. Il faut ensuite mettre à jour la covariance de l'erreur. Cette équation permet de trouver la nouvelle valeur de la matrice \mathbf{P}_k^+ qui sera utilisée lors de la prochaine itération :

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (4.56)$$

4.4.3 Mise à jour du système de navigation inertielle

Finalement, la dernière étape du filtrage de Kalman indirect est de corriger les valeurs du SNI avec les valeurs d'erreur $\delta \mathbf{x}^+$ provenant du filtrage de Kalman. La correction de l'état (position, vitesse) s'effectue avec les équations suivantes :

$$\hat{\mathbf{x}}^+ = \hat{\mathbf{x}}^- + \delta \mathbf{x}^+ \quad (4.57)$$

où $\delta \mathbf{x}^+$ représente l'erreur du système de navigation inertielle estimé par le filtrage de Kalman, $\hat{\mathbf{x}}^-$ représente l'état du système de navigation inertielle avant la correction alors que $\hat{\mathbf{x}}^+$ représente l'état après la correction.

L'orientation du système de navigation inertielle est quant à elle corrigée avec :

$$\hat{\mathbf{R}}^+ = \hat{\mathbf{R}}^- (\mathbf{I} - [\delta \mathbf{p} \times]) \quad (4.58)$$

où $\delta \mathbf{p} \times$ représente l'erreur des petits angles du système de navigation inertielle estimé par le filtrage de Kalman, $\hat{\mathbf{R}}^-$ représente l'orientation provenant du système de navigation inertielle avant la correction alors que $\hat{\mathbf{R}}^+$ représente l'orientation corrigée par le filtrage.

L'algorithme récursif du filtrage indirect de Kalman peut se présenter sous forme de diagramme à l'aide de la Figure 4.3.

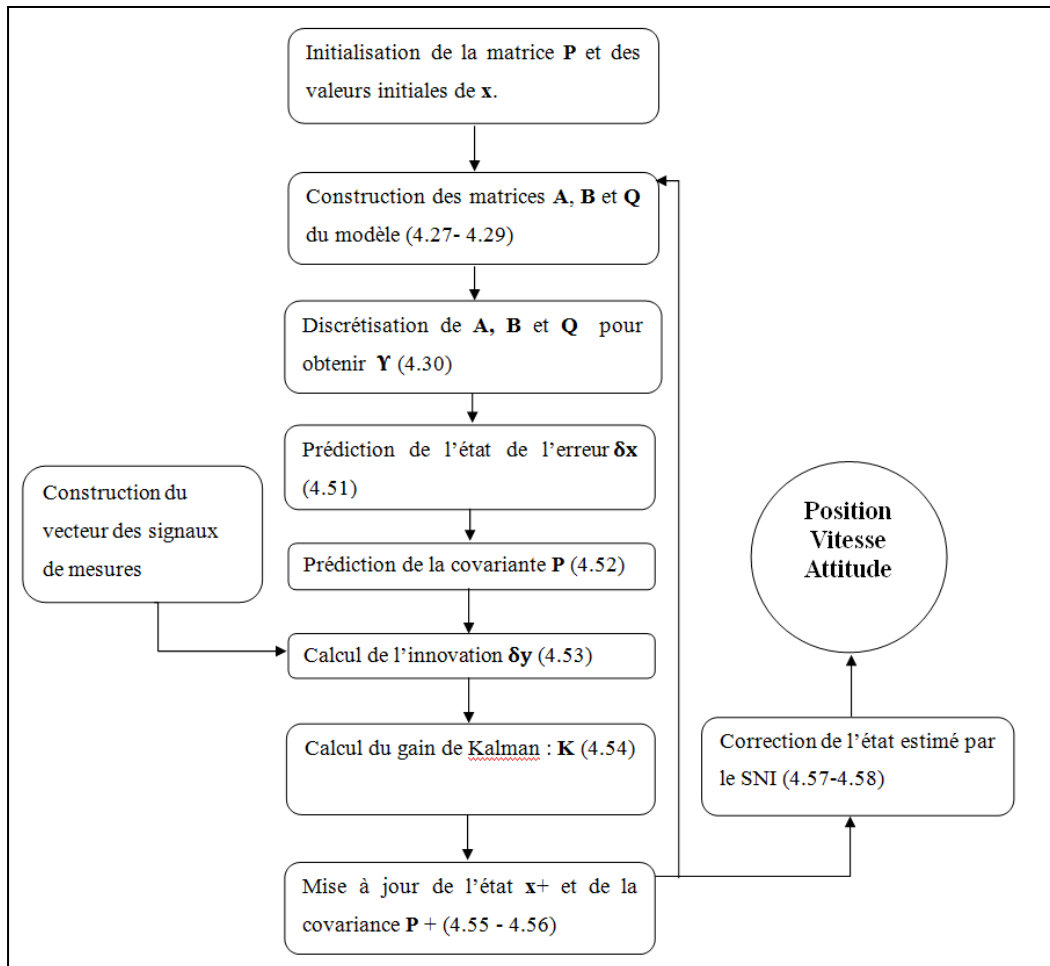


Figure 4.3 Algorithme du filtrage de Kalman

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un filtre de Kalman indirect appliqué à l'erreur d'un système de navigation inertielle a été développé. Cette formulation offre plusieurs avantages liés à la linéarité des équations de l'erreur. De plus, sous cette forme, les matrices de covariance du bruit du filtre de Kalman possèdent un sens physique rendant leurs déductions faciles. Les équations du filtre développé serviront à stabiliser les mesures inertielles et sont validées lors de l'expérimentation présentée aux chapitres suivants.

CHAPITRE 5

Méthodologie d'expérimentation

5.1 Banc d'essai robotique

Dans un véhicule sous-marin, l'objectif du système de navigation est d'estimer avec précision la position, la vitesse et l'orientation. Cependant, il peut devenir très complexe de valider la performance d'un système de navigation si la véritable position du véhicule n'est pas connue. Afin d'évaluer la performance des algorithmes, le système de navigation doit être soumis à une trajectoire connue et précise. Cette contrainte est parfois difficile à réaliser dans le cadre de la robotique mobile. De plus, il est laborieux d'analyser les comportements du système de navigation provenant de plusieurs tests lorsque les conditions diffèrent d'un essai à l'autre. Pour une même commande, le sous-marin peut effectuer une trajectoire légèrement différente causée par la nature imprédictible de l'eau. Il est donc ardu d'obtenir une bonne reproductibilité dans les expérimentations réelles. La reproductibilité des essais est une caractéristique essentielle pour la validation du système de mesures. Plusieurs scientifiques ont recours à des méthodes de simulation pour cette validation. Cependant, les simulations possèdent leurs limites et offrent seulement un aperçu du comportement réel.

Dans ce mémoire, l'utilisation d'un prototype de mesure installé sur un bras robotisé permet d'éviter ces problèmes de validation. La centrale inertielle est installée à l'effecteur du manipulateur robotique : l'endroit où l'outil est normalement fixé. Ce manipulateur exécutera avec une grande précision une série de trajectoires programmées et connues qui serviront à valider le système de mesures. Tel que montré à la Figure 5.1, le banc d'essai installé à l'IREQ, est principalement composé d'un capteur inertiel et d'un manipulateur robotique FANUC M10-ia. Il est possible de récupérer en temps réel, et avec précision, la position et l'orientation du robot grâce à une interface haute vitesse (HSI). Cette carte fournit l'orientation et la position de l'effecteur à une fréquence de 20 Hz. Pour sa part, l'information obtenue de la centrale inertielle est cadencée à 150 Hz. Afin d'effectuer un filtrage de Kalman à cette fréquence, il est possible d'interpoler linéairement les états du

robot entre deux mesures. Cette technique permettra de tester un éventail de trajectoires distinctes et reproductibles.

Tableau 5-1 Comparaison des méthodes d'expérimentation

	Avantage	Inconvénient
Simulation	<ul style="list-style-type: none"> -Permet l'étude des propriétés numériques des algorithmes. -Aide à la compréhension théorique 	<ul style="list-style-type: none"> -Ne reproduit pas toutes les conditions expérimentales -N'est pas un système réel
Banc d'essai	<ul style="list-style-type: none"> -Permet d'étudier la précision des trajectoires -Permet de valider une partie de la mise en œuvre. -Utilise une partie des capteurs réels. 	<ul style="list-style-type: none"> -Mouvement d'amplitude limitée -Simulation de certains capteurs
Réel	<ul style="list-style-type: none"> -Conditions expérimentales réalistes. 	<ul style="list-style-type: none"> -Coûteux -Difficile à mettre en œuvre. -Difficulté à connaître la trajectoire réelle.

5.1.1 Avantages du banc d'essai

Le plus grand avantage de cette solution est lié à la reproductibilité des résultats. Contrairement à un sous-marin, un manipulateur robotique, parce qu'ayant une base fixe, est capable d'effectuer une trajectoire avec une précision inférieure au millimètre (à condition d'être bien étalonné) et il reproduit également la même trajectoire à chaque répétition. Les capteurs inertiels pourront alors être soumis à une trajectoire représentant les mouvements réalistes d'un sous-marin d'inspection. De plus, il est aussi possible de faire subir au système des mouvements ou des rotations simples afin de diagnostiquer rapidement les erreurs potentielles. Avec ce banc d'essai, il est facile de modifier un paramètre du système de

navigation et d'observer avec précision son impact sur l'estimation de la position. Contrairement à la simulation, des tests avec des capteurs inertiels réels perturbés par un bruit réaliste pourront être effectués. L'utilisation d'un bras robotisé pour simuler les mouvements du sous-marin offre donc des avantages certains sur les techniques de simulation classique en permettant d'évaluer les systèmes de navigation inertielle dans un environnement beaucoup plus réaliste.

5.1.2 Inconvénients du banc d'essai

L'expérimentation avec une trajectoire effectuée par un robot manipulateur offre divers avantages. Cependant, certains inconvénients doivent être pris en compte. Premièrement, malgré que le robot possède une grande précision lors de l'exécution d'une trajectoire, la portée et les rotations de son effecteur sont limitées. Lorsque le robot suit une trajectoire complexe avec plusieurs rotations dans le même sens, les limites en rotation du robot sont rapidement atteintes. Une trajectoire minimisant ce problème doit donc être choisie. De plus, le robot doit conserver une attitude proche de l'horizontal pour représenter le comportement normal d'un sous-marin. Cette contrainte limite le rayon d'action de l'effecteur, réduisant ainsi l'espace atteignable par l'effecteur. Cette contrainte limite le réalisme du contexte de validation. Il s'agit d'une validation pour la micronavigation puisque les mouvements seront effectués dans un espace très restreint d'autres tests devront être effectués pour s'assurer que les résultats peuvent être extrapolés à grande échelle. Le second inconvénient de l'utilisation d'un robot manipulateur provient de la vibration mécanique des moteurs. Cette vibration entraîne un bruit mécanique perceptible par le système de navigation inertielle. Il est cependant possible de tirer avantage de ce phénomène. Dans un robot d'inspection sous-marin, les moteurs utilisés pour propulser le véhicule sous l'eau induisent également des vibrations comparables à celles présentes sur le banc d'essai. Cette contrainte du système robotique permettra de valider la robustesse du système de navigation face au bruit engendré par les vibrations.

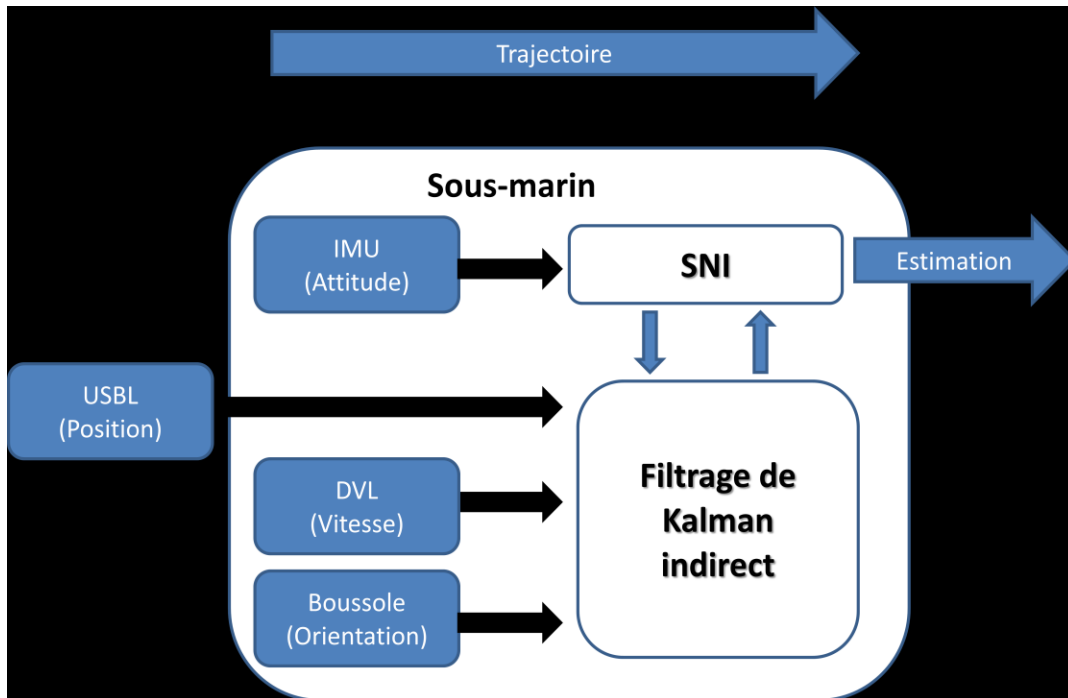


Figure 5.1 Représentation du système réel

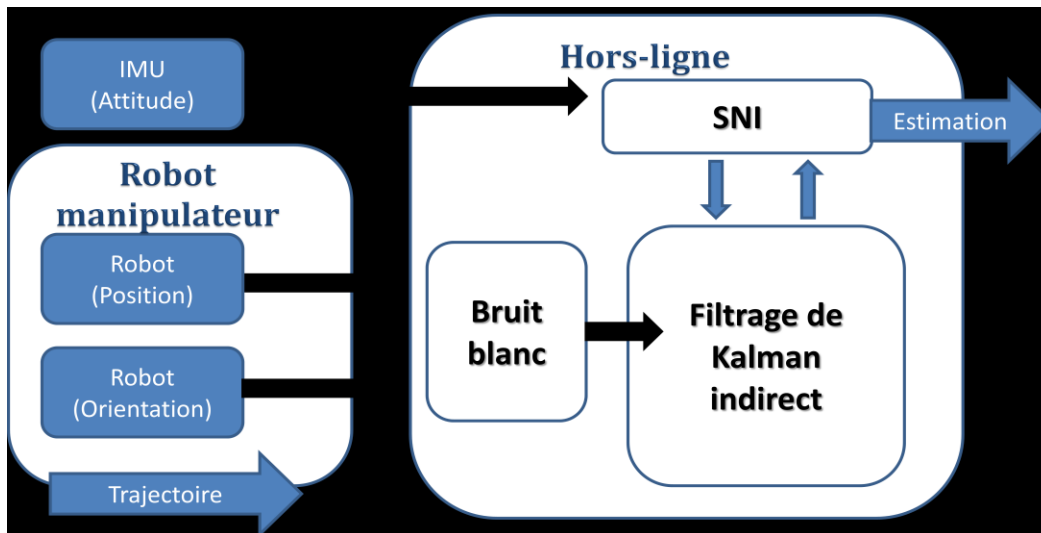


Figure 5.2 Représentation du système simulé à l'aide d'un robot manipulateur

La Figure 5.1 représente un schéma bloc du système réel incluant le sous-marin, le filtrage de Kalman avec une centrale inertielle et les capteurs auxiliaires. La Figure 5.2 représente la structure du banc d'essai utilisé. La centrale inertielle et le robot qui simule le mouvement du sous-marin sont traités hors-ligne.

5.1.3 Repères

Telle qu'illustré par la Figure 5.1, la centrale inertielle est installée à l'envers sur l'effecteur du manipulateur robotique. Ce système nécessite donc quelques changements de repère afin d'être représenté dans les mêmes repères que les équations de navigation présentées plus tôt.

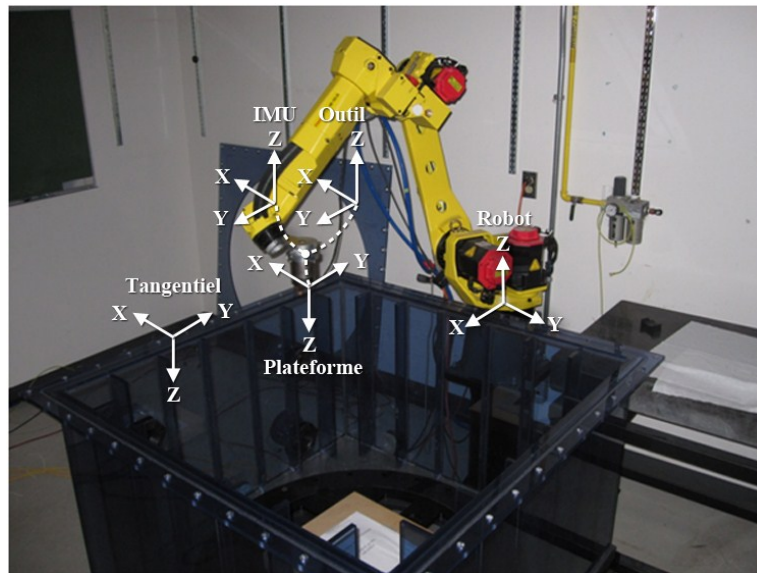


Figure 5.3 Repères sur le banc d'essai

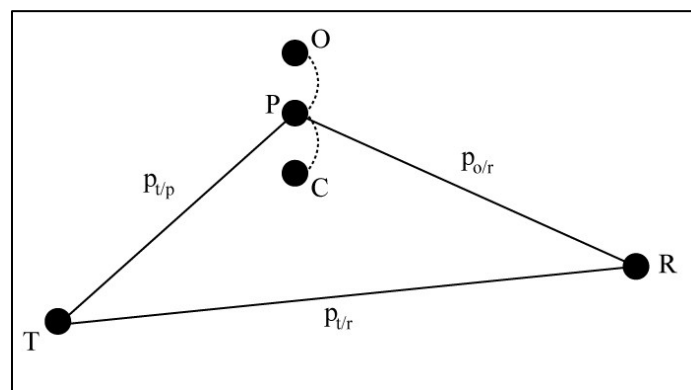


Figure 5.4 Position entre les repères

Les Figure 5.3 et Figure 5.4 montrent les positions relatives du repère de la base du robot (R), du repère tangentiel (T), de la plateforme (P), de l'effecteur (O) et de la centrale inertielle (C). Le repère de la plateforme (P), de l'effecteur (O) et de la centrale inertielle (C) sont à la

même position, seulement leurs orientations sont différentes. Afin que la trajectoire corresponde à l'origine du repère tangentiel, il est nécessaire d'effectuer une translation sur chacune des mesures de positions du robot. La position de la plateforme sera utilisée comme mesure pour le filtrage de Kalman. La variable recherchée est la position de la plateforme par rapport au repère tangentiel, c'est-à-dire $\mathbf{p}_{t/p}^t$. En observant la Figure 5.4, il est possible de décomposer le vecteur recherché en deux vecteurs connus :

$$\mathbf{p}_{t/p}^r = \mathbf{p}_{r/p}^r - \mathbf{p}_{r/t}^r \quad (5.1)$$

La mesure fournie par le robot est la position de la plateforme/effecteur par rapport à sa base; c'est-à-dire $\mathbf{p}_{r/p}^r$. La position $\mathbf{p}_{r/t}^r$ est aussi connue puisque le repère tangentiel est fixé à une position arbitraire par rapport à la base du robot, mais parfaitement connue. Une projection dans le repère tangentiel du vecteur résultant de l'équation (5.1) permet ensuite de trouver la position $\mathbf{p}_{t/p}^t$ utilisable comme mesure pour le système de navigation :

$$\mathbf{p}_{t/p}^t = \mathbf{R}_r^p (\mathbf{p}_{r/p}^r - \mathbf{p}_{r/t}^r) \quad (5.2)$$

Puis, afin d'aligner l'orientation du repère de l'effecteur avec le repère tangentiel, une série de rotations successives permet à l'attitude acquise dans le repère de l'effecteur d'être projetée dans le repère de navigation afin d'être utilisable par le filtre de Kalman. En d'autres mots, l'attitude de la plateforme par rapport au repère tangentiel \mathbf{R}_p^t est la valeur recherchée à partir des mesures d'orientation fournies par le robot. Tel qu'indiqué sur la Figure 5.1 :

$$\mathbf{R}_p^t = \mathbf{R}_r^t \mathbf{R}_o^r \mathbf{R}_p^o \quad (5.3)$$

où

$$\mathbf{R}_r^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{R}_p^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

La matrice de rotation \mathbf{R}_r^t est connue puisqu'elle provient de deux repères fixes : le repère tangentiel et celui de la base du robot. La matrice de rotation \mathbf{R}_p^o est aussi connue puisque le

repère de l'effecteur est fixe par rapport au repère de la plateforme. Finalement, La matrice \mathbf{R}_o^r est construite à partir des mesures d'orientation fournie par le robot.

Les mesures des gyromètres (\mathbf{y}_g) et accéléromètres (\mathbf{y}_a) doivent être projetés dans le repère de la plateforme puisque le repère de la centrale inertielle est en position inverse sur l'effecteur du robot.

$$\mathbf{R}_c^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Les mesures inertielles dans le repère de la plateforme sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_g^p &= \mathbf{R}_c^p (\mathbf{y}_g^c) \\ \mathbf{y}_a^p &= \mathbf{R}_c^p (\mathbf{y}_a^c) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Noter que la précision des paramètres de position et d'orientation des différents repères du prototype est limitée par la précision de l'installation mécanique des différents composants du système. Cependant, et comme montré dans le chapitre des résultats, l'ordre de grandeur de la précision du système de navigation risque peu d'être affecté par la précision mécanique de l'installation.

5.1.4 Synchronisation

Sur le banc d'essai de la Figure 5.1, deux flux de données sont recueillis : soit les mesures du robot et celles de la centrale inertielle. Afin de fusionner correctement ces deux flux, ils doivent être synchronisés. Pour ce faire, au début de chaque séquence de mouvements, le robot effectue une rotation brusque qui est facilement détectable. Avec la détection de cette rotation, le programme d'acquisition synchronise les données du robot avec celles de la centrale inertielle. La séquence d'acquisition est donc réalisée selon les opérations de la Figure 5.5.

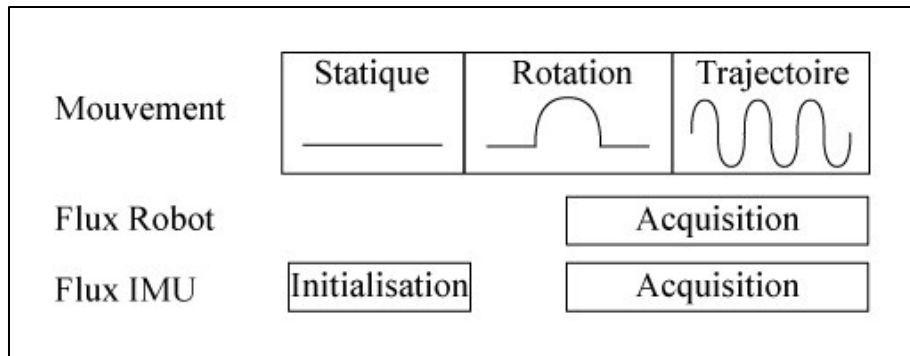


Figure 5.5 Séquence de synchronisation

Les données récoltées durant l'exécution de la trajectoire sont par la suite combinées et traitées par l'algorithme du système de navigation inertielle. La fusion par le filtrage de Kalman est ensuite calculée. Les données sont traitées hors ligne par un programme Matlab qui convertit les unités ainsi que les changements de repères. Ce même programme considère les données reçues par l'interface haute vitesse du robot comme les mesures externes du filtre de Kalman. Les données sont présentées à intervalle constant à l'algorithme de navigation programmé en langage Matlab.

5.1.5 État du robot

Le contrôleur du robot fournit un vecteur de pose \mathbf{x}_{robot} $[1 \times 6]$ de dimension qui inclue la position et l'orientation de l'effecteur. Les trois premiers termes représentent les composantes x , y et z de la position de l'effecteur par rapport à la base du robot, tandis que les trois derniers termes représentent respectivement les rotations autour des axes x , y et z du repère de base du robot.

5.2 Trajectoire

Afin d'exciter le système de navigation inertielle, deux trajectoires ont été choisies.

5.2.1 Trajectoire 1 : «*Lawnmower*»

La centrale inertielle a été soumise à une trajectoire de type «*Lawnmower*» qui consiste à balayer une surface. Il s'agit d'une expérimentation simple où le véhicule ne fait qu'avancer et tourner sur un plan modifiant ainsi seulement son lacet. La position sur l'axe z reste constante. La position demeure constante lorsque l'orientation varie et vise et versa. Donc, à chaque changement de direction de la trajectoire, la vitesse linéaire est ponctuellement nulle le temps que l'orientation soit ajustée pour rendre la plateforme tangente à la nouvelle direction du parcours. Cette trajectoire permet d'étudier convenablement le système de navigation inertielle en mouvement combinée avec une fusion par filtrage de Kalman. La Figure 5.6 montre cette trajectoire.

