

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
Ph. D.

PAR  
Claude GOSSELIN

CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE CONTRÔLE DES  
PROCÉDÉS DANS UNE USINE DE BOULETAGE

MONTRÉAL, LE 20 OCTOBRE 2014

©Tous droits réservés Claude GOSSELIN, 2014

## II

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

**PRÉSENTATION DU JURY**

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Souheil-Antoine TAHAN, directeur de thèse  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Michel Ruel, ing., codirecteur de thèse  
Président, TOP CONTROL

M. Ali Gharbi, ing. Ph.D., président du jury  
Département de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Thien-My Dao, ing. Ph.D., membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Sami Makni, ing., Ph.D., examinateur externe indépendant  
Consortium de recherche appliquée en traitement et transformation des substances minérales

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 12 SEPTEMBRE 2014

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE





## **AVANT-PROPOS**

En fin d'année 2008, ArcelorMittal Mines Canada (AMMC) a entrepris des pourparlers avec l'École de technologie supérieure (ÉTS) pour réaliser un projet doctoral en innovation industrielle dans le cadre d'activités de recherche reliées au contrôle de qualité des procédés industriels. Dans un partenariat industrie-université, l'entreprise AMMC fonde de bons espoirs sur les retombées d'un tel projet à connotation scientifique. La présente thèse est le fruit de cette collaboration.



## **REMERCIEMENTS**

Je remercie la direction d'ArcelorMittal d'avoir appuyé cette démarche dans un cadre éducationnel et d'innovation industrielle. J'adresse également mes plus sincères remerciements à l'ensemble des gestionnaires d'ArcelorMittal qui ont participé à cette démarche et qui ensemble, ont constitué le moteur essentiel de ce travail que nous avons entrepris avec l'ÉTS. Également, j'adresse une pensée toute particulière à M. Hubert Vallée ainsi qu'à M. Raynald Fournier. Leur support et leur confiance ont grandement favorisé la promotion de ces travaux de recherche et ont constitué l'essence même de la réussite d'une telle réalisation.

Je veux, par la même occasion, remercier et souligner le travail que mon directeur, le professeur Souheil Antoine Tahan du Département de génie mécanique de l'ÉTS, et mon codirecteur, M. Michel Ruel de la compagnie Top Control, ont réalisé en m'assistant dans mes recherches et en m'appuyant dans la conduite d'un tel projet. Il me serait difficile de passer sous silence l'importante collaboration que M. Mathieu Desnoyers du département de procédé de l'usine de bouletage et M. Claude Bazin, professeur au département des mines et métallurgies de l'Université Laval m'ont apportée tout au long de cette démarche. Mes collègues ont également apporté un soutien important et que l'on doit souligner.

Aux membres du jury, M. Ali Gharbi, M. Thien-My Dao et M. Sami Makni, j'adresse mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'ils ont eu à évaluer ce projet.

Pour terminer, un GRAND merci à ma famille, à qui j'offre toute ma conviction des bienfaits de réaliser ce genre d'ouvrage et tout le sens bénéfique qu'il peut apporter d'avoir été réalisé au sein de cette même famille.



# **CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE CONTRÔLE DES PROCÉDÉS DANS UNE USINE DE BOULETAGE**

Claude GOSSELIN

## **RÉSUMÉ**

En collaboration avec l'École de technologie supérieure et la compagnie ArcelorMittal, cette thèse présente le développement d'une méthodologie pour le suivi et le contrôle de qualité pour des procédés industriels multivariés. Ce mandat de recherche en innovation a été développé dans l'usine de bouletage d'ArcelorMittal Exploitation Minière (AMEM) à Port-Cartier (Québec, Canada). Dans cette démarche, l'entreprise ArcelorMittal vise le maintien de son niveau d'excellence de classe mondiale et poursuit ses initiatives pour augmenter ses avantages concurrentiels à travers le monde.

Le procédé de la classification hydraulique a été retenu comme un prototype et un laboratoire de développement en raison de son effet sur la compétitivité de l'entreprise et de son impact sur toutes les étapes subséquentes jusqu'à la production finale des boulettes d'oxyde de fer.

Concrètement, le développement de cette expertise en contrôle des procédés et dans le suivi *in situ* permettra d'établir de meilleures bases de connaissance dans le domaine de la modélisation physique des systèmes complexes, de la réconciliation des données, des observateurs statistiques, de la commande multivariable et du contrôle de la qualité par le suivi en temps réel de la fonction de désirabilité. Le classificateur gravimétrique est modélisé mathématiquement. Avec des perturbations planifiées sur la ligne de production, une procédure d'identification a permis d'obtenir des estimations empiriques des paramètres structuraux du modèle. Une nouvelle campagne d'échantillonnage et une politique inédite pour la collecte et la consolidation des données ont été implantées au niveau de l'usine. L'accès à ces sources privilégiées d'information a permis d'établir de nouveaux seuils pour la gouvernance du procédé et pour son contrôle. Finalement, à la place d'un suivi qualité traditionnel, nous avons implanté une nouvelle stratégie basée sur l'emploi de la fonction de désirabilité. Notre innovation a été, non pas d'employer cette fonction seulement comme un

indicateur du taux de satisfaction globale (économique) du procédé, mais de la proposer comme «observateur» de l'état du système.

Les premières étapes d'implantation ont déjà démontré la faisabilité de la méthode ainsi que les nombreux impacts industriels sur l'ensemble des procédés de l'entreprise. Principalement, l'émergence de l'aspect économique sera une variable stratégique pour assurer une meilleure gouvernance des procédés dont les variables de qualité représentent des enjeux stratégiques.

**Mots clefs :** fraction granulominérale, fraction granulométrique, contrôle de procédé multivariable, matrice de gain de Bristol, directionnalité, fonction de désirabilité, carte EWMA.

# **CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE CONTRÔLE DES PROCÉDÉS DANS UNE USINE DE BOULETAGE**

Claude GOSSELIN

## **ABSTRACT**

This thesis, a collaborative effort between École de technologie supérieure and ArcelorMittal Company, presents the development of a methodology for monitoring and quality control of multivariable industrial production processes. This innovation research mandate was developed at ArcelorMittal Exploitation Minière (AMEM) pellet plant in Port-Cartier (Quebec, Canada). With this undertaking, ArcelorMittal is striving to maintain its world class level of excellence and continues to pursue initiatives that can augment its competitive advantage worldwide.

The plant's gravimetric classification process was retained as a prototype and development laboratory due to its effect on the company's competitiveness and its impact on subsequent steps leading to final production of iron oxide pellets.

Concretely, the development of this expertise in process control and in situ monitoring will establish a firm basic knowledge in the fields of complex system physical modeling, data reconciliation, statistical observers, multivariate command and quality control using real-time monitoring of the desirability function. The hydraulic classifier is mathematically modeled. Using planned disturbances on the production line, an identification procedure was established to provide empirical estimations of the model's structural parameters. A new sampling campaign and a previously unpublished data collection and consolidation policy were implemented plant-wide. Access to these invaluable data sources has enabled the establishment of new thresholds that govern the production process and its control.

Finally, as a substitute for the traditional quality control process, we have implemented a new strategy based on the use of the desirability function. Our innovation is not in using this

function as an indicator of overall (economic) satisfaction in the production process, but rather in proposing it as an “observer” of the system’s state.

The first implementation steps have already demonstrated the method’s feasibility as well as other numerous industrial impacts on production processes within the company. Namely, the emergence of the economical aspect as a strategic variable that assures better governance of production processes where quality variables present strategic issues.

**Key words :** mineral particle fraction, particle fraction, multivariate process control, Bristol relative gain array, directionality, desirability function, EWMA chart.



## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1      PROBLÉMATIQUE INDUSTRIELLE ET OBJECTIFS DE LA RECHERCHE .....	7
1.1      Description générale .....	7
1.2      Les problématiques spécifiques de recherche .....	9
1.3      Le fonctionnement d'une usine de bouletage .....	10
1.4      Les objectifs du projet de recherche .....	12
1.4.1      Objectifs managériaux .....	13
1.4.2      Objectifs corporatifs .....	13
1.5      Description sommaire des étapes de production .....	14
1.5.1      Sections classification, séparation, démouillage .....	14
1.5.2      Section broyage .....	17
1.5.3      Section filtration .....	20
1.5.4      Section mélange .....	22
1.5.5      Section agglomération .....	23
1.5.6      Section tamisage .....	24
1.5.7      Section durcissement .....	25
1.6      Retombées escomptées du projet de recherche .....	28
1.7      Résumé chapitre 1 .....	29
CHAPITRE 2      MÉTHODOLOGIE ET HYPOTHÈSES RETENUES .....	31
2.1      Approche cognitive pour l'atteinte d'une consigne de performance .....	31
2.2      Travaux centralisés sur une section de l'usine : préparation-enrichissement .....	33
2.2.1      Circuit de classification (contrôle de la silice) .....	33
2.2.2      Présentation de la problématique, les défis et les incertitudes .....	36
2.2.3      La physique du système "classificateur" .....	37
2.2.4      Réconciliation des données .....	39
2.2.5      Suivi prédictif (cartes de contrôle) .....	39
CHAPITRE 3      MODÉLISATION DU PROCÉDÉ DU CLASSIFICATEUR .....	41
3.1      Introduction .....	41
3.2      Identification et modélisation .....	41
3.2.1      Procédé de séparation gravimétrique .....	42
3.2.2      Bilan des forces en présence dans la classification .....	44
3.3      Application et opération à l'usine de bouletage de Port-Cartier .....	45
3.4      Mécanismes internes de classification et innovation à l'usine de Port-Cartier .....	46
3.5      La densité retenue comme une variable d'état .....	48
3.5.1      L'innovation sur l'instrumentation de mesure .....	50
3.5.2      L'innovation sur l'instrumentation de commande .....	50
3.6      Plan d'expérience .....	52

3.6.1	Identification dynamique .....	55
3.7	Algorithme d'identification des modèles .....	56
3.7.1	Solution optimale d'un modèle paramétré .....	57
3.7.2	Solution empirique d'un modèle paramétré .....	58
3.7.3	Comparaison des méthodes de modélisation .....	59
3.8	Tableau récapitulatif des résultats d'identification.....	61
3.8.1	Résultats des identifications des variables de densité et de la silice.....	61
3.8.2	Résultats des identifications pour les tranches granulométriques.....	64
3.8.3	Estimés des temps de séjour versus les constantes de temps mesurées....	66
3.9	Observation et discussion .....	69
CHAPITRE 4 TRAITEMENT ET ANALYSE DES DONNÉES .....		71
4.1	Introduction.....	71
4.2	Campagne d'échantillonnage et analyse des données .....	72
4.2.1	Développement des méthodes de réconciliation des données .....	72
4.3	Étude de cas pour le développement d'un observateur d'un flux de matière .....	73
4.3.1	Développement du critère d'observation.....	74
4.4	Développement du premier observateur .....	76
4.4.1	Calculs des rapports molaires .....	78
4.4.2	Estimation et réconciliation des teneurs minérales .....	79
4.5	Conception du premier observateur .....	80
4.5.1	Développement du critère 1 <sup>er</sup> observateur .....	83
4.5.2	Préparation pour l'analyse des résultats .....	86
4.5.3	Paramétrisation du modèle de la courbe de partage.....	87
4.6	Conception du 2 <sup>e</sup> observateur .....	88
4.6.1	Développement du critère du 2 <sup>e</sup> observateur .....	89
4.7	Présentation et discussion des résultats.....	93
4.8	Conclusion .....	94
CHAPITRE 5 ALGORITHMES DE COMMANDE COMPARAISON DES APPROCHES DE COMMANDE ET DE SPÉCIFICATION .....		95
5.1	Système de commande actuel du classificateur hydraulique.....	95
5.2	État de la situation sur la structure de commande actuelle .....	97
5.3	Choix stratégiques des variables de commande et de procédé .....	99
5.4	Structure de commande existante et conception de la nouvelle structure .....	100
5.4.1	Couplage des variables d'entrées et de sortie du système .....	100
5.4.2	Analyse du système et simulation des effets de couplage .....	101
5.4.3	Modèle de bruit .....	104
5.5	Propriétés intrinsèques du système dynamique de classification gravimétrique .....	106
5.5.1	Valeurs singulières du système.....	107
5.5.2	Directionnalité dans le domaine temporel .....	108
5.5.2.1	Simulation dans le domaine temporel.....	109
5.5.3	Directionnalité dans le domaine fréquentiel .....	112
5.5.4	Nombre de conditionnement.....	113
5.5.5	Analyse des gains relatifs – Gains de Bristol.....	114

5.5.5.1	Développement mathématique des gains relatifs.....	117
5.5.5.2	Matrice des gains de Bristol du classificateur.....	118
5.6	Conception du système 2×2 et mesure des performances .....	119
5.6.1	Réglages et spécifications pour le contrôle en monovariable .....	119
5.6.1.1	Spécifications pour les réglages en monovariable .....	119
5.6.2	Réglages et spécifications pour le contrôle avec découpleurs .....	122
5.6.2.1	Spécifications pour les réglages avec découpleurs .....	123
5.6.2.2	Découplage imparfait.....	128
5.6.3	Réglages et spécifications pour le contrôle en décentralisé.....	130
5.6.3.1	Spécifications pour les réglages en décentralisé.....	130
5.6.3.2	Développement de la spécification .....	136
5.6.3.3	Simplification de la méthode décentralisée .....	138
5.7	Présentation et analyse des résultats .....	142
5.8	Conclusion du chapitre .....	143
CHAPITRE 6 SUIVI DE PERFORMANCE ET ASPECTS ÉCONOMIQUES .....		145
6.1	Le contrôle statistique .....	145
6.2	La fonction de désirabilité .....	146
6.3	L'utilisation des cartes de contrôle EWMA .....	151
6.4	Potentiel économique des variables de qualité et de commande .....	153
6.4.1	Développement du modèle économique simplifié.....	156
6.4.2	Algorithmes du modèle économique simplifié.....	157
6.4.3	Bilan de matière pour l'étude économique.....	159
6.5	Simulation des variables stratégiques de qualité et de commande .....	160
6.6	Les fonctions de désirabilité de l'usine de bouletage .....	164
6.6.1	Étude de cas : désirabilité du diamètre moyen et de l'écart-type (BV)...	165
6.7	Conception du critère de désirabilité pour la production de boulettes BBS .....	167
6.8	Simulation du contrôle de qualité avec la désirabilité .....	170
CONCLUSION.....		177
RECOMMANDATIONS .....		181
Perspectives.....		181
Épilogue .....		189
ANNEXE I	MODÉLISATION MULTIVARIABLE .....	191
ANNEXE II	SCHÉMAS P&ID CIRCUIT DU BROEUR "A" .....	195
ANNEXE III	MODÈLES AVEC LES TRANSFORMÉES EN "S" ET EN "Z" .....	197
ANNEXE IV	FIGURES DES MODÈLES DYNAMIQUES.....	209
ANNEXE V	OSERVATEURS .....	225
ANNEXE VI	CONTRÔLEURS MULTIVARIABLES .....	269

ANNEXE VII	FIGURES DES FONCTIONS DE DÉSIRABILITÉ .....	295
ANNEXE VIII	SIMULATEUR DU BILAN ÉCONOMIQUE.....	301
ANNEXE IX	LISTE DES VARIABLES DU PROCÉDÉ.....	323
	LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	325

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 2.1	Variables du procédé ‘classificateur’ .....35
Tableau 2.2	Fonctions contenues dans l'observateur .....39
Tableau 3.1	Pourcentage solide vs la hauteur du classificateur.....49
Tableau 3.2	Variables liées à l'identification .....55
Tableau 3.3	Méthodes d'identification (optimale et empirique) .....60
Tableau 3.4	Points d'opération et échelles des signaux de mesure du classificateur.....62
Tableau 3.5	Variations de commande et de sortie pour l'évaluation des gains .....62
Tableau 3.6	Gains et constantes de temps des modèles de densité et de la silice.....62
Tableau 3.7	Gains des tranches granulométriques (sousverse) .....64
Tableau 3.8	Constantes de temps des tranches granulométriques (sousverse).....64
Tableau 3.9	Gains des tranches granulométriques (surverse).....65
Tableau 3.10	Constantes de temps des tranches granulométriques (surverse) .....65
Tableau 3.11	Volumes découpés du classificateur .....68
Tableau 3.12	Densité et débits volumiques des 3 flux du classificateur .....69
Tableau 4.1	Informations échantillonnées du classificateur en 2009 .....73
Tableau 4.2	Stœchiométrie des minéraux.....76
Tableau 4.3	Oxydes présents dans les minéraux .....77
Tableau 4.4	Valeurs des masses molaires (g/mol).....77
Tableau 4.5	Rapport des masses moléculaires retenues .....79
Tableau 4.6	Résultats du Tableau 4.5 .....79
Tableau 4.7	Information contenue dans le 1 <sup>er</sup> observateur .....82
Tableau 5.1	Description des variables et des capteurs du classificateur .....96

Tableau 5.2	Gains et constantes de temps des modèles dynamiques .....	99
Tableau 5.3	Variation de commande et de consigne .....	103
Tableau 5.4	Calibration des paramètres $d_I$ et $c_I$ des modèles stochastiques .....	106
Tableau 5.5	Valeurs des paramètres de la Figure 5.13 .....	110
Tableau 5.6	Valeurs singulières de la réponse en fréquence .....	113
Tableau 5.7	Calcul des variations pour l'interprétation des gains de Bristol.....	116
Tableau 5.8	Résultats des essais en simulation (méthode monovariable) .....	121
Tableau 5.9	Résultats des simulations (méthode monovariable).....	128
Tableau 5.10	Réglages de $G_{c_i}(s)$ à partir des modèles $G_{ii}^*(s)$ (décentralisée).....	140
Tableau 5.11	Résultats des essais en simulation (méthode décentralisée) .....	142
Tableau 5.12	Résultats des essais de contrôle en simulation (décentralisée) .....	143
Tableau 6.1	Description des variables du bilan économique.....	158
Tableau 6.2	Simulation des variables de commande et qualité (opération normale) ..	161
Tableau 6.3	Simulation avec perturbations (variables de commande et qualité) .....	163
Tableau 6.4	Fonctions de désirabilité, moyenne et écart type du diamètre des BV ....	167

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Schéma général de l'usine de bouletage ..... 11
Figure 1.2	Classificateur - séparateur - démouilleur ..... 15
Figure 1.3	Section broyage..... 18
Figure 1.4	Élément de filtration et unité de filtration..... 21
Figure 1.5	Circuit d'agglomération..... 23
Figure 1.6	Convoyeurs à rouleaux ..... 25
Figure 1.7	Four de durcissement ..... 26
Figure 2.1	Schéma logique lié à la consigne de performance ..... 32
Figure 2.2	Localisation de la section classification (UB) ..... 34
Figure 2.3	Classificateur hydraulique ..... 34
Figure 2.4	Modèle du classificateur ..... 36
Figure 2.5	Classificateur physique ..... 37
Figure 2.6	Modèle étendu..... 38
Figure 3.1	Classificateur en chantier..... 43
Figure 3.2	Classificateur hydraulique, système à contre-courant ..... 44
Figure 3.3	Boucle de contrôle de la densité dans le classificateur ..... 46
Figure 3.4	Courbes de partage pour l'hématite et le quartz ..... 47
Figure 3.5	Pourcentage solide dans le classificateur ..... 48
Figure 3.6	Distribution granulométrique..... 49
Figure 3.7	Rotation des jets (eau de fluidisation)..... 51
Figure 3.8	Ouverture de valve (flush) ..... 52
Figure 3.9	Séquence des variables manipulées ..... 53

Figure 3.10	Essai phase 1 .....	54
Figure 3.11	Essai phase 3 .....	54
Figure 3.12	Essai phase 1 .....	54
Figure 3.13	Représentation temporelle de la variable (t) .....	55
Figure 3.14	Comparaison des modèles dynamiques .....	59
Figure 3.15	Identification avec opération instable .....	60
Figure 3.16	Modèle F-D .....	63
Figure 3.17	Modèle F-S <sub>U</sub> .....	63
Figure 3.18	Modèle F-U-O.....	63
Figure 3.19	Modèle F-S <sub>0</sub> .....	63
Figure 3.20	Modèle +850 $\mu\text{m}$ .....	66
Figure 3.21	Modèle 850-600 $\mu\text{m}$ .....	66
Figure 3.22	Modèle 600-425 $\mu\text{m}$ .....	66
Figure 3.23	Modèle 425-300 $\mu\text{m}$ .....	66
Figure 3.24	Compilation des gains (U) .....	67
Figure 3.25	Compilation des $\tau_i$ (U) .....	67
Figure 3.26	Compilation des gains (O) .....	67
Figure 3.27	Compilation des $\tau_i$ (O).....	67
Figure 3.28	Modèle géométrique du classificateur .....	68
Figure 4.1	Processus d'analyse du système (traitement des données).....	71
Figure 4.2	Flux de matière .....	74
Figure 4.3	Logigramme du premier observateur.....	82
Figure 4.4	Logigramme du deuxième observateur.....	92
Figure 4.5	Classement des courbes de partage de l'hématite et de la silice .....	93



Figure 5.1	Processus d'analyse du système observé (spécifications) .....	95
Figure 5.2	Système multivariable.....	96
Figure 5.3	Logique de contrôle du classificateur .....	98
Figure 5.4	Algorithme de contrôle existant au classificateur .....	100
Figure 5.5	Fonctions de couplage.....	101
Figure 5.6	Changement de consigne de densité .....	102
Figure 5.7	Changement de régime d'eau de fluidisation .....	102
Figure 5.8	Changement de consigne de densité et de régime d'eau de fluidisation ..	103
Figure 5.9	Modèle de contrôle bruité .....	104
Figure 5.10	Calibration du modèle de bruit .....	105
Figure 5.11	Plage temporelle pour la calibration des modèles de bruit .....	106
Figure 5.12	Couplage entrée-sortie vs le cercle unitaire .....	109
Figure 5.13	Directionnalité du système.....	109
Figure 5.14	Directionnalité 4, -3, -3, -4.....	110
Figure 5.15	Directionnalité -4, 3, -3, 4.....	111
Figure 5.16	Constantes de temps variables et effets sur la directionnalité.....	111
Figure 5.17	Directionnalité propre du classificateur .....	112
Figure 5.18	Directionnalité du domaine fréquentiel .....	113
Figure 5.19	Structure pour analyse des gains de Bristol .....	115
Figure 5.20	Gains de Bristol.....	115
Figure 5.21	Premier système de commande (approche monovariable) .....	120
Figure 5.22	Performance du premier système de commande en monovariable.....	122
Figure 5.23	Structure algébrique d'un découpleur .....	123
Figure 5.24	Structure de découplage de $D_{11}$ à $D_{22}$ .....	123

Figure 5.25	Nouvelle représentation de la fonction $G_{22}^*$ .....	124
Figure 5.26	Ré-identification du nouveau système $G_{22}^*$ .....	125
Figure 5.27	Nouvelle représentation de la fonction de transfert $G_{11}^*$ .....	126
Figure 5.28	Structure de commande avec découpleurs .....	126
Figure 5.29	Évaluation des fonctions $G_{11}^*$ et $G_{22}^*$ avec un découplage imparfait.....	128
Figure 5.30	Système de variables intermédiaires .....	131
Figure 5.31	B.O. versus les réglages .....	132
Figure 5.32	Deuxième structure de B.O. ....	133
Figure 5.33	Interactions structure multivariable .....	134
Figure 5.34	Perturbation vue par boucle 1 .....	134
Figure 5.35	Perturbation vs boucle 2.....	135
Figure 5.36	Procédure itérative de réglage en décentralisée .....	139
Figure 5.37	Variations en (%) de $\tau_{i_{G_{ii}^*(s)}}$ et de $K_{p_{G_{ii}^*(s)}}$ des fonctions de transfert $G_{ii}^*$ .....	141
Figure 5.38	Comparaison des résultats en décentralisée des itérations #1 et #10.....	141
Figure 6.1	Processus d'analyse du système observé (suivi prédictif).....	145
Figure 6.2	Fonction de désirabilité représentant les cinq zones.....	148
Figure 6.3	Désirabilité (ratio bentonite).....	149
Figure 6.4	Exemple d'une carte EWMA .....	153
Figure 6.5	Exemple de ratio S/A .....	155
Figure 6.6	Schéma des sources d'addition de la silice et de l'alumine (additifs).....	155
Figure 6.7	Schéma d'écoulement de la matière du bilan économique .....	157
Figure 6.8	Schéma d'écoulement simplifié de contrôle (T.S et T.A.).....	162
Figure 6.9	Pourcentage passant .....	166

Figure 6.10	Critère de désirabilité basé sur les spécifications de qualité.....	168
Figure 6.11	Critère de désirabilité basé sur les efforts de commande.....	169
Figure 6.12	Critère global de désirabilité.....	170
Figure 6.13	Critère global de la spécification de qualité (régime transitoire).....	172
Figure 6.14	Contrôle de qualité avec la carte EWMA (mode détection).....	173
Figure 6.15	Critère global de la spécification de qualité (régime établi).....	174
Figure 6.16	Hidden Plant.....	180
Figure 6.17	Structure de commande conventionnelle (coûts opérationnels) .....	187
Figure 6.18	Contrôle en monovariable avec désirabilité.....	188
Figure 6.19	Structure de commande multivariable avec désirabilité .....	188



## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

<i>ad-hoc</i>	Adapté	MA	Moving average
AM	ArcelorMittal	PCA	Principal component analysis
AMEM	ArcelorMittal Exploitation Minière	PHQ	Personnel hautement qualifié
AMMC	ArcelorMittal Mines Canada	P&ID	Schéma instrumentation
AR	Autorégressif	PSI	Particule Size Instrument
ARL	Teneur en silice +300 µm	PRSS	Physique, réconciliation spécification, suivi
BBS	Boulettes basse silice	Pulpe	Boue d'oxyde de fer
B.F.	Boucle fermée	UB	Usine de bouletage
B.O.	Boucle ouverte	FT	Flow transmitter
BV	Boulettes vertes	ZT	Transmetteur de position
BC	Boulettes cuites	$Al_2O_3$	Alumine
CIM	Canadian Institute of mining	$CaO$	Oxyde de calcium
COREM	Consortium de recherche appliquée en traitement et transformation des substances minérales	$(Ca_{0.1}Mg_{0.15}Mn_{0.1}Fe_{0.65})_3$ $(Al_{0.9}Fe_{0.1})_2(SiO_4)_3$	Grenat
CSP	Contrôle statistique de procédé	$(FeO \cdot TiO_2)$	Ilménite
CuSum	Cumulative Sum (Carte à somme cumulée)	$Fe_2O_3$	Hématite
det	Déterminant	$K_2O$	Oxyde de potassium
EWMA	Exponentially weighted moving average	$(KAl_2)(AlSi_3O_{10})(OH)_2$	Mica
MTS	Minimum technical solution	$MgO$	Oxyde de magnésium
<i>Ibid</i>	Signifie au même endroit	$SiO_2$	Quartz
<i>In situ</i>	Sur site	$TiO_2$	Oxyde de titane



## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

$A, B, C$	Matrices de linéarisation	$t$	Domaine temporel
$\hat{\beta}_{i,z}$	Estimés des teneurs en oxyde	t/h	Tonnage horaire
$\beta_{i,z}^m$	Mesures des teneurs en oxyde	tn	Tonnes naturelles
$D_i^m$	Mesure d'un débit $i$	$u$	Commande
$\hat{D}_i$	Estimé d'un débit $i$	$U$	Vecteur unitaire
$D_i, d_i$	Désirabilité	$U_{1-2}$	Nombre aléatoire
$D, E, F, H$	Matrices de linéarisation	$V$	Matrice de variance
$g$	Constante gravitationnelle	$\hat{W}_z$	Estimée, flux de masse
$\hat{g}_{i,z}$	Estimée, fraction granulométrique	$\bar{W}_z$	Valeur moyenne, flux de masse
$\bar{g}_{i,z}$	Valeur moyenne de $g$	$g^m, W^m$	Mesures
$G(s, z)$	Fonction de transfert	$\hat{X}_{m,i,z}$	Estimée, fraction granulominérale
$h$	Hauteur	$\bar{X}_{m,i,z}$	Valeur moyenne de $X$
$H(s)$	Spécification de contrôle	$\hat{X}_{i,z}^{Pm}$	Pseudo-mesure de $X$
$i$	Classe granulométrique	$y$	Variable de procédé
$J$	Critère	$Y$	Désirabilité
$kg$	Kilogramme	$z$	Domaine discret ou flux matière
$K_p$	Gain de système	$\sigma^2$	Variance
l/min	Litres par minute	$\lambda$	Multiplicateur de Lagrange
$m$	Minéral	$\alpha$	Matrice stœchiométrique
$M$	Matrice de réseau	$\tau$	Constante de temps
MW	Mégawatt	$\theta$	Délai pur
$p_i$	Pondération des désirabilités	$\rho$	Masse volumique
P	Pression	$\varphi$	Matrice coefficient observateur #1
K	Facteur de distribution normale	$\delta$	Matrice colonne observateur #1
$s$	Domaine de Laplace	$\psi$	Matrice coefficient observateur #2
$S$	Matrice de sommation	$\theta$	Matrice colonne observateur #2
SPG	Specific gravity	% sol.	Pourcentage solide





## INTRODUCTION

La compagnie ArcelorMittal (AM), née de la fusion de deux grandes entreprises, Arcelor et Mittal, est considérée comme la plus grande compagnie d'acier au monde à ce jour. Dans un vaste marché de plus d'un milliard de tonnes de production d'acier annuelle, plus de 10% de cette production provient de cette entreprise. Possédant cette importante part du marché, AM porte une attention particulière au développement de ses technologies et à l'innovation dans ses pratiques. Soucieuse de demeurer le leader mondial dans ce domaine, elle met de l'avant des programmes de recherche et des initiatives basées sur l'innovation et l'application des technologies les plus prometteuses. Dans des sphères aussi importantes que la santé-sécurité, l'environnement et l'énergie, AM appuie continuellement les initiatives basées sur le progrès et la réussite.

En 2009, après une période difficile sur les marchés de l'acier, AM se prête à un nouvel exercice duquel elle remet en question ses processus opérationnels même si elle les considère stables, robustes et bien implantés dans ses filiales. Elle considère comme «valeur» la recherche appliquée et le développement en étroite collaboration avec le milieu scientifique. Sur un horizon de cinq ans, elle a mis sur pied un vaste programme de consolidation des pratiques opérationnelles dont cette étude représente un des principaux aspects; plus spécifiquement, ce projet s'inscrit dans une démarche d'amélioration des pratiques en contrôle de qualité.

Au sein d'un environnement d'une longue chaîne de procédés industriels représentée par l'usine de bouletage de Port-Cartier (Port-Cartier, QC, Canada), berceau d'un vaste environnement de développement, AM a favorisé la mise sur pied de ce programme de recherche basé sur quatre étapes fondamentales : la compréhension physique des systèmes et leur modélisation mathématique, la réconciliation des données expérimentales et les méthodes d'observation, la commande multivariable et finalement, l'introduction de la fonction de désirabilité comme outils de suivi et de contrôle. Dans cette thèse, chacune de ces étapes fera l'objet d'un chapitre spécifique. Dans l'éventail de tous les processus des

procédés de l'usine de bouletage, la classification gravimétrique (classificateur hydraulique) du secteur préparation est retenue. Le projet a débuté officiellement en septembre 2009.

Le programme de recherche met donc l'accent sur la réévaluation des méthodes de travail et des opérations qui jusqu'à maintenant ont été profitables, mais basées sur des pratiques *ad-hoc*, donc fort probablement non-optimales. Par conséquent, l'emphase durant tout le projet a été orientée vers une méthodologie rigoureuse et pragmatique de développement et d'application.

De façon conceptuelle, et représentant une lacune bien identifiée depuis longue date, la modélisation physique d'un système représente le point de départ de toutes démarches conduisant à un environnement de contrôle et de suivi de performance. Cette étape a donc fait l'objet du point de démarrage des travaux.

En second lieu, on remarque que des quantités importantes de données et de mesures sont disponibles mais très peu utilisées. Le concept basé sur la réconciliation force dans un premier temps la mise sur pied d'une « structure de bilan » répondant à des lois de conservation et, dans un deuxième temps et à travers un observateur, l'utilisation de toutes les informations jusqu'à l'incertitude des mesures. L'utilisation de données purifiées et ajustées donne un degré de robustesse supplémentaire à la démarche.

Ces deux premières étapes complétées, le chemin qui nous mène vers l'application de la commande basée sur des spécifications bien déterminées, et ce, même s'il représente un degré de complexité élevé, permet de conduire le système vers des points d'opération ciblés. L'exercice permet également de choisir le degré de complexité de la structure de commande en fonction du seuil de tolérance désiré.

Finalement, pour boucler cette démarche et s'assurer d'un suivi où plusieurs variables peuvent être regroupées et assemblées en un même critère statistique, on introduit la notion de la fonction de désirabilité en utilisant des cartes de contrôle souples et très accessibles en termes

d'utilisation (EWMA). Cette approche permet également, dans un monde où l'aspect économique représente un facteur dominant, de mieux quantifier dans la chaîne de valeurs où sont les potentiels et quels poids ils représentent.

Bien que cet exercice avait pour objectif d'élaborer une nouvelle méthodologie pour le contrôle et le suivi de la qualité des procédés industriels, il a néanmoins permis de proposer certaines recommandations très utiles d'un point de vue industriel. En septembre 2013, un nouveau programme a vu le jour sur la modélisation des classificateurs hydrauliques. À lui seul, ce sujet qui a fait état d'un chapitre représentait un potentiel significatif de développement et d'applications pour des programmes de recherche appliquée. De plus, la fonction de désirabilité de plusieurs procédés est programmée et fonctionne en temps réel à l'usine de bouletage depuis le début des travaux dans ce mandat.

Dans un environnement où les responsabilités de directeur de développement en optimisation des systèmes de contrôle sont liées à la gestion d'équipes et de personnel hautement qualifié (PHQ) et de projets de recherche basés sur l'innovation technologique, cette étude répond à un besoin de la compagnie afin de mieux formuler certains critères de suivi de performance et de qualité et d'améliorer la compréhension des procédés de transformation. Par une méthode orientée sur le regroupement et l'assemblage de l'information pour alimenter le contrôle de qualité, la modélisation dynamique, la réconciliation des données et le contrôle multivariable permettent d'appuyer et favoriser cette démarche innovatrice.

Concrètement, le présent projet de recherche a pour but d'améliorer la capacité d'AMEM à suivre la qualité de son produit à travers les principales étapes de son procédé. Pour y parvenir, une démarche systémique a été entreprise pour identifier, modéliser et comprendre les actifs actuels de la compagnie. Une fois les modèles développés, nous proposons une démarche originale pour un suivi statistique basée essentiellement sur l'aspect monétaire (notion de désirabilité et coût global). Les contraintes temporelles et logistiques nous ont poussés à nous concentrer sur une partie du procédé, le classificateur hydraulique. Le lecteur constatera la complexité du système dynamique dans sa globalité, d'où la nécessité

d'introduire des simplifications et des hypothèses de travail dans nos modèles. Toutefois, nous pensons que ces simplifications ne nuiront pas à la valeur de l'analyse effectuée.

Dans la limite du possible, et à chaque étape, nous nous sommes basés sur des données industrielles collectées *in situ*. Cette approche a nécessité énormément de travaux sur le terrain. À plusieurs reprises, nous n'avons pu obtenir des validations en raison d'un certain manque d'information. Par contre, dans la majorité des cas, les données industrielles nous ont procuré un environnement idéal pour valider nos hypothèses et nos modèles.

Le présent travail a été réalisé en milieu pratique. L'auteur a suivi ses cours universitaires et a poursuivi ses travaux de recherche tout en assurant ses responsabilités à son emploi. Pour des raisons de confidentialité, à l'occasion, certains détails (analyses de coûts, échelles des graphiques) ont été intentionnellement modifiés ou omis. Nous remercions les membres du jury pour leur compréhension.

Dans le Chapitre 1, on fait état de la problématique industrielle et des différents objectifs de la recherche. Également, un survol et une description fonctionnelle de l'ensemble des procédés de transformation de l'usine de bouletage ont été effectués en insistant sur les liens que comporte chacun de ces systèmes entre eux. Le thème des retombées est également abordé.

Au Chapitre 2, la méthodologie et les hypothèses retenues sont présentées. L'accent est mis sur une section de l'usine, la section préparation. D'une manière détaillée, on introduit les notions de classification gravimétrique et on présente les premiers modèles de ce type de système.

Au Chapitre 3, on aborde la première étape du processus d'analyse avec la modélisation physique et dynamique du procédé de classification par gravimétrie. Les mécanismes et les particularités qui gouvernent le système sont présentés. On aborde le volet lié à l'instrumentation en place et les choix potentiels pouvant faire partie d'une approche

innovante pour améliorer les mesures en fonction des besoins de recherche. Finalement, un plan d'expérience complet est présenté pour la formulation et l'identification des modèles dynamiques du système.

Au Chapitre 4, on présente la deuxième étape du processus de traitement de l'information avec les méthodes de réconciliation des données et d'observation. Deux niveaux d'observation sont présentés pour simplifier la méthode et introduire l'aspect du diagnostic hiérarchisé. L'algorithme de programmation est formulé à partir d'une procédure de résolution itérative jusqu'à la convergence de la solution. Les notions de classes granulométriques et granulométriques sont abordées ainsi que les courbes de partage et la conservation de la matière pour formuler un bilan complet utilisé dans l'observateur.

Au Chapitre 5, la troisième phase d'analyse repose sur le développement de la commande multivariable. On fait état du mode de contrôle existant et d'une analyse complète regroupant les thèmes communs dans les structures multivariables. Trois méthodes liées à des spécifications temporelles équivalentes sont comparées et présentées.

Au Chapitre 6, cette quatrième et dernière phase met l'accent sur le suivi des performances et des aspects économiques. On introduit la notion de la fonction de désirabilité et on présente la conception d'un critère formulé par l'assemblage de différentes fonctions des variables stratégiques. Une étude de cas liant le contrôle du *taux de silice* provenant de la section préparation (classificateur hydraulique) jusqu'à la mesure finale de cette variable dans les boulettes cuites est présentée. On introduit également le caractère économique associé à la gestion de cette variable. Un dernier point met l'accent sur une approche synthèse de la structure proposée soit la physique des systèmes, la réconciliation des données, les spécifications de commande et le suivi prédictif (PRSS) et présenté comme une approche globale de commande par rétroaction dans toute une usine.

Finalement, au Chapitre 7, nous concluons la thèse par une série de recommandations développées tout au long de l'analyse de la méthode.

En conclusion, ce travail a posé des jalons pour des nouveaux projets qui permettront d'investiguer et d'approfondir d'autres aspects encore aujourd'hui mal compris ou qui souffrent d'une carence de compréhension, donc non maîtrisés. Et finalement, l'industrie innove quant à elle, lorsqu'elle s'impose une remise en question de ses modes de gouvernance. Par conséquent, elle déclenche de nouveaux programmes d'études en milieu industriel dont celui que nous avons débuté en septembre 2013 sur la modélisation du classificateur hydraulique pour la continuité des travaux.

## CHAPITRE 1

### PROBLÉMATIQUE INDUSTRIELLE ET OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

#### 1.1 Description générale

L'âge de la majorité des installations lourdes de la compagnie ArcelorMittal® Mines Canada (AMMC) est d'environ 50 ans. Au cours des années et en raison des conditions dans lesquelles cette compagnie gère ses opérations (facteurs géographique, humain, économique, etc.), l'optimisation des opérations est devenue un impératif pour la pérennité de la compagnie. Une démarche d'amélioration continue n'est plus un souhait, mais une nécessité.

Dans la plupart des projets élaborés dans cette démarche, les notions reliées au *contrôle des systèmes* et à l'*observation des données* sont omniprésentes. Sachant que la performance opérationnelle dans le domaine ne reflète pas nécessairement le plein potentiel des installations, plusieurs initiatives ont vu le jour dans le but d'améliorer les performances opérationnelles de l'usine.

Donc, des importants investissements monétaires sont reconsidérés lors des travaux de conception, de réalisation, d'implantation et de suivi. La plupart du temps, ce sont des correctifs qui doivent être apportés de façon itérative (essais – erreur, *ad doc*) pour pallier au manque de compréhension des mécanismes qui aident à la gouvernance des actifs des systèmes. Ceci affecte significativement le niveau concurrentiel de la compagnie. Pourtant, cette dernière est reconnue comme un chef de file dans ce domaine et a toujours fait preuve d'une grande ouverture liée à l'innovation technologique, et ce, depuis sa création. Le potentiel de ses employés est donc très présent, mais pas nécessairement exploité à sa pleine valeur.

Dans le domaine du contrôle des systèmes dynamiques, trois éléments fondamentaux constituent une structure de commande : le système dynamique lui-même, l'élément de mesure et le régulateur. Une compréhension exhaustive et approfondie du comportement

d'une telle structure est indispensable pour maintenir la sécurité et l'optimalité du fonctionnement. À titre d'exemple, le surdimensionnement des actionneurs (éléments inclus dans le système dynamique) pour le contrôle de certaines variables de procédé exige parfois de réguler ces variables à des points d'opération qui créent de l'usure prématurée (ou une surconsommation énergétique). Également, ces conditions d'opération génèrent une sous-utilisation de l'usine si on compare à sa capacité optimale de production. Du point de vue entretien des actifs, le remplacement inopiné de ces composantes désynchronise et perturbe les entretiens périodiques. Ceci occasionne des coûts très élevés compte tenu des pertes de productivité. Ce genre de problématique a donc une incidence directe sur la mesure des variables stratégiques et de l'utilisation potentielle que nous pouvons en faire.

Pour appuyer notre propos, nous citons d'autres exemples qui sont, par conséquent, des pistes d'amélioration :

- Un environnement de mesure mal conditionné occasionne des biais et des incertitudes parfois importants. Ceci se traduit à l'occasion par des pénalités lorsque les spécifications de qualité ne sont pas respectées (incidences sur le contrôle des systèmes).
- Des contrôleurs mal réglés et qui ne peuvent atteindre les spécifications de commande, vont occasionner la plupart du temps une augmentation des amplitudes de la dispersion (variance ( $\sigma^2$ )) des variables stratégiques (incidences sur le suivi des performances).
- La carence liée à la compréhension des systèmes (signature des éléments, des actifs, des unités et des procédés) et notre incapacité à prédire, selon un degré de confiance et de vraisemblance statistiquement acceptable, les fautes et les pannes potentielles, nous amènent dans une situation inproductive. Ceci limite notre personnel technique dans leur capacité à intervenir au moment opportun (incidences sur l'ensemble des processus).

Dans le but d'améliorer l'environnement dans lequel les activités de production s'effectuent, nous avons initié notre projet de recherche. Il est divisé en quatre étapes stratégiques, soit :



1. l'étude et la modélisation physique des systèmes pour chacun des éléments, actifs, unités et procédés;
2. le développement des techniques de mesures et la réconciliation des données en mode statique et en mode dynamique;
3. l'élaboration des spécifications temporelles ( $t$ ), fréquentielles ( $s$ ), discrètes ( $z$ ) et stochastiques ( $\sigma^2$ ) et le développement des structures de commande appropriées;
4. le développement du suivi en temps réel des performances des systèmes (gestion statistique des écarts de performance par rapport à des consignes et l'établissement des seuils d'alarme) dans un environnement d'application de méthodes prédictives des défaillances.

Un examen rapide de ces étapes nous permet de constater que chaque étape se présente comme l'entrant de l'étape subséquente et que le but final de notre recherche est de développer une technique (ou une méthodologie) qui permet un suivi efficient de la qualité globale du produit à travers toutes les étapes du procédé. En d'autres termes, *comment peut-on aborder le problème de contrôle et de suivi d'un procédé complexe (multivariables) dans un environnement industriel du domaine minier?*

## 1.2 Les problématiques spécifiques de recherche

Étant donné le nombre d'éléments traités dans ce sujet (classification, broyage, etc.) ainsi que les méthodologies employées (physique des systèmes, réconciliation de données, etc.), il est important de noter que les références bibliographiques liées aux auteurs ont pour but de s'inspirer de leurs fondements et des idées potentiellement, mais surtout, industriellement exploitables. Les références sont donc considérées dans ce rapport comme un support au développement d'idées. Certains éléments peuvent générer des applications directes et certains autres, des tendances pour l'adaptation de celles-ci.

Dans le cadre du présent projet de recherche, le développement des techniques est appliqué à une usine de bouletage de Port-Cartier. Dans la présentation du 16 juillet 2009<sup>1</sup>, nous avons fait mention que les installations d'ArcelorMittal® regroupaient différents types d'unités d'affaires dont des aciéries, des secteurs de transformation et d'autres mines. Les techniques sont donc développées dans un premier temps pour un milieu de production de boulettes d'oxyde de fer, mais elles seront sujettes à être adaptées et harmonisées pour les besoins futurs des autres unités d'affaires de la compagnie AM.

### **1.3 Le fonctionnement d'une usine de bouletage**

L'usine de bouletage possède une capacité moyenne de production de l'ordre de 9 millions de tonnes par année. Originellement, l'usine avait été conçue pour produire en moyenne 6 millions de tonnes. L'augmentation de 50 % vient en majeure partie des améliorations qui ont été apportées pendant plus de 30 ans d'opération. La Figure 1.1 présente schématiquement les différentes étapes du procédé de fabrication.

Le minerai d'oxyde de fer (hématite,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) est acheminé par convoyeur à partir des installations portuaires vers les six silos d'alimentation de l'usine. Une première étape de traitement est effectuée et vise, selon le produit fabriqué, à abaisser le taux de silice par des systèmes de séparation physique avec les classificateurs hydrauliques. Le minerai à plus faible teneur en silice est donc par la suite acheminé par gravité en milieu aqueux vers la prochaine étape, le broyage.

Deux lignes de broyage se répartissent la production de l'usine. Chaque ligne possède trois broyeurs à boulets dont les tonnages en opération se situent en moyenne à deux cent quarante tonnes à l'heure (240 t/h). Quatre de ces broyeurs ont ce type de système de classification des particules. Les rejets sont pompés et traités avec des approches similaires dans une unité de traitement secondaire. Trois des quatre broyeurs sont également munis de systèmes de

---

<sup>1</sup> Examen oral, DGA1033.

séparation qui permettent aux broyeurs de fonctionner en circuit fermé. La boue (*pulpe*) est acheminée par pompage vers des réservoirs attitrés à cette fin. Les pressions générées par la hauteur du réservoir et la densité de la pulpe sont très élevées. Des agitateurs doivent fonctionner en permanence pour éviter la sédimentation.

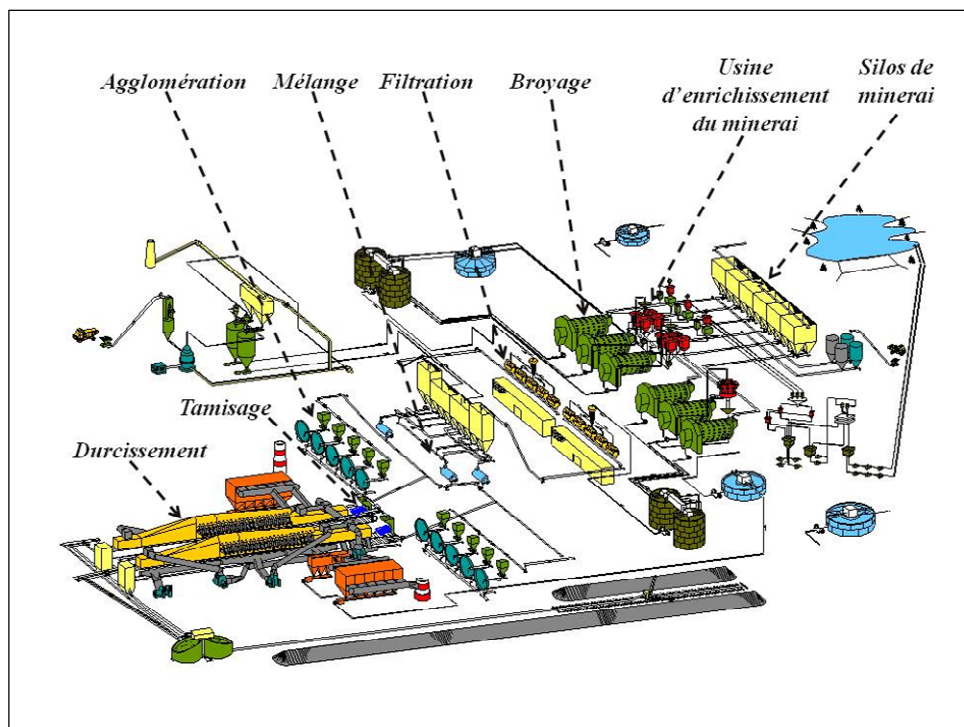


Figure 1.1 Schéma général de l'usine de bouletage

La prochaine étape du processus consiste à filtrer la pulpe et ce, afin d'abaisser le taux moyen d'humidité à 8%. Le taux d'humidité est une variable importante dans le processus d'agglomération. Actuellement, cette variable n'est ni mesurée et ni réglée. Les vitesses de rotation des filtres et l'intensité du vacuum permettent, a priori, d'en arriver à cette valeur. Le produit généré par cette étape du processus se nomme « *gâteau-filtre* ».

L'agglomération par disque devient possible quand le gâteau-filtre est combiné à des agents liants et des fondants. L'étape intermédiaire est le mélange pour s'assurer d'une certaine homogénéité dans le produit prêt à agglomérer.

La première étape de formation de boulettes, les boulettes vertes, devient possible grâce aux disques d'agglomération. Par différents types de forces en jeu, les particules s'agglomèrent de façon à produire d'autres particules de géométrie quasi sphériques. Par débordement latéral, les boulettes dites « *vertes* » sont acheminées vers l'étape intermédiaire du tamisage avant la cuisson.

Cette étape, bien qu'elle puisse paraître simple, est déterminante dans le reste du processus. Sa fonction est de sélectionner le diamètre des boulettes selon des spécifications bien déterminées. Les rejets sont retournés dans le processus d'agglomération qui par définition devient un circuit fermé. Le profil de la distribution granulométrique génère un impact majeur sur l'entassement des boulettes qui par conséquent, affecte l'indice de vide et la perméabilité du lit de boulettes vertes.

La dernière étape constitue à fritter les boulettes d'oxyde de fer. Par différentes étapes de transfert de masse et d'énergie dans le réacteur de durcissement (le four de cuisson), les boulettes vertes séchent, cuisent et se refroidissent pour en arriver au résultat final. Les boulettes cuites sont par la suite acheminées vers les zones d'entreposage avant la dernière étape de l'expédition maritime.

#### 1.4 Les objectifs du projet de recherche

L'objectif principal de l'activité de recherche est donc de **développer une méthodologie originale pour améliorer le suivi des systèmes liés à la production de la boulette de fer dans les différentes unités d'affaires**. Cette nouvelle approche doit permettre une meilleure gouvernance des procédés par des méthodes modernes d'analyse et de suivi en temps réel. Également, les conclusions de notre étude doivent se traduire par des guides pratiques pour la conception et l'implantation de nouveaux systèmes de suivi. Les actifs déjà en place font également partie du processus dans lequel des révisions et des mises à niveau pourront être effectuées. De façon globale, la présente thèse de doctorat en innovation industrielle vise la publication d'un ouvrage de type « Carte du contrôle des procédés en milieu industriel » pour

la compagnie AMEM, et elle peut également s'appliquer à un environnement plus large au sein des autres unités d'affaires de la compagnie.

#### **1.4.1 Objectifs managériaux**

Dans le volet "gestion de l'entreprise", le développement de méthodes d'apprentissage cognitives et d'encadrement du personnel technique (techniciens et ingénieurs) fait partie intégrante des objectifs de l'organisation. La principale problématique identifiée se dénote par une décroissance accentuée et rapide des connaissances acquises en milieu collégial et universitaire pour le personnel technique d'AMEM. Afin de maintenir le niveau de compétence et de connaissance de notre capital humain, l'entreprise favorise grandement, dans le développement de ce projet, un encadrement technique de pointe et même la création de sous-projets pouvant mener à d'autres mandats de type 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cycle.

#### **1.4.2 Objectifs corporatifs**

Du point de vue corporatif, les installations de la compagnie ArcelorMittal® sont nombreuses et réparties à travers le monde dans plus de 65 pays. La compagnie possède un système et des moyens éducatifs pour l'apprentissage et le maintien des connaissances acquises. Par contre, le projet en cours avec l'ÉTS peut (et devrait) permettre de faire ressortir de façon innovatrice tout le potentiel d'établir les règles cognitives liées à l'apprentissage et au maintien des connaissances en milieu industriel. Les différentes unités d'affaires de l'entreprise pourront s'inspirer des retombées reliées au transfert technologique et de l'approche académique orientée vers le caractère industriel.

## 1.5 Description sommaire des étapes de production

Ce paragraphe conjugue les problématiques des différents systèmes dans l'usine de bouletage, les potentiels à exploiter, leurs liens avec l'état de l'art et la littérature scientifique du domaine. La description est réalisée pour les différents processus de fabrication ainsi que les techniques de traitement des données, de régulation et de suivi prédictif.

Les usines de bouletage existent depuis bons nombres d'années. Notre recherche bibliographique a permis d'identifier des auteurs qui ont publié sur le sujet (broyage et cuisson) dès les années 1930 (Bond *et al.*, 1939). La taille de cette industrie et ses enjeux économiques et stratégiques ont pour incidence une inertie face au développement technologique; cette industrie est lente dans sa réaction quant à sa capacité à innover et à migrer vers de nouvelles structures.

La quantité d'information générée lors de la recherche dans la littérature spécialisée est volumineuse. Elle a été classée en quantifiant le degré d'importance du sujet traité. Nous avons constaté que des idées dans ce domaine sont reprises périodiquement par des chercheurs bons nombres d'années plus tard. Par conséquent, peu importe l'année de publication, les articles jugés intéressants ont été conservés et traités pour s'assurer que toutes les opportunités possibles demeurent à notre disposition.

### 1.5.1 Sections classification, séparation, démouillage

La Figure 1.2 présente le circuit de ***classification, séparation et démouillage***. Ce circuit fait partie de la section de la préparation. La classification, la séparation et le démouillage sont trois approches avec des fonctionnalités similaires, ils ont pour principal but l'abaissement des teneurs en silice, l'augmentation de la densité et la ségrégation des particules pour la distribution granulométrique de la pulpe.

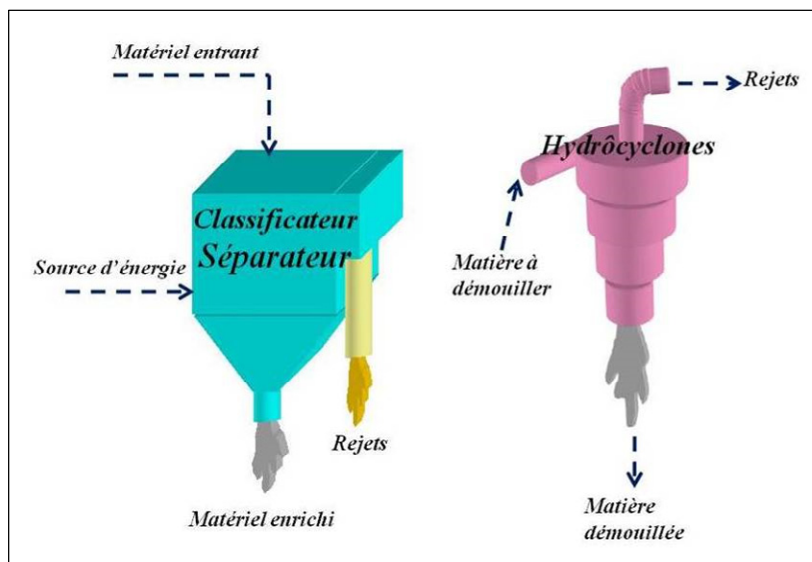


Figure 1.2 Classificateur - séparateur - démouilleur

Les hydrocyclones sont très répandus dans les industries, et la plupart du temps ils ne sont pas utilisés à leur plein potentiel en raison de plusieurs facteurs tels que leur configuration physique (Yoshida *et al.*, 2004), leur conception initiale et leur morphologie (Reed, 2002) et surtout notre incapacité d'en tirer un modèle analytique (ou une signature) précis et valable pour être exploités avec un bon niveau de confiance dans un modèle prédictif tel que démontré par Donskoi (Donskoi *et al.*, 2008). Généralement, on considère que les performances d'un hydrocyclone sont efficaces lorsque la concentration des rejets devient assez faible et qu'elle s'apparente à un niveau de bruit.

Ne faisant pas partie de l'exercice de ce rapport, nous n'aborderons pas en détails chacun des éléments de ce procédé, car ils sont nombreux à être traités. Toutefois, on peut spécifier qu'il existe des approches mathématiques relativement explicites, mais approximatives, pour ce genre d'éléments. Nous référons le lecteur aux travaux de Gupta (Gupta *et al.*, 1990) pour plus d'informations spécifiques à ce sujet. Le problème fondamental dans la modélisation de ce genre de procédé est qu'assez souvent, il se présente des problématiques (e.g. modélisation avec approche phénoménologique) qui deviennent très difficiles à formuler. Récemment, des approches empiriques ont été utilisées pour améliorer la compréhension de

ce type d'équipement (Nageswararao *et al.*, 2003). Le principal bénéfice de ces approches est leur simplicité, ce qui permet une utilisation industrielle commode.

La stabilité et l'efficacité sont les deux éléments les plus recherchés de ce type d'équipement. Considérant qu'ils alimentent les broyeurs, des hydrocyclones qui performant dans une zone d'optimalité contribuent grandement au bilan et à la propagation de la variance dans l'ensemble des processus (Benner, 1995).

L'information que nous soutirons des capteurs (voir schémas P&ID, Annexe II) est riche. Malheureusement, elle n'est pas exploitée à son plein potentiel. Cette piste présente un des fondements de notre démarche dans cette recherche. Notre culture d'entreprise souhaite que notre personnel repousse les limites de la gestion de cette information au maximum de leur potentiel. À titre d'exemple, les hydrocyclones peuvent être instrumentés pour fonctionner dans des zones d'optimalité appropriées. Cependant, ces équipements sont sous-instrumentés et par conséquent, procurent peu d'information. Par exemple, dans d'autres entreprises qui utilisent ce genre de technologie, on approche le problème en utilisant d'autres techniques de mesure, par exemple, selon l'empreinte acoustique (Hou *et al.*, 1998). Ce genre d'approche pourrait être investiguée et adaptée à nos systèmes.

Pour les systèmes de classification et de séparation, les problématiques rencontrées sont similaires à celles des hydrocyclones. Le manque d'information (problématique reliée à l'instrumentation) crée également des contraintes pour la supervision de ce type d'actif<sup>2</sup>. En utilisant les informations générées par les capteurs de mesure et les actionneurs, le développement d'une approche de suivi prédictif aidera à comprendre l'évolution de l'écart de performance de l'actif (Brereton, 2006). On prévoit que les efforts déployés avec cette

---

<sup>2</sup> À titre d'exemple, un classificateur, en raison de sa configuration physique, peut créer des zones d'avalanche en mode de fonctionnement normal. Le matériel peut s'entasser sur les parois et créer ce qu'on appelle des zones d'avalanche. La vanne d'étranglement et de contrôle se voit immédiatement surchargée jusqu'au blocage total.



approche permettront de poser de meilleurs diagnostics et ce, afin de minimiser les arrêts inopinés.

Le traitement de l'information disponible devient donc un levier pour observer le comportement de l'actif (Kretsovalis *et al.*, 1988a-b (*network I-II*); Singh *et al.*, 2005; Delgadillo *et al.*, 2008).

### 1.5.2 Section broyage

La Figure 1.3 présente le premier circuit de **broyage** de la ligne #1. Typiquement, ce système est basé sur une structure en circuit ouvert. Dans notre cas, il comporte une étape d'enrichissement du minerai en amont du circuit. Généralement, d'une usine à l'autre, le broyage est adapté en fonction des besoins spécifiques de la production. Par conséquent, il n'existe pas une mais des approches de broyage typiquement liées aux usines de bouletage (Goossens *et al.*, 2004).

La particularité des circuits de broyage "*ouverts*" n'implique aucune rétroaction physique et le broyeur (réacteur) n'a pas la possibilité de récupérer et retransformer une quantité significative de minerai qui ne respecte pas les spécifications<sup>3</sup>. Toutefois, avec des barres de relevage, le broyeur soulève la matière et crée un profil d'écoulement de la matière sous forme de haricot. La rhéologie permet l'étude de ce type de phénomène pour la dynamique d'écoulement des fluides et a été exploitée par des chercheurs (Bazin *et al.*, 2003a). Des modèles récents font appel aux notions de temps de séjour, de densité, de granulométrie, du *blaine* (élément de surface des particules), de puissance consommée et d'énergie par unité de masse (Bazin *et al.*, 2007).

---

<sup>3</sup> De l'ordre de plusieurs tonnes par jour (granulométrie, densité, blaine (*notion métallurgique liée au traitement des surfaces des minéraux*), etc.).

Dans ce type de réacteur, plus de 95 % de l'énergie consommée par le système est libérée sous forme de chaleur. Les valeurs moyennes de consommation d'énergie montrent que pour produire de la pulpe dans les spécifications granulométriques exigées et à des tonnages moyens de l'ordre de 225 t/h, la puissance consommée atteint environ 4.6 MW. Par contre, cette chaleur libérée par le frottement des boulets augmente la température de la pulpe de façon significative et crée une incidence importante sur le processus de filtration. À ces taux de consommation, on cherche évidemment à réduire la valeur énergie/masse car elle représente un indice important des coûts de production<sup>4</sup>. Le lien entre la puissance consommée et la broyabilité est très important et comme pour les broyeurs autogènes, la matière elle-même est utilisée comme élément de percussion (Ojo *et al.*, 2000).

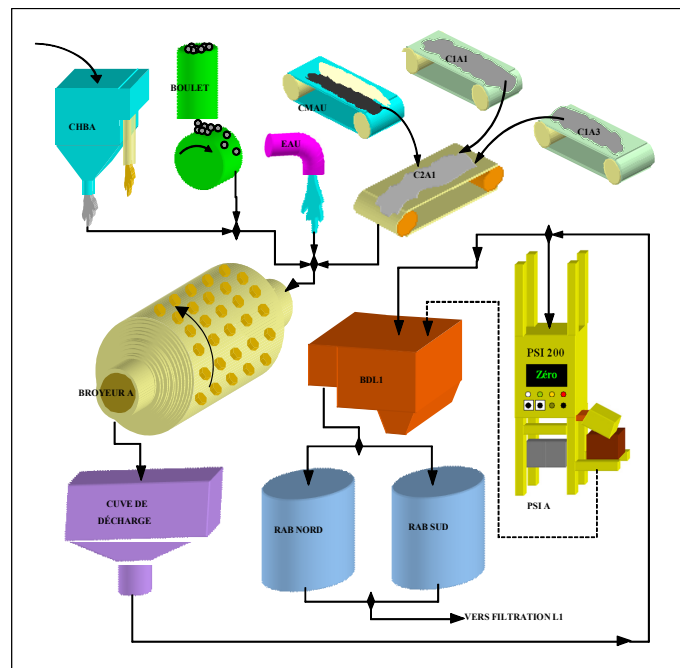


Figure 1.3 Section broyage

On mesure la distribution granulométrique à la sortie du broyeur avec un instrument appelé PSI (*Particle Size Instrument*). Le déplacement de la matière de l'entrée vers la sortie du

<sup>4</sup> Voir les travaux de (Cleevly, 2003; Kapakyulu *et al.*, 2007; Chenje *et al.*, 2003).

broyeur crée un profil de distribution de cette granulométrie. On cherche à déterminer ce type de profil basé sur une approche prédictive et qui permet de consolider la mesure du PSI (Casali *et al.*, 1998). Lors de la conception d'un circuit de broyage, il est difficile de prévoir exactement quelle sera la capacité réelle de l'actif. Des récentes études proposent d'inférer le rendement et de prédire, selon un certain degré de confiance, les capacités du système (Fragomeni *et al.*, 2005).

L'analyse granulométrique a été identifiée comme un élément fondamental dans les paramètres de qualité de la production de pulpe. Par contre, l'instrumentation s'étend de façon assez large en fonction des besoins pour atteindre les spécifications de qualité<sup>5</sup>.

Certains broyeurs doivent combiner plusieurs types d'intrants. C'est le phénomène que l'on observe avec l'ajout des additifs. Certains de nos additifs sont ajoutés à la section mélange mais d'autres le sont à l'étape du broyage. Dès les années 1980, les travaux de Fuerstenau (Fuerstenau *et al.*, 1985) ont démontré que le comportement du broyeur change donc de façon significative. Les instruments (e.g. PSI, les densimètres qui utilisent les sources nucléaires, etc.) doivent donc être ré-étalonnés ou adaptés à ce nouveau mode de fonctionnement.

Certaines variables stratégiques comme la *densité* et la *granulométrie* peuvent être observées et régulées à partir des informations qui sont disponibles des capteurs. Malheureusement, dans le monde minier, les compagnies ont tendance à s'observer et à s'imiter mutuellement. À titre d'exemple, un compétiteur a effectué des travaux sur l'impact de l'accroissement de la vitesse de rotation (Herbst *et al.*, 1983) des broyeurs sur l'augmentation de la capacité de broyage. Les résultats qu'ils ont obtenus ne se sont pas avérés à la hauteur de leurs attentes mais notre compagnie a quand même essayé de valider la même approche tout en obtenant des résultats aussi mitigés.

---

<sup>5</sup> Voir les travaux de : (Edwards *et al.*, 2002; Rolf, 1999).

Nous citons également des tentatives pour intégrer les connaissances du personnel responsable des opérations dans une structure décisionnelle telle que les systèmes experts (Perry, 1992). L'expérience nous a montré qu'avec ce genre d'approche, les opérateurs qui performaient le mieux avaient inconsciemment un modèle statique (et parfois dynamique) basé sur l'apprentissage qui les aidait dans leur compréhension des phénomènes. Ce modèle couplé à la simulation dynamique<sup>6</sup> permet de migrer vers des étapes subséquentes telles que le contrôle prédictif (Chen *et al.*, 2007), les réseaux de neurones (Duarte *et al.*, 2001), les filtres de *Kalman* (Pate *et al.*, 1983) et la prédiction stochastique (Whittle, 1998) et ce, dans un but ultime d'optimisation.

Même dans des phénomènes complexes comme celui de la fragmentation des particules, la physique des systèmes apporte un appui technique fondamental à la compréhension de l'ensemble des processus d'un circuit de broyage (Kwade, 2004). Il est plus facile par la suite de parler d'optimisation de performance comme le mentionnent Latchireddi (Latchireddi *et al.*, 2003).

### 1.5.3 Section filtration

La section ***filtration*** représente un autre élément critique dans le processus du bouletage. La Figure 1.4 présente un élément ainsi qu'une unité complète de filtration. La criticité est justifiée par le fait que plus on se rapproche du procédé de durcissement, plus les zones de rétention sont petites en raison des contraintes physiques. On ne pourrait donc pas accumuler autant de matériel sous forme de "gâteau-filtre" ou de "boulettes vertes" au même titre que les réservoirs à boue peuvent entreposer la pulpe.

---

<sup>6</sup> Pour la partie "simulation dynamique", nous référons le lecteur à (Liu *et al.*, 2004).

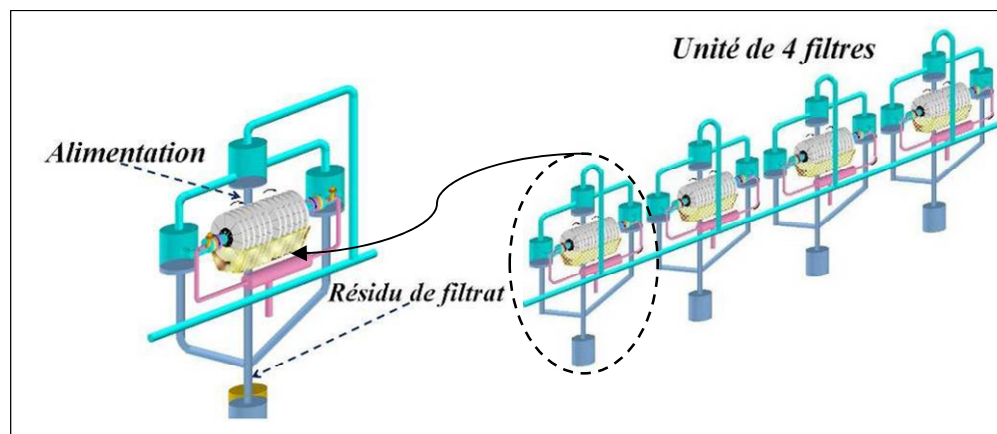


Figure 1.4 Élément de filtration et unité de filtration

En plus de trente ans d'opération, l'usine de bouletage de Port-Cartier est à sa deuxième génération de systèmes de filtration. Il existe plusieurs approches pour concevoir ce type de système. À la base, la conception des unités de filtration dépend en grande partie du schéma de procédé global de l'unité d'affaires (Welch, 2002). Les caractéristiques du système quant à elles, sont étroitement liées au type de matériel et aux conditions d'opération imposées par le procédé de fabrication (Cox *et al.*, 2002; Smith *et al.*, 2002). Il existe également ce que l'on peut considérer comme une référence dans ce domaine; les travaux de Dickenson (Dickenson, 1992) qui sont largement employés<sup>7</sup>. Néanmoins, peu importe l'approche de conception de la modélisation, les choix des variables en jeu dans le processus de filtration comme la vitesse de rotation des filtres, l'intensité du vacuum et de la pression positive pour l'éjection de la matière sur les filtres, la hauteur du bac de la pulpe et la température de la boue sont déterminantes pour atteindre les conditions d'optimalité de ce type de système (Emmett *et al.*, 1980).

<sup>7</sup> En 1998, la compagnie finlandaise *Outokumpu* livrait des unités de filtre en céramique destinée au marché chinois (San *et al.*, 2002). Les constatations que nous avons pu faire à cette époque étaient que les usines chinoises, en choisissant ce type de système, semblaient avoir une capacité supérieure pour investiguer les problématiques reliées à l'entretien (la maintenance) versus les autres compagnies comme la nôtre.

À cette étape du processus, l'eau qui est redirigée dans le procédé s'enrichit d'une chimie de plus en plus significative et amène des effets non négligeables<sup>8</sup>. La filtration dans le domaine de la concentration du fer, comme tous les autres procédés, exige donc une approche de modélisation avec des particularités spécifiques pour atteindre les zones d'optimalité tel qu'il a été démontré par Emmett (Emmett *et al.*, 1980).

#### 1.5.4 Section mélange

Dans cette thèse, la section *mélange* est traitée comme une simple étape intermédiaire précédant la section agglomération. Toutefois, nous mentionnons au lecteur qu'il existe des cas où la notion du mélange devrait impérativement être traitée à part entière. À titre d'exemple, dans les circuits de broyage, les cuves de décharge sont alimentées par les broyeurs qui alimentent à leur tour les pompes vers un circuit fermé ou vers les réservoirs à boue (*pulpe*). Dans le cas où la variable *densité* est suivie et régulée, il est possible que l'état du mélange ne soit pas homogène et qu'il y ait des périodes d'accumulation (dynamique transitoire) favorisant la libération de quantités aléatoires de matière. Ce phénomène a été observé à plusieurs reprises et nécessite des investigations supplémentaires. Également, dans le cas des réservoirs à boue, la notion de vitesse minimum pour éviter la sédimentation et maintenir un mélange homogène fait partie également des investigations qui devront être effectuées (Cloete *et al.*, 1986). Aussi, des recherches effectuées par Arzate (Arzate *et al.*, 2004) ont démontré que certaines variables peuvent être inférées dans le but de simplifier substantiellement la modélisation mathématique<sup>9</sup>. Finalement, nous mentionnons que, malgré l'efficacité et la simplicité de ce type de modèle, d'autres usines qui utilisent des disques et des tambours pour l'agglomération ont employé avec succès des modèles dynamiques plus riches qui peuvent être développés et utilisés dans le but d'améliorer la

---

<sup>8</sup> Voir travaux d'ENGESSER (ENGESSER, 2003).

<sup>9</sup> À titre d'exemples, nous pouvons citer les travaux de Bardin (Bardin *et al.*, 2004) en technologie des poudres et les travaux de Blatz (Blatz *et al.*, 2004) dans le domaine pharmaceutique. Dans ces deux cas, la dynamique des mélanges est traitée sous forme d'une "boîte noire".

compréhension du comportement. À ce titre, nous référons le lecteur aux travaux de Monetti (Monetti *et al.*, 2001).

### 1.5.5 Section agglomération

La section de l'**agglomération** représente la deuxième grande étape après la préparation qui regroupe la classification, la séparation, le démouillage et le broyage. La Figure 1.5 présente un circuit complet d'agglomération basé sur une configuration parallèle. Une ligne de bouletage peut donc fonctionner à cinq, quatre ou trois disques.

L'objectif de cette étape du procédé est de maximiser la production de boulettes en atteignant les spécifications granulométriques tout en minimisant la charge circulante. Comme démontré par Hasenack (Hasenack *et al.*, 1985), la recirculation des boulettes est une dépense énergétique importante. La granulométrie du broyage, la chimie de l'eau utilisée et d'autres paramètres ont une influence significative dans le processus d'agglomération (Fonesca, *et al.* 2004; Eisele *et al.*, 2005). Les propriétés mécaniques des boulettes agglomérées telles que la plasticité et la compression font également partie des contraintes qui viennent s'ajouter à celles déjà existantes du côté production.

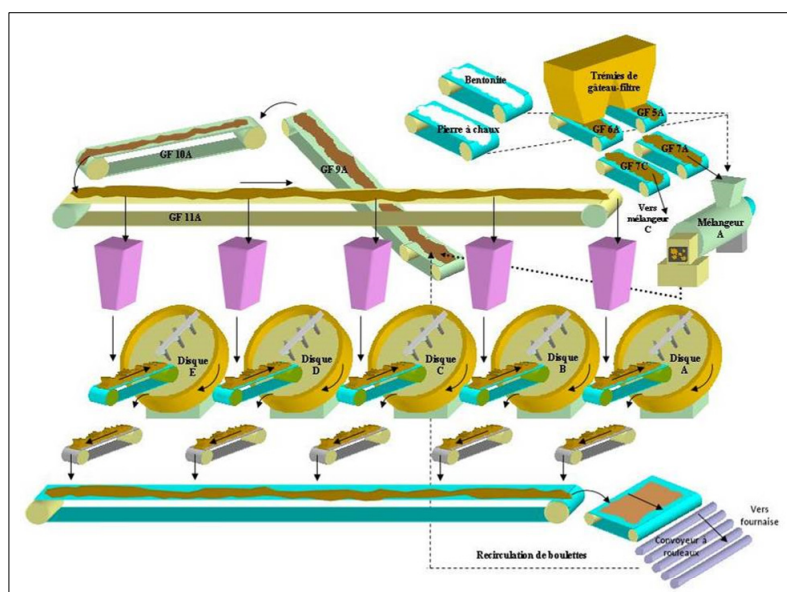


Figure 1.5 Circuit d'agglomération

Notre recherche bibliographique a permis de mettre en évidence plusieurs approches qui ont été investiguées dans le but d'améliorer le contrôle de la distribution granulométrique des boulettes. Selon le souhait des clients, l'idéal serait d'obtenir le même diamètre pour toutes les boulettes, ce qui s'avère être un objectif impossible à réaliser. Par contre, Forsmo (Forsmo *et al.*, 2008) et Sastry (Sastry *et al.*, 1999) ont démontré dans leurs travaux que lors de la modélisation des circuits d'agglomération, des approches telles que l'élimination des grosses boulettes qui consomment de l'énergie improductive lors de la recirculation aident grandement à améliorer le rendement du circuit. Des nouvelles méthodes sont également utilisées pour évaluer les distributions granulométriques (Forsmo *et al.*, 1997) ainsi que la porosité des boulettes (Forsmo *et al.*, 2005).

Du point de vue contrôle, ArcelorMittal® a mis au point une structure de commande qui permet de réguler la distribution granulométrique avec comme variable d'action la *vitesse de rotation des disques* et comme capteur pour la granulométrie une caméra 2D. Nous signalons finalement, que comme les autres réacteurs, l'estimation et le contrôle des perturbations représentent une approche stratégique importante à cause des implications économiques majeures (Glaser *et al.*, 2007; Rapp, 2004).

### 1.5.6 Section tamisage

La section ***tamisage*** représente la dernière étape de traitement avant l'entrée des boulettes dans le four de durcissement. Bien qu'elle présente *a priori* une certaine simplicité, plusieurs facteurs seront à considérer lorsque le traitement de l'information fera appel à des caractéristiques telles que la *porosité*, l'*indice de vide* et la *charge circulante*. La Figure 1.6 présente le système avec ces différents stages de tamisage.



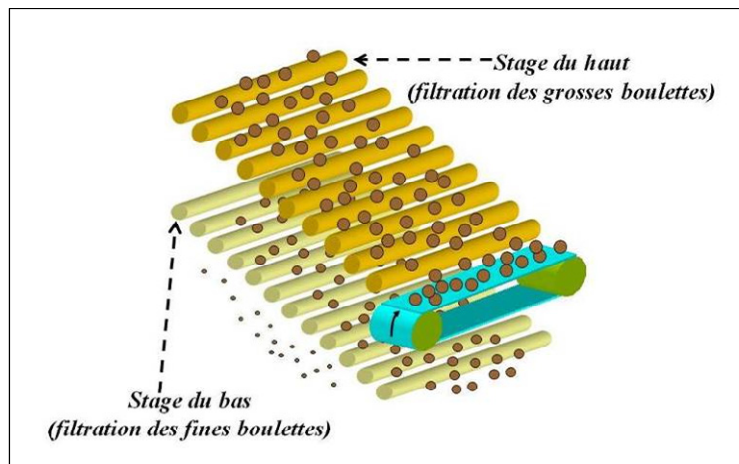


Figure 1.6 Convoyeurs à rouleaux

Mentionnons que des importants travaux d'ingénierie ont déjà été réalisés dans le but d'améliorer la distribution granulométrique. Dans ces travaux, la nouvelle approche consistait à tamiser à la sortie de chaque disque. Aujourd'hui, c'est le contrôle granulométrique par caméra qui est utilisé. Néanmoins, la combinaison des deux méthodes serait peut-être une approche envisageable. D'autres idées émergent également des travaux d'optimisation dans cette discipline (Maizel *et al.*, 2003).

### 1.5.7 Section durcissement

La section ***durcissement*** représente la dernière étape du processus. La puissance consommée dans ce système à contre-courant avoisine les 35 MW. Les boulettes entrent par une section de la fournaise alors que les gaz pénètrent par la sortie de la matière frittée. Cet élément représente le plus gros et le plus complexe de tous les réacteurs de l'usine. La Figure 1.7 présente sa structure.

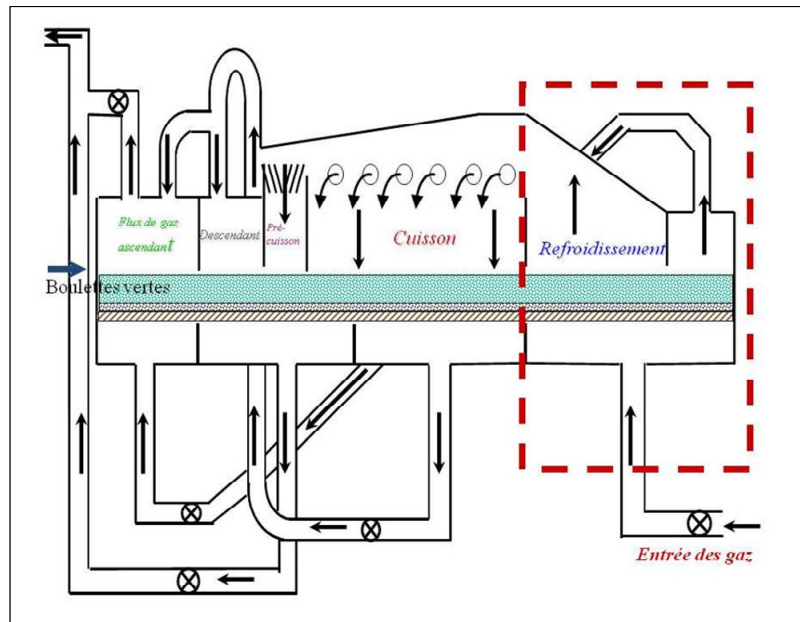


Figure 1.7 Four de durcissement

En résumé, les boulettes vertes sont frittées par l'échange de chaleur et le transfert de masse portés par les gaz. Les gaz sont les éléments porteurs d'énergie. Plusieurs travaux de recherche au cours des vingt (20) dernières années ont été axés sur la modélisation de cet équipement (Bazin *et al.*, 2003b). D'un point de vue énergétique, cet actif représente un énorme potentiel en termes d'opportunités d'optimisation de la consommation. Certains auteurs se sont penchés sur cette question spécifique<sup>10</sup>. Au début des années 90, la compagnie hollandaise *Hogovens*® a réalisé des travaux d'envergure sur la modélisation des phénomènes de frittage dans les fours industriels (Buters *et al.*, 1993). Les travaux du prof. Cross et de son équipe (Cross *et al.*, 1999) sont à souligner également. À notre connaissance, ils sont les premiers qui ont pu valider un modèle de frittage dans les fours industriels. Sa présence dans les installations d'ArcelorMittal à cette même période a suscité beaucoup d'intérêt. C'était la première fois que l'actif, le chercheur et le modèle étaient tous réunis. Le concentré d'ArcelorMittal® est riche en teneur d'hématite et faible en magnétite. Dans les autres mines comme au Minnesota, c'est le contraire. Lors de la cuisson de la boulette, la transformation de la magnétite en hématite est une réaction exothermique (Firth *et al.*, 2008).

<sup>10</sup> (Janna *et al.*, 1996; Kawatra *et al.*, 2005).

L'équipe dirigée par R. Davis (Davis *et al.*, 2003) a travaillé à modéliser le processus de cuisson dans les fours industriels dont le concentré comporte de hautes teneurs en magnétite. Encore aujourd'hui, les travaux de recherche demeurent actifs dans ce domaine. Pour une revue exhaustive de ces travaux, nous référons le lecteur à (Sadernezhaad *et al.*, 2008).

Mentionnons qu'en termes de développement, une contribution importante est apportée par les usines pilotes. C'est le cas du Consortium de recherche minérale (COREM). Une grande partie de leurs travaux vise à développer de l'expertise pour la cuisson de boulettes dans un simulateur physique<sup>11</sup>. À la suite de ces travaux, un simulateur de cuisson a vu le jour pour le compte d'ArcelorMittal® Mines Canada (Caron *et al.*, 2000). Encore aujourd'hui, son utilisation guide le personnel technique de l'usine de bouletage de Port-Cartier vers des nouvelles orientations en fonction des besoins de développement.

Comme l'a démontré (Umadevi *et al.*, 2008), une multitude de facteurs peuvent influencer la qualité de la boulette. Certains de ces phénomènes ne peuvent être totalement expliqués. C'est par des techniques d'analyse multivariable que nous arrivons à des conjonctures sur la source de ces phénomènes. Avec ce type de réacteur aussi complexe, la source de données et d'information est très importante. Les données, les modèles et les contraintes doivent être réunis sous un même toit. L'épuration de l'information est donc très importante. On parle donc de réconciliation de données et d'observation.

Du point de vue contrôle et pour ce type de système, c'est par une approche de bilan (masse et énergie) que notre compréhension devrait continuer à se développer. À l'époque où la compagnie *Hoogovens* était très active (années 80), d'autres orientations étaient également proposées pour tenir compte en mode adaptatif des changements et des perturbations que les fours pouvaient subir<sup>12</sup>. Par contre, le contrôle d'un four de frittage est, et demeurera un sujet très complexe compte tenu que l'expertise développée jusqu'à maintenant montre qu'on

---

<sup>11</sup> Voir les travaux de Küçükada (Küçükada *et al.*, 1994).

<sup>12</sup> Voir les travaux de Thornton (Thornton *et al.*, 1982).

maîtrise uniquement certaines façons de faire pour cuire de la boulette dans les fours industriels. Et pour ce qui est de comprendre et d'expliquer comment le processus de frittage s'effectue dans une boulette, il reste encore beaucoup à faire.

## 1.6 Retombées escomptées du projet de recherche

L'amélioration de la compréhension de la mesure, du contrôle et de la détection des défauts en temps réel basée sur la physique des systèmes aura un impact majeur sur l'amélioration du niveau de compétence des ingénieurs de procédé et d'automatisation. Elle permettra d'utiliser et de mieux comprendre les technologies disponibles (parfois peu utilisées) et favorisera par conséquent une relation plus étroite avec les différents fournisseurs d'instruments et de services.

À la base de l'amélioration continue, la mise en commun des connaissances et la globalisation du capital humain favorisent inévitablement un déploiement plus étendu des ressources spécialisées à travers toute l'entreprise. Étant soumis à des normes gouvernementales de plus en plus sévères sur les émissions de particules et d'affluents, la recherche d'une consommation énergétique optimale **cadre parfaitement avec les objectifs de notre entreprise** ainsi que le respect des normes environnementales.

L'impact en milieu industriel d'une telle démarche est de générer des retombées économiques importantes. Nous avons déjà démontré dans un exercice simple en usine qu'en appliquant, ne serait-ce que partiellement, l'approche préconisée dans ce projet, il nous a été possible de réaliser des gains de l'ordre de 1400 % (mille quatre cents) en économie (temps et coûts de composants)<sup>13</sup>. En observant certains phénomènes basés sur la physique des systèmes, nous arrivons à obtenir des gains très importants.

---

<sup>13</sup> Projet "contrôle du niveau de la pulpe dans les bacs à filtres".

## **1.7      Résumé chapitre 1**

Nous avons présenté dans le Chapitre 1 une description de la problématique de recherche ainsi qu'un aperçu concis des méthodes et approches de résolution de problèmes développées par les chercheurs. Le fonctionnement d'une usine de bouletage a également été présenté ainsi que les objectifs dans les différentes sphères de l'entreprise. De plus, nous avons fait mention des intérêts de l'entreprise ArcelorMittal® de travailler de concert avec l'École de technologie supérieure sur le présent projet.



## CHAPITRE 2

### MÉTHODOLOGIE ET HYPOTHÈSES RETENUES

#### 2.1 Approche cognitive pour l'atteinte d'une consigne de performance

Au Chapitre 1, le survol de la littérature a permis de valider que des techniques de modélisation basées sur des approches phénoménologiques et/ou empiriques permettent de migrer vers la réconciliation et l'observation des données. Au début des travaux, l'approche statique sera préconisée afin de jeter les premiers jalons de la réorganisation des données et de préparer le développement des spécifications<sup>14</sup>.

Une des particularités pour les usines qui doivent superviser et contrôler des systèmes multivariables pour atteindre des spécifications exigées de performance est leur niveau de complexité. L'approche d'analyse des composantes principales (PCA) apporte un support important et intéressant dont les industriels peuvent bénéficier dans le cas de la présence de variables fortement corrélées. Dans le cas échéant, la complexité du système limite sérieusement les tentatives pour un contrôle optimal et son suivi. Des nouvelles orientations se développent présentement pour utiliser la variance comme une nouvelle variable qui peut être utilisée en mode bilan (Qin *et al.*, 2007). Cette nouvelle approche avec les propriétés que nous connaissons aux statistiques, permettrait de simplifier de façon significative les structures multivariables complexes. Il faudra par contre investiguer comment la partie dynamique s'imbrique dans un tel cas.

Notre projet est un projet multidisciplinaire. On conjugue différents domaines de la physique et des mathématiques (chimie, transfert de chaleur, dynamique des systèmes,

---

<sup>14</sup> À titre d'exemple en identification des procédés dynamiques, les tendances montrent que certaines techniques (réponses en fréquence, moindres carrés, etc.) sont utilisées de manière séparées et indépendantes. Or, un chercheur tel que Yucai Zhu, spécialiste en identification multivariable (Zhu *et al.*, 2000), considère que le poids de chacune des méthodes peut contribuer et aider à minimiser un critère spécifique en identification. Il en fait donc une utilisation combinée de ces méthodes pour en tirer un meilleur résultat.

instrumentation, réconciliation et observation des données, analyse statistique, etc.), et des spécifications nous mènent au suivi et à la détection des écarts de performance. Pour le processus analytique, nous avons adopté un schéma chronologique, que nous prétendons logique et pratique, pour aborder notre problématique. Ce schéma va nous accompagner tout au long de la présente thèse. La Figure 2.1 schématise l'ensemble de processus d'analyse, le suivi de performance ainsi que la première étape descriptive de la physique des systèmes.

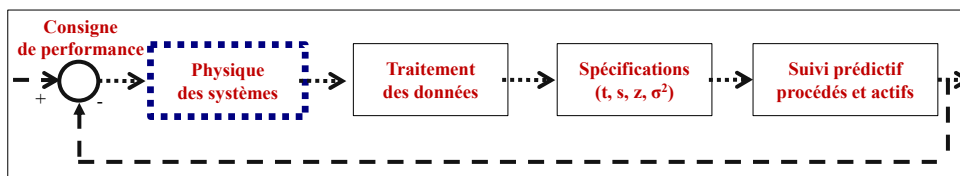


Figure 2.1 Schéma logique lié à la consigne de performance

Les variations (inhérentes et spéciales) sans interruption de la production sont fréquentes. Elles amènent leurs lots de problèmes en termes de qualité. Ce genre de transition génère ce que l'on appelle de la BIN (boulettes non conformes) et par le fait même, des pertes monétaires non négligeables (Duchesne *et al.*, 2003). En 2007, une analyse des composantes principales (Kourti, 2005) a permis à l'usine de bouletage de résoudre un important problème lié à la qualité de la propriété physique et chimique des boulettes. Ceci a prouvé à l'entreprise l'utilité de mieux comprendre l'évolution de la dérive des spécifications de performance de façon hiérarchique sur un élément, un actif ou une unité de production.

Suite à l'examen doctoral (DGA1033), des recommandations ont été formulées pour centraliser les efforts de développement sur un secteur particulier de l'usine de bouletage. D'un commun accord, nous avons orienté le développement sur la section "*procédé de préparation*". Cette section de procédé comporte trois principaux éléments : la **classification**, qui vise le contrôle du taux de silice dans l'hématite, le **broyage** et la **séparation** qui sont liés au contrôle de la granulométrie de la boue. Le circuit de classification sera présenté en détail dans les sections suivantes.



Afin de couvrir l'ensemble des travaux, les problématiques, les défis et les incertitudes seront présentés. On fera également mention de la part réservée à l'innovation et au transfert technologique de nos travaux. La méthodologie appliquée à ce système sera présentée de façon structurée et telle que proposée à la Figure 2.1. On fait donc référence aux domaines de la physique des systèmes, la réconciliation des données, les spécifications de contrôle et le suivi prédictif. Comme bilan, on présentera le travail qui a été effectué et le travail qui reste à faire sur les prochaines étapes du projet.

## **2.2 Travaux centralisés sur une section de l'usine : préparation-enrichissement**

La section préparation-enrichissement a été retenue pour cadre des travaux. La Figure 2.2 présente la localisation de cette étape de procédé. Cette section de l'enrichissement est peu instrumentée. Elle a été retenue en raison de son importance dans l'étape du procédé et du défi technique qu'elle représente.

### **2.2.1 Circuit de classification (contrôle de la silice)**

Le système utilisé est un séparateur hydraulique de type traditionnel. Originellement, ces systèmes étaient développés et utilisés pour l'élimination des impuretés comme les argiles contenus dans les sables (silice  $\text{SiO}_2$ ) pour les applications dans les fonderies. La granulométrie moyenne des particules de silice traitées étaient de l'ordre de 6 mm, alors que les argiles avoisinaient  $1\text{-}6\text{ }\mu\text{m}$ <sup>15</sup>. La Figure 2.3 présente la structure du système.

À l'usine de bouletage de Port-Cartier, ce type de classificateur est utilisé pour deux types de procédés. Le premier stage consiste à éliminer une partie de la silice contenue dans l'hématite. Le deuxième stage vise à augmenter la densité en utilisant le classificateur dans

---

<sup>15</sup> Des applications pour purifier le charbon ont également été développées (Luttrell, 2006) par la suite avec ce même type d'appareillage.

une approche de démouillage. Les principes de fonctionnement demeurent très similaires mais comprennent néanmoins des particularités inhérentes au type d'application.

