

ETS ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ  
À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE  
M. Ing.

PAR  
Monia MECHIRGUI

COMMANDÉ OPTIMALE MINIMISANT LA CONSOMMATION D'ÉNERGIE D'UN  
DRONE UTILISÉ COMME RELAI DE COMMUNICATION

MONTRÉAL, LE 15 OCTOBRE 2014

©Tous droits réservés, Monia Mechirgui, 2014

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

**PRÉSENTATION DU JURY**

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. François Gagnon, directeur de mémoire  
Département génie électrique à l'École de technologie supérieure

Mme Ouassima Akhrif codirectrice de mémoire  
Département génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Rachid Aissaoui, président du jury  
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Naïm K. Batani, membre du jury  
Département génie électrique à l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 16 SEPTEMBRE 2014

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE



## **REMERCIEMENTS**

Le présent travail s'insère dans le cadre du projet de maîtrise de recherche en génie électrique à l'École de Technologie Supérieure (ÉTS) de Montréal. Ce projet a été effectué au sein du Laboratoire de Communications et d'Intégration de la MicroElectronique (LaCIME).

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement monsieur François Gagnon et madame Ouassima Akhrif, mon directeur et ma co-directrice respectivement, pour m'avoir offert l'opportunité d'accomplir ce projet ainsi que pour leur attention et leurs critiques. Des remerciements particuliers pour Guillaume Charland, Chamseddine Abbas et Samuel Gagné pour leurs précieux conseils et leurs soutiens. Je remercie aussi mes amis du LaCIME pour leur appui et leurs encouragements.

Je tiens également à remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que pour le temps qu'ils ont consacré à évaluer mon projet. L'aboutissement de cet ouvrage n'aurait pas été possible sans le soutien de mes proches. À ce titre je remercie vivement mes parents et toute ma famille pour leur soutien, leurs encouragements et leur affection qui m'ont été très bénéfiques.



# **CONCEPTION ET RÉALISATION D'UNE COMMANDE OPTIMALE MINIMISANT LA CONSOMMATION D'ÉNERGIE D'UN DRONE UTILISÉ COMME RELAI DE COMMUNICATION**

Monia MECHIRGUI

## **RÉSUMÉ**

Ce projet a pour objectif de mettre en application la commande optimale, plus particulièrement le régulateur linéaire quadratique pour le contrôle de position d'un véhicule aérien sans pilote à quatre hélices connu comme étant un quadrotor. Ce dernier possède une structure symétrique et simple. Ainsi, son contrôle est relativement facile par rapport aux hélicoptères traditionnels.

La commande optimale peut s'avérer être un contrôleur idéal permettant de concilier entre les performances de poursuite et la consommation d'énergie. En pratique, les conditions de linéarité ne sont pas satisfaites, mais certaines élaborations du régulateur linéaire quadratique ont été utilisées dans de nombreuses applications non linéaires avec de bons résultats. Le contrôleur linéaire quadratique utilisé dans le présent mémoire est présenté sous deux formes : simple et adapté à l'état de charge de la batterie. Dans ce projet, on se base sur la structure traditionnelle du régulateur linéaire quadratique et on introduit un nouveau critère qui se base sur l'état de charge de la batterie, dans le but d'optimiser la consommation d'énergie.

Dans ce mémoire, le contrôleur linéaire quadratique est appliqué pour commander le quadrotor. Cette commande est destinée à être utilisée pour contrôler et maintenir la trajectoire désirée pendant plusieurs manœuvres tout en minimisant la consommation d'énergie. À la fois simple et adapté, le contrôleur linéaire quadratique est mis en œuvre sous Simulink en temps discret. Le modèle simule la dynamique et le contrôle d'un quadrotor. Les performances et la stabilité du système sont ensuite analysées avec plusieurs tests, du simple vol stationnaire aux trajectoires complexes en boucle fermée.

**Mots clés:** Commande optimale, Quadrotor, LQR, LQR adapté.



**CONCEPTION ET RÉALISATION D'UNE COMMANDE OPTIMALE  
MINIMISANT LA CONSOMMATION D'ÉNERGIE D'UN DRONE UTILISÉ  
COMME RELAI DE COMMUNICATION**

Monia MECHIRGUI

**ABSTRACT**

The purpose of this project is to implement an optimal control regulator, particularly the linear quadratic regulator in order to control the position of an unmanned aerial vehicle known as a quadrotor. This type of UAV has a symmetrical and simple structure. Thus, its control is relatively easy compared to conventional helicopters.

Optimal control can be proven to be an ideal controller to reconcile between the tracking performance and energy consumption. In practice, the linearity requirements are not met, but some elaborations of the linear quadratic regulator have been used in many nonlinear applications with good results. The linear quadratic controller used in this thesis is presented in two forms: simple and adapted to the state of charge of the battery. Based on the traditional structure of the linear quadratic regulator, we introduced a new criterion which relies on the state of charge of the battery, in order to optimize energy consumption.

This command is intended to be used to monitor and maintain the desired trajectory during several maneuvers while minimizing energy consumption. Both simple and adapted, linear quadratic controller are implemented in Simulink in discrete time. The model simulates the dynamics and control of a quadrotor. Performance and stability of the system are analyzed with several tests, from the simply hover to the complex trajectories in closed loop.

**Keywords:** Optimal control, quadrotor, LQR, adapted LQR.



## TABLE DES MATIÈRES

	Page
<b>CHAPITRE 1 INTRODUCTION ET MISE EN CONTEXTE .....</b>	1
1.1 Introduction.....	1
1.2 Mise en contexte du projet.....	2
1.3 Cahier de charge du projet Launch and Forget.....	3
1.4 Objectifs du projet et méthodologie.....	5
1.5 Les défis et les apports du projet.....	6
1.6 Organisation du rapport .....	7
<b>CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART DES DRONES ET DES MÉTHODES DE COMMANDÉ.....</b>	3
2.1 Introduction.....	3
2.2 État de l'art des drones.....	3
2.2.1 Les catégories des drones.....	5
2.2.2 Les drones à voilure tournante.....	7
2.2.2.1 Les hélicoptères classiques .....	7
2.2.2.2 Les rotors coaxiaux .....	8
2.2.2.3 Les rotors coaxiaux carénés .....	10
2.2.2.4 Les rotors multiples.....	12
2.2.3 État de l'art des différentes stratégies de commande des drones .....	13
2.3.1 Approches linéaires.....	14
2.3.1.1 La commande par PID .....	14
2.3.1.2 La commande par placement de pôles .....	16
2.3.1.3 La commande linéaire quadratique.....	17
2.3.1.4 La commande prédictive.....	17
2.3.1.5 La commande par séquencement de gains.....	18
2.3.2 Approches non linéaires.....	19
2.3.2.1 La commande par linéarisation entrée-sortie.....	19
2.3.2.2 La commande par backstepping.....	20
2.3.2.3 La commande hiérarchique.....	20
2.3.2.4 La commande par mode glissant.....	21
2.3.2.5 La commande tolérante aux défauts .....	22
2.4 Conclusion .....	23
<b>CHAPITRE 3 MODÉLISATION DU SYSTÈME .....</b>	24
3.1 Introduction.....	24
3.2 Choix des coordonnées .....	25
3.2.1 Définition des vecteurs de position, de force et de moment .....	25
3.2.2 Représentation de l'orientation et matrice de rotation .....	26
3.2.3 Vitesses angulaires.....	28
3.2.4 Matrice de propagation des angles d'Euler.....	29
3.3 Équations dynamiques génériques du mouvement .....	30

3.4	Les principaux moments et forces .....	33
3.4.1	Force de portance.....	33
3.4.2	Moment de trainée .....	34
3.4.3	Précession gyroscopique.....	35
3.4.4	Force de gravité.....	35
3.4.5	Autres forces et moments non modélisés.....	36
3.5	Modèle du quadrotor.....	36
3.6	Relation forces/moment et vitesse de moteurs.....	38
3.7	Modèle dynamique du moteur .....	39
3.8	Conclusion .....	40
<b>CHAPITRE 4    COMMANDE OPTIMALE.....</b>		<b>43</b>
4.1	Introduction.....	43
4.2	Critères d'optimalité de la commande optimale .....	44
4.2.1	Principe d'optimalité de Bellman .....	45
4.2.2	Principe de minimum de Pontriagine.....	46
4.2.3	Commande bang-bang .....	48
4.3	Commande linéaire quadratique .....	48
4.3.1	Contrôleur linéaire quadratique à horizon fini.....	48
4.3.2	Contrôleur linéaire quadratique à horizon infini.....	51
4.3.3	Minimisation de l'énergie du contrôle .....	51
4.3.4	Minimisation de l'erreur du vecteur d'état .....	52
4.3.5	Minimisation de l'erreur en régime permanent du vecteur d'état.....	52
4.4	Régulateur linéaire quadratique .....	53
4.5	Robustesse de la commande linéaire quadratique .....	55
4.5.1	Différence de retour .....	57
4.5.2	Marges de stabilité et robustesse structurelle généralisées des régulateurs LQR multivariables.....	58
4.5.3	Choix des pondérations.....	59
4.6	Conclusion .....	60
<b>CHAPITRE 5    APPLICATION DE LA COMMANDE LINÉAIRE QUADRATIQUE ..</b>		<b>63</b>
5.1	Introduction.....	63
5.2	Le problème de régulation d'état .....	63
5.3	Définition du vecteur d'état .....	64
5.4	Linéarisation du modèle dynamique .....	65
5.4.1	Recherche d'un point d'équilibre.....	65
5.4.2	Application du modèle dynamique linéarisé autour du point d'équilibre.	66
5.5	Conclusion .....	69
<b>CHAPITRE 6    INTÉGRATION DU CRITÈRE DE LA MINIMISATION D'ÉNERGIE DANS LA COMMANDE LINÉAIRE QUADRATIQUE .....</b>		<b>70</b>
6.1	Introduction.....	70
6.2	Stratégie de minimisation de l'énergie .....	70
6.3	Modélisation de la nouvelle commande linéaire adaptée .....	71
6.4	Compromis performance/durée de vie.....	74

6.5	Stabilité au sens de Lyapunov de la commande adaptée .....	75
6.6	Conclusion .....	77
<b>CHAPITRE 7 VALIDATION ET TEST DU CONTRÔLEUR LINÉAIRE QUADRATIQUE .....</b>		<b>81</b>
7.1	Introduction.....	81
7.2	Simulation du modèle non linéaire de la dynamique du quadrotor .....	81
7.2.1	Le bloc dynamique.....	84
7.2.2	Bloc du contrôleur linéaire quadratique.....	85
7.2.3	Bloc moteur BLDC .....	85
7.2.4	Bloc des capteurs .....	86
7.3	Simulation du contrôleur quadratique classique .....	87
7.3.1	Vol stationnaire.....	88
7.3.2	Variation d'altitude .....	90
7.3.3	Variation linéaire .....	91
7.3.4	Variation hélicoïdale .....	92
7.4	Simulation de la nouvelle commande quadratique adaptée .....	94
7.4.1	Bloc du calcul de puissance .....	96
7.4.2	Bloc de calcul de $\rho$ .....	97
7.4.3	Le nouveau bloc du control LQR adapté .....	98
7.5	Comparaison du backstepping et la commande optimale LQ .....	100
7.5.1	Contrôleur backstepping .....	100
7.5.2	Modèle Simulink du contrôleur Backstepping .....	101
7.5.3	Comparaison .....	101
7.5.3.1	Vol stationnaire .....	102
7.5.3.2	Variation d'altitude .....	103
7.5.3.3	Mouvement hélicoïdal .....	104
7.6	L'apport de la nouvelle commande linéaire quadratique adaptée .....	106
7.7	Analyse des résultats et apport de la nouvelle LQR adaptée dans la consommation de l'énergie.....	108
7.8	Conclusion .....	113
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>114</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>		<b>119</b>
Tableau 1.1	Résultats attendus pour le premier prototype extrait du cahier de charge du projet Launch and forget.....	4
Tableau 3.1	Les principaux effets affectant le quadrotor .....	31
Tableau 7.1	Les paramètres par défaut utilisés dans les simulations.....	89



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Vaste gamme d'applications tactiques offertes par Ultra ..... 2
Figure 1.2	Application du drone réalisant le relai de communication par Ultra Tirée du site internet d'Ultra Electronics ..... 3
Figure 2.1	L'appareil n° 2 d'Ehmichen, 1923 ..... 11
Figure 2.2	Exemple de drone HALE ..... 5
Figure 2.3	Exemple de drone MALE ..... 6
Figure 2.4	Exemple de mini drones ..... 6
Figure 2.5	Exemple de micro drones ..... 7
Figure 2.6	Exemples d'hélicoptères à rotor anticouple de queue ..... 8
Figure 2.7	Exemple d'hélicoptères à rotors coaxiaux ..... 15
Figure 2.8	Exemple de drones à rotors coaxiaux à usage interne ..... 16
Figure 2.9	Exemple de drones à rotors coaxiaux à usage externe ..... 16
Figure 2.10	Exemple de drone à rotors coaxiaux à carène courte ..... 11
Figure 2.11	Exemples de drone à rotors coaxiaux à carène longue ..... 18
Figure 2.12	Exemple de drone à rotors multiples ..... 19
Figure 2.13	Principe de la commande par PID ..... 21
Figure 2.14	Zone idéale de placement de pôles de la boucle ..... 22
Figure 2.15	Principe de la commande prédictive ..... 24
Figure 2.16	Principe de commande par séquencement de gain ..... 19
Figure 2.17	Schéma structurel de la commande hiérarchique ..... 27
Figure 2.18	Principe de la commande tolérante aux défauts ..... 29
Figure 3.1	Définition des axes ..... 33
Figure 3.2	Variations de la vitesse angulaire ..... 34

Figure 3.3	Le moment de trainée d'une hélice .....	41
Figure 3.4	Identification du sens de rotation des rotors .....	44
Figure 4.1	Schéma bloc simplifié du régulateur linéaire quadratique.....	53
Figure 4.2	Lieu de Nyquist de la fonction de transfert de la boucle linéaire quadratique .....	63
Figure 5.1	Diagramme de la formulation du problème de poursuite par le régulateur linéaire quadratique .....	66
Figure 5.2	Le diagramme de la simulation du régulateur linéaire classique.....	71
Figure 6.1	Diagramme de simulation du LQR adapté .....	77
Figure 7.1	Modèle Simulink du régulateur linéaire quadratique .....	85
Figure 7.2	Modèle Simulink du bloc dynamique.....	86
Figure 7.3	Modèle Simulink du bloc de contrôle.....	87
Figure 7.4	Modèle Simulink du bloc moteur BLDC.....	88
Figure 7.5	Simulation des positions linéaires en vol stationnaire .....	91
Figure 7.6	Simulation des positions angulaires en vol stationnaire .....	92
Figure 7.7	Variation d'altitude.....	93
Figure 7.8	Poursuite d'une trajectoire linéaire selon l'axe X.....	94
Figure 7.9	Poursuite d'une trajectoire hélicoïdale .....	95
Figure 7.10	Poursuite des positions linéaires x, y et z et de l'angle du lacet lors du mouvement de la trajectoire hélicoïdale. ....	96
Figure 7.11	Modèle Simulink du régulateur linéaire quadratique adapté .....	99
Figure 7.12	Bloc de calcul de puissance .....	99
Figure 7.13	Bloc de calcul du facteur Rho .....	100
Figure 7.14	Modèle Simulink du contrôleur LQR adapté.....	101
Figure 7.15	Bloc de mise à jour du gain optimal du contrôleur LQR adapté .....	101
Figure 7.16	Diagramme de simulation du modèle LQR adapté.....	101

Figure 7.17	Modèle Simulink du contrôleur Backstepping .....	105
Figure 7.18	Simulation des positions linéaires en vol stationnaire à l'aide du contrôleur du Backstepping .....	105
Figure 7.19	Performance de poursuite pour la variation d'altitude en utilisant le contrôleur de Backstepping .....	106
Figure 7.20	Poursuite des positions linéaires lors du mouvement hélicoïdal .....	107
Figure 7.21	Poursuite du mouvement hélicoïdal à l'aide du backstepping .....	109
Figure 7.22	Évolution de Rho suite à la décharge de la batterie.....	110
Figure 7.23	Mouvement hélicoïdale avec le LQR adapté.....	111
Figure 7.24	Comparaison de la poursuite des positions x, y et z en utilisant les contrôleurs Backstepping, LQR classique et LQR adaptée .....	110
Figure 7.25	Courbe de décharge lors d'une poursuite de trajectoire hélicoïdale pour les trois stratégies de contrôle LQR classique, LQR adaptée et le backstepping .....	113
Figure 7.26	Courbe de décharge de la batterie lors de trajectoire hélicoïdale pour les deux stratégies de contrôle linéaires .....	112
Figure 7.27	Courbe de décharge dans la zone où l'énergie disponible est inférieure au seuil de confort de la batterie lors de trajectoire hélicoïdale pour les deux stratégies de contrôle linéaires.....	114



## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

$\mathcal{F}_I$	Repère inertiel
$O_I$	Origine du repère inertiel
$i_I$	Axe $i$ du repère inertiel
$j_I$	Axe $j$ du repère inertiel
$k_I$	Axe $k$ du repère inertiel
$\mathcal{F}_b$	Repère du quadrotor
$O_b$	Origine du repère du quadrotor
$i_b$	Axe $i$ du repère du quadrotor
$j_b$	Axe $j$ du repère du quadrotor
$k_b$	Axe $k$ du repère du quadrotor
$\eta$	Vecteur de position exprimé dans $\mathcal{F}_I$
$x$	Position du quadrotor selon l'axe $i_I$
$y$	Position du quadrotor selon l'axe $j_I$
$z$	Position du quadrotor selon l'axe $k_I$
$\mu$	Vitesse linéaire exprimé dans $\mathcal{F}_I$
$\mathbf{v}$	Vecteur de la vitesse linéaire exprimée dans $\mathcal{F}_b$
$u$	Vitesse du quadrotor selon l'axe $i_b$
$v$	Vitesse du quadrotor selon l'axe $j_b$
$w$	Vitesse du quadrotor selon l'axe $k_b$
$\omega$	Vecteur des vitesses angulaires du repère $\mathcal{F}_b$ par rapport à $\mathcal{F}_I$ exprimées dans $\mathcal{F}_b$
$p$	Vitesse angulaire autour de l'axe $i_b$
$q$	Vitesse angulaire autour de l'axe $j_b$
$r$	Vitesse angulaire autour de l'axe $k_b$
$f, f^b$	Vecteur des forces exprimé dans $\mathcal{F}_b$
$\tau, \tau^b$	Vecteur de couple exprimé dans $\mathcal{F}_b$
$f^I$	Vecteur des forces exprimé dans $\mathcal{F}_I$
$\tau^I$	Vecteur de couple exprimé dans $\mathcal{F}_I$

$G_r$	Vecteur de précession gyroscopique exprimé dans $\mathcal{F}_b$
$\Theta$	Vecteur des angles d'Euler
$\varphi$	Roulis
$\theta$	Tangage
$\psi$	Lacet
$I$	Tenseur d'inertie du quadrotor exprimé dans $\mathcal{F}_b$
$m$	Masse du quadrotor
$g$	Accélération gravitationnelle
$T$	Force de poussée totale générée par les moteurs
$\Omega_i$	Vitesse de rotation du moteur $i$
$I_m$	Moment d'inertie du moteur
$L$	Distance du centre de masse à l'application de la force de portance
$\rho(\Theta)_b^I, \rho$	Matrice de propagation des angles d'Euler $\mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_I$
$R_b^I(\Theta), R$	Matrice de rotation $\mathcal{F}_b \rightarrow \mathcal{F}_I$
$\eta_d(t)$	Vecteur de position exprimé dans $\mathcal{F}_I$
$x_d(t)$	Trajectoire de la position en $x$ désirée
$y_d(t)$	Trajectoire de la position en $y$ désirée
$z_d(t)$	Trajectoire de la position en $z$ désirée
$\psi_d(t)$	Lacet désiré

## **LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE**

UAV	Unmanned Aerial Vehicle
LQR	Linear Quadratic Regulator
MPC	Model Predictive Control
LTI	Linear Time Invariant
HALE	High altitude Long Endurance
MALE	Medium Altitude, Long Endurance
UAV	Unmanned aerial vehicle
VTOL	Vertical Take OFF and Landing
RAC	Rotor Anti-Couple
PID	Proportionnel Intégral-Dérivé
MPC	Model predictive control



## **CHAPITRE 1**

### **INTRODUCTION ET MISE EN CONTEXTE**

#### **1.1      Introduction**

Le terme «drone» se rapporte à tous les engins volants sans pilote, actionnés par moteur, qui peuvent être utilisés plusieurs fois (au contraire des projectiles volants). Dans le jargon technique anglais, ils sont aussi désignés par Unmanned Aerial Vehicle (UAV), Remotely Piloted Vehicle (RPV) ou Remotely Operated Aircraft(ROA).

L'enjeu opérationnel des drones est important. En effet, les drones ont connu un développement très rapide au cours des dernières décennies, mais c'est leur utilisation intensive sur le plan militaire qui a mis en lumière leur importance dans la gestion des conflits, soulignait déjà un rapport de l'Assemblée nationale de 2009. De plus, l'enjeu stratégique et industriel des drones est majeur. Les Américains déploient la plus importante flotte de drones en tous genres au monde : ils ont été les premiers à tirer un missile lors d'un essai d'un drone MQ-1 Predator, il y a un peu plus de dix ans. Ils possèdent aujourd'hui une véritable armada de drones, selon le bilan de la publication de référence spécialisée de l'IISS de Londres, The Military Balance 2011 : drones lourds armés de missiles Hellfire, comme les MQ-1 Predator ou les MQ-9 Reaper, drones d'observation comme les RQ-4 Global Hawk...

Les innovations dans les systèmes de navigation sans pilote sont peu à peu sorties du champ militaire. Ils commencent à équiper les flottes commerciales : on indique que les derniers Airbus et Boeing pourraient être capables de se passer entièrement de pilote humain aussi bien pour le décollage, le vol ainsi que l'atterrissement. Les pilotes ne seraient bientôt plus utiles que pour le "parking" de l'avion, lorsqu'il se rend à son terminal de débarquement, une procédure qui n'est pas encore automatisable dans tous les aéroports du monde. Les flottes des transporteurs comme FEDEX pourraient être les premières à utiliser ces technologies dans un cadre civil, ils n'attendent plus qu'une autorisation de l'administration fédérale de l'aviation américaine.

Les drones civils sont également utilisés dans le cadre où la présence d'humains peut s'avérer dangereuse pour eux. Des drones américains ont survolé les centrales nucléaires japonaises touchées par le tsunami pour prendre des mesures ainsi que des photographies. La police américaine les utilise pour patrouiller dans les villes, voire comme support lors d'arrestations.

## 1.2 Mise en contexte du projet

Le projet « Launch and forget » est initié par Ultra Electronics en collaboration avec l'ÉTS. Le projet consiste à déployer un drone jouant le rôle d'un relai de télécommunication entre deux véhicules mobiles terrestres. L'objectif est d'assurer la communication entre ces véhicules en cas de mission tactique comme on peut le voir sur les figures 1.1 et 1.2 qui représentent les différentes applications du projet.

Initié en 2012, ce projet présente un défi scientifique dans la conception, le contrôle et la navigation des drones.

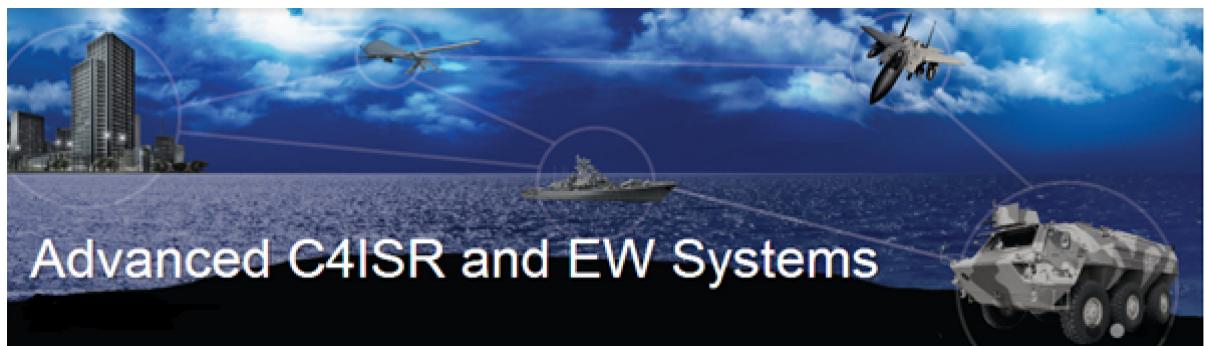


Figure 1.1 Vaste gamme d'applications tactiques offertes par Ultra  
Tirée du site internet d'Ultra Electronics (juillet 2014)

Ce projet est réparti sur trois principaux volets : les télécommunications, la navigation et le contrôle. Le volet télécommunication renferme la partie de traitement et de propagation du signal de communication entre les deux nœuds de télécommunication. Le second volet consiste à fournir la trajectoire optimale au contrôle. Finalement, le volet de contrôle responsable de l'asservissement de la trajectoire fournie par la navigation. Ce travail de

mémoire s'inscrit dans le troisième et vise le développement d'une loi de commande qui assure la stabilité du drone en boucle fermée tout en minimisant la consommation d'énergie.



Figure 1.2 Application du drone réalisant le relai de communication par Ultra  
Tirée du site internet d'Ultra Electronics

En effet, l'un des problèmes majeurs auxquels les constructeurs de drone font face est la limitation de l'énergie disponible pour effectuer leurs missions : Arriver à assurer le meilleur compromis entre l'autonomie du drone et le poids de ce dernier s'avère être une mission difficile.

Les spécifications techniques du marché nous ont mené à développer un algorithme de commande basé sur la méthode de la commande linéaire quadratique. Cette méthode fournit la stabilité du système en boucle fermée et diminue le conflit entre les actionneurs ce qui optimise la consommation de l'énergie.

### 1.3 Cahier de charge du projet Launch and Forget

Suite aux recommandations de monsieur Denis Couillard, directeur du département de l'innovation de produit chez Ultra, relatives à l'amélioration de la qualité de service de communications entre des véhicules militaires mobiles, il s'est avéré intéressant d'envisager

le déploiement d'un drone relayant les véhicules en mission. Pour l'instant, l'appareil choisi pour effectuer cette tâche est une plateforme de type quadrotor.

Il s'agit d'un modèle d'hélicoptère possédant quatre moteurs. Le quadrotor est un appareil très maniable. Il permet d'effectuer des décollages verticaux ainsi que des vols stationnaires. Cependant, celui-ci possède une dynamique de nature instable, non linéaire et fortement couplée. Le tableau 1.1 présente les différentes caractéristiques et paramètres du premier prototype à développer.

Tableau 1.1 Résultats attendus pour le premier prototype extrait du cahier de charge du projet Launch and forget

Paramètres	Prototype
Taille	dans l'ordre d'un sac de couchage emballé (démonté)
Durée de mise en place et de décollage	Peut-être déjà monté à des fins de démonstration; moins de 5 min pour le lancement
Poids	Peut être manipulé par une seule main
Charge utile	Relais et solution de radio capable OTM + CPU + bloc d'alimentation + antenne (radio WiFi pourrait être <100g)
Autonomie	20 mn
Altitude	500 pieds
Lancement	Pas de configuration de pré-lancement ou minimale
Restriction lors du lancement	Pas de route goudronnée. Surface de terre avec de la pierre et la végétation clairsemée
Navigation	Télécommandée si nécessaire pour la sécurité et la gestion de démonstration mais possibilité de changer de mode entièrement automatique navigation optimiser la couverture radio pour la démo
Vitesse de vol	20 km/h
Maneuvrabilité	Pas critique

Paramètres	Prototype
Environnement Opérationnel	Pas de pluie, température à déterminer, vent médium à léger
Méthode de récupération	Retour automatique au site de lancement ou en mode de sol choisi avant la perte de puissance
Exigence de formation de l'opérateur	Minimale
Coût	Moins de 10,000 \$ sans le radio (incluant tout le reste)

#### 1.4 Objectifs du projet et méthodologie

L'objectif de ce projet est de concevoir et de développer un système de contrôle permettant de répondre aux exigences et aux objectifs du projet « Launch and Forget ». C'est-à-dire permettre non seulement le positionnement autonome du quadrotor en fonction de caractéristiques mesurées des liaisons radio entre le quadrotor et les émetteurs radio montés sur les véhicules, mais aussi d'optimiser la consommation d'énergie.

Dans ce cadre d'idée se situe le projet de maîtrise qui consiste à développer une commande optimale en vue de minimiser l'énergie consommée par le drone jouant le rôle d'un relai de communication.

Les étapes majeures du projet sont les suivantes :

- modélisation de la dynamique du quadrotor;
- linéarisation autour d'un point de fonctionnement et obtention du modèle linéaire;
- conception d'une loi de commande linéaire pour le positionnement du quadrotor en se basant sur la commande LQR;
- validation de la loi de commande par simulation sur MATLAB/Simulink;
- intégration du critère de minimisation d'énergie dans la commande;
- comparaison des performances de la loi de commande backstepping par rapport au LQR.

## 1.5 Les défis et les apports du projet

De façon générale, la conception d'un tel système est plutôt complexe et requiert une attention particulière et présente un défi en soi. En effet, les drones, et plus particulièrement ceux à voilure tournante comme les quadrotors, sont des systèmes sous-actionnés, sensibles aux perturbations aérodynamiques et dont la dynamique est fortement non linéaire. Cette dernière présente de plus un couplage entre les variables d'état du système et de ses entrées de commande. Le couplage traduit le fait que tout changement dans une entrée de commande affecte non seulement la variable en question, mais également les autres. Pour éliminer l'activation indésirable de ces variables d'état, la coordination de toutes les entrées de commande est indispensable à chaque instant [2]. Par conséquent, il est clair que les caractéristiques intrinsèques aux drones à voilure tournante, comme les quadrotors, forment un défi qui doit être surmonté lors de la conception de la commande. De plus, Les approches dites linéaires, comme la commande linéaire quadratique, sont très appréciées, car leur conception et leur exécution sont relativement simples. De plus, bien que ces techniques sont très intéressantes, car elles permettent de déterminer précisément la stabilité, la performance et la robustesse de la boucle de commande, leur domaine de validité est limité autour d'un point de fonctionnement particulier. Ce dernier point constitue leur principale faiblesse. Inversement, les approches non linéaires, comme la commande par backstepping, procurent une description globale du véhicule et s'appliquent à l'ensemble du comportement du vol. Notre défi, plus particulièrement, est d'optimiser le contrôleur linéaire quadratique afin de réduire la consommation de l'énergie et d'étendre au maximum la durée de la mission de vol tout en assurant le bon compromis entre les performances de poursuite et la consommation d'énergie.

Pour surpasser ce problème, on propose dans ce rapport un nouveau contrôleur permettant d'adapter le régulateur linéaire quadratique afin de prendre en considération l'état de charge de la batterie et optimiser par la suite la consommation de l'énergie.

## 1.6 Organisation du rapport

Afin de répondre à chacun des objectifs cités précédemment, ce rapport est structuré en cinq chapitres :

- le second chapitre offre un bref aperçu sur les éléments indispensables à la conception d'un véhicule aérien autonome. Ainsi, les principales architectures mécaniques des drones, les différentes approches de commandes garantissant leur stabilité y sont détaillées;
- le troisième chapitre présente le modèle dynamique complet du quadrotor. Ce modèle est construit à partir des relations de la mécanique et de l'aérodynamique. Ces équations sont ensuite transformées en représentation plus simple, appropriées à la synthèse de l'algorithme de commande;
- le quatrième chapitre détaille l'approche choisie : la commande optimale, pour le contrôle de l'engin;
- le cinquième chapitre est consacré à l'application de la stratégie de commande choisie : le contrôleur linéaire quadratique. Cette approche se base sur la linéarisation du modèle dynamique développé auparavant. Dans une seconde partie, une nouvelle approche est présentée pour adapter le régulateur linéaire quadratique et minimiser la consommation de l'énergie;
- le sixième chapitre détaille le processus d'intégration de la nouvelle loi d'adaptation de la commande linéaire quadratique;
- le septième et dernier chapitre est dédié dans un premier temps à la simulation du quadrotor et du régulateur linéaire quadratique. Dans un second temps, il est consacré à la comparaison de diverses approches de commandes. Les approches simulées sont : la commande linéaire quadratique simple, la commande par backstepping et la commande linéaire quadratique adaptée.





## **CHAPITRE 2**

### **ÉTAT DE L'ART DES DRONES ET DES MÉTHODES DE COMMANDE**

#### **2.1        Introduction**

Les drones aériens ou UAV (de l'anglais Unmanned Aerial Vehicles) sont des engins volants sans pilote capables de mener à bien une mission de façon plus ou moins autonome. En fonction des capacités opérationnelles recherchées, la taille des drones varie sur une échelle allant de quelques centimètres à plusieurs dizaines de mètres.

Dans ce chapitre, nous exposons dans un premier temps les membres les plus représentatifs de la grande famille des drones, en mettant l'accent sur les drones à voilure tournante et plus particulièrement les quadrotors. Ensuite, la seconde partie est consacrée à la présentation des architectures de commande et des stratégies de pilotage rencontrées classiquement dans la littérature pour rendre ces véhicules plus ou moins autonomes.

#### **2.2        État de l'art des drones**

Les drones sont des aéronefs inhabités, pilotés à distance, semi-autonomes ou totalement autonomes, susceptibles d'emporter différentes charges utiles afin d'effectuer des missions spécifiques [1].

Les drones détiennent un avantage opérationnel indéniable. Ceci est dû tout d'abord à leur grande discréetion. En effet, la signature radar (en anglais radar cross section) des drones est négligeable. Ils sont souvent confondus avec des oiseaux par la plupart des radars terrestres. Ils peuvent avoir une faible signature infrarouge grâce à une motorisation discrète. D'autre part, certains drones sont équipés de caméras infrarouges très performantes et de systèmes de liaison de données permettant d'envoyer des vidéos de façon instantanée aux postes de contrôle. Ils peuvent être liés à ceux-ci par des liaisons de télécommunications à des milliers de kilomètres de distance.

L'intérêt pour les drones n'est pas seulement dû à ses caractéristiques, mais aussi au fait qu'il représente un défi de taille de contrôle et de conception. L'intégration des capteurs, actionneurs et des algorithmes d'auto navigation dans un léger système volant avec un temps de fonctionnement optimal n'est pas une tâche triviale.