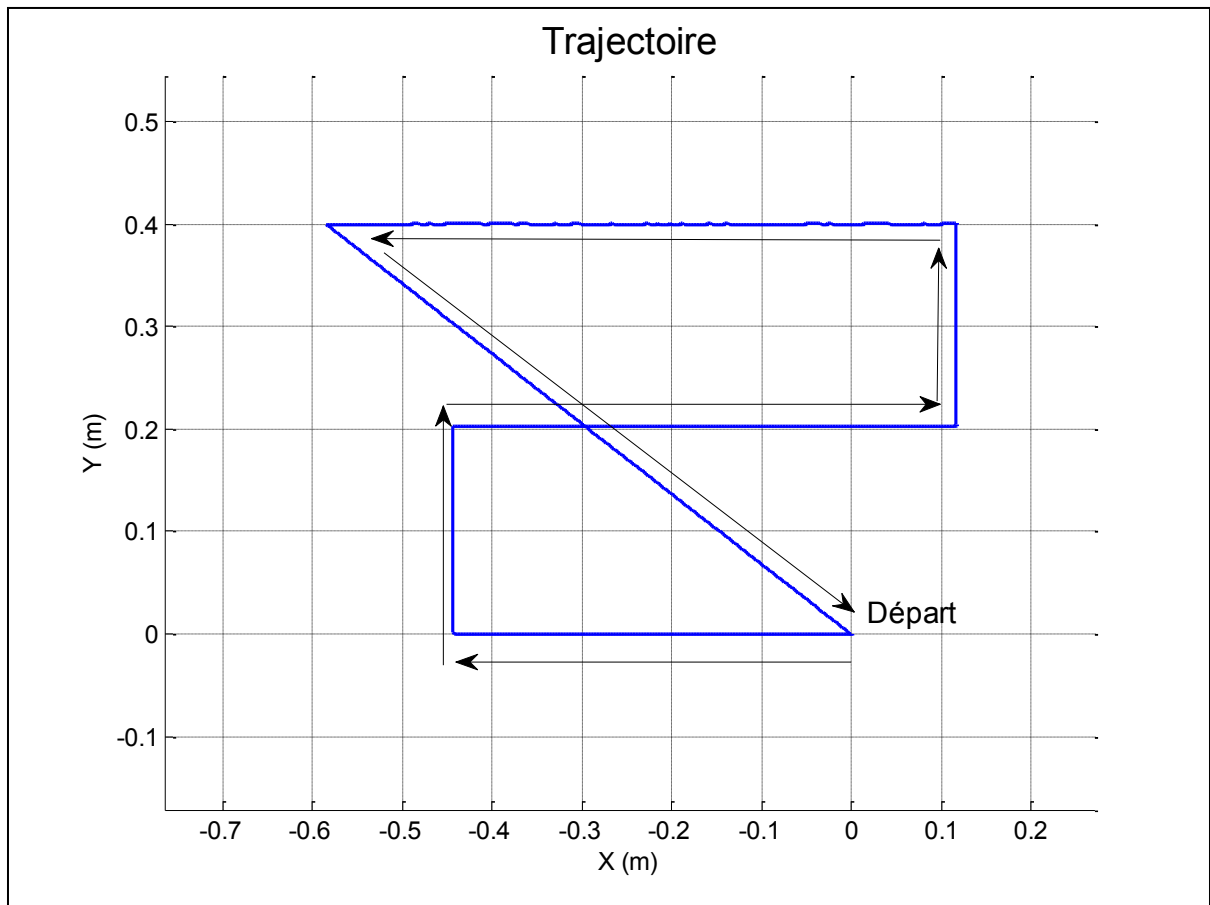


Figure 5.6 Trajectoire «*Lawnmower*»

5.2.2 Trajectoire 2 : Sous-marin

La seconde trajectoire est beaucoup plus complexe. En effet, cette trajectoire a pour but de soumettre le système de navigation à un déplacement similaire à la trajectoire subite par un vrai robot d'inspection de barrage. La Figure 5.7 représente une vue en trois dimensions de la trajectoire. Cette trajectoire simule un sous-marin d'inspection qui s'approche d'une paroi et effectue un balayage visuel suivi d'un déplacement latéral, avant de retourner à sa position de départ. Durant ce mouvement, de légères oscillations au niveau du roulis et du tangage sont présentes pour simuler le ballotement subi par un corps flottant dans l'eau. Cette trajectoire réaliste permettra d'évaluer les performances du système de navigation aidé par des mesures absolues dans une situation réaliste d'un essai en chantier tout en restant dans un laboratoire.

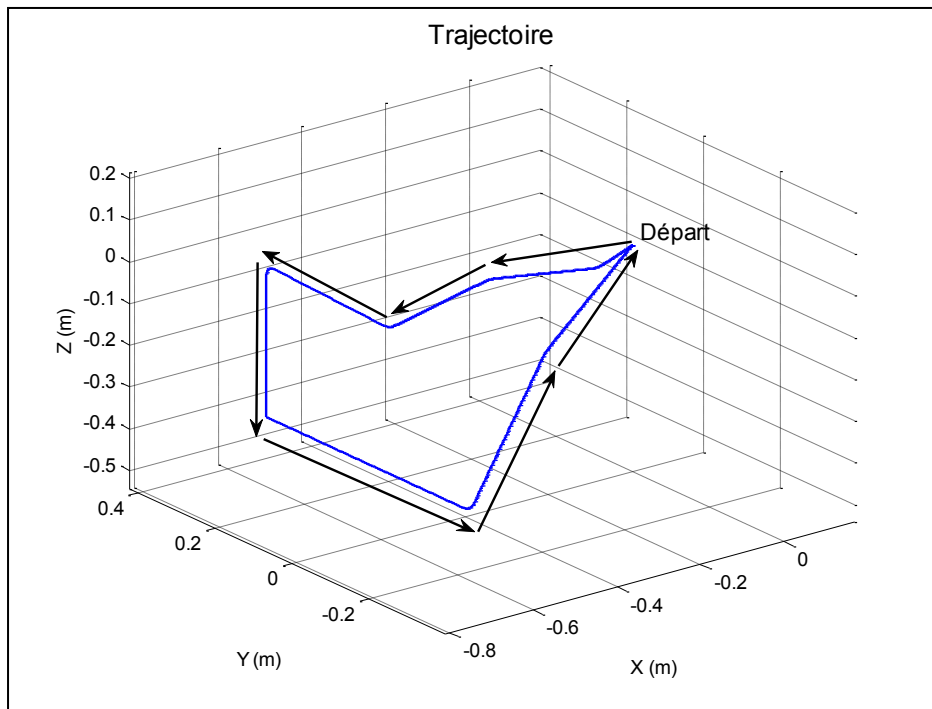


Figure 5.7 Trajectoire : Sous-marin

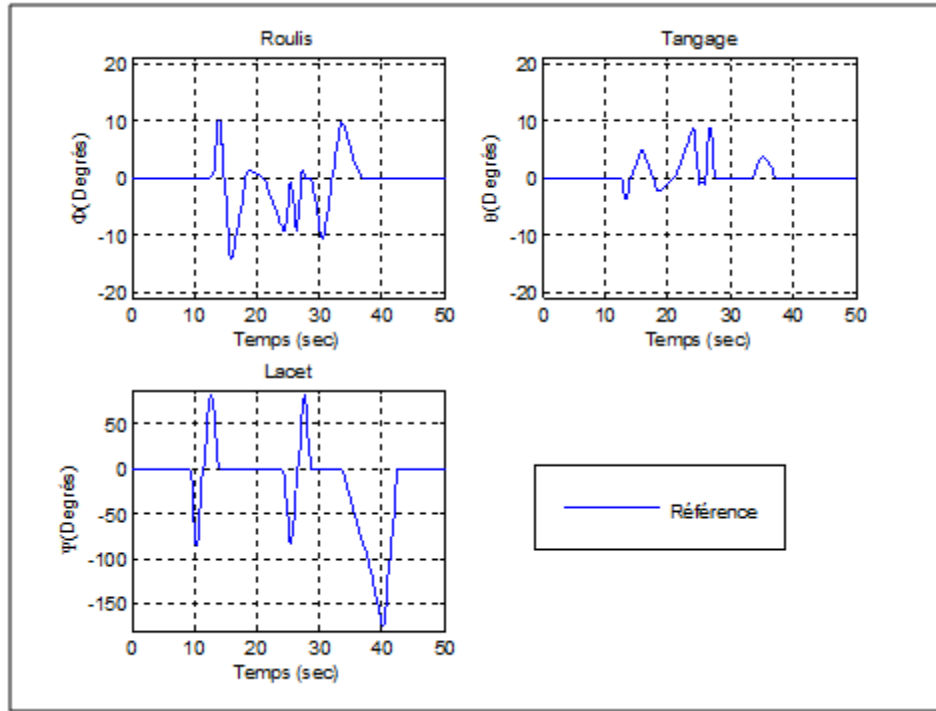


Figure 5.8 Orientation trajectoire : Sous-marin

5.3 Simulation des capteurs externes

5.3.1 Simulation de l'USBL

L'USBL (« *Ultra-short baseline* ») est un système de mesures de position absolue pouvant être utilisé avec un sous-marin. Ce capteur mesure l'orientation et la distance entre une balise et un récepteur installé sur le sous-marin. Les positions obtenues du robot seront utilisées pour simuler le capteur USBL. Afin que les mesures simulées soient comparables aux mesures d'un vrai USBL, un bruit blanc ayant la même variance que celle de l'USBL utilisé avec le sous-marin de l'IREQ sera ajouté aux positions fournies par le robot manipulateur. Ainsi,

$$\mathbf{y}_{usbl} = \mathbf{R}_r^p (\mathbf{p}_{r/p}^r - \mathbf{p}_{r/t}^r) + \boldsymbol{\eta}_{usbl} \quad (5.8)$$

où $\boldsymbol{\eta}_{usbl}$ est le bruit sur la position, modéliser par une variable aléatoire de variance σ_{usbl}^2 répondant à une distribution normale de moyenne nulle $N(0, \sigma_{usbl}^2 \mathbf{I})$.

5.3.2 Simulation de l'attitude

Le capteur d'attitude est un AHRS (« *Attitude and Heading Reference System* »). Dans notre cas, les angles d'Euler sont utilisés pour représenter une orientation à partir des informations du robot manipulateur. Un bruit blanc est ajouté aux mesures du robot afin de rendre la simulation du capteur plus réaliste.

$$\mathbf{y}_\theta = \mathbf{R}_r^t \mathbf{R}_o^r(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_p^o + \boldsymbol{\eta}_\theta \quad (5.9)$$

où $\mathbf{R}_o^r(\boldsymbol{\theta})$ représente la matrice de rotation construite à partir des rotations autour des axes x , y et z du repère de base du robot. Le bruit $\boldsymbol{\eta}_\theta$ possède une variance modélisable puisqu'il est représenté par une distribution normale $N(0, \sigma_\theta^2 \mathbf{I})$.

5.3.3 Simulation du DVL

Le DVL (« *Doppler velocity log* ») est un capteur qui mesure la vitesse sous l'eau en se basant sur l'effet Doppler à partir de quatre faisceaux acoustiques. Les positions obtenues à partir du robot seront dérivées dans le temps pour simuler une mesure de vitesse produite par un DVL. Afin que les mesures simulées soient semblables à la mesure d'un vrai DVL, un bruit blanc ayant la même variance que celle du DVL utilisé avec le sous-marin de l'IREQ sera ajouté aux vitesses générées à partir du robot :

$$y_{DVL} = \mathbf{R}_t^p \dot{\mathbf{p}}_{t/p}^t + \eta_{DVL} \quad (5.10)$$

où η_{DVL} est une variable aléatoire de variance σ_{DVL}^2 répondant à une distribution normale $N(0, \sigma_{DVL}^2 \mathbf{I})$. La variance du bruit sera modifiée durant les tests afin de vérifier l'impact de l'utilisation de capteurs moins précis.

5.4 Répétabilité

L'utilisation d'un manipulateur robotique permet de maintenir une bonne répétabilité. Afin de s'assurer que la trajectoire est exécutée chaque fois avec une grande précision, un test a été effectué. Ce test consiste à imposer deux fois la même trajectoire de type « *Lawnmower* » et d'observer les différences dans les positions mesurées par le robot.

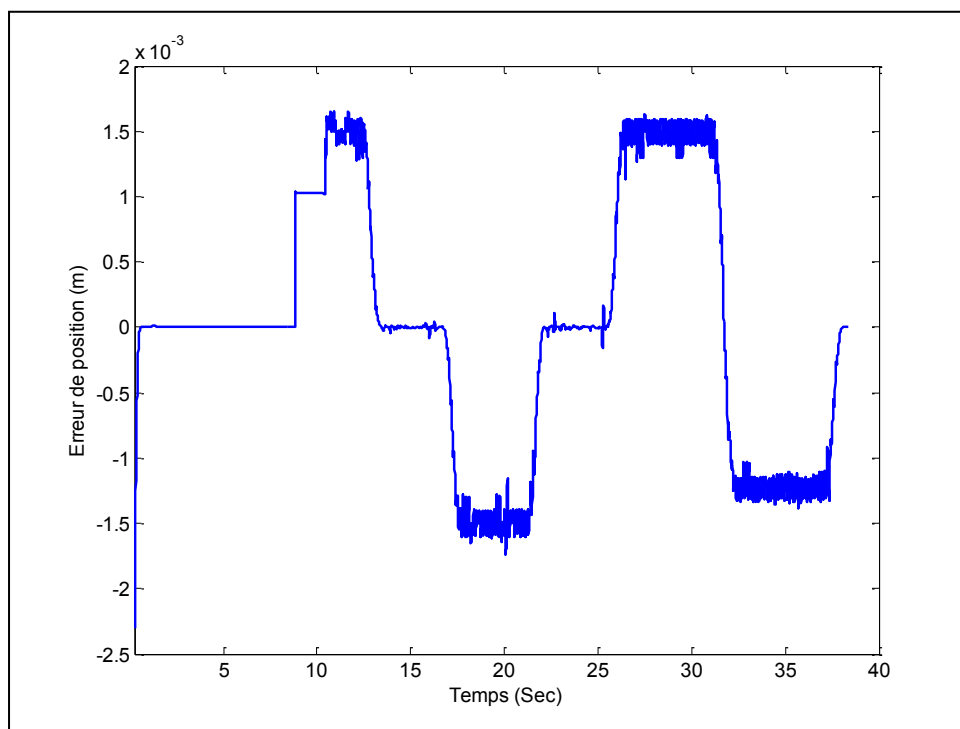


Figure 5.9 Reproductibilité

La Figure 5.9 présente l'erreur entre les trajectoires sur l'axe x pour les deux essais. Les résultats démontrent la capacité du robot à reproduire plusieurs fois la même trajectoire. Les trajectoires sont pratiquement identiques, l'erreur entre les deux trajectoires a atteint au maximum 1,5 mm.

5.5 Conclusion

Le banc d'essai proposé dans ce chapitre est une solution partielle aux problèmes de validation des performances du système de positionnement d'un sous-marin. Ce système permet de facilement mettre en place différents scénarios de tests afin d'évaluer le SNI et de valider la fusion des capteurs par filtrage de Kalman. Cette méthodologie offre des avantages liés à la grande reproductibilité de la trajectoire ainsi qu'à l'utilisation des vrais capteurs inertiels par rapport aux méthodes de simulation classiques. Ce banc d'essai sera utilisé pour les expérimentations présentées au chapitre 6.

CHAPITRE 6

Expérimentation : Système de navigation inertielle

Dans ce chapitre, une analyse expérimentale du système de navigation inertielle sans aide de capteur absolue sera effectuée. En particulier, une analyse par la variance d'Allan permettra de caractériser le bruit présent sur les capteurs inertiels. Comme il est expliqué au CHAPITRE 3, un système de navigation inertielle est composé d'accéléromètres et de gyromètres. Ces mesures sont transformées au moyen de la série d'équations (3.26) pour calculer la position, la vitesse ainsi que l'attitude du véhicule. Ce système est facilement perturbé par divers phénomènes physiques et par des bruits de différentes natures. Une expérimentation réelle est nécessaire afin de comprendre et réduire les erreurs qui caractérisent ce système. Différentes validations ont été effectuées et seront expliquées dans ce chapitre.

6.1 La variance d'Allan

La variance d'Allan (Allan, 1966) est une méthode servant à caractériser les erreurs stochastiques des centrales inertielles. La méthode est utilisée dans le standard IEEE 952 (IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros, 2006) pour la caractérisation des bruits des gyromètres. Il s'agit mesure de la stabilité en fonction d'une période de temps donnée. Dans un système de navigation inertielle, les signaux provenant des gyromètres doivent être intégrés. Ainsi, les erreurs induites par les biais s'accumulent, créant une dérive. Il est possible de compenser ces biais pour réduire les erreurs. Cependant, l'instabilité du biais a pour effet d'augmenter la dérive angulaire. En fait, le biais est une mesure de la valeur moyenne d'un signal sur une période de temps. Ce biais n'est cependant pas nécessairement constant tout au long de l'échantillonnage. Dans les centrales inertielles, lorsque l'intervalle de temps sur lequel le biais est calculé augmente, le biais entre ces intervalles tend à se stabiliser. Dans ce contexte, un phénomène d'instabilité du biais peut se produire lorsque ces périodes deviennent trop longues (IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic

Gyros, 1998). Le graphique de la variance d'Allan permet justement d'évaluer ce phénomène ainsi que le cheminement aléatoire des gyromètres et des accéléromètres. L'équation de la variance d'Allan est définie par :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2 * (n - 1)} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1}(\tau) - y_i(\tau))^2 \quad (6.1)$$

où τ représente la période de temps sur laquelle la moyenne a été calculée, n représente le nombre d'échantillons de longueur τ et y_i représente la valeur du biais pour l'échantillon. Appliquée aux signaux inertiels, la variance d'Allan représente la stabilité en fréquence du biais.

L'écart type d'Allan est la racine carrée de la variance d'Allan :

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\sigma_y^2(\tau)} \quad (6.2)$$

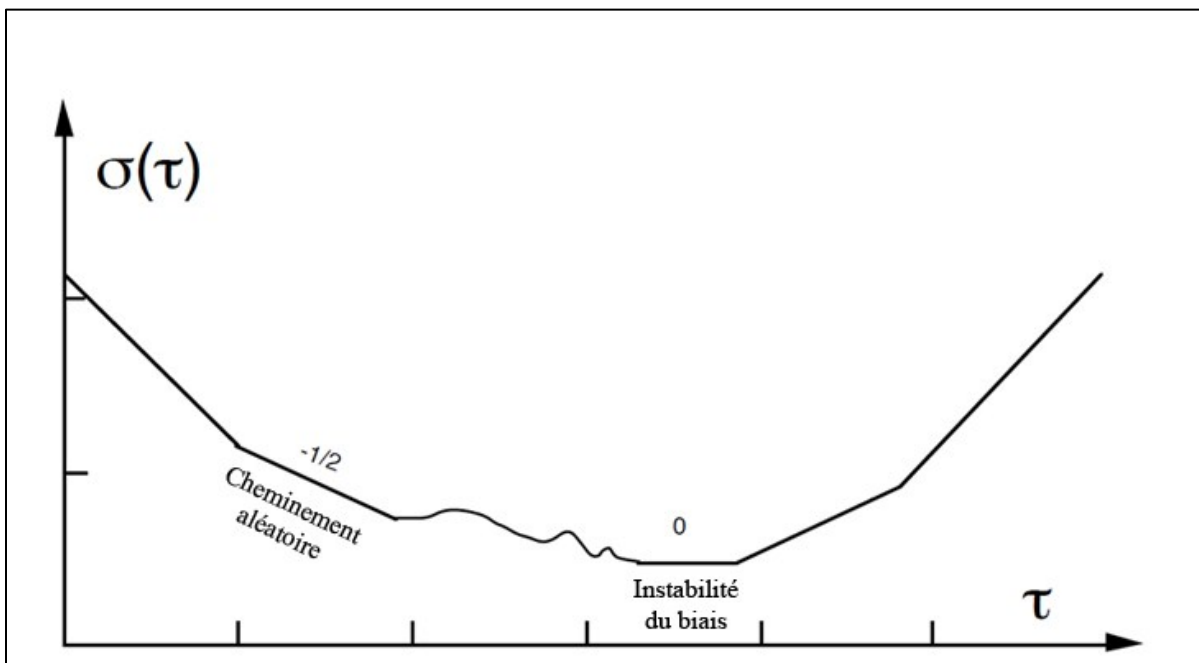


Figure 6.1 Pente du graphique d'Allan
Adaptée de IEEE 952 (1997, p.71)

La Figure 6.1 représente un exemple de graphique de l'écart-type d'Allan avec plusieurs types de bruits distinguables. Dans ce mémoire seulement le cheminement aléatoire et l'instabilité du biais sont discutés. Les fabricants d'unités de mesure inertielle utilisent cette valeur pour caractériser leurs capteurs. Dans la littérature anglophone, le cheminement aléatoire est souvent défini comme «*Angle random walk*» (*ARW*) pour les gyromètres et «*Velocity random walk* » (*VRW*) pour les accéléromètres. Le graphique d'Allan est toujours exprimé sur une échelle logarithmique. Pour effectuer un graphique de l'écart type d'Allan, plusieurs heures de données sont requises.

Un aspect intéressant du graphique d'Allan est que les différents types de bruits apparaissent généralement dans des régions distinctes sur l'axe des abscisses. Cette particularité est engendrée par le fait que chaque type de bruits est gouverné par des caractéristiques fréquentielles uniques. L'analyse de la stabilité fréquentielle par la méthode d'Allan permet d'isoler chaque bruit selon une pente caractéristique à chaque type de bruit. Les bruits sont caractérisables par une pente unique plutôt qu'une amplitude dans un graphique d'écart-type d'Allan. Donc, en estimant l'amplitude de la variance d'Allan dans une région spécifique liée à la pente, il est possible de retrouver la valeur de bruit caractéristique de cette région. Les équations liant la pente à chaque type de bruits sont approfondies dans (El-Sheimy, Haiying et Xiaoji, 2008). Comme indiqué sur la Figure 6.1, la région avec une pente égale à 0,5 peut être associée à la valeur du cheminement aléatoire. Le cheminement aléatoire se retrouve dans cette région puisqu'il est caractérisé par une fréquence élevée liée à la fréquence d'échantillonnage du système (IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros, 1998). Lorsque la pente est égale à zéro, il s'agit de l'instabilité du biais. Ce point est le minimum de la courbe donc le τ le plus stable. Le lien entre le type de bruit et la pente de la courbe d'Allan est résumé à dans le Tableau 6-1.

Tableau 6-1 Pente sur le graphique d'Allan

Type de Bruit	Fonction de la courbe
Instabilité du biais	$y = b$
Cheminement aléatoire	$y = -1/2 \tau + b$

6.1.1 Caractérisation du SDI500

Dans le sous-marin d'inspection de l'IREQ, des capteurs avec la technologie microsystème électromécanique (MEMs) sont utilisés. Il s'agit du capteur SDI-500 de la compagnie Systron dont les caractéristiques techniques sont disponibles dans le Tableau 6-2. Cette technologie permet de produire des capteurs compacts et abordables au détriment de la performance. À cause de leurs piètres performances, les IMUs de type MEMs ne peuvent pas être utilisés en aviation où des gyroscopes à fibres optiques (FOG) sont préférés. Malgré les performances remarquables de ces instruments, il n'est pas rentable de les utiliser sur le véhicule sous-marin de l'IREQ à cause de leurs coûts extrêmement élevés ainsi que de la taille. De plus, ces capteurs occupent un grand volume, ce qui n'est pas nécessairement viable pour un petit sous-marin d'inspection.

Tableau 6-2 Caractéristiques du capteur³

Gyromètres	Unités	Mesure
Biais	deg/h	10
Instabilité du biais	deg/h	1
Cheminement aléatoire	deg/ $\sqrt{\text{hr}}$	0.02
Accéléromètre	Unités	Mesure
Bias	mg	2
Instabilité du biais	μg	200

³ Données provenant des fiches techniques

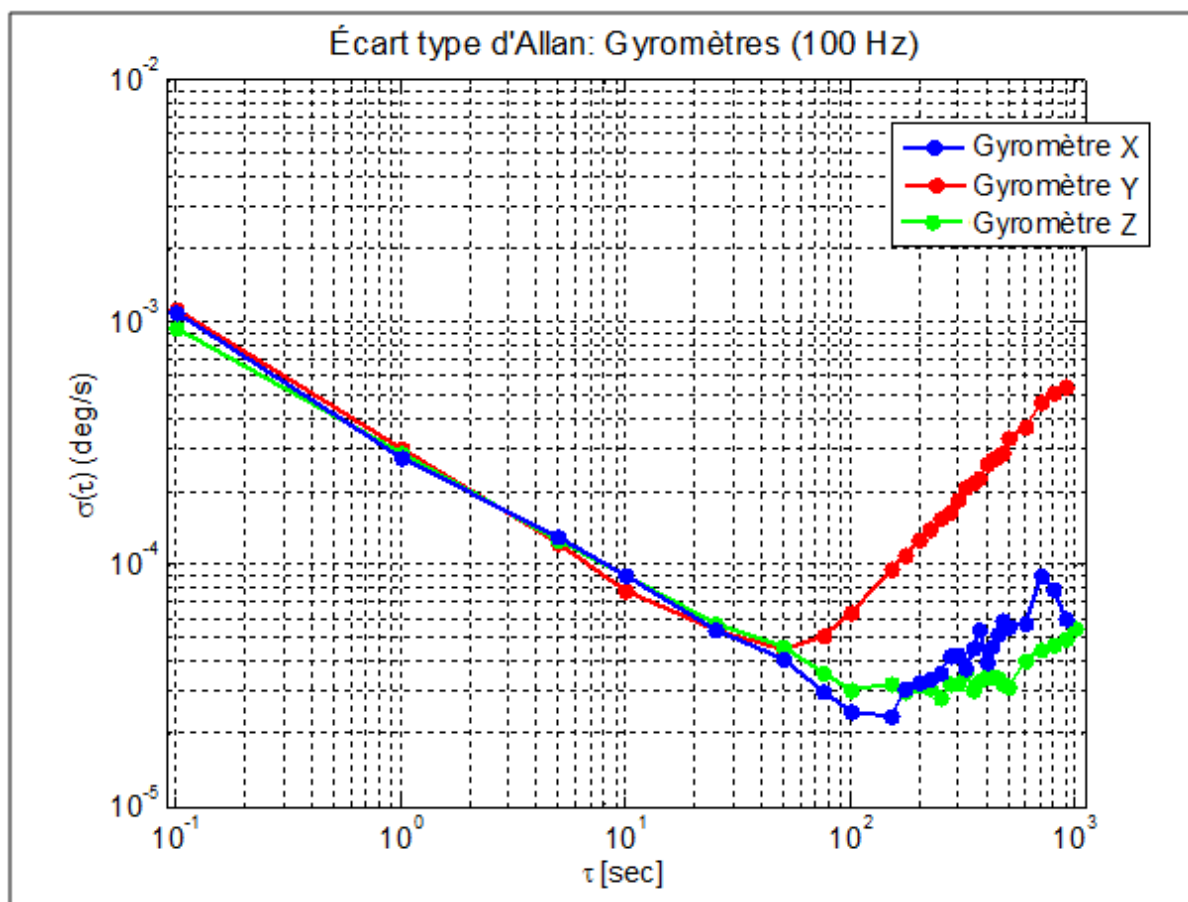


Figure 6.2 Écart type d'Allan : Gyromètres

Les données brutes de la Figure 6.2 et 6.3 proviennent des gyromètres et des accéléromètres sur trois axes échantillonnés à 100 Hz pendant plus de 10000 secondes. Les équations (6.1) et (6.2) appliquées aux données récoltées pendant plusieurs heures donnent un graphique de l'écart-type d'Allan.