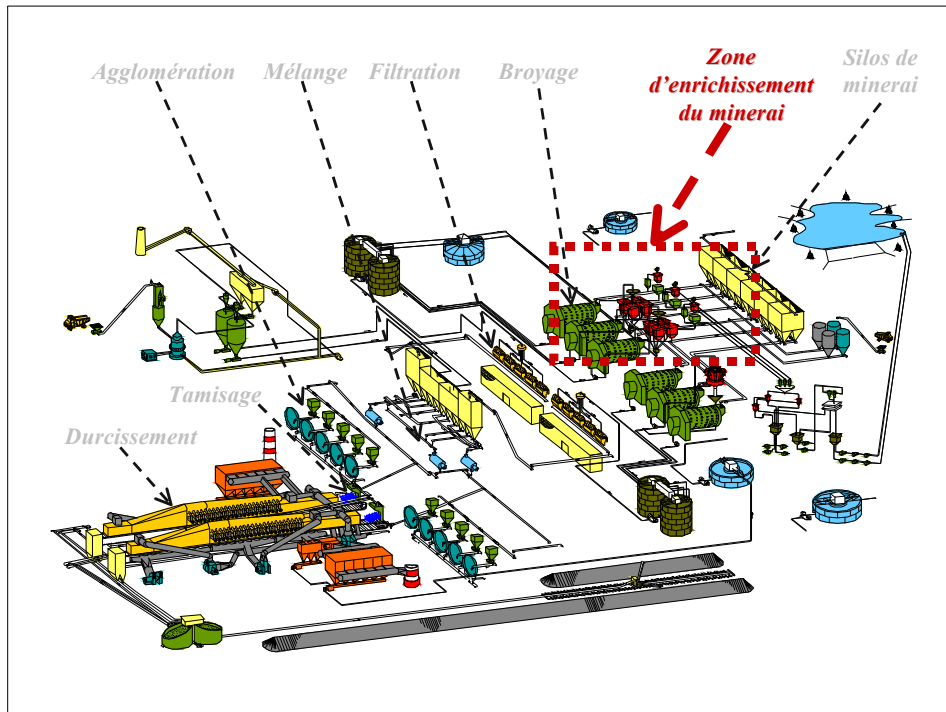


Figure 2.2 Localisation de la section classification (UB)

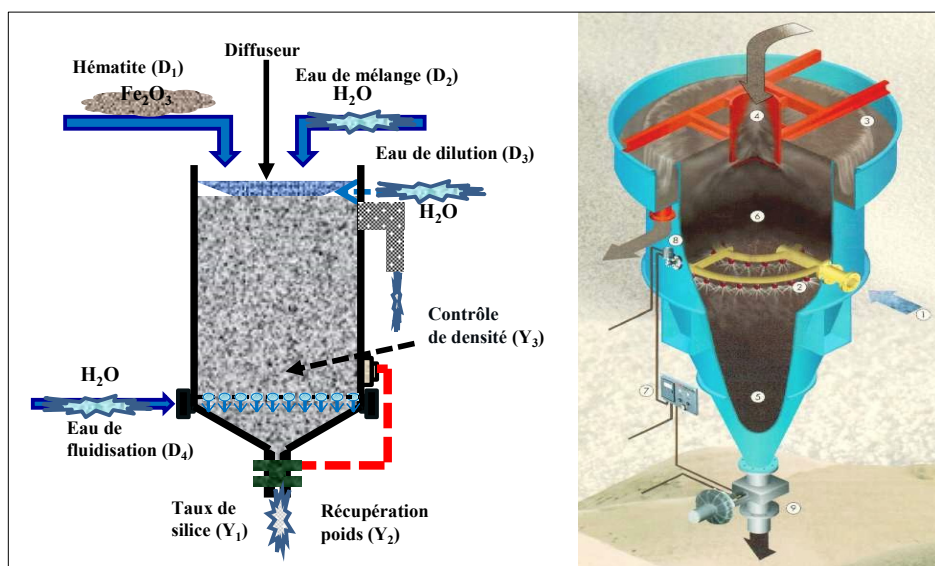


Figure 2.3 Classificateur hydraulique

Dans ce type réacteur, quatre variables d'entrées sont utilisées pour contrôler ou stabiliser les variables de sorties. Le Tableau 2.1 présente la liste des variables traitées pour le classificateur du circuit "A".

Tableau 2.1 Variables du procédé 'classificateur'

Variables	Description	P.F.
D <sub>1</sub>	Concentré hématite de fer	190 t/h
D <sub>2</sub>	Eau de mélange (.1)	2060 l/min
D <sub>3</sub>	Eau de dilution (.2)	1100 l/min
D <sub>4</sub>	Eau de fluidisation	1900 l/min
Y <sub>1</sub>	Taux de silice	1.15 %
Y <sub>2</sub>	Récupération poids	82 %
Y <sub>3</sub>	Densité (SPG)	1.9

Le concentré de fer est introduit par convoyeur sur un tamis filtrant à la tête du classificateur. Une première quantité d'eau est ajoutée pour favoriser le mélange. Une deuxième addition d'eau est amenée au diffuseur à des fins de dilution. Une troisième addition est ajoutée dans la partie latérale du classificateur et favorise la séparation gravimétrique par fluidisation. Cette variable est considérée comme la principale source d'énergie du réacteur physique. Ces additions d'eau sont supportées par un contrôle automatique de type PID. La densité dans le classificateur est également régulée par une boucle de type PID. L'actionneur utilisé est une valve à pincement. Le niveau étant maintenu constant (en raison du débordement), le transmetteur de pression fournit l'information permettant d'inférer la densité ( $P = \rho gh$ ).

Aucune des variables de sorties n'est mesurée en temps réel. Cette conception crée un niveau de difficulté important pour le contrôle et pour l'opération du système. Les objectifs de contrôle sont donc orientés pour réguler le *taux de silice* à la sousverse du classificateur pour maximiser la récupération poids. Les schémas d'instrumentation sont disponibles en annexe.

### 2.2.2 Présentation de la problématique, les défis et les incertitudes

Le système, bien qu'il réponde à des lois de conservation (de masse et d'énergie), demeure toutefois difficile à représenter du point de vue de la phénoménologie des mécanismes qui le gouvernent. On connaît les quantités de masse et d'énergie qui sont introduites dans le réacteur, mais peu de choses sont réellement connues sur le lien entre ces intrants et les mécanismes de séparation. De plus, certains paramètres liés à la structure minérale de l'hématite et de la silice créent des contraintes supplémentaires dans le contrôle des mécanismes du classificateur<sup>16</sup>.

Par contre, nous savons pertinemment que les différentes variables manipulées ont des effets sur le fonctionnement et le rendement de ce réacteur pour le contrôle du *taux de silice* et la récupération poids. Le défi consiste donc à combiner deux approches pour améliorer le modèle du système. Inspiré des modèles des épaisseurs développés par Chen (Chen, 1992) et combiné avec des lois de conservation, notre modèle se caractérise par une approche qui peut être qualifiée de semi-empirique. La Figure 2.4 présente comment le réacteur est subdivisé en trois mélangeurs parfaits combinés à des classificateurs instantanés.

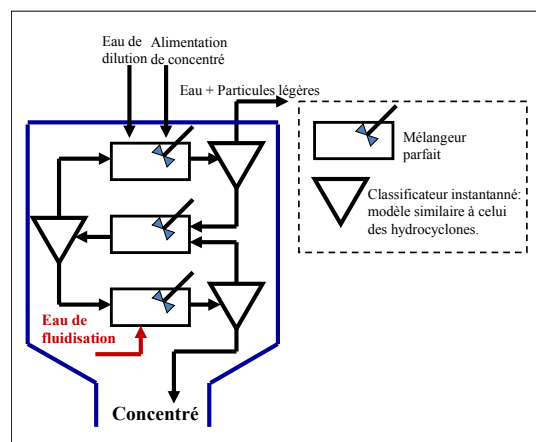


Figure 2.4 Modèle du classificateur

<sup>16</sup> À titre d'exemple, pour une même masse de silice, la forme d'un grain aura une morphologie différente qu'une forme dont la surface est plus étendue (un flocon par exemple). Le grain a tendance à couler et le flocon lui, à suivre les courants ascendants et descendants du classificateur.

Également, le fait que nous ne puissions mesurer en temps réel les deux variables stratégiques nous oblige à procéder à des campagnes d'échantillonnage exhaustives et coûteuses<sup>17</sup>. L'implication de manipulations humaines répétées ajoute un degré d'incertitude important au projet. Combinée au manque de mesures, l'incertitude des modèles semi-phénoménologiques et semi-empiriques amplifie les marges d'erreurs. Cette situation nous force donc pour le moment à travailler en boucle ouverte, ne sachant pas si nous atteignons la cible visée.

Du point de vue industriel, c'est le genre de situations auxquelles nous sommes confrontés. C'est à partir de ce genre de problématique que nous développons des approches de "survie" pour mieux comprendre et améliorer notre efficacité.

### 2.2.3 La physique du système "classificateur"

Ce système peut être représenté à partir de deux approches. La première approche est basée sur le calibrage d'un modèle empirique à partir des fonctions de transfert identifiées autour d'un point d'opération. La deuxième approche combine le bilan métallurgique dynamique et un modèle de mélangeur parfait et un classificateur instantané (voir Figure 2.5).

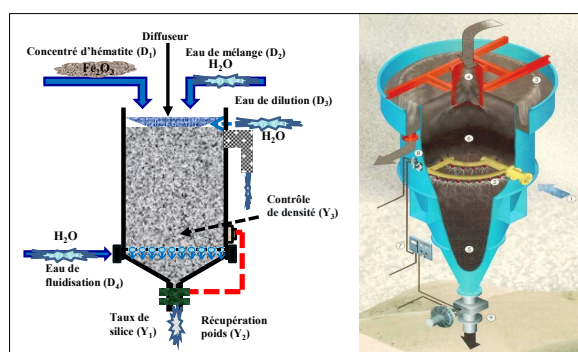


Figure 2.5 Classificateur physique

<sup>17</sup> À titre d'exemple, les dernières soumissions reçues se chiffrent en moyenne à 60 K\$ pour une campagne d'analyse en régime dynamique.

Bien que ce premier modèle présenté à la Figure 2.5 soit une version abrégée d'un modèle qui tient compte de toute la dynamique du système, les nouveaux travaux en cours proposent maintenant un système de huit paliers (réservoirs). Basé sur une approche similaire au premier modèle, ce nouveau système comporte également un mélangeur parfait, un flux de débordement, un flux de décharge et un classificateur instantané.

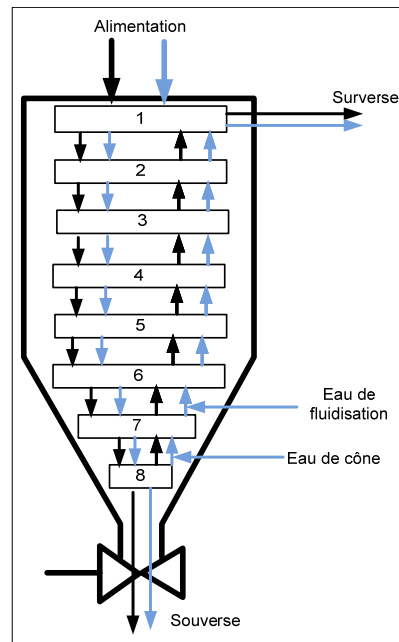


Figure 2.6 Modèle étendu<sup>18</sup>

Les équations fondamentales qui gouvernent le système sont alors le bilan massique dans le classificateur :

$$\sum_{i=1}^n \hat{D}_i(t) = 0 \quad (2.1)$$

Fonction de transfert généralisée pour l'ensemble des variables du système :

$$G_p(s) = \frac{K_p (\pm \tau_o s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (2.2)$$

où  $K_p$  est le gain statique du système,  $\tau_o, \tau_1, \tau_2$  les constantes de temps et  $\theta$  le délai pur.

---

<sup>18</sup> Modèle dynamique étendu (huit paliers) du classificateur avec mélangeur parfait.

La conservation de la matière :

$$M\hat{D} = 0 \quad (2.3)$$

De même que  $\hat{D}$  représente le vecteur des débits massiques et  $M$ , la matrice de réseau.

#### 2.2.4 Réconciliation des données

Dérivé du filtre de *Kalman*, l'observateur permet de réconcilier les données en mode statique seulement. Le critère  $J(D_i, Y_i)$  tient donc compte des valeurs mesurées, des modèles et des incertitudes de ces éléments. L'accumulation de matière est considérée nulle dans le système en régime établi et les valeurs de débits doivent vérifier la condition de la conservation de la matière ( $M\hat{D} = 0$ ). L'ajout du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  nous permet de satisfaire la contrainte (voir Tableau 2.2). La représentation du critère est sous forme matricielle compte tenu du nombre de variables dans le système (Bazin *et al.*, 2003b).

Tableau 2.2 Fonctions contenues dans l'observateur

Équation physique	Description
$J(D_i, Y_i) = 0$	Critère de réconciliation des données
$M\hat{D} = 0$	Contrainte de conservation de la matière
$L(D_i, Y_i) = 0$	Lagrangien (Multiplicateur de Lagrange)

#### 2.2.5 Suivi prédictif (cartes de contrôle)

Pour assurer un suivi, nous projetons d'utiliser des cartes de contrôle du type EWMA. Ces cartes ont démontré leur sensibilité pour détecter des variations significatives dans les procédés. Bien que le choix d'une variable (ou de multivariable) n'a pas encore été effectué par l'équipe lors du démarrage du projet, des données historiques ont été extraites afin d'effectuer des simulations et des essais pour nous assister dans la sélection de ces cartes.





## **CHAPITRE 3**

### **MODÉLISATION DU PROCÉDÉ DU CLASSIFICATEUR**

#### **3.1 Introduction**

Dans les deux premiers chapitres du document, nous avons présenté la problématique et les objectifs de recherche, la description des différentes étapes de la production, les retombées escomptées et la méthodologie préconisée.

De manière plus spécifique, dans le présent chapitre, on porte un intérêt particulier aux deux premiers éléments de la méthodologie PRSS, soit la modélisation en se basant sur la physique du système ainsi que la simulation et le suivi du comportement dynamique (voir Figure 2.1). Comme présenté dans le chapitre 2, nous avons opté pour une approche de modélisation basée sur les mélangeurs parfaits et la classification instantanée. La section 3.2 suivante fait le point sur les méthodes utilisées. La section 3.3 décrit l'application et les opérations du classificateur à l'usine de bouletage de Port-Cartier. La section 3.4 présente les mécanismes internes de classification et innovation à l'usine de Port-Cartier. La section 3.5 décrit le rôle de la densité comme une variable d'état. La section 3.6 présente le plan d'expérience. La section 3.7 introduit les algorithmes de modélisation dynamique. La section 3.8 regroupe les résultats. Finalement, la section 3.9 conclut ce chapitre avec un résumé et discute des observations et des résultats.

#### **3.2 Identification et modélisation**

L'étape de l'identification et de la calibration des modèles a pour but de représenter, le plus fidèlement possible, les comportements dynamiques du réacteur. Cette étape du processus vise également à fournir l'information de base pour définir l'architecture de contrôle des variables stratégiques. Au mois de mai 2010, une campagne d'échantillonnage a été réalisée pour recueillir des informations nécessaires et suffisantes pour la calibration des modèles

dynamiques. Environ 1420 échantillons d'un 1 kg chacun ont été prélevés<sup>19</sup>. Les essais se sont échelonnés sur une période d'une semaine à partir d'un plan d'expérience établi.

### 3.2.1 Procédé de séparation gravimétrique

Les procédés de séparation gravimétrique utilisent les gradients de densité entre les minéraux à partir d'un bilan de forces agissant sur la matière. Quatre mécanismes de séparation ressortent pour décrire le principe de séparation gravimétrique soit : la séparation par milieu dense, la séparation par accélération différentielle, la séparation par nappe pelliculaire fluente et finalement, la séparation par centrifugation. L'objectif n'étant pas de décrire l'ensemble des différentes approches, le détail est disponible en référence (Del Villar, 2005).

Dans les mécanismes mentionnés ci-dessus, la séparation par accélération différentielle fait intervenir la pulsation (modulation oscillatoire) de l'eau injectée dans le classificateur. Cette approche facilite le mouvement des particules et pourraient palier à des difficultés de sédimentation (intégratrice) dans le classificateur. Un angle variable des jets serait peut-être également à considérer pour palier à cette situation (Houot *et al.*, 1996).

Originellement, et dès 1939, les systèmes de classification par gravimétrie avaient été développés pour des applications orientées pour le traitement des minéraux lourds tels que la cassitérite, la wolframite, la scheelite, la chromite, l'ilménite et la tantalite (Crespo, 2009). L'application était également utilisée avec la silice pour la fabrication du verre (Gaudin, 1939). Aujourd'hui, ces méthodes de séparation sont utilisées de façon plus étendues pour les métaux lourds tels la galène, l'hématite jusqu'à la silice et le charbon et pour des dimensions de particules avoisinant les 50  $\mu\text{m}$ . Avec le développement technologique, le procédé de flottation, plus complexe mais offrant des avantages de contrôle plus variés, a, en quelque sorte, refaçonné les champs d'application de la gravimétrie. Néanmoins, il est admis aujourd'hui que pour différentes géométries minérales des mêmes types de minéraux, il faut

---

<sup>19</sup> Cette campagne de mesure avait également des objectifs liés à la minéralurgie et la métallurgie.

utiliser des méthodes de traitement différentes et adaptées (flottation, gravimétrie...) pour atteindre une bonne productivité (Gosselin *et al.*, 1999).

En résumé, ce système à la fois simple et peu coûteux possède peu de degrés de liberté à offrir du point de vue de la commande pour réguler les différentes variables stratégiques telles que les gradients de densité, les tranches granulométriques et le taux de récupération des unités de minerai <sup>20</sup>. La Figure 3.1 présente schématiquement l'arrangement du système tel que conçu à l'usine de bouletage de Port-Cartier.

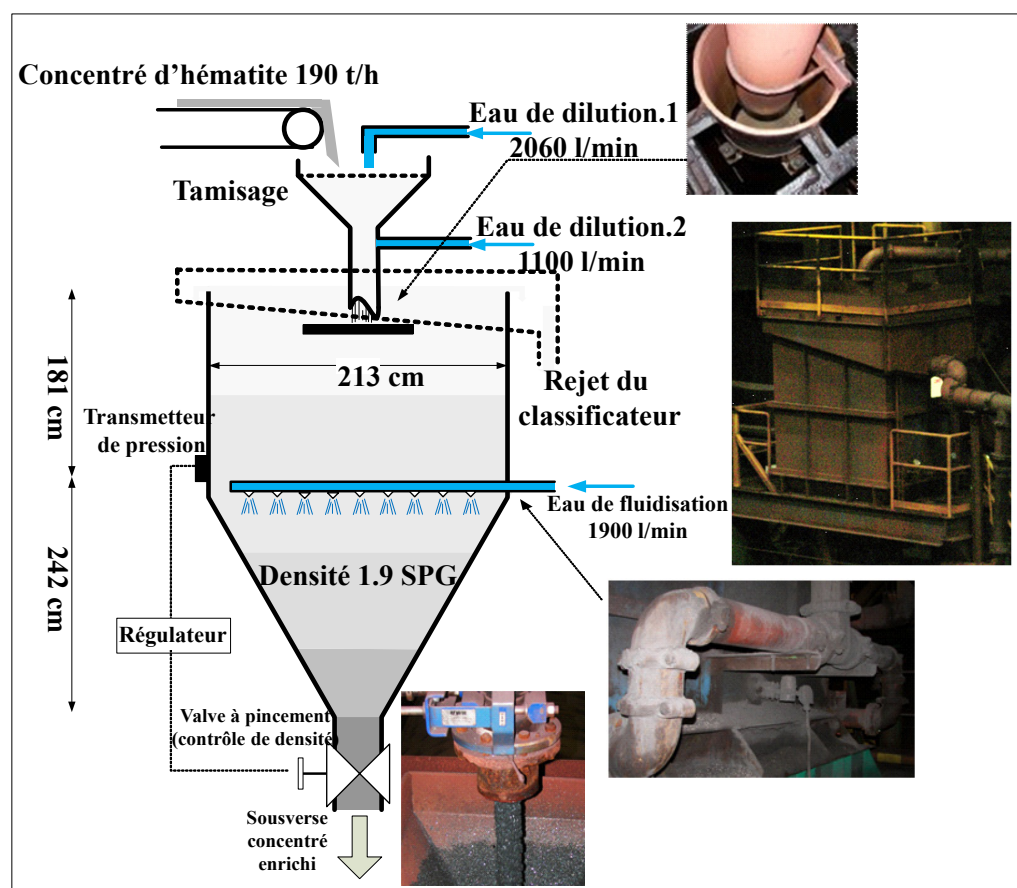


Figure 3.1 Classificateur en chantier

<sup>20</sup> Un peu plus loin dans le Chapitre 4, on établit des liens entre le rendement et la gouvernabilité de ce type de système avec deux principaux axes, soit la chimie des intrants et les méthodes opérationnelles.

### 3.2.2 Bilan des forces en présence dans la classification

Quatre types de forces sont présents dans l'utilisation d'un classificateur hydraulique. La première force observée est une force générée par l'accélération gravitationnelle ( $F_g$ ). La deuxième force en présence et qui est une force ascendante, est la force de trainée ( $F_f$ ) ou de friction générée par les frottements subis par les particules dans le milieu aqueux (pulpe) lorsque les particules sont en mouvement. Les propriétés physiques telles que la densité, la viscosité et la température définissent la valeur du coefficient de friction. La troisième force en jeu, également ascendante, est celle de la poussée d'Archimède et est créée par le déplacement du volume de pulpe de la particule ( $F_a$ ). La dernière force en présence, également ascendante, est celle générée par la poussée dynamique du fluide issue des vitesses de l'eau de fluidisation ( $F_d$ ). Le bilan de ces forces (Eq. (3.1)) détermine le profil de la vitesse de chute. D'une manière plus spécifique, c'est la dernière force ( $F_d$ ) qui détermine si une particule peut être rejetée à la surverse, à la sousverse ou annule simplement sa vitesse de chute (particule en suspension), (Gosselin *et al.*, 1999).

$$\sum_{i=g,f,a,d} F_i = M \times a \quad (3.1)$$

Ce système est donc défini comme un système à contre-courant. La Figure 3.2 présente l'arrangement des forces en présence.

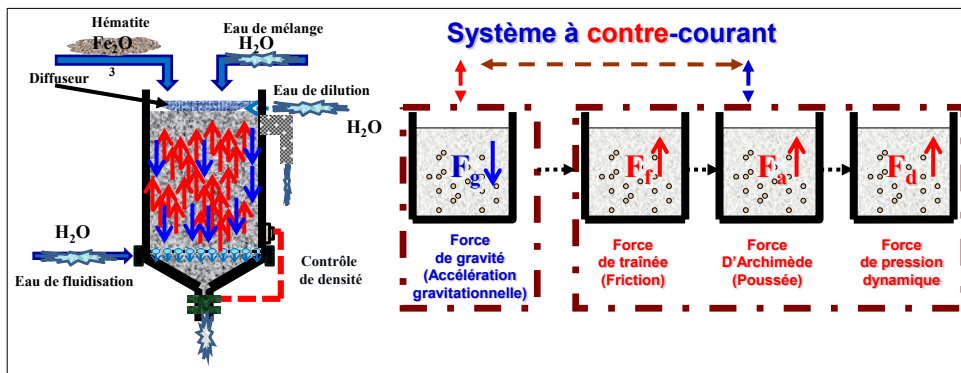


Figure 3.2 Classificateur hydraulique, système à contre-courant

### 3.3 Application et opération à l'usine de bouletage de Port-Cartier

Le classificateur est alimenté en concentré d'hématite à un débit moyen de  $\approx 190$  t/h et un taux d'humidité avoisinant les 5 %. Un premier stage de tamisage est appliqué pour éviter les blocages, combiné avec de l'eau de dilution à un débit moyen de 3100 l/min. Cette première étape a pour but de favoriser la dispersion du matériel pour maximiser l'entraînement des fines particules (la silice) à la surverse et les particules grossière à la sousverse (l'hématite).

Ce débit de matière suit un trajet descendant et est confronté à contre-courant par le débit ascendant de matière plus dense et issu par le courant généré par l'addition d'eau de fluidisation. Sous ce jet d'eau (eau de fluidisation), le lit fluidisé favorise une redirection des courants préférentiels de cette eau fluidisée s'opposant donc à la matière solide descendante. S'amorce alors un jeu d'entraînement de la matière qui, selon les conditions, fait en sorte que les particules fines (la silice) sont rejetées à la surverse et que les particules lourdes (l'hématite) à la sousverse (Das *et al.*, 2009). Il est à noter que de façon opposée, les particules lourdes en silice sont entraînées vers la sousverse et les particules les plus fines d'hématite sont entraînées vers la surverse. La fonction qui détermine ces proportions est nommée "courbe de partage".

Tel que présenté dans la section 3.2.2, les forces en présence et agissant sur le système ont un impact direct sur la densité de la pulpe. On parle alors d'un profil de densité (gradient de densité). La densité est mesurée à un niveau de six pieds à partir du débordement, ce qui représente 43 % de la hauteur totale (14 pieds) de la présence du matériel du haut vers le bas. Cette densité moyenne (60 % solide) est inférée à partir de la hauteur constante du niveau dans le classificateur, la mesure de pression différentielle (par rapport à l'atmosphère), la gravité et selon la relation suivante :

$$\Delta P = \rho gh \Rightarrow \rho = \frac{\Delta P}{gh} \quad (3.2)$$

Une boucle de contrôle utilise cette information inférée de la densité à des fins de poursuite et de régulation via un contrôleur couplé à une valve de pincement (*Pinch Valve*). Le schéma de la boucle est présenté à la Figure 3.3.

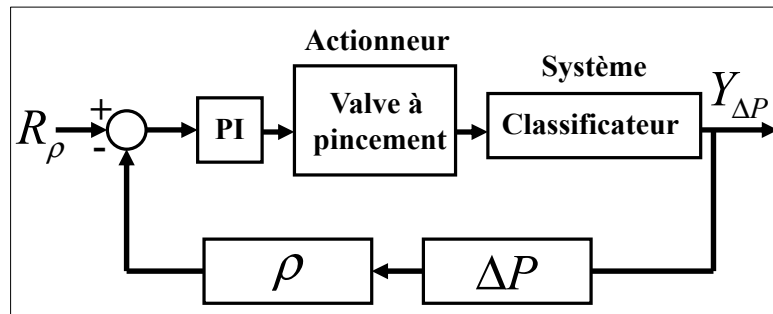


Figure 3.3 Boucle de contrôle de la densité dans le classificateur

Les variables contrôlables telles que l'eau de fluidisation, l'ouverture de la valve de pincement, le débit de concentré et l'eau de dilution ont des impacts sur le principal objectif recherché, soit la maximisation de la récupération du fer.

L'exercice de modélisation et d'identification a permis de cibler lesquelles de ces variables contrôlables permettraient d'optimiser les opérations du classificateur.

### 3.4 Mécanismes internes de classification et innovation à l'usine de Port-Cartier

Principalement, le classificateur joue un rôle lié à la séparation des minéraux. Cette séparation peut être décrite en utilisant des courbes de partage ou à partir des fonctions de séparation similaires à celles observées pour un hydrocyclone pour le traitement d'un minerai composé de minéraux de diverses densités (Lynch, 1977).

Une courbe de partage décrit le rapport massique de la séparation d'une espèce minérale contenue dans un intervalle de dimension spécifique. Dans le cas des classificateurs hydrauliques et des hydrocyclones, les débits de sousverse et d'alimentation sont utilisés pour établir ces rapports. La Figure 3.4 présente le résultat de sept campagnes d'échantillonnage

réparties sur la période du 16 novembre 2009 au 21 décembre 2009 à l'usine de bouletage de Port-Cartier. Ces informations ont été utilisées pour établir les premières bases d'analyse des mécanismes internes du classificateur (Bazin *et al.*, 2011). Les espèces, l'hématite ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) et le quartz ( $\text{SiO}_2$ ), sont également présentées sur cette figure. Cette famille de courbes de partage permettra de calculer des valeurs espérées et d'évaluer des valeurs limites (courbes minimum et maximum). Ces résultats ont une valeur significative, un lien très étroit avec les modes d'opération et d'utilisation des classificateurs et seront utilisés à des fins de simulation.

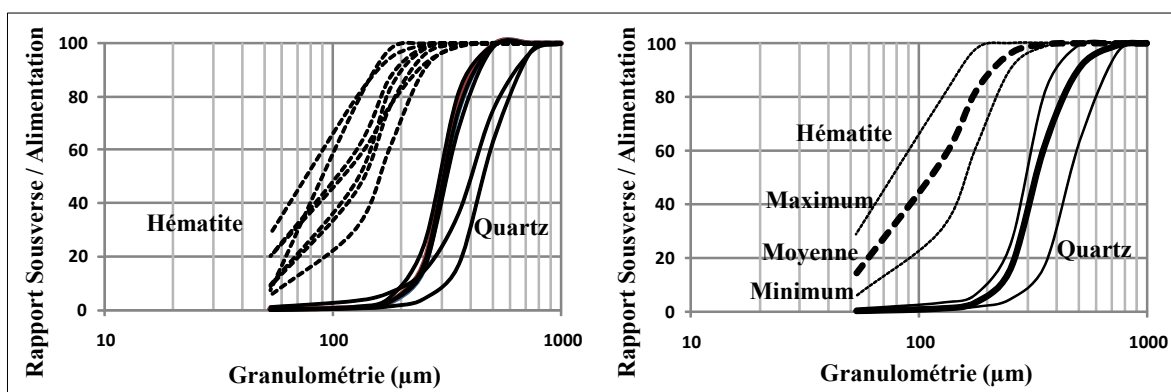


Figure 3.4 Courbes de partage pour l'hématite et le quartz

La comparaison des courbes de partage permet d'établir un premier modèle du comportement du classificateur (Bazin, 2011). Dans cette nouvelle approche, on peut mieux visualiser la dispersion des deux minéraux et utiliser cette information pour établir une corrélation avec la chimie des intrants et les différents régimes opérationnels. Un des facteurs innovants qui repose sur cette nouvelle approche est que pour des régimes d'opération similaires, la dispersion des deux minéraux est faible. Une fois que cette première étape d'analyse est franchie, on peut consacrer plus d'attention aux effets reliés aux différents régimes d'opération.

### 3.5 La densité retenue comme une variable d'état

Un phénomène non négligeable repose sur la capacité des particules à circuler librement dans le classificateur. Cette capacité, qui peut être traduite par le champ spatial des vitesses, joue un rôle prépondérant du point de vue régulation des variables telles que la densité (Xialong, 2007). De plus, on considère la densité comme une variable d'état, c'est-à-dire qu'elle représente le résultat et est une conséquence d'un changement apporté soit aux variables manipulées (contexte opérationnel) ou dans les mécanismes de classification proprement dit. Dans les sections suivantes, la calibration des modèles dynamiques montre que, pour différentes classes granulométriques et qui sont liées à la même excitation de la variable d'entrée, les régimes dynamiques des variables de sortie sont différents.

Le 1<sup>er</sup> juin 2011, des échantillons de boue (pulpe) ont été prélevés dans le classificateur à différentes hauteurs par intervalle approximatif de douze (12) pouces. L'objectif de cette vérification était de mieux comprendre comment la densité évolue dans un régime d'écoulement et ce, en fonction de la hauteur. La Figure 3.5 présente l'évolution des pourcentages solides en fonction de la hauteur dans le classificateur. Les données du pourcentage solide en fonction de la hauteur (en pieds) sont présentées au Tableau 3.1

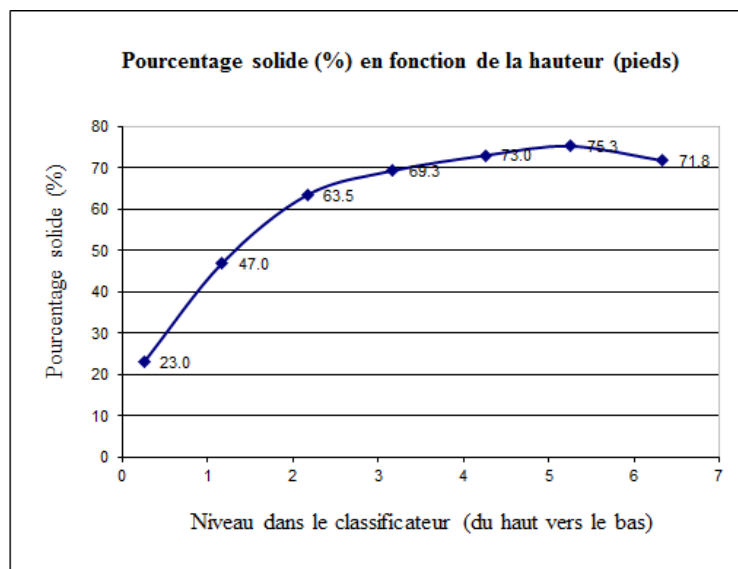


Figure 3.5 Pourcentage solide dans le classificateur



Tableau 3.1 Pourcentage solide vs la hauteur du classificateur

Hauteur (pieds) de haut en bas	0.25	1.17	2.17	3.17	4.25	5.25	6.33
Densité (% sol.)	23.0	47.0	63.5	69.3	73.0	75.3	71.8

Au-delà d'une profondeur approximative de 4' de la surface du classificateur (Figure 3.6), on remarque que le pourcentage solide retenu dans chaque classe granulométrique ne change plus de façon significative. Ces données sont également extraites de la campagne du 1<sup>er</sup> juin 2011 et obtenues à partir de mesures de tamisage. Un point important à remarquer est que ces échantillons ont été récupérés sur une fenêtre d'opération dans laquelle nous savons que le classificateur est toujours en régime transitoire (en phase de sédimentation) et ce, sur une période moyenne de douze heures (la sédimentation). Suivant cette période, une séquence de lavage (*flush*) est effectuée pour appliquer une purge dans le système. La Figure 3.6 présente les résultats obtenus de cette analyse<sup>21</sup>. On signale au lecteur que le classificateur fonctionne toujours sur ces contraintes tant qu'une nouvelle méthode de contrôle n'aura pas permis d'éliminer l'intégration dans le temps du lit fluidisé.

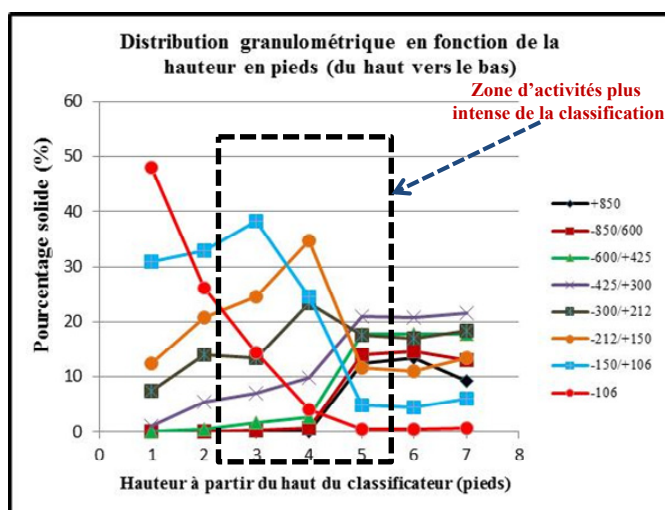


Figure 3.6 Distribution granulométrique

<sup>21</sup> Les niveaux N1 à N7 couvrent la plage de 0.25' à 6.33' et les classes g1 à g8 couvrent les dimensions de +850µm à -106µm.

### **3.5.1 L'innovation sur l'instrumentation de mesure**

Dès le début du projet, le questionnement a porté sur la mesure. Comme nous l'avons mentionné, ces systèmes sont peu instrumentés. Avec le vécu des opérations depuis le milieu des années 90, nous croyons que la mesure du taux de silice ( $\text{SiO}_2$ ) en continu serait une approche stratégique et que ses bénéfices justifient amplement l'investissement requis. Comme on le verra dans le Chapitre 4, nous comprenons mieux comment le taux de silice évolue dans le classificateur et l'inférence de variable par bilan de matière appuyée d'un modèle semi-empirique reconduit notre vision de l'instrumentation vers d'autres horizons. De plus, la densité qui est considérée comme une variable d'état épouse un certain profil tout au long du classificateur et influence directement les performances de la classification à différents niveaux.

On prévoit procéder à l'intention de la mesure de la densité sur plusieurs niveaux et l'utiliser comme variable d'état dans la boucle de contrôle du classificateur. Il s'agit là, selon notre connaissance, d'une innovation importante dans ce secteur industriel. Le modèle semi-empirique qui sera décrit dans les prochaines sections, utilisera directement cette approche et ce, dans le but de minimiser la complexité et le prix des instrumentations de mesure tout en fournissant une information pertinente pour le traitement des données.

### **3.5.2 L'innovation sur l'instrumentation de commande**

L'eau de fluidisation alimente les jets descendants dans la partie inférieure du classificateur. Il est possible que l'angle auquel ces jets sont diffusés ait une importance significative. Pour ce faire, on prévoit apporter des modifications pour ajuster manuellement ces jets afin de couvrir une plage de 360 degrés et ce, même si les jets doivent être dirigés de façon descendante.

Dans l'éventualité où cette nouvelle approche opérationnelle mènerait à des résultats concluants, on peut penser qu'il s'en suivrait une phase d'automatisation de l'angle recherché

pour contrôler les variables stratégiques de façon optimale. Il est possible qu'il existe un lien entre l'angle d'injection de l'eau et la libération des minéraux si on le regarde en fonction des forces en présence (incluant les courbes de partage). Nous avons fait le pari qu'avec cette manière, on obtiendrait un meilleur contrôle sur la consommation de l'énergie. La Figure 3.7 présente l'arrangement possible d'un système rotationnel des jets d'eau de fluidisation. Encore une fois, selon notre connaissance, il s'agit là d'une innovation dans le domaine.

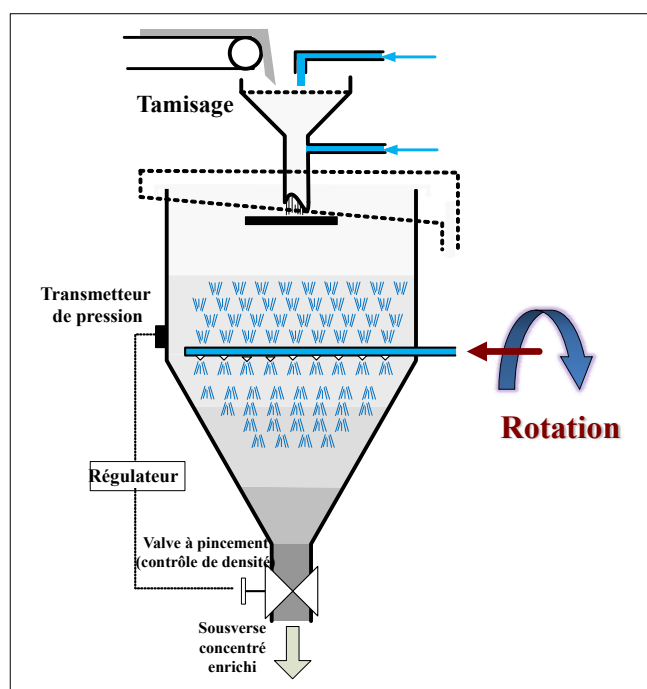


Figure 3.7 Rotation des jets (eau de fluidisation)

Pour les opérations du classificateur, nous considérons que la fluidisation du lit subit une phase d'intégration temporelle reliée à une augmentation de la restriction du lit fluidisé. Cette observation est ressentie, mesurée et observée sur une période approximative de six heures. Du point de vue contrôle, le système se rapproche plus d'un procédé "par lots" que d'un procédé du type continu.

La Figure 3.8 montre le comportement du contrôleur qui doit incrémenter la valeur de la commande de plus de 3 % pour réguler la variable de sortie, soit la densité.

Pour compenser cette augmentation de restriction dans le lit fluidisé, on remarque une intégration de l'ouverture de la valve de sortie pour maintenir le même point d'opération de l'écoulement de la matière. Le schéma de Process and Instrumentation Diagram (P&ID) de l'arrangement du système (CPBA) est présenté à l'ANNEXE II.

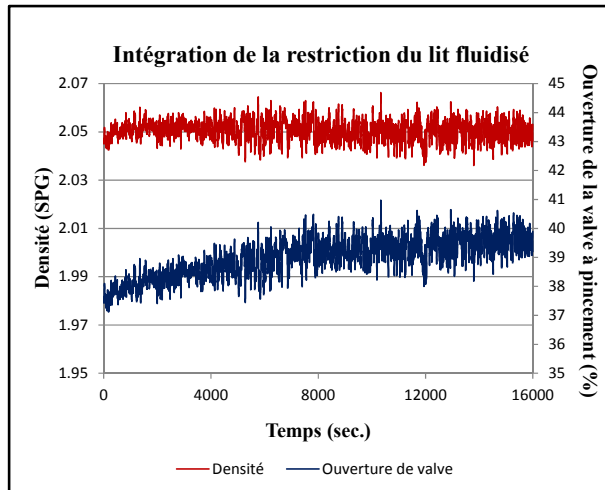


Figure 3.8 Ouverture de valve (flush)<sup>22</sup>

### 3.6 Plan d'expérience

Le plan d'expérience visait principalement à établir une structure de modèles dynamiques des variables stratégiques liées à la qualité et à la productivité. Quatre variables d'action (ou de commande) ont été identifiées en référence avec le Tableau 2.1, soit :

- 1) L'addition d'eau de dilution ( $D_3$ ) à l'entrée du classificateur (l/min).
- 2) L'addition d'eau de fluidisation ( $D_4$ ) à la base du classificateur (l/min).
- 3) Le tonnage ( $D_1$ ) à l'entrée du classificateur (t/h).
- 4) L'ouverture de la valve à pincement ( $Y_3$ ) sous le classificateur permettant le contrôle de la densité (%).

Également, la campagne d'identification a été effectuée en s'assurant que toutes les boucles de contrôle étaient maintenues à un point de consigne donné et invariable. Le contrôle de la

<sup>22</sup> Ouverture (intégrateur) de la valve sur une période 4.5 heures avant la séquence de nettoyage (flush).

variable de densité était interrompu (mode manuel) durant les essais pour enregistrer les variations sur la variable de densité ( $Y_3$ ).

Le plan d'expérience a été planifié et structuré avec le département de procédé de l'usine de bouletage au début du mois de mars 2010. Les préparations opérationnelles du plan d'essai ont été effectuées durant la période du 15 au 29 mars 2010. La Figure 3.9 présente l'arrangement du système dans l'ordre avec lesquelles les variables de commande sont manipulées.

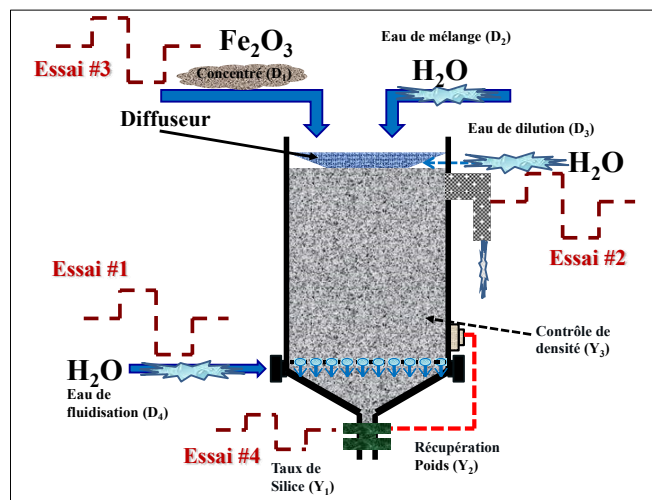
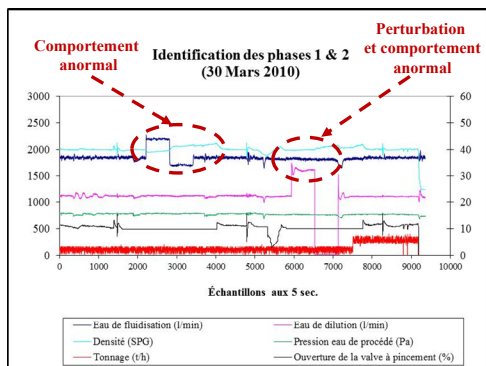
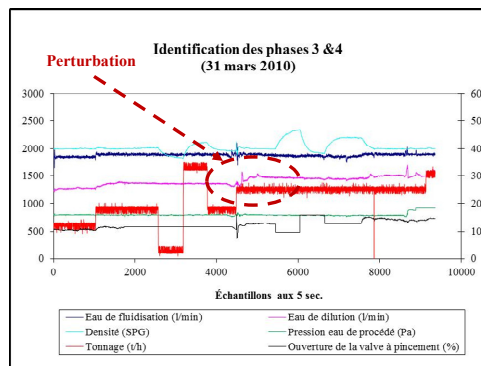


Figure 3.9 Séquence des variables manipulées

La première campagne d'échantillonnage s'est déroulée durant la période du 30 au 31 mars 2010. Cette campagne a été en quelque sorte une première ébauche pour "*raffiner*" nos méthodes de travail. Des perturbations sont survenues durant ces essais. Le 30 mars 2010, sur l'essai de la phase 1 (essai avec l'eau de fluidisation), un comportement anormal (aberrant) est survenu sur la variable de sortie de densité combiné à une perturbation sur la variable de commande du débit d'eau de dilution lors de l'essai de la phase 2 (essai avec l'eau de dilution) (voir Figure 3.10) Le 31 mars, lors de l'essai de la phase 3 (avec le tonnage), une perturbation est également survenue sur la variable de densité (voir Figure 3.11).

Figure 3.10 Essai phase 1<sup>23</sup>Figure 3.11 Essai phase 3<sup>24</sup>

Pour cette raison, l'ensemble des essais ont dû être repris durant la période du 27 au 29 avril 2010. La Figure 3.11 montre les difficultés également rencontrées lors de la reprise des essais pour la phase 1 lors de l'essai du 27 avril 2010. Principalement, on observe que les régimes stationnaires ne sont pas atteints pour des variables stratégiques telles que la densité. Des perturbations importantes sont survenues sur le réseau d'eau (pression à l'alimentation d'eau de procédé) forçant du même coup les boucles de régulation des variables manipulées à corriger les perturbations. Le 28 avril 2010, les essais des phases 3 et 4 ont été repris et le 29 avril, celui de la phase 1 (essai du 27 avril perturbé) a finalement aussi été repris. La Figure 3.12 présente la séquence des événements du 27 avril.

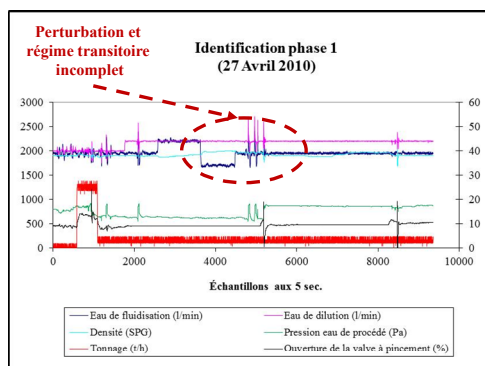


Figure 3.12 Essai phase 1

<sup>23</sup> La valeur graphique de la densité en SPG a été affectée d'un facteur 1000 pour des fins d'affichage, le tonnage est affiché en variation par rapport à un point d'opération de 188 t/h. L'essai a été effectué le 30 mars 2010.

<sup>24</sup> L'essai a été effectué le 31 mars 2010.

### 3.6.1 Identification dynamique

Les trois principales informations utilisées pour le plan d'expérience sont présentées au Tableau 3.2.

Tableau 3.2 Variables liées à l'identification

	<b>Temps de séjour</b>	<b>Temps de réponse</b>	<b>Période d'échantillonnage</b>
<b>Symbole</b>	$(T_R)$	$(T_S)$	$(T)$
<b>Description</b>	Rétention dans le système	Atteinte de la stabilité dans le système	Temps de discrétisation

Ces valeurs ont été calculées et formulées de la façon suivante : la géométrie du classificateur et l'écoulement de la matière permettent d'estimer le temps que les particules transigent dans le classificateur. Dans le cas de l'estimation du temps de séjour  $(T_R)$  pour la sousverse du classificateur, c'est le rapport entre le volume du classificateur et les volumes de la matière déplacée qui permettent d'estimer le temps que séjourne la matière. De cette valeur et pour un modèle dynamique de premier ordre, on en déduit approximativement le temps de stabilité  $T_S$  à  $4T_R$ . La période d'échantillonnage est donc calculée à partir de  $T_S/10$  et pouvant aller jusqu'à  $T_S/3$  tout en considérant la qualité de l'information recueillie. La Figure 3.13 présente le cheminement du calcul des variables.

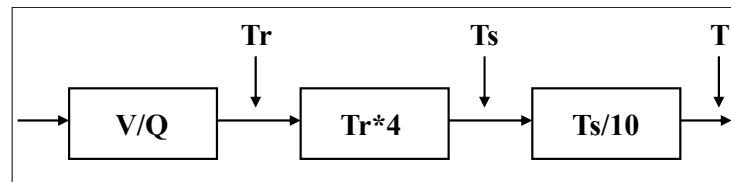


Figure 3.13 Représentation temporelle de la variable (t)

La campagne d'échantillonnage s'est déroulée sur une période de trois jours. L'objectif visait un environnement de production le plus stable possible et ce, tant au niveau du produit traité,

boulettes à basse silice (BBS), que du contexte opératoire pour garder les mêmes propriétés de façon générale. Nous signalons que durant cette phase d'expérimentation, nous avons constaté que la densité joue un rôle déterminant à titre de variable d'état et que, inopportunément, cette densité n'a pas été maintenue à valeur constante durant le plan d'expérience. D'autres essais permettront de revalider certains paramètres métallurgiques, mais cette fois-ci en régulant la variable de densité.

### 3.7 Algorithme d'identification des modèles

Dans un premier temps, les modèles dynamiques identifiés seront employés pour combler les besoins de commande. Par la suite, nous projetterons de les exploiter pour se procurer des informations sur les comportements des variables tels que les points d'inflexion des changements de signes du gain de procédé. Les méthodes courantes utilisées pour calibrer les modèles sont souvent basées sur l'utilisation des routines d'optimisation. La problématique habituelle est, que malgré les possibilités qu'offrent ces outils ainsi que les degrés de liberté qui sont disponibles (contraintes, nombre d'itérations, largeur de bande...), l'utilisateur a quand même très peu de contrôle sur la gouvernance de l'algorithme d'optimisation lui-même. Le résultat, et de manière assez fréquente, est qu'une perte de contrôle peut être générée sur le modèle, et ce, même si le critère en est réduit à une valeur optimale. Malgré une valeur optimale de ce critère, le modèle peut totalement diverger par rapport aux mesures recueillies (absence de robustesse).

Deux approches sont retenues pour la partie **modélisation** et **identification**. Pour chacune, un modèle linéaire récursif du premier ordre (1<sup>er</sup>) ou d'ordre 2 sera utilisé. La première approche consiste à calculer une solution algébrique du modèle paramétré et la seconde consiste à minimiser une fonction objective qui force le modèle à épouser certaines zones ciblées à des fins de spécifications temporelles et d'efforts de commande (approche empirique d'un modèle paramétré). À notre avis, il s'agit là d'une innovation majeure dans notre domaine industriel. Selon nos connaissances, nous sommes les premiers à introduire une telle approche pour l'identification des modèles dans ce genre de procédé. Dans les deux



approches, le critère repose sur la somme des erreurs quadratiques entre l'expérience (mesure) et le modèle (prédiction). Un point important à noter est que la solution algébrique linéaire du modèle ne peut s'obtenir que par l'utilisation de la récursivité sur les valeurs mesurées. Par conséquent, la deuxième approche doit également tenir compte de cette contrainte, c'est-à-dire, utiliser les valeurs mesurées pour l'opérateur de recul<sup>25</sup>.

### 3.7.1 Solution optimale d'un modèle paramétré

Comme mentionné, l'erreur est calculée à partir du résidu entre la valeur estimée par le modèle  $\hat{y}$  et la variable mesurée  $y_m$ . L'erreur entre la valeur modèle et la mesure est élevée au carré  $e^2$  et peut être représentée de la forme suivante :

$$e^2 = (y_m - \hat{y})^2 \quad (3.3)$$

Sous la forme matricielle, le critère de la somme des quadratiques de l'erreur devient :

$$J = E^T E = (Y_m - \hat{Y})^T (Y_m - \hat{Y}) \quad (3.4)$$

Un estimateur  $\hat{B}$  cohérent et non biaisé pour  $B$  peut être obtenu en minimisant la somme des erreurs quadratiques ( $\partial J / \partial B = 0$  et  $\partial^2 J / \partial B^2 < 0$ ), ce qui nous conduit à la formule bien connue du pseudo-inverse :

$$\hat{B} = (X^T X)^{-1} X^T Y_m \quad (3.5)$$

Cet estimateur est utilisé pour calibrer les paramètres des modèles statiques et dynamiques. Le détail est présenté à l'ANNEXE I.

---

<sup>25</sup> Par contre, la simulation des modèles utilisera les valeurs récursives où l'opérateur de recul ( $z^{-1}$ ) sera appliqué sur les valeurs modèles et ce, pour faciliter l'observation visuelle de la qualité des deux approches préconisées.

### 3.7.2 Solution empirique d'un modèle paramétré

Tel que discuté au paragraphe 3.7, cette approche favorise une spécification dans laquelle le modèle doit caractériser des zones spécifiques telles que les hautes fréquences (zone de départ) et les basses fréquences (le gain du système). Néanmoins, cette approche procure une plus grande flexibilité pour imposer aux modèles des contraintes déterminées dans des conditions spécifiques. La structure canonique d'un modèle dynamique discret du deuxième ordre est :

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} \quad (3.6)$$

avec  $y(z)$  comme variable de sortie et  $u(z)$  à titre de variable d'entrée.

Dans le cas d'un modèle discret, la valeur des constantes de temps et du gain de système n'apparaissent pas de façon native dans cette expression. Les valeurs du gain et des constantes de temps sont imbriqués dans les paramètres  $b_i \dots b_{i+n}$  et  $a_i \dots a_{i+n}$ . Le changement de domaine, de discret ( $z$ ) à continu ( $s$ ) permet donc une visualisation plus intuitive de ces paramètres. À partir des paramètres du modèle discret, les équivalences sous forme canonique sont :

$$G_p(s) = G_p(z) = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} \quad (3.7)$$

La conversion des paramètres discrets en leurs équivalents dans le domaine continu (ou vice versa) peut être effectuée d'une manière analytique explicite pour des systèmes d'ordre inférieur à 3. Pour des systèmes d'ordre supérieur, des solutions numériques peuvent être envisagées. Nous référons le lecteur à l'ANNEXE III pour quelques exemples de formule pour la conversion que nous avons développée explicitement pour notre cas.

### 3.7.3 Comparaison des méthodes de modélisation

La Figure 3.14 présente le résultat de la modélisation basée sur les deux approches discutées aux paragraphes précédents (3.7.1 et 3.7.2). La première méthode (*solution algébrique optimale*) favorise un compromis pour minimiser les écarts entre les valeurs mesurées et le modèle. Dans le deuxième cas (*solution empirique*), on impose au modèle une contrainte liée au régime transitoire (spécifications) et le critère est ajusté à une valeur minimum. De cette façon, l'identification est effectuée en fonction des objectifs liés à des spécifications utilisables dans les règles de commande.

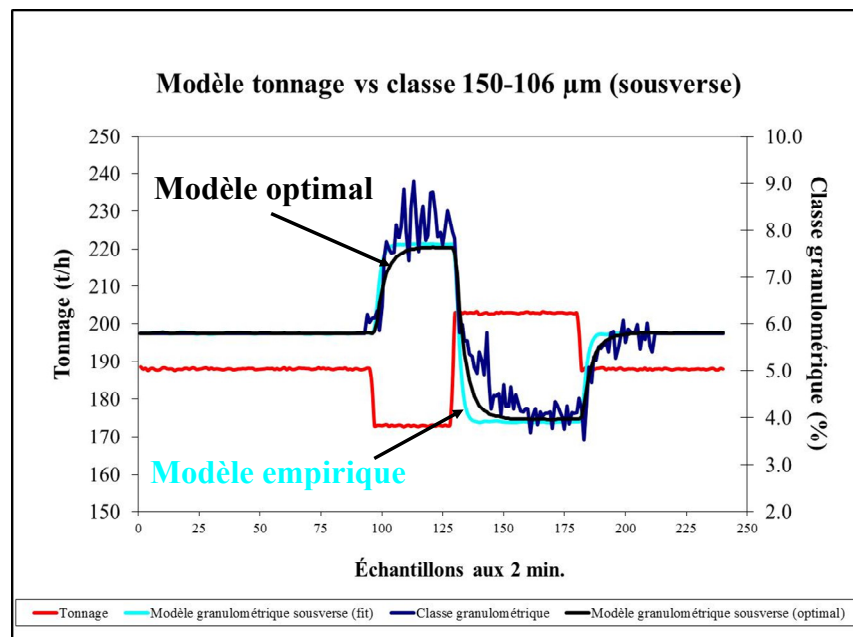


Figure 3.14 Comparaison des modèles dynamiques<sup>26</sup>

Tel que présenté au Tableau 3.3, on retrouve des valeurs de critères plus élevées pour la méthode empirique, mais cette dernière méthode permet de rencontrer les spécifications attendues.

<sup>26</sup> Cette figure présente la comparaison d'un modèle optimal (moindres carrés) et un modèle ajusté avec une spécification temporelle (ajustement des paramètres).

Tableau 3.3 Méthodes d'identification (optimale et empirique)<sup>27</sup>

Critères	Modélisation	Simulation
Modèle optimal (t/h)/%.	16.6	27.7
Modèle avec spécifications temporelles (Fit), (t/h)/%.	19.5	41.8

**Remarque :** Nous avons déjà mentionné que ce système, à cause de sa morphologie, se comportait comme un intégrateur puisque la densité et la hauteur du lit des sédiments changent de façon progressive tout au long de la dynamique opératoire. On parle en moyenne de six heures d'opération entre chaque vidange du système (*flush*). Dans une campagne d'identification et en raison de ce type de contraintes, la stabilité de certains points d'opération est difficile à obtenir. Par contre, après la première séquence de manipulation de la variable d'entrée du système dynamique et puisque le système est traité dans une dynamique linéaire, on réussit à faire ressortir la caractéristique dynamique propre du système. La Figure 3.15 présente une séquence d'identification dans laquelle le régime stationnaire n'était pas établi.

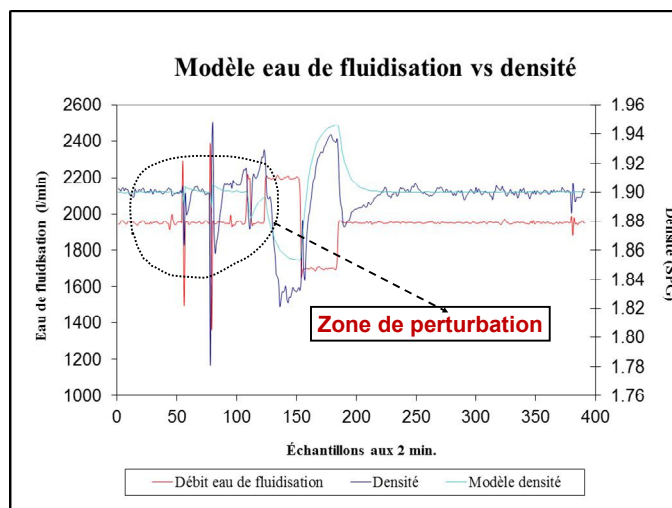


Figure 3.15 Identification avec opération instable

<sup>27</sup> Valeur finale du critère  $\sum_{i=1}^n e^2(i)$ , les unités sont en (t/h)/%.

### 3.8 Tableau récapitulatif des résultats d'identification

Dans cette section, l'objectif est de présenter les résultats compilés de la campagne d'échantillonnage et plus spécifiquement, des régimes dynamiques des variables stratégiques du réacteur. Les variables ciblées dans cet exercice sont la *densité*, le *taux de silice* et les *granulométries*. Une représentation graphique de l'ensemble de ces variables permettra de mieux visualiser la distribution des gains et des constantes de temps.

La section 3.8.1 présente les résultats de la campagne d'identification pour les variables de *densité* et du *taux de silice*. La section 3.8.2 présente également les résultats de la campagne d'identification pour les tranches granulométriques mais ne tient pas compte de la chimie des minéraux. Finalement, la section 3.8.3 présentera un parallèle entre les constantes de temps observés et les temps de séjour calculés à partir des régimes opérationnels et les valeurs calibrées des modèles.

#### 3.8.1 Résultats des identifications des variables de densité et de la silice

Dans un premier temps, le Tableau 3.4 présente les points d'opération et les échelles auxquelles les identifications ont été effectuées. Dans la section suivante, le Tableau 3.5 présente les résultats numériques des modèles pour la densité de la pulpe et le taux de silice (sousverse seulement). Figure 3.16 à Figure 3.19 présentent un exemple d'une partie de la campagne d'identification avec la variable manipulée de l'eau de fluidisation. Le détail de tous les graphiques est présenté à l'ANNEXE IV.

Tableau 3.4 Points d'opération et échelles des signaux de mesure du classificateur

Variables manipulées	# Boucle	Valeur minimale	Valeur maximale	Échelle	Points d'opération
Eau de fluidisation (l/min)	1B252	1700	2200	0 – 8300	1950
Eau de dilution (l/min)	1B251.2	0	1600	0 – 4700	800
Tonnage (t/h)	1B250 <sup>28</sup>	173	203	0 – 400	188
Valve à pincement (%)	1B253	37	43	0 – 100	40
<b>Variables de procédé</b>					
Densité (SPG)	1B253	1.8	2.0	1 – 4	1.9
Taux de silice (%)	----- <sup>29</sup>	0	100	0 – 100	1.39

Tableau 3.5 Variations de commande et de sortie pour l'évaluation des gains

Variables manipulées et de procédé	Variation U	Variation densité (SPG)	Variation taux de Silice (%)
Eau de fluidisation (l/min)	250	-0.05	-0.075
Eau de dilution (l/min)	800	-0.032	+0.0184
Tonnage (t/h)	15	+0.1695	-----
Valve à pincement (%)	3	-0.168	+0.036

Tableau 3.6 Gains et constantes de temps des modèles de densité et de la silice

Variables manipulées	Variables de procédé	Gains dimensionnels	Gains adimensionnels	T (min.)
Eau de fluidisation	Densité	-0.0002 SPG / (l/min)	-0.553	14.1
Eau de fluidisation	Taux de silice	-0.0003 % / (l/min)	-0.025	5.5
Eau de dilution	Densité	-0.00004 SPG / (l/min)	-0.063	6.7
Eau de dilution	Taux de silice	+0.000023 % / (l/min)	-0.0011	16.6
Tonnage	Densité	+0.0113 SPG / (t/h)	+1.507	14.0
Tonnage	Taux de silice	<i>Non disponible</i>	-----	-----
Valve à pincement	Densité	-0.056 SPG / (l/min)	-1.867	13.5
Valve à pincement	Taux de silice	+0.012 SPG / (l/min)	+0.012	4.7

<sup>28</sup> Deux convoyeurs peuvent être utilisés pour un total de 400 t/h.

<sup>29</sup> Cette variable ne possède pas de # de boucle. C'est une analyse de laboratoire.

Cette première table d'information (Tableau 3.6) montre que c'est la valve à pincement qui influence de façon significative les variables de *densité* et du *taux de silice*. Un élément important à remarquer pour la variable de *densité*, seul l'effet de la valve à pincement ne peut être corrélé avec les changements de densité dans une approche bilan. Deux ordres de grandeur des constantes de temps ressortent dans les résultats. La première valeur est de l'ordre de cinq (5) minutes et la deuxième valeur est de l'ordre de quinze (15) minutes. Quelques exemples d'identification sont présentés de la Figure 3.16 à la Figure 3.19.

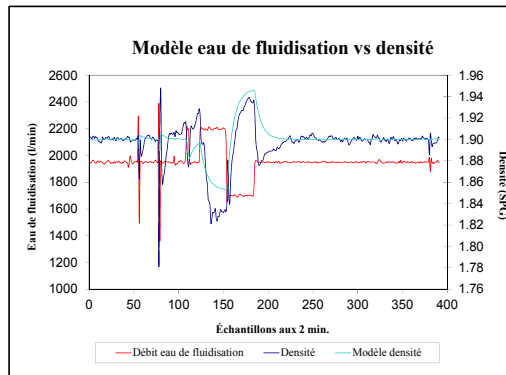


Figure 3.16 Modèle F-D<sup>30</sup>

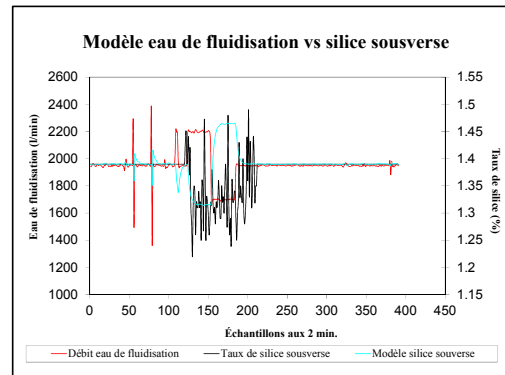


Figure 3.17 Modèle F-S<sub>U</sub><sup>31</sup>

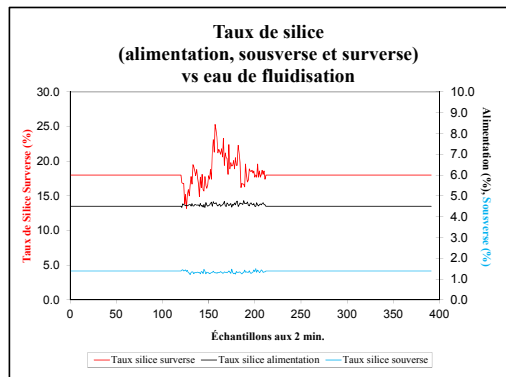


Figure 3.18 Modèle F-U-O<sup>32</sup>

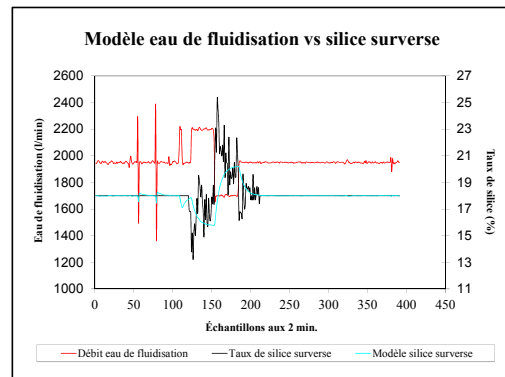


Figure 3.19 Modèle F-S<sub>0</sub><sup>33</sup>

<sup>30</sup> Modèle eau de fluidisation vs densité.

<sup>31</sup> Modèle eau de fluidisation vs taux de silice à la sousverse.

<sup>32</sup> Taux de silice à l'alimentation, à la sousverse et à la surverse.

<sup>33</sup> Modèle eau de fluidisation vs taux de silice à la surverse.

### 3.8.2 Résultats des identifications pour les tranches granulométriques

Le Tableau 3.7 au Tableau 3.10 présentent les valeurs des gains de procédé et des constantes de temps entre les variables manipulées et les huit tranches granulométriques. Les deux principaux flux sont représentés, soit la sousverse et la surverse. Les deux variables présentent des différences stratégiques fondamentales. L'intérêt d'observer la sousverse repose presque exclusivement sur la matière récupérée et ce flux comporte des avantages pour la capacité à instrumenter certaines variables. La surverse quant à elle nous renseigne sur la matière devant subir d'autres traitements (secondaire et tertiaire). Même si elle ne devient pas automatiquement un rejet, elle apporte néanmoins son lot de contraintes pour l'instrumenter et les frais monétaires qui lui sont associés.

Tableau 3.7 Gains des tranches granulométriques (sousverse)

Tranches granulométriques (µm) Fraction granulométriques (%)	-106µ	+106µ - 150µ	+150µ - 212µ	+212µ - 300µ	+300µ - 425µ	+425µ - 600µ	+600µ - 850µ	+850µ
Eau de fluidisation (l/min)	----	----	0.001	0.0035	0.0018	0.0028	0.0023	0.0015
Eau de dilution (l/min)	----	----	-0.001	-0.0008	----	----	----	----
Tonnage (t/h)	-0.032	-0.112	-0.032	0.048	0.058	0.048	0.048	0.018
Valve à pincement (%)	0.203	0.653	0.163	-0.277	-0.377	-0.217	-0.097	----

Tableau 3.8 Constantes de temps des tranches granulométriques (sousverse)

Tranches granulométriques (µm) Fraction granulométriques (%)	-106µ	+106µ - 150µ	+150µ - 212µ	+212µ - 300µ	+300µ - 425µ	+425µ - 600µ	+600µ - 850µ	+850µ
Eau de fluidisation (l/min)	----*	----	18.4	3.0	3.0	3.0	3.0	23.6
Eau de dilution (l/min)	----	----	10.0	10.0	----	----	----	----
Tonnage (t/h)	10.6	10.6	5.0	10.8	5.9	8.6	12.0	14.7
Valve à pincement (%)	12.1	6.5	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	----

\* Les constantes de temps sont en minutes.



Tableau 3.9 Gains des tranches granulométriques (surverse)

Tranches granulométriques ( $\mu\text{m}$ ) Fraction granulométriques (%)	-106 $\mu$	+106 $\mu$ - 150 $\mu$	+150 $\mu$ - 212 $\mu$	+212 $\mu$ - 300 $\mu$	+300 $\mu$ - 425 $\mu$	+425 $\mu$ - 600 $\mu$	+600 $\mu$ - 850 $\mu$	+850 $\mu$
Eau de fluidisation (l/min)	----	0.0145	0.0024	-0.0028	----	----	----	----
Eau de dilution (l/min)	----	- 0.0013	0.001	0.004	0.0003	----	----	----
Tonnage (t/h)	-0.59	0.413	0.176	0.013	0.012	----	----	----
Valve à pincement (%)	3.09	-2.14	-0.74	-0.13	-0.08	----	----	----

Tableau 3.10 Constantes de temps des tranches granulométriques (surverse)

Tranches granulométriques ( $\mu\text{m}$ ) Fraction granulométriques (%)	-106 $\mu$	+106 $\mu$ - 150 $\mu$	+150 $\mu$ - 212 $\mu$	+212 $\mu$ - 300 $\mu$	+300 $\mu$ - 425 $\mu$	+425 $\mu$ - 600 $\mu$	+600 $\mu$ - 850 $\mu$	+850 $\mu$
Eau de fluidisation (l/min)	----	4.03	13.9	9.1	----	----	----	----
Eau de dilution (l/min)	----	1.0	1.0	1.0	1.0	----	----	----
Tonnage (t/h)	5.9	7.7	10.1	4.0	4.0	----	----	----
Valve à pincement (%)	7.5	8.2	8.2	1.0	1.0	----	----	----

Dans certains cas, on remarque qu'aucun effet n'a été enregistré entre les variables d'entrées et de sorties. L'hypothèse la plus plausible est que le niveau de bruit généré par les manipulations dans les tamisages a rendu l'identification des régimes dynamiques impossible à détecter. Finalement, les teneurs de certaines variables (ex : minéraux) sont tellement faibles qu'il devient difficile d'interpréter certains comportements. Les unités des gains de système (avec dimension) sont exprimées en fonction des pourcentages de masses retenues et des unités d'ingénierie des variables manipulées. Les constantes de temps sont exprimées en minutes. La Figure 3.20 à la Figure 3.23 présentent un exemple des identifications effectuées pour les classes granulométriques de +850 à 300  $\mu\text{m}$ .

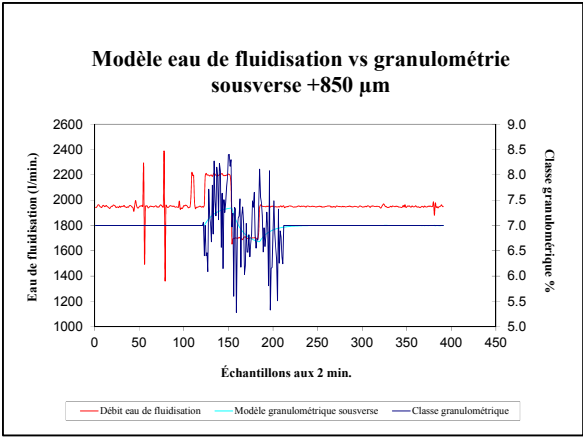


Figure 3.20    Modèle +850 µm<sup>34</sup>

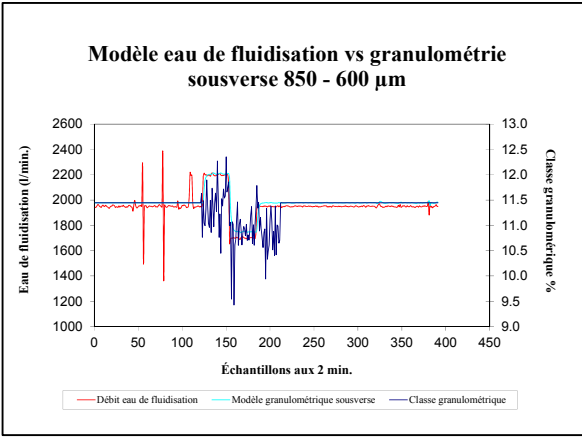


Figure 3.21    Modèle 850-600 µm<sup>35</sup>

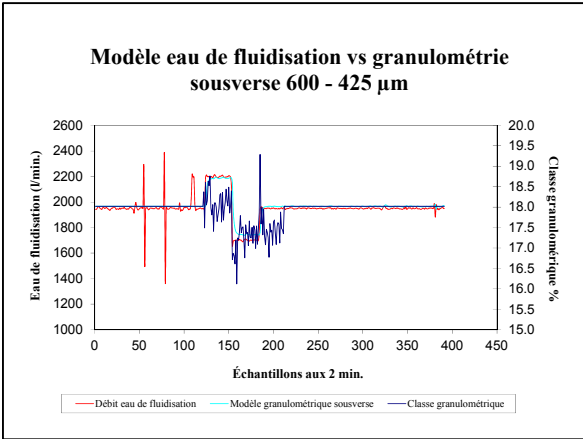


Figure 3.22    Modèle 600-425 µm<sup>36</sup>

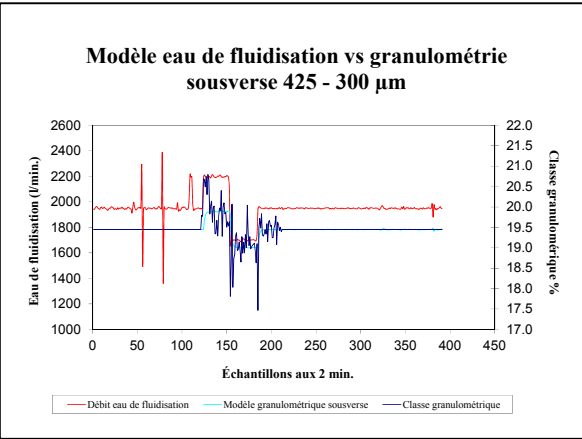


Figure 3.23    Modèle 425-300 µm<sup>37</sup>

### 3.8.3    Estimés des temps de séjour versus les constantes de temps mesurées

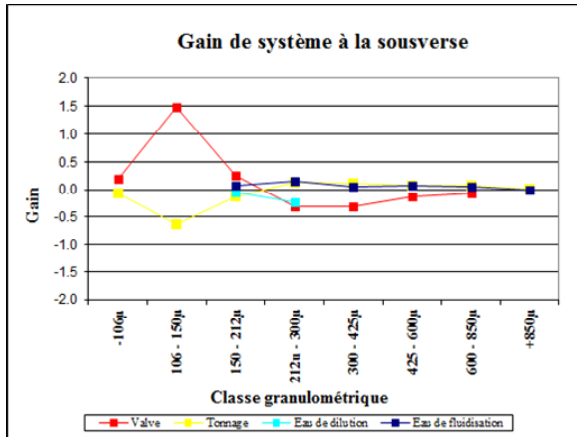
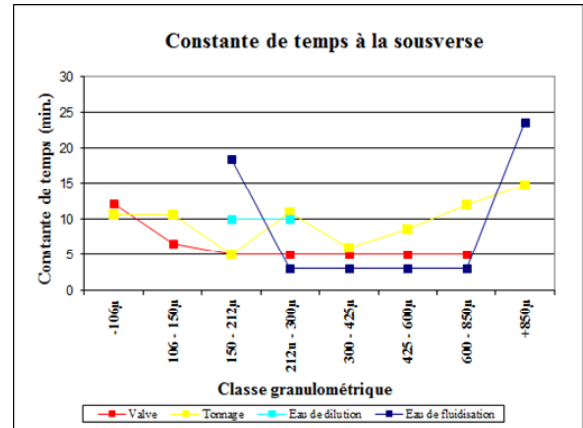
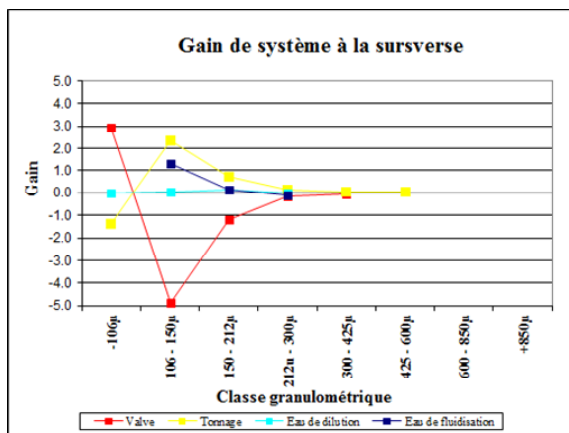
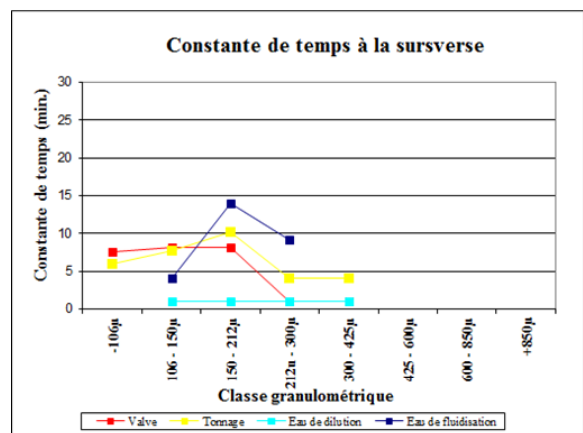
Les gains de système (normalisés) et les constantes de temps sont présentés aux Figure 3.24, Figure 3.25, Figure 3.26 et Figure 3.27.

<sup>34</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie +850 µm à la sousverse.

<sup>35</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 850-600 µm à la sousverse.

<sup>36</sup> Modèle eau de fluidisation versus la granulométrie 600-425 µm à la sousverse.

<sup>37</sup> Modèle eau de fluidisation versus la granulométrie 425-300 µm à la sousverse.

Figure 3.24 Compilation des gains (U)<sup>38</sup>Figure 3.25 Compilation des  $\tau_i(U)$ <sup>39</sup>Figure 3.26 Compilation des gains (O)<sup>40</sup>Figure 3.27 Compilation des  $\tau_i(O)$ <sup>41</sup>

Pour établir un parallèle entre les temps de séjour que l'on définit comme le temps qu'une particule met pour franchir le volume d'un classificateur de l'entrée vers la sortie et les constantes de temps observées, un calcul d'un temps de séjour fait appel à des variables telles que la géométrie du classificateur, les différentes densité et débit volumiques des flux. On

<sup>38</sup> Compilation des gains de systèmes pour les tranches granulométriques à la sousverse.

<sup>39</sup> Compilation des constantes de temps (min.) des systèmes pour les tranches granulométriques à la sousverse.

<sup>40</sup> Compilation des gains de systèmes pour les tranches granulométriques à la surverse.

<sup>41</sup> Compilation des constantes de temps (min.) des systèmes pour les tranches granulométriques à la surverse.

présente à la Figure 3.28 et au Tableau 3.11, le découpage d'un classificateur en trois volumes distincts.

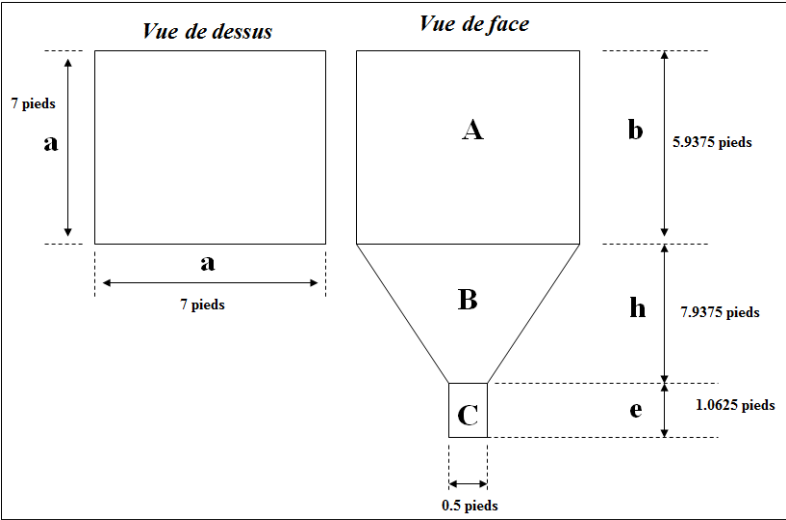


Figure 3.28    Modèle géométrique du classificateur

Tableau 3.11    Volumes découpés du classificateur

	Cube	Parallélépipède (tronqué)	Cylindre	Total
Section	A	B	C	-----
Volume (pi³)	290.94	94.53	0.2086	385.68
Volume (m³)	8.239	2.677	0.0059	10.921

Pour les fins de calcul, la densité du matériel à la sousverse est évaluée en fonction des particules classifiées et éliminées à la surverse. Le Tableau 3.12 présente les résultats des densités ainsi que les débits volumiques des trois flux.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, à notre avis, la variable de densité joue un rôle déterminant dans la dynamique de séparation du classificateur. Il est donc à prévoir que d'autres travaux porteront sur la modélisation par gravimétrie et que la variable de densité sera au cœur de cette recherche afin qu'elle soit mieux identifiée comme une variable stratégique.

Tableau 3.12 Densité et débits volumiques des 3 flux du classificateur

<b>Classificateur</b>	<b>Alimentation</b>	<b>Sousverse</b>	<b>Surverse</b>
Densité (SPG) <sup>42</sup>	5.064	5.146	4.661
Débit volumique du solide (m <sup>3</sup> /h)	38.7	31.2	7.6
Débit massique du solide (tn/h) <sup>43</sup>	196	160.7	35.3
Débit volumique d'eau (m <sup>3</sup> /h)	318.6	----	----
Débits volumique total (m <sup>3</sup> /h)	357.3	----	----

En référence avec le Tableau 3.11 et le Tableau 3.12, les temps de séjour calculés avoisinent les 17 minutes si on considère le volume solide occupé par le flux d'alimentation (10.92 m<sup>3</sup>/38.7 m<sup>3</sup>/h) et 21 minutes (10.92 m<sup>3</sup>/31.2 m<sup>3</sup>/h) pour la sousverse. Cette information, bien qu'elle puisse nous informer sur un ordre de grandeur de la dynamique des temps en jeu, elle demeure quand même incomplète si elle n'est pas réconciliée avec d'autres variables telles que les fractions granulométriques, les tonnages... Ce point technique fera d'ailleurs état d'une recommandation pour établir les bases de calcul entre les constantes de temps mesurées et les temps de séjour calculés.

On ne peut donc pas tirer de conclusions sur cette information mais on peut néanmoins observer à partir des Figure 3.24 et Figure 3.25 de la sousverse qu'un regroupement de tranches granulométriques présente des comportements similaires.

### 3.9 Observation et discussion

La campagne d'échantillonnage a permis dans un premier temps de quantifier des ordres de grandeur des comportements dynamiques des variables observées. Ces données, même si elles sont issues d'une campagne effectuée de façon manuelle et comportent leurs imperfections (niveaux de bruit, biais sur des mesures...), permettent néanmoins d'observer

---

<sup>42</sup> SPG = Specific gravity.

<sup>43</sup> tn = Tonnes naturelles.

des ordres de grandeur sur certaines variables stratégiques telles que des plages de fraction granulométrique et la densité. On ne peut, par contre, tirer de conclusions précises sur cette information mais on peut néanmoins observer, à partir des Figure 3.24 et Figure 3.25 de la sousverse, qu'un regroupement de tranches granulométriques présente des comportements similaires autant du point de vue des gains statiques que des constantes de temps.

## CHAPITRE 4

### TRAITEMENT ET ANALYSE DES DONNÉES

#### 4.1 Introduction

Dans le Chapitre 3, on a présenté la structure physique du système en mettant l'accent sur la description des mécanismes de fonctionnement du réacteur et de son comportement dynamique lorsqu'il est soumis à de fortes perturbations en utilisant les variables manipulées. Le Chapitre 4 présente l'étape suivante, celle du traitement des données. La Figure 4.1 présente cette deuxième étape du processus analyse et du traitement des données.

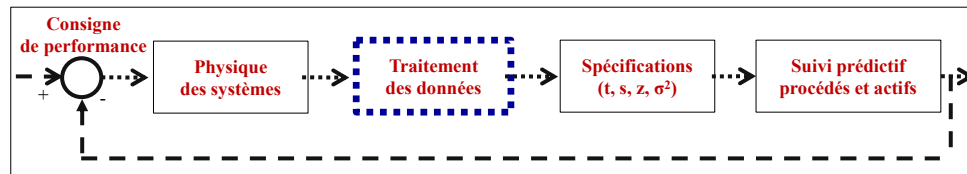


Figure 4.1 Processus d'analyse du système (traitement des données)

Lors de la campagne d'échantillonnage du mois de mai 2010, des échantillons ont été prélevés sur les trois flux de matière du classificateur hydraulique soit, à l'alimentation, à la sousverse et à la surverse. L'objectif visé dans cette campagne était de recueillir une quantité suffisante d'information sur le système pour une bonne compréhension des mécanismes de classification et ce, en fonction de différents paramètres tels que la chimie du concentré et du mode opératoire du système. Un intérêt particulier était porté sur la compréhension des régimes dynamiques des certaines variables stratégiques (ex. les classes granulométriques, la densité de la pulpe et la granulochimie). Cette approche est jugée comme essentielle pour la sélection des instruments dans le but de revoir et d'améliorer l'automatisation du système.

Dans le processus analytique, les analyses des minéraux, des oxydes et des granulométries ont permis de mieux identifier l'évolution de certaines variables telles que la récupération

poids, la concentration de silice et de fer dans le classificateur. Cette avenue nous apparaît d'autant plus intéressante qu'elle ouvre la porte au développement des techniques d'inférence des variables stratégiques, et ce, basées sur d'autres techniques bien connues telles que la réconciliation des données (Makni *et al.*, 2000).

## **4.2 Campagne d'échantillonnage et analyse des données**

Sept campagnes d'échantillonnage ont été menées sur le classificateur durant la période du 16 novembre 2009 au 21 décembre 2009 à l'usine de bouletage. Ces campagnes ont permis de couvrir un mode opératoire assez large pour être statistiquement représentatif de l'ensemble de nos opérations. Ces données, une fois analysées, ont permis de mieux comprendre le comportement du classificateur en fonction des deux éléments distincts soit, (i) la *chimie du concentré à l'alimentation* et, (ii) le *mode opératoire* (modus operandi). L'information qui découle du traitement des données renferme donc une richesse substantielle du point de vue statistique et favorise donc l'amélioration de la compréhension des différents phénomènes intrinsèques du classificateur. Les techniques d'observation et de réconciliation des données sont donc employées pour traiter les mesures comme telles ainsi que leurs incertitudes. Des modèles phénoménologiques et empiriques sont également considérés dans l'élaboration d'un bilan de matière.

### **4.2.1 Développement des méthodes de réconciliation des données**

De façon générale, lors des campagnes d'échantillonnage, beaucoup d'informations deviennent disponibles mais parfois elles sont peu utilisées. L'objectif visé dans cette section est donc d'utiliser l'ensemble des informations disponibles et de les réconcilier en développant deux niveaux d'observation. Cette approche permet à la fois de produire un bilan de matière du classificateur et de se doter d'une méthode de diagnostic progressive qui permet de détecter la provenance des problématiques. Le Tableau 4.1 présente la liste des variables utilisées pour le développement de la méthode.



Tableau 4.1 Informations échantillonnées du classificateur en 2009

Variables	Description
$Fe_2O_3 \dots TiO_2$	Mesure des teneurs en oxyde provenant du laboratoire de l'usine
$W_F, W_U, W_O$	Débit massique des trois flux (alimentation, sousverse, surverse)
$g_z$	Fraction granulométrique (mesure par tamisage)
$\sigma_{m,i,z}$	Incertitudes des mesures

À la section 4.3 sera présenté dans le détail le développement des deux niveaux d'observation. De manière simplifiée, le premier niveau d'observation permet d'établir, pour chacune des classes granulométriques, la composition minérale de chacune de ces classes et ce, pour chacun des flux de matière. Cette étape est très importante compte tenu que la reconstitution de ces variables (les fractions granulominérales) est réalisée à partir d'une méthode d'inférence et elle s'appuie sur un bilan stœchiométrique. Par ailleurs, la méthode de Monte-Carlo (Law, 2000) est employée pour générer un jeu de données qui permet d'observer le comportement statistique du système. Une fois l'ensemble des fractions granulominérales inférées, une deuxième étape d'observation devient possible compte tenu du niveau de cohérence des données qui pourront l'alimenter.

### 4.3 Étude de cas pour le développement d'un observateur d'un flux de matière

La technique d'observation est développée à partir d'une problématique de conservation de la matière dans laquelle trois flux de masse sont impliqués. Bien que le cas soit simple, cet observateur montre comment les valeurs mesurées et leurs variances ainsi que la contrainte lambda ont un impact sur l'ensemble des variables. Cette contrainte  $\hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0$ , est représentée par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  pour la stationnarité. La Figure 4.2 présente l'étude de cas basée sur un système d'écoulement qui comporte trois flux de matière.

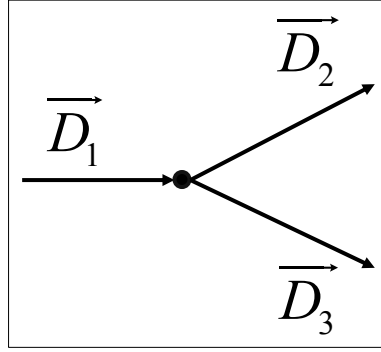


Figure 4.2 Flux de matière

#### 4.3.1 Développement du critère d'observation

Le développement du critère d'observation est basé sur la minimisation des erreurs quadratiques de chacune des variables mesurées et des variables estimées. De plus, pour des raisons de stationnarité du critère, on inclut une contrainte de conservation à travers le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . Tel que mentionné au paragraphe 4.3, l'objectif recherché dans cette section du chapitre est de démontrer quels rôles jouent les variances, les mesures et

la contrainte  $\lambda$ . Le critère  $J = \sum_{i=1}^n \frac{(D_i^m - \hat{D}_i)^2}{\sigma_i^2}$  avec la contrainte  $\hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0$  nous donnent le lagrangien  $L$  :

$$L = \frac{(D_1^m - \hat{D}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(D_2^m - \hat{D}_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(D_3^m - \hat{D}_3)^2}{\sigma_3^2} + 2\lambda(\hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3) \quad (4.1)$$

La minimisation et la stationnarité du Lagrangien nous donnent un ensemble d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{D}_{i \dots i+n} \dots \partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \hat{D}_i} &= \frac{-2(D_i^m - \hat{D}_i)}{\sigma_i^2} + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \hat{D}_1 - \hat{D}_{i+1} - \hat{D}_{i+2} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les équations des estimés nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \hat{D}_1} &= \frac{-2(D_1^m - \hat{D}_1)}{\sigma_1^2} + 2\lambda = 0 \Rightarrow \hat{D}_1 = D_1^m - \sigma_1^2 \lambda \\
 \frac{\partial L}{\partial \hat{D}_2} &= \frac{-2(D_2^m - \hat{D}_2)}{\sigma_2^2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \hat{D}_2 = D_2^m + \sigma_2^2 \lambda \\
 \frac{\partial L}{\partial \hat{D}_3} &= \frac{-2(D_3^m - \hat{D}_3)}{\sigma_3^2} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \hat{D}_3 = D_3^m + \sigma_3^2 \lambda \\
 \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

et on déduit :

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_1 &= D_1^m - \sigma_1^2 \lambda \\
 \hat{D}_2 &= D_2^m + \sigma_2^2 \lambda \\
 \hat{D}_3 &= D_3^m + \sigma_3^2 \lambda \\
 \hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 &= 0 \\
 D_1^m - \sigma_1^2 \lambda - D_2^m - \sigma_2^2 \lambda - D_3^m - \sigma_3^2 \lambda &= 0
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

La résolution du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  nous donne :

$$\lambda = \frac{D_1^m - D_2^m - D_3^m}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \tag{4.5}$$

En guise de conclusion, la contrainte  $\lambda$  est liée aux résidus des valeurs mesurées (Eq. (4.5)) et pondérée par la somme de leurs variances. Chacun des estimés  $\hat{D}_i$  tient donc compte de cette particularité. La formulation de  $\hat{D}_1$  est présentée à l'équation (Eq. (4.6)).

$$\hat{D}_1 = D_1^m - \sigma_1^2 \frac{(D_1^m - D_2^m - D_3^m)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \tag{4.6}$$

#### 4.4 Développement du premier observateur

Dans cette section, les différentes informations qui ont servi à la conception des observateurs seront détaillées pour développer l'approche progressive préconisée à la section 4.5.1. À partir des échantillons analysés par fluorescence-X et pesés en laboratoire, une série d'équations basées sur les rapports "oxydes/minéraux" en fonction d'un vecteur-solution des minéraux est posée comme modèle stœchiométrique. Le Tableau 4.2 présente la structure stœchiométrique des oxydes mesurés et contenus dans les minéraux.

