

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M.Ing.

PAR
HADRI, Farouk

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET NUMÉRIQUE DE L'EFFET DES PARAMÈTRES
GÉOMÉTRIQUES D'UN CONTACT COIN SOUS CHARGEMENT COMBINÉ

MONTRÉAL, LE 22 JUILLET 2008

© Farouk Hadri, 2008

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Raynald Guilbault, directeur de mémoire
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Anh Dung Ngô, président du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Claude Sauvageau, responsable d'essais, agent de recherche et développement
Centre de recherche industrielle du Québec

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 17 JUILLET 2008

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je voudrais exprimer mes sincères remerciements au professeur Raynald Guilbault, mon directeur de recherche, pour son appui scientifique, ses précieux conseils et de sa très grande disponibilité.

Je remercie également les ingénieurs et les techniciens de l'école de technologie supérieure pour leur collaboration dans la réalisation du banc d'essai, en particulier, André Fournier et Mario Corbin.

Un remerciement spécial s'adresse à toute ma famille, principalement à ma femme pour la patience qu'elle m'a apporté au long de ce projet. Je dédie ce mémoire à ma mère, décédée quelques jours avant ma soutenance, que dieu le tout puissant accorde sa grâce et sa miséricorde et l'accueille en son vaste paradis.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET NUMÉRIQUE DE L'EFFET DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES D'UN CONTACT COIN SOUS CHARGEMENT COMBINÉ

HADRI, Farouk

RÉSUMÉ

L'hypothèse des contraintes planes est surtout utilisée pour modéliser des corps élastiques plans et minces chargés dans leur plan. La résolution d'un tel problème (problème d'élasticité plane) par la méthode des éléments finis était largement utilisée, et les résultats obtenus sont confrontés favorablement avec les résultats expérimentaux. Cette étude concerne l'analyse expérimentale et numérique d'un contact coin entre un échantillon flexible en état plan de contrainte et un massif élastique de rigidité inférieure, égale et supérieure soumis à un chargement combiné.

Les hypothèses de la théorie du contact de Hertz qui permettent la résolution d'un problème d'élasticité sont restrictives. En fait, les problèmes de contact mettant en jeu des cônes, des coins ou des poinçons plats n'entrent pas dans le cadre de la théorie de Hertz. L'étude proposée met en œuvre un plan d'expériences rassemblant les facteurs suivants : l'angle de contact, la force normale, la force tangentielle et la rigidité des matériaux en contacts. Ces facteurs sont susceptibles d'influencer la distribution de la contrainte engendrée par le contact coin entre ces corps. La réalisation d'un tel plan a nécessité la conception et la réalisation d'un dispositif expérimental composé principalement d'un assemblage mécanique destiné à la fixation des échantillons en contact d'une part et à assurer l'application des forces normale et tangentielle d'autre part.

L'une des méthodes expérimentales pour l'étude de la mécanique des contacts est la photoélasticité. C'est une technique optique utilisée pour déterminer la contrainte de cisaillement maximale, où l'un des deux corps en contact est transparent, permettant ainsi d'observer directement les isocontraintes. L'objectif principal de cette étude est de quantifier à partir des résultats expérimentaux et de valider numériquement, l'influence de la variation des facteurs mentionnés auparavant sur la pression de contact en un coin d'angle variable.

Bien que les valeurs diffèrent légèrement et avec une moyenne de l'erreur relative totale au centre du domaine d'étude de 4.5%, les résultats expérimentaux sont en bonne concordance avec ceux obtenus par simulation numérique.

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL STUDY OF GEOMETRICAL PARAMETERS EFFECT CHANGES IN A CORNER CONTACT UNDER COMBINED LOADING

HADRI, Farouk

ABSTRACT

The hypothesis of in plane stresses is essentially used to simulate elastic, flat and thin solids in-plane loaded. The finite elements method was widely used to solve the elasticity problem and the results were in accordance with the experimental one. This study relates to an experimental and numerical analysis in case of a corner contact between a flexible sample and an elastic solid mass of lower, equal and higher rigidity subjected to a combined loading.

The hypothesis of Hertz contact theory used to resolve an elasticity problem are restrictive. In fact, the problems of contact related to cones, corners or flat punches do not enter directly within the framework of Hertz theory. The suggested study comes out with an experimental plan gathering the following factors: contact angle, normal force, tangential force and the rigidity of material in contact. These factors are likely to influence the stress distribution generated by the contact corner between these bodies. The accomplishment of such plane has required to design and to manufacture an experimental device which consists mainly of a mechanical assembly for fixing contact samples and applying the normal and the tangential force.

Photo elasticity is an experimental technique among others used in contact mechanic's; it's an optical technique used to determine the maximum sheer stress value, in which one of the two corps in contact is translucent in that manner, iso-stress lines can be observed directly. The main objective of this study is to assess using experimental results obtained in case of in-plane stress state, the influence of the factors (mentioned before) on the contact pressure in case of corner contact with a variable incidence angle and also to validate numerically these results.

Even though the standard deviation is around 4.5 %, the experimental results are in a good concordance with those of the numerical method.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE	3
1.1 Théorie du contact élastique de Hertz	3
1.1.1 Géométrie des surfaces en contact.....	3
1.1.2 Solution du problème.....	8
1.1.2.1 Contact cylindrique.....	8
1.1.2.2 Contact sphérique	12
1.1.3 Chargement tangentiel et normal.....	13
1.1.4 Loi de Coulomb	14
1.2 Différents travaux sur le contact mécanique.	16
1.3 Récapitulatif.....	28
CHAPITRE 2 PLAN D'EXPÉRIENCES	29
2.1 Construction d'un plan d'expériences	30
2.2 Description de l'étude.....	30
2.2.1 Interprétation des franges photoélastiques.....	32
2.3 Facteurs.....	33
2.4 Niveaux des facteurs.....	34
2.5 Réponse.....	35
2.6 Choix du plan d'expériences	35
2.7 Plan d'expériences	35
2.8 Surface de réponse	37
2.9 Résultats expérimentaux	37
2.10 La modélisation mathématique.....	37
2.11 Interprétation des résultats obtenus	39
2.12 Quelques notions d'analyses.....	40
CHAPITRE 3 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL.....	41
3.1 Description.....	42
3.2 Assemblage mécanique	44
3.3 Amarrage des éprouvettes.....	46
3.4 Polariscope par réflexion	47
3.5 Système d'acquisition des données	49
CHAPITRE 4 CAMPAGNE EXPÉRIMENTALE.....	52
4.1 Préparation des échantillons	52
4.2 Montage des échantillons	54
4.3 Déroulement des essais.....	54
4.4 Préparation et installation des équipements.....	55
4.5 Procédure d'essai	55

4.6	Photographies numériques.....	56
4.7	Choix des points d'études.....	58
CHAPITRE 5 RÉSULTATS ET ANALYSES		60
5.1	Résultats expérimentaux	60
5.1.1	Analyse statistique des effets des facteurs.....	63
5.1.1.1	Lecture du diagramme des effets	67
5.1.1.2	Interprétation des résultats des calculs :	68
5.1.1.3	Meilleures combinaisons possibles.....	71
5.1.1.4	Conclusion	76
5.1.2	Analyse physique :	77
5.1.2.1	Effet de la rotation	77
5.1.2.2	Effet du cisaillement	78
5.1.2.3	Effet des surfaces libres	83
5.1.2.4	Conclusion	87
5.2	Résultats numériques	88
5.2.1	Étude de convergence	89
5.2.2	Comparaison des mesures expérimentales aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis	94
5.2.3	Comparaison des résultats du modèle proposé aux résultats expérimentaux et de la méthode des éléments finis.....	97
CONCLUSION.....		100
RECOMMANDATIONS		102
ANNEXE I APPLICATION DE LA PHOTOÉLASTICITÉ.....		103
ANNEXE II PHOTOGRAPHIES NUMÉRIQUES.....		118
ANNEXE III ANALYSE STATISTIQUES DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....		141
ANNEXE IV ANALYSE STATISTIQUE DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES.....		155
ANNEXE V PROGRAMME ANSYS.....		171
ANNEXE VI SURFACES DE RÉPONSE.....		178
ANNEXE VII COURBES DE COMPARAISON.....		182
ANNEXE VIII PROGRAMME EN LANGAGE C		186
LISTE DE RÉFÉRENCES		209

LISTE DES TABLEAUX

	Page	
Tableau 2.1	Mesure de l'ordre de frange en fonction de la couleur	33
Tableau 2.2	Matrice d'expériences (plan 3^4)	36
Tableau 3. 1	Caractéristiques des cellules de charge.....	50
Tableau 4.1	Coordonnées des points d'études.....	58
Tableau 5.1	Résultats expérimentaux : Contrainte de cisaillement maximale aux points d'évaluation	61
Tableau 5.2	Analyse de variance au point P1.....	64
Tableau 5.3	Sommaire du modèle au point P1	64
Tableau 5.4	Matrice d'expérience (2^2)	67
Tableau 5.5	Effets des facteurs.....	67
Tableau 5.6	Coefficients des facteurs au point P6.....	69
Tableau 5.7	Coefficients des facteurs au point P1.....	70
Tableau 5.8	Optimisation des facteurs pour un angle fixe	73
Tableau 5. 9	Coefficients de frottement	88
Tableau 5.10	Résultats numériques : Contrainte de cisaillement maximale aux points d'évaluation	92
Tableau 5.11	Erreurs relatives et absolues au centre du domaine d'étude	96
Tableau 5.12	Erreurs relatives et absolues au niveau bas des facteurs.....	97

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	4
Figure 1.2	5
Figure 1.3	7
Figure 1.4	8
Figure 1.5	10
Figure 1.6	11
Figure 1.7	12
Figure 1.8	14
Figure 1.9	17
Figure 1.10	18
Figure 1.11	19
Figure 1.12	21
Figure 1.13	22
Figure 1.14	23
Figure 1.15	25
Figure 1.16	27
Figure 2.1	32
Figure 3. 1	42
Figure 3.2	43
Figure 3.3	44
Figure 3.4	45
Figure 3.5	46

Figure 3.6	Adaptateur pour échantillons.....	47
Figure 3.7	Principe de fonctionnement d'un polariscope par réflexion.....	48
Figure 3.8	Polariscope par réflexion	49
Figure 3.9	Schéma de principe du dispositif d'acquisition des données.....	51
Figure 3.10	Interface Labview	51
Figure 4.1	Photo grossie de la surface coupée	52
Figure 4.2	Disposition des corps en contact.....	54
Figure 4.3	Essai 49	57
Figure 4.4	Essai 50.....	57
Figure 4.5	Essai 51	57
Figure 4.6	Coordonnées des points d'étude	59
Figure 5.1	Diagramme des effets.	66
Figure 5.2	Diagramme des effets pour deux facteurs.	68
Figure 5.3	Désignation des coins de contact.....	69
Figure 5.4	Diagramme des effets accompagné de la fonction désirabilité pour une étude étendue.	72
Figure 5.5	Diagramme des effets accompagné de la fonction Désirabilité pour une étude limitée.....	73
Figure 5.6	Angle optimal pour (Fn=311, Ft=26,7, Mat=Caout).	74
Figure 5.7	Angle optimal pour (Fn=311, Ft=26,7, Mat=PS1).	75
Figure 5.8	Angle optimal pour (Fn=311, Ft=26,7 et Mat=acier).	75
Figure 5.9	Profiles des interactions au point P2.....	76
Figure 5.10	Tendance à la déformation.....	77
Figure 5.11	Variation de la contrainte de cisaillement max pour les trois types de matériaux avec et sans effet de la rotation pour Ft=8.9N et Fn=133.5N.	79

Figure 5.12	Variation de la contrainte de cisaillement max pour les trois types de matériaux avec et sans effet de la rotation pour $F_t=26.7\text{N}$ et $F_n=133.5\text{N}$	80
Figure 5.13	Déformations rigide et flexible.....	81
Figure 5.14	Déformations des matériaux sous l'effet du cisaillement.....	82
Figure 5.15	Contact caoutchouc/acier avec et sans déformation liée au cisaillement	82
Figure 5.16	Modèle de calcul des discréétisations de charges en présence de frontières libres.....	84
Figure 5.17	Élimination des contraintes internes.....	85
Figure 5.18	Répartition de la contrainte de cisaillement avec et sans surfaces libres.....	86
Figure 5.19	Maillage typique.....	89
Figure 5.20	Courbes de convergence.....	90
Figure 5.21	Courbes de comparaison expérimental/numérique au point P3 (Essai 1 à 27, angle 75 degré).....	95
Figure 5.22	Courbes de comparaison expérimental/numérique au point P3 (Essai 28 à 54, angle 90 degré).....	95
Figure 5.23	Courbes de comparaison expérimental/numérique au point P3 (essai 55 à 81, angle 105 degré)	96
Figure 5. 24	Courbes de comparaison modèle/mesure.	98
Figure 5. 25	Courbes de comparaison modèle/éléments finis.....	98

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

a	Largeur
a_0	Coefficient constant
A, B	Constantes
Ang	Angle de contact
c	Rayon équivalent
d	Distance de séparation
E	Module de Young
ERT	Erreur relative totale
f	Sensibilité du matériau photoélastique
Fn	Force normale
Ft	Force tangentielle
K	Coefficient photoélastique
Mat	Matériau en contact
MERT	Moyenne de l'erreur relative totale
N	Ordre de frange
O_f	Ordre de frange
P	Paramètre, points d'étude, charge normale et composante normale
Pm	Pression moyenne
P_0	Contrainte de compression maximale
PS-1	Matériau photoélastique
r	Rayon dans un système de coordonnées polaires

R	Vecteur action mécanique
Re	Rayon équivalent
R', R''	Rayons de courbure principaux
RMSE	Racine carré moyen des résidus
S	Contrainte de cisaillement maximal
t	Épaisseur
T	Charge tangentielle
Uz	Déplacement des solides
V	Vitesse de glissement
W	Distance relative avant contact
x, y	Axes
y	La réponse
Z	Distance de la courbure à la tangente
α	Angle d'inclinaison, angle entre les axes
γ	Angle
ε	Déformation
ν	Coefficient de poisson
λ	Longueur d'onde
σ	Contraintes principales
τ	Contrainte de cisaillement
θ	Angle de frottement, angle dans un système de coordonnées polaires
μ	Coefficient de frottement, module d'élasticité en cisaillement

INTRODUCTION

L'analyse des problèmes de contact avec frottement est très importante et intervient dans de nombreuses applications d'ingénierie industrielle. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps entre en contact avec d'autres corps. Le caractère de ce contact joue un rôle fondamental dans le comportement du solide (distribution des contraintes, déformations,etc.)

La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur un solide de géométrie quelconque et comment réagit ce solide lorsqu'il subit ces efforts. Jusqu'à aujourd'hui, les études qui ont abordé le contact coin sont des cas relativement simples (un chargement normal, un chargement normal et tangentiel, ...etc.). Pour prétendre à la résolution des problèmes plus généraux et plus proches de la réalité, une étude globale qui tient compte de la majorité des facteurs les plus influents entre deux solides en contact coin s'avère nécessaire. Ceci est tout à fait envisageable. Toutefois, la gestion de tous les paramètres de contact demandera un travail assez important.

Le recours aux méthodes expérimentales pour étudier des phénomènes complexes où le contact et le frottement s'ajoutent à des non linéarités géométriques (grandes déformations, grandes rotations) est une alternative indispensable. Le but de la présente étude dans la poursuite de cet objectif est de quantifier à partir de résultats expérimentaux (obtenus par application de la photoélasticité à la mesure des contraintes planes), l'influence de la variation de l'effort normal, l'effort tangentiel et les matériaux en contact sur la pression de contact en présence d'un contact coin dont l'angle (Ang) est variable d'une part, et de valider ces résultats en les comparant à ceux obtenus par la méthode des éléments finis d'autre part. Pour permettre une éventuelle comparaison, les deux parties de l'étude sont basée sur le même plan d'expérience établit à cette fin.

Afin de donner une idée plus précise du cadre dans lequel cette étude se situe, nous allons rappeler au chapitre 1 le champ et les limites d'application de la théorie de Hertz ainsi que

certains travaux menés jusqu'à ce jour sur le contact coin (Il ne s'agira donc pas ici d'une revue de littérature exhaustive). Ceci nous permettra au chapitre 2 de cerner les principaux paramètres susceptibles d'influencer les contraintes principales, et de dresser un plan d'expériences factoriel complet utile à cette étude. L'application d'un tel plan avec ses facteurs recensés (angle de contact, force normale, force tangentielle et le matériau des pièces en contact) nous conduira au chapitre 3 à présenter une description détaillée du banc d'essai. Le chapitre 4 fait l'objet de la campagne expérimentale, qui touche entre autre, la préparation, le montage et le déroulement des essais. Le chapitre 5 est consacré à l'analyse des résultats expérimentaux et à la validation par ceux obtenus numériquement.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre se veut une revue des connaissances et de la littérature liées aux contacts élastiques entre deux solides. La première partie, consiste à décrire la théorie du contact Hertzien et de Boussinesq. La seconde partie présente différents travaux qui étudient le contact mécanique en général. En dernier lieu, un récapitulatif a été dressé afin de permettre de spécifier les essais mécaniques requis, ainsi que la méthodologie à adopter.

1.1 Théorie du contact élastique de Hertz

Le problème de contact normal des solides élastiques a été résolu par Hertz (1881-1882). La théorie établie par Hertz est reconnue comme constituant la base du développement de la mécanique des contacts, cette théorie permet, sous certaines conditions, de déterminer l'aire de contact et la distribution des contraintes et des déformations.

1.1.1 Géométrie des surfaces en contact

Considérons deux solides 1 et 2 qui se touchent dans un premier temps au point O. sous l'effet du chargement ce point se transforme en une surface finie, petite face aux dimensions des deux corps. Cette surface augmente à mesure que la charge augmente. La figure suivante illustre la description.

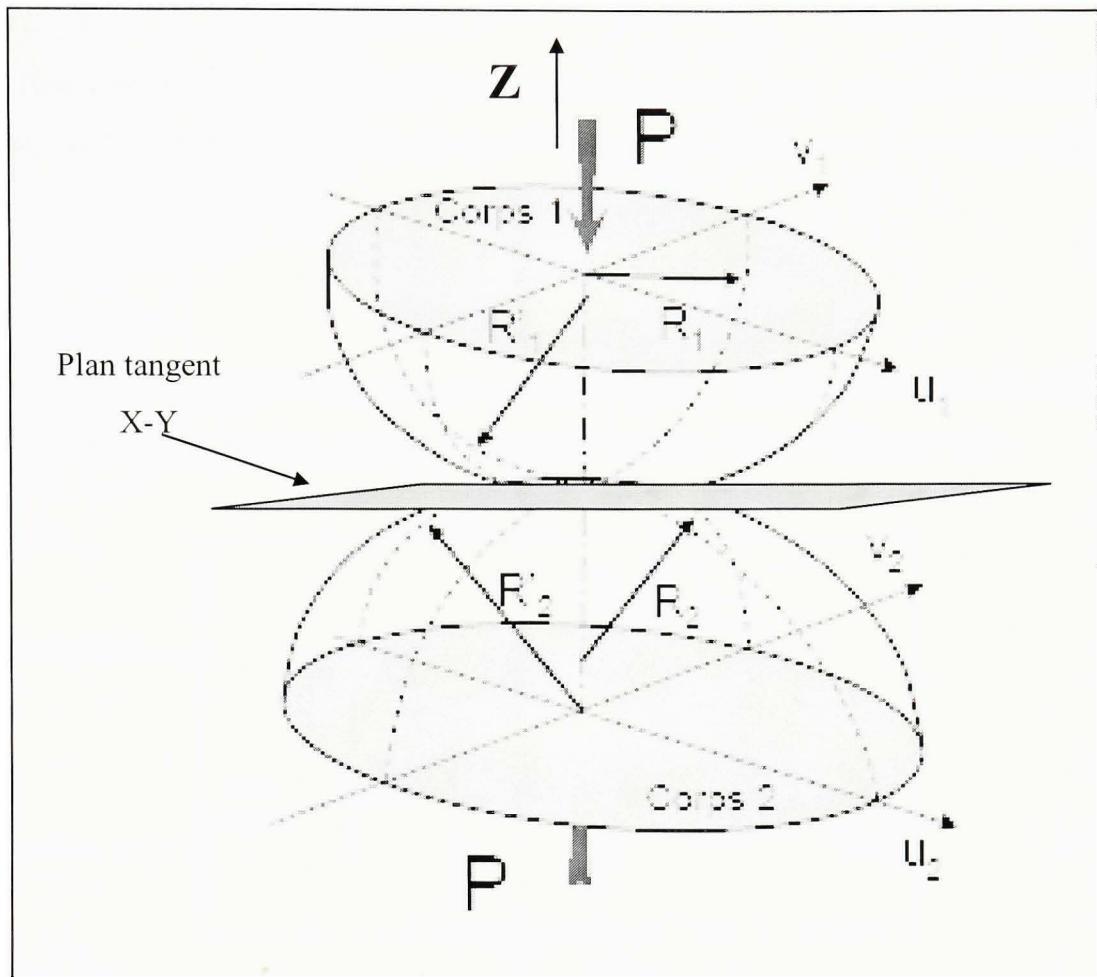


Figure 1.1 Deux solides en contact.
(Adapté de Guilbault, Raynald, 2007)

Source : Cette figure a été adaptée du cours de M. Raynald Guilbault, Mec 727, tribologie, chapitre 3, École de technologie supérieure.

Où

R_i et R'_i sont les courbures principales du corps 1 et 2 respectivement, u_i et v_i sont des axes dans le plans tangent et alignés avec les courbures principales, l'axe z constitue la normale commune aux deux corps au point de contact initial et $(x-y)$ constitue un repère général dans le plan tangent.

La distance de séparation des deux corps est donnée par :

$$d = z_1 + z_2 \quad (1.1)$$

Où $z_{1,2}$ est la distance de séparation du corps 1, 2 du plan tangent (figure 1.2).

Supposant que les surfaces en contact sont suffisamment lisses (absence d'aspérité), les profils surfaciques en contact peuvent être décrits par des polynômes de deuxième degré.

$$z_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 xy \quad (1.2)$$

$$z_2 = A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2 xy \quad (1.3)$$

Pour une orientation particulière des axes, on peut écrire les profils en fonction des rayons de courbure principaux des deux solides. Donc, pour le corps 1 d'abord (figure 1.2) :

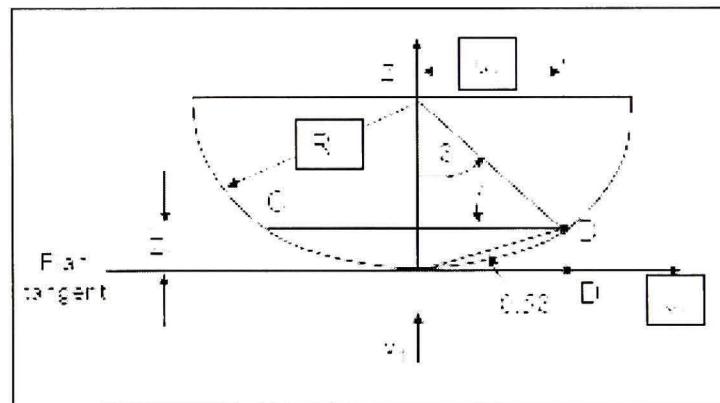


Figure 1.2 Courbure principale du corps 1.
(tiré de Guilbault, Raynald, 2007)

Source : Cette figure a été tiré du cours de M. Raynald Guilbault, Mec 727, tribologie, chapitre 3, École de technologie supérieure.

$$z_1 = u_1 \tan (0,5\beta) = 0,5u_1\beta \quad (1.4)$$

$$\sin (\beta) = \beta = \frac{u_1}{R_1} \quad (1.5)$$

$$z_1 = \frac{u_1^2}{2R_1} \quad (1.6)$$

De la même manière et selon la deuxième courbure :

$$z_1 = \frac{v_1^2}{2R_1} \quad (1.7)$$

Finalement selon une direction quelconque

$$z_1 = \frac{u_1^2}{2R_1} + \frac{v_1^2}{2R_1} \quad (1.8)$$

z_1 est donc, la position d'un point du profil 1 par rapport au plan tangent.

En suivant le même raisonnement pour le corps 2 :

$$z_2 = \frac{u_2^2}{2R_2} + \frac{v_2^2}{2R_2} \quad (1.9)$$

la distance de séparation entre les deux surfaces est donnée par :

$$d = z_1 + z_2 = \left(\frac{u_1^2}{2R_1} + \frac{v_1^2}{2R_1} \right) + \left(\frac{u_2^2}{2R_2} + \frac{v_2^2}{2R_2} \right) \quad (1.10)$$

Étant donné qu'il y a un angle α entre les deux repères du plan tangent (u_1-v_1) et (u_2-v_2) :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matrice} \\ \text{de rotation} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cos(\alpha) + v_1 \sin(\alpha) \\ v_2 &= -u_1 \sin(\alpha) + v_1 \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante lorsque l'équation (1.11) est introduite dans (1.10) :

$$\begin{aligned} d = & \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \cos^2(\alpha) + \frac{1}{2R_2} \sin^2(\alpha) \right) u_1^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \sin^2(\alpha) + \frac{1}{R_2} \cos^2(\alpha) \right) v_1^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2} \right) \sin(\alpha) \cos(\alpha) u_1 v_1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

De la même façon on passe au repère général x-y en sachant qu'il y a un angle γ entre ce dernier et le repère (u_1-v_1) .

$$\begin{aligned} u_1 &= x \cos(\gamma) - y \sin(\gamma) \\ v_1 &= x \sin(\gamma) + y \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
 d = & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) \\
 & - \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2(\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}} x^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) \\
 & + \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2(\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}} y^2
 \end{aligned}$$

Ou sous forme simplifiée :

$$d = Ax^2 + By^2 \quad (1.14)$$

Considérons maintenant l'écrasement des deux solides convexes sous l'effet de la charge normal P , figure 1.3. Sous l'effet de la compression, chaque point de la surface des solides est déplacé parallèlement à OZ d'une quantité u_{z_1} et u_{z_2} .

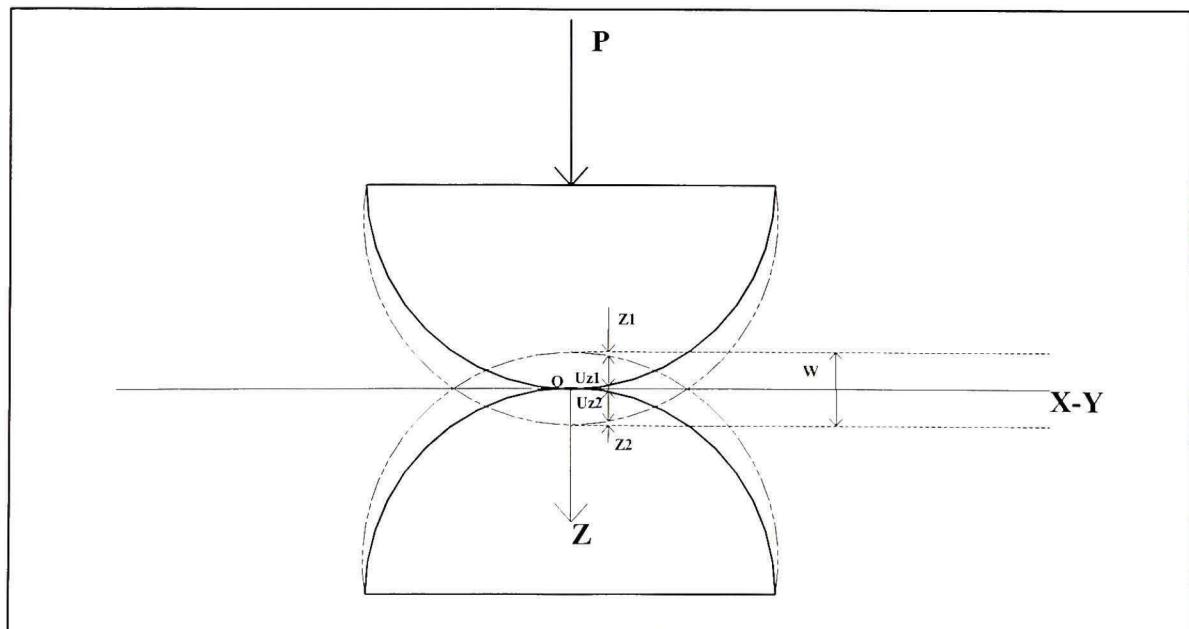


Figure 1.3 Déformation élastique sous une charge normale P .

A l'intérieur de la zone de contact on aura :

$$w - (u_{z_1} + z_1) - (u_{z_2} + z_2) = 0 \quad (1.15)$$

Par contre à l'extérieur de la zone de contact :

$$w - (u_{z_1} + z_1) - (u_{z_2} + z_2) < 0 \quad (1.16)$$

Avec :

u_{z_1} est le déplacement du corps 1

u_{z_2} est le déplacement du corps 2

w est la distance d'approche des deux corps.

1.1.2 Solution du problème

1.1.2.1 Contact cylindrique

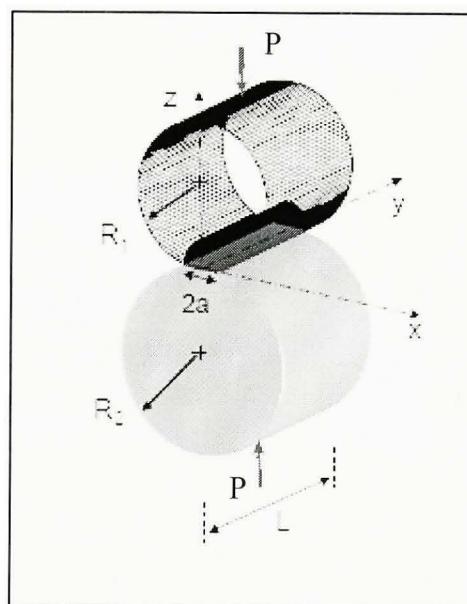


Figure 1.4 Contact cylindrique.
(tiré de Guilbault, Raynald, 2007)

Source : Cette figure a été tiré du cours de M. Raynald Guilbault, Mec 727, tribologie, chapitre 3, École de technologie supérieure.

$$\frac{P}{L} = \int_{-a}^a p(x) dx \quad (1.17)$$

$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ est la distribution parabolique proposée par Hertz.

Avec :

p_0 est la pression maximale;

a est la demi-largeur de contact.

$$\frac{P}{L} = p_0 \frac{a\pi}{2} \quad (1.18)$$

Cas où les deux cylindres sont coaxiaux ($R_1' = \infty, R_2' = \infty, \alpha = 0$)

L'équation (1.14) se réduit à :

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) y^2 \quad (1.19)$$

On pose $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ et $\frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$

Et selon la théorie d'élasticité on écrit :

$$a^2 = \frac{4PR}{L\pi E} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4PR}{L\pi E}} \quad (1.20)$$

De l'équation (1.18) on écrit :

$$p_0 = \frac{2P}{L\pi a} = \sqrt{\frac{PE}{L\pi R}} \quad (1.21)$$

Le long de l'axe OZ, les contraintes principales (σ_{xx}, σ_{zz}) prennent la forme :

$$\sigma_{xx} = -\frac{p_0}{a} \left[(a^2 + 2z^2) (a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 2z \right] \quad (1.22)$$

$$\sigma_{zz} = -p_0 a (a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.23)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_{zz} - \sigma_{xx}| = p_0 a \left[z - z^2 (a^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (1.24)$$

La contrainte de cisaillement est maximale ($=0.3 p_0$) à une distance $z = 0.78a$.

Pour une distribution parabolique de la charge normale $p(x)$ exercée dans un intervalle $[-a, a]$ sur un corps élastique semi-infini, les composantes de la contrainte sont données par :

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s)(x-s)^2}{[(x-s)^2 + z^2]^2} ds \quad (1.25)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s)}{[(x-s)^2 + z^2]^2} ds \quad (1.26)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s)(x-s)}{[(x-s)^2 + z^2]^2} ds \quad (1.27)$$

Avec : $x = x - s$

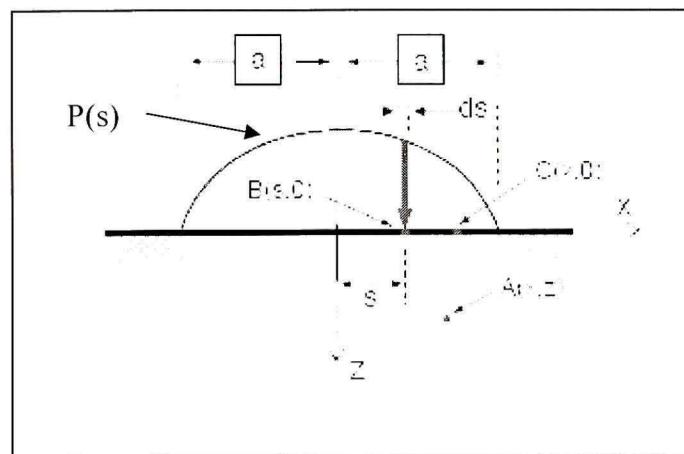


Figure 1.5 Distribution d'une charge parabolique.
(Adapté de Guilbault, Raynald, 2007)

Source : Cette figure a été adaptée du cours de M. Raynald Guilbault, Mec 727, tribologie, chapitre 3, École de technologie supérieure.

Et les déplacements de n'importe quel point de la surface du solide sont donnés par :

$$u_x = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left[\int_{-a}^x p(s)ds - \int_x^a p(s)ds \right] \quad (1.28)$$

$$u_z = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a p(s) \ln|x-s|ds \quad (1.29)$$

Selon (Johnson, 1989), pour une distribution uniforme de la charge p , les composantes de la contrainte prennent la forme suivante :

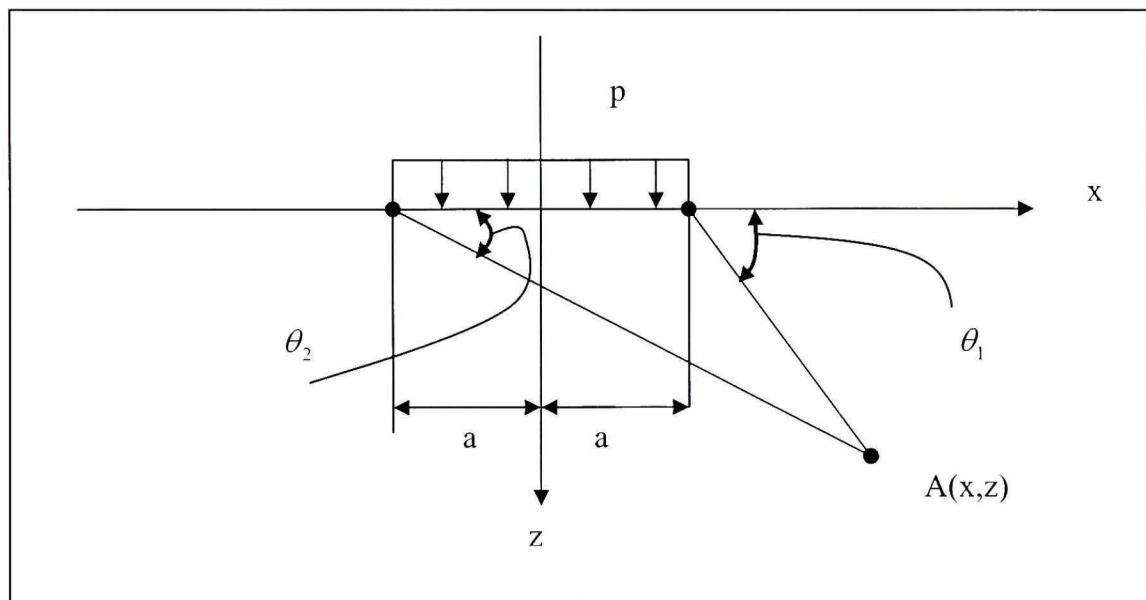


Figure 1.6 Répartition uniforme de la charge p .
(Adapté de Johnson, K.L, 1989)

Source : Cette figure a été adaptée de K. L. Johnson, Contact mechanics, Cambridge University Press, Great Britain.

$$\sigma_x = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \quad (1.30)$$

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \quad (1.31)$$

$$\tau_{xz} = \frac{p}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \quad (1.32)$$

Et le déplacement selon l'axe z :

$$u_z = -\frac{(1-\nu^2)p}{\pi E} \left[(x+a) \ln \left(\frac{x+a}{a} \right)^2 - (x-a) \ln \left(\frac{x-a}{a} \right)^2 \right] + C$$

1.1.2.2 Contact sphérique

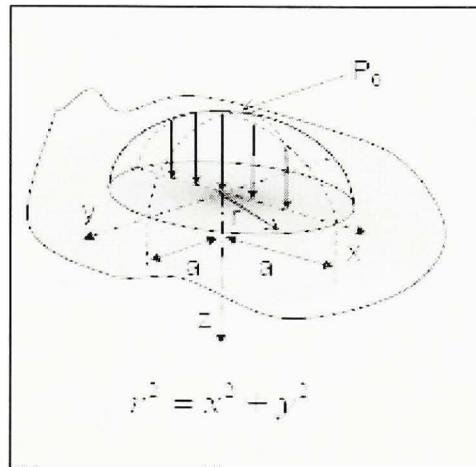


Figure 1.7 Contact sphérique.
(tiré de Guilbault, Raynald, 2007)

Source : Cette figure a été tirée du cours de M. Raynald Guilbault, Mec 727, tribologie, chapitre 3, École de technologie supérieure.

$$P = \int_0^a 2\pi r p(r) dr$$

$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$ est la distribution parabolique de Hertz.

$$P = \frac{2}{3} p_0 \pi a^2 \Rightarrow p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (1.33)$$

Pour $R_1 = R_1'$, $R_2 = R_2'$ et $\alpha = 0$

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{De la même manière on pose } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Et à partir des équations de la théorie d'élasticité on écrit :

$$a^3 = \frac{3PR}{4E} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3PR}{4E}} \quad (1.34)$$

De l'équation (1.33) on écrit :

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} = \frac{1}{2\pi} \left(4 \frac{E\sqrt{3P}}{R} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.35)$$

En coordonnées cylindriques pour $r=0$, les contraintes principales le long de l'axe z sont données par :

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -(1+\nu)p_0 \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} \right) + \frac{1}{2} p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (1.36)$$

$$\sigma_z = -p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (1.37)$$

La contrainte de cisaillement a pour expression :

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \left[-(1+\nu)p_0 \left(1 - \frac{z}{a} \arctan \frac{a}{z} \right) + \frac{3}{2} p_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \right] \text{ est maximale } (= 0.31p_0) \text{ pour } z=0,48a,$$

lorsque ν prend la valeur de l'acier.

1.1.3 Chargement tangentiel et normal

Jusqu'à présent on n'a pas considéré l'influence du frottement qui s'oppose au mouvement relatif des deux solides.

La résolution du problème nécessite la détermination de l'aire de contact et la distribution de pression sous l'effet de la charge normale et tangentiale. Si les deux corps n'ont pas le même module d'élasticité et le même coefficient de Poisson, alors, la distribution de la pression

normale est modifiée par la présence du cisaillement qui se caractérise par une discontinuité indéterminée en bordure de contact.

1.1.4 Loi de Coulomb

Considérons les deux solides précédents (figure 1.8a), soit V , la vitesse de glissement entre ces deux corps. Si V est nulle, cela suppose que les corps 1 et 2 sont en adhérence (Belphégor, 2005). La force résultante R du contact ponctuel entre les deux solides présente les propriétés suivantes figure 1.8b :

- Sa direction est inclinée d'un angle α par rapport à l'axe normal commun aux deux solides,
- Sa composante normale P est orientée vers l'intérieur du solide 1,
- Sa composante tangentielle T est située dans le plan tangent aux surfaces en contact et dans la même direction que le vecteur vitesse de glissement V ,
- L'angle entre la direction de la résultante et de la normale P dépend de la nature du contact. P est de nature à écraser 1 et 2 l'un contre l'autre. T a pour effet d'empêcher 1 de glisser par rapport à 2.

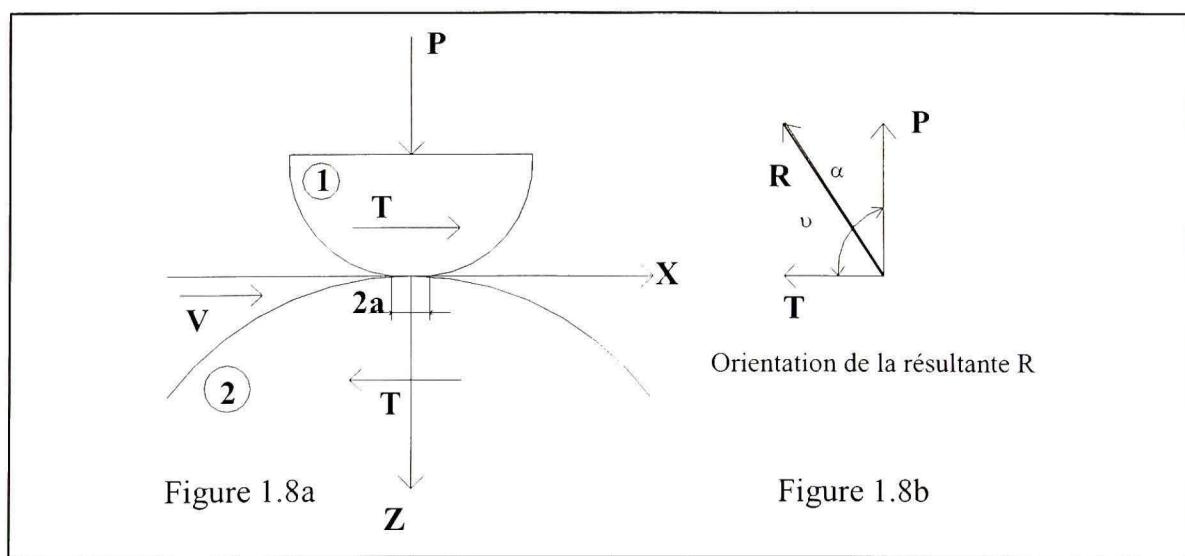


Figure 1.8 Déformation élastique sous une charge normale et tangentielle.

Si 1 et 2 sont en adhérence ($V = 0$) alors la direction de la force de contact décrit un angle α avec sa normale P inférieur à un angle θ . Cet angle θ est nommé angle de frottement et dépend de la nature du contact.

Si 1 et 2 sont glissant alors l'angle α est égal à l'angle de frottement. Réciproquement, si $\alpha < \theta$ alors 1 et 2 sont en adhérence. Si $\alpha = \theta$ alors une de ces deux conséquences s'appliquent mais nous ne savons pas laquelle pour autant :

- 1 et 2 sont immobiles tout en étant à limite de glisser,
- 1 et 2 glissent. L'angle de frottement délimite un lieu géométrique dit cône de frottement.

L'adhérence est un état d'équilibre dépendant des caractéristiques du contact, mais aussi de la résultante d'autres forces mécaniques amenées à être modifiées. Si l'on augmente l'effort tangentiel T , la résultante s'écartera progressivement de sa normale, mais du moment qu'elle reste dans le cône de frottement, le contact maintient un équilibre stable.

Dès que la résultante se retrouve sur la surface du cône de frottement, (α est égale à l'angle de frottement θ) il y a rupture d'adhérence. L'équilibre a basculé dans un état instable qui génère le glissement des deux solides. La vitesse de glissement étant devenue non nulle, il y a mouvement entre les deux solides. Si l'effort tangentiel T est orienté dans le sens de la vitesse de glissement V , cette dernière tend à augmenter en module du fait de l'inertie. Si l'effort tangentiel T est orienté dans le sens opposé à la vitesse de glissement V , cette dernière tend à la diminuer en module du fait de l'inertie. Considérons que le contact précédent soit ponctuel. Les lois de Coulomb nous permettent d'établir le théorème suivant qui peut être vérifié expérimentalement. P étant la charge normale appliquée sur le contact, T étant la force tangentielle appliquée sur le contact.

Le contact est adhérent si :

$$\frac{T}{P} < \mu$$

Avec μ , coefficient d'adhérence tel que, $\mu = \tan(\theta)$ et θ demi angle au sommet du cône de frottement.

La distribution de pression normale est fournie par la théorie de Hertz (formule 1.17). Il en résulte une distribution de contrainte tangentielle :

$$T(x) = \pm \frac{2\mu P}{\pi a L} \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.38)$$

Le signe (-) pour une vitesse V positive.

1.2 Différents travaux sur le contact mécanique.

Ciavarella (1999) a réalisé une étude d'un contact élastique de deux types de poinçon avec un plan semi infini (un poinçon plat avec un bord arrondi et un poinçon conique avec un bord également arrondi). Il décrit les géométries de contact de l'indentation normale, complètement glissante ou même le contact statique partiellement glissant dû à l'application séquentielle des charges normales et tangentielles. L'accent est mis plus particulièrement sur l'essai d'indentation élastique. La détermination de la distribution de pression à l'intérieur de la surface de contact pour les quatre combinaisons possibles est l'objectif principal de cette étude.

- charge normale -poinçon plat avec bord arrondi,
 -poinçon conique avec bord arrondi.
- charge tangentielle -poinçon plat avec bord arrondi,
 - poinçon conique avec bord arrondi.

Et enfin la distribution des contraintes sous la surface de contact a été développée en détail que ce soit pour le poinçon plat ou conique.

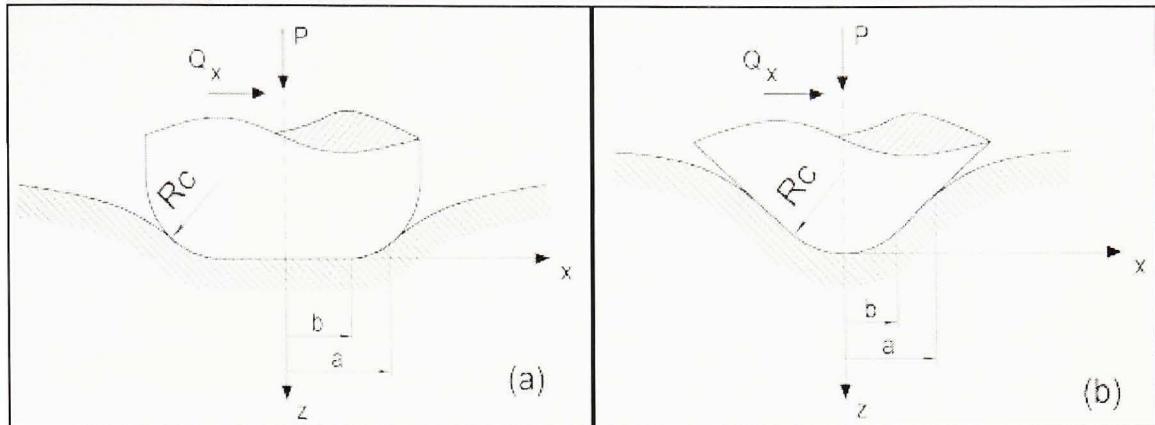


Figure 1.9 Géométries du problème : (a) poinçon plat, (b) poinçon conique.
(Adapté de Ciavarella, M, 1999)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de M. Ciavarella, Indentation by nominally flat or conical indenters with rounded corners. International Journal of Solids and Structures. v 36, P. 4149-4181

Pour le pénétrateur conique, la contrainte de traction maximale dans un contact glissant est toujours inférieure au cas Hertzien, bien que l'avantage soit minime (si b/a est inférieur à $b/a=0.1$, c'est un contact Hertzien). Pour le pénétrateur plat, la pression de contact est importante, à moins que le coin soit particulièrement pointu (b/a supérieur à 0,8). En effet, pour la gamme $0 < b/a < 0,8$, la pression de contact est plus grande qu'un contact Hertzien, en particulier pour un contact normal ou glissant avec un coefficient de frottement inférieur à 0,3.

Bijak-Zochowski (1991) a employé la méthode photoélastique afin de mesurer les contraintes locales qui se développent dans les coins d'un pénétrateur à angles droits comprimant un corps semi infini. La méthode consiste à introduire des changements géométriques sur la configuration du pénétrateur ou du corps semi infini en réalisant une entaille circulaire, dans un premier temps le long du bord libre du pénétrateur, ou bien dans le corps semi infini (Figure 1.10).

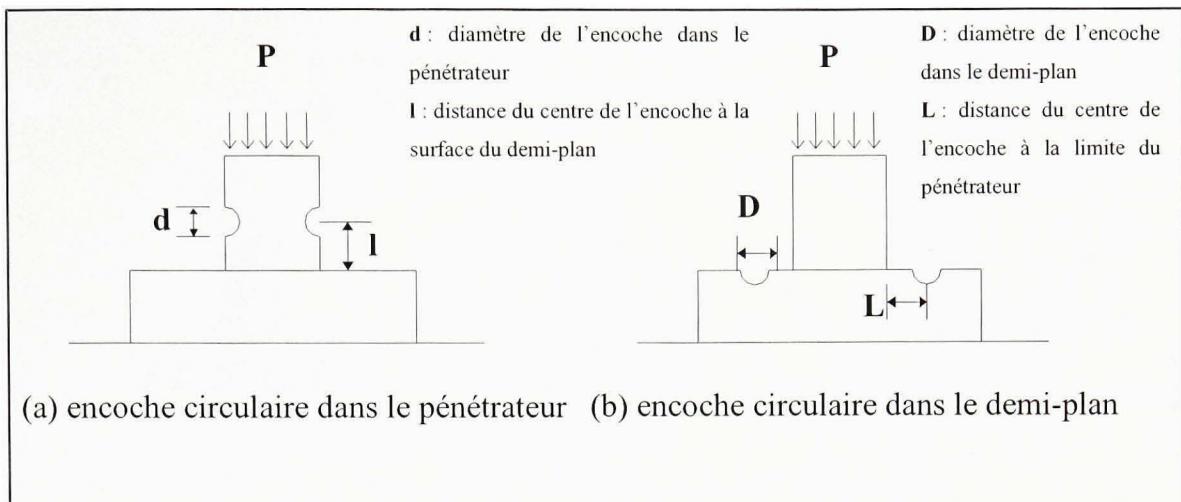


Figure 1.10 Emplacement de l'encoche circulaire.

(Adapté de Zochovski-Bijak, M, 1991)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de M. Bijak-Zochowski, Reduction of contact stress by use of relief notches. Experimental Mechanics.

Selon l'auteur les contraintes singulières dans le bord d'angle droit d'un pénétrateur comprimant un corps semi-infini peuvent être contrôlés ou éliminés totalement par des gorges de dégagement (encoche circulaire). Cependant, la concentration des contraintes est maximale dans la racine de l'encoche elle-même. Par contre, si l'encoche est réalisée dans le plan semi infini, les contraintes peuvent être diminué mais jamais éliminées.

Burquette (1997) a réalisé une étude de comparaison théorique et expérimentale photoélastique pour le contact entre un cylindre et un demi-espace. Trois cas de chargement ont été examinés : le cylindre en contact par sa génératrice avec le plan est soumis à une charge normale, le cylindre en contact par sa génératrice avec le plan est soumis à une charge normale et tangentielle, et enfin, le cylindre en contact par l'une de ses faces avec le plan subit un chargement de compression sur l'autre face (Figure 1.11)

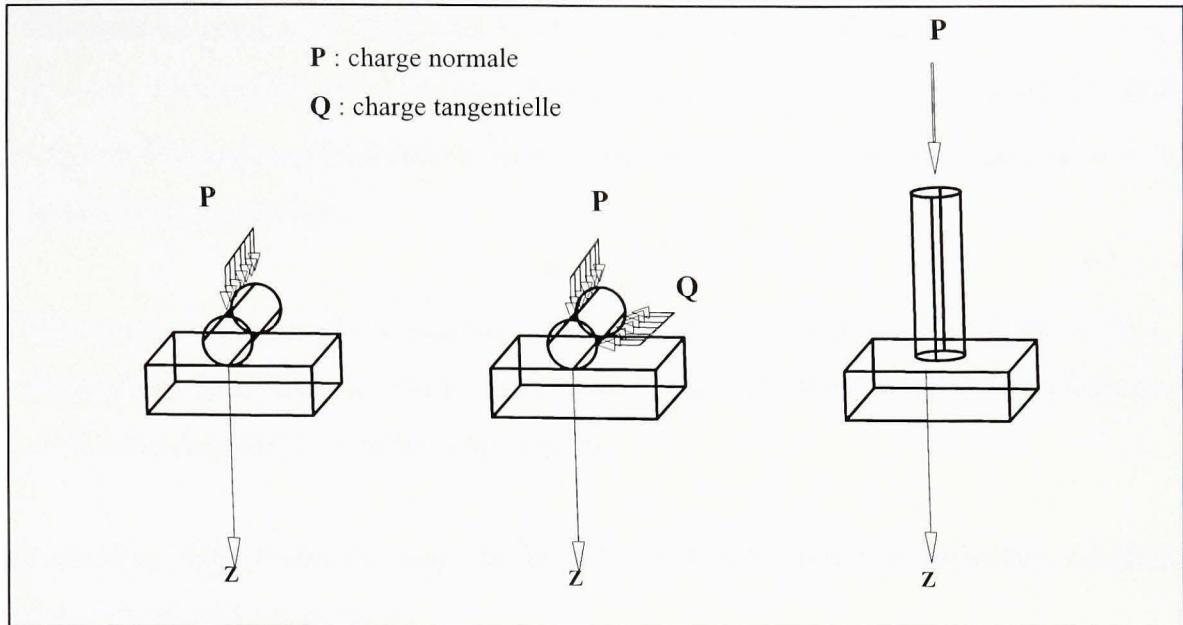


Figure 1.11 Différents cas de chargement.