Tableau 6-3 Instabilité du biais des gyromètres

Gyromètres	Instabilité du biais ($\frac{rad}{s}$)	Instabilité du biais ($\frac{deg}{s}$)	Instabilité du biais ($\frac{deg}{h}$)
Axe x	$4.33 * 10^{-7}$	$2,48 * 10^{-5}$	0,0892
Axe y	$7.78 * 10^{-7}$	$4,46 * 10^{-5}$	0,16056
Axe z	$5.31 * 10^{-7}$	$3,04 * 10^{-5}$	0,1019

Tableau 6-4 Cheminement aléatoire angulaire

Gyromètres	Cheminement aléatoire angulaire ($\frac{deg}{\sqrt{s}}$)	Cheminement aléatoire angulaire ($\frac{deg}{\sqrt{h}}$)
Axe x	$2,68 * 10^{-4}$	0,01612
Axe y	$4,26 * 10^{-4}$	0,02556
Axe z	$2,83 * 10^{-4}$	0,01703

Comme indiqué par les tableaux Tableau 6-3 et Tableau 6-4 , les gyromètres sont précis puisque l'instabilité du biais est d'environ 0.1 degré/h. De plus, les résultats obtenus par la méthode d'Allan sont similaires aux données fournies par le fabricant. Par exemple, le cheminement aléatoire angulaire (ARW) obtenu se situe autour de $0,01957 \frac{deg}{\sqrt{h}}$ alors que la mesure fournie par les spécifications techniques est de $0.02 \frac{deg}{\sqrt{h}}$, c'est-à-dire une erreur de seulement 1%. Cette mesure peut être qualifiée de bonne pour des capteurs de types MEMS. Cependant, pour la navigation inertielle sans aide, ce capteur n'est pas assez précis (Titterton et Weston, 2004).

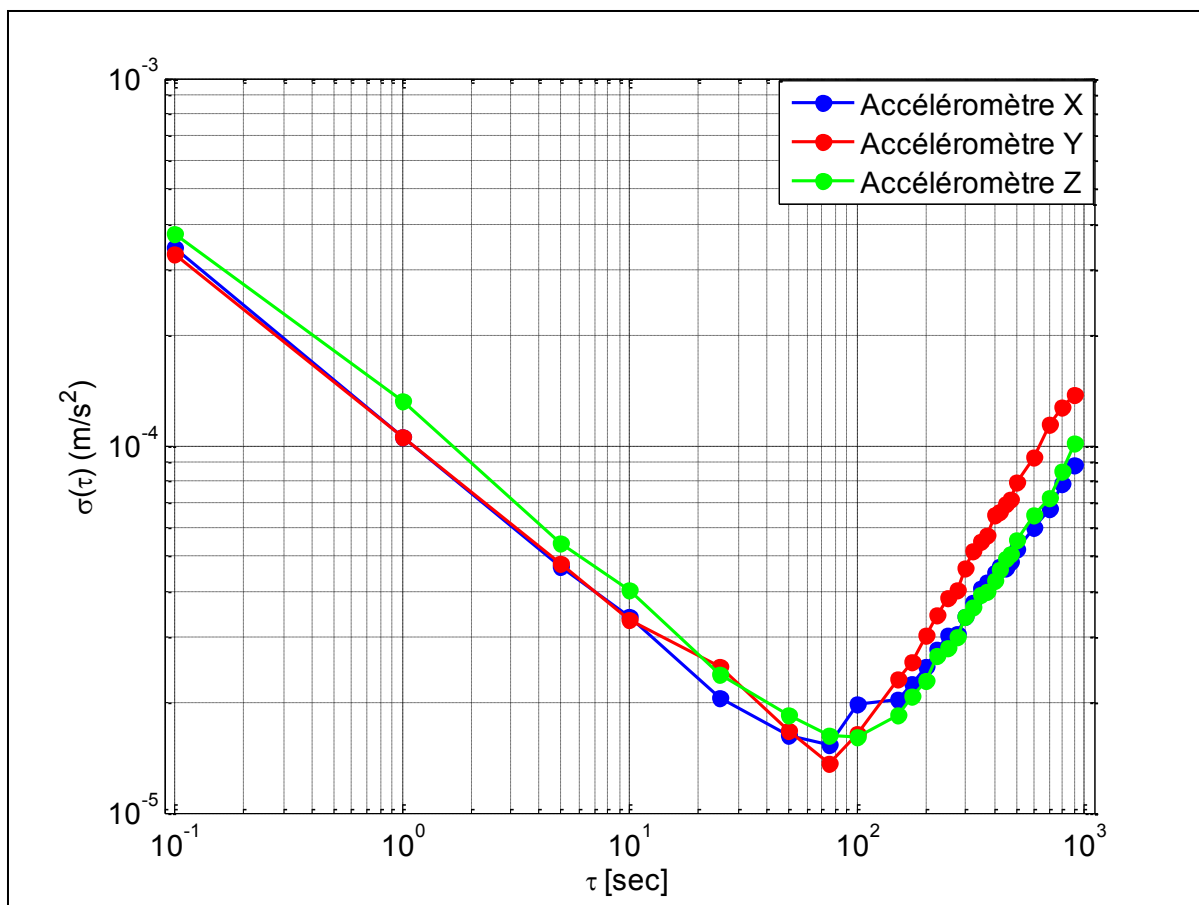


Figure 6.3 Écart type d'Allan : Accéléromètres

Les valeurs d'instabilité du biais et de cheminement aléatoire de vitesse extraites de la Figure 6.3 sont résumées par les Tableau 6-5 et Tableau 6-6.

Tableau 6-5 Instabilité des biais d'accéléromètre

Accéléromètres	Instabilité du biais($\frac{m}{s^2}$)	Instabilité du biais(g)
Axe x	$1,5 * 10^{-4}$	$1,53 * 10^{-5}$
Axe y	$1,33 * 10^{-4}$	$1,36 * 10^{-5}$
Axe z	$1,59 * 10^{-4}$	$1,62 * 10^{-5}$

Tableau 6-6 Cheminement aléatoire de vitesse

Accéléromètres	Cheminement aléatoire de vitesse ($\frac{m}{s^2\sqrt{s}}$)	Cheminement aléatoire de vitesse ($\frac{g}{\sqrt{s}}$)
Axe x	$1,04 * 10^{-3}$	$1,06 * 10^{-4}$
Axe y	$1,03 * 10^{-3}$	$1,05 * 10^{-4}$
Axe z	$1,27 * 10^{-3}$	$1,3 * 10^{-4}$

6.1.2 Catégorisation d'une centrale inertielle

Telles qu'indiquées dans le Tableau 6-7, il existe quatre catégories de performance en navigation inertielle.

Tableau 6-7 Catégorisation des centrales inertielles

Catégorie	Biais accéléromètre (mg)	Cheminement aléatoire gyromètres (deg/\sqrt{h})
Commerciale	100	10
Industrielle	1	1
Tactique	0,1	0,1
Navigation	0,01	0,001

Le SDI500 appartient à la catégorie *Tactique*. Certaines données récoltées offrent de meilleures performances que la valeur du fabricant. Cette différence peut provenir du fait que le fabricant doit offrir la stabilité dans le pire des cas, donc une mesure plus élevée que ce qui a été mesuré en laboratoire. Il est cependant important de spécifier qu'il s'agit de données acquises lorsque la centrale inertielle est statique. Lorsque la centrale inertielle se déplace, des effets de non-linéarité et de gain peuvent amplifier l'instabilité.

6.2 Dérive de la centrale inertielle

Dans un système de navigation inertielle, les erreurs sont caractérisées en termes de dérive. Puisqu'il s'agit d'équation réursive qui se propage dans le temps, une erreur statique se décrit plutôt sous forme d'une dérive. En évaluant la dérive sur l'état de sortie, la performance du système de navigation inertielle s'évalue. Les équations qui suivent démontrent l'impact réel de la dérive sur les performances du système de navigation.

6.2.1 Erreur en position

Afin de trouver une estimation théorique de l'erreur en position pour une centrale inertielle statique, il suffit d'appliquer le double intégral sur l'erreur du système. Une double intégrale est nécessaire puisque l'erreur d'accélération et de vitesse s'accumule. Les erreurs sont créées par les biais, les désalignements et le bruit. Par exemple, pour une période d'intégration T pour laquelle l'erreur e est constante, l'erreur s'accumule comme suit :

$$\int \int e \, dt * dt = 0.5 * e * T^2 \quad (6.3)$$

6.2.2 Désalignement

Les erreurs d'alignements entre l'orientation estimée initiale et l'orientation réelle créent une erreur d'estimation de la position puisque le vecteur de gravité sera mal compensé. L'erreur sera importante puisque le vecteur de gravité possède une plus grande amplitude que les accélérations de déplacement du véhicule. Par exemple, pour un désalignement sur un seul axe combiné à l'accumulation décrite par l'équation (6.3) engendre l'erreur suivante :

$$\text{Erreur en position [m]} = 0.5 * g * \sin(\text{désalignement[deg]}) * t^2 \quad (6.4)$$

Par exemple, après une minute d'intégration pour un désalignement de un degré, l'erreur en position sera de plus de 308 mètres.

6.2.3 Biais sur accéléromètre

Toujours selon l'équation (6.3), un biais constant sur l'accéléromètre crée une erreur en position définie par l'équation suivante :

$$\text{Erreur en position [m]} = 0.5 * \text{bias} \left(\frac{m}{s^2} \right) * t^2 \quad (6.5)$$

Par exemple, après une minute d'intégration pour un biais de 0.02 m/s^2 , l'erreur en position sera de plus de 36 mètres. Cette équation démontre qu'une compensation des biais est essentielle afin de limiter la dérive en position de l'estimation par le système de navigation inertielle.

6.2.4 Biais gyromètre

Le cheminement aléatoire du capteur indique comment l'intégration des biais des gyromètres aura varié après un certain temps. Comme mentionnée plus tôt, une mauvaise estimation de l'attitude entraîne une mauvaise compensation du vecteur de gravité, ce qui amène de graves conséquences. La formule pour trouver l'erreur en position est la même que celle pour un désalignement (équation (6.4)), mais l'erreur sur l'attitude est créée par une dérive des gyromètres. L'étalonnage de la centrale inertielle permet de réduire cette dérive.

6.3 Initialisation de la centrale inertielle

Une initialisation des intégrateurs avec des valeurs précises doit être effectuée. Comme mentionnée dans la section précédente, la précision de cette initialisation est cruciale pour limiter la dérive de l'estimation de position. L'initialisation permet de connaître l'attitude initiale afin de correctement démarrer les intégrateurs des gyromètres. La méthode consiste à utiliser les mesures d'accélération et de vitesse de rotation pour obtenir l'attitude initiale. En

fait, la centrale inertielle est statique lors de l'initialisation. Puisqu'aucun mouvement ne perturbe le véhicule, il est possible de retrouver le biais sur les gyromètres. En effet, lorsque le véhicule est stationnaire, la vitesse de rotation est seulement composée des biais et de la rotation de la Terre. Plus précisément, les biais \mathbf{b}_g s'ajoutent à la mesure des gyromètres $\boldsymbol{\omega}_{i/p}^p$. Aussi, $\boldsymbol{\omega}_{t/p}^p$ est nul puisque le véhicule ne bouge pas. L'équation (3.15) devient alors:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{i/p}^p &= \mathbf{b}_g + \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\omega}_{i/e}^t \\ \mathbf{b}_g &= \boldsymbol{\omega}_{i/p}^p - \mathbf{R}_t^p \boldsymbol{\omega}_{i/e}^t\end{aligned}\tag{6.6}$$

Il suffit de soustraire la rotation de la Terre aux mesures des gyromètres lorsque la centrale inertielle est statique pour retrouver une estimation des biais. Puisque le véhicule ne subit aucune accélération, seul le vecteur de gravité local affecte l'accéléromètre. Ce vecteur pointe toujours vers le centre de la Terre. L'attitude s'extrait à partir des valeurs de l'accéléromètre qui mesure seulement la gravité. La grandeur de ce vecteur se calcule à l'aide de l'équation (2.14) de la section 2.5 (le Modèle de gravité). Lors de cette initialisation, l'angle du lacet est directement obtenu à partir des mesures de la boussole. Des calculs trigonométriques simples permettent de retrouver les deux autres coordonnées de l'attitude du véhicule en fonction de l'orientation du vecteur de gravité :

Tangage:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{atan2}\left(a_x, \sqrt{a_y^2 + a_z^2}\right) \\ \theta &= \text{atan2}(a_x, \tilde{g})\end{aligned}\tag{6.7}$$

Roulis:

$$\phi = \text{atan2}(a_y, a_z)\tag{6.8}$$

Lors des tests, trente secondes d'initialisation offrent une bonne estimation sans être trop longues pour l'opérateur. Les biais du Tableau 6-8 ont été calculés à partir d'une moyenne lorsque les gyromètres étaient aux repos.

Tableau 6-8 Biais présents sur les gyromètres

Axes gyromètres	Biais (rad/sec)
x	$6.7683 * 10^{-6}$
y	$5.7729e * 10^{-5}$
z	$2.1848 * 10^{-6}$

La vitesse de rotation de la Terre dans le repère de la plateforme est calculée avec l'équation (2.1). Le Tableau 6-9 présente la rotation de la Terre exprimée dans un repère tangentiel pour Montréal, avec une latitude de 45,5 degrés.

Tableau 6-9 Rotation de la Terre

Axes	$\omega_{i/e}^p$: Rotation de la Terre (rad/sec)
x	$0.5100 * 10^{-4}$
y	0
z	$-0.5212 * 10^{-4}$

Pour un repère tangentiel, dont l'axe x pointe vers le nord et l'axe y vers l'est, aucune rotation n'est subite par l'axe y puisqu'elle est alignée avec le sens de rotation de la Terre. La rotation se distribue entre l'axe x et z . La rotation de la Terre est une rotation faible, mais perceptible par les gyromètres. Elle est de l'ordre de $7.29 * 10^{-5}$ rad/sec distribuée sur les axes x, y, z du repère de la plateforme selon l'attitude et la position sur Terre. Pour certaines applications, certains concepteurs choisissent de ne pas compenser les biais sur les gyromètres puisque leurs applications sont de courte durée. Les missiles tactiques possédant une durée de vie de quelques minutes en sont un exemple (Titterton et Weston, 2004). Pour notre application, il est important de compenser ce phénomène puisque les inspections se réalisent sur une longue période de temps et une bonne précision est requise.

6.4 Résultat statique

Différentes expériences ont été réalisées sur une centrale inertielle statique. La performance s'évalue par la grandeur de la dérive après une minute. La mécanisation complète (équation (3.26)) est utilisée pour estimer la position. Deux types d'erreurs seront mis en évidence : les erreurs d'alignement et les erreurs causées par les biais présents sur les gyromètres.

6.4.1 Avec initialisation d'alignement et des biais

La première expérimentation consiste à évaluer la dérive du système de navigation inertielle lorsque toutes les routines d'initialisation sont en fonction. Dans cette situation, le système de navigation offrira ses meilleures performances.

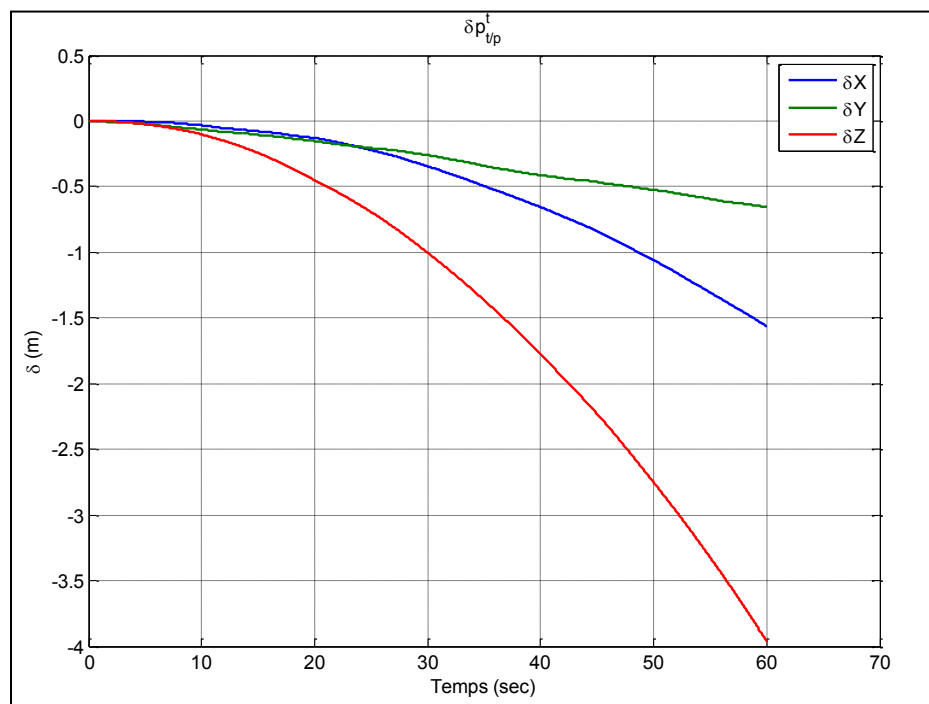


Figure 6.4 Erreur en position

La Figure 6.4 montre la dérive lente de l'estimation de position de la centrale inertielle dans les trois axes. Dans le cas idéal, aucune dérive en position n'aurait été observée. La position serait restée constante à zéro. Cependant, une dérive de quatre mètres, dans le pire des cas,

pour l'axe z a été observée. Il s'agit d'une excellente performance pour un capteur de type MEMS, dont la qualité est jugée faible. Cependant, même avec les calibrations et compensations, les tests démontrent clairement les défaillances d'un système de navigation inertielle sur une longue période de temps.

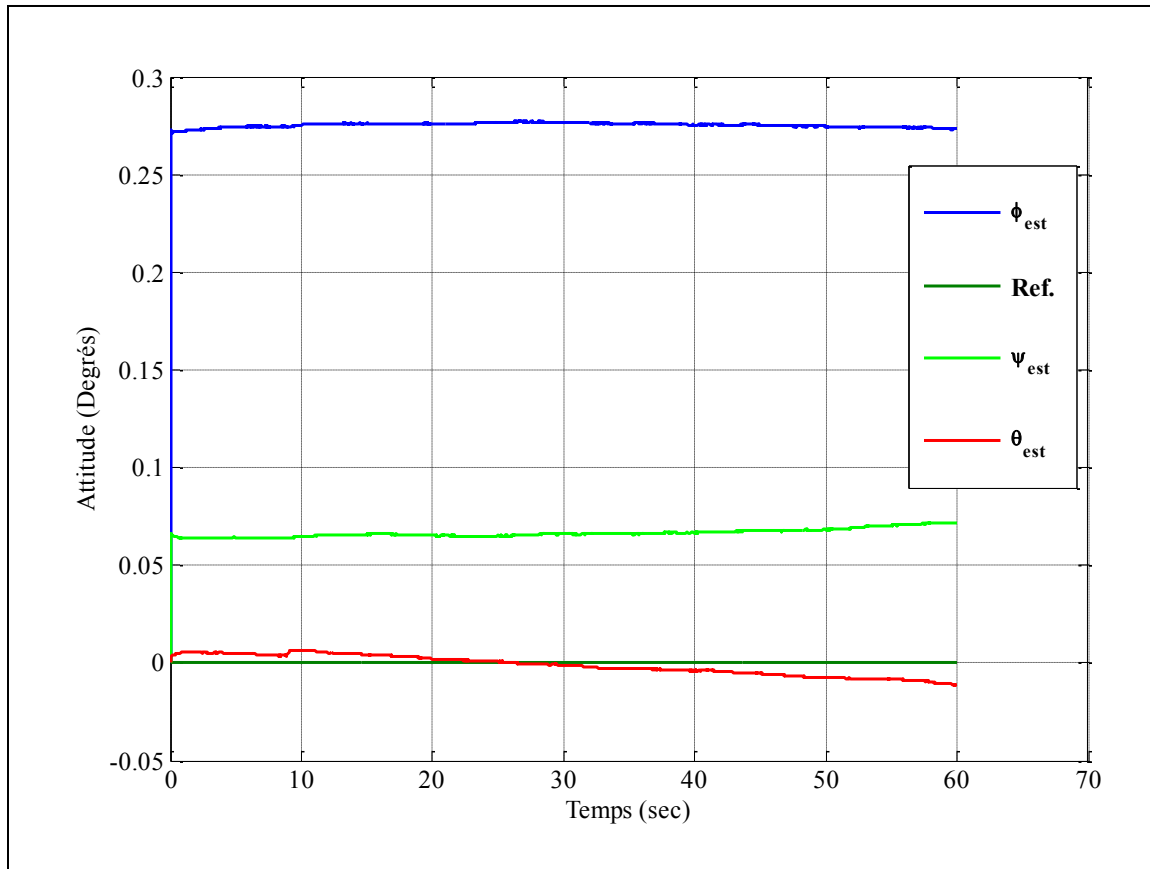


Figure 6.5 Dérive d'orientation

Le graphique de la Figure 6.5 démontre la dérive de l'orientation. L'attitude n'est pas exactement initialisée à zéro, mais respectivement à 0,27 et 0,07 degré au départ pour le roulis et le lacet. Cette valeur ne débute pas à zéro puisque la centrale inertielle n'est pas parfaitement à l'horizontale. La séquence de calibration sert à estimer cette valeur. L'orientation est plus stable que la position pour plusieurs raisons. Premièrement, l'attitude provient directement de l'intégration des gyromètres contrairement à la position où une double intégration est requise. De plus, seulement la rotation de la Terre doit être compensée

dans le cas des gyromètres. Sa grandeur est faible contrairement à la vitesse de rotation subite par le véhicule. Au contraire, pour obtenir la position, le vecteur de gravité doit être compensé. Ce vecteur est plusieurs fois plus important que les accélérations subites par le véhicule. Même si l'attitude semble dériver peu, une petite variation de l'orientation entraînera d'importantes erreurs sur l'estimation de la vitesse et de la position. De plus, dans le cadre d'une inspection sous-marine, il n'est pas toujours possible d'utiliser une boussole. Donc, l'estimation sur le lacet de la plateforme ne pourra être directement stabilisée. Cette mesure devra dériver très lentement afin de pouvoir obtenir une estimation fiable sur toute la durée de l'inspection.

6.4.2 Système de navigation inertielle sans alignement

Cette expérimentation consiste à évaluer la dérive en position du système de navigation inertielle sans routine de calibration d'attitude. L'attitude de départ est considérée comme étant à l'horizontale alors que le capteur n'est pas parfaitement à l'horizontale. Il est important de noter que les biais sur les gyromètres ont été compensés lors de ce test.

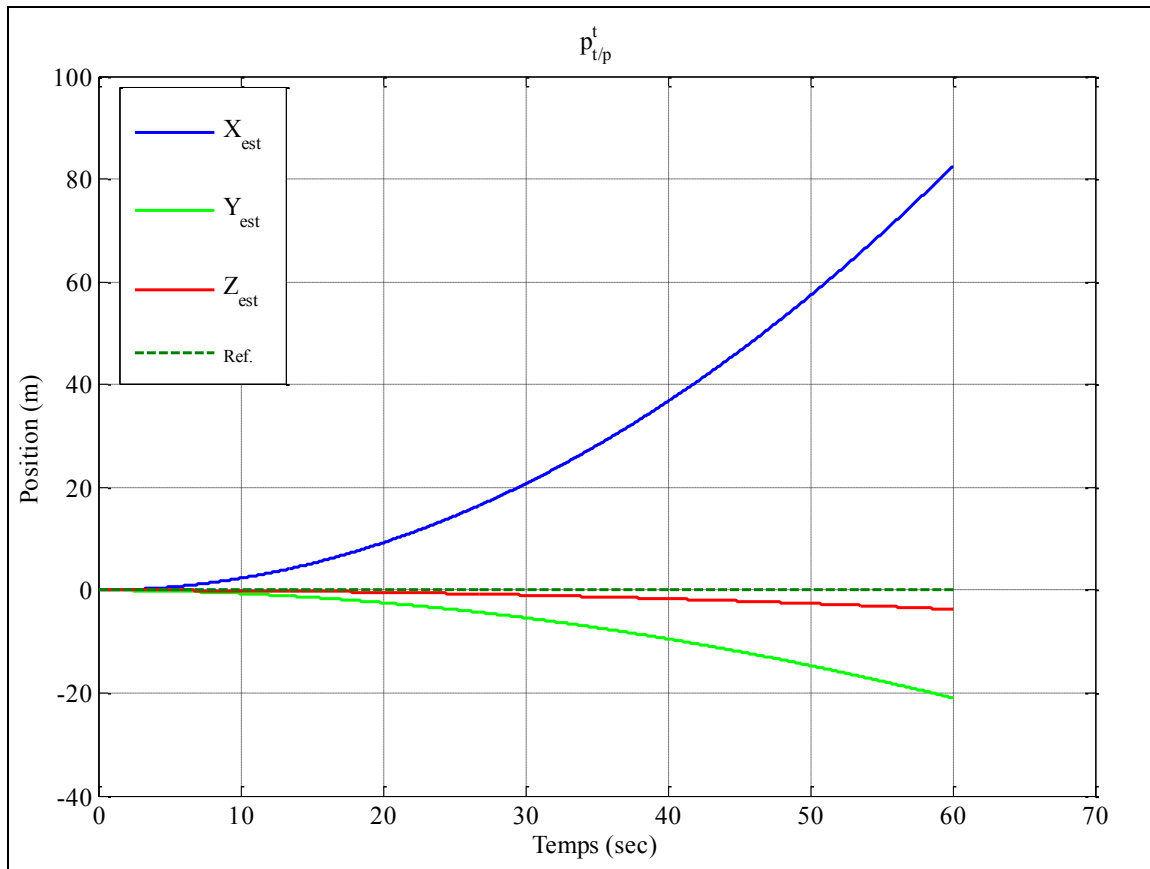


Figure 6.6 Dérive de position sans alignement

Le graphique Figure 6.6 montre l'importance de la séquence d'alignement au départ en présentant l'estimation de la position par rapport à une trajectoire nulle. En effet, pour une erreur minime d'initialisation, la dérive après une minute sur les axes x , y et z est respectivement de 82, 21 et 7 mètres. Les contre-performances de ce test prouvent l'importance de la séquence d'alignement puisque la dérive est vingt fois supérieure au cas calibré. Cette grande dérive limite significativement le temps d'utilisation d'un système de navigation sans assistance.

Le prochain test (Figure 6.7) consiste à imposer un désalignement d'un degré et à observer la dérive du système, pour ensuite faire une comparaison avec le résultat théorique (équation (6.4)) de la dérive causée par un désalignement.