Tableau 4.2 Stœchiométrie des minéraux

Minéraux	Stœchiométrie
Hématite (Hematite)	$(Fe_2O_3)$
Quartz (Quartz)	$(SiO_2)$
Mica (Feldspars)	$(KAl_2)(AlSi_3O_{10})(OH)_2$
Ilménite (Ilménite)	$(FeO \cdot TiO_2)$
Grenat (Garnet)	$(Ca_{0.1}Mg_{0.15}Mn_{0.1}Fe_{0.65})_3(Al_{0.9}Fe_{0.1})_2(SiO_4)_3$

On considère également que les minéraux présentés au tableau précédent constituent presque 100 % de la masse traitée dans le bilan matière. On pose également l'hypothèse suivante : l'erreur associée à la somme des masses traitées dans le bilan est du même ordre de grandeur que les erreurs enregistrées sur les mesures des variables telles que les mesures d'oxyde par les appareils à fluorescence-x. Ces erreurs sont prises en considération lors de la réconciliation de données.

Les oxydes et les masses molaires qui seront utilisés pour établir les rapports stœchiométriques sont présentés au Tableau 4.3 et au Tableau 4.4.

Tableau 4.3 Oxydes présents dans les minéraux

Fer	Silice	Titane	Aluminium	Potassium	Calcium	Magnésium
$(Fe_2O_3)$	$(SiO_2)$	$(TiO_2)$	$(Al_2O_3)$	$(K_2O)$	$(CaO)$	$(MgO)$

Tableau 4.4 Valeurs des masses molaires (g/mol)

Fe	O	Si	K	Al	H	Ti	Ca	Mg	Mn
55.84	15.99	28.08	39.09	26.98	1.007	47.86	40.07	24.30	54.93

La matrice stœchiométrique des rapports des oxydes versus les minéraux est présentée à l'équation (4.7).

$$\begin{array}{c} \text{Matrice Stœchiométrique} \\ \begin{array}{ccccc} \text{Fe} & \text{Fe} & \text{Fe} & \text{Fe} & \text{Fe} \\ \text{Fe}_2\text{O}_3 & \text{Quartz} & \text{Mica} & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \\ \text{SiO}_2 & \text{SiO}_2 & \text{SiO}_2 & \text{SiO}_2 & \text{SiO}_2 \\ \text{Hématite} & \text{SiO}_2 & \text{Mica} & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \\ \text{TiO}_2 & \text{TiO}_2 & \text{TiO}_2 & \text{TiO}_2 & \text{TiO}_2 \\ \text{Hématite} & \text{Quartz} & \text{TiO}_2 & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \\ \text{Al}_2\text{O}_3 & \text{Al}_2\text{O}_3 & \text{Al}_2\text{O}_3 & \text{Al}_2\text{O}_3 & \text{Al}_2\text{O}_3 \\ \text{Hématite} & \text{Quartz} & \text{Mica} & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \\ \text{K}_2\text{O} & \text{K}_2\text{O} & \text{K}_2\text{O} & \text{K}_2\text{O} & \text{K}_2\text{O} \\ \text{Hématite} & \text{Quartz} & \text{Mica} & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \\ \text{CaO} & \text{CaO} & \text{CaO} & \text{CaO} & \text{CaO} \\ \text{Hématite} & \text{Quartz} & \text{Mica} & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \\ \text{MgO} & \text{MgO} & \text{MgO} & \text{MgO} & \text{MgO} \\ \text{Hématite} & \text{Quartz} & \text{Mica} & \text{Ilménite} & \text{Grenat} \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Vecteur solution "X" des minéraux} \\ \begin{array}{c} \text{(Hématite)} \\ \text{Fe}_2\text{O}_3 \\ \text{(Quartz)} \\ \text{SiO}_2 \\ \text{(Mica)} \\ \text{(KAl}_2\text{)(AlSi}_3\text{O}_{10}\text{)(OH)}_2 \\ \text{(Ilménite)} \\ \text{FeO} \cdot \text{TiO}_2 \\ \text{(Grenat)} \\ \text{(Ca}_{0.1}\text{Mg}_{0.15}\text{Mn}_{0.1}\text{Fe}_{0.65}\text{)}_3 \text{(Al}_{0.9}\text{Fe}_{0.1}\text{)}_2 \text{(SiO}_4\text{)}_3 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Mesures d'oxydes} \\ \begin{array}{c} \text{Fe}_{\text{tot}} \\ \text{SiO}_2 \\ \text{TiO}_2 \\ \text{Al}_2\text{O}_3 \\ \text{K}_2\text{O} \\ \text{CaO} \\ \text{MgO} \end{array} \end{array} \quad (4.7)$$

On peut écrire le système précédent sous une forme matricielle plus commode et qui sera utilisée dans le critère d'observation. Puisque la matrice  $\alpha$  est constante dans tout le système,  $\alpha_{i,z} \Rightarrow \alpha, \forall i, z$  où  $i$  est la classe granulométrique et  $z$ , le flux de matière.

Tel que mentionné dans la section 4.2.1, le traitement et les réconciliations des données sont effectués dans un premier temps pour inférer les fractions granulominérales et s'assurer que les données utilisées dans le deuxième stage d'observation auront passé cette première étape de validation.

Dans un concept d'innovation, cette approche permettra donc de poser des diagnostics dès les premières étapes du processus de la réconciliation globale. Également, elle influencera certaines hypothèses liées à la façon dont ce type de système doit être contrôlé. De plus, elle aura un impact sur des nouvelles orientations quant au choix des instruments de mesure que nous considérons devoir utiliser à la suite de ce mandat de recherche. Cette réflexion converge donc vers une approche plus simple et innovatrice de l'analyse et du traitement de l'information.

#### 4.4.1 Calculs des rapports molaires

La mesure des oxydes par fluorescence-x permet de calculer les proportions des oxydes dans les minéraux. En référence au Tableau 4.3, on observe que les oxydes n'apparaissent pas directement sous leur forme implicite telle que la silice  $SiO_2$  contenue dans le Mica  $(KAl_2)(AlSi_3O_{10})(OH)_2$ . Le rapport des masses molaires "oxydes/minéraux" doit donc être affecté d'un facteur  $SiO_2/Si$  pour générer le minéral  $SiO_2$ .

L'appareil par fluorescence-x utilise ce facteur lorsqu'elle estime la valeur de la mesure. Le Tableau 4.5 présente la structure des rapports des masses "Oxydes / Minéraux" retenus et le Tableau 4.6 présente les résultats des calculs de ces rapports de masse molaire. Le détail des rapports stœchiométriques est présenté à l'ANNEXE V.

Tableau 4.5 Rapport des masses moléculaires retenues

	Hématite	Quartz	Mica	Ilménite	Grenat
$(Fe_{tot})$	$\frac{Fe}{Hématite}$	...	...	$\frac{Fe}{Ilménite}$	$\frac{Fe}{Grenat}$
$(SiO_2)$	...	$\frac{SiO_2}{Quartz}$	$\frac{SiO_2}{Mica}$	...	$\frac{SiO_2}{Grenat}$
$(TiO_2)$	...	...	...	$\frac{TiO_2}{Ilménite}$	...
$(Al_2O_3)$	...	...	$\frac{Al_2O_3}{Mica}$	...	$\frac{Al_2O_3}{Grenat}$
$(K_2O)$	...	...	$\frac{K_2O}{Mica}$	...	...
$(CaO)$	...	...	...	...	$\frac{CaO}{Grenat}$
$(MgO)$	...	...	...	...	$\frac{MgO}{Grenat}$

Tableau 4.6 Résultats du Tableau 4.5

	Hématite	Quartz	Mica	Ilménite	Grenat
$(Fe_{tot})$	0.69943	-	-	0.36808	0.24791
$(SiO_2)$	-	1.0	0.45255	-	0.37217
$(TiO_2)$	-	-	-	0.52647	-
$(Al_2O_3)$	-	-	0.38398	-	0.18947
$(K_2O)$	-	-	0.11825	-	-
$(CaO)$	-	-	-	-	0.03474
$(MgO)$	-	-	-	-	0.03745

#### 4.4.2 Estimation et réconciliation des teneurs minérales

Le problème peut être posé à partir de deux approches différentes. Les mesures d'oxyde peuvent être utilisées directement pour calculer de façon algébrique les teneurs minérales de de l'ilménite, du mica et du grenat. Ce système est constitué de quatre équations avec deux

inconnus. Ce système est donc surdimensionné. Par contre, dans cette approche, les techniques d'observation ne sont pas utilisées à leur juste valeur et n'exploitent pas cet aspect de la redondance de l'information et l'impact statistique qu'elle peut générer.

La deuxième approche permet de résoudre le système par une méthode de réconciliation des données et d'observation qui tient compte du système d'équations stœchiométriques et des incertitudes des mesures. Au nombre de sept équations et cinq inconnus, ce système présente une option intéressante pour sa résolution en raison de la redondance des mesures et de sa structure linéaire.

#### 4.5 Conception du premier observateur

Tel que présenté à la section 4.4, l'objectif dans la conception du premier (1<sup>er</sup>) observateur vise à estimer les fractions granulométriques  $\hat{X}_{m,z}$  (*hématite, quartz, mica, ilménite et grenat*) et de réconcilier les mesures d'oxyde (voir Tableau 4.3). Ces informations sont calculées à partir de chacune des classes granulométriques  $i$  et des fractions retenues  $\hat{g}_z$ . Une fraction granulométrique représente le rapport de la masse retenue dans une classe granulométrique par rapport à la masse totale du flux (Eq. (4.8)).

$$\hat{g}_z = \frac{\hat{M}_i}{\hat{M}_z} \quad (4.8)$$

Principalement, un observateur est constitué d'un système d'équations découlant d'un bilan, de modèles et de mesures. On peut définir un critère de robustesse d'un observateur qui permet d'évaluer à partir des informations redondantes, comment ce système de réconciliation des données peut corriger l'information dans des marges de distorsion assez élevée (Gosselin, 1998).

Un observateur de redondance de 0 % possède un nombre d'inconnues égal au nombre d'informations disponibles (équations & mesures). Lorsque toutes les inconnues peuvent être



solutionnées et sont également mesurées, le système est considéré avec une redondance de 100 %. Dans le cas présent, le premier observateur possède une redondance de 33.3 % (voir ANNEXE V). Il est également possible que la même variable puisse être mesurée de plus d'une façon. Le degré de redondance peut alors dépasser la valeur de 100 %.

Cette section définit les différentes étapes de la conception du critère. Les différentes variables et les contraintes y sont présentées. On introduit également la notion de stationnarité du lagrangien dans l'utilisation des contraintes.

Les variables des teneurs minérales (hématite, quartz, mica, ilménite, grenat) sont solutionnées en fonction des mesures d'oxydes (provenant des analyses de laboratoire). La réconciliation des estimés et des mesures s'effectue pour chaque classe granulométrique  $i$  et pour chaque flux de matière  $z$ . Le système d'équations basé sur la stœchiométrie des minéraux et des oxydes est présenté à l'équation (Eq. (4.9)).

$$\alpha \hat{X}_{i,z} = \hat{\beta}_{i,z} \quad (4.9)$$

Où  $\alpha$  est la matrice des coefficients (rapports oxydes/minéraux),  $\hat{X}_{i,z}$  est le vecteur-solution des teneurs minérales et  $\hat{\beta}_{i,z}$ , les mesures d'oxydes. Cet observateur inclut également une contrainte  $\lambda_{X_{i,z}}$  de conservation des teneurs minérales dans chacune des classes granulométriques  $i$  pour totaliser 100 % de la matière. Les estimés  $\hat{X}_{i,z}$  qui en résultent sont simulés à partir de plusieurs essais avec la méthode de Monte-Carlo (Law, 2000) et ce, afin de générer une population statistique valable et qui répond à une distribution de la loi normale  $X_{i,z}^{Pm}$ . On signale que dans le deuxième observateur, cette variable est traitée comme une pseudo-mesure puisqu'elle est accompagnée de sa valeur moyenne ainsi que sa variance. La formulation utilisée pour générer la population statistique d'une variable  $K$  des fractions granulominérales est présentée à l'équation (Eq. (4.10)).

$$K = \bar{K}_{m,i,z} + \sigma_K \sqrt{-2Ln(U_1)} * \sin(2\pi U_2) \quad (4.10)$$

Pour chacune des classes granulométriques, le système comporte donc sept équations et cinq inconnues. Tel que mentionné, chaque observateur produit un nombre d'observations  $K$  pour obtenir des propriétés statistiques pour chaque teneur minérale et mesure d'oxyde.

Le développement du critère a donc pour objectif de solutionner les estimés des fractions granulominérales et des teneurs en oxyde en minimisant les écarts entre les estimés et les mesures par la pondération des erreurs qui leurs sont conférés. Le développement du critère d'observation ainsi que la description des matrices et leurs dimensions sont présentés en détail à l'ANNEXE V. Le Tableau 4.7 présente les informations qui sont traitées dans l'observateur et la Figure 4.3 présente l'algorithme de calcul et de programmation de l'observateur.

Tableau 4.7 Information contenue dans le 1<sup>er</sup> observateur

Variables	Description
$\alpha$	Matrice stœchiométrique
$\hat{X}_{i,z}$	Estimé des fractions granulominérales
$\hat{\beta}_{i,z}$	Estimé des teneurs en oxyde
$\beta_{i,z}^m$	Mesure des teneurs en oxyde
$V_{\beta}$	Matrice de variance - covariance des teneurs en oxyde
$\hat{X}_{i,z}^{Pm}$	Mesure inférée des fractions granulominérales
$\lambda_{X_{i,z}}$	Multiplicateur de Lagrange

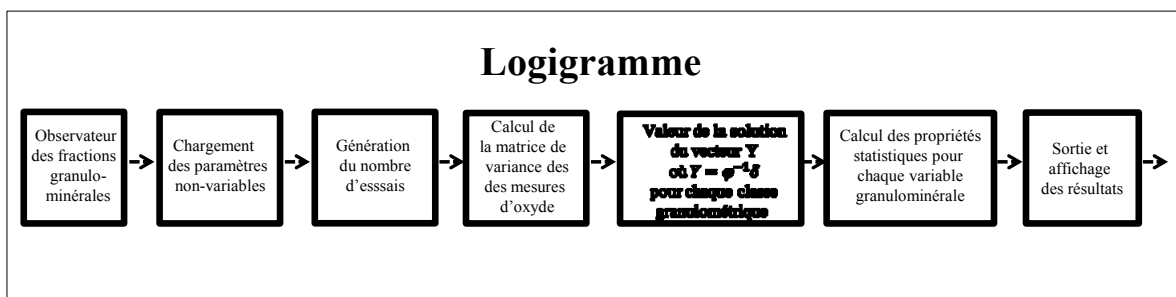


Figure 4.3 Logigramme du premier observateur

#### 4.5.1 Développement du critère 1<sup>er</sup> observateur

Le critère est développé pour solutionner les cinq inconnues liées aux fractions granulominérales pour chacune des huit classes granulométriques et des trois flux de matière. Compte tenu que le résultat des mesures d'oxyde a été évalué sur une base de pourcentage (%) par classe granulométrique, la totalisation des fractions granulominérales est donc également effectuée sur cette même base de calcul, en pourcentage<sup>44</sup>.

La structure du critère permet donc de minimiser l'écart entre l'estimation de la variable des teneurs en oxyde  $\hat{\beta}_{i,z}$  et l'inférence de cette même variable par l'entremise du produit de la matrice stœchiométrique  $\alpha$  et la pseudo-mesure  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}$ . Puisque les mesures des teneurs en oxyde  $\beta_{i,z}^m$  sont disponibles, on considère également la minimisation des écarts entre  $\hat{\beta}_{i,z}$  et ses mesures  $\beta_{i,z}^m$ .

Pour des fins de programmation et dans le but de détecter des erreurs numériques lors de l'exécution du programme et puisque la totalisation des minéraux est indépendante pour chacune des classes granulométriques, le critère est donc formulé pour la résolution des minéraux dans chaque classe granulométrique. Le résultat du critère  $J_1$  est présenté à l'équation (Eq. (4.11)).

$$J_1 = \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right) \quad (4.11)$$

Pour s'assurer de l'équilibre des fractions granulominérales, et tel que mentionné au paragraphe précédent, une contrainte liée à ces fractions granulominérales doit être ajoutée pour balancer chacune des classes granulométrique. Une autre contrainte de conservation

---

<sup>44</sup> Le détail du développement de l'observateur, la description et la dimension des matrices sont présentés à l'ANNEXE V.

reliée à la teneur des oxydes aurait pu être ajoutée. Or, dans cet exercice, il a été choisi de ne pas aborder cette problématique compte tenu des difficultés qu'elle représente (conversion des oxydes en hydrates...) et de l'incertitude sur le poids statistique de l'information supplémentaire qu'elle aurait pu apporter. Cette facette du problème fera d'ailleurs état d'une recommandation (section réservée aux recommandations). Le critère est donc formulé sous la contrainte suivante (Eq. (4.12)).

$$S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 = 0 \quad (4.12)$$

L'addition de cette contrainte de conservation par l'entremise d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{X_{i,z}}$  est formulée comme suit pour l'ensemble des huit classes et des trois flux de matière :

$$2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (4.13)$$

Le nouveau critère qui tient compte des estimés, des mesures et de la conservation de la matière est renommé  $L_1$ , donc :

$$L_1 = J_1 + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (4.14)$$

Finalement le critère  $L_1$  devient :

$$\begin{aligned} L_1 = & \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right) \\ & + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Après la décomposition des éléments transposés et de leurs produits et une fois simplifiés, on obtient :

$$\begin{aligned}
L_1 = & \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \hat{\beta}_{i,z}^T \hat{\beta}_{i,z} \\
& + \beta_{i,z}^{m^T} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m - \beta_{i,z}^{m^T} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} \\
& + 2\lambda_{X_{i,z}}^T (S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Le critère est minimisé et la solution est obtenue par les conditions de stationnarité du Lagrangien. En annulant les dérivées par rapport à  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}, \hat{\beta}_{i,z}, \lambda_{X_{i,z}}$  on crée un système dont le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations dont la solution peut être développée pour les variables  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}, \hat{\beta}_{i,z}$ . La variable  $\lambda_{X_{i,z}}$  est également solutionnée mais son résultat n'est pas utilisé de façon explicite. L'équation (Eq. (4.17)) présente les conditions de stationnarité.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} &= 0 \\
\frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} &= 0 \\
\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Après l'application de la minimisation du critère par rapport à  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}$  et une fois simplifiée, on obtient :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} = 2\alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 2\alpha^T \hat{\beta}_{i,z} + 2S_X^T \lambda_{X_{i,z}} \tag{4.18}$$

D'une manière analogue, la minimisation du critère par rapport à  $\hat{\beta}_{i,z}$  et une fois simplifiée, nous donne :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} = -2\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + 2\hat{\beta}_{i,z} - 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} = -2\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + 2(I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) \hat{\beta}_{i,z} - 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m \tag{4.19}$$

et finalement, la minimisation du critère par rapport à  $\lambda_{X_{i,z}}$  nous donne :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} = 2(S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) \quad (4.20)$$

Donc, pour résumer, nous avons un ensemble de trois équations matricielles. Ce système, une fois simplifié, peut être écrit sous les formes suivantes (Eq. (4.21)) :

$$\begin{bmatrix} \alpha^T \alpha & -\alpha^T & S_X^T \\ -\alpha & (I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) & 0 \\ S_X & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i,z}^{Pm} \\ \hat{\beta}_{i,z} \\ \lambda_{X_{i,z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \varphi Y = \delta \quad (4.21)$$

et la solution devient :

$$Y = \varphi^{-1} \delta \quad (4.22)$$

#### 4.5.2 Préparation pour l'analyse des résultats

Puisque les analyses reposent sur la fragmentation des particules en fonction des classes granulométriques, une attention particulière est adressée au partage de la matière en fonction de ces différentes classes. En conséquence, on introduit à cette étape du processus d'analyse une nouvelle équation qui représente le partage de la matière.

L'analyse des résultats porte donc principalement sur les liens existant entre les fractions granulométriques et les fractions granulominérales de l'hématite  $Fe_2O_3$  et de la silice  $SiO_2$ . Par principe, on cherche à maximiser le rendement du fer à la sousverse et minimiser la concentration de silice. La courbe de partage permet de mieux visualiser comment évoluent ces deux variables en fonction des tranches granulométriques. La forme des particules devrait être considérée mais elle ne fera l'objet d'aucune attention particulière dans notre analyse (Abulnaga, 2002) mais elle sera soumise à une recommandation. L'équation (Eq.

(4.23)) présente la formulation empirique de la courbe de partage des minéraux (Das *et al.*, 2009).

$$S_{m,i} = R_{f;m} + (1 - R_{f;m}) \frac{e^{\left(\alpha_m \frac{\bar{d}_i}{d_{50;m}}\right)} - 1}{e^{\left(\alpha_m \frac{\bar{d}_i}{d_{50;m}}\right)} + e^{(\alpha_m)} - 2} \quad (4.23)$$

#### 4.5.3 Paramétrisation du modèle de la courbe de partage

Les paramètres du modèle sont au nombre de quatre. Certaines fines particules qui devraient normalement être évacuées par la surverse sont entraînées à la sousverse par différentes façons. Le facteur  $R_{f;m}$  est lié à ce phénomène et appelé soutirage ou court-circuitage. La courbe de partage épouse un profil en forme de *S* et dans la partie la plus linéaire, la pente est exprimée à partir du facteur  $\alpha_m$ . La courbe de partage permet également de déterminer dans quelle plage granulométrique cinquante pourcent (50 %) de la masse de la matière se divise à la sousverse et à la surverse, c'est le paramètre  $d_{50;m}$ . Le dernier paramètre lié directement au tamisage est le diamètre géométrique moyen  $\bar{d}_i$ . Son calcul est basé sur la moyenne géométrique de deux diamètres (Eq. (4.24)). Pour une classe granulométrique de  $d_i$  à  $d_{i+1}$ , le diamètre géométrique  $\bar{d}_{i-i+1}$  devient :

$$\bar{d}_{i,i+1} = \sqrt{d_i \cdot d_{i+1}} \quad (4.24)$$

Proposée la première fois par Lynch (Lynch, 1977), le modèle de courbe de partage d'un hydrocyclone permet de calculer les proportions minérales de chaque espèce. La mise en égalité de ces deux modèles (Eq. (4.23) & Eq. (4.25) ) permet de calibrer les paramètres de l'équation (Eq. (4.23)).

$$S_{m,i} = \frac{\hat{W} \cdot \hat{g} \cdot \hat{X}_{(U)}}{\hat{W} \cdot \hat{g} \cdot \hat{X}_{(F)}} \quad (4.25)$$

La calibration des paramètres du modèle de la courbe de partage est donc basée sur la méthode des moindres carrés tel que présenté à la section (3.7.1).

$$\hat{Y} = XB \Rightarrow \hat{S}_{m,i} (R_{f,m}, \alpha_m, d_{50;m}, \bar{d}_i) = \psi F \quad (4.26)$$

La solution finale du vecteur des coefficients en  $F$  (les paramètres) est obtenue par le pseudo-inverse :

$$F(R_{f,m}, \alpha_m, d_{50;m}, \bar{d}_i) = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T S_{m,i}^M \quad (4.27)$$

Le paramètre de court-circuitage  $R_{f,m}$  sera imposé lors de la calibration du modèle afin de ne pas introduire de biais dans le modèle (Voir ANNEXE I).

#### 4.6 Conception du 2<sup>e</sup> observateur

La conception du 2<sup>e</sup> observateur vise à inférer toutes les variables contenues dans le bilan et réconcilier toutes les mesures, c'est-à-dire les fractions granulométriques, les fractions granulométriques et les flux de matière. L'observateur ne compte que les variables source. On entend toutes variables pouvant être utilisées directement ou combinées entre elles pour générer des variables dites intermédiaires. Compte tenu que les variables source sont toutes réconciliées, les variables intermédiaires peuvent être calculées directement après la réconciliation. Finalement, l'addition des contraintes pour la stationnarité du lagrangien génère quant à elles des non-linéarités. Par choix et pour des raisons de structure (matricielle compacte), ce système d'équations a été linéarisé.



L'addition des contraintes contenues dans le critère inclut :

- La totalisation des fractions granulominérales (Eq. (4.29)).
- La totalisation des fractions granulométriques (Eq. (4.30)).
- La conservation de la masse pour les trois flux de matière (Eq. (4.31)).
- La conservation des masses granulométriques pour les trois flux de matière (Eq. (4.32)).
- La conservation des masses granulominérales pour les trois flux de matière (Eq. (4.33)).

Ces cinq contraintes permettent de s'assurer de la conservation de la matière de toutes les propriétés du bilan.

La prochaine section décrit le développement du critère de l'observateur. Tel que présenté précédemment, le critère est formulé en deux étapes soit la partie reliée à la correction des mesures et la seconde, à l'ajout des contraintes.

#### 4.6.1 Développement du critère du 2<sup>e</sup> observateur

Le critère  $J_2$  regroupe maintenant deux types de variables mesurées et affichant un profil statistique soit, les fractions granulométriques et les flux de masse pour les mesures instrumentées ainsi que les pseudo-mesures des fractions granulominérales qui portent également la trace d'un profil statistique. L'élaboration du critère  $J_2$  (Eq. (4.28)) permet donc de tenir compte de toute l'information disponible dans le bilan de matière.

$$J_2 = \left( X^{Pm} - \hat{X} \right)^T V_X^{-1} \left( X^{Pm} - \hat{X} \right) + \left( g^m - \hat{g} \right)^T V_g^{-1} \left( g^m - \hat{g} \right) + \left( W^m - \hat{W} \right)^T V_W^{-1} \left( W^m - \hat{W} \right) \quad (4.28)$$

La description des matrices ainsi que leurs dimensions sont présentées à l'ANNEXE V.

Dans ce cas, la totalisation des fractions granulominérales et des fractions granulométriques nous procure les équations :

$$S_x \hat{X} - U = 0 \quad (4.29)$$

$$S_g \hat{g} - U = 0 \quad (4.30)$$

La conservation de la matière pour les trois flux s'écrit comme :

$$M\hat{W} = 0 \quad (4.31)$$

Finalement, la conservation des masses granulométriques et des masses granulominérales pour les trois flux, s'écrit respectivement comme :

$$A\hat{W} + B\hat{g} + C = 0 \quad (4.32)$$

$$D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H = 0 \quad (4.33)$$

Les équations précédentes sont le résultat des linéarisations des fonctions reliées à la conservation des masses granulométriques et des masses granulominérales (Eq. (4.32)(4.33)). La procédure de linéarisation des équations est formulée comme suit : à partir du point de fonctionnement, un accroissement par incrément est appliqué à la pente de la fonction, et ce, jusqu'à la convergence du nouveau point de fonctionnement. Le détail du développement des procédures de linéarisation est présenté à l'ANNEXE V.

$$\hat{g}_{i,F} \hat{W}_F - \hat{g}_{i,U} \hat{W}_U - \hat{g}_{i,O} \hat{W}_O = 0 \quad (4.34)$$

$$\hat{X}_{m,i,F} \hat{g}_{i,F} \hat{W}_F - \hat{X}_{m,i,U} \hat{g}_{i,U} \hat{W}_U - \hat{X}_{m,i,O} \hat{g}_{i,O} \hat{W}_O = 0 \quad (4.35)$$

La substitution de ces contraintes dans le critère  $J_2$  procure :

$$\begin{aligned} L_2 = J_2 + 2\lambda_X^T (S_X \hat{X} - U_{(24,1)}) + 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + 2\lambda_W^T (M\hat{W}) \\ + 2\lambda_{g,W}^T (A\hat{W} + B\hat{g} + C) + 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ce critère doit être minimisé. La solution est obtenue par les conditions de stationnarité du lagrangien :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}}, \frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}}, \frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_W}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}} = 0 \quad (4.37)$$

Le résultat détaillé, sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} V_X^{-1} & 0 & 0 & S_X^T & 0 & 0 & 0 & F^T \\ 0 & V_g^{-1} & 0 & 0 & S_g^T & 0 & B^T & E^T \\ 0 & 0 & V_W^{-1} & 0 & 0 & M^T & A^T & D^T \\ S_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{g} \\ \hat{W} \\ \lambda_X \\ \lambda_g \\ \lambda_W \\ \lambda_{g,W} \\ \lambda_{X,g,W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} W^m \\ U_{(24,1)} \\ U_{(3,1)} \\ 0 \\ -C \\ -H \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\psi Y = \theta \quad (4.39)$$

La solution de ce dernier système est :

$$Y = \psi^{-1} \theta \quad (4.40)$$

Le développement de l'algorithme est présenté en détail à l'ANNEXE V ainsi que les résultats de la réconciliation de toutes les variables.

### Problématiques reliées aux dépendances linéaires des contraintes

L'application des contraintes crée de façon indirecte des combinaisons linéairement dépendantes. On doit par conséquent considérer que l'équation (Eq. (4.31)) est une combinaison linéaire des équations (Eq. (4.30)) et de l'équation (Eq. (4.32)) et que l'équation (Eq. (4.32)) est également une combinaison linéaire des équations (Eq. (4.29)) et de l'équation (Eq. (4.33)). Compte tenu que l'objectif est de résoudre ce système de façon algébrique et produire les estimés des fractions granulominérales, des fractions granulométriques et des flux de masse, ces deux équations (Eq. (4.31) (4.32)) redondantes ne seront pas considérées dans l'algorithme de programmation pour éviter les problèmes que causent les combinaisons linéaires dans la résolution des systèmes. Le critère sera donc minimisé par rapport à  $\hat{X}, \hat{g}, \hat{W}, \lambda_X, \lambda_g, \lambda_{X,g,W}$ , pour les fins de programmation et seuls ces termes seront inclus. En utilisant la même technique, le système devient (Eq. (4.41)) :

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{g} \\ \hat{W} \\ \lambda_X \\ \lambda_g \\ \lambda_{X,g,W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X^{-1} & 0 & 0 & S_X^T & 0 & F^T \\ 0 & V_g^{-1} & 0 & 0 & S_g^T & E^T \\ 0 & 0 & V_W^{-1} & 0 & 0 & D^T \\ S_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} W^m \\ U_{(24,1)} \\ U_{(3,1)} \\ -H \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

La Figure 4.4 présente l'algorithme de calcul et de programmation de l'observateur.

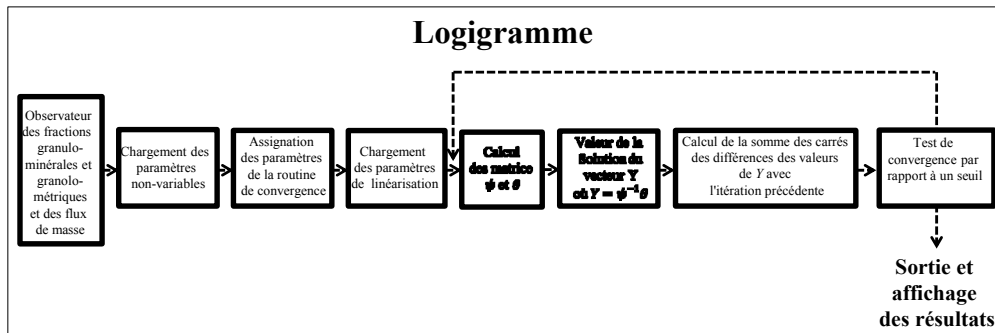


Figure 4.4 Logigramme du deuxième observateur

Comparativement au premier observateur où le degré de redondance est de l'ordre de 33.3 %, le deuxième observateur, quant à lui, affiche un degré de redondance de 45.6 %.

#### 4.7 Présentation et discussion des résultats

L'étape du traitement et de la réconciliation des données, tel que nous l'avons mentionné, vise à observer certains phénomènes qui n'apparaissent pas nécessairement dans l'étape précédente, celle de l'identification dynamique. Dans le Chapitre 4, l'accent est porté sur le caractère statique des variables telles que la densité et le taux de silice dans chacune des tranches granulométriques. Les informations fournies par le bilan et les données réconciliées, montrent comment les unités de fer par rapport à celles de la silice évoluent par tranche granulométrique. La Figure 4.5 montre comment la silice et l'hématite, à partir des sept campagnes d'échantillonnage, peuvent être séparées de façon distincte dans des différentes classes granulométriques. Également, on présente les courbes de partage à partir des équations de Lynch et Das pour l'hématite et la silice.

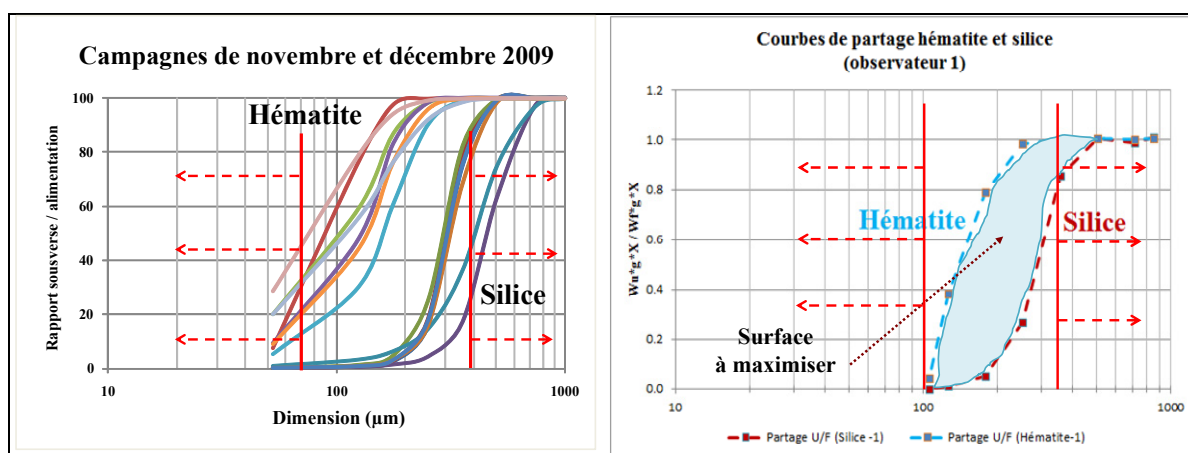


Figure 4.5 Classement des courbes de partage de l'hématite et de la silice

L'objectif étant de maximiser les unités de fer et de minimiser le taux de silice à la sousverse, la marge de manœuvre demeure néanmoins moins élevée pour l'hématite que pour la silice. Puisque la silice est considérée comme une impureté alors que l'hématite représente la matière première à enrichir et pour des raisons liées à des spécifications des processus de la

fabrication de la boulette, l'hématite doit couvrir une certaine zone des classes granulométriques. Par contre, pour la silice, son déplacement vers des tranches granulométriques plus élevées permettraient de maximiser la récupération des unités de fer. On sait par ailleurs que le déplacement des plus grosses particules de silice demande des sources d'énergie hydraulique plus élevées pour leurs évacuations, ce qui risque par conséquent d'entraîner également une partie du fer en surverse.

La densité qui représente une variable d'état n'a pas été mise à contribution de façon significative lors des différentes campagnes. Le rôle que pourrait jouer cette variable dans la structure de commande reste à déterminer et il fera d'ailleurs état d'une recommandation à la fin de cet exercice.

#### **4.8 Conclusion**

L'étape de la réconciliation des données permet d'établir le lien entre l'analyse des régimes dynamiques et la commande multivariable. Du point de vue stratégique, cette étape vise à fournir une meilleure image du comportement des variables de procédé (la silice et l'hématite) et elle apporte également une dimension innovante. De façon générale, dans le processus global de traitement que nous avons établi (PRSS), des étapes d'analyse sont souvent négligées ou simplement ignorées. Intégrer un module de réconciliation pour l'étape de la commande représente sans aucun doute une innovation pour ce genre de problématique industrielle.

## CHAPITRE 5

### ALGORITHMES DE COMMANDE COMPARAISON DES APPROCHES DE COMMANDE ET DE SPÉCIFICATION

Dans le chapitre précédent, on a présenté le processus de réconciliation des données du système de classification gravimétrique en mettant l'accent sur l'importance de réconcilier des données de procédé afin d'améliorer la compréhension du système, de déterminer les principales pistes qui gouvernent le système et de jeter les premières bases de commande de procédé. Le Chapitre 5 présente l'étape suivante, celle du contrôle des variables stratégiques. La Figure 5.1 présente cette troisième étape du processus de spécifications et de contrôle.

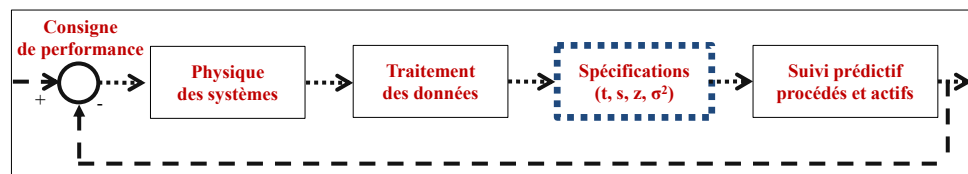


Figure 5.1 Processus d'analyse du système observé (spécifications)

#### 5.1 Système de commande actuel du classificateur hydraulique

Le contrôle utilisé pour la régulation dans les classificateurs hydrauliques est basé sur des approches simples et conviviales (Kohmuench *et al.*, 2010). Par contre, sa gouvernance demeure reliée à des stratégies opérationnelles qui vont au-delà du simple contrôle de densité. Bien qu'empirique, sa gouvernance permet quand même d'atteindre des spécifications de qualité qui répondent aux besoins de l'unité d'affaires. Néanmoins, lorsque les difficultés surviennent en opération, les lacunes reliées au manque de connaissances plus détaillées de ce type de système, causent des problèmes opératoires importants. La Figure 5.2 symbolise les relations de transfert des entrées (variables manipulées) et des sorties (variables de procédé). Le Tableau 5.1 présente également le détail des variables du système.

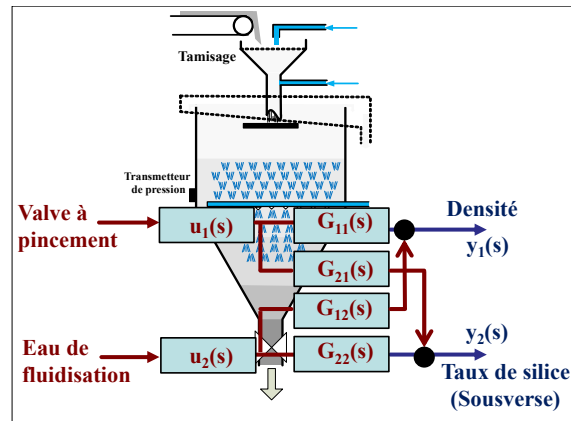
Figure 5.2 Système multivariable<sup>45</sup>

Tableau 5.1 Description des variables et des capteurs du classificateur

Variable	Type	Capteur
Valve à pincement	Commande ( $u_1$ )	Transmetteur de position (ZT)
Eau de fluidisation	Commande ( $u_2$ )	Débitmètre (FT)
Densité	Sortie ( $y_1$ )	Densimètre (FT)
Taux de silice	Sortie ( $y_2$ )	Analyse de laboratoire

Dans ce chapitre, nous aborderons donc la question d'état du système et de la structure actuelle de commande. Des précisions seront apportées sur les choix qui nous incitent à choisir les différentes approches d'algorithmes de commande (comparés). Sans qu'il fasse l'objet d'une étude approfondie, le choix des variables de contrôle sera présenté et précisé en fonction des différentes hypothèses qui seront proposées.

Un retour sur la campagne d'identification présentée au Chapitre 3 permettra de clarifier les choix des variables de commande et de procédé. La notion des gains et des dynamiques de procédé sera abordée du point de vue des choix et différentes approximations qui auront été retenues pour élaborer une nouvelle approche de commande. Par la suite, les notions de relations de transfert, de couplage et de simulation de ces comportements dynamiques seront abordées.

<sup>45</sup> Processus d'analyse du système observé à partir des spécifications et de la commande.



Le système étant réduit à un système  $2 \times 2$  (entrées - sorties), les notions de directionnalité dans les domaines temporel et fréquentiel seront abordées. Le nombre de conditionnement et l'analyse des gains relatifs seront également présentés.

Le développement des spécifications pour des approches de commande monovariante, multivariante avec découpleurs ou avec un algorithme de décentralisation permet d'établir les premières bases de comparaison avec différentes approches statistiques de commande, soit la désirabilité.

Trois différentes approches seront abordées pour les comparatifs des spécifications statistiques soit :

- En considérant les effets de couplage, le contrôle des deux boucles s'effectue avec une approche monovariante et les spécifications sont basées sur une approche de désirabilité.
- En considérant les effets de couplage, le contrôle des deux boucles s'effectue avec les découpleurs et les spécifications sont basées sur une approche de désirabilité.
- En considérant les effets de couplage, le contrôle des deux boucles s'effectue en décentralisé et les spécifications sont basées sur une approche de désirabilité.

## **5.2 État de la situation sur la structure de commande actuelle**

Tel que présenté à la Figure 5.3, le système de contrôle permet de réguler la densité du lit à environ 1.8 m de la surface. Au Chapitre 3, à la section 3.3, nous avons observé que la densité se situe environ à 60 % solide. À ce niveau, 80 % de la densification  $\rho$  est déjà complétée. De plus, les informations recueillies à partir de la réconciliation des données nous ont permis de comprendre que la densité demeure une variable d'état et joue un rôle essentiel dans la compréhension des mécanismes de classification par gravimétrie.

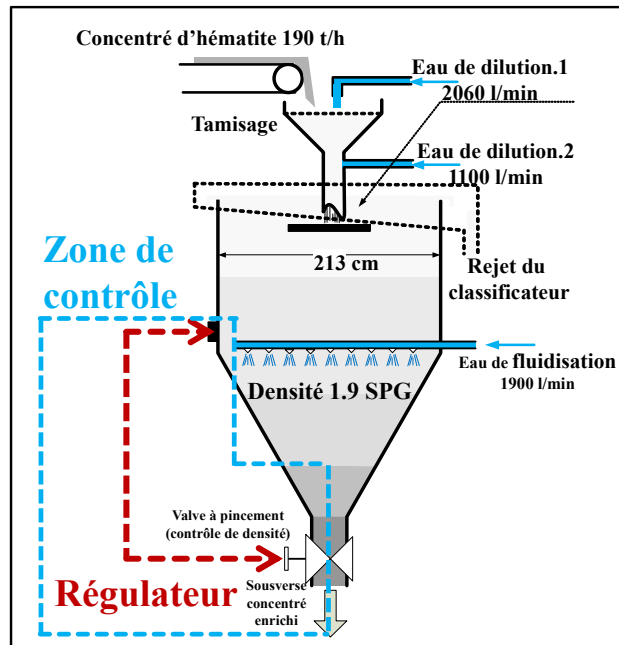


Figure 5.3 Logique de contrôle du classificateur

Toujours dans une perspective où la variable de densité demeure une variable stratégique et que ses mesures devraient s'étendre sur différents niveaux de la hauteur, on innove quant à la simplicité que cette hypothèse amène si cette variable nous fournit réellement l'information que nous considérons essentielle.

Dans cette section du chapitre, on expliquera le choix des variables stratégiques telles que la densité mais également l'impact de l'obligation de devoir respecter une contrainte d'un taux de silice à ne pas dépasser. Il existe également d'autres spécifications qui font partie des propriétés métallurgiques de l'usine de bouletage telles que l'ARL (teneur en silice  $+300 \mu\text{m}$ ). Cette spécification, bien qu'elle appartienne à des propriétés du concentré à l'alimentation (provenant de la mine), elle joue un rôle déterminant dans le processus de gravimétrie à l'usine de bouletage et influence fortement les performances de productivité.

Conscient que l'algorithme utilisé présentement pour la classificateur ne tient pas compte des mesures des différents ajouts d'eau et du matériel frais à l'alimentation et ce, en termes de bilan, la première étape de ce qui sera proposé permettra néanmoins d'en améliorer la

performance de contrôle sans y apporter de modifications majeures. De plus, on considère que cette orientation permet d'innover en respectant un artifice propre à la compagnie AMEM, soit le MTS (*Minimum Technical Solution*).

### 5.3 Choix stratégiques des variables de commande et de procédé

Puisque le contrôle de la densité est considéré comme une variable stratégique et que *le taux de silice* quant à lui représente une contrainte à respecter, ces deux variables seront donc considérées déterminantes dans la structure multivariable  $2 \times 2$ . Le Tableau 5.2 présente les valeurs des gains des régimes dynamiques entre les variables de commande (eau de fluidisation et ouverture de valve à pincement) et les variables de sortie (densité et taux de silice).

Tableau 5.2 Gains et constantes de temps des modèles dynamiques<sup>46</sup>

Variables manipulées	Variables de procédé	Gains dimensionnels	Gains (%)	Constante de temps $\tau$ (min.)
Eau de fluidisation	Densité	-0.0002 SPG / (l/min)	-0.553	14.1
Eau de fluidisation	Taux de silice	-0.0003 % / (l/min)	-0.025	5.5
Valve à pincement	Densité	-0.056 SPG / (l/min)	-1.867	13.5
Valve à pincement	Taux de silice	+0.012 % / %	+0.012	4.7

Le choix de ces deux variables jette donc les premiers jalons de la structure de commande qui devrait évoluer à des niveaux techniques supérieurs si on considère que des spécifications basées sur le contrôle des tranches granulométriques est un enjeu stratégique. Par contre, dans ce projet, nous nous limiterons à l'analyse de la structure  $2 \times 2$  (*densité et taux de silice*) et d'autres étapes de développement pourront être élaborées dans un projet dont les objectifs seraient de construire une structure de commande plus évoluée en fonction d'autres variables stratégiques.

---

<sup>46</sup> Gains et constantes de temps des modèles dynamiques, densité et taux de silice à la sousverse.

## 5.4 Structure de commande existante et conception de la nouvelle structure

En référence à la section 5.1, l'algorithme de commande ne tient pas compte des effets de couplage entre les variables. Seul le contrôle de la densité est basé sur une structure en boucle fermée. Tout dépendant des conditions opératoires, les opérateurs peuvent manipuler une autre variable de commande en boucle ouverte, l'eau de fluidisation. La Figure 5.4 présente la schématisation du système dynamique.

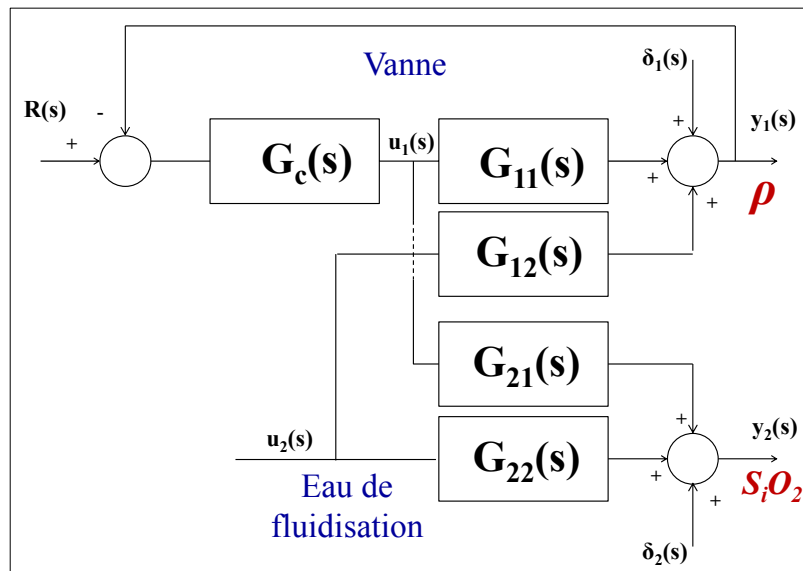
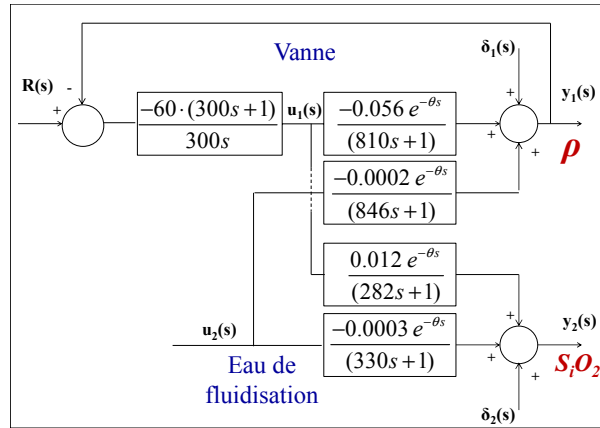


Figure 5.4 Algorithme de contrôle existant au classificateur

### 5.4.1 Couplage des variables d'entrées et de sortie du système

En référence au Tableau 5.2, les valeurs des modèles dynamiques et les effets de couplage sont représentés à la Figure 5.5. Les constantes de temps reliant les variables d'entrées à la variable de sortie de densité sont du même ordre de grandeur et on remarque le même phénomène avec la variable de sortie du taux de silice versus les deux variables d'entrées.

Figure 5.5 Fonctions de couplage<sup>47</sup>

Dans la prochaine section, une première simulation de la structure de commande existante du classificateur sera présentée et permettra de mieux visualiser les effets de la boucle fermée (densité), de la boucle ouverte (taux de silice) et des couplages par rapport à un changement de consigne (boucle de densité) et un changement de la variable de commande (eau de fluidisation). De plus, une analyse approfondie des caractéristiques de ce système multivariable  $2 \times 2$  sera réalisée, et ce, pour mieux comprendre le potentiel qu'il représente.

#### 5.4.2 Analyse du système et simulation des effets de couplage

Tel que présenté au Chapitre 4, la campagne d'échantillonnage a permis de calibrer les paramètres des modèles dynamiques utilisés pour l'observation et le contrôle des variables de densité et du taux de silice. Ces variables, bien qu'elles ne présentent pas le même degré d'accessibilité du point de vue de la mesure physique et considérant que la densité est mesurée en continu et que le taux de silice est mesuré par échantillonnage aux quatre heures, elles demeurent néanmoins des éléments essentiels à l'opération du classificateur. Les Figure 5.6, Figure 5.7 et Figure 5.8 présentent les simulations d'un changement de consigne de densité (0.5 SPG) et une variation de commande de l'eau de fluidisation (100 litres) en alternance et en simultané. À chaque simulation, des bruits de mesure sont ajoutés aux

<sup>47</sup> Calibration des fonctions de transfert et des effets de couplage au classificateur.

variables ainsi que les couplages entre les variables de commande et les variables de sortie. Pour assurer une meilleure représentativité des comportements du système en opération réelle, le système est quantifié en unité d'ingénierie pour la partie "gains des systèmes".

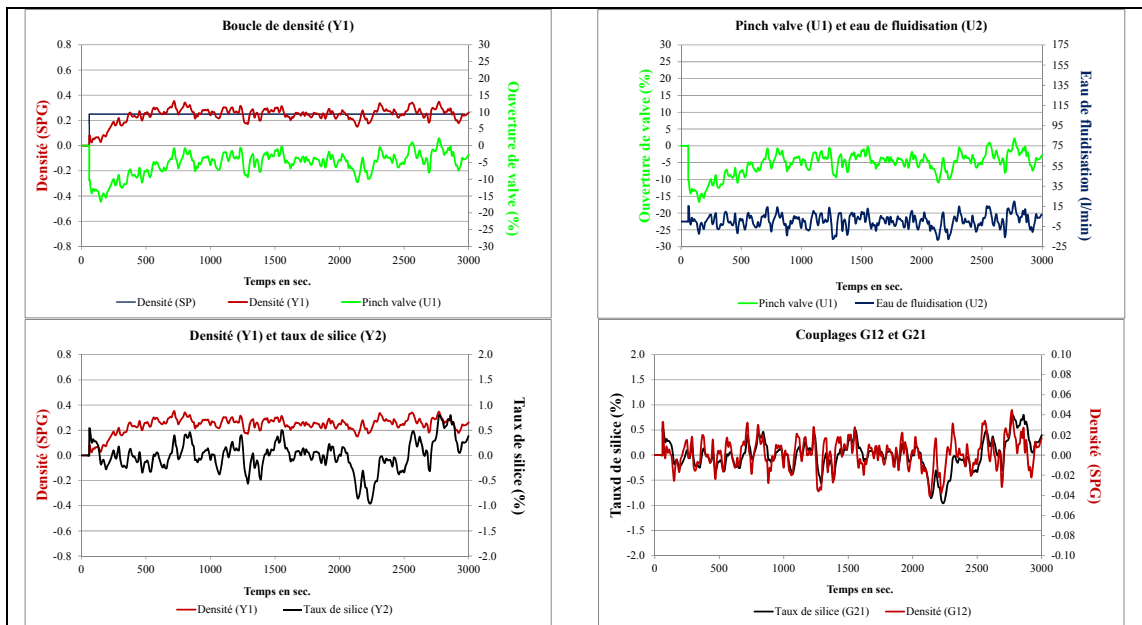


Figure 5.6 Changement de consigne de densité

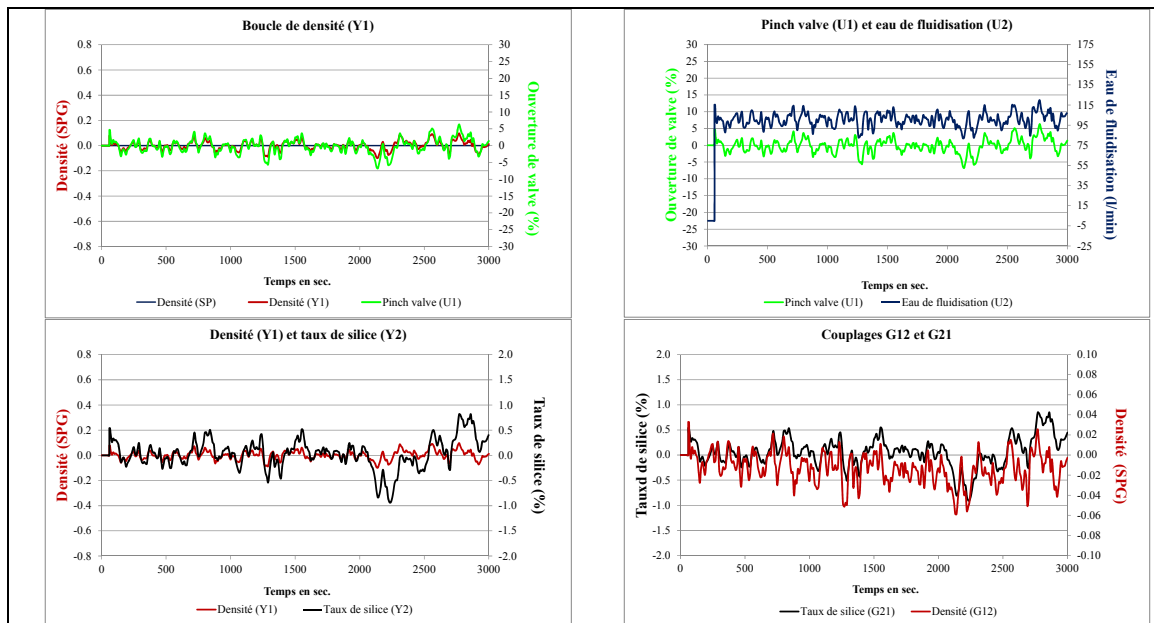


Figure 5.7 Changement de régime d'eau de fluidisation

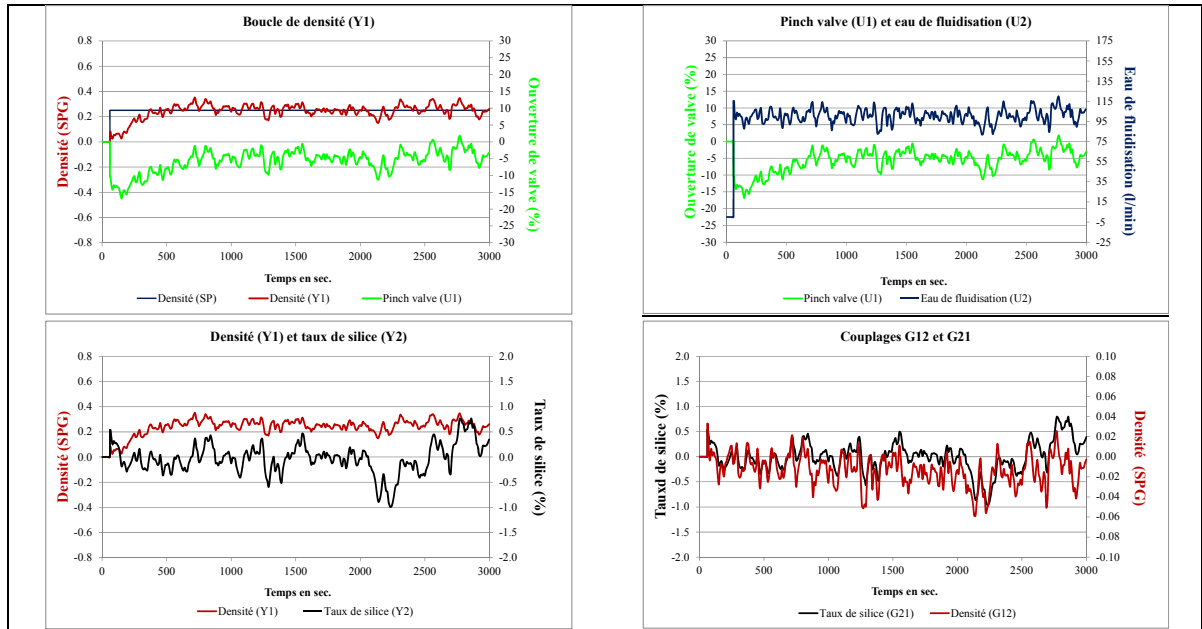


Figure 5.8 Changement de consigne de densité et de régime d'eau de fluidisation

Les simulations ont été effectuées avec des variations de consigne et de commande qui correspondent aux ordres de grandeur de celles utilisées lors des campagnes d'identification. Il est important de souligner que ces systèmes dynamiques sont accompagnés de forte linéarité et d'asymétrie et ne peuvent donc dans les circonstances varier sur de très grandes plages d'opération. Le Tableau 5.3 présente les données utilisées pour les simulations présentées aux figures précédentes pour les boucles de densité et de l'eau de fluidisation.

Tableau 5.3 Variation de commande et de consigne

Type de variation	$u_1$ (%)	$u_2$ (l/min)	$y_1$ (SPG)	$y_2$ (% silice)
Première simulation	-8.93	-----	0.5	0.006
Deuxième simulation	-----	100	-0.02	-0.03
Troisième simulation	-9.29	100	0.5	-0.1415

### 5.4.3 Modèle de bruit

Dans le Chapitre 3, on a présenté les méthodes utilisées pour calibrer les modèles dynamiques. Bien que dans cet exercice, l'objectif favorisait la conception d'un modèle déterministe, la question de l'ajout d'un modèle de bruit n'a pas été abordée. Lors des simulations, le premier objectif vise à représenter le plus fidèlement possible le comportement du système. Or, les résidus entre le modèle et les données échantillonnées peuvent être également modélisées. On introduit donc un modèle de bruit dont la structure choisie est définie de la façon suivante :

- Les systèmes sont autorégulants.
- Le modèle de bruit ne possède pas de structure complexe et est limité à ordre 1.

Le modèle choisi est donc de la forme autorégressif ( $AR_{\text{modifié}}$ ) et affecté d'un gain d'ajustement par le paramètre  $d_I$  pour calibrer l'amplitude de la variance. L'équation (Eq. (5.1)) présente le modèle de perturbation où  $\xi(z)$  est un générateur de nombres aléatoires distribués normalement et  $\delta(z)$ , la perturbation à la sortie du système. Le nouveau système est représenté à la Figure 5.9.

$$G_{\delta}(z) = \frac{\delta(z)}{\xi(z)} = \frac{d_I z^{-1}}{1 + c_1 z^{-1}} \quad (5.1)$$

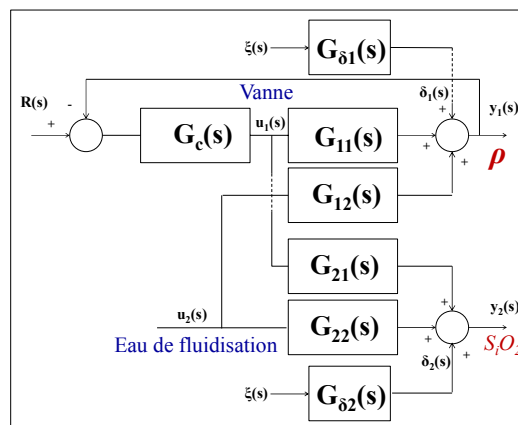


Figure 5.9 Modèle de contrôle bruité



Néanmoins, des faiblesses importantes apparaissent en regard avec la capacité de produire un modèle de bruit représentatif du système. La problématique majeure est donc liée à l'amplitude des résidus de chacun des systèmes. Les asymétries, les non-linéarités et les phénomènes inexpliqués sont à la solde des difficultés rencontrées dans cette deuxième étape de modélisation. Lors de la calibration d'un modèle stochastique, l'ensemble de ces facteurs perturbant sont donc absorbés par la calibration des paramètres  $d_I$  et  $c_I$ , ce qui en fait un modèle de compensation plutôt qu'un modèle de perturbation stochastique.

La solution apportée pour palier à cette problématique est donc d'adapter et de calibrer le modèle stochastique à partir de l'amplitude de variance des mesures échantillonnées en régulation. De cette façon et dans l'éventualité où ce modèle serait utilisé à des fins de commande prédictive et qui inclurait un prédicteur stochastique, ce modèle posséderait donc les propriétés statistiques inhérentes au développement de ce type d'algorithme. La Figure 5.10 présente la schématisation de l'algorithme de calibration.

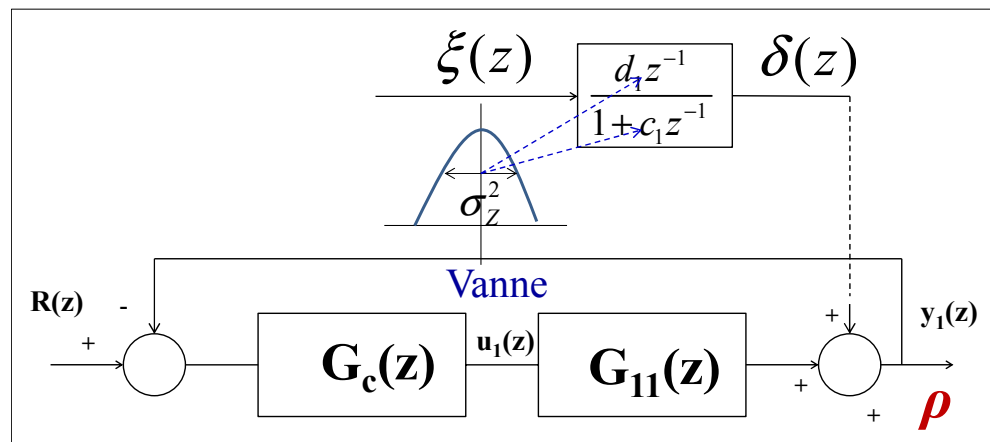


Figure 5.10 Calibration du modèle de bruit

Le Tableau 5.4 présente les résultats de la calibration des paramètres  $d_I$  et  $c_I$ , et la Figure 5.11, les zones où les variances ont été estimées.

Tableau 5.4 Calibration des paramètres  $d_I$  et  $c_I$  des modèles stochastiques

Paramètres	Point d'opération	Variation en simulation	Erreur de mesure (%)	Variances	$d_1$	$c_1$
Densité	1.9	0.5	10.0	0.0025	0.0484	0.2289
Taux de silice	1.38	0.1	0.2236	0.0005	0.0217	0.2203

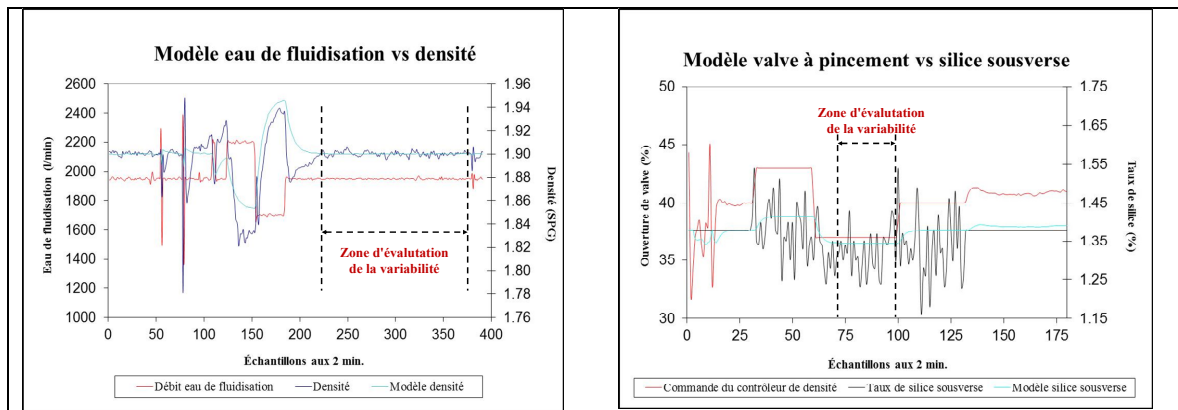


Figure 5.11 Plage temporelle pour la calibration des modèles de bruit

Malgré que cette information soit nécessaire pour générer un modèle complet (déterministe et stochastique) le plus réaliste possible du système physique, il est parfois difficile d'obtenir des plages temporelles équivalentes pour la modélisation des bruits stochastiques. La Figure 5.11 montre bien les différences et les difficultés rencontrées pour l'obtention de ces plages temporelles équivalentes dans la production des modèles dynamiques.

## 5.5 Propriétés intrinsèques du système dynamique de classification gravimétrique

Cette analyse vise, de façon plus approfondie, l'exploration des frontières et des conditions limites du système et ce, dans une approche reposant sur la robustesse du système. Les éléments qui seront présentés et traités le seront dans les domaines temporels et fréquentiels et les outils tels que les diagrammes de Bode, feront partie des supports additionnels utilisés. En référence avec la Figure 5.5, le système matriciel utilisé sera donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Et la matrice de transfert  $P$  (Eq. (5.3)) devient :

$$P = \begin{bmatrix} -0.056 & -0.0002 \\ 0.012 & -0.0003 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

### 5.5.1 Valeurs singulières du système

Les valeurs singulières du système sont la généralisation des diagrammes de Bode aux procédés multivariables. Les valeurs singulières d'une matrice de transfert  $P$  fonction de  $\omega$  et de dimension  $r \times m$  noté  $\sigma_i(P)$  sont les  $k^{ième}$  plus grandes racines non négatives des valeurs propres de  $P^T P$  à chaque fréquence où  $k = \min\{r, m\}$ , ainsi pour  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  :

$$\sigma_i(P) = \sqrt{\lambda_i(P^T P)} \quad (5.4)$$

Les valeurs singulières maximales et minimales de la matrice de transfert  $P$  sont notées  $\bar{\sigma}(P)$  et  $\underline{\sigma}(P)$  respectivement. Les valeurs propres de la matrice de transfert  $P^T P$  sont égales aux racines (racines de  $\lambda$ ) de l'équation caractéristique suivante (Eq. (5.5)) :

$$\det[\lambda I - P^T P] = 0 \quad (5.5)$$

Ainsi, pour un système  $2 \times 2$ , on a :

$$P^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

et,

$$\lambda I - P^T P = \begin{bmatrix} \lambda - (K_{11}^2 + K_{21}^2) & -(K_{11}K_{12} + K_{21}K_{22}) \\ -(K_{12}K_{11} + K_{22}K_{21}) & \lambda - (K_{12}^2 + K_{22}^2) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

En substituant les valeurs numériques du système étudié, nous obtenons :

$$P = \begin{bmatrix} -0.056 & -0.0002 \\ 0.012 & -0.0003 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

La solution de l'équation (Eq. (5.5)), nous donne  $\lambda_1 = 0.00328$  et  $\lambda_2 = 0.0000001239$ . Les valeurs singulières sont les racines carrées de ces valeurs : 0.05727 et 0.000335.

### 5.5.2 Directionnalité dans le domaine temporel

La notion de directionnalité est un concept propre aux procédés multivariables. Les conditions permettant au gain de procédé de varier en fonction de la direction du vecteur d'entrée peuvent être présentées de façon plus visuelle en utilisant le domaine temporel.

Dans le cas d'un procédé à deux entrées et deux sorties, on applique un vecteur  $u_{Total}$  unitaire à l'entrée et en faisant varier de façon angulaire et incrémentale ce vecteur sur le cercle unitaire, il est possible de simuler dans le domaine temporel chaque direction du vecteur d'entrée et d'observer le vecteur de sortie  $y_{total}$  obtenu.

La Figure 5.12 présente les combinaisons possibles des entrées  $(u_1, u_2)$ . La valeur de  $y_{total} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  dépend des valeurs manipulées  $(u_1, u_2)$  à l'entrée des procédés.

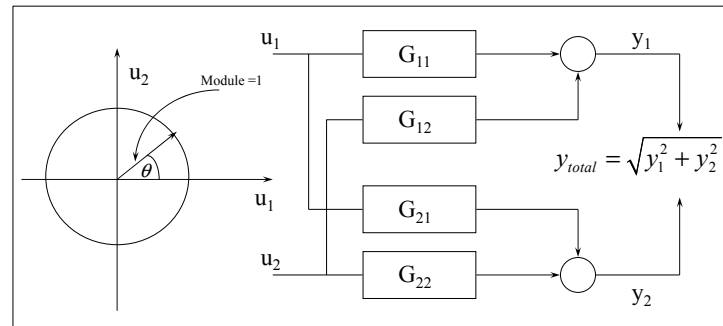


Figure 5.12 Couplage entrée-sortie vs le cercle unitaire

### 5.5.2.1 Simulation dans le domaine temporel

La simulation temporelle vise à observer le comportement des variables de sorties en balayant l'ensemble des combinaisons des variables d'entrées. L'angle  $\theta$  balaye tous les quadrants soit entre 0 à  $2\pi$  (radians) et ce, par le choix d'un pas d'incrément  $\Delta\theta$ . Ce balayage permet donc de valider si la combinaison des signes des gains du système influence la sortie  $y_{total} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  de façon significative. La Figure 5.13 confirme que certaines combinaisons des entrées  $(u_1, u_2)$  donnent une plus grande directionnalité en observant la variable de sortie  $y_{total}$ . Le premier essai a été effectué avec des fonctions de transfert du premier ordre et avec des constantes de temps et des gains de système dont les valeurs sont du même ordre de grandeur.

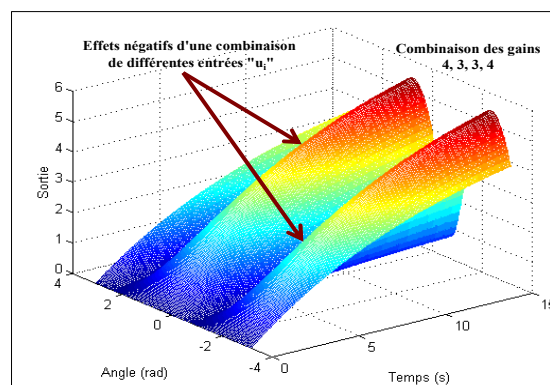


Figure 5.13 Directionnalité du système

Tableau 5.5 Valeurs des paramètres de la Figure 5.13

Fonctions de transfert	Gains	$\tau$ (sec)
$G_{11}$	4	10
$G_{12}$	3	10
$G_{21}$	3	10
$G_{22}$	4	10

Il existe donc certaines zones préférentielles des combinaisons des entrées  $(u_1, u_2)$  qui maximisent l'amplitude de sortie du système. La même simulation est reproduite avec une combinaison impaire des signes des gains du système 4, -3, -3, -4. La Figure 5.14 présente les résultats.

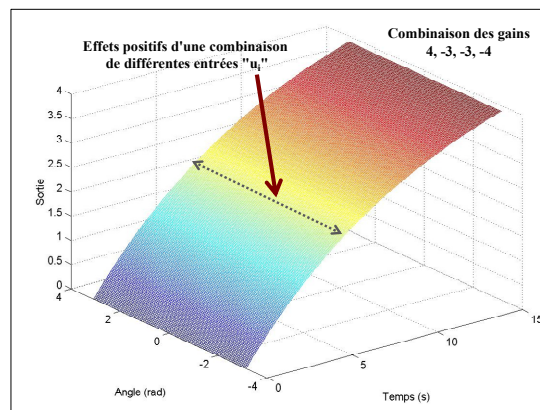


Figure 5.14 Directionnalité 4, -3, -3, -4

L'ensemble du spectre des combinaisons des entrées  $(u_1, u_2)$  génère un ou des maximums d'amplitude de la sortie  $y_{total} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ . Par contre, la combinaison des signes impairs dans cet exemple est importante et elle lie directement le comportement de la sortie  $y_{total} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  à l'entrée  $u_{total} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ . On peut également démontrer que deux gains négatifs de procédé et deux gains positifs donnent également des résultats équivalents en comparaison avec la combinaison 4, 3, 3, 4. Les résultats de la combinaison -4, 3, -3, 4 sont présentés à la Figure 5.15.

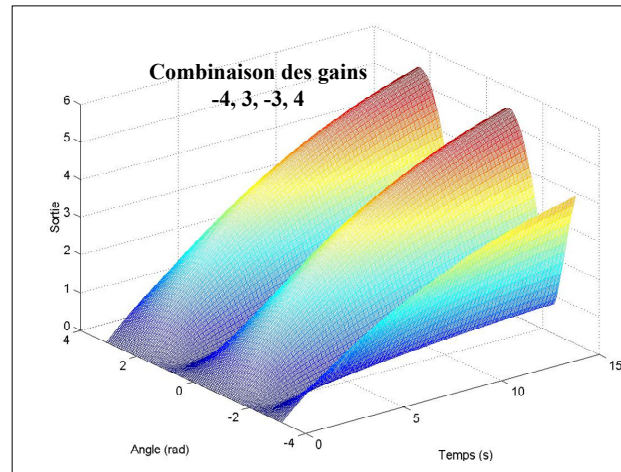


Figure 5.15 Directionnalité -4, 3, -3, 4

La combinaison paire et impaire des signes des gains de procédé a effectivement un impact sur la directionnalité. Néanmoins, des régimes dynamiques différents influencent également les résultats de cette particularité du système. La Figure 5.16 présente les résultats d'une dynamique croissante d'une seule fonction de transfert.

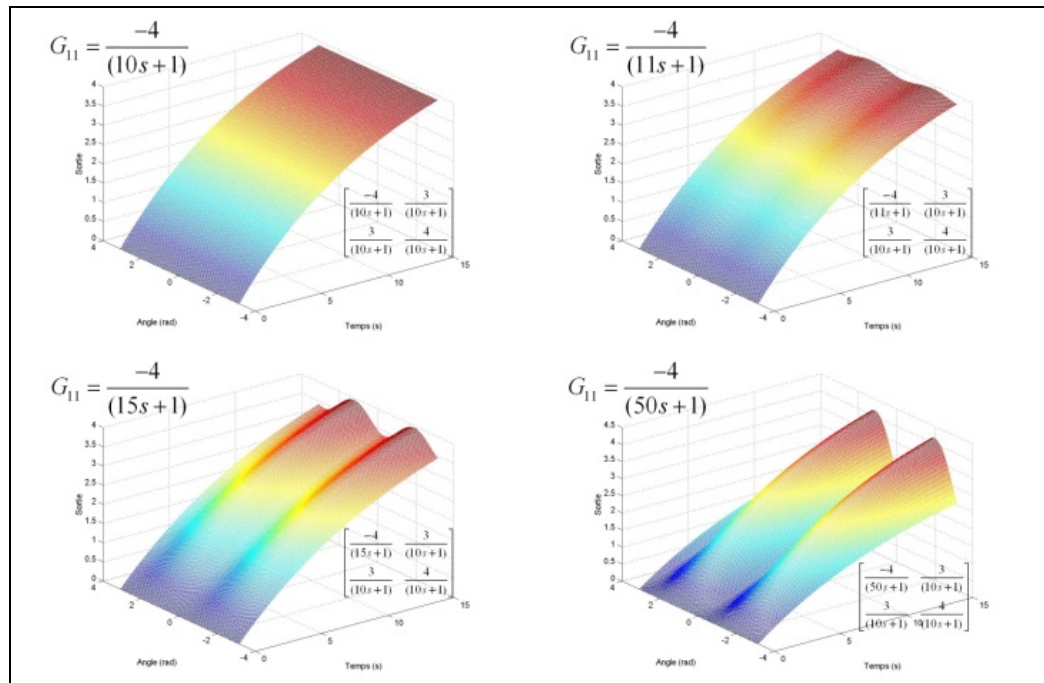


Figure 5.16 Constantes de temps variables et effets sur la directionnalité

Pour le système du classificateur, la combinaison des gains est impaire mais en raison des différentes dynamiques du système, il se comporte comme un système pair. Les résultats sont présentés à la Figure 5.17.

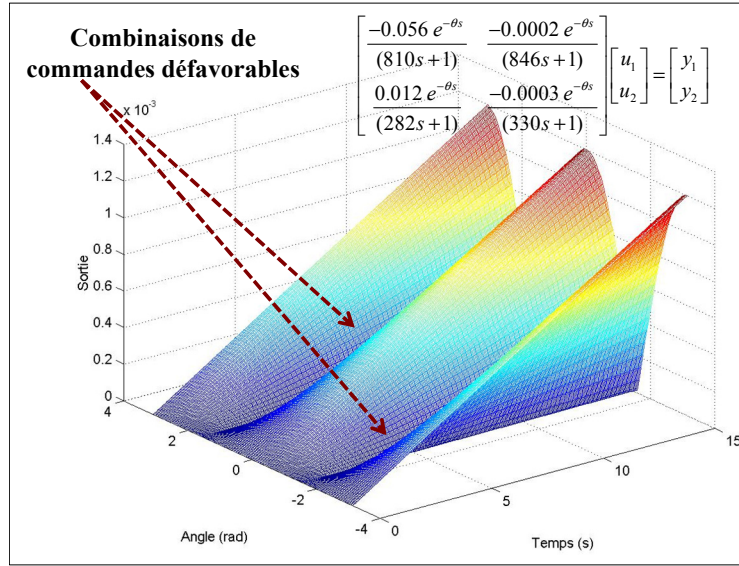


Figure 5.17 Directionnalité propre du classificateur

### 5.5.3 Directionnalité dans le domaine fréquentiel

Comparativement à l'analyse dans le domaine temporel, les combinaisons des entrées  $(u_1, u_2)$  (vecteur tournant) sont les amplitudes des sinusoïdes qui excitent la sortie  $y_1$  et  $y_2$  via les fonctions de transfert. En imposant une fréquence aux sinusoïdes, les sorties en sont affectées à la même fréquence. De plus, pour balayer toute la région d'amplification à une fréquence donnée, on déphase les sinusoïdes  $(u_1, u_2)$  de 0 à 360°. À chaque fréquence imposée, les valeurs de  $y_{total} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  varieront entre un minimum et un maximum, ce sont les valeurs singulières.

L'analyse des valeurs d'excitation des fonctions de transfert se fait donc uniquement au niveau des amplitudes des sinusoïdes et non du point de vue temporel. L'analyse permet



également de confirmer qu'à la fréquence ( $\omega \approx 10^{-3}$ ) les amplitudes maximum et minimum sont approximativement les valeurs singulières et sont celles calculées et présentées au paragraphe 5.5.1. La Figure 5.18 et le Tableau 5.6 présentent la réponse en fréquence des valeurs singulières pour une largeur de bande donnée et les résultats des valeurs singulières à la fréquence " $\omega \approx 10^{-3}$ " (avoisinant le régime établi).

Tableau 5.6 Valeurs singulières de la réponse en fréquence

	Amplitudes (dB)	Sans dimension
$\bar{\sigma}(P)$	-26.93	0.04500
$\underline{\sigma}(P)$	-70.05	0.00031

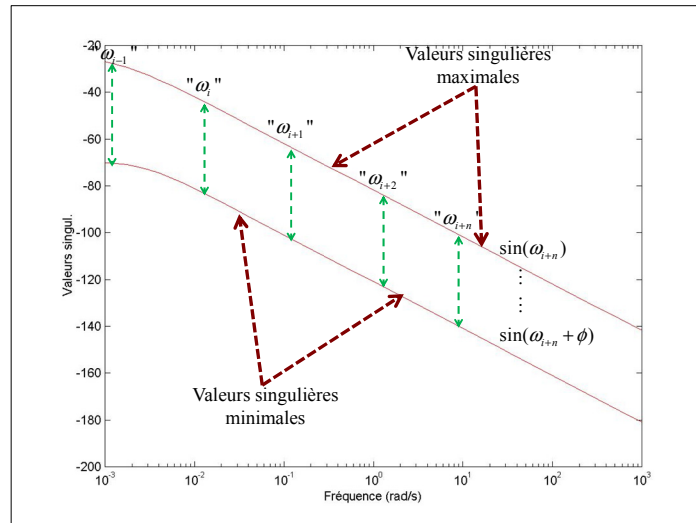


Figure 5.18 Directionnalité du domaine fréquentiel

#### 5.5.4 Nombre de conditionnement

Le nombre de conditionnement est le rapport entre les valeurs singulières maximales et minimales d'un système. Le nombre de conditionnement vaut donc :

$$\gamma(P(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}P(j\omega)}{\underline{\sigma}P(j\omega)} = \frac{0.05727}{0.000335} = 171 = 44.7 \text{ dB} \quad (5.9)$$

La valeur du nombre de conditionnement indique si le système est bien conditionné. Une bonne valeur de conditionnement se rapproche de la valeur unitaire et de la valeur minimale que le système peut absorber.

### 5.5.5 Analyse des gains relatifs – Gains de Bristol

Cette section porte sur l'analyse des gains du système, les gains de *Bristol*. Cette analyse permet donc de déterminer quelle entrée (commande) favorise la performance du système en fonction des spécifications désirées. On fait cette analyse en mode direct et en mode inverse. Dans un contexte de conception de système industriel, on pose les règles suivantes :

- La variable  $\lambda_{11}$  de la matrice  $\lambda_{mn}$  doit prendre une valeur positive.
- La valeur de  $\lambda_{11}$  doit s'approcher de la valeur unitaire.
- La somme des  $\sum_{n=1}^a \lambda_{m,n}$  de la matrice  $\lambda_{mn}$  doit être égale à l'unité.
- La somme des  $\sum_{m=1}^b \lambda_{m,n}$  de la matrice  $\lambda_{mn}$  doit aussi être égale à l'unité.

L'équation suivante présente les caractéristiques des gains de *Bristol*.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{-1})^T \quad (5.10)$$

Le gain  $\lambda_{11}$  est le rapport entre le gain de  $K_{11} = y_1/u_1$  en boucle ouverte (B.O.) de la première boucle et de la somme de ce même gain  $K_{11}$  et de  $K_{11}(G_2)$  qui tient compte des effets de couplage de la deuxième boucle. La Figure 5.19 présente la configuration de l'arrangement des boucles associées à l'analyse des gains relatifs.

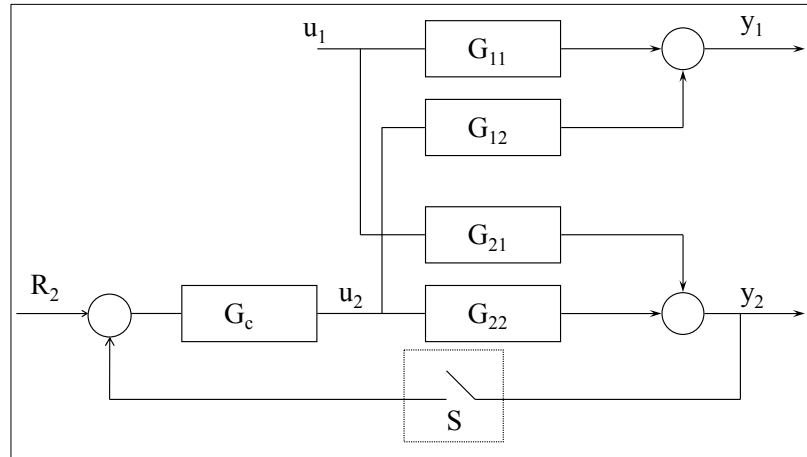
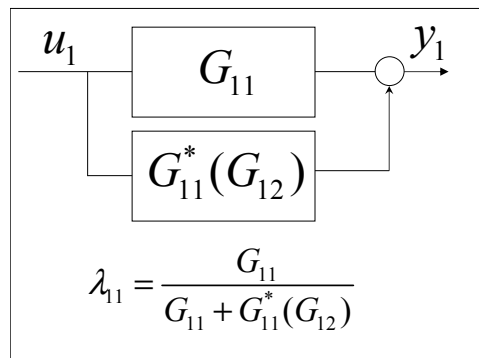


Figure 5.19 Structure pour analyse des gains de Bristol

Pour que cela soit réalisable, on considère que la variation de la sortie  $y_2$  est nulle, ce qui représente une régulation parfaite. Cette façon d'interpréter le gain relatif s'apparente beaucoup plus au concept mathématique que de la physique du système. En réalité, ce gain traduit le rapport entre le gain  $G_{11}$  au sens propre et  $G_{11}^*(G_{12})$ , c'est à dire un gain  $G_{11}$  modifié qui tient compte de la dynamique de toute la deuxième boucle fermée (B.F.). La Figure 5.20 présente la configuration logique de cette interprétation. Un exemple numérique est également disponible à la suite de la figure.

Figure 5.20 Gains de Bristol<sup>48</sup>


---

<sup>48</sup> Arrangement logique pour la visualisation du rapport des gains en B.O et B.F.

### Exemple numérique avec le système de gains 4, 3, 3 et 4

L'exemple suivant est basé sur la variation unitaire de la variable  $u_1$  et le calcul des variations de  $y_1$  via  $G_{11}$  et  $G_{11}^*(G_{12})$ .

Tableau 5.7 Calcul des variations pour l'interprétation des gains de Bristol

Calculs des variables	Effets produits	Résultats numériques
$\Delta u_1 = 1$	-----	1
$\Delta u_1 * G_{11} = \Delta y_1$	variation sur la variable $y_1$	$1 \times 4 = 4$
$\Delta u_1 * G_{21} = \Delta y_2$	variation sur la variable $y_2$	$1 \times 3 = 3$
$\Delta u_2 = -3/4$	effet de régulation de $u_2$	-3/4
$\Delta u_2 * G_{12} = \Delta y_1^*$	variation supplémentaire de $y_1$ vs $u_2$	$-3/4 \times 3 = -9/4$

La variation unitaire  $\Delta u_1 = 1$  provoque donc deux effets sur la variable  $y_1$ , soit une variation de 4 provenant de  $G_{11}$  et une variation de -9/4 de  $(G_{11}^*)$ .

À partir de la définition de  $\lambda_{11}$  de la Figure 5.20, on détermine la valeur du gain  $\lambda_{11}$ , soit :

$$\lambda_{11} = \frac{4}{4 - 9/4} = 2.2857 \quad (5.11)$$

Ce résultat est également confirmé par la relation présentée à l'équation (5.10)) :

$$\Lambda = K * (K^{-1})^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5714 & -0.4286 \\ -0.4286 & 0.5714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2857 & -1.2857 \\ -1.2857 & 2.2857 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

La valeur obtenue pour  $\lambda_{11}$  est donc de 2.2857. Cette valeur est positive mais s'écarte de la valeur désirée soit 1. Si le système était contrôlé en mode inverse (permutation des colonnes de la matrice K), on constate que la valeur négative de  $\lambda_{11}$  de -1.2857 cause des problèmes de conception importants. La prochaine section présente la partie algébrique du calcul des gains de Bristol.

### 5.5.5.1 Développement mathématique des gains relatifs

On résout le système (Eq. (5.13)) en imposant à  $y_2$  une variation nulle. On isole  $y_1$  par rapport à  $u_1$  et l'interaction de la boucle 2 s'imbrique dans l'expression mathématique.

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 K_{11} + u_2 K_{12} \\ y_2 &= u_1 K_{21} + u_2 K_{22} = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Le gain en B.O. vaut :

$$\frac{y_1}{u_1} = K_{11} \quad (5.14)$$

En résolvant le système précédent, on obtient :

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}{K_{22}} \quad (5.15)$$

En faisant le rapport des deux équations (Eq. (5.14)) et (Eq. (5.15)), on obtient :

$$\frac{\frac{y_1}{u_1} \text{ B.O.}}{\frac{y_1}{u_1} \text{ B.F.}} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} = \lambda_{11} \quad (5.16)$$

$$\lambda_{11} = \frac{K_{11}K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} = \frac{16}{16 - 9} = 2.2857 \quad (5.17)$$

Ce qui vérifie et valide la valeur retrouvée précédemment. Les effets sur la sortie  $y_1$  et occasionnés par la commande  $u_2$  peuvent être également démontrés à partir de la composante  $\lambda_{12}$ , soit :

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 K_{11} + u_2 K_{12} \\ y_2 &= u_1 K_{21} + u_2 K_{22} = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\frac{y_1}{u_2} = K_{12} - \frac{K_{11}K_{22}}{K_{21}} = \frac{K_{12}K_{21} - K_{11}K_{22}}{K_{21}} \quad (5.19)$$

ce qui donne :

$$\frac{\frac{y_1}{u_2} B.O.}{\frac{y_1}{u_2} B.F.} = \frac{K_{12}K_{21}}{K_{12}K_{21} - K_{11}K_{22}} = \lambda_{12} \quad (5.20)$$

$$\lambda_{12} = \frac{9}{9-16} = -1.2857 \quad (5.21)$$

#### 5.5.5.2 Matrice des gains de Bristol du classificateur

Pour le système du classificateur, on obtient  $\Lambda = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{-1})^T$  où  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.056 & -0.0002 \\ 0.012 & -0.0003 \end{bmatrix}$  :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.875 & 0.125 \\ 0.125 & 0.875 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Il aurait également été possible lors du design, que des choix aient été arrêtés sur une approche de commande différente telle que de contrôler la densité avec l'eau de fluidisation et le taux de silice avec l'ouverture de la valve à pincement. Le système aurait donc pris la forme suivante. Permutation des colonnes de la matrice  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.0002 & -0.056 \\ -0.0003 & 0.012 \end{bmatrix}$ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.875 \\ 0.875 & 0.125 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

La valeur de  $\lambda_{11}$  passe de 0.875 à 0.125, ce qui représente une diminution de 85.7 %. Tel que mentionné, cette valeur doit se rapprocher le plus possible de la valeur unitaire. On conclut donc que ce design aurait apporté son lot de difficultés pour atteindre des performances souhaitées si on le compare au système existant.

## **5.6 Conception du système 2×2 et mesure des performances**

Cette prochaine section présente principalement différentes approches de commande pour le système de classificateur. Sur la base que l'objectif est de présenter des méthodes avec différents niveaux de complexité, on choisit donc trois méthodes de commande pour ce système multivariable en débutant par une approche monovariable, ensuite par une méthode de découpleur et finalement avec l'approche décentralisée.

### **5.6.1 Réglages et spécifications pour le contrôle en monovariable**

Cette première approche, bien qu'elle soit déjà en opération sur le système de classification de l'usine, représente néanmoins la plus simple en termes d'implantation mais en dit peu sur les caractéristiques intrinsèques du système, compte tenu du faible besoin d'analyse des propriétés pour poser les spécifications et calculer les réglages.

#### **5.6.1.1 Spécifications pour les réglages en monovariable**

Les spécifications (temporelles) sont basées sur des dynamiques du même ordre de grandeur en boucle ouverte et en boucle fermée. Cette approche permet de respecter les limitations opérationnelles, c'est-à-dire qu'elle permet d'utiliser des plages de variation de consigne et de commande à l'intérieur d'écarts permis. L'algorithme présentement utilisé pour le système de classification et tel que décrit à la section 5.1 repose sur une structure de commande en

boucle fermée pour le contrôle de densité et boucle ouverte pour le contrôle du taux de silice par l'entremise de l'eau de fluidisation.

Une première étape serait donc de mettre la boucle de taux de silice en boucle fermée avec l'actionneur d'addition d'eau de fluidisation. En simulation, la mesure de performance sera supportée par le calcul de variance sur la sortie des variables de procédé (*densité et taux de silice*) et des efforts de commande, notamment le mouvement de la valve et la variation d'eau de fluidisation. La Figure 5.21 présente l'arrangement de l'ancien système vers le nouveau système.