(Adapté de Burguete, R.L, 1997)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de R. L. Burguete, A photoelastic study of contact between a cylinder and a half-space. Experimental Mechanics, v 37, n 3.

- Chargement normal d'un cylindre sur un demi-espace : La comparaison de la distribution des contraintes (σ_x et σ_z) était faite selon la ligne de symétrie d'un plan perpendiculaire à la surface de contact. Les données expérimentales ont été obtenues par séparation des contraintes le long de cette ligne, dont la répartition théorique est obtenue par :

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = z \left[2 \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}} - \frac{(1+s^2)^{1/2}}{s} \frac{x^2 s^3}{(1+s^2)^{3/2} (s^4 + z^2)} \right] + \mu \left[\frac{x z^2 s}{(1+s^2)^{1/2} (s^4 + z^2)} - 2x \left[1 - \frac{s}{(1+s^2)^{1/2}} \right] \right] \quad (1.39)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = - \frac{z^3 (1+s^2)^{1/2}}{s (s^4 + z^2)} - \mu \left[\frac{x z^2 s}{(1+s^2)^{1/2} (s^4 + z^2)} \right] \quad (1.40)$$

Avec $s^2 = 1/2 \left[- (1 - x^2 - z^2) + \left((1 - x^2 - z^2)^2 + 4z^2 \right)^{1/2} \right]$

- Chargement normal et tangentiel d'un cylindre sur un demi-espace : Dans ce cas la, σ_x et σ_z sont obtenues le long de la bissectrice perpendiculaire à la longueur de contact. La distribution des contraintes de cisaillement est obtenue à une profondeur de 0.5a dans le demi-espace élastique.
- Chargement normal d'un poinçon élastique sur un demi-espace : Pour ce cas, la distribution de la pression normale à l'interface de contact est obtenue à une distance de $z= 0.1$ mm à partir de la surface de contact).

Les résultats expérimentaux sont en bonne corrélation avec les solutions analytiques obtenues par d'autres chercheurs.

L'analyse des contraintes viscoélastiques d'une bande plate sous un contact mobile et avec frottement sec est le sujet d'une étude réalisée par Gotoh (2000). L'article traite de l'évolution du comportement en fonction du temps et de la température des contraintes et des déformations autour d'une région de contact. En ce qui concerne la partie expérimentale de cette étude, une technique photo-viscoélastique de traitement d'image est appliquée afin d'analyser la variation des contraintes et des déformations principales. La Figure 1.12 montre un modèle typique du problème de contact entre un corps viscoélastique et un pénétrateur.

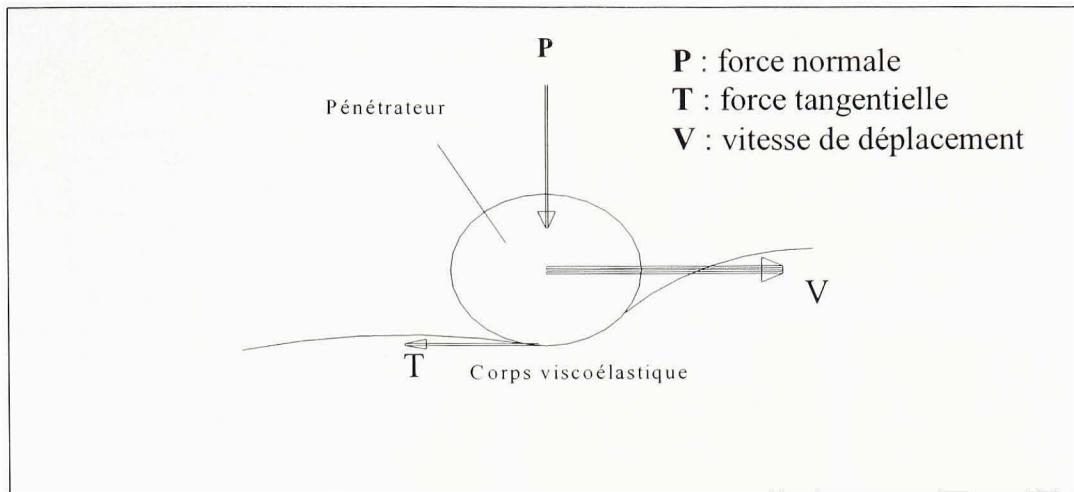


Figure 1.12 Modèle d'un contact viscoélastique.

(Adapté de Gotoh, J, 2000)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de J. Gotoh, Viscoelastic stress analysis of a strip plate under moving contact with dry friction. Mechanics of time-Dependent Materials, v 4, p.43-56.

La charge est appliquée par un corps rigide (pénétrateur) dont la surface de contact est fonction du diamètre du cylindre $D = 26$ mm. Le mouvement du corps rigide est manuel dans le sens vertical et à une vitesse constante V contrôlée par un moteur de 0.37 mm/s dans le sens horizontal (Figure 1.13). La température est réglée à 273 ± 0.5 K. les charges normale P et tangentielle T ont été mesurées et sont de 50 et 35 KN respectivement.

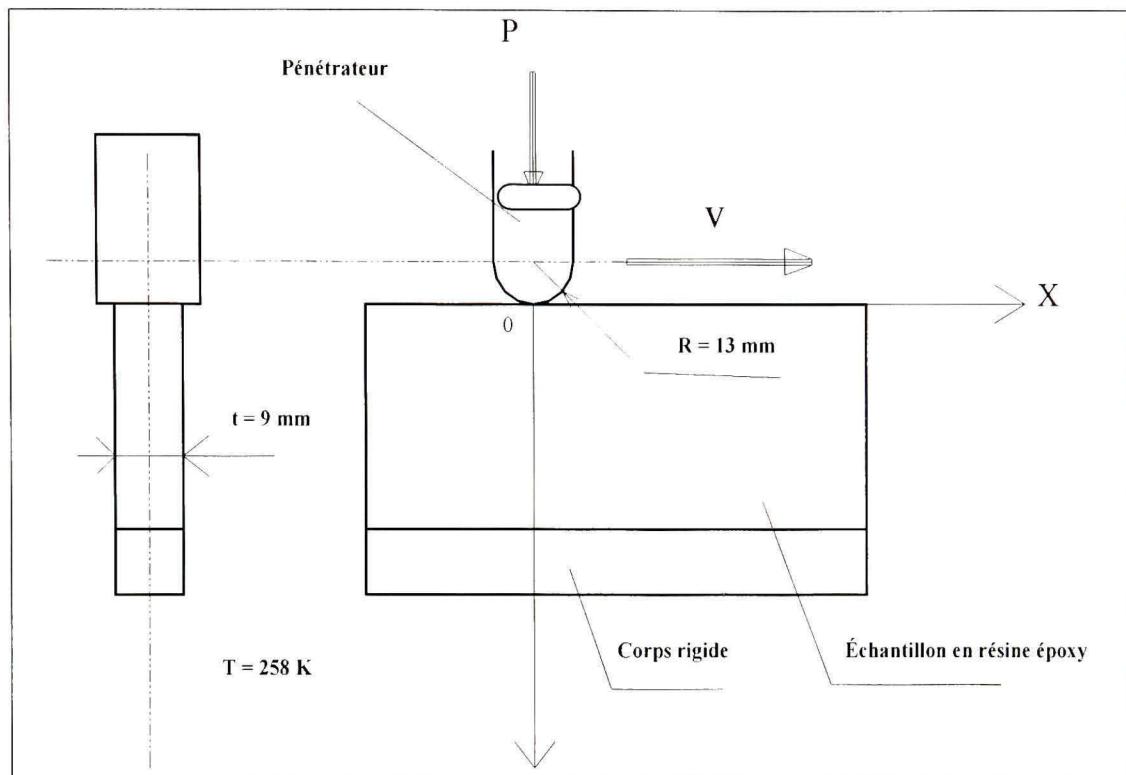


Figure 1.13 Modèle expérimental.

(Adapté de Gotoh, J, 2000)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de J. Gotoh, Viscoelastic stress analysis of a strip plate under moving contact with dry friction. Mechanics of time-Dependent Materials, v 4, p.43-56.

Partant de la symétrie du point de contact, les franges photo viscoélastiques sous le contact d'une charge mobile avec frottement sec sont considérables, ce qui reflète le comportement viscoélastique du matériau et l'effet de la force de frottement sur la surface de contact. Le modèle de distribution de la frange photo viscoélastique est tout à fait différent de celui sous le chargement de contact de roulement.

Autour d'un point de contact, une rotation des biréfringences d'environ 15 degrés vers la direction de chargement est enregistrée. Ce fait indique que la direction des contraintes/déformations principales change sous l'influence de la charge de glissement. D'ailleurs, une force de compression dans l'avant de la région et une force de tension dans l'arrière de la région près de la surface de contact se sont développées sur le corps viscoélastique, en raison de la force tangentielle.

Miniatt et Waas (1990) ont employé la méthode photoélastique pour étudier la nature du champ de contrainte local dans un coin pointu d'une cale qui a été comprimée contre un plus grand corps. Les auteurs ont réalisé plusieurs expériences en comprimant des échantillons plans en matériau élastique contre un demi plan de même matériau en faisant varier les niveaux de charge et l'angle de cale.

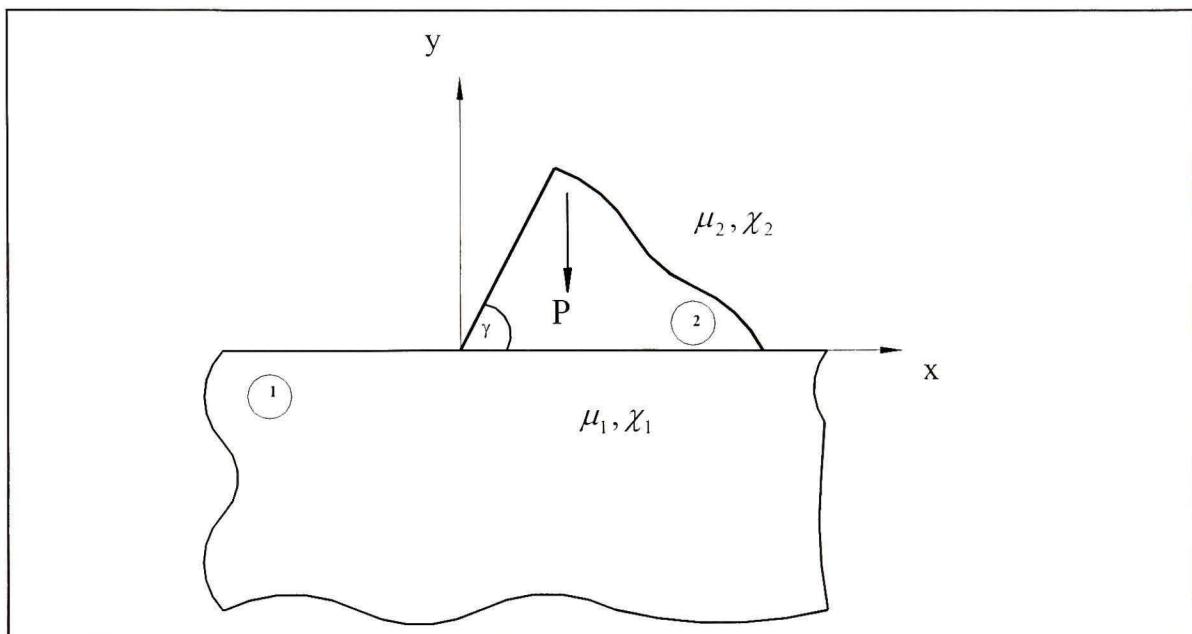


Figure 1.14 Contact d'une cale avec un demi-espace.

(Adapté de Miniatt, A, 1990)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de A. Miniatt, An experimental study of stress singularities at a sharp corner in a contact problem. Experimental Mechanics.

Avec : $\chi = 4 - 3\nu$ en déformation plane

ν est le coefficient de poisson

μ est le module d'élasticité en cisaillement

L'échantillon de cale et le demi-espace ont une épaisseur de 0.336 in de matière plastique de polycarbonate. Pour avoir un contact sans frottement, l'interface était lubrifiée par une

grasse lourde. Les charges ont été étendues de 1.6 KN à 6 KN. Pour chaque incrément de charge, des photos de frange isochromatique ont été prises près et loin du champ de contrainte. L'appareil photo est dirigé vers l'échantillon par l'analyseur, les photos du champ des contraintes ont été prises à une distance de 1.5 m de l'échantillon.

L'effet favorable du frottement sur le champ de contrainte était enregistré à un angle de cale supérieur à 95 degrés. Les meilleures valeurs de la charge P qui sont en accord avec la théorie ont été obtenues à un angle $\gamma \leq 105^\circ$.

Burquete (1997) a utilisé la photoélasticité tridimensionnelle, cette fois ci pour étudier l'effet de la géométrie de contact et le frottement inter facial dans la distribution des contraintes d'un poinçon agissant sur un plan semi infini (Figure 1.15).

L'analyse est exécutée à l'aide d'un polariscope automatisé basé sur la méthode de progression de phase. Tous les échantillons ont une épaisseur de 10 mm et subissent une charge de 156 N. Le chargement a été choisi de sorte que pour chaque tranche d'épaisseur de 1 millimètre l'ordre maximum de frange ait été approximativement de trois. Les échantillons ont été soumis à un cycle thermique, un chauffage à 145°C par palier de $20^\circ\text{C}/\text{heure}$, un maintient à une température de 145°C pendant 4 heures et puis un refroidissement à 60°C par palier de $5^\circ\text{C}/\text{heure}$. Une tranche de 1 mm d'épaisseur à partir du plan médian de chaque échantillon a été enlevée, et la section autour du contact était réduite d'une épaisseur supplémentaire de 0,5 millimètres. Les données ont été rassemblées à l'aide du polariscope automatisé autour de la surface de contact du bord. Le matériau utilisé est la résine MY750 dont le module d'élasticité est de 33.2 MPa.

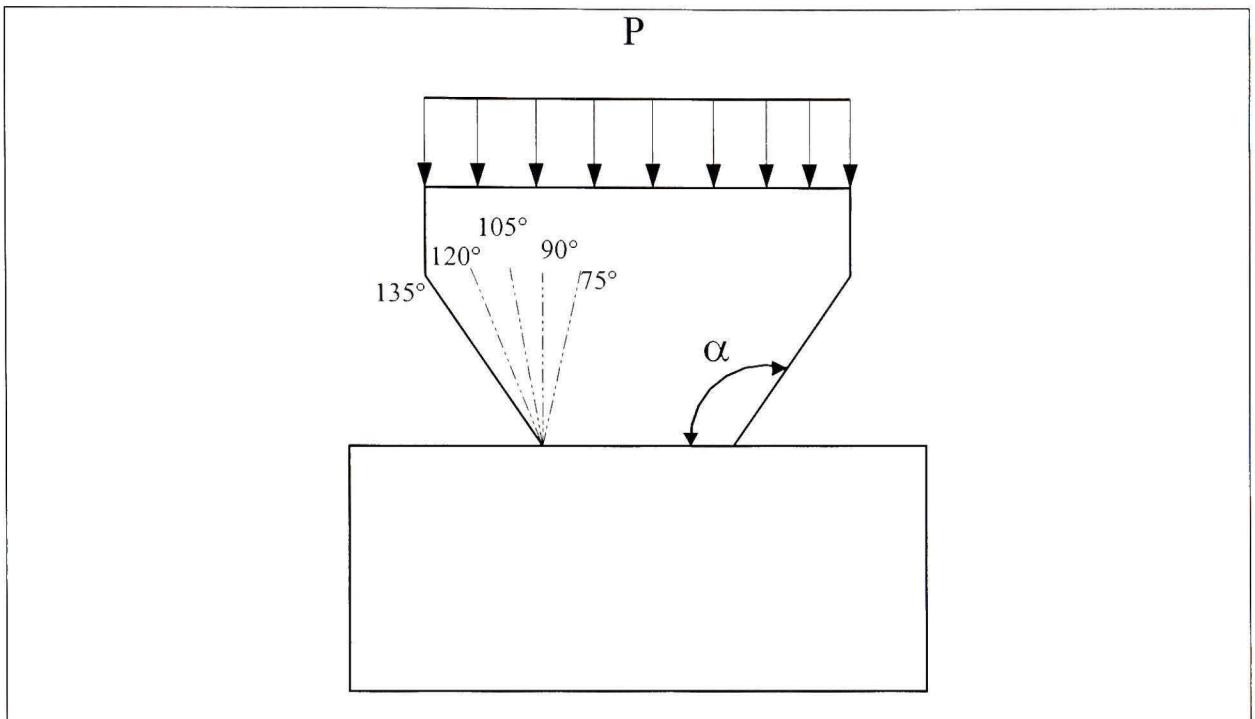


Figure 1.15 Géométrie des échantillons en contact avec un plan semi infini.

(Adapté de Burguete, R.L, 1997)

Source : Cette figure a été adaptée de l'article de R. L. Burguete, A photoelastic study of the effect on subsurface stresses of the contact geometry and friction. Journal of Strain Analysis, v 32, n 6, p. 425-433.

Il y a une relation linéaire entre l'ordre de frange et la distance radiale, ceci confirme que la singularité est de la forme $\sigma = Ar^{p-1}$

Où $\begin{cases} A \text{ est fonction de } \theta \\ p \text{ est un paramètre qui définit le champ de contrainte} \\ r, \theta \text{ rayon et angle dans un système de coordonnées polaires} \end{cases}$

Une conclusion de cette étude indiquait que la contrainte de singularité augmente avec l'augmentation de l'angle α .

Dumont (1994) a étudié l'influence des rugosités et du frottement sur le tenseur des contraintes dans un massif élastique semi-infini. Dans le cas d'un contact sec ponctuel soumis à une pression de Hertz et dans le cas d'un contact lisse élastohydrodynamique, il a

examiné l'influence du frottement sur la valeur et la position dans le massif de la contrainte de cisaillement maximum de Von Mises. Pour un chargement de Hertz sans frottement, la répartition des contraintes est symétrique. La contrainte maximale de Von Mises est égale à $0.35P_{\max}$ et se trouve à une profondeur de $0.48a$. Où a est la demi-largeur du contact de Hertz.

En présence de frottement, la répartition des contraintes n'est plus symétrique. Le frottement provoque une zone de cisaillement maximum qui se rapproche de la surface et des bords du contact. Au-delà d'un coefficient de frottement de 0.3, la contrainte maximale se trouve en surface.

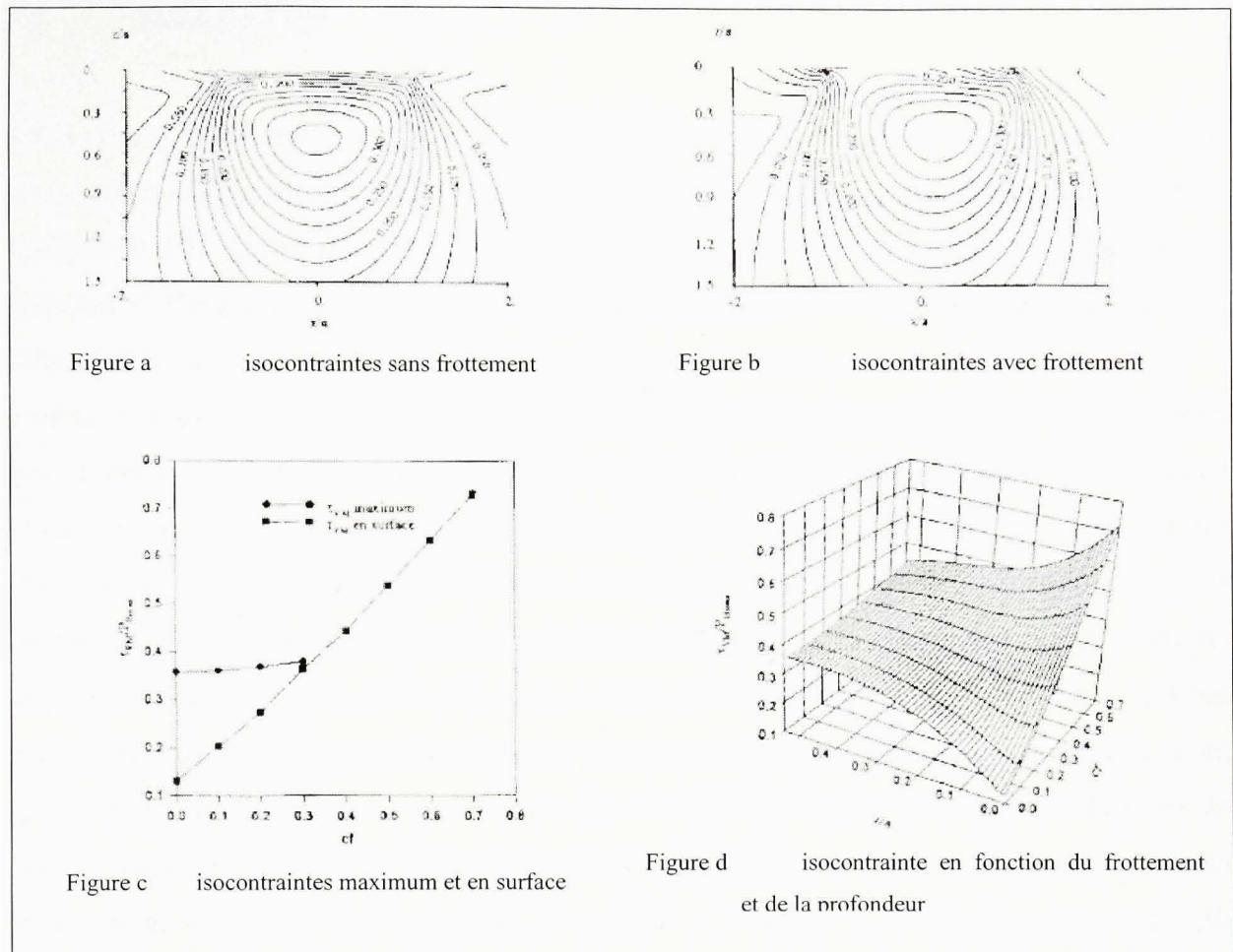


Figure 1.16 Influence du frottement sur la contrainte de cisaillement max.
(tiré de Dumont, M.L, 1994)

Source : Cette figure a été tirée de l'article de M. L. Dumont, Influence des rugosités et du frottement sur le tenseur des contraintes dans un massif élastique semi-infini. Revue Française de Mécanique. n°1994-2, P. 104-113.

Sackfield (2002) a démontré l'influence du rayon de l'arrête sur le champ de contrainte local dans un contact coin. Shih (1992) a réalisé une analyse photoélastique et par éléments finis du contact de plusieurs sphères de différente taille, il a conclu que la distribution des contraintes dans les deux sphères est la même, et pour une paire de sphère en contact, la contrainte de cisaillement maximale dans la plus grande sphère et très proche de la solution donnée par Hertz. Finalement l'article de Dally (1991) porte sur la photoélasticité dans un contact multipoints (aspérités).

1.3 Récapitulatif

On distingue deux types de travaux qui peuvent être jugés intéressants : Ceux qui ont utilisé un modèle expérimental basé sur la photoélasticité comme moyen pour déterminer la répartition des contraintes dans un plan semi-infini sous un chargement combiné (forces normale et tangentielle), et ceux qui ont étudié la variation des contraintes sous l'effet du changement des paramètres géométriques dans un contact coin.

Après ce survol de la littérature qui touchait, d'une part, la résolution du problème de contact par la théorie de Hertz, et d'autre part, les études expérimentales réalisées sur le contact élastique de deux corps, on peut dire que de nombreux problèmes de contact n'entrent pas directement dans les hypothèses associées au contact de Hertz. C'est par exemple le cas où le développement en paraboloïde des surfaces ne suffit pas, où l'effet du frottement n'est pas négligé, ou encore si la surface de contact ne se développe pas suivant une ellipse. Quant aux travaux des chercheurs, un bon nombre de paramètres et combinaisons de paramètres ont été considérés mais aucun auteur n'a essayé de réunir un nombre important de facteurs en même temps, à savoir : différents niveaux de chargement normal, différents niveaux de chargement tangentiel, une variation de l'angle en contact et le contact entre corps de différents matériaux. Le prochain chapitre fera l'objet de la construction du plan d'expériences nécessaire à la réalisation d'une étude qui tient compte des facteurs ayant une influence significative sur un contact coin.

CHAPITRE 2

PLAN D'EXPÉRIENCES

Les plans d'expériences jouent un rôle de plus en plus prépondérant dans différents secteurs industriels. Leur utilisation permet d'obtenir un maximum d'informations en un minimum d'expériences. Les plans d'expériences sont d'ailleurs à la base des protocoles industriels modernes. Les plans d'expériences constituent des stratégies efficaces pour concevoir l'expérimentation de manière à minimiser le nombre d'essais à réaliser et, simultanément, à maximiser le nombre de facteurs ou paramètres étudiés. Ils permettent aussi la simplification des analyses statistiques et l'interprétation claire et nette des résultats. Les plans d'expériences statistiques permettent d'obtenir un maximum d'informations à un coût minimal.

Les avantages bien connus de la méthode des plans d'expériences par rapport à une méthode d'expérimentation traditionnelle sont nombreux, notamment :

- L'efficacité : seules les expériences indispensables sont réalisées,
- L'exactitude : pour un effort expérimental donné, la plus grande exactitude possible sera atteinte,
- Les interactions : les synergies existant entre les paramètres sont identifiées et mieux comprises,
- précision et optimisation des résultats,
- une stratégie d'essais : essais planifiés,
- interprétation graphique simple,
- conclusions fiables.

Les inconvénients :

- nécessite une bonne maîtrise de la théorie,
- nécessite également un sens des réalités pour éviter des plans lourds et donc coûteux, peut ne pas aboutir (par ex : choix " hasardeux " des facteurs).

2.1 Construction d'un plan d'expériences

Parmi les différentes phases qui interviennent dans la réalisation d'un plan d'expériences, sa construction est la partie la plus importante dans la méthodologie d'un expérimentateur. Une préparation bien soignée s'effectue en plusieurs étapes principales. Les étapes liées au présent travail suivent ci-dessous :

2.2 Description de l'étude

L'étude est basée sur l'emploi de la photoélasticité pour la mesure des contraintes de cisaillement maximal. L'annexe 1 décrit en détails l'application de cette technique. Toutefois, la reprise de certaines notions dans cette sous section est souhaitable.

La variation de l'ordre de frange dans un point donné, selon une direction déterminée est proportionnelle à la variation de la différence des déformations (contraintes) principales.

La formule générale dans l'analyse des contraintes utilisant la méthode photoélastique sur des plaques minces planes ou galbées et analysée avec un polariscope par réflexion est :

- En déformation plane

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = f \cdot N \quad (2.1)$$

avec :

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$: Déformations principales

f : Constante de frange du matériau photoélastique

N : Ordre de frange ou le résultat des mesures (ce sont les franges colorées du matériau transparent lorsqu'il est soumis à des efforts).

- En contrainte plane

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E}{1 + \nu} \cdot f \cdot N \quad (2.2)$$

avec :

σ_1, σ_2 : Contraintes principales

E, ν : Module d'élasticité et coefficient de Poisson du matériau photoélastique

Pour mesurer l'ordre de frange, on fixe un point non loin des surfaces en contact selon une direction où les deux contraintes principales ne sont pas nulles. On exerce une pression normale sur l'échantillon supérieur et une pression tangentielle sur l'échantillon inférieur et on observe l'ordre de frange à l'aide d'un polariscope par réflexion. L'échantillon supérieur peut prendre plusieurs formes, tandis que l'échantillon inférieur est de différents matériaux.

La précision des résultats dépend d'une part, de la précision de mesure de N car, le résultat des mesures peut varier de 0.5 à 3% et d'autre part, de la sensibilité du matériau employé c'est-à-dire de la valeur de frange f . plus cette valeur est faible et plus le matériau est sensible (Avril, 1974).

$$f = \frac{\lambda}{2 \cdot t \cdot K} \quad (2.3)$$

Avec :

λ : Longueur d'onde utilisée

t : Épaisseur du matériau employé

K : Sensibilité du matériau

Donc, pour obtenir un maximum de sensibilité (valeur de f minimale), le facteur K et l'épaisseur t doivent être aussi importants que possible. Le polyester (nom commercial PS1) avec une constante de $625 \mu\text{e}/\text{frange}$ est le matériau retenu pour la réalisation des essais.

En tenant compte de la constante photoélastique, du module d'élasticité et du coefficient de poisson du matériau utilisé, on peut à partir de l'équation (2.2) calculer une nouvelle constante nécessaire à la mesure des contraintes.

$$f_\sigma = \frac{E}{1 + \nu} f = \frac{2500}{1 + 0.38} * 625 * 10^{-6} = 1,132 \text{ MPa/frange} \quad (2.4)$$

2.2.1 Interprétation des franges photoélastiques

Ici, on rappelle juste le moyen de passage des isochromes aux contraintes principales. La technique d'interprétation des franges photoélastiques est décrite en détail à l'annexe 1.

Chaque frange photoélastique est une ligne isochromatique qui apparaît comme dans la figure 2.1, et qui est le lieu des points d'égale valeur de différence des contraintes principales. Le réseau complet des isochromes s'analyse en comptant ces franges. Les isochromes changent en fonction du chargement, le champ sombre représente l'échantillon sans sollicitation. Avec un chargement graduel, les couleurs apparaissent dans l'ordre suivant : le gris, le blanc, le jaune, l'orange, le rouge foncé, pourpre (c'est la teinte de passage $Of=1$), bleu foncé, bleu-vert, vert-jaune, orange, rouge-rose, teinte de passage ($Of=2$), vert,etc. Une frange est la ligne de séparation entre le rouge et le vert, ou le rouge et le bleu pour la frange 1. La figure et le tableau suivant indiquent la correspondance entre la couleur et l'ordre de frange d'un matériau photoélastique de type PS1.

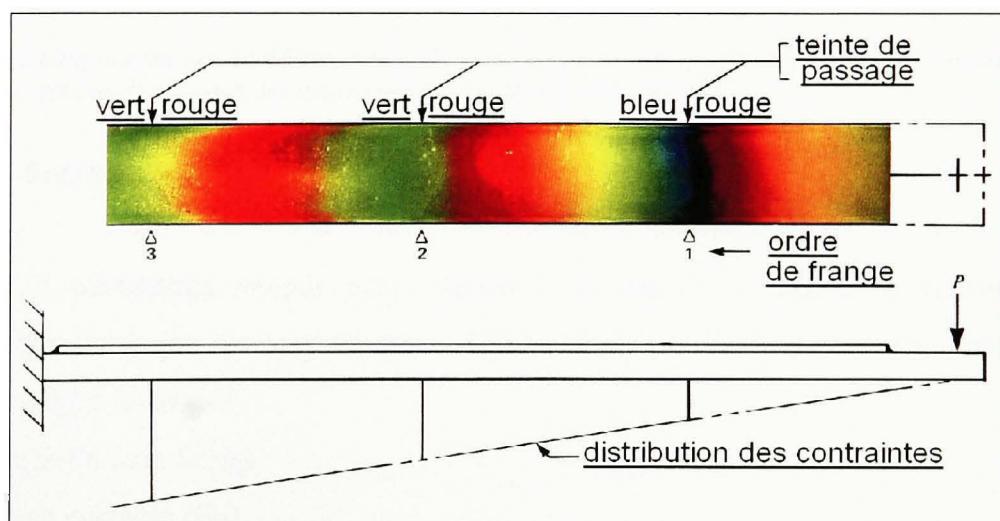


Figure 2.1 Franges colorées d'une poutre en flexion.

(Adapté de Photoelastic Division measurement group, Inc., 1992)

Tableau 2.1

Mesure de l'ordre de frange en fonction de la couleur
(Adapté de Photoelastic Division measurement group, Inc., 1992)

Color	Approximate Relative Retardation nm	Fringe Order O_f	Strain* $\mu\epsilon$
BLACK	0	0	0
GRAY	160	0.28	265
WHITE	260	0.45	425
PALE YELLOW	345	0.60	570
ORANGE	460	0.80	760
DULL RED	520	0.90	855
PURPLE (TINT OF PASSAGE)	575	1.00	950
DEEP BLUE	620	1.08	1025
BLUE-GREEN	700	1.22	1160
GREEN-YELLOW	800	1.39	1320
ORANGE	935	1.63	1550
ROSE RED	1050	1.82	1730
PURPLE (TINT OF PASSAGE)	1150	2.00	1900
GREEN	1350	2.35	2230
GREEN-YELLOW	1440	2.50	2380
RED	1520	2.65	2520
RED/GREEN TRANSITION	1730	3.00	2850
GREEN	1800	3.10	2950
PINK	2100	3.65	3470
PINK/GREEN TRANSITION	2300	4.00	3800
GREEN	2400	4.15	3940

* Type PS-1 photoelastic plastic, 0.080" (2 mm) thick, $f = 950 \mu\epsilon/\text{fringe (reflection)}$

Source : ce tableau a été tiré du mémoire de B. Martin, Application de la photoélasticité à la mesure de la contrainte dynamique des engrenages cylindriques. ÉTS, Montréal.

2.3 Facteurs

Ce sont les paramètres retenus pour l'étude. La revue de la littérature, les expériences préliminaires ainsi que les connaissances déjà acquises sur la méthode nous ont conduits à identifier quatre facteurs :

1. angle du coin (Ang),
2. force normale (Fn),
3. force tangentielle (Ft),
4. matériau des pièces en contact (Mat).

Ces facteurs sont ceux, qui affectent de manière significative les contraintes.

2.4 Niveaux des facteurs

Ce sont les valeurs à donner aux différents paramètres lors des essais. Le choix des niveaux à donner aux paramètres s'effectue sur des considérations tels que :

- Ils se situent à des valeurs correspondant aux zones d'exploitation du système dans le cadre du problème.
- Les niveaux des facteurs quantitatifs doivent être équidistants.
- identification d'éventuelles interactions entre paramètres.

Les quatre facteurs déjà identifiés ont les niveaux suivants :

- $75^\circ, 90^\circ, 105^\circ$ pour l'angle du coin,
- $133,5 \text{ N}, 222,4 \text{ N}, 311,4 \text{ N}$ pour la force normale,
- $8,9 \text{ N}, 17,8 \text{ N}$ et $26,7 \text{ N}$ pour la force tangentielle,
- Le caoutchouc, le plastique (PS1) et l'acier pour le matériau en contact.

Il est à noter que seule la plaque de dessous change de matériau et que l'échantillon supérieur est toujours de matériau photoélastique. Le choix du chargement normal est lié directement à la sensibilité du matériau photoélastique et à la valeur admissible de la cellule de charge. Et la plus grande valeur de la force tangentielle est en relation direct avec la limite de la force statique.

Le plan retenu pour l'étude comporte donc quatre-vingt-un essais. C'est un plan factoriel complet³⁴. Ce type de plan nous permet d'utiliser un modèle quadratique pour l'exploitation des résultats.

L'équation du modèle choisi est la suivante :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ii} x_i^2 + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ijk} x_i x_j x_k + \sum a_{ijl} x_i x_j x_k x_l + \dots \quad (2.5)$$

Nous reviendrons avec plus de détails sur cette équation dans la modélisation.

Le domaine d'étude est ainsi défini par les niveaux hauts et les niveaux bas de tous les facteurs.

2.5 Réponse

C'est la grandeur à laquelle on s'intéresse. Ici, la réponse est la contrainte de cisaillement max (ordre de frange) observée par le polariscope à réflexion et calculée par les formules de la photoélasticité.

2.6 Choix du plan d'expériences

Malgré que l'on ait déjà opté pour le plan factoriel complet à trois niveaux (3^4) qui consiste à tester toutes les combinaisons des paramètres sélectionnés, on a jugé nécessaire de rappeler l'existence de plusieurs stratégies d'expérimentation. Parmi lesquelles figure le plan réduit, qui se limite à une partie des combinaisons des facteurs. Il existe aussi les plans Taguchi de Génichi Taguchi qui a proposé une sélection de plans réduits.

Le choix n'est pas arbitraire, les plans factoriels sont simples à mettre en œuvre, et ils permettent de mettre en évidence très rapidement l'existence d'interactions entre les facteurs.

2.7 Plan d'expériences

Les quatre facteurs influents sur la pression de contact ainsi que leurs limites de variations ont été déjà déterminé. Généralement le plan d'expérience est représenté sous forme géométrique. Étant donné que le nombre de facteurs est supérieur à 3, on se retrouve dans un espace multidimensionnel et cette représentation ne peut plus être employée. Donc, on adopte une reproduction sous forme de tableau.

Afin de traiter tous les facteurs de la même manière, nous affectons la notation '1' au niveau bas, '2' au centre et '3' au niveau haut de chaque facteur. Il s'agit ainsi de variables codées. Une table de plans d'expériences est une matrice qui contient en ligne d'entrée, les facteurs retenus (facteur F_t , ... Ang), en colonne d'entrée, les indices des essais à réaliser (essai n° 1, n° 2, ...n° 81) et dans les trois dernières lignes, les différents niveaux des facteurs.

Tableau 2.2

Matrice d'expériences (plan 3^4)

ESSAI No	Niveau des facteurs en valeurs codées	Ft	Fn	Mat	Ang	Réponse En ordre de frange
1	1111	1	1	1	1	N1
2	2111	2	1	1	1	N2
3	3111	3	1	1	1	N3
4	1211	1	2	1	1	N4
5	2211	2	2	1	1	N5
6	3211	3	2	1	1	N6
.	
28	1112	1	1	1	2	N28
29	2112	2	1	1	2	N29
30	3112	3	1	1	2	N30
31	1212	1	2	1	2	N31
32	2212	2	2	1	2	N32
.	
77	2233	2	2	3	3	N77
78	3233	3	2	3	3	N78
79	1333	1	3	3	3	N79
80	2333	2	3	3	3	N80
81	3333	3	3	3	3	N81
NIVEAU BAS		8.9	133.5	Caoutchouc	75°	
NIVEAU MOYEN		17.8	222.4	PS1	90°	
NIVEAU HAUT		26.7	311.4	Acier	105°	

La colonne de la force tangentielle est formée par alternance de 1,2 et 3 en commençant par 1. Celle de la force normale est formée par alternance de trois lignes de 1, trois lignes de 2 et de trois lignes de 3. Pour le matériau en contact, la suite des chiffres est constituée de 9 de 1,

9 de 2 suivis de 9 de 3. Et enfin, le facteur 4 (angle du coin) a vingt-sept 1, puis vingt-sept 2, suivis de vingt-sept 3.

2.8 Surface de réponse

La surface de réponse représente le comportement de la réponse quand on fait varier les niveaux des facteurs. De sa connaissance on peut déduire les meilleurs ajustements des facteurs pour minimiser la contrainte de cisaillement maximal près du coin.

2.9 Résultats expérimentaux

A partir d'une série de mesure de réponses, il est possible à l'aide de JMP, qui est un logiciel d'analyse statistique doté de puissantes fonctions graphiques permettant d'explorer et d'interpréter les données en toute simplicité. Il offre une vaste panoplie d'outils classiques pour l'analyse statistique, tels que : La moyenne des mesures des réponses, l'effet de chaque paramètre sur la réponse et l'interaction entre les facteurs.

2.10 La modélisation mathématique

Reprendons l'équation générale du modèle mathématique choisi

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ii} x_i^2 + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ijk} x_i x_j x_k + \sum a_{ijj} x_i^2 x_j^2 + \dots \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est le résultat d'un développement limité de Taylor-Mac Laurin de l'expression générale $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Où f est une fonction qui lie la réponse y aux facteurs x_n .

Dans le cas de notre étude, le modèle fait intervenir quatre facteurs à trois niveaux chacun, qui se traduit en un nombre d'équations suffisant pour calculer les coefficients d'un polynôme de second degré. Comme l'objectif premier est de connaître les facteurs les plus influents et leurs interactions sur la contrainte de cisaillement maximal, l'utilisation d'un modèle polynomial sans les termes carrés est suffisant. Donc, le modèle mathématique choisi se réduit à :

$$y = a_0 + \sum a_i x_i + \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_{ijk} x_i x_j x_k + \sum a_{ijkl} x_i x_j x_k x_l \quad (2.7)$$

y : C'est la réponse

a_0 : Le coefficient constant du modèle et sa valeur représente la réponse au centre du domaine d'étude. $y_0 = a_0$

x_1, x_2, x_3, x_4 : sont les niveaux attribués aux facteurs 1, 2, 3 et 4

a_1, a_2, a_3, a_4 : sont les coefficients des niveaux des facteurs x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement.

$a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots$: sont les coefficients du produit des niveaux des facteurs $x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 x_4, \dots$ respectivement.

.....etc.

Après avoir réalisé les quatre-vingt-un essais, on remplace les réponses et les niveaux par leur valeur, on aura un système de 81 équations avec les inconnues $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12}, \dots, a_{123}, \dots, a_{1234})$. La résolution d'un tel système à l'aide d'une calculatrice symbolique ou un ordinateur ne pose aucun problème.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{123} \\ a_{124} \\ a_{134} \\ a_{234} \\ a_{1234} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdot & x_{1,81} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdot & x_{2,81} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \cdot & x_{3,81} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & \cdot & x_{4,81} \\ x_{1,1}x_{2,1} & x_{1,2}x_{2,2} & \cdot & x_{1,81}x_{2,81} \\ x_{1,1}x_{3,1} & x_{1,2}x_{3,2} & \cdot & x_{1,81}x_{3,81} \\ x_{1,1}x_{4,1} & x_{1,2}x_{4,2} & \cdot & x_{1,81}x_{4,81} \\ x_{2,1}x_{3,1} & x_{2,2}x_{3,2} & \cdot & x_{2,81}x_{3,81} \\ x_{2,1}x_{4,1} & x_{2,2}x_{4,2} & \cdot & x_{2,81}x_{4,81} \\ x_{3,1}x_{4,1} & x_{3,2}x_{4,2} & \cdot & x_{3,81}x_{4,81} \\ x_{1,1}x_{2,1}x_{3,1} & x_{1,2}x_{2,2}x_{3,2} & \cdot & x_{1,81}x_{2,81}x_{3,81} \\ x_{1,1}x_{2,1}x_{4,1} & x_{1,2}x_{2,2}x_{4,2} & \cdot & x_{1,81}x_{2,81}x_{4,81} \\ x_{1,1}x_{3,1}x_{4,1} & x_{1,2}x_{3,2}x_{4,2} & \cdot & x_{1,81}x_{3,81}x_{4,81} \\ x_{2,1}x_{3,1}x_{4,1} & x_{2,2}x_{3,2}x_{4,2} & \cdot & x_{2,81}x_{3,81}x_{4,81} \\ x_{1,1}x_{2,1}x_{3,1}x_{4,1} & x_{1,2}x_{2,2}x_{3,2}x_{4,2} & \cdot & x_{1,81}x_{2,81}x_{3,81}x_{4,81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{79} \\ y_{80} \\ y_{81} \end{bmatrix}$$

Analogie :

Le coefficient a_1 représente l'effet du facteur 1,

Le coefficient a_{12} représente l'effet de l'interaction des facteurs 1 et 2, et ainsi de suite.

2.11 Interprétation des résultats obtenus

L'analyse de variance est l'outil de dépouillement privilégié des résultats d'essais (Goupy, 1988). C'est le pourcentage de contribution de chaque source de variation (paramètre, interaction et résidu) à la variation globale des résultats. Cette analyse est à la fois graphique et statistique.

- graphique : diagrammes des effets des paramètres, graphes d'interactions entre paramètres.
- statistique : qui complète l'analyse graphique et valide les résultats, notamment par la valeur des résidus apparaissant dans l'analyse de la variance.

Le pourcentage de contribution du résidu doit être inférieur à 10, sinon cela signifie que l'on a oublié un paramètre ou une interaction et/ou que l'on n'a pas totalement maîtrisé les conditions d'essais.

A l'issue de l'analyse, on dispose des informations suivantes :

- influence relative des paramètres (classement significatif de l'influence des paramètres),
- confiance dans le résultat (valeur du résidu),
- sens de variation de la réponse en fonction des paramètres,
- les interactions (prévues ou non),
- dispersion.

D'où l'orientation du choix pour l'optimisation des résultats étudiés.

La synthèse à la suite du plan d'expériences peut aboutir à des besoins complémentaires:

- plan d'expériences complémentaires,
- des essais particuliers (confirmation ou autres, ...).

2.12 Quelques notions d'analyses

Étant donné que le logiciel JMP donne plusieurs choix d'analyses statistiques, on a préféré celle qui est basée sur la méthode des moindres carrés qui est le plus souvent utilisée.

- La somme des carrés des écarts à la moyenne des réponses mesurées est égale à la somme des carrés des écarts à la moyenne des réponses calculées plus la somme des carrés des résidus,
- Le résidu est la différence entre les réponses mesurées et les réponses calculées,

Le carré moyen des résidus est la somme des carrés des résidus divisée par le nombre de degrés de liberté des résidus.

CHAPITRE 3

DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

L'objectif consiste à concevoir l'équipement permettant la réalisation des essais du plan d'expériences du chapitre précédent. Il s'agit d'un banc d'essai capable de recevoir deux échantillons de différentes tailles et de différentes formes et de les solliciter par des chargements normal et tangentiel. La réalisation de ce dispositif tient compte d'un ensemble d'éléments susceptibles d'intervenir pendant le déroulement des essais, identifiés à l'issue d'une analyse préliminaire.

En plus des paramètres susceptibles d'influencer les résultats de la campagne expérimentale, il y a les besoins d'expérimentation et les configurations d'essai appropriées qui doivent être identifiés. Une manière de traiter les éléments recensés est de les présenter sous forme d'un diagramme comme le montre la Figure 3.1.

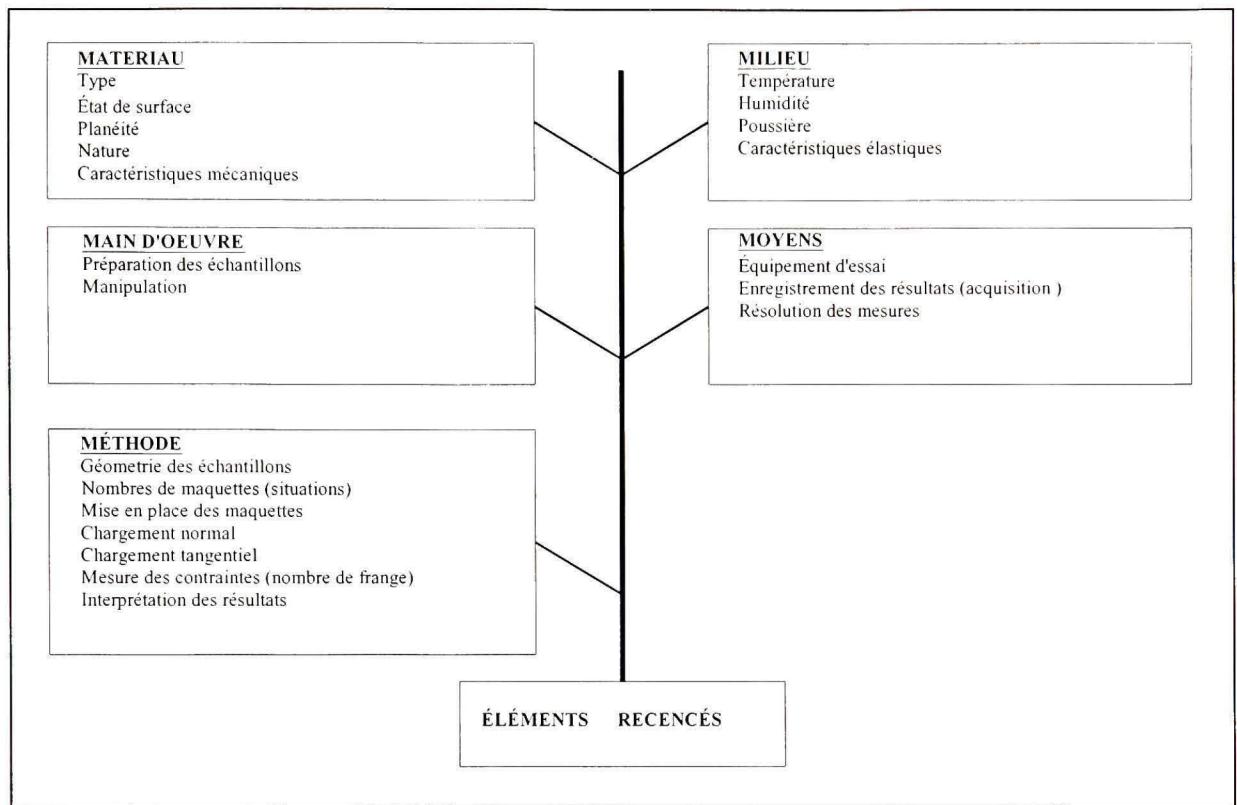


Figure 3. 1 Aide à la conception.

3.1 Description

Le dispositif (Figure 3.2) peut être séparé en trois parties : un assemblage mécanique, un polariscope par réflexion et un système d'acquisition des données. L'utilisation de ce dispositif permet de mesurer l'effet des différents facteurs choisi sur la différence des contraintes principales.

D'une façon générale, le dispositif expérimental que nous avons mis en place permet la réalisation des essais en contact coin entre deux solides de mêmes matériaux ou de matériaux différents et selon une géométrie bien déterminée. Donc, il répond aux besoins expérimentaux suivant :

1. assure la fixation des deux solides, l'un en position verticale et l'autre en position horizontale;

2. assure une poussée verticale et une autre horizontale jusqu'à 1335 N;
3. garantit une précision de lecture adéquate;
4. permet l'enregistrement des données en temps réel;
5. affiche les isocontraintes;
6. facilite la prise de photos pour différents cas de chargement.

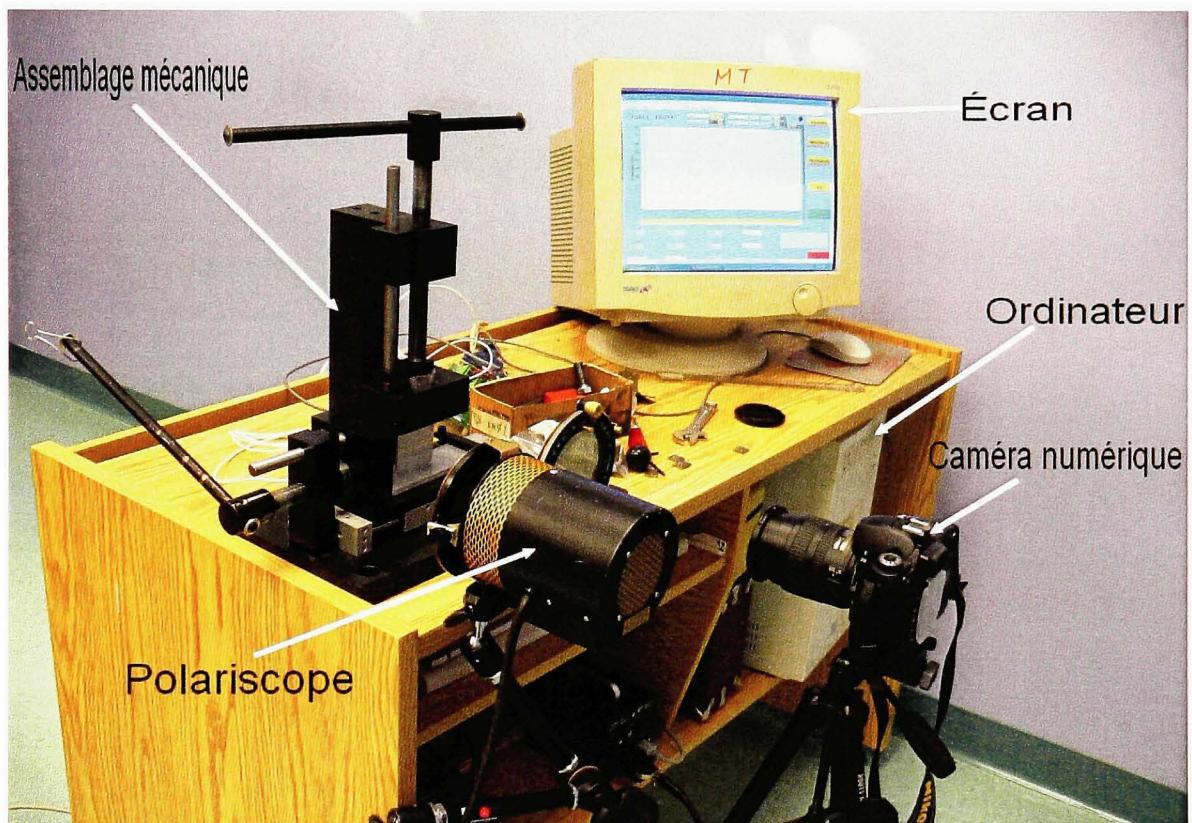


Figure 3.2 Dispositif expérimental.