L'apparition des quadrotors remonte à 1921[4]. C'est l'américain d'origine russe George de Bothezat qui fut le premier à faire voler un appareil quadrotor. Il réussit son premier vol en octobre 1922 et réalise un vol qui a duré une minute 42s à 1,8 m du sol le 18 décembre 1922. Le 19 janvier 1923, l'appareil emporte deux personnes à 1,2 m du sol. De nombreux vols furent effectués en 1923 mais l'appareil ne s'élèvera pas au-dessus de 5 mètres et l'armée mettra fin au contrat.

En Europe, le quadrotor du Français Étienne Œhmichen, construit en 1922, réussit un vol stationnaire de cinq minutes en juin 1923. En mai 1924, il monte à plus de dix mètres d'altitude et effectue une boucle complète sur un kilomètre en sept minutes et quarante secondes devant le capitaine Cholat de l'Aéro-Club de France. En sus des quatre rotors de sustentation, le type no 2 d'Œhmichen était doté de huit hélices de direction.

Ces deux ingénieurs auront été les premiers à avoir réalisé des quadrotors qui ont réellement volé [4].

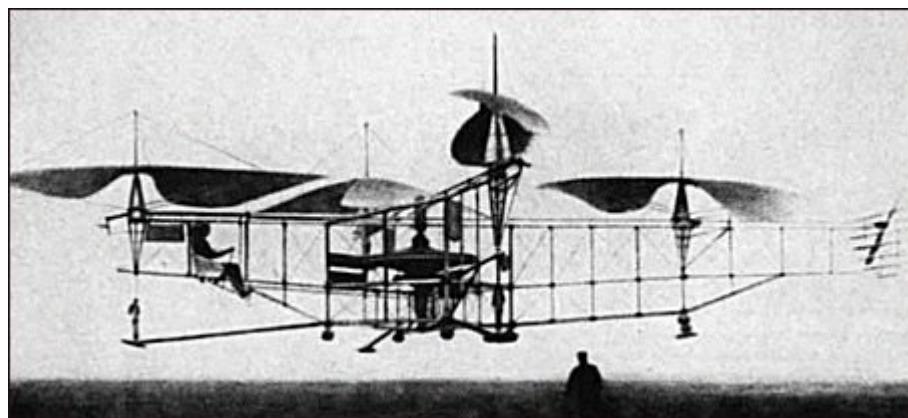


Figure 2.1 L'appareil no 2 d'Œhmichen, 1923  
Tirée de Pascal Brisset et Antoine Drouin (1997)

Que ce soit dans le domaine du militaire ou du civil, les drones sont généralement utilisés pour accéder à des zones à risque : un territoire ennemi dans le cas d'un conflit, ou bien lors de la recherche de survivants dans des endroits inaccessibles par les secours. Cependant les drones ne sont pas cantonnés à la prise de vue aérienne à des fins de renseignements tactiques et militaires, ils peuvent également être utilisés dans le civil pour la détection de feux de forêt, l'inspection d'infrastructures particulières (lignes à haute tension par exemple), la surveillance du trafic routier, la prise de mesures atmosphériques, etc.

### 2.2.1 Les catégories des drones

La classification unique des drones est un exercice impossible dans la mesure où chaque pays possède la sienne. D'autre part, cette classification dépend de divers paramètres, on peut citer à titre d'exemple l'autonomie du vol, l'altitude de vol, la charge utile embarquée, les dimensions ou la masse du drone. La classification présentée dans ce mémoire repose sur celle proposée par l'armée de l'Air des États-Unis d'Amérique, elle répartit les drones selon cinq catégories [1] :

- les drones HALE (de l'anglais High altitude, Long Endurance) : ils possèdent une autonomie de plusieurs jours pour certains et évoluant à plus de 20 km d'altitude. De nos jours, plusieurs systèmes militaires sont opérationnels. Par exemple on peut citer Phantom Eye développé par Boeing présenté à la figure 2.2.



Figure 2.2 Exemple de drone HALE  
Tirée de A. Drouot (2013)

- les drones MALE (de l'anglais Medium Altitude, Long Endurance) : ils présentent une autonomie d'une trentaine d'heures et évoluent entre 5Km et 15Km d'altitude. La figure 2.3 présente les drones MQ-9 Reaper développé par General Atomics;



Figure 2.3 Exemple de drone MALE  
Tirée de A. Drouot (2013)

- les mini UAV (en anglais Unmanned aerial vehicle) : ils possèdent une autonomie de quelques heures et de dimensions de l'ordre du mètre. La figure 2.4 présente le drone Hovereye, développé par Bertin Technologie.



Figure 2.4 Exemple de mini drones  
Tirée de A. Drouot (2013)

- les micros UAV, ayant une autonomie d'une trentaine de minutes, une masse inférieure à 500 gramme et pouvant être contenu dans une sphère de 30 centimètre de diamètre. La figure 2.5 présente un aperçu de la miniaturisation des véhicules aériens, à savoir le drone Wasp, développé par AeroVironment, un drone de Proxflyer et un drone de type MFI (en anglais Micromechanical Flying Insect).

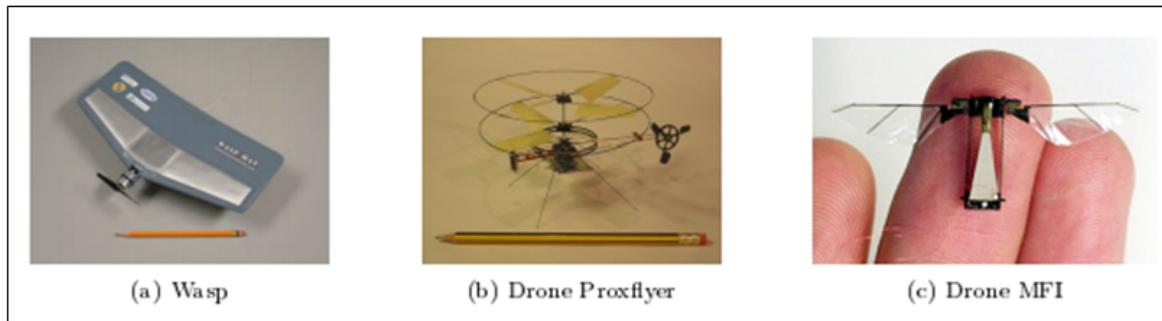


Figure 2.5 Exemples de micro drones  
Tirée de A. Drouot (2013)

### 2.2.2 Les drones à voilure tournante

Les drones miniatures à voilure tournante appartiennent tous au groupe de véhicules VTOL (en anglais Vertical Take OFF and Landing), qui définit les appareils à décollage et atterrissage verticaux. Ils trouvent principalement leur place comme plateformes expérimentales relativement faciles à mettre en œuvre et peu onéreuses. Ils permettent de mettre en pratique et à illustrer des travaux de recherche dans les domaines de la robotique et de l'automatique. Cette section présente un état de l'art des différentes architectures aéromécaniques formant la famille des véhicules à voilure tournante. Pour chaque solution technologique, nous détaillons ses spécificités, plus ou moins avantageuses, à travers de nombreux projets et prototypes existants [5].

#### 2.2.2.1 Les hélicoptères classiques

C'est l'architecture à voilure tournante la plus répandue et la mieux maîtrisée. L'hélicoptère est composé d'un rotor principal et d'une poutre à l'arrière du véhicule sur laquelle est monté un rotor anticouple (RAC) de queue. Ce dernier peut être libre ou caréné dans un fenestron pour en augmenter la protection et l'efficacité aérodynamique. Les deux configurations sont visibles sur la figure 2.6. La rotation du rotor principal génère une poussée suffisante pour compenser le poids de l'appareil, tandis que le rotor de queue permet de contrer le moment généré par la rotation du rotor principal.

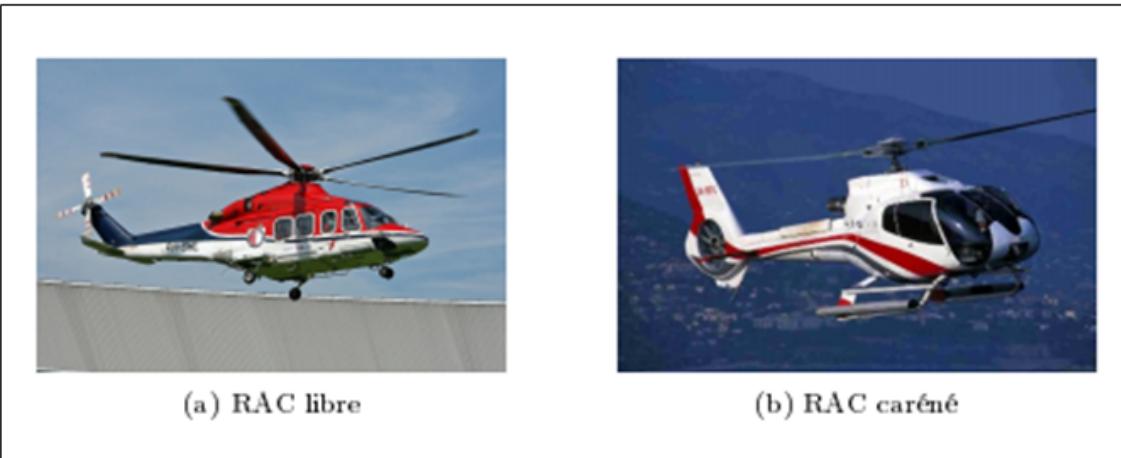


Figure 2.6 Exemples d'hélicoptères à rotor anticouple de queue  
Tirée de A. Drouot (2013)

Cependant, il a été constaté que le rotor de queue pouvait être la source de bruits et de vibrations affectant les performances de vol des hélicoptères.

#### **2.2.2.2 Les rotors coaxiaux**

Cette configuration est constituée de deux rotors fixés sur le même axe de rotation, mais tournant dans le sens opposé pour annuler les effets de couple. Les hélicoptères à rotors coaxiaux sont donc dépourvus de rotor de queue, les rendant de ce fait plus compacts et par conséquent moins sensibles aux vents transverses que les hélicoptères classiques. De point de vue du fonctionnement, les deux rotors contribuent à la poussée verticale et leur différentiel de vitesse de rotation pilote l'orientation autour du lacet. Il est important de noter que la poussée totale est inférieure à la somme des poussées individuelles de chaque rotor.



Figure 2.7 Exemples d'hélicoptères à rotors coaxiaux  
Tirée de A. Drouot (2013)

La stabilité naturelle des architectures à rotors coaxiaux en fait des candidates idéales pour une utilisation dans le mode de l'aéromodélisme. Cet avantage est cependant altéré par une vitesse de déplacement dans le plan horizontal limitée dépendamment de la taille des engins et de sa grande sensibilité au vent. Ces deux éléments contraignent les plus petits des drones à rotors coaxiaux à un usage en intérieur. C'est le cas des drones présentés aux figures 2.7, 2.8 et 2.9 dont l'objectif est d'être les plus petits ou les plus légers possible tout en gardant certaines performances de vol. Ce qui constitue un défi technologique majeur.

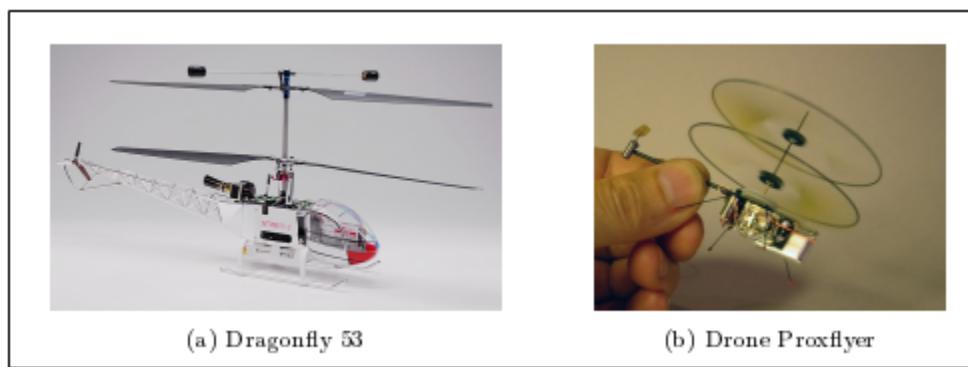


Figure 2.8 Exemples de drones à rotors coaxiaux à usage interne  
Tirée de A. Drouot (2013)



Figure 2.9 Exemples de drones à rotors coaxiaux à usage externe  
Tirée de A. Drouot (2013)

Les drones présentés à la figure 2.9, quant à eux, sont relativement grands et possèdent un système de propulsion puissant pour être utilisés en extérieur. Ainsi, le drone IT180, développé par Infotron, a déjà été utilisé par l'armée française en Afghanistan et le Ka-137, conçu par Kamov, est utilisé pour réaliser des mesures biologiques et chimiques dans des zones hostiles à l'homme.

### 2.2.2.3 Les rotors coaxiaux carénés

Une alternative intéressante aux rotors coaxiaux consiste à les intégrer dans une carène, les isolant ainsi de l'environnement extérieur. Le véhicule est alors plus résistant aux chocs et quasiment inoffensif pour un opérateur puisque les pales ne sont pas directement accessibles. Cependant, le carénage augmente la masse de la structure, diminuant de ce fait la charge utile pouvant être embarquée. De point de vue de la qualité de vol, la présence de la carène induit un fort moment cabreur en présence de rafales transverses, ce qui déstabilise le véhicule en vol stationnaire. Ces effets expérimentaux sont caractérisés dans l'étude[6].

Deux architectures techniques peuvent être distinguées. La première architecture regroupe les appareils à carène courte, c'est-à-dire dont la hauteur est faible par rapport à son diamètre. Ces véhicules possèdent en général une bonne stabilité en vol stationnaire, mais une aptitude limitée en vol de translation horizontale. Ainsi, certaines architectures, comme celle présentée à la figure 2.10, présentent deux rotors secondaires permettant au drone de

s'incliner et donc de contrôler sa vitesse de translation. Dans tous les cas, le véhicule reste pratiquement à plat lors du vol d'avancement, gardant par conséquent une traînée aérodynamique faible.

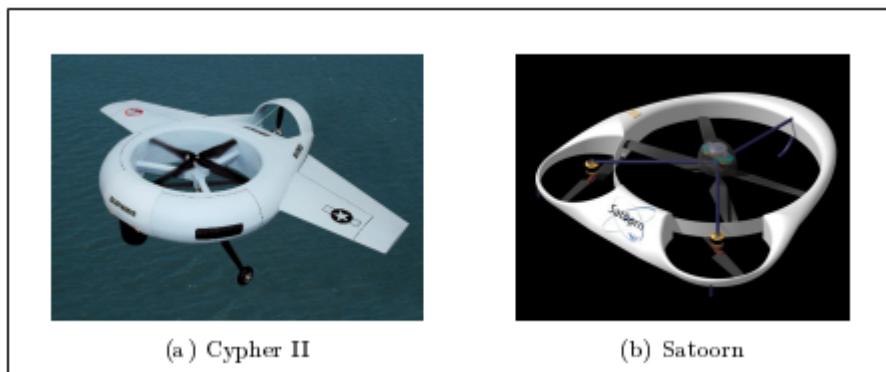


Figure 2.10 Exemples de drone à rotors coaxiaux à carène courte  
Tirée de A. Drouot (2013)

L'inconvénient de ce type de véhicule reste leur faible tenue aux rafales transverses. Pour y remédier, il est possible d'ajouter des ailes de stabilisation ou de placer la charge utile en hauteur afin de déplacer le centre de gravité du drone. Cette seconde solution est généralement utilisée, comme en atteste la figure 2.11. Dans ce cas, les rotors contribuent uniquement à la poussée verticale et à l'orientation en lacet. L'orientation en roulis et en tangage, permettant le vol en translation, est assurée par des déflecteurs placés de façon adéquate dans le flux d'air, sous le drone.



Figure 2.11 Exemples de drone à rotors coaxiaux à carène longue  
Tirée de A. Drouot (2013)

Le principal avantage de ces véhicules est de posséder une enveloppe de vol impressionnante. En effet, leur forme allongée permet de passer d'un comportement de type hélicoptère, lorsque le véhicule est à la verticale, à un comportement de type avion lorsque le véhicule est suffisamment en vol de translation horizontal rapide.

#### **2.2.2.4 Les rotors multiples**

Les drones à rotors multiples constituent certainement la configuration aéromécanique la plus connue et la plus répandue parmi les véhicules aériens autonomes. Ces appareils sont généralement équipés de quatre rotors, mais il existe avec six voire huit rotors comme en atteste la figure 2.12. La simplicité mécanique fait de ce type de véhicule une configuration très utilisée pour la réalisation de plateformes expérimentales à coûts réduits [7].



Figure 2.12 Exemples de drone à rotors multiples  
Tirée de A. Drouot (2013)

Le fonctionnement des drones à rotors multiples est assez particulier. En effet, pour compenser le couple de réactions, le sens de rotation des rotors est inversé deux à deux. De plus, les déplacements du véhicule ne se font qu'en manipulant minutieusement les vitesses de rotation des différents rotors. En effet, c'est la différence de portance qui détermine l'inclinaison de l'appareil autour des angles de roulis et de tangage, permettant alors le vol en translation. De plus, ils possèdent une très bonne répartition de la portance dans le plan horizontal, les drones à rotors multiples sont particulièrement adaptés aux vols stationnaires et à faibles vitesses. Par contre, cette configuration n'est pas recommandée pour les vols de translation à grande vitesse ni pour l'évolution dans des conditions venteuses.

### **2.3 État de l'art des différentes stratégies de commande des drones**

La complexité de la mécanique des drones et la variabilité des phénomènes aérodynamiques mises en jeu, en particulier lors de l'alternance de différents vols, sont des sources importantes de difficultés. Bien que globalement les effets aérodynamiques soient en réalité continus, ils sont difficilement modélisables. Cela reste vrai même si l'on ne s'intéresse qu'à un mode de vol spécifique pour certaines configurations de drones.

Pour remédier à la complexité de la tâche de la modélisation et par la suite du contrôle, on procède à la simplification du modèle aérodynamique sans dénaturer les caractéristiques principales du drone. Quant aux problèmes de synthèse de la commande, les difficultés sont multiples. Il convient en premier lieu de remarquer que ces systèmes sont sous-actionnés étant donné que le nombre d'entrées de contrôle est inférieur au nombre de degrés de liberté du système. Les outils classiques de l'automatique, basés en premier lieu sur des hypothèses de commandabilité locale du système, ne sont parfois pas utilisables directement.

L'étude de ces problèmes peut mener à des méthodologies tout à fait novatrices qui sont primordiales d'un point de vue applicatif pour augmenter l'autonomie du système. L'objectif de cette thématique est de développer de nouvelles stratégies de commande (issues de l'automatique ou de l'apprentissage) assez génériques, simples, robustes et performantes répondant aux exigences des besoins.

Les commandes de vol font le lien entre le pilote et les actionneurs aérodynamiques permettant de modifier la trajectoire de l'avion. L'ensemble est composé d'organes de pilotage, d'actionneurs et d'un système de transmission plus ou moins sophistiqué entre les organes de pilotage et les actionneurs [8]. Les principaux algorithmes de contrôle sont détaillés dans la section suivante.

### **2.3.1 Approches linéaires**

Dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires, la synthèse de la commande est basée sur une approximation linéaire du modèle dynamique du véhicule. Cette approche permet de découpler cette dynamique en quatre boucles de type SISO (de l'anglais Single input, Single output), associée à une seule entrée de commande. Généralement, on suppose que les vitesses de translation et d'orientation sont faibles, ce qui permet de négliger les phénomènes aérodynamiques indésirables [9][10]. L'approche linéaire facilite l'étude de la stabilité de chaque boucle dans le sens où il existe certains indicateurs comme la marge de gain et la marge de phase. Ces marges déterminent la quantité admissible de gain et de phase pouvant être injectée par la commande tout en conservant la stabilité de la boucle. Plusieurs architectures de commande linéaire sont présentées par la suite.

#### **2.3.1.1 La commande par PID**

La stratégie de commande par PID (pour Proportionnel Intégral-Dérivé) est certainement l'approche la plus intuitive et la plus simple à embarquer sur un processeur. Elle permet de comprendre facilement le rôle physique de chacun des termes de la commande, ce qui permet de régler les gains en conséquence.

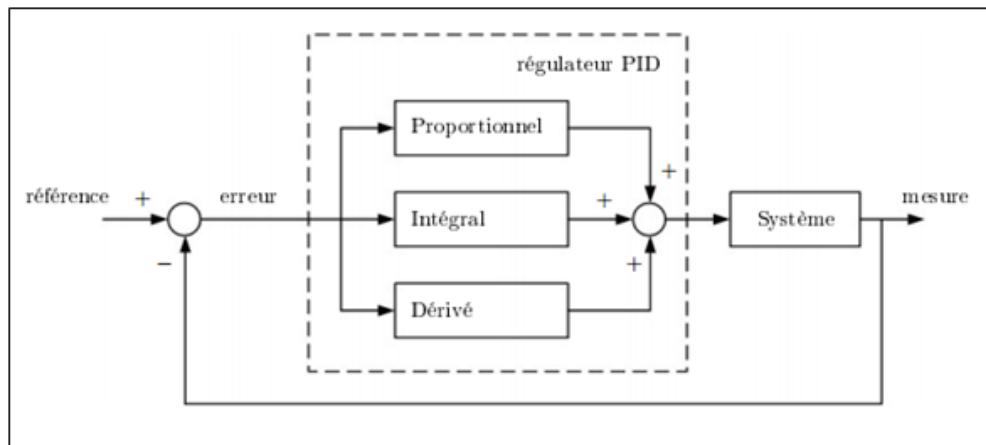


Figure 2.13 Principe de la commande par PID  
Tirée de J.Li et Y.Li (2011)

Comme le montre la figure 2.13, cette structure génère un signal de commande à partir de l'erreur existante entre la référence et la mesure, de son intégrale et de sa dérivée. Bien que l'analyse d'un système piloté avec un régulateur PID soit simple, sa conception peut être difficile, car il n'existe pas de méthode unique pour déterminer les gains intervenant dans le processus. Il est alors nécessaire de trouver des compromis entre durée du régime transitoire, dépassement, erreur statique, stabilité et robustesse. Les méthodes de réglage les plus utilisées en théorie sont la méthode Ziegler-Nichols, la méthode de Naslin (polynômes normaux à amortissement réglable) et la méthode du lieu de Nyquist inverse. En pratique la méthode de Broïda et celle par approches successives sont les plus répandues [9].

L'architecture de commande par PID pour les drones est constituée de plusieurs régulateurs installés en cascade. En fonction des références en position, un premier PID génère les consignes en orientation permettant la stabilisation et les déplacements horizontaux. Le suivi de ces consignes en roulis, en tangage et en lacet sont alors à la charge d'un second PID. Enfin un troisième PID s'occupe de définir la poussée pour permettre les déplacements verticaux.

Cette approche a été testée avec succès sur plusieurs plateformes expérimentales comme les quadrotors [9].

### 2.3.1.2 La commande par placement de pôles

La commande par placement de pôles est une méthode qui consiste à déterminer une matrice de gains qui place les valeurs propres du système en boucle fermée à des positions prédéfinies.

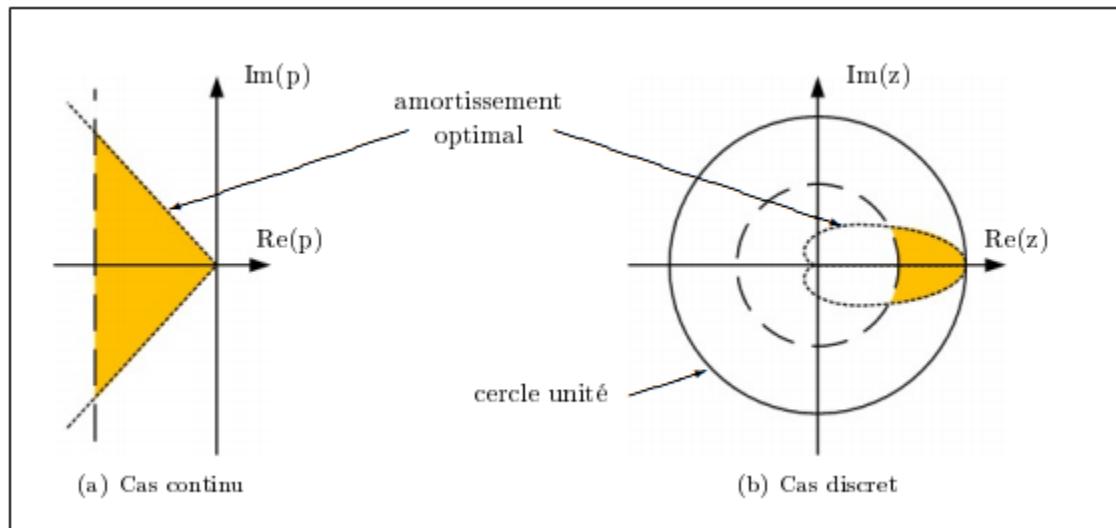


Figure 2.14 Zone idéale de placement de pôles de la boucle fermée  
Tirée de A.A.Wahab (2011)

Le but de cette approche est de garantir un comportement convenable du système en boucle fermée. En effet, la position de ses valeurs propres est étroitement liée au comportement temporel et fréquentiel du système, notamment en termes de stabilité et de performances. Pour cela, il faut que les valeurs propres aient une partie réelle strictement négative. Cependant, cette partie réelle ne doit pas être trop négative sinon le système admettra une large bande passante, ce qui induira une amplification des bruits. Enfin, pour que la commande soit physiquement réalisable, les valeurs propres doivent être choisies réelles ou complexes conjuguées deux à deux. Cette architecture de commande qui a été sélectionnée par [10] et [11] pour le pilotage d'un hélicoptère et d'un quadrotor respectivement.

### 2.3.1.3 La commande linéaire quadratique

La commande linéaire quadratique, dénotée commande LQR ou LQ, est une méthode de synthèse qui permet de déterminer la commande optimale d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance [12]. Ce critère de performance est quadratique en l'état du système et en sa commande. La conception d'une telle commande consiste à choisir habilement des matrices de pondération intervenant dans le critère de manière à obtenir le comportement souhaité su système en boucle fermée. Une fois les matrices de pondération choisies, les gains optimaux s'obtiennent en résolvant une équation algébrique de Riccati. L'avantage de la commande linéaire quadratique est qu'elle possède intrinsèquement de très bonnes propriétés de robustesse. Toutefois, une telle stabilité n'est assurée que dans l'hypothèse où le modèle est parfaitement connu, où la totalité de l'état est disponible et où les signaux ne sont pas bruités. Cette approche a été implémentée avec succès sur des plateformes expérimentales comme les hélicoptères [12] et des drones à rotor coaxiaux [13]. Une comparaison entre l'approche par PID et l'approche LQ est réalisée dans [14]. En gros, l'approche LQ se compare favorablement non seulement en terme de performance de poursuite mais aussi en terme d'efficacité de consommation d'énergie.

### 2.3.1.4 La commande prédictive

La commande prédictive nommée aussi MPC (en anglais Model predictive control) se base sur le modèle dynamique du système afin d'anticiper le comportement du procédé sur un intervalle de temps donné. Il est possible de générer, sur cet intervalle de temps, la séquence de commande qui optimise cette prédiction de comportement vis-à-vis de la consigne. Comme pour la commande LQ ou LQR, la séquence de commande est déterminée à l'aide d'un algorithme de programmation quadratique qui minimise le coût tout en prenant en compte les différentes contraintes.

Cette méthode séduisante en théorie, souffre par contre de sévères limitations pratiques, notamment au niveau de l'influence des temps de calcul qui est important par rapport à la période d'échantillonnage causant une instabilité.

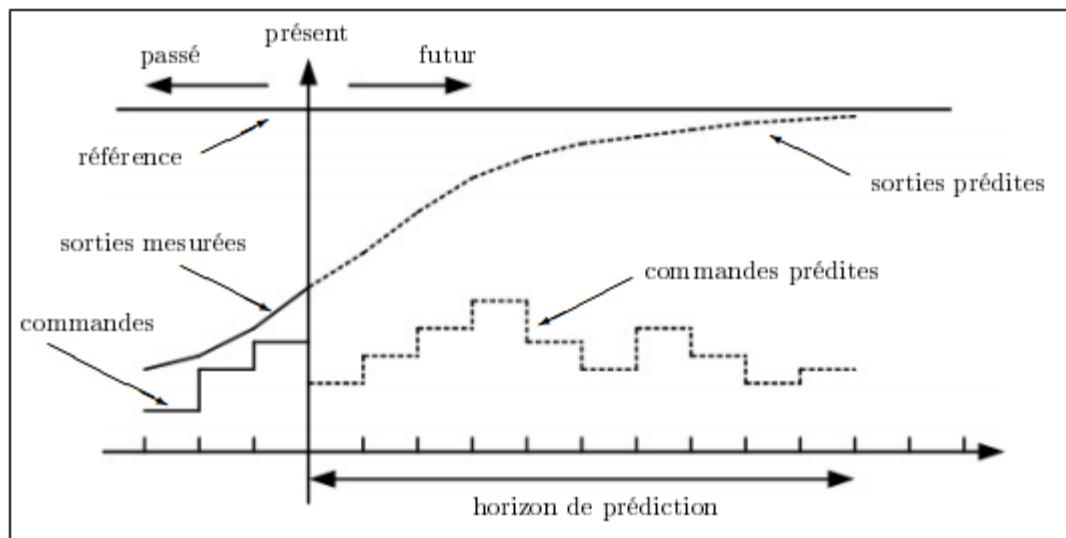


Figure 2.15 Principe de la commande prédictive  
Tirée de A. Drouot (2013)

Malgré ces limitations, des techniques utilisant la commande prédictive ont été mises en œuvre pour des hélicoptères [15] et pour des drones à rotors coaxiaux [16].

### 2.3.1.5 La commande par séquencement de gains

La commande par séquencement de gains représente certainement la transition entre les approches linéaires et non linéaires. Cette approche est orientée pour commander les systèmes non linéaires en pilotant une famille de  $N$  systèmes LTI (pour linéaire et invariant dans le temps) le représentant en un certain nombre de points de fonctionnement.

À chaque point de fonctionnement correspond une boucle de régulation composée d'un modèle linéaire et de sa commande. Finalement, en fonction de certaines variables, appelées variables de séquencement, la commande globale sélectionne la boucle de régulation adéquate. Plus de détails sur ce type de commande peuvent être trouvés dans [17].

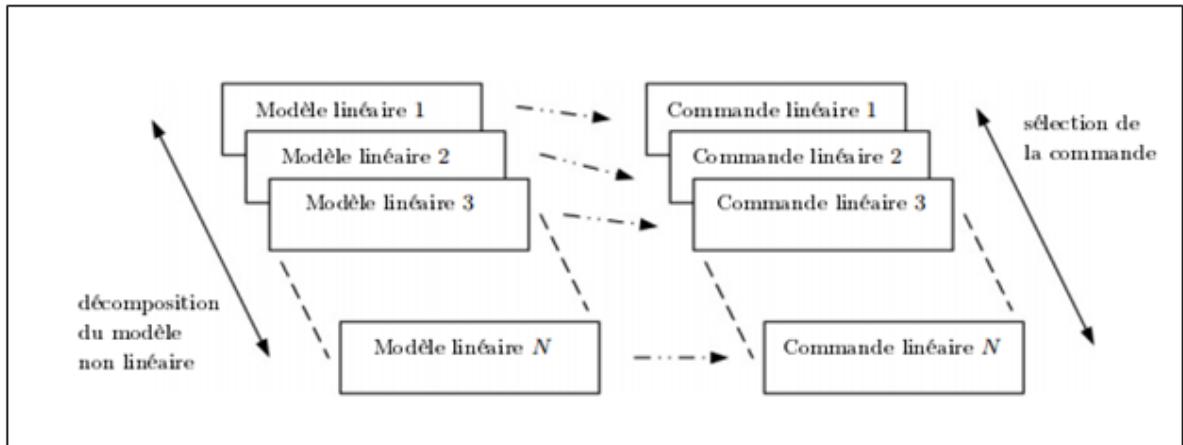


Figure 2.16 Principe de commande par séquencement de gain

### 2.3.2 Approches non linéaires

Ces dernières années, de plus en plus de recherches s'orientent vers des commandes basées sur une représentation non linéaire de la dynamique des véhicules aériens. Ces approches offrent une certaine contribution théorique, mais leur application reste limitée à cause de la complexité des modèles et des algorithmes de commande. Les architectures de commande non linéaire les plus utilisées pour le pilotage des drones sont présentées ci-dessous.

#### 2.3.2.1 La commande par linéarisation entrée-sortie

Les premières architectures de commandes non linéaires sont pour la plupart basées sur le concept de la linéarisation entrée-sortie [18]. Le principe de cette approche est de transformer la dynamique non linéaire du système en une dynamique linéaire équivalente au moyen d'un changement de variables et d'un choix approprié d'entrées de commande. Il est donc indispensable que le modèle du système soit parfaitement connu, ce qui est difficile à garantir en pratique. Une seconde difficulté critique, concerne l'observabilité d'une partie de la dynamique du système induite par le processus de linéarisation. Cette dynamique interne non

mesurable correspond à la dynamique des zéros. Si cette dynamique est instable, le système est instable.

### 2.3.2.2 La commande par backstepping

La commande par backstepping, construite via un algorithme itératif, permet de résoudre certains problèmes de conception avec des conditions moins restrictives que celles imposées dans d'autres approches. Cependant, dans le cas des véhicules aériens, la détermination des entrées de commande est complexifiée dans la mesure où la dynamique de translation est sous-actionnée. De ce fait, la poussée verticale et sa première dérivée temporelle sont considérées comme des états internes à la commande. L'expression des signaux de commande qui résulte de cette opération sont alors complexes et arduis à implémenter. De plus, la fréquence de mesure de la translation est bien souvent inférieure à celle de la rotation. Or, le calcul des signaux de commande se fait sur la base de la fréquence la plus lente, ce qui est incompatible avec les besoins nécessaires à la stabilisation des quadrotors. Une méthode de commande permettant la séparation des échelles de temps, telle que la commande hiérarchique est donc plus appropriée [18].