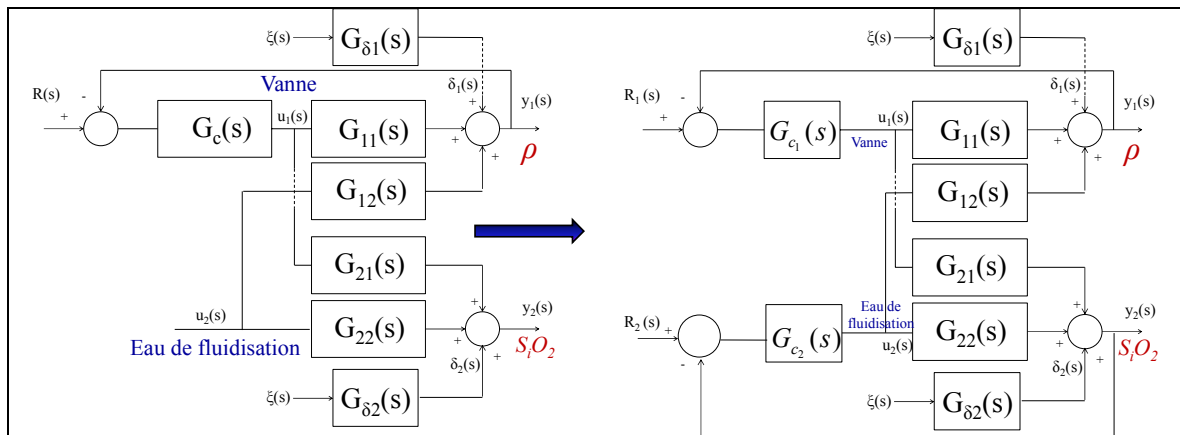


Figure 5.21 Premier système de commande (approche monovariable)

L'analyse des performances du système est réalisée à partir de dix (10) essais, soit :

- En régulation pour compenser le bruit de mesure seulement.
- En poursuite avec des changements de consigne de l'ordre de 0.25 % pour le taux de silice et de 0.25 SPG pour la densité.
- Avec les anciens et les nouveaux réglages pour une spécification en B.F. équivalente à celle en B.O.
- Finalement, en poursuite de façon simultanée (sur les deux boucles).

Tel que mentionné, les simulations ont été effectuées avec les anciens réglages contenus dans les régulateurs du système de contrôle ABB-Bailey®. La notation "anciens réglages" ne



compte en réalité que pour la boucle de densité, la seule à contrôler en boucle fermée (B.F.). La variable de commande, "*l'eau de fluidisation*" et la variable de sortie "*taux de silice*", évoluent en structure de boucle ouverte (B.O.) et à partir des analyses de laboratoire pour la variable du *taux de silice*. Les résultats des simulations du Tableau 5.8 et de la Figure 5.22 montrent l'effet des nouveaux réglages en imposant une spécification de boucle fermée équivalente à celle en boucle ouverte. De façon sommaire, le nouveau réglage propose une dynamique plus lente et moins agressive et ne génère pas de dépassement par rapport à la consigne (*Overshoot*). De plus, le Tableau 5.8 présente l'ensemble des informations pour une comparaison avec les autres méthodes (découplage, décentralisée) de réglage. Il est à noter que la structure de commande actuelle ne contient pas de régulateur pour le couplage de l'eau de fluidisation et la densité. Donc, seulement une partie de cette information pourra être comparée avec les deux autres méthodes de réglage. Les graphiques des simulations sont disponibles à l'ANNEXE VI.

Tableau 5.8 Résultats des essais en simulation (méthode monovariable)

Variables et fonctions	# 1-2 <sup>49</sup>	# 3-4 <sup>50</sup>	# 5-6 <sup>51</sup>	# 7-8 <sup>52</sup>	# 9-10 <sup>53</sup>
Variance commande $u_1$ (avant)	8.92	8.956	13.13	9.39	16.131
Variance commande $u_1$ (après)	0.795	0.7982	1.2890	1.329	1.5098
Écart de variance de commande $u_1$	-91.08	-91.09	-90.18	-85.85	-90.64
Variance sortie $y_1$ (avant)	0.0025	0.0026	0.0058	0.0026	0.0059
Variance sortie $y_1$ (après)	0.0024	0.0025	0.0073	0.0029	0.007
Écart de variance (%) e la sortie $y_1$	-2.620	-2.675	25.707	11.223	19.225
Variance commande $u_2$ (avant)	25.06	5315.5	6856	21421	31872
Variance commande $u_2$ (après)	25.06	5386	6482	22363	28860
Écart de variance de commande $u_2$	0.0	1.3167	-5.449	4.398	-9.45
Variance sortie $y_2$ (avant)	0.0005	0.0005	0.0006	0.004	0.0051
Variance de la sortie $y_2$ (après)	0.0005	0.0005	0.0005	0.0041	0.0044
Écart de variance (%), sortie $y_1$	1.29	1.82	-13.12	2.52	-11.98

<sup>49</sup> Régulation bruit de mesure avec ancien et nouveau réglage (sans contrôleur sur la variable de taux de silice).

<sup>50</sup> Régulation bruit de mesure avec ancien et nouveau réglage (avec contrôleur sur la variable de taux de silice).

<sup>51</sup> Poursuite sur la consigne de densité avec ancien et nouveau réglage (B.F.  $\approx$  B.O.).

<sup>52</sup> Poursuite sur la consigne du taux de silice avec ancien et nouveau réglage.

<sup>53</sup> Poursuite sur les consignes de densité et du taux de silice avec ancien et nouveau réglage.

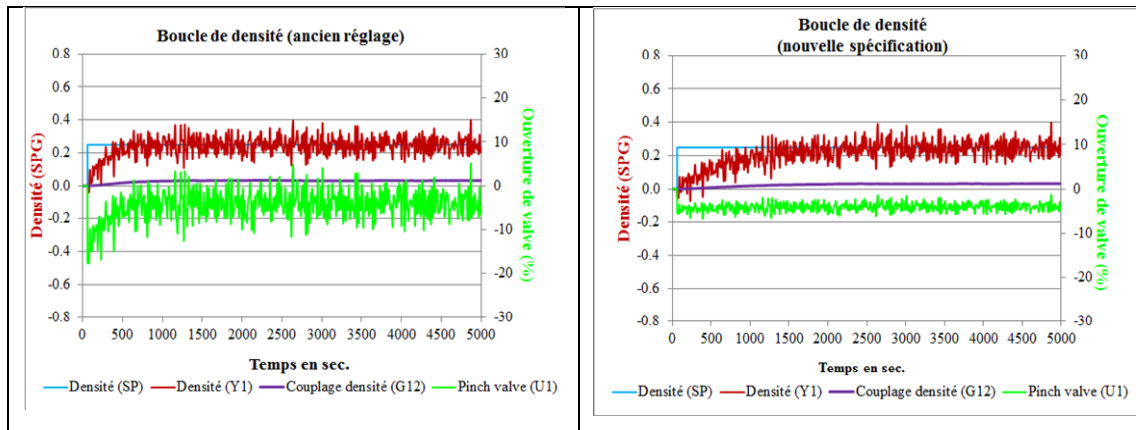


Figure 5.22 Performance du premier système de commande en monovariabale  
Les résultats seront discutés avec ceux des deux autres méthodes à la fin de ce chapitre.

### 5.6.2 Réglages et spécifications pour le contrôle avec découpleurs

Cette nouvelle structure représente un degré de complexité supérieure si on la compare à la structure précédente. Cette deuxième structure de commande ainsi que la troisième qui suivra (décentralisée) permettront de comparer et de valider un critère basé sur la complexité du système. La question demeure la suivante : est-ce qu'augmenter le degré de complexité de la structure favorise également de façon significative la performance du système et ce, dans une approche de validation statistique?

Bien que la structure d'implantation des découpleurs et des réglages ne représente pas un degré de difficultés beaucoup plus élevé, elle peut néanmoins générer certaines difficultés quant à la mécanique qui gouverne les changements opérationnels tels que les passages de boucles ouvertes (B.O.) à boucles fermées (B.F.) ou l'inverse. Également, un facteur important à considérer est celui de la possibilité "d'inverser les fonctions de transfert". Dans le cas que nous traitons, ce problème ne se pose pas mais certaines composantes des fonctions de transfert auraient pu être non-inversibles telles que l'inversion d'un déphase non-minimal (départ en sens inverse).

L'approche de commande par découplage consiste donc à programmer le découpleur pour annuler l'effet du couplage en inversant la fonction de transfert du régime dynamique de la branche principale et en la multipliant par la valeur inverse de signe de la fonction de transfert de l'effet de couplage. La Figure 5.23 présente la configuration d'un découpleur.

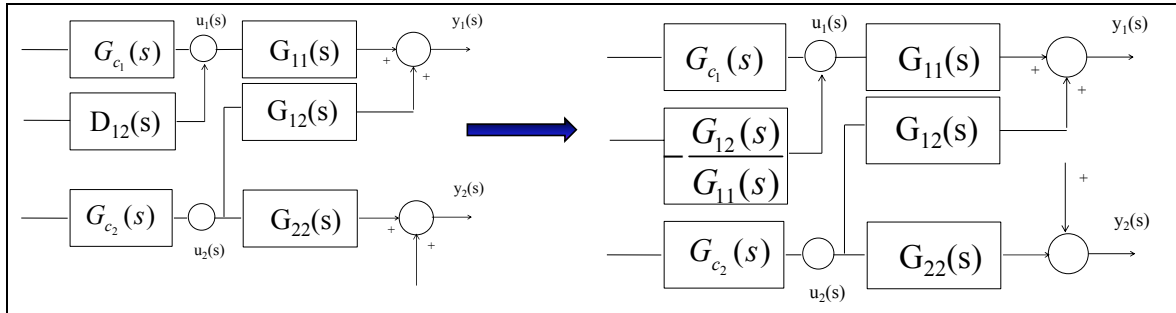


Figure 5.23 Structure algébrique d'un découpleur

#### 5.6.2.1 Spécifications pour les réglages avec découpleurs

La Figure 5.24 présente la structure normalisée de découplage. Les composantes  $D_{11}$  et  $D_{22}$  peuvent être utilisées pour introduire diverses fonctions dans le développement d'une spécification quelconque.

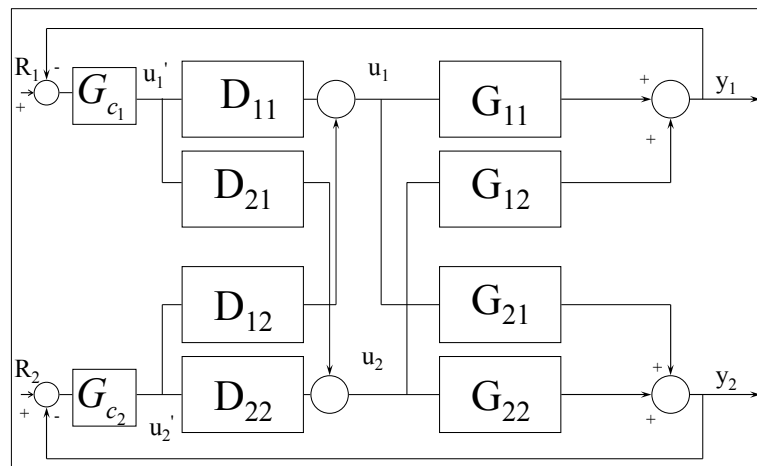


Figure 5.24 Structure de découplage de  $D_{11}$  à  $D_{22}$

Les découpleurs  $D_{12}$  et  $D_{21}$  agissent directement sur les commandes de la valve à pincement et sur l'addition d'eau de fluidisation. Leur conception des découpleurs ne représente pas de problématiques telles que son lien avec les inversions de fonctions de transfert. L'équation (Eq. (5.24)) présente la fonction de transfert du découpleur  $D_{12}$ .

$$D_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{11}} = -\frac{(810s+1)(-0.0002)}{-0.056(846s+1)} = \frac{-0.0036 \times (810s+1)}{(846s+1)} \quad (5.24)$$

Le découpleur  $D_{12}$  pourrait pratiquement être simplifié par seulement la valeur du gain soit -0.0036 compte tenu que les deux constantes de temps sont similaires et que seulement 4% d'écart les sépare. Le découpleur  $D_{21}$  (Eq. (5.26)) quant à lui est typique d'une avance de phase de type "*Lead-Lag*". Par conséquent, l'introduction des découpleurs change la structure du système. Le regroupement des fonctions de transfert forme une nouvelle configuration liée au régulateur  $G_{c2}$ . Cette nouvelle configuration est représentée à la Figure 5.25. L'appellation de la nouvelle fonction de transfert  $G_{22}$  post-régulateur devient donc  $G_{22}^*$ . Cette nouvelle représentation devient nécessaire pour la calibration du régulateur  $G_{c2}$ . Une ré-identification du nouveau système est nécessaire pour calculer les réglages en fonction d'une spécification B.F. vs B.O.

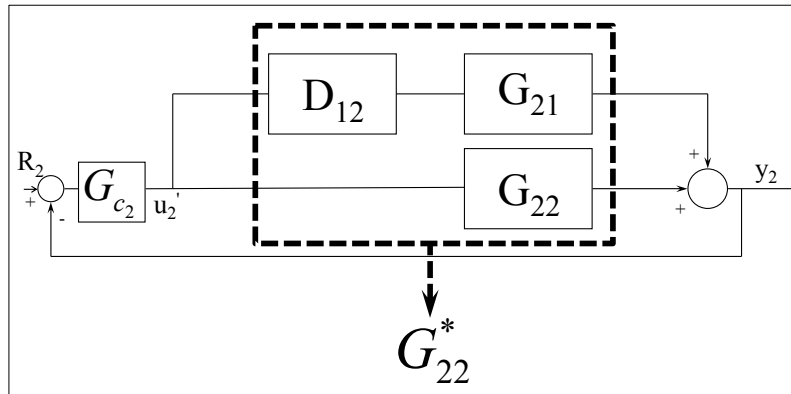


Figure 5.25 Nouvelle représentation de la fonction  $G_{22}^*$

La Figure 5.26 présente le résultat de la nouvelle identification de la fonction de transfert. À partir d'une approche analytique, il est également possible d'additionner les fonctions de transfert et trouver la solution algébrique. Néanmoins, on favorise une ré-identification de la nouvelle fonction de transfert et l'utilisation de modèles de premier ou de deuxième ordre pour simplifier les réglages découlant des spécifications de poursuite et de régulation. La fonction de transfert de  $G_{22}^*$  est présentée à l'équation (Eq. (5.25)).

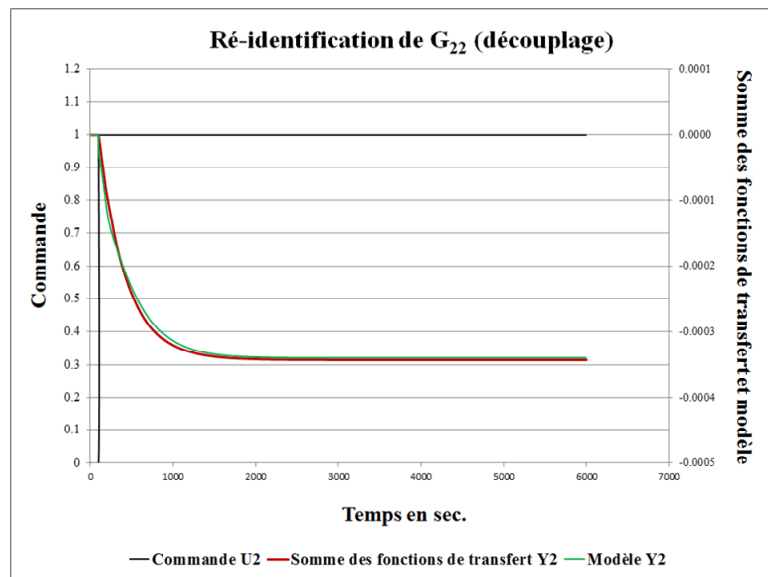


Figure 5.26 Ré-identification du nouveau système  $G_{22}^*$

$$G_{22}^*(s) = \frac{-0.00034}{(270s + 1)^2} \quad (5.25)$$

De manière similaire, le découplage de  $D_{21}$  est calculé sur la même approche que  $D_{12}$  et le résultat est présenté à l'équation (Eq.(5.26)).

$$D_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{22}} = -\frac{(330s + 1)}{-0.0003} \frac{(0.012)}{(282s + 1)} = \frac{40 \times (330s + 1)}{(282s + 1)} \quad (5.26)$$

Le calcul de  $D_{21}$  permet donc de procéder à la ré-identification de la fonction de transfert de  $G_{11}^*$ . La Figure 5.27 présente le résultat de la structure  $G_{11}^*$  et la ré-identification. La Figure 5.28 présente la structure finale de découplage du système.

$$G_{11}^*(s) = \frac{-0.06395}{(504s + 1)^2} \quad (5.27)$$

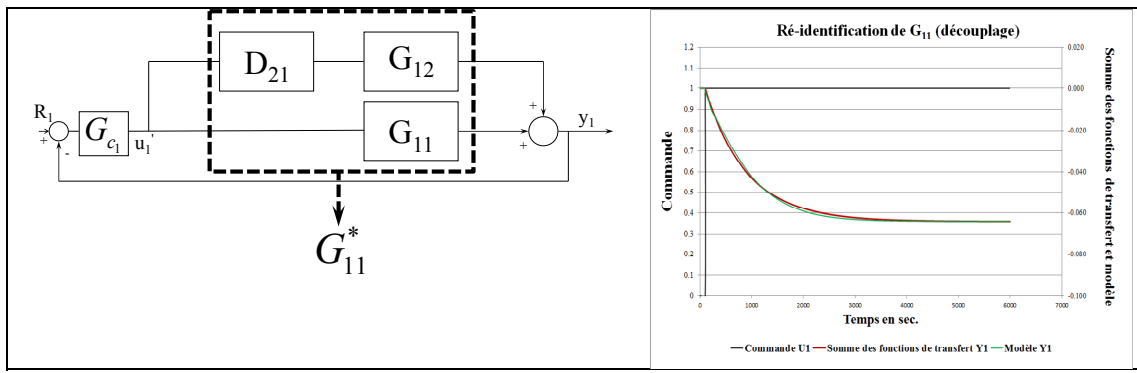


Figure 5.27 Nouvelle représentation de la fonction de transfert  $G_{11}^*$

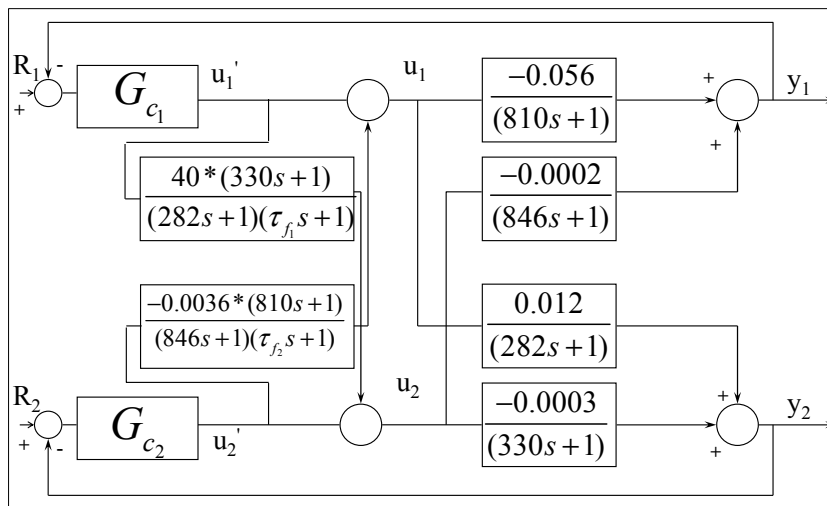


Figure 5.28 Structure de commande avec découpleurs

À partir de la Figure 5.28, les filtres peuvent être ajustés en fonction des efforts de commande souhaités (limitations, saturations, etc.) ou d'autres spécifications proposées. Les

valeurs des constantes de temps sont déduites à partir du théorème des valeurs initiales. Aux conditions limites des fonctions de transfert :

On obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (5.28)$$

En appliquant ce théorème, pour le découpleur  $D_{12}$  on obtient :

$$u_{D_{12}} = \frac{-0.0036 \times 810}{846} \frac{1}{(\tau_{f_2}s + 1)} \quad (5.29)$$

et pour le découpleur  $D_{21}$ , on obtient :

$$u_{D_{21}} = \frac{40 \times 330}{282} \frac{1}{(\tau_{f_1}s + 1)} \quad (5.30)$$

Dans le cas de l'effort relié à  $u_{D_{12}}$  l'effort de commande sur un changement de consigne et avant la filtration, demeure faible (.003 %). Par contre, pour  $u_{D_{21}}$ , une demande moyenne de 50 litres est jumelée au régulateur  $G_{c_2}$ .

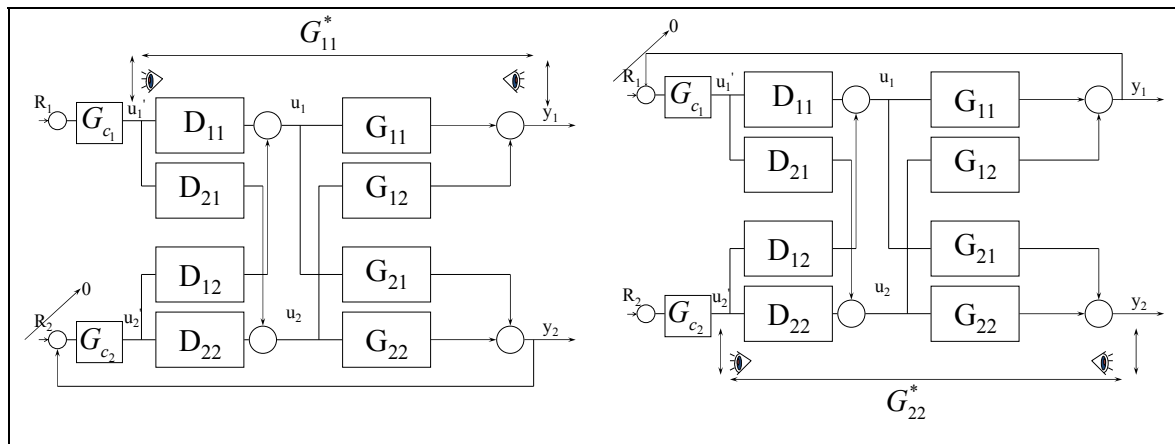
Le Tableau 5.9 résume les résultats des simulations avec la méthode par découplage. Les résultats seront discutés avec ceux des deux autres méthodes à la fin de ce chapitre. Les graphiques de toutes les simulations sont disponibles à l'ANNEXE VI.

Tableau 5.9 Résultats des simulations (méthode monovariable)

	Essai 1 <sup>54</sup>	Essai 2 <sup>55</sup>	Essai3 <sup>56</sup>	Essai 4 <sup>57</sup>
Variance de la commande $u_1$	0.268	0.8309	0.5293	0.3309
Variance de la variable de sortie $y_1$	0.0025	0.0076	0.0025	0.0076
Variance de la commande $u_2$	9977	10860	29595	38819
Variance de la variable de sortie $y_2$	0.0005	0.0005	0.0043	0.0043

### 5.6.2.2 Découplage imparfait

Si d'autres variables avec des comportements dynamiques différents sont impliquées dans la structure de commande, il est possible que certaines portions des fonctions de transfert soient non inversibles. Le découplage devient alors partiel et la structure des fonctions de transferts en amont des régulateurs devient également plus complexe. La Figure 5.29 présente les deux configurations du système pour trouver les équivalences de  $G_{11}^*$  et  $G_{22}^*$ .

Figure 5.29 Évaluation des fonctions  $G_{11}^*$  et  $G_{22}^*$  avec un découplage imparfait

Pour l'évaluation de  $G_{11}^*$ , la première étape consiste à établir le lien entre  $u_1'$  et  $u_2'$ , et par la suite, entre  $y_1$  et  $u_1'$ . À partir du schéma-bloc précédent, on peut écrire :

<sup>54</sup> Régulation avec bruit de mesure (B.F.  $\approx$  B.O.).

<sup>55</sup> Poursuite sur la consigne de densité (même spécification).

<sup>56</sup> Poursuite sur la consigne du taux de silice (même spécification).

<sup>57</sup> Poursuite sur les consignes de densité et du taux de silice (même spécification).



$$u_2' = -G_{c_2} ((G_{22}(D_{22}u_2' + D_{21}u_1') + G_{21}(D_{11}u_1' + D_{12}u_2')) \quad (5.31)$$

Après simplifications :

$$u_2' = \frac{-G_{c_2} (G_{22}D_{21} + G_{21}D_{11})}{(1 + G_{c_2} (G_{22}D_{22} + G_{21}D_{12}))} u_1' \quad (5.32)$$

Également, on peut écrire :

$$y_1 = G_{11}(D_{11}u_1' + D_{12}u_2') + G_{12}(D_{22}u_2' + D_{21}u_1') \quad (5.33)$$

Par substitution, et après simplifications, on peut écrire :

$$\frac{y_1}{u_1'} = \left( (G_{11}D_{11} + G_{12}D_{21}) - \frac{G_{c_2} (G_{11}D_{12} + G_{12}D_{22})(G_{22}D_{21} + G_{21}D_{11})}{(1 + G_{c_2} (G_{22}D_{22} + G_{21}D_{12}))} \right) = G_{11}^* \quad (5.34)$$

Pour l'évaluation de la fonction de transfert  $G_{22}^*$ , de la même façon, on obtient :

$$u_1' = \frac{-G_{c_1} (G_{11}D_{12} + G_{12}D_{22})}{1 + G_{c_1} (G_{11}D_{11} + G_{12}D_{21})} u_2' \quad (5.35)$$

et

$$\frac{y_2}{u_2'} = (G_{22}D_{22} + G_{21}D_{12}) - \frac{G_{c_1} (G_{22}D_{21} + G_{21}D_{11})(G_{11}D_{12} + G_{12}D_{22})}{1 + G_{c_1} (G_{11}D_{11} + G_{12}D_{21})} = G_{22}^* \quad (5.36)$$

### 5.6.3 Réglages et spécifications pour le contrôle en décentralisé

Cette dernière méthode de contrôle multivariable développée dans ce chapitre, intitulée l'approche de commande décentralisée, permet de développer une stratégie de commande similaire à celle en monovariable. Mais dans ce cas, les réglages tiennent compte des interactions de couplage et ceci, sans que des actions de commande supplémentaires soient ajoutées comme celles générées par les découpleurs. La particularité de cette approche réside dans ses propriétés basées sur le calcul des ajustements des régulateurs qui tiennent compte à la fois des spécifications en boucle fermée, des interactions de couplage et des solutions quadratiques qu'elle peut générer. Du point de vue industriel, ce type de contrôleur représente des avantages intéressants quant à sa simplicité d'implantation et d'entretien et également d'un point de vue opérationnel (changement de mode tel que le cascade, l'automatique, le manuel...). Par contre, du côté pratique, les efforts de mise en équation représentent un coefficient de difficulté supérieur aux deux autres techniques, soit le mono variable et le découplage.

#### 5.6.3.1 Spécifications pour les réglages en décentralisé

Les différentes étapes de développement de la structure sont basées sur :

- Le développement des interactions mutuelles en boucle ouverte et fermée.
- Le développement de la perturbation observée par un changement de consigne.
- Le développement du produit de  $G_c G_p$  (en B.O.) en fonction de la spécification.

La Figure 5.30 reprend le procédé de classification dans lequel deux nouvelles variables intermédiaires ( $J'$  et  $z'$ ) sont intégrées pour faciliter le développement des équations d'interactions. Elles permettent également de simplifier la méthodologie et de fournir des repères algébriques.

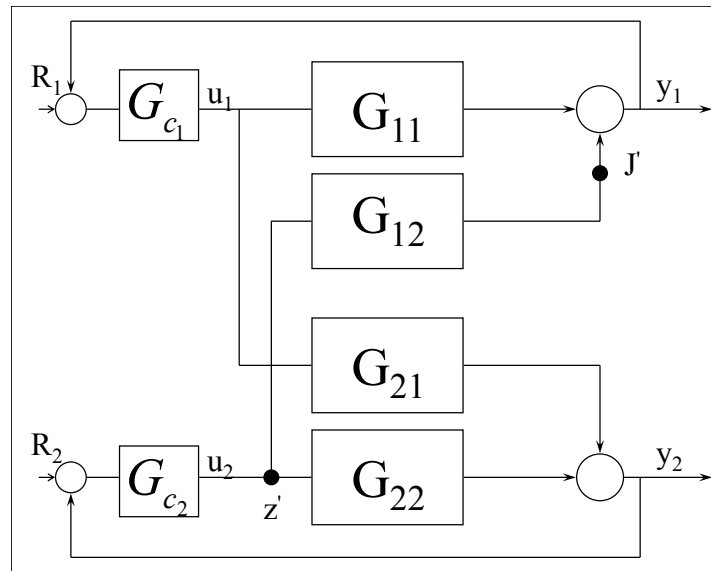
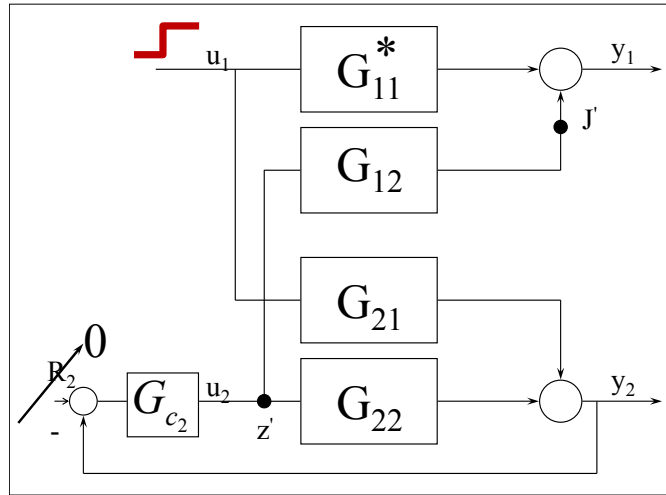


Figure 5.30 Système de variables intermédiaires

L'objectif demeure celui de garder une structure de commande simple avec deux régulateurs proportionnel-intégral (PI) et de tenir compte des interactions entre les boucles et de formuler des spécifications pour le contrôle des deux variables de sortie soit la *densité* et le *taux de silice*. La formulation des spécifications est développée à partir d'une structure en boucle fermée. Néanmoins, les équations sont manipulées pour une structure en boucle ouverte pour le développement de la solution des régulateurs. Chaque boucle est ainsi manipulée et permet de formuler les expressions algébriques post-régulateurs.

La Figure 5.31 présente la structure de la première boucle ouverte pour calculer la fonction de transfert équivalente  $G_{11}^*$  positionnée entre les variables  $y_1$  et  $u_1$ , et également pour l'application d'un changement de commande  $u_1$ .

Figure 5.31 B.O. versus les réglages<sup>58</sup>

Le calcul de la variable intermédiaire  $z'$  devient donc :

$$z' = -G_{c_2} (G_{22}z' + G_{21}u_1) \quad (5.37)$$

D'où on tire, après implications :

$$\frac{z'}{u_1} = -\frac{G_{c_2} G_{21}}{1 + G_{c_2} G_{22}} \quad (5.38)$$

et puisque

$$y_1 = G_{11}u_1 + G_{12}z' \quad (5.39)$$

On peut conclure pour la fonction de transfert équivalente  $G_{11}^*$  avec :

$$\frac{y_1}{u_1} = G_{11} - \frac{G_{12}G_{21}G_{c_2}}{1 + G_{c_2}G_{22}} = G_{11}^* \quad (5.40)$$

<sup>58</sup> Première structure boucle ouverte utilisée pour le développement des réglages.

La même approche est appliquée (Figure 5.32) pour la deuxième boucle ouverte.

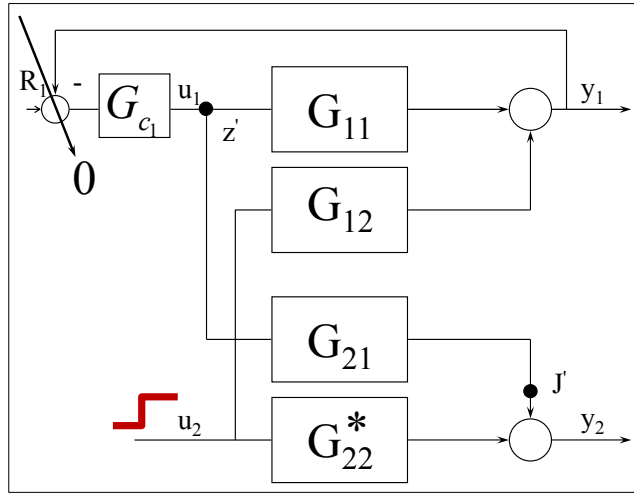


Figure 5.32 Deuxième structure de B.O.<sup>59</sup>

à partir de :

$$z' = -G_{c_1} (G_{11}z' + G_{12}u_2) \quad (5.41)$$

on trouve :

$$\frac{z'}{u_2} = -\frac{G_{c_1} G_{12}}{1 + G_{c_1} G_{11}} \quad (5.42)$$

on obtient donc :

$$\frac{y_2}{u_2} = G_{22} - \frac{G_{12}G_{21}G_{c_1}}{1 + G_{c_1} G_{11}} = G_{22}^* \quad (5.43)$$

---

<sup>59</sup> Deuxième structure boucle ouverte utilisée pour le développement des réglages.

Les régulateurs, les fonctions de transfert et les relations de couplage font tous partie de la structure globale multivariable. La Figure 5.33 présente donc les interactions entre les deux boucles.

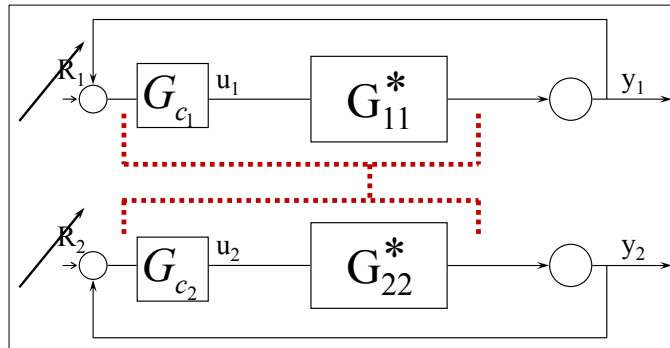


Figure 5.33 Interactions structure multivariable<sup>60</sup>

Sur un changement de consigne (boucle 2) la boucle 1 (en boucle ouverte) perçoit ce changement comme une perturbation (Figure 5.34).

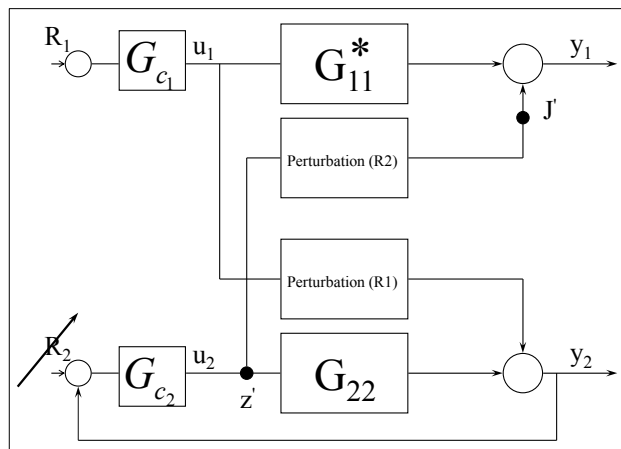


Figure 5.34 Perturbation vue par boucle 1<sup>61</sup>

On peut donc écrire pour le développement de l'expression de la perturbation :

<sup>60</sup> Éléments impliqués dans les interactions de la structure multivariable.

<sup>61</sup> Perturbation vue par la boucle 1 sur un changement de consigne boucle 2.

$$\frac{z'}{R_2} = \frac{G_{c_2}}{1 + G_{c_2} G_{22}} \quad (5.44)$$

Et puisque  $J' = G_{12} z'$ , on obtient alors :

$$\frac{J'}{R_2} = \frac{G_{12} G_{c_2}}{1 + G_{c_2} G_{22}} \quad (5.45)$$

La Figure 5.35 démontre également que la perturbation perçue par la deuxième boucle (en boucle ouverte) possède les mêmes propriétés (Eq. (5.46))

$$\frac{J'}{R_1} = \frac{G_{21} G_{c_1}}{1 + G_{c_1} G_{11}} \quad (5.46)$$

La solution du système s'obtient en imposant des spécifications de boucle fermée sur chacune des boucles de contrôle. La Figure 5.35 présente donc la perturbation vue par la boucle 2 sur un changement de consigne boucle 1.

$$H_i(s) = \frac{G_{c_i}(s) G_{ii}^*(s)}{1 + G_{c_i}(s) G_{ii}^*(s)} \quad (5.47)$$

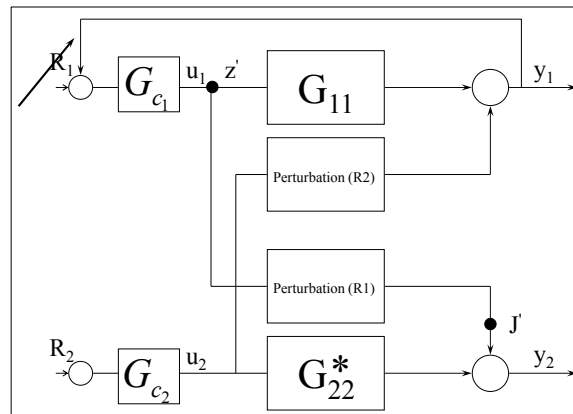


Figure 5.35 Perturbation vs boucle 2

Dans la structure de boucle fermée, on utilise  $G_{11}^*$  pour la fonction de transfert du procédé. Cette méthodologie permet d'intégrer les actions de contrôle mutuelles ainsi que les dynamiques de couplage et de procédé. Découlant d'une formulation du type boucle ouverte avec  $G_{11}^*$ , la solution algébrique des régulateurs  $G_{c_i}$  est dérivée par l'entremise de cette nouvelle fonction.

### 5.6.3.2 Développement de la spécification

La spécification proposée (Eq. (5.48)) et (Eq. (5.50)) doit tenir compte des éléments nocifs dans les fonctions de transfert telles que les déphasages non-minimal, les délais et les pôles instables. D'autres éléments peuvent par contre améliorer le développement de la structure de commande avec des couplages basés sur des dynamiques plus rapides et des délais moins élevés. La spécification générale donne (excluant les zéros positifs) :

$$H_1(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)^2} = \frac{G_{c_1} G_{11}^*}{1 + G_{c_1} G_{11}^*} \quad (5.48)$$

avec

$$G_{11}^*(G_{c_2}) = \frac{G_{11} + G_{c_2} G_{11} G_{22} - G_{c_2} G_{12} G_{21}}{1 + G_{c_2} G_{22}} \quad (5.49)$$

et

$$H_2(s) = \frac{1}{(\tau_2 s + 1)^2} = \frac{G_{c_2} G_{22}^*}{1 + G_{c_2} G_{22}^*} \quad (5.50)$$

avec

$$G_{22}^*(G_{c_1}) = \frac{G_{22} + G_{c_1} G_{11} G_{22} - G_{c_1} G_{12} G_{21}}{1 + G_{c_1} G_{11}} \quad (5.51)$$



En développant  $G_{c_1}$  et  $G_{c_2}$ , on retrouve :

$$G_{c_1}(G_{c_2}) = \frac{H_1(1 + G_{c_2}G_{22})}{(1 - H_1)(G_{11} + G_{c_2}G_{11}G_{22} - G_{c_2}G_{12}G_{21})} \quad (5.52)$$

$$G_{c_2}(G_{c_1}) = \frac{H_2(1 + G_{c_1}G_{11})}{(1 - H_2)(G_{22} + G_{c_1}G_{11}G_{22} - G_{c_1}G_{12}G_{21})} \quad (5.53)$$

Les interactions créent donc un système d'équations non-linéaires (Eq. (5.52) et (Eq. (5.53)).

Pour la résolution du régulateur  $G_{c_1}(G_{c_2})$  et par substitution, on obtient :

$$G_{c_1} = \frac{H_1 \left( 1 + G_{22} \left( \frac{H_2(1 + G_{c_1}G_{11})}{(1 - H_2)(G_{22} + (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})G_{c_1})} \right) \right)}{(1 - H_1) \left( G_{11} + (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \left( \frac{H_2(1 + G_{c_1}G_{11})}{(1 - H_2)(G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})G_{c_1}} \right) \right)} \quad (5.54)$$

Après simplifications, nous obtenons une équation quadratique sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left[ (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})(1 - H_1)G_{11} \right] G_{c_1}^2 \\ & + \left[ (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}H_2)(1 - H_1) - ((G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})(1 - H_2) + H_2G_{11}G_{22})H_1 \right] G_{c_1} \\ & - [G_{22}H_1] = 0 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Et pour la résolution du régulateur  $G_{c_2}(G_{c_1})$  et d'une manière similaire, on obtient :

$$G_{c_2} = \frac{H_2 \left( 1 + G_{11} \frac{H_1(1 + G_{c_2}G_{22})}{(1 - H_1)(G_{11} + (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})G_{c_2})} \right)}{(1 - H_2) \left( G_{22} + (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}) \frac{H_1(1 + G_{c_2}G_{22})}{(1 - H_1)(G_{11} + (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})G_{c_2})} \right)} \quad (5.56)$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left[ (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})G_{22}(1-H_2) \right] G_{c_2}^2 \\
 & + \left[ (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}H_1)(1-H_2) - ((G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})(1-H_1) + H_1G_{11}G_{22})H_2 \right] G_{c_2} \\
 & - [G_{11}H_2] = 0
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

On constate que les deux équations pour les deux régulateurs sont sous la forme quadratique suivante  $\alpha G_{c_i}^2 + \beta G_{c_i} + \delta = 0$ . Les racines des régulateurs nous donnent donc :

$$\begin{aligned}
 R_1^{G_{c_i}} &= \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha} \\
 R_2^{G_{c_i}} &= \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha}
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

L'extraction des racines permet donc de trouver une solution de  $G_{c_i}$ . Par contre, cette approche nuance fortement le sens physique du régulateur et génère un niveau de complexité supérieur à celui escompté dans les objectifs de simplification au départ. Il devient donc difficile d'établir un parallèle d'une approche industrielle tel qu'un intégrateur analogue à un réservoir. Pour cette raison, une approche de simplification de la méthode permettra, de façon itérative de simplifier la solution du système et permettra ainsi de comparer sur une algébrique équivalente, le résultat de cette méthode aux deux autres soit le monovariante et la méthode découplage.

### 5.6.3.3 Simplification de la méthode décentralisée

La section précédente (5.6.3.2) a présenté le développement des réglages des régulateurs à partir de la méthode décentralisée. Les équations (Eq. (5.55)) et (Eq. (5.57)) permettent de constater le '*poids*' que représente la solution des racines des régulateurs. Pour cette raison, une méthode basée sur une simplification de la fonction de transfert  $G_{11}^*$  dans le régime des

basses fréquences permet de simplifier l'expression et de substituer le régulateur dans l'itération #1 de calcul. À partir de la forme canonique de la fonction  $G_{c_2} = \frac{K_c (\tau_i s + 1)}{\tau_i s}$ , et en respectant les conditions limites du régulateur qui sont :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{c_2}(s) = \frac{K_c (\tau_i \times 0 + 1)}{\tau_i \times 0} = \frac{K_c}{0} = \infty \quad (5.59)$$

On conclut que le terme unitaire au dénominateur de  $G_{11}^*$  qui devient négligeable, peut être simplifié, et la nouvelle expression de  $G_{11}^*$  devient donc :

$$G_{11}^* = G_{11} - \frac{G_{12} G_{21} G_{c_2}}{\chi + G_{c_2} G_{22}} \approx G_{11} - \frac{G_{12} G_{21} \times \infty}{\chi + \infty \times G_{22}} \approx G_{11} - \frac{G_{12} G_{21}}{G_{22}} \quad (5.60)$$

Cette étape permet de procéder à une ré-identification de  $G_{11}^*(s)$ , d'introduire son nouveau modèle et d'ajuster les paramètres du régulateur en fonction de la spécification  $H_1(s)$ . La nouvelle valeur de  $G_{c_2}$  permet par la suite d'enclencher la procédure itérative de  $G_{11}^*(s)$  et  $G_{22}^*(s)$ . La Figure 5.36 présente l'algorithme de calcul.

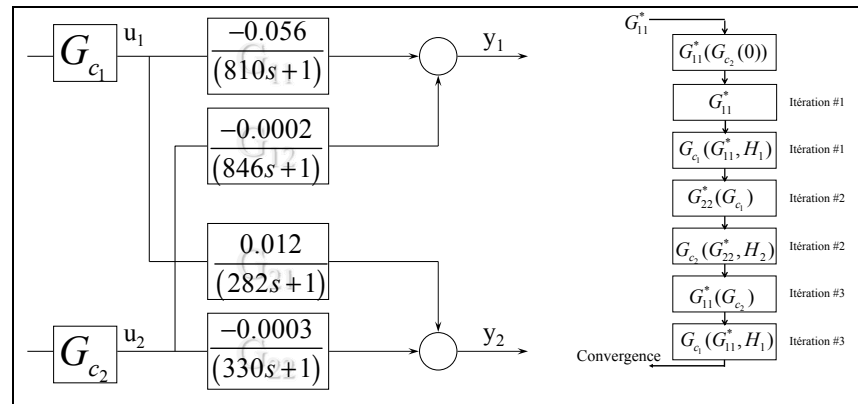


Figure 5.36 Procédure itérative de réglage en décentralisée

Dans le but de respecter les spécifications structurales (type de régulateurs) et temporelles (B.F.  $\approx$  B.O.) et dans le but d'être cohérent avec les approches développées précédemment (approche monovariable et découplage), la méthode décentralisée génère un changement progressif de la spécification temporelle compte tenu que le type de régulateur utilisé et imposé est un proportionnel-intégral (PI).

Le Tableau 5.10 présente les résultats et démontre que les constantes de temps  $\tau_i^*$  et les gains de procédé  $K_{p_i}^*$  des fonctions de transfert post-régulateur évoluent et convergent vers des valeurs stables du système. Néanmoins, cette particularité de la convergence pénalise grandement la performance du système de contrôle. La Figure 5.37 présente l'évolution des constantes de temps et des gains de procédé.

Tableau 5.10 Réglages de  $G_{c_i}(s)$  à partir des modèles  $G_{ii}^*(s)$  (décentralisée)

Itération	$\tau_{1_{G_{11}^*(s)}}^*$	$K_{p_{G_{11}^*(s)}}^*$	$\tau_{i_{G_{11}^*(s)}}^*$	$K_{c_{G_{11}^*(s)}}^*$	$\tau_{2_{G_{22}^*(s)}}^*$	$K_{p_{G_{22}^*(s)}}^*$	$\tau_{i_{G_{22}^*(s)}}^*$	$K_{c_{G_{22}^*(s)}}^*$
0	448	-0.0562	675	-17.9	357.8	-0.0003	545	-3333
1	503	-0.064	755	-15.6	420	-0.0003	630	-2963
2	548	-0.071	822	-14.1	482	-0.0004	722	-2694
3	583	-0.077	874	-12.9	530	-0.0004	795	-2486
4	610	-0.084	916	-12.0	569	-0.0004	854	-2321
5	634	-0.089	951	-11.2	601	-0.0005	901	-2184
6	651	-0.094	977	-10.6	627	-0.0005	940	-2069
7	668	-0.099	1002	-10.1	649	-0.0005	973	-1970
8	682	-0.104	1024	-9.6	668	-0.0005	1001	-1884
9	695	-0.1084	1043	-9.2	6895	-0.0005	1033	-1809
10	706	-0.1127	1060	-8.9	701	-0.0006	1052	-1742

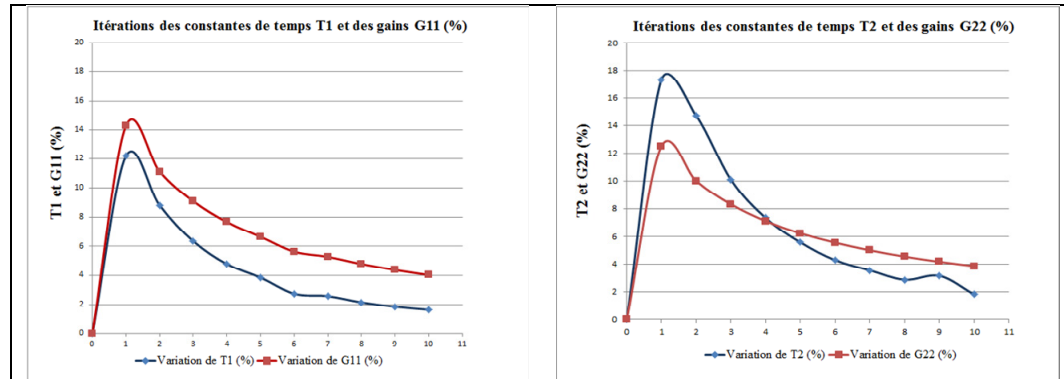


Figure 5.37 Variations en (%) de  $\tau_{i_{G_{ii}^*}(s)}$  et de  $K_{p_{G_{ii}^*}(s)}$  des fonctions de transfert  $G_{ii}^*$

Afin de se rapprocher le plus possible des spécifications de contrôle des deux autres méthodes (monovariable et découplage), ce sont les résultats des simulations obtenus à partir des itérations #2 pour la fonction de transfert  $G_{11}^*(s)$  et #1 pour  $G_{22}^*(s)$  de la méthode décentralisée qui sont retenus. Les résultats comparatifs des itérations 1 et 10 sont présentés à la Figure 5.38.

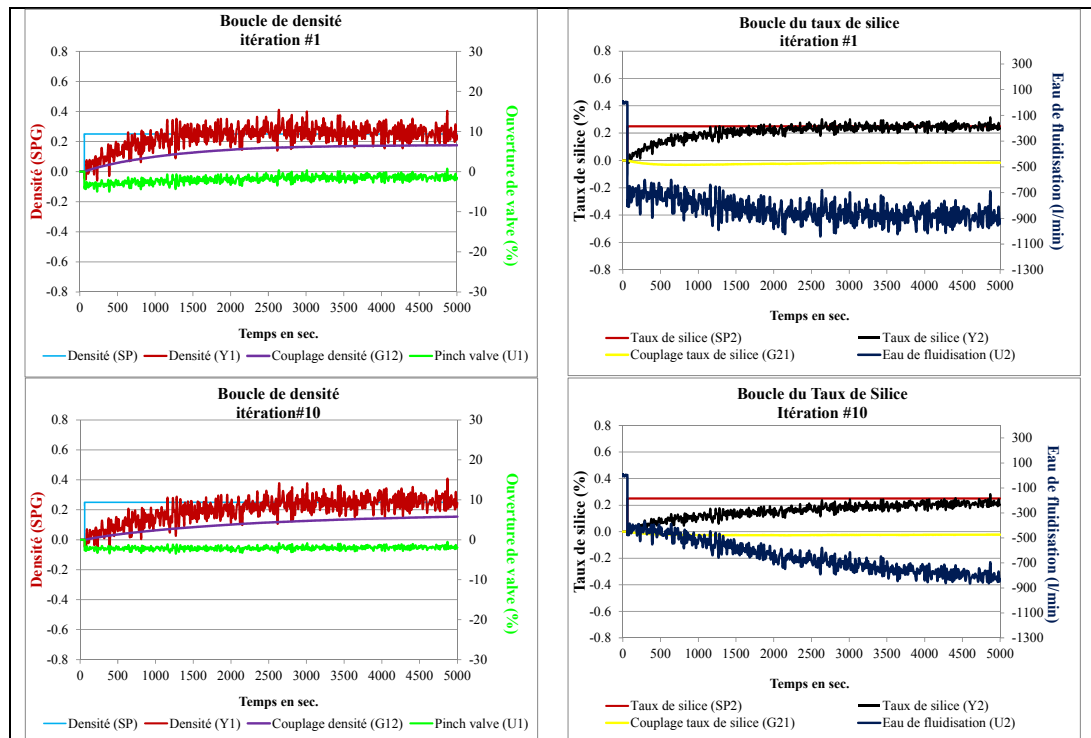


Figure 5.38 Comparaison des résultats en décentralisée des itérations #1 et #10

Tableau 5.11 Résultats des essais en simulation (méthode décentralisée)

	Essai 1 <sup>62</sup>	Essai 2 <sup>63</sup>	Essai3 <sup>64</sup>	Essai 4 <sup>65</sup>	Essai 5 <sup>66</sup>
Variance de la commande ( $u_1$ )	0.486	0.9167	1.063	0.9602	0.3309
Variance de la variable de sortie ( $y_1$ )	0.0025	0.0077	0.0028	0.0076	0.008
Variance de la commande ( $u_2$ )	4295	5558	19410	27367	27917
Variance de la variable de sortie ( $y_2$ )	0.0005	0.0005	0.0043	0.0046	0.0039

## 5.7 Présentation et analyse des résultats

En se référant au mode opérationnel de l'usine de bouletage, les consignes sont habituellement changées séparément et espacées dans le temps. Même si l'ensemble des possibilités opérationnelles ont été couvertes en simulation, l'analyse portera sur les changements de consigne de la variable de *densité* et du *taux de silice* de façon séparée. Puisque les spécifications sont basées sur une approche (B.F.  $\approx$  B.O.) et que les variances des variables de sorties sont statistiquement les mêmes (les tests statistiques le démontreraient), l'analyse de performance se penche plus vers les efforts de commande. De façon globale, et en tenant en compte des efforts de programmation des trois méthodes, la méthode en décentralisée démontre un certain avantage même si les efforts de commande de la méthode découplage sont légèrement moins élevés pour la variable de commande  $u_1$ . D'un point de vue industriel, la notion d'entretien et de complexité des programmations représente un poids important dans les critères de conception. Ceci justifie que la méthode décentralisée serait probablement retenue presque toujours.

---

<sup>62</sup> Régulation avec bruit de mesure (B.F.  $\approx$  B.O.).

<sup>63</sup> Poursuite sur la consigne de densité (même spécification).

<sup>64</sup> Poursuite sur la consigne du taux de silice (même spécification).

<sup>65</sup> Poursuite sur les consignes de densité et du taux de silice (première itération de la méthode décentralisée).

<sup>66</sup> Poursuite sur les consignes de densité et du taux de silice (dernière itération de la méthode décentralisée).

Tableau 5.12 Résultats des essais de contrôle en simulation (décentralisée)

Variance	Monovariable <sup>67</sup>	Découplage <sup>68</sup>	Décentralisée <sup>69</sup>
<b>Consigne de densité</b>			
Variance de la commande ( $u_1$ )	1.29	0.831	0.917
Variance de la commande ( $u_2$ )	6482	10860	5558
Variance de la variable de sortie ( $y_1$ )	0.0073	0.0076	0.0077
Variance de la variable de sortie ( $y_2$ )	0.0005	0.0005	0.0005
<b>Consigne du taux de silice</b>			
Variance de la commande ( $u_1$ )	1.33	0.53	1.064
Variance de la commande ( $u_2$ )	22363	29595	19410
Variance de la variable de sortie ( $y_1$ )	0.003	0.003	0.003
Variance de la variable de sortie ( $y_2$ )	0.004	0.0043	0.0043

## 5.8 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a d'abord présenté un résumé des principaux éléments du chapitre précédent. Par la suite, on a fait état de la structure de commande actuelle du système. Une analyse exhaustive a été présentée pour le choix stratégique des variables de commande. La notion de couplage a été introduite pour aborder plus en profondeur l'aspect multivariable du système. Afin de bonifier la section d'identification du Chapitre 3, des modèles stochastiques ont été développés. Finalement, les trois méthodes de commande ont été développées et évaluées à partir des simulations en régulation et en poursuite et ce, à partir de critères de performance et certains aspects industriels tels que la complexité de la structure de la programmation.

---

<sup>67</sup> Régulation avec bruit de mesure (B.F.  $\approx$  B.O.).

<sup>68</sup> Poursuite sur la consigne de densité (même spécification).

<sup>69</sup> Poursuite sur la consigne du taux de silice (même spécification).





## CHAPITRE 6

### SUIVI DE PERFORMANCE ET ASPECTS ÉCONOMIQUES

Dans le Chapitre 5, on a présenté le processus de commande multivariable du système de classification gravimétrique. De la structure actuelle de commande, en passant par les différentes techniques d'analyse appropriées pour ce système, trois méthodes de commande ont été validées et les résultats ont été comparés. Le Chapitre 6 présente l'étape suivante, celle du contrôle de qualité des variables stratégiques. De plus, le volet économique lié à l'impact des variables de qualité et de commande sera également abordé. La Figure 6.1 présente cette quatrième et dernière étape du processus d'analyse, de réconciliation, de contrôle et de suivi statistique du système.

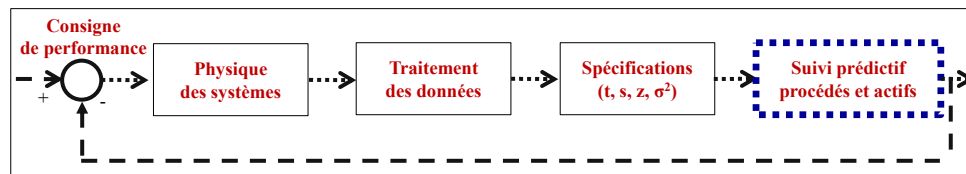


Figure 6.1 Processus d'analyse du système observé (suivi prédictif)

#### 6.1 Le contrôle statistique

Il est admis que des conditions d'opération non optimisées pour un procédé industriel peuvent générer une sous-utilisation par rapport à la capacité nominale de production. Dans notre contexte spécifique, ceci occasionne des coûts très élevés compte tenu des pertes de productivité (Tong, 1997a). Cette problématique rend le suivi rigoureux des variables stratégiques (entrants ou extrants) pertinent et essentiel. Ce suivi en temps réel peut nous assurer du comportement du procédé. Parmi les techniques que les industriels mettent en application pour suivre les critères qualité, le contrôle statistique des procédés (CSP) est une des méthodes utilisées. Or, dans le cas des procédés avec plusieurs critères de qualité, la multiplication des cartes de contrôle nuit à leur usage et constitue une sérieuse contrainte à leur emploi (Tong, 1997b).

Dans ce dernier chapitre de cette thèse, le principal objectif est de démontrer que l'usage d'une fonction de désirabilité permet de construire un scalaire qui représente en quelque sorte un "compromis" entre les différents critères de qualité ou de performance du procédé. Également, que cette fonction est parfaitement adaptée pour être employée dans un suivi statistique avec une carte de contrôle dont l'usage est commun et très répandu dans l'industrie.

En effet, une carte de contrôle est avant tout un outil visuel pour suivre la stabilité (ergodicité) dans le temps d'un processus dynamique et de s'assurer qu'il est sujet uniquement à ses propres variations inhérentes. Ainsi, toute cause spéciale de variation se traduira par une alerte sur la carte. Nous conjecturons que cette méthode nous permettra de suivre en temps réel les performances des systèmes (gestion statistique des écarts de performance par rapport à des consignes et l'établissement des seuils d'alarme) dans un environnement industriel caractérisé et réel<sup>70</sup>.

Finalement, un contrôle multivariable du procédé simplifierait l'analyse des données et permettrait alors de définir une zone de fonctionnement optimale en fonction des contraintes de production et de qualité. De plus, l'application d'un système de contrôle statistique aux règles de commande et d'optimisation d'un système multivariable permettra de prévoir le comportement du procédé et ainsi éviter des défaillances.

## 6.2 La fonction de désirabilité

La fonction de désirabilité, notée  $d_i(Y_i) \in [0,1]$ , a été développée à l'origine par Harington (Harington, 1965) et adaptée par Derringer (Derringer *et al.*, 1980). Elle exprime le degré de satisfaction par rapport au comportement temporel d'une variable observable  $Y_i$ . Les valeurs

---

<sup>70</sup> Par "Gestion Statistique" nous désignons une nouvelle manière pour établir des consignes pour les contrôleurs. Nous pensons que c'est une innovation et que nous sommes, à notre connaissance, les premiers à l'avoir réalisée dans l'industrie minière.

0 et 1 indiquent respectivement le plus bas et le plus haut niveau de satisfaction. Sa morphologie peut être différente en fonction des seuils de tolérance pour la variable  $Y_i$ <sup>71</sup>.

Le choix de la fonction de désirabilité  $d_i$  pour chaque sortie  $Y_i$  est dicté par des considérations économiques et pratiques. Nous avons adopté une fonction basée sur trois types de zones telles qu'illustrées à la Figure 6.2. La zone 1 indique la zone qui correspond à une parfaite satisfaction. Elle est bornée entre la Limite de Tolérance Inférieure  $LTI_i$  et la Limite de Tolérance Supérieure  $LTS_i$ . Tout procédé à l'intérieur de ces spécifications  $[LTI_i \& LTS_i]$  sera considéré comme idéal et par conséquent, nous accordons une valeur de désirabilité égale à 1. Les zones de type 2 et 3 correspondent à une légère détérioration des performances du procédé. Elles sont bornées entre la Tolérance Inférieure  $TI_i$  et la Limite de Tolérance Inférieure  $LTI_i$  soit  $[TI_i \& LTI_i]$  pour la zone 2 et la Tolérance Supérieure  $TS_i$  et la Limite de Tolérance Supérieure  $LTS_i$  soit  $[TS_i \& LTS_i]$  pour la zone 3. Dans ces zones, la dégradation des performances est accélérée en fonction de l'éloignement des limites de la zone 1.

Finalement, les deux zones 4 et 5 sont considérées comme "hors tolérance". La limite inférieure correspond à la zone définie par  $Y_i \leq TI_i$ , et la limite supérieure à celle définie par  $Y_i \geq TS_i$ . Dans ces zones, la dégradation a déjà atteint une faible désirabilité ( $\approx 0.2$ ) et le choix d'un comportement asymptotique pour décrire cette zone de la variable traitée est retenu. En effet, au-delà des limites  $[TI_i \& TS_i]$ , les coûts sont généralement constants. Pour satisfaire aux critères des cinq zones et garantir la continuité et un comportement asymptotique, nous avons adopté une série de fonctions exponentielles à deux paramètres : un paramètre d'échelle  $\beta_{ij}$  et un paramètre de forme  $\tau_{ij}$  pour chaque zone  $i$ . Signalons que

---

<sup>71</sup> Nous référerons le lecteur aux travaux de Derringer pour une revue pédagogique de la fonction de désirabilité (Derringer et *al.*, 1980).

les deux zones du type 2 et 3 ne sont pas nécessairement symétriques. Idem pour les deux zones de types 4 et 5.

Pour déterminer les seuils  $TI, LTI, LTS, TS$  et les valeurs de désirabilité qui leur correspondent, un critère tenant compte des aspects économiques de la rentabilité, des non-conformités des facteurs de qualité, de pertes reliées à des indices de performances est développé à cette fin. À partir de ces valeurs, les paramètres  $\beta_{ij}$  et  $\tau_{ij}$  sont identifiés par la méthode de maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood*).

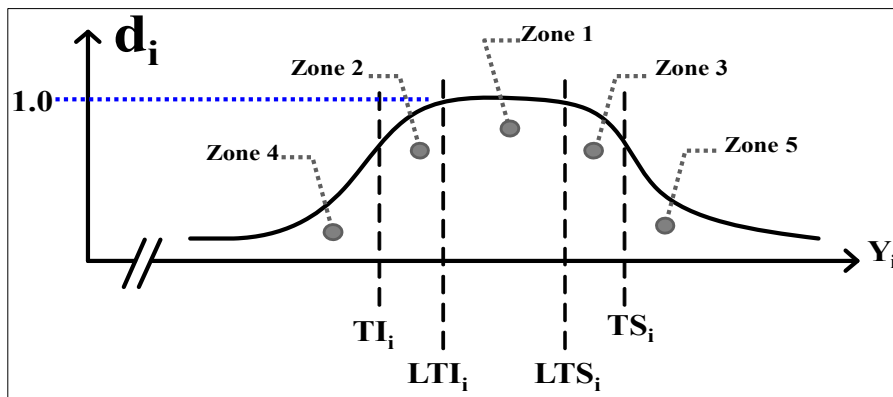


Figure 6.2 Fonction de désirabilité représentant les cinq zones

Bien que des efforts importants aient été consacrés à cette partie de ce chapitre, le contexte opérationnel, du point de vue des données accessibles, ne permettait pas de produire, avec un degré de confiance acceptable, les modèles tels que présentés au paragraphe précédent. Adapté à notre réalité et toujours dans un contexte où l'objectif est d'intégrer de nouvelles notions à caractère innovant, les fonctions algébriques qui ont été retenues sont assemblées à partir de segments de droite. Ces fonctions se rapprochent de manière satisfaisante de nos conditions opérationnelles. La Figure 6.3 présente les trois types d'information pour la variable *ratio de bentonite* soit :

1. La **performance opérationnelle** (---, noir) telle que programmée sur les anciens contrôleurs (pas de zone cible mais plutôt une valeur 'consigne').

2. La **désirabilité opérationnelle** (---, vert) qui présente une ‘adaptation’ de la performance opérationnelle pour introduire la notion d’un palier (zone 1).
3. La **désirabilité modèle** (---, rouge) qui traduit le ‘souhait’ du procédé tel que défini par un groupe d’experts.

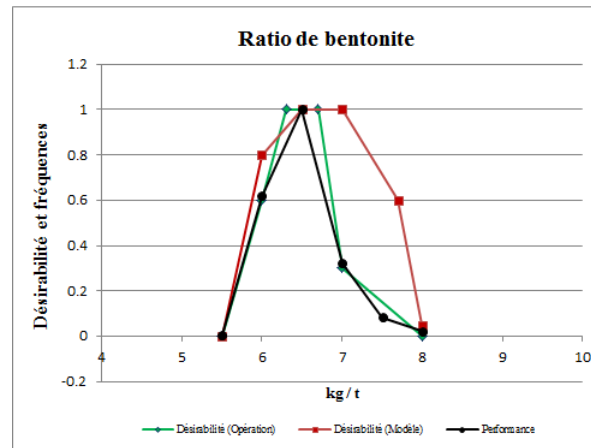


Figure 6.3 Désirabilité (ratio bentonite)

On constate rapidement à travers l'exemple précédent les différences significatives (et le potentiel d'amélioration des performances) qui peuvent découler d'une application de la notion de désirabilité non pas uniquement dans le suivi de la qualité des procédés, mais dans les boucles de contrôle également. L'ensemble des fonctions de désirabilité est présenté à l'ANNEXE VII.

Dans le cas d'un procédé qui regroupe plusieurs variables stratégiques, une fonction de désirabilité globale  $D$  peut être définie pour tenir compte de l'appréciation globale d'un critère. Elle permet donc de convertir un ensemble de réponses en un scalaire qui reflète une appréciation globale du procédé. Ainsi, la désirabilité permet dans un contexte de recherche d'optimalité de regrouper une structure multivariable d'un procédé combinée à des objectifs économiques diversifiés, en trouvant la combinaison des paramètres qui maximisent la désirabilité globale  $D$  du critère. Cette combinaison peut être additive ou une sorte de moyenne arithmétique (Wu *et al.* 2005). Dans le cas que nous traitons, une fonction additive pondérée (Kros *et al.*, 2004) a été retenue telle qu'illustrée à l'équation (Eq. (6.1)).

$$D = \sum_{i=1}^n p_i d_i \quad (6.1)$$

La pondération  $p_i$  représente le poids associé à l'importance de la variable  $Y_i$  sur le comportement global du procédé avec  $\sum p_i = 1$ .

Dans ce chapitre, l'ébauche d'une étude économique est présentée. Elle permet de mettre en valeur la notion de la désirabilité. Le caractère économique du critère lié aux variables de qualité et de commande permet d'établir de fortes corrélations entre les pondérations  $p_i$  et l'aspect monétaire des problématiques en jeu.

Tel que présenté à la Figure 6.1, le suivi statistique de procédé par le biais de la désirabilité représente un avantage important quant au nombre de variables traitées et des combinaisons pouvant être effectuées. Un des principaux points soulevé si on le compare au suivi statistique (CSP) classique est que les moyennes et les variances ne sont pas réévaluées et réadaptées en temps réel et ne peuvent en conséquence être biaisées ou affectées par des données aberrantes. D'un point de vue statistique, la pondération  $p_i$  permet à chacune des variables impliquées dans le traitement de l'information d'imposer son importance et sa contribution dans le critère.

Dernière étape de la chaîne de traitement de l'information (voir Figure 6.1), la désirabilité prépare la mise en place de l'utilisation d'une carte de contrôle pour le suivi statistique du critère (aspect qualité). Également, et c'est notre principale contribution, nous proposons l'emploi de la désirabilité directement dans les algorithmes de commande<sup>72</sup>. Cette nouvelle approche permet de diminuer les actions des régulateurs dans le bruit à haute fréquence et ce, de façon significative.

---

<sup>72</sup> Utiliser la zone unitaire (zone 1) comme une plage de consigne plutôt qu'une consigne fixe.

### 6.3 L'utilisation des cartes de contrôle EWMA

La carte EWMA (*Exponentially-Weighted Moving Average*) a été retenue pour le suivi du procédé. Cette dernière est utilisée généralement pour détecter des petits changements de points d'opération (valeurs moyennes) d'un procédé. Elle est considérée comme une carte "robuste" ne réagissant pas aussi rapidement aux grands changements comparativement à la carte CuSum<sup>73</sup> par exemple. Elle permet également d'assurer un suivi et de prédire des dérives ou des désajustements. Elle permet ainsi de corriger très rapidement les déviations de procédé, et devient donc très utile pour le contrôle de procédé et en automatisation.

Dans le cas des cartes traditionnelles, comme  $\bar{X}-R$ ,  $\bar{X}-s$  et  $X-MR$ , tous les points possèdent un poids égal comparativement aux cartes EWMA où les données les plus récentes ont plus de poids que les précédentes selon un facteur de pondération. On favorise donc l'historique récent du procédé en augmentant sa pondération vis-à-vis l'historique 'lointain'. Cette carte fut introduite la première fois par *Roberts* (1959) et les données sont évaluées par la formulation suivante en utilisant un facteur « poids »  $\lambda$  :

$$C_i = \lambda \cdot y_i + (1-\lambda) \cdot y_{i-1} \quad (6.2)$$

Cette formulation constitue en quelque sorte un filtre du premier ordre (gain unitaire) dans le plan  $z$  (Eq. (6.3)) et de la forme :

$$\frac{C(z)}{y(z)} = \frac{\lambda}{(1-(1-\lambda)z^{-1})} \quad (6.3)$$

où  $a = 1 - \lambda$ . La forme simplifiée nous donne :

$$\frac{C(z)}{y(z)} = \frac{1-a}{(1-az^{-1})} \quad (6.4)$$

---

<sup>73</sup> Cumulative Sum (carte à somme cumulée).

En raison du poids accordé aux plus récentes valeurs  $y_i$  ( $\lambda \in [0.2-0.5]$ ), l'augmentation de la moyenne est mise en évidence<sup>74</sup>. La formulation récursive générale est donc :

$$C_i = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j y_{i-j} + (1-\lambda)^i \cdot C_0 \quad (6.5)$$

où,  $C_0$  est la valeur cible du processus ( $\mu_0 = C_0$ ). La variation dans ce cas n'est plus constante, elle est fonction du temps (indice de l'échantillon). On calcule la variance à un instant  $i$  :

$$\sigma_{C_i}^2 = \sigma_{y_i \text{ ou } D_i}^2 \cdot \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \cdot [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (6.6)$$

Les limites de contrôle (qui sont en fonction également de la variation « locale ») sont calculées avec les formulations :

$$LCS_i; LCI_i = C_0 \pm 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \approx C_0 \pm 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \quad (6.7)$$

Les limites de contrôle permettent l'utilisation des '*règles de contrôle*', ce qui se traduit par un système d'alarme qui nous indique quand la moyenne du procédé a subi une permutation significative et que des ajustements et/ou une correction sont à effectuer. La différence entre la prévision et la valeur cible de la moyenne indique de combien l'ajuster (Montgomery, 2001). La Figure 6.4 présente un exemple de la variable '*ratio de bentonite*' en contrôle de qualité et supporté par la carte EWMA.

---

<sup>74</sup> Les valeurs les plus récentes ont plus de poids, selon un facteur de pondération. Par exemple, pour un poids  $\lambda=0.2$ , alors le point le plus récent a un poids de 0.2 et l'ensemble des points antérieurs possède un poids de 0.8. Chaque point a donc de moins en moins de poids selon son vieillissement. Pour des facteurs de pondération plus élevés, les valeurs *EWMA* ressemblent aux valeurs individuelles ou moyennes initiales.



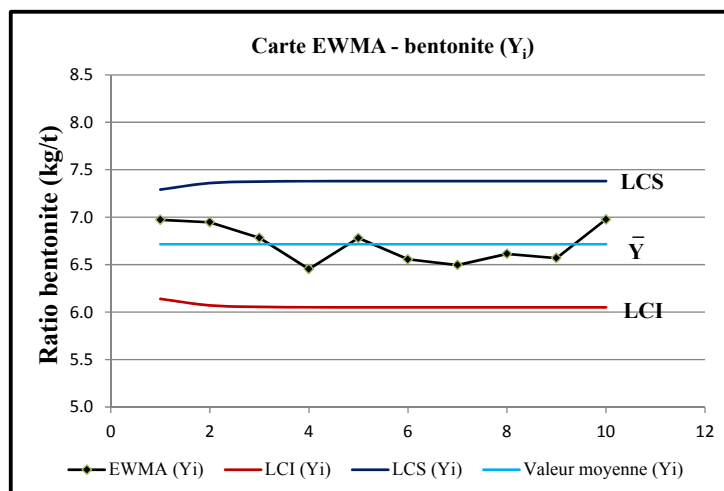


Figure 6.4 Exemple d'une carte EWMA<sup>75</sup>

#### 6.4 Potentiel économique des variables de qualité et de commande

Les étapes de modélisation, de traitement et réconciliation des données et de contrôle étant complétées, l'application de la désirabilité est introduite en mettant l'accent sur l'aspect économique. Bien qu'une grande partie de nos travaux ait été orientée spécifiquement sur le *classificateur hydraulique*, l'étude économique porte, autant que possible, sur les impacts et le rôle qu'exerce le classificateur **sur toute la chaîne de contrôle**; c'est-à-dire de la classification des particules d'hématite et de silice jusqu'au durcissement des boulettes cuites. De façon conceptuelle, le classificateur hydraulique représente une étape dans la préparation du concentré mais son rôle est parfois mal défini. Il n'est malheureusement pas utilisé comme un élément d'action (actionneur de commande) faisant partie d'une synergie globale de commande basée sur des rendements économiques de production.

Cette étude permet donc de jeter les premiers jalons qui, *sans couvrir tous les aspects détaillés du bilan de matière incluant les deux lignes de production*, permettra quand même d'initier une démarche innovante en considérant les impacts monétaires d'une meilleure gouvernance des opportunités qui s'offrent à nous.

<sup>75</sup> Exemple d'un contrôle de la variable 'bentonite' avec une carte EWMA.

Nous tenons à rappeler au lecteur qu'établir un lien direct entre variable qualité et coût à travers la fonction de désirabilité n'est pas une tâche facile. Dans certains cas, des contraintes d'ordre pratique (ou d'accessibilité) nous limitent. À titre d'exemple, nous citons un cas typique des procédés de pyrométallurgie : le rôle du *taux de silice* et son impact économique dans la production de boulettes d'oxyde fer. En effet, plusieurs observations d'experts suggèrent un rôle important que joue le *taux de silice* ( $\text{SiO}_2$ ) dans les produits spéciaux tels que la boulette à basse teneur en silice (BBS). Ces observations montrent un potentiel économique, d'où la nécessité d'établir des critères qualité relativement strictes pour optimiser la quantité d'énergie consommée lors de l'opération de cuisson. Pratiquement, l'exercice économique consiste, à partir d'un bilan de matière orienté principalement sur le *taux de silice* ( $\text{SiO}_2$ ) et sur les éléments traces tels que l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), d'établir des liens potentiels entre ces éléments traces dans les boulettes cuites d'oxyde fer ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) et la gouvernance du classificateur.

Un des premiers éléments qui retient l'attention et qui représente un phénomène connu dans le domaine des procédés de pyrométallurgie<sup>76</sup>, c'est le rôle que jouent certains **rapports de minéraux** tels que le ratio entre le *taux de silice* et le *taux d'alumine* que l'on nomme S/A. Certaines observations effectuées sur la consommation spécifique du mazout (litres/tonne) versus le rapport (S/A) pourraient potentiellement représenter des pistes intéressantes des liens qui existent entre la consommation de mazout et le facteur minéral S/A.

Or, et en raison d'un manque d'informations et de données mesurées telles que les débits de gaz qui sont des éléments fondamentaux liés aux quantités d'énergie et de masse qui sont véhiculées, on ne peut conclure de façon directe qu'il existe une corrélation statistiquement significative entre ces deux variables (voir Figure 6.5). Toutefois, nous pensons que le facteur S/A pour la production de la boulette BBS demeure un élément clef du point de vue du contrôle de qualité.

---

<sup>76</sup> e.g. Fabrication du "clinker" de ciment.

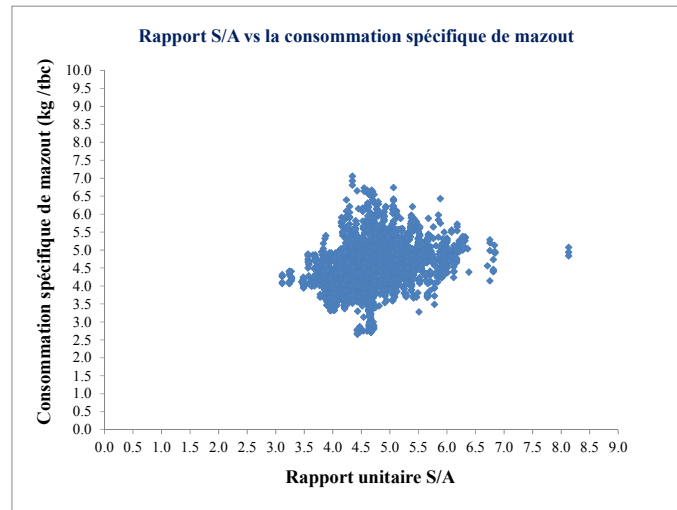


Figure 6.5 Exemple de ratio S/A<sup>77</sup>

D'une manière générale et comme méthodologie, nous adoptons la modélisation "*financière*" par un modèle simplifié qui sera implanté et validé par la suite. La prochaine section met donc l'accent sur l'aspect économique de la supervision. De façon schématique, la Figure 6.6 présente les sources d'addition de silice et d'alumine en fonction de l'écoulement de la matière, du classificateur jusqu'au four de cuisson.

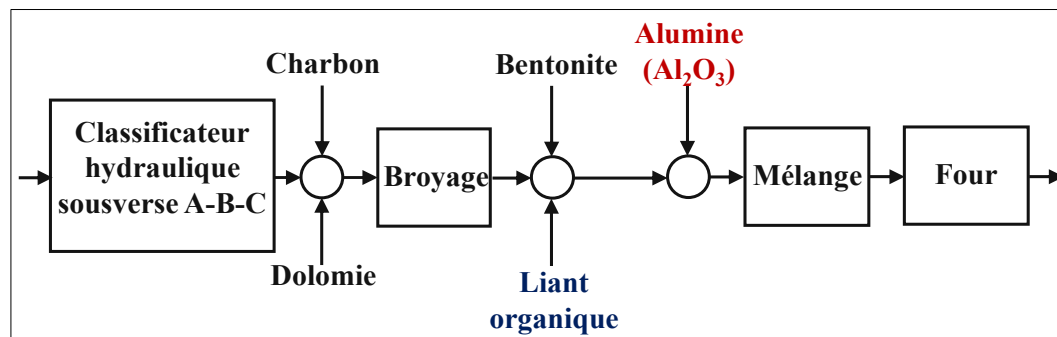


Figure 6.6 Schéma des sources d'addition de la silice et de l'alumine (additifs)

<sup>77</sup> Exemple de données de consommation spécifique versus le ratio S/A.

#### 6.4.1 Développement du modèle économique simplifié

La poussière de coke<sup>78</sup>, la dolomie et la bentonite sont des matières premières qui contiennent des quantités non négligeables de silice et d'alumine et qui sont employées dans la production de boulettes d'oxyde de fer. Les conditions opérationnelles pour la fabrication des produits spéciaux tels que la BBS, obligent l'utilisation de ces additifs. Leurs proportions par rapport au tonnage manipulé pour la fabrication des boulettes crues sont calculées selon des recettes propres à l'usine de bouletage. De cette façon et de manière indirecte, on impose le ratio S/A compte tenu des proportions des teneurs de silice et d'alumine dans ces matières premières.

Toujours en fonction des conditions opérationnelles, des contraintes de qualité sont imposées par les clients et doivent être respectées. Néanmoins, si ces contraintes étaient supervisées dans le but de minimiser un critère qui inclut les coûts reliés au contrôle de la silice (au classificateur) et de la consommation spécifique de mazout (également un élément de commande), le contrôle de la silice deviendrait en quelque sorte *l'élément d'action au sens propre du contrôle de procédé en boucle fermée*, du classificateur jusqu'aux fours de cuisson. Dans les faits, ces avantages stratégiques n'ont jamais réellement été exploités ou même envisagés. De façon simpliste, la marge de manœuvre que nous avons entre l'imposition des contraintes de qualité par les clients et les conditions opérationnelles représente une variable économique-stratégique importante.

À titre d'exemple, la limite du *taux d'alumine* permise dans la boulette BBS est de 0.5 % et celle du *taux de silice* est de 1.8 %. Théoriquement, le contrôle du rapport S/A à une valeur de 3.6 définirait la première consigne limite de contrôle sous contrainte. En réalité, les analyses de laboratoire démontrent que ces valeurs ne sont jamais atteintes, ni pour la silice, ni pour l'alumine.

---

<sup>78</sup> Coke breeze.

Néanmoins, l'entreprise s'impose des marges de sécurité pour le respect des conformités de la qualité des produits vis-à-vis des clients. **Ce type de gestion préventive a un coût important.** Son remplacement par un mode plus approprié et plus souple, basé sur la notion de désirabilité, représente donc un avantage économique et stratégique pour l'entreprise. La prochaine section présente la structure du bilan de matière avec l'objectif de déterminer les plages d'opération du taux de silice résiduel ainsi que celui de l'alumine. Cette étude alimente et converge vers le critère de désirabilité économique et spécifiquement orienté sur la profitabilité. **Le taux de silice peut donc être contrôlé par rétroaction aux classificateurs et le taux d'alumine peut être optimisé par dopage à l'étape du mélange du gâteau filtre.**

Une étude plus approfondie de l'impact du ratio S/A sur les consommations énergétiques permettrait donc de qualifier et quantifier cette variable potentiellement stratégique. Cette étude fait partie de l'une de nos principales recommandations.

#### 6.4.2 Algorithmes du modèle économique simplifié

Les teneurs en silice et en alumine sont évaluées pour chacun des additifs soit : le *coke breeze*, la *dolomie*, le *liant organique* (L.O.) et la *bentonite*. Le liant organique ne contient aucun de ces deux minéraux mais fait partie du bilan compte tenu qu'il est utilisé dans des situations où les valeurs mesurées de silice se rapprochent des valeurs limites du contrôle de qualité. Ce produit est totalement éliminé par la perte au feu lors du processus de cuisson.

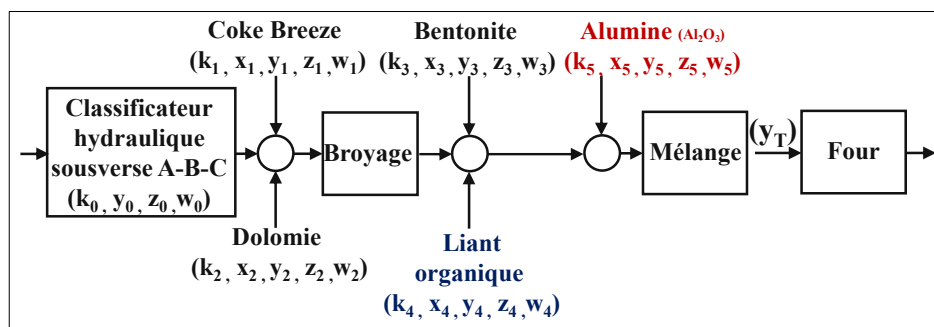


Figure 6.7 Schéma d'écoulement de la matière du bilan économique

Tableau 6.1 Description des variables du bilan économique

Variables	Descriptions	Variables	Descriptions
$k_0$	Facteur (PAF) <sup>79</sup> sousverse	$x_4$	Ratio liant organique (kg/t)
$y_0$	Tonnage sousverse (t/h)	$y_4$	Tonnage liant organique (t/h)
$z_0$	T.S. sousverse (%)	$z_4$	T.S. liant organique (%)
$w_0$	T.A. sousverse(%)	$w_4$	T.A. liant organique (%)
$k_1$	Facteur PAF coke breeze (%)	$x_5$	Ratio d'alumine ajoutée (kg/t)
$x_1$	Ratio coke breeze (kg/t)	$k_5$	Facteur (PAF) alumine (%)
$y_1$	Tonnage coke breeze (t/h)	$y_5$	Tonnage d'alumine ajoutée (t/h)
$z_1$	T.S. coke breeze (%)	$z_5$	T.S. alumine ajoutée (%)
$w_1$	T.A. coke breeze (%)	$w_5$	T.A. ajoutée (%)
$k_2$	Facteur (PAF) dolomie (%)	$y_T$	Tonnage <sup>T</sup> gâteau filtre (t/h)
$x_2$	Ratio dolomie (kg/t)	$\bar{y}_T$	Tonnage' <sup>T</sup> gâteau filtre (%)
$y_2$	Tonnage dolomie (t/h)	$z_T$	T.S. total gâteau filtre (%)
$z_2$	T.S. dolomie (%)	$w_T$	T.A. total gâteau filtre (%)
$w_2$	T.A. dolomie (%)	$y_{i_k}$	Ton. de l'espèce avec (PAF) (t/h)
$k_3$	Facteur (PAF) bentonite (%)	$z_{i_k}$	T.S. de l'espèce avec (PAF) (%)
$x_3$	Ratio bentonite (kg/t)	$w_{i_k}$	T.A. de l'espèce avec (PAF) (%)
$y_3$	Tonnage bentonite (t/h)	$y_{T_k}$	Tonnage <sup>T</sup> G.F. avec (PAF) (t/h)
$z_3$	T.S. bentonite (%)	$\bar{y}_{i_k}$	Tonnage' <sup>80</sup> de l'espèce (PAF) (%)
$w_3$	T.A. bentonite (%)	$\bar{z}_{i_k}$	R.S.' d'une espèce (PAF) (%)
$k_4$	Facteur (PAF) (L.O.,%)	$\bar{w}_{i_k}$	R.A.' d'une espèce (PAF) (%)

\* T.S (Taux de silice), T.A. (Taux d'alumine), G.F. (Gâteau filtre), R.S. (Ratio de silice), R.A. (Ratio d'alumine).

La Figure 6.7 présente l'écoulement de la matière à partir du classificateur jusqu'à la fournaise. La déclaration des variables est présentée au Tableau 6.1.

<sup>79</sup> Facteur de pertes au feu (PAF).

<sup>80</sup> Tonnage spécifique et ratio spécifique.

### 6.4.3 Bilan de matière pour l'étude économique

Dans le but d'apporter plus de précisions dans le calcul du bilan, les facteurs de pertes au feu doivent être considérés. Les variables qui dépendent des masses de silice et d'alumine doivent être extraites des minéraux (sousverse des classificateurs, bentonite, dolomie, coke breeze) et le facteur de perte au feu doit être appliqué. Par la suite, le nouveau calcul des proportions de la silice et de l'alumine permet d'estimer les nouveaux taux dans les boulettes cuites. Le bilan est donc présenté sommairement.

► Calcul des **tonnages** (espèce et total) à partir des ratios appliqués sur la sousverse et avant les pertes au feu :

$$y_T = y_0 + \sum_{i=1}^5 x_i y_0 = \sum_{j=0}^5 y_j \quad (6.8)$$

La somme pondérée des espèces est :

$$\bar{y}_T = \sum_{j=0}^5 \bar{y}_j = 1 \quad \text{où} \quad \bar{y}_j = y_j / y_T \quad (6.9)$$

Le taux de silice total dans la boulette verte et le taux d'alumine total sont respectivement :

$$\begin{aligned} z_T &= \sum_{i=0}^5 z_i \bar{y}_i \\ w_T &= \sum_{i=0}^5 w_i \bar{y}_i \end{aligned} \quad (6.10)$$

► Calculs **des taux de silice** et **d'alumine** dans la boulette cuite (les pertes au feu considérées) :

Calcul des tonnages (boulettes cuites) des espèces :

$$y_{i_k} = (y_i - z_i y_i - w_i y_i) \times k_i + z_i y_i + w_i y_i \quad (6.11)$$

Calcul des taux de silice et d'alumine (boulettes cuites) par espèce :

$$\begin{aligned} z_{i_k} &= z_i y_i / ((y_i - z_i y_i - w_i y_i) \times k_i + z_i y_i + w_i y_i) \\ w_{i_k} &= w_i y_i / ((y_i - z_i y_i - w_i y_i) \times k_i + z_i y_i + w_i y_i) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Le tonnage total (boulettes cuites) est alors :

$$y_{T_k} = \sum_{i=0}^5 (y_i - z_i y_i - w_i y_i) \times k_i + z_i y_i + w_i y_i \quad (6.13)$$

Les proportions massiques des espèces (boulettes cuites) sont  $\bar{y}_{i_k} = y_{i_k} / y_{T_k}$ , et les taux spécifiques de silice et d'alumine des espèces (boulettes cuites) sont respectivement :

$$\begin{aligned} \bar{z}_{i_k} &= z_{i_k} \times \bar{y}_{i_k} \\ \bar{w}_{i_k} &= w_{i_k} \times \bar{y}_{i_k} \end{aligned} \quad (6.14)$$

## 6.5 Simulation des variables stratégiques de qualité et de commande

À partir du bilan de matière présenté à la section 6.4.3, on cherche à contrôler le rapport silice/alumine (S/A) dans le but d'établir, de façon hypothétique, un lien avec la consommation spécifique de mazout. Cette nouvelle approche de contrôle permettrait d'établir les premières bases d'un critère de fabrication de la boulette en fonction d'une fraction de la consommation énergétique.



De façon plus tangible, les coûts de la matière première étant connus, *on peut déterminer à partir d'un jeu de données basé sur les points d'opération moyens et calculés sur une période d'un an, quelles sont les variations qui génèrent la profitabilité optimale si les variables de commande et de qualité sont perturbées?*

Cette première approche est donc basée uniquement sur un bilan simplifié et par le fait même, ne tient pas compte de l'ensemble de tous les phénomènes. Du point de vue économique, le taux de silice dépend principalement des teneurs extraites à la mine du Mont-Wright et des conditions opérationnelles du concentrateur. S'ajoute par la suite, la variabilité des conditions d'enrichissement de l'usine de bouletage.

Le Tableau 6.2 présente les régimes nominaux des variables observées en production. L'élément *N.A.* indique une variable non applicable dans le traitement des données.

Tableau 6.2 Simulation des variables de commande et qualité (opération normale)

Espèces	Ra <sup>81</sup>	Ti	Tsv	Tav	Pf	Tsc	Tac	To	Tsec	Tssc	Tsac	Fs/a
Sousverse <sup>82</sup>	<i>N.A.</i>	570	1.2	0.25	0.17	1.19	0.25	569	98.4	1.17	0.25	4.76
Bentonite	7.28	4.15	54.9	18.4	36	60.7	20.4	3.75	0.65	0.39	0.132	2.98
Dolomie	14.1	8.0	1.6	0.21	47	2.96	0.39	4.28	0.74	0.022	0.003	7.52
Coke breeze	14.7	8.4	6.7	3.2	94	44	21.02	1.27	0.22	0.097	0.046	2.09
Alumine dop(ée)	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0	0
Liant organique	0	0	0	0	100	0	0	0	0	0	0	<i>N.A.</i>
<b>Total</b>	<i>N.A.</i>	611.3	<i>N.A.</i>	<i>N.A.</i>	<i>N.A.</i>	<i>N.A.</i>	<i>N.A.</i>	578.6	100	<b>1.69</b>	<b>0.428</b>	<b>3.94</b>

<sup>81</sup> Définition des abréviations des variables du bilan.

Ra = Variable de ratio (kg/t)

Ti = Tonnages entrant (t/h)

Tsv = Taux de silice des boulettes vertes (%)

Tav = Taux d'alumine des boulettes vertes (%)

Pf = Pertes au feu (%)

Tsc = Taux de silice des boulettes cuites (%)

Tac = Taux d'alumine des boulettes cuites (%)

To = Tonnage des espèces dans les boulettes cuites (t/h)

Tsec = Tonnage spécifique, espèces des boulettes cuites (%)

Tssc = Taux de silice spécifique des boulettes cuites (%)

Tsac = Taux d'alumine spécifique des boulettes cuites (%)

Fs /A = Facteur S/A (%)

<sup>82</sup> Sousverse<sup>82</sup> A-B-C.

À des fins de simplification, le bilan a donc été structuré pour couvrir seulement la circulation de la matière des classificateurs primaires jusqu'à la fournaise. Néanmoins, ce bilan nous informe de façon imagée sur le potentiel économique que représente ce genre d'analyse. Dans une approche plus raffinée, le traitement des rejets au classificateur devrait être considéré, ce qui permettrait de boucler la deuxième ligne de bouletage et obtenir un contrôle global en circuit fermé de l'usine. La Figure 6.8 présente l'écoulement simplifié du contrôle du taux de silice et d'alumine.