3.2 Assemblage mécanique

Le schéma de l'assemblage est représenté dans la figure ci-dessous.

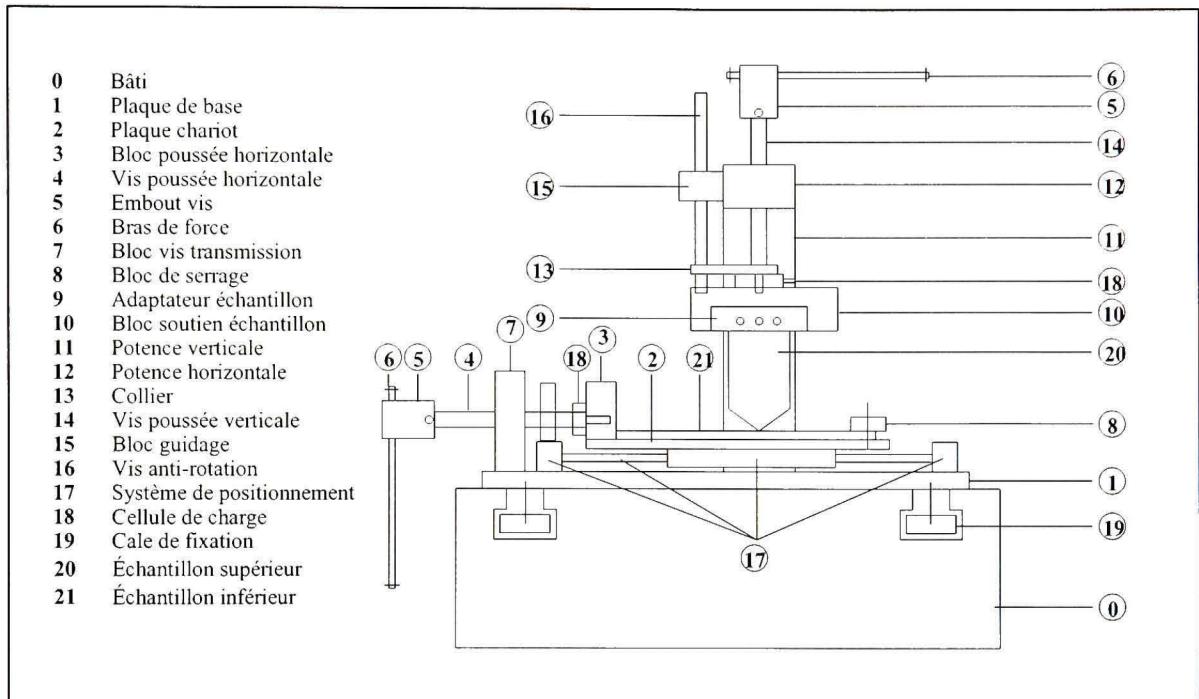


Figure 3.3 Schéma de principe du banc d'essai.

Dans le plan vertical, le chargement normal à l'interface de contact des deux échantillons est réalisé à l'aide d'un système vis-écrou dont la charge maximale de 1.1KN peut être fournie en actionnant manuellement le bras de force (6). Une cellule de charge (18) est fixée sur la partie lisse de la vis et est intercalée entre le collier (13) et le bloc soutien des échantillons (10), permettant ainsi la mesure directe de la force normale. La tige cylindrique (16) vissée dans le bloc soutien des échantillons sert d'une part à empêcher la rotation du porte échantillon pendant l'application de la force normale et d'autre part à éviter le pivotement de tous les éléments en translation verticale durant l'application de la force tangentielle. Un adaptateur (9) est conçu pour recevoir des échantillons de différentes tailles et facilite la manipulation répétée pendant la campagne expérimentale. La rigidité du système est assurée

par la potence verticale (11) qui lie la potence horizontale (12) à la plaque de base, cette rigidité est nécessaire afin que le système ne subisse aucune déformation ou rotation imprévue pendant le chargement.

Dans le plan horizontal, l'échantillon inférieur repose sur une plaque chariot (2) qui est fixée sur un plateau mobile dans la direction tangentielle. La fixation de l'échantillon est assurée d'un côté par un bloc de serrage et de l'autre côté par un bloc de poussée horizontale, ce dernier sert également à recevoir la vis de poussée horizontale. Le mouvement de translation ou le chargement tangentiel à l'interface de contact est assuré par un système similaire à celui du mouvement vertical (système vis-écrou). En ce qui concerne la mesure de force tangentielle, le même type de cellule de charge est installée sur la vis de poussée horizontale.

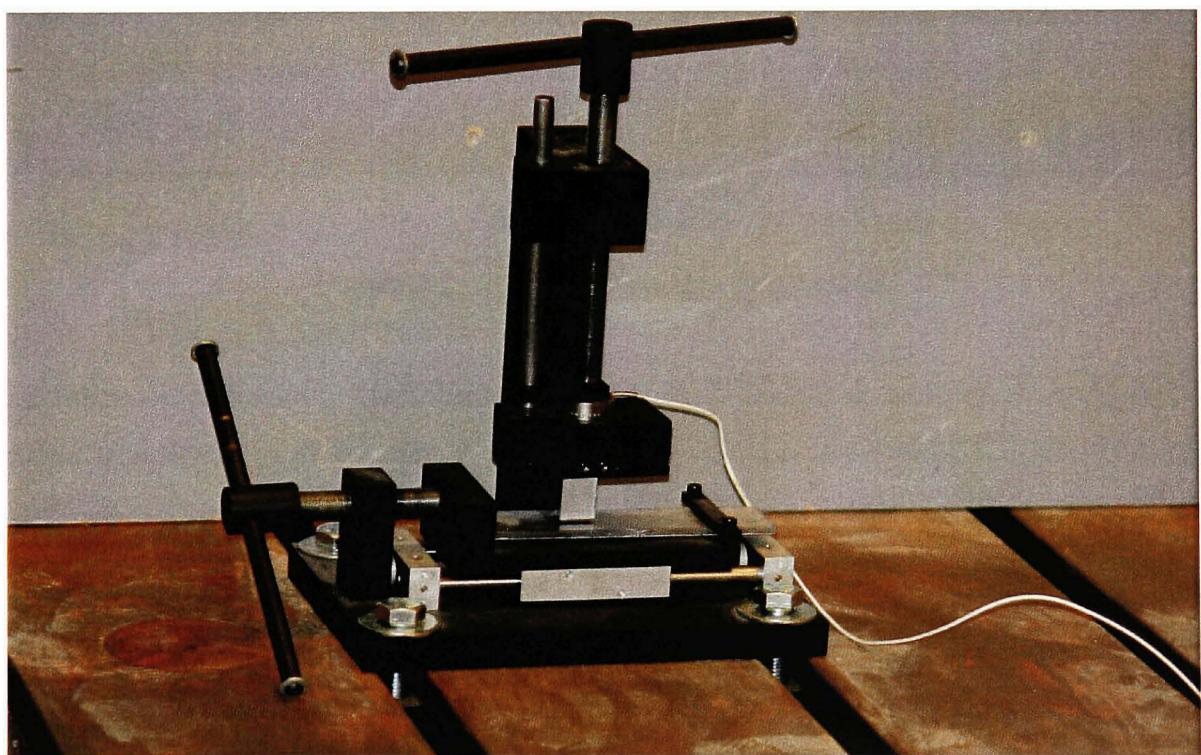


Figure 3.4 Assemblage mécanique.

3.3 Amarrage des éprouvettes

Étant donné que les échantillons ont une épaisseur de 3mm, le mode de serrage constitue lui aussi un problème important du fait qu'il peut induire une contrainte supplémentaire à l'interface de contact. La longueur choisie élimine le risque du flambement d'une poutre de section faible. Les dimensions réelles des éprouvettes sont montrées à la figure 3.5.

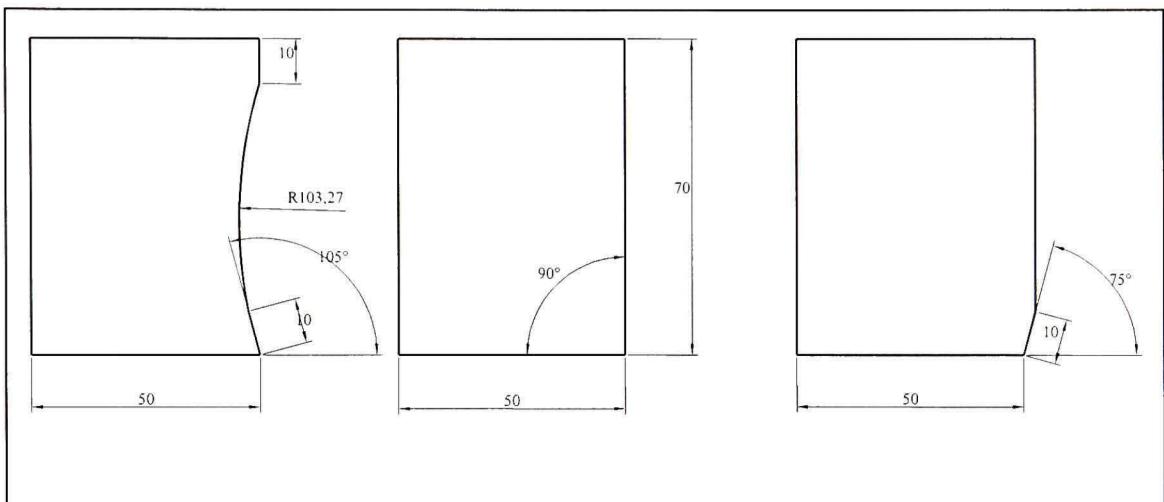


Figure 3.5 Dimensions des éprouvettes.

La fixation de l'échantillon supérieur est réalisée par le biais d'un adaptateur (2) figure 3.6, ce dernier était conçu de manière à ce qu'il puisse recevoir des échantillons de différentes dimensions. En effet dans sa cavité de (57 (L) x 27 (l) x 13.5 (profondeur) mm) on peut placer des éprouvettes qui peuvent aller jusqu'à (55 x 25 mm) de section. On a prévu un certain nombre de calles de différentes tailles pour centrer l'échantillon et assurer l'alignement par rapport à l'axe de la machine d'une part et de combler le jeu existant entre les bords de l'adaptateur et l'échantillon en question s'il s'agit de petites dimensions d'autre part.

Pratiquement l'échantillon inférieur ne pose aucun problème et pour le maintenir à une position désirée, il suffit d'appliquer le même couple de serrage aux deux vis qui viennent avec le bloc de serrage d'une manière à ne pas générer de franges près de la zone d'étude.

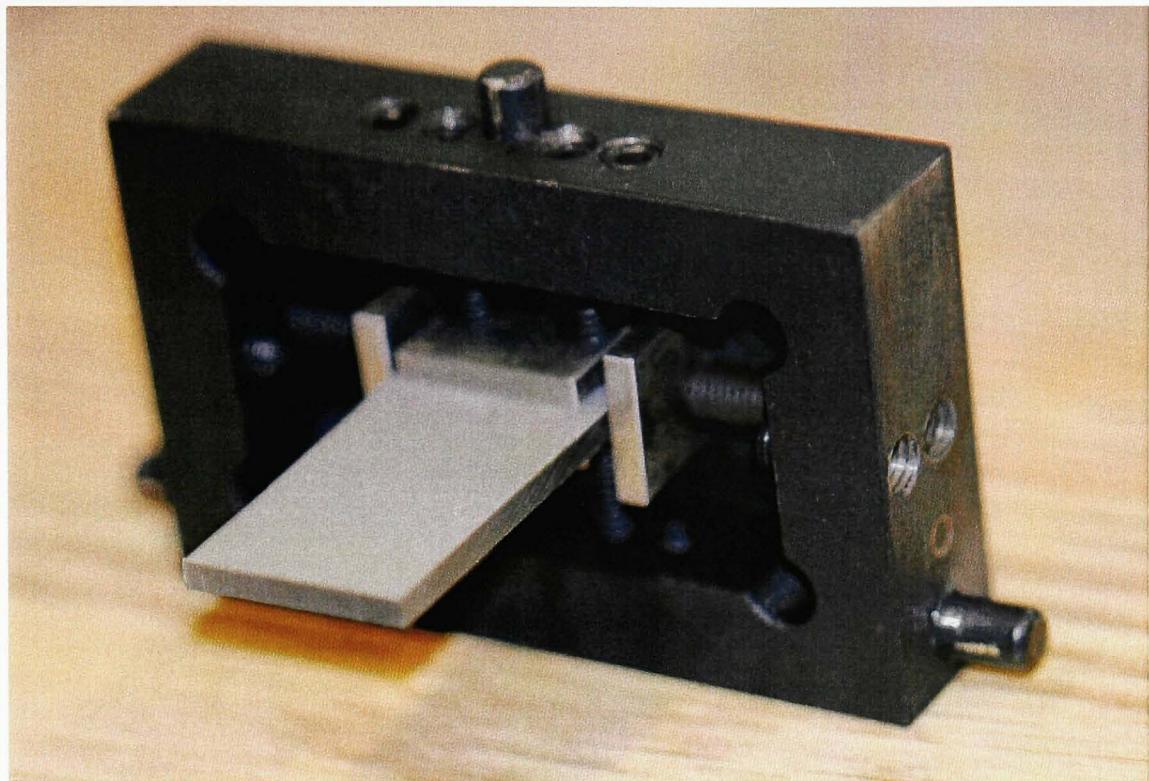


Figure 3.6 Adaptateur pour échantillons.

3.4 Polariscopie par réflexion

Le principe de fonctionnement d'un polariscope par réflexion et celui d'un polariscope par transmission est le même. Seule la disposition relative des éléments diffère. La source lumineuse et l'observateur se trouvent d'un même côté du corps photoélastique Figure 3.7.

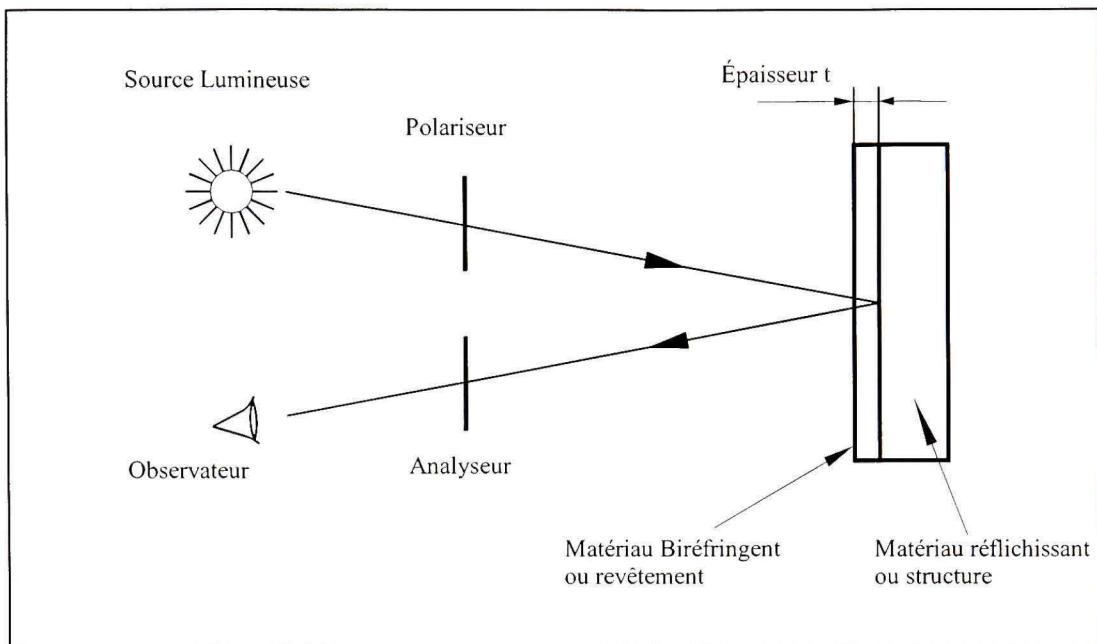


Figure 3.7 Principe de fonctionnement d'un polariscope par réflexion.

Partant donc de la source, la lumière traverse d'abord un polariseur, atteint la structure, est réfléchie, traverse ensuite le analyseur pour atteindre l'œil de l'observateur. Les polariscope par réflexion sont destinés à être utilisés près des structures réelles, ils sont polyvalents.



Figure 3.8 *Polariscope par réflexion.*

3.5 Système d'acquisition des données

Le dispositif de mesure et d'acquisition des données est présenté à la figure 3.9. Selon le plan d'expérience déjà établi, la force normale et la force tangentielle sont les deux facteurs qui nécessitent un enregistrement de leurs valeurs. Pour cela, nous avons utilisé deux cellules de charge de compression avec un trou central fileté de type LC321-250 d'OMEGA dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.1.

Tableau 3. 1
Caractéristiques des cellules de charge

Caractéristiques	Valeurs
Étendue de mesure	0 à 1112 N
Surcharge admissible	Jusqu'à 150%
La limite de surcharge	Peut atteindre les 300%
Tension d'excitation	10 V DC, maximum 15 V DC
Tension de sortie	2mV/V
Précision	±2% sortie pleine échelle (FSO)
Température de fonctionnement	De -54 à 121 °C
Résistance d'entrée	360Ohm minimum
Résistance de sortie	350 ± 5 Ohm
Matériaux	Acier inoxydable
Effet de température	Zéro : 0.005% lecture pleine échelle/°F Étendue : 0.010% lecture/°F

La collecte des résultats de mesures fournies par la cellule de charge passe à travers tous les éléments constitutifs de la chaîne d'acquisition à savoir :

- Deux amplificateurs différentiels ayant chacun un gain de 201,4.
- Un accessoire de connexion économique de 68 bornes (bornier NI-CB-68LPR) à vis pour brancher facilement les signaux d'entrée/sortie de la source aux produits DAQ de 68 broches.
- Une carte d'acquisition NI-DAQ avec une alimentation (0-5V), donc, pas besoin d'une alimentation externe.
- Un PC muni d'un logiciel d'acquisition des données écrit en langage Labview, qui permet la lecture, la visualisation graphique et la sauvegarde des valeurs de chargement en temps réel.

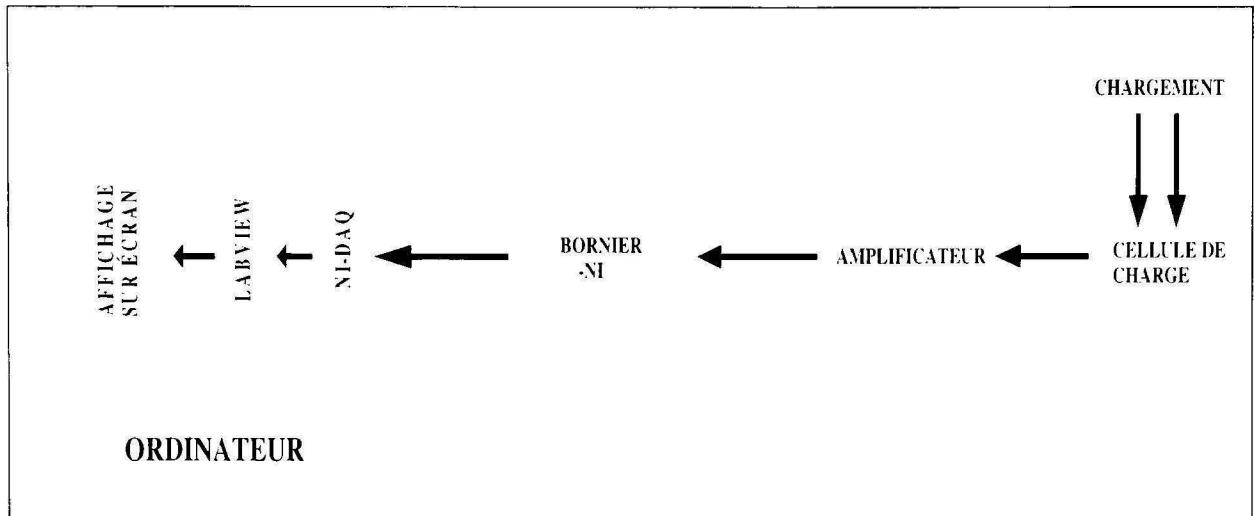


Figure 3.9 Schéma de principe du dispositif d'acquisition des données.

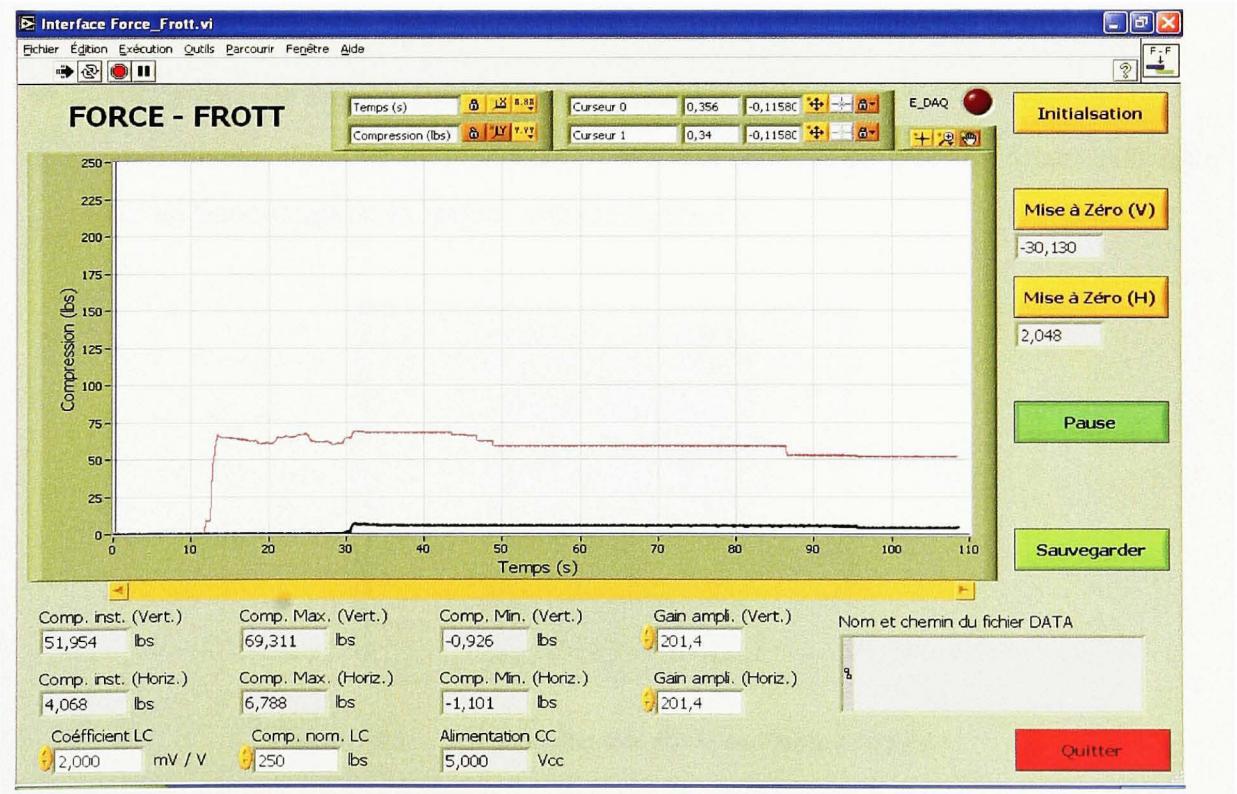


Figure 3.10 Interface Labview.

CHAPITRE 4

CAMPAGNE EXPÉRIMENTALE

L'objectif d'une campagne expérimentale est d'apporter des éléments de réponse quant aux effets du changement des paramètres géométriques sur le contact coin. Ce quatrième chapitre résume les principales étapes suivies lors de la réalisation des essais.

4.1 Préparation des échantillons

Les sollicitations mécaniques et thermiques que subit le plastique lors des opérations d'usinage génèrent des endommagements.

Ces endommagements sont induits par la coupe des échantillons de dimensions 53x70mm à partir d'une feuille standard d'une taille de 254x254mm. La nature du dommage est caractérisée par :

- La formation de fissures interlaminaires dans la matière.
- Une mauvaise découpe du plastique, donne aux surfaces coupées un aspect effiloché, avec un floconnage de la surface coupée figure 4.1.

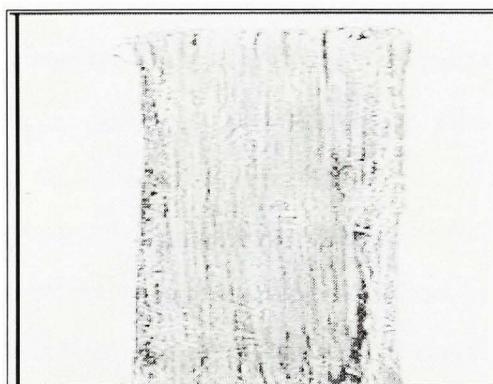


Figure 4.1 Photo grossie de la surface coupée.

(tiré de Ghidossi, P, 2003)

Source : Cette figure a été tirée de la these de P. Ghidossi, Contribution à l'étude de l'effet des conditions d'usinage d'éprouvette en composites à matrice polymère sur leur réponse mécanique. ÉNSAM, Châlons-en-Champagne, France.

- Fléchissement de la matière au niveau de la surface usinée causé par la poussée de l'outil de coupe.
- Risque de dégradation thermique (c'est le dommage le plus important auquel en doit faire très attention) provoqué par un dégagement excessif de chaleur pendant le découpage des échantillons.

La qualité des surfaces obtenues affecte directement les performances mécaniques du matériau. Une dégradation locale sévère provoquée par les conditions de coupe nuit sensiblement aux résultats des tests.

Bien qu'il est difficile ou même impossible de réaliser des éprouvettes avec des surfaces de coupe sans endommagements, plusieurs techniques ont été adoptées pour diminuer l'effet de l'usinage causé par l'outil de coupe. Et les instructions du fournisseur de la matière plastique nous ont conduits à présenter au centre d'usinage de l'école les recommandations suivantes :

- Les opérations d'usinage doivent être menées avec des outils au carbure et parfaitement affûtés.
- L'utilisation d'une scie sauteuse ou d'une scie à ruban est souhaitable.
- Le découpage doit être mené à une vitesse lente mais constante, en évitant les arrêts qui causeraient des frottements et des surchauffes localisées.
- Les échantillons doivent être sciés avec au moins quelques micromètres de surépaisseur.
- Un ajustage de la surface de coupe et ses bords avec du papier abrasif.
- Un nettoyage final à l'aide d'un produit liquide afin de débarrasser les surfaces coupées des résidus de fibres (il est à noter que le nettoyage final de chaque échantillon est réalisé juste avant sa mise en place dans l'adaptateur).

Il est à noter aussi que pendant la découpe des échantillons, il faut prendre les précautions nécessaires afin d'éviter les entailles, les fissures, ou les surfaces rugueuses et inégales.

4.2 Montage des échantillons

Malgré que l'on ait déjà discuté du système de fixation des éprouvettes, il est nécessaire de rappeler certains aspects liés au mode de serrage de l'échantillon supérieur dans son logement.

Après avoir enlevé le papier protecteur des deux faces de l'échantillon, on le place dans la cavité destinée à le recevoir d'une manière à ce qu'il soit centré, ensuite on choisit les quatre calles à insérer entre les vis de l'adaptateur et l'échantillon en question, puis on exerce une force de serrage sur chaque vis graduellement et en alternance en passant d'une vis à son opposée d'une manière de s'assurer que l'échantillon reste centré et que la propagation des franges n'affecte pas la zone étudiée.

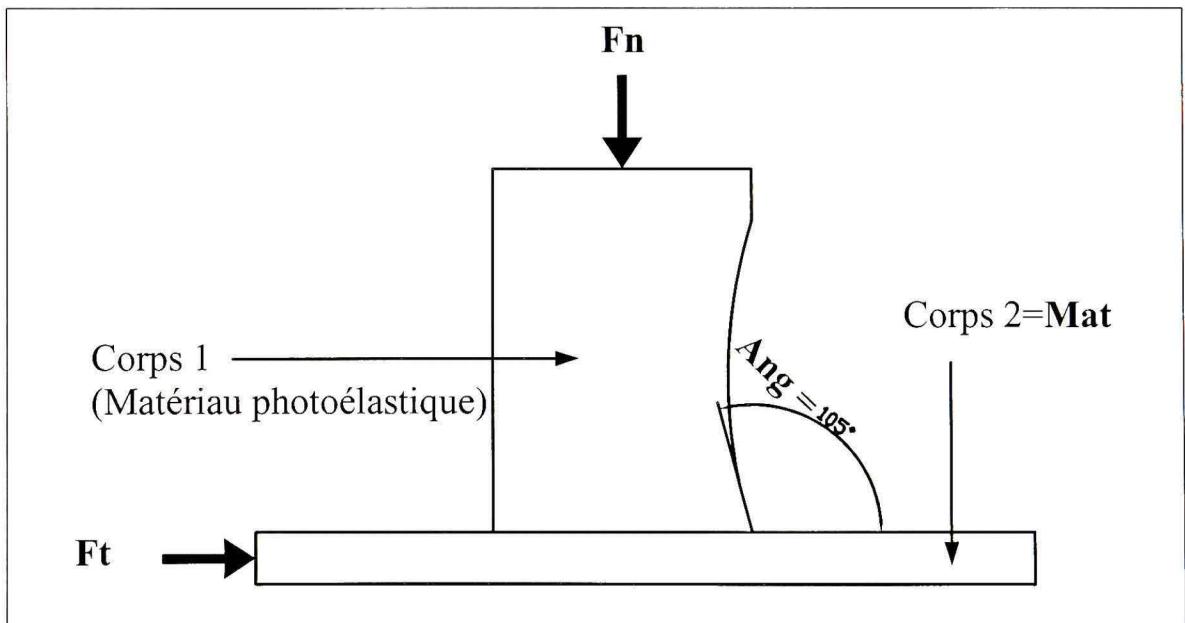


Figure 4.2 Disposition des corps en contact.

4.3 Déroulement des essais

Selon le plan d'expériences, nous sommes tenus d'effectuer 81 essais dans des conditions identiques, que ce soit du côté des facteurs extérieurs (température, pression, poussière,

....etc.), du côté propre à l'équipement (stabilité du système d'acquisition, étalonnage des cellules de charge,etc.) ou du côté de l'expérimentateur (prendre les photos à la même distance de l'objectif, laisser le même intervalle de temps entre l'application de la charge et la prise de photos,etc.).

Dans ce mémoire nous allons décrire en détail un seul essai et les autres seront typiquement semblables.

4.4 Préparation et installation des équipements

Avant de procéder à l'installation des équipements, la première chose à faire est de bien nettoyer l'espace de travail. Le non respect de la propreté peut en effet avoir des conséquences considérables sur les résultats des tests (surtout si un grain de poussière pénètre à l'interface des surfaces de contact des deux échantillons). Une fois le nettoyage terminé, on procède étape par étape à fixer convenablement le polariscope et l'assemblage mécanique à la base destinée à les supporter, puis on ajuste l'ensemble de sorte qu'on puisse prendre facilement des photos de l'échantillon sollicité.

4.5 Procédure d'essai

Pour que l'erreur de lecture des charges appliquées (verticale et horizontale) soit minime, il est nécessaire d'alimenter le système d'acquisition des données trente minutes avant de commencer le test. Pendant ce temps là, on procède au montage des échantillons en suivant les étapes décrites à la section 4.2. Ensuite, on actionne le bras de force (manivelle) jusqu'à ce qu'on aura un jeu de 1 ou 2 mm entre l'échantillon supérieur et inférieur, et on passe à la mise au point du polariscope afin de régler la distance qui le sépare au matériau photoélastique (l'axe de référence du polariscope doit passer par le point d'étude qu'on a choisi au préalable).

Une fois la stabilité du système d'acquisition est atteinte, on applique le chargement normal puis tangentiel d'une valeur égale à la valeur consignée dans le plan d'expérience. Le

lancement de l'enregistrement des mesures nécessite d'abord l'acquisition du zéro de référence, suivie par l'acquisition en continu tout le long de l'essai.

La sauvegarde des résultats dans un fichier texte vient juste après un moment de stabilisation des courbes de chargement. Figure 3.10.

La plus importante et dernière étape de l'essai est la prise de photos de l'échantillon sollicité, sur chaque photo on devrait être capable de :

- d'observer les franges colorées
- différencier toutes les couleurs (noir, jaune, rouge, bleu, rosé, bleu-vert, jaune, rose, vert, ...etc.) surtout les franges qui constituent les lignes de séparation entre le rouge et le vert, le rouge et le bleu,

4.6 Photographies numériques

Les photographies numériques prises pour chacun des trois types d'échantillons, à savoir toutes les combinaisons possibles de 3 forces verticales, 3 forces horizontales et 3 matériaux différents sont rassemblés dans l'annexe 2. Les trois figures qui suivent ne constituent qu'un exemple d'un test entre le PS1 et l'acier.

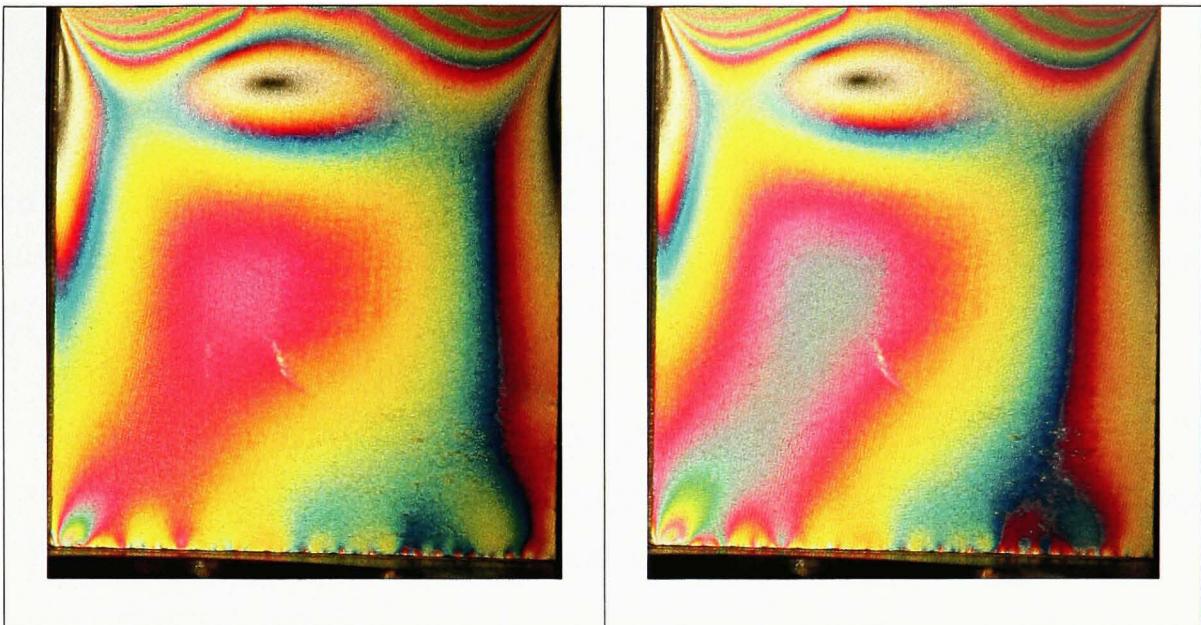


Figure 4.3 *Essai 49*
 $(F_t=8.9N, F_n=222.4N, \text{Ang}=90^\circ)$.
Figure 4.4 *Essai 50*
 $(F_t=17.8N, F_n=222.4N, \text{Ang}=90^\circ)$.

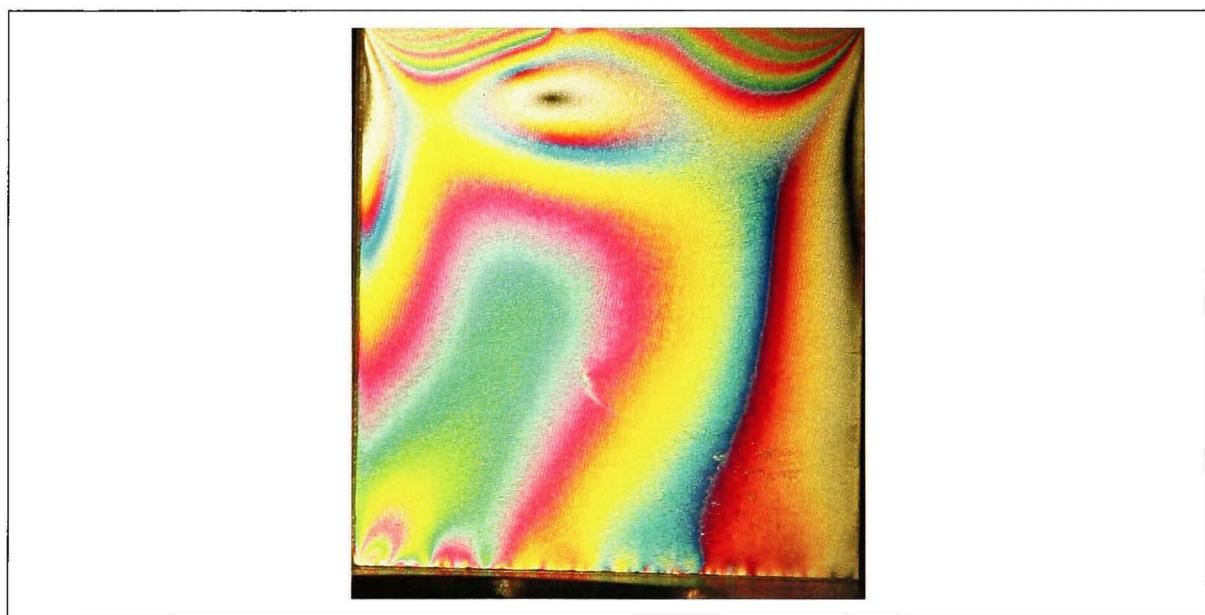


Figure 4.5 *Essai 51*
 $(F_t=26.7N, F_n=222.4N, \text{Ang}=90^\circ)$.

4.7 Choix des points d'études

À l'aide du logiciel de traitement d'image PhotoFiltre, chaque photo prise est analysée, et la contrainte de cisaillement maximal pour l'ensemble des points d'étude est calculée. Les coordonnées de tous les points d'études sont données dans le tableau 4.1. Le choix de ces points est basé sur :

- Sont près de la surface de contact;
- Sont rapprochés du coin, et progressivement éloignés;
- Sont distants de la surface de contact d'une manière à pouvoir identifier les couleurs;
- Coïncident avec les nœuds du maillage du modèle d'éléments finis.

Tableau 4.1
Coordonnées des points d'études

Points d'études	Coordonnées (mm)		Contrainte de cisaillement correspondante (Mpa)
	X	Y	
P1	46.5	5	S1
P2	48	1.75	S2
P3	43.5	1.75	S3
P4	36.5	1.75	S4
P5	28	1.75	S5
P6	13.5	1.75	S6
P7	1.75	1.75	S7

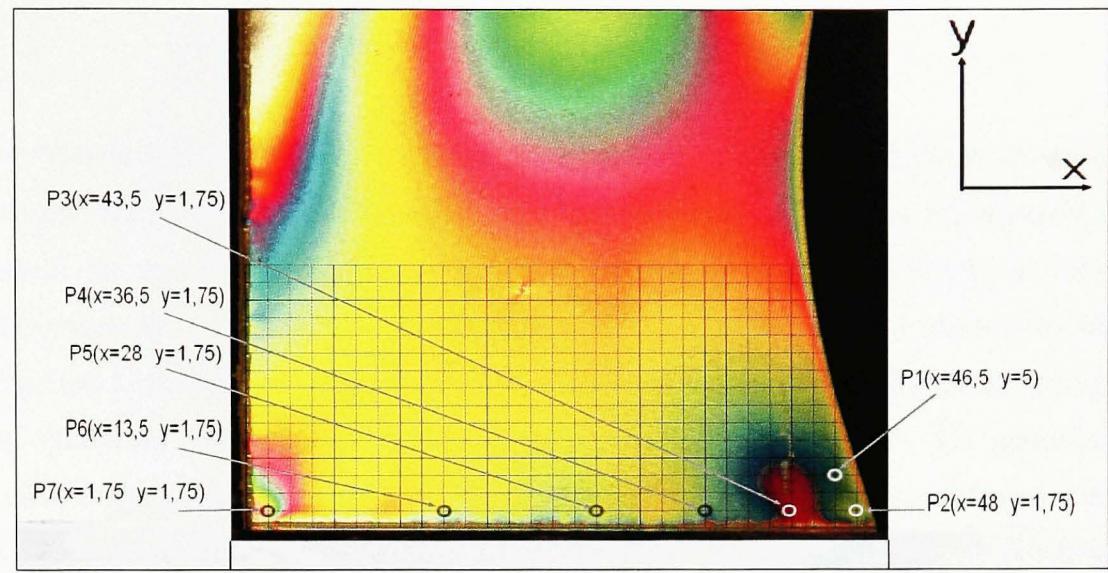


Figure 4.6 *Coordonnées des points d'étude.*

CHAPITRE 5

RÉSULTATS ET ANALYSES

Pour connaître l'influence d'un facteur dans un contact coin, le problème de contact élastique avec frottement est étudié. Des simulations sur Ansys ont été réalisées en utilisant les modèles élastiques avec un coefficient de frottement propre à chaque combinaison de matériaux en contact. Les résultats d'analyse seront séparés en trois catégories. Une première catégorie de nature statistique, associée aux effets des facteurs. Une deuxième catégorie de nature physique, reliée à l'influence des paramètres géométriques sur la contrainte de cisaillement. Et une troisième catégorie qui porte sur la comparaison des résultats expérimentaux avec la simulation numérique. Ce cinquième chapitre représente donc le travail essentiel de ce mémoire.

Dans la première catégorie, ce sont les quatre facteurs que contenait le plan d'expérience qui doivent être analysés, à savoir : la force tangentielle, la force normale, l'angle de contact et la combinaison de matériaux utilisés.

5.1 Résultats expérimentaux

En tenant compte de la nouvelle constante photoélastique $f_\sigma = 1.132 \text{ Mpa/frange}$, ainsi que la relation (2.2) qui lie la différence des contraintes principales à l'ordre de frange, le tableau V résume les valeurs de la contrainte de cisaillement maximale aux sept points d'évaluation pour l'ensemble des essais expérimentaux.

Tableau 5.1

Résultats expérimentaux :
Contrainte de cisaillement maximale aux points d'évaluation

ESSAI N°	Combin- aison Ft-Fn-Mat-Ang	Ft (N)	Fn (N)	Mat	Ang (°)	S1 (Mpa)	S2 (Mpa)	S3 (Mpa)	S4 (Mpa)	S5 (Mpa)	S6 (Mpa)	S7 (Mpa)
1	1111	8,9	133,5	Caout	75	0,906	1,019	0,906	1,359	1,359	1,359	1,019
2	2111	17,8	133,5	Caout	75	0,679	0,906	0,906	1,245	1,245	1,245	1,245
3	3111	26,7	133,5	Caout	75	0,679	0,679	0,679	1,132	1,245	1,245	1,585
4	1211	8,9	222,4	Caout	75	1,585	1,868	1,585	1,698	1,698	1,698	1,698
5	2211	17,8	222,4	Caout	75	1,359	1,698	1,585	1,585	1,698	1,698	1,698
6	3211	26,7	222,4	Caout	75	1,245	1,585	1,359	1,585	1,698	1,698	2,095
7	1311	8,9	311,4	Caout	75	1,981	2,095	1,981	2,095	1,981	2,095	2,831
8	2311	17,8	311,4	Caout	75	1,868	1,981	1,981	2,095	1,981	2,095	3,000
9	3311	26,7	311,4	Caout	75	1,585	1,698	1,868	1,981	1,981	1,981	3,000
10	1121	8,9	133,5	PS.1	75	0,906	1,245	0,679	0,906	1,019	1,019	1,698
11	2121	17,8	133,5	PS.1	75	0,340	0,453	0,340	0,453	0,906	1,245	2,491
12	3121	26,7	133,5	PS.1	75	0,340	0,340	0,340	0,453	0,906	1,359	3,397
13	1221	8,9	222,4	PS.1	75	1,981	2,491	1,868	1,981	1,868	1,868	2,491
14	2221	17,8	222,4	PS.1	75	1,698	1,981	1,698	1,868	1,868	1,868	3,000
15	3221	26,7	222,4	PS.1	75	1,359	1,359	1,585	1,698	1,698	1,981	3,623
16	1321	8,9	311,4	PS.1	75	2,491	3,170	2,095	2,095	2,095	2,095	3,623
17	2321	17,8	311,4	PS.1	75	2,095	3,170	1,868	1,981	1,981	2,264	4,133
18	3321	26,7	311,4	PS.1	75	1,585	2,095	1,585	1,868	1,981	2,491	4,529
19	1131	8,9	133,5	Acier	75	1,019	1,245	0,906	0,679	0,906	1,132	1,698
20	2131	17,8	133,5	Acier	75	0,906	0,906	0,679	0,679	0,906	1,585	2,491
21	3131	26,7	133,5	Acier	75	0,453	0,340	0,453	0,453	1,245	1,868	3,000
22	1231	8,9	222,4	Acier	75	1,698	2,264	1,585	1,359	1,359	1,698	2,491
23	2231	17,8	222,4	Acier	75	1,359	1,359	1,132	1,245	1,359	1,981	3,170
24	3231	26,7	222,4	Acier	75	1,019	1,019	1,019	1,245	1,359	2,264	4,133
25	1331	8,9	311,4	Acier	75	2,264	3,397	2,264	1,868	1,868	2,264	3,623
26	2331	17,8	311,4	Acier	75	1,585	2,831	1,585	1,585	1,868	2,491	4,133
27	3331	26,7	311,4	Acier	75	1,132	1,132	1,359	1,359	1,868	2,831	5,435
28	1112	8,9	133,5	Caout	90	0,906	1,019	1,245	1,245	1,245	1,019	1,245
29	2112	17,8	133,5	Caout	90	0,906	1,019	1,132	1,245	1,245	1,132	1,585
30	3112	26,7	133,5	Caout	90	0,906	0,906	1,019	1,245	1,245	1,245	1,698

Tableau 5.1 (suite)

ESSAI Nº	Combin- aison Ft-Fn-Mat-Ang	Ft (N)	Fn (N)	Mat	Ang (°)	S1 (Mpa)	S2 (Mpa)	S3 (Mpa)	S4 (Mpa)	S5 (Mpa)	S6 (Mpa)	S7 (Mpa)
31	1212	8,9	222,4	Caout	90	1,359	1,698	1,868	1,868	1,868	1,868	1,698
32	2212	17,8	222,4	Caout	90	1,359	1,698	1,585	1,868	1,868	1,868	1,868
33	3212	26,7	222,4	Caout	90	1,132	1,132	1,359	1,868	1,868	1,868	1,981
34	1312	8,9	311,4	Caout	90	2,095	2,095	2,491	2,491	2,491	3,000	3,170
35	2312	17,8	311,4	Caout	90	2,095	2,095	2,491	2,491	2,491	3,000	3,170
36	3312	26,7	311,4	Caout	90	2,095	2,095	2,491	2,491	2,491	3,000	3,397
37	1122	8,9	133,5	PS.1	90	0,679	0,679	0,679	0,906	1,132	1,245	1,981
38	2122	17,8	133,5	PS.1	90	0,453	0,453	0,453	0,906	1,132	1,359	2,491
39	3122	26,7	133,5	PS.1	90	0,340	0,340	0,340	0,679	1,132	1,359	2,831
40	1222	8,9	222,4	PS.1	90	1,245	1,245	1,245	1,585	1,868	1,868	2,491
41	2222	17,8	222,4	PS.1	90	1,245	1,245	1,132	1,585	1,868	1,981	2,831
42	3222	26,7	222,4	PS.1	90	1,019	1,132	1,019	1,359	1,698	1,981	3,000
43	1322	8,9	311,4	PS.1	90	1,585	1,698	1,585	1,868	1,981	2,264	2,831
44	2322	17,8	311,4	PS.1	90	1,585	1,585	1,359	1,981	1,981	2,491	3,000
45	3322	26,7	311,4	PS.1	90	1,359	1,359	1,359	1,981	1,981	2,491	3,170
46	1132	8,9	133,5	Acier	90	0,906	0,906	0,906	0,906	1,019	1,245	1,698
47	2132	17,8	133,5	Acier	90	0,453	0,340	0,453	0,906	1,019	1,245	1,981
48	3132	26,7	133,5	Acier	90	0,000	0,000	0,340	0,679	1,019	1,359	2,831
49	1232	8,9	222,4	Acier	90	1,359	1,359	1,359	1,245	1,359	1,868	2,491
50	2232	17,8	222,4	Acier	90	1,019	1,019	1,245	1,019	1,359	1,868	3,000
51	3232	26,7	222,4	Acier	90	0,906	0,679	1,019	1,019	1,245	1,981	3,170
52	1332	8,9	311,4	Acier	90	1,981	1,981	1,981	1,868	1,868	2,095	3,170
53	2332	17,8	311,4	Acier	90	1,585	1,585	1,585	1,585	1,585	2,095	3,510
54	3332	26,7	311,4	Acier	90	1,245	1,245	1,359	1,359	1,585	2,095	4,133
55	1113	8,9	133,5	Caout	105	1,245	1,132	1,585	1,868	1,868	0,453	1,585
56	2113	17,8	133,5	Caout	105	1,019	0,906	1,585	1,868	1,868	0,679	1,698
57	3113	26,7	133,5	Caout	105	0,906	0,679	1,585	1,585	1,585	1,245	1,868
58	1213	8,9	222,4	Caout	105	1,981	1,868	1,981	1,981	1,981	1,868	2,491
59	2213	17,8	222,4	Caout	105	1,868	1,585	1,868	1,981	1,981	1,868	2,831
60	3213	26,7	222,4	Caout	105	1,245	1,245	1,359	1,981	1,981	1,868	3,000
61	1313	8,9	311,4	Caout	105	3,000	1,868	3,000	2,831	2,831	2,264	3,510
62	2313	17,8	311,4	Caout	105	3,000	1,868	3,000	2,831	2,831	2,264	3,623
63	3313	26,7	311,4	Caout	105	3,000	1,868	3,000	2,831	2,831	2,264	4,529
64	1123	8,9	133,5	PS.1	105	1,019	1,245	0,906	1,019	1,245	1,245	1,981
65	2123	17,8	133,5	PS.1	105	0,906	1,019	0,679	0,906	1,245	1,245	2,491
66	3123	26,7	133,5	PS.1	105	0,453	0,679	0,340	0,679	1,019	1,359	3,397
67	1223	8,9	222,4	PS.1	105	1,245	1,359	1,019	1,245	1,585	1,698	2,831
68	2223	17,8	222,4	PS.1	105	1,019	1,245	0,906	1,245	1,585	1,698	3,170
69	3223	26,7	222,4	PS.1	105	0,679	0,679	0,679	1,132	1,359	1,868	3,623
70	1323	8,9	311,4	PS.1	105	1,981	1,868	1,698	2,095	2,491	2,491	3,623

Tableau 5.1 (suite)

ESSAI N°	Combin- -aison Ft-Fn-Mat-Ang	Ft (N)	Fn (N)	Mat	Ang (°)	S1 (Mpa)	S2 (Mpa)	S3 (Mpa)	S4 (Mpa)	S5 (Mpa)	S6 (Mpa)	S7 (Mpa)
71	2323	17,8	311,4	PS.1	105	1,868	1,868	1,585	1,981	2,491	2,661	4,133
72	3323	26,7	311,4	PS.1	105	1,698	1,698	1,585	1,981	2,491	2,661	4,529
73	1133	8,9	133,5	Acier	105	0,340	0,340	0,340	0,453	0,679	1,245	1,981
74	2133	17,8	133,5	Acier	105	0,000	0,000	0,000	0,340	0,679	1,245	3,000
75	3133	26,7	133,5	Acier	105	0,000	0,000	0,000	0,340	0,679	1,359	3,397
76	1233	8,9	222,4	Acier	105	1,245	1,359	1,359	1,585	1,868	1,981	3,397
77	2233	17,8	222,4	Acier	105	0,906	1,019	0,906	1,585	1,868	2,095	3,623
78	3233	26,7	222,4	Acier	105	0,340	0,453	0,340	0,679	1,698	2,095	4,133
79	1333	8,9	311,4	Acier	105	1,585	1,868	1,585	1,698	1,981	2,095	4,529
80	2333	17,8	311,4	Acier	105	1,019	1,019	1,245	1,585	1,868	2,095	4,699
81	3333	26,7	311,4	Acier	105	0,679	1,019	0,906	1,585	1,868	2,264	5,435

5.1.1 Analyse statistique des effets des facteurs

Cette première analyse concerne la série des 81 essais expérimentaux. Elle permettra de déterminer les paramètres les plus influents sur la contrainte de cisaillement maximal près du coin. Et selon le degré de confiance qu'il faut accorder aux résultats, un avis sera donné aux paramètres et aux interactions significatives.