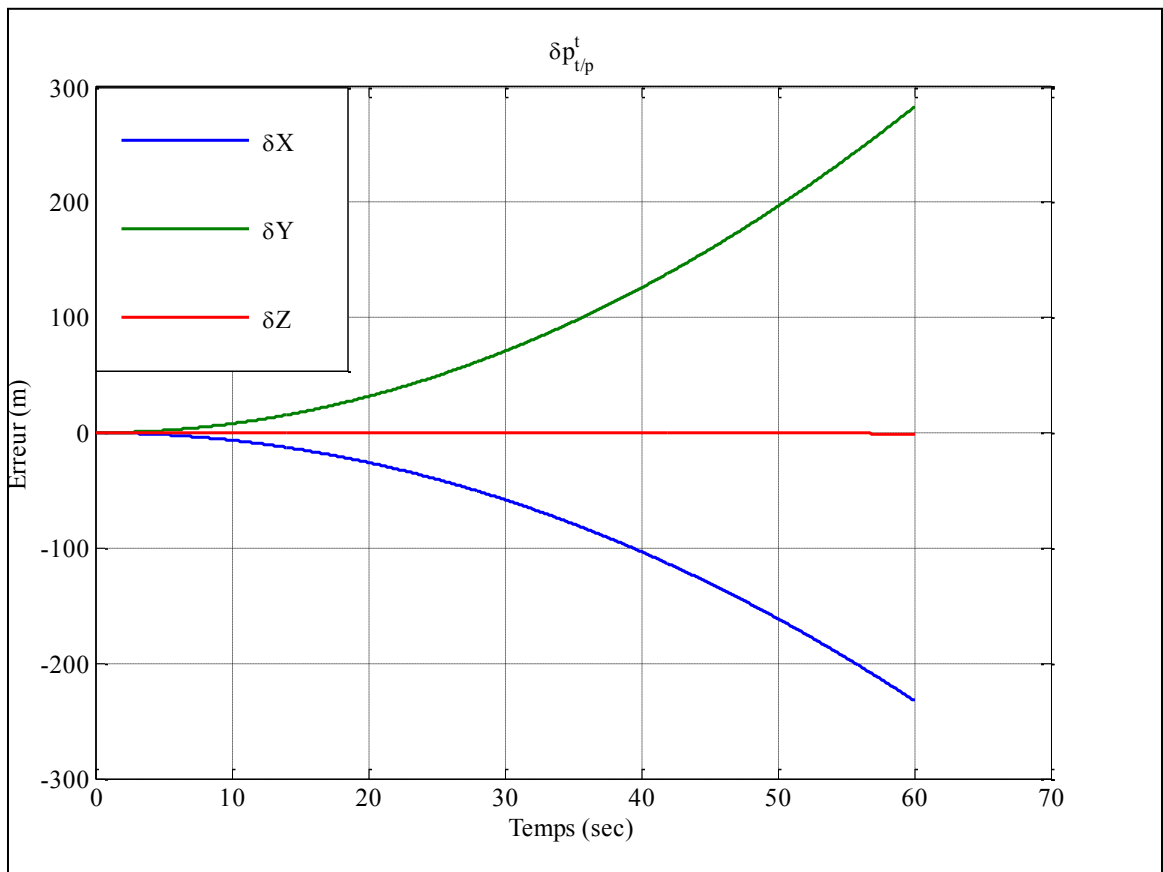


Figure 6.7 Erreur sur le désalignement d'un degré

Selon l'équation(6.4), l'erreur sur l'estimation de la position se calcule comme suit :

$$0.5 * 9,81 * \sin(1[deg]) * 60^2 = 308 \text{ mètres}$$

Sur la Figure 6.7, la dérive sur l'axe des x atteint environ 282 mètres. L'équation fournit donc une bonne estimation de la dérive en position du système de navigation inertielle. Cependant, plusieurs autres facteurs que les erreurs d'alignement influencent la dérive.

6.4.3 Système de navigation inertielle sans compensation des biais

Cette expérimentation consiste à évaluer la dérive du système de navigation inertielle sans aucune routine de compensation des biais des gyromètres. Il est important de noter que l'attitude du capteur a été initialisée donc les erreurs d'alignement sont minimales lors de ce test.

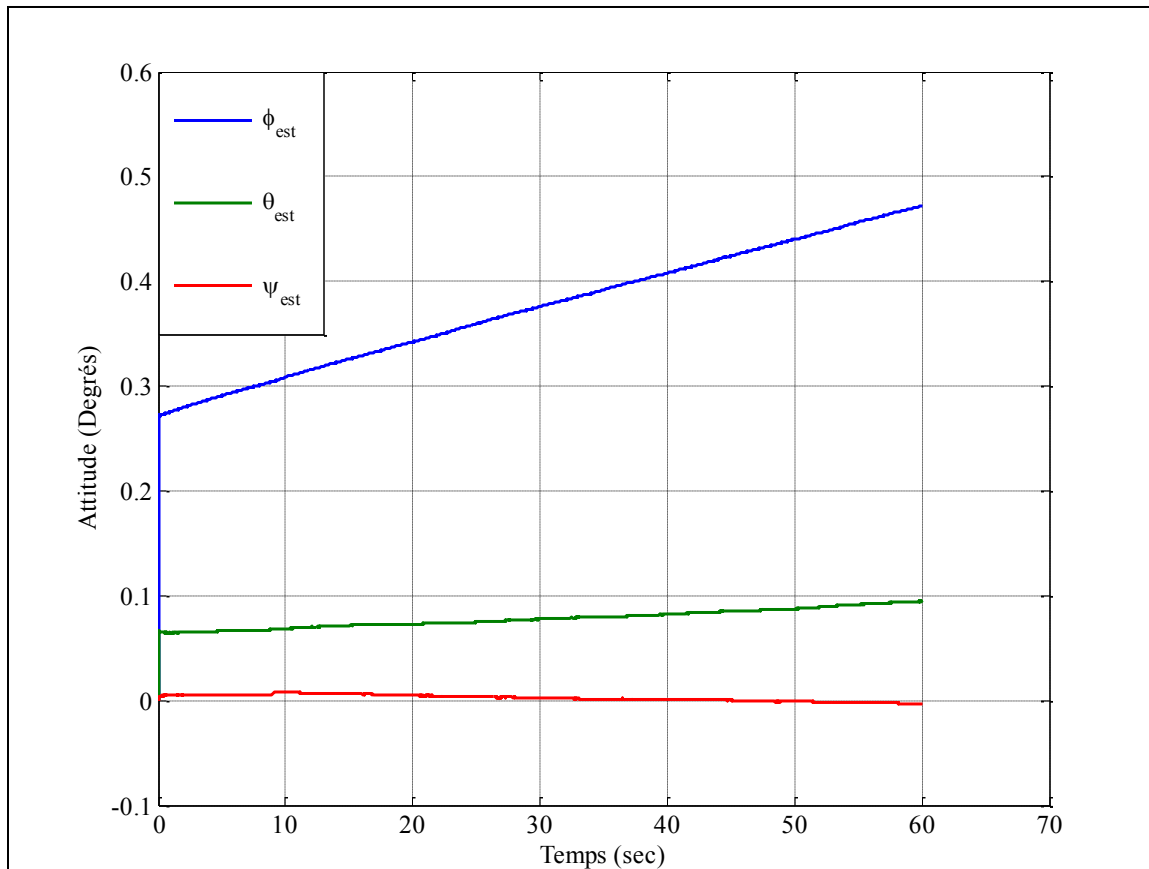


Figure 6.8 Dérive d'attitude sans la compensation des biais

Les biais, un décalage constant, sont présents sur les mesures des gyromètres. Ils sont constamment intégrés créant une erreur croissante sur l'estimation de l'angle. Lors de l'expérimentation du système de navigation inertielle, l'estimation angulaire a dérivé nettement plus lorsque les biais n'étaient pas compensés (Figure 6.8). En effet, l'amplitude de la dérive sur l'attitude est de 0,20 degré pour le tangage; 0,03 degré pour le roulis et 0,01 degré pour le lacet. La comparaison entre la dérive des Figure 6.5 et Figure 6.8 montre que la

compensation aide à réduire significativement la dérive sur tous les axes. Cette amélioration permet d'obtenir des gains considérables au niveau de l'estimation de la position. Ce test permet de conclure que si les biais ne sont pas compensés, l'erreur angulaire affectera significativement l'estimation de la position également.

La Figure 6.9 permet de mettre en évidence les différences entre un système de navigation complètement calibré et un système non calibré. L'estimation de la position sur l'axe des x en fonction du temps est présentée (Figure 6.9) afin d'apprécier cette différence.

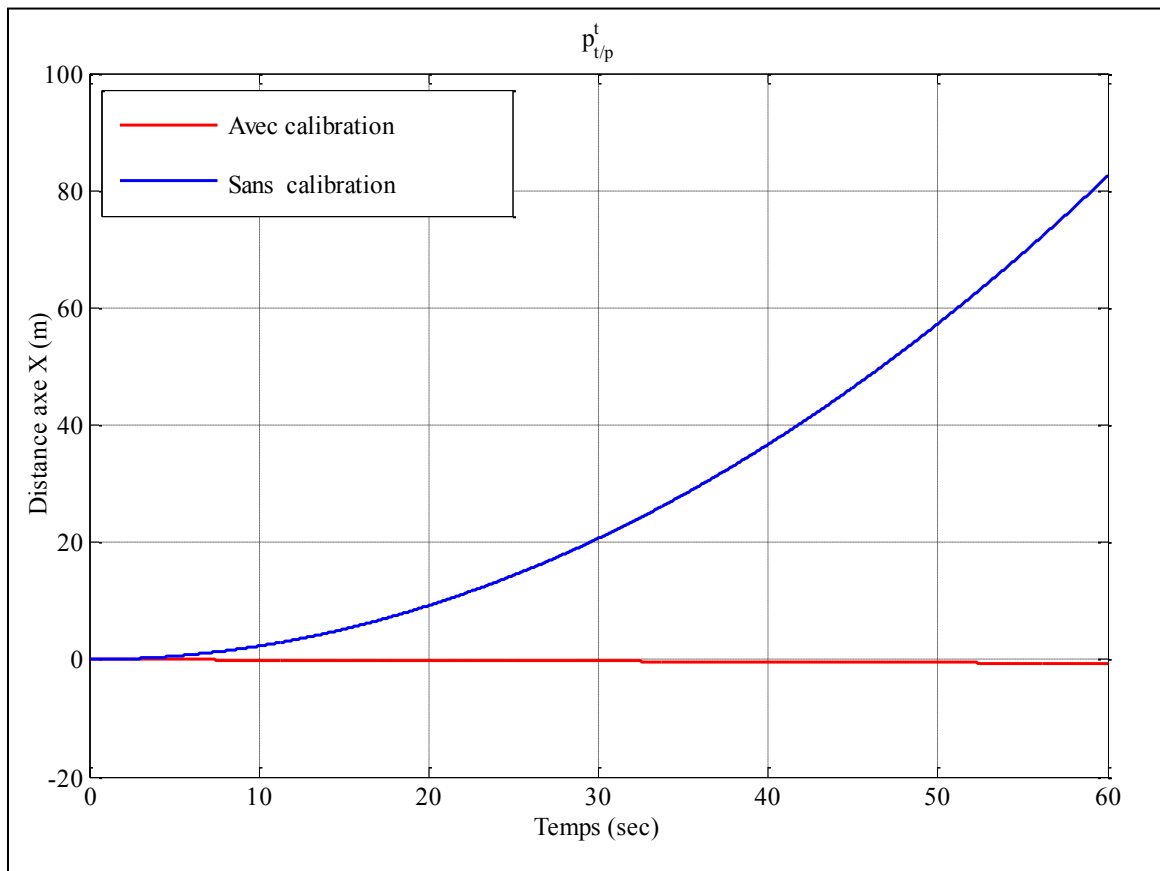


Figure 6.9 Comparaison de la dérive avec et sans calibration

Le Tableau 6-10 permet de comparer la performance de la calibration après une minute d'estimation de la position.

Tableau 6-10 Comparaison de la dérive selon la calibration

Erreur de trajectoire	Erreur avec calibration (m)	Erreur sans calibration (m)
Axe x	-1,5	85
Axe y	-0,65	-20,9
Axe z	-3,96	-3,71

6.4.4 Caractéristique de la dérive

Selon la Figure 6.6, l'erreur en position augmente exponentiellement. Ce comportement prévisible causé par la double intégration confirme les résultats théoriques de la section sur la dérive d'une centrale inertielle. En effet, l'erreur dépend du carré du temps ce qui crée la forme exponentielle.

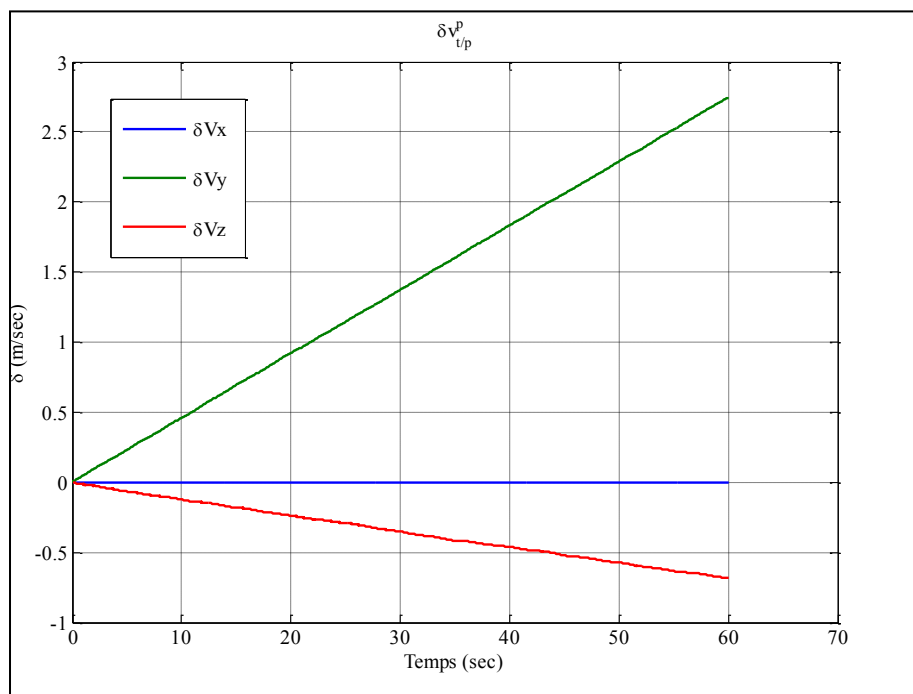


Figure 6.10 Dérive de la vitesse

La même logique s'applique pour la vitesse qui dérive linéairement puisqu'elle est affectée par seulement une intégration. Ces résultats sont confirmés par la Figure 6.10 qui exprime l'erreur de vitesse en fonction du temps.

6.5 Test dynamique

Le système de navigation inertielle est soumis à une trajectoire de type «*Lawnmower*» sur le banc d'essai décrit dans le CHAPITRE 5. Le principal axe sollicité lors de l'exécution de cette trajectoire est l'axe des x . Pour cette raison, l'étude de la dérive portera principalement sur cet axe.

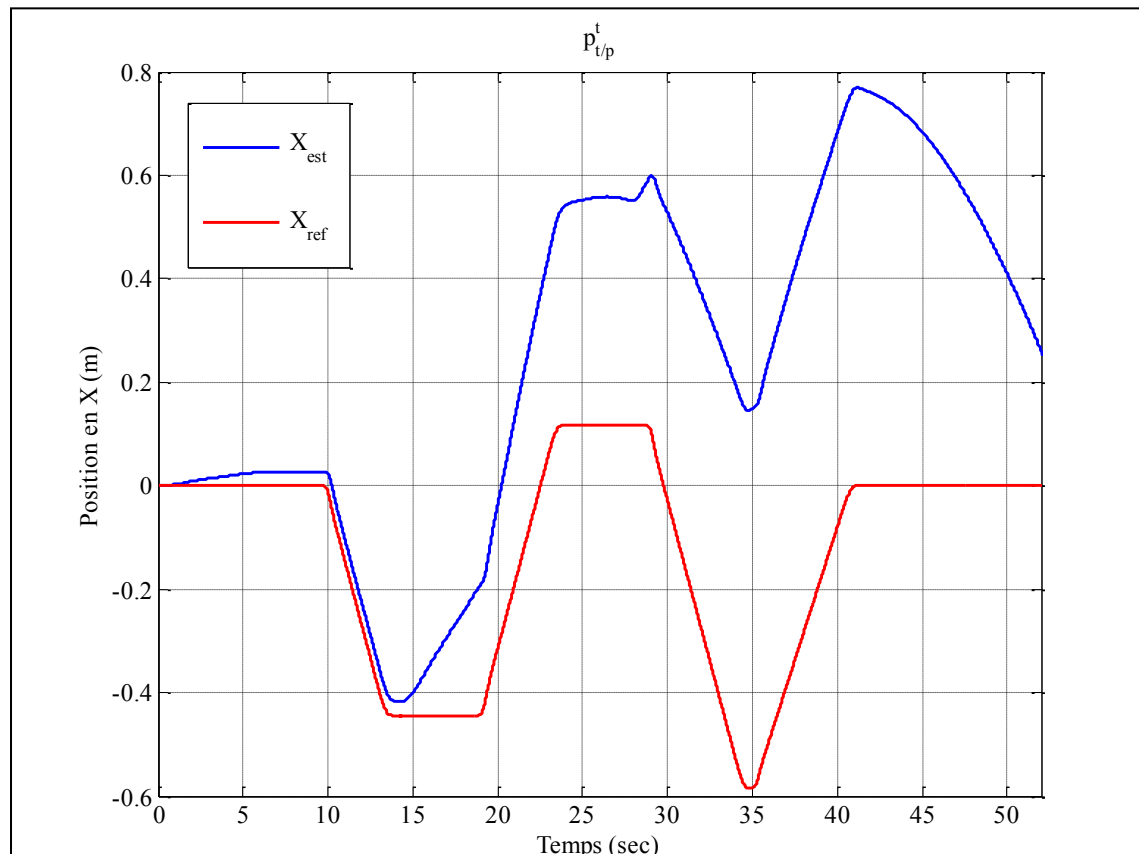


Figure 6.11 Dérive lors d'une trajectoire dynamique

La Figure 6.11 démontre que l'estimation de la position semble suivre l'allure de la trajectoire de référence, mais elle s'en éloigne de plus en plus à cause de la dérive. De plus,

le comportement exponentiel se retrouve encore une fois dans cette figure, car le début de la trajectoire dérive peu par rapport à la fin. Une dérive totale de 0,2 mètre est observable en dynamique alors qu'au niveau de la dérive statique sur l'axe x , elle a atteint une amplitude de 1,5 mètre.

L'erreur de position lorsque la trajectoire est complétée est plus faible qu'une dérive statique. La performance de l'estimation de la position semble meilleure en dynamique, cependant, ce n'est pas le cas. Plusieurs raisons expliquent ce phénomène. Prenons par exemple, la tranche de temps entre 10 et 20 secondes. La position est alors constante alors que la position estimée augmente. La dérive est donc positive. Par rapport à la tranche de temps entre 40 et 50 secondes, l'estimation de la position diminue alors qu'elle devrait rester constante. La dérive est donc négative. Il est important de noter qu'entre ces deux instants, l'orientation a changé. Lorsque l'orientation du véhicule varie, l'effet des biais sur le système varie aussi. Malgré ce comportement, l'estimation globale du système a tendance à dériver positivement. Il devient donc difficile d'analyser l'effet de la dérive contrairement au cas statique. Certaines trajectoires réduiront la dérive alors que d'autres l'augmenteront.

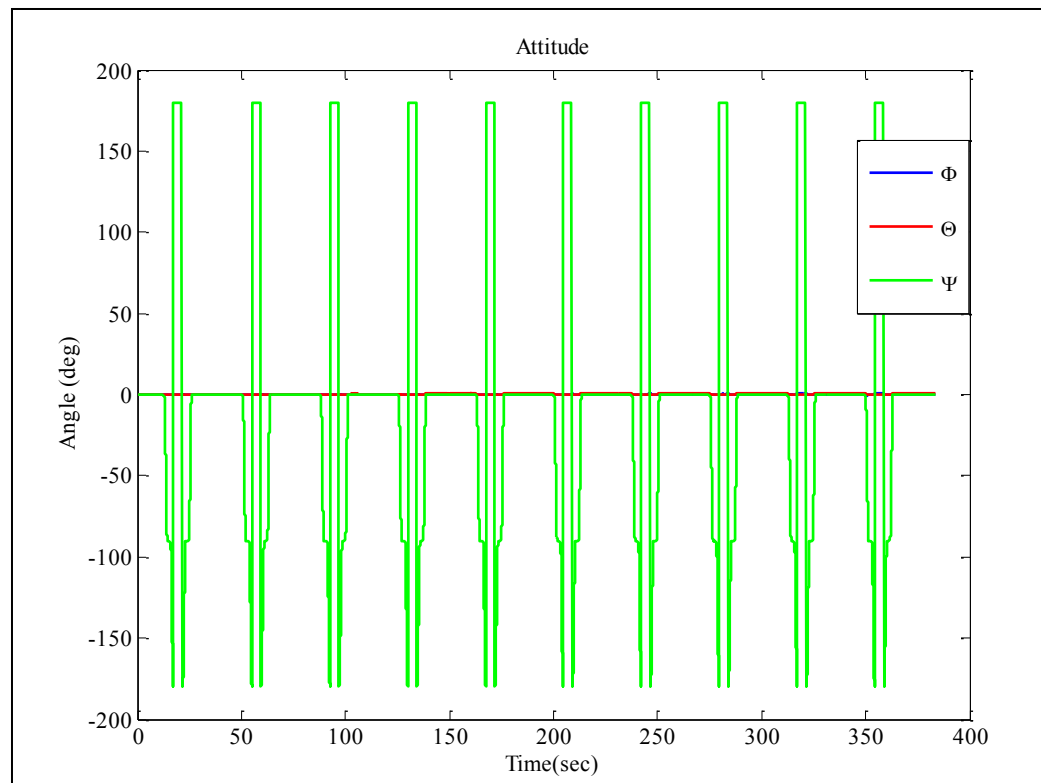


Figure 6.12 Dérive de l'attitude en dynamique

Tout comme lors de la trajectoire statique, le système de navigation inertielle estime avec grande précision l'attitude, même après plusieurs minutes. Après avoir fait subir dix fois la trajectoire à la centrale inertielle sur une période de plus de 10 minutes (Figure 6.12), la dérive sur l'axe excité n'est que de 0,3 degré. Ce test confirme que la stabilité de l'estimation de l'attitude observée dans une dérive statique se reproduit aussi lors de tests dynamiques.

6.5.1 Repère pour la vitesse

Dans le CHAPITRE 2, la mécanisation de la vitesse de la centrale inertielle a été effectuée dans le repère tangentiel et dans le repère de la plateforme. Ces deux représentations sont mathématiquement équivalentes. Cependant, il est important de comparer leurs performances réelles afin de valider cette affirmation.

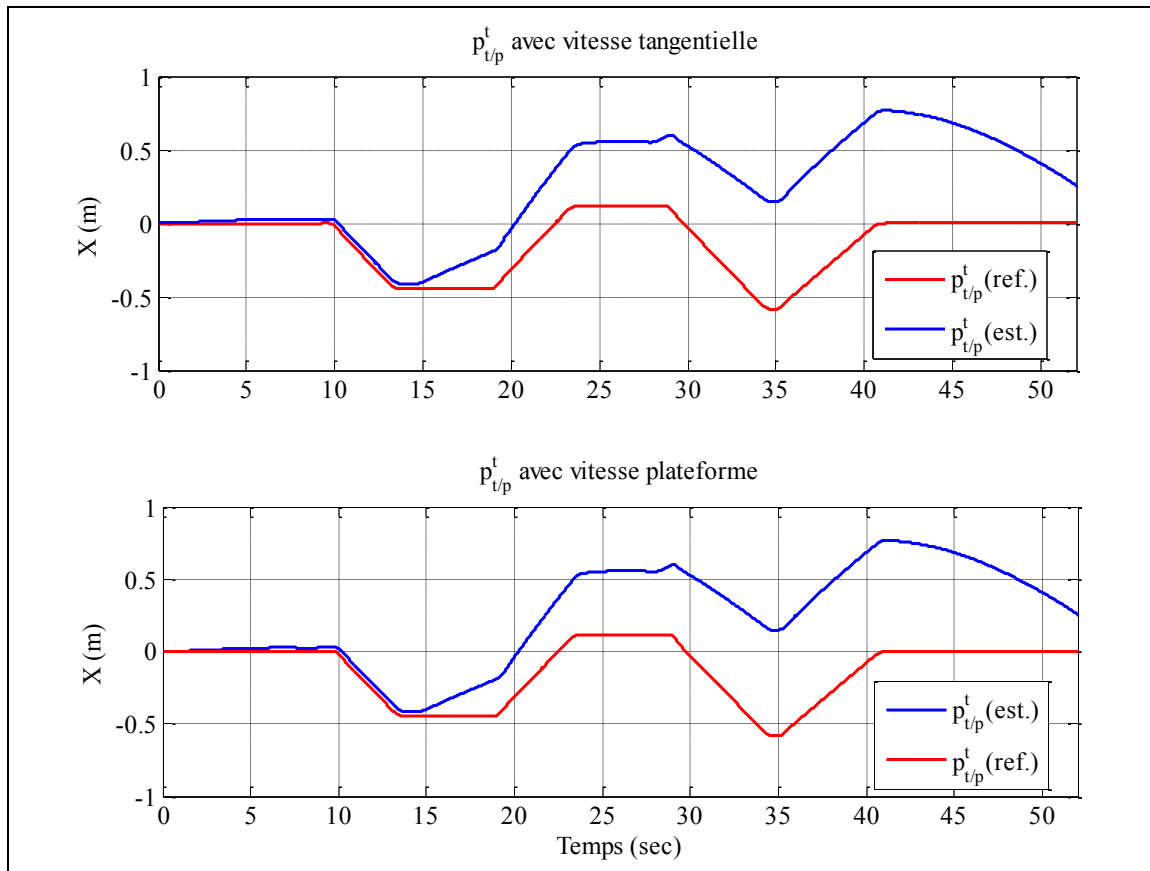


Figure 6.13 Comparaison entre la représentation dans deux repères

L'estimation de la position est équivalente peu importe le repère utilisé pour représenter la vitesse comme le montrent les graphiques de la Figure 6.13. L'unique différence se retrouve dans la représentation du vecteur de vitesse selon le repère. Malgré la similitude entre les deux représentations, l'utilisation du repère de la plateforme est préférable. En effet, lors de l'étape de fusion donnée avec des mesures absolues, le DVL offrira une mesure de vitesse dans le repère de la plateforme. De plus, au niveau du contrôle du sous-marin, une mesure de vitesse de la plateforme est préférable.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de la variance d'Allan a été présentée afin d'évaluer les erreurs caractérisant une centrale inertielle. Par la suite, des tests de dérive ont été effectués sur le système de navigation. Les résultats présentés dans ce chapitre ont permis de valider que la séquence d'initialisation est essentielle pour limiter la dérive de l'estimation de position. Malgré cette dérive, le système de navigation inertielle a été en mesure d'estimer la trajectoire à laquelle il a été soumis. Il est important de noter qu'une inspection sous-marine peut durer quelques heures. La dérive de quelques mètres observée en une minute lors de l'expérimentation représenterait une erreur de plusieurs centaines de kilomètres après quelques heures. Ces erreurs sont critiques lors de l'identification des défauts sur les barrages hydro-électriques où une précision de l'ordre du centimètre est requise. C'est pourquoi le système de navigation ne peut être utilisé seul pour estimer la position du sous-marin. Des techniques de fusion sont nécessaires afin de stabiliser les mesures inertielles.