### 2.3.2.3 La commande hiérarchique

Le principe de la commande hiérarchique consiste à séparer la commande en translation de la commande en rotation, rejoignant ainsi l'architecture en cascade classique des algorithmes de pilotages. Il est important de noter que chaque loi de commande peut être développée séparément. En effet, une première loi de commande détermine la poussée verticale et l'orientation nécessaire à la stabilisation de la dynamique de translation. Cette orientation est ensuite considérée comme la référence que doit suivre une seconde loi de commande pour stabiliser la dynamique en rotation. La difficulté majeure de cette commande est de démontrer la stabilité du système global en boucle fermée, d'assurer la non-saturation des actionneurs et de garantir de bonnes performances ainsi qu'un comportement robuste vis-à-vis des perturbations.

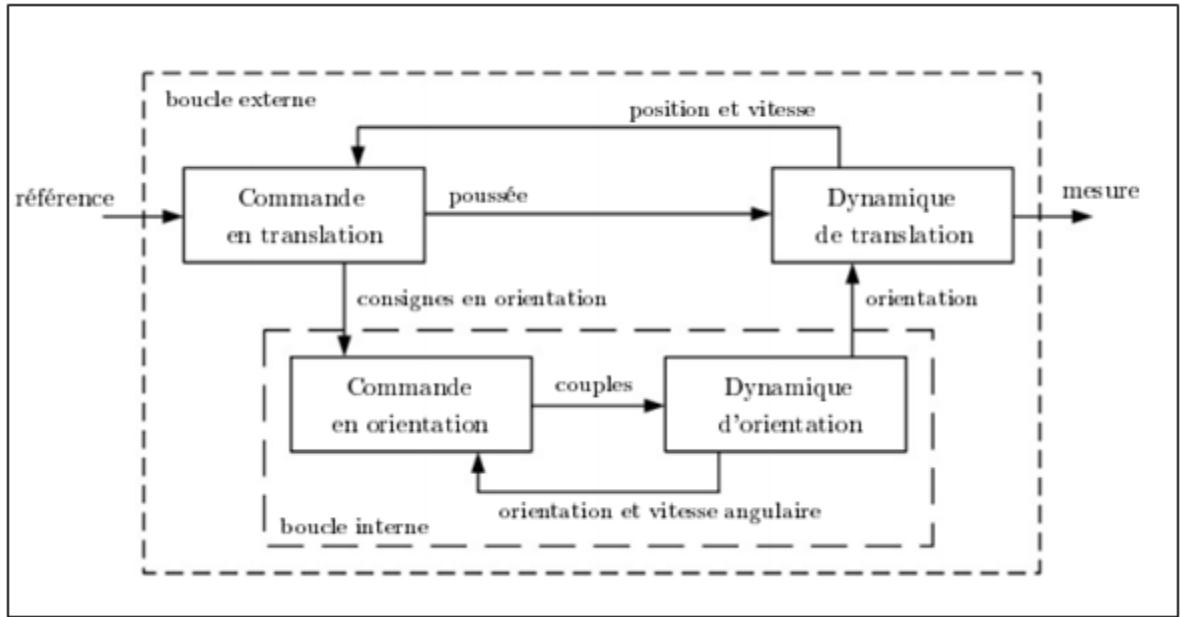


Figure 2.17 Schéma structurel de la commande hiérarchique

#### 2.3.2.4 La commande par mode glissant

C'est une stratégie de commande très efficace face à la sensibilité aux incertitudes paramétriques. Cette méthode consiste à modifier la dynamique d'un système non linéaire en lui appliquant un signal de commutation à haute fréquence le forçant à rejoindre et par la suite à rester sur une surface. Cette surface, dite de glissement aura préalablement été choisie en fonction des objectifs de commande. Elle varie en fonction de la position actuelle dans l'espace d'état. Le fait que la commande soit discontinue est un élément important, car elle permet ainsi de stabiliser des systèmes qui ne le seraient pas avec des signaux continus. C'est pour cela que cette commande fût implémentée sur des hélicoptères [19] et des quadrotors [20].

Par contre, la commande par mode glissant doit être appliquée avec soin, car la robustesse vis-à-vis des incertitudes n'est pas garantie pendant la période précédant le glissement, appelée phase d'accrochage. En effet, en raison d'imperfection au niveau des actionneurs, l'application stricte de la commande par modes glissants peut entraîner un phénomène de

vibrations conduisant à l'excitation des dynamiques non modélisées. Afin d'atténuer, ce phénomène de vibration, plusieurs techniques ont été proposés dans la littérature, comme la commande dite par logique floue.

### 2.3.2.5 La commande tolérante aux défauts

Étant données les erreurs de modélisation, les incertitudes paramétriques et les perturbations externes ne sont pas les seuls effets néfastes auxquels doit remédier un algorithme de commande. En effet, les actionneurs et les capteurs embarqués à bord des véhicules peuvent présenter des pannes et des défaillances. C'est là tout l'enjeu de la commande tolérante aux défauts [129]. Toutefois, il est important de noter que lorsqu'un défaut apparaît, que ce soit au niveau des actionneurs ou des capteurs, les caractéristiques du système subissent des dommages conséquents. Ainsi, les actionneurs ne fournissent plus suffisamment de puissance motrice, tandis que les capteurs peuvent ne plus envoyer des mesures fiables.

La philosophie de cette stratégie de commande est donc d'altérer sensiblement les performances du système pour maintenir la disponibilité de l'installation. La première étape consiste à détecter, à localiser et à identifier la panne affectant le système. Puis en fonction de la sévérité de la panne, une commande alternative est mise en œuvre via un mécanisme de supervision en adaptant les paramètres de la commande initiale ou en mettant en place une nouvelle structure de commande. Ces systèmes de commande, faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes continus et événementiels, sont appelés des systèmes hybrides.

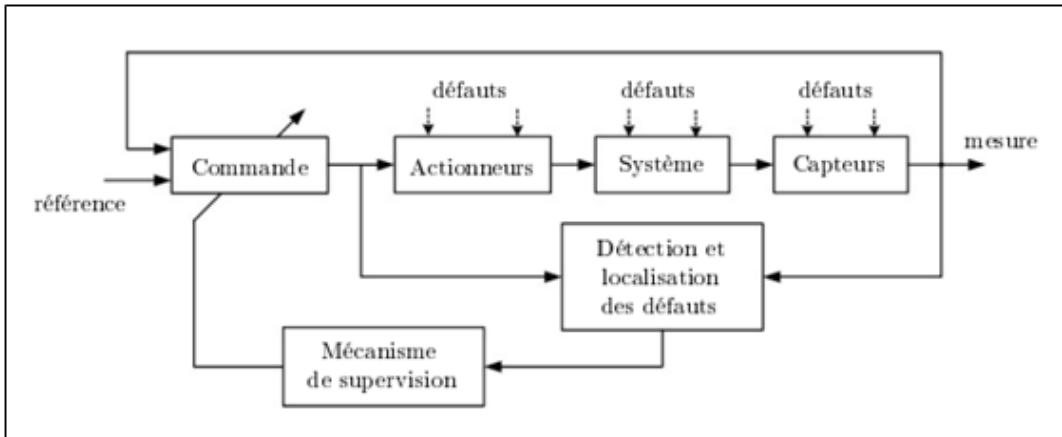


Figure 2.18 Principe de la commande tolérante aux défauts

Plusieurs concepts et méthodes existent pour concevoir de telles commandes et sont présentes dans [21] [22].

#### 2.4 Conclusion

Ce chapitre dresse un inventaire des différentes techniques existantes dans le domaine des véhicules aériens autonomes à voilure tournante. Il ne se veut pas exhaustif, mais il illustre toute l'ingéniosité et la diversité des architectures mécaniques et des stratégies de commande pouvant être utilisées. Ce chapitre permet donc de bien appréhender ces éléments fondamentaux de la chaîne de pilotage d'un appareil autonome. De plus, il présente les enjeux, les limitations et les problèmes inhérents à la modélisation et à la commande des véhicules munis de rotors. En résumé, le choix de la structure mécanique du drone et de la stratégie de contrôle n'est pas anodin et doit impérativement correspondre aux missions pour lesquelles il sera employé, ainsi qu'au degré de performance recherché.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation détaillée du modèle mathématique représentant le comportement dynamique, permettant par la suite l'élaboration des algorithmes de commande.

## **CHAPITRE 3**

### **MODÉLISATION DU SYSTÈME**

#### **3.1 Introduction**

La commande des systèmes dynamiques se base essentiellement sur la modélisation, l’identification et l’analyse des phénomènes physiques opérants sur le système en question.

On propose dans ce chapitre de modéliser la dynamique du quadrotor et définir l’équation de mouvement. Cette approche facilite la génération du modèle dynamique des systèmes instables. Pour cette fin, on l’exprime à l’aide du formalisme de Newton-Euler et des équations dynamiques des moteurs. On se base sur le modèle vérifiant les hypothèses suivantes :

- la structure est supposée rigide et symétrique;
- le centre de gravité coïncide avec l’origine du repère fixe du corps;
- les hélices sont supposées rigides;
- le mouvement de poussée et de trainée est proportionnel au carré de la vitesse des hélices;

Les quadrotors sont des systèmes mécaniques assez complexes. Leurs mouvements sont régis par plusieurs effets que ce soit mécaniques ou aérodynamiques. Le modèle du quadrotor doit prendre en considération tous les effets qui affectent son mouvement entre autres les effets gyroscopiques. Les principaux effets agissants sur le quadrotor sont listés dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Les principaux effets affectant le quadrotor  
Tiré de S.Bouabdallah (2007)

Effets	Source
Les effets aérodynamiques	La rotation des hélices.
Les contre-couples inertIELS	Le changement dans la vitesse de rotation des hélices.
L'effet de la gravité	La position du centre de masse.
Les effets gyroscopiques	Le changement dans l'orientation du corps rigide et le changement de l'orientation des plans des hélices.
L'effet de frottement	Tous les mouvements du quadrotor.

### 3.2 Choix des coordonnées

Pour décrire la position et l'orientation du quadrotor, nous avons recours à deux repères. Le premier est nommé le repère inertiel. Il s'agit d'un référentiel  $\mathcal{F}_I = \{O_i, i_i, j_i, k_i\}$  orthogonal fixe de type galiléen [24], dans le sens que celui-ci n'accélère pas et ne tourne pas par rapport à un observateur. On utilise souvent le repère (« North, East, Down »), l'axe  $i_i$  pointe vers le nord,  $j_i$  pointe vers l'est et  $k_i$  pointe vers le centre de la Terre. Nous considérerons ici que la surface de la Terre est plate, donc  $i_i$  et  $j_i$  sont parallèles au sol et  $k_i$  est perpendiculaire au sol.

Le second repère est absolument nécessaire pour décrire l'orientation du quadrotor. En effet, ce référentiel est lié au châssis du quadrotor. Celui-ci est identifié par  $\mathcal{F}_b = \{O_b, i_b, j_b, k_b\}$ . On suppose que l'origine coïncide avec le centre de gravité du quadrotor,  $i_b$  pointe vers l'avant,  $j_b$  pointe vers le bras droit et  $k_b$  pointe vers le bas du quadrotor.

#### 3.2.1 Définition des vecteurs de position, de force et de moment

La position du quadrotor est définie par un vecteur, exprimé dans le repère inertiel, allant de  $O_I$  à  $O_b$ . Ce vecteur est noté  $\eta = [x \ y \ z]^T$ . Ainsi, l'expression de la vitesse linéaire exprimée dans le repère inertiel est note  $\dot{\eta} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ .

En considérant les notations du domaine de l'aérospatiale, la vitesse linéaire exprimée dans le repère du châssis est noté  $v = [u \ v \ w]^T$ .

Les forces et les moments appliqués au centre de masse du quadrotor, exprimés dans le repère du quadrotor, sont respectivement  $f = [f_x \ f_y \ f_z]^T$  et  $\tau = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$ . Le sens positif des moments est défini par la règle du sens trigonométrique.

### 3.2.2 Représentation de l'orientation et matrice de rotation

Avant d'aller plus en détails dans la modélisation, on définit les angles de lacet, tangage et roulis de la façon suivante :

- rotation de  $\phi$  autour de l'axe x : angle de roulis avec  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ;
- rotation de  $\theta$  autour de l'axe y : angle de lacet avec  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ;
- rotation de  $\psi$  autour de l'axe z : angle de tangage avec  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ .

Dans la figure 3.1, on représente chacun des angles de rotation relativement à son axe de rotation.

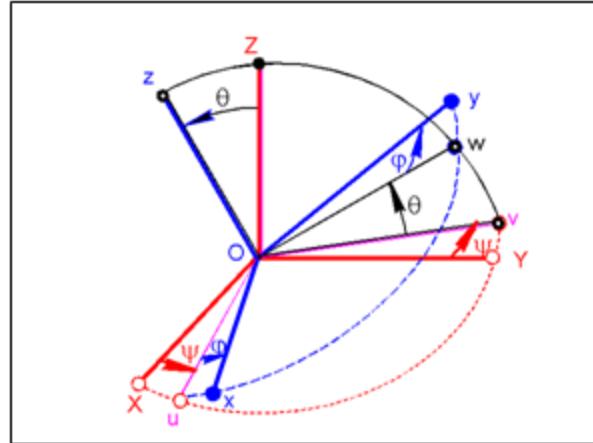


Figure 3.1 Définition des axes  
Tirée de S. Bouabdallah (2007)

Ces trois angles sont appelés les angles d'Euler et seront notés  $\Theta = [\varphi \ \theta \ \psi]^T$ . Ce triplet est utile; les angles permettent d'exprimer l'orientation du quadrotor dans l'espace.

L'orientation d'un repère peut être représentée par quatre outils mathématiques : les matrices de rotations, le vecteur d'Euler, les angles d'Euler et les quaternions unitaires. Ces représentations mathématiques sont liées. On peut aisément passer d'une représentation à une autre [25].

On définit les matrices relatives à ces transformations comme suit :

$$\begin{aligned} R_x(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\ R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ R_z(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

La décomposition précédente s'effectue suite à une projection des vecteurs unitaires de  $\mathcal{F}_b$  par rapport à  $\mathcal{F}_I$ . La décomposition s'effectue à l'aide d'un produit scalaire.

En multipliant les trois matrices précédentes, on obtient la matrice de rotation totale.

$$R_b^I = R_I^{b^T} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Les matrices de rotation ont plusieurs caractéristiques intéressantes tel que :

- elles sont orthogonales.  $RR^T = I \leftrightarrow R^T = R^{-1}$ ;
- le déterminant de la matrice R  $\det(R)=1$ ;
- les colonnes ou les lignes sont unitaires et mutuellement orthogonales.

Toute matrice qui respecte ces propriétés est considérée comme étant une matrice de rotation et fait partie d'un ensemble de matrices nommé orthogonal, note SO (n). Dans notre cas, puisque nous travaillons dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $R \in SO(3)$  [24][26][27].

### 3.2.3 Vitesse angulaire

La vitesse angulaire est une variation de position angulaire autour d'un axe. En effet, elle décrit le déplacement angulaire  $\Delta\theta$  infiniment petit de  $\mathcal{F}_b$  par rapport à  $\mathcal{F}_I$  qui demeure immobile durant un intervalle de temps infinitésimal  $\Delta t$ .

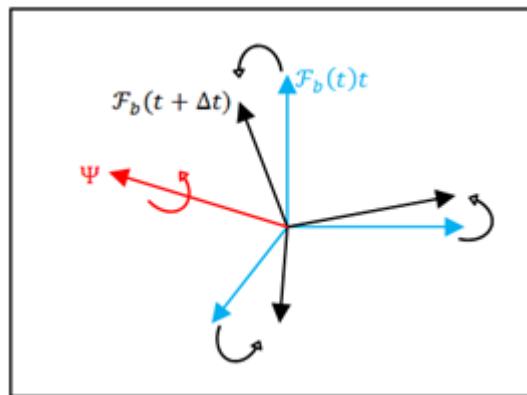


Figure 3.2 Variations de la vitesse angulaire

Cette variation de  $\mathcal{F}_b(t)$  à  $\mathcal{F}_b(t + \Delta t)$  peut être représentée dans la figure 3.2 est symbolisée par le vecteur d'Euler  $\psi(\Delta\theta)$  exprimé dans  $\mathcal{F}_I$ . Cette représentation équivaut à la transition de la matrice de rotation exprimant l'orientation de  $\mathcal{F}_b$  par rapport à  $\mathcal{F}_I$ . Ainsi on peut écrire

$$R_b^I(t + \Delta t) = R_\psi R_b^I(t) \quad (3.3)$$

Avec  $R_\psi$  provient du vecteur d'Euler  $\psi(\Delta\theta)$ . En se basant sur la définition de la dérivée, nous pourrons écrire :

$$\dot{R}_b^I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_b^I(t + \Delta t) - R_b^I(t)}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Ainsi

$$\dot{R}_b^I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(R_\psi(\Delta\Theta) - I)}{\Delta t} R_b^I \quad (3.5)$$

En simplifiant  $R_\psi(\Delta\Theta)$  à l'aide de l'approximation des petits angles et en appliquant la limite, on peut finalement écrire :

$$\dot{R} = \dot{R}_b^I = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad R_b^I = S(\omega_{lb}^I) R_b^I \quad (3.6)$$

Cependant, il faut prendre en considération que les capteurs inertIELS du quadrotor sont référencés par rapport au repère du quadrotor  $\mathcal{F}_b$ . Il est plus avantageux d'exprimer l'équation précédente en introduisant la vitesse angulaire exprimée par rapport à  $\mathcal{F}_b$ .

À la base on a :  $\omega_{lb}^b = R_I^b \omega_{lb}^I$ . En appliquant l'opérateur  $S(\cdot)$  de chaque côté on peut écrire :

$$S(\omega_{lb}^b) = S(R_I^b \omega_{lb}^I) = R_I^b S(\omega_{lb}^I) R_I^{bT} = R_I^b S(\omega_{lb}^I) R_b^I \quad (3.7)$$

En utilisant l'équation (3.6) et (3.7) on obtient

$$S(\omega_{lb}^b) = R_I^b \dot{R}_b^I \quad (3.8)$$

Pour simplifier la relation entre la vitesse de rotation et la dérivée de la matrice de rotation, nous noterons la vitesse angulaire du quadrotor par rapport au référentiel inertiel exprimé dans le repère du quadrotor  $\mathcal{F}_b$  par  $\omega \triangleq \omega_{lb}^b = [p \quad q \quad r]^T$  tel que

$$R = \dot{R} S(\omega) \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Matrice de propagation des angles d'Euler

Après avoir défini la vitesse angulaire et sa relation avec la dérivée temporelle de la matrice de rotation, il nous est nécessaire de décrire la relation entre la vitesse angulaire et la variation des angles d'Euler.

On note la dérivée par rapport au temps des angles d'Euler  $\dot{\Theta} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]$ . En se basant sur [3], on peut écrire les termes de la vitesse angulaire en fonction de la matrice de rotation tel que  $\omega = \rho^{-1}(\Theta)\dot{\Theta}$  avec  $\rho^{-1}(\Theta)$  est l'inverse de la matrice de propagation des angles d'Euler.

Pour retrouver une formulation simple de  $(\Theta)$ , on se base sur le travail développé par [28]. Nous pouvons ainsi écrire une matrice relatant le vecteur  $\omega$  au vecteur  $\dot{\Theta}$  tel que :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ainsi, la matrice de propagation des angles d'Euler est donnée par:

$$\rho \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \sin(\varphi)\tan(\theta) & \cos(\varphi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi)/\cos(\theta) & \cos(\varphi)/\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\dot{\Theta} = \rho(\Theta)\omega \quad (3.12)$$

On constate que la matrice  $\rho$  présente une singularité pour  $\theta = (2n - 1)\pi/2$ . Il s'agit d'un défaut de représentation par les angles d'Euler. Pour simplifier le travail par la suite, on a recours à la représentation des rotations à l'aide des angles d'Euler.

### 3.3 Équations dynamiques génériques du mouvement

Tel que présenté au début du chapitre, on considère que le quadrotor est un corps rigide et indéformable. Cela revient à dire que toutes les particules constituant l'objet se déplacent de façon égale lorsque celui-ci subit une force. En se basant sur de telles hypothèses, il est possible de modéliser le quadrotor comme étant un point ponctuel où toute la masse est concentrée et qui constitue le point d'application de toutes les forces et des moments.

Nous modélisons ici, le quadrotor comme étant un corps rigide à six degrés de liberté étant donné qu'il exige au moins six états pour décrire sa position et son orientation dans l'espace.

À l'aide des définitions de la section précédente, nous pouvons écrire les deux équations relatives à la transformation de la vitesse linéaire exprimée dans  $\mathcal{F}_b$  en la vitesse linéaire exprimée dans le repère inertiel  $\mathcal{F}_I$ .

$$\dot{\eta} = Rv \quad (3.13)$$

$$\dot{R} = RS(\omega) \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) provient de la définition de la vitesse angulaire. Ces équations prennent de l'importance du fait que la dynamique du modèle sera exprimée dans le repère du quadrotor. Pour modéliser la dynamique du quadrotor, nous avons recours aux lois de mouvement de Newton. Ces lois ne sont valides que dans le repère inertiel  $\mathcal{F}_I$  [23] [24].

Ainsi, on pose la variation de la quantité de mouvement qui est donnée par :

$$f_I = f = \frac{d}{dt} m\dot{\eta} \quad (3.15)$$

Étant donné que les forces sont appliquées directement sur le centre de masse, les expressions des forces appliquées sont plus aisément exprimées dans le référentiel du quadrotor  $\mathcal{F}_b$ . Pour cela, on applique la matrice de rotation et en insérant (3.14) on obtient :

$$R^T f = R^T \left[ m \frac{d}{dt} (Rv) \right] = R^T [m(\dot{R}v + R\dot{v})] = R^T [m(RS(\omega)v + R\dot{v})] \quad (3.16)$$

$$\dot{v} = -S(\omega)v + \frac{1}{m}f \quad (3.17)$$

Comme on l'a mentionné précédemment, les forces sont appliquées sur le centre de masse. Cependant, les mouvements rotatifs introduisent le concept d'inertie. Dans le cas d'un mouvement rotatif dans  $\mathbb{R}^3$ , on définit un tenseur d'inertie, noté  $I$  et représenté par une matrice antisymétrique, définie positive :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Chaque élément du tenseur d'inertie dépend de la distribution de la masse de l'objet de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \iiint_{Vol} (y^2 + z^2) dm \\
 I_{yy} &= \iiint_{Vol} (x^2 + z^2) dm \\
 I_{zz} &= \iiint_{Vol} (y^2 + x^2) dm \\
 I_{xy} = I_{yx} &= \iiint_{Vol} xy dm \\
 I_{xz} = I_{zx} &= \iiint_{Vol} xz dm \\
 I_{yz} = I_{zy} &= \iiint_{Vol} zy dm
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'après les hypothèses énoncées dès le départ, le quadrotor est considéré comme un corps rigide sans volume. Ainsi, on peut dire que l'expression du tenseur d'inertie dans le référentiel  $\mathcal{F}_b$  est toujours constante. L'expression du tenseur d'inertie dans  $\mathcal{F}_I$  peut être donnée par [9] :

$$I_I = RIR^T \tag{3.20}$$

D'autre part, la dynamique des mouvements rotatifs est obtenue à partir de la variation du moment angulaire tel que :

$$\tau_I = \frac{d}{dt}(I_I \omega_I) \tag{3.21}$$

où la matrice d'inertie demeure constante dans le référentiel  $\mathcal{F}_b$ , il est plus judicieux d'exprimer la variation du moment angulaire dans le repère du solide tel que :

$$R^T \tau_I = R^T \frac{d}{dt}(RI\omega_b) \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_b &= \tau = R^T(RI\dot{\omega}_b + \dot{R}I\omega_b) \\
 &= R^T(RI\dot{\omega}_b + Rs(\omega)I\omega_b) \\
 &= I\dot{\omega} + \omega \times I\omega
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

ainsi

$$I\dot{\omega} = \tau - \omega \times I\omega. \quad (3.24)$$

### 3.4 Les principaux moments et forces

Pour notre cas, on va considérer uniquement les forces et les moments appliqués au quadrotor générés par les effets aérodynamiques, la rotation des hélices et de la précession gyroscopique. On détaillera par la suite chacun des effets séparément, ensuite ces forces et moments seront appliqués au modèle du quadrotor. Finalement on ajoutera ces résultantes à l'équation de la dynamique.

Face à la complexité d'étude et d'analyse de certaines équations, qui nécessite le recours à plusieurs notions de mécanique des fluides, dépassant le cadre de ce mémoire, nous présenterons une vulgarisation des principes ainsi que les résultats nécessaires à notre travail. Pour plus d'information sur le sujet, on se réfère à [23] [29] [30].

#### 3.4.1 Force de portance

Cette force résulte de la force de réaction, au sens de la 3<sup>e</sup> loi de Newton. Elle est générée par la perturbation du flux d'air suite à la rotation de l'hélice.

La force de poussée générée par l'hélice [23] [29][31] est donnée par :

$$T = C_T \rho A (\Omega r)^2 \quad (3.25)$$

où  $C_T$  représente un terme aéronautique qui dépend directement de la géométrie de l'hélice,  $\rho$  est la densité de l'air,  $A$  est l'aire du disque généré par l'hélice,  $\Omega$  est la vitesse de rotation l'hélice et  $r$  est la longueur de l'hélice.

Toutefois, comme on suppose que le quadrotor est un corps rigide, plusieurs termes sont considérés constants, ainsi on peut réécrire l'équation précédente :

$$T_i = b \Omega_i^2 \quad (3.26)$$

où  $b$  est le coefficient de poussée et  $T_i$  est la force de poussée produite par l'hélice  $i$ . Cette

simplification présentée a été effectuée et confirmée par plusieurs publications [23] [29]. De plus, la force de portance générée par l'hélice est toujours parallèle au vecteur  $k_b$ .

### 3.4.2 Moment de trainée

Pour générer la force de portance, la rotation de l'hélice pousse l'air vers le bas. Cependant, puisque l'hélice a un angle d'attaque par rapport à l'air, une autre force qui lui est orthogonale est créée.

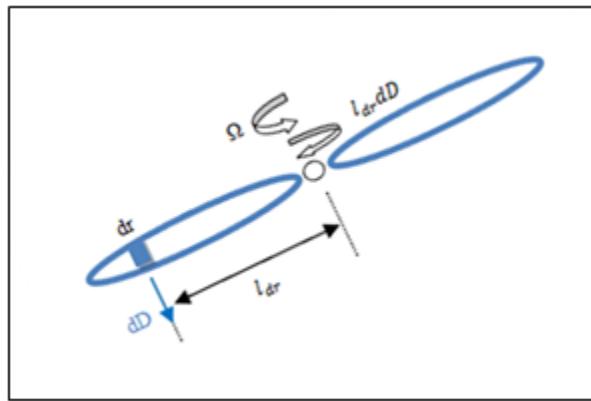


Figure 3.3 Le moment de trainée d'une hélice

On considère un élément infiniment petit de l'hélice  $dr$  un élément de force de trainée  $dD$  à une distance  $L_{dr}$  du centre de rotation comme représenté dans la figure 3.3. Cela crée un moment  $L_{dr}dD$  par rapport à l'axe  $k_h$  dans le sens opposé à rotation de l'hélice. En prenant la contribution de chaque terme  $dD$  sur l'ensemble de la géométrie de l'hélice, on obtient [23] [29][31] .

$$D = C_D \rho A (\Omega r)^2 r^2 \quad (3.27)$$

où  $C_D$  est une constante aéronautique dépendante des conditions aéronautiques et de la géométrie de l'hélice. En utilisant les mêmes hypothèses que la section précédente, on obtient pour chaque hélice  $i$  le moment de trainée:

$$D_i = d\Omega_i^2 \quad (3.28)$$

où  $d$  est le coefficient de trainée. Par définition, cette équation engendre un moment positif pour les rotations d'hélice dans le sens antihoraire par rapport au référentiel du quadrotor. Cette simplification est largement utilisée dans de nombreuses publications [23] [27] [29].

### 3.4.3 Précession gyroscopique

Il s'agit du moment résultant de l'application d'un couple perpendiculairement à l'axe de rotation d'un objet en mouvement. Le moment gyroscopique engendré est orienté suivant la perpendiculaire au couple appliqué et à l'axe de rotation de l'objet, de sorte à former le trièdre des vecteurs [32].

Pour notre cas d'étude, ce couple s'applique suite à la perturbation de vitesse de rotation de l'hélice par les mouvements rotatifs du quadrotor :

$$G_i = \omega \times I_m \Omega_i k_h \quad (3.29)$$

où  $I_m$  représente l'inertie du rotor et  $G_i$  est le moment gyroscopique généré par l'hélice  $i$ . il est judicieux de noter qu'il faut appliquer une inversion de signe aux termes de l'équation lors de la rotation d'hélice dans le sens horaire.

### 3.4.4 Force de gravité

Cette force est due à la masse de l'objet. Elle est toujours perpendiculaire à la surface de la terre. Elle est donnée dans le référentiel inertiel par :

$$G = mgk_l \quad (3.30)$$

où  $g$  est l'accélération gravitationnelle approximée à  $9.81 m / s^2$ .

### 3.4.5 Autres forces et moments non modélisés

Divers effets aérodynamiques s'appliquent au quadrotor. Cependant, dans le cadre de ce mémoire, on ne les modélise pas tous, car leurs effets à faible vitesse peuvent être négligés [23].

#### Battement d'hélices

Lorsque l'hélice se déplace horizontalement, elle crée une différence de vitesse. Cette différence de poussée entre la partie de l'hélice qui attaque le flux d'air et celle qui se retire du flux d'air. Par la suite, l'écart de poussée entre les éléments de l'hélice oblige le plan de l'hélice à s'incliner et à modifier la direction du vecteur de poussée.

#### Frottement de l'air

Le corps du quadrotor présente une résistance à l'air. En effet, il génère une force de friction qui s'oppose au mouvement linéaire et rotatif du quadrotor. Cette force est proportionnelle au carré de la vitesse du quadrotor. Elle est fonction des conditions de l'air ainsi que de la géométrie du quadrotor.

#### Effet de sol

Cet effet est créé suite à la perturbation générée par le flux d'air. Généralement, cet effet s'applique lorsque la surface se trouve à une distance d'une demi-fois la longueur de l'hélice [23]. Cet effet s'applique seulement lors du décollage et d'atterrissement de l'appareil.

## 3.5 Modèle du quadrotor

Après avoir présenté les équations de mouvement dans les sections précédentes, nous pouvons actuellement passer au modèle complet du quadrotor. La configuration du quadrotor est décrite à la figure 3.4. Les moteurs sont numérotés dans le sens horaire avec le moteur 1

comme étant celui de l'avant de l'appareil par rapport au référentiel  $\mathcal{F}_b$ . Les deux moteurs 1 et 3 tournent dans le sens horaire contrairement au sens des moteurs 2 et 4.

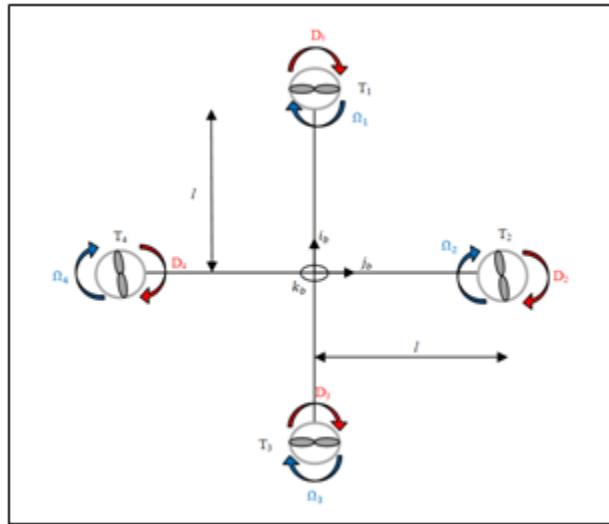


Figure 3.4 Identification du sens de rotation des rotors

En se basant sur les équations précédentes, nous obtenons la somme des forces appliquées au quadrotor, exprimée dans le référentiel du solide

$$f = R^T mg \cdot k - Tk \quad (3.31)$$

où  $k = [0 \quad 0 \quad 1]^T$  est un vecteur unitaire et  $T$  est la force de poussée totale tel que :

$$T = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \quad (3.32)$$

Les moments générés par les hélices proviennent de la différence de poussées générée par chaque paire de moteurs. Ils dépendent également de la distance  $l$  séparant le point de l'application de la force de poussée et le centre de gravité.

En se basant sur l'équation (3.13) et (3.15) on peut écrire :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ bl(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Notons le moment gyroscopique total  $G_r$ . Il est donné par la somme des moments gyroscopiques comme suit :

$$G_r = I_m \sum_{i=1}^4 (\omega \times k)(-1)^i \Omega_i = I_m [p \quad -q \quad 0]^T \Omega_r \quad (3.34)$$

où  $\Omega_r$  représente la vitesse résiduelle des moteurs définie par :

$$\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 \quad (3.35)$$

Pour résumer l'ensemble des équations décrivant le modèle complet du quadrotor,

$$\begin{aligned} \dot{R} &= RS(\omega) \\ \dot{\eta} &= Rv \\ \dot{v} &= -S(\omega)v + R^T gk - \frac{T}{m}k \\ \dot{\Theta} &= \rho(\Theta)\omega \\ I\dot{\omega} &= \tau - \omega \times I\omega - G_r \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.6 Relation forces/moment et vitesse de moteurs

À partir des équations citées auparavant on peut calculer la vitesse des moteurs à partir des forces et des moments appliqués au quadrotor. Cette relation est très importante pour l'implémentation du contrôleur.

On peut donc réécrire les équations sous forme matricielle tel que

$$\begin{bmatrix} T \\ \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

En inversant la matrice, on obtient la relation entre la vitesse des moteurs [6]

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & 0 & \frac{1}{2bl} & \frac{-1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{-1}{2bl} & 0 & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & 0 & -\frac{1}{2bl} & \frac{-1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2bl} & 0 & \frac{1}{4b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.7 Modèle dynamique du moteur

Dans certains papiers comme celui [33], l'influence des actionneurs sont négligés. Ainsi, ils ne considèrent uniquement que la relation linéaire entre le voltage appliqué sur le moteur et la vitesse associée du moteur.