Le rapport de la somme des carrés à la moyenne des réponses calculées à la somme des carrés des écarts à la moyenne des réponses mesurées est le coefficient de détermination (mentionné RSquare à l'annexe 3 et 4). Plus il est proche de 1, mieux le modèle explique les réponses mesurées (il varie de 0,90 au point P1 à 0,84 au point P7). Pour une interprétation correcte du plan d'expérience, on doit tenir compte du manque d'ajustement qui est la différence entre le modèle choisi et le vrai modèle que nous ne connaissons pas. Une estimation de cette erreur est donnée par la racine du carré moyen des résidus (RMSE) qui varie de 0,18 au point P5 à 0,42 au point P7. Enfin la probabilité que la variance du modèle soit de l'ordre de grandeur de la variance de l'écart (erreur expérimentale et manque d'ajustement) est inférieure à 0,0001 pour l'ensemble des points d'études. Avec une telle probabilité, on peut considérer l'étude comme satisfaisante.

Un exemple d'analyse de variance et du résumé de la pertinence du modèle choisi sont donnés aux tableaux suivants :

Tableau 5.2

Analyse de variance au point P1

	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	Rapport des carrés moyens
Réponses calculées	15	31,386732	2,09245	40,2481
Résidu	65	3,379271	0,05199	Probabilité
Réponses mesurées	80	34,766003		<,0001

Comme il y a 80 (normalement 81, mais le calcul de la moyenne a pris un degré de liberté) équations et 15 inconnues (nombre total des coefficients des facteurs), on dit qu'il y a 65 (80-15) degrés de liberté. La solution des moindres carrés consiste à minimiser la somme des carrés des écarts (l'écart est la différence entre la réponse mesurée et la réponse calculée) (Goupy, 2005).

Tableau 5.3

Sommaire du modèle au point P1

Coefficient de détermination	0,9028
Coefficient de détermination ajusté	0,880369
Racine carrée du carré moyen des écarts	0,22801
Moyenne de la réponse	1,261494
Observations	81

Le coefficient de détermination est défini par : $\frac{\sum (\hat{S}_i - \bar{S})^2}{\sum (S_i - \bar{S})^2}$

Avec :

$\sum (\hat{S}_i - \bar{S})^2$ est la somme des carrés des écarts à la moyenne des réponses calculées.

$\sum (S_i - \bar{S})^2$ est la somme des carrés des écarts à la moyenne des réponses mesurées.

Plus le coefficient de détermination est proche de 1, mieux est le modèle.

Le diagramme de la figure 5.1 indique l'effet de chaque facteur sur la contrainte de cisaillement maximal. Il contient en abscisses l'ensemble des facteurs en variables codées et en ordonnées les contraintes de cisaillement maximal en (Mpa). Avec le logiciel JMP, on peut modifier les niveaux des facteurs et obtenir ainsi la valeur de la contrainte pour tous les niveaux possibles des facteurs.

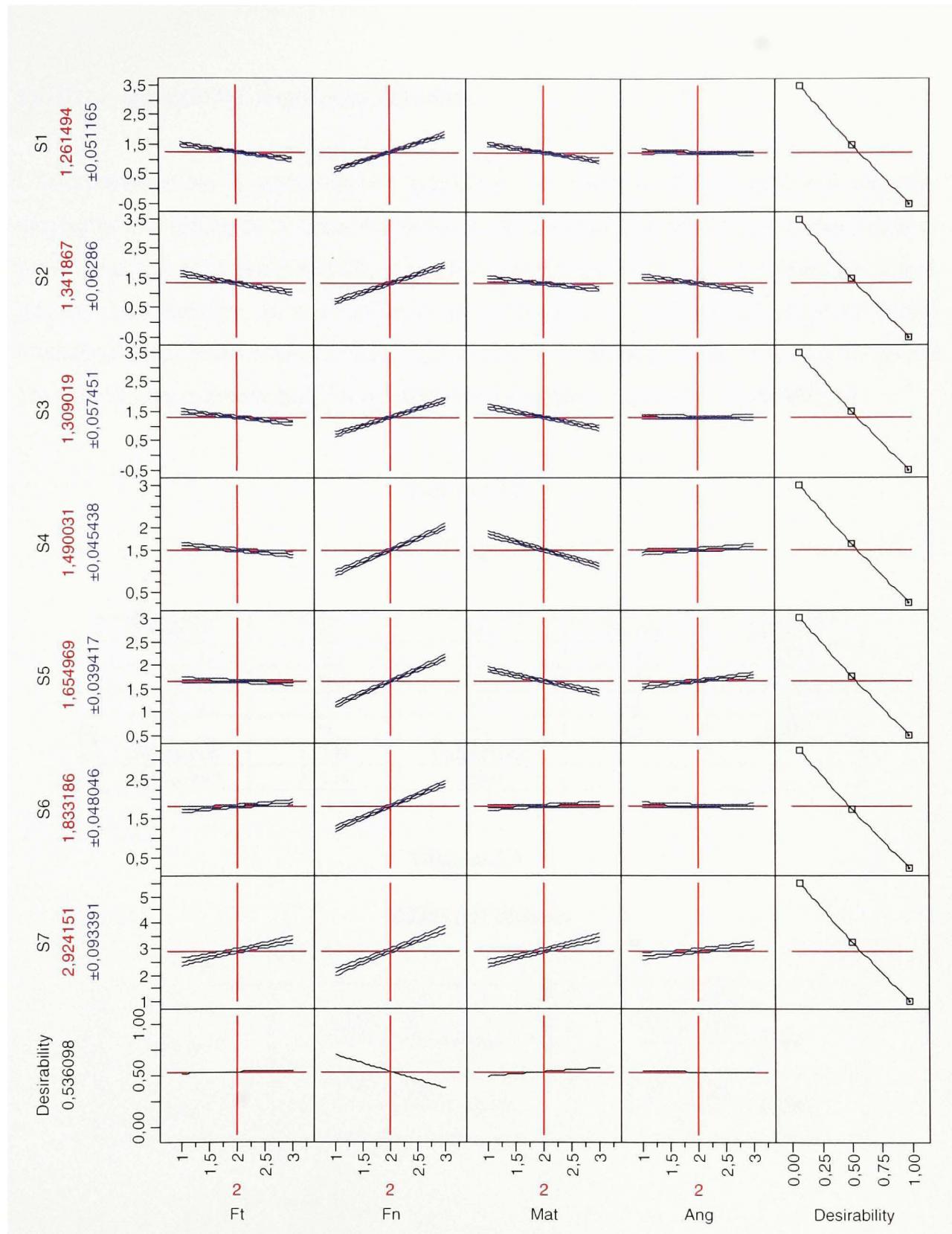


Figure 5.1 *Diagramme des effets.*

5.1.1.1 Lecture du diagramme des effets

L'interprétation ou la représentation graphique des effets se fait à partir des réponses moyennes aux différents niveaux des facteurs. Envisageons par exemple que notre étude se limite à un seul point (qu'il soit P1) et que la contrainte de cisaillement maximale ne dépend que de deux facteurs, la force normale et le matériau en contact. Et qu'on ait décidé d'attribuer deux niveaux pour chaque facteur avec les variables codées (-1) pour le niveau bas et (+1) pour le niveau haut. Nous obtenons la matrice d'expérience du tableau 5.4 :

Tableau 5.4

Matrice d'expérience (2^2)

ESSAI N°	Fn	Mat	Fn-Mat	S1(Mpa)
1	-1	-1	+1	0.90
2	+1	-1	-1	1.98
3	-1	+1	-1	1.01
4	+1	+1	+1	2.26
Niveau bas	133 N	Caoutchouc		
Niveau haut	311 N	Acier		

Tableau 5.5

Effets des facteurs

	Fn	Mat
Niveau -1	$\frac{0.9 + 1.01}{2} = 0.955$	$\frac{0.9 + 1.98}{2} = 1.44$
Niveau +1	$\frac{1.98 + 2.26}{2} = 2.12$	$\frac{1.01 + 2.26}{2} = 1.635$

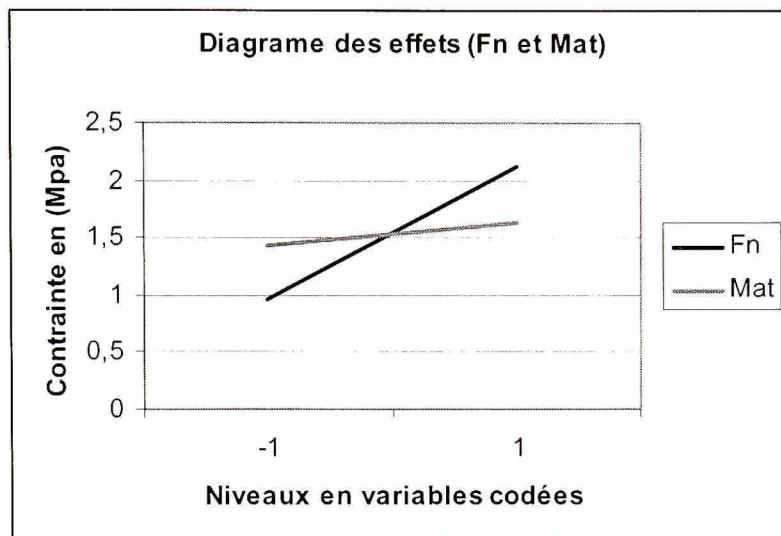


Figure 5.2 Diagramme des effets pour deux facteurs.

Le facteur dont la pente est prononcée est celui qui présente l'effet le plus important (dans ce cas ci c'est la force normale). Deux droites parallèles signifient qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux paramètres.

5.1.1.2 Interprétation des résultats des calculs :

La force normale est le seul facteur où on a enregistré un effet important pour l'ensemble des points d'étude. Pour les différentes combinaisons possibles, les valeurs de la contrainte de cisaillement maximal augmentent fortement avec l'augmentation de la force normale. Un exemple de l'effet de ce facteur est illustré au tableau 5.6.

Tableau 5.6
Coefficients des facteurs au point P6

Terme	valeur des coefficients	Écart type des coefficients	Rapport : coefficient/ écart type	Probabilité que le coefficient soit nul
Constante	1,8331856	0,022515	81,42	<,0001
Ft	0,0933017	0,027576	3,38	0,0012
Fn	0,5713417	0,027576	20,72	<,0001
Mat	0,047175	0,027576	1,71	0,0919
Ang	-0,023063	0,027576	-0,84	0,4060
Interaction Ft-Fn	-0,028305	0,033773	-0,84	0,4050
Interaction Ft-Mat	0,047175	0,033773	1,40	0,1672
Interaction Fn-Mat	-0,11951	0,033773	-3,54	0,0007
Interaction Ft-Ang	-0,023588	0,033773	-0,70	0,4874
Interaction Fn-Ang	0,0676175	0,033773	2,00	0,0494
Interaction Mat-Ang	-0,036168	0,033773	-1,07	0,2882
Interaction Ft-Fn-Mat	0,0330225	0,041363	0,80	0,4276
Interaction Ft-Fn-Ang	-0,023588	0,041363	-0,57	0,5705
Interaction Ft-Mat-Ang	-0,103785	0,041363	-2,51	0,0146
Interaction Fn-Mat-Ang	-0,103785	0,041363	-2,51	0,0146
Interaction Ft-Fn-Mat-Ang	0,0636862	0,05066	1,26	0,2132

L'effet de l'effort tangentiel est analysé pour un chargement de 8,9, 17,8 et 26,7 N, c'est un effet négatif dans la plupart des points d'étude, plus exactement au voisinage du coin1 (figure 5.3).

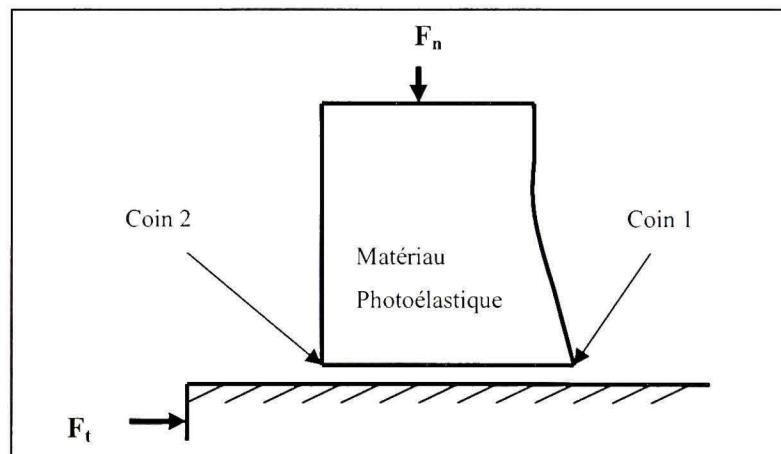


Figure 5.3 Désignation des coins de contact.

La contrainte de cisaillement max décroît légèrement lorsqu'on augmente la force tangentielle. En s'éloignant du coin, cette décroissance devient de moins en moins significative, jusqu'à ce qu'elle devient une variation croissante près du coin 2 de l'échantillon. Le tableau 5.7 résume l'effet des coefficients au point P1.

Tableau 5.7
Coefficients des facteurs au point P1

Terme	Valeur des coefficients	Écart type des coefficients	Rapport : coefficient/ écart type	Probabilité que le coef- soit nul
constante	1,2614944	0,025334	49,79	<,0001
Ft	-0,244262	0,031028	-7,87	<,0001
Fn	0,5996467	0,031028	19,33	<,0001
Mat	-0,277808	0,031028	-8,95	<,0001
Ang	-0,034595	0,031028	-1,11	0,2690
Interaction Ft-Fn	-0,020442	0,038002	-0,54	0,5925
Interaction Ft-Mat	-0,121083	0,038002	-3,19	0,0022
Interaction Fn-Mat	-0,099068	0,038002	-2,61	0,0113
Interaction Ft-Ang	0,022015	0,038002	0,58	0,5644
Interaction Fn-Ang	0,04403	0,038002	1,16	0,2508
Interaction Mat-Ang	-0,297203	0,038002	-7,82	<,0001
Interaction Ft-Fn-Mat	-0,047175	0,046542	-1,01	0,3145
Interaction Ft-Fn-Ang	0,047175	0,046542	1,01	0,3145
Interaction Ft-Mat-Ang	0,0141525	0,046542	0,30	0,7620
Interaction Fn-Mat-Ang	-0,096709	0,046542	-2,08	0,0417
Interaction Ft-Fn-Mat-Ang	-0,031843	0,057003	-0,56	0,5783

Le matériau utilisé est le facteur qui influe négativement du point P1 au point P5, il est sans influence au point P6 et il a une influence positive près du point opposé au coin 1. Cela veut dire que la contrainte est moins importante avec un matériau rigide au coin 1 et elle est moins importante avec un matériau flexible au coin 2.

L'angle de contact est le facteur qui n'a d'influence que sur les points d'étude les plus proches des coins 1 et 2. Il a un effet négatif au point P2 d'une valeur de -0.2327 et un effet positif de 0.218 au point P7.

5.1.1.3 Meilleures combinaisons possibles

L'objectif dans n'importe quelle étude d'une structure sous chargement est de minimiser les contraintes. Donc, examinons toutes les réponses en même temps en considérant le diagramme des effets de la figure 5.1, et essayons de trouver les compositions qui rendent la contrainte de cisaillement de tous les points d'étude minimale. Cependant, la présence des interactions ne permet pas d'étudier l'influence d'un facteur à partir du seul effet sur la contrainte (la réponse). Car, lorsqu'on change le niveau d'un facteur on modifie les effets de tous les autres paramètres, le seul facteur où le sens de sa variation est fixe est la force normale. Donc, on le règle à son niveau le plus bas. Les autres facteurs agissent de manière opposée ou restent sans effet sur les réponses. À l'aide de la fonction Désirabilité du logiciel JMP, on a pu trouver le meilleur compromis de toutes les réponses, que ce soit pour une Désirabilité maximale ou lorsque certains facteurs sont fixées à des valeurs appartenant au domaine d'étude. Par exemple, fixons les forces normale et tangentielle à leurs valeurs maximales et cherchons l'angle optimal pour les trois matériaux en questions.

Il est bien de rappeler que la désirabilité globale est la recherche optimale de facteurs pour une contrainte de cisaillement minimale. Elle est comprise entre 0 et 1. Dans notre cas aucune désirabilité individuelle n'est égale à 0 et ne sont pas toutes égales à 1. Le meilleur compromis est obtenu pour la plus forte valeur de 0,87 pour une étude limitée au coin 1 (seulement les trois points P1, P2 et P3 sont pris en considération), et pour une forte valeur de 0,77 pour une étude étendue à toute l'interface de contact. La figure 5.4 et 5.5 donnent le diagramme des effets avec la fonction désirabilité pour les deux cas cités auparavant.

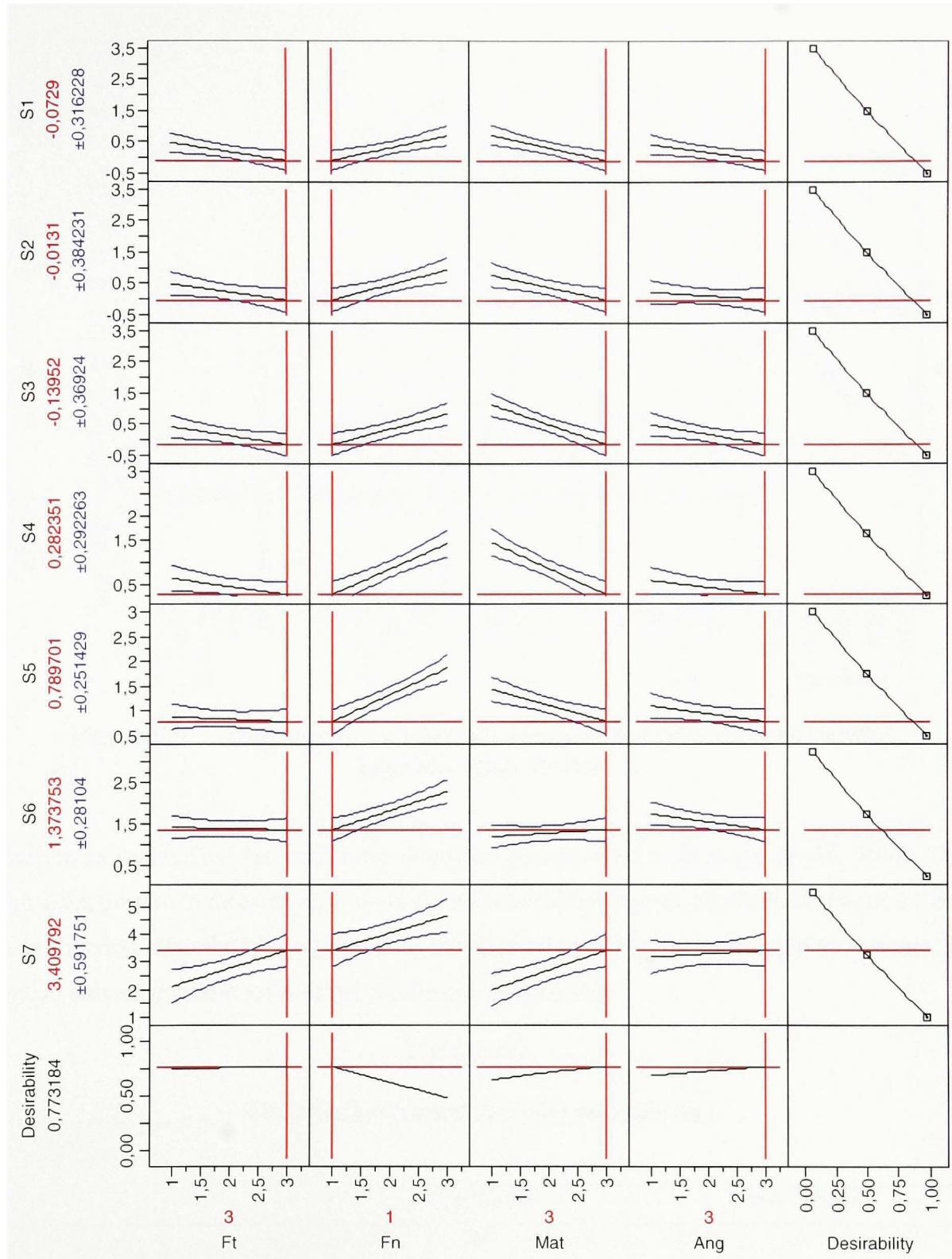


Figure 5.4 Diagramme des effets accompagné de la fonction désirabilité pour une étude étendue.

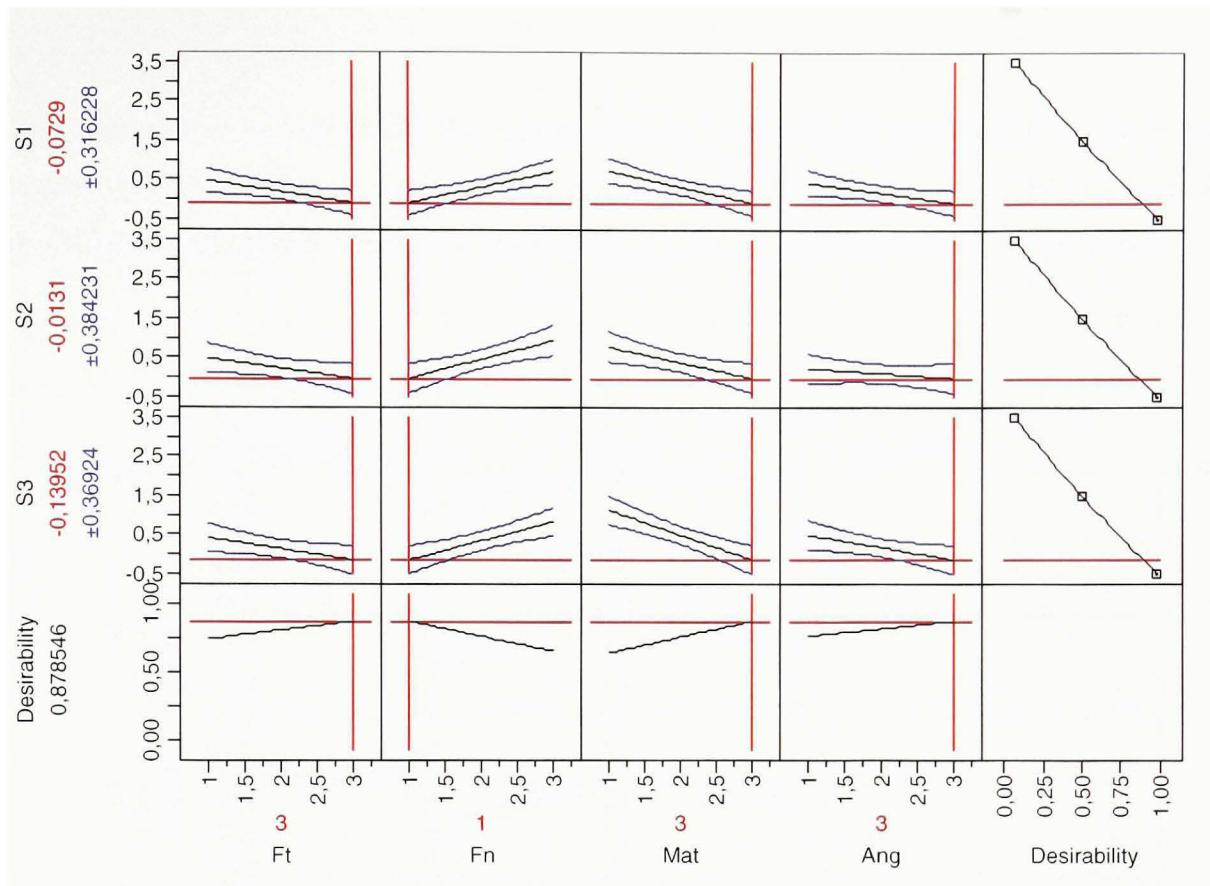


Figure 5.5 Diagramme des effets accompagné de la fonction Désirabilité pour une étude limitée.

Examinons maintenant les meilleures solutions possibles pour un angle de 75, 90 et 105°. Pour cela, on fixe le facteur (Ang) au plus bas, intermédiaire et au plus haut niveau et à l'aide de la fonction désirabilité on cherche le meilleur compromis des trois facteurs restants. Le tableau suivant contient les niveaux des facteurs optimisés.

Tableau 5.8

Optimisation des facteurs pour un angle fixe

Facteur	angle	Étude limitée			Étude étendue		
		75	90	105	75	90	105
Ft	3	3	3	3	2.53	3	
Fn	1	1	1	1	1	1	
Mat	3	3	3	1	3	3	

En ce qui concerne l'exemple cité auparavant, on a fixé la force normale à 311 N, la force tangentielle à 26,7 N et on a fait varier le matériau entre le caoutchouc, le PS1 et l'acier. Les trois figures qui suivent montrent l'angle optimal pour les trois combinaisons possibles.

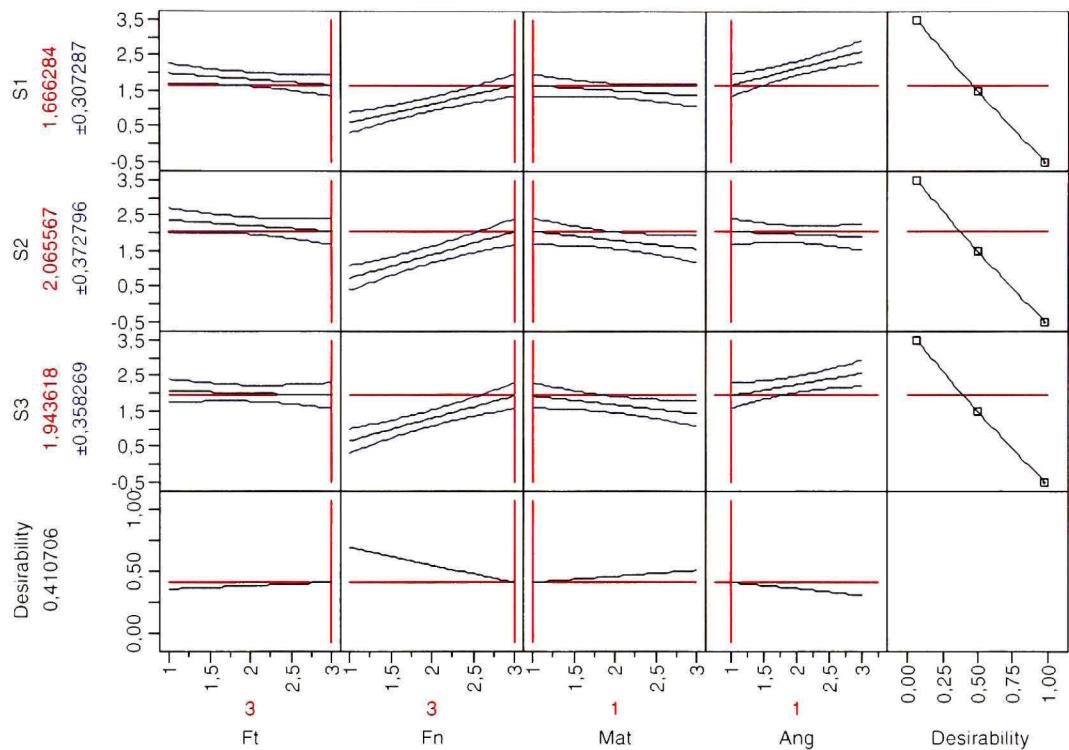


Figure 5.6 Angle optimal pour ($Fn=311$, $Ft=26,7$, $Mat=Caout$).

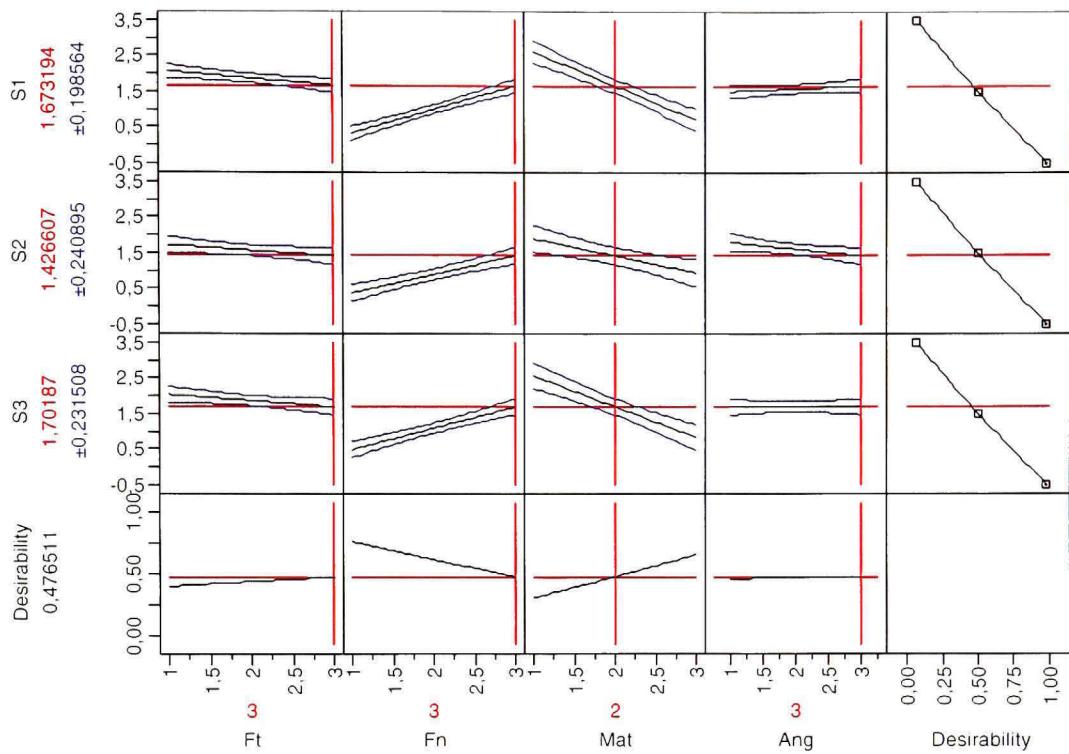


Figure 5.7 Angle optimal pour ($F_n=311$, $F_t=26,7$, $Mat=PSI$).

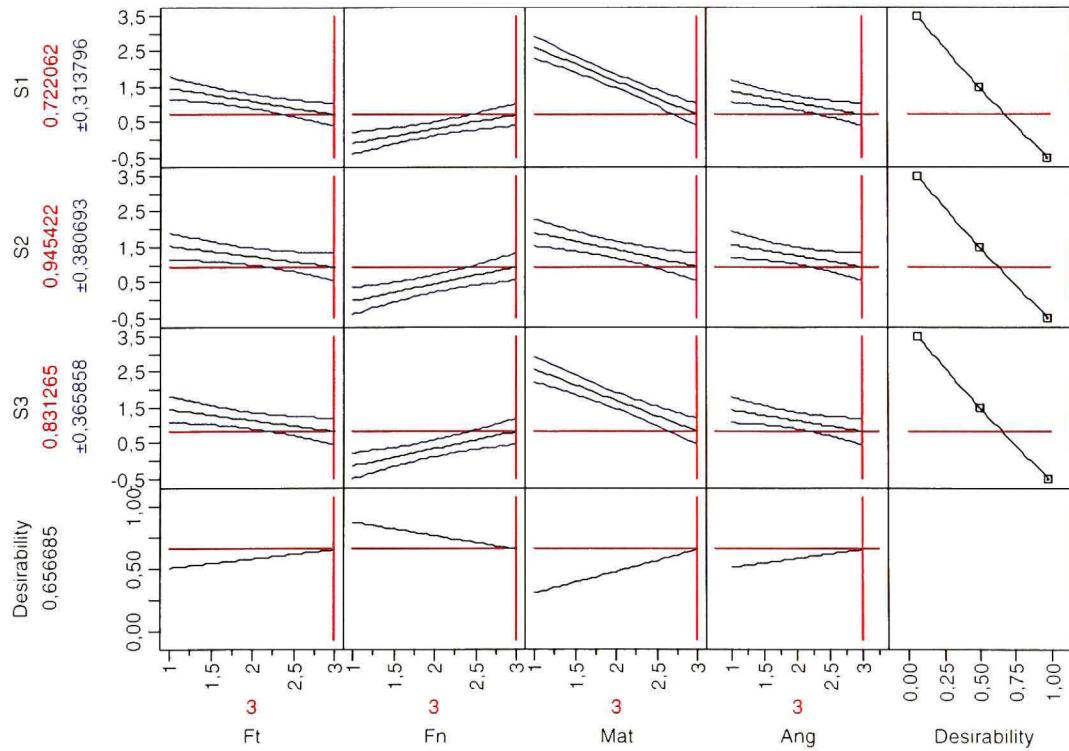


Figure 5.8 Angle optimal pour ($F_n=311$, $F_t=26,7$ et $Mat=acier$).

5.1.1.4 Conclusion

Sous un chargement normal et tangentiel fixe, et selon les différentes combinaisons testées, un coin aigu peu diminuer les contraintes si le contact est réalisé avec le caoutchouc. Par contre, le coin obtus est souhaitable si le contact est réalisé avec un matériau plus rigide comme l'acier. D'une manière générale, la contrainte de cisaillement maximale près du coin 1 peut être diminuée au détriment de la contrainte du coin 2 si la force normale est à son plus bas niveau. De plus de faibles valeurs de ces contraintes ont été enregistrées lorsque la force tangentielle, le matériau en contact ainsi que l'angle de contact sont à leur niveau le plus haut.

Avec une probabilité inférieure à 0,0001, l'interaction Mat/Ang est la plus importante que l'étude ait enregistrée. Et l'analyse des profiles de la figure 5.9 permet d'évaluer le degré de dépendance de l'effet des un avec le niveau des autres.

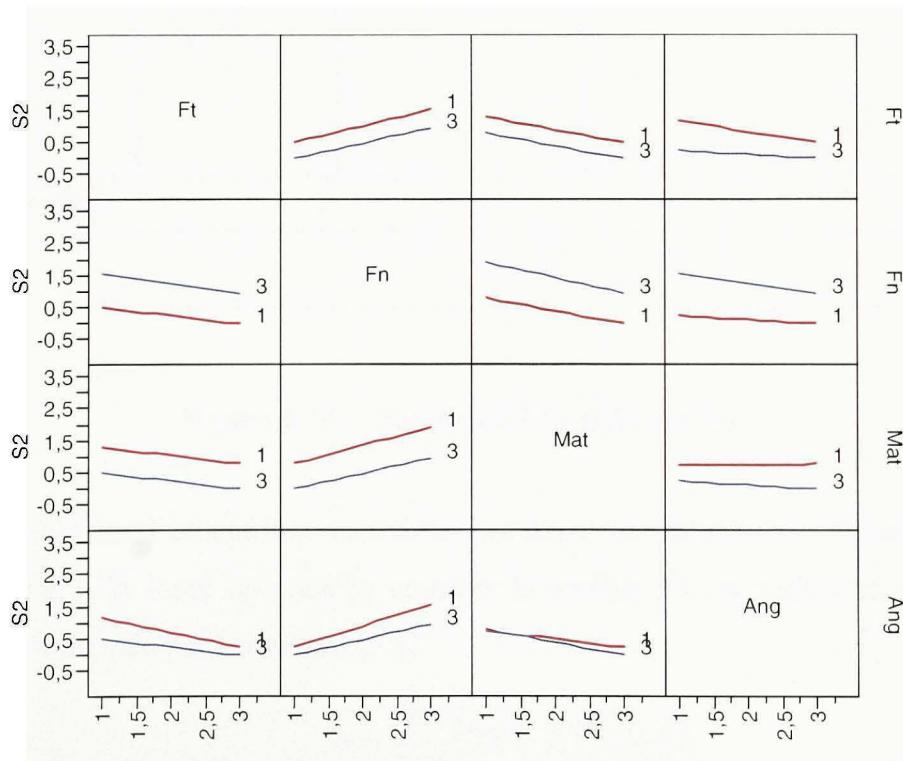


Figure 5.9 Profiles des interactions au point P2.

5.1.2 Analyse physique :

5.1.2.1 Effet de la rotation

Sous l'effet de la force tangentielle, l'échantillon supérieur a tendance à se déformer comme le montre la figure 5.10.

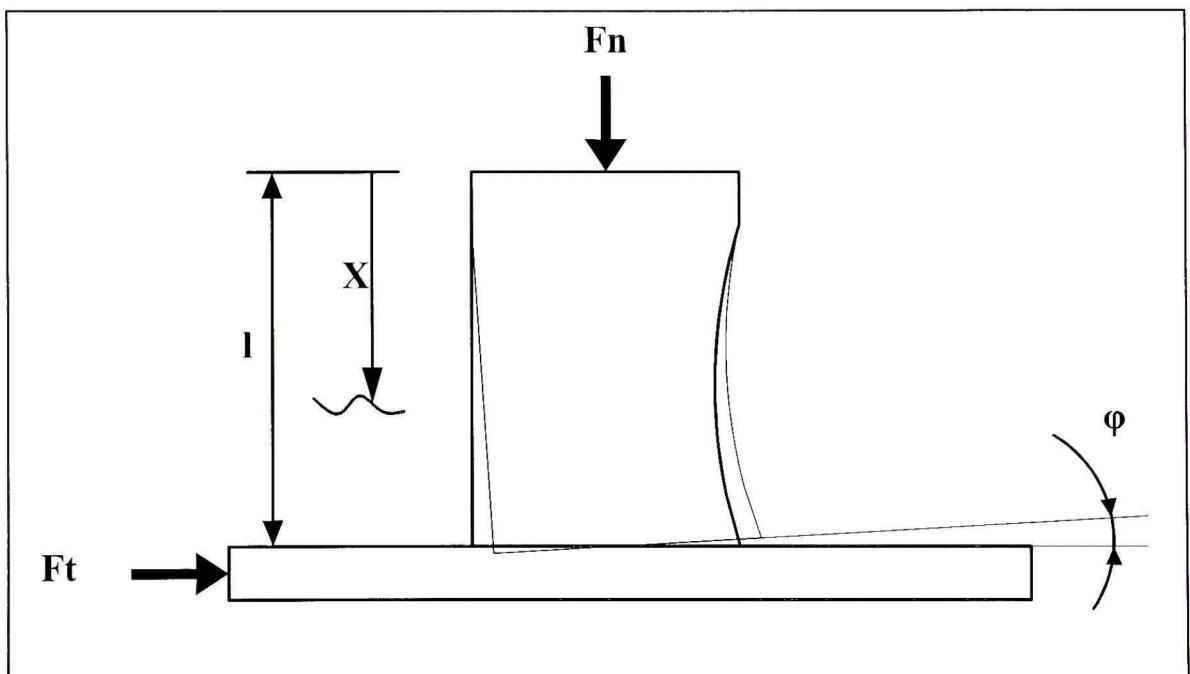


Figure 5.10 *Tendance à la déformation.*

Donc, la flexion de l'échantillon supérieur provoque la rotation de toutes les sections perpendiculaires à la force normale (y compris la surface de contact) d'un angle φ , dont l'expression est donnée par la relation (5.1).

$$\varphi = \frac{Ft}{2EI} [2lX - X^2] + \eta \frac{Ft}{G.A} \quad (5.1)$$

Et la rotation maximale est enregistrée à une distance $X = 1$

$$\varphi_{\max} = \frac{Ft * l^2}{2EI} + \eta \frac{Ft}{G.A} \quad (5.2)$$

$$\text{Avec : } \eta = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)} = \frac{12 + 11 * 0.38}{10(1 + 0.38)} = 1.17 \quad (5.3)$$

Pour une rigidité uniforme du matériau photoélastique, la pente est proportionnelle à la force tangentielle. Plus cette force est importante plus cette pente est prononcée et moins est la contrainte au coin de contact.

5.1.2.2 Effet du cisaillement

Trois types de matériaux dont les propriétés mécaniques sont nettement différentes ont été sélectionnés pour entrer en contact avec le matériau photoélastique. Le caoutchouc avec un module d'élasticité 10 Mpa, et un coefficient de poisson de 0.5, le plastique (PS1) avec un module de Young de 2500 Mpa et $\nu = 0.38$ et enfin, l'acier avec $E=210000$ Mpa et $\nu = 0.3$.

Afin de connaître l'effet du cisaillement, la rotation due à la force tangentielle est éliminée. L'équation (5.1) nous a permis de calculer l'angle de rotation. Les déplacements et les contraintes correspondantes sont donnés respectivement par :

$$\delta = b \cdot \tan(\varphi) \approx b \cdot \varphi \quad (5.4)$$

$$\sigma = E \frac{\delta}{l} \quad (5.5)$$

Où : b est la distance du point considéré à l'axe neutre

Et l'effet de la rotation est éliminé en soustrayant la moitié de la contrainte obtenue à partir de l'équation (5.5) de la contrainte globale. Les figures 5.11 et 5.12 montrent la variation de la contrainte de cisaillement max avec et sans effet de la rotation pour les trois types de matériaux.

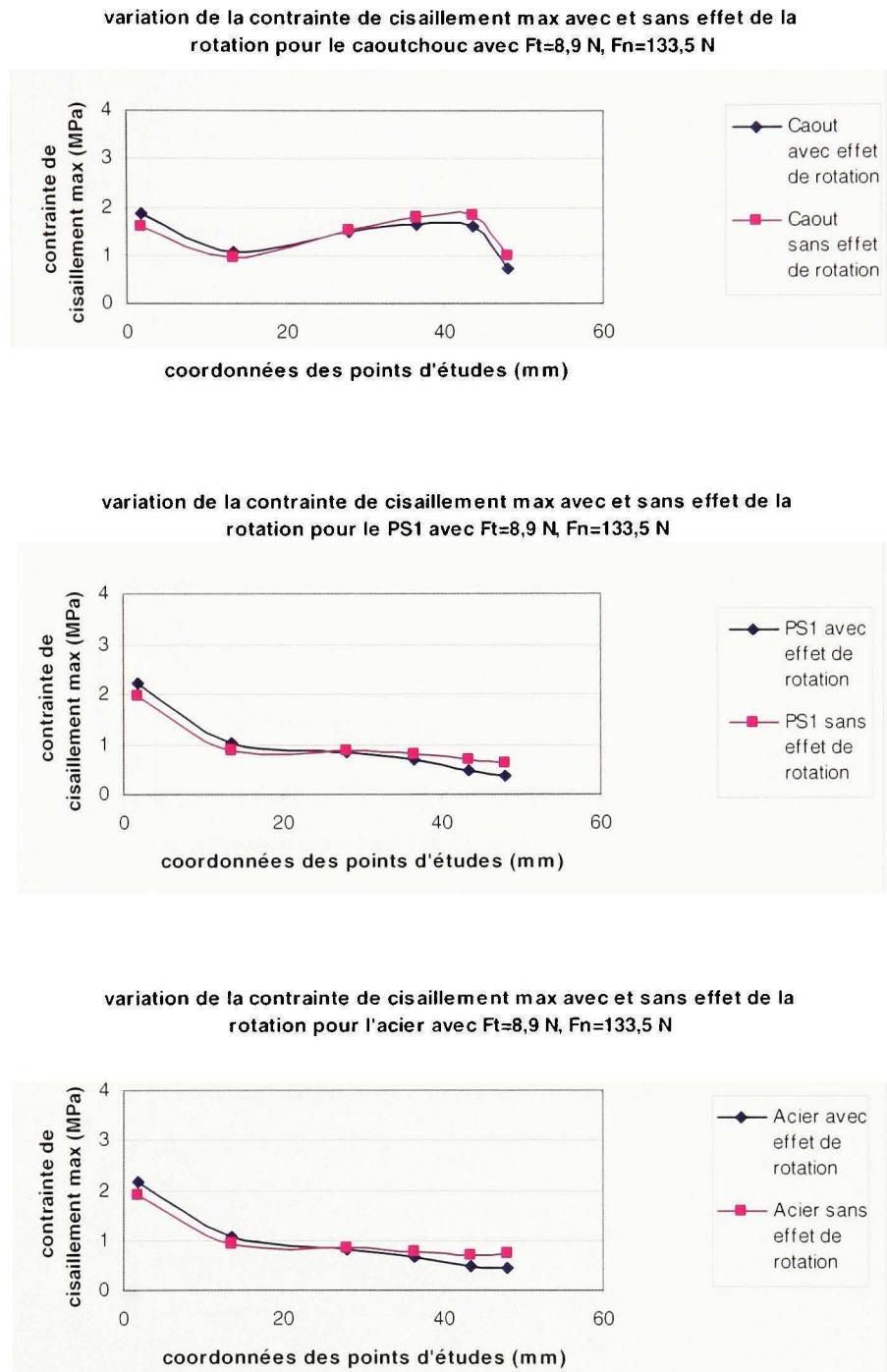


Figure 5.11 Variation de la contrainte de cisaillement max pour les trois types de matériaux avec et sans effet de la rotation pour $F_t=8,9$ N et $F_n=133,5$ N.

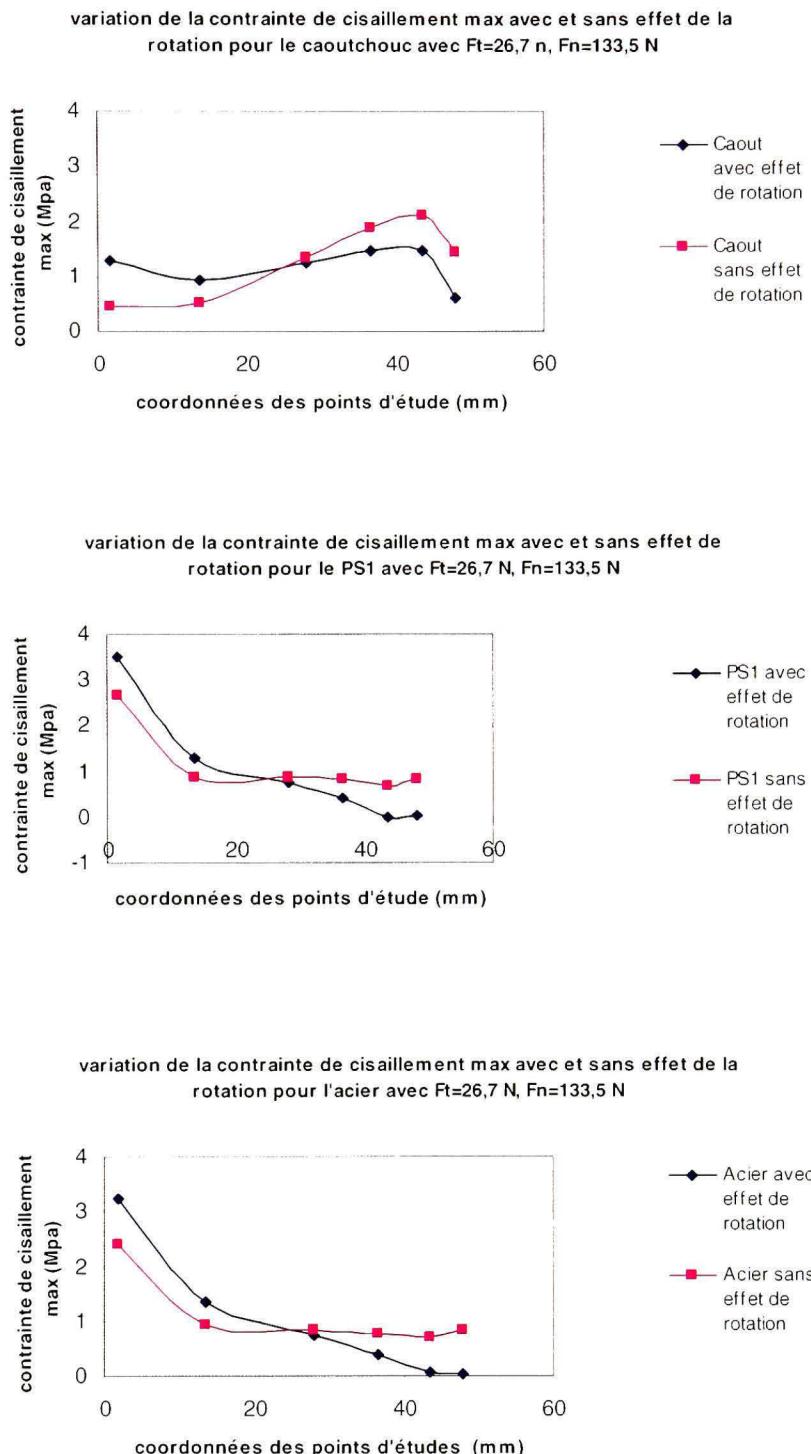


Figure 5.12 *Variation de la contrainte de cisaillement max pour les trois types de matériaux avec et sans effet de la rotation pour $F_t=26.7$ N et $F_n=133.5$ N.*

Après avoir éliminé la rotation, la distribution des contraintes demeure influencée par l'effet du cisaillement des matériaux en contact. Puisqu'il n'y a pas de glissement local, le déplacement relatif local est alors absorbé uniquement par déformation des massifs. Dans ce cas, le cisaillement local est proportionnel aux déformations locales qui dépendent du module de Young. Le phénomène est décrit à la figure 5.13.

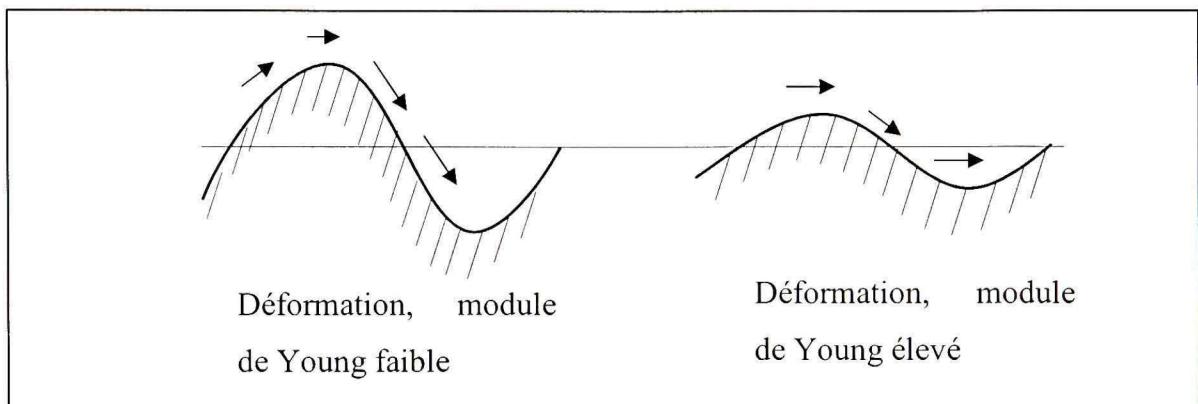


Figure 5.13 Déformations rigide et flexible.
(Adapté de *Guilbault, Raynald, 2000*)

Selon (Johnson, 1989), le déplacement vertical à l'interface d'un corps élastique semi-infini soumis à un chargement tangentiel q est donné par l'équation (5. 5).

$$u_z = -\frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[(x+a) \ln \left(\frac{x+a}{a} \right)^2 - (x-a) \ln \left(\frac{x-a}{a} \right)^2 \right] + C \quad (5.6)$$

Ce qui conduit après superposition des trois types de matériaux à l'illustration suivante :

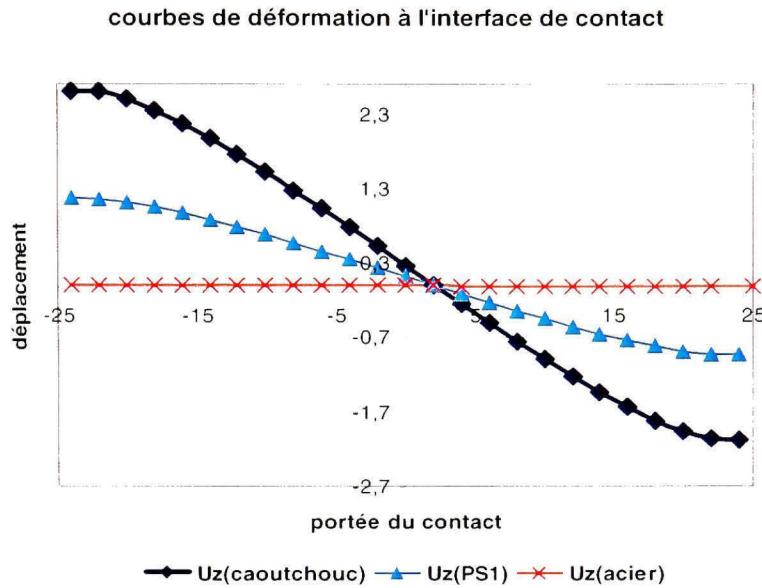


Figure 5.14 Déformations des matériaux sous l'effet du cisaillement.