CHAPITRE 7

Expérimentation : Filtre de Kalman

Différentes expériences ont été réalisées sur la centrale inertielle assistée par des mesures absolues via une fusion par filtrage de Kalman indirect. Les équations du filtre ont été développées au chapitre 4 dans le but de stabiliser la dérive inertielle présente sur le système de navigation afin d'obtenir une bonne estimation des positions, vitesses et orientation. Afin d'évaluer la performance du système, la grandeur de l'erreur entre la trajectoire de référence et la trajectoire estimée est vérifiée, et ce, pour les positions, vitesses et orientations.

7.1 Simulation

Il est important de vérifier en premier lieu le fonctionnement du filtrage de Kalman en simulation. Un modèle de simulation d'un système de navigation inertielle composé d'accéléromètres et de gyroscopes caractérisés par des biais et des bruits blancs a donc été développé. Cette centrale inertielle virtuelle a été couplée à des mesures absolues par un filtrage de Kalman indirect. Les mesures de positions, de vitesses et d'orientations ont été simulées à partir d'une trajectoire de référence auquel du bruit a été ajouté. La trajectoire est visible sur les Figure 7.1 et 7.2. Cette trajectoire est unique à la simulation et elle n'a pas été présentée dans le chapitre 5. Les courbes vertes des trois premiers graphiques de la figure 7.1 présentent cette trajectoire selon les coordonnées x, y et z tandis que les courbes vertes des trois premiers graphiques de la figure 7.2 présentent les coordonnées d'orientation de cette trajectoire.

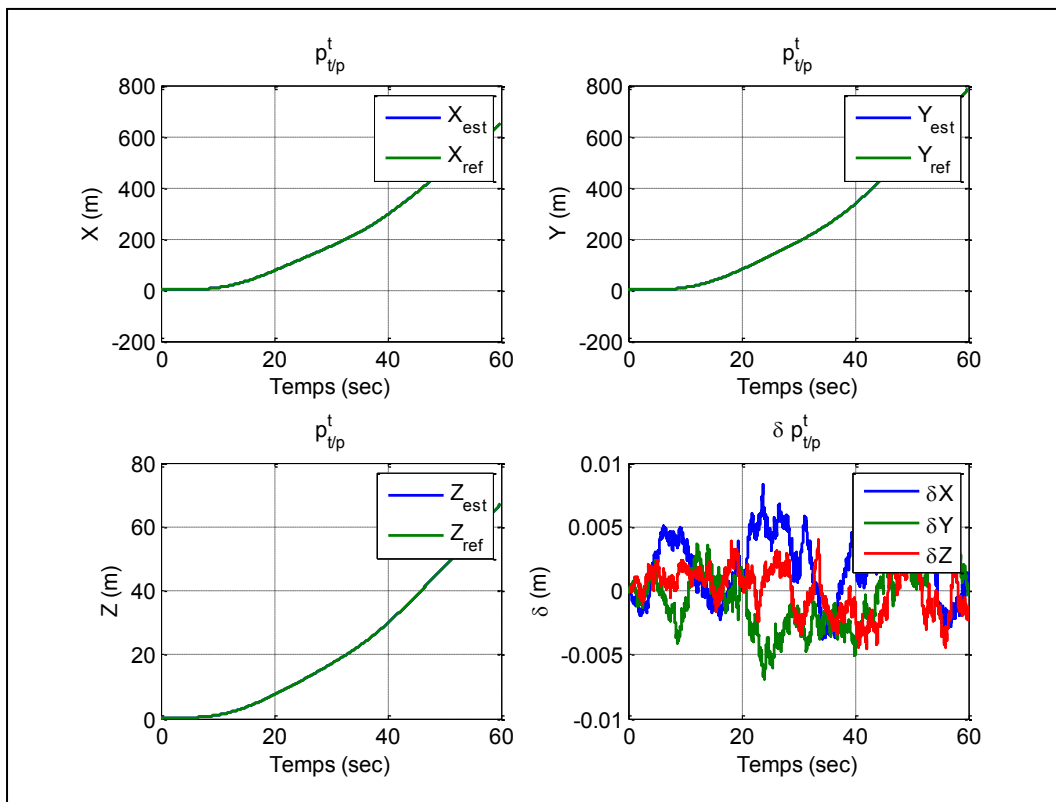


Figure 7.1 Simulation de la position dans le filtrage de Kalman

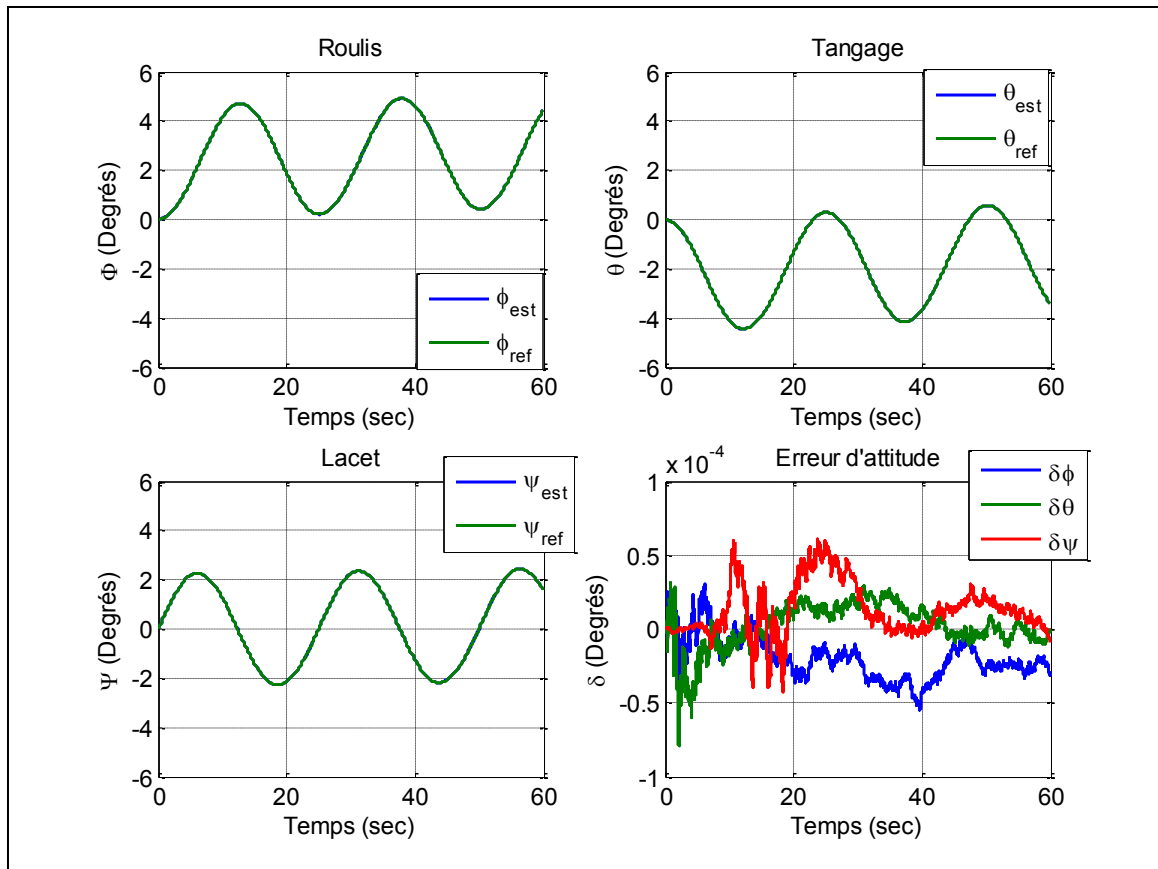


Figure 7.2 Simulation de l'attitude par filtrage de Kalman

Les Figure 7.1 et Figure 7.2 montrent également que le filtrage de Kalman a estimé avec précision les états auxquels le système a été soumis. En effet, sur les graphiques, l'estimation se superpose à la trajectoire de référence. Le dernier graphique de ces deux figures confirme ces résultats en affichant de très faibles erreurs d'estimation. Cependant, le bruit simulé sur la centrale inertielle est parfaitement blanc et les biais sont constants. Le filtrage de Kalman estime donc de manière optimale la vraie trajectoire. En réalité, les capteurs ne sont pas caractérisés par un biais constant et des bruits parfaitement blancs. De plus, la simulation de la dynamique du système a été modélisée avec les équations de mécanisation d'une centrale inertielle idéale. Le modèle simulé se comporte donc exactement comme la modélisation; ce qui rehausse artificiellement la qualité des résultats. Lors de la mise en œuvre, différents phénomènes non modélisés vont perturber les mesures. Les expérimentations avec le système réel risquent donc de ne pas se comporter de la même façon; offrant ainsi des performances

dégradées par rapport à la simulation. Cependant, ce test constitue une première validation qui montre la convergence du filtrage de Kalman pour les expériences réalisées.

7.2 Expérimentation sur le banc d'essai

Lors des expérimentations, les paramètres évalués ont été la fréquence des signaux de mesures, le bruit sur les mesures ainsi que la modification des paramètres de certains capteurs. Les trajectoires et les configurations utilisées pour les expérimentations sont celles qui ont été présentées dans le CHAPITRE 5. Il est important de rappeler que les trajectoires ont été effectuées dans un espace restreint. Une erreur de quelques centimètres peut sembler de grande envergure par rapport aux amplitudes des trajectoires présentées. Cependant, pour une inspection sous-marine de plusieurs dizaines de mètres ces erreurs sont négligeables.

La matrice de covariance initiale P_0 indique au filtre la confiance accordée au modèle par rapport à la mesure (Woodman, 2007). Si cette valeur est proche de zéro, cela indique que la valeur initiale est connue avec exactitude. Au contraire, si P_0 est composé de valeurs élevées, les prédictions initiales sont inconnues, par conséquent, une grande importance sera accordée à la mesure. Dans le cas d'un système de navigation, la précision de la valeur initiale est connue et est définie par l'amplitude des variances des capteurs.

Présentée au CHAPITRE 4, la covariance du bruit du modèle Q , est directement représentée par la variance des capteurs inertiels. Ces valeurs sont souvent fournies par le manufacturier ou dans ce projet, trouvées par la méthode d'Allan au CHAPITRE 6:

$$Q = diag(\sigma_{ax}^2 \ \sigma_{ay}^2 \ \sigma_{az}^2 \ \sigma_{gx}^2 \ \sigma_{gy}^2 \ \sigma_{gz}^2) \quad (7.1)$$

Pour les premières expérimentations, les signaux de mesures corrigent la centrale inertielle à la même fréquence que son taux d'échantillonnage, c'est-à-dire 150 Hz. Ce test est moins réaliste puisque les capteurs externes réels ne fonctionneraient pas à cette fréquence. Cependant, il s'agit de valider l'algorithme et l'effet du changement de certains paramètres.

Les dernières expérimentations présentent des cas plus réalistes en utilisant des fréquences et limitations similaires à celles des vrais signaux de mesure de cette application.

Une même légende est utilisée pour chaque figure. Certains graphiques présentent l'évolution de l'état du système dans le temps alors que d'autres présentent la trajectoire estimée du système inertiel en trois dimensions. Les points verts représentent les signaux de mesure provenant des capteurs externes. La valeur estimée des états du système est présentée en rouge alors que l'état réel du système est en bleu. L'algorithme utilise une représentation des orientations sous forme de quaternions. Puisque les quaternions ne possèdent pas d'interprétation physique, l'attitude est transformée sous forme d'angle d'Euler pour la présentation des résultats.

7.2.1 Variance des capteurs de mesure absolue

Les capteurs externes au système de navigation inertielle seront simulés à partir de la position du robot auquel du bruit est ajouté. La grandeur du bruit est déterminée par la variance présente sur les capteurs réels. La position est caractérisée par une variance typique d'un système USBL. La vitesse est caractérisée par une variance similaire à celle du système DVL utilisé sur le sous-marin de l'IREQ. L'attitude est caractérisée par une variance de l'AHRS utilisé également sur le véhicule sous-marin. Le Tableau 7-1 contient les valeurs d'écart-type de chaque capteur.

Tableau 7-1 Écart type des mesures externes

$\sigma_{position}$	0,035 m
$\sigma_{vitesse}$	0,005 m/s
$\sigma_{attitude}$	0,01 rad

7.2.2 Résultat : Trajectoire «Lawnmower»

Ce test permet d'évaluer les performances de l'algorithme soumis à la trajectoire « Lawnmower » présentée au CHAPITRE 5.

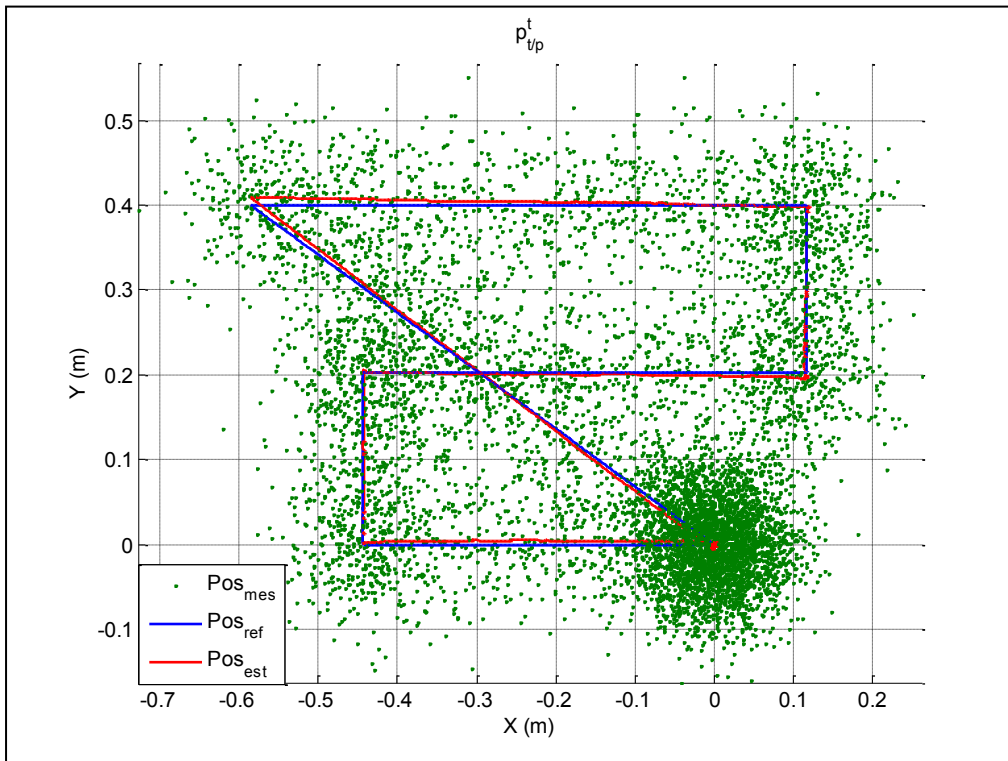


Figure 7.3 Estimation de la trajectoire par filtrage de Kalman

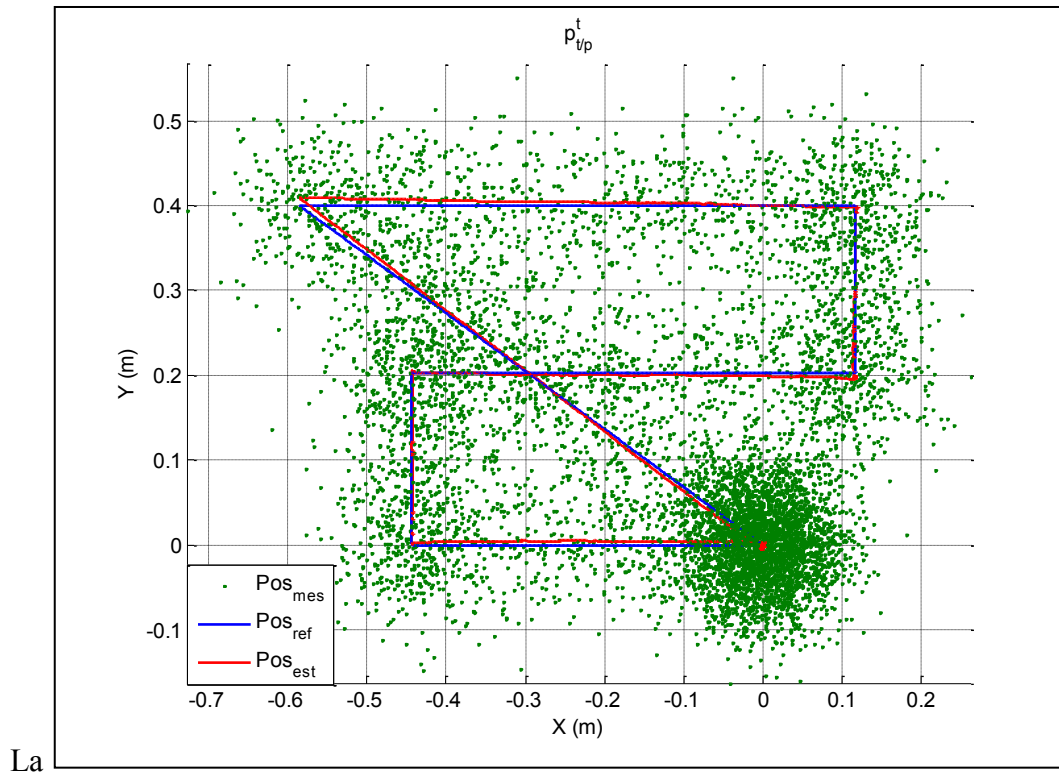


Figure 7.3 présente la trajectoire sur le plan xy . La figure permet de mieux visualiser les performances de l'algorithme de filtrage de Kalman. La position (en rouge) est estimée avec une grande précision malgré que les signaux de mesures exprimées par les points verts offrent une information peu précise sur la trajectoire.

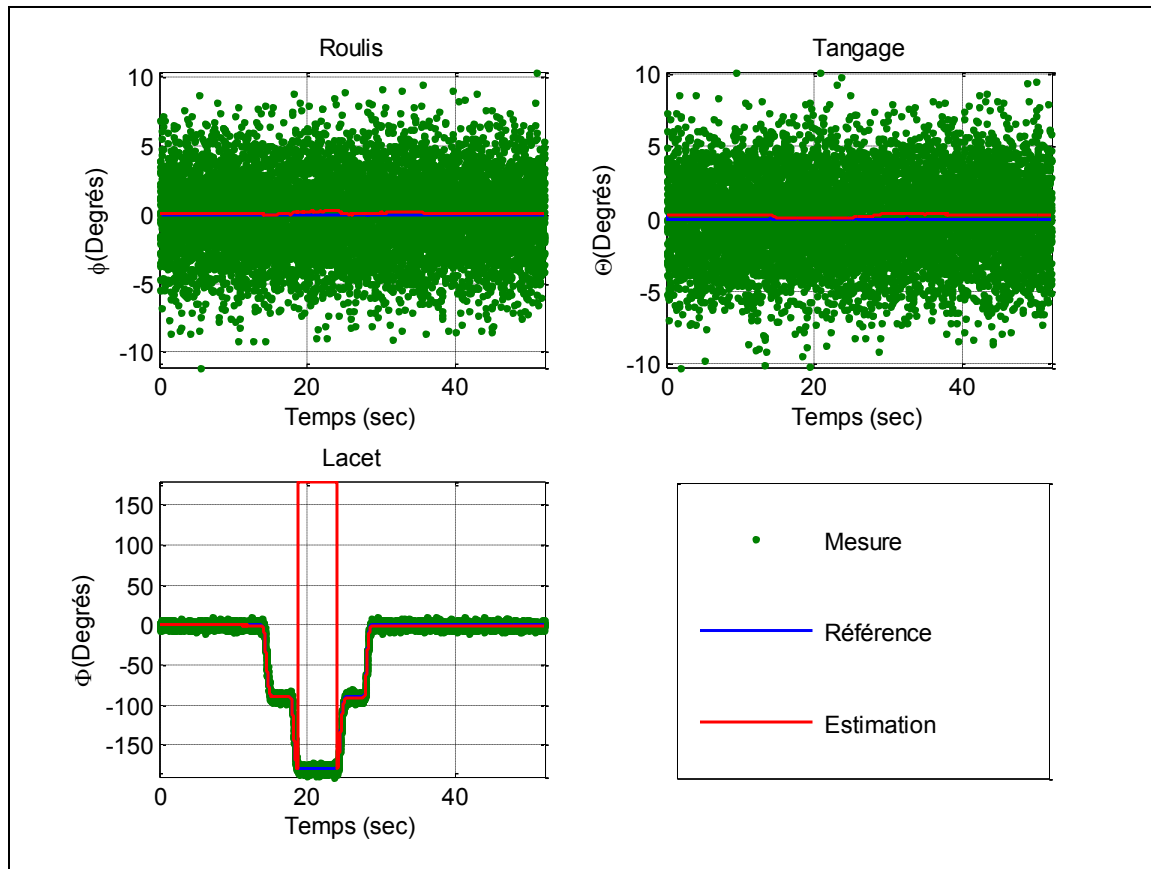


Figure 7.4 Estimation de l'attitude par filtrage de Kalman

Tel qu'illustré par la Figure 7.4, la fusion de données fonctionne pour l'attitude du sous-marin également. Les figures du roulis et du tangage montrent que les mesures externes sont très bruitées par rapport à l'estimation. Ces mesures peuvent atteindre ± 10 degrés d'erreurs par rapport à la vraie attitude alors que l'estimation est très proche de l'attitude de référence. Cependant, ce test ne permet pas de caractériser convenablement la performance de l'algorithme de Kalman puisque cette trajectoire excite très peu l'attitude. De plus, le graphique du lacet montre une grande erreur entre 20 et 25 secondes. Le lacet est estimé à 180 degrés alors que l'orientation réelle est de -180 degrés. Mais en réalité, ces deux valeurs représentent la même orientation. Cette irrégularité provient du fait que l'orientation est définie dans l'intervalle $[-180, 180]$ dans la présentation des résultats. Donc, l'estimation du lacet est en fait très proche de la valeur de référence. Cette caractéristique pourrait cependant entraîner de graves conséquences si la représentation choisie était les angles

d'Euler plutôt que les quaternions. En effet, si la représentation d'orientation n'était pas en quaternion et que le cas présenté à la Figure 7.4 se produisait, le filtrage de Kalman tenterait de réduire l'attitude vers -180 degrés. Cela aurait pour effet d'augmenter significativement l'erreur.

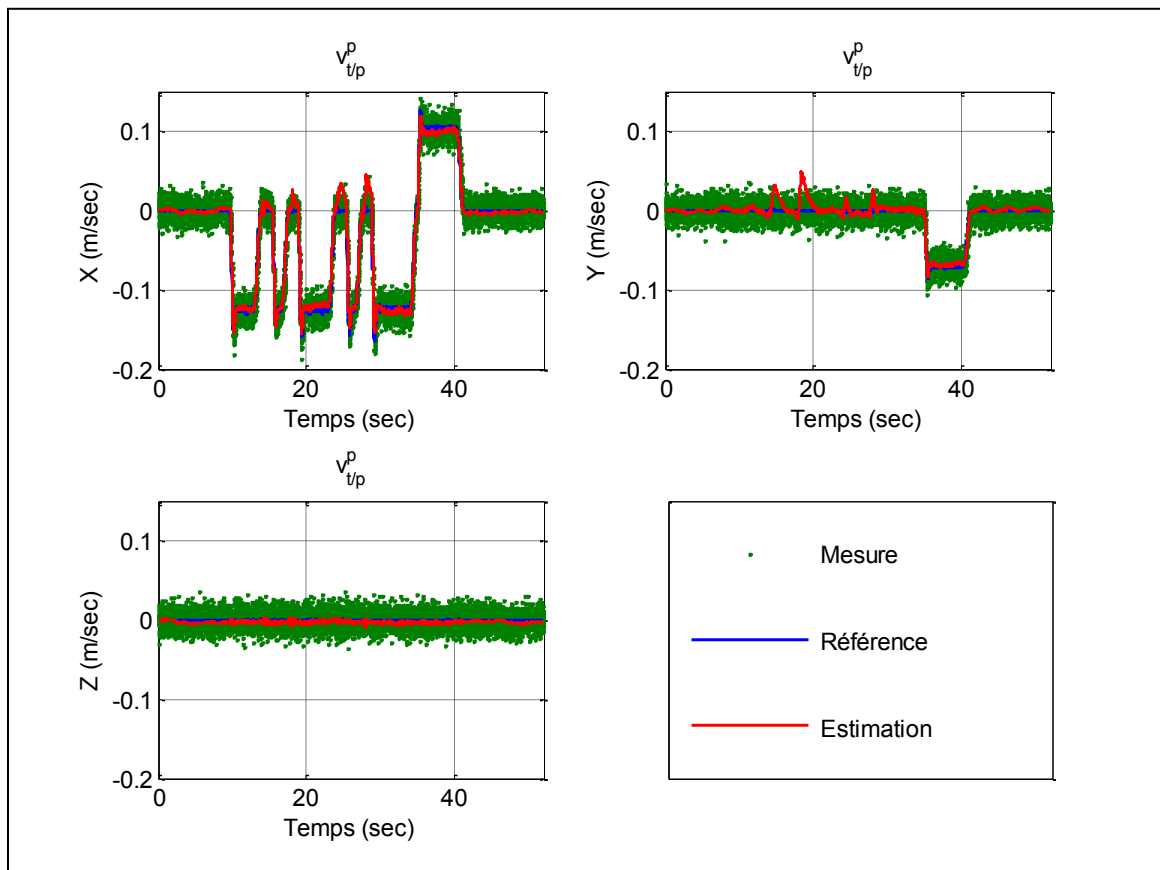


Figure 7.5 Estimation de vitesse par filtrage de Kalman

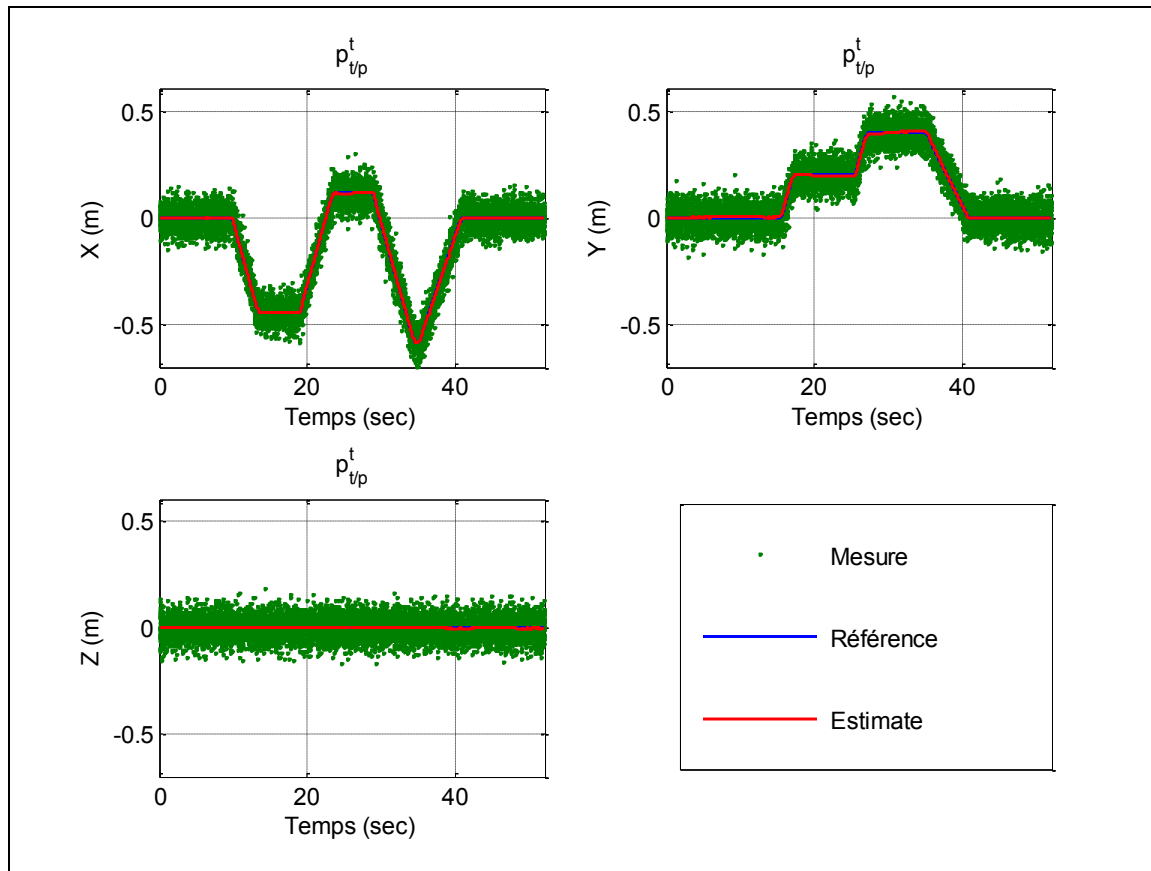


Figure 7.6 Estimation de la position par filtrage de Kalman

Tel que souhaité par l'utilisation du filtre de Kalman, la précision de l'estimation de la vitesse et de la position après filtrage est supérieure aux mesures absolues (en vert) ainsi qu'au système de navigation inertielle sans assistance. En effet, cette caractéristique est montrée par la Figure 7.5, ainsi que par les Figure 7.6 et 6.11 qui montrent que l'estimation de la position avec filtrage est nettement supérieure à une estimation basée seulement sur un système de navigation inertielle, étant donné que les deux figures présentent les résultats correspondants à une même trajectoire de référence.