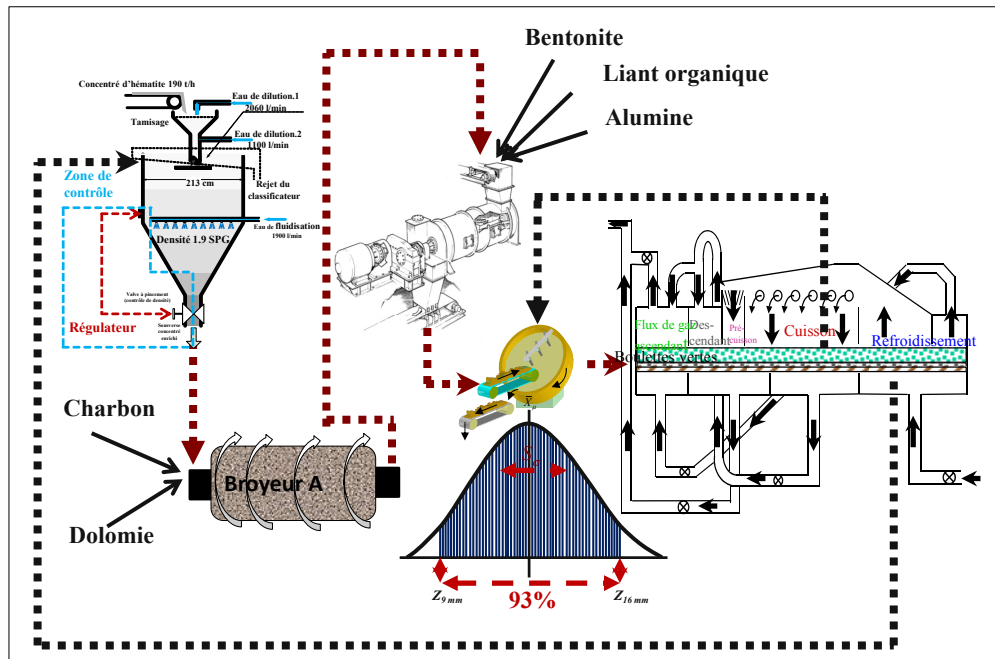


Figure 6.8 Schéma d'écoulement simplifié de contrôle (T.S et T.A.)

Toujours dans une optique d'atteindre un ratio (S/A) voisinant la valeur de 3.6, le jeu des différentes variables nous informe qu'une diminution du ratio de bentonite permet également de diminuer le taux de silice de façon indirecte, ce qui est favorable du point de vue procédé (S/A) mais défavorable pour l'augmentation du taux d'alumine. Cet agent agglomérant doit donc être remplacé par un liant organique beaucoup plus coûteux, mais ne contenant aucune silice ni alumine.

Disponible sur le marché à de très faibles coûts (résidus liés à des non-conformités dans les alumineries), l'alumine pourrait représenter un atout économique intéressant pour les opérations de l'usine de bouletage. Tel que mentionné précédemment, l'objectif dans cette étude n'est pas nécessairement de trouver quelles sont les conditions optimales compte tenu que le bilan devrait être beaucoup plus étoffé pour tenir compte des réalités opérationnelles. Néanmoins, l'exploration de certains changements de points d'opération permet de mieux visualiser l'impact monétaire de chacune des variables (intrants).

À titre d'exemple, le Tableau 6.3 présente un cas type dans lequel trois variables reliées aux actions de commande sont identifiées et manipulées, soit le *ratio de coke breeze* (-10 %), l'enrichissement du minerai (*le taux de silice*, (+10 %)) et l'injection de l'alumine pure (+0.8 %). Cette configuration permet d'atteindre les valeurs limites du *taux de silice* (1.8 %) et de l'alumine (0.5 %) pour un ratio S/A de 3.6. Cet exemple montre qu'il est possible de solutionner un système en considérant toutes les actions de commande et les variables de qualité pour atteindre des valeurs limites de contrôle de qualité.

Tableau 6.3 Simulation avec perturbations (variables de commande et qualité)

Espèces <sup>83</sup>	Ra	Ti	Tsv	Tav	Pf	Tsc	Tac	To	Tsec	Tssc	Tsac	Fs/a
Sousverse <sup>84</sup>	N.A.	570	<b>1.3</b>	0.25	0.17	1.32	0.25	569	98.4	1.3	0.25	5.3
Bentonite	7.3	4.2	54.9	18.4	35.9	60.7	20.4	3.75	0.65	0.39	0.13	2.98
Dolomie	14.1	8	1.6	0.2	47.4	2.96	0.39	4.28	0.74	0.02	0.003	7.52
Coke breeze	<b>12.6</b>	7.19	6.65	3.18	94.1	43.95	21	1.09	0.19	0.083	0.034	2.09
Alumine <sup>D 85</sup>	<b>0.8</b>	0.46	0.0	100	0.0	0.0	100	0.456	0.08	0.0	0.08	0.0
Liant <sup>O 86</sup>	0.0	0.0	0.0	0.0	100	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	<b>N.A.</b>
<b>Total</b>	N.A.	590	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	579	100	<b>1.8</b>	<b>0.5</b>	<b>3.6</b>

<sup>83</sup> Référer au # 81 en note de bas de page pour la description des titres abrégés.

<sup>84</sup> Sousverse A-B-C.

<sup>85</sup> Aluminium ajouté.

<sup>86</sup> Liant organique.

## 6.6 Les fonctions de désirabilité de l'usine de bouletage

Comme mentionné précédemment, la conception du critère de désirabilité est basée sur un concept lié à la profitabilité opérationnelle. Le critère est orienté vers deux axes distincts : les *intrants de commande* reliés à la masse (e.g. coke breeze, dolomie, bentonite, liant organique, alumine) et les *commandes dites de transformation* soit la classification de la silice et la proportion de surface sous la courbe de la distribution granulométrique des boulettes vertes (BV), la "spec". Les deux axes opérationnels, une fois regroupés et jumelés à leur poids, sont sommés tels que prescrit à l'équation (Eq. (6.1)). Cette approche permet donc de séparer les variables traitées du point de vue de la transformation de la matière par rapport à celles qui ne constituent que des intrants régulés. Les poids  $p_i$  sont ajustés en fonction de l'impact de chacune des variables traitées dans le critère. Le contrôle de qualité est donc assuré par l'entremise de la carte EWMA et permet également d'effectuer un suivi de qualité.

Les figures des fonctions de désirabilité sont présentées à l'ANNEXE VII pour chaque variable du bilan. La **performance opérationnelle** (---, noir) telle que programmée sur les anciens contrôleurs (pas de zone cible mais plutôt une valeur "consigne"), la **désirabilité opérationnelle** (---, verte) qui présente une "adaptation" de la performance opérationnelle pour introduire la notion d'un palier (zone 1) et la **désirabilité modèle** (---, rouge) qui traduit le "souhait" du procédé tel que défini par un groupe d'experts sont regroupées pour chacun des graphiques. Également, à titre d'exemple, nous représentons dans le Tableau-A VII-1 les valeurs numériques qui décrivent le modèle mathématique de la fonction de désirabilité des variables (du classificateur jusqu'à la sortie du four de cuisson).

Les données extraites des bases de données de nos opérations ont permis de constater que la performance du mode opérationnel peut être représentée, avec un bon degré de précision, par des fonctions algébriques d'ordre 1. À titre d'exemple, d'autres formulations basées sur des fonctions exponentielles auraient pu être utilisées. Néanmoins, l'objectif étant de se

rapprocher de la réalité industrielle le plus possible et de minimiser les méthodes de calibration des modèles, les équations d'ordre 1 ont simplement été retenues.

### 6.6.1 Étude de cas : désirabilité du diamètre moyen et de l'écart-type (BV)

Les fonctions de désirabilité de la *bentonite*, de la *dolomie*, du *coke breeze*, du *liant organique*, du *taux de silice* à la sousverse des classificateurs, du *taux de silice* et du *taux d'alumine* et du *rapport S/A* des boulettes cuites ainsi que celle de la *consommation spécifique* du mazout ont été définies en fonction du contexte opérationnel. Finalement, une attention particulière est portée sur deux propriétés des boulettes vertes (BV) aux disques d'agglomération, soit la *valeur moyenne des diamètres des boulettes* et leur *écart-type*.

Les raisons qui motivent l'effort mis sur ces deux propriétés sont étroitement liées aux impacts énergétiques qu'occasionnent ces variables dans le processus de frittage des boulettes d'oxyde de fer. La distribution granulométrique est une variable très influente sur la restriction fluide dans les lits poreux de boulettes. L'évaluation de cette restriction est normalement déterminée à partir de la relation d'Ergun dont le premier terme est lié à la partie laminaire de l'écoulement des gaz et la seconde, à la partie turbulente (Cross *et al.*, 1998). L'équation (6.15)<sup>87</sup> présente la relation entre les différentiels de pression et les débits volumiques.

$$\Delta P_{k,k+1} = \frac{150h_k(1-\varepsilon_k)^2\mu_k D_k}{A_k\phi_k^2 d_k^2 \varepsilon_k^3} + \frac{1.75h_k(1-\varepsilon_k)\bar{\rho}_k D_k^2}{A_k^2\phi_k d_k \varepsilon_k^3} \quad (6.15)$$

Dans cette équation, on constate que l'indice de vide  $\varepsilon$  est porté à la puissance 3. Cette variable a donc un impact significatif sur la consommation énergétique dans les fours de frittage.

---

<sup>87</sup>  $h$  = hauteur du lit,  $\varepsilon$  = indice de vide,  $\mu$  = coefficient de viscosité du fluide,  $D$  = débit volumique,  $\rho$  = densité du fluide,  $A$  = surface du lit poreux,  $\phi$  = coefficient de sphéricité,  $d$  = diamètre des boulettes

L'estimé de la valeur moyenne du diamètre  $\bar{X}$  des boulettes et sa dispersion  $S_\sigma$  doivent donc être bien représentés en termes de désirabilité. Du point de vue opérationnel, l'usine de Port-Cartier a retenu comme spécification (et c'est un critère commercial) que 93 % des boulettes doivent être contenues dans l'intervalle 9 - 16 mm. La Figure 6.9 présente la spécification opérationnelle telle que modélisée par la loi normale  $X_N \square N(\mu, \sigma^2)$ . Elle représente également la spécification du pourcentage passant du diamètre des boulettes vertes.

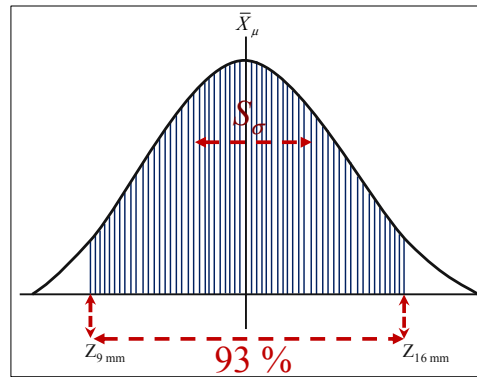


Figure 6.9 Pourcentage passant

Les valeurs des estimés de l'écart-type  $S_\sigma$  et du diamètre moyen  $\hat{X}_\mu$  des boulettes (BV) sont évaluées à partir de l'intégration de la densité de probabilité de la loi normale. La surface (la probabilité) couvre 93 % sous la courbe et représente la spécification opérationnelle.

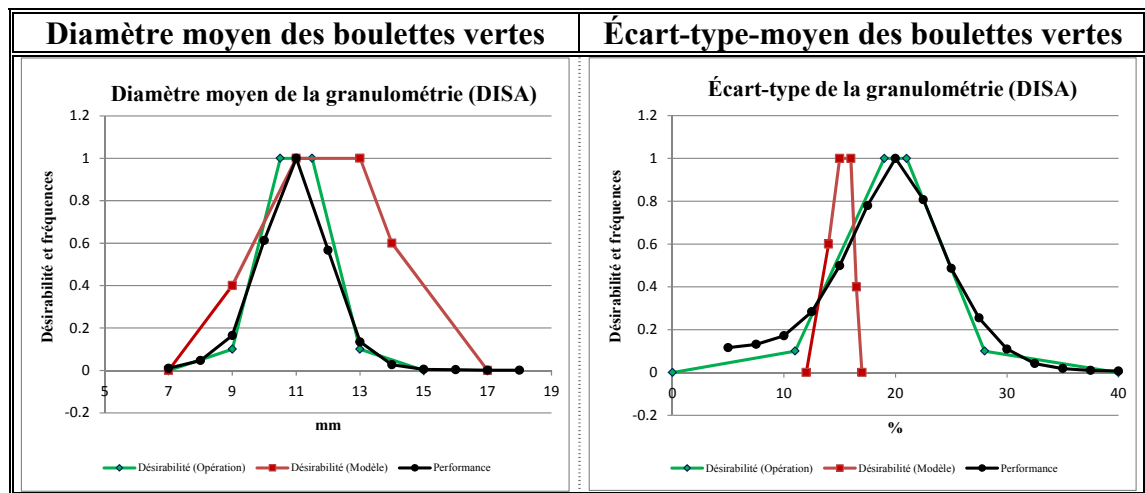
$$\int_{z_9}^{z_{16}} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_9}^{z_{16}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \geq 0.93 \quad (6.16)$$

On attire l'attention du lecteur que dans ce cas, une infinité de combinaisons des variables  $(\mu, \sigma)$  peuvent être retenues pour respecter la spécification de l'intervalle 9 - 16 mm. Dans le but d'exploiter le plein potentiel de la marge de manœuvre que permet le spectre de la zone 1 borné par les limites de contrôle *LI-LS*, nous avons développé et implanté une méthode qui calcule l'écart type maximal à partir de la valeur moyenne du procédé. Cette

nouvelle approche innovante permet donc d'intervenir directement sur la variable d'indice de vide (la perméabilité) d'un lit poreux.

Un exemple de désirabilité de l'estimé de la valeur moyenne  $\hat{X}_\mu$  et de l'écart-type  $S_\sigma$  du diamètre des boulettes vertes (disque A) est présenté au Tableau 6.4. On peut constater l'importante différence entre la désirabilité opérationnelle et le modèle proposé. Les pentes prononcées de la désirabilité modèle indiquent clairement qu'un resserrement de cette variable constitue un atout stratégique d'économies.

Tableau 6.4 Fonctions de désirabilité, moyenne et écart type du diamètre des BV



La prochaine section présente l'agencement par blocs des critères ainsi que les résultats de simulations de contrôle de qualité. Finalement, un exemple de carte de contrôle (par variation) est présenté à des fins de diagnostic.

## 6.7 Conception du critère de désirabilité pour la production de boulettes BBS

Cette dernière section du chapitre présente la conception du critère de désirabilité. Tel que décrit à la section 6.2 et dans laquelle nous avons fait état des liens économiques existant entre la qualité produite des boulettes cuites (BC) et les efforts de commande déployés pour atteindre ces niveaux de qualité, cette dernière section fait donc état de la méthode de suivi

innovante qui permet de suivre à partir d'une seule variable unitaire, le comportement d'un ensemble de plusieurs variables combinées. Le premier bloc regroupe l'ensemble des spécifications qui touchent deux des principales variables discutées précédemment, soit le *diamètre moyen* et l'*écart-type* des boulettes vertes (BV) et le *taux de silice* à la décharge des broyeurs. Finalement, le *taux de silice* et d'*alumine* et le *facteur S/A* sont intégrés à cette partie du critère pour les boulettes cuites (BC). Chaque groupe de variables possède sa pondération en fonction de son poids économique dans le critère. Le sous-système d'équations représentant cette portion du critère est présentée à l'équation (Eq. (6.17)) et la Figure 6.10 présente l'arrangement du système d'équations.

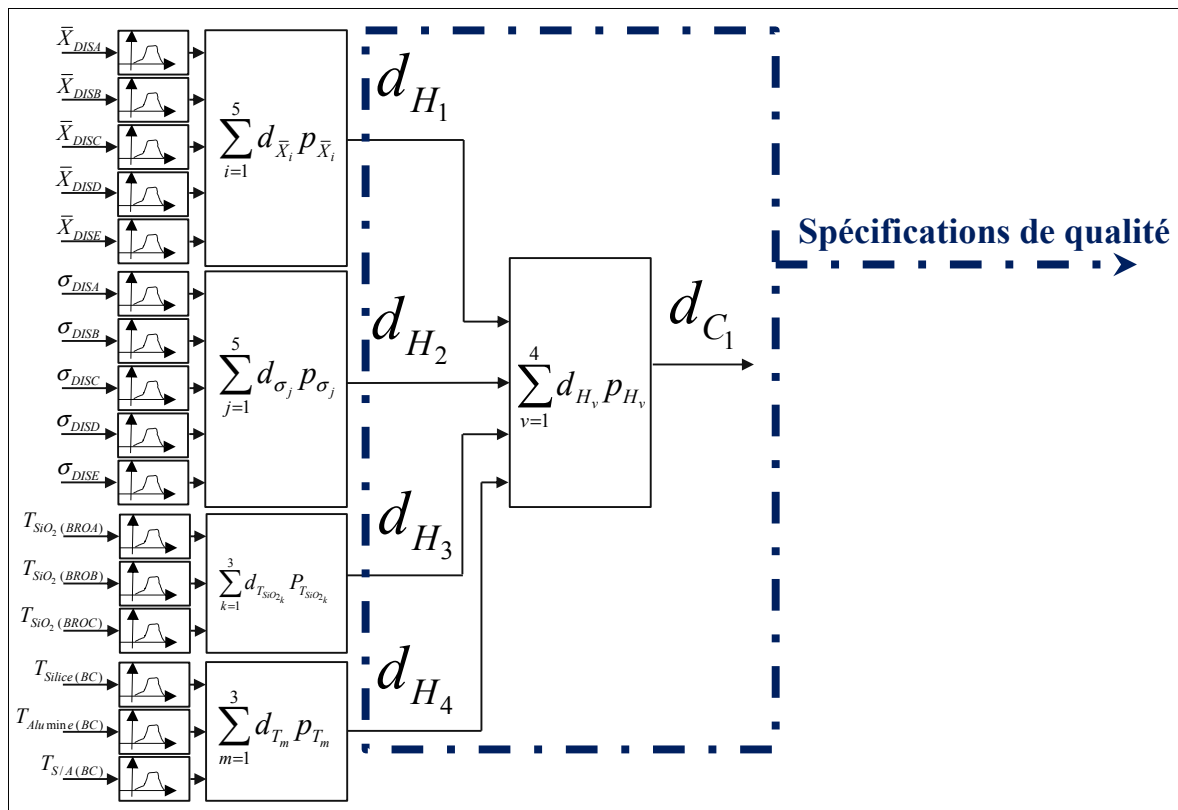


Figure 6.10 Critère de désirabilité basé sur les spécifications de qualité



$$\begin{aligned}
d_{H_1} &= d_{\bar{x}_1} p_{\bar{x}_1} + d_{\bar{x}_2} p_{\bar{x}_2} + d_{\bar{x}_3} p_{\bar{x}_3} + d_{\bar{x}_4} p_{\bar{x}_4} + d_{\bar{x}_5} p_{\bar{x}_5} \\
d_{H_2} &= d_{\sigma_1} p_{\sigma_1} + d_{\sigma_2} p_{\sigma_2} + d_{\sigma_3} p_{\sigma_3} + d_{\sigma_4} p_{\sigma_4} + d_{\sigma_5} p_{\sigma_5} \\
d_{H_3} &= d_{T_{SiO_2_1}} P_{T_{SiO_2_1}} + d_{T_{SiO_2_2}} P_{T_{SiO_2_2}} + d_{T_{SiO_2_3}} P_{T_{SiO_2_3}} \\
d_{H_4} &= d_{T_1} p_{T_1} + d_{T_2} p_{T_2} + d_{T_3} p_{T_3}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Le deuxième bloc regroupe quant à lui, l'ensemble des variables de commande soit les ratios d'additifs, la consommation spécifique de mazout et les additifs de dopage (alumine et liant organique). Le sous-système d'équations est présenté à l'équation (Eq. (6.18)) et la Figure 6.11 présente l'arrangement du système d'équations.

$$\begin{aligned}
d_{u_1} &= d_{R_1} p_{R_1} + d_{R_2} p_{R_2} + d_{R_3} p_{R_3} + d_{R_4} p_{R_4} \\
d_{u_2} &= d_{I_1} p_{I_1} + d_{I_2} p_{I_2}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

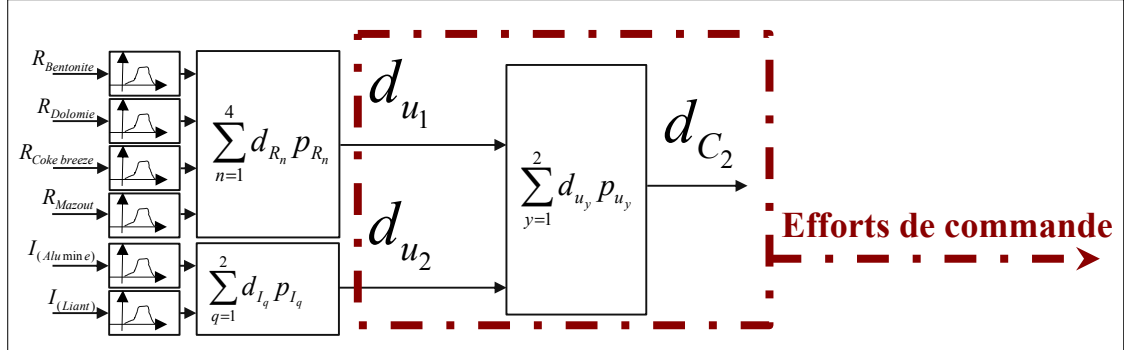


Figure 6.11 Critère de désirabilité basé sur les efforts de commande

Finalement, ces deux blocs de désirabilité sont regroupés pour former la désirabilité totale (Eq. (6.19)) soit  $D_{CQ}$  et la Figure 6.12 présente l'arrangement global et final du système.

$$D_{CQ} = d_{C_1} p_{C_1} + d_{C_2} p_{C_2} \tag{6.19}$$

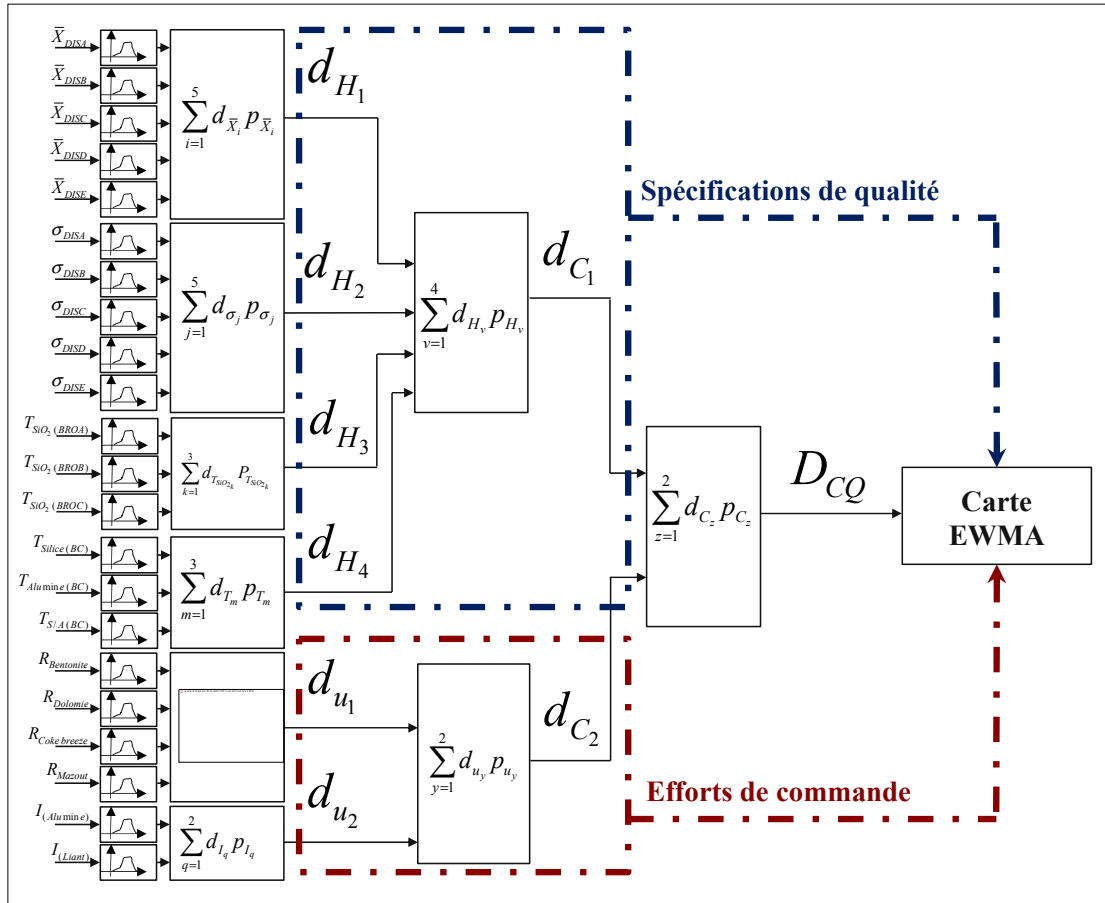


Figure 6.12 Critère global de désirabilité

## 6.8 Simulation du contrôle de qualité avec la désirabilité

Pour valider notre choix de suivre le procédé par la fonction de désirabilité, nous avons introduit une 'perturbation' sur le procédé et examiné les résultats enregistrés. À la section 5.2, nous avons signalé l'importance de questionner l'impact de certaines variables stratégiques dans une approche globale de contrôle de la qualité (incluant son impact économique). Nous avons également fait état que le bilan économique présenté ne résume qu'une fraction du processus complet de fabrication des boulettes d'oxyde fer. À titre d'exemple et en référence à la Figure 6.8, le modèle exact pour le contrôle de la silice en boucle fermée nécessite d'introduire le traitement des rejets redirigés vers la deuxième ligne de production. Par contre, une approche simplifiée nous renseigne quand même sur le

potentiel que représente l'analyse "étape par étape" de la progression des *taux de silice* et d'*alumine* pour effectuer le contrôle de la qualité.

Au final, nous sommes convaincus que le critère de désirabilité permet de repousser les limites du questionnement des économies potentielles, et que cette approche innovante est intéressante pour "*superviser*" un processus multivariable métallurgique.

Très liés à l'impact économique d'un bilan global, le *liant organique* et l'*alumine* ne seront pas manipulés en simulation compte tenu qu'ils devraient être considérés comme des éléments clefs du point de vue de la stratégie économique. **Les simulations porteront donc sur deux principaux volets opérationnels, soit les régimes d'opération normaux qui tiennent compte de la variabilité normale des variables contrôlées et d'une perturbation importante qui déstabilise le procédé dans son ensemble.** Nous rappelons au lecteur que tous les écarts représentés par les fonctions de désirabilité reflètent des pertes monétaires. Le respect de chaque fonction de désirabilité nous rapproche fondamentalement vers des conditions d'optimalité monétaires.

La Figure 6.13 présente la simulation d'un régime opérationnel transitoire<sup>88</sup>. Les variables observées sont la moyenne du diamètre des boulettes et l'écart-type, le *taux de silice* pour les trois broyeurs et les *taux de silice*, d'*alumine* et le *facteur S/A* pour les boulettes cuites sont présentés. Le choix de cette portion du critère repose principalement sur la spécification de qualité envers le Client. Les quatre premiers graphiques nous informent sur le comportement des disques, de la silice et de l'alumine qui a un impact significatif sur le reste du procédé de fabrication. Les deux derniers graphiques de la figure permettent également de constater qu'une déviation du procédé influence la valeur moyenne du procédé et ceci mène à une déviation au-delà des valeurs de contrôle *LCI-LCS*. L'assemblage des variables nous renseigne également sur le comportement global du procédé et permet d'intervenir avant que la qualité subisse une détérioration importante.

---

<sup>88</sup> Sur les derniers cinq disques.

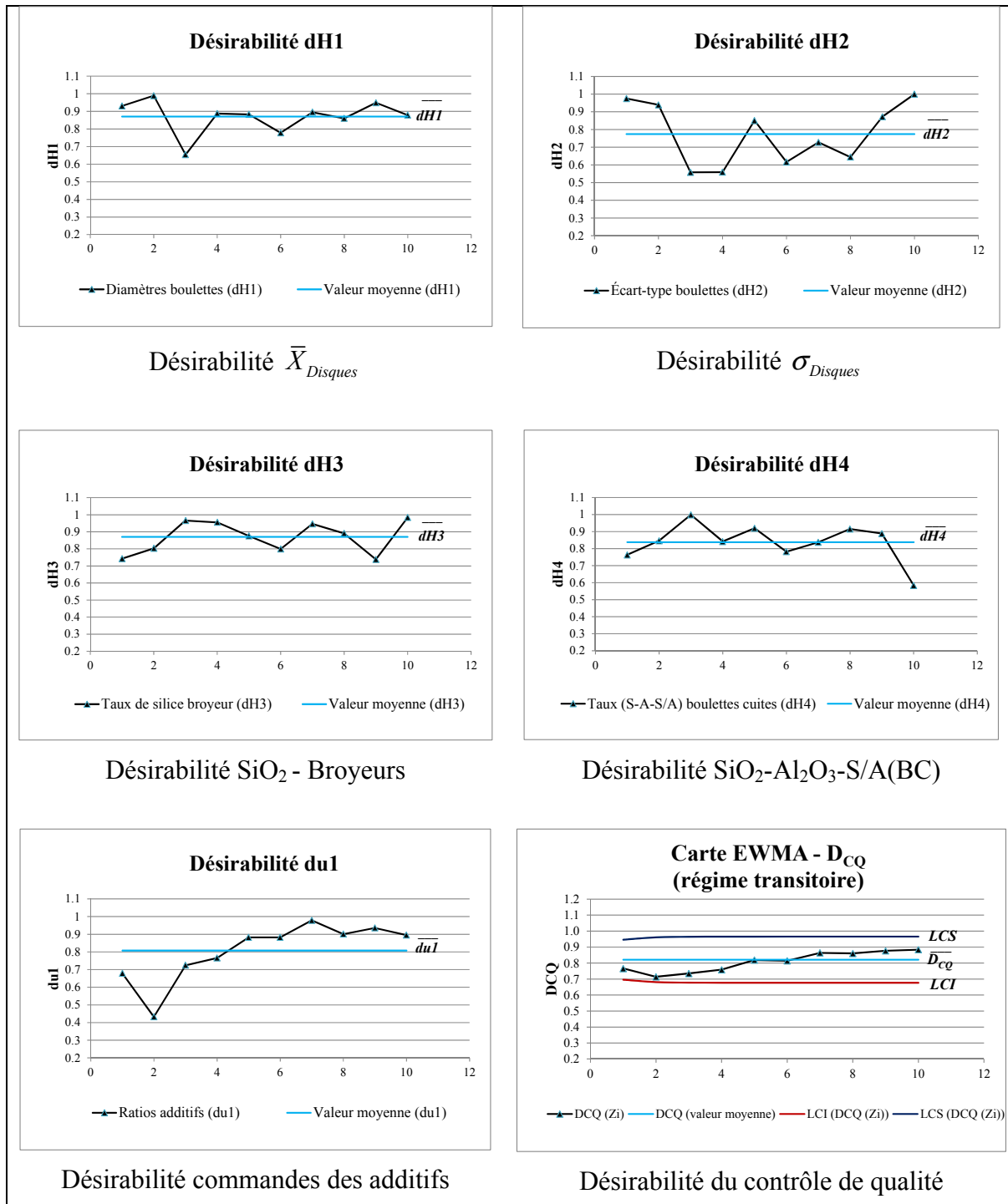


Figure 6.13 Critère global de la spécification de qualité (régime transitoire)

### Remarque

La normalisation de la fonction de désirabilité  $d_i \in [1,0]$  peut induire une "perte d'information". En effet, une fois qu'un changement significatif dans le procédé a été constaté, dans une démarche "diagnostic", il est opportun de connaître si la déviation est causée par un déplacement vers la limite inférieure ou si le déplacement est vers la limite supérieure d'un seuil. Pour y remédier, une approche de détection de fautes basée sur la décomposition de la carte de contrôle permet d'identifier à la fois la variable occasionnant le défaut ainsi que la zone spécifique liée à sa fonction de désirabilité (2-4 ou 3-5).

La Figure 6.14 présente un exemple de détection de la variable du *taux de silice* des boulettes cuites où la désirabilité oscille dans les zones de 2 à 5. Afin de permettre d'identifier la zone ciblée, on introduit un changement de variable à la désirabilité en ramenant la valeur recherchée, soit la valeur unitaire de la zone 1, à une valeur nulle. Les zones 2-4 sont donc permutées sous le nouvel axe (axe de valeur nulle). Les zones 3-5 sont quant à elles transférées au-dessus de l'axe à valeur nulle.

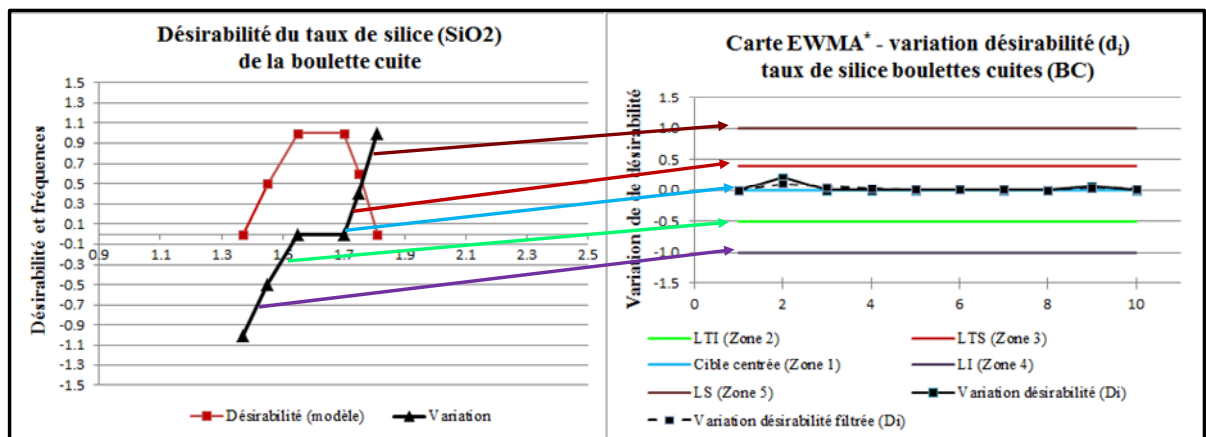


Figure 6.14 Contrôle de qualité avec la carte EWMA (mode détection)

Cette nouvelle approche permet de cibler quelle variable introduit une déviation dans le procédé ainsi que sa provenance. On représente également les marges monétaires en fonction des déviations de la zone 1. Finalement, la Figure 6.15 présente le même système que le précédent, mais en régime établi cette fois.

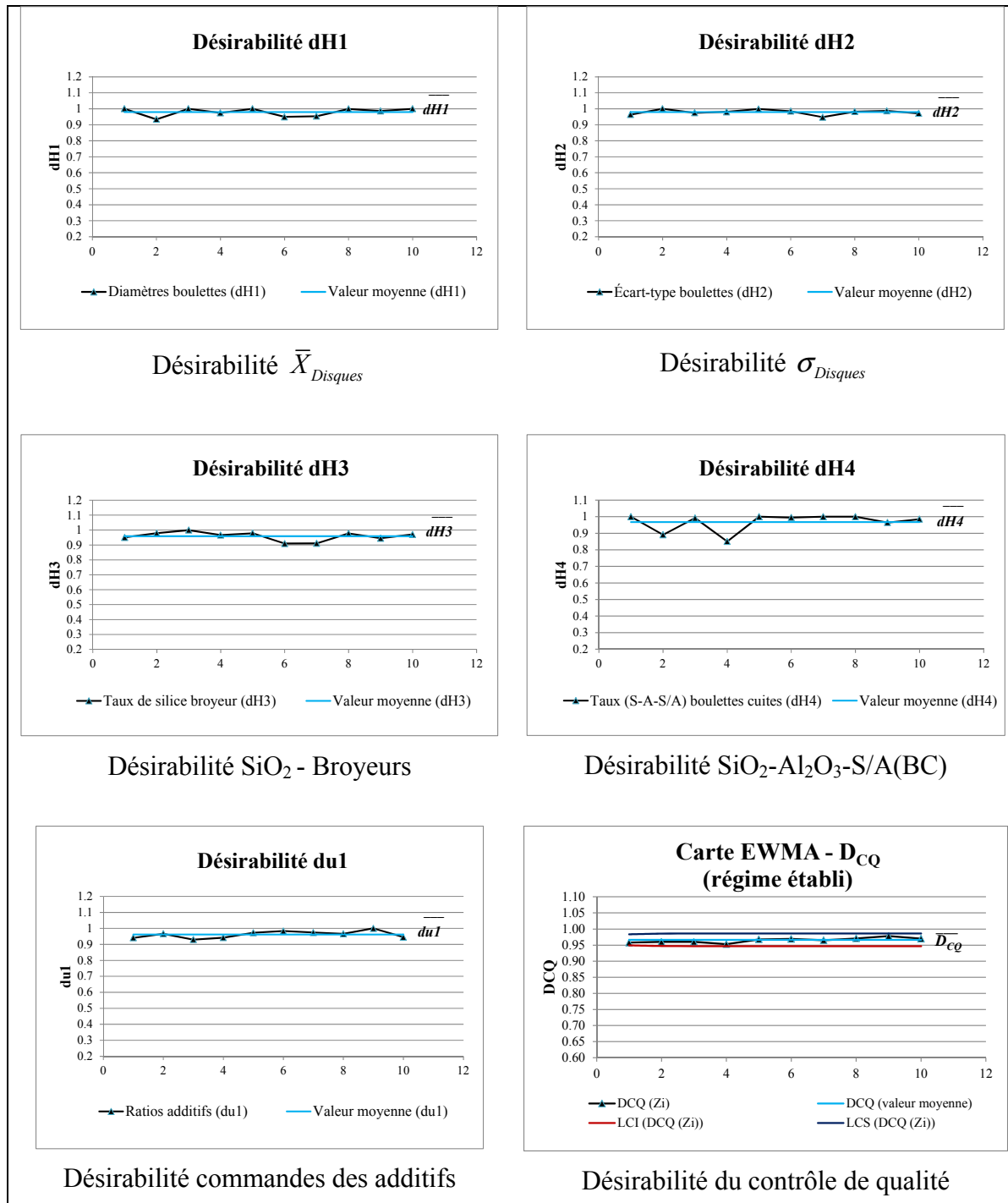


Figure 6.15 Critère global de la spécification de qualité (régime établi)

Même si le régime est considéré stable du point de vue du contrôle de qualité et des opérations, la décomposition des cartes peut néanmoins soutenir toute démarche visant à

resserrer certaines conditions opérationnelles. L'ANNEXE VIII présente des exemples de suivi statistique des variables du procédé ainsi que leur volet de détection.





## CONCLUSION

La connaissance scientifique possède en quelque sorte des propriétés fractales: nous aurons beau accroître notre savoir, le reste, - si infime soit-il - sera toujours aussi infiniment complexe que l'ensemble de départ (Moi, Isaac Asimov, 1986).

Le but visé par cette thèse de doctorat, profil innovation industrielle, est de répondre à un besoin pressant qui s'est développé au cours des dernières années; l'industrie subit une pression concurrentielle croissante en raison de la globalisation des marchés et de l'augmentation des exigences environnementales (empreinte carbone). La pérennité de l'industrie dans les pays du G7 passe résolument par une politique d'innovation à la recherche de conditions d'opération toujours plus optimales : produire plus, produire bon du premier coup et répondre aux exigences des clients plus rapidement. Dans notre cas spécifique, ceci s'est traduit par une collaboration forte entre des corps universitaires et nos centres de recherche.

Sur une base réaliste, entreprendre un tel mandat à travers des responsabilités de gestion d'équipes multidisciplinaires, de développement technique, d'administration de budget et d'intervention sur des problématiques industrielles *in situ* requiert une gestion du temps et une coordination rigoureuses et adaptées à la réussite d'un tel projet.

Ce « *mandat doctoral* » a été réalisé en tout premier lieu dans un cadre managérial dans lequel différents corps professionnels ont été sollicités. Les secteurs de l'opération de l'usine, des laboratoires chimio-métallurgique, et les bureaux de l'ingénierie ont tous contribué pour la réussite du mandat.

Le premier corollaire à nos principaux objectifs était de revoir nos pratiques industrielles et remettre en question ce qui nous apparaissait encore comme acceptable. Nos méthodes pour

concevoir, contrôler et gérer des processus de qualité ont donc été interrogées sur leurs rôles et leurs performances, réformées et validées.

On a proposé d'établir des critères objectifs de qualité pour un ensemble de variables stratégiques. Ces critères sont basés sur une des fonctions de *désirabilité* qui combinent les arguments opérationnels, économiques et de qualité. Le tout a été réalisé en respectant une dialectique scientifique basée sur une méthodologie de traitement de l'information tant du point de vue de la modélisation que de la commande appliquée.

Applicable à tous les processus de transformation de l'usine, cette méthodologie a permis, par une approche méthodique, d'établir de meilleures bases de conception en modélisation des processus de traitement du minerai, en traitement et consolidation des données, en commande multivariable et en contrôle de qualité.

Notre projet a priorisé une étape cruciale dans notre usine de Port-Cartier : la classification gravimétrique. Dans cette étape, nous avons traité le *taux de silice* comme une variable stratégique de commande à l'intérieur d'une structure de contrôle hiérarchisée. Par la suite, cette approche a été généralisée à l'ensemble des processus de transformation de l'usine de bouletage. Ce procédé de classification a donc été une plate-forme de développement qui représentait un niveau de complexité cohérent avec l'ensemble du projet. Également, l'étude détaillée du classificateur a permis de générer un mandat de recherche plus fondamental spécifiquement orienté sur la phénoménologie de ce système.

À la base, les priorités d'ArcelorMital demeurent exclusivement la santé-sécurité et la productivité (production, budgets d'investissement, coûts d'opération, qualité, etc.), et les efforts qui doivent être déployés pour définir *l'innovation comme une valeur* sont à la hauteur des difficultés techniques rencontrées. Néanmoins, au-delà de la complexité technique et scientifique du projet, le grand défi du point de vue industriel a été l'adaptation au changement de culture dans l'entreprise. À titre d'exemple, en 2009, au cœur d'une importante crise économique, nous avons réussi à trouver les crédits nécessaires au montant

de 60 K\$ pour réaliser la campagne d'échantillonnage dédiée à la modélisation dynamique sur le classificateur. Sans instruments de mesure automatisée et en perturbant un vrai système de production, cette campagne d'échantillonnage **manuel** a mobilisé une équipe de douze personnes sur une période de deux semaines. De plus, il faut considérer le degré de difficulté d'intervention sur un tel système en considérant que la campagne a toujours été réalisée en période de production.

Par ce geste de la direction, nous comprenons aujourd'hui que nous avons franchi une étape importante dans la dynamique de changement de culture dans l'entreprise. Unifier plusieurs départements dans une usine, solliciter des ressources universitaires, voter des crédits en période de crise, développer des méthodes innovatrices et appliquer le tout en pratique nous placent en tête de liste des entreprises qui innovent et parfois, à notre connaissance, nous sommes perçus comme les seuls à initier ce genre de démarche de cette façon.

En fin de mandat, on peut donc constater que tous les processus qui ont été touchés sont maintenant observés de façon plus critique et sous un œil différent. Nos travaux ont contribué à améliorer la robustesse du procédé; on peut aujourd'hui enrichir le minerai provenant de la mine avec une plus grande variabilité, ce qui se traduit par une diminution des rejets au concentrateur. Le degré de confiance pour explorer les conditions frontières des systèmes en usine a donc augmenté de façon significative, et comme conséquence indirecte, on examine aujourd'hui la possibilité d'exporter cette expertise directement au site minier et à d'autres sites de production dans le monde.

La compréhension reliée à la physique du système nous a permis de mieux comprendre qu'un réacteur, tel que le classificateur hydraulique, peut être modélisé sur deux principaux axes, soit la chimie des intrants et son mode de gouvernance, c'est-à-dire son opération. On a également démontré l'importance de réconcilier des données par des méthodes modernes et adaptées à la quantité non négligeable de l'information disponible dans un milieu industriel. L'utilisation de toute l'information disponible (mesures, bilans, incertitudes, contraintes,...) nous a permis de franchir une nouvelle étape dans le domaine de l'innovation.

La commande, un exercice généralement laborieux, présentée sous la forme abordée, nous a permis de faire des choix judicieux et basés sur des objectifs logiques. L'utilisation de différentes méthodes de contrôle en multivariable se doit d'être représentative des objectifs recherchés. Des outils tels que les tests statistiques ont permis d'évaluer si la complexité des méthodes est à la hauteur des spécifications désirées.

L'utilisation des cartes de contrôle de qualité par le biais de l'assemblage de plusieurs variables à travers le concept de désirabilité a permis de vaincre le degré de complexité de la gestion de qualité des différents processus. Sur le marché, plusieurs compagnies de système de contrôle et de technologie de l'information tendent à reproduire cette orientation par le biais d'outils de visualisation et de gestion de l'information (McNabb, 2009).

Finalement, un effort particulier a été déployé pour lier l'aspect économique à l'ensemble des processus. Plusieurs études économiques mentionnent que pour la plupart des entreprises, une partie de leur rentabilité échappe à leur contrôle. Les publications dans le domaine du « *Hidden Plant* » montrent l'impact (Figure 6.16) de la partie cachée des opportunités dans les unités d'affaires. L'intégration de la désirabilité orientée avec une vision économique aura donc été un pas de responsabilisation dans la bonne direction. Les principales conclusions de cet ouvrage ont été soumises dans une publication du *Journal of Canadian Institute of Mining* (CIM).

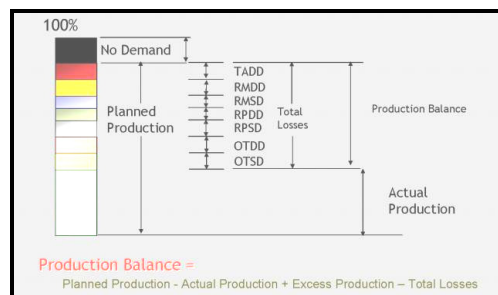


Figure 6.16 Hidden Plant<sup>89</sup>

<sup>89</sup> Représentation de la partie cachée en industrie (*Ibid.*), la figure du Hidden Plant est tirée de la source suivante : (<http://www.qualitygurus.com/gurus/list-of-gurus/armand-v-feigenbaum/#!/prettyPhoto>).

## **RECOMMANDATIONS**

### **Perspectives**

Les contraintes professionnelles, logistiques et académiques exigent de mettre un terme à notre recherche et de produire un rapport. C'est pourquoi il nous semble pertinent à cette étape, d'indiquer aux lecteurs et aux chercheurs qui nous suivront, ce que nous dicte notre expérience sur le sujet.

### **Pour l'ensemble de l'usine de Port-Cartier**

Au début du projet de recherche, le développement et l'intégration de la désirabilité ont été effectués à l'usine de bouletage spécialement dans les fours de durcissement. Les personnes liées au contrôle de qualité ont été sollicitées pour adhérer à cette démarche d'implantation. Les fours de cuisson ont été retenus compte tenu du degré de complexité qu'ils représentent et surtout pour les retombées économiques potentielles qu'ils peuvent générer. Nous recommandons d'étendre l'implantation du contrôle de la qualité par suivi de la fonction de désirabilité à l'ensemble des processus de transformation dans l'usine compte tenu de la quantité et la qualité de mesures instrumentées qui sont déjà disponibles. À notre avis, et notre expérience le prouve, ceci se traduira par une meilleure maîtrise des variations, une réduction des efforts et des ressources fournies actuellement pour assurer un contrôle (gain de productivité) et offrira un outil de gestion très commode pour les différents paliers du management.

### **Pour l'aspect éducationnel**

Le maintien et le rehaussement du niveau des connaissances rappellent l'importance d'adresser le développement des ressources spécialisées en entreprise. L'implantation des techniques avancées ne sera bénéfique à long terme que par le maintien d'un niveau convenable des connaissances pour rentabiliser le transfert de ces technologies de l'université vers le site de production. Par conséquent, nous recommandons le renouvellement de notre expérience à travers des stages d'études, des projets de maîtrise et de doctorat. L'avènement

de personnel hautement qualifié y sera ainsi assuré et garantira le succès de toute démarche d'innovation basée sur un haut degré de technicité.

### **Pour les objectifs corporatifs**

Au niveau corporatif, une équipe de gestion mieux outillée peut accroître le développement et le déploiement d'un tel projet pour s'assurer des retombées à plus grande échelle. La compagnie ArcelorMittal œuvre dans le domaine des mines et de l'acier. L'exportation du développement technique des mines vers le milieu aciériste pourrait permettre à l'entreprise de maximiser le retour sur leur investissement (ROI) et générer par le fait même des projets similaires avec d'autres universités au niveau international.

### **Pour la poursuite des travaux de modélisation du classificateur hydraulique**

- Tout au long du projet, nos hypothèses de travail et le développement des modèles se raffinaient avec chacune des différentes étapes que nous avons franchies. Les premiers modèles du classificateur hydraulique qui ont été proposés ont donc migré vers de nouvelles approches, plus complexes mais plus précises. La poursuite des travaux pour le développement d'un modèle phénoménologique du classificateur hydraulique s'avère maintenant de plus en plus justifié et atteignable. À notre avis, ceci présente un sujet potentiel pour un futur doctorat.
- Les propriétés qui jusqu'à maintenant n'avaient pas fait l'objet d'un questionnement exhaustif sont maintenant à notre portée. Tel que nous l'avons présenté, les phénomènes d'entraînement des particules varient à différents niveaux du classificateur, les problématiques de rendement poids causées par le court-circuitage des particules fines sont mesurables et l'impact de la **densité** qui représente une variable d'état dans le système sont tous des éléments qui devront être adressés dans un nouveau projet doctoral.
- Aujourd'hui, l'eau de fluidisation est considérée comme une variable de commande stratégique pour la conduite d'un classificateur hydraulique. L'angle de projection de cette eau est fixe. On recommande de valider l'effet de la variation de l'angle des buses sur les performances et le comportement du classificateur.

- Le classificateur hydraulique se comporte comme un système intégrateur et doit être réinitialisé sur des périodes de six à huit heures. Par contre, il devrait se comporter comme un système autorégulant. La configuration physique du classificateur favorise ce phénomène. Cette particularité devrait être au cœur des futurs travaux dans le prochain mandat doctoral.
- Les paramètres calibrés dans les modèles empiriques des fonctions de transfert (constante de temps et gain) pourraient être corrélés avec ceux d'un modèle phénoménologique. À notre avis, il s'agit là d'une opportunité pour « généraliser » notre approche.
- Le centre de recherche minéral COREM s'est déjà penché sur la question des structures géométriques des particules pour optimiser leur entraînement dans les réacteurs physiques comme le classificateur. Différentes géométries de particules devraient être utilisées pour valider leur impact sur la modélisation phénoménologique. Cette piste de recherche peut être très prometteuse à moyen et à long terme.

#### **Pour le développement des observateurs**

- Le modèle stœchiométrique est constitué de cinq minéraux. Cette approximation du contenu minéral du minerai pourrait quand même être réévaluée. À notre avis, une analyse plus exhaustive permettrait de déterminer d'autres éléments traces. Il faut néanmoins valider si l'influence que représente ce complément d'information est statistiquement significative par rapport au degré d'incertitude des mesures en laboratoire à titre d'exemple.
- Formuler la structure de la programmation d'un observateur pour faciliter l'intégration de nouvelles variables mesurées, estimées et inférées.
- Dans l'observateur, la conservation de la matière reliée aux mesures des oxydes n'a pas été retenue. Plus complexe que la conservation de la matière reliée aux minéraux, elle peut néanmoins représenter un facteur additionnel important pour augmenter la robustesse de l'observateur.

- Mesurer l'impact d'utiliser un profil normal (Gaussien) pour la réconciliation des fractions granulométriques. Avec et sans cette approche, est-ce que les valeurs de ces fractions sont statistiquement différentes? Et si c'est le cas, comment tenir compte de ces différences?
- La courbe de partage n'a pas été retenue dans la conception de l'observateur. Elle représente néanmoins un élément important à cause de la robustesse qu'elle peut apporter dans un observateur. La linéarisation de cette équation représente toutefois un poids de calcul important mais surmontable. La quantification des 2 approches permettrait donc de valider la différence de rendement pour l'observateur.
- Les quantités de données traitées par un observateur n'ont pas de limitations proprement dites. Par contre, il serait utile de valider le nombre de données nécessaires pour évaluer quand l'information devient redondante.
- Pour le développement des critères d'observation, le développement d'une méthodologie pour valider les problématiques de dépendance linéaire est essentiel. L'analyse des systèmes d'équations permettrait d'éliminer ce type de problématique avant d'écrire les algorithmes de programmation.

#### **Pour la commande multivariable**

- Les délais purs (nets) ont été négligés compte tenu que la campagne d'échantillonnage a été effectuée de façon manuelle à une période fixe de deux minutes. Cette approximation a facilité le développement des méthodes de contrôle. D'autres campagnes devraient être reprises pour quantifier de façon plus précise la valeur de ces délais. L'impact de l'approximation est minime pour l'approche monovariable (lié au réglage seulement). Pour les méthodes du découplage et du décentralisé, l'impact peut être plus important et devrait être étudié et validé.
- Dans le cas de l'approche décentralisée, la spécification est demeurée identique, soit de garder la même dynamique en boucle ouverte et en boucle fermée. Or, l'approche itérative pour converger à la solution a permis de respecter cette spécification qui est liée à la structure, mais elle a augmenté la spécification de la dynamique temporelle. En pratique, c'est avec la troisième méthode (décentralisée) que les bases de



comparaison devraient être effectuées et, par la suite, nous devons adapter la spécification temporelle des deux autres méthodes.

- Si l'identification en ligne est disponible, l'automatisation des trois méthodes est possible compte tenu que des travaux ont déjà été effectués sur la méthode décentralisée généralisée pour les systèmes à dimension  $n \times n$  (Gariépy, 2002).
- Les tests statistiques en ligne sont également recommandés pour valider la calibration des paramètres des modèles et la méthode de dérivation des régulateurs.
- Un logiciel de calcul symbolique (ex. Matlab ou Maple) permet de solutionner algébriquement (d'une manière explicite) le système quadratique des deux régulateurs avec la méthode du distribué. Sur une base de comparaison avec la méthode d'approximation des basses fréquences, les résultats des deux méthodes devraient être validés à l'aide d'une approche statistique.
- Tel que mentionné au chapitre 4, les spécifications de commande, dans une approche multivariable, devraient s'appuyer sur des plages granulométriques à réguler. L'éloignement de la courbe de partage du taux de silice (vers la droite dans les dimensions micrométriques) permettrait d'augmenter la récupération des unités de fer.

#### **Pour le contrôle de qualité;**

- L'emploi de la fonction de désirabilité a ouvert de nouveaux horizons pour le suivi et le contrôle de qualité. Elle permet maintenant de mieux évaluer le poids économique d'une variable qui demeure à l'intérieur de la zone 1 et quand elle franchit les zones 2 et 3. L'introduction des poids économiques dans les structures de contrôle de qualité devrait permettre de mieux quantifier la profitabilité et les pertes encourues.
- Les efforts de commande et le contrôle de qualité sont fortement liés entre eux et de nouvelles orientations devraient être prises pour contrôler à l'intérieur d'une zone statistique d'opération. Le contrôle autour d'un point de consigne génère des efforts de commande économiquement quantifiables. Un indicateur basé sur des propriétés économiques-statistiques permettrait de tenir compte de la variance générée par le contrôle lié à une consigne en comparaison avec la variance générée par une zone de contrôle.

- Le développement de la commande multivariable avec le module de désirabilité permettra de converger vers la commande se rapprochant de la commande à relais. On souligne l'importance de comparer les performances statistiques d'une structure conventionnelle par rapport à une structure où la commande est bloquée à l'intérieur de la zone 1 (commande à relais).
- Les lois de commande devraient être adaptées pour tenir compte des variables de qualité qui migrent vers les zones de 2-3 et 4-5 et devraient permettre de modifier la spécification temporelle des lois de commande pour réintégrer la zone 1. La désirabilité devrait permettre également de contrôler les variables stratégiques comme la granulométrie où la zone 1 représenterait une plage de régulation granulométrique.
- Dans le modèle économique, l'impact des rapports des oxydes S/A sur la consommation énergétique devrait être quantifié par des essais pilotes approfondis.
- L'étude économique devrait être étendue pour l'ensemble des processus de l'usine et permettrait également de simuler le comportement statistique normal (Gaussien) de l'interaction de toutes les variables de qualité.
- Les fonctions de désirabilité exponentielles et les paramètres ( $\tau$ ,  $\beta$ ) de ces fonctions devraient être introduits en considérant que la quantité d'information pourrait devenir suffisante pour assurer une calibration statistiquement valable. En fonction des demandes reliées au plan d'affaires (Business Plan), ces facteurs pourraient être calibrés et ajustés pour tenir compte des nouvelles réalités opérationnelles et des facteurs économiques.
- La conception d'un régulateur (contrôleur) économique devrait permettre de générer des points de consigne aux différentes variables de qualité de tous les processus de transformation de la matière.

**Différentes approches possibles pour le contrôle de qualité en boucle fermée avec la désirabilité :** le développement du contrôle multivariable de qualité est la dernière étape du processus de recommandation. Même si cette étape n'était pas un objectif formel du présent projet, elle suscite néanmoins à l'usine de Port-Cartier beaucoup d'intérêt à cause des

applications qu'elle peut générer. La finalité souhaitée pour une telle structure repose sur l'introduction des critères de qualité et de coûts.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'apport de la fonction de désirabilité redéfinit les frontières des lois de commande si on considère qu'un régulateur ne devrait agir que lorsque le besoin est statistiquement requis (et pas selon une gestion basée sur des seuils). Trop d'énergie est souvent déployée pour des actions de commande dont on paye le prix et qui n'ont aucune incidence positive sur le procédé.

Il est donc possible de regrouper l'ensemble de ces éléments et de développer une structure de commande qui supporte une telle orientation. La Figure 6.17 présente une première esquisse d'une structure qui intégrerait la notion de coûts de commande et de non-qualité.

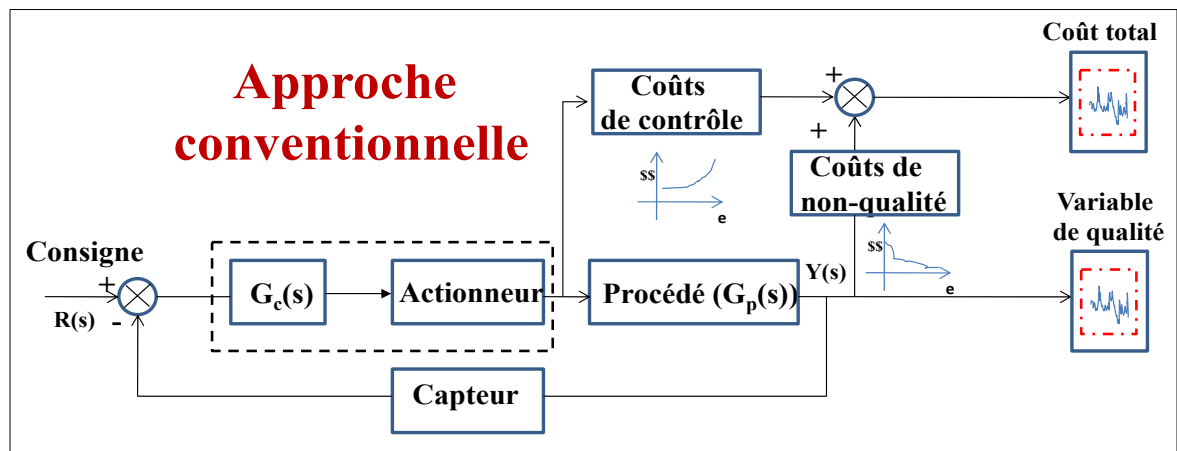


Figure 6.17 Structure de commande conventionnelle (coûts opérationnels)

Progressivement, on a proposé d'introduire la notion de désirabilité dans la structure du capteur, et ce, dans un premier processus d'analyse des données pour la gestion des efforts de commande et du contrôle de qualité (voir Figure 6.18).

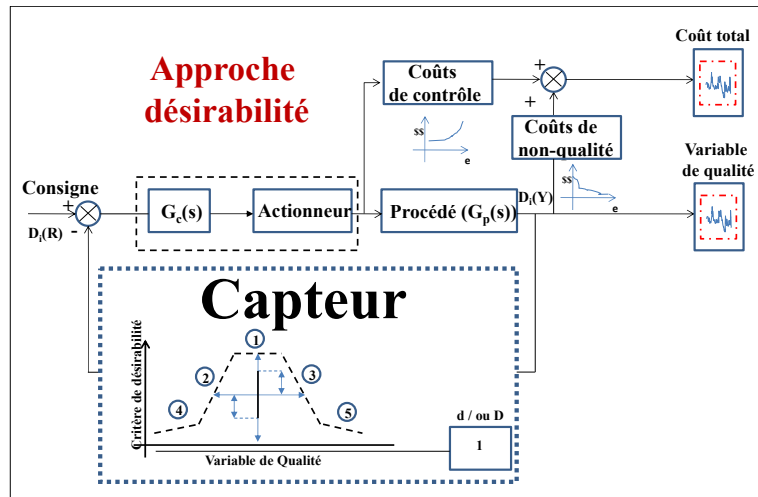


Figure 6.18 Contrôle en monovariante avec désirabilité

Finalement, nous proposons de modifier la structure de commande pour qu'elle migre vers une orientation multivariable et architecturée avec des bases d'analyse statistique où la désirabilité apporte toute son essence, celle d'un critère unitaire mais dont les racines reposent sur une structure multivariable (voir Figure 6.19).

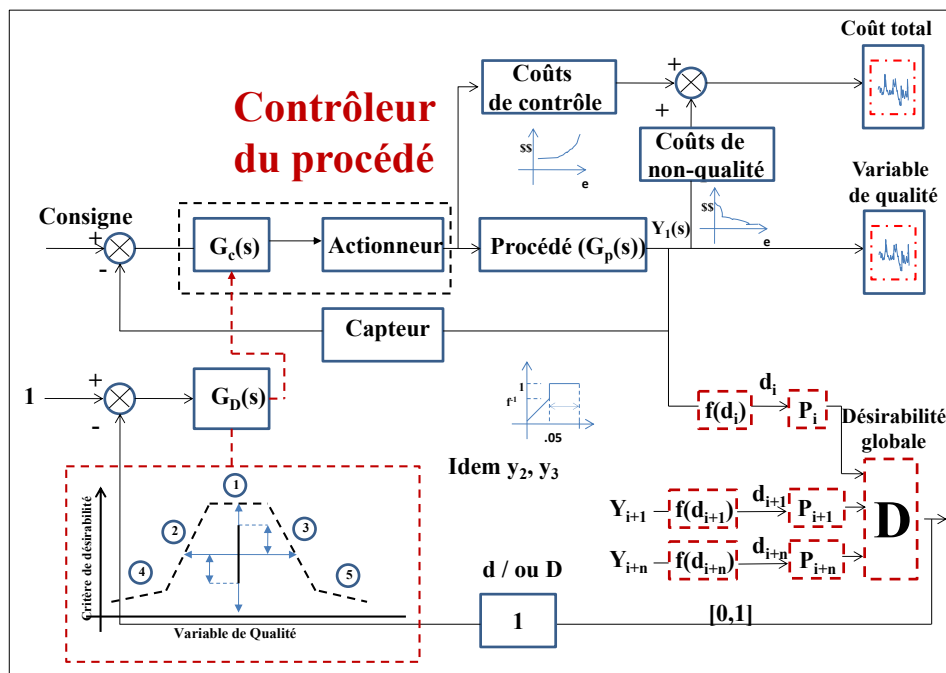


Figure 6.19 Structure de commande multivariable avec désirabilité

## Épilogue

À la fin de cette thèse, le lecteur remarquera que certaines questions demeurent ouvertes et qu'un bon nombre des méthodes que nous avons employées nécessitent d'autres travaux d'exploration et d'autres validations, comme la prolongation des travaux doctoraux sur la modélisation des classificateurs hydrauliques, l'extension des observateurs au bilan complet de l'usine et l'introduction de la désirabilité aux structures de commande.

Malheureusement, nous ne connaissons pas les réponses scientifiques à de telles questions, bien que celles-ci soient tout à fait justifiées dans un cadre industriel et scientifique.

Nous sommes très conscients que notre recherche est une très petite partie d'un ensemble général. Nous croyons que nous avons accompli une tâche, et que beaucoup de travaux sont encore nécessaires avant d'arriver à contrôler les opérations dans une usine d'une manière compétitive et optimale. Nous espérons que notre thèse a contribué à répondre à une partie de notre but initial... Si on croit le mot d'Asimov, une recherche scientifique n'est-elle jamais terminée?

Port Cartier, novembre 2014.



## ANNEXE I

### MODÉLISATION MULTIVARIABLE

Le modèle de régression multivariable linéaire a été appliqué pour la partie statique de certains modèles et pour la calibration des équations récurrentes des fonctions de transfert en "z". Pour la partie dynamique, l'opérateur de recul "z" décale les données en fonction de l'ordre de l'opérateur. Les modèles sont de la forme (Eq -1 et -2) :

$$Y_m(f_i, x_i) = b_0 f_0(x_0) + b_1 f_1(x_1) + \dots + b_n f_n(x_n) \quad (\text{A I.1})$$

$$\frac{y_p(z)}{x(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d}$$

où

$$\begin{aligned} y_p(k) &= a_1 \cdot y_p(k-1) + \dots + a_n \cdot y_p(k-n) + \\ &b_0 \cdot x(k-d) + b_1 \cdot x(k-d-1) + \dots + b_m \cdot x(k-d-m) \end{aligned} \quad (\text{A I.2})$$

Le critère matriciel est de la forme :

$$J = (Y_m - \hat{Y})^T (Y_m - \hat{Y}) \quad (\text{A I.3})$$

L'expression des estimés en "Y" est :

$$\hat{Y} = XB \quad (\text{A I.4})$$

Le critère devient :

$$J = (Y_m - XB)^T (Y_m - XB) \quad (\text{A I.5})$$

L'application des transposées des matrices nous donne :

$$J = (Y_m^T - B^T X^T)(Y_m - XB) \quad (\text{A I.6})$$

La distribution des termes matriciels nous donne :

$$J = Y_m^T Y_m - Y_m^T XB - B^T X^T Y_m + B^T X^T XB \quad (\text{A I.7})$$

La minimisation du critère doit être appliquée sur le vecteur "B". Pour adapter le critère à la minimisation, on applique une transposée sur le terme " $Y_m^T XB$ ". Le résultat nous donne :

$$J = Y_m^T Y_m - B^T X^T Y_m - B^T X^T Y_m + B^T X^T XB \quad (\text{A I.8})$$

Une fois simplifiée, le critère devient :

$$J = Y_m^T Y_m - 2B^T X^T Y_m + B^T X^T XB \quad (\text{A I.9})$$

La minimisation du critère par rapport au vecteur "B" nous donne :

$$\frac{\partial J}{\partial B} = \frac{\partial (Y_m^T Y_m - 2B^T X^T Y_m + B^T X^T XB)}{\partial B} \quad (\text{A I.10})$$

Une fois simplifiée, l'expression devient :

$$\frac{\partial J}{\partial B} = -2X^T Y_m + 2X^T XB \quad (\text{A I.11})$$



La stationnarité du critère devient :

$$-2X^T Y_m + 2X^T X B = 0 \quad (\text{A I.12})$$

et

$$X^T X B = X^T Y_m \quad (\text{A I.13})$$

L'expression finale du vecteur solution "B" nous donne :

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y_m \quad (\text{A I.14})$$



## ANNEXE II

## SCHÉMAS P&ID CIRCUIT DU BROYEUR "A"

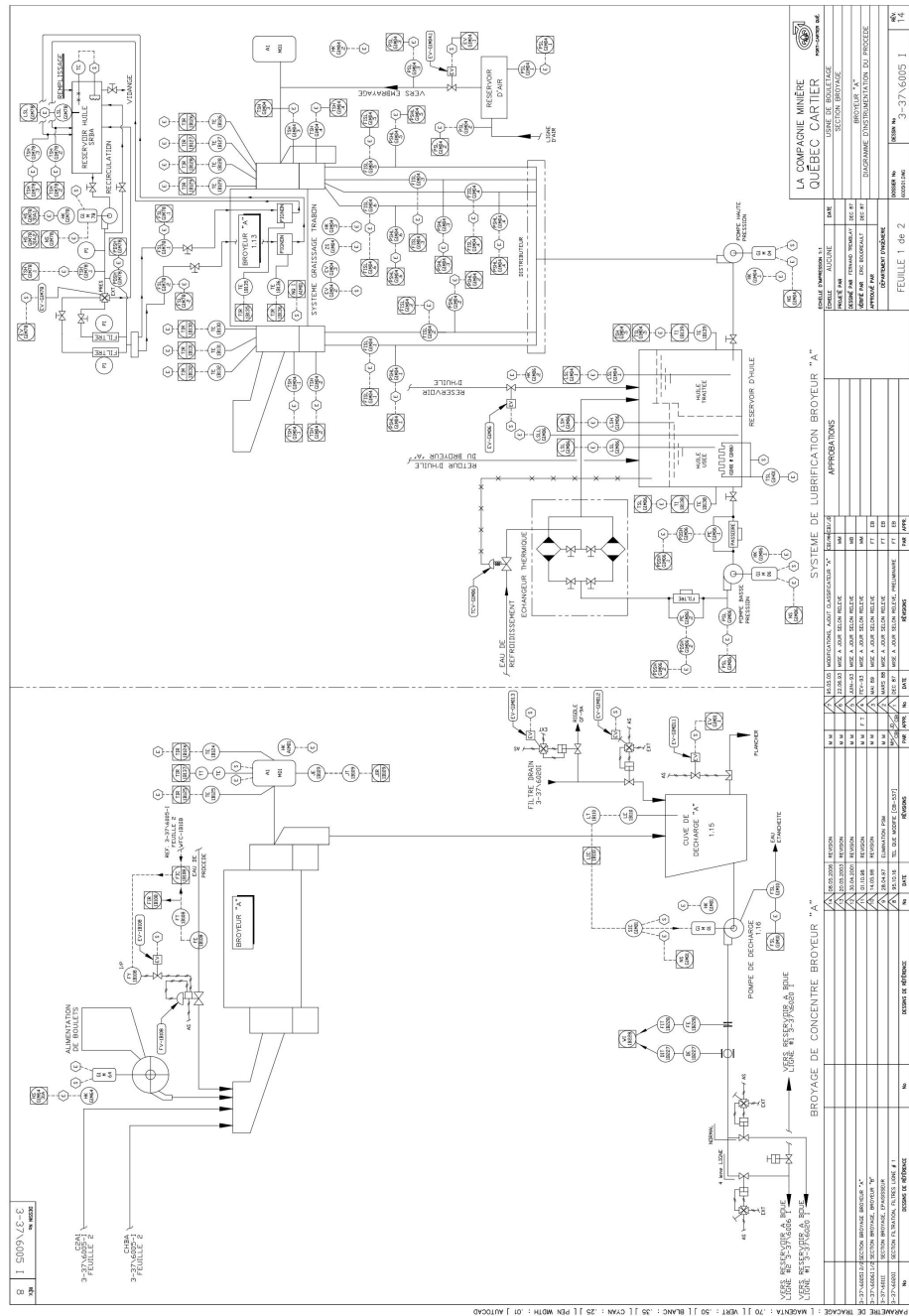


Figure-A II-1

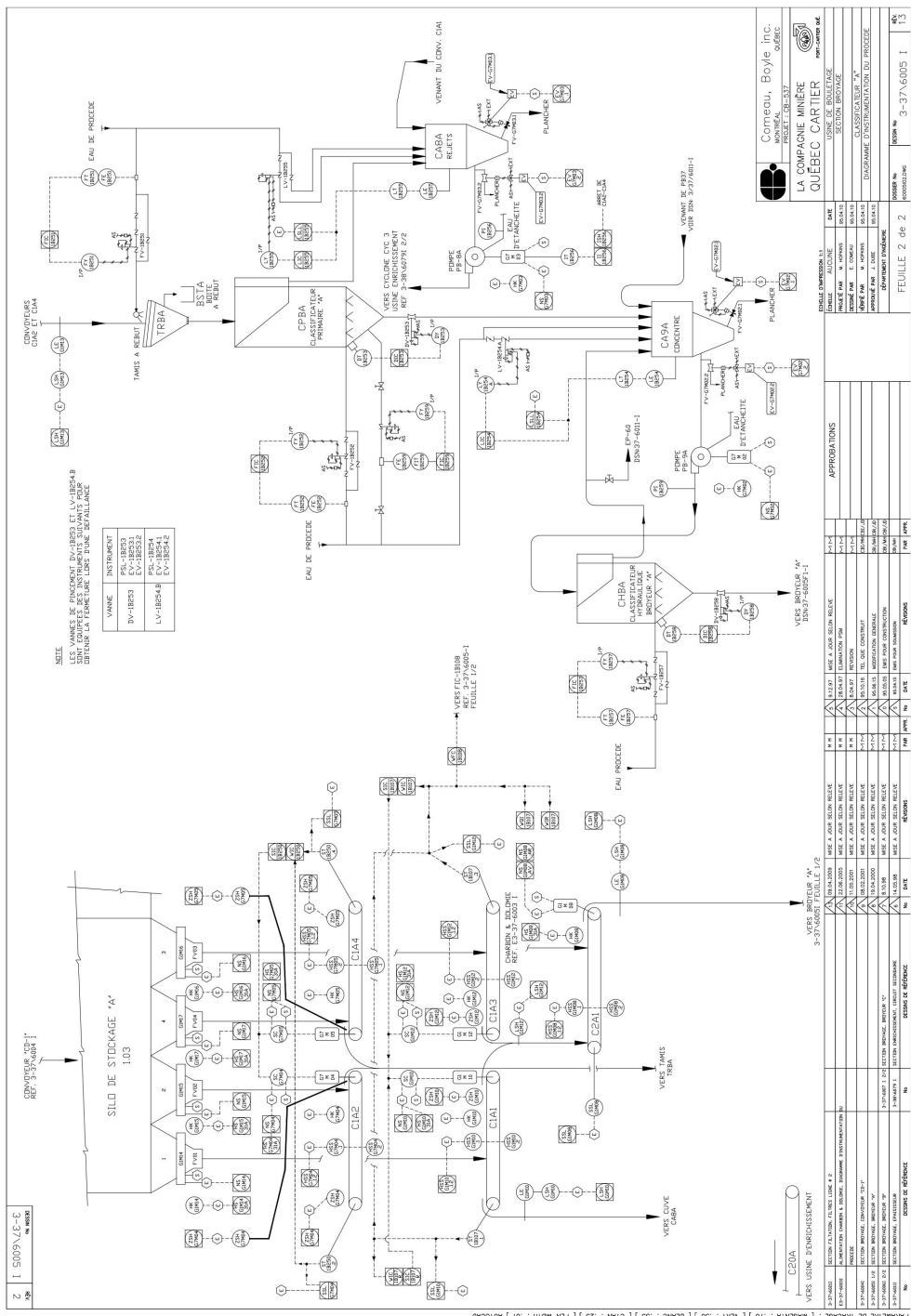


Figure-A II-2

## ANNEXE III

### MODÈLES AVEC LES TRANSFORMÉES EN "S" ET EN "Z"

La fonction de transfert du système dynamique dans le domaine continu (Laplace) est donnée par l'équation suivante :

$$G_p(s) = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.1})$$

La discrétisation est effectuée en utilisant le bloqueur d'ordre zéro, soit :

$$G_p(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} \quad (\text{A III.2})$$

Le calcul des coefficients de cette fonction de transfert est présenté pour deux types de structures de deuxième ordre soit, pour deux constantes de temps distinctes et une constante de temps double incluant un zéro ou non.

#### Bloqueur d'ordre zéro

Le bloqueur d'ordre zéro est utilisé dans la discrétisation pour la conservation du gain et empêcher une transmission directe dans le procédé.

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (\text{A III.3})$$

#### Pour un système de deuxième ordre avec des constantes de temps distinctes

$$G_p(s) = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad \tau_1 \neq \tau_2, \quad \tau_1 \neq 0, \quad \tau_2 \neq 0 \quad (\text{A III.4})$$

### Développement des fractions partielles

où  $T_1 \neq T_2$ ,  $T_1 \neq 0$ ,  $T_2 \neq 0$ , on obtient :

$$G_p(s) = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.5})$$

Application des fractions partielles :

$$\frac{(\tau_0 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{A}{(\tau_1 s + 1)} + \frac{B}{(\tau_2 s + 1)} = \frac{A(\tau_2 s + 1) + B(\tau_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.6})$$

$$\frac{A}{(\tau_1 s + 1)} + \frac{B}{(\tau_2 s + 1)} = \frac{A(\tau_2 s + 1) + B(\tau_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{s(A\tau_2 + B\tau_1) + (A + B)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.7})$$

$$\frac{s(A\tau_2 + B\tau_1) + (A + B)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{(\tau_0 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.8})$$

La solution des constantes A et B est :

$$\begin{aligned} A\tau_2 + B\tau_1 &= \tau_0 \\ A + B &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A III.9})$$

La forme matricielle est :

$$\begin{vmatrix} \tau_2 & \tau_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A III.10})$$

Le système est représenté par :

$$\alpha X = \beta \quad (\text{A III.11})$$

La solution est obtenue par :

$$X = \alpha^{-1} \beta \quad (\text{A III.12})$$

Par la méthode d'élimination des variables, pour la constante B, on obtient :

$$\begin{aligned} (1-B)\tau_2 + B\tau_1 &= \tau_0 \\ (\tau_1 - \tau_2)B + \tau_2 &= \tau_0 \\ B &= \frac{\tau_2 - \tau_0}{\tau_2 - \tau_1} \end{aligned} \quad (\text{A III.13})$$

Pour la constante A, on obtient par la suite :

$$A = 1 - \frac{\tau_0 - \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{\tau_1 - \tau_2 - \tau_0 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_2} \quad (\text{A III.14})$$

Le résultat final des constantes A et B nous donne :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_2} \\ B &= \frac{\tau_2 - \tau_0}{\tau_2 - \tau_1} \end{aligned} \quad (\text{A III.15})$$

### Développement de la transformée en "z"

Application de la transformée avec un bloqueur d'ordre zéro :

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{A}{(\tau_1 s + 1)} \right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{A}{s(\tau_1 s + 1)} \right] \frac{z}{z} \quad (\text{A III.16})$$

$$(1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{A}{s(\tau_1 s + 1)} \right] \frac{z}{z} = A \left( \frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left[ \frac{1/\tau_1}{s(s+1/\tau_1)} \right] \quad (\text{A III.17})$$

$$A \left( \frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left[ \frac{1/\tau_1}{s(s+1/\tau_1)} \right] = A \left( \frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left[ \frac{a}{s(s+a)} \right] \quad (\text{A III.18})$$

$$A \left( \frac{z-1}{z} \right) \mathcal{Z} \left[ \frac{a}{s(s+a)} \right] = A \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{z}{z-1} \right) \left( \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \right) \quad (\text{A III.19})$$

$$A \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{z}{z-1} \right) \left( \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \right) = A \left( \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \right) \quad (\text{A III.20})$$

où

$$\alpha = e^{-\frac{T}{\tau_1}} = e^{-aT} \quad (\text{A III.21})$$

alors on obtient :

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{A}{(\tau_1 s + 1)} \right] = A \left( \frac{1-\alpha}{z-\alpha} \right) = A \left( \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \right) z^{-1} \quad (\text{A III.22})$$

où

$$\beta = e^{-\frac{T}{\tau_2}} = e^{-bT} \quad (\text{A III.23})$$



$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{B}{(\tau_2 s + 1)} \right] = B \left( \frac{1 - \beta}{z - \beta} \right) = B \left( \frac{1 - \beta}{1 - \beta z^{-1}} \right) z^{-1} \quad (\text{A III.24})$$

À partir des équations A III.1 et A III.2, on pose l'égalité suivante :

$$G_p(z) = G_p(s) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.25})$$

le développement nous donne :

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = K_p e^{-\theta s} \left( A \left( \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \right) + B \left( \frac{1 - \beta}{z - \beta} \right) \right) \quad (\text{A III.26})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = K_p e^{-\theta s} \left( A \left( \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \right) + B \left( \frac{1 - \beta}{z - \beta} \right) \right) \quad (\text{A III.27})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( K_p A \left( \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \right) + K_p B \left( \frac{1 - \beta}{z - \beta} \right) \right) e^{-\theta s} \quad (\text{A III.28})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( K_p A \left( \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \right) + K_p B \left( \frac{1 - \beta}{z - \beta} \right) \right) z^{-\frac{\theta}{T}} \quad (\text{A III.29})$$

à partir d'un dénominateur commun, on obtient :

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = K_p \left( \frac{A(1 - \alpha)(z - \beta) + B(1 - \beta)(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \right) z^{-\frac{\theta}{T}} \quad (\text{A III.30})$$

à des fins de simplification on pose donc :

$$\begin{aligned} A' &= A(1-\alpha) \\ B' &= B(1-\beta) \end{aligned} \quad (\text{A III.31})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = K_p \left( \frac{A'(z-\beta) + B'(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)} \right) z^{-\frac{\theta}{T}} \quad (\text{A III.32})$$

$$\frac{A'(z-\beta) + B'(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{A'z - A'\beta + B'z - B'\alpha}{z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta} = \frac{(A' + B')z - (A'\beta + B'\alpha)}{z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta} \quad (\text{A III.33})$$

$$\frac{(A' + B')z - (A'\beta + B'\alpha)}{z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta} \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{(A' + B')z^{-1} - (A'\beta + B'\alpha)z^{-2}}{1 - (\alpha + \beta)z^{-1} + \alpha\beta z^{-2}} \quad (\text{A III.34})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = K_p \left( \frac{(A' + B')z^{-1} - (A'\beta + B'\alpha)z^{-2}}{1 - (\alpha + \beta)z^{-1} + \alpha\beta z^{-2}} \right) z^{-\frac{\theta}{T}} \quad (\text{A III.35})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = K_p \left( \frac{(A' + B')z^{-1} - (A'\beta + B'\alpha)z^{-2}}{1 - (\alpha + \beta)z^{-1} + \alpha\beta z^{-2}} \right) z^{-k} \quad (\text{A III.36})$$

où

$$k = \theta/T \quad (\text{A III.37})$$

la mise en égalité des coefficients permet de déterminer :

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= K_p (A' + B') \\
 b_2 &= -K_p (A'\beta + B'\alpha) \\
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= -(\alpha + \beta) \\
 a_2 &= \alpha\beta \\
 k &= \theta/T
 \end{aligned}
 \tag{A III.38}$$

### Pour un système de deuxième ordre avec une constante de temps double

où  $\tau_1 = \tau_2 = \tau \neq 0$ , on obtient :

$$G_p(s) = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau s + 1)^2} \tag{A III.39}$$

La fraction partielle utilisée est :

$$\frac{(\tau_0 s + 1)}{(\tau s + 1)^2} = \frac{As}{(\tau s + 1)^2} + \frac{1}{(\tau s + 1)} \tag{A III.40}$$

La décomposition nous donne :

$$\frac{(\tau_0 s + 1)}{(\tau s + 1)^2} = \frac{As}{(\tau s + 1)^2} + \frac{B}{(\tau s + 1)} = \frac{As + B(\tau s + 1)}{(\tau s + 1)^2} = \frac{(A + B\tau)s + B}{(\tau s + 1)^2} \tag{A III.41}$$

$$\frac{(\tau_0 s + 1)}{(\tau s + 1)^2} = \frac{(A + B\tau)s + B}{(\tau s + 1)^2} = \frac{s(A + B\tau)}{(\tau s + 1)^2} + \frac{B}{(\tau s + 1)^2} \tag{A III.42}$$

$$\frac{(\tau_0 s + 1)}{(\tau s + 1)^2} = \frac{s(A + B\tau)}{(\tau s + 1)^2} + \frac{B}{(\tau s + 1)^2} \quad (\text{A III.43})$$

La solution des constantes A et B est :

$$\begin{aligned} A + B\tau &= \tau_0 \\ B &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A III.44})$$

La forme matricielle est :

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A III.45})$$

Le système est représenté par :

$$\delta X = \varphi \quad (\text{A III.46})$$

La solution est obtenue par :

$$X = \delta^{-1} \varphi \quad (\text{A III.47})$$

Par la méthode d'élimination des variables avec la constante B=1, on obtient :

$$\begin{aligned} A + B\tau &= \tau_0 \\ B &= 1 \\ A + \tau &= \tau_0 \\ A &= \tau_0 - \tau \\ B &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A III.48})$$

### Développement de la transformée en "z"

Application de la transformée avec un bloqueur d'ordre zéro :

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \left( \frac{As}{(\tau s+1)^2} + \frac{B}{(\tau s+1)} \right) \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{As}{(\tau s+1)^2} + \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{B}{(\tau s+1)} \right] \quad (\text{A III.49})$$

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{As}{(\tau s+1)^2} + \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{B}{(\tau s+1)} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{As/\tau^2}{(s+1/\tau)^2} + \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{B/\tau}{(s+1/\tau)} \right] \quad (\text{A III.50})$$

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{As/\tau^2}{(s+1/\tau)^2} + \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{B/\tau}{(s+1/\tau)} \right] = \mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Asa^2}{(s+a)^2} + \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Ba}{(s+a)} \right] \quad (\text{A III.51})$$

$$\mathcal{Z} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Asa^2}{(s+a)^2} + \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{Ba}{(s+a)} \right] = \mathcal{Z} \left[ (1-e^{-Ts}) \frac{Aa^2}{(s+a)^2} + (1-e^{-Ts}) \frac{Ba}{s(s+a)} \right] \quad (\text{A III.52})$$

Pour la partie de la fraction partielle regroupant la double constante de temps, on obtient :

$$\mathcal{Z} \left[ (1-e^{-Ts}) \frac{Aa^2}{(s+a)^2} \right] = Aa^2 \frac{(z-1)}{z} \cdot \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} \quad (\text{A III.53})$$

où

$$\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}} = e^{-aT} \quad (\text{A III.54})$$

$$Aa^2 \frac{(z-1)}{z} \cdot \frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} = ATa^2 \alpha \frac{(z-1)}{(z-\alpha)^2} \quad (\text{A III.55})$$

Pour la partie de la fraction partielle regroupant la constante de temps unique, on obtient :

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{B}{(\tau s+1)}\right] = \mathcal{Z}\left[(1-e^{-Ts}) \frac{B/\tau}{s(s+1/\tau)}\right] = \mathcal{Z}\left[(1-e^{-Ts}) \frac{aB}{s(s+a)}\right] \quad (\text{A III.56})$$

$$\mathcal{Z}\left[(1-e^{-Ts}) \frac{aB}{s(s+a)}\right] = B \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})} \quad (\text{A III.57})$$

$$\mathcal{Z}\left[(1-e^{-Ts}) \frac{aB}{s(s+a)}\right] = B \frac{(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})} = B \frac{(1-\alpha)}{(z-\alpha)} \quad (\text{A III.58})$$

La transformée est égale à la somme des transformées :

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \left(\frac{As}{(\tau s+1)^2} + \frac{B}{(\tau s+1)}\right)\right] = ATa^2\alpha \frac{(z-1)}{(z-\alpha)^2} + B \frac{(1-\alpha)}{(z-\alpha)} \quad (\text{A III.59})$$

À partir des équations A III.1 et A III.2, on pose l'égalité suivante :

$$G_p(z) = G_p(s) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (\text{A III.60})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \frac{K_p (\tau_0 s + 1) e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = K_p \left( ATa^2\alpha \frac{(z-1)}{(z-\alpha)^2} + B \frac{(1-\alpha)}{(z-\alpha)} \right) e^{-\theta s} \quad (\text{A III.61})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = K_p \left( ATa^2\alpha \frac{(z-1)}{(z-\alpha)^2} + B \frac{(1-\alpha)}{(z-\alpha)} \right) e^{-\theta s} \quad (\text{A III.62})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( K_p A T a^2 \alpha \frac{(z-1)}{(z-\alpha)^2} + K_p B \frac{(1-\alpha)}{(z-\alpha)} \right) z^{-\theta/T} \quad (\text{A III.63})$$

où

$$k = \theta/T \quad (\text{A III.64})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( K_p A T a^2 \alpha \frac{(z-1)}{(z-\alpha)^2} + K_p B \frac{(1-\alpha)}{(z-\alpha)} \right) z^{-k} \quad (\text{A III.65})$$

à partir d'un dénominateur commun, on obtient :

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( \frac{K_p A T a^2 \alpha (z-1) + K_p B (1-\alpha)(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2} \right) z^{-k} \quad (\text{A III.66})$$

à des fins de simplification on pose donc :

$$\begin{aligned} A' &= A T a^2 \alpha \\ B' &= B (1-\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A III.67})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( \frac{K_p A' (z-1) + K_p B' (z-\alpha)}{(z-\alpha)^2} \right) z^{-k} \quad (\text{A III.68})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( \frac{K_p A' z - K_p A' + K_p B' z - K_p B' \alpha}{(z-\alpha)^2} \right) z^{-k} \quad (\text{A III.69})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} z^{-k} = \left( \frac{-K_p (A' + B' \alpha) + K_p (A' + B') z}{(z^2 - 2\alpha z + \alpha^2)} \right) z^{-k} \quad (\text{A III.70})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \left( \frac{-K_p (A' + B' \alpha) + K_p (A' + B') z}{z^2 - 2\alpha z + \alpha^2} \right) \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \quad (\text{A III.71})$$

$$\frac{b_o + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \left( \frac{K_p (A' + B') z^{-1} - K_p (A' + B' \alpha) z^{-2}}{1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} \right) \quad (\text{A III.72})$$

la mise en égalité des coefficients permet de déterminer :

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= K_p (A' + B') \\ b_2 &= -K_p (A' + B' \alpha) \\ a_0 &= 1 \\ a_1 &= -2\alpha \\ a_2 &= \alpha^2 \\ k &= \theta/T \end{aligned} \quad (\text{A III.73})$$



## ANNEXE IV

### FIGURES DES MODÈLES DYNAMIQUES

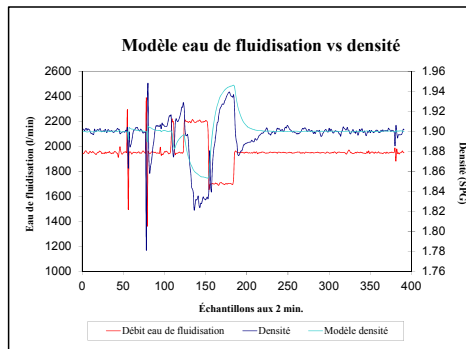


Figure-A IV-1 : Référence<sup>90</sup>

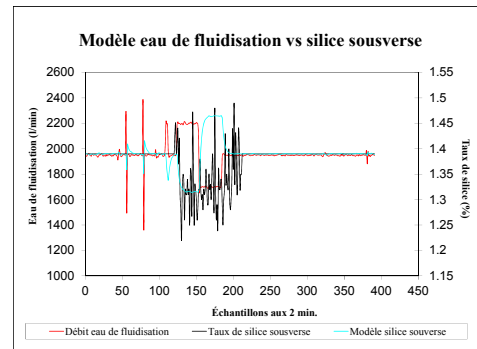


Figure-A IV-2 : Référence<sup>91</sup>

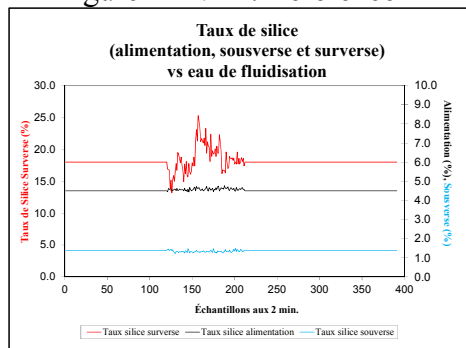


Figure-A IV-3 : Référence<sup>92</sup>

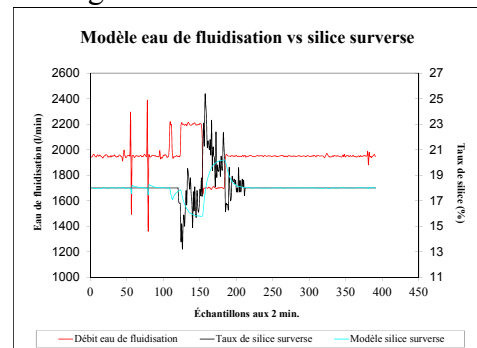


Figure-A IV-4 : Référence<sup>93</sup>

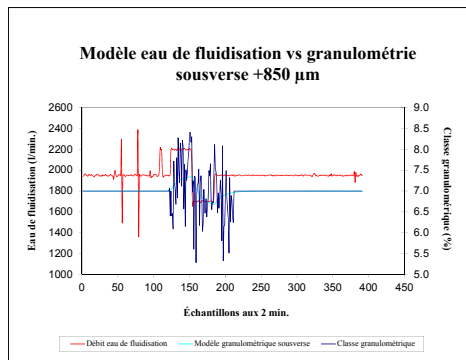


Figure-A IV-5 : Référence<sup>94</sup>

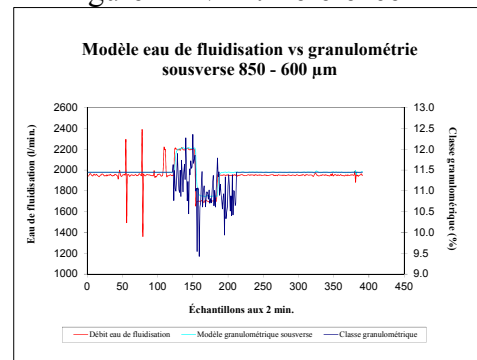


Figure-A IV-6 : Référence<sup>95</sup>

<sup>90</sup> Modèle eau de fluidisation versus densité.