Sous l'effet du cisaillement, les surfaces déformées deviennent alors incompatibles, la figure suivante illustre le phénomène entre le caoutchouc et l'acier.

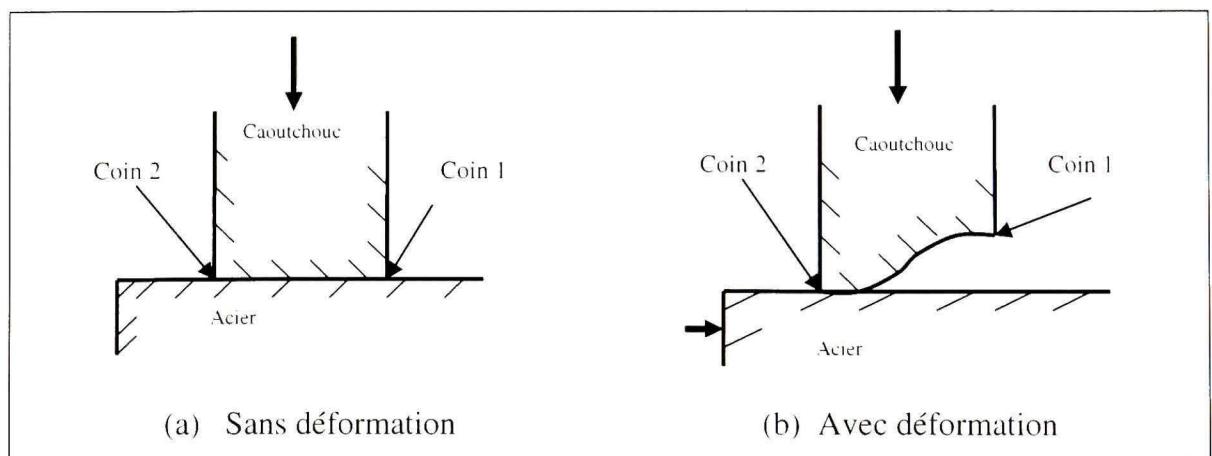


Figure 5.15 Contact caoutchouc/acier avec et sans déformation liée au cisaillement.

Selon la direction de la force tangentielle et de la combinaison des matériaux, le contact aura ainsi une tendance à déplacer vers l'une ou l'autre des extrémités de la portée de contact. Dans le cas actuel le contact sera amplifié au coin 2.

5.1.2.3 Effet des surfaces libres

Dans le cas d'un contact hertzien, nous avons vu qu'il était possible de donner des expressions analytiques de toutes les grandeurs mécaniques (contraintes, déformations, pression de contact, taille et géométrie de la surface de contact) et ceci en ne faisant appel qu'à des hypothèses relatives à la zone de contact. Pour un contact similaire à l'étude actuelle, il en est tout autrement. La raison est le fait que la forme utilisée contient des surfaces libres, il devient donc difficile de négliger les conditions aux limites et de considérer le matériau comme un massif semi-infini.

Dans le contexte de la présente étude, il est proposé de solutionner ce problème par un traitement itératif, basé sur les équations de la théorie de l'élasticité pour un chargement ponctuel. En fait, ces équations sont intégrées sur un segment de longueur choisie sur lequel une distribution de traction normale ou tangentielle à amplitude constante est considérée. Il suffit alors de découper la surface de contact en une série de segments sur lesquels les équations de traction seront appliquées. Cette approche permet ainsi d'établir la distribution de pression et de contrainte de cisaillement à l'interface de contact en considérant les solides comme des massifs semi-infinis. La précision de l'évaluation sera évidemment inversement proportionnelle à la longueur des éléments de subdivision. Or, puisqu'il s'agit ici d'un solide ayant des frontières libres, il est nécessaire d'éliminer les contraintes induites sur ces surfaces dans le modèle proposé.

Afin de dégager les frontières libres, ces dernières sont aussi discréteriser de la même manière que la surface de contact. Cependant, les charges tangentielle et normale appliquées sur les éléments obtenus doivent correspondre aux contraintes créées par la distribution des charges établies à la surface de contact, mais en sens inverse. La superposition de ces charges

artificielles libère ainsi les surfaces des contraintes internes associées à la solution dérivée des équations pour des solides semi-infinis.

L'application des charges artificielles, en plus de créer des surfaces libres, influences aussi la surface de contact en créant à leur tour des contraintes internes qui modifient la distribution des pressions et contraintes de cisaillement. Il est alors nécessaire de reprendre le calcul complet dans une seconde itération. Le système est considéré dans un état final après avoir atteint la convergence, c'est-à-dire lorsqu'une distribution de contrainte normale et tangentielle qui respecte les conditions d'équilibre avec les forces extérieures et qui ne crée aucune contrainte interne sur les surfaces libres est obtenue à l'interface de contact. La figure ci-dessous illustre la modélisation.

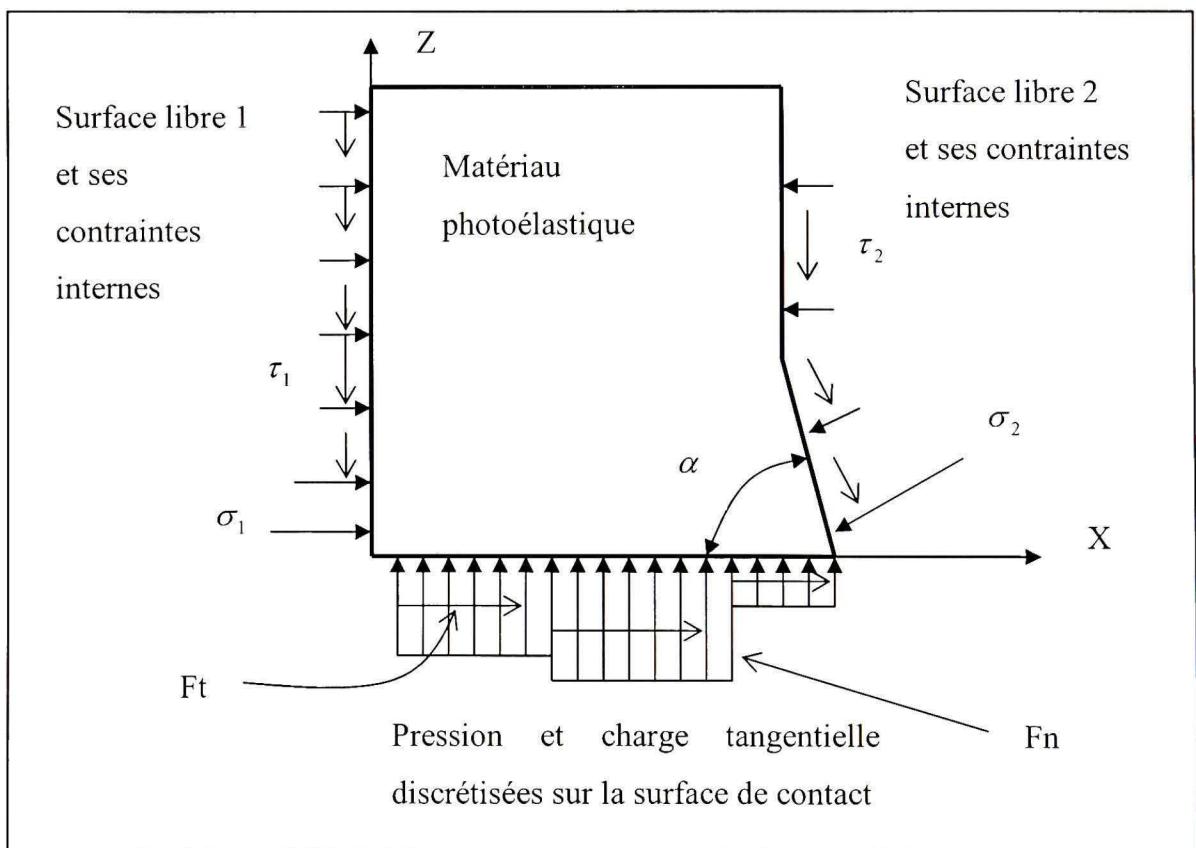


Figure 5.16 *Modèle de calcul des discrétisations de charges en présence de frontières libres.*

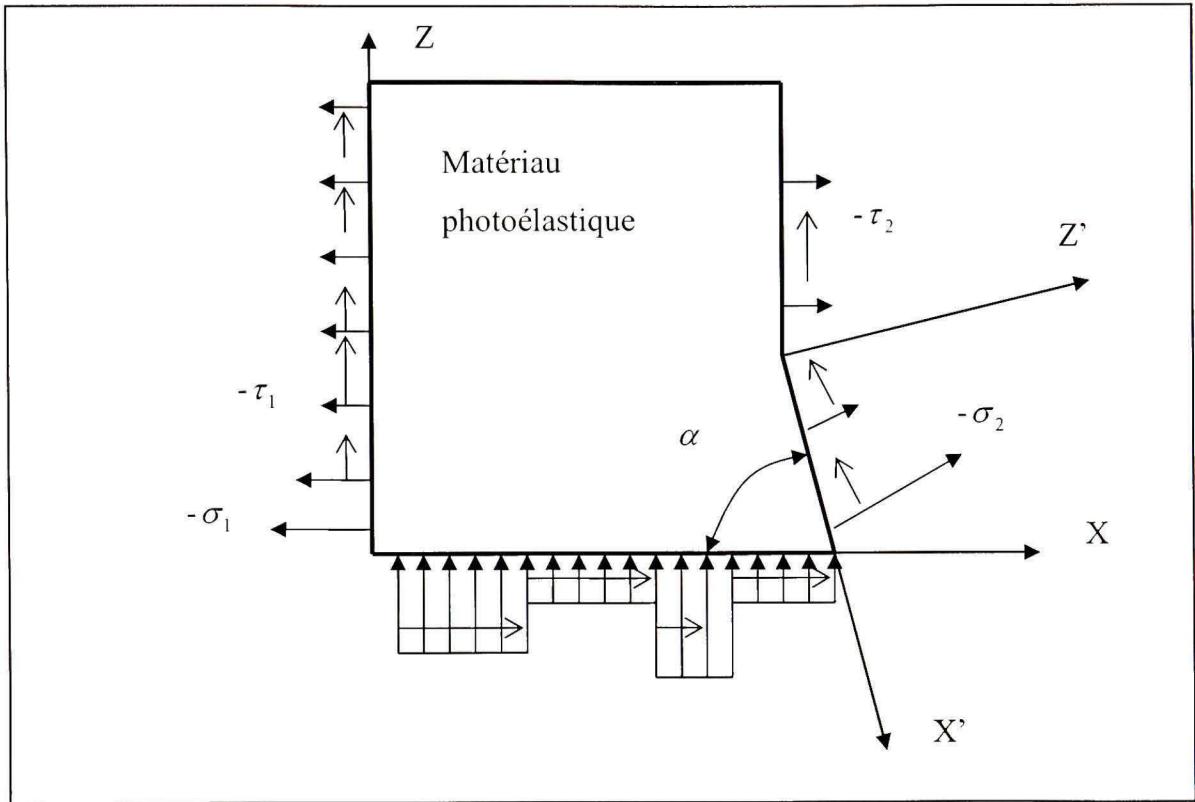


Figure 5.17 Élimination des contraintes internes.

Les équations utilisées dans le modèle proposé sont présentées ci-dessous.

Dans un système d'axes x-z les composantes de la contrainte calculées au niveau de la surface 2 prennent la forme :

$$\sigma_x^T = -\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} P_i \cdot A_{ji} \quad (5.7)$$

$$\sigma_z^T = -\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} P_i \cdot B_{ji} \quad (5.8)$$

$$\tau_{xz}^T = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} P_i \cdot C_{ji} \quad (5.9)$$

$$\text{Avec : } A_{ij} = 2(\theta_1^{ij} - \theta_2^{ij}) + (\sin 2\theta_1^{ij} - \sin 2\theta_2^{ij})$$

$$B_{ij} = 2(\theta_1^{ij} - \theta_2^{ij}) - (\sin 2\theta_1^{ij} - \sin 2\theta_2^{ij})$$

$$C_{ij} = (\cos 2\theta_1^{ij} - \cos 2\theta_2^{ij})$$

Dans le repère x'-z' les composantes de la contrainte deviennent :

$$\sigma_{x'}^T = \frac{\sigma_x^T + \sigma_z^T}{2} + \frac{\sigma_x^T - \sigma_z^T}{2} \cos(2\alpha) - \tau_{xz}^T \sin(2\alpha) \quad (5.10)$$

$$\sigma_{z'}^T = \frac{\sigma_x^T + \sigma_z^T}{2} - \frac{\sigma_x^T - \sigma_z^T}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xz}^T \sin(2\alpha) \quad (5.11)$$

$$\tau_{x'z'}^T = \frac{\sigma_x^T - \sigma_z^T}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xz}^T \cos(2\alpha) \quad (5.12)$$

$$|\sigma_{x'}^T| \geq \varepsilon, |\tau_{x'z'}^T| \geq \varepsilon$$

L'annexe 9 présente le programme associé à cet algorithme écrit en langage C par le professeur Guilbault. Et la figure ci-dessous montre l'effet des frontières libres en comparant pour une charge normale de 133.5N et une charge tangentielle de 8.9N appliquées sur une poutre d'angle $\alpha = 75^\circ$, la distribution de contrainte obtenue en considérant et en ne considérant pas la présence de frontières libres dans le modèle.

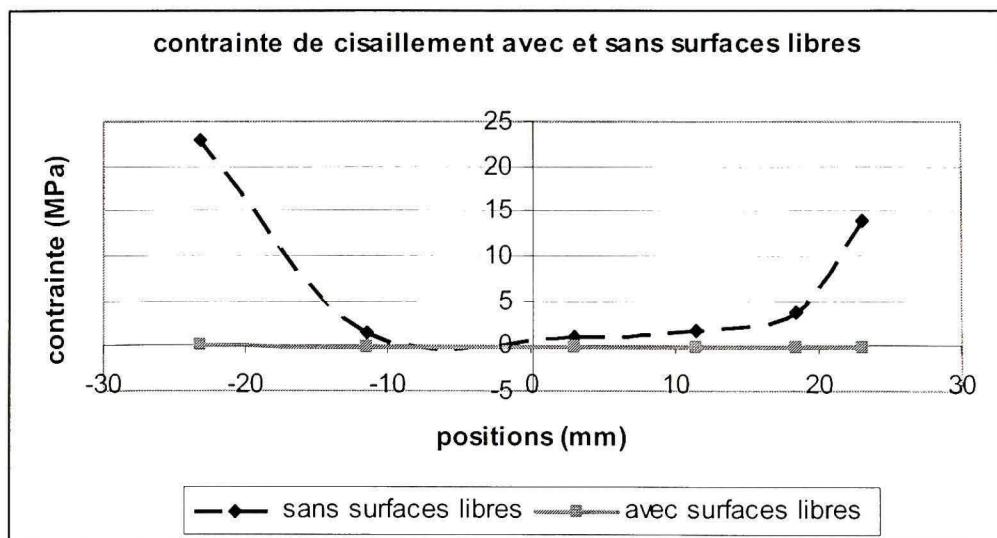


Figure 5.18 Répartition de la contrainte de cisaillement avec et sans surfaces libres.

Dans le cas de la figure 5.18, on considère qu'un des corps en contact est plus petit que l'autre. Cette configuration conduit alors à une forte concentration de contraintes à la limite de la zone de contact lorsque les frontières libres ne sont pas considérées dans la solution. Cette singularité peut être éliminée par la présence de surfaces libres (courbe en continu de la figure 5.18).

5.1.2.4 Conclusion

Dans le cas du contact de deux solides soumis à une force tangentielle (F_t) inférieure à la force statique ($F_t < \mu \cdot F_n$), il n'y a pas de glissement macroscopique. En revanche, il y a quand même des microglissements sur une partie de l'aire de contact. Le reste de l'aire de contact se déforme sans mouvement relatif et ce qui permet de supposer une adhérence. La géométrie et l'étendue de ces zones sont déterminées respectivement par la géométrie du contact et par la valeur de la force tangentielle. Plus la force tangentielle est grande plus la zone des microglissements est importante. La présence des surfaces libres à la limite de la zone de contact réduit la concentration des contraintes. La déformation des surfaces sous l'effet des forces tangentielles modifie la portée de contact et provoque une distribution des pressions de contact influencée par la compatibilité des surfaces déformées. Et enfin, la pente dû à la flexion du corps photoélastique crée une zone non chargée près du coin 1 ce qui a été traduit par une contrainte nulle dans le cas d'un matériau rigide (acier) avec un faible chargement normal. Par contre, le caoutchouc avec sa grande élasticité peut subir d'importantes déformations (figure 5.14), il est resté en contact sur toute la surface.

Le programme proposé afin d'établir les distributions de pression et de force tangentielle à l'interface de contact ne considère que l'équilibre des forces et la présence de frontières libres, et néglige la rotation des corps ainsi que la modification des limites de la portée de contact occasionnée par la déformation des surfaces sous l'effet des forces tangentielles.

5.2 Résultats numériques

Afin de valider les résultats obtenus expérimentalement, la même étude (les mêmes représentations géométriques des surfaces en contact et avec les mêmes propriétés mécaniques des matériaux) est reprise de manière numérique. Toutefois dans ce cas, la grandeur du coefficient de frottement a été établie à partir de la littérature. Le tableau qui suit présente les valeurs des facteurs.

Tableau 5. 9

Coefficients de frottement

	Plastique sur acier	Plastique sur plastique	Plastique sur caoutchouc
Coefficient de frottement	0,5	0,8	1,2

La résolution numérique d'un problème de contact coin avec frottement à l'aide du logiciel ANSYS s'articule autour des trois points :

- l'identification des surfaces de contact,
- l'application des conditions cinématiques d'impénétrabilité,
- vérification du respect des conditions statiques de contact.

ANSYS réduit tous les problèmes de contact avec frottement à deux catégories : le contact entre corps rigide et corps solide ou le contact entre deux corps déformables. Dans le contact entre solides déformables (ce qui constitue notre cas), les conditions de déplacement sont appliquées simultanément aux nœuds contactant ainsi qu'aux nœuds définissant la surface du corps cible. Avec l'utilisation d'éléments spéciaux comme `targe169` (surface cible) et `conta172` (surface de contact), une zone potentielle de contact est définie. Les éléments `conta172` sont employés pour représenter le contact et le glissement en 2D entre des surfaces cibles (`targe169`) et une surface déformable définie par ces éléments. Ces éléments ont les mêmes paramètres mécaniques que les éléments solides auxquels sont associés (`plane2`, `plane121`, `plane183`,).

Pour modéliser les éléments qui génèrent le contact coin (PS1/PS1, PS1/caoutchouc et PS1/acier), on utilise des éléments bidimensionnels de type plane183 à huit nœuds avec deux degrés de liberté pour chaque nœud. Le maillage fin a été concentré dans une zone spécifique seulement qui a conduit à une structure maillée de 1200 nœuds et 374 éléments quadrilatères.

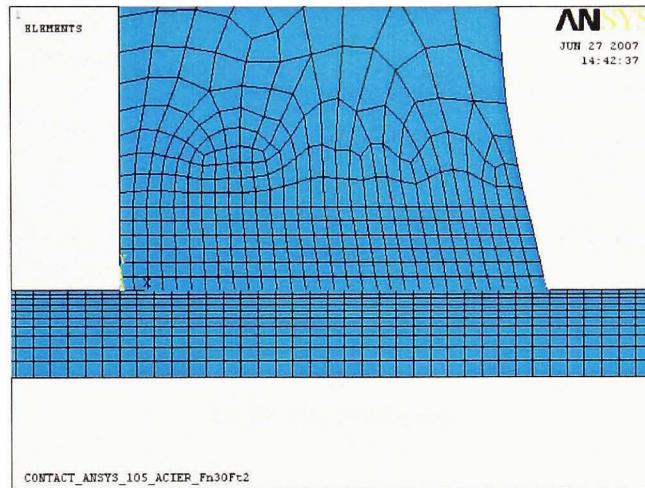
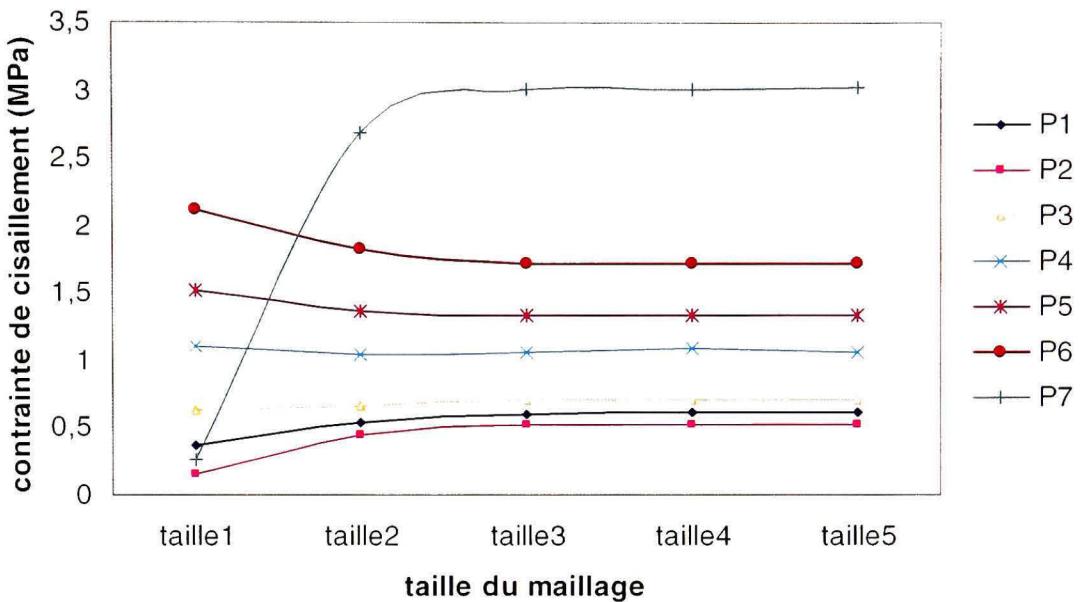


Figure 5. 19 *Maillage typique.*

5.2.1 Étude de convergence

L'objectif de l'étude de convergence est le choix des discrétisations de manières à optimiser la qualité du résultat. Donc, le travail consiste à faire varier les discrétisations des surfaces jusqu'à obtenir un maillage tel qu'une modification de celui-ci altère peu le résultat. La figure suivante donne les tracés de l'évolution de la contrainte de cisaillement maximal en fonction des discrétisations pour les sept points d'études.

courbes de convergence



Taille	Nombre d'éléments sur les segments							
	L_1, L_5	L_2	L_3	L_4	L_6, L_{11}	L_7, L_9	L_8, L_{10}	L_{12}
Taille1	6	3	5	1	30	25	3	3
Taille2	6	7	10	2	30	50	7	6
Taille3	6	10	15	3	30	75	10	9
Taille4	12	14	20	4	60	100	14	12
Taille5	24	17	25	5	60	125	20	15

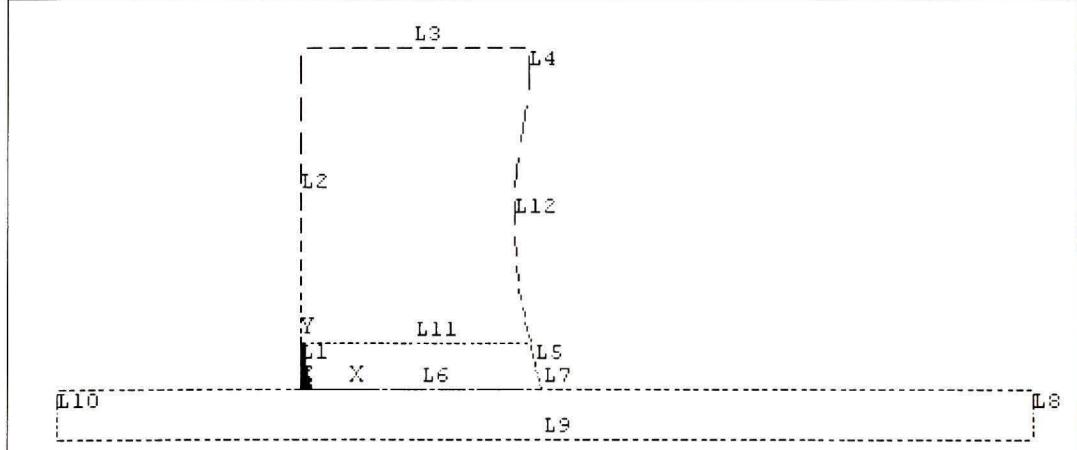


Figure 5. 20 *Courbes de convergence.*

On vérifie qu'à partir de la taille 3 une légère variation des discrétisations ne modifie pas considérablement la contrainte de cisaillement, ce qui permet de justifier le choix effectué.

Il est important de rappeler qu'au centre du domaine d'étude on est en présence de deux corps élastiques de même matériau dont les caractéristiques (module d'élasticité, coefficient de poisson et le coefficient de frottement) sont connues avec exactitude. Par contre au niveau le plus bas, le coefficient de frottement dans la programmation sur Ansys a été fixé à 1.2, alors que réellement il oscille dans un intervalle de [1 à 2] pour un contact plastique/caoutchouc. De plus, lors des essais expérimentaux, la précision de $\pm 2\%$ de la cellule de charge a influencé considérablement la lecture de la force tangentielle lorsque le chargement était minime. Par ailleurs, la précision sur la mesure de l'ordre de frange variait de 0,5 à 3%. Au niveau le plus haut, l'écrasement de l'échantillon sur l'acier a généré plusieurs franges de perturbation près de l'interface de contact (voir figures II.1 à II.21) d'où la difficulté d'évaluer les contraintes avec plus de précision sur les photographies numériques.

La forme modélisée est exactement la même que celle utilisée pour les mesures expérimentales et les résultats obtenus ont été reportés dans le tableau 5.10.

Tableau 5.10

Résultats numériques :
Contrainte de cisaillement maximale aux points d'évaluation

ESSAI N°	Combin- -aison Ft-Fn-Mat-Ang	Ft (N)	Fn (N)	Mat	Ang (°)	S1 (Mpa)	S2 (Mpa)	S3 (Mpa)	S4 (Mpa)	S5 (Mpa)	S6 (Mpa)	S7 (Mpa)
1	1111	8,9	133,5	Caout	75	0,881	1,273	1,139	1,259	1,199	1,142	1,994
2	2111	17,8	133,5	Caout	75	0,843	1,208	1,096	1,186	1,072	0,940	2,221
3	3111	26,7	133,5	Caout	75	0,806	1,143	1,052	1,115	0,954	0,997	2,438
4	1211	8,9	222,4	Caout	75	1,493	2,165	1,929	2,149	2,085	2,091	3,182
5	2211	17,8	222,4	Caout	75	1,455	2,099	1,885	2,074	1,955	1,812	3,413
6	3211	26,7	222,4	Caout	75	1,416	2,034	1,841	2,001	1,828	1,554	3,644
7	1311	8,9	311,4	Caout	75	2,106	3,055	2,719	3,039	2,972	3,042	4,367
8	2311	17,8	311,4	Caout	75	2,067	2,989	2,674	2,964	2,840	2,759	4,603
9	3311	26,7	311,4	Caout	75	2,028	2,924	2,630	2,889	2,711	2,483	4,847
10	1121	8,9	133,5	PS.1	75	0,793	1,076	0,755	0,812	0,873	0,982	1,963
11	2121	17,8	133,5	PS.1	75	0,598	0,706	0,602	0,724	0,852	1,094	2,525
12	3121	26,7	133,5	PS.1	75	0,411	0,342	0,455	0,643	0,842	1,220	3,089
13	1221	8,9	222,4	PS.1	75	1,455	2,042	1,362	1,415	1,472	1,569	2,900
14	2221	17,8	222,4	PS.1	75	1,257	1,670	1,207	1,324	1,446	1,673	3,459
15	3221	26,7	222,4	PS.1	75	1,061	1,299	1,053	1,235	1,426	1,785	4,021
16	1321	8,9	311,4	PS.1	75	2,116	3,008	1,970	2,018	2,072	2,157	3,837
17	2321	17,8	311,4	PS.1	75	1,917	2,636	1,813	1,925	2,045	2,257	4,395
18	3321	26,7	311,4	PS.1	75	1,720	2,264	1,658	1,835	2,020	2,363	4,955
19	1131	8,9	133,5	Acier	75	0,820	1,143	0,797	0,787	0,838	0,996	1,946
20	2131	17,8	133,5	Acier	75	0,591	0,718	0,604	0,696	0,831	1,122	2,407
21	3131	26,7	133,5	Acier	75	0,374	0,295	0,426	0,623	0,836	1,252	2,868
22	1231	8,9	222,4	Acier	75	1,522	2,188	1,461	1,379	1,408	1,579	2,936
23	2231	17,8	222,4	Acier	75	1,290	1,763	1,263	1,280	1,393	1,702	3,977
24	3231	26,7	222,4	Acier	75	1,060	1,338	1,070	1,189	1,385	1,828	3,858
25	1331	8,9	311,4	Acier	75	2,224	3,233	2,125	1,972	1,980	2,162	3,926
26	2331	17,8	311,4	Acier	75	1,991	2,808	1,926	1,870	1,961	2,284	4,387
27	3331	26,7	311,4	Acier	75	1,759	2,383	1,729	1,773	1,948	2,408	4,848
28	1112	8,9	133,5	Caout	90	0,879	1,175	1,325	1,299	1,217	1,063	1,396
29	2112	17,8	133,5	Caout	90	0,846	1,128	1,269	1,222	1,089	0,891	1,509
30	3112	26,7	133,5	Caout	90	0,814	1,081	1,214	1,148	0,971	0,963	1,695

Tableau 5.10 (suite)

ESSAI N°	Combin- -aison Ft-Fn-Mat-Ang	Ft (N)	Fn (N)	Mat	Ang (°)	S1 (Mpa)	S2 (Mpa)	S3 (Mpa)	S4 (Mpa)	S5 (Mpa)	S6 (Mpa)	S7 (Mpa)
31	1212	8,9	222,4	Caout	90	1,488	1,990	2,245	2,217	2,116	1,943	2,273
32	2212	17,8	222,4	Caout	90	1,454	1,942	2,189	2,139	1,985	1,688	2,361
33	3212	26,7	222,4	Caout	90	1,421	1,895	2,133	2,062	1,857	1,468	2,474
34	1312	8,9	311,4	Caout	90	2,097	2,805	3,166	3,136	3,017	2,827	3,155
35	2312	17,8	311,4	Caout	90	2,063	2,757	3,109	3,057	2,883	2,565	3,233
36	3312	26,7	311,4	Caout	90	2,029	2,710	3,053	2,979	2,752	2,314	3,329
37	1122	8,9	133,5	PS.1	90	0,707	0,673	0,712	0,782	0,858	0,974	1,457
38	2122	17,8	133,5	PS.1	90	0,546	0,479	0,586	0,707	0,845	1,083	1,828
39	3122	26,7	133,5	PS.1	90	0,398	0,306	0,465	0,640	0,840	1,205	2,210
40	1222	8,9	222,4	PS.1	90	1,288	1,251	1,272	1,355	1,443	1,557	2,187
41	2222	17,8	222,4	PS.1	90	1,124	1,056	1,144	1,278	1,425	1,658	2,551
42	3222	26,7	222,4	PS.1	90	0,962	0,863	1,018	1,203	1,411	1,768	2,922
43	1322	8,9	311,4	PS.1	90	1,870	1,830	1,832	1,929	2,029	2,142	2,918
44	2322	17,8	311,4	PS.1	90	1,705	1,634	1,703	1,850	2,009	2,239	3,279
45	3322	26,7	311,4	PS.1	90	1,541	1,440	1,576	1,774	1,992	2,343	3,645
46	1132	8,9	133,5	Acier	90	0,728	0,737	0,725	0,763	0,832	0,995	1,516
47	2132	17,8	133,5	Acier	90	0,535	0,490	0,574	0,688	0,830	1,114	1,848
48	3132	26,7	133,5	Acier	90	0,357	0,249	0,438	0,627	0,839	1,236	2,180
49	1232	8,9	222,4	Acier	90	1,344	1,394	1,311	1,328	1,392	1,580	2,305
50	2232	17,8	222,4	Acier	90	1,148	1,146	1,157	1,245	1,384	1,697	2,637
51	3232	26,7	222,4	Acier	90	0,955	0,898	1,006	1,170	1,383	1,817	2,969
52	1332	8,9	311,4	Acier	90	1,961	2,051	1,899	1,894	1,954	2,166	3,094
53	2332	17,8	311,4	Acier	90	1,763	1,803	1,742	1,808	1,943	2,282	3,426
54	3332	26,7	311,4	Acier	90	1,568	1,554	1,589	1,728	1,937	2,400	3,758
55	1113	8,9	133,5	Caout	105	1,616	0,713	1,614	1,637	1,477	1,080	1,872
56	2113	17,8	133,5	Caout	105	1,525	0,661	1,539	1,558	1,360	0,857	2,105
57	3113	26,7	133,5	Caout	105	1,434	0,610	1,463	1,479	1,250	0,930	2,332
58	1213	8,9	222,4	Caout	105	2,754	1,220	2,741	2,783	2,542	1,983	2,973
59	2213	17,8	222,4	Caout	105	2,663	1,168	2,665	2,702	2,422	1,711	3,213
60	3213	26,7	222,4	Caout	105	2,572	1,117	2,589	2,622	2,305	1,460	3,453
61	1313	8,9	311,4	Caout	105	3,892	1,725	3,868	3,928	3,607	2,889	4,071
62	2313	17,8	311,4	Caout	105	3,801	1,674	3,792	3,847	3,486	2,611	4,317
63	3313	26,7	311,4	Caout	105	3,709	1,623	3,716	3,767	3,366	2,344	4,569
64	1123	8,9	133,5	PS.1	105	0,412	0,357	0,466	0,679	0,823	1,027	2,228
65	2123	17,8	133,5	PS.1	105	0,148	0,101	0,272	0,548	0,786	1,148	2,844
66	3123	26,7	133,5	PS.1	105	0,013	0,021	0,009	0,429	0,750	1,285	3,492
67	1223	8,9	222,4	PS.1	105	0,871	0,787	0,909	1,227	1,428	1,636	3,304
68	2223	17,8	222,4	PS.1	105	0,596	0,500	0,712	1,084	1,359	1,750	3,918
69	3223	26,7	222,4	PS.1	105	0,330	0,246	0,520	0,951	1,321	1,872	4,533
70	1323	8,9	311,4	PS.1	105	1,329	1,218	1,353	1,776	2,038	2,246	4,381

Tableau 5.10 (suite)

ESSAI N°	Combin- -aison Ft-Fn-Mat-Ang	Ft (N)	Fn (N)	Mat	Ang (°)	S1 (Mpa)	S2 (Mpa)	S3 (Mpa)	S4 (Mpa)	S5 (Mpa)	S6 (Mpa)	S7 (Mpa)
71	2323	17,8	311,4	PS.1	105	1,054	0,929	1,154	1,631	1,943	2,358	4,993
72	3323	26,7	311,4	PS.1	105	0,781	0,643	0,958	1,490	1,895	2,474	5,608
73	1133	8,9	133,5	Acier	105	0,387	0,444	0,480	0,647	0,791	1,055	2,170
74	2133	17,8	133,5	Acier	105	0,105	0,120	0,224	0,515	0,759	1,190	2,680
75	3133	26,7	133,5	Acier	105	0,043	0,020	0,050	0,375	0,733	1,333	3,225
76	1233	8,9	222,4	Acier	105	0,833	0,956	0,971	1,171	1,345	1,671	3,276
77	2233	17,8	222,4	Acier	105	0,551	0,632	0,714	1,032	1,306	1,803	3,787
78	3233	26,7	222,4	Acier	105	0,270	0,310	0,458	0,900	1,274	1,938	4,297
79	1333	8,9	311,4	Acier	105	1,279	1,468	1,462	1,697	1,900	2,286	4,383
80	2333	17,8	311,4	Acier	105	0,997	1,144	1,205	1,555	1,858	2,418	4,893
81	3333	26,7	311,4	Acier	105	0,715	0,820	0,948	1,418	1,821	2,551	5,404

5.2.2 Comparaison des mesures expérimentales aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis

Cette analyse présente de manière globale les résultats des deux séries de test. Les résultats expérimentaux sont comparés à ceux obtenus par simulations numériques. Cette comparaison est présentée en fonction de la contrainte de cisaillement maximal pour tous les points de mesure. La figure suivante illustre la variation de la contrainte de cisaillement maximal au point P3 pour toutes les combinaisons possibles des quatre facteurs. L'annexe 7 donne la même comparaison aux six points restants.

variation de la contrainte de cisaillement pour toutes les combinaisons des facteurs au point P3 (Ang=75)

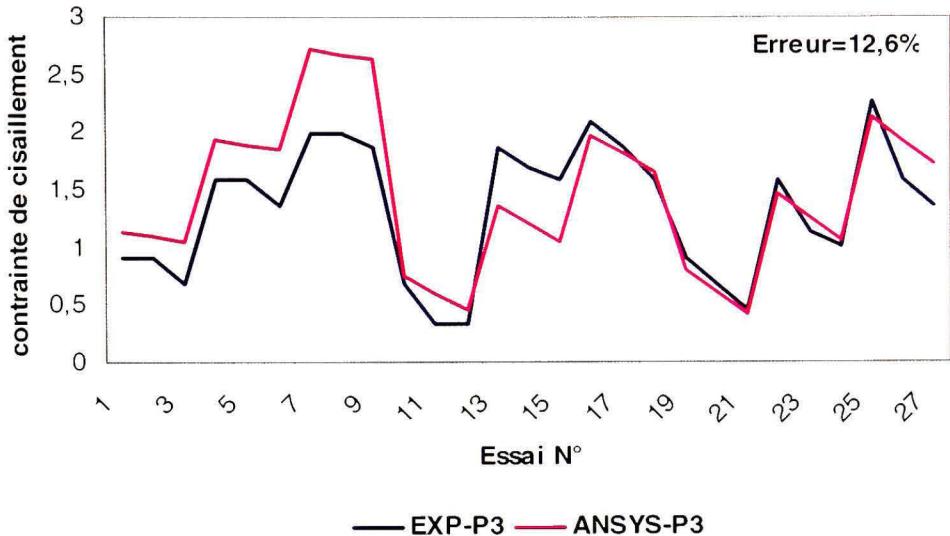


Figure 5.21 Courbes de comparaison expérimental/numérique au point P3 (essai 1 à 27, angle 75 degré).

variation de la contrainte de cisaillement pour toutes les combinaisons des facteurs au point P3 (Ang=90)

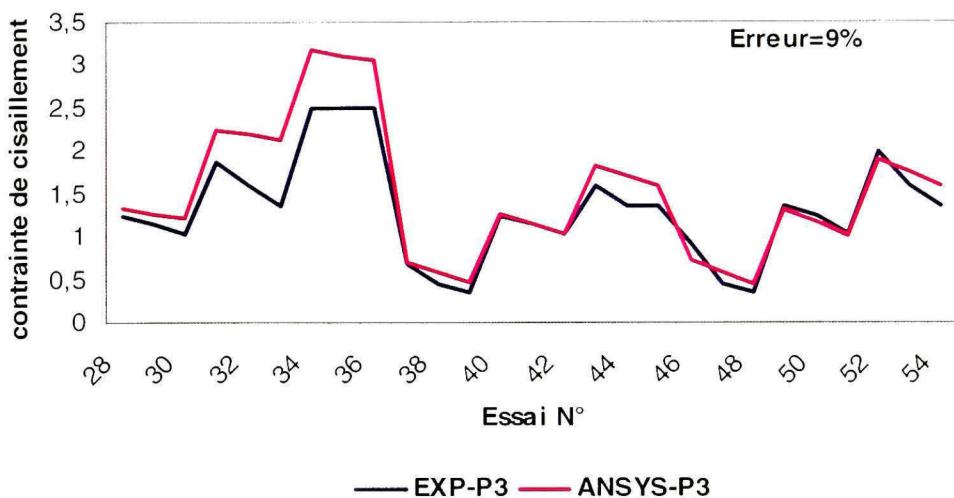


Figure 5.22 Courbes de comparaison expérimental/numérique au point P3 (essai 28 à 54, angle 90 degré).

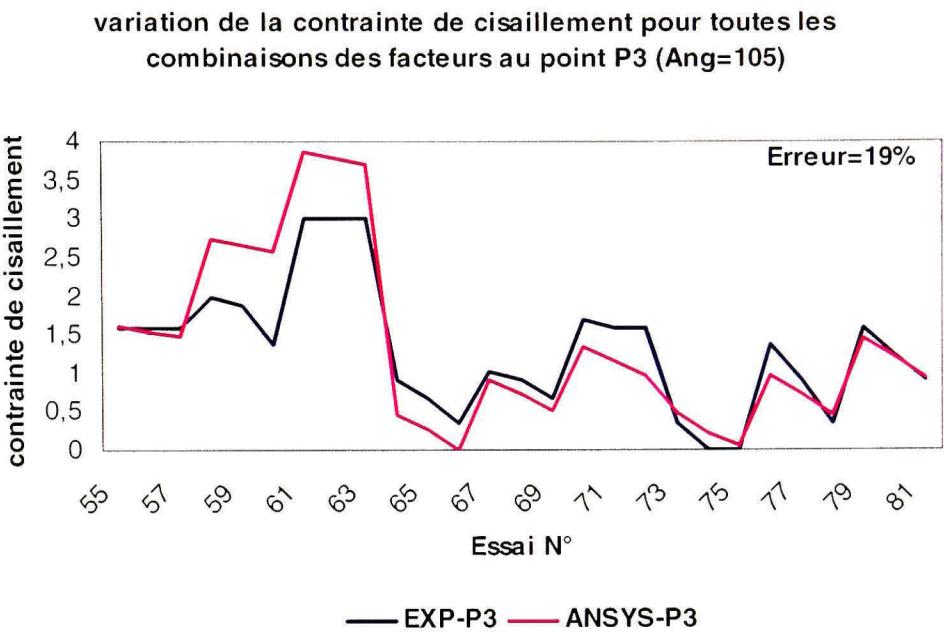


Figure 5.23 Courbes de comparaison expérimental/numérique au point P3 (essai 55 à 81, angle 105 degré).

L'erreur absolue, l'erreur relative, l'erreur relative totale et la moyenne de l'erreur relative totale sont indiquées dans le tableau 5.11. Ces valeurs sont calculées au centre du domaine d'étude.

Tableau 5.11

Erreurs relatives et absolues au centre du domaine d'étude

Points d'étude	contrainte obtenue par simulation	contrainte obtenue expérimentalement	Erreurs absolues	Erreurs relatives	MERT en%
P1	1,287955	1,261494	0,026461	0,02054497	
P2	1,337812	1,341867	0,004055	0,00303107	
P3	1,438695	1,309019	0,129676	0,09013446	
P4	1,575958	1,490031	0,085927	0,05452366	4,56905975
P5	1,63483	1,654969	0,020139	0,01231871	
P6	1,742415	1,833186	0,090771	0,05209494	
P7	3,203448	2,924151	0,279297	0,08718637	
			ERT	0,31983418	

Tableau 5.12

Erreurs relatives et absolues au niveau bas des facteurs

Points d'étude	contrainte obtenue par simulation	contrainte obtenue expérimentalement	Erreur absolue	Erreur relative	MERT en%
P1	0,557222	0,746763	0,189541	0,34015348	
P2	1,248229	1,089742	0,158487	0,12696949	
P3	0,924124	0,849325	0,074799	0,08094044	
P4	1,055864	1,188635	0,132771	0,12574631	
P5	1,055031	1,229346	0,174315	0,16522263	
P6	1,138327	1,051653	0,086674	0,07614157	
P7	1,851862	1,004129	0,847733	0,45777331	
			ERT	1.372947	

Les données du tableau 5.11, avec une moyenne de l'écart relatif total de 4.5% indiquent une très bonne corrélation entre la simulation numérique et l'application de la photoélasticité. En s'éloignant du centre du domaine d'étude cette concordance diminue progressivement jusqu'à ce qu'elle atteint les 19% au niveau le plus bas des facteurs.

5.2.3 Comparaison des résultats du modèle proposé aux résultats expérimentaux et de la méthode des éléments finis

Cette section vise à illustrer l'effet des frontières libres sur la distribution des contraintes aux points 1 à 7. Les figures ci-dessous comparent pour les cas $F_n=133.5$, $\text{Ang}=105^\circ$, $\text{Mat}=\text{acier}$ et les trois niveaux de F_t les mesures expérimentales et les résultats numériques obtenus du modèle proposé précédemment et la méthode des éléments finis.

Cisaillement maximal aux points internes pour force verticale 133,5N et angle 105degrés

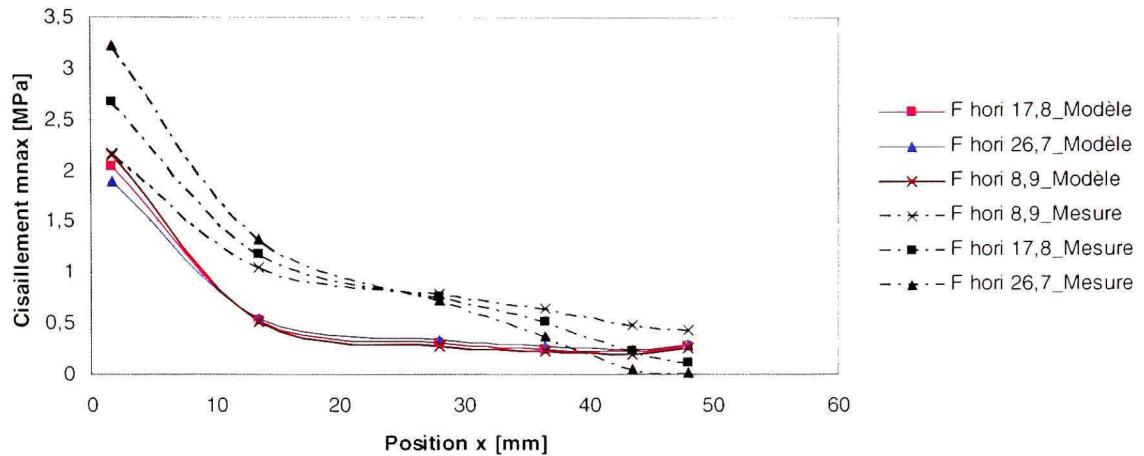


Figure 5.24 *Courbes de comparaison modèle/mesure.*

Cisaillement maximal aux points internes pour force verticale 133,5N et angle 105degrés

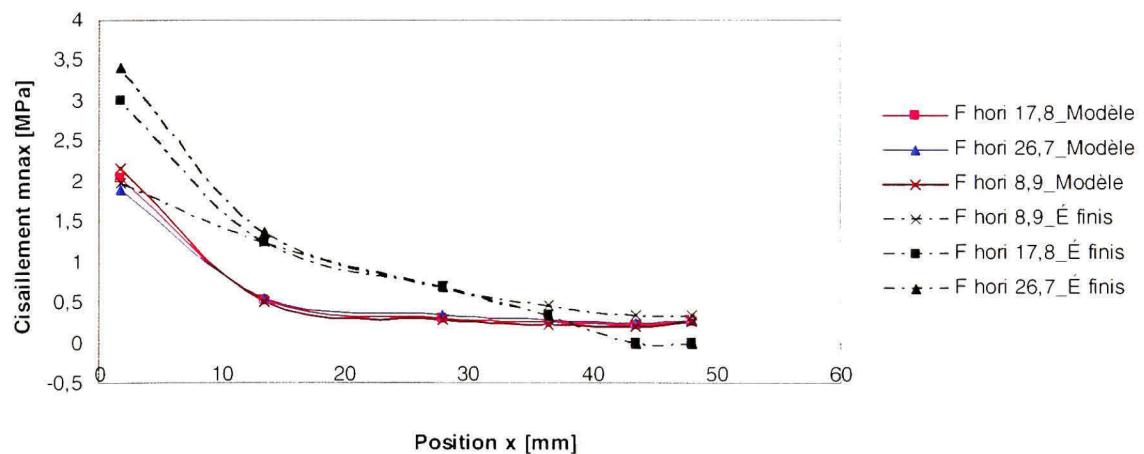


Figure 5.25 *Courbes de comparaison modèle/éléments finis.*

Les valeurs de la contrainte de cisaillement obtenues des trois approches ont des comportements très similaires. Seul les résultats obtenus du modèle montrent un écart croissant avec la force tangentielle (F_t). En fait, il faut rappeler que le modèle ne considère pas l'effet de la rotation de la pièce. Il était donc prévisible d'observer ce genre de déviation, puisque la rotation montre un effet important sur l'augmentation de la contrainte au coin 2 et sur la réduction de celle-ci au coin 1. Ainsi, pour le niveau $F_t=8.9N$; les courbes des trois méthodes montrent une correspondance sans équivoque.

Il est donc permis de conclure que l'approche de relâchement des frontières libres proposée précédemment est parfaitement applicable à la modélisation du contact. Il est aussi possible de considérer que cette méthode serait utilisable avec les problèmes de contact 3D. Il faut ici mentionner que cette approche de modélisation n'emploie aucun effet miroir, comme le fait la méthode développée par Hetenyi (1970) et qu'elle risque d'être en conséquence plus lente. Toutefois, le modèle proposé a la capacité de traiter les problèmes de contact coin où l'angle de coin n'est pas droit, ce qui n'est pas le cas de la méthode faisant usage des effets miroir.

CONCLUSION

Le but de cette étude était d'étudier par la photoélasticité l'effet du coin d'un corps élastique entrant en contact avec différents matériaux sous un chargement combiné.

La démarche suivie a consisté à effectuer dans un premier temps une recherche bibliographique pour bien situer le sujet d'étude par rapport aux travaux déjà menés auparavant. Elle a démontré que la théorie de Hertz du contact élastique est incapable de considérer un coin. Ensuite, construire un plan d'expériences factoriel complet (quatre facteurs à trois niveaux chacun). Le chargement combiné a généré deux efforts avec trois niveaux chacun. Une force normale avec 133.5, 22.4 et 311.4 N, et une force tangentielle avec 8.9, 17.8 et 26.7 N. La géométrie a produit l'angle de contact avec ses trois niveaux 75°, 90° et 105°. Les matériaux en contact ont créé le quatrième facteur, le caoutchouc au niveau bas, le PS1 au niveau intermédiaire et l'acier au niveau haut.

L'exécution de ce plan a nécessité la mise en place d'un banc d'essai composé principalement d'un polariscope, un système d'acquisition des données, un appareil photos numériques et d'un assemblage mécanique. La conception et la réalisation de ce dernier ont été faite de manière qu'il puisse recevoir les deux échantillons de différentes tailles et qu'il assure le mouvement vertical et horizontal. Une série de 81 essais a été réalisé durant la campagne expérimentale avec prise de photos pour chacun d'eux. Ensuite, l'examen des photographies numériques a été fait à l'aide d'un logiciel de traitement d'images (PhotoFilte).

Les effets du frottement et de la flexion causée par la force tangentielle peuvent créer deux zones différentes entre les deux corps en contact (figure 4.2) : une zone de non contact (non chargée) située au côté opposé de l'application de la force (coin 1) et une zone d'adhérence fortement chargée déplacée vers l'arrière du contact (coin 2). Sous l'effet du cisaillement, les surfaces déformées deviennent incompatibles et modifient la portée de contact. En plus, il y a

l'effet des surfaces libres qui diminue considérablement la concentration de contrainte à la limite de la zone de contact.

Malgré que le modèle ne prenne pas en considération la flexion de la pièce, les résultats obtenus par l'approche de relâchement des frontières libres ont une forte corrélation avec ceux obtenus expérimentalement et par la méthode des éléments finis, chose qui confirme l'application de cette méthode à la modélisation du contact, que ce soit en 2D ou en 3D, à angle aigu, droit ou obtus.

Par ailleurs, l'analyse statistique des résultats a été réalisée par le logiciel JMP. L'estimation des paramètres a montré qu'en aucun cas la probabilité qu'un facteur ou l'interaction angle/matériau soient nul était inférieure à 0.0001. Le diagramme des effets a indiqué que seule la force normale a un effet positif sur tous les points d'étude. De même pour le résultat des contraintes obtenues par simulation, bien que les valeurs diffèrent légèrement des valeurs obtenues par photoélasticité, l'allure et l'ordre de grandeur sont similaires.

Enfin, dans le centre du domaine d'étude l'erreur relative est toujours inférieure ou égale à 9% et la moyenne de l'erreur relative totale est de 4.5%. Cet accord expérimental/simulation numérique valide les résultats obtenus à l'issue de cette étude.