Quant à Bouabdallah [23], il prend en considération les dynamiques du moteur. Dans ce mémoire, on suppose que notre quadrotor est équipé avec quatre rotors à pas fixe, de type BLDC «brushless direct-current». La dynamique des rotors est régie par les équations suivantes

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= u - R_{mot} i - k_e \omega_m \\ J_m \frac{d\omega_m}{dt} &= \tau_m - \tau_d \end{aligned} \quad (3.39)$$

Étant donné qu'on utilise des petits moteurs avec des inductances basses, on peut approximer la dynamique d'un moteur de second ordre par :

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{k_m^2}{R_{mot}} \omega_m - \tau_d + \frac{k_m}{R_{mot}} u \quad (3.40)$$

En introduisant le modèle des hélices, l'équation peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_m = -\frac{1}{\tau} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3 J_t} \omega_m^2 + \frac{1}{\tau k_m} u \\ \frac{1}{\tau} = \frac{k_m^2}{J_t R} \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

Cette équation peut être linéarisée autour d'un point d'opération  $\dot{\omega}_0$  sous la forme

$$\dot{\omega}_m = A\omega_m + Bu + C \quad (3.42)$$

où  $A = \left( \frac{1}{\tau} + \frac{d\omega_0}{\eta r^3 J_t} \right)$ ,  $B = \left( \frac{1}{k_m \tau} \right)$ ,  $C = \left( \frac{d\omega_0^2}{\eta r^3 J_t} \right)$

### 3.8 Conclusion

Ce chapitre présente le modèle dynamique selon le formalisme de Newton –Euler afin de s'approcher le plus possible de la dynamique réelle du quadrotor. En effet, contrairement au modèle qui se base sur le formalisme d'Euler-Lagrange, les coefficients aérodynamiques ne sont pas considérés constants. Le modèle choisi est plus réaliste puisqu'il introduit non seulement les coefficients de l'aérodynamique, mais aussi ceux des moteurs. De plus, cette modélisation de la dynamique du quadrotor nous permettra par la suite la conception des contrôleurs.





## **CHAPITRE 4**

### **COMMANDÉ OPTIMALE**

#### **4.1 Introduction**

L'objectif de la commande optimale contient deux principales orientations. La première orientation vise une énergie minimale tandis que la deuxième cherche à réduire le temps de convergence du système. L'objectif général est de trouver une commande optimale qui minimise un critère qui varie selon l'orientation adoptée [34].

La commande optimale d'un système non linéaire invariant avec un régulateur linéaire quadratique a évolué de façon importante au cours des dernières années. Cette méthode offre la possibilité d'augmenter la stabilité dynamique du quadrotor tout en assurant la minimisation de la consommation d'énergie.

Alternativement, en se basant sur les méthodes de retour d'état, le concepteur doit commencer par le placement des pôles afin de trouver les gains de retour d'état. Cette méthode permet de réaliser le comportement désiré du système. Cependant, la puissance utilisée peut être très grande et pourrait saturer les actionneurs [34].

L'objectif de ce projet consiste à éviter un régime nécessitant une consommation d'énergie importante, d'où l'intérêt de concevoir un contrôleur minimisant cette puissance et par la suite éviter la saturation des actionneurs. En effet, cela peut être concrétisé à l'aide du régulateur linéaire quadratique. Cependant, un régulateur linéaire quadratique ne peut être appliqué que sur un système linéaire, complètement commandable et complètement observable [34]. Pour notre problème, il faut donc linéariser le modèle dynamique autour d'un point de fonctionnement.

Pour commencer, on positionne le problème en considérant un système à temps continu de représentation d'état [34] :

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (4.1)$$

Sous condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Les signaux  $u$  et  $x$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans respectivement  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  représentant respectivement le vecteur de commande et le vecteur d'état.

Le régulateur en question est appliqué sur un système linéaire, qui peut être représenté par un modèle d'état sous la forme matricielle suite à une linéarisation comme suit:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.3)$$

Où le vecteur  $y(t)$  représente le vecteur de sortie.  $A$  est la matrice de transition d'état,  $B$  la matrice de commande. Les matrices  $C$  et  $D$  sont relatives au vecteur de sortie  $y(t)$ .

## 4.2 Critères d'optimalité de la commande optimale

Dans cette section, on présente le résultat en s'appuyant sur le principe du maximum de Pontriagine sans détailler le calcul des variations. Pour plus de détails, on se réfère à [34] et [35].

Rappelons l'équation du système à temps continu:

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (4.4)$$

Sous condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , où  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Les signaux  $u$  et  $x$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers respectivement  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ . Étant donnée la condition initiale et la commande  $u$ , l'équation (4.4) définit une trajectoire unique pour l'état  $x$  sur l'intervalle temporel  $[t_0, t_f]$  [35][36][37].

Soit la famille de critères qui s'écrivent sous la forme :

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt \quad (4.5)$$

Avec  $x_f = x(t_f)$ . Les fonctions  $\theta$  et  $\phi$  ainsi que les instants  $t_0$  et  $t_f$  sont donnés. Ce critère ne dépend que de  $x_0$  et de  $u$  sur  $[t_0, t_f]$ . Ceci dit, il existe plusieurs critères dans la littérature, on cite à titre d'exemple [35] [36]:

Plusieurs contraintes autres que l'équation de l'état peuvent intervenir sur la trajectoire de la variable d'état, sans pour autant mettre en cause le critère choisi. On cite à titre d'exemple :

- l'instant final soit imposé ou libre;
- les contraintes peuvent être imposées sur l'état final:  $x_f \in \chi$ ;
- la commande d'entrée peut appartenir à un ensemble  $u \in U \subset \mathcal{R}^m$ .

Ainsi, le problème de la commande optimale consiste à trouver la commande  $\tilde{u}$  optimale minimisant  $J(x_0, t_0, u)$  :

$$\tilde{u} = \min_{u \in U} J(x_0, t_0, u) \quad (4.6)$$

Par la suite on notera la trajectoire optimale  $\tilde{x}$  correspondante à la valeur du critère  $\tilde{J}(x_0) = J(x_0, t_0, \tilde{u})$ .

#### 4.2.1 Principe d'optimalité de Bellman

On reprend dans cette partie le critère donné par l'équation (4.7) où on considère la commande optimale  $\tilde{u}$  sur  $[t_0, t_f]$ . Le critère optimal est donné par :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u|_{[t_0, t_f]}} J(x_0, t_0, u) \quad (4.7)$$

Soit  $t_1 \in [t_0, t_f]$ . Le principe d'optimalité de Bellman stipule que la trajectoire optimale sur  $[t_0, t_f]$  contient la trajectoire optimale sur  $[t_1, t_f]$  à la condition initiale  $x_1 = x(t_1)$ .

Autrement dit :

$$\tilde{J}(x_0) = \min_{u|_{[t_0, t_f]}} \left( \int_{t_0}^{t_1} \phi(x, t, u) dt + \tilde{J}(x_1) \right) \quad (4.8)$$

Bien que la suite du chapitre ne soit pas directement basée sur ce principe, mais plutôt sur celui du maximum, il convient de signaler que ce principe d'optimalité est très souvent cité dans la littérature.

#### 4.2.2 Principe de minimum de Pontriagine

Dans cette partie, on énonce brièvement le principe de minimum de Pontriagine [38]. Pour plus d'information sur sa démonstration, on peut se référer à Sage et White [35].

Rappelons le système l'équation d'état donné par l'équation (3.4) :

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

Et le critère de performance donné par l'équation (3.5):

$$J(x_0, t_0, u) = \theta(x_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x, u, t) dt.$$

On considère l'hamiltonien relatif au système :

$$H(x, u, p, t) = \phi(x, u, t) + p^T f(x, u, t), \quad (4.9)$$

Avec  $p$  l'état adjoint<sup>1</sup>. Le principe du minimum de Pontriagine stipule que la trajectoire optimale minimise l'hamiltonien du système. En d'autres termes :

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{p}, t) \leq H(\tilde{x}, u, \tilde{p}, t) \quad \forall u \in U, t \in [t_0, t_f]. \quad (4.10)$$

Tout au long de la trajectoire optimale, on dispose de diverses équations qui permettent de résoudre le problème de commande optimale. Ces équations sont générées à l'aide du calcul des variations [38].

---

<sup>1</sup> "Costate vector" en anglais

En opérant sur les points extrêmaux de la solution, on obtient un jeu d'équations appelées équations canoniques de Hamilton. Ces dernières commandent les dynamiques de l'état et de l'état adjoint. En effet,

- la dynamique de l'état :  $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}$  (4.11)

- la dynamique de l'état adjoint :  $\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p}$ . (4.12)

Les équations résultantes des conditions initiale et finale en  $t_0$  et en  $t_f$  sont appelées équations de transversalité données par :

- à l'origine :

$$\left(-H(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial t_0}\right) \delta t_0 + (p(t_0) + \frac{\partial \theta}{\partial x_0})^T \delta x_0 = 0 \quad (4.13)$$

- à l'arrivée :

$$\left(-H(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial t_f}\right) \delta t_f + (p(t_f) + \frac{\partial \theta}{\partial x_f})^T \delta x_f = 0. \quad (4.14)$$

Diverses équations additionnelles peuvent être exprimées selon les hypothèses du problème. On peut citer à titre d'exemple :

- dans le cas où aucune contrainte n'est imposée sur  $u$  :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (4.15)$$

- dans le cas où  $H$  n'est pas une fonction explicite du temps :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad (4.16)$$

### 4.2.3 Commande bang-bang

Une des versions particulièrement connue de la commande optimale est la commande à temps minimal. Ce type de commande est appliquée généralement lorsqu'on veut amener un véhicule d'un point initial d'arrêt à un point d'arrivée, également à l'arrêt, dans le temps le plus court possible. Si on considère un mouvement en ligne droite, on pense intuitivement à une commande optimale appliquée sur l'accélération de façon à ce qu'elle soit maximale jusqu'à un certain instant à partir duquel il faudra freiner au maximum.

On l'appelle commande bang-bang puisqu'elle est toujours saturée entre sa valeur minimale et sa valeur maximale. Cependant, ce genre de commande n'est pas recommandable de point de vue robustesse de la commande. En effet, lorsque la masse du véhicule n'est pas parfaitement estimée, cette commande est incapable de remplir sa mission de manière précise [34] [35].

## 4.3 Commande linéaire quadratique

La Commande linéaire quadratique est souvent appelée LQ ou LQR pour "*Linear quadratic regulator*". Cette appellation provient du fait que le système est linéaire et que la commande est quadratique.

### 4.3.1 Contrôleur linéaire quadratique à horizon fini

Considérons dans cette partie le problème de commande optimale du système décrit par les équations ci-dessous [35][39] :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u. \quad (4.17)$$

On considère aussi l'ensemble des critères s'écrivant sous une forme quadratique comme suit:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2}x_f^T S x_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt \quad (4.18)$$

où  $Q$ ,  $R$  et  $S$  sont des matrices de pondération symétriques définies non négatives et  $R > 0$ .

En écrivant  $p = P(t)x$ , l'hamiltonien est donné par :

$$H(x, u, p, t) = P^T A(t)x + P^T B(t)u + \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) \quad (4.19)$$

L'équation (4.23) vérifie les conditions suivantes :

- l'équation de l'état adjoint

$$\dot{p} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -A^T(t)p - Q(t)x \quad (4.20)$$

- la condition de transversalité

$$p(t_f) = Sx_f \quad (4.21)$$

- l'absence de contrainte sur la commande

$$\frac{\partial L}{\partial u} = B^T(t)p + R(t)u = 0. \quad (4.22)$$

Ainsi la commande

$$u = R^{-1}(t)B^T(t)p$$

De ce fait, l'équation dynamique du système s'écrit comme suit :

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \quad (4.23)$$

On peut réécrire les équations (4.24) et (4.28) sous forme matricielle appelée système hamiltonien :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

En nous inspirant de (4.25), nous écrivons  $p = P(t)x$  avec la condition finale  $P(t_f) = S$  et en la dérivant nous obtenons :

$$\dot{p} = \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x} \quad (4.25)$$

Ainsi l'équation (4.24) s'écrit alors :

$$\dot{p} = -(A^T(t)P(t) + Q(t))x \quad (4.26)$$

En intégrants les équations précédentes l'équation d'état du système, l'équation (4.30) s'écrit en omettant la référence au temps afin d'alléger les notations

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (4.27)$$

La solution est obtenue en résolvant l'équation différentielle de Riccati donnée comme suit :

$$(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q) = 0 \quad (4.28)$$

Par la suite, le critère coût s'écrit alors comme suit :

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} (x_f S x_f - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (x^T P x) dt). \quad (4.29)$$

En appliquant la condition de transversalité  $S = P(t_f)$  sur le critère, le minimum du critère est donc :

$$\tilde{J}(x_0) = J_0(t_0, x_0, \tilde{u}) = \frac{1}{2} x_0 P(t_0) x_0 \quad (4.30)$$

La commande optimale obtenue est identique à un retour d'état donné par :

$$u = -K(t)x \quad (4.31)$$

$$\text{où } K = -R^{-1}B^T P. \quad (4.32)$$

Cependant,  $K$  varie dans le temps. Même dans le cas d'un système à temps invariant, c'est-à-dire que les matrices  $A, B, Q$  et  $R$  ne dépendent pas du temps, la matrice  $P(t)$  reste dépendante du temps dans le cas d'un critère à temps fini.

#### 4.3.2 Contrôleur linéaire quadratique à horizon infini

Nous nous intéressons dans cette section aux systèmes multivariables linéaires à temps variant précédent où le critère est donné par [35][36][37]:

$$J(x_0, t_0, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt. \quad (4.33)$$

Si le système est stabilisable à tout instant  $t$ , on arrive à montrer que ce critère est fini. Ainsi on montre qu'à chaque instant il existe un  $K(t)$ . D'autre part, sur un horizon infini, l'état final tend vers zéro si le système bouclé est stable.

Dans le cas d'un système linéaire à temps invariant, la commande optimale est exprimée sous forme de retour d'état statique  $u = -Kx$  où  $K = -R^{-1}B^TP$ .

$P$  vérifie l'équation algébrique de Riccati donnée par :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (4.34)$$

#### 4.3.3 Minimisation de l'énergie du contrôle

Dans cette section on considère le critère coût  $J_u$  représentant la sommation de l'énergie quadratique requise pendant une période déterminée par  $\delta t = t_f - t_0$  donnée par [39] :

$$J_u = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)Ru(t)dt$$

où  $u^T(t)Ru(t) > 0$ . (4.35)

La condition de la dernière équation est réalisable, si et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- le vecteur d'entrée  $u(t) > 0$ ,
- la matrice de pondération est symétrique définie positive ( $R > 0$ ).

Le terme  $u^T(t)Ru(t)$  permet de mesurer la consommation de l'énergie du système. Le but du concepteur est de trouver le bon compromis entre la minimisation de ce terme tout en respectant la contrainte de performance. Dans la littérature du domaine de contrôle moderne, l'optimisation de l'énergie est proportionnelle à la diminution du terme  $J_u$ .

#### 4.3.4 Minimisation de l'erreur du vecteur d'état

Le critère  $J_e$  représente dans cette section l'erreur quadratique du vecteur d'état  $x(t)$  [39]:

$$\begin{aligned} J_e = \int_{t_0}^{t_f} e^T(t) Q e(t) dt \\ e^t(t) Q e(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec,  $e(t) = x_d(t) - x(t)$ ,  $x(t)$  représente le vecteur d'état et  $x_d(t)$  représente le vecteur d'état désiré.

La condition de l'équation (4.36) est réalisable, si et seulement si, la matrice de pondération  $Q$  est définie non négative ( $Q \geq 0$ ). Le terme quadratique  $e^t(t) Q e(t)$  a été pris en considération afin d'accumuler l'erreur transitoire du vecteur d'état. Ce critère permet de mesurer la performance optimale du système.

#### 4.3.5 Minimisation de l'erreur en régime permanent du vecteur d'état

Le critère  $J_f$  représente l'erreur minimale en régime permanent du vecteur d'état, il est exprimé par :

$$\begin{aligned} J_f = e^T(t_f) S e(t_f) \\ e^T(t_f) S e(t_f) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) est réalisée si et seulement si, la matrice de pondération S est symétrique définie positive. Le terme quadratique  $e^T(t_f)Se(t_f)$  doit être pris en considération afin de forcer la valeur finale du vecteur d'état de s'approcher du point d'équilibre du système au maximum pour diminuer l'erreur en régime permanent.

#### 4.4 Régulateur linéaire quadratique

Le régulateur linéaire quadratique se base sur la méthode de retour d'état. La figure 4.1 présente un schéma bloc du régulateur linéaire quadratique.

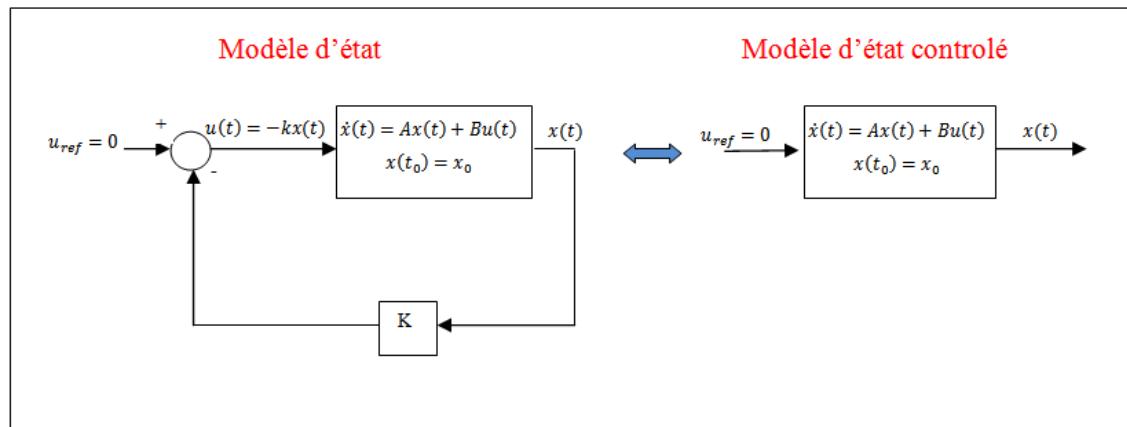


Figure 4.1 Schéma bloc simplifié du régulateur linéaire quadratique  
Tirée de A. Drouot (2013)

De point de vue mathématique, le critère de compromis performance-consommation minimal peut être calculé par [38]:

$$J_{min} = \frac{1}{2} e^T(t_f) S e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^T Q e(t) + u^T(t) R u(t) dt. \quad (4.38)$$

En supposant que le vecteur d'état désiré est nul ( $x_d(t) = 0$ ), l'équation (4.41) devient [5] :

$$J_{min} = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt. \quad (4.39)$$

On rappelle que l'objectif principal est de minimiser le critère de compromis  $J_{min}$ . Il est possible de réaliser cet objectif en utilisant la méthode de calcul des variations maximales et minimales, ce qui nous permet de définir la matrice hamiltonien [38] :

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2}x^T(t)Qx(t) + \frac{1}{2}u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t)]. \quad (4.40)$$

Où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange. L'étape suivante consiste à réécrire le critère  $J_{min}$  sous la forme [5] suivante:

$$J_{min}^1 = J_{min} + \lambda^T[Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t)]. \quad (4.41)$$

En nous basant sur l'équation (4.2) et en la substituant dans  $(J_{min}^1)$ , on obtient :

$$J_{min}^1 = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T(t)x(t)]dt. \quad (4.42)$$

Afin d'avoir la valeur maximale ou minimale du critère de compromis,  $J$ , il faut satisfaire la condition ( $\delta J_{min}^1 = 0$ ) en opérant sur les paramètres suivants :  $x(t), u(t), Q, R, S$  et en respectant les relations suivantes [38] :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}(t) = Qx(t) + A^T\lambda(t) \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = Ru(t) + B^T\lambda(t) \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.45)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(x^T(t)Sx(t))}{\partial x} \Big|_{t=t_f} = Sx(t_f) = \lambda(t_f) \quad (4.46)$$

De la relation (4.46), on peut calculer le vecteur d'entrée [5] donné par :

$$u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t). \quad (4.47)$$

## 4.5 Robustesse de la commande linéaire quadratique

L'une des propriétés influençant le choix de la stratégie de contrôle est sa capacité à trouver un compromis entre sa robustesse et sa performance. Il est important de prendre en compte les perturbations ainsi que le bruit de mesure des capteurs. Ainsi, il est important de concevoir des contrôleurs qui ont la robustesse (en termes de pourcentage de dépassement, temps de stabilisation...etc.), en dépit du fait que le système soit soumis à des perturbations. Cependant, Il est maintenant largement reconnu dans la communauté automaticienne que l'utilisation de la commande non linéaire peut améliorer de manière significative les niveaux de performance ou de robustesse des systèmes commandés, ou même parfois résoudre des cas pathologiques [40].

Une commande est dite robuste si on peut garantir la satisfaction d'un certain niveau de performance malgré la présence d'erreur bornée du modèle suite à l'incertitude de modélisation.

Lors de la conception du système de contrôle, il est important de réaliser que l'ensemble des équations différentielles linéaires qui sont la base de la conception sont, la plupart du temps, une approximation du système dynamique non linéaire. Les dynamiques à haute fréquence non modelés peuvent déstabiliser le système contrôlé.

De plus, comme le système non linéaire change son point d'équilibre, le modèle linéarisé décrivant son comportement perturbé change. Cette variation de paramètre est un effet de basse fréquence qui peut déstabiliser le système.

### Origine des erreurs du modèle

Les systèmes physiques sont essentiellement des systèmes dynamiques non linéaires, dont on approxime le comportement par celui d'un modèle linéaire, plus ou moins proche.

Le système non linéaire peut fonctionner autour de plusieurs points d'équilibre (points de fonctionnement, dans l'espace d'état) au cours de son évolution normale : on peut alors calculer en chaque point un modèle linéaire tangent par dérivation au premier ordre. L'ensemble des modèles possibles doit donc contenir l'ensemble de ces modèles linéarisés. Certains paramètres de modèle linéaire peuvent changer de valeur par saut (c'est le cas de l'inertie d'un bras de robot qui prend un objet pesant) : l'ensemble des modèles possibles doit alors contenir les différents modèles correspondant aux valeurs possibles de ces paramètres. Souvent les modèles sont obtenus à partir d'identification utilisant des mesures d'entrée-sortie (analyse harmonique, moindres carrés ou autres). Dans ce cas, les erreurs ou bruits de mesure induisent des erreurs de modèles qu'il faut quantifier. En général le rapport signal/bruit des signaux se dégrade en haute fréquence : les modèles sont donc imprécis à ces hautes fréquences.

Les modèles linéaires utilisés pour la synthèse de commande, sont souvent des modèles d'ordre fini et réduit, alors que les systèmes physiques sont souvent d'ordre infini (paramètres répartis ou systèmes à retard). Il faut donc caractériser cette erreur de troncature (dynamiques non modélisées) et la borner.

### **Conception robuste classique**

En commande classique, la robustesse peut être conçue dès le début en fournissant une marge de gain et de phase suffisante pour contrer les effets de la modélisation inexacte. En termes de diagramme de Bode, le gain de boucle doit être élevé dans les basses fréquences pour la robustesse de la performance, et doit être faible à des fréquences élevées, où les dynamiques non modélisées peuvent être présentes [41].

Les techniques de conception du contrôle classique sont généralement dans le domaine de fréquence, et ils offrent ainsi une approche pratique à la conception robuste pour un système entrée unique-sortie unique (SISO). Toutefois, les marges de gain individuelles, les marges de phase et celles de sensibilité de toutes les fonctions de transfert SISO dans un système à plusieurs variables ne sont pas corrélées avec la robustesse globale. Pour cette raison, il y a

eu des problèmes dans l'extension des notions classiques de conception aux systèmes de production multi-entrées / multi-sorties [41].

### **Conception robuste moderne**

Les techniques de contrôle modernes offrent un moyen direct pour concevoir des contrôleurs multi-boucles pour les systèmes MIMO en fermant toutes les boucles simultanément. Le rendement est plus garanti en termes de minimisation d'un indice de performance quadratique qui implique généralement la stabilité en boucle fermée. Tout notre travail dans les chapitres précédents suppose que le modèle est exactement connu et qu'il n'y a pas de perturbations. En fait, c'est rarement le cas.

Dans [41], Lewis *et al* montrent que les mesures classiques de robustesse dans le domaine fréquentiel sont facilement étendues à un système MIMO d'une façon rigoureuse en utilisant la notion de la valeur singulière. En termes de plan de Nyquist, [41] présente des limites garantissant une stabilité robuste et une performance solide pour les systèmes multivariables, notions qui sont tout à fait analogues à ceux de contrôle classique.

#### **4.5.1 Différence de retour**

À partir de l'équation de Riccati, on fait apparaître les termes  $sI - A$  où I est la matrice identité. En ajoutant  $PsI - sIP$  à l'équation et en multipliant à droite par  $(sI - A)^{-1}B$  et à gauche par  $B^T(sI - A^T)^{-1}$ , l'équation de la différence de retour est donnée par [42]:

$$\begin{aligned} & (I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) \\ & = R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Multiplions à droite par  $(sI - A^T)^{-1}B$  et à gauche par  $B^T(-sI - A^T)^{-1}$ . En se basant sur (4.36), on note  $B^TP = RK$  et  $PB = K^TR$ . Ainsi l'équation de différence de retour est donnée par :

$$(I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) = R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B. \quad (4.49)$$

#### 4.5.2 Marges de stabilité et robustesse structurelle généralisées des régulateurs LQR multivariables

Reprendons l'équation de la différence de retour en fréquentiel avec  $s = j\omega$ . On note  $H(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1}B$ . Ainsi, pour tout  $\omega$ , on obtient :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) = R + H^H(j\omega) Q H(j\omega) \quad (4.50)$$

Où  $M^H$  est l'hermitien de  $M$ , c'est-à-dire le conjugué transposé. On en déduit alors l'inégalité de Kalman donnée par [42] :

$$(I + KH(j\omega))^H R(I + KH(j\omega)) \geq R. \quad (4.51)$$

On va se restreindre au cas où  $R = rI$  où  $r$  est une variable réelle et factorisons  $Q = L^T L$ . L'égalité (3.52) est ainsi donnée par :

$$(I + KH(j\omega))^H (I + KH(j\omega)) = I + \frac{1}{r} (LH(j\omega))^H (LH(j\omega)). \quad (4.52)$$

L'équation (3.54) nous donne des valeurs singulières de  $I + KH(j\omega)$  tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_i(I + KH(j\omega)) &= \sqrt{\lambda_i(I + KH(j\omega))^H(I + KH(j\omega))} \\ \sigma_i(I + KH(j\omega)) &= \sqrt{1 + \frac{1}{r} \sigma_i^2(LH(j\omega))} \\ \sigma_i(I + KH(j\omega)) &\geq 1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Où  $\lambda_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice. Dans un système mono variable, ce résultat s'interprète facilement sur le plan de Nyquist, étant donné que la distance au point -1 est

toujours supérieure à 1. Ainsi la propriété de robustesse du régulateur est présentée par sa marge de module qui est égale à 1 comme on peut le voir dans la figure 26. Pour finir, on peut déduire les intervalles dans lesquels le gain et la phase peuvent varier [43] :

- gain  $]0.5, +\infty[$ ,
- phase  $]-60^\circ, 60^\circ[$ .

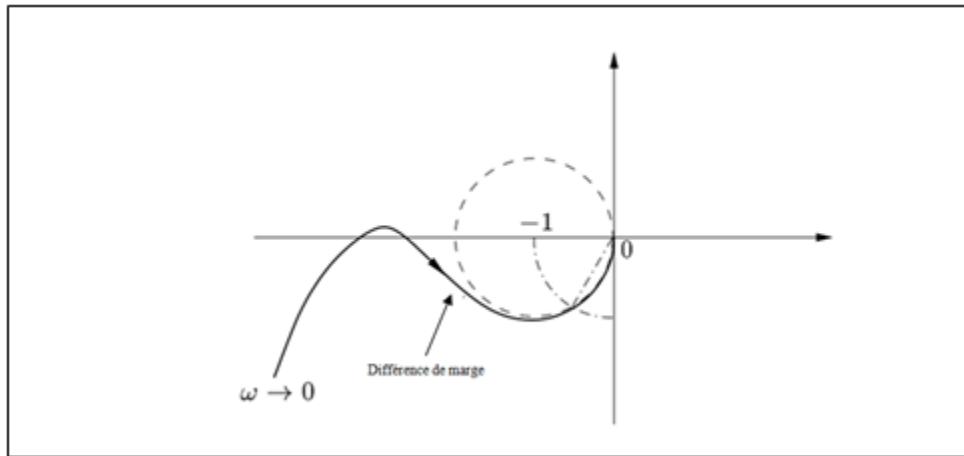


Figure 4.2 Lieu de Nyquist de la fonction de transfert de la boucle linéaire quadratique  
Tirée de D.Alazard (2009)

On remarque que si on introduit des changements simultanés sur la phase et l'amplitude, cela pourrait réduire ces résultats de robustesse.

#### 4.5.3 Choix des pondérations

La commande LQR permet de calculer le gain optimal défini dans les sections précédentes. Cette optimalité est définie dans le sens à minimiser la fonction coût  $J$ .

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.54)$$

$Q$  et  $R$  sont alors les matrices de pondération du vecteur d'état et du vecteur commande. Le choix de ces matrices est laissé au concepteur de la commande du système de contrôle. Cependant,  $Q$  doit être semi-définie positive et  $R$  définie positive [38][44][45]. Celles-ci

traduisent les préférences du concepteur en termes de contrôle sur  $A$  et  $B$ . En effet, si l'on veut que l'état observable  $x_i$  soit minimisé en priorité on va y affecter un poids  $Q_{ii}$  fort. Ainsi, pour la fonction de coût, le fait de ne pas minimiser  $x_i$  induira un coût plus élevé. De la même façon, pour les termes non diagonaux, un poids fort en  $R_{ij}$ ,  $i$  différent de  $j$ , a pour effet de diminuer l'utilisation des deux actionneurs  $u_i$  et  $u_j$  simultanément. Néanmoins, généralement on commence par l'élaboration de matrices de pondération diagonales. Il n'existe pas de manière systématique pour calculer  $Q$  et  $R$  car elles ne représentent que des préférences, mais il existe certaines heuristiques pour se donner une valeur de départ. On peut par la suite affiner les matrices initiales à l'aide de la méthode de essais et erreurs jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant.

Une stratégie décrite par Joao P. Hespanha dans [46] appelée règle de Bryson consiste à choisir  $Q$  et  $R$  diagonales et à choisir les poids tels qu'ils soient égaux à l'inverse de la valeur maximale (que l'on se donne) du terme correspondant au carré.

Pour notre cas, on choisit les matrices  $Q$  et  $R$  diagonales. On suppose que notre objectif est d'amener la variable d'état  $x_i$  à 0 et on simule différentes valeurs de  $Q$  et  $R$  jusqu'à ce qu'on annule l'erreur.

#### 4.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, on décrit plus en détail, les caractéristiques de la commande optimale grâce à l'énumération de certains critères d'optimalité. Dans un second volet, on s'intéresse plus particulièrement à l'une de ses applications: le contrôleur linéaire quadratique. En effet, on s'intéresse aux aspects relatifs au développement et au fonctionnement du régulateur linéaire ainsi qu'à ses caractéristiques de robustesse.

Dans le cinquième chapitre, on explicitera plus encore l'application du régulateur linéaire quadratique.





## CHAPITRE 5

### APPLICATION DE LA COMMANDE LINÉAIRE QUADRATIQUE

#### 5.1 Introduction

L’application du contrôleur linéaire quadratique nécessite que le système d’état soit linéaire, entièrement commandable et observable. Comme on l’a précédemment décrit dans le chapitre 4, les équations de mouvement du quadrotor sont données par un système d’état non linéaire. Pour y remédier, les designers aéronautiques privilégient l’approche de linéarisation du système autour d’un point de fonctionnement [46].

Dans ce chapitre, nous présentons une approche basée sur la commande LQR, dans le but de résoudre les problèmes de poursuite.

#### 5.2 Le problème de régulation d’état

Dans le domaine de conception des contrôleurs, on est souvent intéressé non pas par la régulation de l’état proche de zéro, mais dans la poursuite d’une commande de référence non nulle. Pour la suite du projet, notre intérêt sera porté à la conception d’un système de contrôle permettant de poursuivre un signal de référence.

Pour la suite du travail, on choisit d’appliquer une approche de conception des systèmes de contrôle pour la poursuite d’une trajectoire souhaitée. Cette structure comprendra une boucle de gain qui définit ainsi une erreur de suivi  $e(t)$  qui devrait être minimisé.

Notre système d’équation est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ U = -KX \end{cases} \quad (5.1)$$

Où  $X$  est le vecteur d’état,  $U$  est le vecteur d’entrée du contrôle. De plus on introduit :

$$Z = HX \quad (5.2)$$

Où Z est le vecteur des performances résultantes qui doit poursuivre le vecteur de référence à l'entrée. Il est important de réaliser que pour assurer le suivi parfait, il est nécessaire d'avoir le plus grand nombre d'entrées de commande dans le vecteur u(t). Dans notre cas c'est quatre, le même nombre des signaux en r (t) [47].

Pour notre cas, on a choisi d'introduire les quatre variables représentants les intégrales des erreurs sur  $[0, T]$  respectivement aux variables  $x, y, z$  et  $\psi$  et les inclure dans la dynamique du système. Elles sont définis par :

$$\dot{E}_x = x_d - x \quad (5.3)$$

$$\dot{E}_y = y_d - y \quad (5.4)$$

$$\dot{E}_z = z_d - z \quad (5.5)$$

$$\dot{E}_\psi = \psi_d - \psi. \quad (5.6)$$

### 5.3 Définition du vecteur d'état

Avant de passer au processus de linéarisation, on doit définir le vecteur d'état sur lequel on va appliquer notre contrôleur linéaire quadratique. Dans la suite du projet, on va travailler principalement avec les positions et les vitesses linéaires ainsi que les positions et les vitesses angulaires exprimées dans le repère inertiel. D'autre part, comme il s'agit d'un problème de poursuite d'une trajectoire désirée, on a décidé d'augmenter notre système d'équation en ajoutant quatre nouvelles variables. Le but est de déterminer un contrôle tel que la trajectoire générée par la dynamique du quadrotor suive le mieux possible la trajectoire de référence [49]. On introduit ainsi les quatre variables représentant les intégrales des erreurs sur  $[0, T]$  respectivement aux variables  $x, y, z$  et  $\psi$ . Ainsi le modèle d'états choisi est comme suit :

$$X = [position \text{ linéaire}, vitesse \text{ linéaire}, position \text{ angulaire}, vitesse \text{ angulaire}, E_x, E_y, E_z, E_\psi] \quad (5.7)$$

Où les positions et les vitesses linéaires et angulaires sont exprimées dans le repère inertiel. Le modèle d'état sélectionné est ainsi contrôlable et observable.