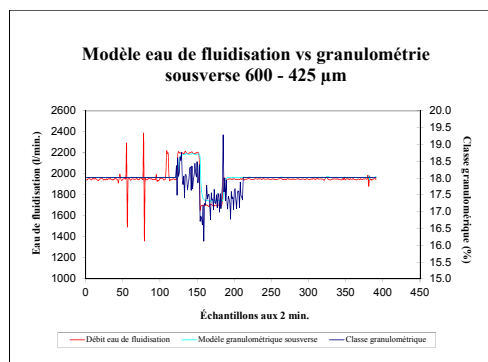
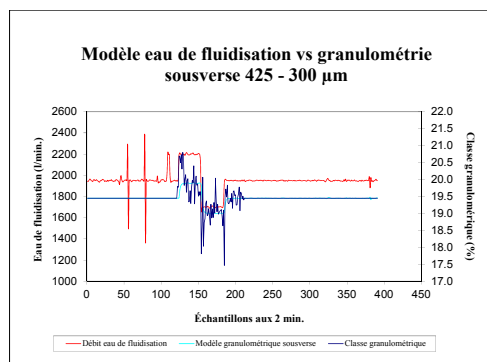
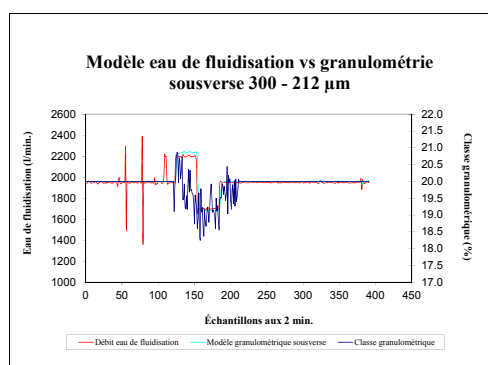
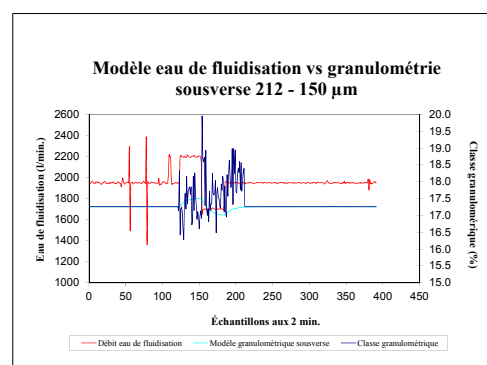
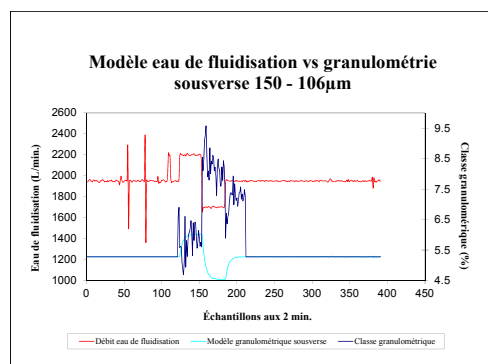
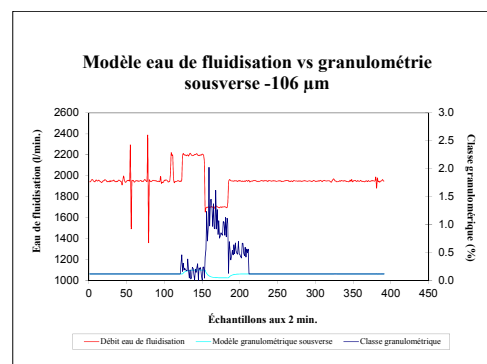
<sup>91</sup> Modèle eau de fluidisation versus taux de silice à la sousverse.

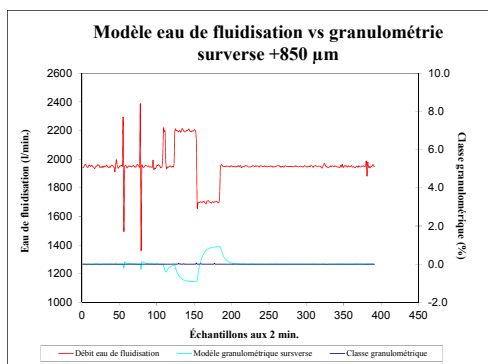
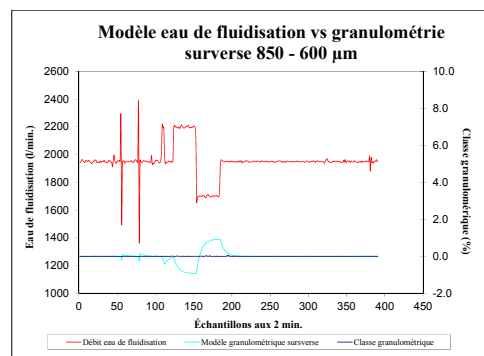
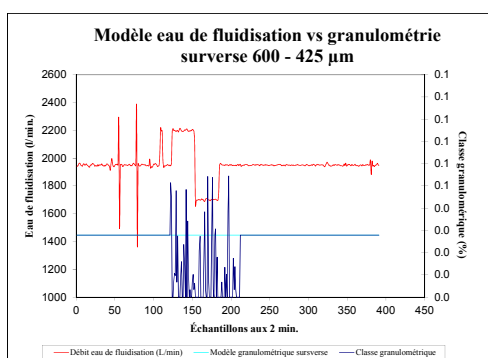
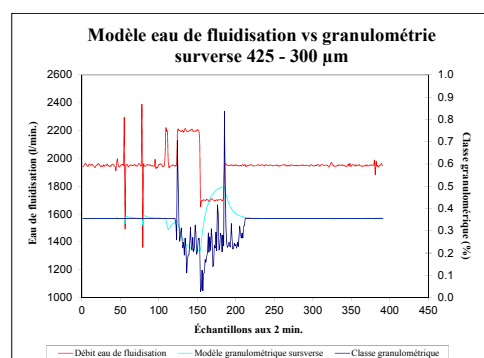
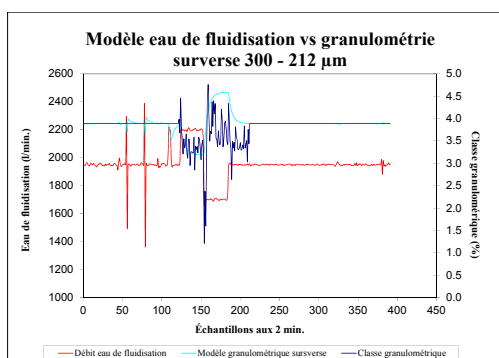
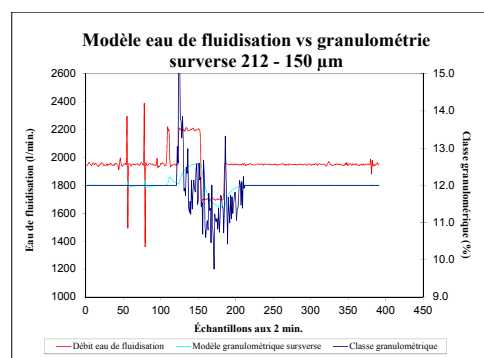
<sup>92</sup> Taux de silice à l'alimentation, à la sousverse et à la surverse.

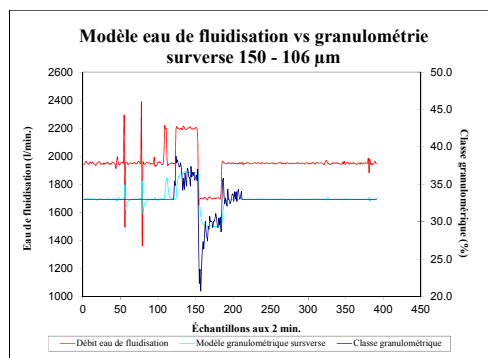
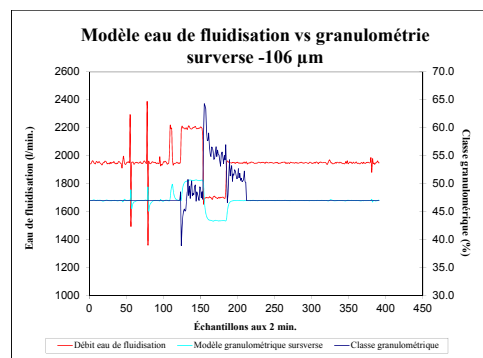
<sup>93</sup> Modèle eau de fluidisation vs taux de silice à la surverse.

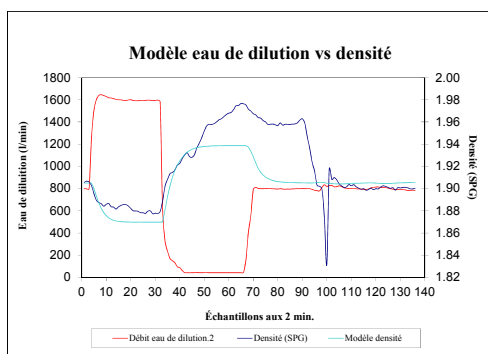
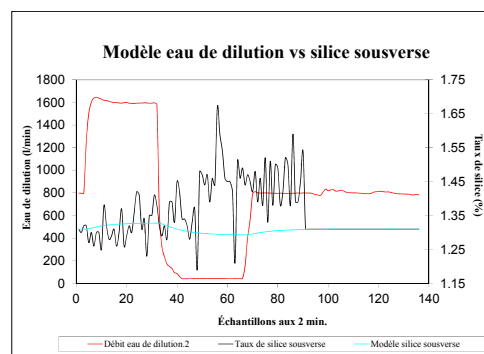
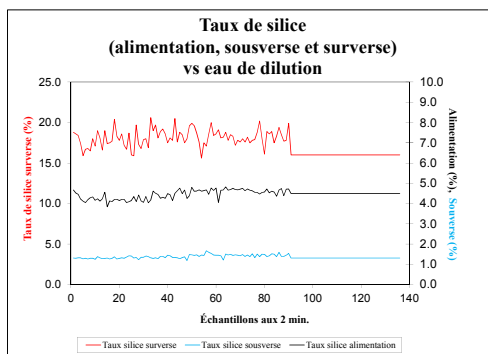
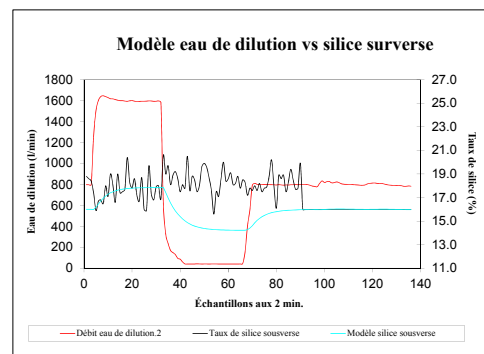
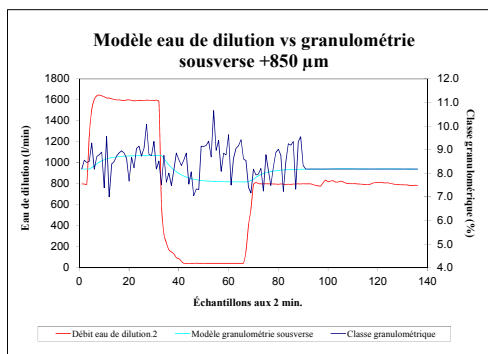
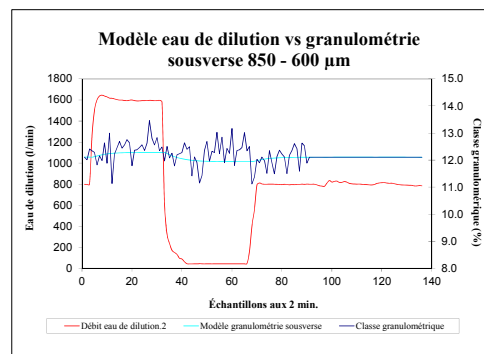
<sup>94</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie du +850 µm à la sousverse.

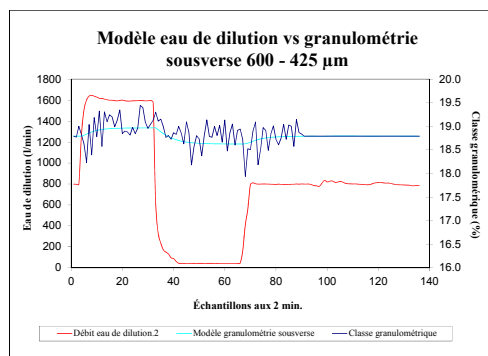
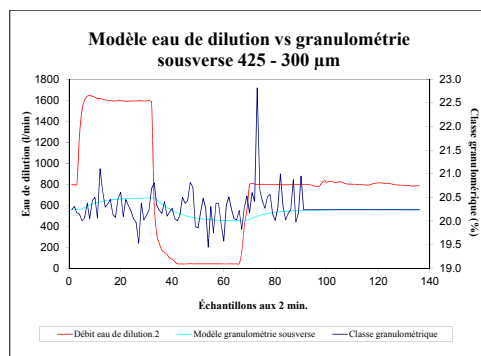
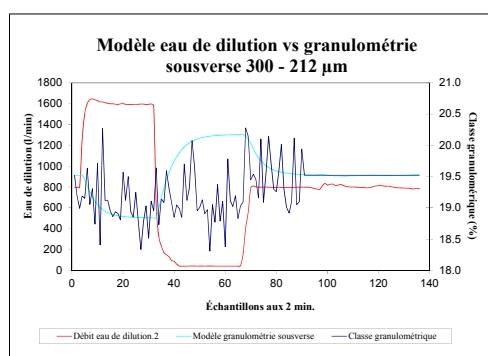
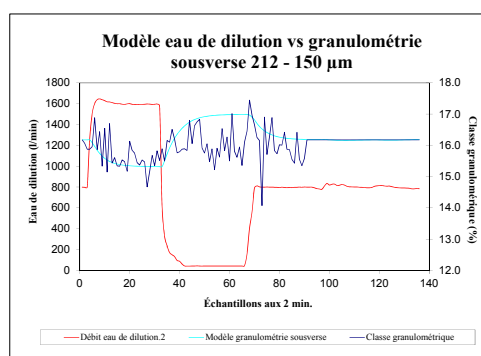
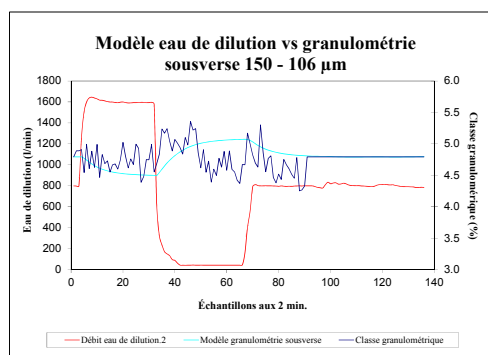
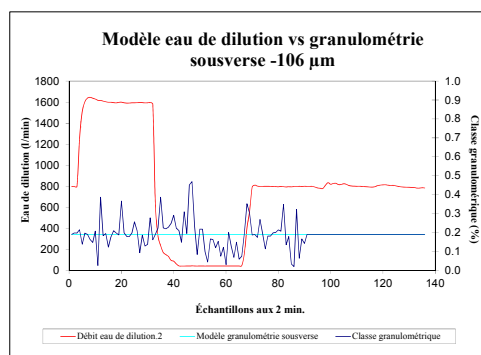
<sup>95</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 850-600 µm à la sousverse.

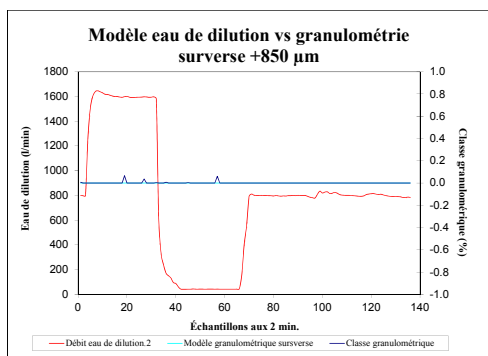
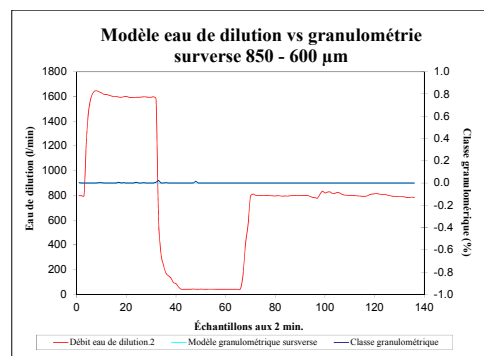
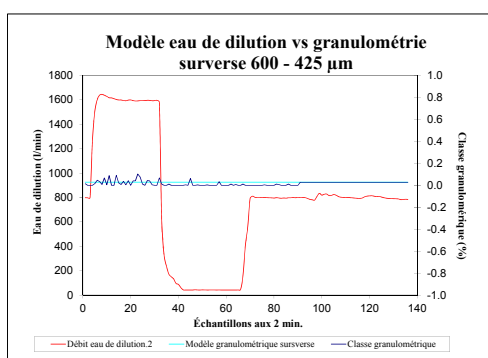
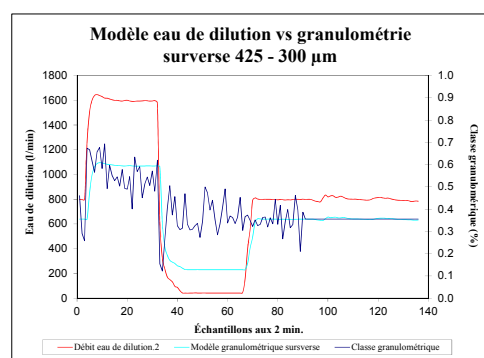
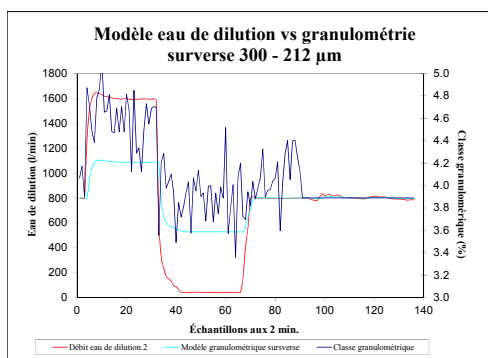
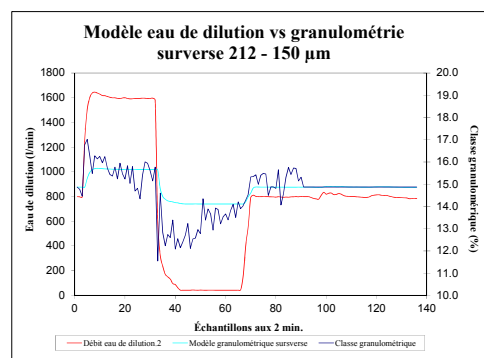
Figure-A IV-7 : Référence <sup>96</sup>Figure-A IV-8 : Référence <sup>97</sup>Figure-A IV-9 : Référence <sup>98</sup>Figure-A IV-10 : Référence <sup>99</sup>Figure-A IV-11 : Référence <sup>100</sup>Figure-A IV-12 : Référence <sup>101</sup><sup>96</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 600-425 µm à la sousverse.<sup>97</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 425-300 µm à la sousverse.<sup>98</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 300-212 µm à la sousverse.<sup>99</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 212-150 µm à la sousverse.<sup>100</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 150-106 µm à la sousverse.<sup>101</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie -106 µm à la sousverse.

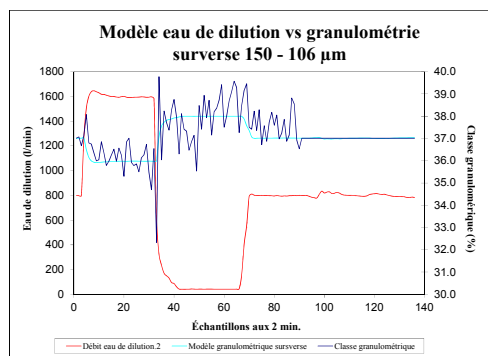
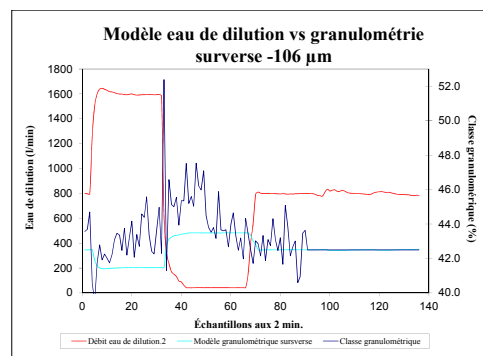
Figure-A IV-13 : Référence<sup>102</sup>Figure-A IV-14 : Référence<sup>103</sup>Figure-A IV-15 : Référence<sup>104</sup>Figure-A IV-16 : Référence<sup>105</sup>Figure-A IV-17 : Référence<sup>106</sup>Figure-A IV-18 : Référence<sup>107</sup><sup>102</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie +850 µm à la surverse.<sup>103</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 850-600 µm à la surverse.<sup>104</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 600-425 µm à la surverse.<sup>105</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 425-300 µm à la surverse.<sup>106</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 300-212 µm à la surverse.<sup>107</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 212-150 µm à la surverse.

Figure-A IV-19 : Référence<sup>108</sup>Figure-A IV-20 : Référence<sup>109</sup><sup>108</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie 150-106 µm à la surverse.<sup>109</sup> Modèle eau de fluidisation vs granulométrie -106 µm à la surverse.

Figure-A IV-21 : Référence <sup>110</sup>Figure-A IV-22 : Référence <sup>111</sup>Figure-A IV-23 : Référence <sup>112</sup>Figure-A IV-24 : Référence <sup>113</sup>Figure-A IV-25 : Référence <sup>114</sup>Figure-A IV-26 : Référence <sup>115</sup><sup>110</sup> Modèle eau de dilution vs densité.<sup>111</sup> Modèle eau de dilution vs taux de silice à la sousverse.<sup>112</sup> Taux de silice à l'alimentation, à la sousverse et à la surverse.<sup>113</sup> Modèle eau de dilution vs taux de silice à la surverse.<sup>114</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie +850 µm à la sousverse.<sup>115</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 850-600 µm à la sousverse.

Figure-A IV-27 : Référence <sup>116</sup>Figure-A IV-28 : Référence <sup>117</sup>Figure-A IV-29 : Référence <sup>118</sup>Figure-A IV-30 : Référence <sup>119</sup>Figure-A IV-31 : Référence <sup>120</sup>Figure-A IV-32 : Référence <sup>121</sup><sup>116</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 600-425 µm à la sousverse.<sup>117</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 425-300 µm à la sousverse.<sup>118</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 300-212 µm à la sousverse.<sup>119</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 212-150 µm à la sousverse.<sup>120</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 150-106 µm à la sousverse.<sup>121</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie -106 µm à la sousverse.

Figure-A IV-33 : Référence <sup>122</sup>Figure-A IV-34 : Référence <sup>123</sup>Figure-A IV-35 : Référence <sup>124</sup>Figure-A IV-36 : Référence <sup>125</sup>Figure-A IV-37 : Référence <sup>126</sup>Figure-A IV-38 : Référence <sup>127</sup><sup>122</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie +850 µm à la surverse.<sup>123</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 850-600 µm à la surverse.<sup>124</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 600-425 µm à la surverse.<sup>125</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 425-300 µm à la surverse.<sup>126</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 300-212 µm à la surverse.<sup>127</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 212-150 µm à la surverse.

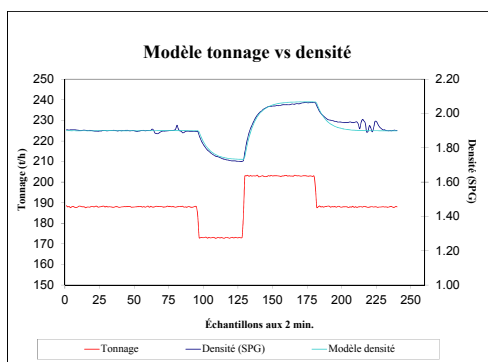
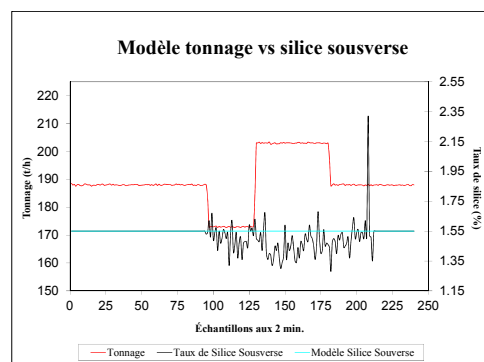
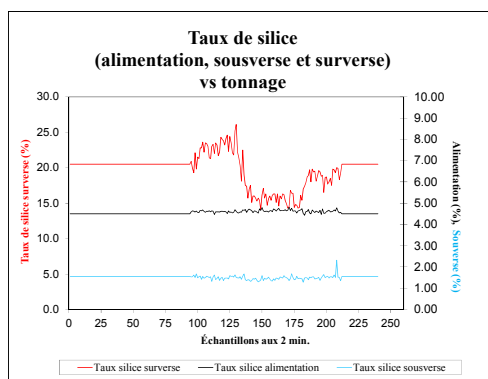
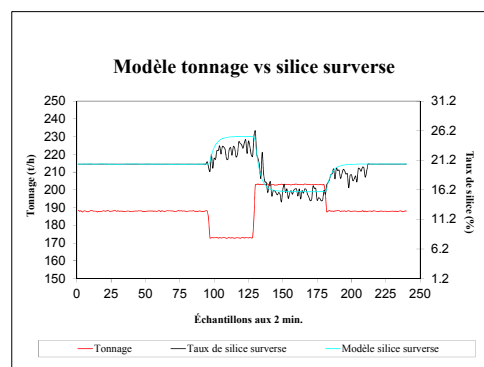
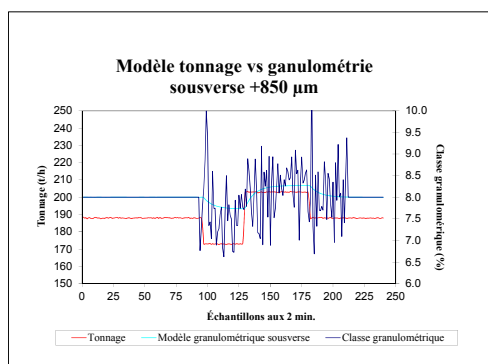
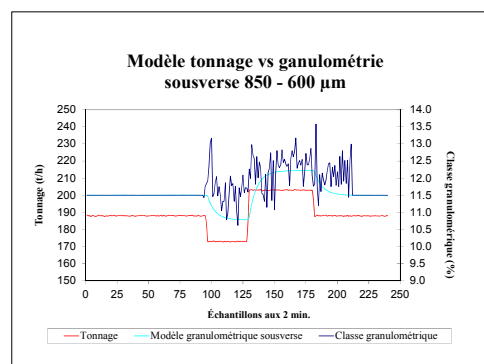
Figure-A IV-39 : Référence <sup>128</sup>Figure-A IV-40 : Référence <sup>129</sup>

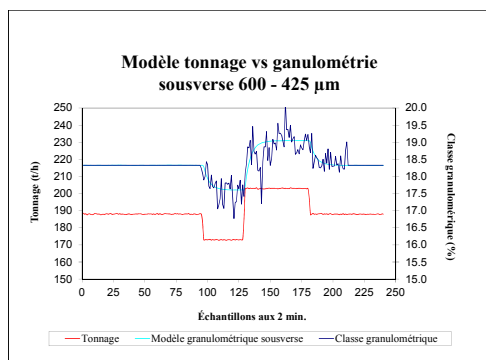
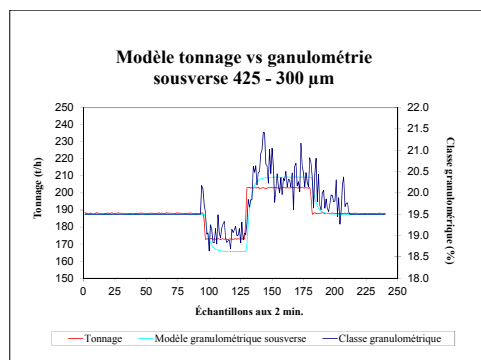
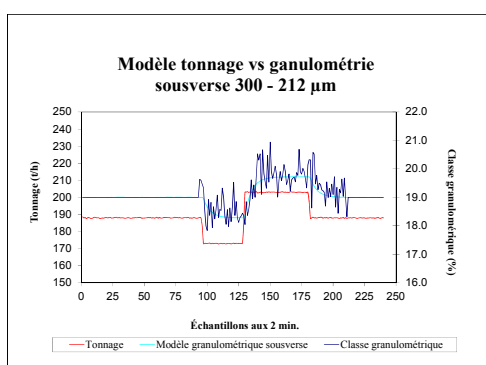
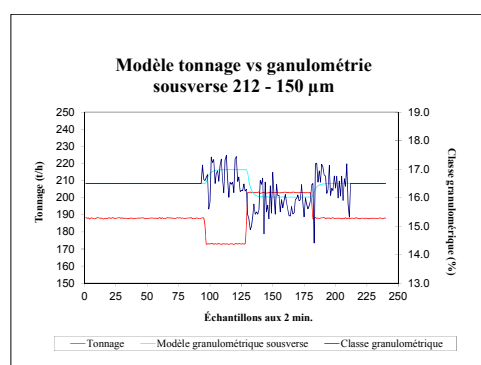
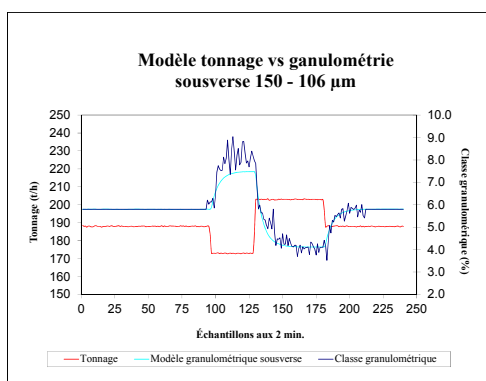
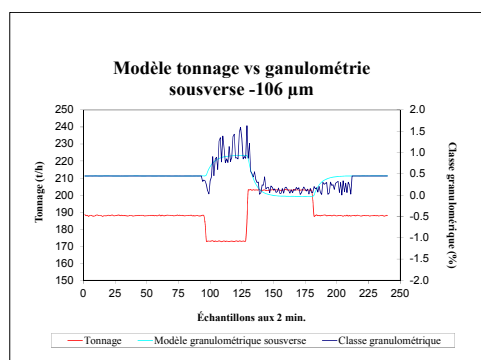

---

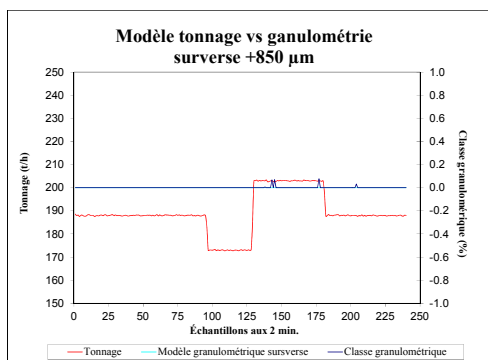
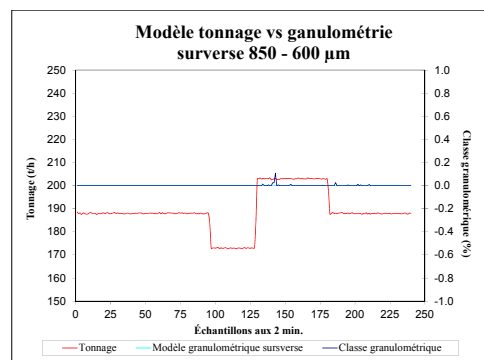
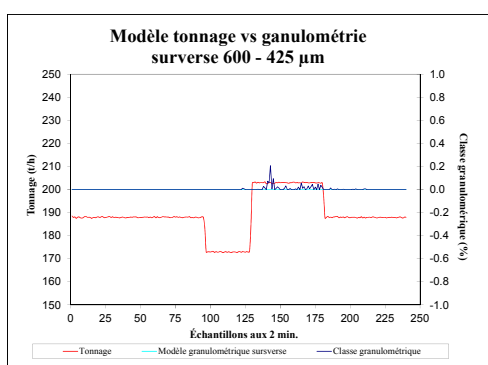
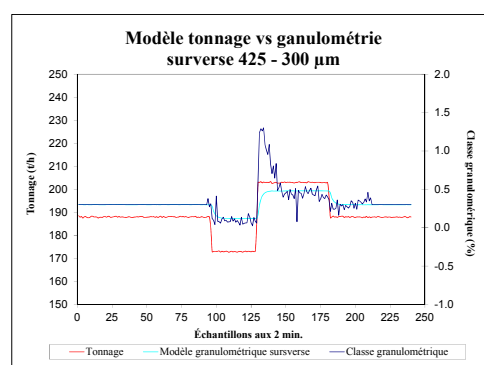
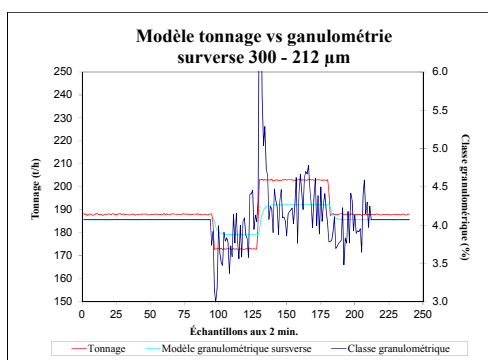
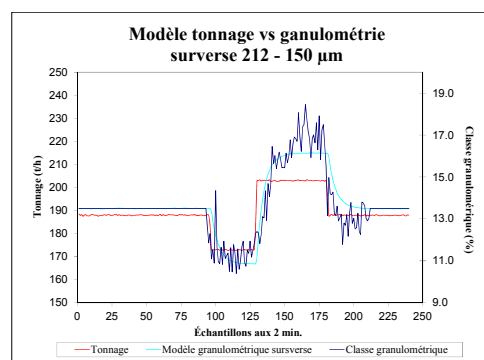
<sup>128</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie 150-106 µm à la surverse.

<sup>129</sup> Modèle eau de dilution vs granulométrie -106 µm à la surverse.



Figure-A IV-41 : Référence <sup>130</sup>Figure-A IV-42 : Référence <sup>131</sup>Figure-A IV-43 : Référence <sup>132</sup>Figure-A IV-44 : Référence <sup>133</sup>Figure-A IV-45 : Référence <sup>134</sup>Figure-A IV-46 : Référence <sup>135</sup><sup>130</sup> Modèle tonnage vs densité.<sup>131</sup> Modèle tonnage vs taux de silice à la sousverse.<sup>132</sup> Taux de silice à l'alimentation, à la sousverse et à la surverse.<sup>133</sup> Modèle tonnage vs taux de silice à la surverse.<sup>134</sup> Modèle tonnage vs granulométrie +850 µm à la sousverse.<sup>135</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 850-600 µm à la sousverse.

Figure-A IV-47 : Référence <sup>136</sup>Figure-A IV-48 : Référence <sup>137</sup>Figure-A IV-49 : Référence <sup>138</sup>Figure-A IV-50 : Référence <sup>139</sup>Figure-A IV-51 : Référence <sup>140</sup>Figure-A IV-52 : Référence <sup>141</sup><sup>136</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 600-425 µm à la sousverse.<sup>137</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 425-300 µm à la sousverse.<sup>138</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 300-212 µm à la sousverse.<sup>139</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 212-150 µm à la sousverse.<sup>140</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 150-106 µm à la sousverse.<sup>141</sup> Modèle tonnage vs granulométrie -106 µm à la sousverse.

Figure-A IV-53 : Référence <sup>142</sup>Figure-A IV-54 : Référence <sup>143</sup>Figure-A IV-55 : Référence <sup>144</sup>Figure-A IV-56 : Référence <sup>145</sup>Figure-A IV-57 : Référence <sup>146</sup>Figure-A IV-58 : Référence <sup>147</sup><sup>142</sup> Modèle tonnage vs granulométrie +850 µm à la surverse.<sup>143</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 850-600 µm à la surverse.<sup>144</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 600-425 µm à la surverse.<sup>145</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 425-300 µm à la surverse.<sup>146</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 300-212 µm à la surverse.<sup>147</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 212-150 µm à la surverse.

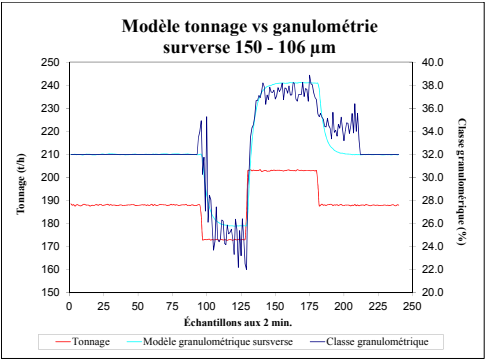


Figure-A IV-59 : Référence<sup>148</sup>

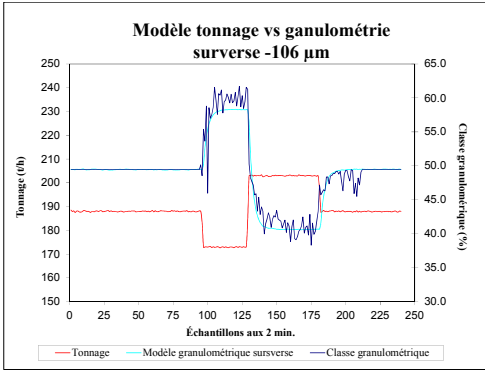
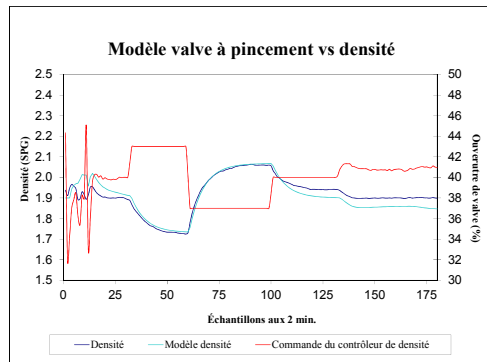
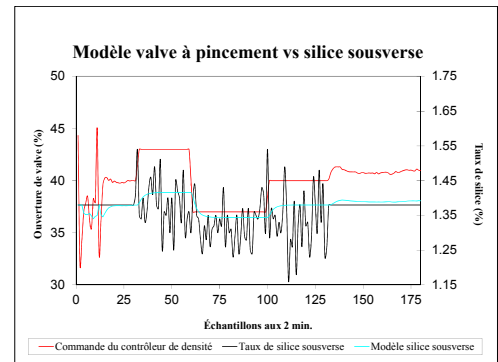
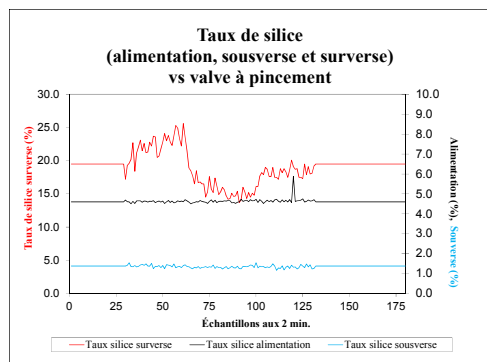
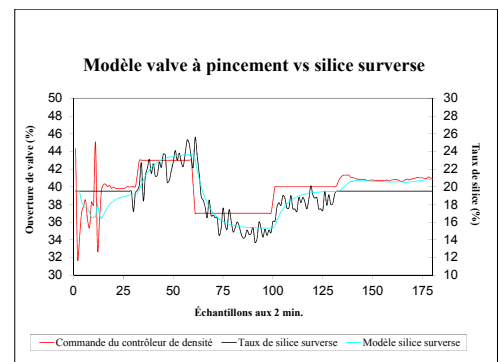
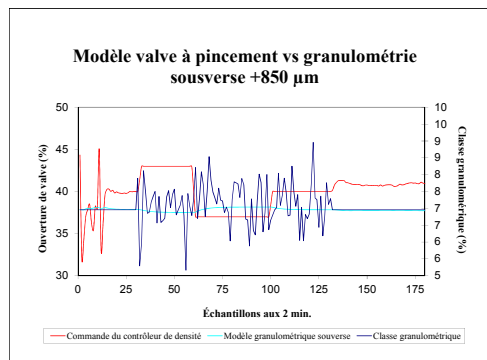
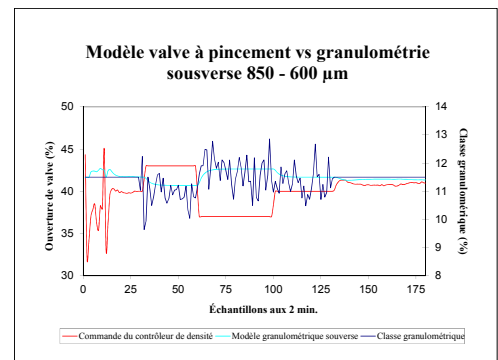
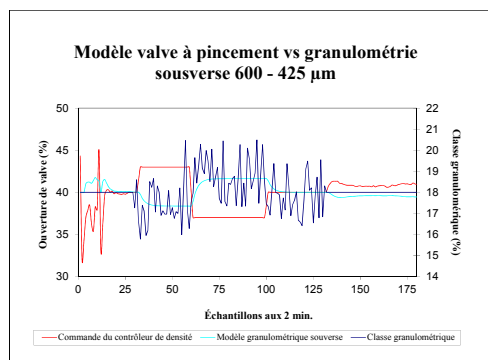
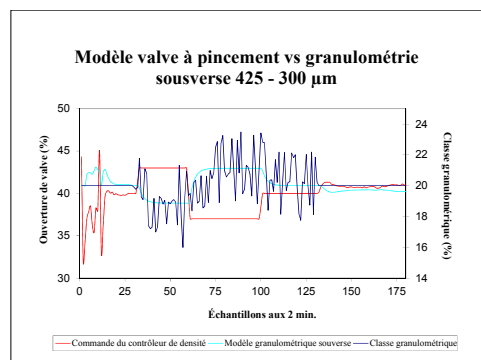
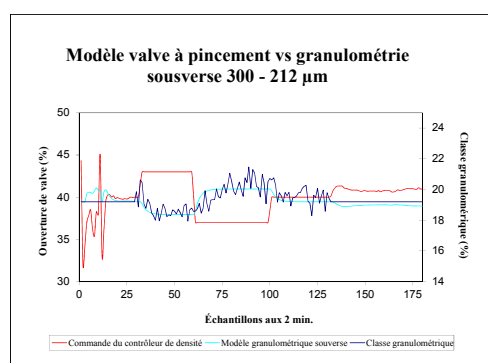
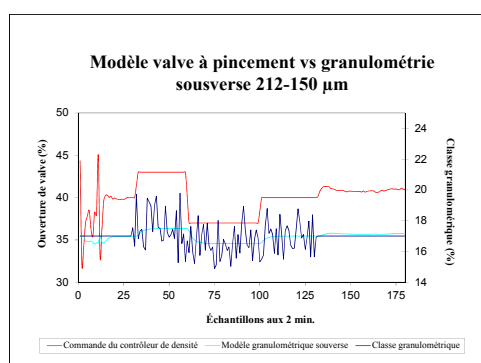
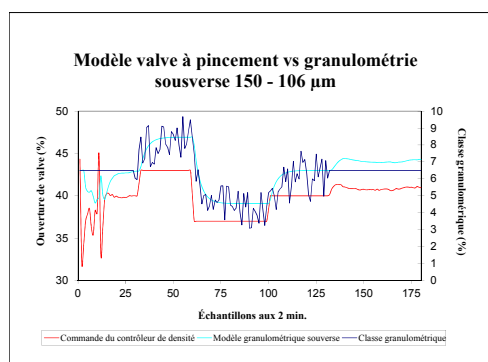
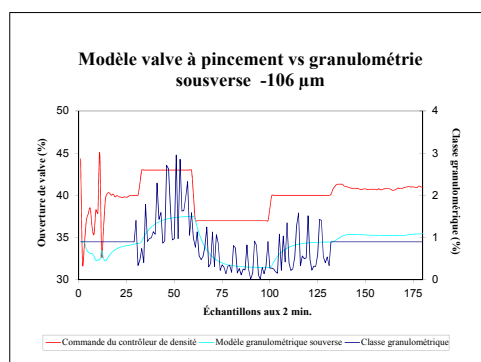


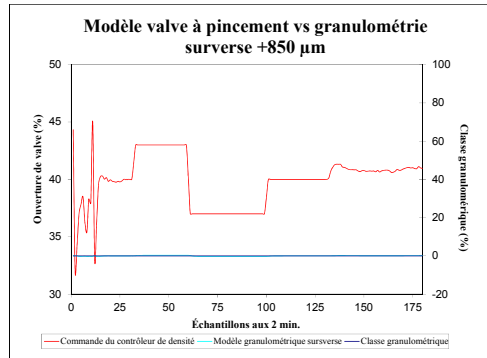
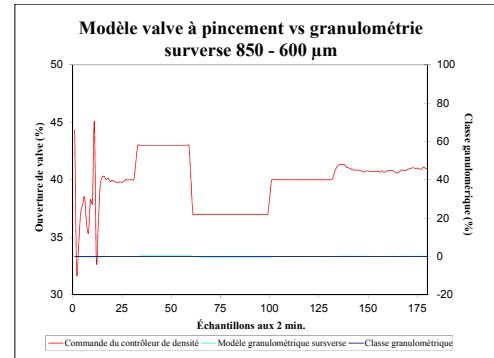
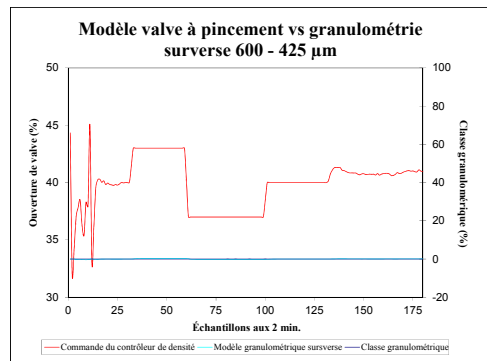
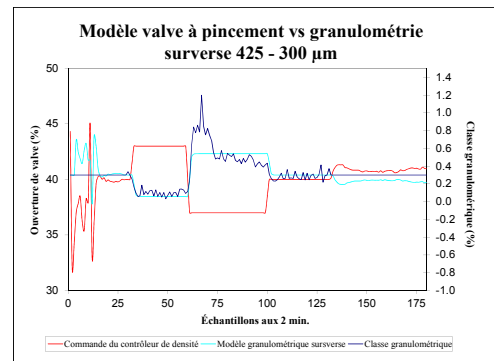
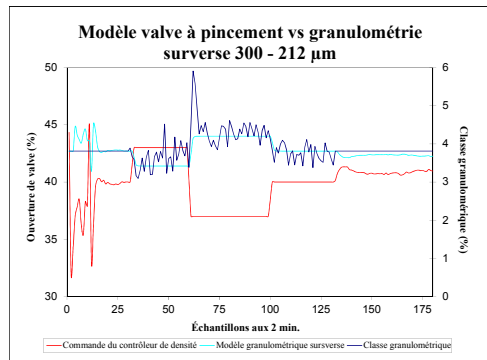
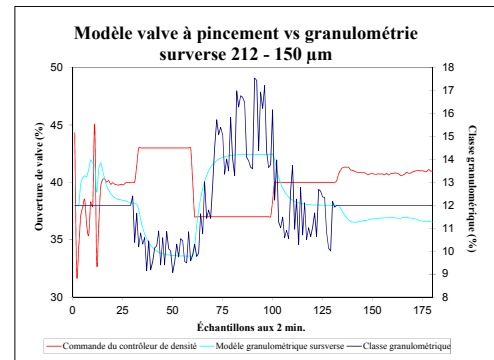
Figure-A IV-60 : Référence<sup>149</sup>

<sup>148</sup> Modèle tonnage vs granulométrie 150-106 µm à la surverse.

<sup>149</sup> Modèle tonnage vs granulométrie -106 µm à la surverse.

Figure-A IV-61 : Référence <sup>150</sup>Figure-A IV-62 : Référence <sup>151</sup>Figure-A IV-63 : Référence <sup>152</sup>Figure-A IV-64 : Référence <sup>153</sup>Figure-A IV-65 : Référence <sup>154</sup>Figure-A IV-66 : Référence <sup>155</sup><sup>150</sup> Modèle valve à pincement vs densité.<sup>151</sup> Modèle valve à pincement vs taux de silice à la sousverse.<sup>152</sup> Taux de silice à l'alimentation, à la sousverse et à la surverse.<sup>153</sup> Modèle valve à pincement vs taux de silice à la surverse.<sup>154</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie +850 µm à la sousverse.<sup>155</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 850-600 µm à la sousverse.

Figure-A IV-67 : Référence<sup>156</sup>Figure-A IV-68 : Référence<sup>157</sup>Figure-A IV-69 : Référence<sup>158</sup>Figure-A IV-70 : Référence<sup>159</sup>Figure-A IV-71 : Référence<sup>160</sup>Figure-A IV-72 : Référence<sup>161</sup><sup>156</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 600-425 µm à la sousverse.<sup>157</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 425-300 µm à la sousverse.<sup>158</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 300-212 µm à la sousverse.<sup>159</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 212-150 µm à la sousverse.<sup>160</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 150-106 µm à la sousverse.<sup>161</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie -106 µm à la sousverse.

Figure-A IV-73 : Référence<sup>162</sup>Figure-A IV-74 : Référence<sup>163</sup>Figure-A IV-75 : Référence<sup>164</sup>Figure-A IV-76 : Référence<sup>165</sup>Figure-A IV-77 : Référence<sup>166</sup>Figure-A IV-78 : Référence<sup>167</sup><sup>162</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie +850 µm à la surverse.<sup>163</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 850-600 µm à la surverse.<sup>164</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 600-425 µm à la surverse.<sup>165</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 425-300 µm à la surverse.<sup>166</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 300-212 µm à la surverse.<sup>167</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 212-150 µm à la surverse.

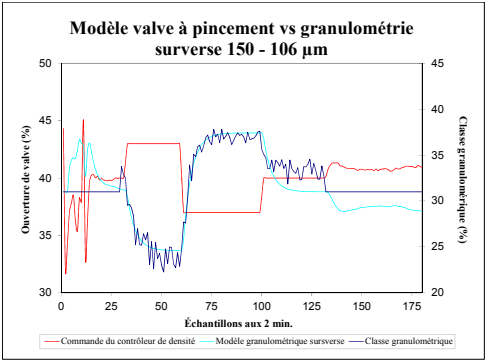


Figure-A IV-79 : Référence<sup>168</sup>

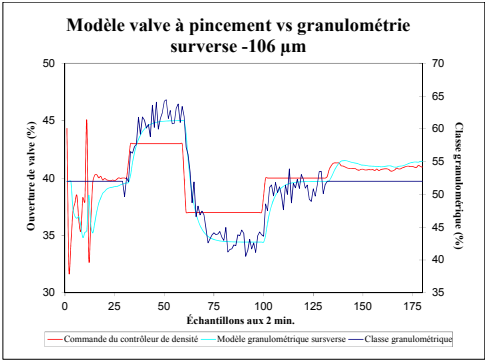


Figure-A IV-80 : Référence<sup>169</sup>

<sup>168</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie 150-106 µm à la surverse.

<sup>169</sup> Modèle valve à pincement vs granulométrie -106 µm à la surverse.



## ANNEXE V

### OSERVATEURS

#### Méthode d'observation (étude de cas)

L'information contenue dans l'annexe a pour but de présenter le développement mathématique de façon détaillée des différents thèmes qui ont été retenus dans les chapitres de la thèse. Référer aux commentaires dans les chapitres pour obtenir les détails reliés aux développements.

Tableau-A V-1 Variables d'un observateur

Variables	Description
J	Critère d'observateur
L	Lagrangien
$D_i^m$	Mesure d'un débit
$\hat{D}_i$	Estimé d'un débit
$\sigma_i^2$	Variance de la mesure $i$
$\lambda$	Multiplicateur de Lagrange

La démonstration est développée à partir d'un bilan de matière simple autour d'un nœud de séparation.

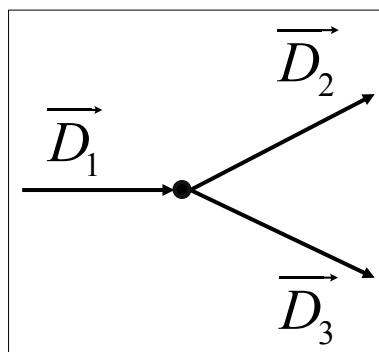


Figure-A V-1 : Flux de matière

Le critère :

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{(D_i^m - \hat{D}_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \text{sous la contrainte } \hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0 \quad (\text{A V.1})$$

L'ajout de cette contrainte  $\lambda$  garantit la conservation de la matière et modifie le critère J pour un nouveau critère L , le Lagrangien (Eq. 2).

$$L = \frac{(D_1^m - \hat{D}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(D_2^m - \hat{D}_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(D_3^m - \hat{D}_3)^2}{\sigma_3^2} + 2\lambda(\hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3) \quad (\text{A V.2})$$

La minimisation et la stationnarité du Lagrangien nous donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial D_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{A V.3})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_i} = \frac{-2(D_i^m - \hat{D}_i)}{\sigma_i^2} + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0 \quad (\text{A V.4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_1} = \frac{-2(D_1^m - \hat{D}_1)}{\sigma_1^2} + 2\lambda = 0 \quad (\text{A V.5})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_2} = \frac{-2(D_2^m - \hat{D}_2)}{\sigma_2^2} - 2\lambda = 0 \quad (\text{A V.6})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_3} = \frac{-2(D_3^m - \hat{D}_3)}{\sigma_3^2} - 2\lambda = 0 \quad (\text{A V.7})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0 \quad (\text{A V.8})$$

Les équations des estimés nous donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_1} = \frac{-2(D_1^m - \hat{D}_1)}{\sigma_1^2} + 2\lambda = 0 \quad (\text{A V.9})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_2} = \frac{-2(D_2^m - \hat{D}_2)}{\sigma_2^2} - 2\lambda = 0 \quad (\text{A V.10})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{D}_3} = \frac{-2(D_3^m - \hat{D}_3)}{\sigma_3^2} - 2\lambda = 0 \quad (\text{A V.11})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0 \quad (\text{A V.12})$$

$$\hat{D}_1 = D_1^m - \sigma_1^2 \lambda \quad (\text{A V.13})$$

$$\hat{D}_2 = D_2^m + \sigma_2^2 \lambda \quad (\text{A V.14})$$

$$\hat{D}_3 = D_3^m + \sigma_3^2 \lambda \quad (\text{A V.15})$$

$$\hat{D}_1 - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = 0 \quad (\text{A V.16})$$

$$D_1^m - \sigma_1^2 \lambda - D_2^m - \sigma_2^2 \lambda - D_3^m - \sigma_3^2 \lambda = 0 \quad (\text{A V.17})$$

La solution du paramètre  $\lambda$  nous donne :

$$\lambda = \frac{D_1^m - D_2^m - D_3^m}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (\text{A V.18})$$

La solution d'une variable de débit nous donne :

$$\hat{D}_1 = D_1^m - \sigma_1^2 \frac{(D_1^m - D_2^m - D_3^m)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (\text{A V.19})$$

Pour les détails relatifs aux variables  $\lambda$  et  $\hat{D}_1$ , référer au chapitre 3 de la thèse, section 4.3.1.

Tableau-A V-2 Rapport des masses moléculaires du fer total et des oxydes

	$\overbrace{Fe_2O_3}^{(Hématite)}$	$\overbrace{SiO_2}^{(Quartz)}$	$\overbrace{(KAl_2)(AlSi_3O_{10})(OH)_2}^{(Mica)}$	$\overbrace{FeO \cdot TiO_2}^{(Illménite)}$	$\overbrace{(Ca_{0.1}Mg_{0.15}Mn_{0.1}Fe_{0.65})_3(Al_{0.9}Fe_{0.1})_2(SiO_4)_3}^{(Grenat)}$
$(Fe_{tot})$	$\frac{2Fe}{2Fe+3O}$	...	...	$\frac{Fe}{Fe+Ti+3O}$	$\frac{2.15Fe}{0.3Ca+0.45Mg+.3Mn+2.15Fe+1.8Al+3Si+12O}$
$(SiO_2)$	...	$\frac{SiO_2}{SiO_2}$	$\frac{3Si}{K+3Al+3Si+12O+2H} * \frac{Si+2O}{Si}$	...	$\frac{3Si}{0.3Ca+0.45Mg+.3Mn+2.15Fe+1.8Al+3Si+12O} * \frac{Si+2O}{Si}$
$(TiO_2)$	...	...	...	$\frac{Ti+2O}{Fe+3O+Ti}$	...
$(Al_2O_3)$	...	...	$\frac{3Al}{K+3Al+3Si+12O+2H} * \frac{2Al+3O}{2Al}$	...	$\frac{1.8Al}{0.3Ca+0.45Mg+.3Mn+2.15Fe+1.8Al+3Si+12O} * \frac{2Al+3O}{2Al}$
$(K_2O)$	...	...	$\frac{K}{K+3Al+3Si+12O+2H} * \frac{2K+O}{2K}$	...	...
$(CaO)$	...	...	...	...	$\frac{0.3Ca}{0.3Ca+0.45Mg+.3Mn+2.15Fe+1.8Al+3Si+12O} * \frac{Ca+O}{Ca}$
$(MgO)$	...	...	...	...	$\frac{0.45Mg}{0.3Ca+0.45Mg+.3Mn+2.15Fe+1.8Al+3Si+12O} * \frac{Mg+O}{Mg}$

### Observateur granulominéral

Tableau-A V-3 : Variables de l'observateur granulominéral et dimension matricielle

Variables	Description
$J_1$	Critère du premier observateur
$L$	Lagrangien
$\alpha$	Matrice stœchiométrique, fraction granulominérale, [7x5]
$\hat{X}_{i,z}^{Pm}$	Pseudo-mesure, fractions granulominérales, [5x1]
$\hat{\beta}_{i,z}$	Estimé des teneurs en oxyde, [7x1]
$\beta_{i,z}^m$	Mesure des teneurs en oxyde, [7x1]
$V_{\beta_{i,z}}$	Matrice de variance, mesures des teneurs en oxyde, [7x7]
$\lambda_{X_{i,z}}$	Multiplicateur de Lagrange, fractions granulominérales (par flux), [1x1]
$S_{X_{i,z}}$	Matrice de sommation, conservation des fractions granulominérales, [1x5]

Équation du critère  $J_1$  :

$$J_1 = \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right) \quad (\text{A V.20})$$

Contrainte de conservation :

$$S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 = 0 \quad (\text{A V.21})$$

Multiplicateur de Lagrange :

$$2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (\text{A V.22})$$

Équation du Lagrangien  $L_1$  :

$$L_1 = J_1 + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (\text{A V.23})$$

Le développement du Lagrangien  $L_1$  :

$$L_1 = \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right) \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T V_{\beta,z}^{-1} \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right) \right) + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (\text{A V.24})$$

Décomposition des termes de  $L_1$  :

$$L_1 = \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \left( \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} \right)^T - \hat{\beta}_{i,z}^T \right) \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right) \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T V_{\beta,z}^{-1} \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right) \right) + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (\text{A V.25})$$

$$L_1 = \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \left( \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T - \hat{\beta}_{i,z}^T \right) \left( \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{\beta}_{i,z} \right) \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right)^T V_{\beta,z}^{-1} \left( \beta_{i,z}^m - \hat{\beta}_{i,z} \right) \right) + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (\text{A V.26})$$

$$L_1 = \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \hat{\beta}_{i,z}^T \hat{\beta}_{i,z} \right) + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \left( \beta_{i,z}^{m^T} V_{\beta,z}^{-1} \beta_{i,z}^m - \beta_{i,z}^{m^T} V_{\beta,z}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta,z}^{-1} \beta_{i,z}^m + \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta,z}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} \right) + 2\lambda_{X_{i,z}}^T \left( S_{X_{i,z}} \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1 \right) \quad (\text{A V.27})$$

Minimisation du Lagrangien  $L_1$  :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}}, \frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}}, \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} = 0 \quad (\text{A V.28})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}$  :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} = \frac{\partial \left( \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \hat{\beta}_{i,z}^T \hat{\beta}_{i,z} + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \beta_{i,z}^{m^T} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m - \beta_{i,z}^{m^T} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} + 2\lambda_{X_{i,z}}^T (S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) \right)}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} \quad (\text{A V.29})$$

### Précisions sur la méthode de dérivation matricielle

Dans le développement des termes et de l'application des dérivées, des permutations doivent être effectuées pour faciliter les dérivations. À titre d'exemple, le premier terme  $\hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm}$  contient deux fois la même information, soit  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}$  et sa transposée  $\hat{X}_{i,z}^{Pm^T}$ .

La dérivée doit donc s'appliquer comme un produit de fonction de  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}$ . Pour faciliter la formulation de la dérivée, on isole les termes de l'élément par rapport à  $\hat{X}_{i,z}^{Pm^T}$  et le reste est

considéré comme une constante soit,  $\frac{\partial (\hat{X}_{i,z}^{Pm^T} K)}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} = K$ .

Puisque le terme  $\hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm}$  contient également la variable  $\hat{X}_{i,z}^{Pm}$ , ce terme doit être transposé et la dérivée réappliquée sur ce nouveau terme identique au premier soit  $\hat{X}_{i,z}^{Pm^T} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm}$ . Par conséquent, le résultat donne deux fois la même valeur de la dérivée, soit  $\alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm}$  (Eq. 42).

Pour le terme  $2\lambda_{X_{i,z}}^T (S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1)$ , une transposée doit également être appliquée avant de dériver par rapport au terme  $\hat{X}_{i,z}$  après la décomposition de la mise en évidence, soit :



$$2\lambda_{X_{i,z}}^T (S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) \Rightarrow 2\lambda_{X_{i,z}}^T S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 2\lambda_{X_{i,z}}^T \Rightarrow 2\hat{X}_{i,z}^{PmT} S_X^T \lambda_{X_{i,z}} - 2\lambda_{X_{i,z}} \quad (\text{A V.30})$$

Le résultat devient donc :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} = \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} - \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} + 2S_X^T \lambda_{X_{i,z}} \quad (\text{A V.31})$$

Une fois simplifiée, on obtient :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} = 2\alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 2\alpha^T \hat{\beta}_{i,z} + 2S_X^T \lambda_{X_{i,z}} \quad (\text{A V.32})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\hat{\beta}_{i,z}$  :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} = \frac{\partial \left( \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \hat{X}_{i,z}^{PmT} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{X}_{i,z}^{PmT} \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \hat{\beta}_{i,z}^T \hat{\beta}_{i,z} + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \beta_{i,z}^{mT} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m - \beta_{i,z}^{mT} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} + 2\lambda_{X_{i,z}}^T (S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) \right)}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} \quad (\text{A V.33})$$

Le résultat devient :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} = -\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \hat{\beta}_{i,z} + \hat{\beta}_{i,z} - V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m - V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} + V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} \quad (\text{A V.34})$$

Une fois simplifiée, on obtient :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} = -2\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + 2\hat{\beta}_{i,z} - 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} = -2\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + 2(I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) \hat{\beta}_{i,z} - 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m \quad (\text{A V.35})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\lambda_{X_{i,z}}$  :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} = \frac{\partial \left( \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \hat{X}_{i,z}^{PmT} \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \hat{X}_{i,z}^{PmT} \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + \hat{\beta}_{i,z}^T \hat{\beta}_{i,z} + \sum_{z=1}^3 \sum_{i=1}^8 \beta_{i,z}^{mT} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m - \beta_{i,z}^{mT} V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} - \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m + \hat{\beta}_{i,z}^T V_{\beta_{i,z}}^{-1} \hat{\beta}_{i,z} + 2\lambda_{X_{i,z}}^T (S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) \right)}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} \quad (\text{A V.36})$$

Le résultat devient :

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} = 2(S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) \quad (\text{A V.37})$$

Stationnarité du Lagrangien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \hat{X}_{i,z}^{Pm}} &= 2\alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 2\alpha^T \hat{\beta}_{i,z} + 2S_X^T \lambda_{X_{i,z}} = 0 \\ \frac{\partial L_1}{\partial \hat{\beta}_{i,z}} &= -2\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + 2(I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) \hat{\beta}_{i,z} - 2V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m = 0 \\ \frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{X_{i,z}}} &= 2(S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} - 1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A V.38})$$

Une fois simplifiée, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \alpha^T \alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} - \alpha^T \hat{\beta}_{i,z} + S_X^T \lambda_{X_{i,z}} &= 0 \\
 -\alpha \hat{X}_{i,z}^{Pm} + (I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) \hat{\beta}_{i,z} &= V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m \\
 S_X \hat{X}_{i,z}^{Pm} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{A V.39}$$

Le système est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha^T \alpha & -\alpha^T & S_X^T \\ -\alpha & (I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) & 0 \\ S_X & 0 & 0 \end{bmatrix}_{[13 \times 13]} \begin{bmatrix} \hat{X}_{i,z}^{Pm} \\ \hat{\beta}_{i,z} \\ \lambda_{X_{i,z}} \end{bmatrix}_{[13 \times 1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m \\ 1 \end{bmatrix}_{[13 \times 1]} \quad (\text{A V.40})$$

La solution finale devient :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{i,z}^{Pm} \\ \hat{\beta}_{i,z} \\ \lambda_{X_{i,z}} \end{bmatrix}_{[13 \times 1]} = \begin{bmatrix} \alpha^T \alpha & -\alpha^T & S_X^T \\ -\alpha & (I + V_{\beta_{i,z}}^{-1}) & 0 \\ S_X & 0 & 0 \end{bmatrix}_{[13 \times 13]}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ V_{\beta_{i,z}}^{-1} \beta_{i,z}^m \\ 1 \end{bmatrix}_{[13 \times 1]} \quad (\text{A V.41})$$

### Degré de redondance ( $D^R$ ) du premier observateur

L'évaluation d'un degré de redondance  $D^R$  est présentée à la section 4.5 de la thèse.

Tableau-A V-4 : Information pour le degré de redondance

Variables	Type	Nombre	Description
$\hat{X}_{i,z}^{Pm}$	Inconnue	5	Fraction granulominérale
$\hat{\beta}_{i,z}$	Inconnue	7	Teneur en oxyde
$\lambda_{X_{i,z}}$	Inconnue	1	Contrainte
$\alpha$	Équation	7	Matrice stœchiométrique
$\beta_{i,z}^m$	Mesure	7	Teneur en oxyde
$\lambda_{X_{i,z}}$	Équation	1	Multiplicateur de Lagrange

Calcul de redondance :  $(16-12)/12 = 33.3 \%$

# Linéarisation d'une équation de flux granulomassique

Tableau-A V-5 : Variables des équations de flux granulométriques

Variables	Description
$\hat{g}_{i,z}$	Estimée, fraction granulométrique
$\bar{g}_{i,z}$	Valeur moyenne, fraction granulométrique
$g_{i,z}$	Valeur vraie, fraction granulométrique
$\hat{W}_z$	Estimée, flux de masse
$\bar{W}_z$	Valeur moyenne, flux de masse
$W_z$	Valeur vraie, flux de masse
$A, B, C$	Matrices coefficients de la linéarisation
$L(\hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z)$	Équation linéarisée
$\hat{g}_{i,z} \Rightarrow \bar{g}_{i,z}$	Convergence de la valeur estimée au point d'opération
$\hat{W}_z \Rightarrow \bar{W}_z$	Convergence de la valeur estimée au point d'opération

Équation à linéariser :

$$\hat{g}_{i,F} \hat{W}_F - \hat{g}_{i,U} \hat{W}_U - \hat{g}_{i,O} \hat{W}_O = 0 \quad (\text{A V.42})$$

Formulation de la linéarisation :

$$\begin{aligned}
L(\hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z) = & L(\bar{g}_{i,F}, \bar{W}_F) + \frac{\partial L}{\partial \hat{W}_F} \Big|_{\bar{W}_F, \bar{g}_{i,F}} (\hat{W}_F - \bar{W}_F) + \frac{\partial L}{\partial \hat{g}_{i,F}} \Big|_{\bar{W}_F, \bar{g}_{i,F}} (\hat{g}_{i,F} - \bar{g}_{i,F}) + \\
& L(\bar{g}_{i,U}, \bar{W}_U) + \frac{\partial L}{\partial \hat{W}_U} \Big|_{\bar{W}_U, \bar{g}_{i,U}} (\hat{W}_U - \bar{W}_U) + \frac{\partial L}{\partial \hat{g}_{i,U}} \Big|_{\bar{W}_U, \bar{g}_{i,U}} (\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}) + \\
& L(\bar{g}_{i,O}, \bar{W}_O) + \frac{\partial L}{\partial \hat{W}_O} \Big|_{\bar{W}_O, \bar{g}_{i,O}} (\hat{W}_O - \bar{W}_O) + \frac{\partial L}{\partial \hat{g}_{i,O}} \Big|_{\bar{W}_O, \bar{g}_{i,O}} (\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O})
\end{aligned} \quad (\text{A V.43})$$

Application des dérivées :

$$\begin{aligned}
 L(\hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z) = & \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{g}_{i,F} (\hat{W}_F - \bar{W}_F) + \bar{W}_F (\hat{g}_{i,F} - \bar{g}_{i,F}) \\
 & - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{g}_{i,U} (\hat{W}_U - \bar{W}_U) - \bar{W}_U (\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}) \\
 & - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{g}_{i,O} (\hat{W}_O - \bar{W}_O) - \bar{W}_O (\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O})
 \end{aligned} \tag{A V.44}$$

Décomposition de l'équation linéarisée :

$$\begin{aligned}
 L(\hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z) = & -\bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{g}_{i,F} \hat{W}_F + \bar{W}_F \hat{g}_{i,F} \\
 & + \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{g}_{i,U} \hat{W}_U - \bar{W}_U \hat{g}_{i,U} \\
 & + \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{g}_{i,O} \hat{W}_O - \bar{W}_O \hat{g}_{i,O}
 \end{aligned} \tag{A V.45}$$

Simplification et regroupement des termes :

$$\begin{aligned}
 L(\hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z) = & \bar{g}_{i,F} \hat{W}_F - \bar{g}_{i,U} \hat{W}_U - \bar{g}_{i,O} \hat{W}_O + \bar{W}_F \hat{g}_{i,F} - \bar{W}_U \hat{g}_{i,U} - \bar{W}_O \hat{g}_{i,O} \\
 & - \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U + \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O
 \end{aligned} \tag{A V.46}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{g}_{i,F} \hat{W}_F - \bar{g}_{i,U} \hat{W}_U - \bar{g}_{i,O} \hat{W}_O + \bar{W}_F \hat{g}_{i,F} - \bar{W}_U \hat{g}_{i,U} - \bar{W}_O \hat{g}_{i,O} = \\
 & \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O
 \end{aligned} \tag{A V.47}$$

L'équation est de la forme :

$$A \hat{W} + B \hat{g} + C = 0 \tag{A V.48}$$

Vérification de l'équation linéarisée lorsque :

$$\hat{W}_z \Rightarrow \bar{W} \text{ et } \hat{g}_{i,z} \Rightarrow \bar{g}_{i,z} \tag{A V.49}$$

$$\begin{aligned}
L(\bar{g}_{i,z}, \bar{W}_z) = & \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O + \bar{W}_F \bar{g}_{i,F} - \bar{W}_U \bar{g}_{i,U} - \bar{W}_O \bar{g}_{i,O} \\
& - \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U + \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O
\end{aligned} \tag{A V.50}$$

$$\begin{aligned}
L(\bar{g}_{i,z}, \bar{W}_z) = & \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F - \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U + \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U \\
& - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O + \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O
\end{aligned} \tag{A V.51}$$

$$L(\bar{g}_{i,z}, \bar{W}_z) = \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O \tag{A V.52}$$

Les propriétés et l'intégrité de l'équation sont donc vérifiées.

### Linéarisation d'une équation de flux granulominéral

Tableau-A V-6 : Variables des équations de flux granulominéral

Variables	Description
$\hat{X}_{m,i,z}$	Valeur estimée, fraction granulominérale
$\bar{X}_{m,i,z}$	Valeur moyenne, fraction granulominérale
$X_{m,i,z}$	Valeur vraie, fraction granulominérale
$\hat{g}_{i,z}$	Valeur estimée, fraction granulométrique
$\bar{g}_{i,z}$	Valeur moyenne, fraction granulométrique
$g_{i,z}$	Valeur vraie, fraction granulométrique
$\hat{W}_z$	Valeur estimée, flux de masse
$\bar{W}_z$	Valeur moyenne, flux de masse
$W_z$	Valeur vraie, flux de masse
$L(\hat{X}_{m,i,z}, \hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z)$	Équation linéarisée
$D, E, F, H$	Matrices coefficients de la linéarisation
$\hat{X}_{m,i,z} \Rightarrow \bar{X}_{m,i,z}$	Convergence de la valeur estimée au point d'opération
$\hat{g}_{i,z} \Rightarrow \bar{g}_{i,z}$	Convergence de la valeur estimée au point d'opération
$\hat{W}_z \Rightarrow \bar{W}_z$	Convergence de la valeur estimée au point d'opération

Équation à linéariser :

$$\hat{X}_{m,i,F} \hat{g}_{i,F} \hat{W}_F - \hat{X}_{m,i,U} \hat{g}_{i,U} \hat{W}_U - \hat{X}_{m,i,O} \hat{g}_{i,O} \hat{W}_O = 0 \quad (\text{A V.53})$$



Formulation de la linéarisation :

$$\begin{aligned}
L(\hat{X}_{m,i,z}, \hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z) &= L(\bar{X}_{m,i,F}, \bar{g}_{i,F}, \bar{W}_F) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{W}_F} \Big|_{\bar{W}_F, \bar{g}_{i,F}, \bar{X}_{m,i,F}} (\hat{W}_F - \bar{W}_F) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{g}_{i,F}} \Big|_{\bar{W}_F, \bar{g}_{i,F}, \bar{X}_{m,i,F}} (\hat{g}_{i,F} - \bar{g}_{i,F}) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{X}_{m,i,F}} \Big|_{\bar{W}_F, \bar{g}_{i,F}, \bar{X}_{m,i,F}} (\hat{X}_{m,i,F} - \bar{X}_{m,i,F}) \\
&+ L(\bar{X}_{m,i,U}, \bar{g}_{i,U}, \bar{W}_U) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{W}_U} \Big|_{\bar{W}_U, \bar{g}_{i,U}, \bar{X}_{m,i,U}} (\hat{W}_U - \bar{W}_U) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{g}_{i,U}} \Big|_{\bar{W}_U, \bar{g}_{i,U}, \bar{X}_{m,i,U}} (\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{X}_{m,i,U}} \Big|_{\bar{W}_U, \bar{g}_{i,U}, \bar{X}_{m,i,U}} (\hat{X}_{m,i,U} - \bar{X}_{m,i,U}) + \\
&+ L(\bar{X}_{m,i,O}, \bar{g}_{i,O}, \bar{W}_O) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{W}_O} \Big|_{\bar{W}_O, \bar{g}_{i,O}, \bar{X}_{m,i,O}} (\hat{W}_O - \bar{W}_O) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{g}_{i,O}} \Big|_{\bar{W}_O, \bar{g}_{i,O}, \bar{X}_{m,i,O}} (\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O}) + \\
&\quad \frac{\partial L}{\partial \hat{X}_{m,i,O}} \Big|_{\bar{W}_O, \bar{g}_{i,O}, \bar{X}_{m,i,O}} (\hat{X}_{m,i,O} - \bar{X}_{m,i,O})
\end{aligned} \tag{A V.54}$$

Application des dérivées :

$$\begin{aligned}
L(\hat{X}_{m,i,z}, \hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z) &= \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} (\hat{W}_F - \bar{W}_F) + \bar{X}_{m,i,F} \bar{W}_F (\hat{g}_{i,F} - \bar{g}_{i,F}) + \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F (\hat{X}_{m,i,F} - \bar{X}_{m,i,F}) \\
&\quad - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} (\hat{W}_U - \bar{W}_U) - \bar{X}_{m,i,U} \bar{W}_U (\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}) - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U (\hat{X}_{m,i,U} - \bar{X}_{m,i,U}) \\
&\quad - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} (\hat{W}_O - \bar{W}_O) - \bar{X}_{m,i,O} \bar{W}_O (\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O}) - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O (\hat{X}_{m,i,O} - \bar{X}_{m,i,O})
\end{aligned} \tag{A V.55}$$

Décomposition de l'équation linéarisée :

$$\begin{aligned}
 L\left(\hat{X}_{m,i,z}, \hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z\right) = & -2\bar{X}_{m,i,F}\bar{g}_{i,F}\bar{W}_F + \bar{X}_{m,i,F}\bar{g}_{i,F}\hat{W}_F + \bar{X}_{m,i,F}\bar{W}_F\hat{g}_{i,F} + \bar{g}_{i,F}\bar{W}_F\hat{X}_{m,i,F} \\
 & + 2\bar{X}_{m,i,U}\bar{g}_{i,U}\bar{W}_U - \bar{X}_{m,i,U}\bar{g}_{i,U}\hat{W}_U - \bar{X}_{m,i,U}\bar{W}_U\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}\bar{W}_U\hat{X}_{m,i,U} \\
 & + 2\bar{X}_{m,i,O}\bar{g}_{i,O}\bar{W}_O - \bar{X}_{m,i,O}\bar{g}_{i,O}\hat{W}_O - \bar{X}_{m,i,O}\bar{W}_O\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O}\bar{W}_O\hat{X}_{m,i,O}
 \end{aligned} \quad (\text{A V.56})$$

Simplification et regroupement des termes :

$$\begin{aligned}
 L\left(\hat{X}_{m,i,z}, \hat{g}_{i,z}, \hat{W}_z\right) = & \bar{X}_{m,i,F}\bar{g}_{i,F}\hat{W}_F + \bar{X}_{m,i,F}\bar{W}_F\hat{g}_{i,F} + \bar{g}_{i,F}\bar{W}_F\hat{X}_{m,i,F} \\
 & - \bar{X}_{m,i,U}\bar{g}_{i,U}\hat{W}_U - \bar{X}_{m,i,U}\bar{W}_U\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}\bar{W}_U\hat{X}_{m,i,U} \\
 & - \bar{X}_{m,i,O}\bar{g}_{i,O}\hat{W}_O - \bar{X}_{m,i,O}\bar{W}_O\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O}\bar{W}_O\hat{X}_{m,i,O} \\
 & - 2\bar{X}_{m,i,F}\bar{g}_{i,F}\bar{W}_F + 2\bar{X}_{m,i,U}\bar{g}_{i,U}\bar{W}_U + 2\bar{X}_{m,i,O}\bar{g}_{i,O}\bar{W}_O
 \end{aligned} \quad (\text{A V.57})$$

Mise en commun des termes :

$$\begin{aligned}
 & \bar{X}_{m,i,F}\bar{g}_{i,F}\hat{W}_F + \bar{X}_{m,i,F}\bar{W}_F\hat{g}_{i,F} + \bar{g}_{i,F}\bar{W}_F\hat{X}_{m,i,F} \\
 & - \bar{X}_{m,i,U}\bar{g}_{i,U}\hat{W}_U - \bar{X}_{m,i,U}\bar{W}_U\hat{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U}\bar{W}_U\hat{X}_{m,i,U} \\
 & - \bar{X}_{m,i,O}\bar{g}_{i,O}\hat{W}_O - \bar{X}_{m,i,O}\bar{W}_O\hat{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O}\bar{W}_O\hat{X}_{m,i,O} = \\
 & 2\bar{X}_{m,i,F}\bar{g}_{i,F}\bar{W}_F - 2\bar{X}_{m,i,U}\bar{g}_{i,U}\bar{W}_U - 2\bar{X}_{m,i,O}\bar{g}_{i,O}\bar{W}_O
 \end{aligned} \quad (\text{A V.58})$$

L'équation est donc de la forme :

$$D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H = 0 \quad (\text{A V.59})$$

Vérification de l'équation linéarisée lorsque :

$$\hat{W}_z \Rightarrow \bar{W} \text{ et } \hat{g}_{i,z} \Rightarrow \bar{g}_{i,z} \text{ et } \hat{X}_{mi,z} \Rightarrow \bar{X}_{mi,z} \quad (\text{A V.60})$$

$$\begin{aligned}
L(\bar{X}_{m,i,z}, \bar{g}_{i,z}, \bar{W}_z) = & \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{X}_{m,i,F} \bar{W}_F \bar{g}_{i,F} + \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F \bar{X}_{m,i,F} \\
& - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{X}_{m,i,U} \bar{W}_U \bar{g}_{i,U} - \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U \bar{X}_{m,i,U} \\
& - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{X}_{m,i,O} \bar{W}_O \bar{g}_{i,O} - \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O \bar{X}_{m,i,O} \\
& - 2\bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + 2\bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U + 2\bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O
\end{aligned} \tag{A V.61}$$

Regroupement des termes :

$$\begin{aligned}
L(\bar{X}_{m,i,z}, \bar{g}_{i,z}, \bar{W}_z) = & \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F \\
& - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U \\
& - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O \\
& - 2\bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F + 2\bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U + 2\bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O
\end{aligned} \tag{A V.62}$$

Simplification des termes :

$$L(\bar{X}_{m,i,z}, \bar{g}_{i,z}, \bar{W}_z) = \bar{X}_{m,i,F} \bar{g}_{i,F} \bar{W}_F - \bar{X}_{m,i,U} \bar{g}_{i,U} \bar{W}_U - \bar{X}_{m,i,O} \bar{g}_{i,O} \bar{W}_O \tag{A V.63}$$

Les propriétés et l'intégrité de l'équation sont donc vérifiées.

### Observateur du bilan

Tableau-A V-7 : Variables de l'observateur du bilan<sup>170</sup>

Variables	Description
$J_2$	Critère du premier observateur
$\hat{X}$	Estimé des teneurs minérales, [120x1]
$\hat{X}_{i,z}^{Pm}$	Pseudo-mesure, fractions granulominérales, [120x1]
$V_X$	Matrice de variance, pseudo-mesures des teneurs minérales, [120x120]
$g^m$	Mesure des fractions granulométriques, [24x1]
$V_g$	Matrice de variance des fractions granulométriques, [24x24]
$W^m$	Mesure des flux massiques, [3x1]
$V_W$	Matrice de variance des flux massiques, [3x3]
$M$	Matrice de réseau, [1x3]
$S_X$	Matrice de sommation des fractions granulominérales, [24x120]
$S_g$	Matrice de sommation des fractions granulométriques, [3x24]
$\lambda_g$	Contrainte des fractions granulométriques, [3x1]
$\lambda_W$	Contrainte des flux massiques, [1x1]
$\lambda_{g,W}$	Contrainte des flux granulomassiques, [8x1]
$\lambda_{X,g,W}$	Contrainte des flux granulominéraux, [40x1]
$U_{(3,1)}$	Vecteur unitaire pour les fractions granulométriques, [3x1]
$U_{(24,1)}$	Vecteur unitaire pour les fractions granulominérales, [24x1]
A	Matrices coefficients de la linéarisation, [8x3]
B	Matrices coefficients de la linéarisation, [8x24]
C	Matrices coefficients de la linéarisation, [8x1]
D	Matrices coefficients de la linéarisation, [40x3]
E	Matrices coefficients de la linéarisation, [40x24]
F	Matrices coefficients de la linéarisation, [40x120]
H	Matrices coefficients de la linéarisation, [40x1]

<sup>170</sup> Seules les nouvelles variables sont ajoutées dans le tableau.

Le critère  $J_2$  :

$$J_2 = \left( X^{Pm} - \hat{X} \right)^T V_X^{-1} \left( X^{Pm} - \hat{X} \right) + \left( g^m - \hat{g} \right)^T V_g^{-1} \left( g^m - \hat{g} \right) + \left( W^m - \hat{W} \right)^T V_W^{-1} \left( W^m - \hat{W} \right) \quad (\text{A V.64})$$

Le balancement des fractions granulominérales :

$$S_X \hat{X} - U_{[24 \times 1]} = 0 \quad (\text{A V.65})$$

Le balancement des fractions granulométriques :

$$S_g \hat{g} - U_{[3 \times 1]} = 0 \quad (\text{A V.66})$$

Le balancement des flux de masse :

$$M \hat{W} = 0 \quad (\text{A V.67})$$

Le balancement des flux granulométriques :

$$A \hat{W} + B \hat{g} + C = 0 \quad (\text{A V.68})$$

Le balancement des flux granulominéraux :

$$D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H = 0 \quad (\text{A V.69})$$

L'expression du Lagrangien devient donc :

$$\begin{aligned} L_2 = & \left( X^{Pm} - \hat{X} \right)^T V_X^{-1} \left( X^{Pm} - \hat{X} \right) + \left( g^m - \hat{g} \right)^T V_g^{-1} \left( g^m - \hat{g} \right) + \\ & \left( W^m - \hat{W} \right)^T V_W^{-1} \left( W^m - \hat{W} \right) + 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \quad (\text{A V.70})$$

Décomposition des éléments transposés du critère :

$$\begin{aligned} L_2 = & \left( X^{Pm^T} - \hat{X}^T \right) V_X^{-1} \left( X^{Pm} - \hat{X} \right) + \left( g^{m^T} - \hat{g}^T \right) V_g^{-1} \left( g^m - \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} - \hat{W}^T \right) V_W^{-1} \left( W^m - \hat{W} \right) + 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \quad (\text{A V.71})$$

Décomposition de tous les termes du critère :

$$\begin{aligned} L_2 = & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \quad (\text{A V.72})$$

Stationnarité du Lagrangien :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}}, \frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}}, \frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_W}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}}, \frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}} = 0 \quad (\text{A V.73})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\hat{X}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{X}} \quad (\text{A V.74})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\hat{X}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{X}} \quad (\text{A V.75})$$

Le résultat pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}} = -2V_X^{-1} X^{Pm} + 2V_X^{-1} \hat{X} + 2S_X^T \lambda_X + 2F^T \lambda_{X,g,W} \quad (\text{A V.76})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\hat{g}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T (S_X \hat{X} - U_{(24,1)}) + 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + \\ & 2\lambda_W^T (M\hat{W}) + 2\lambda_{g,W}^T (A\hat{W} + B\hat{g} + C) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{g}} \quad (\text{A V.77})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\hat{g}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + 2\lambda_{g,W}^T (A\hat{W} + B\hat{g} + C) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{g}} \quad (\text{A V.78})$$

Le résultat pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} = -2V_g^{-1} g^m + 2V_g^{-1} \hat{g} + 2S_g^T \lambda_g + 2B^T \lambda_{g,W} + 2E^T \lambda_{X,g,W} \quad (\text{A V.79})$$



Minimisation du critère par rapport à  $\hat{W}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} &\left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ &\left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ &\left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ &2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ &2\lambda_W^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + \\ &2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{W}} \quad (\text{A V.80})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\hat{W}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} &\left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ &2\lambda_W^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + \\ &2\lambda_{X,g,W}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{W}} \quad (\text{A V.81})$$

Le résultat pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} = -2V_W^{-1} W^m + 2V_W^{-1} \hat{W} + 2M^T \lambda_W + 2A^T \lambda_{g,W} + 2D^T \lambda_{X,g,W} \quad (\text{A V.82})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\lambda_X$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M \hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A \hat{W} + B \hat{g} + C \right) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \lambda_X} \quad (\text{A V.83})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\lambda_X$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X} = \frac{\partial \left( 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) \right)}{\partial \lambda_X} \quad (\text{A V.84})$$

Le résultat pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X} = 2 \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) \quad (\text{A V.85})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\lambda_g$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T (S_X \hat{X} - U_{(24,1)}) + 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + \\ & 2\lambda_W^T (M \hat{W}) + 2\lambda_{g,W}^T (A \hat{W} + B \hat{g} + C) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T (D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H) \end{aligned} \right)}{\partial \lambda_g} \quad (\text{A V.86})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\lambda_g$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g} = \frac{\partial \left( 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) \right)}{\partial \lambda_g} \quad (\text{A V.87})$$

Le résultat pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g} = 2(S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) \quad (\text{A V.88})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\lambda_w$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_w} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_w^{-1} W^m - W^{m^T} V_w^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_w^{-1} W^m + \hat{W}^T V_w^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_w^T \left( M\hat{W} \right) + 2\lambda_{g,w}^T \left( A\hat{W} + B\hat{g} + C \right) + \\ & 2\lambda_{X,g,w}^T \left( D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \lambda_w} \quad (\text{A V.89})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\lambda_w$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_w} = \frac{\partial \left( 2\lambda_w^T M\hat{W} \right)}{\partial \lambda_w} \quad (\text{A V.90})$$

Les résultats pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_w}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_w} = 2M\hat{W} \quad (\text{A V.91})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\lambda_{g,W}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M \hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A \hat{W} + B \hat{g} + C \right) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \lambda_{g,W}} \quad (\text{A V.92})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\lambda_{g,W}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}} = \frac{\partial \left( 2\lambda_{g,W}^T \left( A \hat{W} + B \hat{g} + C \right) \right)}{\partial \lambda_{g,W}} \quad (\text{A V.93})$$

Les résultats pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}} = 2 \left( A \hat{W} + B \hat{g} + C \right) \quad (\text{A V.94})$$

Minimisation du critère par rapport à  $\lambda_{X,g,W}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \\ & \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \\ & \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_X^T \left( S_X \hat{X} - U_{(24,1)} \right) + 2\lambda_g^T \left( S_g \hat{g} - U_{(3,1)} \right) + \\ & 2\lambda_W^T \left( M \hat{W} \right) + 2\lambda_{g,W}^T \left( A \hat{W} + B \hat{g} + C \right) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H \right) \end{aligned} \right)}{\partial \lambda_{X,g,W}} \quad (\text{A V.95})$$

Les termes impliqués par rapport à  $\lambda_{X,g,W}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}} = \frac{\partial \left( 2\lambda_{X,g,W}^T \left( D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H \right) \right)}{\partial \lambda_{X,g,W}} \quad (\text{A V.96})$$

Les résultats pour  $\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}}$  :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}} = 2 \left( D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H \right) \quad (\text{A V.97})$$

La stationnarité du Lagrangien nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_2}{\partial \hat{X}} &= -2V_X^{-1} X^{Pm} + 2V_X^{-1} \hat{X} + 2S_X^T \lambda_X + 2F^T \lambda_{X,g,W} = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} &= -2V_g^{-1} g^m + 2V_g^{-1} \hat{g} + 2S_g^T \lambda_g + 2B^T \lambda_{g,W} + 2E^T \lambda_{X,g,W} = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} &= -2V_W^{-1} W^m + 2V_W^{-1} \hat{W} + 2M^T \lambda_W + 2A^T \lambda_{g,W} + 2D^T \lambda_{X,g,W} = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_X} &= 2(S_X \hat{X} - U_{(24,1)}) = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_g} &= 2(S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_W} &= 2M \hat{W} = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{g,W}} &= 2(A \hat{W} + B \hat{g} + C) = 0 \\
\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_{X,g,W}} &= 2(D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} + H) = 0
\end{aligned} \tag{A V.98}$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}
V_X^{-1} \hat{X} + S_X^T \lambda_X + F^T \lambda_{X,g,W} &= V_X^{-1} X^{Pm} \\
V_g^{-1} \hat{g} + S_g^T \lambda_g + B^T \lambda_{g,W} + E^T \lambda_{X,g,W} &= V_g^{-1} g^m \\
V_W^{-1} \hat{W} + M^T \lambda_W + A^T \lambda_{g,W} + D^T \lambda_{X,g,W} &= V_W^{-1} W^m \\
S_X \hat{X} &= U_{(24,1)} \\
S_g \hat{g} &= U_{(3,1)} \\
M \hat{W} &= 0 \\
A \hat{W} + B \hat{g} &= -C \\
D \hat{W} + E \hat{g} + F \hat{X} &= -H
\end{aligned} \tag{A V.99}$$

Le système est de la forme :

$$\begin{bmatrix} V_X^{-1} & 0 & 0 & S_X^T & 0 & 0 & 0 & F^T \\ 0 & V_g^{-1} & 0 & 0 & S_g^T & 0 & B^T & E^T \\ 0 & 0 & V_W^{-1} & 0 & 0 & M^T & A^T & D^T \\ S_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{g} \\ \hat{W} \\ \lambda_X \\ \lambda_g \\ \lambda_W \\ \lambda_{g,W} \\ \lambda_{X,g,W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} W^m \\ U_{(24,1)} \\ U_{(3,1)} \\ 0 \\ -C \\ -H \end{bmatrix} \quad (\text{A V.100})$$

La solution est obtenue à partir de :

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{g} \\ \hat{W} \\ \lambda_X \\ \lambda_g \\ \lambda_W \\ \lambda_{g,W} \\ \lambda_{X,g,W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_X^{-1} & 0 & 0 & S_X^T & 0 & 0 & 0 & F^T \\ 0 & V_g^{-1} & 0 & 0 & S_g^T & 0 & B^T & E^T \\ 0 & 0 & V_W^{-1} & 0 & 0 & M^T & A^T & D^T \\ S_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} W^m \\ U_{(24,1)} \\ U_{(3,1)} \\ 0 \\ -C \\ -H \end{bmatrix} \quad (\text{A V.101})$$



### Élimination des compositions linéairement dépendantes

La minimisation du critère par rapport à  $\hat{g}$  devient donc :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} = \frac{\partial \left( \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \right)}{\partial \hat{g}} \quad (\text{A V.102})$$

et celle par rapport à  $\hat{W}$  devient également :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} = \frac{\partial \left( \left( X^{Pm^T} V_X^{-1} X^{Pm} - X^{Pm^T} V_X^{-1} \hat{X} - \hat{X}^T V_X^{-1} X^{Pm} + \hat{X}^T V_X^{-1} \hat{X} \right) + \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + \left( W^{m^T} V_W^{-1} W^m - W^{m^T} V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + 2\lambda_X^T (S_X \hat{X} - U_{(24,1)}) + 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \right)}{\partial \hat{W}} \quad (\text{A V.103})$$

on obtient donc :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} = \frac{\partial \left( \left( g^{m^T} V_g^{-1} g^m - g^{m^T} V_g^{-1} \hat{g} - \hat{g}^T V_g^{-1} g^m + \hat{g}^T V_g^{-1} \hat{g} \right) + 2\lambda_g^T (S_g \hat{g} - U_{(3,1)}) + 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \right)}{\partial \hat{g}} \quad (\text{A V.104})$$

et

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{g}} = -2V_g^{-1} g^m + 2V_g^{-1} \hat{g} + 2S_g^T \lambda_g + 2E^T \lambda_{X,g,W} \quad (\text{A V.105})$$

ainsi que :

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} = \frac{\partial \left( \begin{aligned} & \left( W^m{}^T V_W^{-1} W^m - W^m{}^T V_W^{-1} \hat{W} - \hat{W}^T V_W^{-1} W^m + \hat{W}^T V_W^{-1} \hat{W} \right) + \\ & 2\lambda_W^T (M\hat{W}) + 2\lambda_{g,W}^T (A\hat{W} + B\hat{g} + C) + \\ & 2\lambda_{X,g,W}^T (D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} + H) \end{aligned} \right)}{\partial \hat{W}} \quad (\text{A V.106})$$

et

$$\frac{\partial L_2}{\partial \hat{W}} = -2V_W^{-1} W^m + 2V_W^{-1} \hat{W} + 2D^T \lambda_{X,g,W} \quad (\text{A V.107})$$

Finalement, le nouveau système simplifié devient :

$$\begin{aligned} V_X^{-1} \hat{X} + S_X^T \lambda_X + F^T \lambda_{X,g,W} &= V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} \hat{g} + S_g^T \lambda_g + E^T \lambda_{X,g,W} &= V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} \hat{W} + D^T \lambda_{X,g,W} &= V_W^{-1} W^m \\ S_X \hat{X} &= U_{(24,1)} \\ S_g \hat{g} &= U_{(3,1)} \\ D\hat{W} + E\hat{g} + F\hat{X} &= -H \end{aligned} \quad (\text{A V.108})$$

et de la forme :

$$\begin{bmatrix} V_X^{-1} & 0 & 0 & S_X^T & 0 & F^T \\ 0 & V_g^{-1} & 0 & 0 & S_g^T & E^T \\ 0 & 0 & V_W^{-1} & 0 & 0 & D^T \\ S_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{[214 \times 214]} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{g} \\ \hat{W} \\ \lambda_X \\ \lambda_g \\ \lambda_{X,g,W} \end{bmatrix}_{[214 \times 1]} = \begin{bmatrix} V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} W^m \\ U_{(24,1)} \\ U_{(3,1)} \\ -H \end{bmatrix}_{[214 \times 1]} \quad (\text{A V.109})$$

La solution est obtenue à partir de :

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{g} \\ \hat{W} \\ \lambda_X \\ \lambda_g \\ \lambda_{X,g,W} \end{bmatrix}_{[214 \times 1]} = \begin{bmatrix} V_X^{-1} & 0 & 0 & S_X^T & 0 & F^T \\ 0 & V_g^{-1} & 0 & 0 & S_g^T & E^T \\ 0 & 0 & V_W^{-1} & 0 & 0 & D^T \\ S_X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & E & D & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{[214 \times 214]}^{-1} \begin{bmatrix} V_X^{-1} X^{Pm} \\ V_g^{-1} g^m \\ V_W^{-1} W^m \\ U_{(24,1)} \\ U_{(3,1)} \\ -H \end{bmatrix}_{[214 \times 1]} \quad (\text{A V.110})$$

### Degré de redondance ( $D^R$ ) du deuxième observateur

Tableau-A V-8 : Information pour le degré de redondance

Variables	Type	Nombre	Description
$\hat{X}$	Inconnue	120	Fraction granulominérale
$\hat{g}$	Inconnue	24	Fraction granulométrique
$\hat{W}$	Inconnue	3	Flux de matière
$\lambda_X$	Inconnue	24	Balancement des fractions granulominérales
$\lambda_g$	Inconnue	3	Balancement des fractions granulométriques
$\lambda_{X,g,W}$	Inconnue	40	Balancement de la masse granulominérale
$\hat{X}^{Pm}$	Mesure	120	Pseudos-mesures, fractions granulominérales
$g^m$	Mesure	24	Fraction granulométrique
$W^m$	Mesure	3	Flux de matière
$\lambda_X$	Équation	24	Balancement des fractions granulominérales
$\lambda_g$	Équation	3	Balancement des fractions granulométriques
$\lambda_{X,g,W}$	Équation	40	Balancement de la masse granulominérale

Calcul de redondance :  $(214-147)/147 = 45.6 \%$

## Données des mesures d'oxyde du premier observateur

Tableau-A V-9 : Données de départ pour le premier observateur<sup>171</sup>

<b>Flux<sup>172</sup></b>	<b>Granulométrie</b>	<b>Fetot</b>	<b>SiO2</b>	<b>TiO2</b>	<b>Al2O3</b>	<b>K2O</b>	<b>CaO</b>	<b>MgO</b>
F	4.9	68.33	1.77	0.09	0.26	0.06	0.01	0.01
F	9.7	68.36	1.70	0.10	0.27	0.07	0.01	0.01
F	14.9	68.27	1.86	0.10	0.25	0.06	0.01	0.01
F	19.0	68.07	2.04	0.13	0.29	0.07	0.01	0.01
F	17.6	66.53	4.13	0.16	0.34	0.08	0.01	0.02
F	14.7	64.24	7.52	0.19	0.27	0.06	0.01	0.01
F	10.5	63.53	8.37	0.22	0.30	0.07	0.01	0.01
F	8.8	65.02	6.11	0.24	0.41	0.10	0.02	0.02
U	6.2	68.33	1.77	0.09	0.26	0.06	0.01	0.01
U	12.2	68.36	1.70	0.10	0.27	0.07	0.01	0.01
U	18.7	68.27	1.85	0.10	0.25	0.06	0.01	0.01
U	23.7	68.27	1.79	0.12	0.27	0.06	0.01	0.01
U	20.9	68.67	1.32	0.12	0.20	0.04	0.01	0.01
U	13.4	69.37	0.59	0.07	0.07	0.01	0.01	0.01
U	4.6	69.54	0.37	0.07	0.06	0.01	0.01	0.01
U	0.4	69.48	0.35	0.11	0.09	0.01	0.01	0.01
O	0.0	12.09	53.96	17.21	9.26	2.83	0.01	0.01
O	0.0	5.74	72.1	7.21	9.17	2.79	0.02	0.02
O	0.0	5.6	80.36	2.8	6.27	1.89	0.02	0.02
O	0.3	12.38	73.06	1.74	5.21	1.56	0.03	0.03
O	4.5	27.45	55.29	1.05	2.96	0.85	0.03	0.04
O	19.69	50.5	26.06	0.5	0.78	0.21	0.02	0.02
O	33.87	60.41	12.63	0.29	0.43	0.11	0.02	0.02
O	41.59	64.84	6.34	0.24	0.42	0.1	0.02	0.02

<sup>171</sup> Le tableau renferme les mesures d'oxyde de tous les flux et de toutes les classes granulométriques.<sup>172</sup> F= alimentation, U= sousverse, O= surverse et toutes les valeurs sont en %.