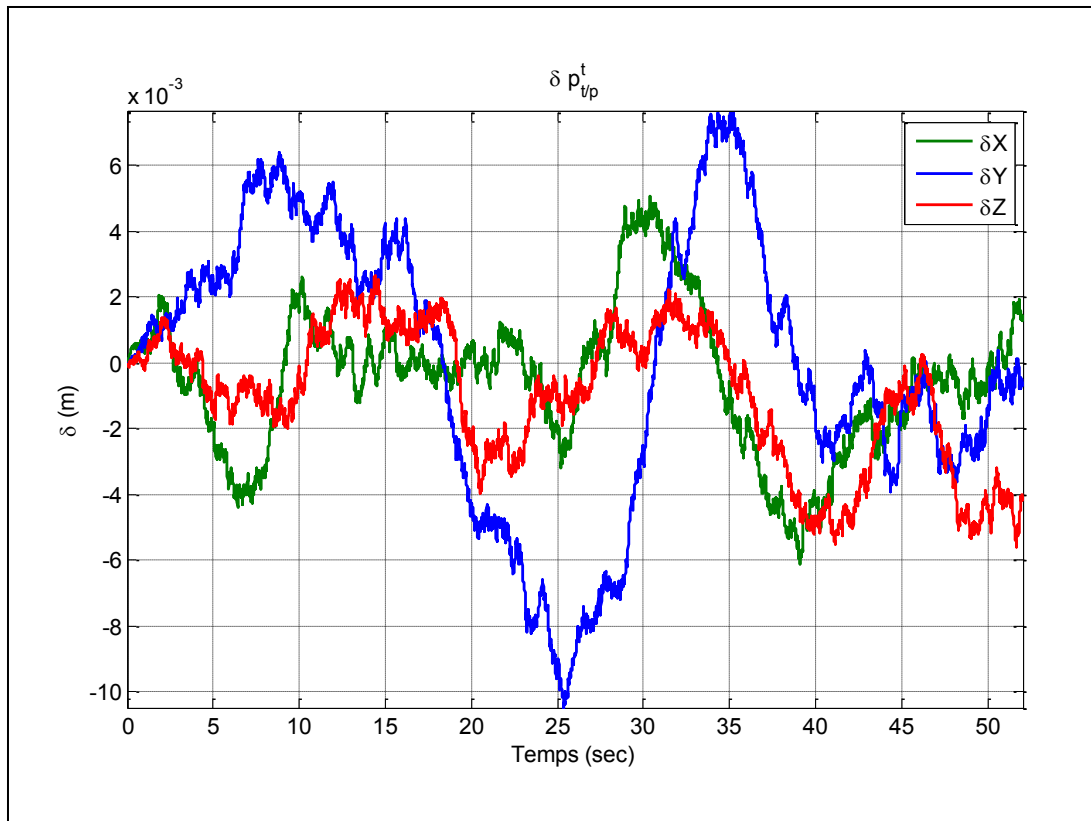


Figure 7.7 Erreur d'estimation de la position

La Figure 7.7 présente l'erreur de position entre l'estimation et la référence. Malgré un écart-type de 0,035 mètre sur les mesures de positions, l'erreur d'estimation reste faible compte tenu de l'application.

7.2.3 Trajectoire de type «Sous-Marin»

Cette trajectoire, qui est présentée à la section 5.2.2 du CHAPITRE 5, permet d'évaluer les performances de l'algorithme soumis à un déplacement réaliste d'un sous-marin d'inspection.

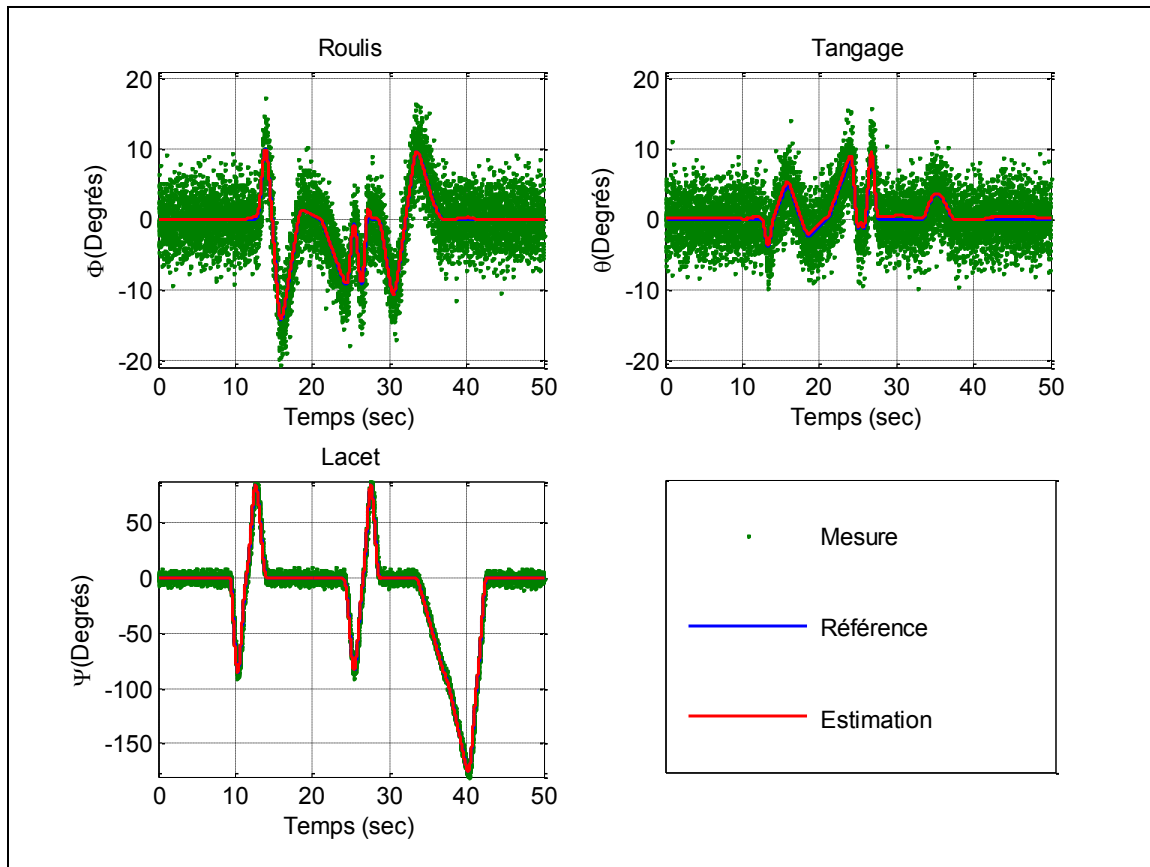


Figure 7.8 Estimation de l'orientation avec une trajectoire de sous-marin

Le Tableau 7-2 compare les résultats illustrés par la Figure 7.4 (trajectoire «Lawnmower») avec ceux illustrés par la Figure 7.8 (trajectoire « sous-marin »). Cette comparaison permet de conclure que la complexité de la trajectoire semble peu influencer la précision de l'estimation d'attitude. Les résultats sur lacet diffèrent beaucoup entre les deux trajectoires puisque dans la première, cet axe n'était presque pas excité par rapport à la deuxième.

Tableau 7-2 Erreur Rms d'attitude

Axe	Trajectoire «Lawnmower»	Trajectoire « sous-marin »
Roulis	$2,8 * 10^{-3}$ rad	$1,9 * 10^{-3}$ rad
Tangage	$5,8 * 10^{-3}$ rad	$4,5 * 10^{-3}$ rad
Lacet	$1,58 * 10^{-3}$ rad	$14,3 * 10^{-3}$ rad

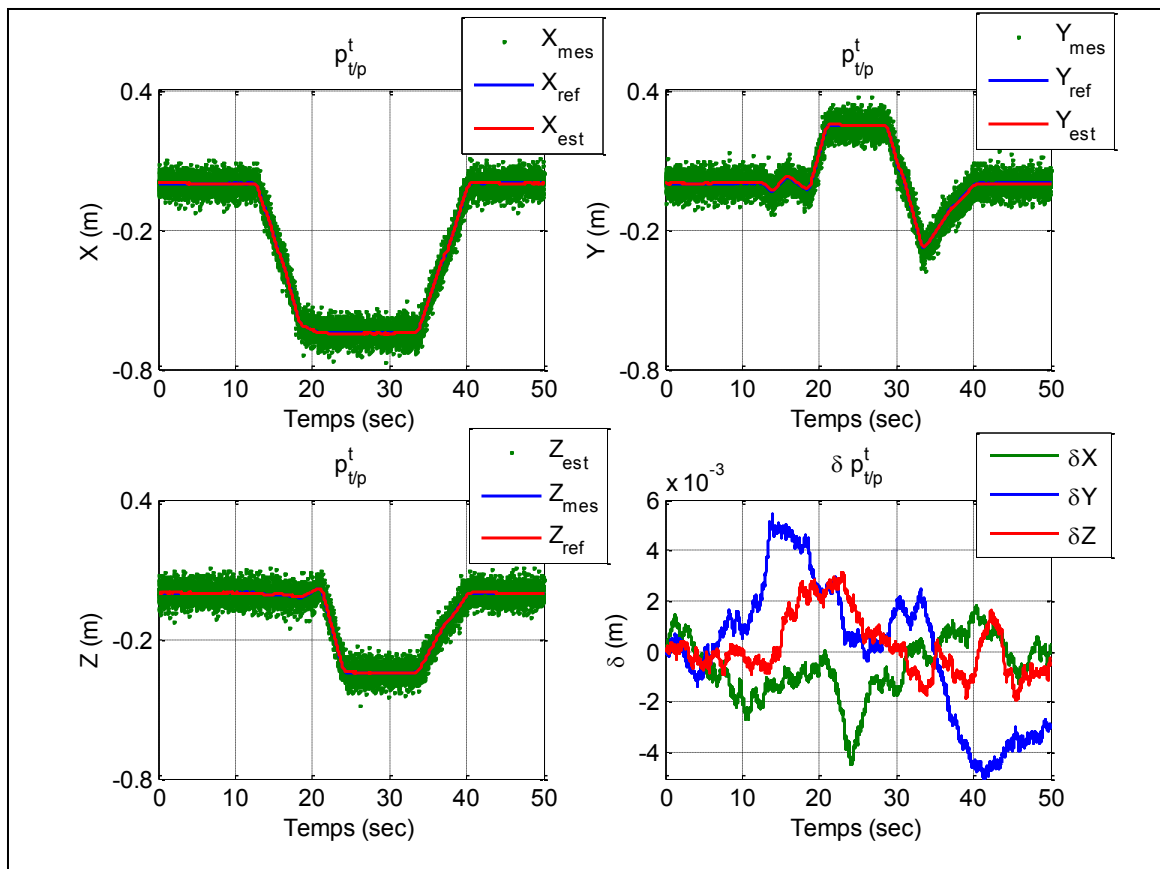


Figure 7.9 Estimation de la position avec une trajectoire de sous-marin

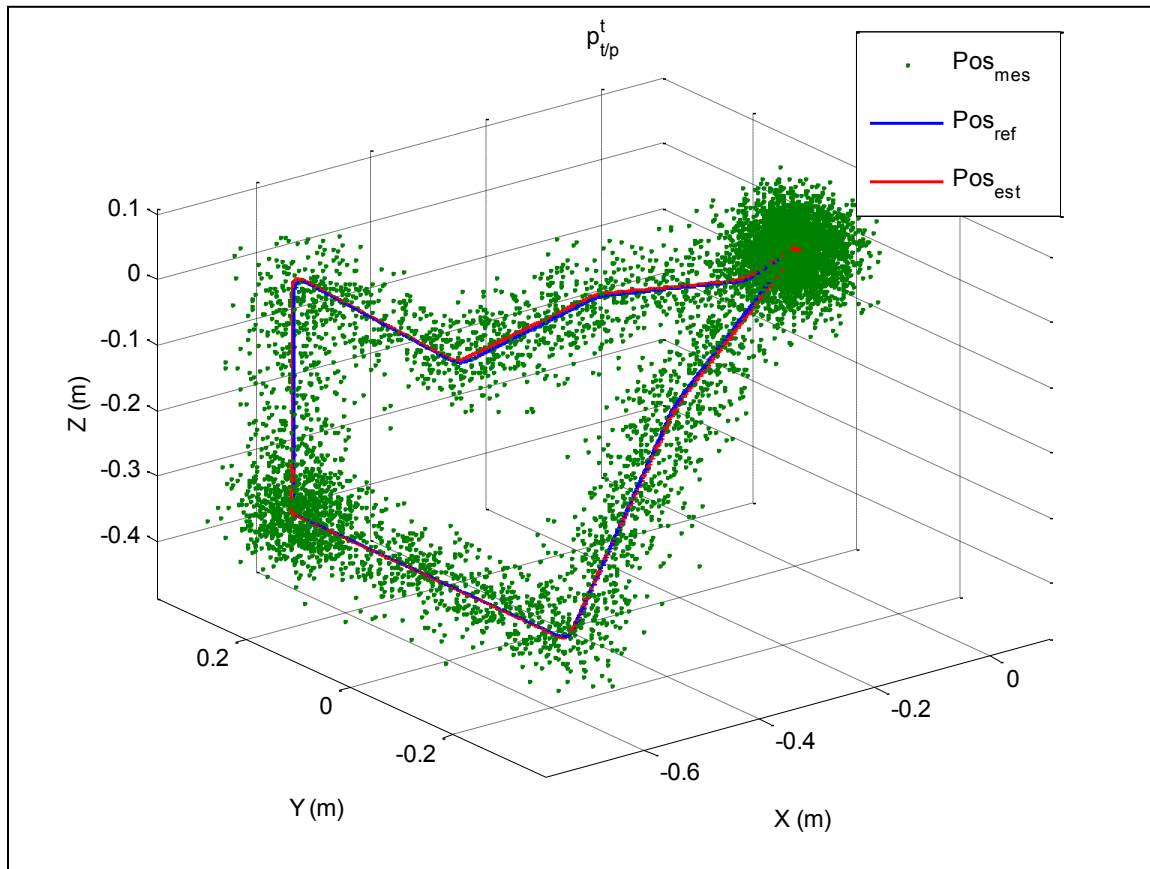


Figure 7.10 Estimation de la trajectoire du sous-marin en trois dimensions

Cet essai sur la trajectoire « sous-marin » permet de conclure que malgré la complexité de cette trajectoire à laquelle le système de navigation inertielle a été soumis, ses performances ont été maintenues. En effet, le filtrage de Kalman offre de bonnes performances puisque l'estimation de la position, de la vitesse et de l'attitude reste fidèle aux données de référence même lorsque le système est soumis à des excitations importantes comme le démontrent les résultats des Figure 7.8, Figure 7.9 et Figure 7.10.

7.2.4 Stabilité à long terme.

Le principal inconvénient d'une centrale inertielle est qu'elle dérive avec le temps. C'est pourquoi un système de fusion de données par filtrage de Kalman doit stabiliser la dérive en corrigeant le système par des mesures absolues. Afin d'évaluer ce critère de stabilité, l'algorithme a été soumis à dix répétitions identiques de la trajectoire complexe d'un sous-marin. Ce qui totalisait une période de suivi de 450 secondes.

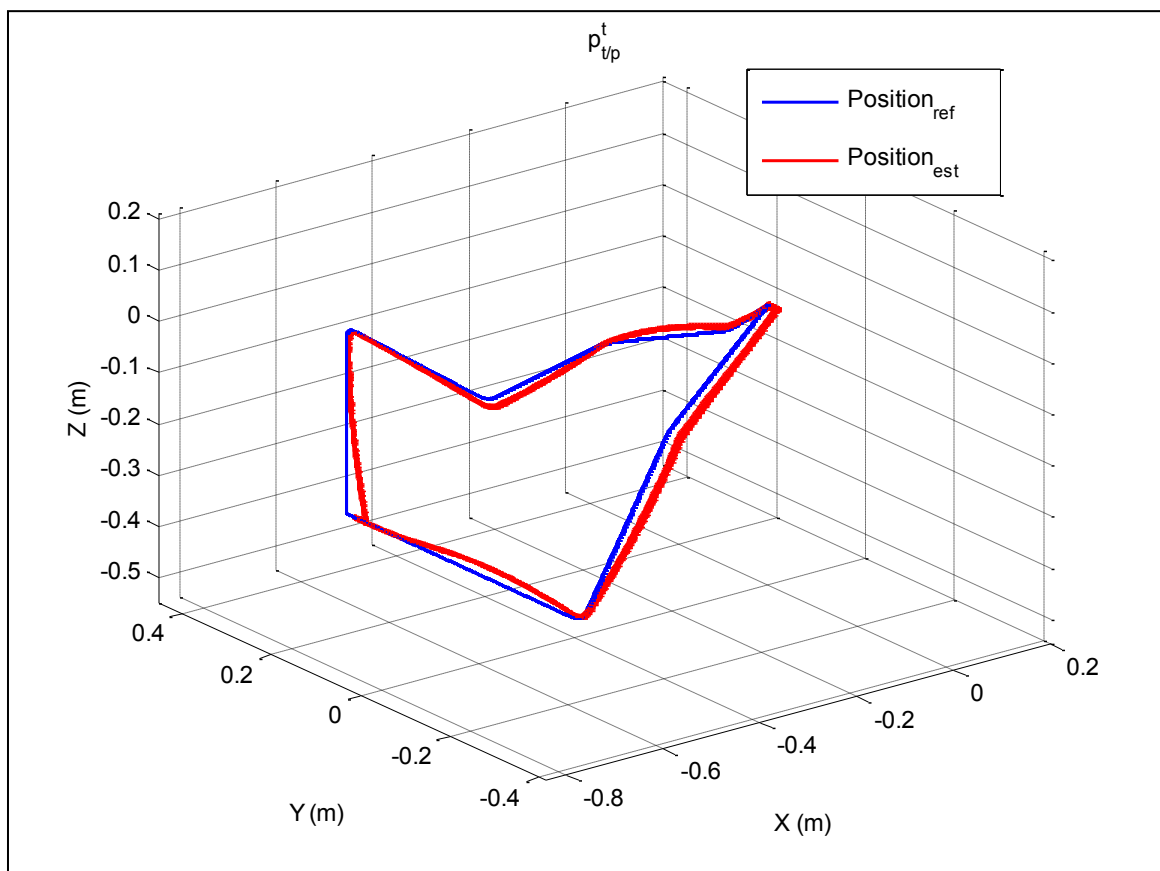


Figure 7.11 Stabilité de la trajectoire

La Figure 7.11 confirme la répétabilité de l'estimation de la trajectoire puisque l'erreur entre chaque essai est inférieure à 2.5 cm. En effet, les trajectoires estimées par chaque passage se superposent parfaitement. Ceci démontre la grande répétabilité des capteurs inertiels couplée aux algorithmes de navigation assistée par le filtrage de Kalman.

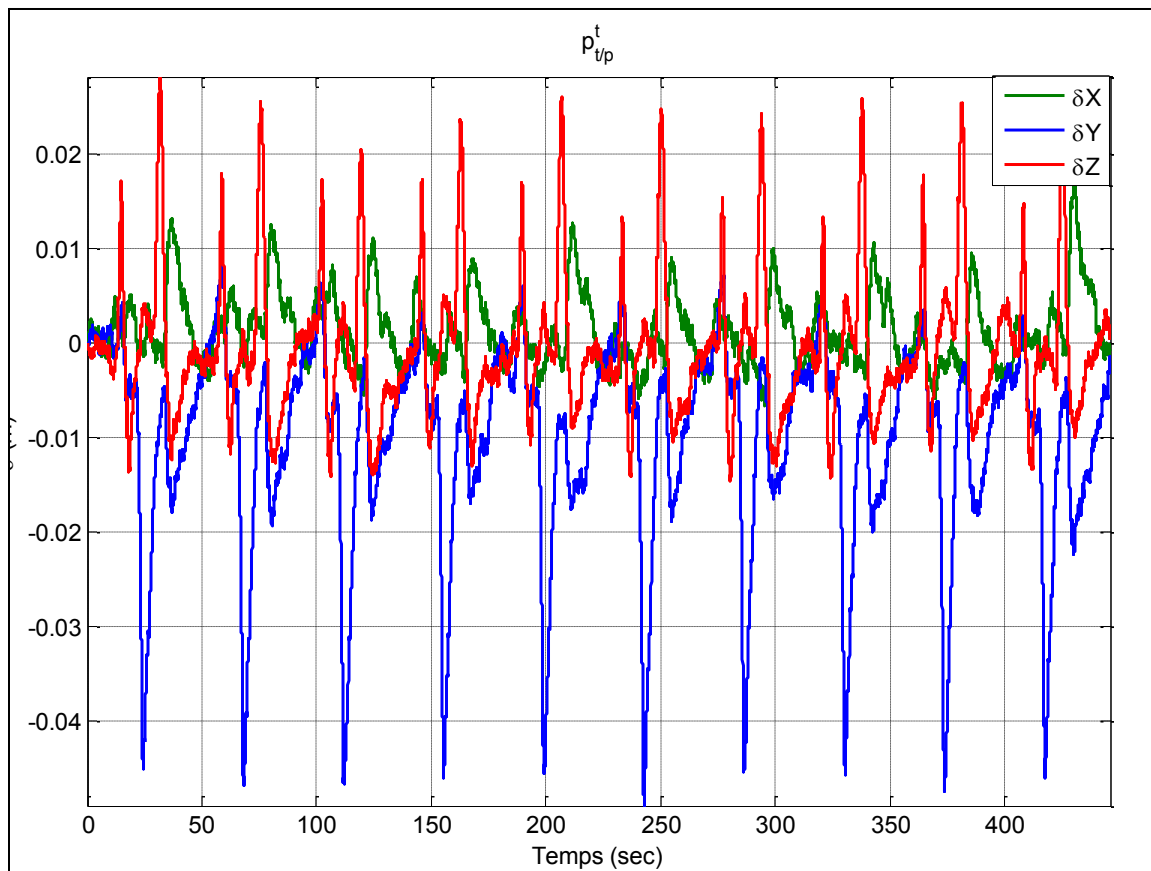


Figure 7.12 Stabilité de l'erreur

La Figure 7.12 montre que les mêmes erreurs se répètent avec le même motif pour les dix répétitions de la trajectoire. Ce phénomène montre encore une fois la répétabilité du système de navigation.

7.2.5 Signaux de mesure fortement bruités

Il est intéressant d'analyser les performances de l'estimation du système de navigation lorsque les signaux de mesures externes sont fortement bruités. Cet essai simule le cas où des capteurs de moins bonne qualité seraient utilisés comme mesures externes. Le Tableau 7-3 présente les valeurs de variances utilisées pour chaque capteur externe pour cet essai.