## 5.4 Linéarisation du modèle dynamique

Dans cette section, on détermine le point d'équilibre dans un premier temps. Dans un second temps, on linéarise le modèle dynamique du quadratique pour déduire la mise en forme du contrôleur quadratique linéaire.

### 5.4.1 Recherche d'un point d'équilibre

Étant donnée que la formulation de l'espace d'état décrit jusqu'ici est non linéaire et que le procédé de contrôle proposé dans ces travaux est basé sur un modèle linéaire, une linéarisation doit être effectuée; elle consiste à approcher le système d'état non linéaire par une formulation linéaire:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}\tag{5.8}$$

L'approximation n'est valable que dans le voisinage d'un point de fonctionnement ou point de linéarisation  $(\bar{X}, \bar{U})$ . L'objectif est d'avoir le quadrotor stable à une certaine hauteur, effectuant ainsi un vol stationnaire. Le point d'équilibre peut être accompli en effectuant les conditions de vol suivantes [50] :

- la somme des forces externes est nulle ( $\sum \vec{F} = 0$ );
- la somme des moments externes est nulle ( $\sum \vec{M} = 0$ );
- la vitesse verticale ( $w$ ) est nulle, ce qui implique que l'altitude de l'avion est constante;
- la vitesse latérale( $v$ )nulle;
- la vitesse longitudinale non nulle ( $u \neq 0$ ).

On considère le vecteur d'état  $X$  défini comme suit :

$$X = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \varphi \ \dot{\varphi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ E_x \ E_y \ E_z \ E_\psi]^T \tag{5.9}$$

Et on considère le vecteur de commande défini par :

$$U = [U_z \quad U_\varphi \quad U_\theta \quad U_\psi]^T. \quad (5.10)$$

On note le point d'équilibre par  $(\bar{X}, \bar{U})$  donné par [50] :

$$\bar{X} = [x \quad 0 \quad y \quad 0 \quad z \quad 0 \quad 0]^T \quad (5.11)$$

où le choix des positions  $x$ ,  $y$  et  $z$  est arbitraire, car il n'intervient pas dans les équations de linéarisation. On considère aussi le vecteur d'entrée  $\bar{U}$ . Dans le cas du quadrotor,  $U$  peut être trouvé de façon à ce que la poussée totale produite soit égale à la force de gravité [50].

$$\bar{U} = [m * g \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (5.12)$$

#### 5.4.2 Application du modèle dynamique linéarisé autour du point d'équilibre

Les équations du chapitre 4 qui décrivent la dynamique du système ne sont pas linéaires. Comme mentionné précédemment, dans une telle situation, il est courant de linéariser les équations autour d'un point de fonctionnement. Linéariser le système facilite la construction du contrôleur linéaire quadratique appliqué au quadrotor comme nous le verrons plus tard dans ce chapitre.

Pour mettre en œuvre la linéarisation, on a eu recours à l'expansion de la série de Taylor de premier ordre. Si on considère que le modèle du quadrotor est donné par:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ Y = h(X, U) \end{cases} \quad (5.13)$$

La linéarisation du système autour du point d'équilibre  $(\bar{X}, \bar{U})$  est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = f(\bar{X}, \bar{U}) + \frac{\partial f(X,U)}{\partial x}(X - \bar{X}) + \frac{\partial f(X,U)}{\partial U}(U - \bar{U}) \\ Y = h(\bar{X}, \bar{U}) + \frac{\partial h(X,U)}{\partial x}(X - \bar{X}) + \frac{\partial h(X,U)}{\partial U}(U - \bar{U}) \end{cases} \quad (5.14)$$

Où  $f(X, U)$  représente l'ensemble des équations de mouvement produites par le comportement dynamique du quadrotor donnée par l'équation (3.36) et  $h(X, U)$  présente les équations relatives aux sorties des capteurs. En supposant la présence de très petites perturbations autour du point d'équilibre  $(\bar{X}, \bar{U})$ ,  $(X - \bar{X})$  et  $(U - \bar{U})$  sont quasiment zéro, nous pouvons vérifier pour:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = 0 \rightarrow f(\bar{X}, \bar{U}) = 0 \\ Y = 0 \rightarrow h(\bar{X}, \bar{U}) = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Ainsi (5.7) devient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \frac{\partial f(X,U)}{\partial x}(X - \bar{X}) + \frac{\partial f(X,U)}{\partial U}(U - \bar{U}) \\ Y = \frac{\partial h(X,U)}{\partial x}(X - \bar{X}) + \frac{\partial h(X,U)}{\partial U}(U - \bar{U}) \end{cases} \quad (5.16)$$

En nous basant sur la notation de (4.6), on en déduit que :

$$A = \left. \frac{\partial f(X,U)}{\partial x} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} \quad (5.17)$$

$$B = \left. \frac{\partial f(X,U)}{\partial U} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} \quad (5.18)$$

$$C = \left. \frac{\partial h(X,U)}{\partial x} \right|_{\bar{X}, \bar{U}} \quad (5.19)$$

$$D = \left. \frac{\partial h(X,U)}{\partial U} \right|_{\bar{X}, \bar{U}}. \quad (5.20)$$

Ainsi, la présentation de système d'état générique donnée précédemment par (4.26) devient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + B\tilde{U} \\ \tilde{Y} = C\tilde{X} + D\tilde{U} \end{cases} \quad (5.21)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{X}(t) = X(t) - \bar{X} \\ \tilde{Y} = Y(t) - \bar{Y} \\ \tilde{U} = U(t) - \bar{U} = -K\tilde{X}(t) \end{cases} \quad (5.22)$$

Ainsi, le problème de poursuite a été converti en problème de régulation donné par (5.22).

Encore une fois, nous mettons l'accent sur la différence entre notre approche et celle traditionnelle décrite dans le chapitre 3. Une fois le gain K dans (5.28) est trouvé, le vecteur de contrôle est donné par (5.7). Ainsi, aucun terme d'action directe supplémentaire n'est ajouté pour annuler l'erreur de poursuite.

En linéarisant les équations dynamiques (3.36), développées dans le chapitre 3 et en intégrant le vecteur d'état défini par (5.14) et (5.16), les dynamiques linéarisées sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{\dot{x}} = -g\theta \\ \tilde{\dot{y}} = g\varphi \\ \tilde{\dot{z}} = -\frac{(U_1 - mg)}{m} \\ \tilde{\dot{\varphi}} = \frac{U_2}{I_{xx}} \\ \tilde{\dot{\theta}} = \frac{U_3}{I_{yy}} \\ \tilde{\dot{\psi}} = \frac{U_4}{I_{zz}} \end{cases} \quad (5.23)$$

Dans la suite, on se base sur l'équation (5.23) pour la génération du régulateur linéaire quadratique classique, sur (4.36) pour la génération de la dynamique du quadrotor. Le diagramme de la simulation du régulateur linéaire classique est donné par la figure 5.1.

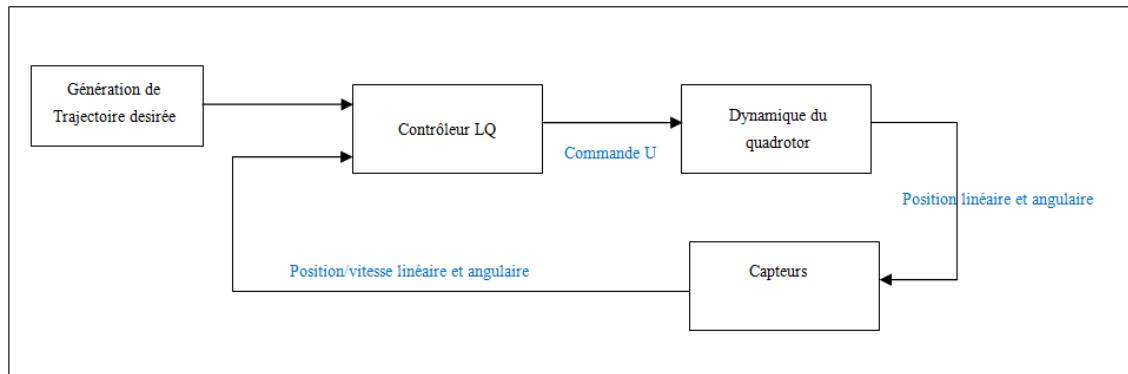


Figure 5.1 Le diagramme de la simulation du régulateur linéaire classique

## 5.5 Conclusion

En continuité au chapitre 4, on a détaillé dans le chapitre 5 l’application de la commande linéaire quadratique à notre dynamique du quadrotor. On a commencé par définir le vecteur d’état, choisir le point d’équilibre pour ensuite linéariser le système non linéaire autour de ce point. Dans le prochain chapitre, on introduit un nouveau critère de minimisation de l’énergie consommée par le quadrotor.

## **CHAPITRE 6**

### **INTÉGRATION DU CRITÈRE DE LA MINIMISATION D'ÉNERGIE DANS LA COMMANDE LINÉAIRE QUADRATIQUE**

#### **6.1 Introduction**

Les contrôleurs existants sont typiquement conçus pour maximiser les performances de poursuite tout en offrant une marge de stabilité suffisante. Cependant, extraire le maximum de performance engendre une consommation plus grande et donc une réduction de la durée de vie de la batterie. Le coût caché de la grande performance du contrôleur peut être pris en considération dans le développement des contrôleurs futurs. Tout autant que la sécurité des véhicules, la fiabilité en minimisant l'erreur de suivi de position/ vitesse et le coût d'entretien vont être pris en considération.

L'apport de ce travail de maîtrise ne se limite pas à appliquer le régulateur linéaire sur la dynamique du quadrotor, mais d'essayer d'aller plus loin dans la minimisation d'énergie. Dans la suite de cette section on présente les différentes stratégies de minimisation d'énergie.

#### **6.2 Stratégie de minimisation de l'énergie**

L'un des inconvénients les plus importants du quadrotor électrique est le fait que le temps moyen de mission ne dépasse pas 15 min. Plusieurs groupes de recherche se sont orientés vers la régulation à l'aide du contrôleur linéaire quadratique due au fait qu'elle minimise, par sa nature quadratique, la consommation d'énergie. Par ailleurs, plusieurs stratégies additionnelles peuvent améliorer le rendement énergétique. On peut citer à titre d'exemple :

- la minimisation des erreurs : en effet, il s'agit de l'approche classique, moins on commet d'erreurs sur la poursuite de la trajectoire désirée, moins on dépense énergétiquement [51];
- la logique floue appliquée sur la commande de l'altitude : En effet, le fait de monter ou descendre consomme le double et même plus, car ce mouvement entraîne la rotation des

quatre moteurs simultanément, donc on pourrait penser à instaurer la logique floue entre la hauteur de vol et l'état de charge de la batterie [51];

- la recherche d'une trajectoire optimale : la consommation de l'énergie peut être réduite en utilisant ou en évitant les courants d'air et ainsi trouver le chemin de vol le moins coûteux en termes d'énergie par rapport à un vol direct vers la destination [51].

Pour le cas de ce mémoire, on a choisi l'adaptation des performances de poursuite par rapport à l'état de charge de la batterie et cela en agissant sur le gain optimal. On expliquera plus en détail cette stratégie dans la section suivante.

### **6.3 Modélisation de la nouvelle commande linéaire adaptée**

Plus un actionneur est poussé à ses limites de performance, plus courte la durée de vie de la batterie devient. Les commandes d'actionneurs existants sont généralement conçues pour optimiser les performances et la robustesse, sans tenir compte de la durée de vie fonctionnelle de la batterie. Cependant, il est souvent souhaitable de faire des compromis entre performances et durée de vie de charge disponible pour la mission de vol, afin de réduire les coûts d'entretien des véhicules et d'améliorer la sécurité des véhicules et le temps de préparation aux missions (le changement de batterie pour le cas des drones électriques).

Nous présentons dans la suite de cette section une commande adaptative pour la gestion de la performance et de durée de vie de la batterie pour les quadrotors à actionneurs électromécaniques.

Ce contrôle adaptatif fournit le contrôle de suivi d'une durée de vie de la batterie en adaptant le niveau de performance des actionneurs. En effet, cette adaptation fournit un compromis entre la performance du moteur et la durée de vie de la charge en fonction des besoins de la mission du véhicule.

L'idée de l'adaptation est inspirée de l'article [52]. Le nouvel algorithme de contrôle fournit une commande de suivi de la durée de vie de la batterie et assure par la suite un compromis

durée vie / performances, respectivement, sans l'utilisation de contraintes matérielles. Cette méthode se base sur un contrôleur optimal classique conçu pour minimiser uniquement l'erreur de poursuite position / vitesse et l'amplitude de l'effort de contrôle. Étant donné que la durée de vie de la batterie est liée à la vitesse du moteur, elle peut être indirectement régulée par l'ajustement de la pondération relative entre la minimisation de l'erreur de poursuite de position /vitesse et la minimisation de l'effort de commande. Le nouveau contrôleur quadratique linéaire ajuste automatiquement la pondération relative afin de trouver un équilibre entre la position / performances de suivi et l'effort de commande. Cette nouvelle option permettrait aussi d'éviter l'écrasement soudain du quadrotor lors d'une mission lorsque la batterie est vide.

Notre approche pour contrôler la durée de vie de la batterie est basée sur l'adaptation du  $Q$  et le facteur de pondération  $R$  en ligne selon la nécessité d'augmenter ou de diminuer les performances ou la durée de vie. L'adaptation de  $Q$  et  $R$  est simplifiée par l'insertion d'une variable scalaire  $\rho$  dans la fonction de coût optimale de commande de la manière suivante [52] :

$$J = \int_0^{\infty} ((x - x_{\text{désiré}})^T \frac{1}{\rho} Q (x - x_{\text{désiré}}) + u^T \rho R u) dt \quad (6.1)$$

Ainsi, augmenter  $\rho$  a pour effet de générer des gains de rétroaction pour le LQR qui améliore la durée de mission disponible, mais entraîne une moins bonne performance de suivi. Inversement, baisser  $\rho$  va générer un gain de rétroaction pour le LQR qui fournit de meilleures performances de suivi au détriment de la réduction de la durée de vie de la batterie.

En insérant  $\rho$  dans la fonction de coût, la matrice de gain optimal  $K$  est calculée à partir de [52]:

$$K = \frac{1}{\rho} R^{-1} B^T S \quad (6.2)$$

où  $S$  est la solution de l'équation [52]:

$$0 = A^T S + S A - S B \frac{1}{\rho} R^{-1} B^T S + \frac{1}{\rho} Q. \quad (6.3)$$

La matrice optimale  $K$  de gain de retour peut être calculée très rapidement pour des problèmes de faible dimension, ce qui permet de la mettre à jour en temps réel en réponse à l'évolution des valeurs de  $\rho$ .

Pour les problèmes de grande dimension, il est possible d'effectuer un pré-calcul de l'ensemble de matrices de  $K$  optimales correspondant aux différentes valeurs de  $\rho$  et stocker les matrices dans une des tables de consultation.

L'interpolation à partir de la table de correspondance peut alors être utilisée pour générer des matrices  $K$  optimales en ligne sur la base de l'évolution des valeurs de  $\rho$  [6].

Pour fournir le contrôle de suivi de la durée de vie de la batterie, nous utilisons la loi d'adaptation simple suivante pour  $\rho$  :

$$\dot{\rho} = -K_p(E_{disponible} - E_{seuil\ desiré}) - K_d \frac{d(E_{disponible} - E_{seuil\ desiré})}{dt} \quad (6.4)$$

où  $K_p$  et  $K_d$  sont des constantes positives,  $E_{disponible}$  est l'énergie disponible dans la batterie reflétant l'état de charge de la batterie et  $E_{seuil\ desiré}$  représente le seuil d'énergie choisi. Comme on peut le constater, il s'agit d'une adaptation proportionnelle dérivée.

Cette loi d'adaptation augmente  $\rho$  lorsque l'énergie résiduelle estimée est inférieure à la l'énergie résiduelle souhaitée, résultant dans de nouveaux gains de rétroaction LQR qui augmentent la durée de vie de la batterie et réduisent les performances du moteur. Inversement, lorsque l'énergie résiduelle estimée est supérieure à l'énergie résiduelle désirée,  $\rho$  est réduit pour convertir l'excès d'énergie pour être utilisé pour améliorer la performance. Le terme dérivé de l'équation offre plus d'amortissement au cours du processus d'adaptation [52].

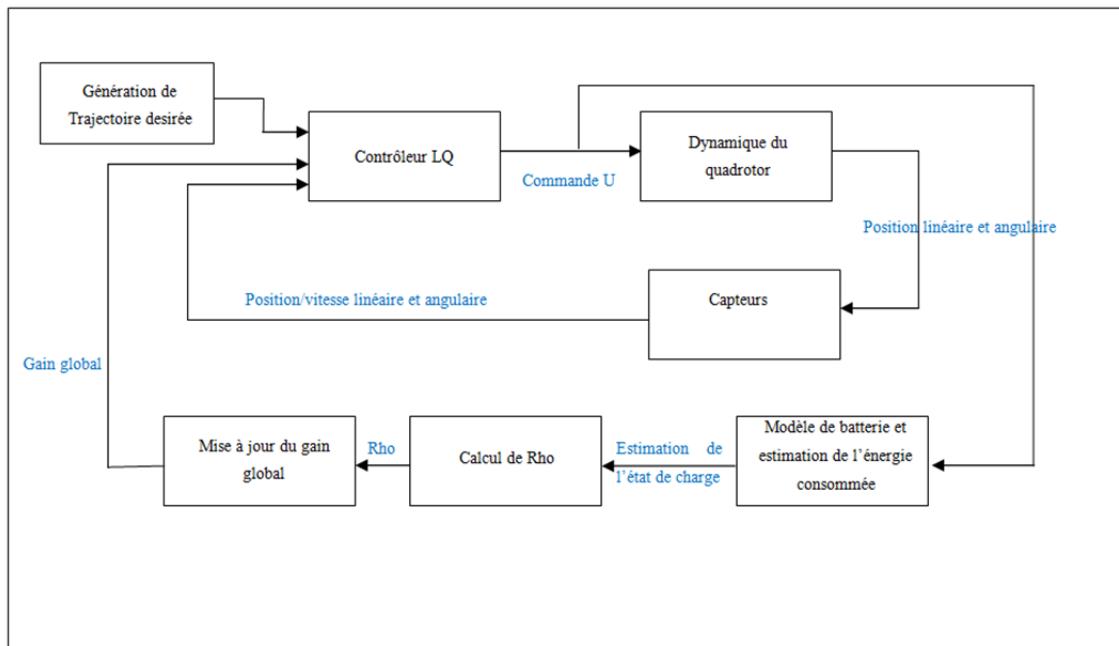


Figure 6.1      Diagramme de simulation du LQR adapté

Les blocs de simulation, présenté à la figure 6.1 seront décris en détails dans le chapitre 7. De plus, le contrôleur linéaire quadratique classique est comparé à celui adapté pour mettre en évidence l'apport de ce nouveau contrôleur.

#### 6.4      Compromis performance/durée de vie

La méthodologie de LQR adaptative décrite ci-dessus permet aux actionneurs d'atteindre la durée de vie résiduelle souhaitée par le sacrifice des performances de suivi de position / vitesse. Cependant, un contrôleur doit assurer l'équilibre entre le besoin de durée de vie prolongée et la nécessité d'une bonne performance. Dans cette section, nous présentons une analyse du LQR adaptative réalisant ce compromis.

Les exigences en termes de performances des actionneurs peuvent varier au cours des différentes phases de la mission d'un véhicule. Par exemple, les performances de l'actionneur pendant le survol du territoire amical n'est pas aussi critique que lors des manœuvres de combat. On doit mettre l'accent sur les performances du moteur de l'actionneur quand un

véhicule est en train de réaliser une manœuvre critique et inversement quand une manœuvre n'est pas critique. L'utilisation du moteur peut être optimisée pour atteindre une longue durée de vie tout en respectant les exigences de performance.

Notre objectif est de construire une fonction de contrôle pour adapter le compromis performance / durée de vie en se basant sur les besoins de la mission.

On a recours à la variable  $\rho$  décrite dans les sections auparavant, on l'utilise pour réguler le compromis performance/durée de vie. Le comportement global que nous aimerons atteindre est le suivant :

- augmenter  $\rho$  (prolonger la durée de vie du moteur) si la tâche de l'actionnement présente une faible priorité et la performance actuelle est satisfaisante;
- augmenter  $\rho$  si la durée de vie résiduelle de la batterie est courte et le rendement est adéquat;
- diminuer  $\rho$  (augmenter les performances du moteur) si la commande est prioritaire et présente une performance est médiocre.

Notre logique de contrôle utilise se base sur l'état de charge de la batterie sont présentés dans la figure 30 et une règle représentatifs sont présentés dans la figure 6.1.

## 6.5 Stabilité au sens de Lyapunov de la commande adaptée

L'intérêt de ces méthodes d'analyse dites de Lyapunov est de juger la stabilité d'un système sans intégrer les équations différentielles qui décrivent son comportement.

Soit le système linéaire :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (6.5)$$

Pour notre cas, on suppose que la paire  $(A, B)$  est observable, commandable et invariant.

Lors de l'adaptation de la commande linéaire quadratique, on introduit le facteur  $\rho$  qui doit être strictement positif afin que les nouvelles matrices de pondération  $\frac{Q}{\rho}$  et  $\rho R$  restent respectivement symétrique définie positive et positive.

Ainsi, la commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère coût s'écrit sous la forme:

$$U = -K_c X \quad \text{Avec} \quad K_c = \frac{1}{\rho} R^{-1} B^T P_c \quad (6.6)$$

où  $P_c$  est une solution positive (symétrique) de l'équation de RICCATI [43]:

$$(A - BK)^T P_c + P_c (A - BK) + \frac{Q}{\rho} + K^T \rho R K = 0 \quad (6.7)$$

### Démonstration

En effet, la dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande  $U = -KX$  obéit à l'équation :

$$\dot{X} = (A - BK)X, \quad X \in \Re^n, U \in \Re^m \quad (6.8)$$

La réponse autonome de X s'écrit alors :

$$X = e^{A_f t} X_0 \quad (6.9)$$

où  $A_f = (A - BK)$  et  $X_0 = X(t = 0)$ .

Le critère coût devient alors [43] :

$$J = X_0^T P X_0 \quad (6.10)$$

$$\text{où} \quad P = \int_0^\infty e^{A_f^T t} \left( \frac{Q}{\rho} + K^T \rho R K \right) e^{A_f t} dt. \quad (6.11)$$

La contrainte  $A_f$  stable entraîne que P vérifie l'équation de Lyapunov[43]

$$A_f^T P_c + P_c A_f + \frac{Q}{\rho} + K^T \rho R K = 0 \quad (6.12)$$

Par ailleurs  $P \geq 0$  car le critère quadratique est positif et  $J = X_0^T P X_0$ .

Soit  $K_c$  la valeur optimale de K qui minimise J et  $P_c$  la solution correspondante de l'équation de Lyapunov. Ainsi :

$$(A - BK_c)^T P_c + P_c (A - BK_c) + \frac{Q}{\rho} + K_c^T \rho R K_c = 0 \quad (6.13)$$

Considérons une variation  $\Delta_K$  autour de  $K_c$  :  $K = K_c + \Delta_K$ . Il en résulte directement une variation  $\Delta_P$  autour de  $P_c$ . Soit  $P = P_c + \Delta_P$  vérifiant :

$$(A - B(K_c + \Delta_K))^T(P_c + \Delta_P) + (P_c + \Delta_P)(A - B(K_c + \Delta_K)) + \frac{Q}{\rho} + (K_c + \Delta_K)^T \rho R (K_c + \Delta_K) = 0 \quad (6.14)$$

Or  $K_c$  est la valeur optimale au sens du critère J, si seulement si le critère augmente pour toute variation de  $\Delta_K$  autour de  $K_c$  ; Ainsi

$$\Delta_P > 0 \quad \forall \Delta_K \quad (6.15)$$

sachant que  $A - B(K_c + \Delta_K)$  stable, car si elle est instable, alors le critère devient infini.

Étant donnés,  $(A - BK)$  est stable, en retranchant (les deux derniere equations) on obtient une équation de Lyapunov.  $\Delta_P$  est positif si seulement si (Théorème de Lyapunov) :

$$\Delta_K^T (RK_c - B^T P_c) + (RK_c - B^T P_c)^T \Delta_K + \Delta_K^T \rho R \Delta_K = 0 \quad \forall \Delta_K \quad (6.16)$$

or  $\Delta_K^T \rho R \Delta_K > 0 \quad \forall \Delta_K$  car  $\rho R > 0$ , il faut donc que [43]:

$$\rho R K_c - B^T P_c = 0 \quad (6.17)$$

$$\text{En d'autres termes} \quad K_c = \frac{1}{\rho} R^{-1} B^T P_c \quad (6.18)$$

Ainsi, pour garder la stabilité la commande linéaire quadratique, il faut que le facteur  $\rho$  caractérisant l'état de la charge soit strictement positif.

## 6.6 Conclusion

Nous avons présenté un nouveau concept de commande qui intègre la durée de vie de la batterie comme paramètre contrôlé. La possibilité de contrôler activement la durée de vie de la batterie améliore la sécurité et la fiabilité du système. L'application de ce concept à

commande de l'actionneur a été explorée. La méthode adaptative de contrôle a été discutée. Elle permet un contrôle de poursuite en adaptant le niveau de performance à la durée de vie de la batterie souhaitée. Elle offre un compromis entre performance et la durée du vol en fonction des besoins de la mission. Cette méthode exploite la méthodologie de conception du régulateur quadratique linéaire par ajustement des facteurs de pondération dans la fonction coût d'optimisation pour atteindre l'objectif de performance / durée de vie souhaitée. La stabilité de ce contrôleur adapté est garantie en raison de la propriété de la stabilité inhérente de la conception LQR classique.





# CHAPITRE 7

## VALIDATION ET TEST DU CONTRÔLEUR LINÉAIRE QUADRATIQUE

### 7.1 Introduction

Ce chapitre contient dans un premier temps la description du modèle Simulink développé pour tester les performances du système de contrôle d'altitude basé sur le régulateur linéaire quadratique. Dans un second temps, on compare les performances délivrées par le régulateur linéaire classique par rapport à celles données par le régulateur non linéaire : Le Backstepping. On présente à la fin les performances données par le régulateur linéaire adapté décrit dans le sixième chapitre.

Le travail du régulateur du backstepping s'étend en fait à un modèle préexistant développé par Guillaume Charland pour son mémoire de maîtrise [54]. La première section de ce chapitre décrit le modèle du régulateur linéaire quadratique, par la suite on décrit les modifications introduites sur le contrôleur linéaire dans la seconde section. Ensuite, on présente le modèle de simulation du contrôleur non linéaire Backstepping.

La quatrième section de ce chapitre se concentre sur la comparaison des performances des contrôleurs présentés auparavant. Les modèles Simulink du système et de ses blocs sont présentés ici.

### 7.2 Simulation du modèle non linéaire de la dynamique du quadrotor

La structure de Simulation à haut niveau est représentée par la figure 7.1. Les principaux signaux qui relient les blocs sont les suivants:

- **x\_tra, y\_tra, z\_tra,yaw\_tra**: ces quatre signaux représentent le signal de référence pour la trajectoire désirée.
- **omega(cmd)**: Ce signal est un vecteur de quatre composants représentant les commandes de vitesses angulaires des hélices à l'entrée de chaque moteur du quadrotor.
- **omega (rad/s)**: Ce signal est un vecteur de quatre composants représentant les vitesses angulaires des hélices à la sortie de chaque moteur du quadrotor.

- **eta:** Ce signal est un vecteur de trois composants représentant les positions linéaires du quadrotor exprimées dans le référentiel inertiel.
- **dot\_eta:** Ce signal est un vecteur de trois composants représentant les vitesses linéaires du quadrotor exprimées dans le référentiel inertiel.
- **teta :** Ce signal est un vecteur de trois composants représentant les positions angulaires du roulis, du tangage et de lacet du quadrotor exprimées dans le référentiel inertiel.
- **dot\_teta:** Ce signal est un vecteur de trois composants représentant les vitesses angulaires du quadrotor exprimées dans le référentiel inertiel.
- **X[I]:** Ce signal est un vecteur de 6 composants  $[x \ y \ z \ \varphi \ \theta \ \psi]$  représentant les positions linéaires et angulaires du quadrotor exprimées dans le référentiel inertiel.
- **X[b]:** Ce signal est un vecteur de 6 composants  $[u \ v \ w \ p \ q \ r]$  représentant les positions linéaires et angulaires du quadrotor exprimées dans le référentiel  $\mathcal{F}_b$  du quadrotor.
- **U:** c'est le signal de commande, qui contient les valeurs instantanées des variables de contrôle  $[U_z \ U_\varphi \ U_\theta \ U_\psi]$ .

Avant de commencer toute simulation, plusieurs scripts d'initialisation sont exécutés.

Il s'agit d'init.m, init\_dynamics\_constant.m, init\_control\_constant.m et init\_initial\_condition.m dans lesquels on définit toutes les variables globales et les constantes utilisées par les blocs de modèle.

Par la suite on passe à l'initialisation du gain optimal grâce au script gain.m, dans lequel on introduit le modèle linéarisé développé dans le chapitre 5.

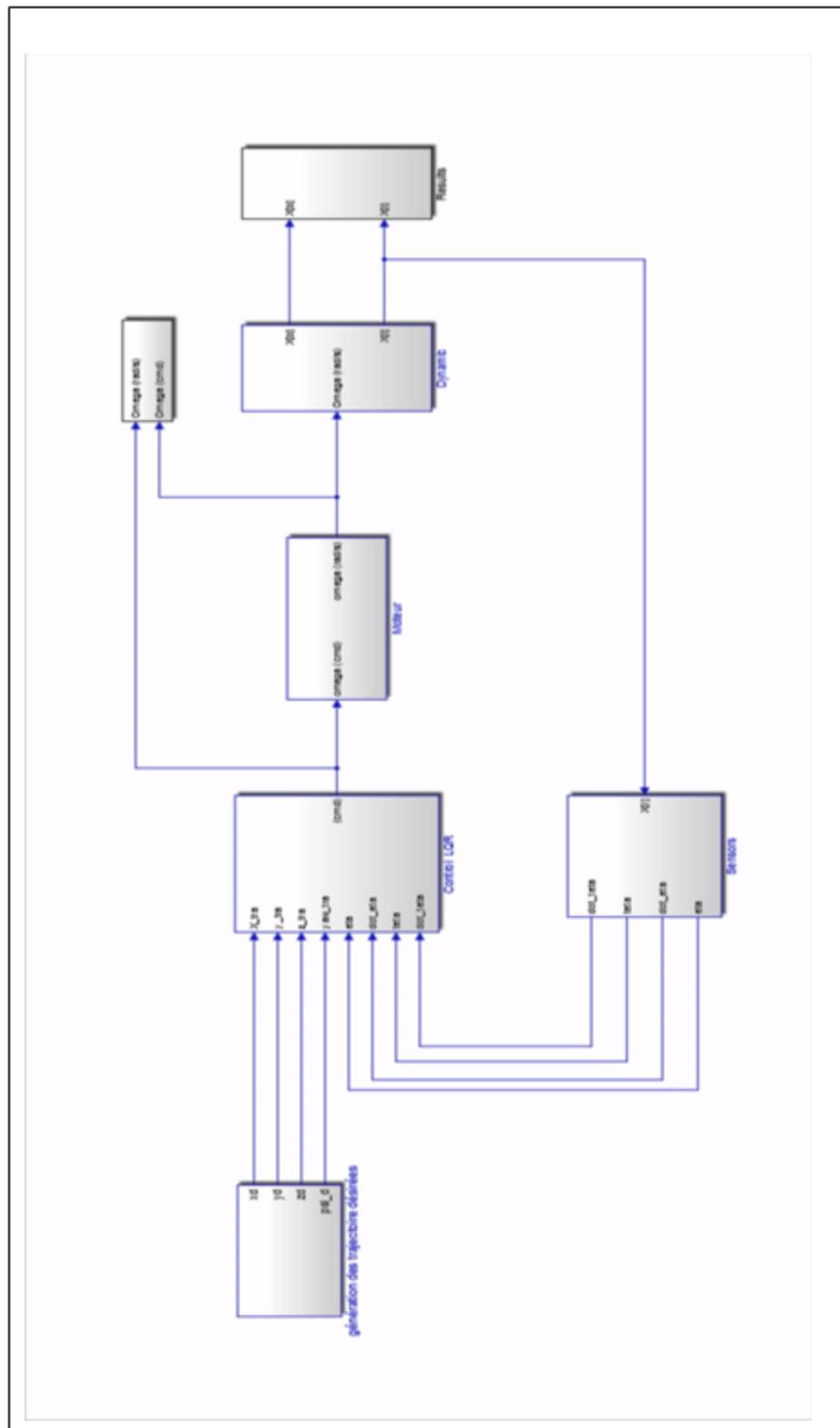


Figure 7.1 Modèle Simulink du régulateur linéaire quadratique

La figure 7.3 présente le modèle Simulink développé pour tester le régulateur linéaire quadratique. La structure est simple : le bloc de la génération de la trajectoire délivre un vecteur de quatre composants  $[x_d \ y_d \ z_d \ \psi_d]^T$ . Ce vecteur représente le signal de référence qu'on veut poursuivre. Ce vecteur est concaténé aux vecteurs de positions linéaires et angulaires ainsi qu'aux vecteurs de vitesse linéaire et angulaire délivrés par les capteurs. On applique sur ce dernier le régulateur linéaire quadratique pour passer ensuite dans le bloc de la dynamique du moteur et celui de la dynamique du quadrotor.

### 7.2.1 Le bloc dynamique

Le modèle Simulink du bloc dynamique est illustré à la figure 7.2. Le bloc principal est `dynamic_system`, qui contient le code MATLAB qui met en œuvre les équations dynamiques (3.36). Les états initiaux des équations sont intégrés à partir des conditions initiales spécifiées comme paramètres dans le script d'initialisation. On sélectionne les composants de l'état et son intégrale pour générer le signal.