### Résultats des teneurs minérales et balancement du premier observateur

Tableau-A V-10 : Résultats des teneurs minérales et balancement

Flux	Hématite	Quartz	Mica	Ilménite	Grenat	Balance
F	97.50	1.40	0.54	0.19	0.37	100.0
F	97.59	1.34	0.59	0.20	0.28	100.0
F	97.37	1.50	0.53	0.22	0.37	100.0
F	97.08	1.63	0.62	0.28	0.39	100.0
F	94.79	3.64	0.70	0.34	0.53	100.0
F	91.59	7.16	0.53	0.36	0.35	100.0
F	90.49	7.93	0.65	0.47	0.47	100.0
F	92.61	5.54	0.84	0.47	0.54	100.0
U	97.54	1.41	0.53	0.18	0.34	100.0
U	97.50	1.32	0.61	0.23	0.35	100.0
U	97.47	1.50	0.52	0.20	0.31	100.0
U	97.34	1.39	0.56	0.27	0.44	100.0
U	97.96	1.02	0.37	0.25	0.39	100.0
U	99.15	0.49	0.06	0.12	0.19	100.0
U	99.28	0.26	0.07	0.15	0.24	100.0
U	99.15	0.19	0.10	0.23	0.34	100.0
O	0.00	42.96	23.96	32.71	0.39	100.0
O	0.77	61.06	23.64	13.77	0.77	100.0
O	4.96	72.83	16.05	5.36	0.78	100.0
O	15.69	66.78	13.23	3.36	0.93	100.0
O	37.79	51.61	7.26	2.08	1.25	100.0
O	71.56	25.00	1.80	0.99	0.64	100.0
O	85.95	12.02	0.92	0.58	0.53	100.0
O	92.38	5.76	0.84	0.47	0.56	100.0

### Résultats des teneurs minérales et balancement du deuxième observateur

Tableau-A V-11 : Résultats des teneurs minérales et balancement

Flux	Granulométrie	Hématite	Quartz	Mica	Ilménite	Grenat	Balance
F	5.26	97.36	1.47	0.57	0.23	0.35	100.0
F	9.88	97.46	1.39	0.62	0.23	0.31	100.0
F	14.91	97.42	1.50	0.53	0.21	0.34	100.0
F	19.03	97.07	1.62	0.61	0.28	0.41	100.0
F	17.55	94.86	3.61	0.71	0.34	0.47	100.0
F	14.50	91.63	7.16	0.53	0.36	0.32	100.0
F	10.36	90.54	7.94	0.64	0.45	0.44	100.0
F	8.52	92.62	5.54	0.82	0.47	0.55	100.0
U	6.54	97.67	1.33	0.50	0.14	0.35	100.0
U	12.30	97.65	1.27	0.58	0.20	0.31	100.0
U	18.61	97.44	1.50	0.52	0.21	0.33	100.0
U	23.67	97.36	1.40	0.57	0.27	0.41	100.0
U	20.79	97.94	1.02	0.37	0.25	0.42	100.0
U	13.18	99.13	0.49	0.06	0.12	0.20	100.0
U	4.48	99.28	0.26	0.07	0.15	0.24	100.0
U	0.42	99.14	0.19	0.10	0.23	0.34	100.0
O	0.08	0.03	45.17	24.50	29.90	0.39	100.0
O	0.10	0.77	61.29	23.61	13.56	0.77	100.0
O	0.01	4.96	72.85	16.05	5.36	0.78	100.0
O	0.33	15.69	66.78	13.24	3.36	0.93	100.0
O	4.51	37.72	51.76	7.18	2.08	1.27	100.0
O	19.82	71.54	25.01	1.79	0.99	0.66	100.0
O	34.02	85.90	12.01	0.94	0.60	0.55	100.0
O	41.13	92.36	5.76	0.85	0.47	0.55	100.0

### Code de programmation en Matlab du premier observateur

```
%*****
%Déclaration des variables *
%*****

essais=10;
colonnes=7;
lignes=24;
MI=diag([1 1 1 1 1 1 1]);
i=0;

%*****
%Appel de la matrice des Oxydes *
%*****

Ini_Observ1

%*****
%Lecture de la Matrice *
%*****

for y=1:lignes
    oxyde(y,:)=Beta(y,:);
end

%*****
%Duplication de la matrice des oxydes *
%*****

for a=1:lignes
    for b=1:essais
        i=i+1;
        oxyde_duplic(i,:)=oxyde(a,:);
        Vb(i,:)=(Vm.*oxyde_duplic(i,:)).^2;
    end
end
```

```

%*****
%Matrice de la variable aléatoire pour la matrice des Oxydes *
%*****

%*****
%Initialisation de la matrice Qsi *
%*****
w=0;
qsi=zeros(essais*lignes,colonnes);

%*****
%Définition des valeurs limites *
%*****
limite_basse= -0.1;
limite_haute= 0.1;

%*****
%Routine pour Qsi *
%*****

for K=1:(essais*lignes)
    for L=1:colonnes
        U1=rand;
        U2=rand;
        qsi(K,L)=(-2*log(U1)).5*sin(2*pi*U2);

        while (qsi(K,L) < limite_basse)|(qsi(K,L) > limite_haute)
            U1=rand;
            U2=rand;
            qsi(K,L)=(-2*log(U1)).5*sin(2*pi*U2);
            w=w+1;
        end
    end
end
end

```



```

%*****
%Calcul de la matrice des écarts-types *
%*****

MET=0.05*oxyde_duplic;

%*****
%Calcul des oxydes perturbés *
%*****

Beta_P=oxyde_duplic+(MET.*qsi);

%*****
%Calcul de la variance d'un jeu de données *
%*****

varBeta_P=var(Beta_P(:,1:colonnes));

%*****
%*****Calcul et routine de l'observateur *
%*****

%*****
%Calcul de la matrice de variance Vb d'un jeu de données *
%*****

for j=1:(essais*lignes)

solution=(inv([Alpha'*Alpha -Alpha' S';-Alpha MI+inv(diag(Vb(j,:))) zeros(7,1);S zeros(1,7)
0])*[zeros(5,1);inv(diag(Vb(j,:)))*Beta_P(j,:)';100])';

Resultats(j,:)=solution;
Balance(j)=(sum(Resultats(j,1:5)));
Balance=Balance';
iteration=j
end

```

```

%*****
%Section des résultats *
%*****

%*****
%Calcul des variances de chaque variable de chaque classe granulométrique *
%*****

for c=1:lignes;
    for d=1:13;
        Variance(c,d)=var(Resultats((essais*(c-1)+1:essais*c),d));
        Moyenne(c,d)=mean(Resultats((essais*(c-1)+1:essais*c),d));
    end
end

%*****
%Sauvegarde des résultats *
%*****

save AllBeta.txt Beta_P -ascii
save Resultats.txt Resultats -ascii
save Variance.txt Variance -ascii
save Moyenne.txt Moyenne -ascii
save Balance.txt Balance -ascii

```

### Code de programmation en Matlab du deuxième observateur

```
%*****
% Rafraichissement de l'écran et de la mémoire *
%*****

Flush

%*****
% Appel des matrices du système*
%*****

Initial2

%*****
% Initialisation des variables pour la routine de convergence *
%*****

compteur=50;
i=1;
%*****
% Premier calcul du système matriciel Alpha*Y=Beta de l'observateur ( Y= Vecteur Solution
(214x214)) *
%*****

Matrices2
Y=ALPHA\BETA;
erreur(i)=sum((y-Y).^2);

%*****
% Routine de convergence de " Y = inv(Alpha)*Beta " *
%*****

while (erreur(i) > 1E-5)&(i < compteur)
i=i+1;
```

```
%*****
% Réinitialisation des valeurs et des matrices de linéarisation*
%*****
```

```
y=Y;
```

```
Matrices2
```

```
%*****
% Calcul du vecteur solution *
%*****
```

```
Y=ALPHA\BETA;
```

```
%*****
% Calcul des erreurs *
%*****
```

```
erreur(i)=sum((y-Y).^2);
```

```
end
```

```
%*****
% Affiche des résultats *
%*****
```

```
save Resultats.txt Y -ascii
```

```
Mineraux_F=[sum(Y(1:5)) sum(Y(6:10)) sum(Y(11:15)) sum(Y(16:20)) sum(Y(21:25))
sum(Y(26:30)) sum(Y(31:35)) sum(Y(36:40))]'';
Mineraux_U=[sum(Y(41:45)) sum(Y(46:50)) sum(Y(51:55)) sum(Y(56:60)) sum(Y(61:65))
sum(Y(66:70)) sum(Y(71:75)) sum(Y(76:80))]'';
Mineraux_O=[sum(Y(81:85)) sum(Y(86:90)) sum(Y(91:95)) sum(Y(96:100))
sum(Y(101:105)) sum(Y(106:110)) sum(Y(111:115)) sum(Y(116:120))]'';
```

```
Granulo_F=[sum(Y(121:128))]'';
Granulo_U=[sum(Y(129:136))]'';
Granulo_O=[sum(Y(137:144))]'';
```

```
Tonnage=[Y(145)-Y(146)-Y(147)]';
```

## ANNEXE VI

### CONTRÔLEURS MULTIVARIABLES

Les fonctions de transfert de départ sont :

$$G_{11} = \frac{-0.056}{(810s+1)} \quad (\text{A.VI.1})$$

$$G_{12} = \frac{-0.0002}{(846s+1)} \quad (\text{A.VI.2})$$

$$G_{21} = \frac{0.012}{(282s+1)} \quad (\text{A.VI.3})$$

$$G_{22} = \frac{-0.0003}{(330s+1)} \quad (\text{A.VI.4})$$

#### Solution du réglage de la première boucle

La première simplification en basse fréquence de  $G_{11}^*$  est présentée aux équations (Eq. 5 &6).

$${}^{Itération (1)} G_{11}^*(s) \approx G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s) * G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \approx \frac{-0.056}{(810s+1)} - \frac{\frac{-0.0002}{(846s+1)} * \frac{0.012}{(282s+1)}}{\frac{-0.0003}{(330s+1)}} \quad (\text{A.VI.5})$$

$${}^{Itération (1)} G_{11}^*(s) \approx \frac{-0.056}{(810s+1)} - \frac{0.008 * (330s+1)}{(846s+1)(282s+1)} \quad (\text{A.VI.6})$$

La ré-identification (Eq. 7) de  $G_{11}^*(s)$  nous donne :

$$G_{11}^*(s) \approx \frac{-0.064}{(503.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.7})$$

La spécification (Eq. 8) de la première boucle est établie selon la règle B.F.  $\equiv$  B.O., soit :

$$H_1^*(s) \approx \frac{1}{(503.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.8})$$

Le réglage (Eq. 9) de " $G_{c_1}^*(s)$ " devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * \tau_1 = 1.5 * 503.4 = 755.1, \quad K_{c_1} = 1/K_p = -0.064 \quad (\text{A.VI.9})$$

### **Calcul de la première itération de $G_{22}$**

À partir de  $G_{c_1}^*(s)$ , la nouvelle valeur de  $G_{22}^*(s)$  est présentée aux équations (Eq.10 & 11).

De plus, une modification des fonctions de transfert a été apportée telle que présentée aux équations (Eq. 10 & 11) pour faciliter la simulation.

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \frac{G_{c_1}^*(s)}{G_{11}^*(s)}}{1 + \frac{G_{c_1}^*(s)}{G_{11}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.10})$$

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}^*(s)} \left( \frac{\frac{G_{c_1}^*(s)}{G_{11}^*(s)}}{1 + \frac{G_{c_1}^*(s)}{G_{11}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.0003375}{(419.7s+1)^2} \quad (\text{A.VI.11})$$

La spécification (Eq. 12) de la deuxième boucle est également établie selon la règle B.F.  $\cong$  B.O., soit :

$$H_2^{* \text{ (1)}}(s) \approx \frac{1}{(419.7s+1)^2} \quad (\text{A.VI.12})$$

Le réglage (Eq. 13) de  $G_{c_2}^{* \text{ (1)}}(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 419.7 = 629.55, \quad K_{c_2} = 1/K_p = -1/0.0003375 \quad (\text{A.VI.13})$$

### **Calcul de la deuxième itération de $G_{11}$**

$$G_{11}^{* \text{ (2)}}(s) \approx G_{11}^{* \text{ (1)}}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) G_{c_2}^{* \text{ (1)}}(s)}{1 + G_{c_2}^{* \text{ (1)}}(s) G_{22}^{* \text{ (1)}}(s)} \quad (\text{A.VI.14})$$

$$G_{11}^{* \text{ (2)}}(s) \approx G_{11}^{* \text{ (1)}}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}^{* \text{ (1)}}(s)} \left( \frac{G_{c_2}^{* \text{ (1)}}(s) G_{22}^{* \text{ (1)}}(s)}{1 + G_{c_2}^{* \text{ (1)}}(s) G_{22}^{* \text{ (1)}}(s)} \right) \approx \frac{-0.071111}{(547.8s+1)^2} \quad (\text{A.VI.15})$$

La spécification (Eq. 16) de la première boucle devient :

$$H_1^{* \text{ (2)}}(s) \approx \frac{1}{(547.8s+1)^2} \quad (\text{A.VI.16})$$

Le réglage (Eq. 17) de  $G_{c_1}^{* \text{ (1)}}(s)$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 547.8 = 821.7, \quad K_{c_1} = -1/0.071111 \quad (\text{A.VI.17})$$

### Calcul de la deuxième itération de $G_{22}$

$$G_{22}^{* (2)}(s) \approx G_{22}^{* (1)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_1}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (2)}}{G_{11}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.18})$$

$$\overset{\text{Itération (2)}}{G_{22}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (1)}}{G_{22}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (2)}}{G_{11}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (2)}}{G_{11}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (2)}}{1 + G_{c_1}^*(s) G_{11}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.00037125}{(481.5s+1)^2} \quad (\text{A.VI.19})$$

La spécification (Eq. 20) de la deuxième boucle devient :

$$\overset{\text{Itération (2)}}{H_2^*(s)} \approx \frac{1}{(481.5s+1)^2} \quad (\text{A.VI.20})$$

Le réglage (Eq. 21) de  $\overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_2}^*(s)}$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 481.5 = 722.25, \quad K_{c_2} = -1/0.00037125 \quad (\text{A.VI.21})$$

### Calcul de la troisième itération de $G_{11}$

$$\overset{\text{Itération (3)}}{G_{11}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (2)}}{G_{11}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_2}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (2)}}{G_{22}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.22})$$

$$\overset{\text{Itération (3)}}{G_{11}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (2)}}{G_{11}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (2)}}{G_{22}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (2)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (2)}}{G_{22}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (2)}}{1 + G_{c_2}^*(s) G_{22}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.07757565}{(582.6s+1)^2} \quad (\text{A.VI.23})$$



La spécification (Eq. 24) de la première boucle devient :

$$H_1^*(s) \approx \frac{1}{(582.6s+1)^2} \quad (\text{A.VI.24})$$

Le réglage (Eq. 25) de  $G_{c_1}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 582.6 = 873.9, \quad K_{c_1} = -1/0.07757565 \quad (\text{A.VI.25})$$

### **Calcul de la troisième itération de $G_{22}$**

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (3)}}{G_{c_1}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (3)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (3)}}{G_{11}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.26})$$

$$\overset{\text{Itération (3)}}{G_{22}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (2)}}{G_{22}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (3)}}{G_{11}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (3)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (3)}}{G_{11}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (3)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (3)}}{G_{11}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.00040219}{(530.1s+1)^2} \quad (\text{A.VI.27})$$

La spécification (Eq. 28) de la deuxième boucle devient :

$$H_2^*(s) \approx \frac{1}{(530.1s+1)^2} \quad (\text{A.VI.28})$$

Le réglage (Eq. 29) de  $G_{c_2}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 530.1 = 795.15, \quad K_{c_2} = -1/0.00040219 \quad (\text{A.VI.29})$$

### Calcul de la quatrième itération de $G_{11}$

$$G_{11}^{* (4)}(s) \approx G_{11}^{* (3)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (3)}}{G_{c_2}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (3)}}{1 + G_{c_2}^*(s) \overset{\text{Itération (3)}}{G_{22}^*(s)}}} \quad (\text{A.VI.30})$$

$$G_{11}^{* (4)}(s) \approx G_{11}^{* (3)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (3)}}{G_{22}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (3)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (3)}}{G_{22}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (3)}}{1 + G_{c_2}^*(s) \overset{\text{Itération (3)}}{G_{22}^*(s)}}} \right) \approx \frac{-0.08354298}{(610.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.31})$$

La spécification (Eq. 32) de la première boucle devient :

$$\overset{\text{Itération (4)}}{H_1^*(s)} \approx \frac{1}{(610.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.32})$$

Le réglage (Eq. 33) de  $\overset{\text{Itération (4)}}{G_{c_1}^*(s)}$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 610.4 = 915.6, \quad K_{c_1} = -1/0.08354298 \quad (\text{A.VI.33})$$

### Calcul de la quatrième itération de $G_{22}$

$$G_{22}^{* (4)}(s) \approx G_{22}^{* (3)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (4)}}{G_{c_1}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (4)}}{1 + G_{c_1}^*(s) \overset{\text{Itération (4)}}{G_{11}^*(s)}}} \quad (\text{A.VI.34})$$

$$G_{22}^{* (4)}(s) \approx G_{22}^{* (3)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (4)}}{G_{11}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (4)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (4)}}{G_{11}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (4)}}{1 + G_{c_1}^*(s) \overset{\text{Itération (4)}}{G_{11}^*(s)}}} \right) \approx \frac{-0.00043092}{(569.1s+1)^2} \quad (\text{A.VI.35})$$

La spécification (Eq. 36) de la deuxième boucle devient :

$$H_2^*(s) \approx \frac{1}{(569.1s+1)^2} \quad (\text{A.VI.36})$$

Le réglage (Eq. 37) de  $G_{c_2}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 569.1 = 767.25, \quad K_{c_2} = -1/0.00043092 \quad (\text{A.VI.37})$$

### **Calcul de la cinquième itération de $G_{11}$**

$$G_{11}^*(s) \approx G_{11}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) G_{c_2}^*(s)}{1 + G_{c_2}^*(s) G_{22}^*(s)} \quad (\text{A.VI.38})$$

$$G_{11}^*(s) \approx G_{11}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}^*(s)} \left( \frac{G_{c_2}^*(s) G_{22}^*(s)}{1 + G_{c_2}^*(s) G_{22}^*(s)} \right) \approx \frac{-0.08911246}{(633.8s+1)^2} \quad (\text{A.VI.39})$$

La spécification (Eq. 40) de la première boucle devient :

$$H_1^*(s) \approx \frac{1}{(633.8s+1)^2} \quad (\text{A.VI.40})$$

Le réglage (Eq. 41) de  $G_{c_1}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 633.8 = 950.7, \quad K_{c_1} = -1/0.08911246 \quad (\text{A.VI.41})$$

### Calcul de la cinquième itération de $G_{22}$

$$G_{22}^{* (5)}(s) \approx G_{22}^{* (4)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) G_{c_1}^{* (5)}(s)}{1 + G_{c_1}^{* (5)}(s) G_{11}^{* (5)}(s)} \quad (\text{A.VI.42})$$

$$G_{22}^{* (5)}(s) \approx G_{22}^{* (4)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}^{* (5)}(s)} \left( \frac{G_{c_1}^{* (5)}(s) G_{11}^{* (5)}(s)}{1 + G_{c_1}^{* (5)}(s) G_{11}^{* (5)}(s)} \right) \approx \frac{-0.00045785}{(600.9s+1)^2} \quad (\text{A.VI.43})$$

La spécification (Eq. 44) de la deuxième boucle devient :

$$H_2^{* (5)}(s) \approx \frac{1}{(600.9s+1)^2} \quad (\text{A.VI.44})$$

Le réglage (Eq. 45) de  $G_{c_2}^{* (5)}(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 600.9 = 901.35, \quad K_{c_2} = -1/0.00045785 \quad (\text{A.VI.45})$$

### Calcul de la sixième itération de $G_{11}$

$$G_{11}^{* (6)}(s) \approx G_{11}^{* (5)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) G_{c_2}^{* (5)}(s)}{1 + G_{c_2}^{* (5)}(s) G_{22}^{* (5)}(s)} \quad (\text{A.VI.46})$$

$$G_{11}^{* (6)}(s) \approx G_{11}^{* (5)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}^{* (5)}(s)} \left( \frac{G_{c_2}^{* (5)}(s) G_{22}^{* (5)}(s)}{1 + G_{c_2}^{* (5)}(s) G_{22}^{* (5)}(s)} \right) \approx \frac{-0.09413496}{(651.2s+1)^2} \quad (\text{A.VI.47})$$

La spécification (Eq. 48) de la première boucle devient :

$$H_1^*(s) \approx \frac{1}{(651.2s+1)^2} \quad (\text{A.VI.48})$$

Le réglage (Eq. 49) de  $G_{c_1}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 651.2 = 976.8, \quad K_{c_1} = -1/0.09413496 \quad (\text{A.VI.49})$$

### **Calcul de la sixième itération de $G_{22}$**

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) G_{c_1}^*(s)}{1 + G_{c_1}^*(s) G_{11}^*(s)} \quad (\text{A.VI.50})$$

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}^*(s)} \left( \frac{G_{c_1}^*(s) G_{11}^*(s)}{1 + G_{c_1}^*(s) G_{11}^*(s)} \right) \approx \frac{-0.00048335}{(626.7s+1)^2} \quad (\text{A.VI.51})$$

La spécification (Eq. 52) de la deuxième boucle devient :

$$H_2^*(s) \approx \frac{1}{(626.7s+1)^2} \quad (\text{A.VI.52})$$

Le réglage (Eq. 53) de  $G_{c_2}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 626.7 = 940.05, \quad K_{c_2} = -1/0.00048335 \quad (\text{A.VI.53})$$

### Calcul de la septième itération de $G_{11}$

$$G_{11}^*(s) \approx G_{11}^*(s) - \frac{\overset{\text{Itération (6)}}{G_{12}(s)G_{21}(s)} \overset{\text{Itération (6)}}{G_{c_2}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (6)}}{1 + G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (6)}}{G_{22}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.54})$$

$$\overset{\text{Itération (7)}}{G_{11}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (6)}}{G_{11}^*(s)} - \frac{\overset{\text{Itération (6)}}{G_{12}(s)G_{21}(s)}}{\overset{\text{Itération (6)}}{G_{22}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (6)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (6)}}{G_{22}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (6)}}{1 + G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (6)}}{G_{22}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.09910031}{(668s+1)^2} \quad (\text{A.VI.55})$$

La spécification (Eq. 56) de la première boucle devient :

$$\overset{\text{Itération (7)}}{H_1^*(s)} \approx \frac{1}{(668s+1)^2} \quad (\text{A.VI.56})$$

Le réglage (Eq. 57) de  $\overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_1}^*(s)}$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 668 = 1002, \quad K_{c_1} = -1/0.09910031 \quad (\text{A.VI.57})$$

### Calcul de la septième itération de $G_{22}$

$$\overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (6)}}{G_{22}^*(s)} - \frac{\overset{\text{Itération (7)}}{G_{12}(s)G_{21}(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_1}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (7)}}{1 + G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{11}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.58})$$

$$\overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (6)}}{G_{22}^*(s)} - \frac{\overset{\text{Itération (6)}}{G_{12}(s)G_{21}(s)}}{\overset{\text{Itération (7)}}{G_{11}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{11}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (7)}}{1 + G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{11}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.00050757}{(648.9s+1)^2} \quad (\text{A.VI.59})$$

La spécification (Eq. 60) de la deuxième boucle devient :

$$H_2^*(s) \approx \frac{1}{(648.9s+1)^2} \quad (\text{A.VI.60})$$

Le réglage (Eq. 61) de  $G_{c_2}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 648.39 = 973.35, \quad K_{c_2} = -1/0.00050757 \quad (\text{A.VI.61})$$

### **Calcul de la huitième itération de $G_{11}$**

$$G_{11}^*(s) \approx G_{11}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_2}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.62})$$

$$\overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (7)}}{G_{11}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (7)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.10382872}{(682.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.63})$$

La spécification (Eq. 64) de la première boucle devient :

$$H_1^*(s) \approx \frac{1}{(682.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.64})$$

Le réglage (Eq. 65) de  $G_{c_1}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 682.4 = 1023.6, \quad K_{c_1} = -1/0.10382872 \quad (\text{A.VI.65})$$

### Calcul de la huitième itération de $G_{22}$

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (8)}}{G_{c_1}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (8)}}{1 + G_{c_1}^*(s) \overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)}}} \quad (\text{A.VI.66})$$

$$\overset{\text{Itération (8)}}{G_{22}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (7)}}{G_{22}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (8)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (8)}}{1 + G_{c_1}^*(s) \overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)}}} \right) \approx \frac{-0.00053068}{(667.5s+1)^2} \quad (\text{A.VI.67})$$

La spécification (Eq. 68) de la deuxième boucle devient :

$$\overset{\text{Itération (8)}}{H_2^*(s)} \approx \frac{1}{(667.5s+1)^2} \quad (\text{A.VI.68})$$

Le réglage (Eq. 69) de  $\overset{\text{Itération (8)}}{G_{c_2}^*(s)}$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 667.5 = 1001.25, \quad K_{c_2} = -1/0.00053068 \quad (\text{A.VI.69})$$

### Calcul de la neuvième itération de $G_{11}$

$$\overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (8)}}{G_{c_2}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (8)}}{1 + G_{c_2}^*(s) \overset{\text{Itération (8)}}{G_{22}^*(s)}}} \quad (\text{A.VI.70})$$

$$\overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (8)}}{G_{11}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (8)}}{G_{22}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (8)}}{G_{c_2}^*(s)} \overset{\text{Itération (8)}}{G_{22}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (8)}}{1 + G_{c_2}^*(s) \overset{\text{Itération (8)}}{G_{22}^*(s)}}} \right) \approx \frac{-0.10835122}{(695s+1)^2} \quad (\text{A.VI.71})$$



La spécification (Eq. 72) de la première boucle devient :

$$H_1^*(s) \approx \frac{1}{(695s+1)^2} \quad (\text{A.VI.72})$$

Le réglage (Eq. 73) de  $G_{c_1}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 695 = 1042.5, \quad K_{c_1} = -1/0.10835122 \quad (\text{A.VI.73})$$

### **Calcul de la neuvième itération de $G_{22}$**

$$G_{22}^*(s) \approx G_{22}^*(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (9)}}{G_{c_1}^*(s)}}{1 + \overset{\text{Itération (9)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^*(s)}} \quad (\text{A.VI.74})$$

$$\overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^*(s)} \approx \overset{\text{Itération (8)}}{G_{22}^*(s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^*(s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (9)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^*(s)}}{\overset{\text{Itération (9)}}{G_{c_1}^*(s)} \overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^*(s)}} \right) \approx \frac{-0.00055283}{(688.5s+1)^2} \quad (\text{A.VI.75})$$

La spécification (Eq. 76) de la deuxième boucle devient :

$$H_2^*(s) \approx \frac{1}{(688.5s+1)^2} \quad (\text{A.VI.76})$$

Le réglage (Eq. 77) de  $G_{c_2}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 688.5 = 1032.75, \quad K_{c_2} = -1/0.00055283 \quad (\text{A.VI.77})$$

### Calcul de la dixième itération de $G_{11}$

$$G_{11}^{* (10)}(s) \approx G_{11}^{* (9)}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (9)}}{G_{c_2}^{*} (s)}}{\overset{\text{Itération (9)}}{1 + G_{c_2}^{*} (s) \overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^{*} (s)}}} \quad (\text{A.VI.78})$$

$$\overset{\text{Itération (10)}}{G_{11}^{*} (s)} \approx \overset{\text{Itération (9)}}{G_{11}^{*} (s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^{*} (s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (9)}}{G_{c_2}^{*} (s)} \overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^{*} (s)}}{\overset{\text{Itération (9)}}{1 + G_{c_2}^{*} (s) \overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^{*} (s)}}} \right) \approx \frac{-0.11269252}{(706.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.79})$$

La spécification (Eq. 80) de la première boucle devient :

$$\overset{\text{Itération (10)}}{H_1^{*} (s)} \approx \frac{1}{(706.4s+1)^2} \quad (\text{A.VI.80})$$

Le réglage (Eq. 81) de  $\overset{\text{Itération (10)}}{G_{c_1}^{*} (s)}$  devient :

$$\tau_{i_1} = 1.5 * 706.4 = 1059.6, \quad K_{c_1} = -1/0.11269252 \quad (\text{A.VI.81})$$

### Calcul de la dixième itération de $G_{22}$

$$\overset{\text{Itération (10)}}{G_{22}^{*} (s)} \approx \overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^{*} (s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s) \overset{\text{Itération (10)}}{G_{c_1}^{*} (s)}}{\overset{\text{Itération (10)}}{1 + G_{c_1}^{*} (s) \overset{\text{Itération (10)}}{G_{11}^{*} (s)}}} \quad (\text{A.VI.82})$$

$$\overset{\text{Itération (10)}}{G_{22}^{*} (s)} \approx \overset{\text{Itération (9)}}{G_{22}^{*} (s)} - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{\overset{\text{Itération (10)}}{G_{11}^{*} (s)}} \left( \frac{\overset{\text{Itération (10)}}{G_{c_1}^{*} (s)} \overset{\text{Itération (10)}}{G_{11}^{*} (s)}}{\overset{\text{Itération (10)}}{1 + G_{c_1}^{*} (s) \overset{\text{Itération (10)}}{G_{11}^{*} (s)}}} \right) \approx \frac{-0.00057413}{(701.1s+1)^2} \quad (\text{A.VI.83})$$

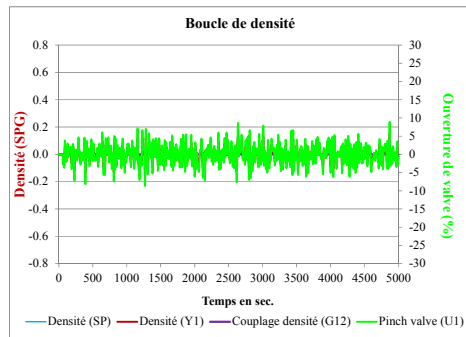
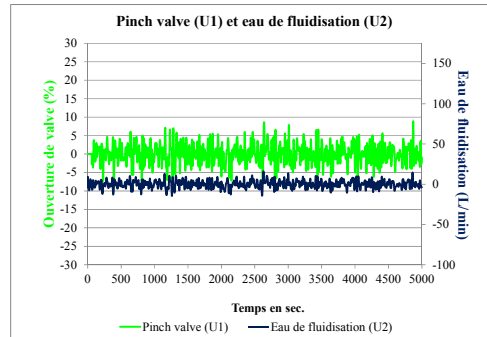
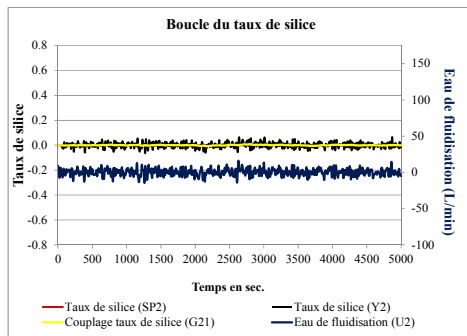
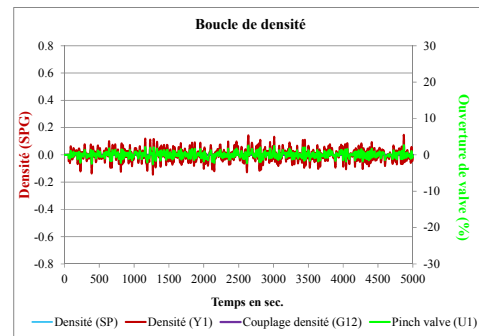
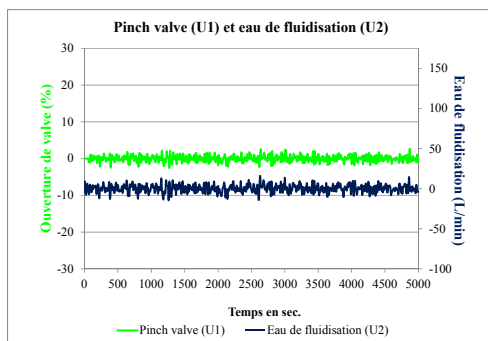
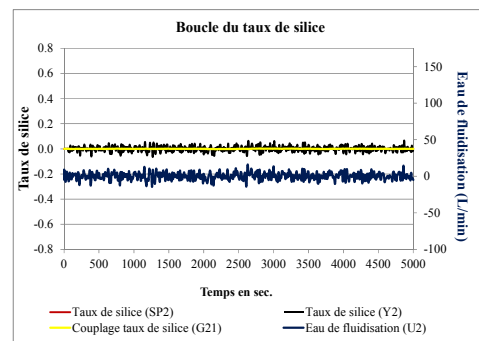
La spécification (Eq. 84) de la deuxième boucle devient :

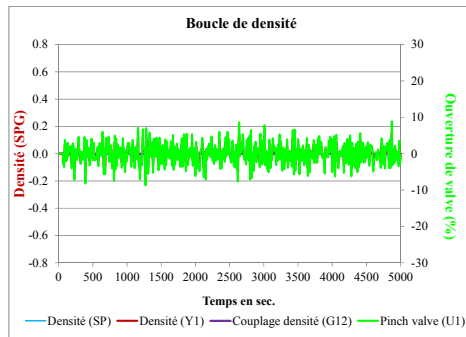
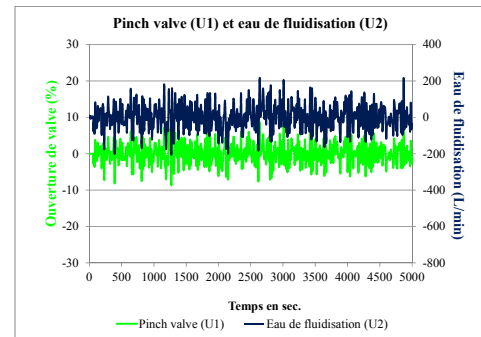
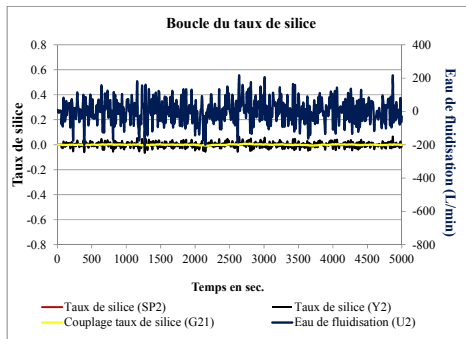
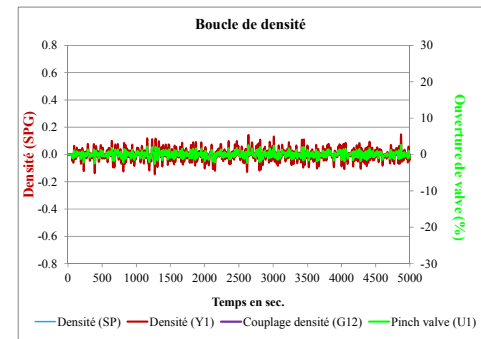
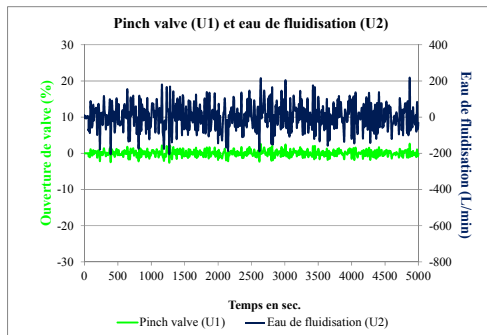
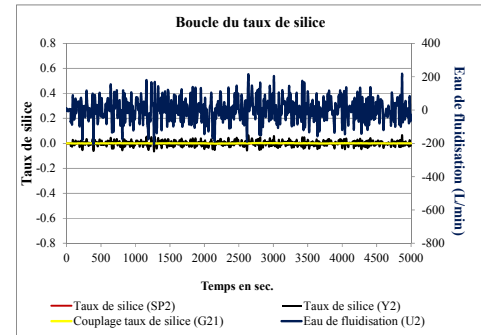
$$H_2^*(s) \approx \frac{1}{(701.1s + 1)^2} \quad (\text{A.VI.84})$$

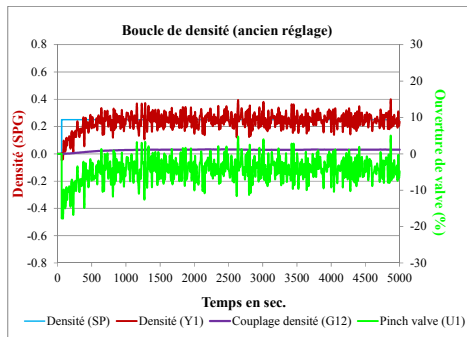
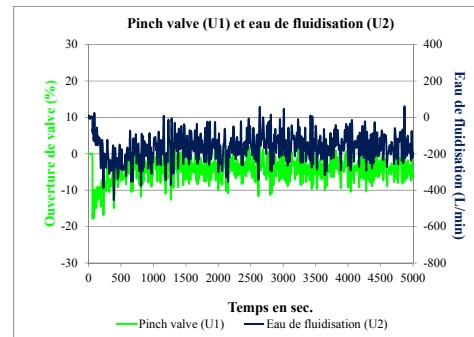
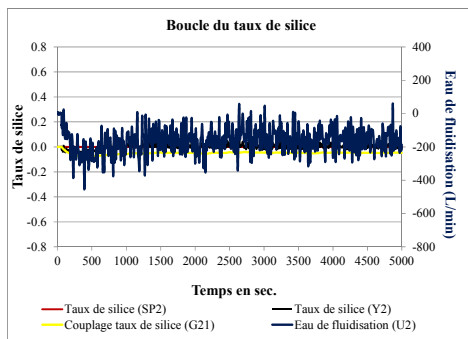
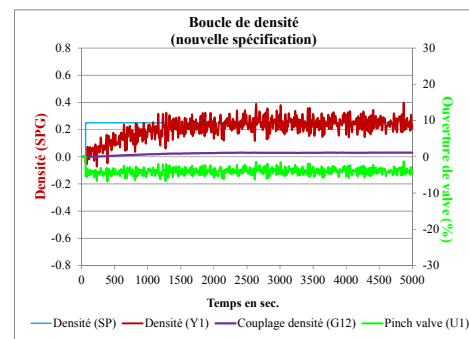
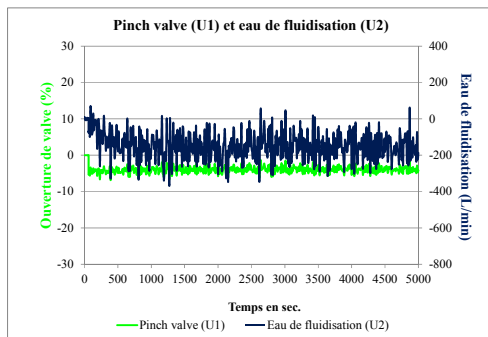
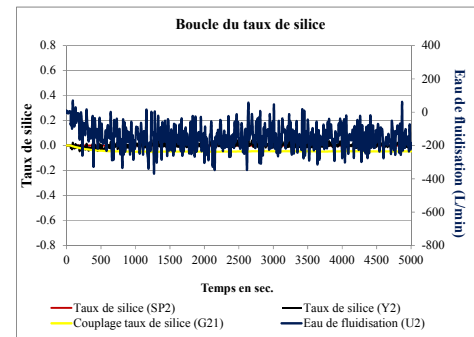
Le réglage (Eq. 85) de  $G_{c_2}^*(s)$  devient :

$$\tau_{i_2} = 1.5 * 701.1 = 1051.65, \quad K_{c_2} = -1/0.00057413 \quad (\text{A.VI.85})$$

La prochaine section présente les figures de simulation en monovariable, avec découplage et en décentralisée (distribuée).

Figure-A VI-1 : Référence<sup>173</sup>Figure-A VI-2 : Référence<sup>174</sup>Figure-A VI-3 : Référence<sup>175</sup>Figure-A VI-4 : Référence<sup>176</sup>Figure-A VI-5 : Référence<sup>177</sup>Figure-A VI-6 : Référence<sup>178</sup><sup>173</sup> Régulation monovariante ancien réglage (densité) et sans contrôleur pour la silice.<sup>174</sup> Régulation monovariante ancien réglage (densité) et sans contrôleur pour la silice (U1 et U2).<sup>175</sup> Régulation monovariante ancien réglage (densité) et sans contrôleur pour la silice (taux de silice).<sup>176</sup> Régulation monovariante nouveau réglage (densité) et sans contrôleur pour la silice.<sup>177</sup> Régulation monovariante nouveau réglage (densité) et sans contrôleur pour la silice (U1 et U2).<sup>178</sup> Régulation monovariante nouveau réglage (densité) et sans contrôleur pour la silice (taux de silice).

Figure-A VI-7 : Référence<sup>179</sup>Figure-A VI-8 : Référence<sup>180</sup>Figure-A VI-9 : Référence<sup>181</sup>Figure-A VI-10 : Référence<sup>182</sup>Figure-A VI-11 : Référence<sup>183</sup>Figure-A VI-12 : Référence<sup>184</sup><sup>179</sup> Régulation monovariante ancien réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice.<sup>180</sup> Régulation monovariante ancien réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (U1 et U2).<sup>181</sup> Régulation monovariante ancien réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (taux de silice).<sup>182</sup> Régulation monovariante nouveau réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice.<sup>183</sup> Régulation monovariante nouveau réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (U1 et U2).<sup>184</sup> Régulation monovariante nouveau réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (taux de silice).

Figure-A VI-13 : Référence<sup>185</sup>Figure-A VI-14 : Référence<sup>186</sup>Figure-A VI-15 : Référence<sup>187</sup>Figure-A VI-16 : Référence<sup>188</sup>Figure-A VI-17 : Référence<sup>189</sup>Figure-A VI-18 : Référence<sup>190</sup>

<sup>185</sup> Poursuite monovariable ancien réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice.

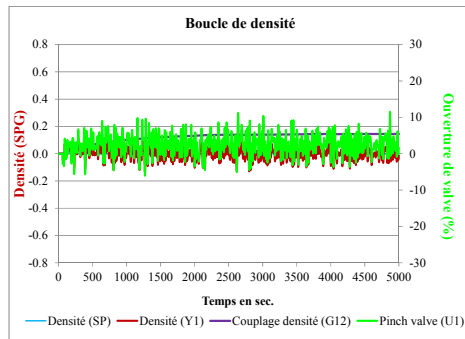
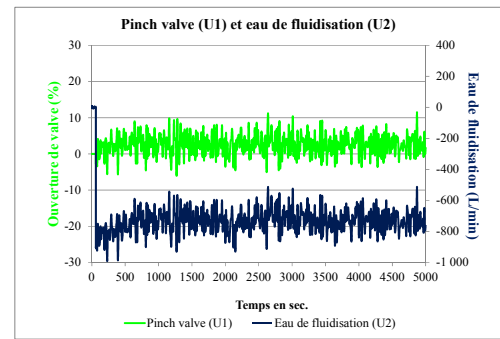
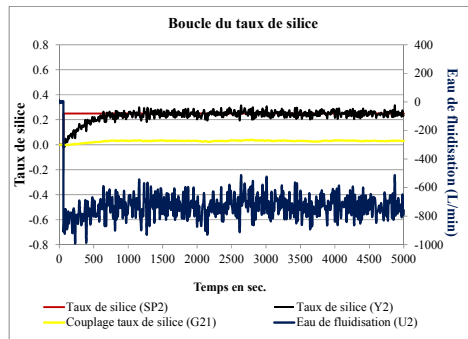
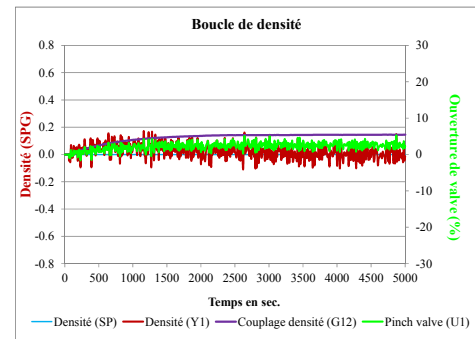
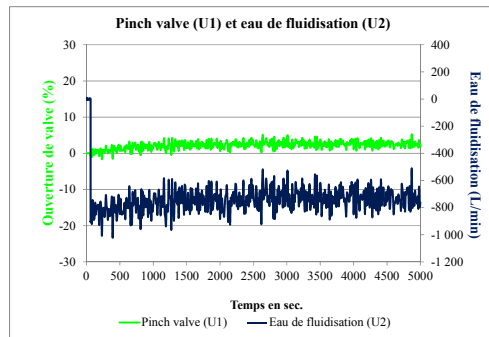
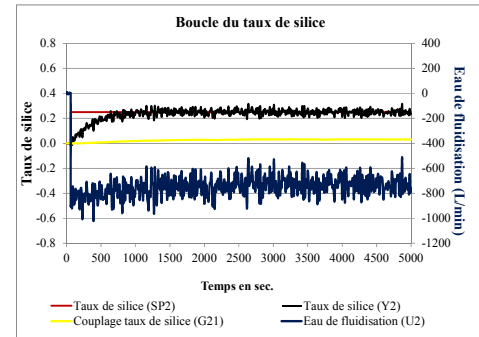
<sup>186</sup> Poursuite monovariable ancien réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (U1 et U2).

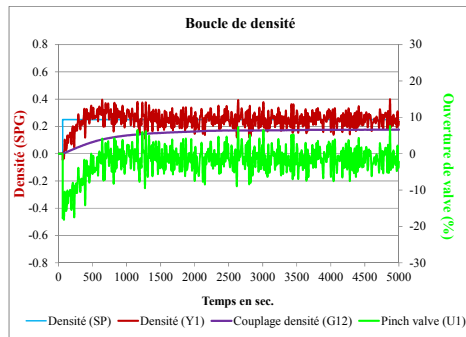
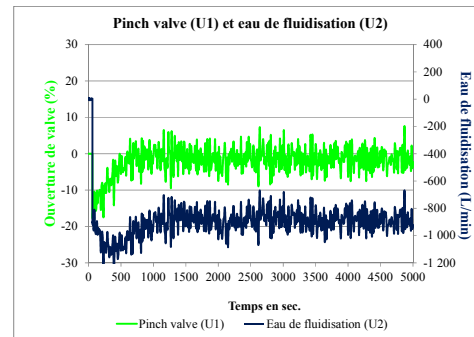
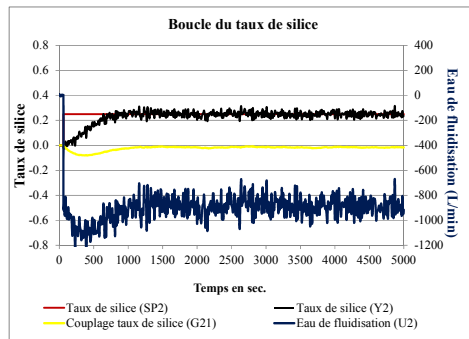
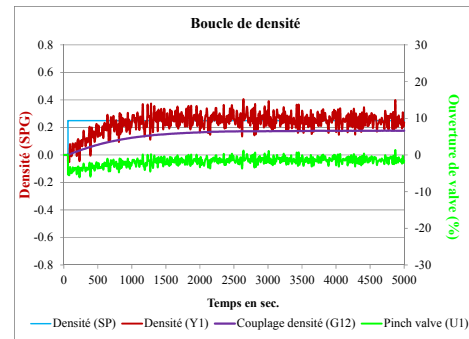
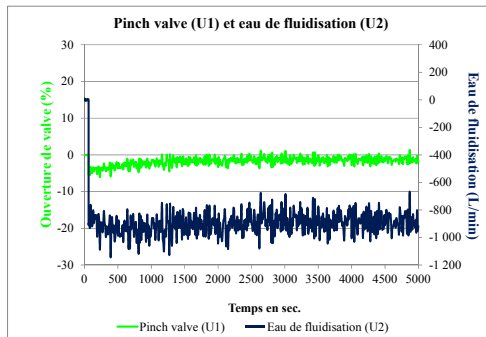
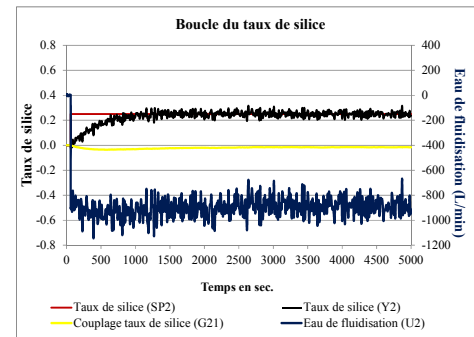
<sup>187</sup> Poursuite monovariable ancien réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (taux de silice).

<sup>188</sup> Poursuite monovariable nouveau réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice.

<sup>189</sup> Poursuite monovariable nouveau réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (U1 et U2).

<sup>190</sup> Poursuite monovariable nouveau réglage (densité) et avec un contrôleur pour la silice (taux de silice).

Figure-A VI-19 : Référence<sup>191</sup>Figure-A VI-20 : Référence<sup>192</sup>Figure-A VI-21 : Référence<sup>193</sup>Figure-A VI-22 : Référence<sup>194</sup>Figure-A VI-23 : Référence<sup>195</sup>Figure-A VI-24 : Référence<sup>196</sup><sup>191</sup> Poursuite monovariante ancien réglage (taux de silice), figure de la densité.<sup>192</sup> Poursuite monovariante ancien réglage (taux de silice), (U1 et U2).<sup>193</sup> Poursuite monovariante ancien réglage (taux de silice).<sup>194</sup> Poursuite monovariante nouveau réglage (taux de silice), figure de la densité.<sup>195</sup> Poursuite monovariante nouveau réglage (taux de silice), (U1 et U2).<sup>196</sup> Poursuite monovariante nouveau réglage (taux de silice).

Figure-A VI-25 : Référence<sup>197</sup>Figure-A VI-26 : Référence<sup>198</sup>Figure-A VI-27 : Référence<sup>199</sup>Figure-A VI-28 : Référence<sup>200</sup>Figure-A VI-29 : Référence<sup>201</sup>Figure-A VI-30 : Référence<sup>202</sup>

<sup>197</sup> Poursuite monovariable ancien réglage pour la densité et pour le taux de silice (figure de la densité).

<sup>198</sup> Poursuite monovariable ancien réglage pour la densité et pour le taux de silice (U1 et U2).

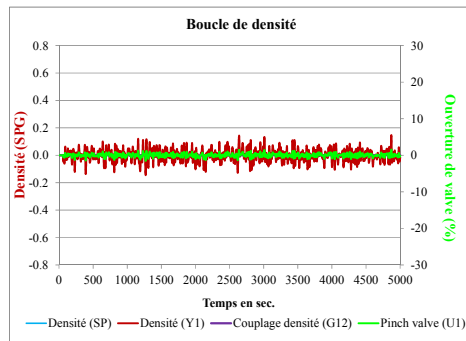
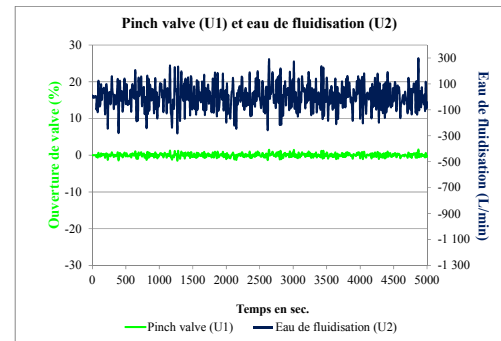
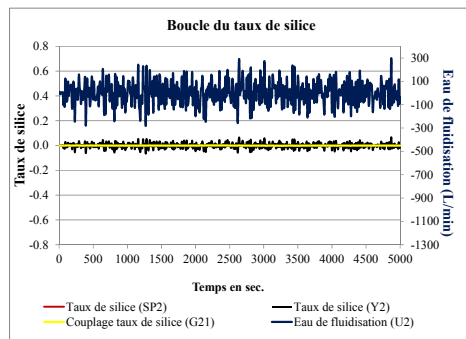
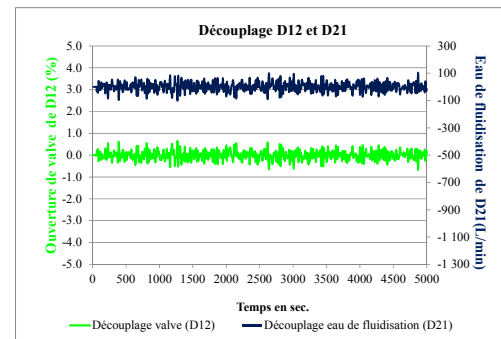
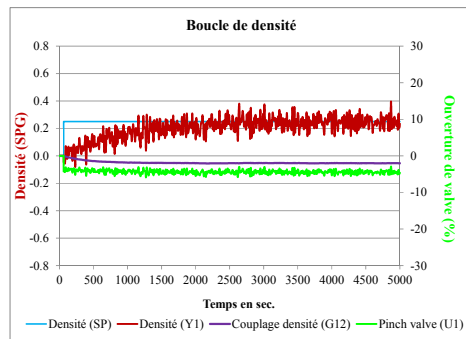
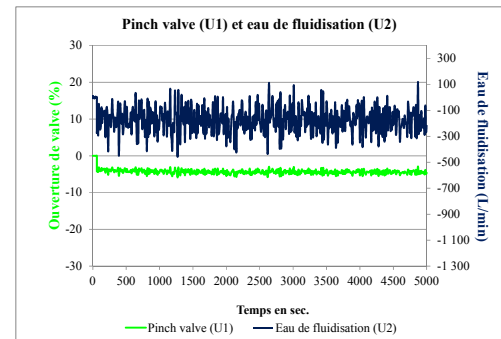
<sup>199</sup> Poursuite monovariable ancien réglage pour la densité et pour le taux de silice (figure du taux de silice).

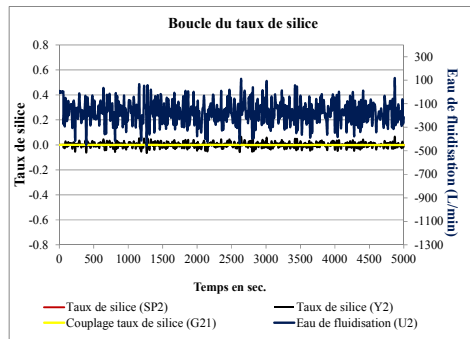
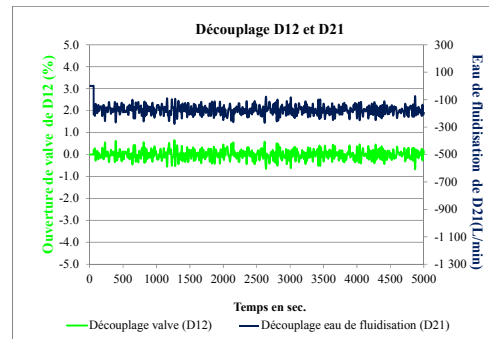
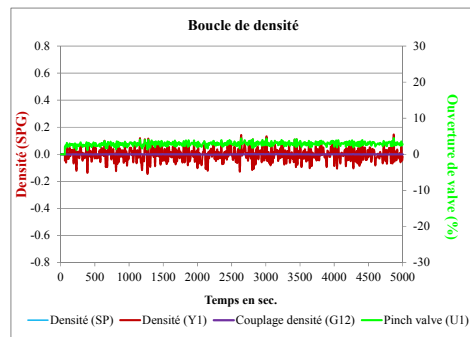
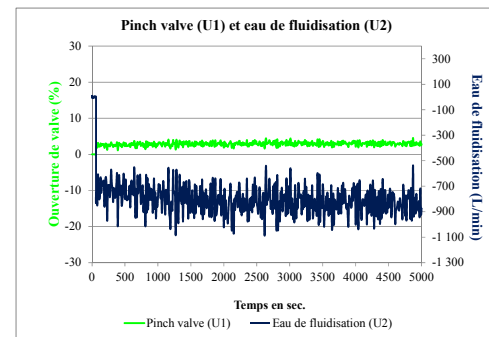
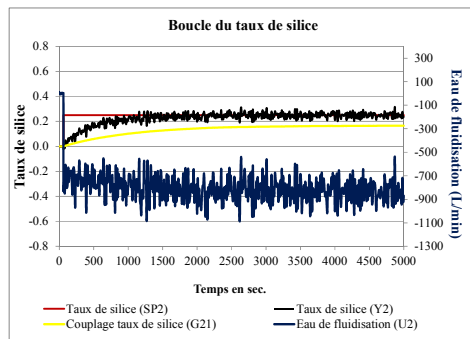
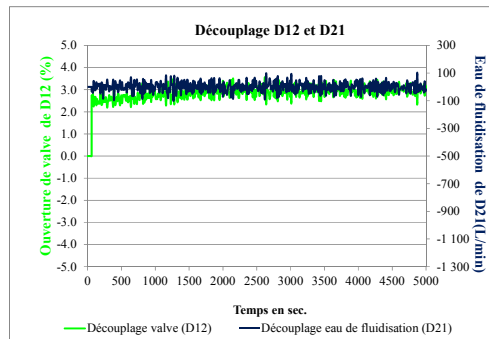
<sup>200</sup> Poursuite monovariable nouveau réglage pour la densité et pour le taux de silice (figure de la densité).

<sup>201</sup> Poursuite monovariable nouveau réglage pour la densité et pour le taux de silice (U1 et U2).

<sup>202</sup> Poursuite monovariable nouveau réglage pour la densité et pour le taux de silice (figure du taux de silice).



Figure-A VI-31 : Référence<sup>203</sup>Figure-A VI-32 : Référence<sup>204</sup>Figure-A VI-33 : Référence<sup>205</sup>Figure-A VI-34 : Référence<sup>206</sup>Figure-A VI-35 : Référence<sup>207</sup>Figure-A VI-36 : Référence<sup>208</sup><sup>203</sup> Régulation de la boucle de densité et du taux de silice, découplage.<sup>204</sup> Régulation de la boucle de densité et du taux de silice, découplage (U1 et U2).<sup>205</sup> Régulation de la boucle de densité et du taux de silice, découplage.<sup>206</sup> Régulation de la boucle de densité et du taux de silice, découplage, (D12 et D21).<sup>207</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, découplage.<sup>208</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, découplage, (U1 et U2).

Figure-A VI-37 : Référence<sup>209</sup>Figure-A VI-38 : Référence<sup>210</sup>Figure-A VI-39 : Référence<sup>211</sup>Figure-A VI-40 : Référence<sup>212</sup>Figure-A VI-41 : Référence<sup>213</sup>Figure-A VI-42 : Référence<sup>214</sup>

<sup>209</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, découplage.

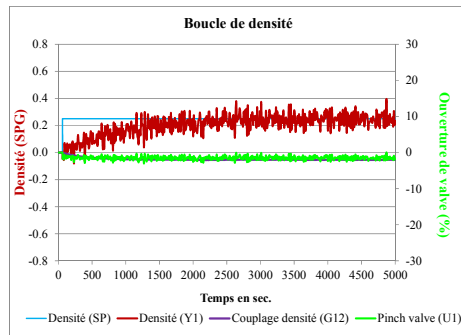
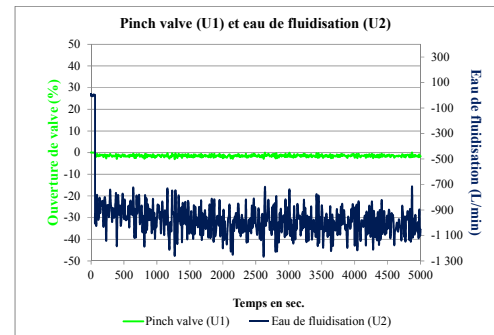
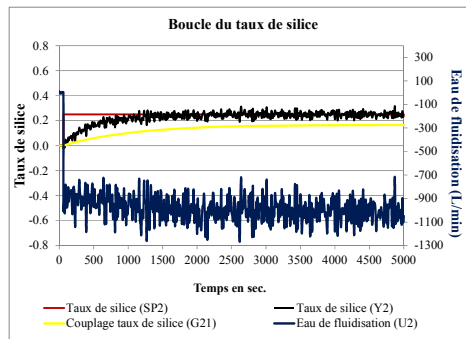
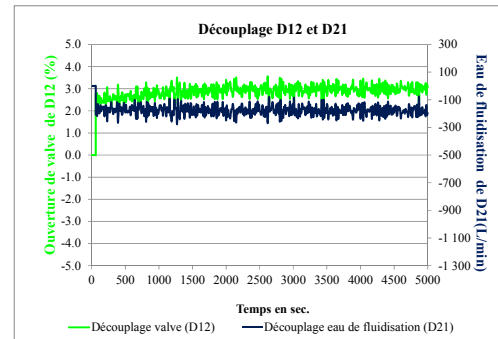
<sup>210</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, découplage, (D12 et D21).

<sup>211</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle de densité, découplage.

<sup>212</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle de densité, découplage (U1 et U2).

<sup>213</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle de densité, découplage.

<sup>214</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle de densité, découplage (D12 et D21).

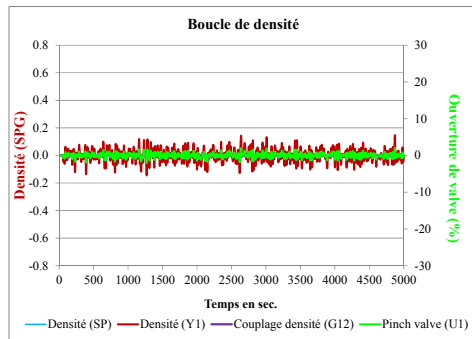
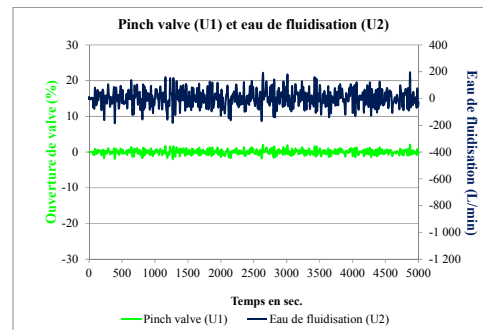
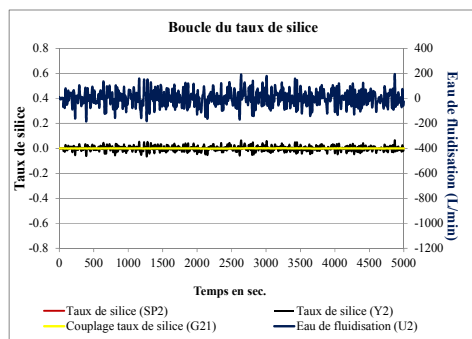
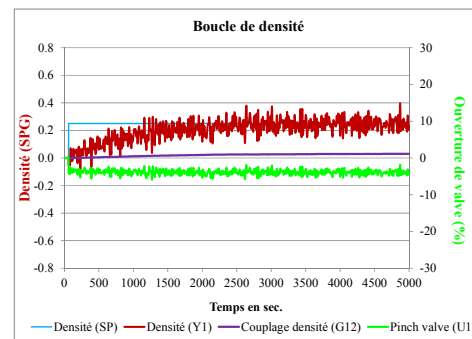
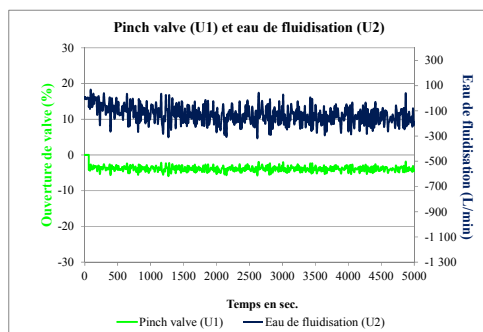
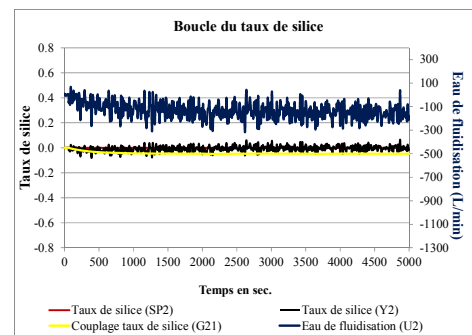
Figure-A VI-43 : Référence<sup>215</sup>Figure-A VI-44 : Référence<sup>216</sup>Figure-A VI-45 : Référence<sup>217</sup>Figure-A VI-46 : Référence<sup>218</sup>

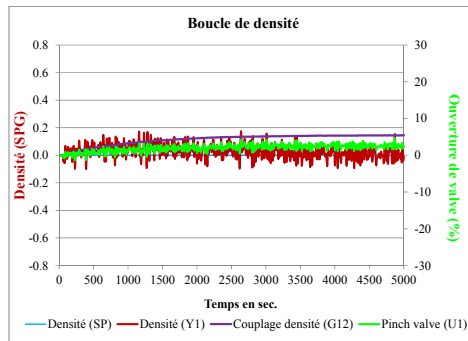
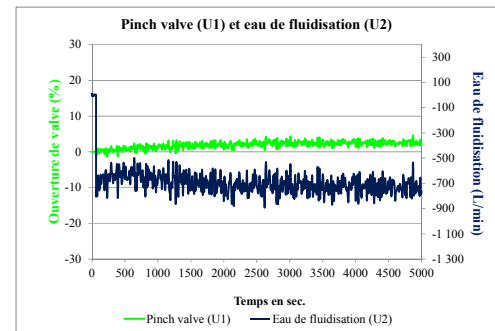
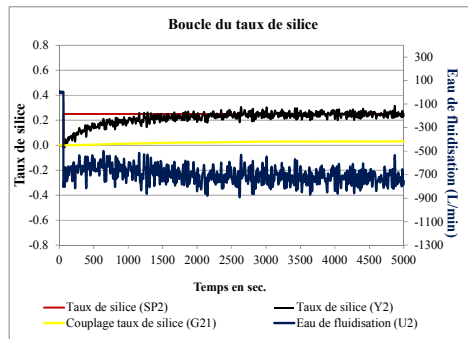
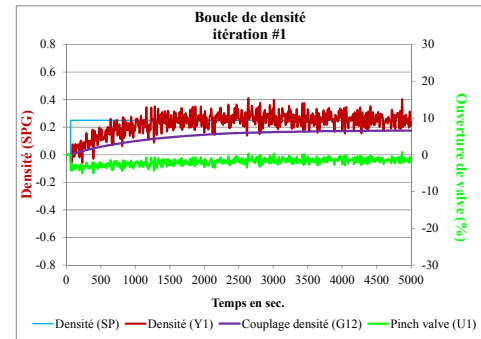
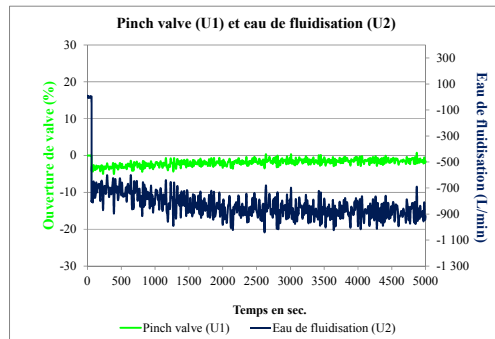
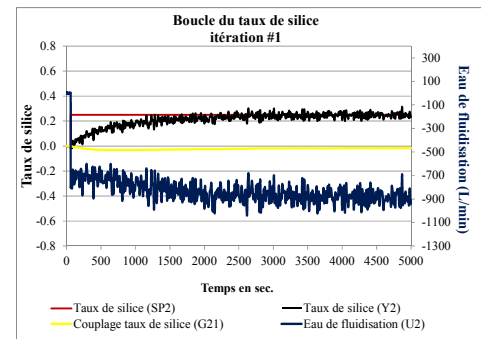
<sup>215</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, découplage.

<sup>216</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, découplage (U1 et U2).

<sup>217</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, découplage.

<sup>218</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, découplage, (D12 et D21).

Figure-A VI-47 : Référence<sup>219</sup>Figure-A VI-48 : Référence<sup>220</sup>Figure-A VI-49 : Référence<sup>221</sup>Figure-A VI-50 : Référence<sup>222</sup>Figure-A VI-51 : Référence<sup>223</sup>Figure-A VI-52 : Référence<sup>224</sup><sup>219</sup> Régulation de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée.<sup>220</sup> Régulation de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée (U1 et U2).<sup>221</sup> Régulation de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée.<sup>222</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, décentralisée.<sup>223</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, décentralisée (U1 et U2).<sup>224</sup> Poursuite de la boucle de densité et régulation de la boucle du taux de silice, décentralisée.

Figure-A VI-53 : Référence<sup>225</sup>Figure-A VI-54 : Référence<sup>226</sup>Figure-A VI-55 : Référence<sup>227</sup>Figure-A VI-56 : Référence<sup>228</sup>Figure-A VI-57 : Référence<sup>229</sup>Figure-A VI-58 : Référence<sup>230</sup>

<sup>225</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle densité, décentralisée.

<sup>226</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle densité, décentralisée (U1 et U2).

<sup>227</sup> Poursuite de la boucle du taux de silice et régulation de la boucle densité, décentralisée.

<sup>228</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée, itération #1.

<sup>229</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée, itération #1 (U1 et U2).

<sup>230</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée, itération #1.

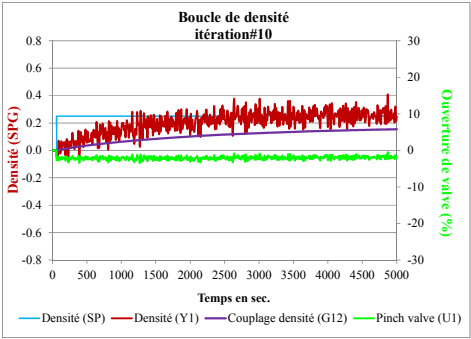


Figure-A VI-59 : Référence<sup>231</sup>

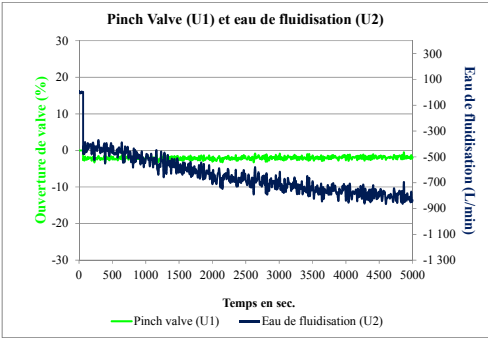


Figure-A VI -60 : Référence<sup>232</sup>

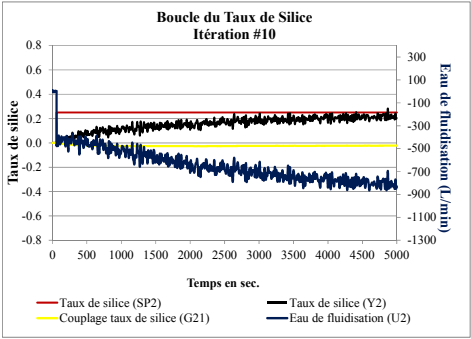


Figure-A VI -61 : Référence<sup>233</sup>

<sup>231</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée, itération #10.

<sup>232</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée, itération #10 (U1 et U2).

<sup>233</sup> Poursuite de la boucle de densité et de la boucle du taux de silice, décentralisée, itération #10.

## ANNEXE VII

### FIGURES DES FONCTIONS DE DÉSIRABILITÉ

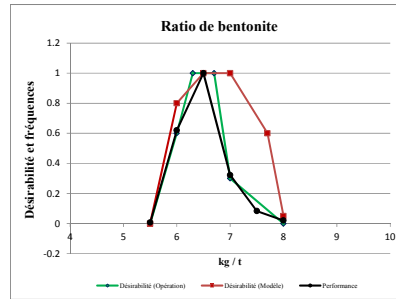


Figure-A VII-1 : Référence<sup>234</sup>

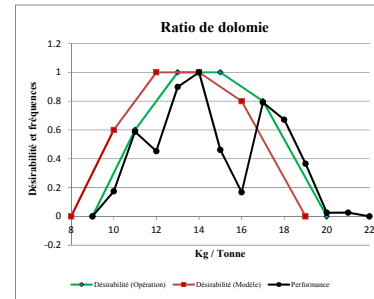


Figure-A VII-2 : Référence<sup>235</sup>

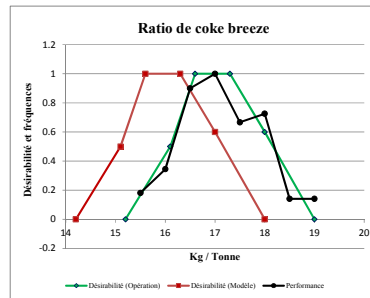


Figure-A VII-3 : Référence<sup>236</sup>

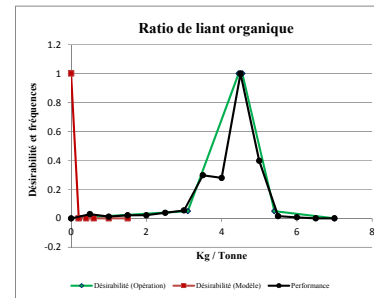


Figure-A VII-4 : Référence<sup>237</sup>

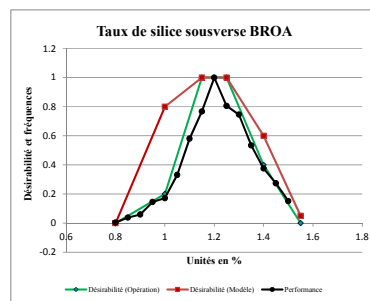


Figure-A VII-5 : Référence<sup>238</sup>

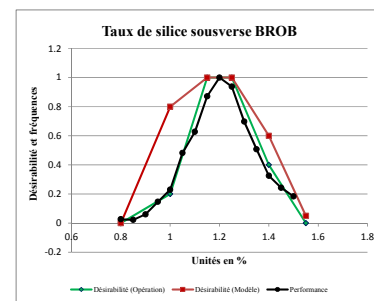


Figure-A VII-6 : Référence<sup>239</sup>

<sup>234</sup> Désirabilité du ratio de bentonite.

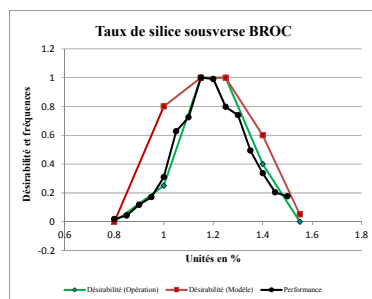
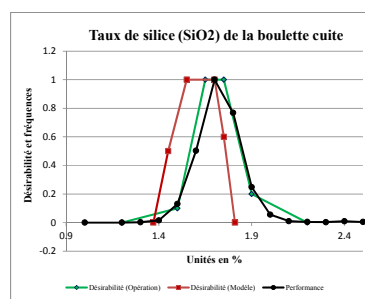
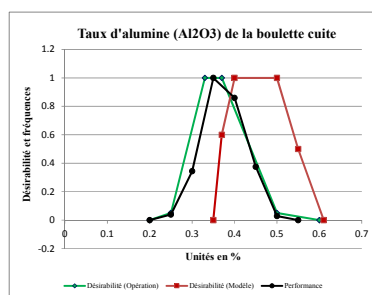
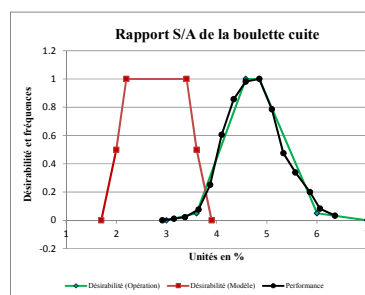
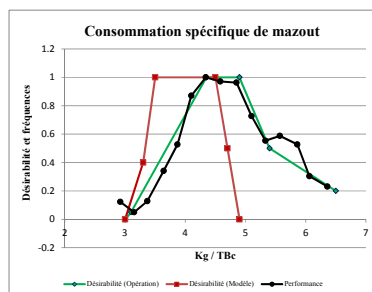
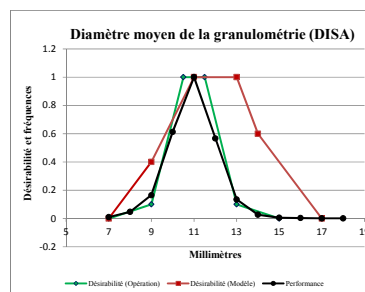
<sup>235</sup> Désirabilité du ratio de dolomie.

<sup>236</sup> Désirabilité du ratio de coke breeze.

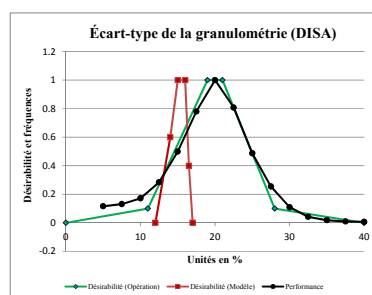
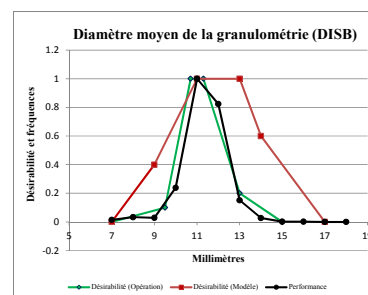
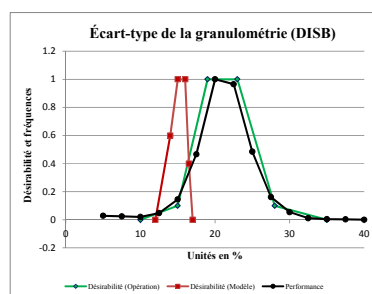
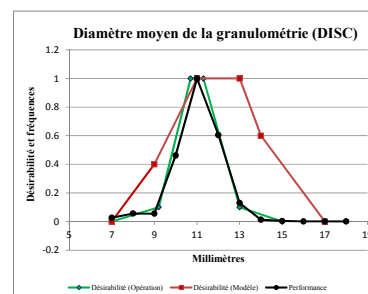
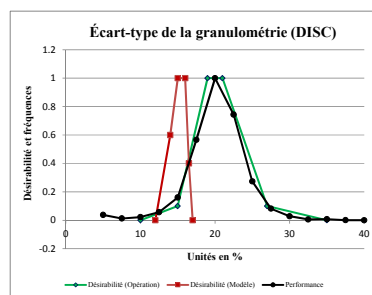
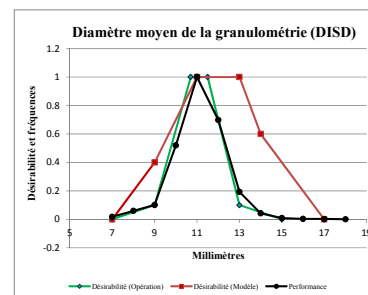
<sup>237</sup> Désirabilité du ratio de liant organique.

<sup>238</sup> Désirabilité du taux de silice à la sousverse du broyeur A.

<sup>239</sup> Désirabilité du taux de silice à la sousverse du broyeur B.

Figure-A VII-7 : Référence<sup>240</sup>Figure-A VII-8 : Référence<sup>241</sup>Figure-A VII-9 : Référence<sup>242</sup>Figure-A VII-10 : Référence<sup>243</sup>Figure-A VII-11 : Référence<sup>244</sup>Figure-A VII-12 : Référence<sup>245</sup><sup>240</sup> Désirabilité du taux de silice à la sousverse du broyeur C.<sup>241</sup> Désirabilité du taux de silice (SiO<sub>2</sub>) de la boulette cuite.<sup>242</sup> Désirabilité du taux d'alumine (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) de la boulette cuite.<sup>243</sup> Désirabilité du rapport S/A de la boulette cuite.<sup>244</sup> Désirabilité de la consommation spécifique du mazout.<sup>245</sup> Désirabilité du diamètre moyen de la granulométrie du disque A.



Figure-A VII-13 : Référence<sup>246</sup>Figure-A VII-14 : Référence<sup>247</sup>Figure-A VII-15 : Référence<sup>248</sup>Figure-A VII-16 : Référence<sup>249</sup>Figure-A VII-17 : Référence<sup>250</sup>Figure-A VII-18 : Référence<sup>251</sup><sup>246</sup> Désirabilité de l'écart-type de la granulométrie du disque A.<sup>247</sup> Désirabilité du diamètre moyen de la granulométrie du disque B.<sup>248</sup> Désirabilité de l'écart-type de la granulométrie du disque B.<sup>249</sup> Désirabilité du diamètre moyen de la granulométrie du disque C.<sup>250</sup> Désirabilité de l'écart-type de la granulométrie du disque C.<sup>251</sup> Désirabilité du diamètre moyen de la granulométrie du disque D.

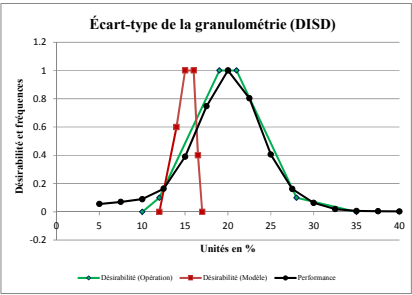


Figure-A VII-19 : Référence<sup>252</sup>

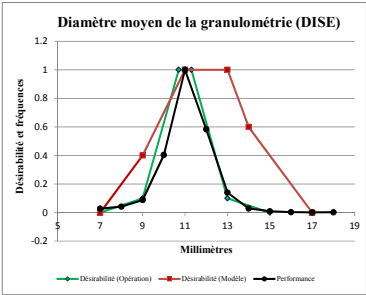


Figure-A VII-20 : Référence<sup>253</sup>

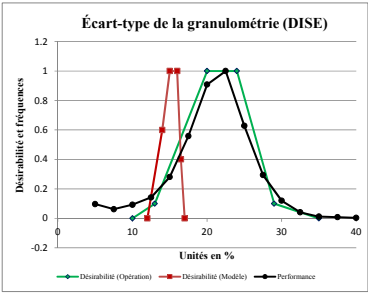


Figure-A VII-21 : Référence<sup>254</sup>

<sup>252</sup> Désirabilité de l'écart-type de la granulométrie du disque D.

<sup>253</sup> Désirabilité du diamètre moyen de la granulométrie du disque E.

<sup>254</sup> Désirabilité de l'écart-type de la granulométrie du disque E.

Tableau-A VII-1 : Modèles de désirabilité des variables, du classificateur à la fournaise

Variables	Z4 <sup>255</sup>	Z4 <sup>256</sup>	Z2 <sup>257</sup>	Z2 <sup>258</sup>	Z2 <sup>259</sup>	Z3 <sup>260</sup>	Z3 <sup>261</sup>	Z5 <sup>262</sup>	Z5 <sup>263</sup>
Ratio bentonite	1.6	-8.8	0.4	-1.6	1	-0.57	5.0	-1.83	14.72
Ratio dolomie	0.3	-2.4	0.2	-1.4	1	-0.1	2.4	-0.27	5.07
Ratio coke breeze	0.56	-7.89	1.0	-14.6	1	-0.57	10.31	-0.6	10.8
Ratio liant organique	-5.0	1.0	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.	N.A.
Taux de silice sousverse A	4.0	-3.2	1.33	-0.53	1	-2.67	4.33	-3.67	5.73
Taux de silice sousverse B	4.0	-3.2	1.33	-0.53	1	-2.67	4.33	-3.67	5.73
Taux de silice sousverse C	4.0	-3.2	1.33	-0.53	1	-2.67	4.33	-3.67	5.73
Taux de silice boulettes cuites	6.25	-8.56	5.0	-6.75	1	-8.0	14.60	-10.0	18.1
Taux d'alumine boulettes cuites	30.0	-10.5	13.33	-4.33	1	-10.0	6.0	-8.33	5.08
Rapport S/A boulettes cuites	1.67	-2.83	2.5	-4.5	1	-2.5	9.5	-1.67	6.5
Consommation spécifique de mazout	1.33	-4.0	3.0	-9.5	1	-2.5	12.25	-2.5	12.25
Diamètre moyen DISA	0.2	-1.4	0.3	-2.3	1	-0.4	6.2	-0.2	3.4
Écart-type DISA	0.3	-3.6	0.4	-5.0	1	-1.2	20.2	-0.8	13.6
Diamètre moyen DISB	0.2	-1.4	0.3	-2.3	1	-0.4	6.2	-0.2	3.4
Écart-type DISB	0.3	-3.6	0.4	-5.0	1	-1.2	20.2	-0.8	13.6
Diamètre moyen DISC	0.2	-1.4	0.3	-2.3	1	-0.4	6.2	-0.2	3.4
Écart-type DISC	0.3	-3.6	0.4	-5.0	1	-1.2	20.2	-0.8	13.6
Diamètre moyen DISD	0.2	-1.4	0.3	-2.3	1	-0.4	6.2	-0.2	3.4
Écart-type DISD	0.3	-3.6	0.4	-5.0	1	-1.2	20.2	-0.8	13.6
Diamètre moyen DISE	0.2	-1.4	0.3	-2.3	1	-0.4	6.2	-0.2	3.4
Écart-type DISE	0.3	-3.6	0.4	-5.0	1	-1.2	20.2	-0.8	13.6

<sup>255</sup> Zone 4 définie par  $-\infty \leq y_i \leq LI$ , pente de l'équation du premier ordre.

<sup>256</sup> Zone 4 définie par  $-\infty \leq y_i \leq LI$ , ordonnée à l'origine de l'équation du premier ordre.

<sup>257</sup> Zone 2 définie par  $LI \leq y_i \leq LTI$ , pente de l'équation du premier ordre.