Tableau 7-3 Bruit fort sur les signaux de mesures

	Référence	Bruit fort
$\sigma_{position}$	35 mm	100 mm
$\sigma_{vitesse}$	5 mm/s	50 mm/s
$\sigma_{attitude}$	0,01 rad	0,1 rad

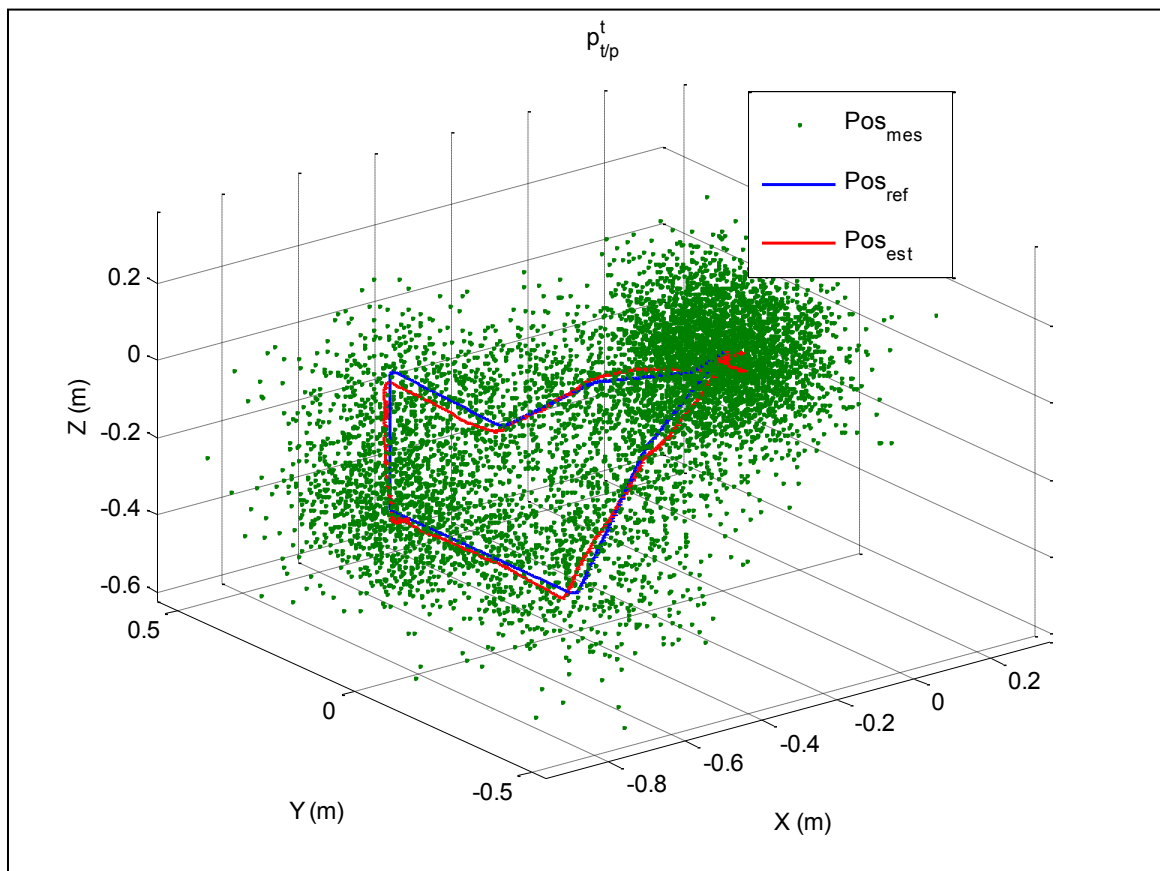


Figure 7.13 Suivi de trajectoire avec des mesures fortement bruitées

Selon la Figure 7.13, les performances du système de navigation assisté par des mesures d'avantage bruitées sont significativement dégradées. Il est à noter que lors de cet essai, le capteur inertiel effectue ses estimations avec autant de précision que lors des essais antérieurs. Cependant, puisque la dérive inertielle est moins bien compensée, l'erreur moyenne par rapport à la trajectoire réelle augmente.

7.2.6 Signaux de mesure faiblement bruités

Une expérimentation avec des signaux de mesures externes faiblement bruités a également été effectuée. Le Tableau 7-4 présente les valeurs d'écart type utilisées pour chaque capteur externe lors de cet essai. Il est à noter que les écarts types de ces capteurs sont irréalistes, elles sont seulement utilisées afin d'étudier leurs effets sur le comportement du système.

Tableau 7-4 Bruit faible sur les signaux de mesures

	Référence	Bruit faible
$\sigma_{position}$	35 mm	1 mm
$\sigma_{vitesse}$	5 mm/s	0,1 mm/s
$\sigma_{attitude}$	0,01 rad	0.001 rad

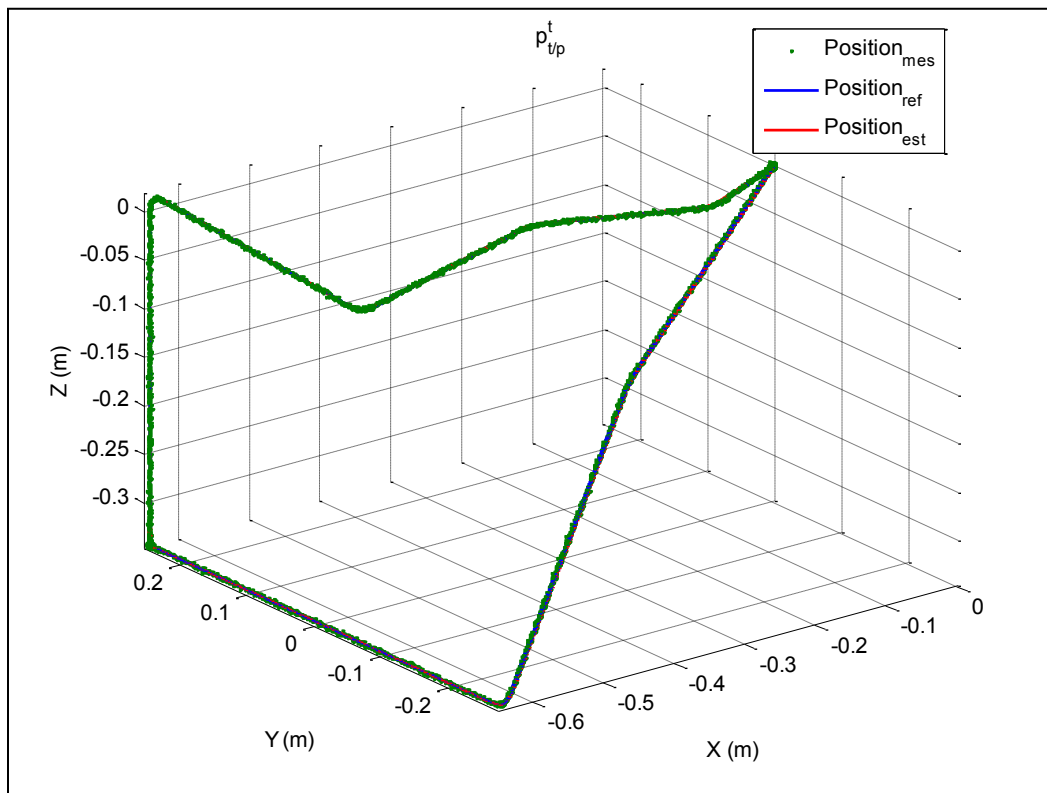


Figure 7.14 Estimation avec mesure faiblement bruitée

La Figure 7.14 démontre qu'un bruit faible sur les mesures externes augmente les performances du système de navigation. L'estimation par filtrage de Kalman semble toujours supérieure à l'estimation des mesures externes. Donc, lorsque la précision des mesures externes s'améliore, l'estimation devient plus précise. Finalement, le Tableau 7-5 compare l'erreur RMS selon le bruit présent sur les mesures de position, de vitesse et d'attitude.

Tableau 7-5 Comparaison de l'erreur RMS de position selon le bruit sur les mesures

Erreur RMS	Bruit normal (m)	Fortement bruité (m)	Faiblement bruité (m)
Axe x	$1,3 * 10^{-3}$	$2,05 * 10^{-2}$	$7,37 * 10^{-4}$
Axe y	$2,7 * 10^{-3}$	$2,65 * 10^{-2}$	$1,6 * 10^{-3}$
Axe z	$1,2 * 10^{-3}$	$2,65 * 10^{-2}$	$5,66 * 10^{-4}$

7.2.7 Dérive du système sans référence d'attitude.

Dans cette expérimentation, le système de navigation inertielle assisté sera soumis à la trajectoire réaliste d'un sous-marin. Cependant, aucune mesure d'attitude ne viendra corriger l'orientation estimée par les gyromètres. La position et la vitesse seront les seules mesures disponibles. Il s'agit d'un cas important à analyser. En effet, il est possible qu'en cours d'opération, les mesures d'orientations soient invalides en raison des perturbations magnétiques créées par la proximité du barrage qui pourraient rendre les mesures de la boussole électronique invalides. Puisque la dynamique du sous-marin est connue, lorsqu'un changement trop rapide est observé sur l'attitude, il s'agit d'une erreur. Il est donc possible de ne pas intégrer ces mesures erronées au filtrage. Un mécanisme de détection simple sur chaque signal de mesure permettrait d'éviter que de mauvaises lectures ne viennent perturber le système.

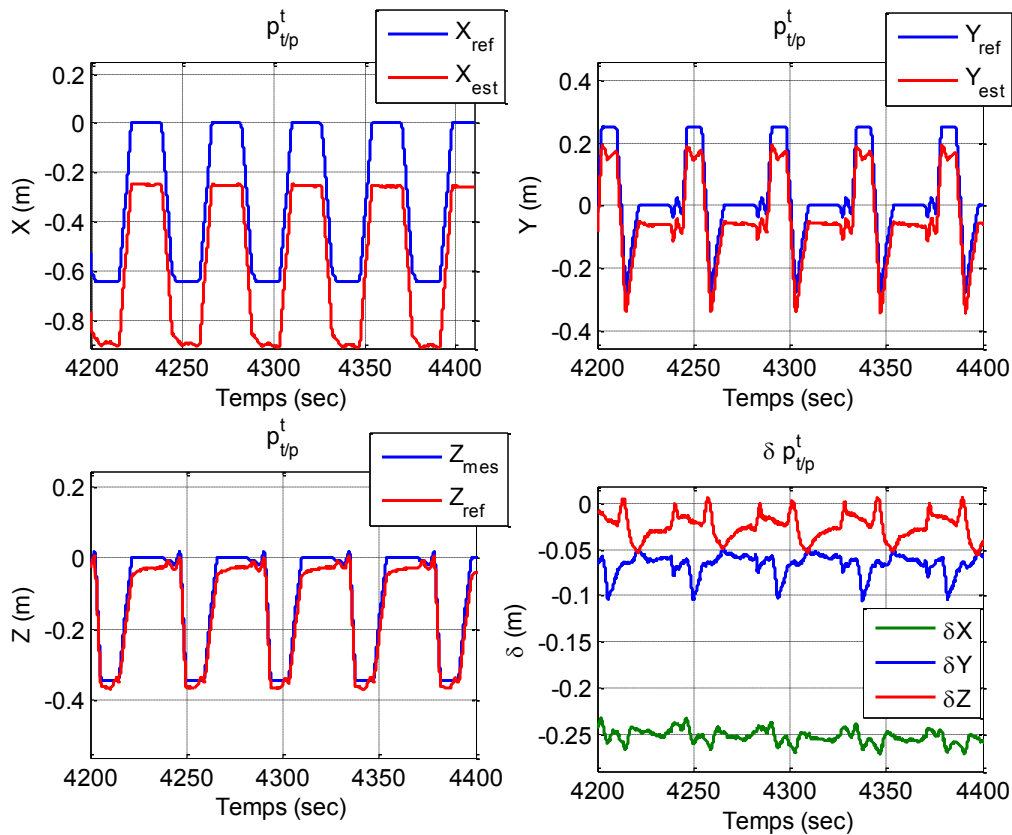


Figure 7.15 Dérive de position sans aide de l'orientation

La Figure 7.15 montre la dérive de la position après 4200 secondes. L'erreur en position s'élève respectivement pour les axes x , y et z à 25; 7,5 et 2,5 cm. Le filtrage de Kalman n'arrive pas à compenser convenablement la position avec l'erreur d'orientation créée par la dérive angulaire. Cependant, malgré cette dérive par rapport à la trajectoire estimée, la forme de l'estimation reste fidèle à la trajectoire de référence. En effet, le système de navigation estime les mouvements avec exactitude même si les estimations sont décalées de quelques centimètres.

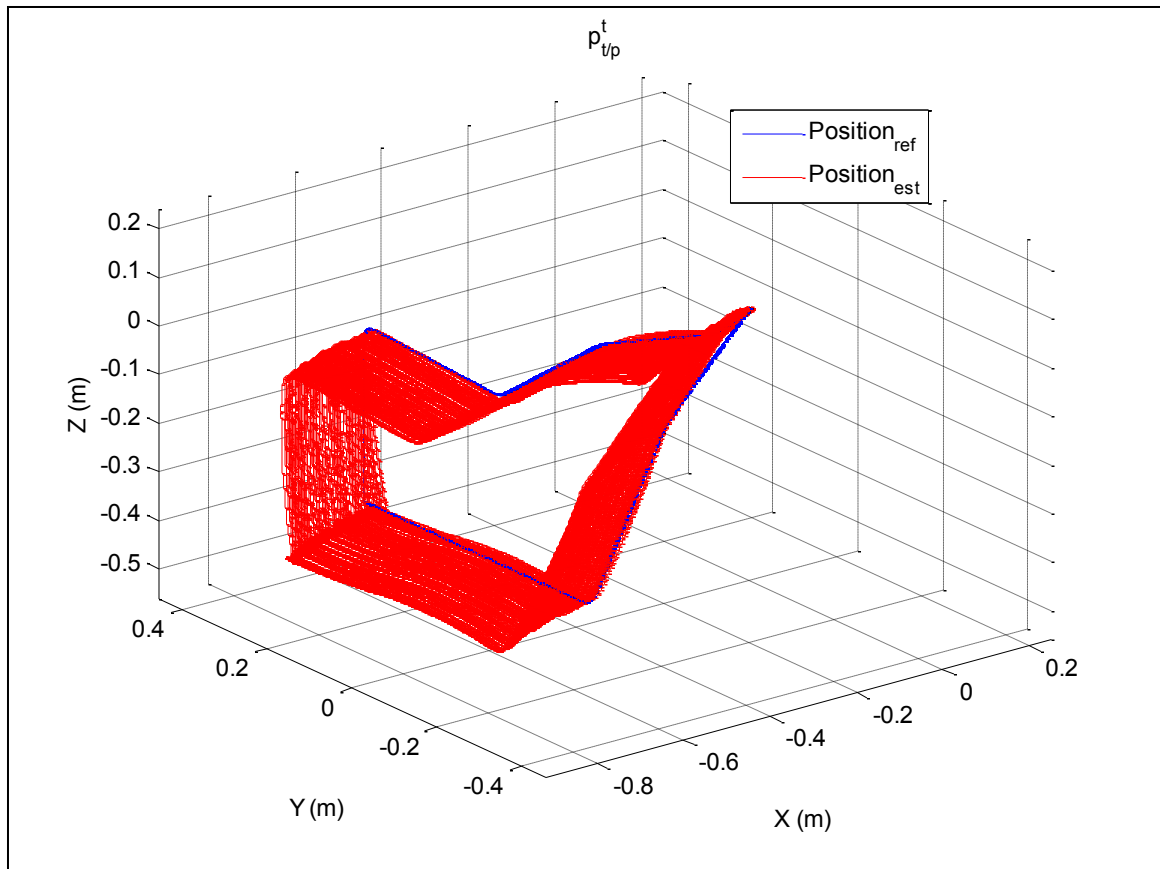


Figure 7.16 Dérive de la position sans aide d'attitude

La Figure 7.16 représente l'estimation de la trajectoire sans capteur d'attitude qui a été répété 100 fois. Cette figure permet de faire une évaluation et de conclure qu'il est possible de continuer d'obtenir une précision convenable au niveau de la position lorsque l'attitude n'est pas corrigée. Cependant, l'erreur peut devenir plus importante si l'inspection dure plusieurs heures ou si les mesures externes corrigent le filtre moins souvent.

7.2.8 Mesures externes à 10 Hz.

Dans cette expérimentation, le système de navigation inertielle se propagera à une fréquence de 150 Hz alors que les corrections par les signaux de mesure auront lieu seulement à une fréquence de 10 Hz. Ceci permettra d'évaluer l'effet de la diminution de la fréquence des corrections sur les performances globales du système.

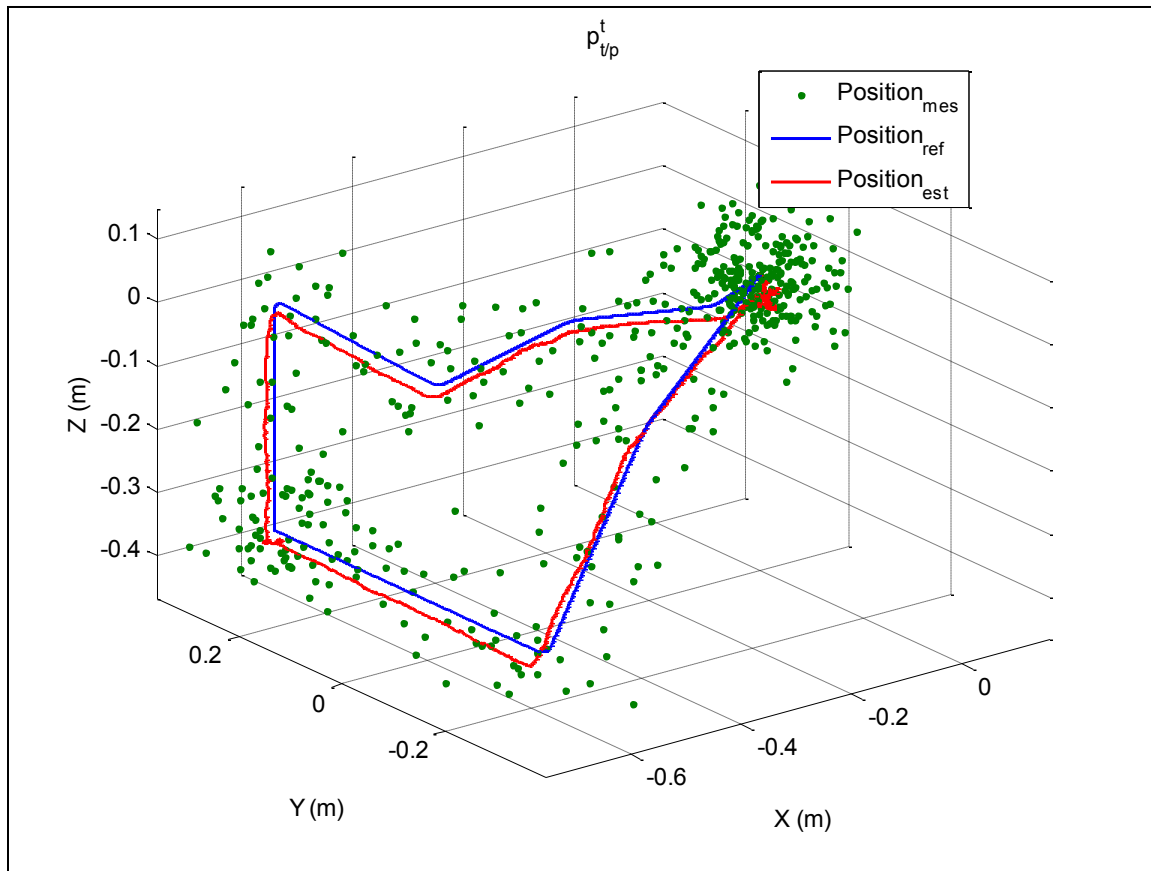


Figure 7.17 Suivi de trajectoire (10 Hz)

La Figure 7.17 montre que l'estimation de la trajectoire est toujours aussi fluide. Cependant, la position estimée ne suit pas aussi bien la trajectoire réelle contrairement aux essais précédents avec des taux élevés de correction à 150 Hz. Ce phénomène est expliqué par le fait que, entre chaque correction, le système de navigation inertielle dérive sur une plus longue période et l'erreur de dérive en position est exponentielle selon le temps (6.3) voir aussi (Farrell, 2008). C'est pourquoi la fréquence de correction influence grandement les performances lors du suivi de trajectoire.

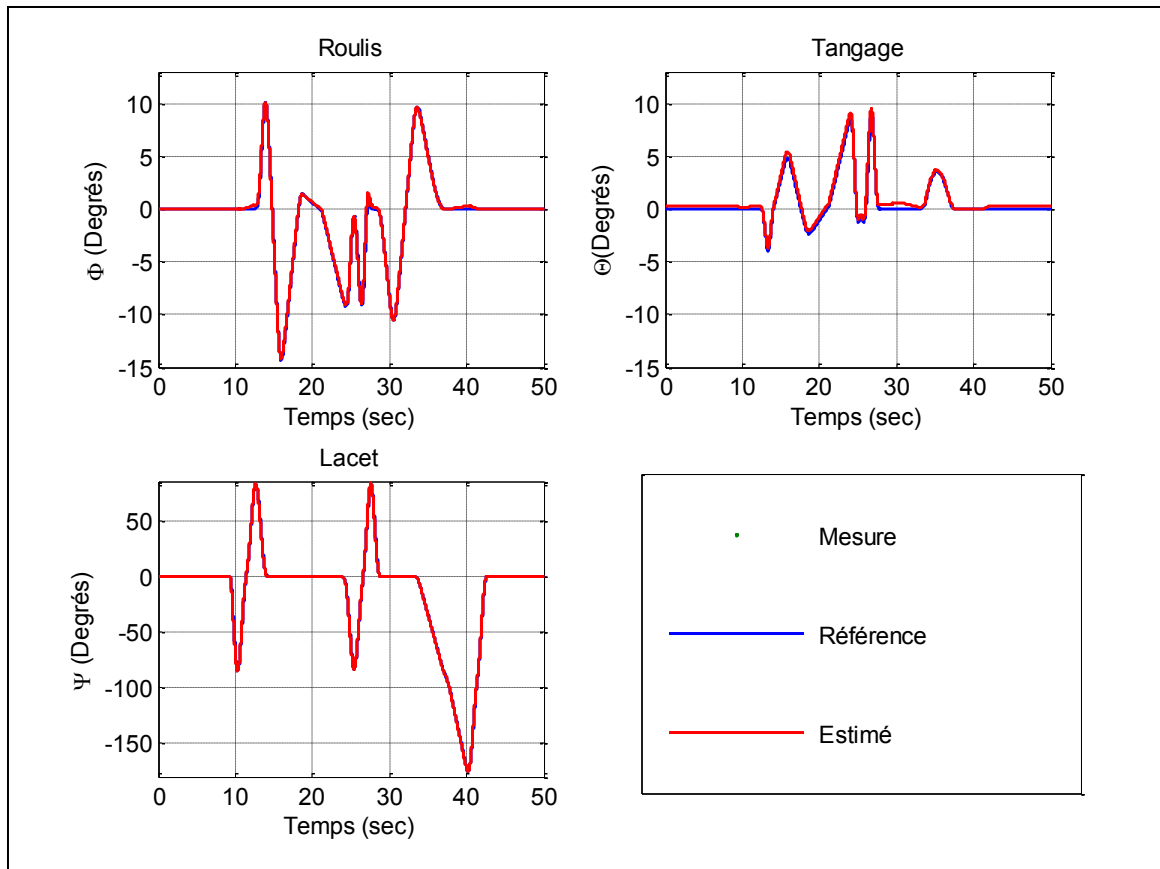


Figure 7.18 Estimation de l'attitude(10 Hz)

Malgré la perte de performance observable sur la position, l'estimation de l'attitude (Figure 7.18) conserve sa précision. La stabilité naturelle des gyromètres de la centrale inertielle utilisée explique ce phénomène. Selon le gain de Kalman, qui dépend des paramètres de bruit, une grande confiance est accordée aux gyromètres. De plus, l'accumulation du bruit est linéaire plutôt qu'exponentielle pour l'attitude. C'est pourquoi l'attitude reste stable même si le rafraîchissement des mesures externes est lent.

7.2.9 Initialisation de l'attitude et des biais

Dans le CHAPITRE 6, l'importance de l'initialisation des biais et de l'orientation sur la dérive de la centrale inertielle a été mise en valeur. Il est primordial de vérifier l'importance de cette calibration lors de l'étape de filtrage. Un cas réaliste avec une correction de dix fois par seconde a été effectué. Les résultats sont montrés à la Figure 7.19.

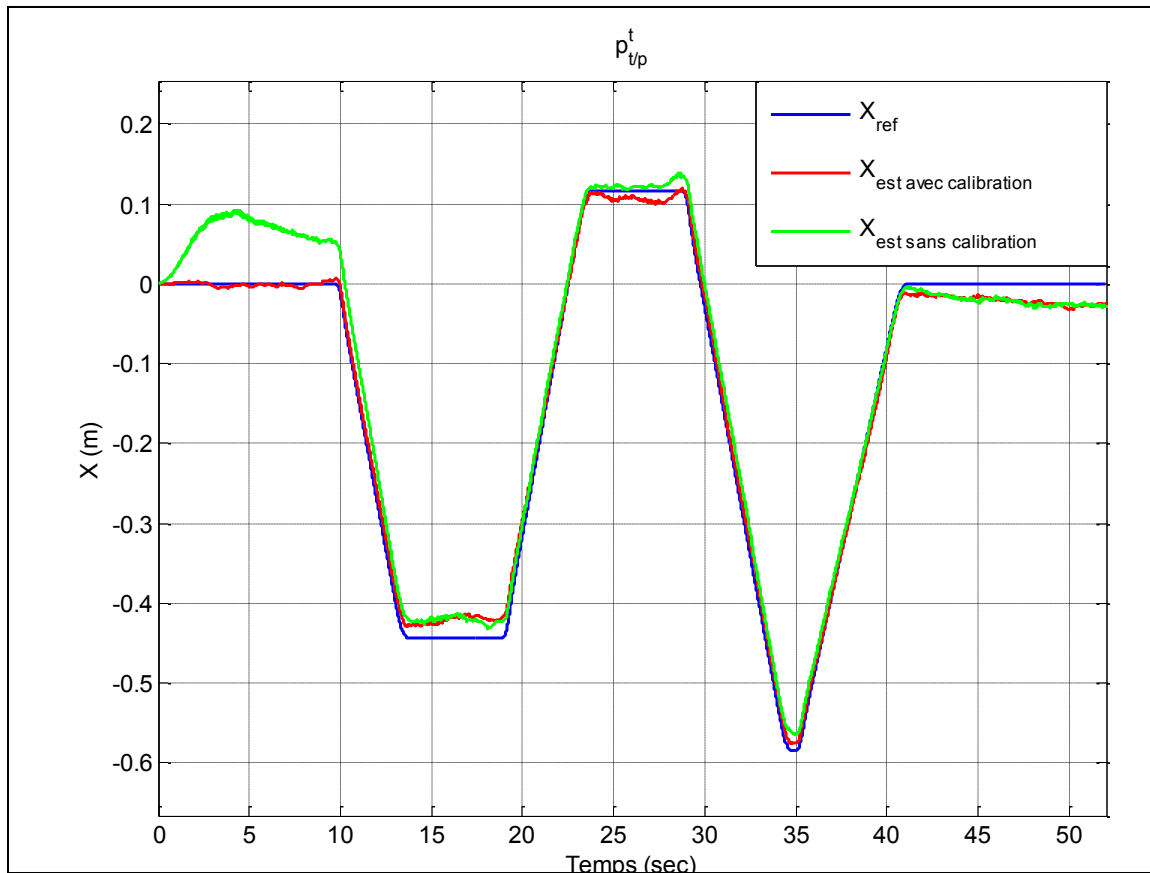


Figure 7.19 Comparaison avec et sans initialisation

Cette figure montre l'estimation de position sur l'axe des x avec initialisation en rouge et sans initialisation en vert. L'essai avec calibration offre des performances similaires à celles qui sont dépourvues de calibration. L'initialisation de départ influence peu les performances de navigation lorsque celui-ci est assisté par des signaux de mesures absolues. Le filtrage de Kalman compense pour les erreurs d'initialisation. Il est intéressant d'observer que la courbe en vert (sans initialisation) souffre d'erreurs d'estimation durant les dix premières secondes.