Pour la simulation du bloc dynamique, on a eu recours au bloc S-function, car sa mise en forme permet d'introduire l'équation de l'état dérivatif et de l'intégrer en se basant sur les conditions initiales spécifiées comme paramètres dans le script d'initialisation.

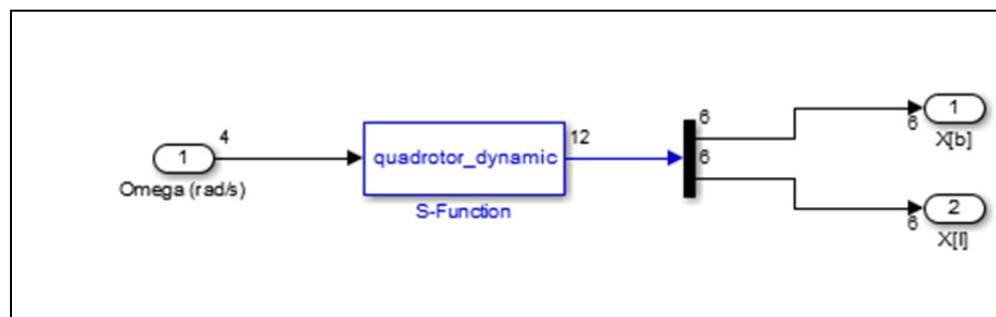


Figure 7.2 Modèle Simulink du bloc dynamique

### 7.2.2 Bloc du contrôleur linéaire quadratique

Le modèle Simulink du bloc de commande est représenté dans la figure 7.3. Ce bloc de contrôle contient le code MATLAB qui implémente la logique de contrôleur LQR. Le bloc U\_2\_omega convertit les sorties du contrôleur en vitesses de l'hélice correspondante pour être transmis au bloc de moteur.

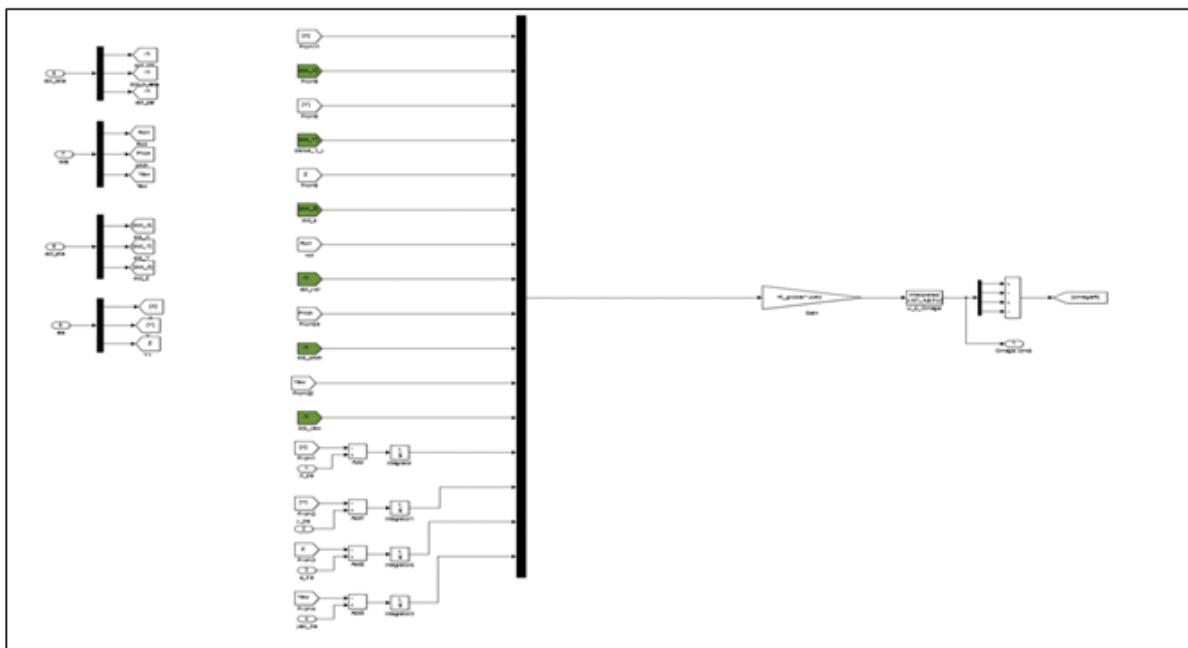


Figure 7.3 Modèle Simulink du bloc de contrôle

### 7.2.3 Bloc moteur BLDC

Ce bloc traduit l'action de quatre moteurs de même type. Le modèle Simulink du bloc est illustré à la figure 7.4. Ce bloc de moteur admet des valeurs de sortie des vitesses angulaires de rotor correspondant à celles attendues par le dispositif de commande. En d'autres termes, si le signal d'entrée est réglé à une valeur qui devrait correspondre à l'état planant (la poussée exacte pour compenser la gravité), la sortie oméga réelle produite par le bloc converge vers l'état désiré, de sorte que le quadrotor simulé reste en position d'équilibre.

Un saturateur est utilisé pour éviter un dépassement des vitesses de rotation du moteur.

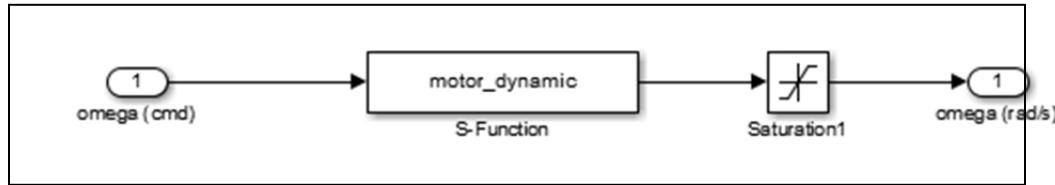


Figure 7.4 Modèle Simulink du bloc moteur BLDC

#### 7.2.4 Bloc des capteurs

L'objectif de la simulation est de traduire le plus vraisemblablement la réalité du comportement du quadrotor. Ainsi, le modèle de mesure se base sur les capteurs dont on dispose dans la réalité. En effet, chaque quadrotor est composé d'un ensemble de capteurs qui fournissent les informations nécessaires à la commande des systèmes de navigation et d'attitude. Cet ensemble de capteurs est généralement appelé IMU (unité de mesure inertielle). L'IMU d'un quadrotor contient les capteurs [1] :

- le gyroscope : permet de mesurer les vitesses angulaires autour des trois axes;
- le magnétomètre : mesure l'intensité et la direction d'un champ magnétique. Si le vecteur de champ magnétique terrestre est connu, la sortie du capteur peut être utilisée pour estimer l'attitude du quadrotor;
- le baromètre : on l'utilise comme altimètre, de sorte que l'instrument a besoin de connaître la valeur de la pression au niveau du sol (ou d'une autre altitude de référence). Un calibrage permanent n'est pas possible, car la pression au sol change avec les conditions météorologiques;

- l'accéléromètre : mesure une quantité appelée accélération propre le long des trois axes. L'accélération propre est la somme de l'accélération linéaire (dérivé de la vitesse linéaire) et une pseudo-accélération constante dirigée vers le haut par rapport au châssis du quadrotor qui a la même grandeur que le vecteur de gravité  $g^2$ [53].

Pour la suite de la simulation, on a eu recours à une version plus simplifiée des capteurs donnant les positions/vitesses linéaires et angulaire exprimées dans le référentiel inertiel.

### 7.3 Simulation du contrôleur quadratique classique

Dans cette section, nous analysons les performances de la mise en œuvre Simulink de la commande LQR. Le modèle de Simulink utilise un grand nombre de paramètres qui peuvent affecter le comportement de la simulation. Les valeurs par défaut des paramètres sont répertoriées dans le tableau 7.1. Elles ont été dérivées du prototype du quadrotor. Ces valeurs sont utilisées, sauf indication contraire. Si une expérience est réalisée avec des paramètres fixés à des valeurs différentes ils seront indiqués dans la description de l'expérience.

Les trajectoires décrites dans cette section sont les suivantes:

- vol stationnaire (pas de mouvement);
- variation d'altitude (sans mouvements horizontaux);
- mouvement horizontal le long de l'axe X (en réalité une variation de l'angle de tangage);
- mouvement plus complexe : hélicoïdale.

Tableau 7.1 Les paramètres par défaut utilisés dans les simulations.

<b>Constantes physique</b>	
Accélération gravitationnelle	$9.81 \text{ m/s}^2$
Température de l'air	$283.15 \text{ K}$
<b>Paramètres mécaniques</b>	

---

<sup>2</sup> La définition formelle de l'accélération correcte est beaucoup plus complexe et implique la théorie de la relativité.

Masse du quadrotor	$1.033 \text{ kg}$
Coefficient de traînée	$0.00000184 \text{ Nms}^2$
Coefficient de propulsion	$0.00001912444476702 \text{ Ns}^2$
Inertie du rotor	$0.000078187598 \text{ kgm}^2$
Les éléments diagonaux de la matrice d'inertie	$[0.015; 0.015; 0.028] \text{ kgm}^2$
Distance horizontale entre le centre de l'hélice et le centre de gravité du quadrotor	0.275 m

Cet ensemble de trajectoires peut paraître limité par rapport au grand nombre de manœuvres possibles, toutefois, les expériences montrent que les performances de la commande linéaire quadratique sont satisfaisantes dans tous ces cas, d'autres tests ne semblent pas être nécessaires à ce stade.

### 7.3.1 Vol stationnaire

La trajectoire de vol la plus simple pour un quadrotor est le vol stationnaire : dans ce cas l'aéronef maintient une position fixe dans l'air. Les valeurs des variables d'état devraient être égales à zéro et restent invariantes dans le temps.

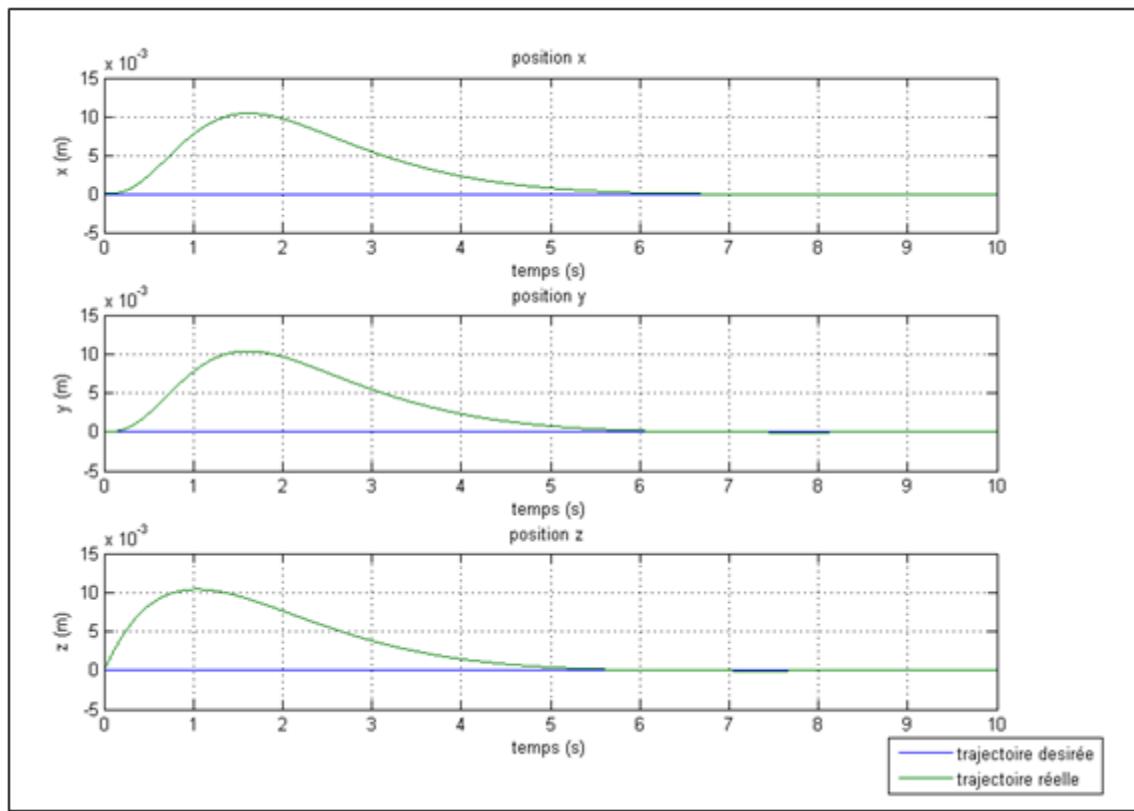


Figure 7.5 Simulation des positions linéaires en vol stationnaire

Les figures 7.5 et 7.6 montrent les poursuites des positions linéaires et angulaires (les autres variables d'état ne sont pas présentées, car elles sont moins pertinentes dans ce cas).

Comme on peut le voir, le dépassement sur les positions linéaires n'excède pas 0.01 m. Quant aux positions angulaires, on note un dépassement maximal de 0.01 rad.

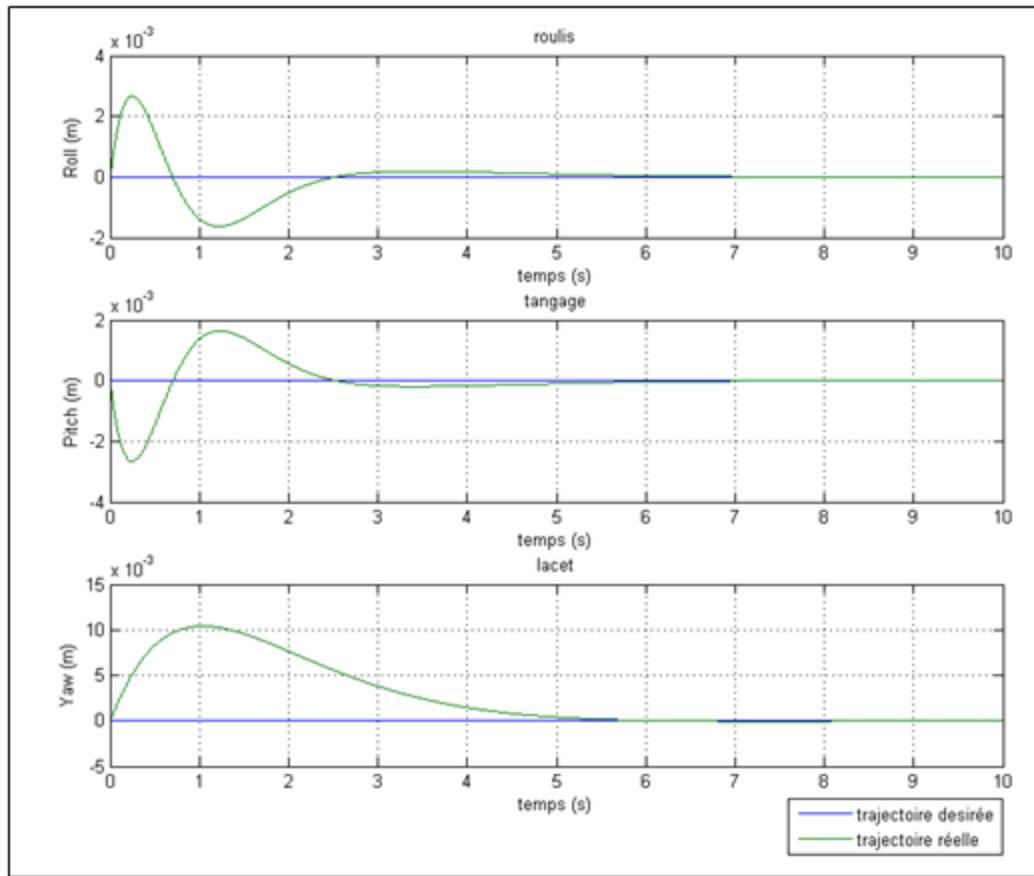


Figure 7.6      Simulation des positions angulaires en vol stationnaire

### 7.3.2      Variation d'altitude

Dans cette simulation, la trajectoire désirée est une simple variation d'altitude : le quadrotor monte à dix mètres et revient à la position initiale. La trajectoire souhaitée et la trajectoire donnée sont présentées dans la figure 7.7, en vert et bleu respectivement. Comme le montre la figure 7.7, le régulateur LQR est donc en mesure de suivre le signal en temps réel et atteindre le point maximum avec une erreur d'un mètre. Ce retard est du essentiellement au fait qu'on linéarise le modèle dynamique du quadrotor autour d'un point permanent introduisant une erreur sur le modèle. Le point d'équilibre correspond aux caractéristiques énoncées dans le chapitre 5 section 5.4.1.

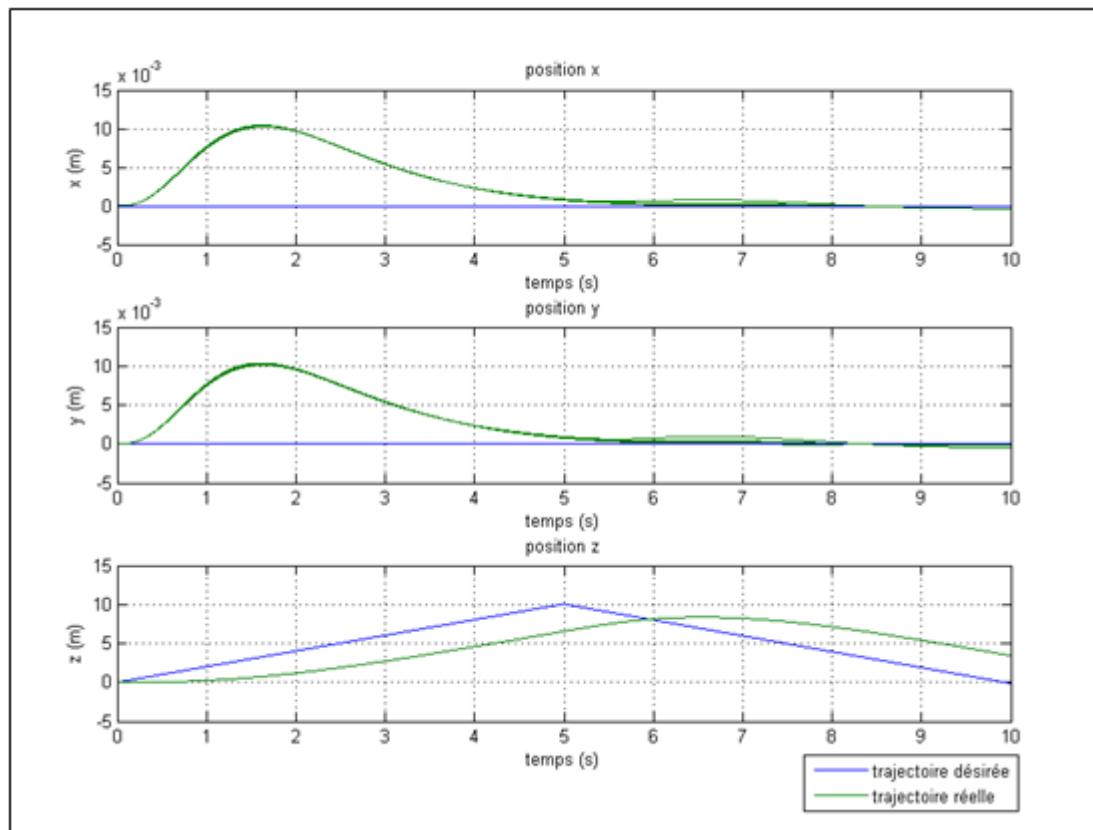


Figure 7.7 Variation d'altitude

### 7.3.3 Variation linéaire

La troisième trajectoire simple, analysée ici est un mouvement horizontal limité le long de l'axe des abscisses x. Ce mouvement est produit suite à l'inclinaison vers l'avant du quadrotor pour un court laps de temps : l'angle d'inclinaison positive produit une accélération qui augmente la vitesse. Le mouvement est alors arrêté par une inclinaison vers l'arrière de l'angle de tangage de la même quantité. Comme le montre la figure 7.8, l'unité de commande n'est pas en mesure de suivre les rampes rapides du signal de cible, de sorte que le maximum de l'actuel angle d'inclinaison n'est que la moitié de celui désiré.

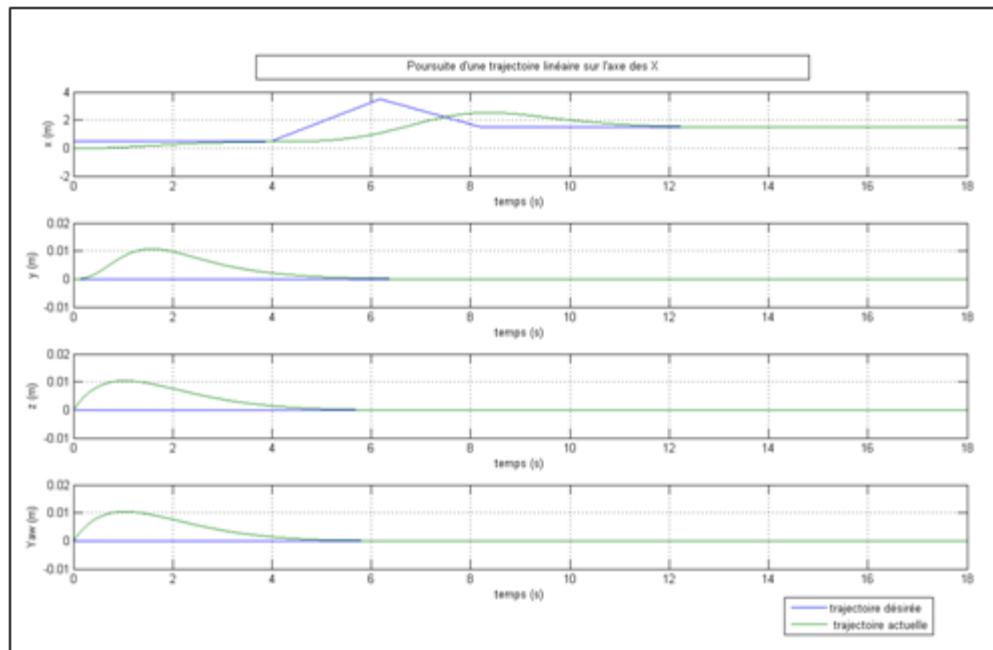


Figure 7.8 Poursuite d'une trajectoire linéaire selon l'axe X

La figure 7.8 permet de comparer la trajectoire réelle et celle désirée des quatre variables d'état pertinentes. La trajectoire réelle est représentée par une ligne verte, la trajectoire désirée à temps continu est en bleu.

La vitesse linéaire résultante est d'environ 1 m / s. La présence d'un dépassement est de l'ordre de 0.02 m sur les variables de position y et z et de 0.05 rad pour l'angle du lacet. Ce dépassement est régulé par la suite du mouvement.

#### 7.3.4 Variation hélicoïdale

Cette dernière simulation présente une trajectoire complexe, où le quadrotor se déplace sur les trois axes de mouvement. Dans ce cas, toutes les variables sont pertinentes et les résultats de simulation sont présentés dans la figure 7.9. On peut dire qu'en temps discret le régulateur LQR fournit des résultats assez précis mais retardés.

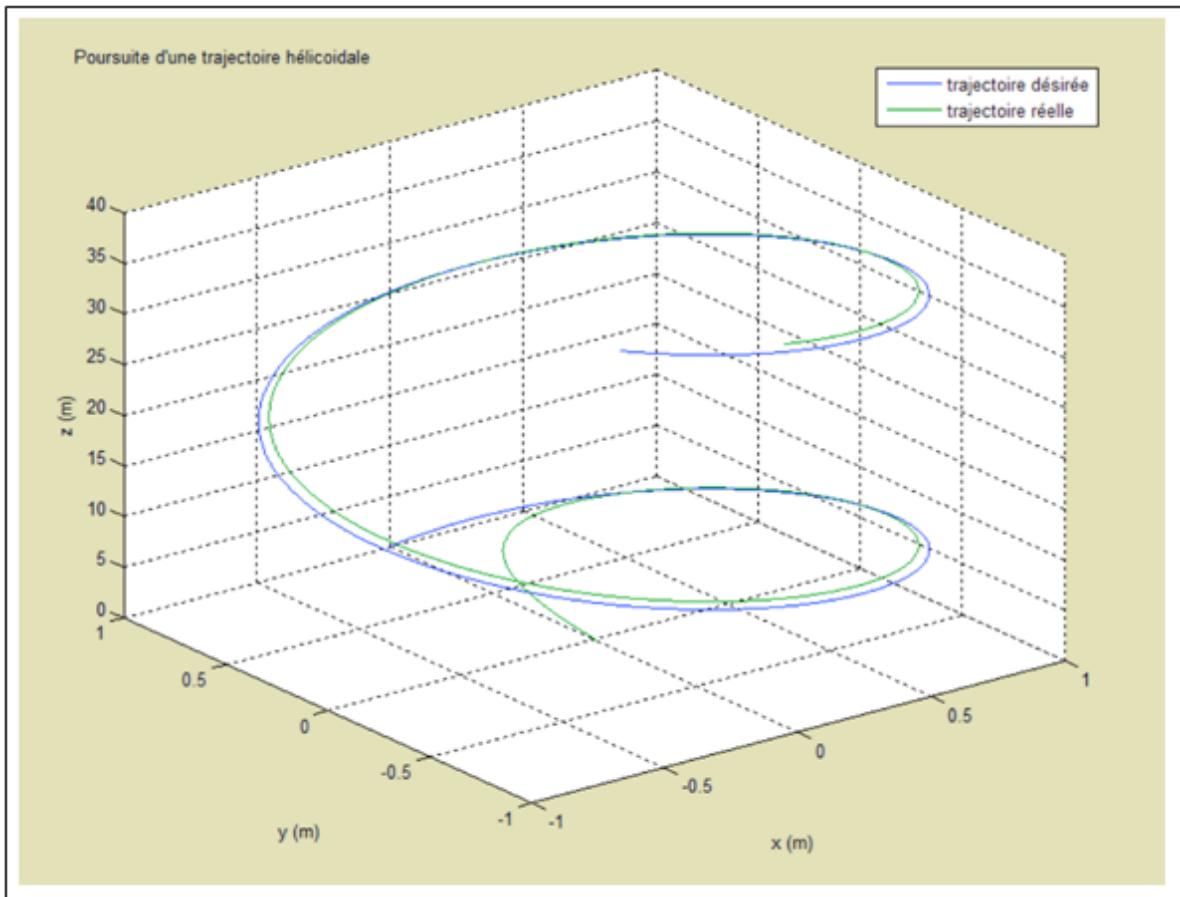


Figure 7.9 Poursuite d'une trajectoire hélicoïdale

Plus de détails sont fournis dans la figure 7.10, la comparaison de la trajectoire réelle et celle désirée des quatre variables d'état pertinentes. La trajectoire réelle est représentée par une ligne verte, la trajectoire désirée à temps continu est en bleu. Ainsi, on peut affirmer que le régulateur LQR fournit des résultats assez précis mais avec un retard.

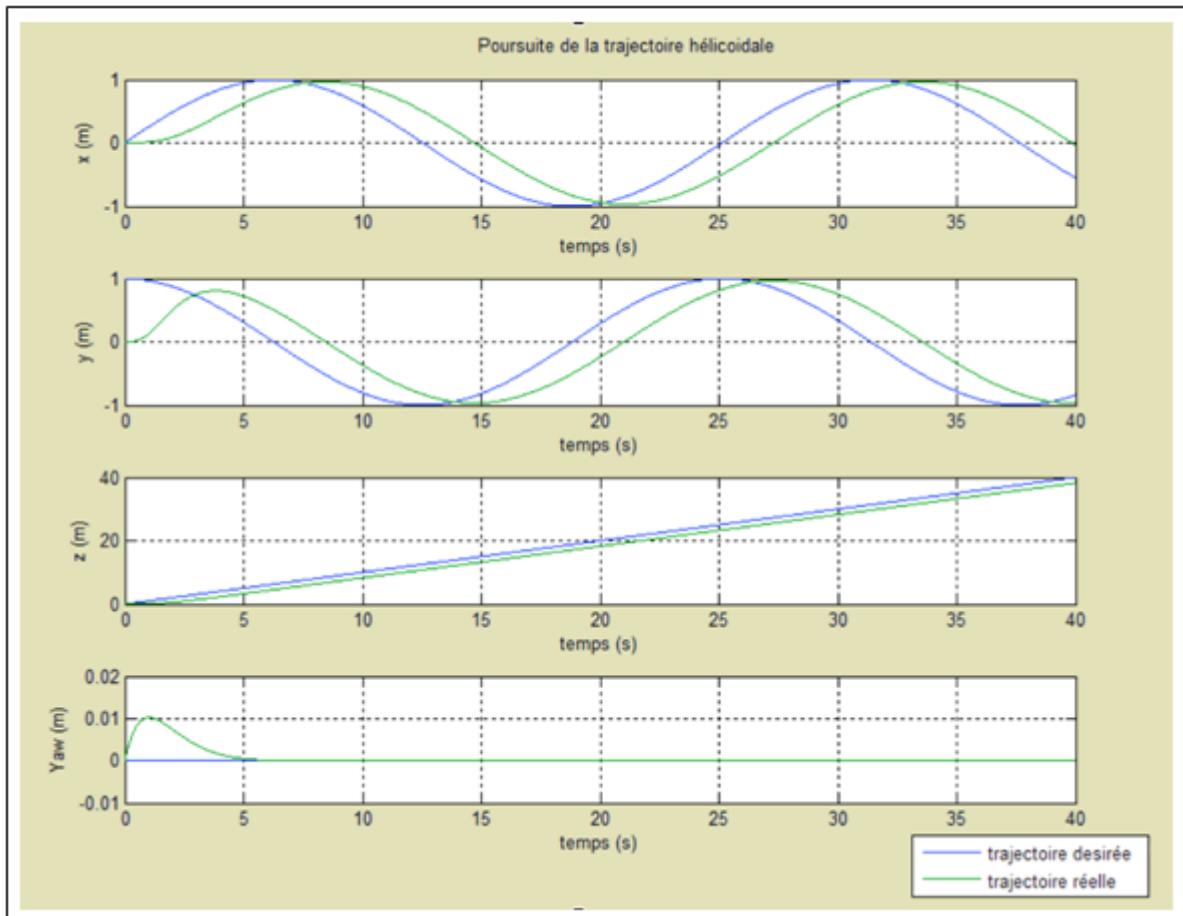


Figure 7.10 Poursuite des positions linéaires  $x$ ,  $y$  et  $z$  et de l'angle du lacet lors du mouvement de la trajectoire hélicoïdale

#### 7.4 Simulation de la nouvelle commande quadratique adaptée

Puisque le but de ce travail est de minimiser le plus possible la consommation de l'énergie de la batterie du quadrotor. Nous proposons donc d'adapter les matrices de pondération selon l'état de la batterie. Pour le faire, on introduit deux blocs supplémentaires au régulateur linéaire quadratique classique, comme on peut le voir à la figure 7.11 par rapport à la figure 7.1 du modèle Simulink du régulateur linéaire quadratique classique.

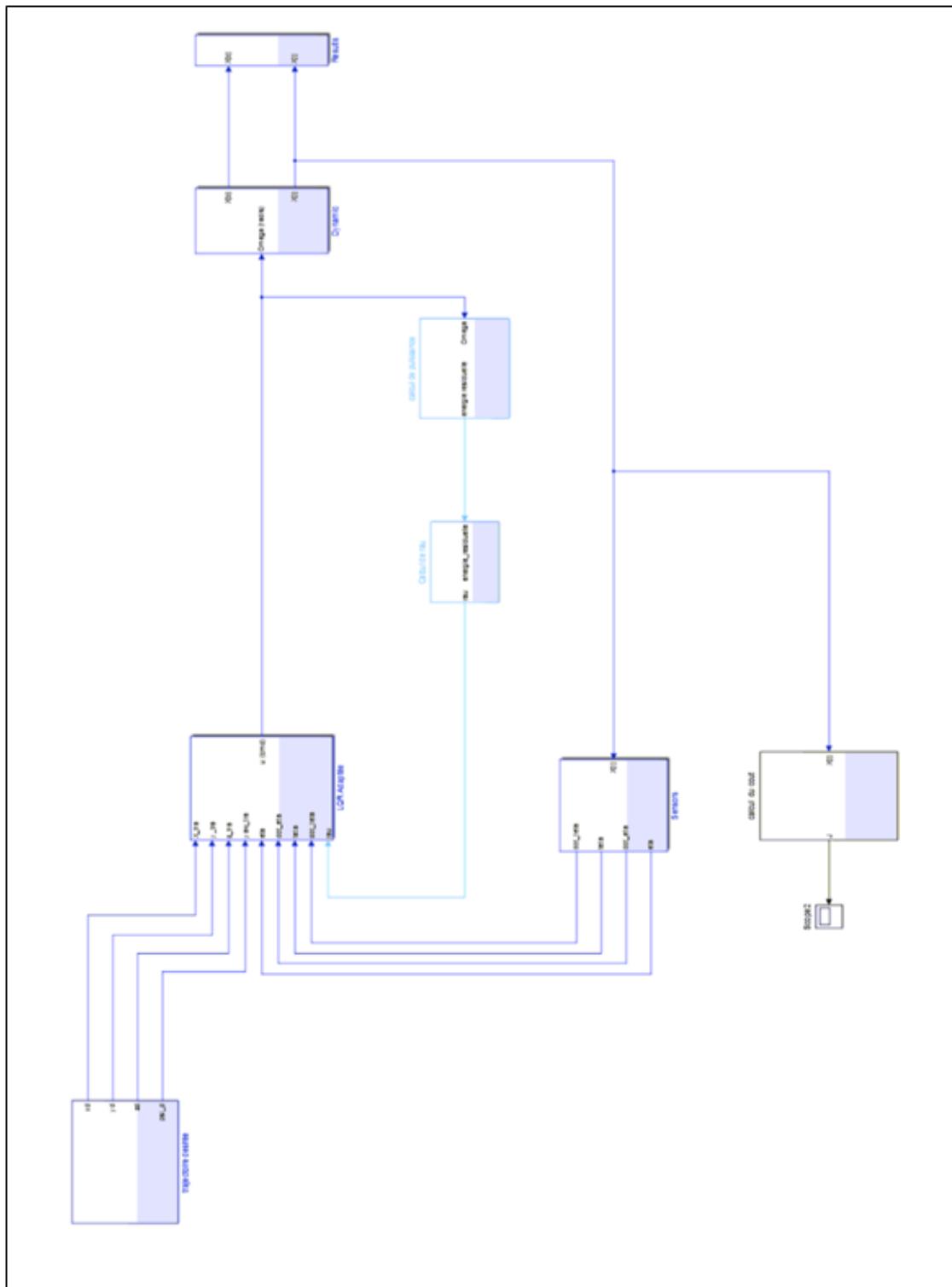


Figure 7.11 Modèle Simulink du régulateur linéaire quadratique adapté

La structure de Simulation à haut niveau est représentée sur la figure 7.11 et utilise les principaux signaux qui relient les blocs cités au chapitre 6. On a introduit deux vecteurs nécessaires à l'adaptation comme suit :

- **Rau** : c'est un vecteur d'une seule variable traduisant le facteur d'adaptation des matrices de pondération pour le régulateur linéaire quadratique;
- **Énergie disponible** : c'est un vecteur d'une seule variable représentant l'état de charge de la batterie et l'énergie disponible pour le reste de la mission de poursuite.