RECOMMANDATIONS

Les meilleurs résultats (erreurs relatives faibles) sont atteints au centre du domaine d'étude. Et pour améliorer ceux des niveaux extrêmes, on a jugé qu'il est nécessaire de mesurer expérimentalement le coefficient de frottement des matériaux en contact. Comme la force tangentielle a un effet parfois positif et parfois négatif et son sens d'application a été fixé du côté opposé au coin du contact principal, l'ajout au plan d'expériences d'un cinquième facteur à deux niveaux (le sens étudié et son opposé) va mieux cerner l'objet de l'étude. Enfin, l'utilisation d'un matériau photoélastique moins sensible donnera à l'expérimentateur plus de flexibilité au choix des charges à appliquer.

ANNEXE I

APPLICATION DE LA PHOTOÉLASTICITÉ

1 Introduction

La photoélasticimétrie est une technique industrielle de prévision des contraintes qui vient compléter des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (Le dain, 2000). Elle est fondée sur des principes théoriques très simples, explicables par des calculs de trigonométrie parfois longs, mais toujours élémentaires (Le dain, 2000). Ces calculs n'ont pas à être repris lors des essais expérimentaux. Pour suivre ces théories, quelques principes de la physique ont été adaptés de (Avril. J, 1974) et qui se résument comme suit :

- En un point de la surface d'une structure contrainte, la contrainte normale à la surface est nulle. Les deux autres contraintes principales sont orientées, dans le plan tangent à la surface, suivant deux directions perpendiculaires dites directions principales. Les déformations principales ont mêmes directions que les contraintes principales dans le cas des matériaux isotropes.
- L'indice de réfraction d'un milieu transparent est le rapport des vitesses de la lumière dans le vide es dans ce milieu.
- La lumière se propage par ondes sinusoïdales. Sous sa forme la plus simple, c'est une onde plane monochromatique représentée par deux grandeurs vectorielles sinusoïdales, en phase et perpendiculaires (champ électrique et champ magnétique). En un point de l'espace, chacun de ces champs est une fonction sinusoïdale du temps et, réciproquement, à un instant donné, la distribution dans l'espace est sinusoïdale le long de l'axe de propagation. Sous cette forme, la lumière monochromatique est dite polarisée, parce que chacun des vecteurs champs reste parallèle à une direction fixe. Les vecteurs, champ électrique et champ magnétique étant perpendiculaires, synchrones et en phase, on peut au cours des calculs, considérer l'un quelconque d'entre eux.

- Plus généralement, les diverses composantes d'une même onde monochromatique, donc de même période mais de phases et directions différentes se composent pour donner une onde elliptique. En un point donné, l'extrémité du vecteur du champ magnétique (et, de même celle du champ électrique) décrit une ellipse dans un champ perpendiculaire à la direction de propagation et, à un instant donné, l'onde est représentée par une hélice elliptique centrée sur l'axe de propagation.
- La longueur d'onde d'un rayonnement monochromatique est caractéristique de sa couleur. La lumière blanche visible comprend toutes les longueurs d'ondes comprises entre les valeurs proches de 800nm et 400nm environ. Les couleurs forment, dans l'ordre décroissant de leurs longueurs d'ondes, un spectre passant progressivement par les rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo et violet.
- Les phénomènes d'interférences lumineuses sont dus à des compositions vectorielles de champs, créant des ondes stationnaires. Il ne peut y avoir d'interférence entre deux longueurs d'ondes différentes. Même entre deux rayons issus d'une même source monochromatique, mais de points ou d'instants différents, il ne peut y avoir d'interférence, car le synchronisme absolu des fréquences est peu probable. L'interférence ne peut se produire qu'entre deux composantes d'une même origine, même si le rayon passe simultanément par des chemins différents, ou s'il se propage suivant plusieurs composantes à des vitesses différentes.
- L'énergie transportée par une onde lumineuse est proportionnelle au produit des champs électrique et magnétique, donc au carré de l'amplitude de l'un deux.

2 Quelques notions théoriques

À l'exception de l'isotropie et l'anisotropie, ces notions ont été adaptées de (M-A. Le Dain, 2000) qui traite la polarisation de la lumière, la photoélasticité et la photoélasticimétrie ainsi que la biréfringence naturelle et accidentelle.

2.1 Lumière polarisée

La lumière se propage par ondes sinusoïdales. Un filtre polarisant tel que, par exemple un polaroïd possède la propriété de polariser la lumière, c'est à dire de ne laisser passer la lumière que dans un plan parallèle à une direction fixe dite axe de polarisation (axe 0P sur la figure I.1).

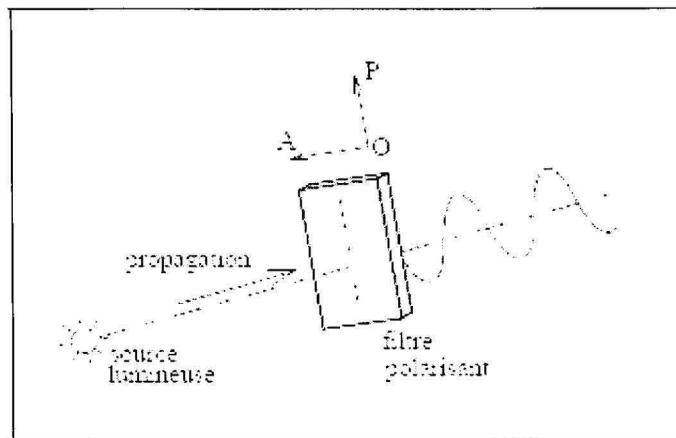
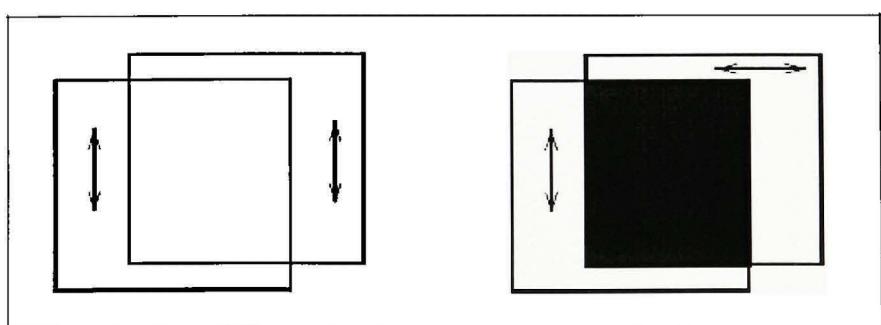


Figure I.1 *Polarisation de la lumière.*

(Adaptée de *Le dain, M-A, 2000*)

Deux polaroïds successifs dont les axes de polarisation sont parallèles laissent passer la lumière (figure I.2a). Lorsque les axes de ces polaroïds sont perpendiculaires, il y a extinction complète (figure I.2b).



(a) Axes de polarisation parallèles

(b) Axes de polarisation perpendiculaires

Figure I.2 *Filtres polarisants.*

(Adapté de *Le dain, M-A, 2000*)

2.2 Isotropie et anisotropie

Cette sous section a été adaptée de (B. Martin, 2006) qui mentionne que l'isotropie est la qualité d'un matériau dont les caractéristiques mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions, de sorte qu'il se déforme élastiquement ou plastiquement, et à la limite se rompt, toujours dans les mêmes conditions quelle que soit l'orientation de la microstructure. L'anisotropie est relative à un milieu dont l'évaluation des propriétés physiques dépend de la direction suivant laquelle on observe ce milieu. Elle est donc la qualité d'un milieu dont les propriétés varient suivant la direction selon laquelle on les évalue.

2.3 Biréfringence

2.3.1 Biréfringence naturelle

Certains corps naturels transparents, anisotropes (les cristaux par exemple) présentent le phénomène de biréfringence.

Un corps transparent, naturellement biréfringent, placé entre deux polaroïds à axes perpendiculaires, l'un quelconque de ses axes étant parallèle à la direction de polarisation, ne modifie pas la zone d'extinction (figure I.3a). Ce même corps biréfringent, placé obliquement laisse passer la lumière avec une couleur qui dépend de la biréfringence du corps (partie hachurée sur la figure I.3b). Le maximum d'intensité est obtenu pour une inclinaison de 45°. C'est le phénomène de biréfringence naturelle.

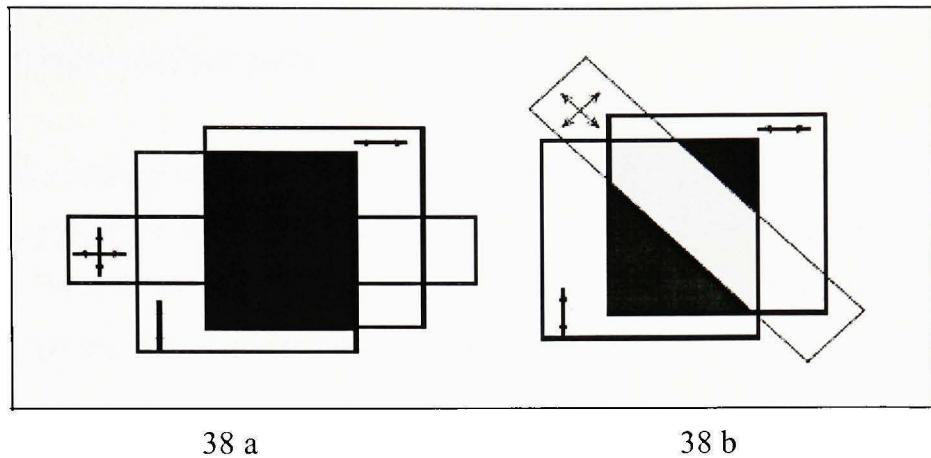


Figure I.3 *Phénomène de biréfringence naturelle.*

(Adapté de *Le dain, M-A, 2000*)

Le phénomène de biréfringence peut se caractériser de la façon suivante : si une lumière plane se présente suivant une direction de polarisation quelconque par rapport aux axes du corps biréfringent, à l'intérieur du corps tout se passe comme si elle était décomposée en deux ondes perpendiculaires qui progressent avec des vitesses de propagation différentes. A la sortie du corps, deux ondes P_X et P_Y se trouvent en présence avec des directions de polarisation perpendiculaires et dont l'une est en retard par rapport à l'autre (figure I.4), mais qui progressent de nouveau à la même vitesse. Ce retard optique δ est une caractéristique du phénomène de biréfringence.

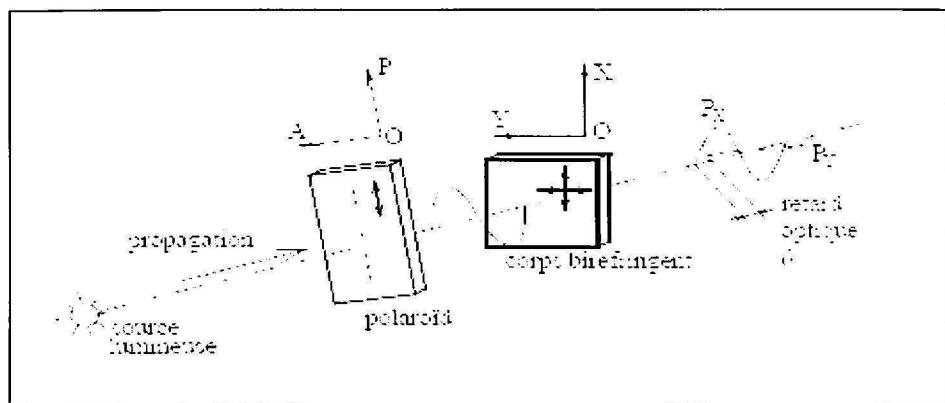


Figure I.4 *Décomposition de l'onde polarisée incidente*

en deux ondes perpendiculaires.
(Adapté de *Le dain, M-A, 2000*)

2.3.2 Biréfringence accidentelle

La plupart des corps transparents, isotropes, normalement non biréfringents, le deviennent quand ils sont soumis à des déformations ou des contraintes. Cette biréfringence accidentelle est telle que les axes de biréfringence coïncident avec les axes principaux des contraintes. C'est ce phénomène qui est utilisée en photoélasticimétrie.

2.4 Photoélasticité et photoélasticimétrie

La photoélasticité est la science qui étudie en physique les effets sur la lumière des contraintes ou déformations appliquées à des corps élastiques. Par contre, la technique expérimentale qui sert à mesurer les contraintes par photoélasticité est la photoélasticimétrie, et c'est cette dernière qui nous intéresse dans notre étude.

2.5 Lois fondamentales de la photoélasticité

Ces lois ont été adaptées principalement de (J. Avril, 1974). Qui mentionne que le retard optique δ de l'une des composantes de la lumière par rapport à l'autre, permet de connaître les relations qui lient les contraintes ou les déformations et la biréfringence accidentelle. Celle qui est relative aux contraintes est la loi de Maxwell et celle qui concerne les déformations est la loi de Neumann.

$$\delta = C e (\sigma_1 - \sigma_2) \quad \text{Maxwell} \quad (I.1)$$

$$\delta = K e (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad \text{Neumann} \quad (I.2)$$

Avec :

e est l'épaisseur de la matière

K est une constante sans dimension

C est la caractéristique du matériau considéré

La relation qui lie K et C est donnée par l'équation (I.3)

$$K = \frac{C \cdot E}{1 + \nu} \quad (I.3)$$

E et ν étant le module de Young et le coefficient de poisson

Dans le cas des structures photoélastiques d'épaisseur e observées par réflexion, la relation (1.2) devient :

$$\delta = K \cdot 2e (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (I.4)$$

Cependant nous sommes intéressés surtout par les contraintes dans la structure, on peut écrire donc :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{E}{1 + \nu} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (I.5)$$

Si on considère un point soumis à des déformations croissantes, il sera alternativement noir et lumineux, la variation d'intensité lumineuse étant fonction sinusoïdale de la déformation. Lorsque la différence des déformations principales est nulle ou égale à un multiple entier d'une valeur fixe f, on peut écrire :

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = N \cdot f \quad (I.6)$$

Avec $f = \frac{\lambda}{2eK}$ et N un nombre entier

λ Est la longueur d'onde de la raie jaune du sodium, $\lambda = 0,546$ à $0,589 \mu m$

Finalement on aura :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{E}{1 + \nu} N \cdot f \quad (I.7)$$

Et la contrainte de cisaillement maximal :

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (I.8)$$

2.5.1 Identification de l'ordre de frange N

Lorsqu'un échantillon photoélastique est soumis à une charge, des franges isochromatiques apparaissent. Elles sont visibles seulement lorsqu'on regarde l'échantillon au travers du polariseur. Plus la charge est élevée, plus le nombre de frange augmente. De plus, les franges vont toujours se concentrer aux endroits où les contraintes sont plus importantes. Une ligne de couleur uniforme est une ligne d'isocontrainte ou, plus exactement, d'isocisaillement. Donc, en appliquant une source de lumière blanche, les franges photoélastiques apparaissent en une série de bandes continues de couleur différentes. Ces bandes ont la forme d'une boucle fermée ou d'une ligne courbée. Chaque bande possède une couleur unique qui est reliée directement à la valeur de l'ordre de frange N. ces couleurs apparaissent toujours dans la même séquence.

En l'absence de biréfringence, nous avons que du noir et la différence des contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$) est nulle. Donc $\sigma_1 = \sigma_2$ et, en conséquence, la contrainte normale est la même dans toutes les directions. Les franges successives sont reconnaissables par les teintes de Newton.

Une frange est la ligne de séparation entre le rouge et le vert, ou le rouge et le bleu pour la frange d'ordre 1. Il y a une frange entière pour tous les passages brusques du rouge au vert ou au bleu. On peut ainsi repérer le sens croissant des contraintes de cisaillement maximum. Ainsi, si nous suivons la droite de la figure I.5, partant du point 1 qui est noir, donc d'ordre 0 (N=0). Nous rencontrons successivement la première frange (N=1), passage du rouge à bleu au point 2 et la deuxième frange (N=2), passage du rouge à vert au point 3.

Cependant, pour connaître le signe des contraintes, il faut observer les franges durant l'essai. Suivant que les franges d'ordre inférieur se rapprochent (on a le signe +) ou s'éloignent (on a le signe -) du point considéré. Donc, pour une exploitation ultérieure, il faut noter les signes des photographies prises pendant l'essai.

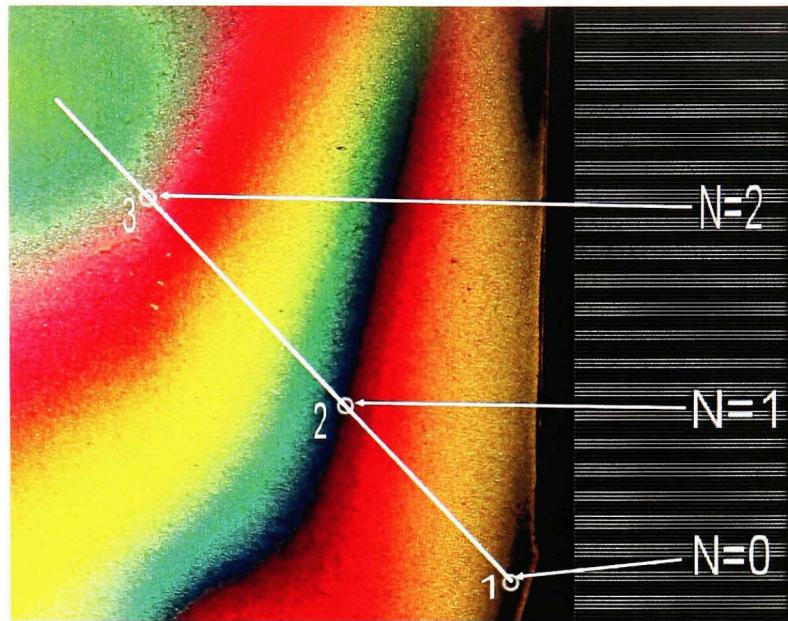


Figure I.5 *Photo prise lors d'un essai PS-I/acier avec $F_n=222,4$, $F_t=26,7$.*

2.6 Instruments de mesure des franges photoélastiques

Le polariscope de la série 030 est un instrument à champ noir. La source lumineuse et l'observateur se trouvent d'un même côté du corps photoélastique. De ce fait, les directions d'incidence et de réflexion sont légèrement obliques, mais cela ne cause pas une erreur bien importante. Partant donc de la source (5) sur la figure I.6, la lumière traverse d'abord un polariseur (1), atteint l'échantillon, est réfléchie, traverse ensuite l'analyseur (2) pour atteindre l'appareil photo numérique (9).

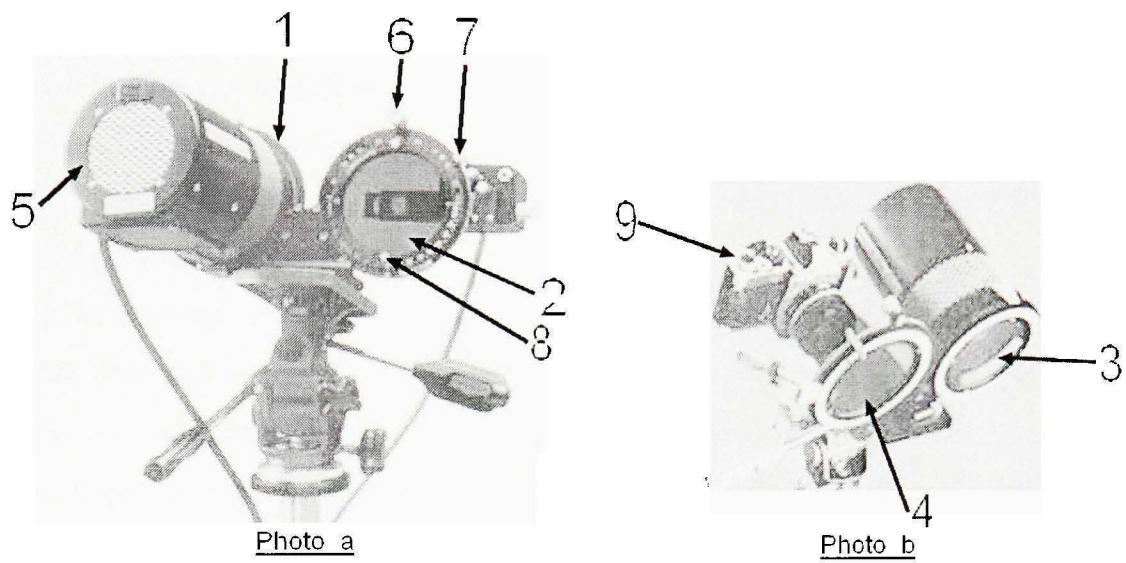


Figure I.6 Polariscopes de la série 030.

(Adapté de photoStress instrumentation, Intertechnology, Inc)

L'analyseur (2) comprend un cadre circulaire qui est, lui solidaire du polariseur, et, à l'intérieur de ce cadre, le polaroïd peut tourner librement. Ce mouvement indépendant est obtenu par le bouton (8). Quand au mouvement solidaire, des polaroïds, on l'obtient en agissant sur le bouton (6) qui sert également de verrou. Il y a aussi les deux quarts d'ondes (3) et (4) situés après le polariseur et avant l'analyseur qui peuvent être manipulés par le bouton (7).

2.6.1 Mesure de l'ordre des franges (les contraintes)

Pour ce, on remet les quarts d'ondes dans leur position de lumière circulaire, c'est-à-dire que le levier (7) est mis en position basse repérée M (comme magnitude). Les isoclines ont disparu. On peut vérifier que les polaroïds étant croisés, c'est-à-dire que la flèche (compensator) étant au zéro, le mouvement solidaire des deux ensembles de filtres ne modifie pas l'aspect des franges. C'est d'ailleurs une façon de vérifier que l'instrument est correctement réglé.

Dans ces conditions on peut relever par tracé au crayon gras ou par photographie les franges successives affectées de numéros 1, 2, 3, etc. (la frange noire correspondant au 0). On ne peut confondre l'ordre des franges si on tient compte du fait qu'il est impossible de passer par exemple de la frange 1 à la 3 sans franchir la 2. D'autre part le sens croissant des contraintes a toujours lieu dans l'ordre rouge-bleu ou rouge-vert.

On peut également, en disposant les polaroïds parallèles (flèche face à la valeur 90°) obtenir les demi-franges d'ordre 0,5, 1,5, 2,5, etc. pour connaître les déformations ou les contraintes il suffit de connaître le nombre f correspondant à la déformation ($\varepsilon_1 - \varepsilon_2$) qui donne une frange. Dans notre cas par exemple $f = 625$ microdéformations tout le long de la frange 1. De même tout le long de la frange 2, la valeur est double soit 1250, etc. on peut raisonner directement en contraintes, et la frange 1 correspond à une contrainte égale

$$\text{à } (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{E}{1 + \nu} f = \frac{2500}{1 + 0.38} 625 \cdot 10^{-6} = 1,132 \text{ Mpa / frange}.$$

2.6.2 Interpolation angulaire (Méthode de Tardy)

Pour connaître la valeur exacte lorsqu'un point se trouve entre deux franges successives (1 et 2 par exemple), on utilise le procédé de l'interpolation angulaire. Pour ce, les polaroïds sont placés de telle façon qu'une isocline passe par le point considéré (figue I.7), on bloque le verrou du levier (6) et on passe en lumière circulaire avec le levier (7) ramené en position basse. Agissant sur le seul analyseur à l'aide du bouton (8), on tourne celui-ci à droite ou à gauche pour amener la teinte sensible de la frange inférieure ($\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 625$) sur le point considéré. L'écart entre 625 et la valeur cherchée est proportionnel à l'angle de rotation de l'analyseur, la valeur du point cherché est :

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 625 \left(1 + \frac{\text{angle}}{100}\right)$$

La précision obtenue est inférieure à $\pm 10 \mu\text{m/m}$ soit donc de 0.02 Mpa.

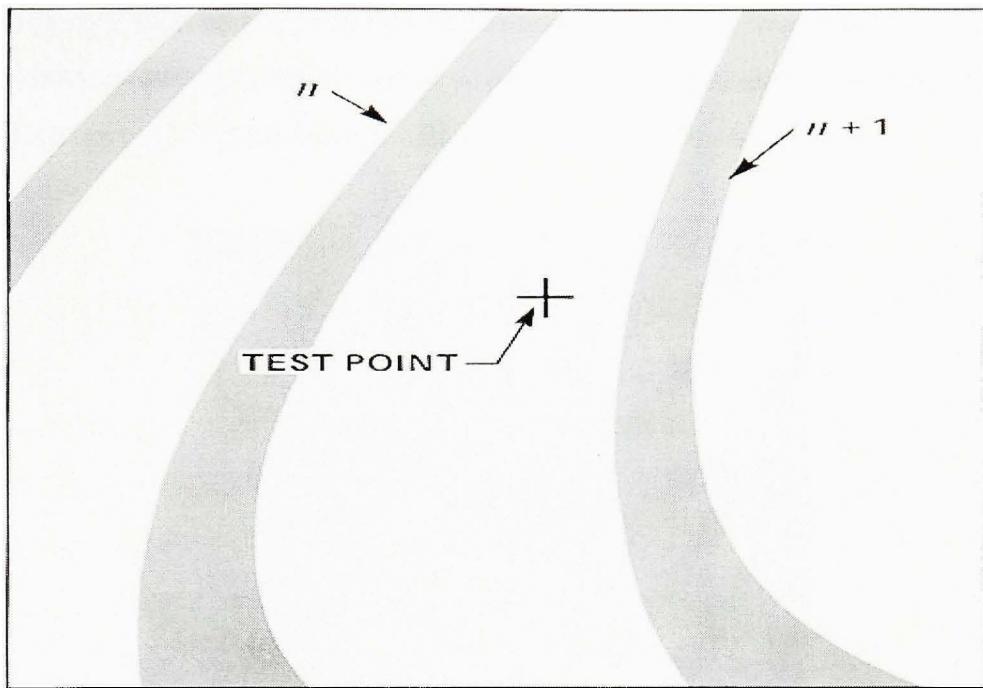


Figure I.7 mesure de la contrainte entre deux franges successives.

(Adapté de Photolastic Division measurement group, Inc., 1992)

En plus de la méthode de Tardy, il y a la méthode des mesures en incidence oblique qui est fréquemment utilisée dans le domaine de la photoélasticité. Son principe est expliqué par la figure I.8 (la pointe de l'extrémité du dispositif doit être placée sur le point étudié).

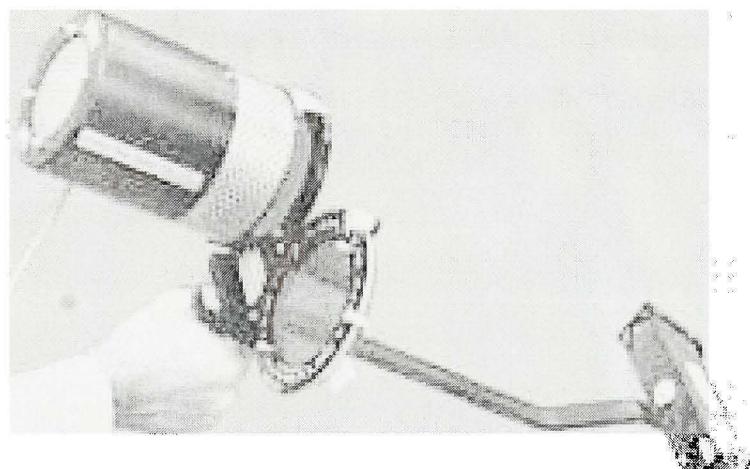


Figure I.8 Mesures en incidence oblique.

(Adapté de photoStress instrumentation, Intertechnology, Inc)

Il y a aussi la méthode des mesures des contraintes à l'aide d'un compensateur. En tournant la molette comme à la figure I.9, on amène la frange noire sur le point considéré et on obtient directement la mesure sans avoir à rechercher l'ordre entier des franges.

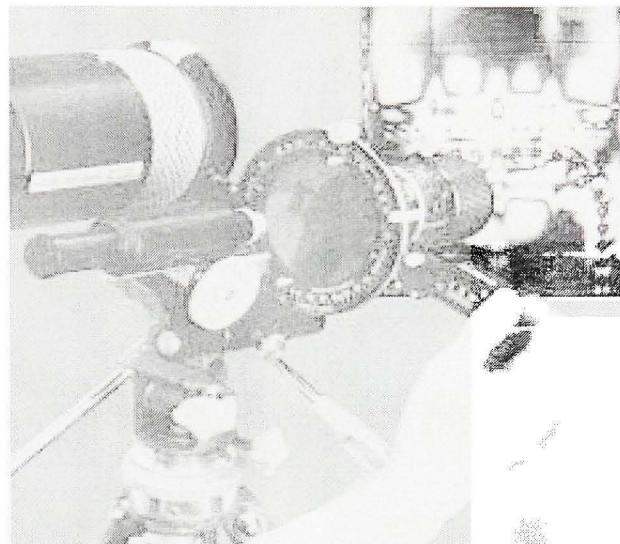


Figure I.9 Mesures à l'aide d'un compensateur.
(Adaptée de *photoStress instrumentation, Intertechnology, Inc*)

La mise en exécution de telle ou telle méthode nécessite une lecture détaillée des sections NBC et SPS du guide d'instruction [Photolastic Division measuring group, inc. Strain measurement with the 030-series reflection polariscope. Operating instructions and technical manual, 1992.]

ANNEXE II

PHOTOGRAPHIES NUMÉRIQUES

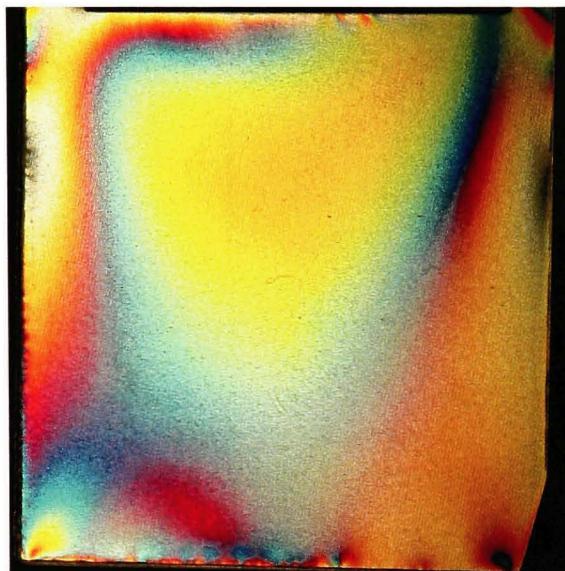


Figure II.1 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
Mat=Acier, Ang=75°

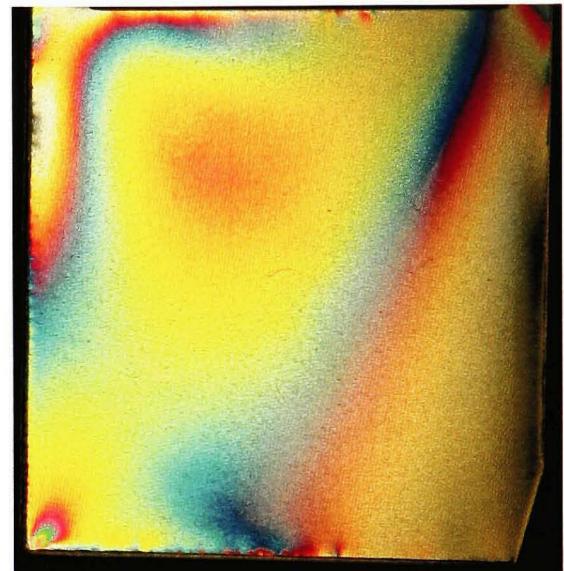


Figure II.2 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
Mat=Acier, Ang=75°

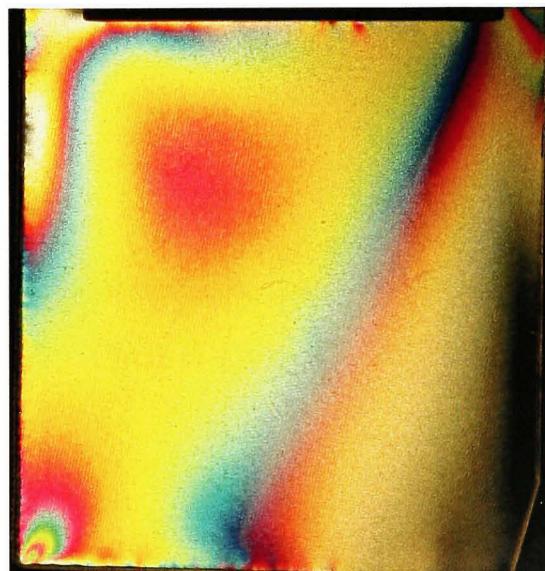


Figure II.3 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, *Mat=Acier, Ang=75°*

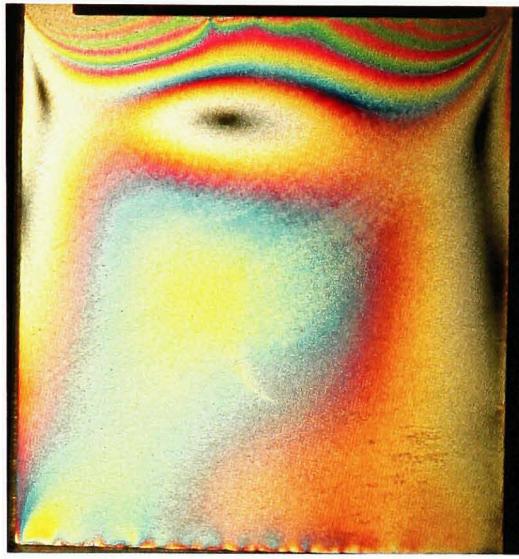


Figure II.4 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
Mat=Acier, Ang=90°

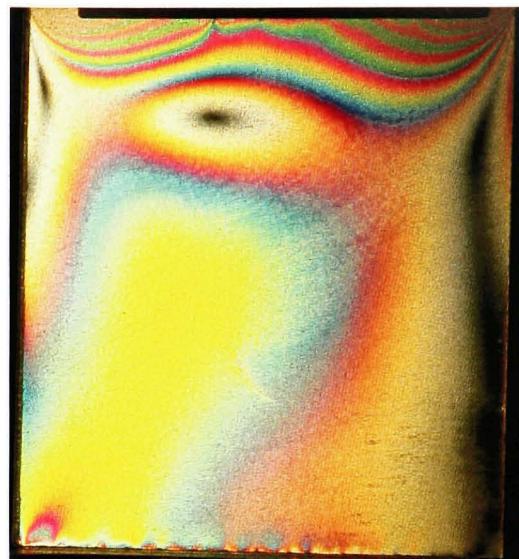


Figure II.5 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
Mat=Acier, Ang=90°

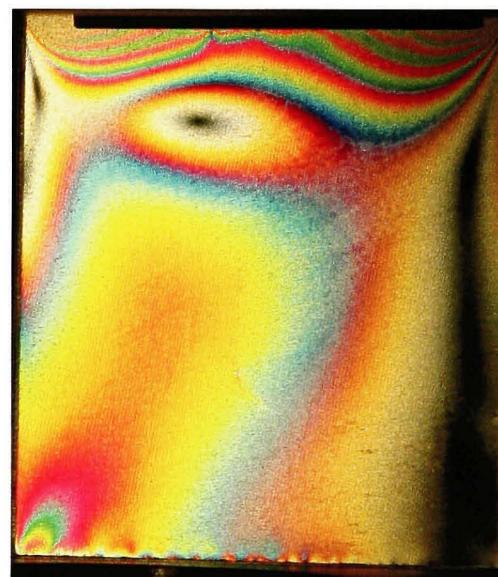


Figure II.6 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, *Mat=Acier, Ang=90°*

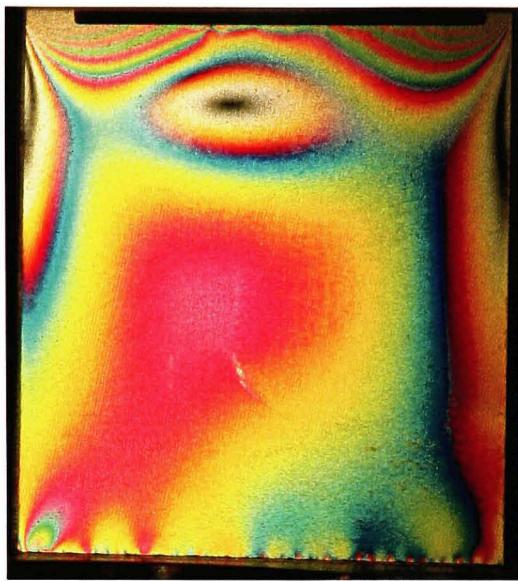


Figure II.7 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
Mat=Acier, Ang=90°

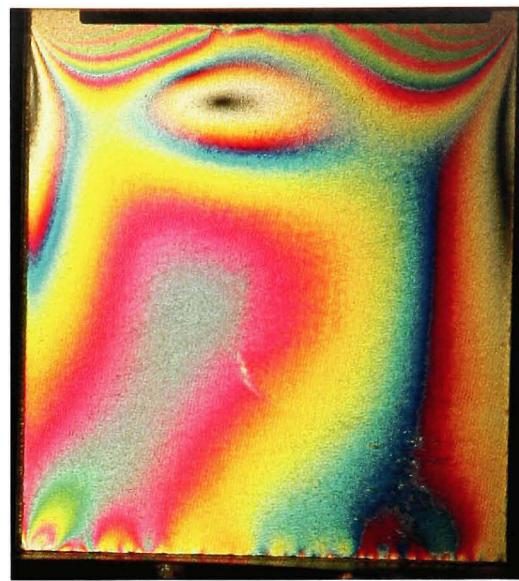


Figure II.8 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
Mat=Acier, Ang=90°

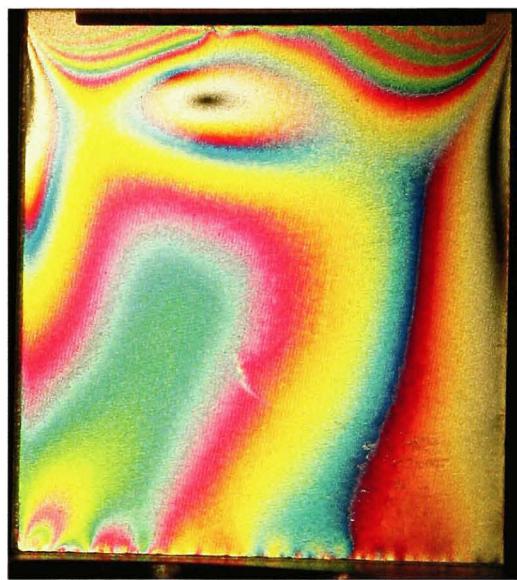


Figure II.9 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, *Mat=Acier, Ang=90°*

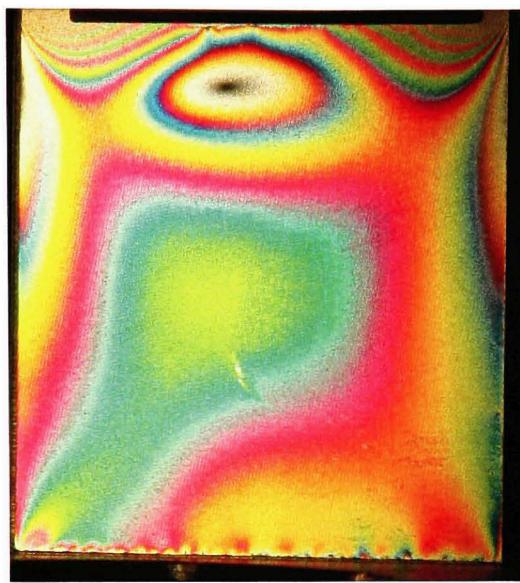


Figure II.10 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
Mat=Acier, Ang=90°

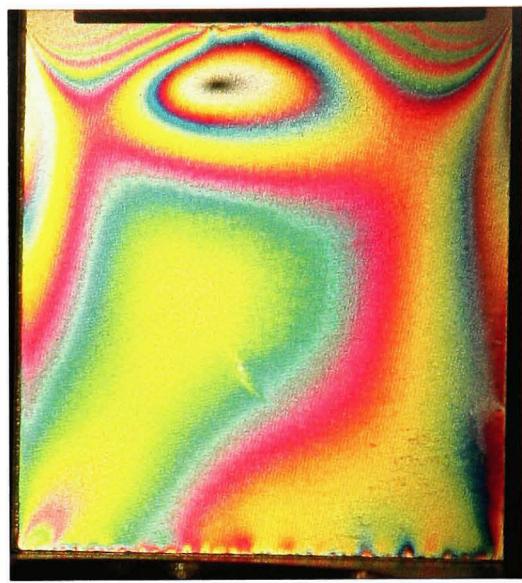


Figure II.11 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
Mat=Acier, Ang=90°

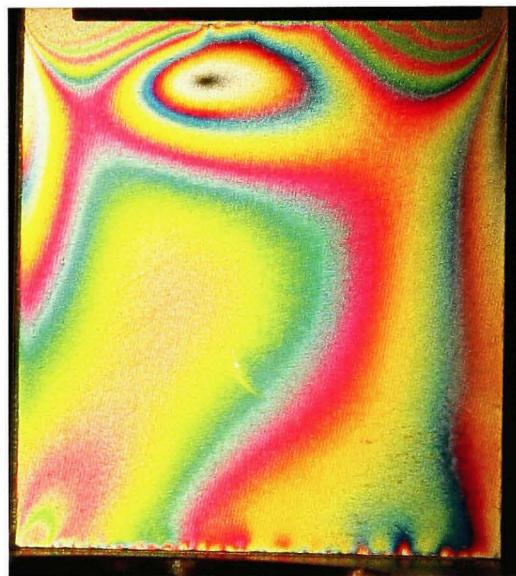


Figure II.12 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, Mat=Acier, Ang=90°



Figure II.13 $F_t=8.9$, $F_n=133.5$,
Mat=Acier, Ang=105°

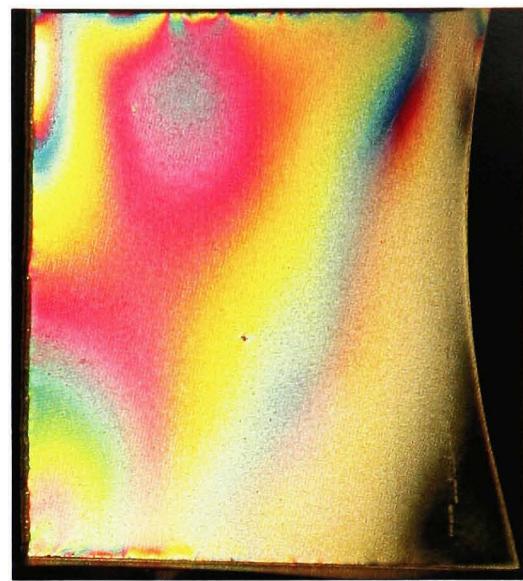


Figure II.14 $F_t=17.8$, $F_n=133.5$,
Mat=Acier, Ang=105°

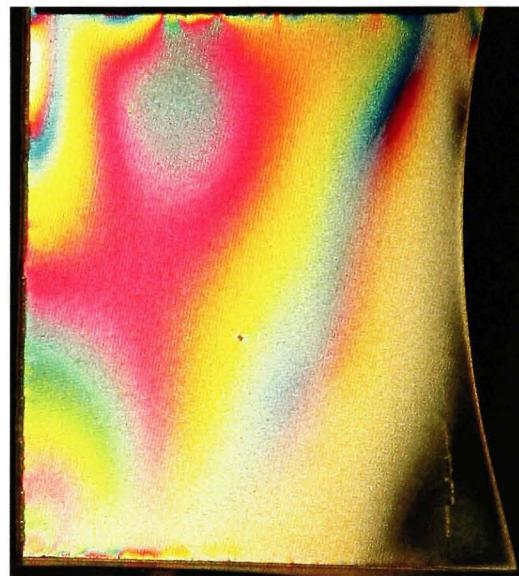


Figure II.15 $F_t=26.7$, $F_n=133.5$, Mat=Acier, Ang=105°



Figure II.16 $F_t=8.9$, $F_n=222.4$,
Mat=Acier, Ang=105°



Figure II.17 $F_t=17.8$, $F_n=222.4$,
Mat=Acier, Ang=105°



Figure II.18 $F_t=26.7$, $F_n=222.4$, *Mat=Acier, Ang=105°*



Figure II.19 $F_t=8.9$, $F_n=311.4$,
Mat=Acier, Ang=105°



Figure II.20 $F_t=17.8$, $F_n=311.4$,
Mat=Acier, Ang=105°

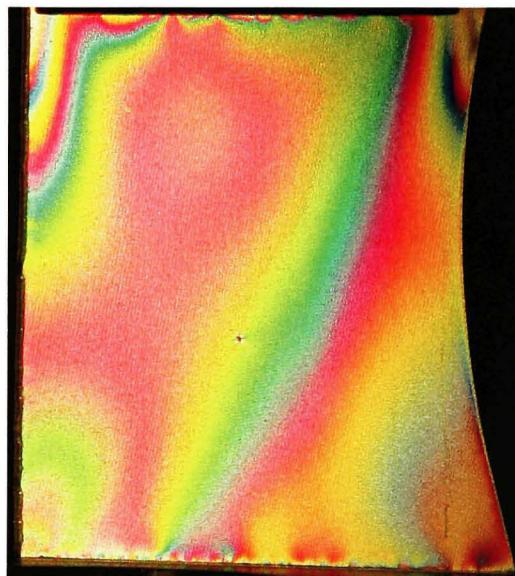


Figure II.21 $F_t=26.7$, $F_n=311.4$, Mat=Acier, Ang=105°

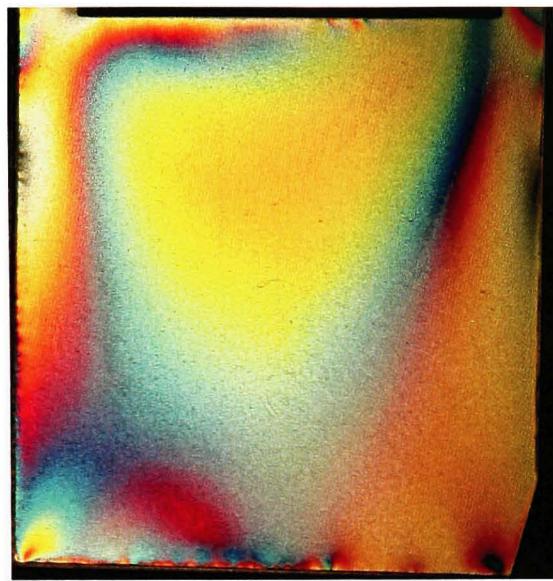


Figure II.22 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
 $Mat=PS1$, $Ang=75^\circ$

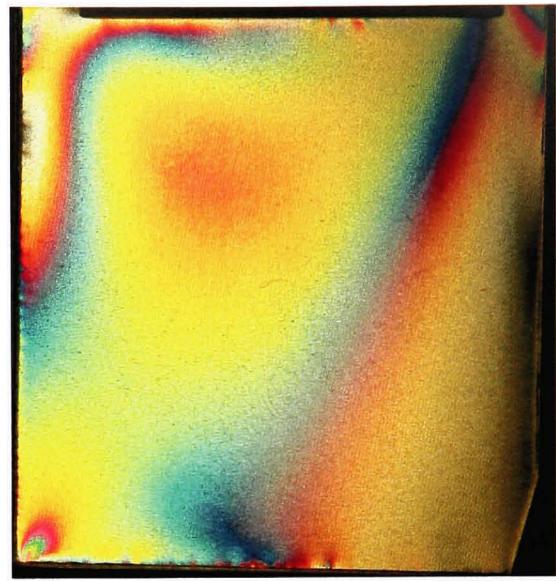


Figure II.23 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
 $Mat=PS1$, $Ang=75^\circ$

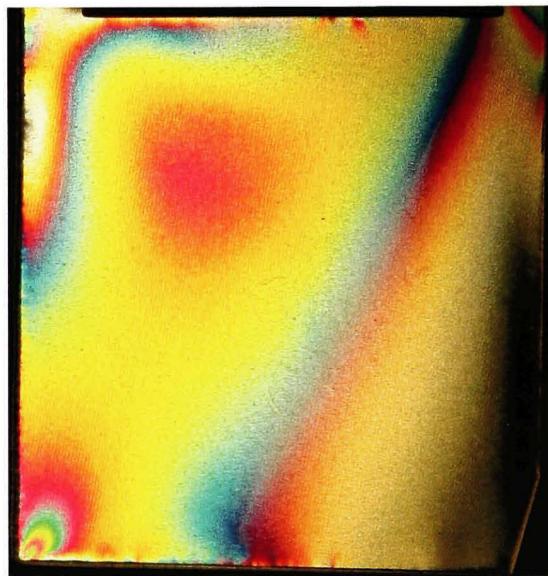


Figure II.24 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, $Mat=PS1$, $Ang=75^\circ$

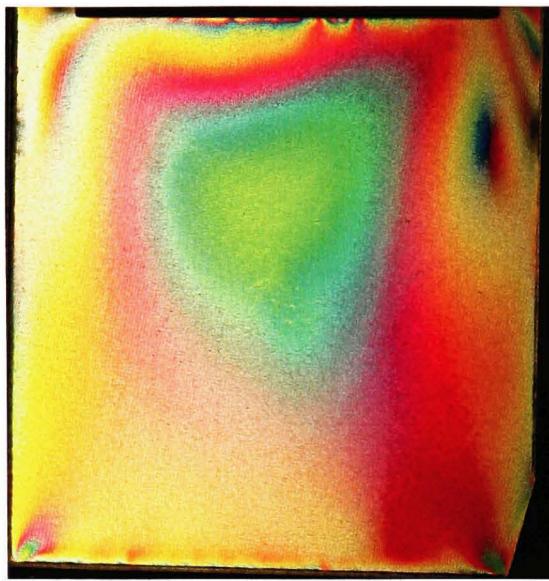


Figure II.25 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
 $Mat=PSI$, $Ang=75^\circ$

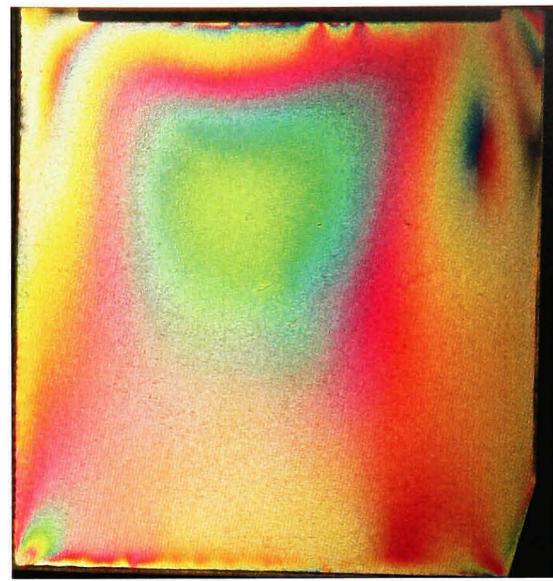


Figure II.26 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
 $Mat=PSI$, $Ang=75^\circ$

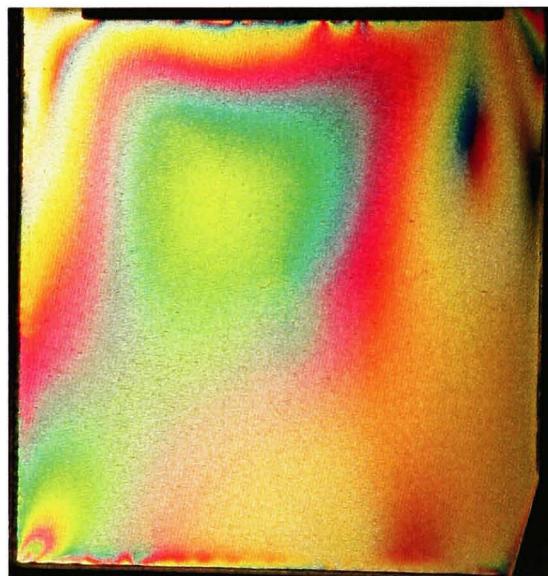


Figure II.27 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, $Mat=PSI$, $Ang=75^\circ$



Figure II.28 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
 $Mat=PS1$, $Ang=75^\circ$

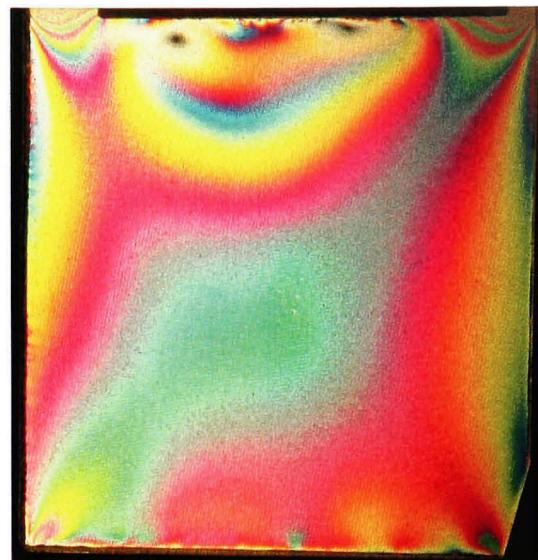


Figure II.29 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
 $Mat=PS1$, $Ang=75^\circ$