Par la suite, l'erreur d'estimation converge et les deux courbes offrent des résultats similaires. Cette caractéristique confirme, que dans cette situation, le filtre parvient à compenser l'erreur créée par une mauvaise initialisation des intégrateurs.

7.2.10 Mesures externes à 2 Hz.

Pour les sous-marins, les mesures externes proviennent de capteurs tels qu'un USBL pour la position et un DVL pour la vitesse. Ces capteurs acoustiques sont limités par la vitesse de propagation lente des ondes sonars sous l'eau. C'est pourquoi leur fréquence de rafraîchissement ne peut pas dépasser 1 à 2 Hz. Afin d'obtenir une simulation réaliste sur le banc d'essai, un test avec des fréquences de rafraîchissement lentes (de 2 Hz) pour tous les signaux de mesures externes a été réalisé. Les essais précédents utilisaient une fréquence de rafraîchissement de 150 Hz et 10 Hz. Puisque les performances du filtrage diminuent lorsque la fréquence de correction est faible, l'estimation lors de cet essai risque d'être détériorée.

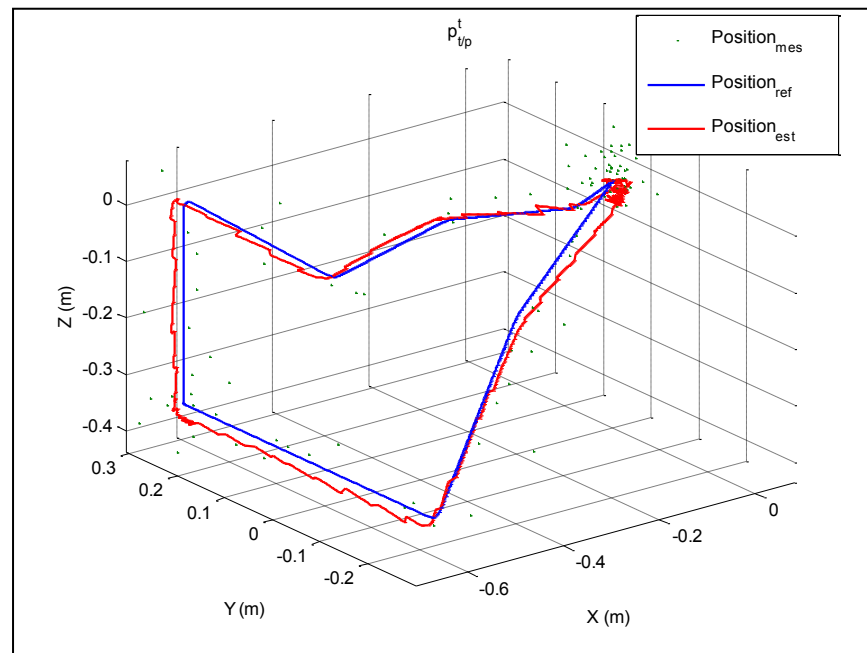


Figure 7.20 Suivi de trajectoire (2 Hz)

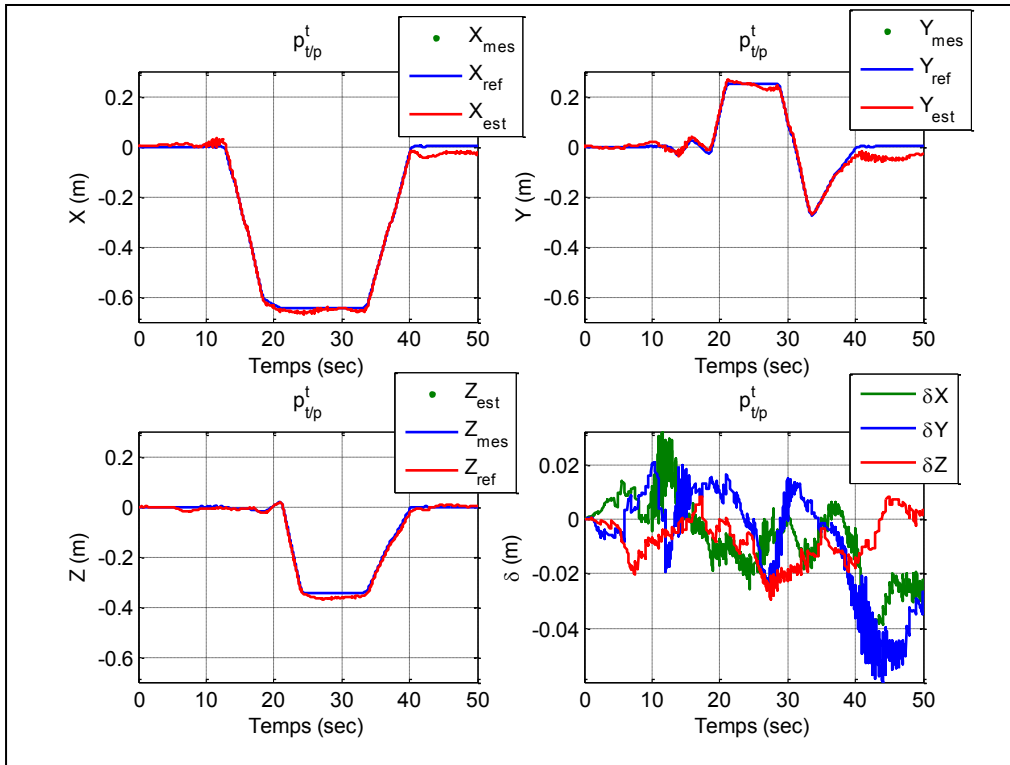


Figure 7.21 Estimé de la position (2 Hz)

Les deux figures ci-dessus (Figure 7.20 et Figure 7.21) montrent encore une fois une augmentation de l'erreur de position lorsque la fréquence de rafraîchissement diminue. Cette diminution de performance était cependant à prévoir. Par contre, même si l'estimation de la trajectoire est moins bonne qu'à 150 Hz, les résultats restent viables pour l'application de navigation visée. En effet, l'erreur sur la position oscille entre -5 cm et 2 cm. La précision de l'estimation de la position reste nettement supérieure aux informations fournies par l'USBL. Même si la fréquence de rafraîchissement de la position, de la vitesse et de l'attitude est faible, cette correction permet de stabiliser efficacement le système de navigation inertielle. Sur le graphique d'erreur en position (Figure 7.21 en bas à droite), une oscillation rapide et de faible amplitude est observée. Ce phénomène n'est pas présent lorsque la fréquence de rafraîchissement est élevée. Il s'agit de la dérive des capteurs inertiels suivie d'une correction. L'estimation de position dérive de quelques millimètres durant la période de $0,5$ seconde pendant laquelle elle n'est pas corrigée. Lorsque la correction survient, la dérive est compensée instantanément, créant un effet d'oscillation en forme de rampe.

7.2.11 Mise en œuvre d'une centrale inertielle à faibles coûts.

Cet essai consiste à faire subir les mêmes trajectoires avec le même filtrage de Kalman à une centrale inertielle de faible précision. Le capteur VN-100, utilisé pour cet essai, est considéré comme une centrale inertielle de catégorie industrielle. Il est caractérisé par une instabilité du biais des gyromètres de $100\text{ }^{\circ}/h$ et de $0,5\text{ mg}$ pour les accéléromètres. La dérive et le bruit présents sont plus élevés que le capteur de référence SDI-500 utilisé pour les tests précédents ($1\text{ }^{\circ}/h$ pour les gyromètres et $200\text{ }\mu\text{g}$ pour les accéléromètres). Puisque la même trajectoire et les mêmes corrections seront effectuées, ce test permet d'analyser l'influence directe de la qualité de la centrale inertielle sur le comportement global du système de navigation.

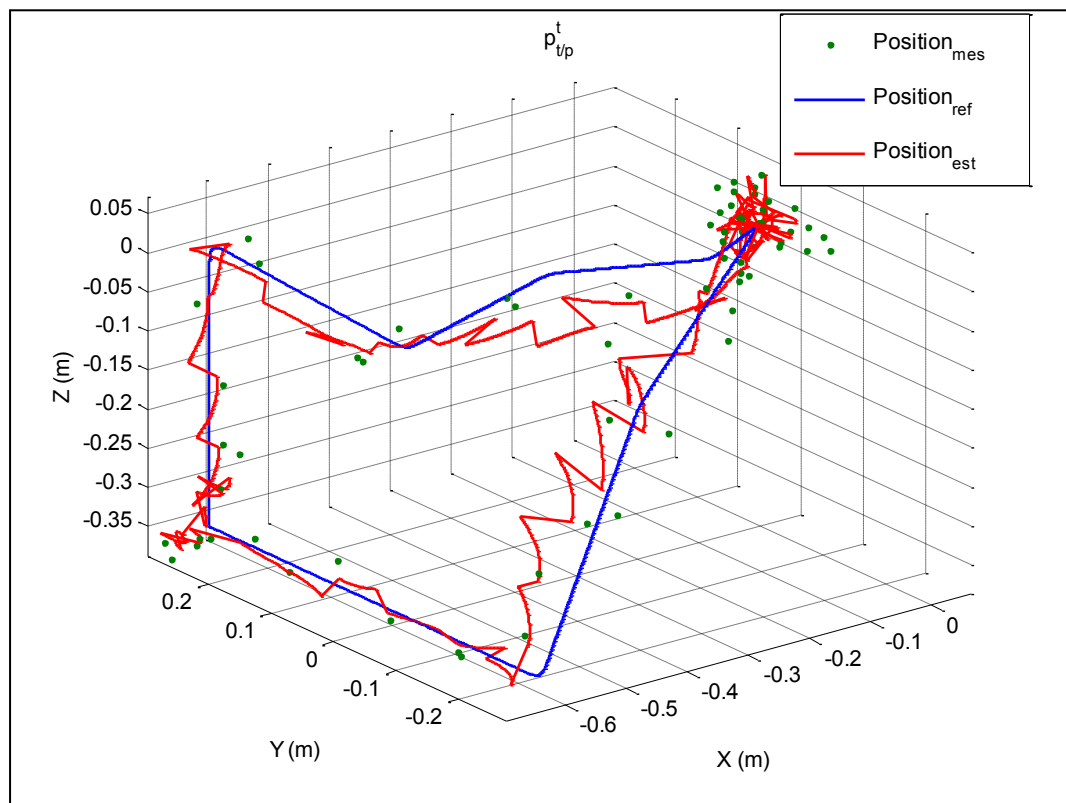


Figure 7.22 Suivi de trajectoire avec un SNI de faible coût

La Figure 7.22 met en évidence l'impact négatif d'une centrale inertielle de faible précision sur l'estimation de la position par le système de navigation avec filtrage de Kalman. Il est intéressant de noter que les erreurs RMS (Tableau 7-6) obtenues avec le capteur VN-100 ne sont que légèrement supérieures à celles obtenues avec le SDI-500 et cela malgré la différence de performance notable entre les deux capteurs. En effet, même si l'estimation de position avec le VN-100 oscille beaucoup, les signaux de mesures absolues permettent de stabiliser et de conserver l'estimation de la position proche de sa valeur de référence. Dans ce cas, l'analyse de l'erreur RMS n'est pas nécessairement un bon indicateur pour comparer l'impact de la qualité d'une centrale inertielle sur le système de navigation.

Tableau 7-6 Comparaison de l'erreur RMS de position

Erreur RMS	Sdi-500	VN-100
Axe x	$1,99 \cdot 10^{-2}$	$2,45 \cdot 10^{-2}$
Axe y	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$2,32 \cdot 10^{-2}$
Axe z	$0,83 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$

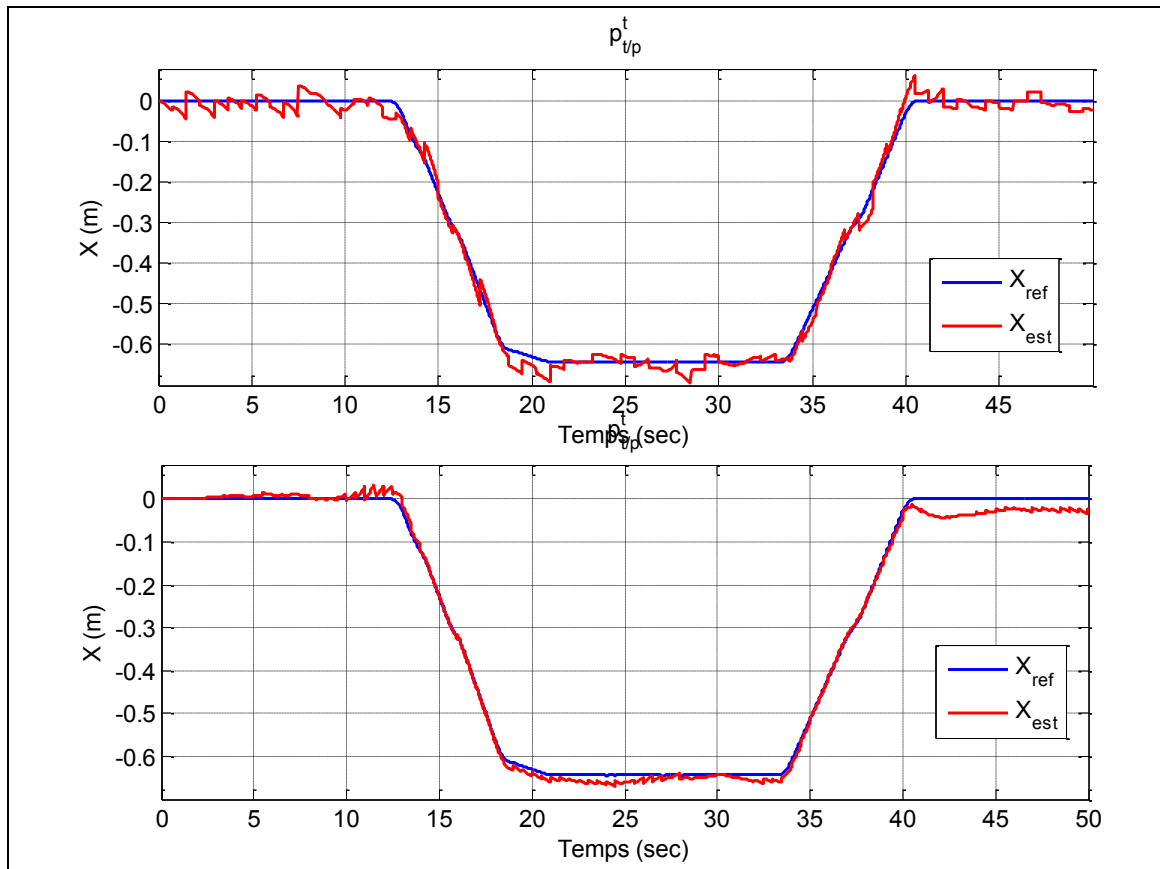


Figure 7.23 Comparaison entre les centrales inertielle

Sur le graphique d'estimation de position du VN-100 (Figure 7.23, graphique du haut), entre deux mesures, l'estimation de position dérive fortement. Ce comportement n'est pas désirable et peut être problématique. Cependant, puisque peu de confiance est accordée à la centrale inertielle en raison des variances élevées qui affectent ses mesures, le filtrage va fortement corriger les valeurs inertielle. L'estimation de la position du sous-marin effectuera des sauts importants chaque fois que le système de navigation inertielle sera corrigé par une nouvelle mesure de l'USBL. Ce phénomène est perceptible sur le graphique du capteur VN-100. Cet effet peut être problématique au niveau du contrôle du sous-marin. Dans ce cas, l'estimation par filtrage de Kalman est donc fortement dictée par la qualité des signaux de mesures absolues. Avec des capteurs inertiels de faible qualité, le système de navigation ne profitera pas réellement des caractéristiques d'estimation hautes fréquences des centrales inertielle afin d'améliorer l'estimation. Au contraire, le SDI-500 permet de bien fusionner

les avantages offerts par un IMU. Les caractéristiques intéressantes des capteurs inertiels sont combinées aux mesures externes qui possèdent des qualités complémentaires augmentant ainsi la fiabilité de l'estimation.

7.3 Conclusion

Les simulations des capteurs sont souvent très optimistes par rapport à leurs performances réelles. Lors de l'expérimentation, des performances bien différentes ont été démontrées. Cependant, l'estimation de l'état du véhicule sous-marin avec fusion indirecte de Kalman est suffisante pour l'application. Les expérimentations ont permis de conclure que la fréquence des corrections par les signaux de mesure absolue joue un rôle crucial dans les performances d'un système de navigation.

L'ajout de capteurs supplémentaires influence la performance du filtre comme la théorie du filtrage de Kalman le démontre. Cependant, si on ajoute un capteur de faible qualité, son impact sur l'estimation sera faible puisque sa variance sera élevée par rapport au capteur de bonne qualité. L'ajout de capteurs de faible qualité influencera donc peu les performances. Les centrales inertielles dictent la qualité du comportement hautes fréquences de l'estimation alors que les mesures externes influencent plutôt la stabilité par rapport à la trajectoire de référence. Les mesures externes sont normalement beaucoup plus lentes. Un bon équilibre entre les performances d'une centrale inertielle et celles des capteurs externes est essentiel pour obtenir un système de navigation de bonne qualité.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, la problématique d'un système de navigation inertielle appliquée à un robot d'inspection sous-marin a été abordée. Les capteurs inertiels offrent des mesures de position qui dérivent avec le temps et qui doivent par conséquent, être stabilisés. Pour ce faire, une solution par filtrage de Kalman indirect a été proposée. Les algorithmes composant un système de navigation inertielle avec et sans assistance ont été développés.

L'objectif de ce projet était de valider l'approche du filtrage de Kalman indirect pour un système de navigation sous-marin. Cette solution facilite la calibration des paramètres de variance du filtre contrairement à la calibration de la structure directe où une étude du modèle doit être effectuée afin de construire les matrices de covariance. En effet, la méthode de la variance d'Allan a permis d'évaluer les paramètres de bruits, ce qui a permis un ajustement rapide et précis du filtre de Kalman indirect. Dans ce mémoire l'effet des différents paramètres de bruit sur les performances de l'estimation de l'état du véhicule a également été évalué. Un survol du lien entre les caractéristiques des capteurs et leurs effets sur le comportement du système a été effectué.

Différentes expérimentations à l'aide d'une centrale inertielle et une trajectoire effectuée par un robot manipulateur ont permis d'analyser le comportement de la solution proposée dans un contexte quasi réaliste. L'étude a démontré que la formulation du filtre de Kalman indirect semble viable dans l'application d'un sous-marin d'inspection dans le domaine de la production d'électricité. De plus, elle offre une solution simple et performante : deux critères importants dans un cadre industriel. La structure du filtre permet d'utiliser une approximation linéaire des équations d'erreurs pour décrire la dynamique; ce qui simplifie les algorithmes de compensation tout en maintenant de bonnes performances. L'analyse de l'effet des différents paramètres du filtrage a permis de tirer plusieurs conclusions bénéfiques pour la suite des travaux.

Ces expérimentations ont permis de conclure que les centrales inertielles sont très sensibles et dérivent rapidement. Les centrales inertielles influencent le comportement à haute fréquence alors que les mesures provenant des capteurs absolus déterminent la stabilité à long terme de l'estimation. Il est donc important d'intégrer des capteurs de différentes natures dans le filtrage de Kalman puisque les capteurs semblables sont soumis au même type de bruit, n'améliorant pas l'estimation globale. La fiabilité et l'estimation s'améliorent si les capteurs utilisés sont de nature différente.

Même si elle comporte certaines limitations au niveau du réalisme, la méthodologie de validation du système sur un robot manipulateur s'est avérée intéressante et pourrait être utilisée comme première validation pour d'autres algorithmes utilisés en robotique mobile. Cependant, les résultats obtenus sur ce banc d'essai sont difficiles à extrapoler pour un cas réel sous l'eau avec des capteurs USBL et DVL gouvernés par des perturbations acoustiques difficilement modélisables. La distance trop courte parcourue par le robot constitue également une limitation importante de cette approche.

RECOMMANDATIONS

Ce mémoire porte sur la validation et non sur l'amélioration du système de navigation. Il serait donc souhaitable que le perfectionnement de l'algorithme de filtrage de Kalman fasse l'objet de travaux subséquents.

De meilleures performances pourraient être atteintes en développant un modèle plus complet au niveau du filtrage de Kalman. Selon les résultats obtenus, l'estimation en ligne des biais augmente peu la performance. Cependant, si le filtrage de Kalman tombait en panne, cette estimation permettrait de réduire la dérive inertielle et d'obtenir une estimation de position valable sur une plus longue période que si une calibration avait été effectuée seulement lors de l'initialisation. Une autre solution permettant d'obtenir un système de navigation plus précis et plus fiable serait d'effectuer une intégration des mesures externes par couplage fort. Une implémentation semblable aux travaux de (Miller 2010) augmenterait la robustesse du système.

Les performances sur la position verticale pourraient être améliorées par l'ajout d'un nouveau capteur externe de pression. Un profondimètre permettrait d'offrir une mesure de position verticale lors du filtrage améliorant ainsi l'estimation. De plus, il s'agit d'un capteur proprioceptif rendant son implémentation facile dans un système d'inspection. L'ajout d'un capteur offrant une redondance sur une mesure augmenterait de surcroît la fiabilité du système de navigation.

Même si l'utilisation d'un bras robotisé pour effectuer les trajectoires a permis l'obtention de bons résultats, différentes améliorations pourraient être apportées pour rendre le comportement du système plus réaliste. Pour ce faire, il serait recommandé de mettre en œuvre le système de navigation en temps réel avec la structure logicielle et matériel disponibles sur le sous-marin. Combiné à une simulation des capteurs USBL et DVL plus réalistes avec des fréquences de rafraîchissement asynchrones, ces mesures permettraient d'atteindre cet objectif. De plus, l'intégration du contrôleur du robot sous-marin dans le banc

d'essai permettrait d'expérimenter l'interaction entre le système de navigation et le contrôleur.

BIBLIOGRAPHIE

- Allan, D. W. 1966. « Statistics of atomic frequency standards ». *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, n° 2, p. 221-230.
- An, P. E., A. J. Healey, J. Park et S. M. Smith. 1997. « Asynchronous data fusion for AUV navigation via heuristic fuzzy filtering techniques ». In *OCEANS '97. MTS/IEEE Conference Proceedings* (6-9 Oct 1997). Vol. 1, p. 397-402 vol.1.
- El-Sheimy, N., Hou Haiying et Niu Xiaoji. 2008. « Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance ». *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 57, n° 1, p. 140-149.
- Eustice, R. M., O. Pizarro et H. Singh. 2008. « Visually Augmented Navigation for Autonomous Underwater Vehicles ». *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, vol. 33, n° 2, p. 103-122.
- Farrell, J. 2008. *Aided navigation: GPS with high rate sensors*. McGraw-Hill, 530 p.
- Gade, K. 2009. « Introduction to Inertial Navigation and Kalman Filtering ». In *IAIN World Congress* (Stockholm, October 2009). p. 1-57.
- Gracias, N. R., S. van der Zwaan, A. Bernardino et J. Santos-Victor. 2003. « Mosaic-based navigation for autonomous underwater vehicles ». *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, vol. 28, n° 4, p. 609-624.
- Hegrenaes, O., E. Berglund et O. Hallingstad. 2008. « Model-aided inertial navigation for underwater vehicles ». In *Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on* (19-23 May 2008). p. 1069-1076.
- IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros. 1998. « ». *IEEE Std 952-1997*, p. 74.
- IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros. 2006. « ». *IEEE Std 647-2006 (Revision of IEEE Std 647-1995)*, p. 1-83.
- Miller, P. A., J. A. Farrell, Zhao Yuanyuan et V. Djapic. 2010. « Autonomous Underwater Vehicle Navigation ». *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, vol. 35, n° 3, p. 663-678.
- Morgado, M., P. Oliveira, C. Silvestre et J. F. Vasconcelos. 2006. « USBL/INS Tightly-Coupled Integration Technique for Underwater Vehicles ». In *Information Fusion, 2006 9th International Conference on* (10-13 July 2006). p. 1-8.

- Papantonopoulos, N., D. Panagou et S. Alexandri. 2009. « A NAVIGATION SYSTEM FOR UNDERWATER VEHICLES INTEGRATING DVL AND USBL MEASUREMENTS ». In *9th Symposium on Oceanography & Fisheries*. p. 117-122.
- Ragel, B. A., et M. Farooq. 2005. « Comparison of forward Vs. feedback Kalman filter for aided inertial navigation system ». In *Information Fusion, 2005 8th International Conference on* (25-28 July 2005). Vol. 1, p. 6 pp.
- Ridao, Pere, David Ribas, Emili Hernandez et Alex Rusu. 2011. « USBL/DVL navigation through delayed position fixes ». In *Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on* (9-13 May 2011). p. 2344-2349.
- Roumeliotis, S. I., G. S. Sukhatme et G. A. Bekey. 1999. « Circumventing dynamic modeling: evaluation of the error-state Kalman filter applied to mobile robot localization ». In *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on* (1999). Vol. 2, p. 1656-1663 vol.2.
- Savage, P. 1998. « Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design ». *Journal of guidance, control, and dynamics* January–February 1998, p. 19-27.
- Shuster, M.D., et J.L. Junkins. 1993. « A survey of attitude representations ». *The journal of Astronautical Sciences*. p. 439-517.
- Siegwart, R., et I.R. Nourbakhsh. 2004. *Introduction to autonomous mobile robots*. MIT Press, 335 p.
- Tena Ruiz, I., S. de Raucourt, Y. Petillot et D. M. Lane. 2004. « Concurrent mapping and localization using sidescan sonar ». *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, vol. 29, n° 2, p. 442-456.
- Titterton, David H., et John L. Weston. 2004. *Strapdown Inertial Navigation Technology (2nd Edition)*. Institution of Engineering and Technology, 558 p.
- Welch, G., et G. Bishop. 2006. « An Introduction to the Kalman Filter ». University of North Carolina: Chapel Hill.
- Woodman, O. 2007. *An introduction to inertial navigation*. University of Cambridge, 37 p.