On se base sur le modèle Simulink développé dans le chapitre 6, et on introduit trois nouveaux blocs. Pour la suite du travail, on suppose que la réponse des moteurs du quadrotor est parfaite.

#### 7.4.1 Bloc du calcul de puissance

Le modèle Simulink du bloc de calcul de puissance est illustré à la figure 7.12. Le bloc principal est **calcul\_puissance** qui contient le code MATLAB qui met en œuvre les équations dynamiques du calcul de puissance données dans le chapitre 3 et le chapitre 5.

Les états initiaux des équations sont intégrés à partir des conditions initiales spécifiées comme paramètres dans le script d'initialisation. On sélectionne les composants de l'état et son intégrale pour générer le signal.

Pour la simulation du bloc dynamique, on a eu recours au bloc Matlab-function, car sa mise en forme permet d'introduire l'équation de l'état dérivé et de l'intégrer en se basant sur les conditions initiales spécifiées comme paramètres dans le script d'initialisation.

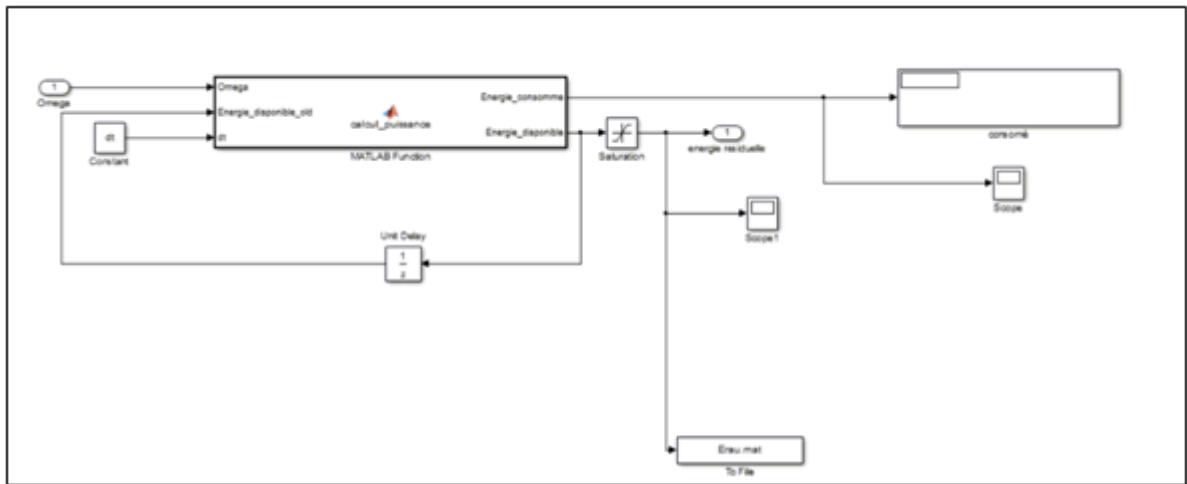


Figure 7.12 Bloc de calcul de puissance

#### 7.4.2 Bloc de calcul de $\rho$

Le modèle Simulink du bloc calcul de  $\rho$  est illustré à la figure 7.13. Le bloc principal est **calcul\_rho** qui contient le code MATLAB qui met en œuvre les équations dynamiques du calcul du facteur  $\rho$  donnée dans le chapitre 6.

Les états initiaux des équations sont intégrés à partir des conditions initiales spécifiées comme paramètres dans le script d'initialisation. On sélectionne les composants de l'état et son intégrale pour générer le signal.

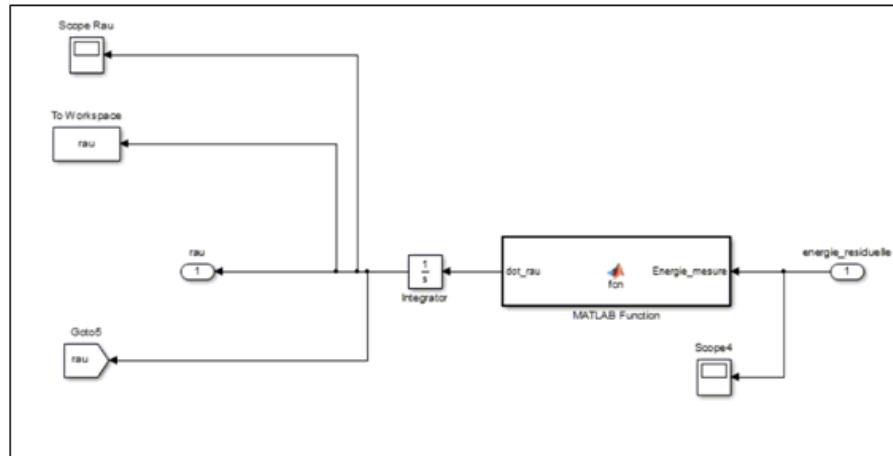


Figure 7.13 Bloc de calcul du facteur Rho

### 7.4.3 Le nouveau bloc du control LQR adapté

Le modèle Simulink du nouveau bloc du control LQR adapté est illustré à la figure 7.14. Le bloc principal illustré à la figure 7.15 contient le code MATLAB qui met en œuvre la mise à jour du gain optimal du régulateur linéaire quadratique dépendamment du facteur  $\rho$  délivré par le bloc `calcul_Rho`. On se base sur les équations énoncées auparavant dans le chapitre 5. Les états initiaux des équations sont intégrés à partir des conditions initiales spécifiées comme paramètres dans le script d'initialisation. On sélectionne les composants de l'état et son intégrale pour générer le signal. Le bloc `U_2_omega` convertit les sorties du contrôleur en vitesses de l'hélice correspondante pour être transmis au bloc de moteur.

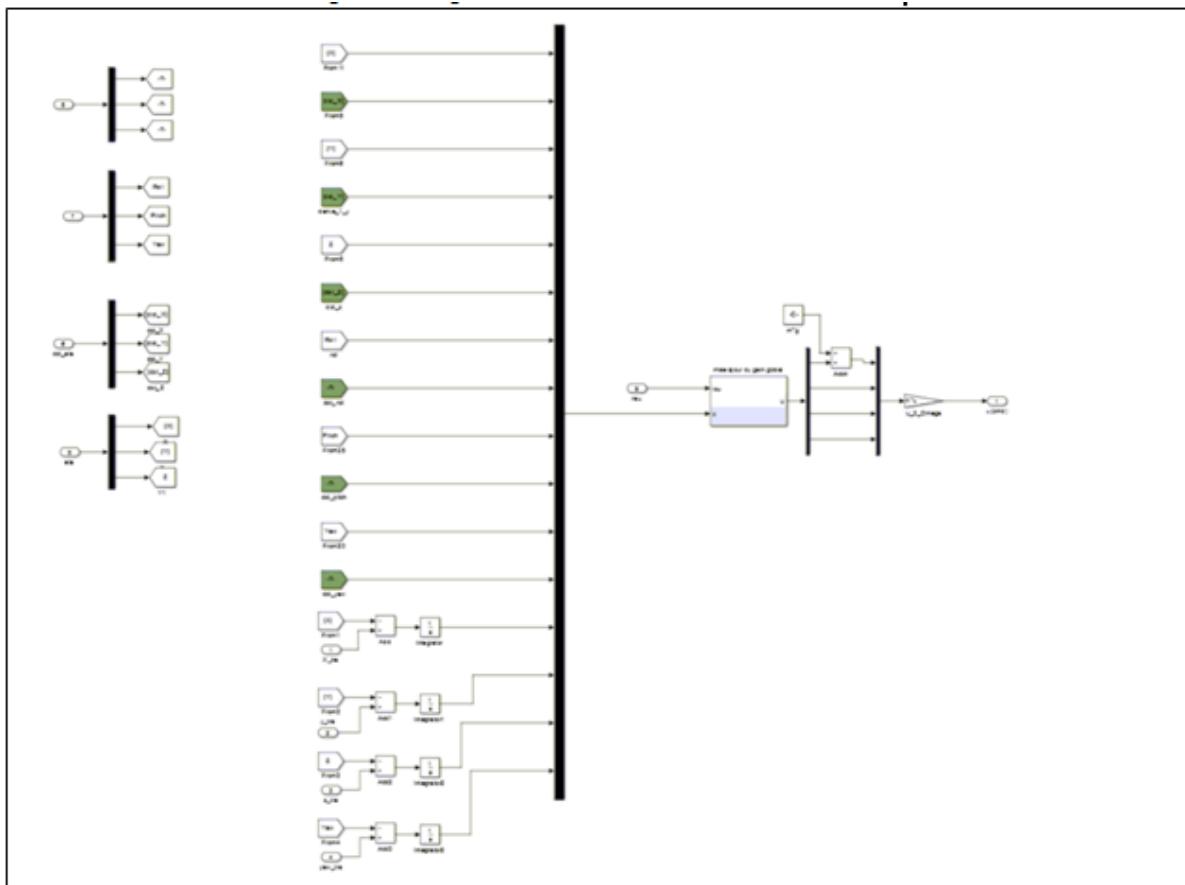


Figure 7.14 Modèle Simulink du contrôleur LQR adapté

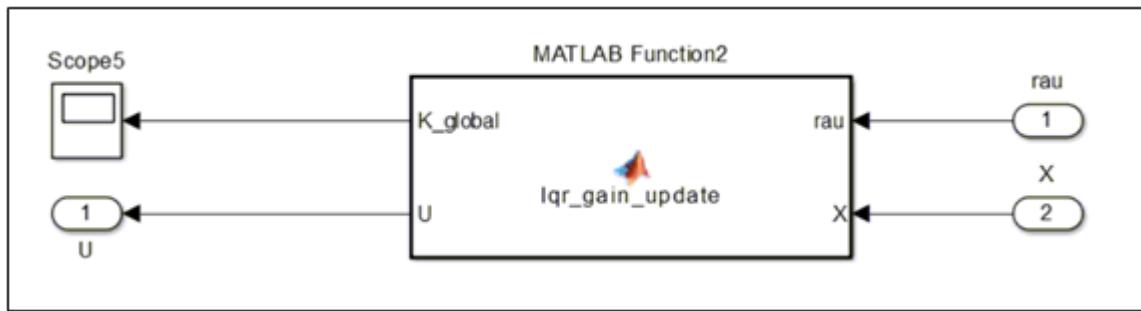


Figure 7.15 Bloc de mise à jour du gain optimal du contrôleur LQR adapté

Il faut noter que dans le cas du ce nouveau régulateur, le gain optimal est mis à jour continuellement afin d'adapter le compromis performance/ consommation au fur et à mesure. Contrairement au régulateur LQR classique où le gain est calculé dès l'initialisation du Modèle Simulink. Enfin, on rappelle que le principe de fonctionnement décrit par le diagramme donné par la figure 7.16, se base sur l'état de charge de la batterie.

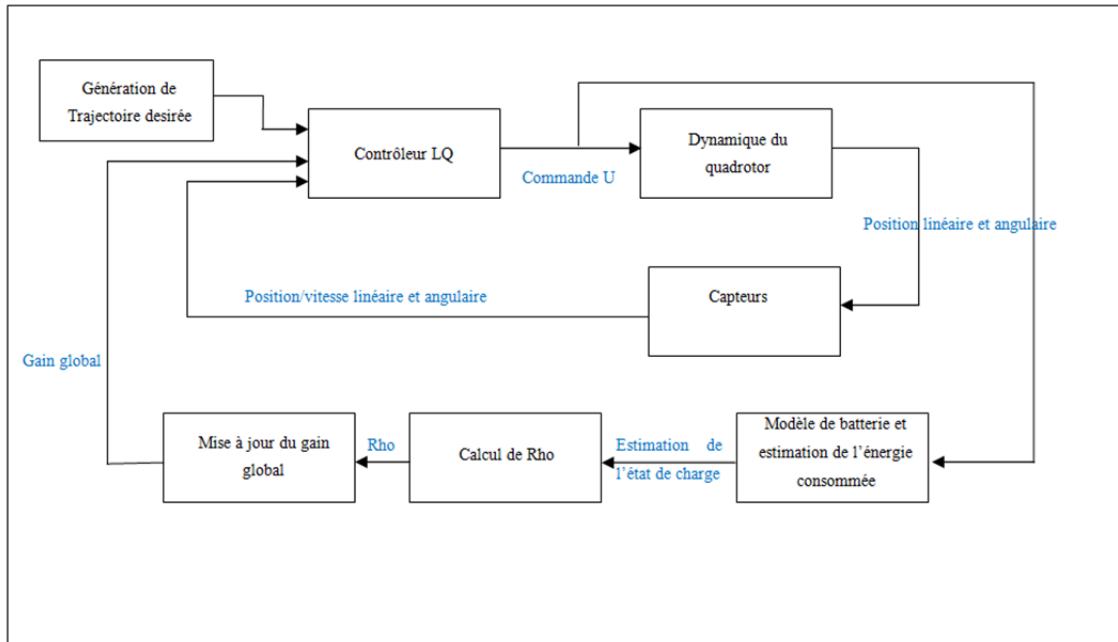


Figure 7.16 Diagramme de simulation du modèle LQR adapté

## 7.5 Comparaison du backstepping et la commande optimale LQ

Avant d'entamer cette partie, on donne un petit aperçu sur La commande non linéaire backstepping. Par la suite, on explicitera le modèle de simulation développé dans la mémoire de Guillaume Charland [54].

### 7.5.1 Contrôleur backstepping

Dans la théorie du contrôle, le backstepping est une technique récente [55] utilisée pour la conception des contrôles de stabilisation pour une classe particulière de systèmes dynamiques non linéaire. L'approche backstepping fournit une méthode récursive pour stabiliser l'origine d'un système sous forme stricte de rétroaction.

En raison de cette structure récursive, le concepteur peut commencer le processus de conception au niveau du système connu stable et "revenir en arrière" stabilisant ainsi progressivement chaque sous-système externe. Le processus se termine lorsque le contrôle externe final est atteint. Par conséquent, ce processus est connu sous le nom backstepping [55].

L'idée de base de la commande de backstepping est de rendre le système bouclé, équivalent à des sous-systèmes d'ordre n en cascade stables au sens de Lyapounov, ce qui lui confère des qualités de robustesse et une stabilité globale asymptotique de l'erreur de poursuite. Pour une large classe de systèmes, cette technique est une méthode systématique et récursive de synthèse de lois de commande non linéaire.

Ainsi à chaque étape du processus, une commande virtuelle est générée pour assurer la convergence des sous-systèmes d'ordre n caractérisant la poursuite de trajectoires vers leurs états d'équilibres (erreurs de poursuite nulles dans le cas déterministe et non perturbé). Cette technique permet la synthèse de loi de commande robuste malgré une certaine méconnaissance de paramètre du système et de certaines perturbations.

En se basant sur les équations d'état et celles de la dynamique du quadrotor développées dans le chapitre 3, Guillaume Charland a développé une loi de contrôle, permettant au système à poursuivre la trajectoire désirée. Pour plus de détails, nous citons la mémoire de G. Charland-Arcand [54] et le travail de S.Bouabdallah [23].

### 7.5.2 Modèle Simulink du contrôleur Backstepping

La structure de simulation à haut niveau du contrôleur Backstepping est représentée par la figure 7.17. On se réfère au mémoire [54].

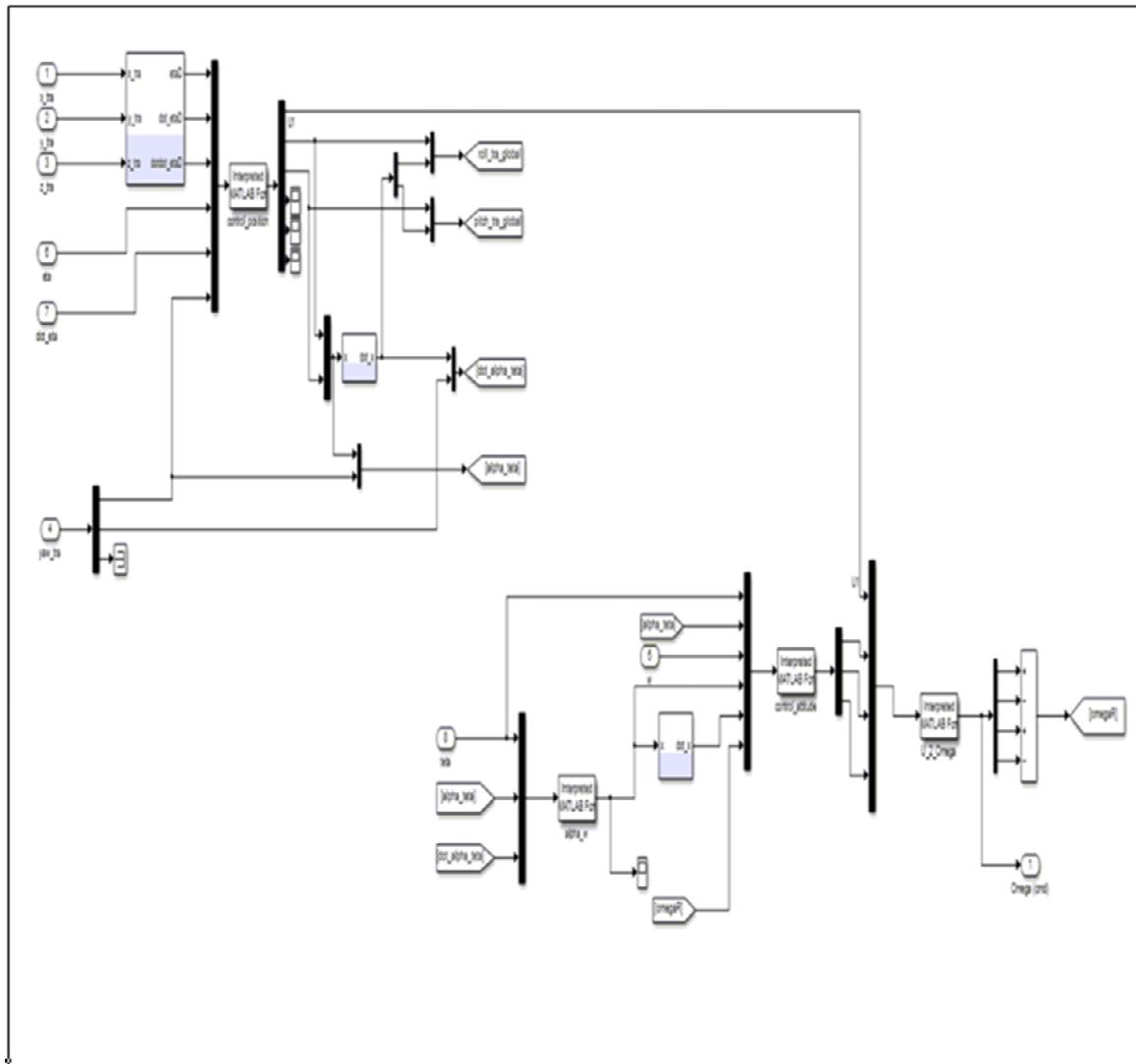


Figure 7.17 Modèle Simulink du contrôleur Backstepping

### 7.5.3 Comparaison

Dans cette partie du chapitre, nous comparons les performances de la mise en œuvre Simulink de la commande LQR simple par rapport à la commande non linéaire

Backstepping. Le modèle de Simulink a un grand nombre de paramètres qui peuvent affecter le comportement de la simulation.

Les trajectoires décrites dans cette section sont les suivantes:

- vol stationnaire (pas de mouvement);
- variation d'altitude (sans mouvements horizontaux);
- mouvement plus complexe : hélicoïdale.

### **7.5.3.1 Vol stationnaire**

Étant donné que c'est le mouvement le plus simple, le backstepping présente une excellente performance de poursuite en vol stationnaire. En effet, comme on peut le voir dans la figure 7.7 et la figure 7.18, le backstepping ne présente aucun dépassement, ni un temps de convergence contrairement au contrôleur linéaire quadratique. En effet comme on peut le voir dans la figure 7.7, le contrôleur LQR présente un dépassement de l'ordre de  $15 \times 10^{-3} m$ .

Cela dit, le contrôleur du backstepping, exige que la trajectoire soit lisse contrairement au contrôleur linéaire quadratique, cela est dû au fait que le contrôleur non linéaire se base aussi sur les vitesses et les accélérations de chacune des variables d'état.

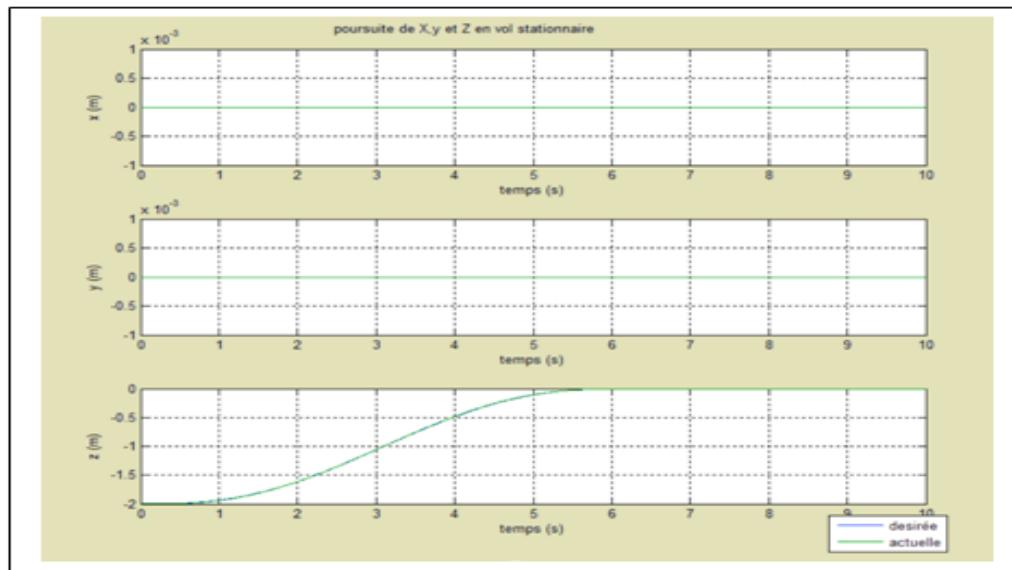


Figure 7.18 Simulation des positions linéaires en vol stationnaire à l'aide du contrôleur du Backstepping

### 7.5.3.2 Variation d'altitude

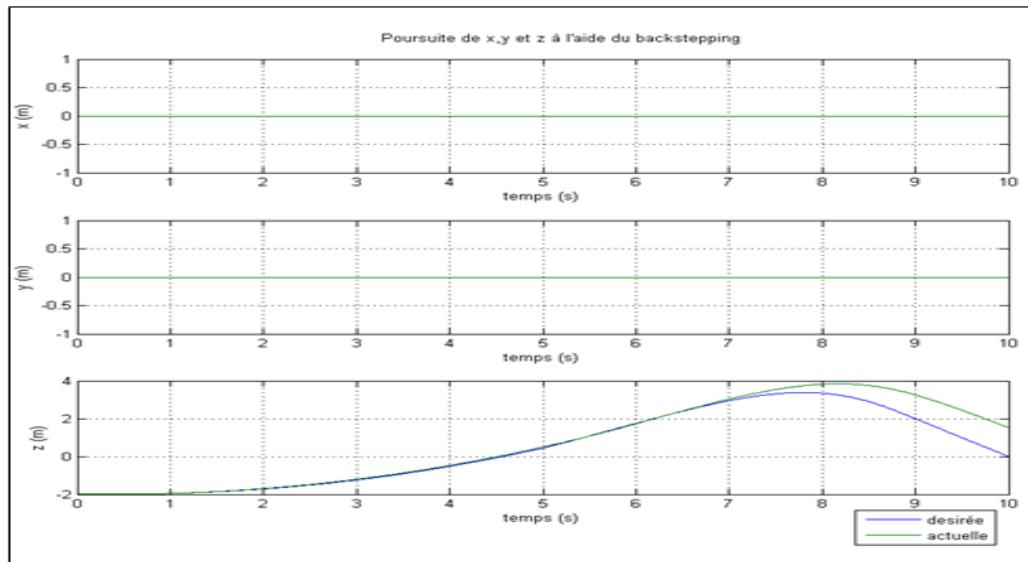


Figure 7.19 Performance de poursuite pour la variation d'altitude en utilisant le contrôleur de Backstepping

Sans aucune surprise, le contrôleur non linéaire présente d'excellentes performances de poursuite pour une trajectoire de variation d'altitude [23]. Comme on peut le voir dans la figure 7.9 et la figure 7.19, le contrôleur non linéaire présente de meilleures performances que celles du LQR. En effet, lors de la variation d'altitude, les positions linéaires  $x$  et  $y$  ne présentent aucune variation contrairement au contrôle linéaire fourni par le LQR qui présente un dépassement de l'ordre de  $10^{-2}m$  sur les axes  $x$  et  $y$ . Quant à l'erreur de poursuite de la variation d'altitude, elle ne dépasse pas 1 m pour le backstepping contrairement au LQR qui présente une erreur de l'ordre de 3 m et un temps de convergence plus important que celui présenté par le contrôle non linéaire.

### 7.5.3.3 Mouvement hélicoïdal

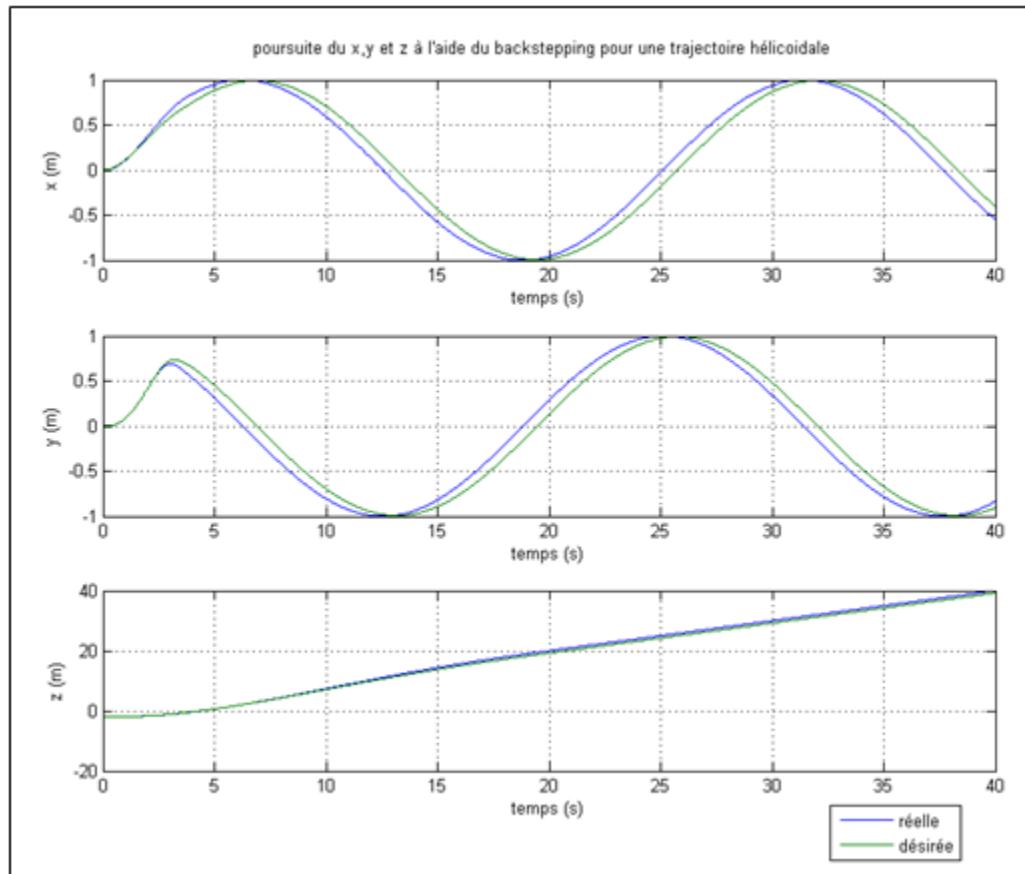


Figure 7.20 Poursuite des positions linéaires lors du mouvement hélicoïdal

Pour tester la robustesse des performances de poursuite, on a choisi le mouvement hélicoïdal. Comme on peut voir plus en détail à la figure 7.20, la comparaison entre les trajectoires réelles et désirées pour les trois variables d'état pertinentes. La trajectoire réelle est représentée par une ligne verte, la trajectoire désirée à temps continu est en bleu.

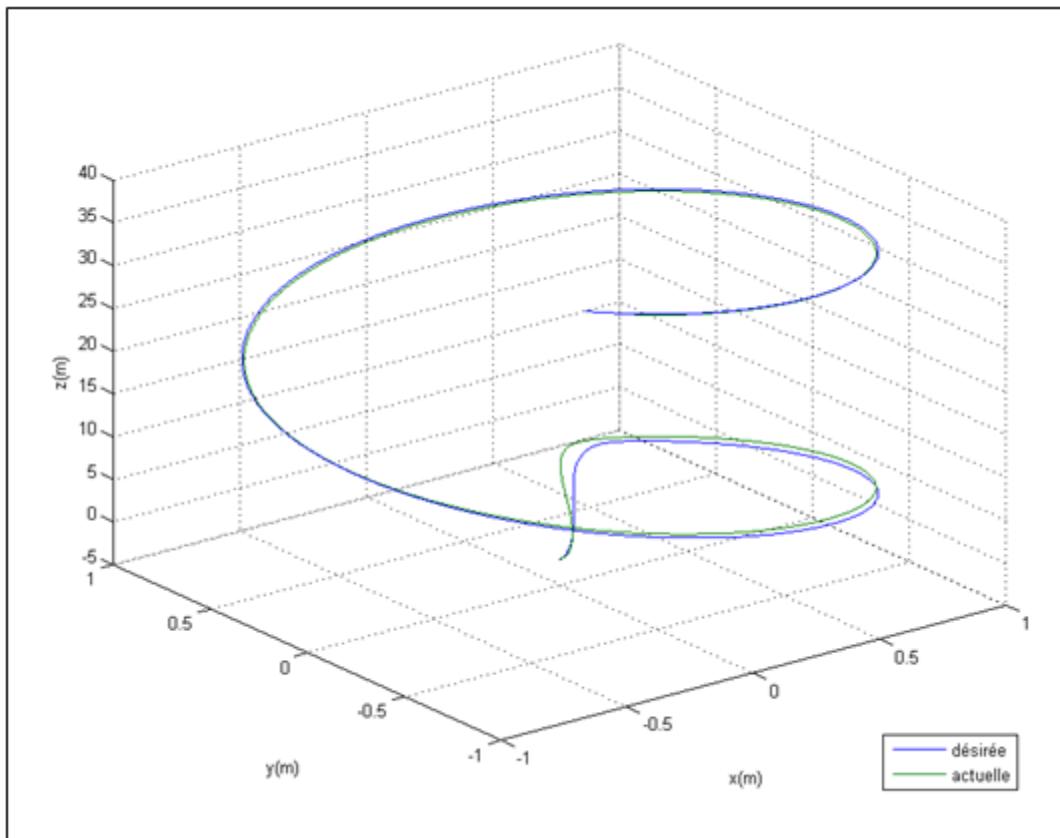


Figure 7.21 Poursuite du mouvement hélicoïdal à l'aide du backstepping

Lors de l'utilisation du contrôleur linéaire, on note une erreur de l'ordre de 0.3 m sur les axes  $x$  et  $y$  et une erreur de l'ordre de 0.01m sur l'axe de  $z$ . Contrairement aux erreurs données par le backstepping qui ne dépassent pas 0.1m sur les trois axes. D'autre part on note que les performances délivrées par le LQR sont retardées d'un peu près 3s contrairement au backstepping qui présente une grande vitesse de convergence.

## 7.6 L'apport de la nouvelle commande linéaire quadratique adaptée

Tel que mentionné dans le chapitre 6, l'introduction d'un critère auxiliaire  $\rho$  à la commande de contrôle linéaire quadratique permet de traduire l'état de charge de la batterie. On rappelle que l'augmentation de  $\rho$  a pour effet de générer des gains de rétroaction afin que le LQR améliore la durée de mission disponible, mais avec une moins bonne performance de suivi. Inversement, la baisse  $\rho$  va générer un gain de rétroaction pour le LQR qui fournit de meilleures performances de suivi au détriment de la réduction de la durée de vie de la batterie [5].

Comme on peut voir sur la figure 7.22, lors de l'implémentation du nouveau régulateur LQR adapté, on a choisi de garder  $\rho$  fixé à la valeur 1 lorsque l'état de la batterie est au-dessus du seuil de confort donné. Les performances délivrées dans cet intervalle sont satisfaisantes et on évitera par la suite de perdre de l'énergie pour améliorer encore les performances [56]. Dans la zone B, lorsque l'énergie disponible est au-dessous de l'énergie seuil de confort,  $\rho$  augmente et a pour effet de générer des gains de rétroaction du LQR améliorant la durée de mission disponible et altérer les performances de poursuite.