<sup>258</sup> Zone 2 définie par  $LI \leq y_i \leq LTI$ , ordonnée à l'origine de l'équation du premier ordre.

<sup>259</sup> Zone 1 définie par  $LTI \leq y_i \leq LTS$ , valeur de "1".

<sup>260</sup> Zone 3 définie par  $LTS \leq y_i \leq LS$ , pente de l'équation du premier ordre.

<sup>261</sup> Zone 3 définie par  $LTS \leq y_i \leq LS$ , ordonnée à l'origine de l'équation du premier ordre.

<sup>262</sup> Zone 5 définie par  $LS \leq y_i \leq +\infty$ , pente de l'équation du premier ordre.

<sup>263</sup> Zone 5 définie par  $LS \leq y_i \leq +\infty$ , ordonnée à l'origine de l'équation du premier ordre.



## ANNEXE VIII

### SIMULATEUR DU BILAN ÉCONOMIQUE

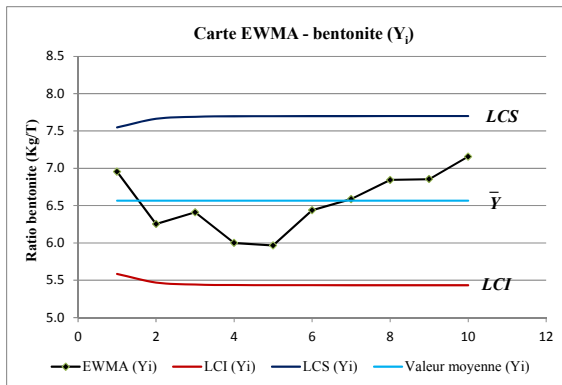


Figure-A VIII-1 : Référence<sup>264</sup>

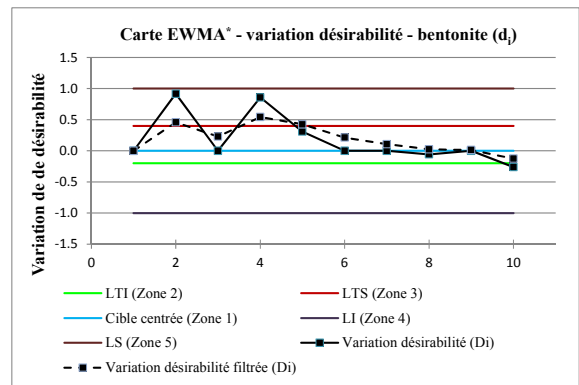


Figure-A VIII-2 : Référence<sup>265</sup>

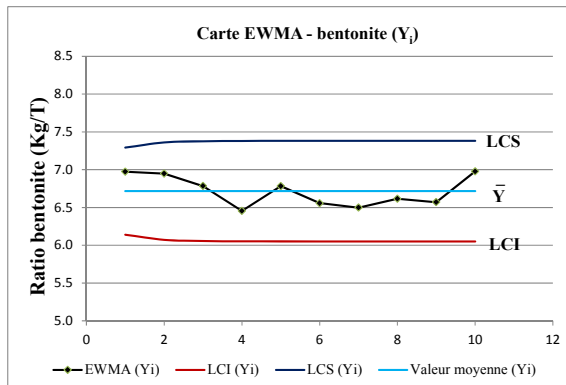


Figure-A VIII-3 : Référence<sup>266</sup>

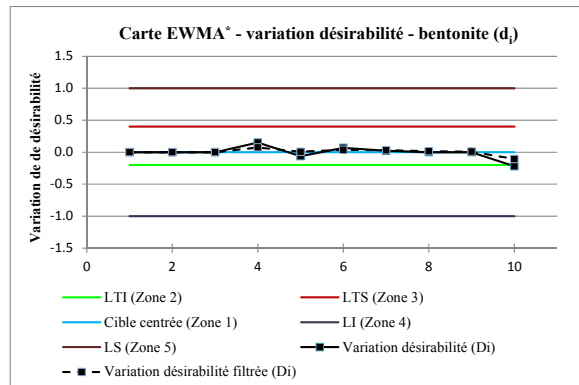


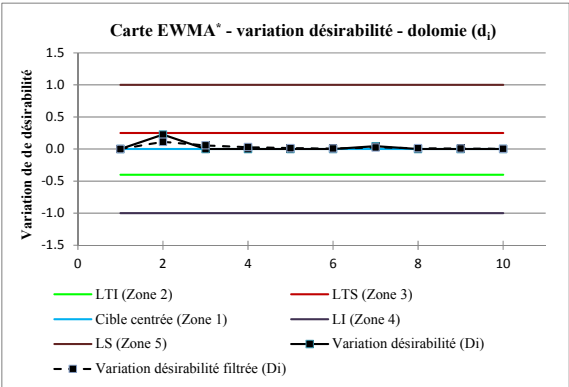
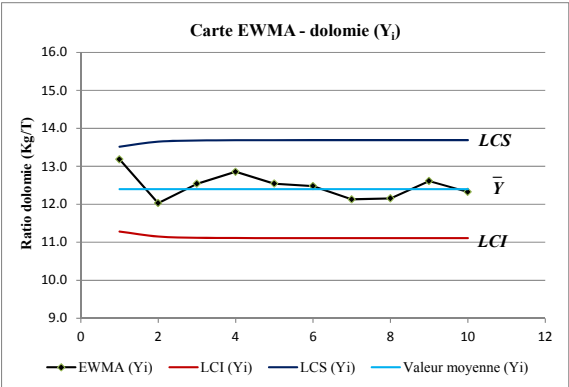
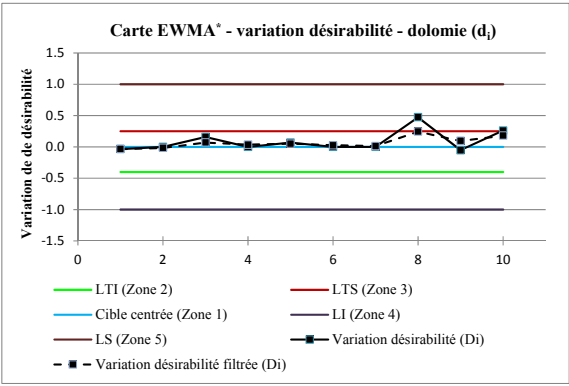
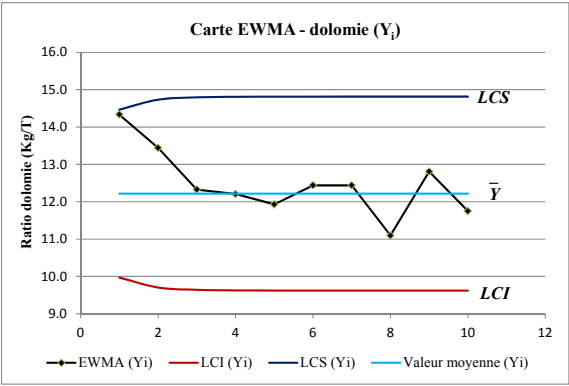
Figure-A VIII-4 : Référence<sup>267</sup>

<sup>264</sup> Carte EWMA de la bentonite, régime transitoire.

<sup>265</sup> Carte EWMA (détection) de la bentonite, régime transitoire.

<sup>266</sup> Carte EWMA de la bentonite, régime établi.

<sup>267</sup> Carte EWMA (détection) de la bentonite, régime établi.

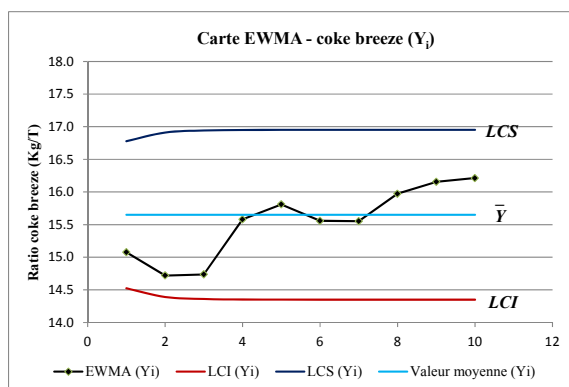
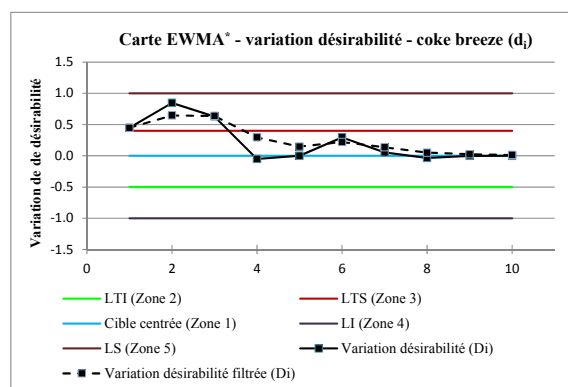
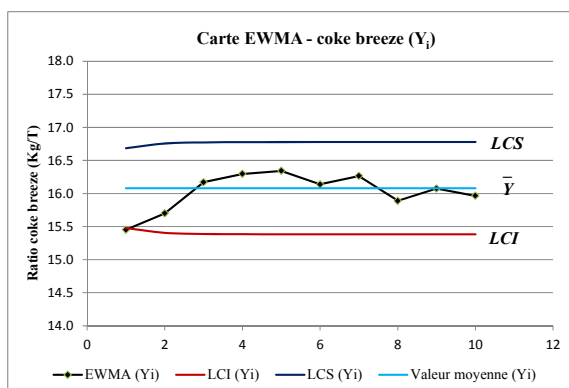
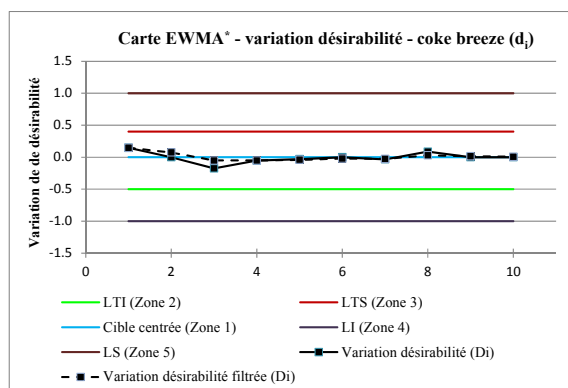


<sup>268</sup> Carte EWMA de la dolomie, régime transitoire.

<sup>269</sup> Carte EWMA (détection) de la dolomie, régime transitoire.

<sup>270</sup> Carte EWMA de la dolomie, régime établi.

<sup>271</sup> Carte EWMA (détection) de la dolomie, régime établi.

Figure-A VIII-9 : Référence<sup>272</sup>Figure-A VIII-10 : Référence<sup>273</sup>Figure-A VIII-11 : Référence<sup>274</sup>Figure-A VIII-12 : Référence<sup>275</sup><sup>272</sup> Carte EWMA du coke breeze, régime transitoire.<sup>273</sup> Carte EWMA (détection) du coke breeze, régime transitoire.<sup>274</sup> Carte EWMA du coke breeze, régime établi.<sup>275</sup> Carte EWMA (détection) du coke breeze, régime établi.

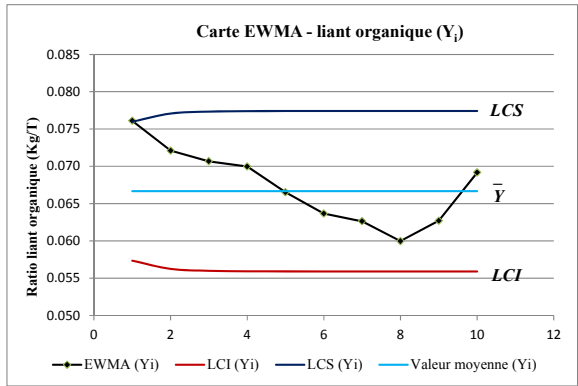


Figure-A VIII-13 : Référence<sup>276</sup>

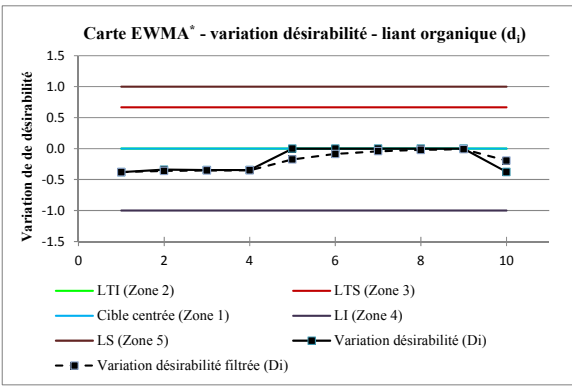


Figure-A VIII-14 : Référence<sup>277</sup>

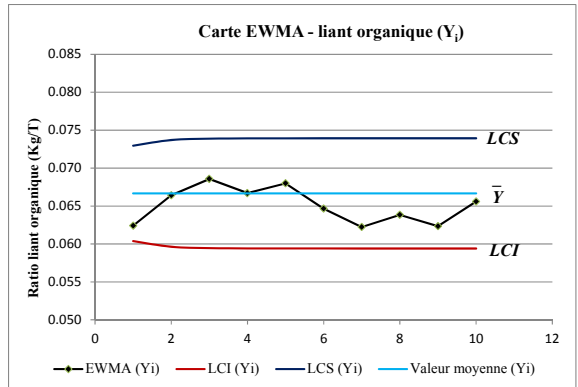


Figure-A VIII-15 : Référence<sup>278</sup>

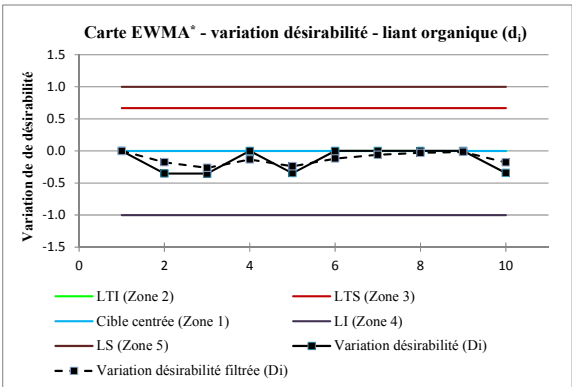
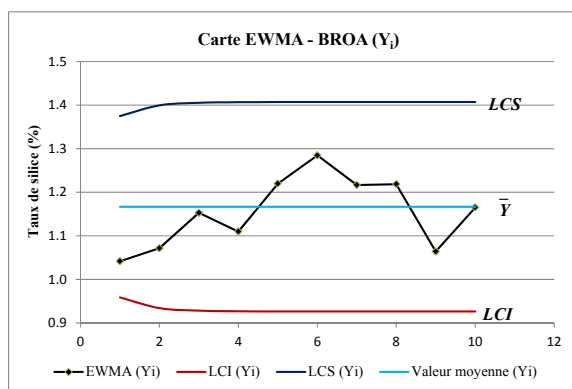
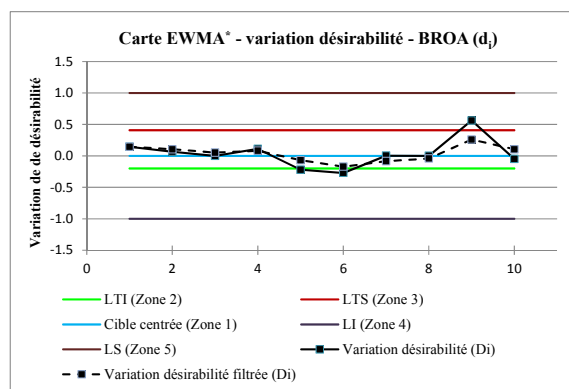
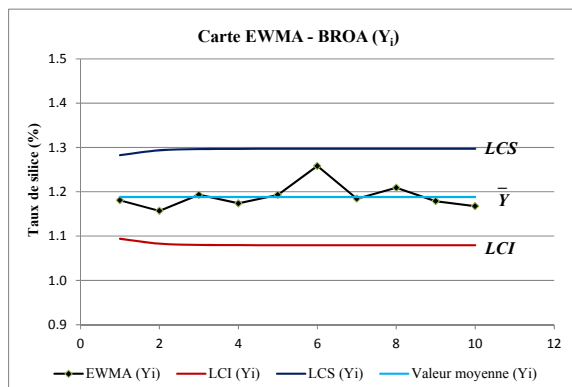
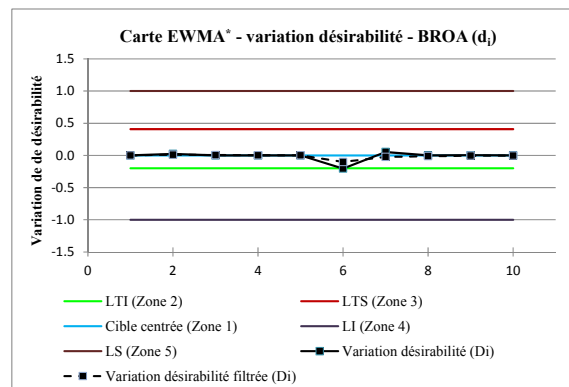


Figure-A VIII-16 : Référence<sup>279</sup>

<sup>276</sup> Carte EWMA du liant organique, régime transitoire.  
<sup>277</sup> Carte EWMA (détection) du liant organique, régime transitoire.  
<sup>278</sup> Carte EWMA du liant organique, régime établi.  
<sup>279</sup> Carte EWMA (détection) du liant organique, régime établi.



Figure-A VIII-17 : Référence<sup>280</sup>Figure-A VIII-18 : Référence<sup>281</sup>Figure-A VIII-19 : Référence<sup>282</sup>Figure-A VIII-20 : Référence<sup>283</sup><sup>280</sup> Carte EWMA du taux de silice du boyeur A, régime transitoire.<sup>281</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice du boyeur A, régime transitoire.<sup>282</sup> Carte EWMA du taux de silice du boyeur A, régime établi.<sup>283</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice du boyeur A, régime établi.

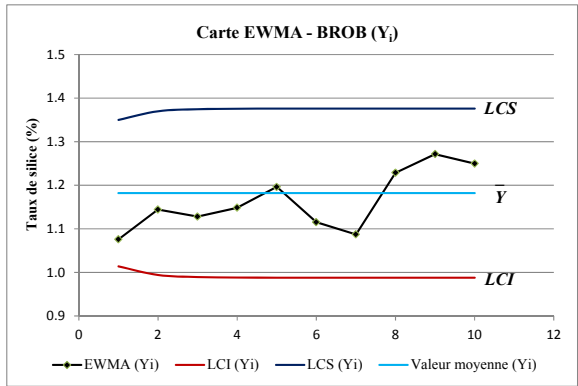


Figure-A VIII-21 : Référence<sup>284</sup>

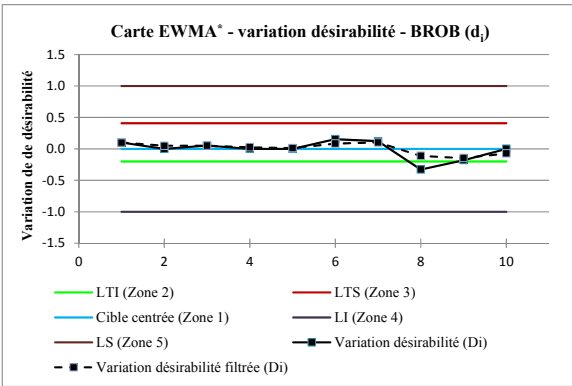


Figure-A VIII-22 : Référence<sup>285</sup>

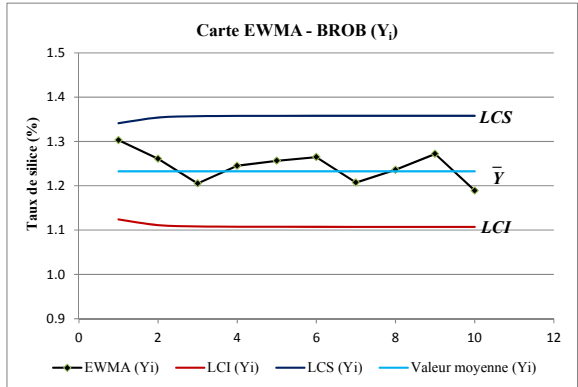


Figure-A VIII-23 : Référence<sup>286</sup>

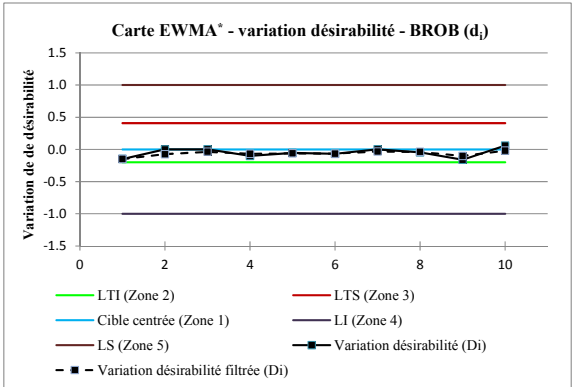


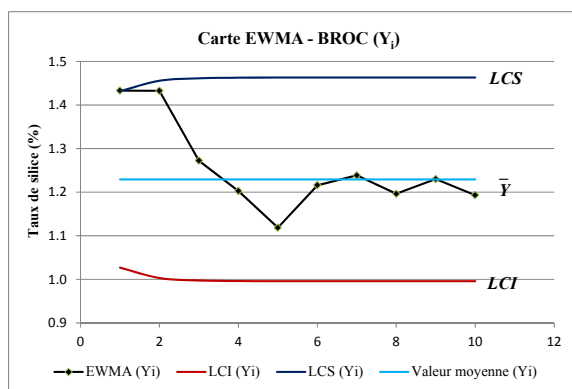
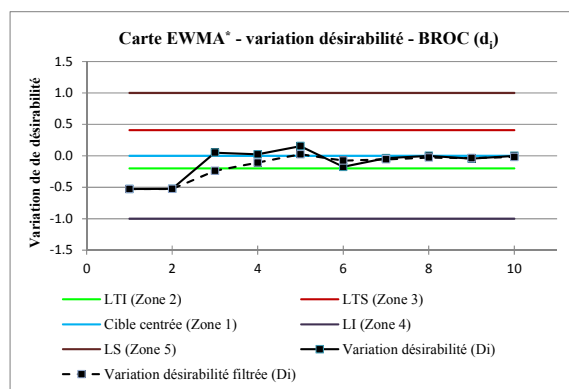
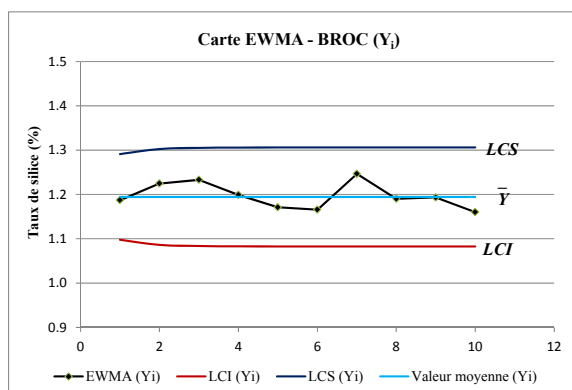
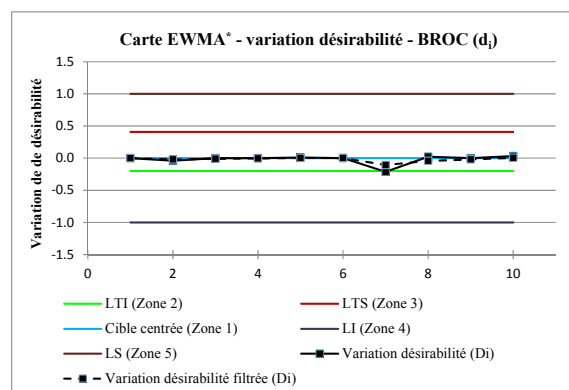
Figure-A VIII-24 : Référence<sup>287</sup>

<sup>284</sup> Carte EWMA du taux de silice du boyeur B, régime transitoire.

<sup>285</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice du boyeur B, régime transitoire.

<sup>286</sup> Carte EWMA du taux de silice du boyeur B, régime établi.

<sup>287</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice du boyeur B, régime établi.

Figure-A VIII-25 : Référence<sup>288</sup>Figure-A VIII-26 : Référence<sup>289</sup>Figure-A VIII-27 : Référence<sup>290</sup>Figure-A VIII-28 : Référence<sup>291</sup><sup>288</sup> Carte EWMA du taux de silice du boyeur C, régime transitoire.<sup>289</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice du boyeur C, régime transitoire.<sup>290</sup> Carte EWMA du taux de silice du boyeur C, régime établi.<sup>291</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice du boyeur C, régime établi.

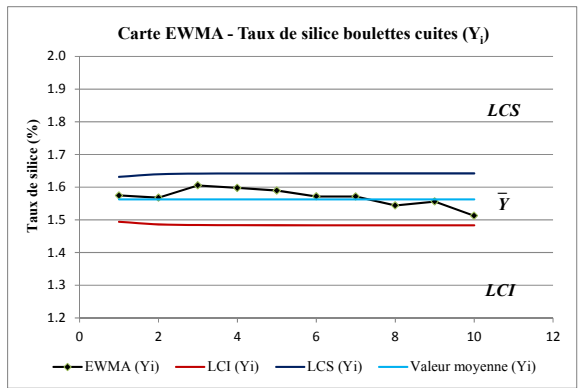


Figure-A VIII-29 : Référence<sup>292</sup>

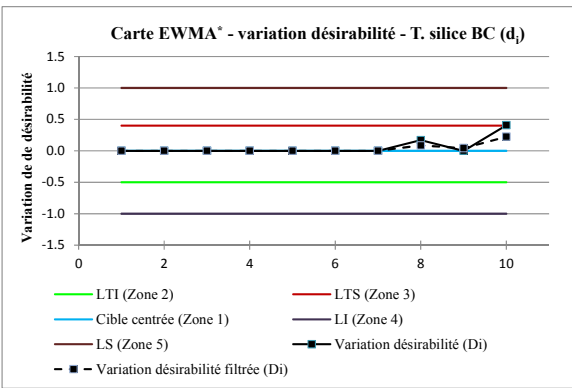


Figure-A VIII-30 : Référence<sup>293</sup>

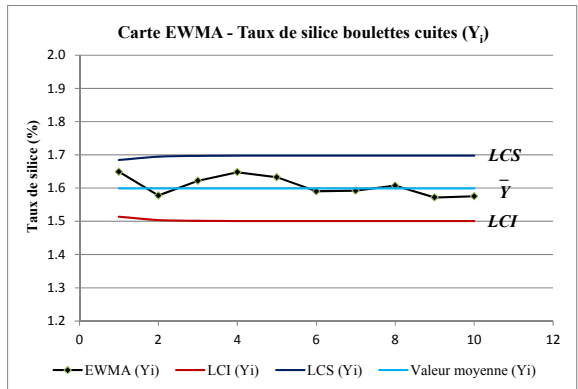


Figure-A VIII-31 : Référence<sup>294</sup>

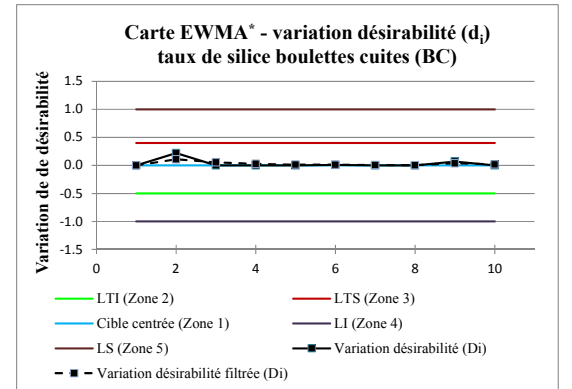
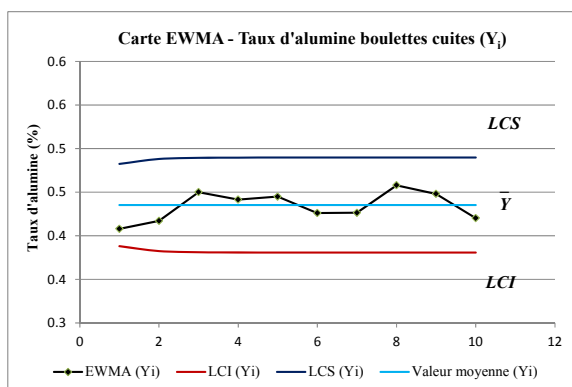
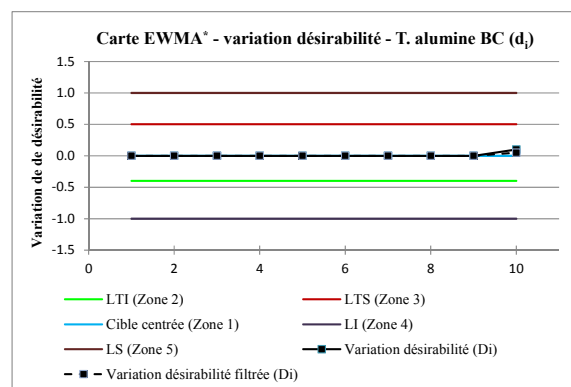
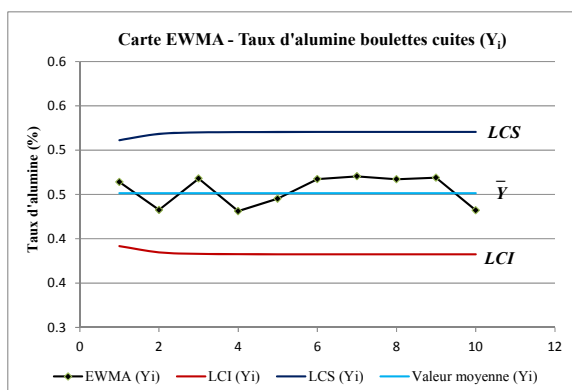
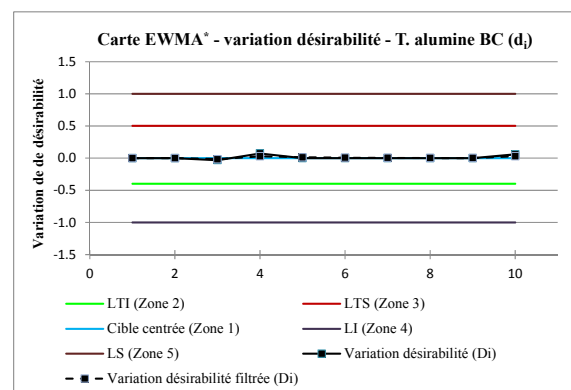


Figure-A VIII-32 : Référence<sup>295</sup>

<sup>292</sup> Carte EWMA du taux de silice des boulettes cuites, régime transitoire.  
<sup>293</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice des boulettes cuites, régime transitoire.  
<sup>294</sup> Carte EWMA du taux de silice des boulettes cuites, régime établi.  
<sup>295</sup> Carte EWMA (détection) du taux de silice des boulettes cuites, régime établi.

Figure-A VIII-33 : Référence<sup>296</sup>Figure-A VIII-34 : Référence<sup>297</sup>Figure-A VIII-35 : Référence<sup>298</sup>Figure-A VIII-36 : Référence<sup>299</sup><sup>296</sup> Carte EWMA du taux d'alumine des boulettes cuites, régime transitoire.<sup>297</sup> Carte EWMA (détection) du taux d'alumine des boulettes cuites, régime transitoire.<sup>298</sup> Carte EWMA du taux d'alumine des boulettes cuites, régime établi.<sup>299</sup> Carte EWMA (détection) du taux d'alumine des boulettes cuites, régime établi.

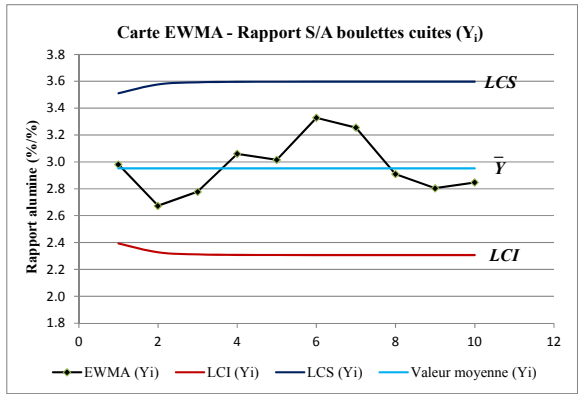


Figure-A VIII-37 : Référence<sup>300</sup>

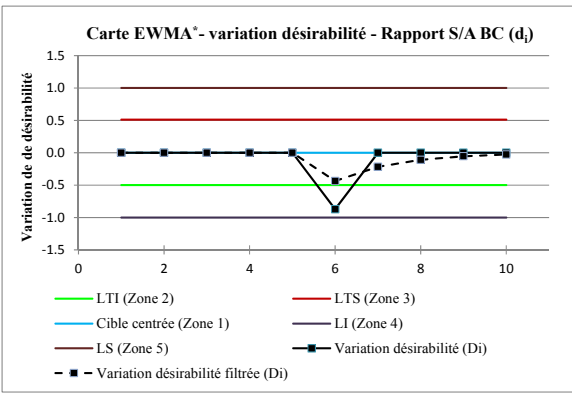


Figure-A VIII-38 : Référence<sup>301</sup>

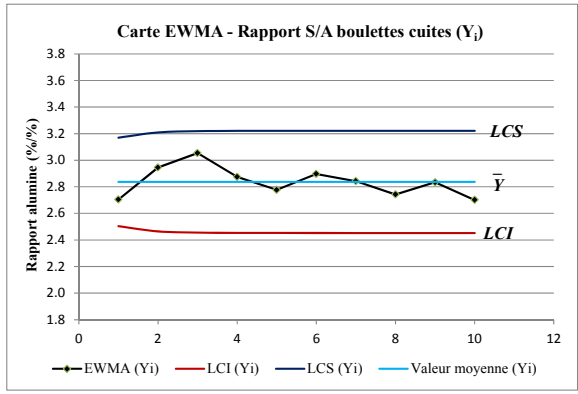


Figure-A VIII-39 : Référence<sup>302</sup>

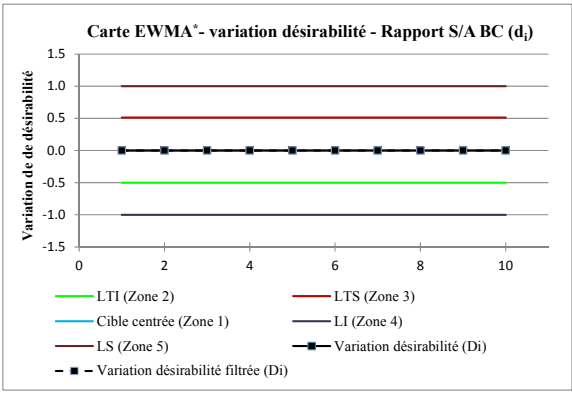
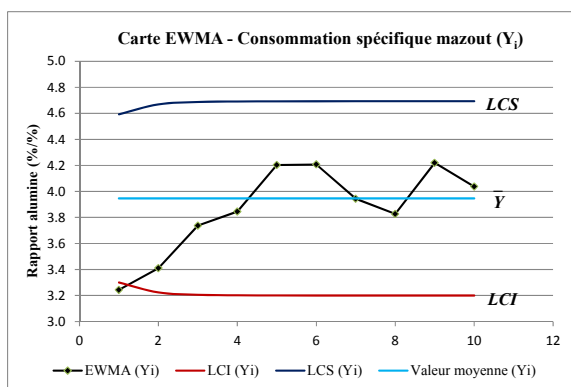
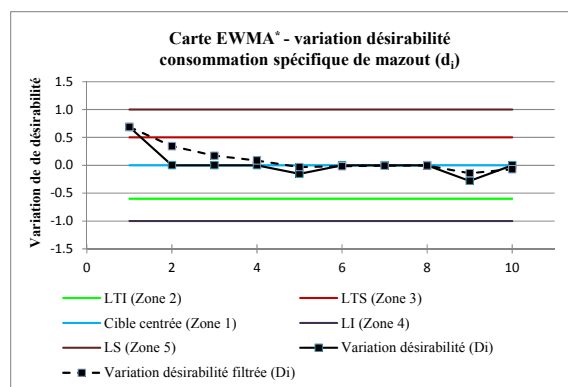
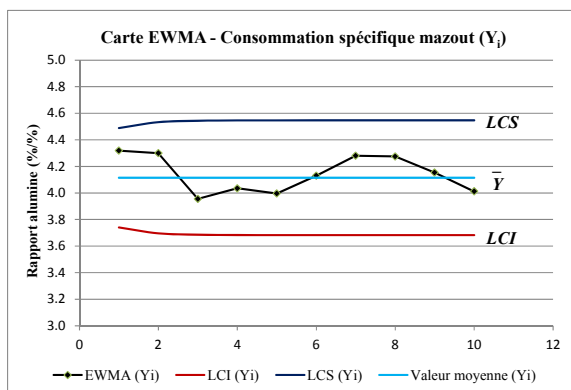
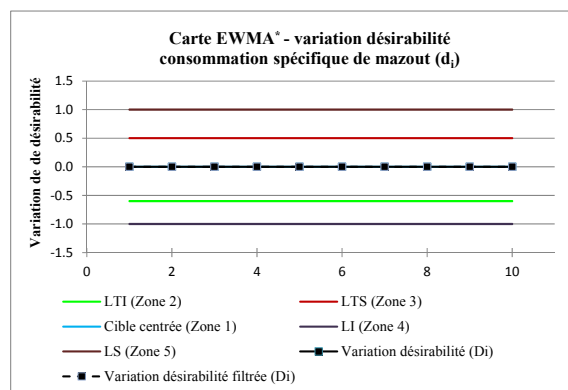


Figure-A VIII-40 : Référence<sup>303</sup>

<sup>300</sup> Carte EWMA du rapport S/A des boulettes cuites, régime transitoire.  
<sup>301</sup> Carte EWMA (détection) du rapport S/A des boulettes cuites, régime transitoire.  
<sup>302</sup> Carte EWMA du rapport S/A des boulettes cuites, régime établi.  
<sup>303</sup> Carte EWMA (détection) du rapport S/A des boulettes cuites, régime établi.

Figure-A VIII-41 : Référence<sup>304</sup>Figure-A VIII-42 : Référence<sup>305</sup>Figure-A VIII-43 : Référence<sup>306</sup>Figure-A VIII-44 : Référence<sup>307</sup><sup>304</sup> Carte EWMA de la consommation spécifique de mazout, régime transitoire.<sup>305</sup> Carte EWMA (détection) de la consommation spécifique de mazout, régime transitoire.<sup>306</sup> Carte EWMA de la consommation spécifique de mazout, régime établi.<sup>307</sup> Carte EWMA (détection) de la consommation spécifique de mazout, régime établi.

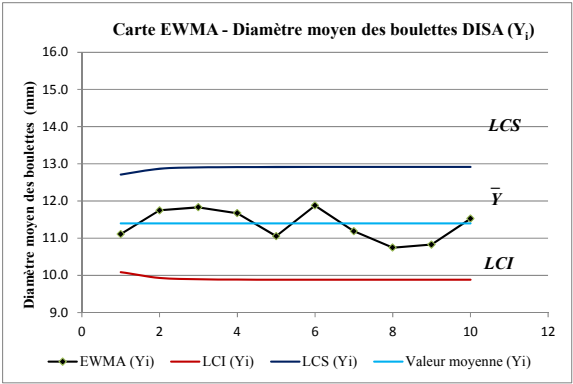


Figure-A VIII-45 : Référence<sup>308</sup>

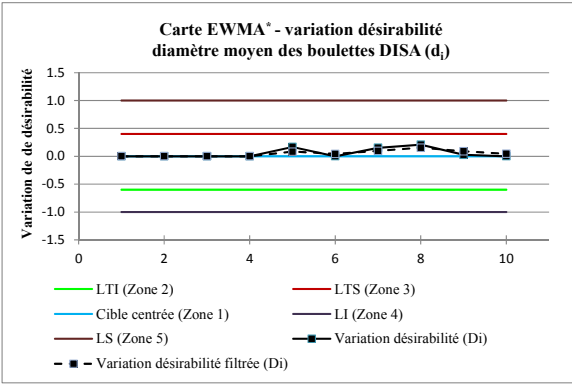


Figure-A VIII-46 : Référence<sup>309</sup>

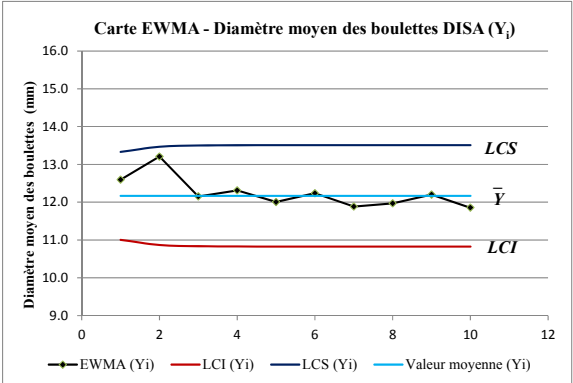


Figure-A VIII-47 : Référence<sup>310</sup>

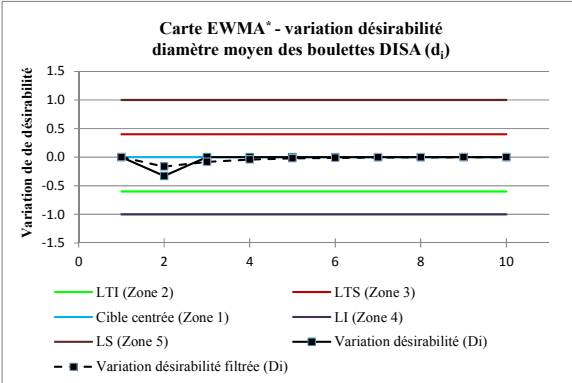


Figure-A VIII-48 : Référence<sup>311</sup>

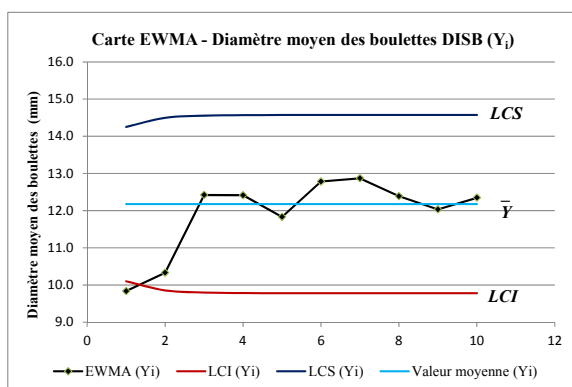
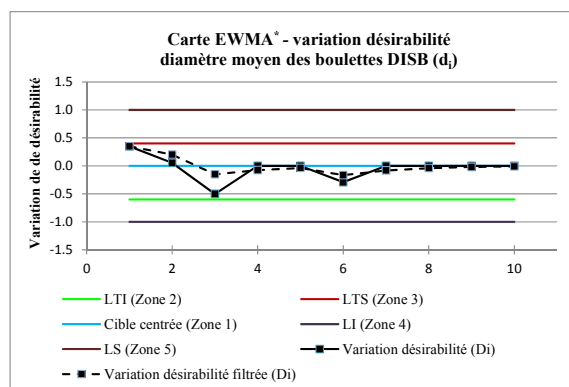
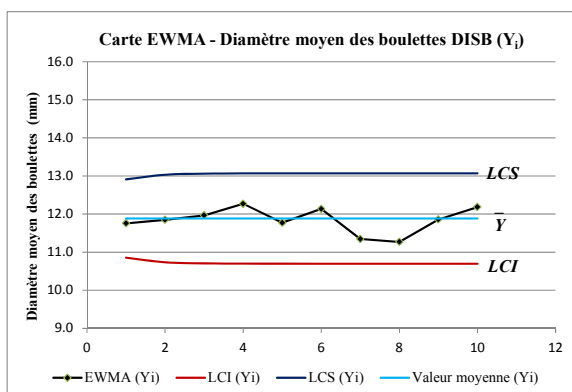
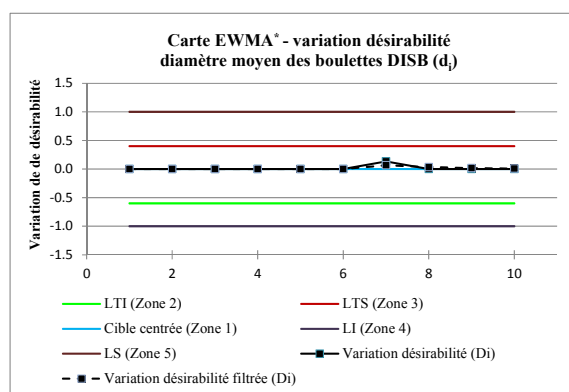
<sup>308</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque A, régime transitoire.

<sup>309</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque A, régime transitoire.

<sup>310</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque A, régime établi.

<sup>311</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque A, régime établi.



Figure-A VIII-49 : Référence<sup>312</sup>Figure-A VIII-50 : Référence<sup>313</sup>Figure-A VIII-51 : Référence<sup>314</sup>Figure-A VIII-52 : Référence<sup>315</sup>

<sup>312</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque B, régime transitoire.

<sup>313</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque B, régime transitoire.

<sup>314</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque B, régime établi.

<sup>315</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque B, régime établi.

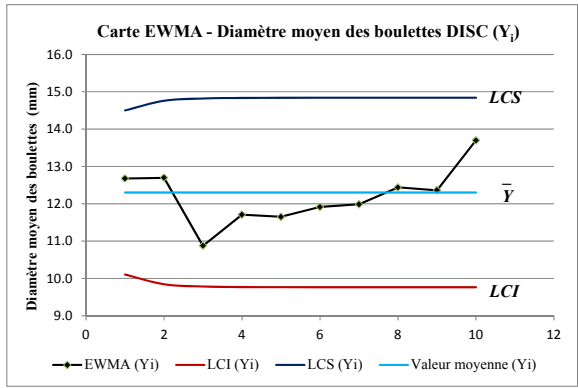


Figure-A VIII-53 : Référence<sup>316</sup>

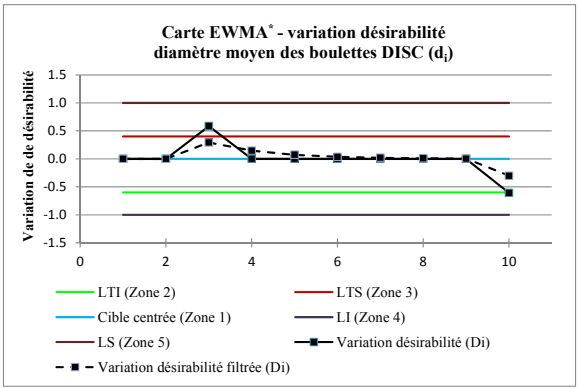


Figure-A VIII-54 : Référence<sup>317</sup>

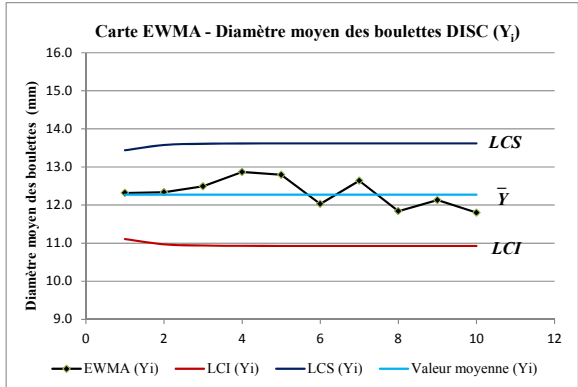


Figure-A VIII-55 : Référence<sup>318</sup>

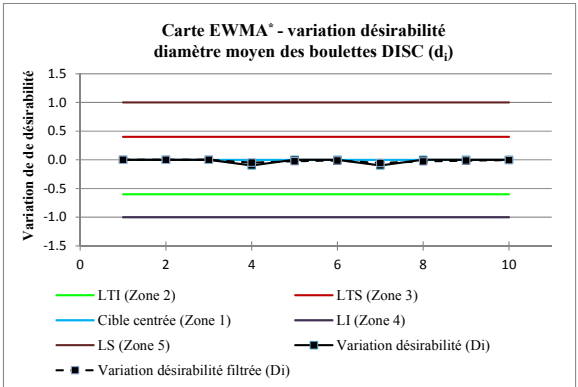


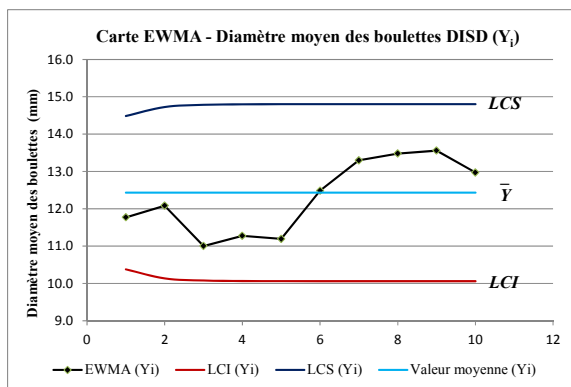
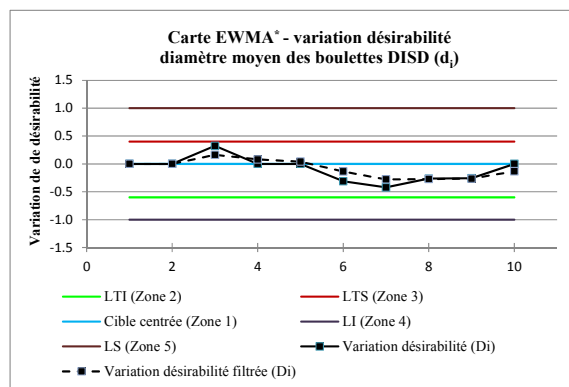
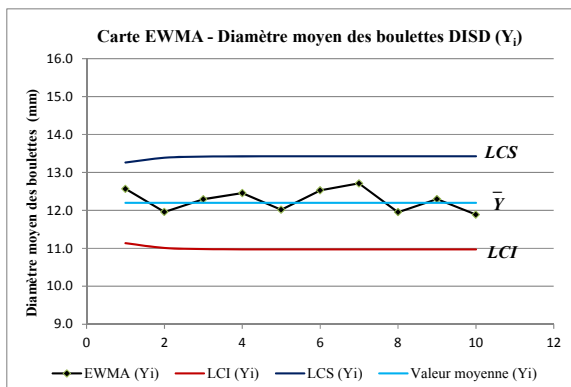
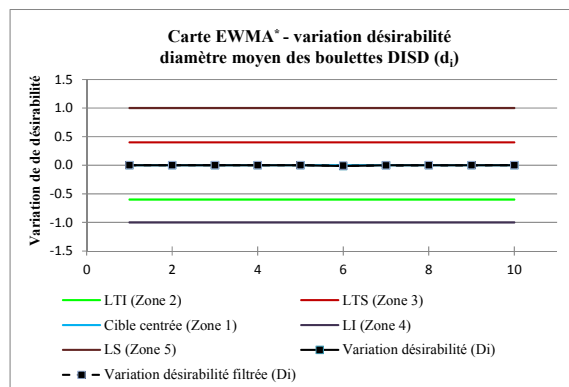
Figure-A VIII-56 : Référence<sup>319</sup>

<sup>316</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque C, régime transitoire.

<sup>317</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque C, régime transitoire.

<sup>318</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque C, régime établi.

<sup>319</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque C, régime établi.

Figure-A VIII-57 : Référence<sup>320</sup>Figure-A VIII-58 : Référence<sup>321</sup>Figure-A VIII-59 : Référence<sup>322</sup>Figure-A VIII-60 : Référence<sup>323</sup>

<sup>320</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque D, régime transitoire.

<sup>321</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque D, régime transitoire.

<sup>322</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque D, régime établi.

<sup>323</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque D, régime établi.

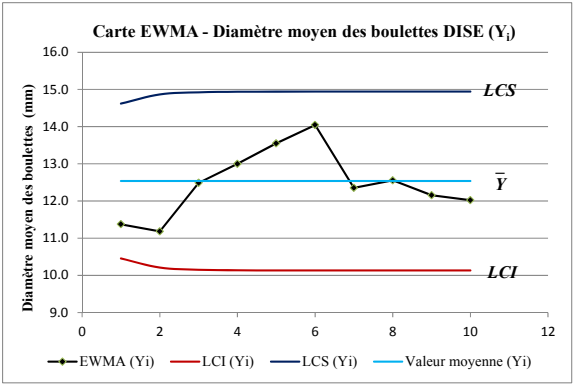


Figure-A VIII-61 : Référence<sup>324</sup>

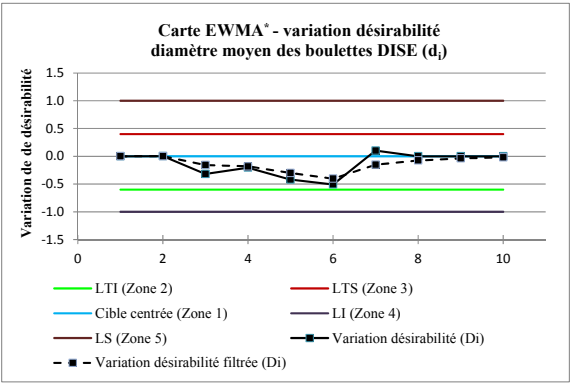


Figure-A VIII-62 : Référence<sup>325</sup>

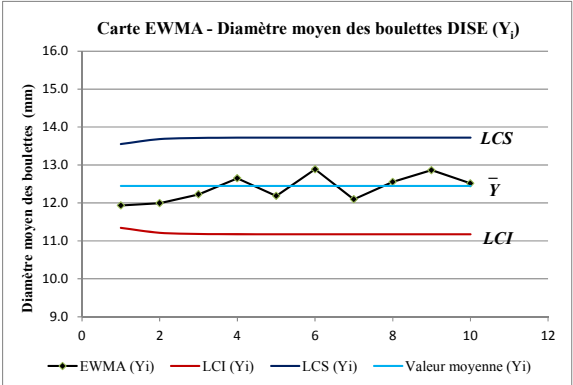


Figure-A VIII-63 : Référence<sup>326</sup>

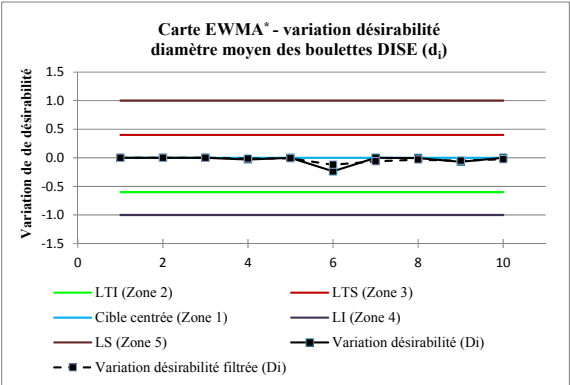


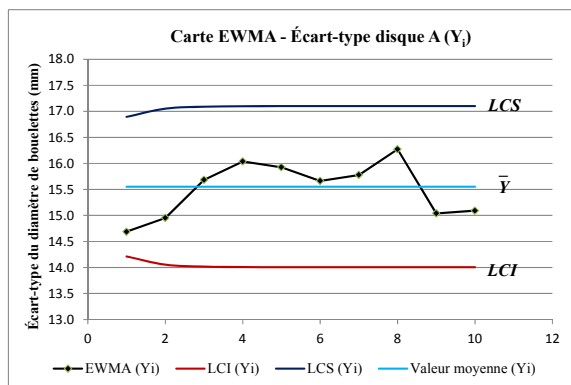
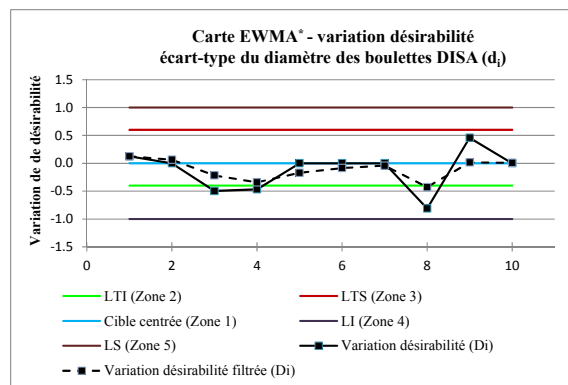
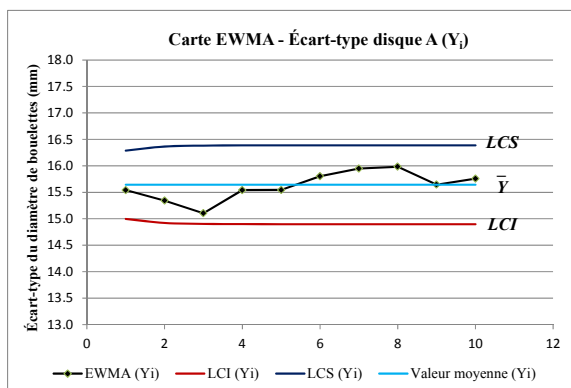
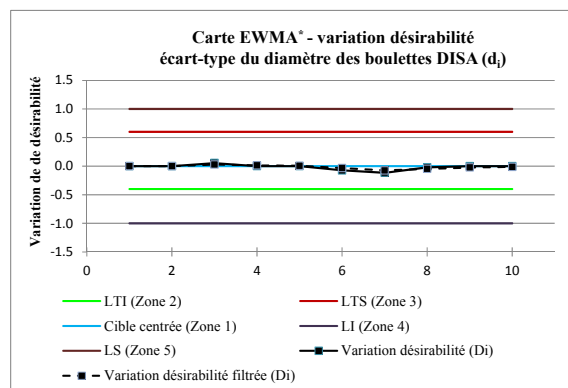
Figure-A VIII-64 : Référence<sup>327</sup>

<sup>324</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque E, régime transitoire.

<sup>325</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque E, régime transitoire.

<sup>326</sup> Carte EWMA du diamètre moyen des boulettes du disque E, régime établi.

<sup>327</sup> Carte EWMA (détection) du diamètre moyen des boulettes du disque E, régime établi.

Figure-A VIII-65 : Référence<sup>328</sup>Figure-A VIII-66 : Référence<sup>329</sup>Figure-A VIII-67 : Référence<sup>330</sup>Figure-A VIII-68 : Référence<sup>331</sup><sup>328</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque A, régime transitoire.<sup>329</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque A, régime transitoire.<sup>330</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque A, régime établi.<sup>331</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque A, régime établi.

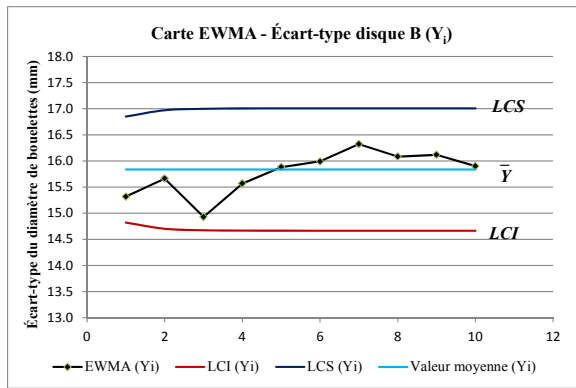


Figure-A VIII-69 : Référence<sup>332</sup>

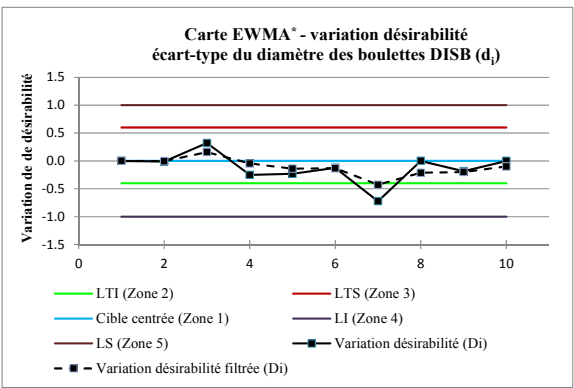


Figure-A VIII-70 : Référence<sup>333</sup>

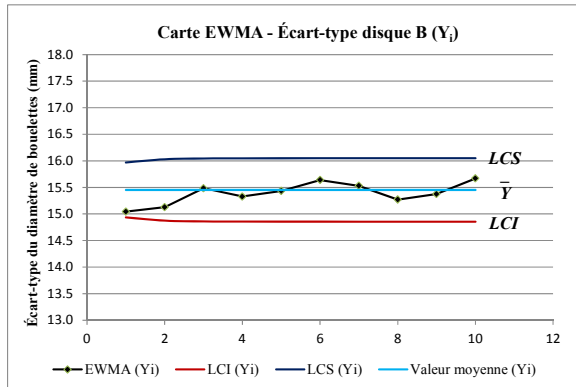


Figure-A VIII-71 : Référence<sup>334</sup>

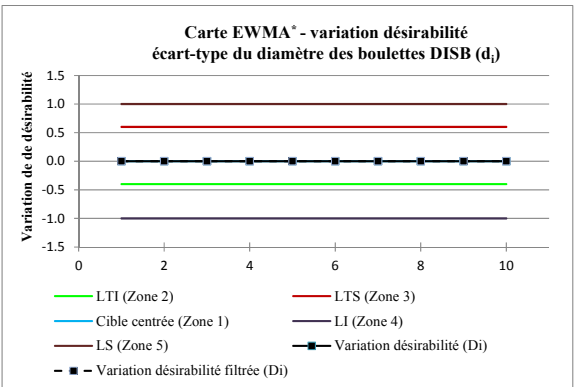
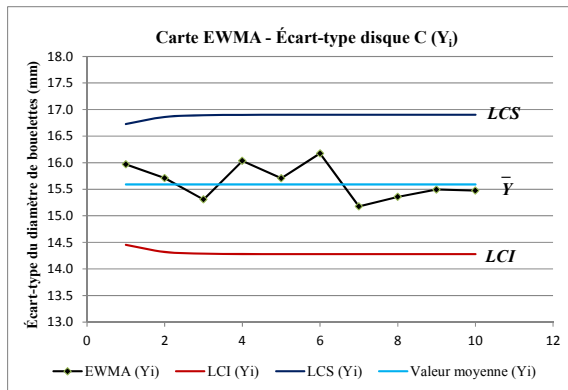
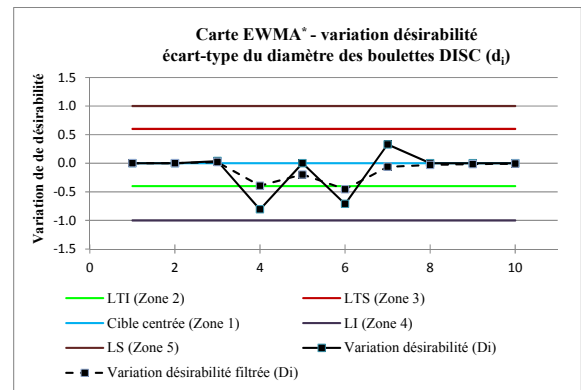
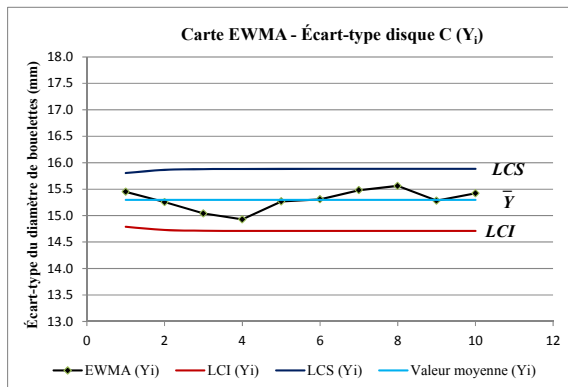
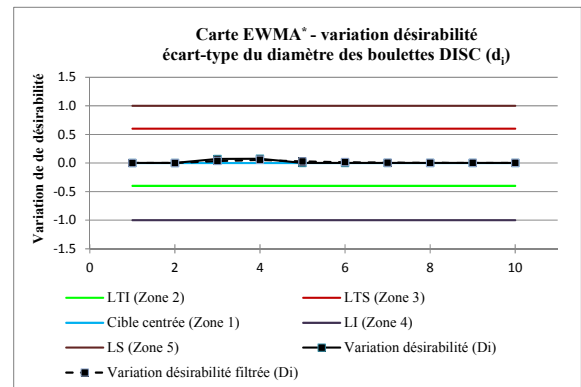


Figure-A VIII-72 : Référence<sup>335</sup>

<sup>332</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque B, régime transitoire.  
<sup>333</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque B, régime transitoire.  
<sup>334</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque B, régime établi.  
<sup>335</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque B, régime établi.

Figure-A VIII-73 : Référence<sup>336</sup>Figure-A VIII-74 : Référence<sup>337</sup>Figure-A VIII-75 : Référence<sup>338</sup>Figure-A VIII-76 : Référence<sup>339</sup><sup>336</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque C, régime transitoire.<sup>337</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque C, régime transitoire.<sup>338</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque C, régime établi.<sup>339</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque C, régime établi.

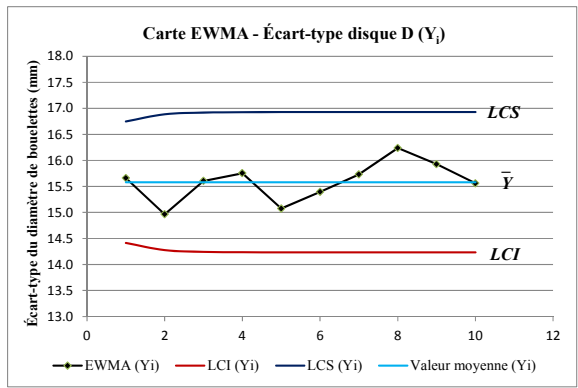


Figure-A VIII-77 : Référence<sup>340</sup>

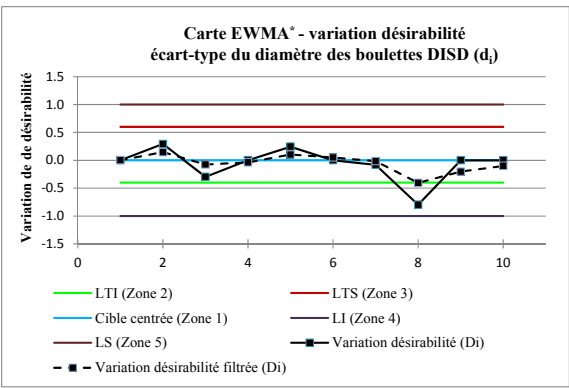


Figure-A VIII-78 : Référence<sup>341</sup>

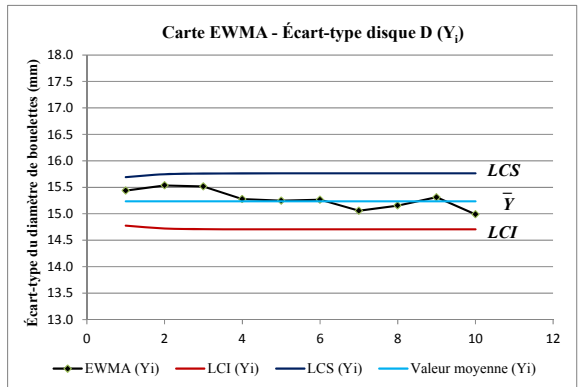


Figure-A VIII-79 : Référence<sup>342</sup>

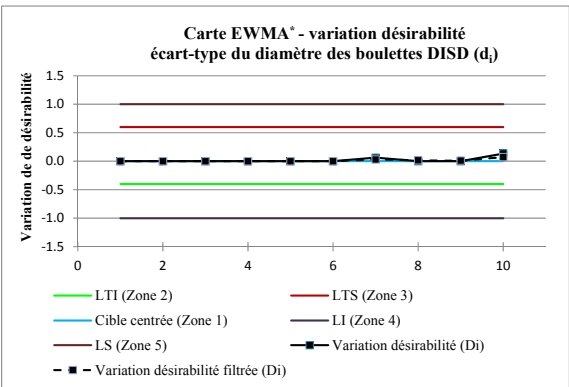


Figure-A VIII-80 : Référence<sup>343</sup>

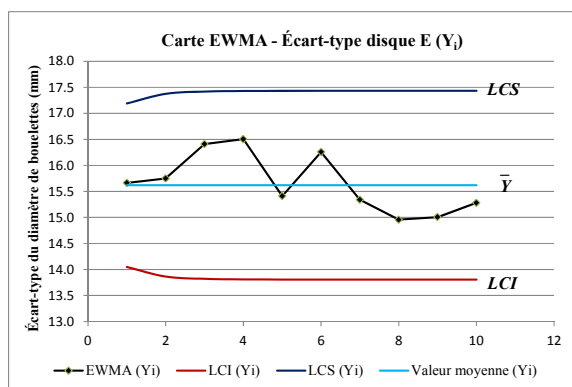
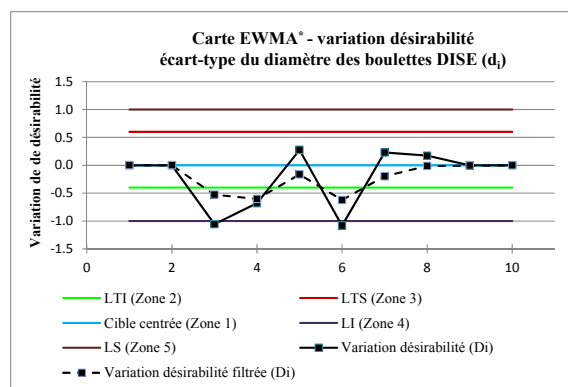
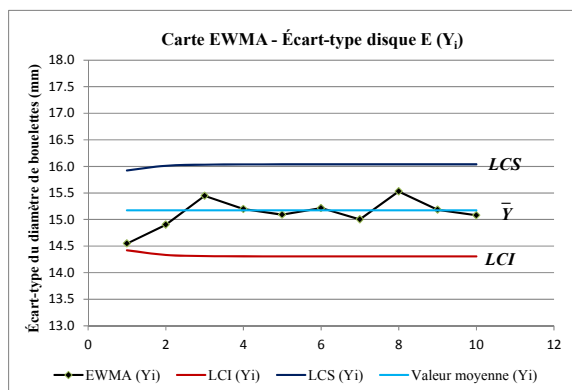
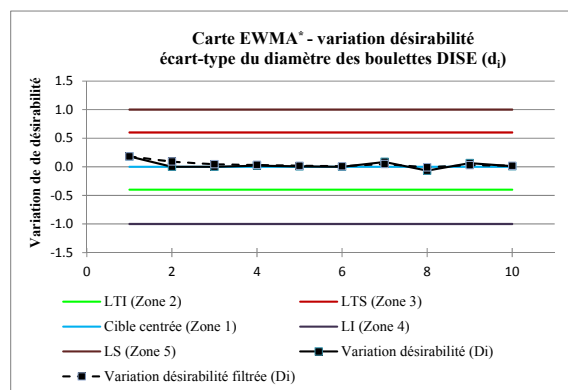
<sup>340</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque D, régime transitoire.

<sup>341</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque D, régime transitoire.

<sup>342</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque D, régime établi.

<sup>343</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque D, régime établi.



Figure-A VIII-81 : Référence<sup>344</sup>Figure-A VIII-82 : Référence<sup>345</sup>Figure-A VIII-83 : Référence<sup>346</sup>Figure-A VIII-84 : Référence<sup>347</sup><sup>344</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque E, régime transitoire.<sup>345</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque E, régime transitoire.<sup>346</sup> Carte EWMA de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque E, régime établi.<sup>347</sup> Carte EWMA (détection) de l'écart-type du diamètre des boulettes du disque E, régime établi.



## ANNEXE IX

### LISTE DES VARIABLES DU PROCÉDÉ

Le Tableau-AIX-1 présente la liste des variables qui ont été identifiées en tant que variables stratégiques, variables sous contrainte ou variables inférées.

Tableau-A IX-1 : Variables stratégiques du procédé de bouletage

Variables	Sec <sup>348</sup>	Sec <sup>349</sup>	Sec <sup>350</sup>	Sec <sup>351</sup>	Sec <sup>352</sup>	Sec <sup>353</sup>	Sec <sup>354</sup>
<b>Bilan</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Variabilité</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Pression</b>	X	X	X	X			X
<b>Pertes de charges</b>	X	X	X				X
<b>Débit massique</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Forces centrifuges</b>	X	X		X	X	X	
<b>Forces de gravité</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Forces de friction</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Densité</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Énergie de mouvement</b>	X	X		X	X	X	X
<b>Niveau</b>	X	X	X	X	X		X
<b>Charge circulante</b>	X	X			X	X	X
<b>Temps de séjour</b>	X	X	X	X	X	X	X
<b>Puissance</b>		X	X	X	X	X	X
<b>Rhéologie</b>		X					
<b>Viscosité</b>	X	X	X	X	X	X	
<b>Granulométrie</b>	X	X	X			X	X
<b>Vacuum</b>	X		X				X
<b>Vitesse rotationnelle</b>		X	X	X	X	X	
<b>Température</b>		X	X		X		X
<b>Humidité</b>			X	X	X	X	X
<b>Position</b>			X				X
<b>Énergie</b>	X	X	X	X	X	X	X

---

<sup>348</sup> Classification, séparation, démouillage.

<sup>349</sup> Broyage.

<sup>350</sup> Filtration.

<sup>351</sup> Mélange.

<sup>352</sup> Agglomération.

<sup>353</sup> Tamisage.

<sup>354</sup> Durcissement.



## LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abulnaga B., 2002. « *Slurry Systems Handbook* » .
- Arzate, A., O. Réglat et P.A. Tanguay. 2004. « *Determination of in-line process viscosity using static mixers* ». Flow measurement and instrumentation, vol. 15, no. 2, pp. 77-85.
- Bardin, M., P.C. Knight and J.P.K. Seville. 2004. « *On control of particle size distribution in granulation using high-shear mixers* ». Powder Technology, vol. 140, no. 3, pp. 169-175.
- Bazin, C., G.M. Payenzo, M. Desnoyers, C. Gosselin and G. G. Chevalier. 2011. « *Analysis and Modelling of the Operation of a Hydraulic Classifier for Iron Ore Concentrate* ». Paper Session Presented at the Physical Separation, Mineral Engineering Conferences, Falmouth, UK.
- Bazin, C. and P. Obiang. 2007. « *Should the slurry density in a grinding mill be adjusted as a function of grinding media size?* ». Minerals Engineering, vol. 20, no. 8, pp. 810-815.
- Bazin, C., C. Boudrias-Chapeleau, A. Bouajila. 2003a. « *Slurry rheology and grinding* ». Proceedings of the 35th Annual meeting of the Canadian Mineral Processors (CMP), Ottawa, Ontario, pp. 653-668, 2003.
- Bazin, C., S. Rochon et C. Gosselin. 2003b. « *Estimation of gas flow rates and pellet temperatures in an iron oxide induration furnace* ». Canadian metallurgical quarterly, vol. 42, no. 3, pp. 301-312.
- Benner, B.R. 1995. « *The effect of classifier efficiency on the grinding of taconite in a pilot-plant ball mill* ». SME Proceedings, vol. 68, pp. 1-16.

- Blatz, J., P. Miczajka, and D. Boysen, 2004. « *Mixing technology in the steel industry* ». 2nd international meeting on ironmaking and 1st international symposium on iron ore, Vitoria, Espirito Santo, Brazil, pp. 369-392.
- Bond, F.C. and W.L. Maxson. 1939. « *Grindability and grinding characteristics of ores* ». Transactions of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, Society of Mining Engineers of AIME, vol. 134, pp. 296-323.
- Brereton, R.G. 2006. « *Consequences of sample size, variable selection, and model validation and optimization, for predicting classification ability from analytical data* ». Trends in Analytical Chemistry, vol. 25, no. 11, pp. 1103-1111.
- Buters W., E. Keddeman et J. Regersen. 1993. « *Pellet bed temperature control at Hoogovens Ijmuiden and the effect of pellet quality* ». Proc. ICHEME - 5th International Symposium on Agglomeration, Brighton, UK, pp. 241-245, 1993.
- Caron, S., D. Roy and G. Paquet. 2000. « *SIMBOUL : a software for the simulation of the iron ore pellet induration process* ». Ironmaking Conference proceedings, pp. 439-444 (2000).
- Casali, A., G. Gonzalez, F. Torres, G. Vallebuona, L. Castelli and P. Gimenez. 1998. « *Particle size distribution soft-sensor for a grinding circuit* ». Powder Technology, vol. 99, no. 1, pp. 15-21.
- Chen, S. and Q. Chen. 1992. « *Achieving high density thickening of tailings with existing thickeners* ». Kuangye Gongcheng/Mining and Metallurgical Engineering **12** (Compendex): 30-30.
- Chen Xi-song, Z. Jun-yong, L. Shi-hua and L. Qi. 2007. « *Application of model predictive control in ball mill grinding circuit* ». Minerals Engineering, vol. 20, no. 11, pp. 1099-1108.

- Chenje, T.W., D.J. Simbi and E. Navara. 2003. « *Wear performance and cost effectiveness: a criterion for the selection of grinding media for wet milling in mineral processing operations* ». Minerals Engineering, vol. 16, pp. 1387-1390.
- Cleevely, S.T. 2003. « *Breaking up is not so hard to do. A new technique aims to reduce the worldwide electrical consumption by 1-2 % while halving current grinding costs* ». Materials World, vol. 11, no. 7, pp. 17-19.
- Cloete, F.L.D. and M.C. Coetzee. 1986. « *Calculating the minimum power required for complete suspension of solids in a mixer* ». Powder Technology, vol. 46, pp. 239-243.
- Cox C. and F.P. Traczyk. 2002. « *Design features and types of filtration equipment* ». Mineral processing plant design, practice, and control proceedings, Vancouver, BC, Canada, pp. 1342-1357.
- Crespo E.F. 2009. « *Kinetic Model for the Multi-Spigot Hydrosizer* ». Volume 22, Issue 15, December, Pages 1334–1343.
- Cross M. et P. Blot. 1998. « *Optimising iron ore pellet induration systems using process modeling* ». Proceeding ICSTI/ Iron Making Conference , Toronto, pp.955-963.
- Cross, M. and P. Blot. 1999. « *Optimizing the operation of straight-grate iron-ore pellet induration systems using process models* ». Metallurgical and materials transactions B, vol. 30B, no. 4, pp. 803-813.
- Das, A., B. Sarkar and S.P. Mehrotra. 2009. « *Prediction of separation performance of floatex density separator for processing fine coal particles* ». International Journal of Mineral Processing, 91, 41-49.
- Davis, R.A. and D.J. Englund. 2003. « *Model and simulation of a ported kiln for iron oxide pellet induration* ». Canadian journal of chemical engineering, vol. 81, pp. 86-93.

- Delgadillo, J.A., A. Lopez-Valdivieso and A. Tello. 2008. « *Optimization of a grinding and classification circuit of a magnetite ore processing plant through computer simulation* ». Minerals and Metallurgical Processing, vol. 25, no. 4, pp. 223-228.
- Del Villar, R. 2005. « *Compléments de minéralurgie (GMN-7008)* ». Québec : Université Laval. Chapitre. 2, p. 13,23.
- Derringer, G. and R. Suich. 1980. « *Simultaneous optimization of several response variables* ». Journal Quality Technology. 12, 214–219.
- Dickenson, C. 1992. « *Filters and filtration handbook* ». Oxford, UK : Elsevier advanced technology, 1992, 778 p.
- Donskoi E., S.P. Suthers, J.J. Campbell and T. Raynlyn. 2008. « *Modelling and optimization of hydrocyclone for iron ore fines beneficiation - using optical image analysis and iron ore texture classification* ». International Journal of Mineral Processing, vol. 87, no. 3-4, pp. 106-119.
- Duarte, M., A. Suarez and D. Bassi. 2001. « *Control of grinding plants using predictive multivariate neural control* ». Powder Technology, vol. 115, no. 2, pp. 193-206.
- Duchesne, C., T. Kourti and J.F. MacGregor. « *Multivariate monitoring of startups, restarts and grade transitions using projection methods* ». Proceedings of the 2003 American Control Conference (Cat. No.03CH37465), p 5423-6 vol.6, 2003.
- Edwards, R., A. Vien and R. Perry. 2002. « *Strategies for the instrumentation and control of grinding circuits* ». Mineral processing plant design, practice, and control proceedings, Vancouver, BC, Canada, pp. 2130-2151.
- Eisele, T.C. and S.K. Kawatra. 2005. « *Water chemistry effects in iron ore concentrate agglomeration feed* ». Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review, vol. 26, no. 3/4, pp. 295-305.



- Emmett, R.C., R.P. Summerhays and S.D. Heden. 1980. « *Filtration dewatering of iron ore concentrates* ». # CA 1092363.
- Engesser, J. 2003. « *Effect of water chemistry, water treatment and blaine on magnetite filtering and magnetite agglomeration with bentonite clay* ». Minerals & Metallurgical Processing, vol. 20, no. 3, pp. 125-134.
- Firth, A.R. and J.F. Garden. 2008. « *Interactions between magnetite oxidation and flux calcination during iron ore pellet induration* ». Metallurgical and materials transactions B, vol. 39, no. 4, pp. 524-533.
- Fonesca, M.C., G.M. Da Costa, P. Ferreira and A. Meschiatti. 2004. « *The influence of pellet feed granulometry in the agglomeration process* ». 2nd International Meeting on Ironmaking and 1st International Symposium on iron ore, Vitoria, ES, Brazil, pp. 277-285.
- Forsmo, S.P.E. and S. E. Forsmo. 1997. « *PaRMAC - A new method of evaluating the particle size distribution for agglomeration* ». Proceedings of the XX International Mineral Processing Congress, Aachen, Germany, pp. 347-353.
- Forsmo, S.P.E. and J.P. Vuori. 2005. « *The determination of porosity in iron ore green pellets by packing in silica sand* ». Powder Technology, vol. 159, no. 2, pp. 71-77.
- Forsmo S.P.E., P. O. Samskog and B.M.T. Björkman. 2008. « *A study on plasticity and compression strength in wet iron ore green pellets related to real process variations in raw material fineness* ». Powder Technology, vol. 181, no. 3, pp. 321-330.
- Fragomeni, D., L.J. Boyd, A. Charland, L.J. Kormos, N.O Lotter and G. Potts. 2005. « *The use of end-members for grind-recovery modelling, tonnage prediction and flowsheet development at Raglan* ». Proceedings Canadian Mineral Processors, Ottawa, January, Paper No. 6, pp. 75-98.

- Fuerstenau, D.W., K.S. Venkataraman and B.V. Velamakanni. 1985. « *Effect of chemical additives on the dynamics of grinding media in wet ball mill grinding* ». International Journal of Mineral Processing, vol. 15, pp. 251-267.
- Gariépy, S. 2002. « *Applications de l'analyse fréquentielle approximative* ». Master's Thesis. Department of Electrical and Computer Engineering, Université Laval, Québec, Canada.
- Gaudin, A.M. 1939. « *Principles of mineral dressing* ». McGraw-Hill, New York.
- Glaser T., C.F.W. Sanders, F-Y Wang, I. T. Cameron, J. D. Litster, J.M.H. Poon, R. Ramachandran, C. D. Immanuel and F. J. Doyle III. 2007. « *Model predictive control of continuous drum granulation of limestone* ». AIChE Annual Meeting : Conference Proceedings, Salt Lake City, Utah, USA, pp. 1-10.
- Goossens, M., M.R. Ribeiro and G.E. de Moura. 2004. « *Grinding circuits alternatives for pelletizing plants* ». Tecnologia em metalurgia e materiais, vol. 1, no. 2, pp. 1-4.
- Gosselin, C. 1998. « *Développement d'un simulateur et d'un observateur de l'écoulement des gaz, dans un four de frittage de boulettes de concentré de fer.* » Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval pour l'obtention du grade de maître ès en science (M.Sc.).
- Gosselin A., D. Blackburn et M. Bergeron. 1999. « *Protocole d'évaluation de la traitabilité des sédiments, des sols et des boues à l'aide des technologies minéralurgiques* ». Sainte-Foy, p. 58, 70.
- Gupta A., and H. Eren. 1990. « *Mathematical modelling and on-line control of hydrocyclones* ». Australasian Institute of Mining and Metallurgy Proceedings, vol. 295, no. 1, pp. 31-41.
- Harington, J. 1965. The Desirability Function. Industrial Quality Control 21, 494-498.

- Hasenack, N.A., R.A. Vos and E. Keddeeman. 1985. « *Energy saving projects in the pelleplant of Hoogovens Ijmuiden* ». 4th International Symposium on Agglomeration, Toronto, Canada, pp. 95-102.
- Herbst J.A., K. Robertson and R.K. Rajamani. 1983. « *Mill speed as manipulated variable for ball mill grinding control* ». 4th IFAC Symposium on Automation in Mineral Processing, Helsinki, Finland, pp. 153-160.
- Hou, R., A. HUNT, and R.A. Williams. 1998. « *Acoustic monitoring of hydrocyclone performance* ». Minerals Engineering, vol. 11, no. 11, pp. 1047-1059.
- Houot R. et R. Joussemet. 1996. « *Classification hydraulique en dimensions* ». p. J 3 130-2.
- Janna, F.C., J.C. Ruiz Sierra and J.M. Badie. 1996. « *Mathematical model for energy saving in induration of iron ore pellets* ». Ironmaking and steelmaking, vol. 23, no. 5, pp. 406-410.
- Kapakyulu, E. and M.H. Moys. 2007. « *Modeling of energy loss to the environment from a grinding mill, part II: modeling the overall heat transfer coefficient* ». Minerals Engineering, vol. 20, no. 7, pp. 653-661.
- Kawatra, S.K., B. Anamerie and T.C. Eisele. 2005. « *Single-step ironmaking from ore to improve energy efficiency* ». Houghton, MI, USA : Department of chemical engineering, Michigan Technological University, 2005, 134 p.
- Kohmuench, J. N., Yan, E. S., Mankosa, M. J., Lutrell, G. H., & Bratton, R. C. 2010. « *Design, operation and control of a teeter-bed hydroseparator for classification* ». SME Annual Meeting, February 28–March 3, Phoenix, AZ.
- Kourti, T. 2005. « *Application of latent variable methods to process control and multivariate statistical process control in industry* ». International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, v 19, n 4, p 213-46, May.

- Kretsovalis, A. and R.S.H. Mah. 1988a. « *Observability and redundancy classification in generalized process networks I* ». Theorems, Computers and chemical engineering, vol. 12, no. 7, pp. 671-687.
- Kretsovalis, A. and R.S.H. Mah. 1988b. « *Observability and redundancy classification in generalized process networks II* ». Algorithms, Computers and chemical engineering, vol. 12, no. 7, pp. 689-703.
- Küçükada, K., J Thibault, D. Hodouin, G. Paquet and S. Caron. 1994. « *Modelling of a pilot scale iron ore pellet induration furnace* ». Canadian metallurgical quarterly, vol. 33, no. 1, pp. 1-12.
- Kros, John F., and C. M. Mastrangelo. 2004. « *Comparing multi-response design methods with mixed responses* ». Quality and Reliability Engineering International, vol. 20, no 5, p. 527-539.
- Kwade, A. 2004. « *Mill selection and process optimization using a physical grinding model* ». International Journal of Mineral Processing, vol. 74, no. Supplement 1, pp. 93-101.
- Latchireddi, S. and S. Morrell. 2003. « *Slurry flow in mills: grate-pulp lifter discharge systems, part-2* ». Minerals Engineering, vol. 16, no. 7, pp. 635-642.
- Law A.W., W.D. Kelton. 2000. « *Simulation modeling and analysis, 3<sup>rd</sup> edition* ». McGraw-Hill, Boston: Toronto, pp. 465-466.
- Liu, Y. and S. Spencer. 2004. « *Dynamic simulation of grinding circuits* ». Minerals Engineering, vol. 17, no. 11-12, pp. 1189-1198.
- Luttrell G.H., R.Q. Honaker, R.C. Bratton, T.C. Westerfield and J.N. Kohmuench. 2006. « *In-plant testing of high-efficiency hydraulic separators* ». Reporting period July 21, 2003 – June 30.

- Lynch, A.J. 1977. « *Mineral crushing and grinding circuits: Their simulation, optimisation, design and control* ». Elsevier Scientific Publishing, Amsterdam.
- Maizel, G. M., I.G. Bormotova, A.V. Starodumov and S.P. Gonyaev. 2003. « *Operation of drum pelletizers with screen optimization* ». Steel in Translation, vol. 33, no. 9, pp. 14-16.
- Makni, S., S.B. Ekongolo and D. Hodouin. 2000. « *Mass and heat flow observers and data reconciliation for iron ore induration furnaces* ». Future Trends in Automation in Mineral and Metal Processing : IFAC Workshop preprints, Finland, pp. 150-154.
- McNabb C. and M. Ruel. 2009. « *Best Practices for Managing Control Loop Performance, Roadmap to Success* ». Paptac.
- Monetti, R., A. Hurd and V.M. Kenkre. 2001. « *Simulations for dynamics of granular mixtures in a rotating drum* ». Granular matter, vol. 2, no. 1-2, pp. 113-116.
- Montgomery, D. C. 2001. Introduction statistical quality control, 4th edition, p 425.
- Nageswararao, K., D.M. Wiseman and T.J. Napier-Munn. 2003. « *Two empirical hydrocyclone models revisited* ». Hydrocyclone, pp. 1-25.
- Ojo, O. and B.M. Olaleye. 2000. « *Determination of grindability and work index of itakpe iron ore* ». Global journal of pure and applied sciences, vol. 6, no. 3, pp. 503-508.
- Pate, W.T. and J.A. Herbst. 1983. « *Dynamic estimation of unmeasured variables in an industrial grinding circuit using a Kalman filter* ». 112th AIME Annual Meeting, Atlanta, pp. 1-15.
- Perry R. 1992. « *Les Mines Selbaie : semi-autogenous grinding circuit expert system* ». C.M.P. north-west Québec section regional conference, Val D'or, QC, pp. 1-15.

- Qin, S.J. and J. Yu. 2007. « *Recent developments in multivariable controller performance monitoring* ». Journal of Process Control, Volume 17, Issue 3, March, Pages 221-227.
- Rapp, K. 2004. « *Nonlinear estimation and control in the iron ore pelletizing process* ». An application and analysis of the extended Kalman filter, Thesis, pp. 1-170.
- Reed, W.M. 2002. « *Sizing and application of gravity classifiers* ». Mineral processing plant design, practice, and control proceedings, Vancouver, BC, Canada, pp. 867-879.
- Rolf, L. 1999. « *Instrumentation of balls for measurement of energy distribution in ball mills* ». Chemische technik (Leipzig), vol. 51, no. 5, pp. 238-240.
- Sadernezhaad, S.K., A. Ferdowsi and H. Payab. 2008. « *Mathematical model for a straight grate iron ore pellet induration process of industrial scale* ». Computational materials science, vol. in press, pp. 1-7.
- San, O. and C. Hosten. 2002. « *Filtration testing of a ceramic capillary filter produced from a high-silica glaze* ». Minerals Engineering, vol. 15, no. 7, pp. 553-556.
- Sastry, K.V.S. and J.A. Herbst. 1999. « *Modeling and computer simulation of balling circuits for steady state optimization and dynamic control* ». 58th Ironmaking Conference, Chicago, IL, USA, pp. 505-513.
- Singh, V. and S.M. Rao. 2005. « *Application of image processing and radial basis neural network techniques for ore sorting and ore classification* ». Minerals Engineering, vol. 18, no. 15, pp. 1412-1420.
- Smith C.B. and I.G. Townsend. 2002. « *Testing, sizing and specifying of filtration equipment* ». Mineral processing plant design, practice, and control proceedings, Vancouver, BC, Canada, pp. 1313-1330.

- Thornton, G.J. and R.J. Batterham. 1982. «*Adaptive mathematical models for real time control of pellet induration processes* ». 3rd process technology conference, Pittsburgh, PA, pp. 69-75.
- Tong, L.I. and C.T. Su. 1997. «*Optimizing multi-responses problem in the Taguchi method by fuzzy attribute decision making* ». Quality, Reliability, Engineering, International, 13, 25–34.
- Tong, L.I., Su, C.T., Wang, C.H., 1997. «*The optimization of multi-response problems in Taguchi method* ». International Journal of Quality & Reliability Management, 14, 367–380.
- Umadevi, T., K.P. Prachethan, P. Kumar, N.F. Lobo and M. Ranjan. 2008. «*Investigation of factors affecting pellet strength in straight grate induration machine* ». Ironmaking and steelmaking, vol. 35, no. 5, pp. 321-326.
- Welch G.D. 2002. «*Characterization of equipment based on filtration principals and theory* ». Mineral processing plant design, practice, and control proceedings, Vancouver, BC, Canada, pp. 1289-1294.
- Whittle, D. and P. Vassiliev. 1998. «*Synthesis of stochastic recovery prediction and cut-off optimisation* ». Mine to mill 1998, Brisbane, Qld, pp. 53-55.
- Wu, Ful-Chiang. 2005. «*Optimization of correlated multiple quality characteristics using desirability function* ». Quality Engineering, vol. 17, no 1, p. 119-126.
- Xialong Y. and D. L. Koch. 2007. «*Hindered settling velocity and microstructure in suspensions of solid spheres with moderate Reynolds numbers* ». Physics of fluids 19, 093302.
- Yoshida , H., T. Takashinab, , K. Fukuia, and T. Iwanagaa. 2004. «*Effect of inlet shape and slurry temperature on the classification performance of hydrocyclones* ». Powder Technology, vol. 140, no. 1-2, pp. 1-9.

Zhu, Y. and F. Butovi. 2000. « *Multivariable and closed-loop identification for model predictive control* », Faculty of Electrical Engineering, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, ERTC Computing Conference, Berlin, 26- 28 June.