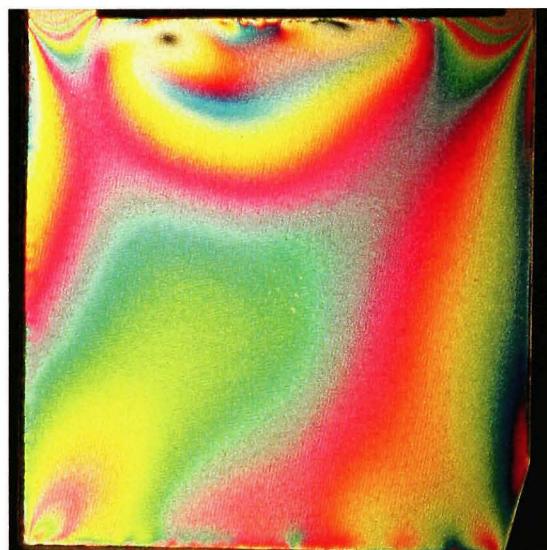


Figure II.30 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, $Mat=PS1$, $Ang=75^\circ$

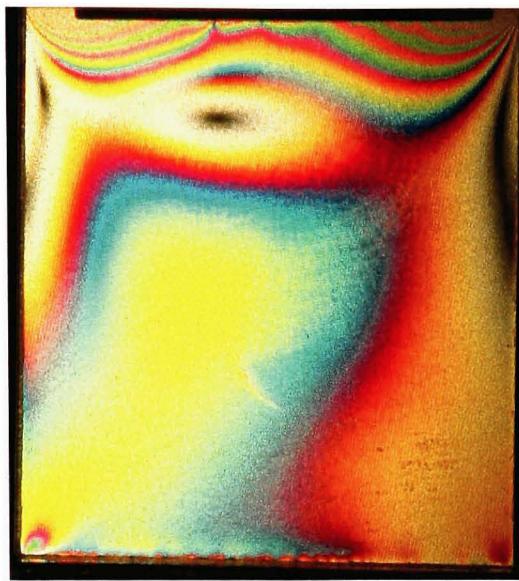


Figure II.31 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
 $Mat=PSI$, $Ang=90^\circ$

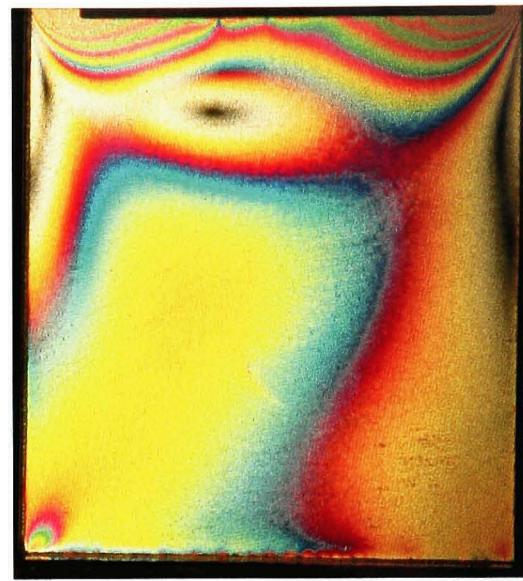


Figure II.32 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
 $Mat=PSI$, $Ang=90^\circ$

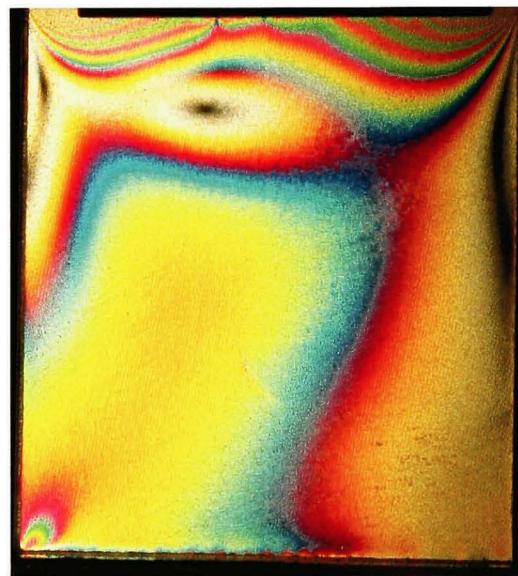


Figure II.33 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, $Mat=PSI$, $Ang=90^\circ$

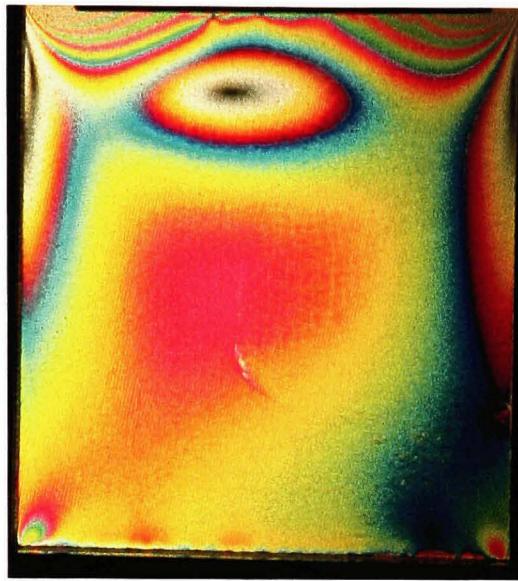


Figure II.34 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
 $Mat=PSI$, $Ang=90^\circ$

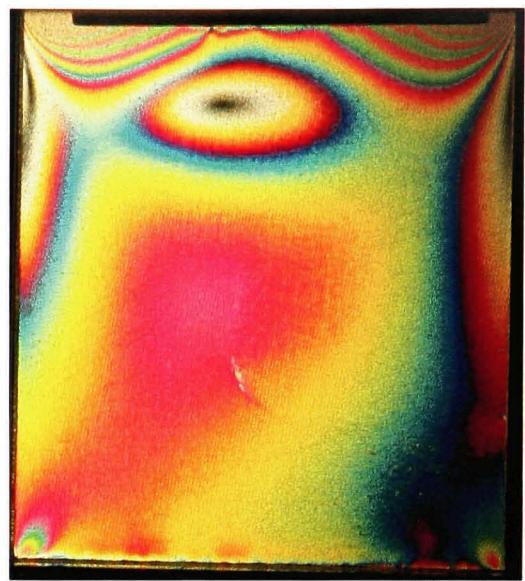


Figure II.35 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
 $Mat=PSI$, $Ang=90^\circ$



Figure II.36 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, $Mat=PSI$, $Ang=90^\circ$

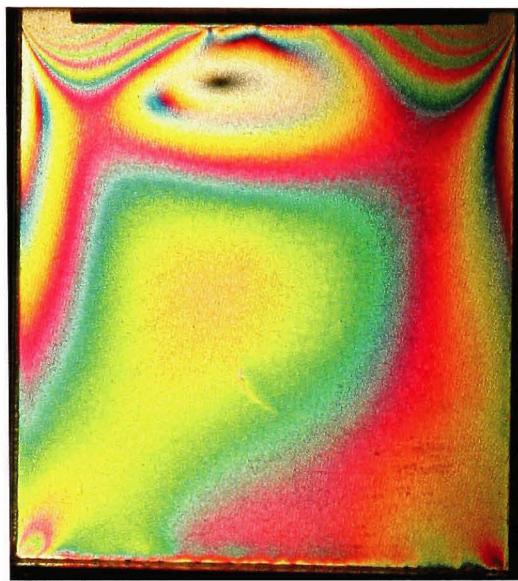


Figure II.37 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
 $Mat=PS1$, $Ang=90^\circ$

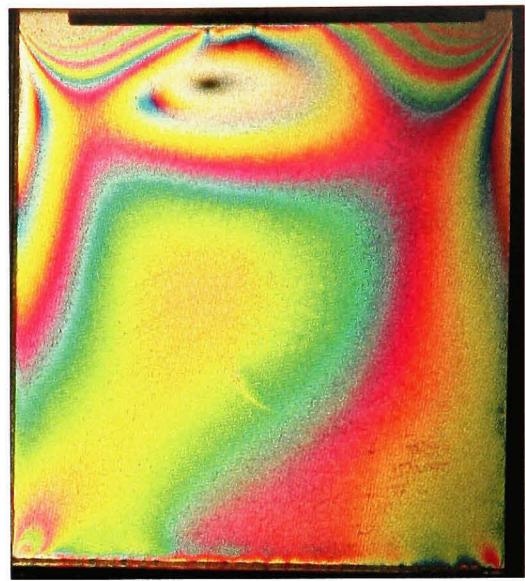


Figure II.38 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
 $Mat=PS1$, $Ang=90^\circ$

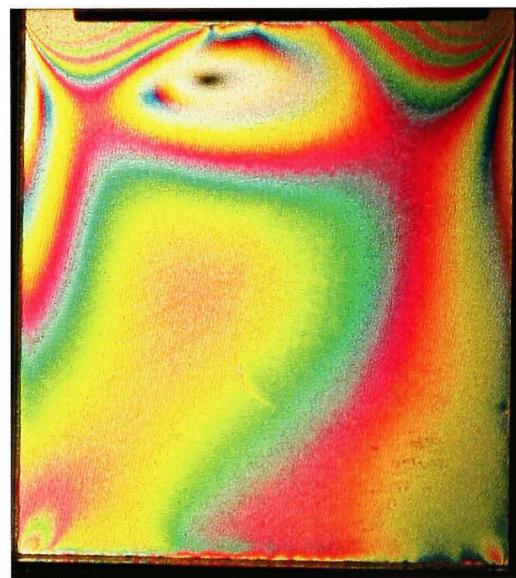


Figure II.39 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, $Mat=PS1$, $Ang=90^\circ$

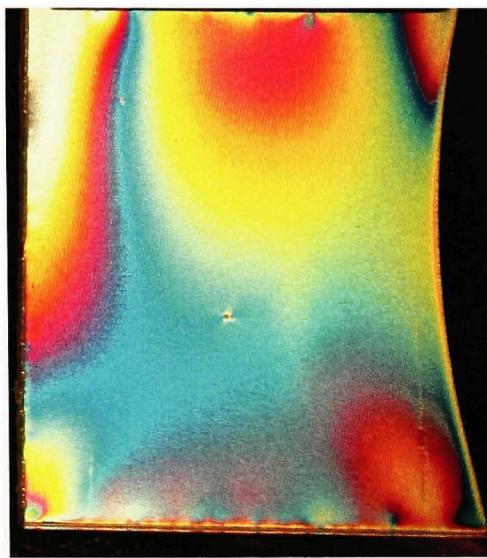


Figure II.40 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
 $Mat=PS1$, $Ang=105^\circ$

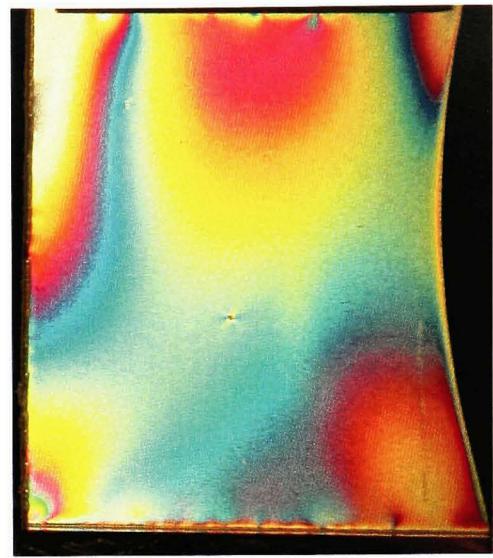


Figure II.41 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
 $Mat=PS1$, $Ang=105^\circ$



Figure II.42 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, $Mat=PS1$, $Ang=105^\circ$

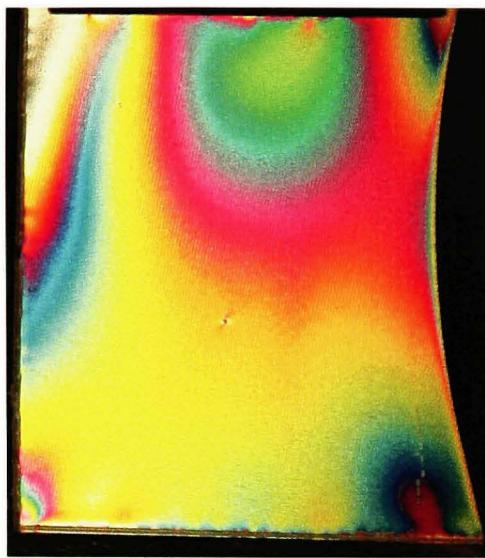


Figure II.43 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
 $Mat=PSI$, $Ang=105^\circ$

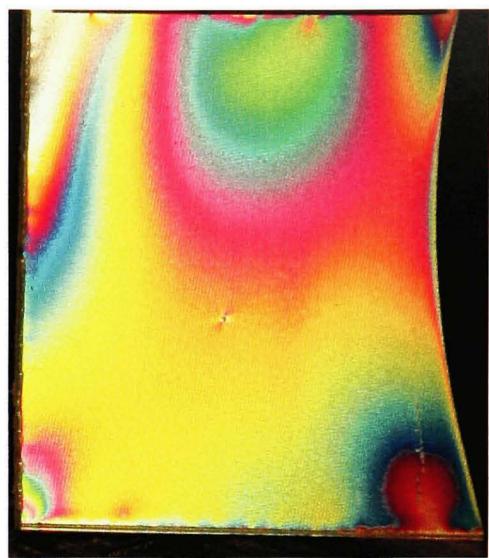


Figure II.44 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
 $Mat=PSI$, $Ang=105^\circ$



Figure II.45 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, $Mat=PSI$, $Ang=105^\circ$

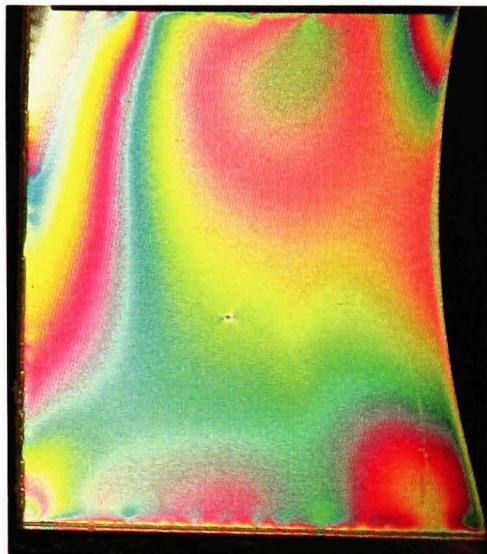


Figure II.46 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
 $Mat=PS1$, $Ang=105^\circ$

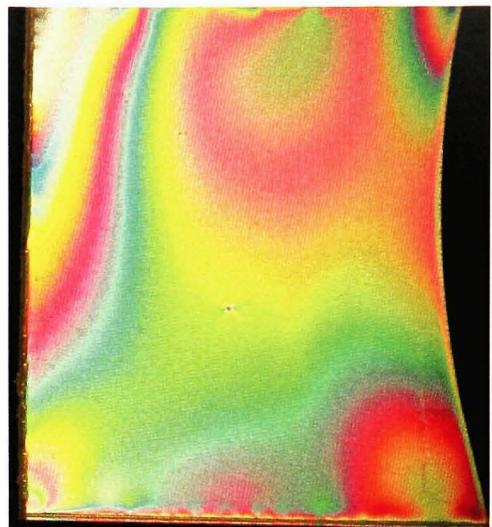


Figure II.47 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
 $Mat=PS1$, $Ang=105^\circ$

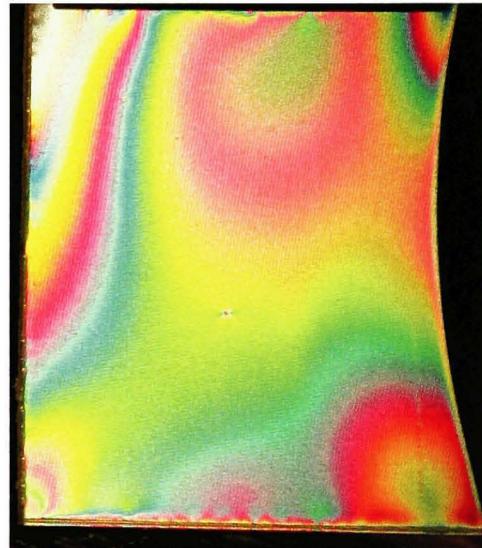


Figure II.48 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, $Mat=PS1$, $Ang=105^\circ$

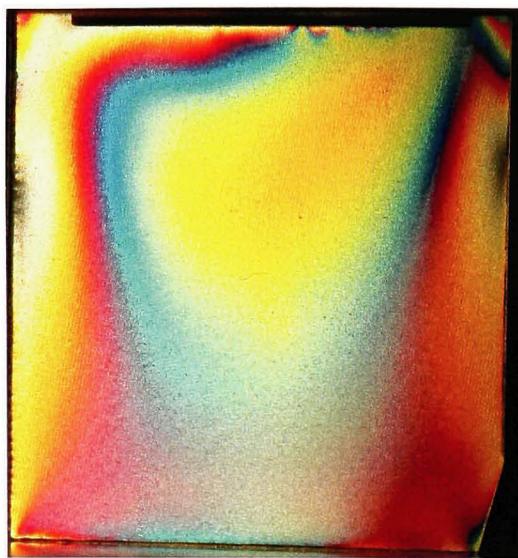


Figure II.49 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
Mat=Caout, Ang=75°

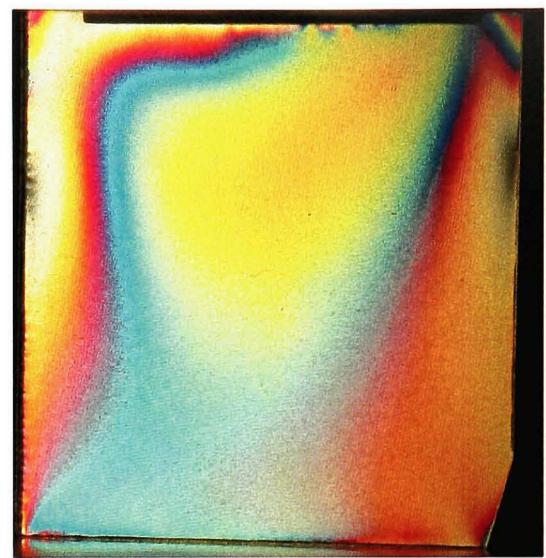


Figure II.50 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
Mat=Caout, Ang=75°

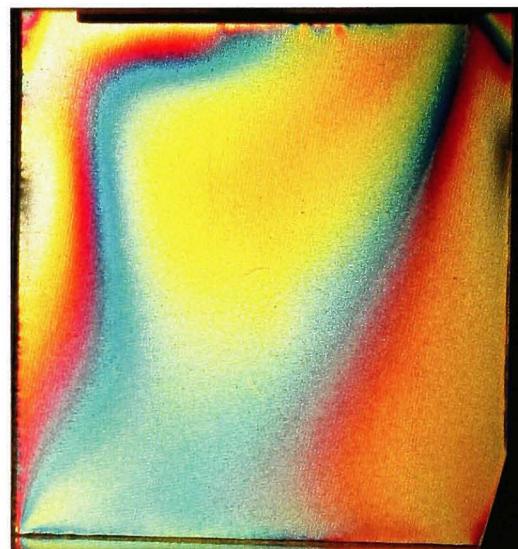


Figure II.51 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, *Mat=Caout, Ang=75°*



Figure II.52 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=75^\circ$

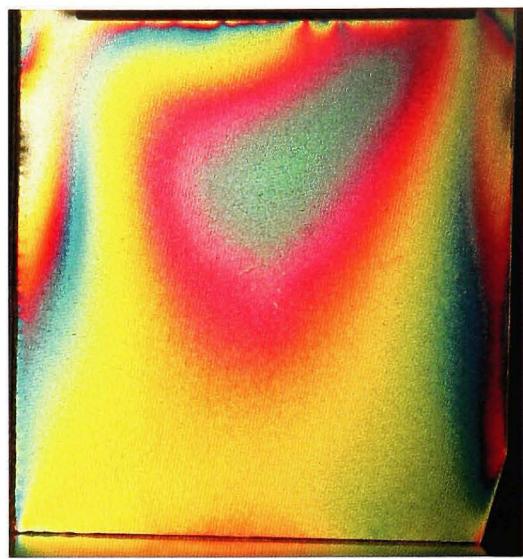


Figure II.53 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=75^\circ$



Figure II.54 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, $Mat=Caout$, $Ang=75^\circ$

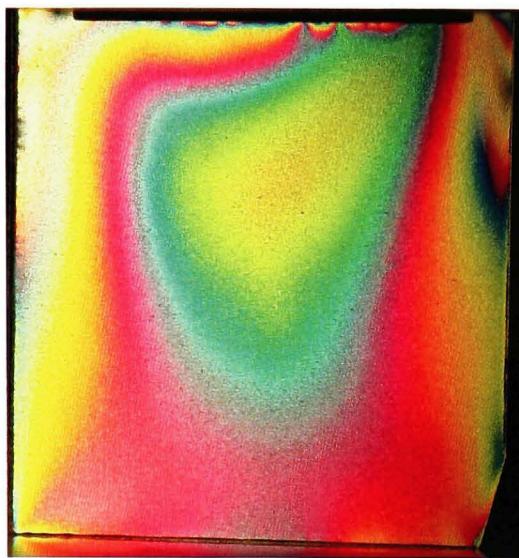


Figure II.55 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=75^\circ$

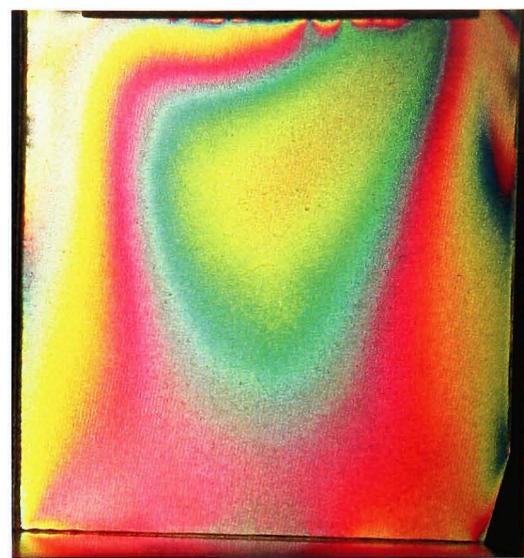


Figure II.56 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=75^\circ$

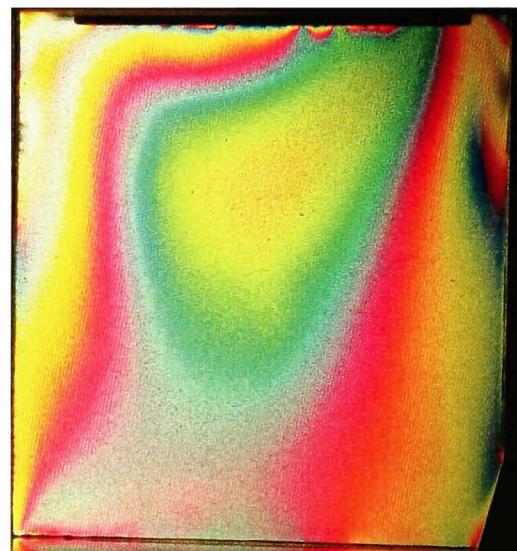


Figure II.57 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, $Mat=Caout$, $Ang=75^\circ$

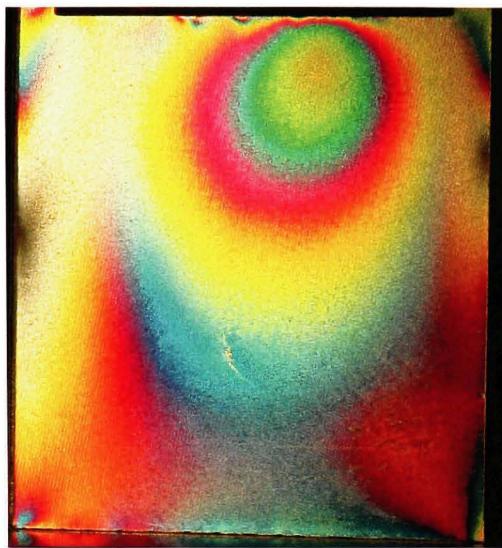


Figure II.58 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
 $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$



Figure II.59 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
 $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$

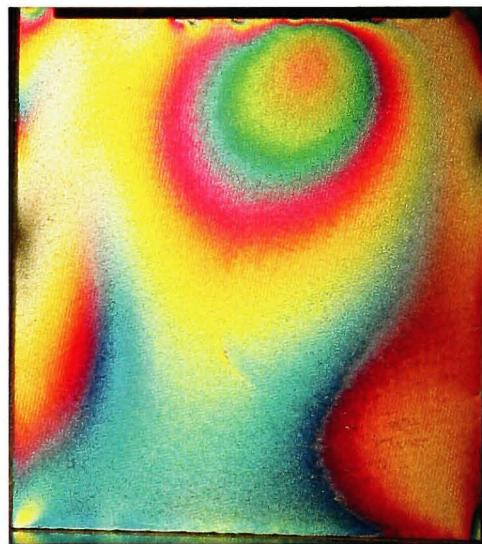


Figure II.60 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$

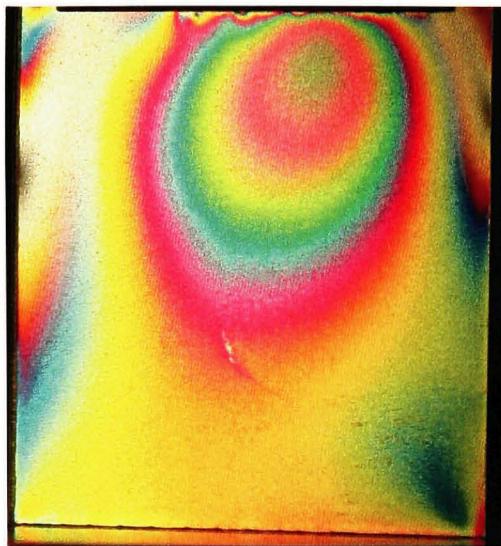


Figure II.61 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$



Figure II.62 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$



Figure II.63 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$

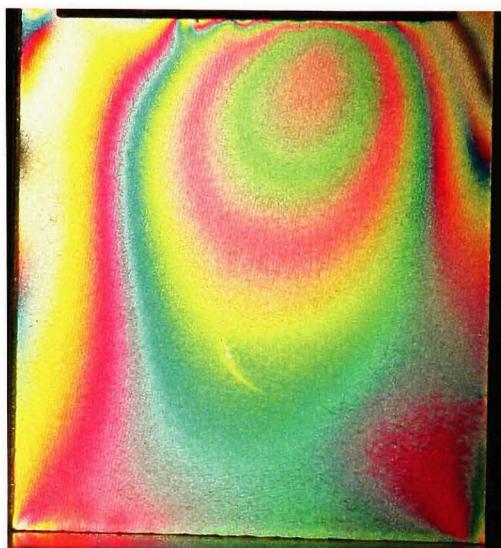


Figure II.64 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$

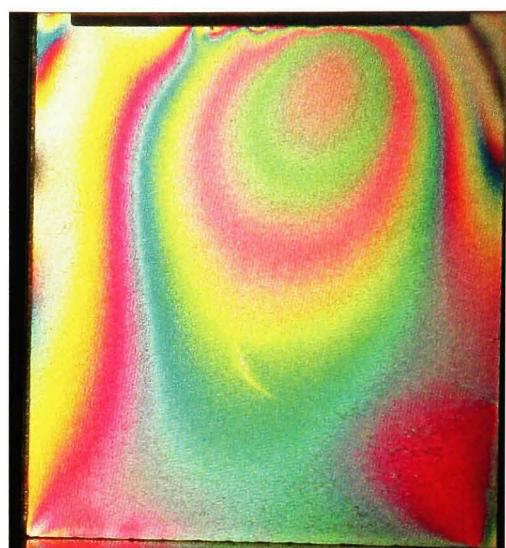


Figure II.65 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$

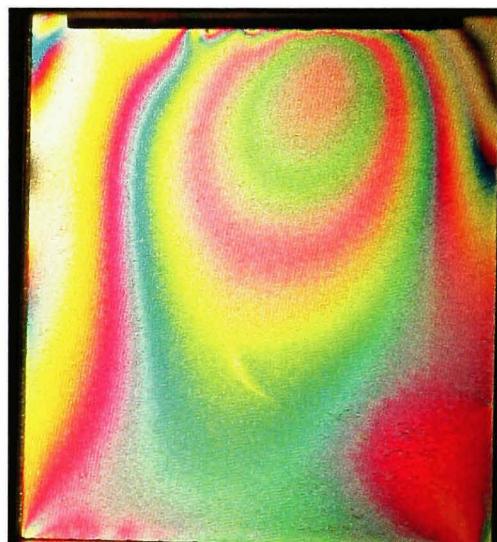


Figure II.66 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, $Mat=Caout$, $Ang=90^\circ$



Figure II.67 $Ft=8.9$, $Fn=133.5$,
 $Mat=Caout$, $Ang=105^\circ$

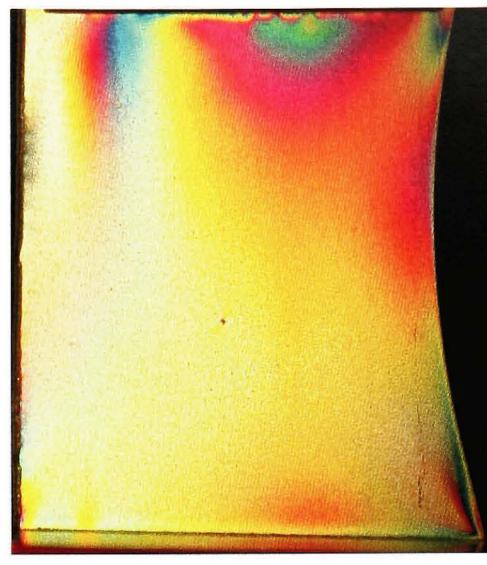


Figure II.68 $Ft=17.8$, $Fn=133.5$,
 $Mat=Caout$, $Ang=105^\circ$

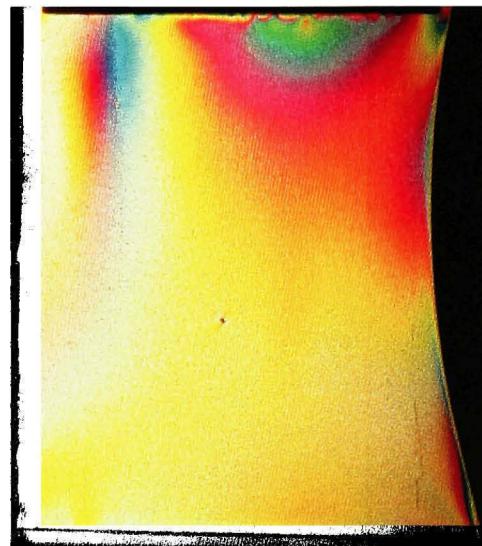


Figure II.69 $Ft=26.7$, $Fn=133.5$, $Mat=Caout$, $Ang=105^\circ$

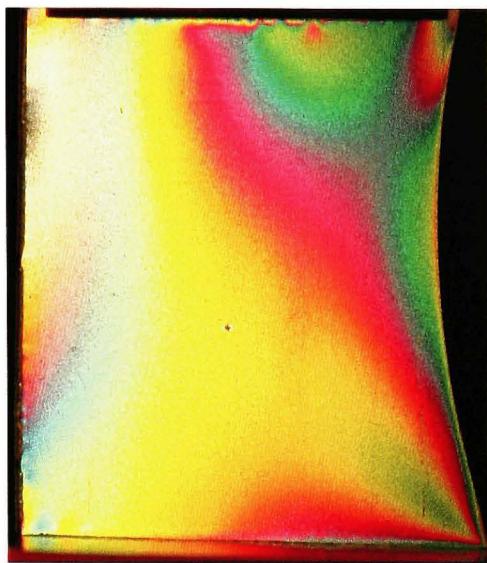


Figure II.70 $Ft=8.9$, $Fn=222.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=105^\circ$

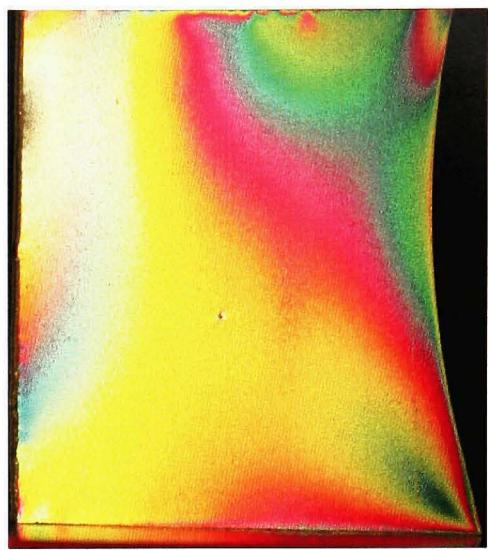


Figure II.71 $Ft=17.8$, $Fn=222.4$,
 $Mat=Caout$, $Ang=105^\circ$



Figure II.72 $Ft=26.7$, $Fn=222.4$, $Mat=Caout$, $Ang=105^\circ$



Figure II.73 $Ft=8.9$, $Fn=311.4$,
Mat=Caout, Ang=105°

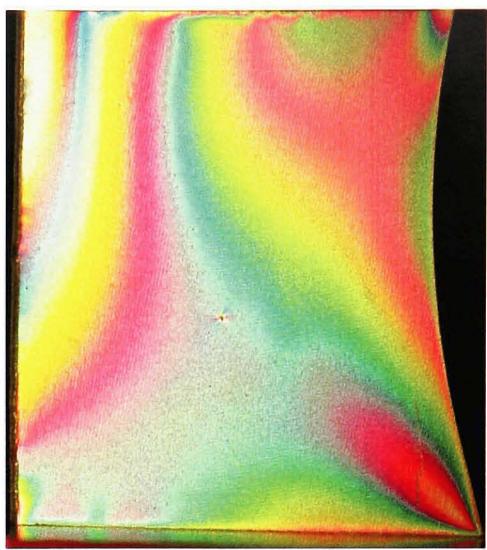


Figure II.74 $Ft=17.8$, $Fn=311.4$,
Mat=Caout, Ang=105°

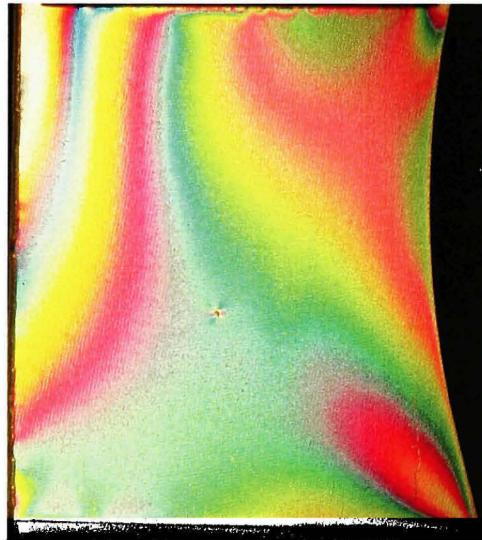


Figure II.75 $Ft=26.7$, $Fn=311.4$, Mat=Caout, Ang=105°

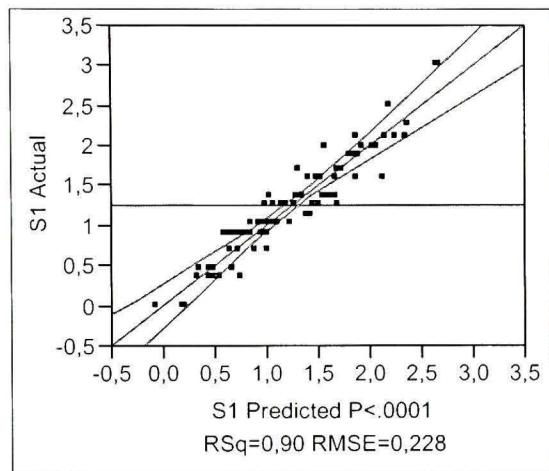
ANNEXE III

ANALYSE STATISTIQUE DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Least Squares Fit

Response S1

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,9028
RSquare Adj	0,880369
Root Mean Square Error	0,22801
Mean of Response	1,261494
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	31,386732	2,09245	40,2481
Error	65	3,379271	0,05199	Prob > F
C. Total	80	34,766003		<,0001

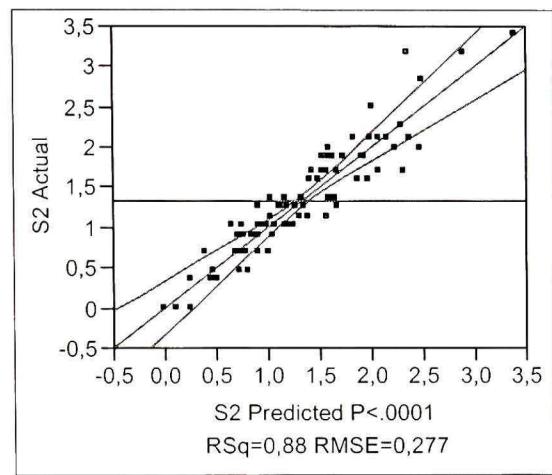
Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,1755311	0,126672	9,28	<,0001
Ft	-0,244262	0,031028	-7,87	<,0001
Fn	0,5996467	0,031028	19,33	<,0001
Mat	-0,277808	0,031028	-8,95	<,0001

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Ang	-0,034595	0,031028	-1,11	0,2690
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,020442	0,038002	-0,54	0,5925
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,121083	0,038002	-3,19	0,0022
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,099068	0,038002	-2,61	0,0113
(Ft-2)*(Ang-2)	0,022015	0,038002	0,58	0,5644
(Fn-2)*(Ang-2)	0,04403	0,038002	1,16	0,2508
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,297203	0,038002	-7,82	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,047175	0,046542	-1,01	0,3145
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,047175	0,046542	1,01	0,3145
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0141525	0,046542	0,30	0,7620
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,096709	0,046542	-2,08	0,0417
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,031843	0,057003	-0,56	0,5783

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	3,221843	61,9719	<,0001
Fn	1	1	19,417111	373,4865	<,0001
Mat	1	1	4,167583	80,1631	<,0001
Ang	1	1	0,064628	1,2431	0,2690
Ft*Fn	1	1	0,015044	0,2894	0,5925
Ft*Mat	1	1	0,527795	10,1521	0,0022
Fn*Mat	1	1	0,353317	6,7960	0,0113
Ft*Ang	1	1	0,017448	0,3356	0,5644
Fn*Ang	1	1	0,069791	1,3424	0,2508
Mat*Ang	1	1	3,179856	61,1643	<,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,053412	1,0274	0,3145
Ft*Fn*Ang	1	1	0,053412	1,0274	0,3145
Ft*Mat*Ang	1	1	0,004807	0,0925	0,7620
Fn*Mat*Ang	1	1	0,224462	4,3175	0,0417
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,016224	0,3121	0,5783

Response S2**Actual by Predicted Plot****Summary of Fit**

RSquare	0,875707
RSquare Adj	0,847024
Root Mean Square Error	0,277043
Mean of Response	1,341867
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	35,149493	2,34330	30,5306
Error	65	4,988919	0,07675	Prob > F
C. Total	80	40,138412		<.0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,5515333	0,153913	10,08	<.0001
Ft	-0,313452	0,037701	-8,31	<.0001
Fn	0,619565	0,037701	16,43	<.0001
Mat	-0,178217	0,037701	-4,73	<.0001
Ang	-0,23273	0,037701	-6,17	<.0001
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,026733	0,046174	-0,58	0,5646
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,168258	0,046174	-3,64	0,0005
(Fn-2)*(Mat-2)	0,072335	0,046174	1,57	0,1221
(Ft-2)*(Ang-2)	0,110075	0,046174	2,38	0,0201
(Fn-2)*(Ang-2)	-0,152533	0,046174	-3,30	0,0016
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,191845	0,046174	-4,15	<.0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,091991	0,056551	-1,63	0,1086

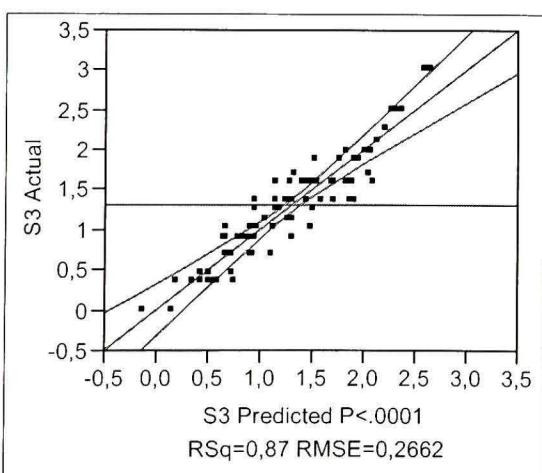
Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0801975	0,056551	1,42	0,1609
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0990675	0,056551	1,75	0,0845
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,042458	0,056551	-0,75	0,4555
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0212287	0,069261	0,31	0,7602

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	5,305605	69,1261	<,0001
Fn	1	1	20,728483	270,0688	<,0001
Mat	1	1	1,715104	22,3459	<,0001
Ang	1	1	2,924816	38,1071	<,0001
Ft*Fn	1	1	0,025727	0,3352	0,5646
Ft*Mat	1	1	1,019181	13,2788	0,0005
Fn*Mat	1	1	0,188365	2,4542	0,1221
Ft*Ang	1	1	0,436194	5,6831	0,0201
Fn*Ang	1	1	0,837582	10,9127	0,0016
Mat*Ang	1	1	1,324962	17,2628	<,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,203097	2,6461	0,1086
Ft*Fn*Ang	1	1	0,154359	2,0111	0,1609
Ft*Mat*Ang	1	1	0,235545	3,0689	0,0845
Fn*Mat*Ang	1	1	0,043263	0,5637	0,4555
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,007211	0,0939	0,7602

Response S3

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare 0,870421

RSquare Adj	0,840518
Root Mean Square Error	0,266234
Mean of Response	1,309019
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	30,948083	2,06321	29,1083
Error	65	4,607225	0,07088	Prob > F
C. Total	80	35,555307		<,0001

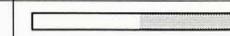
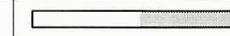
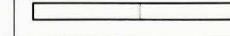
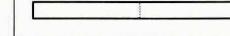
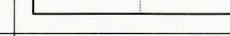
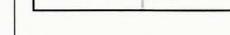
Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,2859556	0,147908	8,69	<,0001
Ft	-0,191845	0,03623	-5,30	<,0001
Fn	0,581825	0,03623	16,06	<,0001
Mat	-0,362723	0,03623	-10,01	<,0001
Ang	-0,015725	0,03623	-0,43	0,6657
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,003145	0,044372	-0,07	0,9437
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,099067	0,044372	-2,23	0,0290
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,051892	0,044372	-1,17	0,2465
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,001572	0,044372	-0,04	0,9718
(Fn-2)*(Ang-2)	-0,003145	0,044372	-0,07	0,9437
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,28934	0,044372	-6,52	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,049534	0,054345	-0,91	0,3654
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0259463	0,054345	0,48	0,6347
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,002359	0,054345	-0,04	0,9655
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,028305	0,054345	-0,52	0,6042
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0141525	0,066558	0,21	0,8323

Effect Tests

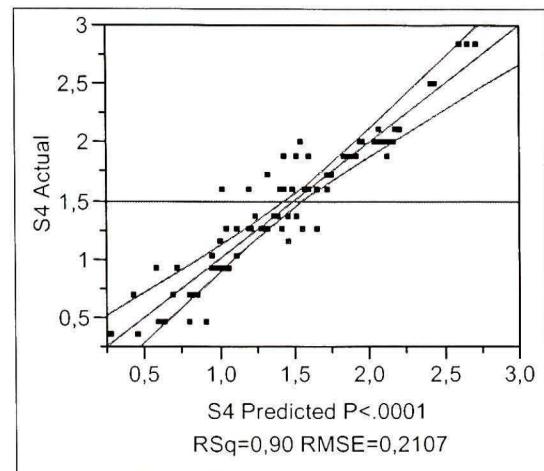
Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	1,987443	28,0394	<,0001
Fn	1	1	18,280098	257,9007	<,0001
Mat	1	1	7,104684	100,2348	<,0001
Ang	1	1	0,013353	0,1884	0,6657
Ft*Fn	1	1	0,000356	0,0050	0,9437
Ft*Mat	1	1	0,353317	4,9847	0,0290
Fn*Mat	1	1	0,096942	1,3677	0,2465
Ft*Ang	1	1	0,000089	0,0013	0,9718
Fn*Ang	1	1	0,000356	0,0050	0,9437
Mat*Ang	1	1	3,013835	42,5200	<,0001

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft*Fn*Mat	1	1	0,058886	0,8308	0,3654
Ft*Fn*Ang	1	1	0,016157	0,2279	0,6347
Ft*Mat*Ang	1	1	0,000134	0,0019	0,9655
Fn*Mat*Ang	1	1	0,019228	0,2713	0,6042
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,003205	0,0452	0,8323

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,3090189		0,029582	44,25	<,0001
Ft	-0,191845		0,03623	-5,30	<,0001
Fn	0,581825		0,03623	16,06	<,0001
Mat	-0,362723		0,03623	-10,01	<,0001
Ang	-0,015725		0,03623	-0,43	0,6657
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,003145		0,044372	-0,07	0,9437
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,099067		0,044372	-2,23	0,0290
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,051892		0,044372	-1,17	0,2465
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,001572		0,044372	-0,04	0,9718
(Fn-2)*(Ang-2)	-0,003145		0,044372	-0,07	0,9437
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,28934		0,044372	-6,52	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,049534		0,054345	-0,91	0,3654
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0259463		0,054345	0,48	0,6347
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,002359		0,054345	-0,04	0,9655
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,028305		0,054345	-0,52	0,6042
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0141525		0,066558	0,21	0,8323

Response S4

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,898428
RSquare Adj	0,874988
Root Mean Square Error	0,210731
Mean of Response	1,490031
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	25,531619	1,70211	38,3293
Error	65	2,886483	0,04441	Prob > F
C. Total	80	28,418102		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,2426244	0,117073	10,61	<,0001
Ft	-0,102737	0,028677	-3,58	0,0007
Fn	0,5430367	0,028677	18,94	<,0001
Mat	-0,378448	0,028677	-13,20	<,0001
Ang	0,0618517	0,028677	2,16	0,0347
(Ft-2)*(Fn-2)	0,0172975	0,035122	0,49	0,6240
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,061327	0,035122	-1,75	0,0855
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,007863	0,035122	-0,22	0,8236
(Ft-2)*(Ang-2)	0,0078625	0,035122	0,22	0,8236
(Fn-2)*(Ang-2)	0,022015	0,035122	0,63	0,5330
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,155677	0,035122	-4,43	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,040099	0,043015	-0,93	0,3547

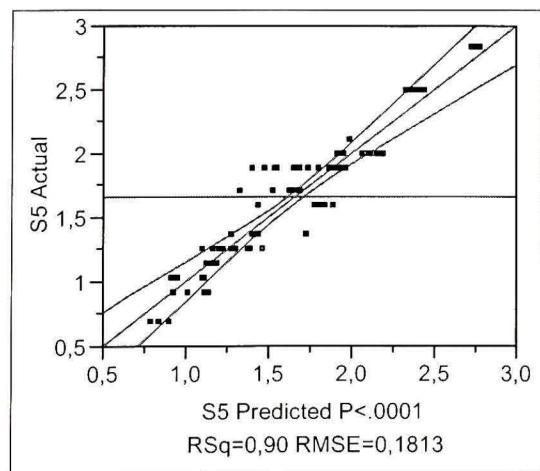
Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,01887	0,043015	0,44	0,6623
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,01887	0,043015	-0,44	0,6623
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-1,42e-14	0,043015	0,00	1,0000
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0070762	0,052683	0,13	0,8936

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	0,569960	12,8348	0,0007
Fn	1	1	15,923996	358,5886	<,0001
Mat	1	1	7,734050	174,1612	<,0001
Ang	1	1	0,206584	4,6520	0,0347
Ft*Fn	1	1	0,010771	0,2426	0,6240
Ft*Mat	1	1	0,135398	3,0490	0,0855
Fn*Mat	1	1	0,002225	0,0501	0,8236
Ft*Ang	1	1	0,002225	0,0501	0,8236
Fn*Ang	1	1	0,017448	0,3929	0,5330
Mat*Ang	1	1	0,872477	19,6471	<,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,038590	0,8690	0,3547
Ft*Fn*Ang	1	1	0,008546	0,1924	0,6623
Ft*Mat*Ang	1	1	0,008546	0,1924	0,6623
Fn*Mat*Ang	1	1	4,8468e-27	0,0000	1,0000
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,000801	0,0180	0,8936

Response S5

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare 0,896724

RSquare Adj	0,872891
Root Mean Square Error	0,181288
Mean of Response	1,654969
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	18,548572	1,23657	37,6253
Error	65	2,136251	0,03287	Prob > F
C. Total	80	20,684824		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	0,9798422	0,100716	9,73	<,0001
Ft	-0,032498	0,02467	-1,32	0,1924
Fn	0,4990067	0,02467	20,23	<,0001
Mat	-0,249503	0,02467	-10,11	<,0001
Ang	0,1205583	0,02467	4,89	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,003145	0,030215	-0,10	0,9174
(Ft-2)*(Mat-2)	0,0015725	0,030215	0,05	0,9587
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,022015	0,030215	-0,73	0,4689
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,023587	0,030215	-0,78	0,4378
(Fn-2)*(Ang-2)	0,08177	0,030215	2,71	0,0087
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,122655	0,030215	-4,06	0,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,047175	0,037005	-1,27	0,2069
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0259463	0,037005	0,70	0,4857
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,01887	0,037005	-0,51	0,6118
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0023588	0,037005	0,06	0,9494
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0035381	0,045322	0,08	0,9380

Effect Tests

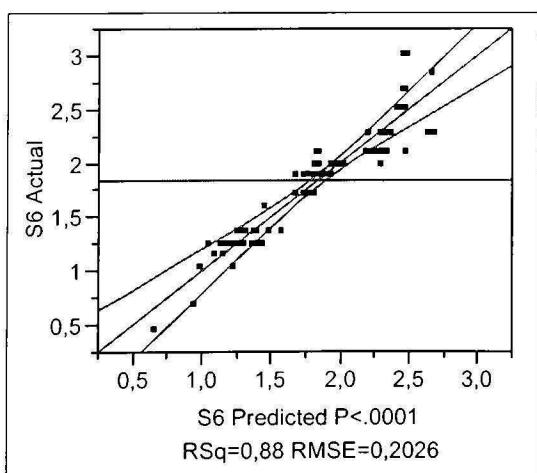
Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	0,057032	1,7353	0,1924
Fn	1	1	13,446413	409,1358	<,0001
Mat	1	1	3,361603	102,2840	<,0001
Ang	1	1	0,784853	23,8808	<,0001
Ft*Fn	1	1	0,000356	0,0108	0,9174
Ft*Mat	1	1	0,000089	0,0027	0,9587
Fn*Mat	1	1	0,017448	0,5309	0,4689
Ft*Ang	1	1	0,020029	0,6094	0,4378
Fn*Ang	1	1	0,240708	7,3241	0,0087
Mat*Ang	1	1	0,541593	16,4791	0,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,053412	1,6252	0,2069

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft*Fn*Ang	1	1	0,016157	0,4916	0,4857
Ft*Mat*Ang	1	1	0,008546	0,2600	0,6118
Fn*Mat*Ang	1	1	0,000134	0,0041	0,9494
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,000200	0,0061	0,9380

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,6549689		0,020143	82,16	<,0001
Ft	-0,032498		0,02467	-1,32	0,1924
Fn	0,4990067		0,02467	20,23	<,0001
Mat	-0,249503		0,02467	-10,11	<,0001
Ang	0,1205583		0,02467	4,89	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,003145		0,030215	-0,10	0,9174
(Ft-2)*(Mat-2)	0,0015725		0,030215	0,05	0,9587
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,022015		0,030215	-0,73	0,4689
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,023587		0,030215	-0,78	0,4378
(Fn-2)*(Ang-2)	0,08177		0,030215	2,71	0,0087
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,122655		0,030215	-4,06	0,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,047175		0,037005	-1,27	0,2069
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0259463		0,037005	0,70	0,4857
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,01887		0,037005	-0,51	0,6118
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0023588		0,037005	0,06	0,9494
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0035381		0,045322	0,08	0,9380