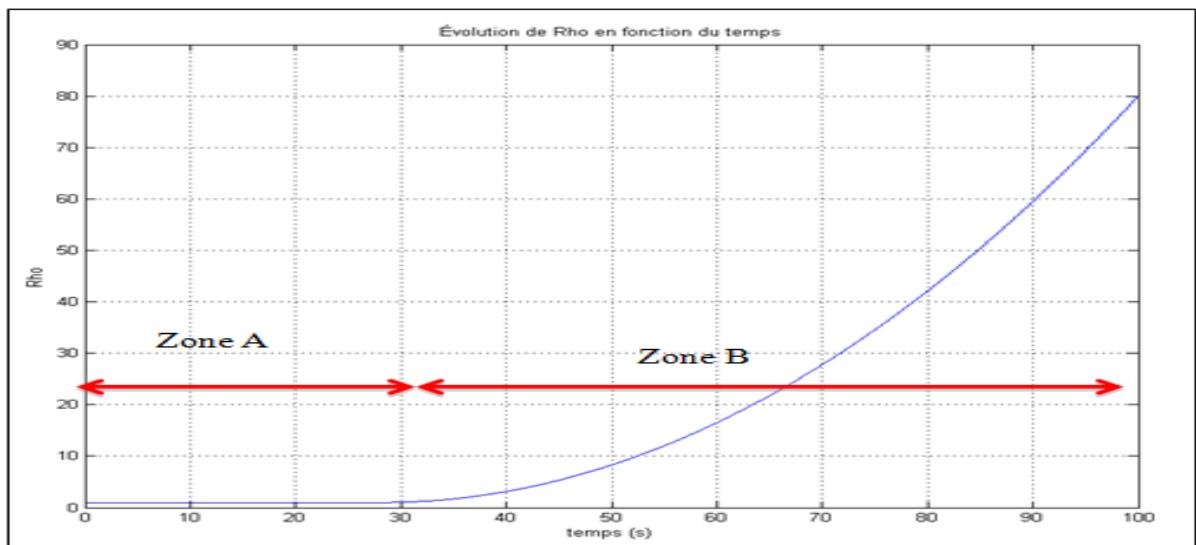


Figure 7.22 Évolution de Rho suite à la décharge de la batterie

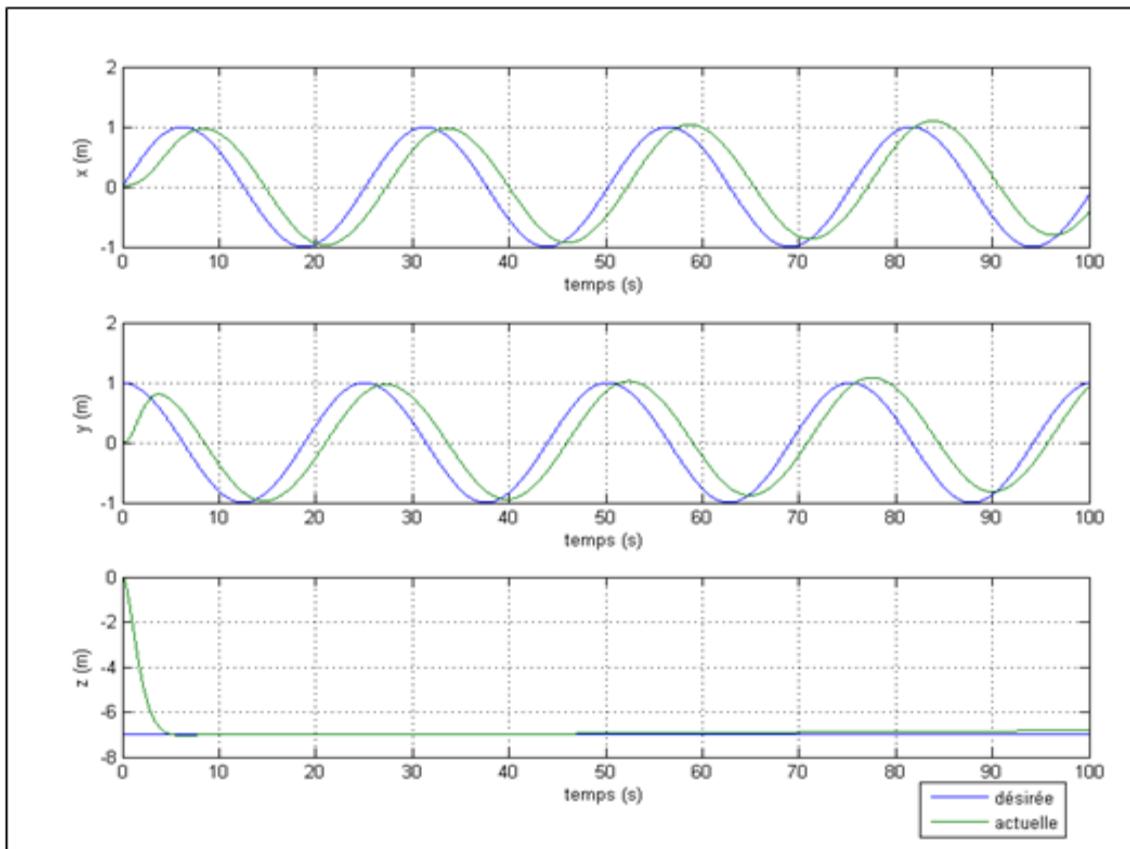


Figure 7.23 Mouvement hélicoïdale avec le LQR adapté

Comme on peut le constater dans la figure 7.23, tant que l'énergie disponible dans la batterie est au-dessus d'un niveau seuil choisi, le régulateur fournit une performance de poursuite satisfaisante. Dès qu'on se rend au-dessus du niveau seuil choisi, le LQR adapté altère les performances de poursuite afin de maximiser la durée de vie restante. Le contrôleur a introduit plus d'erreur sur l'altitude dès qu'on s'est rendu au-dessous d'un niveau d'énergie de confort. En effet, le mouvement de montée ou de descente exige plus d'énergie que les mouvements latéraux. Pour cette raison que le quadrotor a perdu un 1.5 m en hauteur.

Le contrôleur linéaire quadratique linéaire a introduit plus d'erreur sur la poursuite de la composante d'altitude  $z$  afin d'allonger la durée de mission de vol. D'autre part, il faut noter qu'on ne peut pas trop varier  $\rho$  afin de garder des matrices de pondération avec lesquels on

peut résoudre les équations de Riccati . En effet, cette variable modifie les matrices de pondération et agit directement sur la stabilité du contrôleur.

### **7.7 Analyse des résultats et apport de la nouvelle LQR adaptée dans la consommation de l'énergie**

Suite aux précédentes sections, on peut dire que le contrôleur non linéaire Backstepping fournit des performances de poursuite très satisfaisantes. D'autre part, on a pu tester le contrôleur linéaire quadratique sur le système non linéaire du quadrotor. Le contrôleur linéaire quadratique a fourni des performances de poursuite assez satisfaisantes : en effet les performances introduisent plus d'erreurs et de retard par rapport au contrôleur non linéaire, conformément au travail développé par S.Bouabdallah [23]. Cela dit, la simplicité de l'algorithme présente un avantage de point de vue coût de calcul et d'exigence en matière de matériel de traitement de l'information sur le quadrotor.

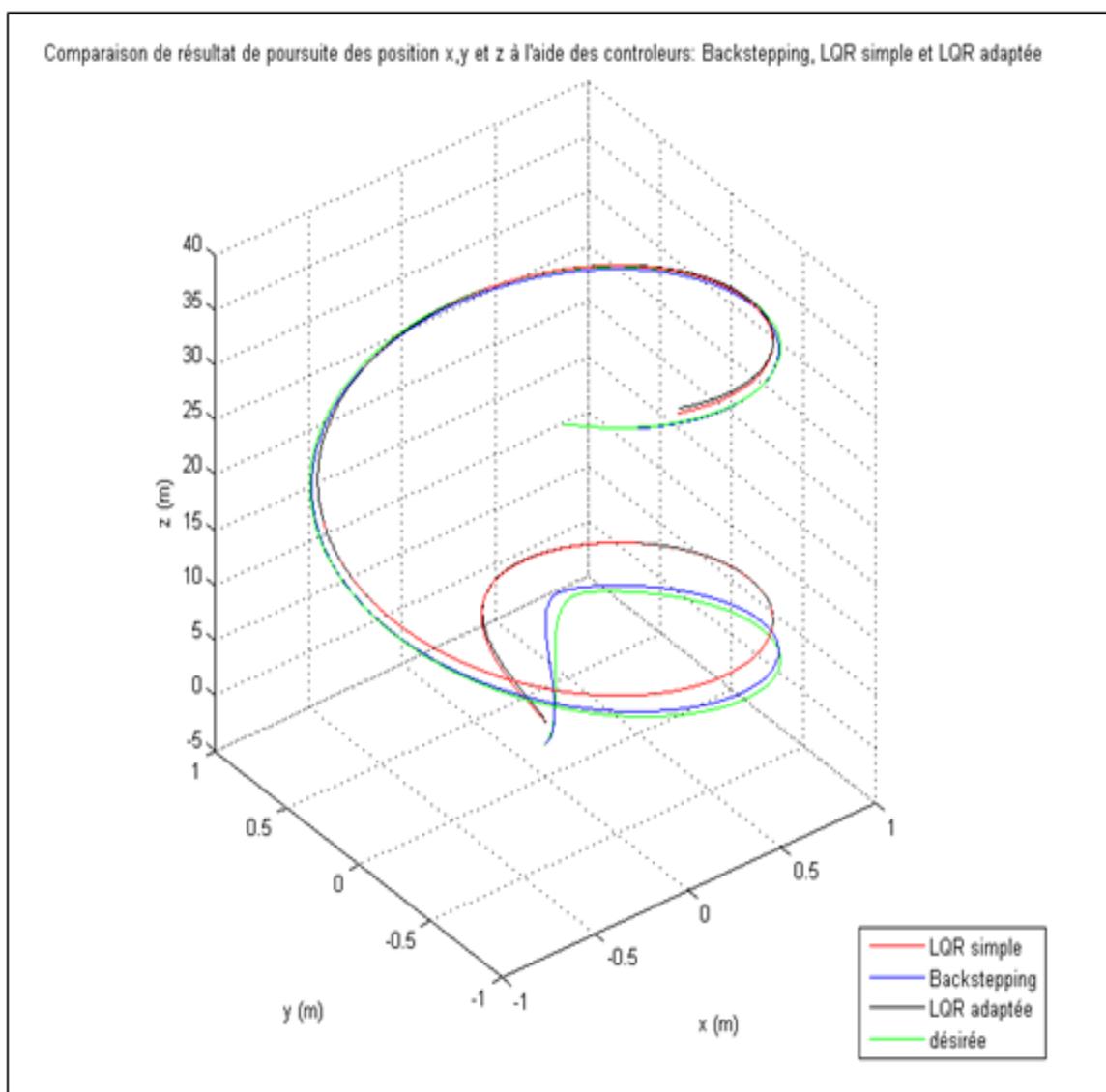


Figure 7.24 Comparaison de la poursuite des positions x, y et z en utilisant les contrôleurs Backstepping, LQR classique et LQR adaptée

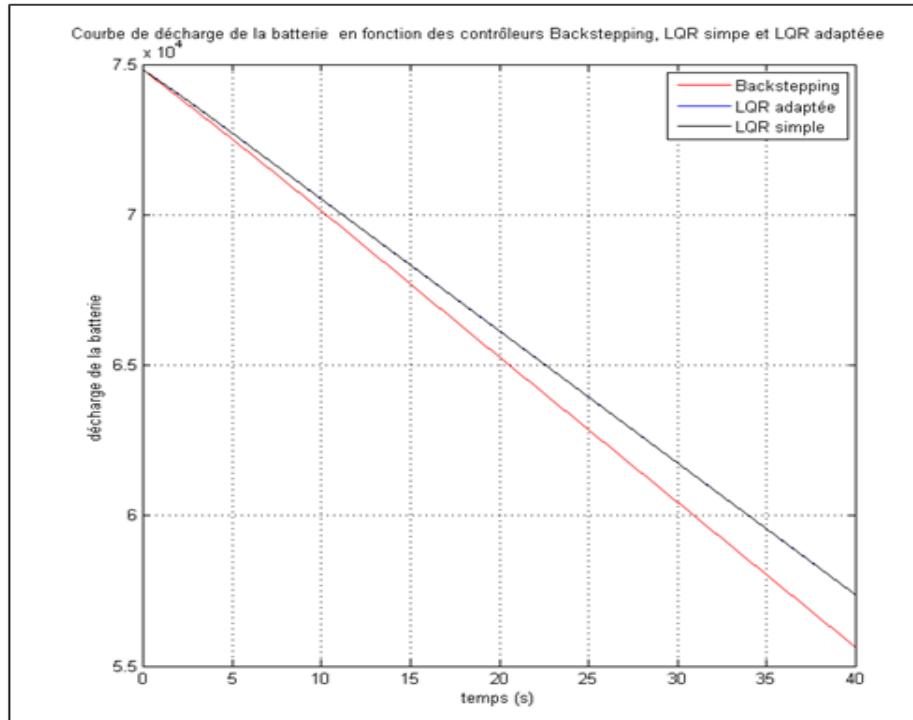


Figure 7.25 Courbe de décharge lors d'une poursuite de trajectoire hélicoïdale pour les trois stratégies de contrôle LQR classique, LQR adaptée et le backstepping

Lors de la simulation de test de performance de poursuite de positions x, y et z, présentée dans la figure 7.24, on affirme que le taux d'erreur présenté par le contrôleur non linéaire Backstepping est moins élevé que le taux d'erreur présenté par le contrôleur linéaire quadratique classique. Quant à la commande linéaire quadratique adaptée, introduit plus d'erreurs de poursuite par rapport à la commande LQR classique dès que le niveau de charge de la batterie est au dessous du seuil imposé. Toutefois, d'après la figure 7.25, on peut affirmer que le contrôleur Backstepping présente une pente de décharge plus rapide que celle présentée par le contrôleur LQR classique et adapté. En effet, la vitesse de décharge de la batterie lors de la simulation du contrôleur LQR classique et adapté présente un coefficient de décharge de l'ordre de 90% de celui présenté par le contrôleur non linéaire backstepping.

Ainsi, on peut confirmer que le contrôleur linéaire quadratique classique offre un bon compromis entre les performances de poursuite et la consommation d'énergie. La courbes de

décharge varie d'une trajectoire à une autre, mais on arrive à garder la courbe de décharge la plus optimale pour le contrôleur linéaire quadratique.

Lors du test du contrôleur linéaire quadratique adapté, on a pu réaliser des simulations de poursuite de trajectoires satisfaisantes. Certes les taux d'erreurs sont plus importants que ceux fournit par le backstepping, mais le LQR adapté permet par sa nature de base LQR de minimiser l'énergie et l'effort fournit au quadrotor et de dépasser cette optimisation suite à l'introduction du critère de poursuite de l'état de charge de la batterie.

Finalement, lors de simulation de la même trajectoire que celle de la figure 7.24, on peut voir dans la figure 7.26 que la courbe de décharge ne montre pas d'importante différence en termes de consommation d'énergie. Cela dit en agrandissant la zone où l'énergie disponible est au dessous du seuil souhaitée, on remarque une diminution de consommation d'énergie de l'ordre de 2%. Cette diminution n'est pas négligeable puisque la commande linéaire quadratique optimise au maximum l'effort de commande et de consommation. De plus, ce vol est régulier et la continuité de la poussée diminue les possibilités de gain de puissance contrairement aux trajectoires discontinues.

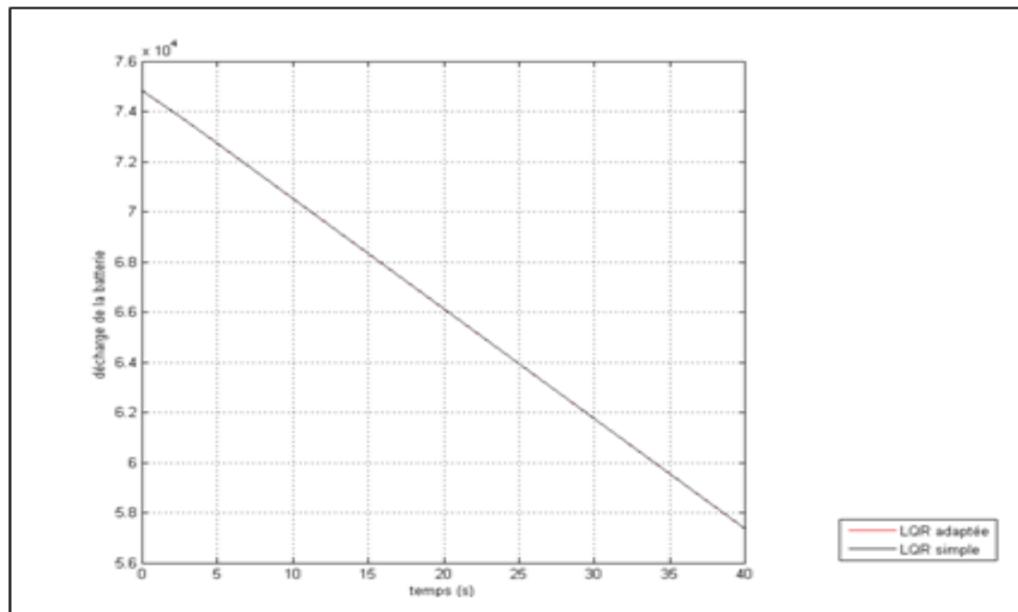


Figure 7.26 Courbe de décharge de la batterie lors de trajectoire hélicoïdale pour les deux stratégies de contrôle linéaires

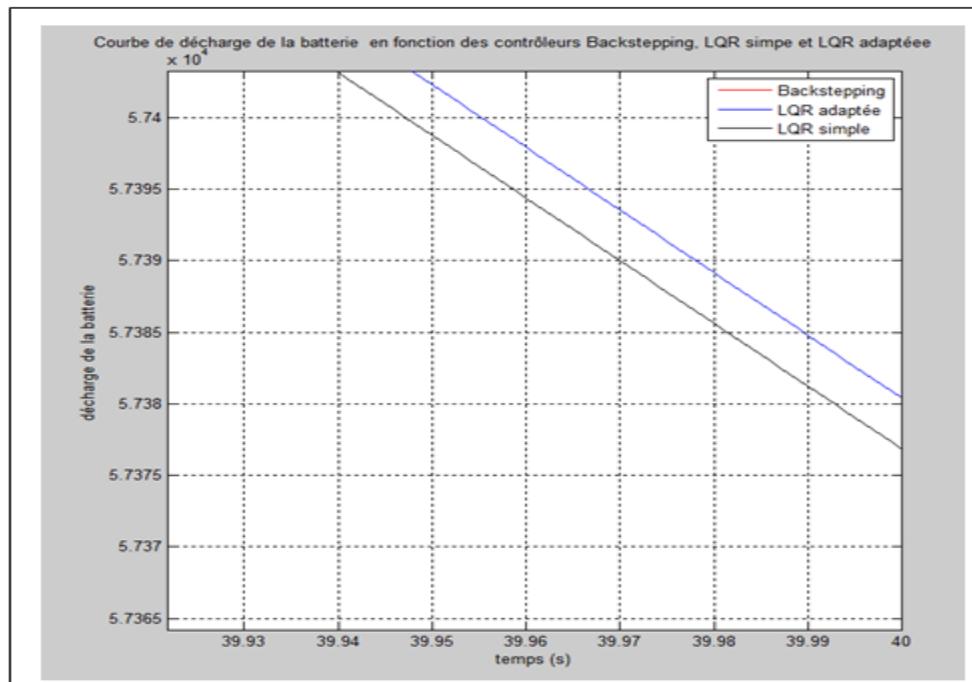


Figure 7.27 Courbe de décharge dans la zone où l'énergie disponible est inférieure au seuil de confort de la batterie lors de trajectoire hélicoïdale pour les deux stratégies de contrôle linéaires

## 7.8 Conclusion

Les simulations en boucle fermée présentées dans ce paragraphe, bien que testées selon un petit ensemble de trajectoires par rapport au grand nombre de trajectoires possibles, montrent que le quadrotor peut être contrôlé à l'aide du contrôleur linéaire quadratique sans instabilités. En outre, la performance réalisée, bien que loin d'être parfaite, devrait être suffisante pour réaliser des manœuvres complexes en évitant que le quadrotor se retourne sur lui même ou de s'écraser.

Ce chapitre constitue la mise en test des différentes stratégies de contrôle du quadrotor. On a commencé par présenter le banc de simulation du contrôleur linéaire quadratique classique en détaillant chacun des blocs simulés en Matlab et Simulink, pour passer par la suite au contrôleur LQR adapté. Finalement, on a présenté une comparaison des performances de deux contrôleurs linéaires et du contrôleur non linéaire du backstepping.

## CONCLUSION

Les résultats présentés dans ce mémoire montrent que l'application du régulateur linéaire quadratique peut fournir un contrôle satisfaisant en termes de poursuite du quadrotor. Si tous les paramètres sont correctement définis et le choix des matrices de pondérations établit correctement, le contrôleur peut être implémenté sur un système embarqué tout en obtenant des résultats satisfaisants dans la plupart des situations de poursuite des trajectoires désirées. Certes, il existe d'autres contrôleurs plus robustes et plus performants face à la non-linéarité du système dynamique, cependant le contrôleur linéaire quadratique est plus simple et plus économique en terme d'énergie consommée lors d'une mission de poursuite.

Le grand nombre de paramètres qui doivent être définis avec une grande précision est, dans la majorité des cas, le problème principal de cette application du contrôleur quadratique linéaire. En particulier, l'aspect relatif à la non-linéarité de la dynamique du quadrotor influence à la fois le capteur et le modèle de transition d'état, ce qui peut conduire à de grandes erreurs d'estimation et même à une instabilité lorsque la boucle d'asservissement est fermée. L'apport de l'adaptation du contrôleur linéaire quadratique est considérable. En effet, le fait d'appliquer le contrôleur LQR simple engendre une optimisation énergétique implicite. De plus, le fait d'introduire un nouveau critère qui oblige le contrôleur d'altérer les performances afin d'allonger la durée de la mission est un autre niveau d'optimisation.

D'autres limites à la validité des résultats présentés dans cette thèse proviennent des hypothèses utilisées pour simplifier le modèle de simulation, en particulier:

- le choix du point d'équilibre. En effet, la linéarisation opérée sur la dynamique autour du point d'équilibre stipule que le quadrotor est continuellement en vol stationnaire. Ainsi, pour obtenir les équations de transition d'état du contrôleur linéaire quadratique, on introduit donc une marge d'erreur;
- le modèle ne tient pas compte de la réponse des moteurs, ce qui peut influencer les manœuvres rapides, car ils peuvent ne pas être assez réactives pour changer les vitesses angulaires des hélices comme requis par le dispositif de commande;

- la sortie de capteurs MEMS dans le monde réel n'est pas continue dans le temps, ils peuvent fonctionner à différents fréquences et les échantillons peuvent être désynchronisés;
- le modèle de batterie utilisé lors de la simulation du contrôleur linéaire quadratique adapté est simplifié.

En raison de simplifications énumérées ci-dessus, le mémoire ne garantit pas le fait d'une mise en œuvre réelle du système décrit, à la place, il ne fournit qu'une analyse théorique de ses performances réalisables et les problèmes connexes.

## **Recommandations**

La majeure amélioration du modèle de simulation décrit dans ce mémoire est de tenir compte des limitations énumérées dans le paragraphe précédent. En particulier, la performance du contrôleur linéaire quadratique lorsque le modèle de transition d'état est également affectée par le bruit aléatoire devrait être étudiée en profondeur. En effet, l'influence du vent sur le contrôle du quadrotor n'a pas été étudiée dans le cadre de ce projet ni son effet sur la consommation de l'énergie.

**Simulation avec des données réelles :** Le modèle Simulink peut également être testé avec des données réelles de la batterie. Dans ce type d'expérience, les signaux provenant des capteurs et le contrôleur sont remplacés avec ceux émis par un quadrotor réel de contrôle lors d'un vol de courte durée. Les estimations produites par le contrôleur sont ensuite comparées à celle de la trajectoire réelle enregistrée par un système de suivi de mouvement. La principale difficulté de cette expérience, en dehors de l'étalonnage des paramètres mentionnés auparavant, est la synchronisation des données provenant des différentes sources, cette tâche n'est pas triviale, due aux différences des horloges, les instants de départ et des fréquences sont susceptibles d'être impliqués et une interpolation peut être nécessaire.

**Mise en œuvre du système embarqué :** Après l'étape de simulation, le système s'est avéré assez efficace et réalisable, il peut être mis en œuvre à bord d'un quadrotor. Les problèmes

qui peuvent se poser à ce stade sont nombreux : en effet les mesures en temps réel peuvent parvenir des capteurs à différents instants. D'autre part, on doit améliorer la conception de l'étape de mise à jour de l'état de charge de la batterie, des vitesses et des positions de manière à ce qu'ils puissent fonctionner séparément. La plate-forme matérielle embarquée peut également imposer la limitation de la fréquence maximale de fonctionnement du contrôleur. En effet, la résolution de l'équation de Riccati à chaque échantillon est impossible. Par ailleurs on peut se référer dans ce cas à une table de consultation faisant un lien entre l'état de charge et le gain optimale correspondant.

**Système de navigation :** Comme indiqué dans le mémoire, ce système de contrôle ne peut pas gérer la position ou la vitesse de la précision fournit par un contrôleur non linéaire comme le backstepping, tout en assurant un bon compromis entre les performances et la consommation d'énergie. Le contrôle de position peut être complété par un système de navigation. Le système de navigation doit prendre en considération les mesures d'état de batterie afin de choisir la trajectoire désirée la plus optimale.





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.Drouot, "Stratégie de commande pour la navigation autonome d'un drone projectile Miniature", Thèse, Doctorat de l'Université de Lorraine, 2013.
- [2] Paul H.Lewis, Chang Yang, "Basic Control systems engineering", Prentice-Hall,Inc, 1997.
- [3] Site official d'Ultra Electronics TCS <http://ultra-tcs.com/>
- [4] Cours drone et micro drone de Pascal Brisset et Antoine Drouin du centre d'étude de la navigation aérienne.
- [5] K.P. Valavanis, "Advances in Unmanned Aerial Vehicles- State of the Art and the Road to Autonomy". Springer, 2007.
- [6] J Fleming, T Jones, W Ng, P Gelhausen, D Enns, " Improving Control System Effectiveness for Ducted Fan VTOL UAVs Operatingin Crosswinds", Proceedings of the 2nd AIAA, Unmanned Unlimited Systems, Technologies, and operations conference, San Diego, California,USA,2003.
- [7] S.Gupte, P.Mohandas, J.M.Conrad, "A survey of quadrotor unmanned aerial vehicle", Proceedings of the IEEE SoutheastCon, Orlando, Florida, USA, 2012.
- [8] M.Orsag, S.Bogdan , T.Haus, M.Bunic et A.Krnjak, "Modeling, Simulation and control of a Spincopter", Proceedings of the international Conference on robotics and automation, Shanghai, China, 2011.
- [9] J. Li and Y. Li, "Dynamic Analysis and PID Control for a Quadrotor," in Proc. of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Beijing, China, aug 2011.
- [10] A.A.WAHAB,M Rosbi "The effectiveness of pole placement Method in control system design for Autonomous Helicopter Model in Hovering Flight ",International Journal of integrated Engineering, I(3),December 2011,pp.33-46.
- [11] E. Pfeifer F. Kassab, "Dynamic feedback controller of an unmanned aerial vehicle," in Robotics Symposium Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian, Oct., pp. 261-266.
- [12] F.Santoso, M.Liu, and G.K. Egan, "Linear quadratic optimal cotrol synthesis for UAV", Proc. of 12th Australian Int. Aerospace Congress, AIAC12, Melbourne, Australia, Conf 2007

- [13] J.E. White, J.R. Phelan, "Stability Augmentation for a Free Flying Ducted Fan", AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, Aug. 1987
- [14] S.Bouabdallah,A.Noth et R.Siegwart, « PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor » Proceeding of the IEEE/RSJ International Conference on intelligent Robots and Systems, Sendai, Japan,2004.
- [15] E. Joelianto, E.M. Sumarjono, A. Budiyono, and D.R. Penggalih. Model predictive control for autonomous unmanned helicopters. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 83:375 - 387, 2011.
- [16] R. Franz , M. Milam and J. Hauser "Applied receding horizon control of the Caltech ducted fan", Proc. 2002 American Control Conf, pp.3735 -3740 2002 .
- [17] J. Shamma, M. Athans, " Analysis of nonlinear gain scheduled control systems", IEEE Trans. Automat. Control, AC-35 (1990), pp. 898–907
- [18] H. K. Khalil Nonlinear Systems, third edition,2001, Macmillan Co.
- [19] D.J.Mcgeoch,E.W.McGookin et S.S Houston, MIMO sliding mode attitude command flight control system for a helicopter, proceeding of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and exhibit, San Francisco, California, USA,2005
- [20] S.Bouabdallah et R.Siegwart, Backstepping and sliding-Mode Technique Applied to an indoor Micro Quadrotor, Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain, p.2247-2252,2005.
- [21] M.Blanke, M.Starowiecki et N.WE.Wu, Concepts and methods in fault tolerant Control, proceeding of the Americain Control Conference, Arlington, Virginia, USA, vol.4,p.2606-2620,2001.
- [22] Y.Zhang et J.Jiang, Bibliographical review on reconfigurable Fault-Tolerant Control System, Annual reviews in control, vol.32,no.2,p.229-252,2008.
- [23] S. Bouabdallah, Design and control of quadrotors with application to autonomous flying,2007.
- [24] Bullo Francesco, Lewis D. Andrew. 2005. «Geometric Control of Mechanical Systems, Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems». First edition, number 49 in Text in applied mathematics, Springer DeSantis Romano. 2000. «Elements of Kinematics With Applications to Problems in Navigation and Robotics». Note de cours ELE6209, Département de génie électrique, Polytechnique Montréal.

- [25] DeSantis Romano. 2011. «Systèmes de navigation aérienne». 7e édition. Note de cours ELE6209, Département de génie électrique, Polytechnique Montréal. Lavoie Philippe. 2012. «Système de navigation hybride GPS/INS à faible coût pour la navigation robuste en environnement urbain». École de technologie supérieure.
- [26] Spong W. Mark, Hutchinson Seth et Vidyasagar M. «Robot Modeling and Control». First Edition. John Wiley & Sons□Murray M. Richard, Li Zexiang et Sastry S. Shankar. 1994. «A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation». CRC Press.
- [27] Murray, Li et Sastry, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, 1994 :CRC Press
- [28] Raptis A. Ioannis, Valavanis Kimon P. 2011. «Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopters». Springer□Arnol'd. 1978. « Mathematical Methods of Classical Mechanics », first edition, number 60 in Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin Koks Don. 2006. « Explorations In Mathematical Physics, The concepts behind and elegant language». Springer
- [29] P. Pounds et al., "Towards dynamically-favourable quad-rotor aerial robots," in Proc. Australasian Conference on Robotics and Automation (ACRA'04), (Canberra, Australia), Dec. 2004.
- [30] Leishman J. Gordon. 2006. «Principles of Helicopter Aerodynamics». Second editions, number 12 in Cambridge Aerospace Series, Cambridge Press.□Beer, Johnstron. 2005. «Mécanique pour ingénieurs, volume 2 dynamique», Chenelière McGraw-Hill
- [31] G. Fay, "Derivation of the aerodynamic forces for the mesicopter simulation," Stanford University, USA, 2001.
- [32] F.P. Beer, E.R. Johnson, Mechanics for Engineers – Statics and Dynamics, MacGraw-Hill, New York, 1976.
- [33] Cowling, I.D., Whidborne, J.F. and Cooke, A.K., "MBPC for autonomous operation of a quadrotor air vehicle", 21st International Conference on Unmanned Air Vehicle Systems, April 2006, Bristol, UK, pp 35.1-35.9.
- [34] Draguna Vrabie, Vassilis L. Syrmos, Optimal control, John Wiley & Sons, 2012-01 04 - 552 pages.
- [35] A. P. Sage and C. C. White. Optimum Systems Control. Prentice Hall, 1977.
- [36] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. Optimal Control - Linear Quadratic Methods. Prentice Hall, 1989.

- [37] Edouard Laroche Commande Optimale, École Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, Universités Louis Pasteur de Strasbourg.
- [38] L. Pontriaguine, V. Boltianski, G. Gamkrelidze, and E. Michtchenko, Théorie Mathématique des Processus Optimaux, Moscou : Mir, 1974.
- [39] P.N.Paraskevopoulos, Modern Control Engineering, Marcel Decker Inc.
- [40] Richard C Dorf and Robert H.Bishop, Modern Control Systems(Ninth Edition). Prentice Hall.
- [41] Frank L.Lewis, Draguna L.Vrabie, Vassilis L.Syrmos, Optimal Control, Wiley& Sons, 2012
- [42] Vincent MORIO Contribution au développement d'une loi de guidage autonome par platitude Application à une mission de rentrée atmosphérique, 2009 université Bordeaux I.
- [43] D. Alazard , Régulation LQ/LQG, notes de cours
- [44] A. Droniou, T. Quenolle, A. Schumacher, Filtres LQR, Télécom ParisTech,2011.
- [45] E. Ostertag, Filtrage Optimal et Commande Optimale, Ecole Supérieure de Physique de Strasbourg, 2002
- [46] Joao P. Hespanha, Linear system Theory.2009
- [47] H.Kwakernaak et R. Sivan, Linear optimal control systems, Wiley-Interscience 1972
- [48] Frank L. Lewis, Draguna Vrabie, Vassilis L. Syrmos, Optimal control, John Wiley & Sons, 2012-01-04 - 552 pages
- [49] Emmanuel Trélat, Contrôle optimal, Note de cours, Université d'Orléans 2008
- [50] Robert C Nelson (1998, Flight stability and automatic control,McGraw-Hill Inc)
- [51] Gil Nachmani, Minimum energy flight path for UAV using mesoscale wind forecasts and approximate dynamic programming, 2007, Naval post docoral school, California.
- [52] L. Gokdere, A. Bogdanov, S. Chiu, K. Keller, and J. Vian, “Adaptive control of actuator lifetime,” in Proceedings of the IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MO, March 2006.

- [53] Leonardo Ascorti, "An application od the extended Kalman filter to the attitude control of quadrotor", thesis, 2013, Politecnico di Milano.
- [54] Guillaume Charland, "Développement de contrôleurs non-linéaire appliqués à la commande en attitude d'un quadrotor", ETS, 2014
- [55] Kokotovic, P.V. (1992). "The joy of feedback: nonlinear and adaptive". Control Systems Magazine, IEEE 12 (3): 7–17. doi:10.1109/37.165507. Retrieved 2008-04-13.
- [56] L. Gokdere, A. Bogdanov, S. Chiu, K. Keller, and J. Vian, "Adaptive control of actuator lifetime," in Aerospace Conference, 2006 IEEE, jul. 2006, p. 11 pp.