Response S6

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,880801
RSquare Adj	0,853294
Root Mean Square Error	0,202639
Mean of Response	1,833186
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	19,722565	1,31484	32,0205
Error	65	2,669054	0,04106	Prob > F
C. Total	80	22,391619		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	0,4556756	0,112577	4,05	0,0001
Ft	0,0933017	0,027576	3,38	0,0012
Fn	0,5713417	0,027576	20,72	<,0001
Mat	0,047175	0,027576	1,71	0,0919
Ang	-0,023063	0,027576	-0,84	0,4060
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,028305	0,033773	-0,84	0,4050
(Ft-2)*(Mat-2)	0,047175	0,033773	1,40	0,1672
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,11951	0,033773	-3,54	0,0007
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,023588	0,033773	-0,70	0,4874
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0676175	0,033773	2,00	0,0494
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,036168	0,033773	-1,07	0,2882
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	0,0330225	0,041363	0,80	0,4276
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,023588	0,041363	-0,57	0,5705
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,103785	0,041363	-2,51	0,0146
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,103785	0,041363	-2,51	0,0146
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0636862	0,05066	1,26	0,2132

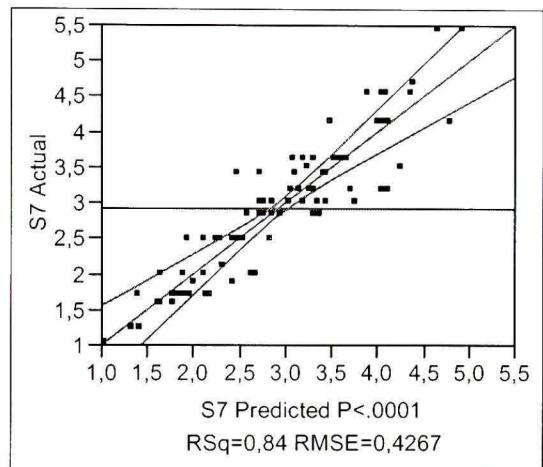
Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	0,470081	11,4480	0,0012
Fn	1	1	17,627290	429,2810	<,0001
Mat	1	1	0,120176	2,9267	0,0919
Ang	1	1	0,028724	0,6995	0,4060
Ft*Fn	1	1	0,028842	0,7024	0,4050
Ft*Mat	1	1	0,080117	1,9511	0,1672
Fn*Mat	1	1	0,514175	12,5218	0,0007
Ft*Ang	1	1	0,020029	0,4878	0,4874

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Fn*Ang	1	1	0,164597	4,0085	0,0494
Mat*Ang	1	1	0,047091	1,1468	0,2882
Ft*Fn*Mat	1	1	0,026172	0,6374	0,4276
Ft*Fn*Ang	1	1	0,013353	0,3252	0,5705
Ft*Mat*Ang	1	1	0,258512	6,2956	0,0146
Fn*Mat*Ang	1	1	0,258512	6,2956	0,0146
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,064895	1,5804	0,2132

Response S7

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,844897
RSquare Adj	0,809104
Root Mean Square Error	0,426671
Mean of Response	2,924151
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	64,458791	4,29725	23,6050
Error	65	11,833138	0,18205	Prob > F
C. Total	80	76,291929		<,0001

Parameter Estimates

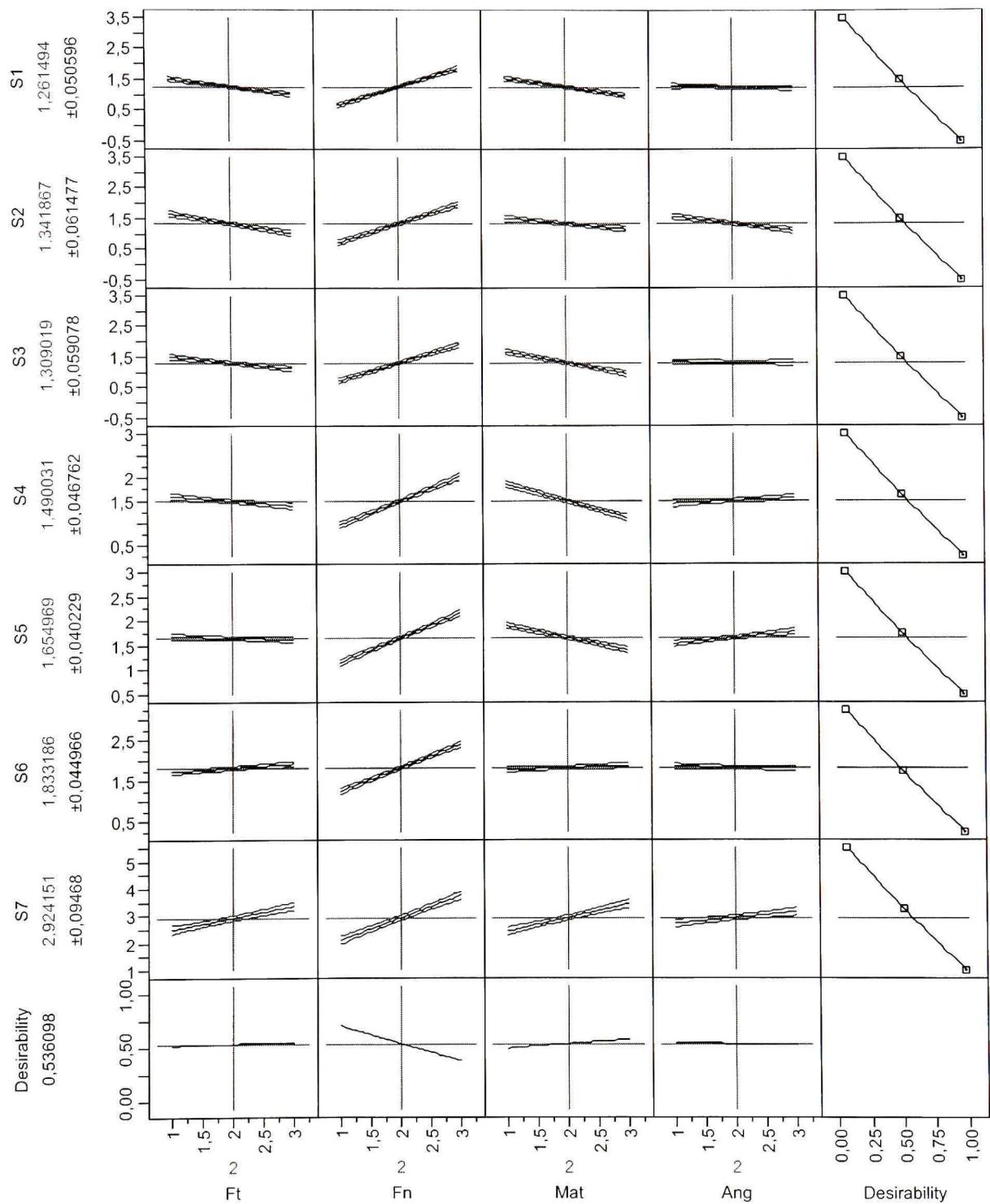
Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	-1,007099	0,23704	-4,25	<,0001
Ft	0,4266717	0,058063	7,35	<,0001

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Fn	0,8166517	0,058063	14,07	<,0001
Mat	0,5042483	0,058063	8,68	<,0001
Ang	0,2180533	0,058063	3,76	0,0004
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,051892	0,071112	-0,73	0,4682
(Ft-2)*(Mat-2)	0,185555	0,071112	2,61	0,0112
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,003145	0,071112	-0,04	0,9649
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,045602	0,071112	-0,64	0,5236
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0424575	0,071112	0,60	0,5525
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,08177	0,071112	-1,15	0,2544
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,011794	0,087094	-0,14	0,8927
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0165112	0,087094	0,19	0,8502
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,099067	0,087094	-1,14	0,2595
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,051893	0,087094	-0,60	0,5534
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,134449	0,106668	-1,26	0,2120

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	9,830630	54,0001	<,0001
Fn	1	1	36,013677	197,8249	<,0001
Mat	1	1	13,730385	75,4217	<,0001
Ang	1	1	2,567552	14,1037	0,0004
Ft*Fn	1	1	0,096942	0,5325	0,4682
Ft*Mat	1	1	1,239504	6,8087	0,0112
Fn*Mat	1	1	0,000356	0,0020	0,9649
Ft*Ang	1	1	0,074865	0,4112	0,5236
Fn*Ang	1	1	0,064895	0,3565	0,5525
Mat*Ang	1	1	0,240708	1,3222	0,2544
Ft*Fn*Mat	1	1	0,003338	0,0183	0,8927
Ft*Fn*Ang	1	1	0,006543	0,0359	0,8502
Ft*Mat*Ang	1	1	0,235545	1,2939	0,2595
Fn*Mat*Ang	1	1	0,064628	0,3550	0,5534
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,289223	1,5887	0,2120

Prediction Profiler



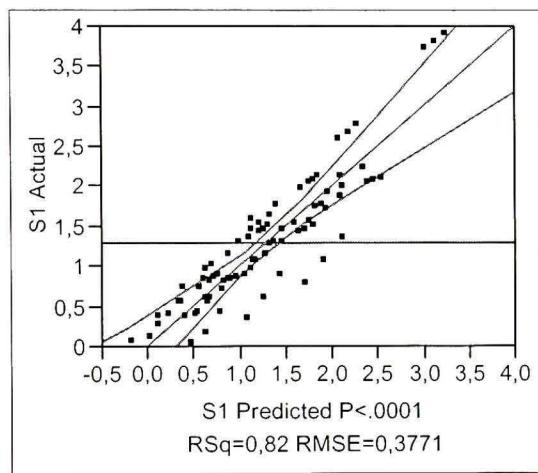
ANNEXE IV

ANALYSE STATISTIQUE DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Least Squares Fit

Response S1

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,82379
RSquare Adj	0,783126
Root Mean Square Error	0,37708
Mean of Response	1,287955
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	43,207981	2,88053	20,2585
Error	65	9,242283	0,14219	Prob > F
C. Total	80	52,450265		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,2315414	0,209489	5,88	<,0001
Ft	-0,159224	0,051314	-3,10	0,0028
Fn	0,6383537	0,051314	12,44	<,0001
Mat	-0,425495	0,051314	-8,29	<,0001
Ang	-0,025429	0,051314	-0,50	0,6219

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,012482	0,062847	-0,20	0,8432
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,083853	0,062847	-1,33	0,1868
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,106373	0,062847	-1,69	0,0953
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,020313	0,062847	-0,32	0,7476
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0016492	0,062847	0,03	0,9791
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,481154	0,062847	-7,66	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,010599	0,076971	-0,14	0,8909
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,013987	0,076971	-0,18	0,8564
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,00911	0,076971	0,12	0,9062
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,203663	0,076971	-2,65	0,0102
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,012678	0,09427	-0,13	0,8934

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	1,369016	9,6281	0,0028
Fn	1	1	22,004757	154,7571	<,0001
Mat	1	1	9,776475	68,7569	<,0001
Ang	1	1	0,034917	0,2456	0,6219
Ft*Fn	1	1	0,005609	0,0394	0,8432
Ft*Mat	1	1	0,253126	1,7802	0,1868
Fn*Mat	1	1	0,407348	2,8648	0,0953
Ft*Ang	1	1	0,014854	0,1045	0,7476
Fn*Ang	1	1	0,000098	0,0007	0,9791
Mat*Ang	1	1	8,334336	58,6145	<,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,002696	0,0190	0,8909
Ft*Fn*Ang	1	1	0,004695	0,0330	0,8564
Ft*Mat*Ang	1	1	0,001992	0,0140	0,9062
Fn*Mat*Ang	1	1	0,995490	7,0012	0,0102
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,002572	0,0181	0,8934

Scaled Estimates

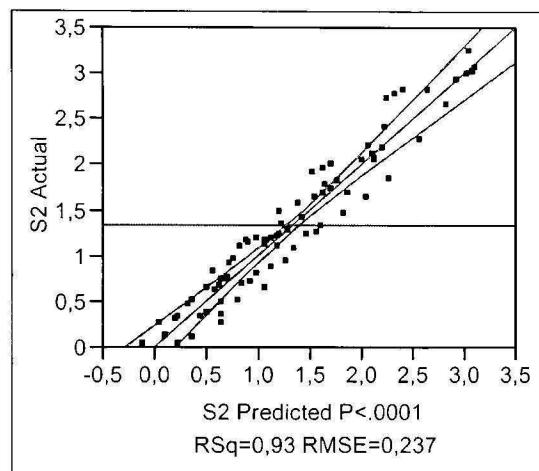
Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,287955		0,041898	30,74	<,0001
Ft	-0,159224		0,051314	-3,10	0,0028
Fn	0,6383537		0,051314	12,44	<,0001
Mat	-0,425495		0,051314	-8,29	<,0001
Ang	-0,025429		0,051314	-0,50	0,6219
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,012482		0,062847	-0,20	0,8432
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,083853		0,062847	-1,33	0,1868
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,106373		0,062847	-1,69	0,0953
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,020313		0,062847	-0,32	0,7476

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0016492		0,062847	0,03	0,9791
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,481154		0,062847	-7,66	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,010599		0,076971	-0,14	0,8909
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,013987		0,076971	-0,18	0,8564
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,00911		0,076971	0,12	0,9062
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,203663		0,076971	-2,65	0,0102
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,012678		0,09427	-0,13	0,8934

Response S2

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,933687
RSquare Adj	0,918384
Root Mean Square Error	0,236984
Mean of Response	1,337812
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	51,399060	3,42660	61,0135
Error	65	3,650490	0,05616	Prob > F
C. Total	80	55,049550		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,9689338	0,131658	14,95	<,0001
Ft	-0,213834	0,032249	-6,63	<,0001
Fn	0,7010758	0,032249	21,74	<,0001

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Mat	-0,273677	0,032249	-8,49	<,0001
Ang	-0,529126	0,032249	-16,41	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,014132	0,039497	-0,36	0,7216
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,132297	0,039497	-3,35	0,0014
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,006163	0,039497	-0,16	0,8765
(Ft-2)*(Ang-2)	0,0467805	0,039497	1,18	0,2406
(Fn-2)*(Ang-2)	-0,255508	0,039497	-6,47	<,0001
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,043824	0,039497	-1,11	0,2713
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,009727	0,048374	-0,20	0,8413
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,01868	0,048374	-0,39	0,7006
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0310402	0,048374	0,64	0,5233
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,046443	0,048374	-0,96	0,3406
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,01379	0,059246	-0,23	0,8167

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	2,469147	43,9652	<,0001
Fn	1	1	26,541390	472,5914	<,0001
Mat	1	1	4,044556	72,0167	<,0001
Ang	1	1	15,118589	269,1990	<,0001
Ft*Fn	1	1	0,007190	0,1280	0,7216
Ft*Mat	1	1	0,630088	11,2192	0,0014
Fn*Mat	1	1	0,001368	0,0244	0,8765
Ft*Ang	1	1	0,078783	1,4028	0,2406
Fn*Ang	1	1	2,350232	41,8478	<,0001
Mat*Ang	1	1	0,069138	1,2311	0,2713
Ft*Fn*Mat	1	1	0,002271	0,0404	0,8413
Ft*Fn*Ang	1	1	0,008375	0,1491	0,7006
Ft*Mat*Ang	1	1	0,023124	0,4117	0,5233
Fn*Mat*Ang	1	1	0,051768	0,9218	0,3406
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,003042	0,0542	0,8167

Scaled Estimates

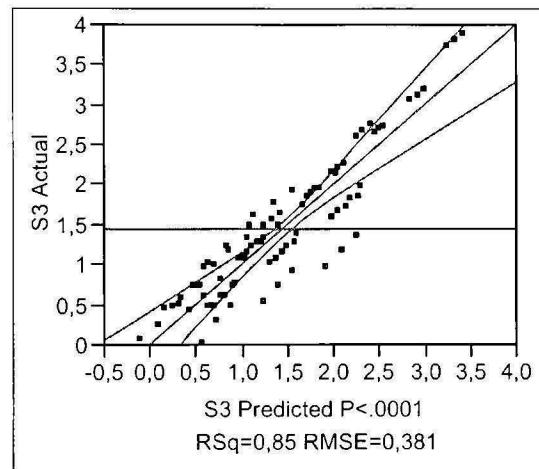
Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,3378121		0,026332	50,81	<,0001
Ft	-0,213834		0,032249	-6,63	<,0001
Fn	0,7010758		0,032249	21,74	<,0001
Mat	-0,273677		0,032249	-8,49	<,0001
Ang	-0,529126		0,032249	-16,41	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,014132		0,039497	-0,36	0,7216
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,132297		0,039497	-3,35	0,0014

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,006163		0,039497	-0,16	0,8765
(Ft-2)*(Ang-2)	0,0467805		0,039497	1,18	0,2406
(Fn-2)*(Ang-2)	-0,255508		0,039497	-6,47	<,0001
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,043824		0,039497	-1,11	0,2713
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,009727		0,048374	-0,20	0,8413
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,01868		0,048374	-0,39	0,7006
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0310402		0,048374	0,64	0,5233
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,046443		0,048374	-0,96	0,3406
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,01379		0,059246	-0,23	0,8167

Response S3

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,845462
RSquare Adj	0,809799
Root Mean Square Error	0,381019
Mean of Response	1,438695
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	51,625689	3,44171	23,7072
Error	65	9,436417	0,14518	Prob > F
C. Total	80	61,062106		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,6300173	0,211677	7,70	<,0001

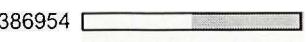
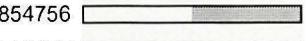
Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Ft	-0,138697	0,05185	-2,67	0,0094
Fn	0,6854756	0,05185	13,22	<,0001
Mat	-0,598177	0,05185	-11,54	<,0001
Ang	-0,044262	0,05185	-0,85	0,3964
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,002627	0,063503	-0,04	0,9671
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,068342	0,063503	-1,08	0,2858
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,18641	0,063503	-2,94	0,0046
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,022488	0,063503	-0,35	0,7244
(Fn-2)*(Ang-2)	0,000527	0,063503	0,01	0,9934
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,330893	0,063503	-5,21	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,00536	0,077775	-0,07	0,9453
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0005813	0,077775	0,01	0,9941
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,004467	0,077775	-0,06	0,9544
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,129916	0,077775	-1,67	0,0996
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,003833	0,095255	-0,04	0,9680

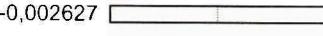
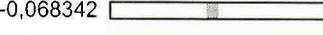
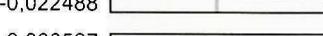
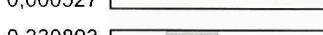
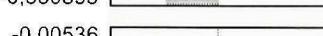
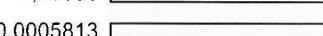
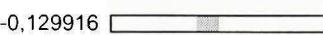
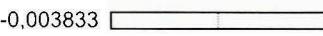
Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	1,038789	7,1554	0,0094
Fn	1	1	25,373347	174,7769	<,0001
Mat	1	1	19,322075	133,0945	<,0001
Ang	1	1	0,105794	0,7287	0,3964
Ft*Fn	1	1	0,000249	0,0017	0,9671
Ft*Mat	1	1	0,168141	1,1582	0,2858
Fn*Mat	1	1	1,250949	8,6168	0,0046
Ft*Ang	1	1	0,018206	0,1254	0,7244
Fn*Ang	1	1	9,99845e-6	0,0001	0,9934
Mat*Ang	1	1	3,941641	27,1508	<,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,000689	0,0047	0,9453
Ft*Fn*Ang	1	1	8,111e-6	0,0001	0,9941
Ft*Mat*Ang	1	1	0,000479	0,0033	0,9544
Fn*Mat*Ang	1	1	0,405078	2,7903	0,0996
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,000235	0,0016	0,9680

Scaled Estimates

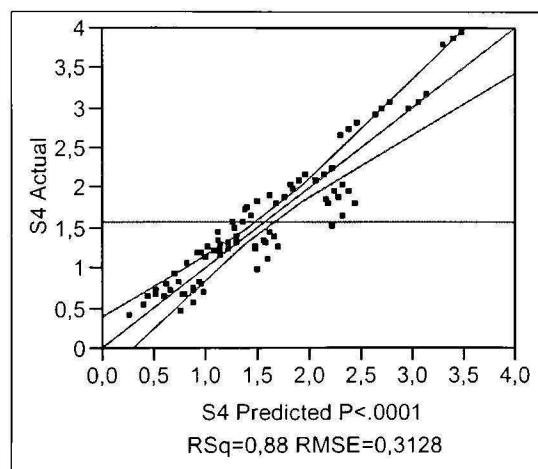
Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,4386954		0,042335	33,98	<,0001
Ft	-0,138697		0,05185	-2,67	0,0094
Fn	0,6854756		0,05185	13,22	<,0001
Mat	-0,598177		0,05185	-11,54	<,0001
Ang	-0,044262		0,05185	-0,85	0,3964

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,002627		0,063503	-0,04	0,9671
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,068342		0,063503	-1,08	0,2858
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,18641		0,063503	-2,94	0,0046
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,022488		0,063503	-0,35	0,7244
(Fn-2)*(Ang-2)	0,000527		0,063503	0,01	0,9934
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,330893		0,063503	-5,21	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,00536		0,077775	-0,07	0,9453
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0005813		0,077775	0,01	0,9941
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,004467		0,077775	-0,06	0,9544
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,129916		0,077775	-1,67	0,0996
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,003833		0,095255	-0,04	0,9680

Response S4

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,882084
RSquare Adj	0,854872
Root Mean Square Error	0,312762
Mean of Response	1,575958
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	47,563778	3,17092	32,4158
Error	65	6,358302	0,09782	Prob > F
C. Total	80	53,922079		<,0001

Parameter Estimates

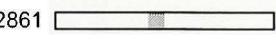
Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,4245247	0,173757	8,20	<,0001
Ft	-0,092861	0,042562	-2,18	0,0327
Fn	0,7029663	0,042562	16,52	<,0001
Mat	-0,557896	0,042562	-13,11	<,0001
Ang	0,023507	0,042562	0,55	0,5826
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,004134	0,052127	-0,08	0,9370
(Ft-2)*(Mat-2)	-0,012511	0,052127	-0,24	0,8111
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,214101	0,052127	-4,11	0,0001
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,016274	0,052127	-0,31	0,7559
(Fn-2)*(Ang-2)	0,022325	0,052127	0,43	0,6699
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,219682	0,052127	-4,21	<,0001
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,002376	0,063842	-0,04	0,9704
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0002604	0,063842	0,00	0,9968
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,009601	0,063842	-0,15	0,8809
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,079711	0,063842	-1,25	0,2163
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0015694	0,07819	0,02	0,9840

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	0,465650	4,7603	0,0327
Fn	1	1	26,684727	272,7941	<,0001
Mat	1	1	16,807374	171,8194	<,0001
Ang	1	1	0,029839	0,3050	0,5826
Ft*Fn	1	1	0,000615	0,0063	0,9370
Ft*Mat	1	1	0,005635	0,0576	0,8111
Fn*Mat	1	1	1,650214	16,8699	0,0001
Ft*Ang	1	1	0,009535	0,0975	0,7559
Fn*Ang	1	1	0,017943	0,1834	0,6699
Mat*Ang	1	1	1,737366	17,7608	<,0001
Ft*Fn*Mat	1	1	0,000135	0,0014	0,9704
Ft*Fn*Ang	1	1	1,6276e-6	0,0000	0,9968
Ft*Mat*Ang	1	1	0,002212	0,0226	0,8809
Fn*Mat*Ang	1	1	0,152492	1,5589	0,2163
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,000039	0,0004	0,9840

Scaled Estimates

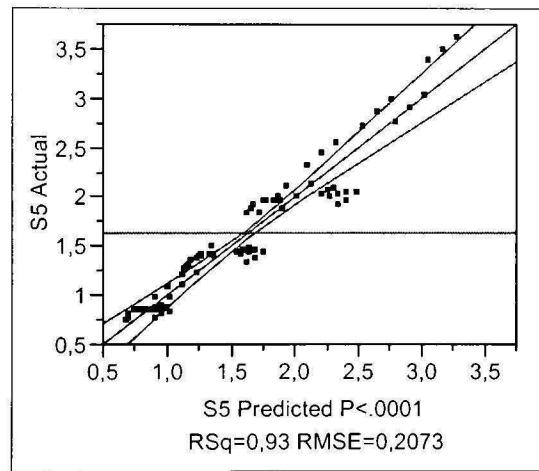
Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,575958		0,034751	45,35	<,0001
Ft	-0,092861		0,042562	-2,18	0,0327

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Fn	0,7029663		0,042562	16,52	<,0001
Mat	-0,557896		0,042562	-13,11	<,0001
Ang	0,023507		0,042562	0,55	0,5826
(Fn-2)*(Fn-2)	-0,004134		0,052127	-0,08	0,9370
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,012511		0,052127	-0,24	0,8111
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,214101		0,052127	-4,11	0,0001
(Fn-2)*(Ang-2)	-0,016274		0,052127	-0,31	0,7559
(Fn-2)*(Ang-2)	0,022325		0,052127	0,43	0,6699
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,219682		0,052127	-4,21	<,0001
(Fn-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,002376		0,063842	-0,04	0,9704
(Fn-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0002604		0,063842	0,00	0,9968
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,009601		0,063842	-0,15	0,8809
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,079711		0,063842	-1,25	0,2163
(Fn-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0015694		0,07819	0,02	0,9840

Response S5

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,929003
RSquare Adj	0,912619
Root Mean Square Error	0,207272
Mean of Response	1,63483
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	36,540098	2,43601	56,7019
Error	65	2,792506	0,04296	Prob > F

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
C. Total	80	39,332604		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,01119584	0,115151	8,79	<,0001
Ft	-0,056675	0,028206	-2,01	0,0487
Fn	0,6968706	0,028206	24,71	<,0001
Mat	-0,378797	0,028206	-13,43	<,0001
Ang	0,0500374	0,028206	1,77	0,0807
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,006551	0,034545	-0,19	0,8502
(Ft-2)*(Mat-2)	0,0543197	0,034545	1,57	0,1207
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,195391	0,034545	-5,66	<,0001
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,007875	0,034545	-0,23	0,8204
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0258467	0,034545	0,75	0,4570
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,138713	0,034545	-4,02	0,0002
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,001096	0,042309	-0,03	0,9794
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,001566	0,042309	-0,04	0,9706
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,008684	0,042309	-0,21	0,8380
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,048377	0,042309	-1,14	0,2571
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0004506	0,051818	0,01	0,9931

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	0,173453	4,0374	0,0487
Fn	1	1	26,223943	610,4039	<,0001
Mat	1	1	7,748309	180,3542	<,0001
Ang	1	1	0,135202	3,1470	0,0807
Ft*Fn	1	1	0,001545	0,0360	0,8502
Ft*Mat	1	1	0,106223	2,4725	0,1207
Fn*Mat	1	1	1,374389	31,9911	<,0001
Ft*Ang	1	1	0,002233	0,0520	0,8204
Fn*Ang	1	1	0,024050	0,5598	0,4570
Mat*Ang	1	1	0,692684	16,1233	0,0002
Ft*Fn*Mat	1	1	0,000029	0,0007	0,9794
Ft*Fn*Ang	1	1	0,000059	0,0014	0,9706
Ft*Mat*Ang	1	1	0,001810	0,0421	0,8380
Fn*Mat*Ang	1	1	0,056167	1,3074	0,2571
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	3,24901e-6	0,0001	0,9931

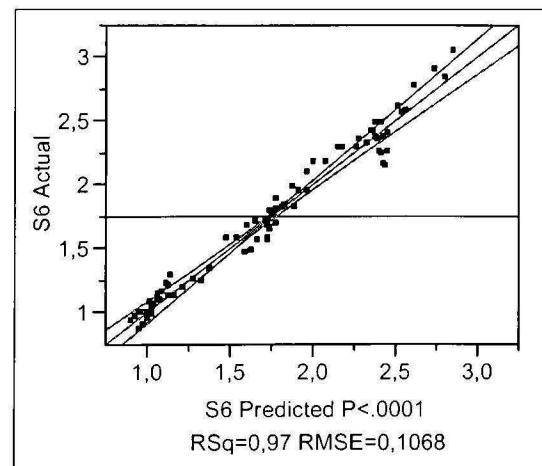
Scaled Estimates

Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,6348295		0,02303	70,99	<,0001
Ft	-0,056675		0,028206	-2,01	0,0487
Fn	0,6968706		0,028206	24,71	<,0001
Mat	-0,378797		0,028206	-13,43	<,0001
Ang	0,0500374		0,028206	1,77	0,0807
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,006551		0,034545	-0,19	0,8502
(Ft-2)*(Mat-2)	0,0543197		0,034545	1,57	0,1207
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,195391		0,034545	-5,66	<,0001
(Ft-2)*(Ang-2)	-0,007875		0,034545	-0,23	0,8204
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0258467		0,034545	0,75	0,4570
(Mat-2)*(Ang-2)	-0,138713		0,034545	-4,02	0,0002
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	-0,001096		0,042309	-0,03	0,9794
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,001566		0,042309	-0,04	0,9706
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,008684		0,042309	-0,21	0,8380
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,048377		0,042309	-1,14	0,2571
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0004506		0,051818	0,01	0,9931

Response S6

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,972287
RSquare Adj	0,965891
Root Mean Square Error	0,106762
Mean of Response	1,742415
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	25,992695	1,73285	152,0290
Error	65	0,740878	0,01140	Prob > F
C. Total	80	26,733573		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	0,4071827	0,059312	6,87	<,0001
Ft	0,0138726	0,014528	0,95	0,3432
Fn	0,6702689	0,014528	46,13	<,0001
Mat	-0,028532	0,014528	-1,96	0,0538
Ang	0,0120069	0,014528	0,83	0,4116
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,03727	0,017794	-2,09	0,0401
(Ft-2)*(Mat-2)	0,1616431	0,017794	9,08	<,0001
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,119637	0,017794	-6,72	<,0001
(Ft-2)*(Ang-2)	0,004015	0,017794	0,23	0,8222
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0028786	0,017794	0,16	0,8720
(Mat-2)*(Ang-2)	0,0518989	0,017794	2,92	0,0049
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	0,0496854	0,021793	2,28	0,0259
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0006983	0,021793	0,03	0,9745
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0014929	0,021793	0,07	0,9456
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0175642	0,021793	0,81	0,4232
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,001389	0,026691	-0,05	0,9586

Effect Tests

Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	0,010392	0,9117	0,3432
Fn	1	1	24,260061	2128,425	<,0001
Mat	1	1	0,043961	3,8569	0,0538
Ang	1	1	0,007785	0,6830	0,4116
Ft*Fn	1	1	0,050006	4,3872	0,0401
Ft*Mat	1	1	0,940625	82,5245	<,0001
Fn*Mat	1	1	0,515273	45,2068	<,0001
Ft*Ang	1	1	0,000580	0,0509	0,8222
Fn*Ang	1	1	0,000298	0,0262	0,8720
Mat*Ang	1	1	0,096966	8,5072	0,0049
Ft*Fn*Mat	1	1	0,059247	5,1980	0,0259
Ft*Fn*Ang	1	1	0,000012	0,0010	0,9745
Ft*Mat*Ang	1	1	0,000053	0,0047	0,9456
Fn*Mat*Ang	1	1	0,007404	0,6496	0,4232
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,000031	0,0027	0,9586

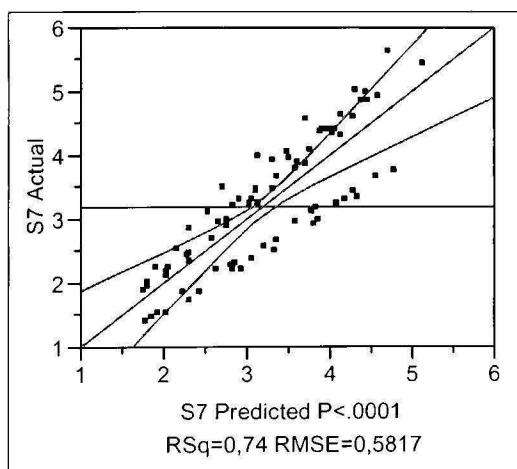
Scaled Estimates

Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	1,7424146		0,011862	146,88	<,0001
Ft	0,0138726		0,014528	0,95	0,3432
Fn	0,6702689		0,014528	46,13	<,0001
Mat	-0,028532		0,014528	-1,96	0,0538
Ang	0,0120069		0,014528	0,83	0,4116
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,03727		0,017794	-2,09	0,0401
(Ft-2)*(Mat-2)	0,1616431		0,017794	9,08	<,0001
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,119637		0,017794	-6,72	<,0001
(Ft-2)*(Ang-2)	0,004015		0,017794	0,23	0,8222
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0028786		0,017794	0,16	0,8720
(Mat-2)*(Ang-2)	0,0518989		0,017794	2,92	0,0049
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	0,0496854		0,021793	2,28	0,0259
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	0,0006983		0,021793	0,03	0,9745
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0014929		0,021793	0,07	0,9456
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0175642		0,021793	0,81	0,4232
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,001389		0,026691	-0,05	0,9586

Response S7

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0,738554
RSquare Adj	0,67822
Root Mean Square Error	0,581696
Mean of Response	3,203448
Observations (or Sum Wgts)	81

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	15	62,130589	4,14204	12,2411
Error	65	21,994099	0,33837	Prob > F
C. Total	80	84,124688		<,0001

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	-0,000596	0,323165	0,00	0,9985
Ft	0,3825148	0,079159	4,83	<,0001
Fn	0,9736815	0,079159	12,30	<,0001
Mat	0,147463	0,079159	1,86	0,0670
Ang	0,098363	0,079159	1,24	0,2185
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,004258	0,096949	-0,04	0,9651
(Ft-2)*(Mat-2)	0,1211389	0,096949	1,25	0,2160
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,045875	0,096949	-0,47	0,6377
(Ft-2)*(Ang-2)	0,0204667	0,096949	0,21	0,8335
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0265806	0,096949	0,27	0,7848
(Mat-2)*(Ang-2)	0,1323833	0,096949	1,37	0,1768
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	0,0006292	0,118738	0,01	0,9958
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,002525	0,118738	-0,02	0,9831
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0116375	0,118738	0,10	0,9222
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0492	0,118738	0,41	0,6800
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,002313	0,145424	-0,02	0,9874

Effect Tests

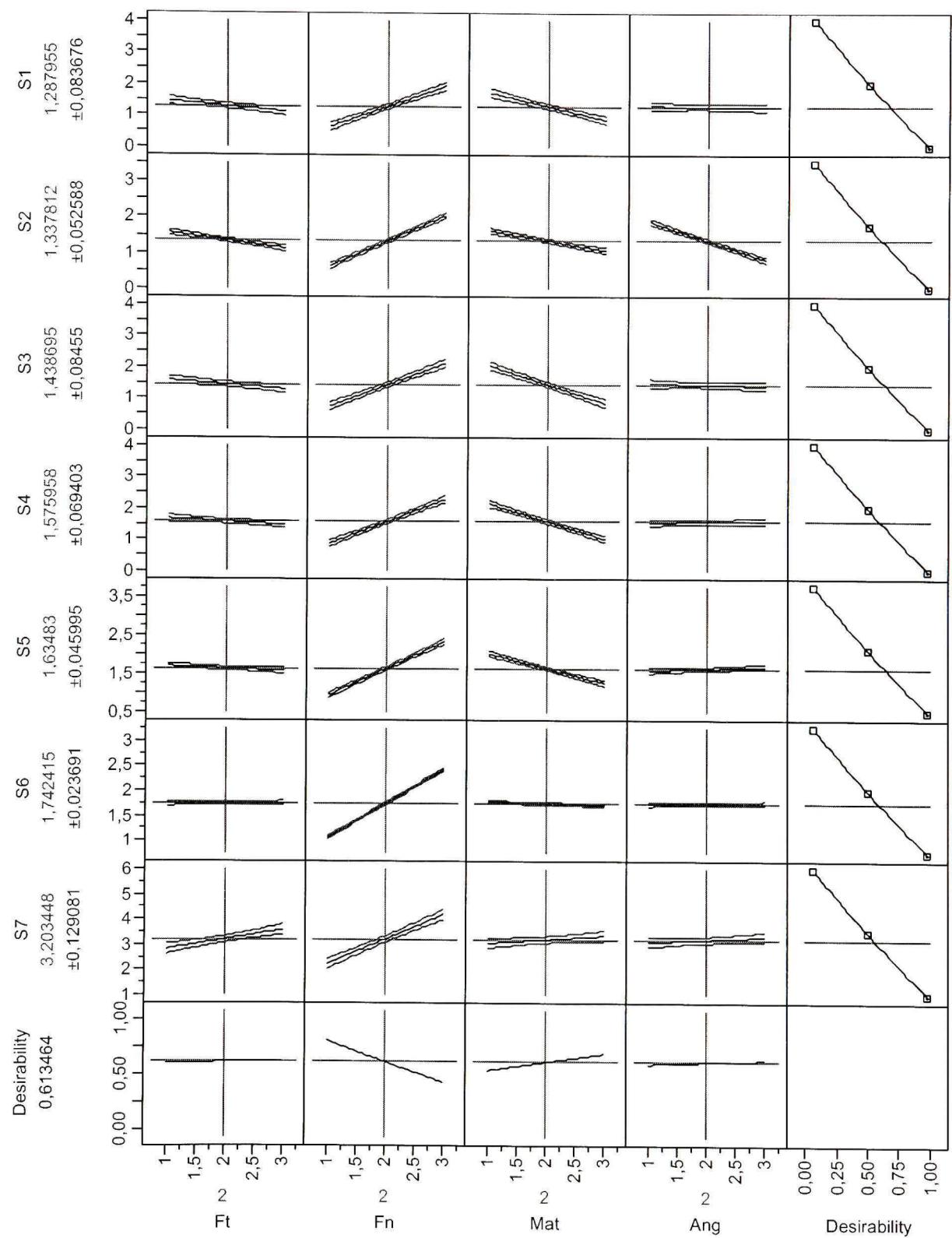
Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
Ft	1	1	7,901150	23,3506	<,0001
Fn	1	1	51,195004	151,2985	<,0001
Mat	1	1	1,174248	3,4703	0,0670
Ang	1	1	0,522465	1,5441	0,2185
Ft*Fn	1	1	0,000653	0,0019	0,9651
Ft*Mat	1	1	0,528287	1,5613	0,2160
Fn*Mat	1	1	0,075763	0,2239	0,6377
Ft*Ang	1	1	0,015080	0,0446	0,8335
Fn*Ang	1	1	0,025435	0,0752	0,7848
Mat*Ang	1	1	0,630912	1,8646	0,1768
Ft*Fn*Mat	1	1	9,50042e-6	0,0000	0,9958
Ft*Fn*Ang	1	1	0,000153	0,0005	0,9831
Ft*Mat*Ang	1	1	0,003250	0,0096	0,9222
Fn*Mat*Ang	1	1	0,058095	0,1717	0,6800
Ft*Fn*Mat*Ang	1	1	0,000086	0,0003	0,9874

Scaled Estimates

Continuous factors centered by mean, scaled by range/2

Term	Scaled Estimate	Plot Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	3,2034481		0,064633	49,56	<,0001
Ft	0,3825148		0,079159	4,83	<,0001
Fn	0,9736815		0,079159	12,30	<,0001
Mat	0,147463		0,079159	1,86	0,0670
Ang	0,098363		0,079159	1,24	0,2185
(Ft-2)*(Fn-2)	-0,004258		0,096949	-0,04	0,9651
(Ft-2)*(Mat-2)	0,1211389		0,096949	1,25	0,2160
(Fn-2)*(Mat-2)	-0,045875		0,096949	-0,47	0,6377
(Ft-2)*(Ang-2)	0,0204667		0,096949	0,21	0,8335
(Fn-2)*(Ang-2)	0,0265806		0,096949	0,27	0,7848
(Mat-2)*(Ang-2)	0,1323833		0,096949	1,37	0,1768
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)	0,0006292		0,118738	0,01	0,9958
(Ft-2)*(Fn-2)*(Ang-2)	-0,002525		0,118738	-0,02	0,9831
(Ft-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0116375		0,118738	0,10	0,9222
(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	0,0492		0,118738	0,41	0,6800
(Ft-2)*(Fn-2)*(Mat-2)*(Ang-2)	-0,002313		0,145424	-0,02	0,9874

Prediction Profiler



ANNEXE V

PROGRAMME ANSYS

```
FINISH
/CLEAR
/FILNAM, CONTACT COIN
/TITLE, CONTACT_ANSYS_105_ACIER_Fn30Ft2
/PREP7

H=10e-5
X1=0.0 $ Y1=0.0 $ X2=0.0 $ Y2=70 $ X3=47 $ Y3=Y2 $ X4=X3 $ Y4=Y3-10 $
X5=44$ Y5=Y2/2 $ X6=47.4 $ Y6=9.65$ X7=X3+2.6 $ Y7=0.0 $ X8=-50 $ Y8=-H $ X9=150 $ Y9=-
H$ X10=150 $ Y10=-10-H $ X11=-50 $ Y11=-10-H $ X12=X1 $ Y12=Y6
lb1=50 $ lb2=4 $ e=3
Pv=(lb1*4.4482)/150 $ Ph=(lb2*4.4482)/(10*e) $ NU1=0.38 $ NU2=0.38$ E1=2500 $ E2=2500
! CREATION DE LA GEOMETRIE
K, 1, X1, Y1
K, 2, X2, Y2
K, 3, X3, Y3
K, 4, X4, Y4
K, 5, X5, Y5
K, 6, X6, Y6
K, 7, X7, Y7
K, 8, X8, Y8
K, 9, X9, Y9
K, 10, X10, Y10
K, 11, X11, Y11
K, 12, X12, Y12

! CREATION DES LIGNES
L, 1, 12
L, 12, 2
L, 2, 3
L, 3, 4
```

L, 6, 7
L, 7, 1
L, 8, 9
L, 9, 10
L, 10, 11
L, 11, 8
L, 6, 12
FLST, 3, 3, 3
FITEM, 3, 4
FITEM, 3, 5
FITEM, 3, 6
BSPLIN, , P51X

ET, 1, PLANE183
KEYOPT, 1, 3, 3
R, 1, 3
ET, 2, PLANE183
KEYOPT, 2, 3, 3
R, 2, e

UIMP, 1, EX, , ,E1,
UIMP, 1, NUXY, , , NU1,

UIMP, 2, EX, , ,E2,
UIMP, 2, NUXY, , ,NU2,

AL, 2, 3, 4,12, 11
AATT, 1, 1, 1, 0

AL, 1, 11, 5, 6
AATT, 1, 1, 1,0

ASEL, NONE

AL, 7, 8, 9, 10
AATT, 2, 2, 2, 0

FLST,5, 2, 4, ORDE, 2

FITEM, 5, 1

FITEM, 5, 5

LSEL, S, , , P51X

LESIZE, 1, , , 6, 1

LESIZE, 5, , , 6, 1

LREVERSE,1

FLST, 5, 3, 4, ORDE, 3

FITEM, 5, 2

FITEM, 5, 4

FITEM, 5, 12

LSEL, S, , , P51X

LESIZE, 2, , , 14, 1/5

LREVERSE, 2

LESIZE, 4, , , 1, 1

LESIZE, 12, , , 9, 1/5

FLST, 5, 3, 4, ORDE, 3

FITEM, 5, 3

FITEM, 5, 6

FITEM, 5, 11

LSEL, S, , , P51X

LESIZE, 3, , , 10, 1

LESIZE, 6, , , 30, 1

LESIZE, 11, , , 30, 1

FLST, 5, 2,4, ORDE, 2

FITEM, 5, 10

FITEM, 5, 8

LSEL, S, , , P51X

LESIZE, 8, , , 7, 1/4

LREVERSE, 8

LESIZE, 10, , , 7, 1/4

FLST, 5, 2, 4, ORDE,2

FITEM, 5, 7

FITEM, 5, 9

LSEL, S, , , P51X

LESIZE, 7, , , 75, 1

LESIZE, 9, , , 75,1

ASEL, ALL

AMESH, ALL

ALLSEL

R, 3, , , ,H

ET, 3, TARGE169

MP, MU, 3, 0.8

ASEL, S, , , 3

NSLA, S, 1

NSEL, R, LOC, Y, Y8-1, Y1+1

NSEL, R, LOC, X, X1-1, X7+2

TYPE, 3

MAT, 3

REAL, 3

ESURF, ALL

ALLSEL

ET, 4, CONTA172

KEYOPT, 4, 1.0

KEYOPT, 4, 3, 3

KEYOPT, 4, 12, 0

KEYOPT,4,2,0

KEYOPT,4,5,1

KEYOPT,4,6,0

KEYOPT,4,7,0

KEYOPT,4,8,

KEYOPT,4,9,1

KEYOPT,4,11,

ASEL, S, , , 2

NSLA, S, 1

NSEL, R, LOC, Y, Y1-1,Y1+2

NSEL, R, LOC, X, X1-1, X7+2

TYPE, 4

MAT, 3

REAL,3

ESURF, ALL

ALLS

FINISH

/SOLU

ANTYPE, STAT

TIME, 0.25

AUTOTS,ON

NSUBST, 100, 1000, 20

OUTRES, ALL, ALL

NEQIT, 100

NSEL, S, LOC, Y, Y11

NSEL, R, LOC, X, X10, X11

D, ALL, UY

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, Y, Y2

NSEL, R, LOC, X, X2, X3

CP,1, UY, ALL

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, Y, Y2

NSEL, R, LOC,X, X2, X3

D, ALL, UX

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, X, X2

NSEL, R, LOC, Y, 50, Y2

D, ALL, UX

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, X, X3

NSEL, R, LOC, Y, 50, Y2

D, ALL, UX

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, X, X8

NSEL, R, LOC, Y, Y8, Y11

CP, 1, UX, ALL

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, Y, Y2

NSEL, R, LOC, X, X2, X3

SFL, 3, PRES, Pv

NSEL, ALL

NSEL, S, LOC, X, X11

NSEL, R, LOC, Y, Y8, Y11

SFL, 10, PRES, Ph

NSEL, ALL

ALLS

SOLVE

FINISH

/POST1

/DSCALE,1 ,1

/CVAL, 0.03125, 0.0625, 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 4,8
PLNSOL, S, INT, 0,1
FLST,5,7 ,1, ORDE, 7
FITEM, 5, 1189
FITEM, 5, 1185
FITEM, 5, 1153
FITEM, 5, 1073
FITEM, 5, 993
FITEM, 5, 849
FITEM, 5, 737
NSEL,R, , , P51X

ANNEXE VI

SURFACES DE RÉPONSE

S1

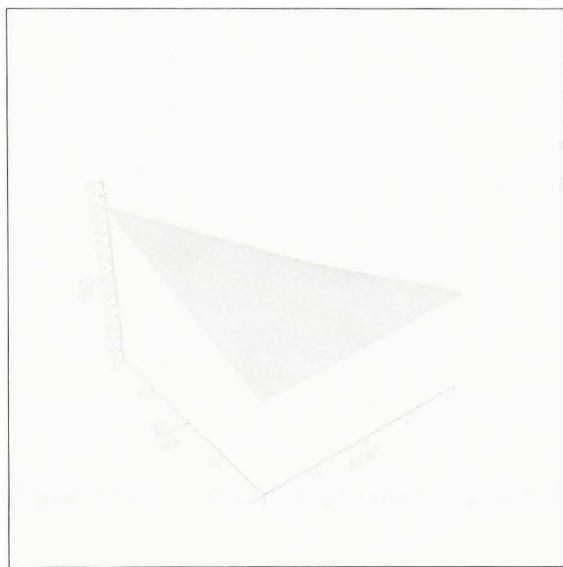


Figure VI.1 *Surface de réponse pour S1*

S2

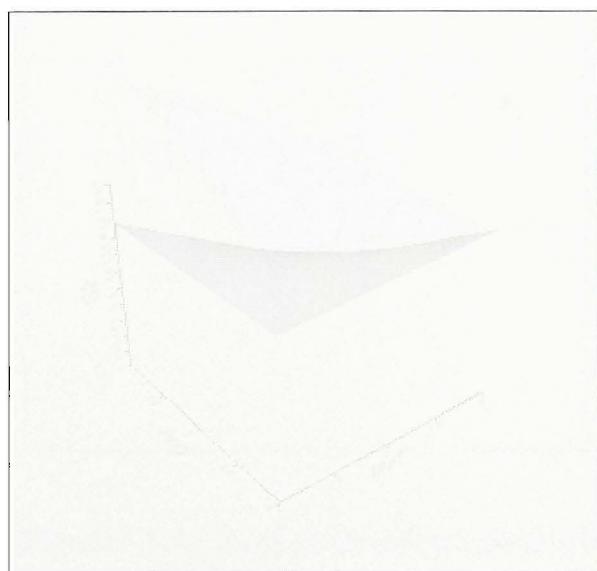
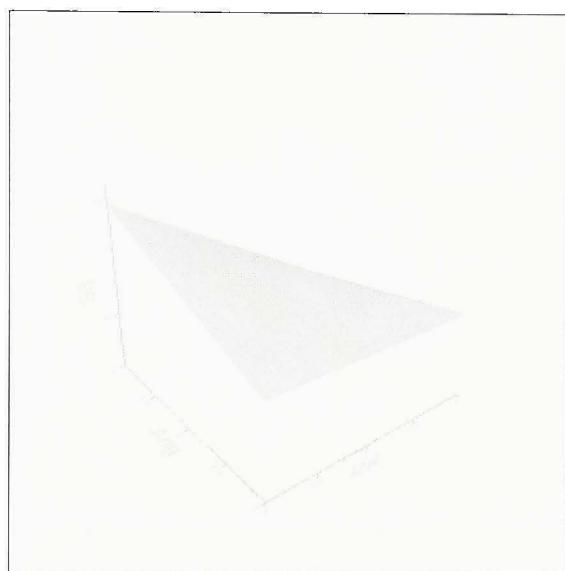
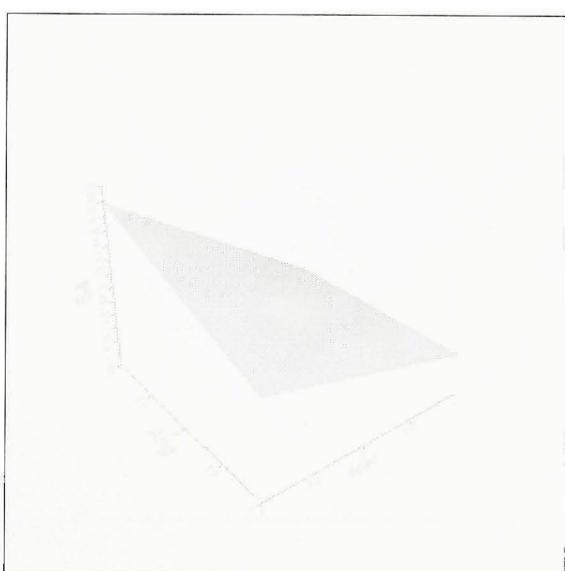


Figure VI.2 *Surface de réponse pour S2*

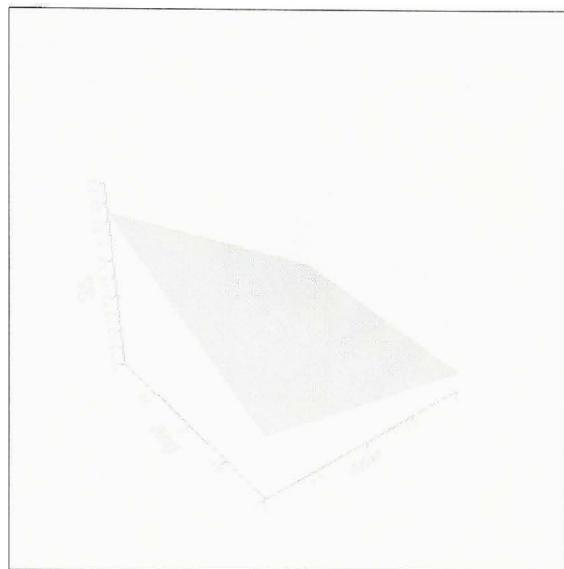
S3

Figure VI.3 *Surface de réponse pour S3*

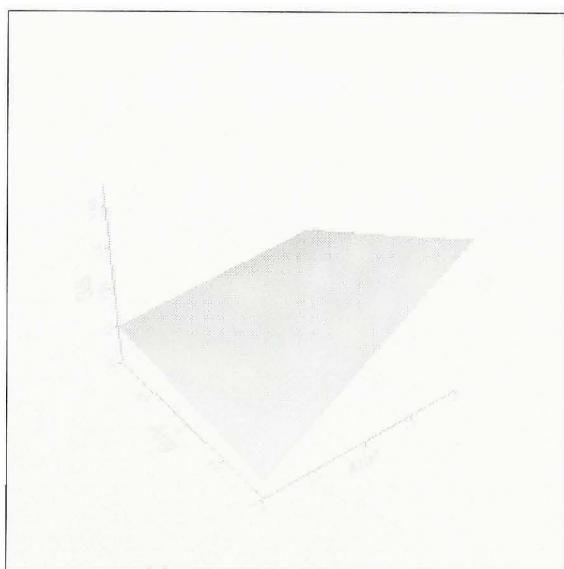
S4

Figure VI.4 *Surface de réponse pour S4*

S5

**Figure VI.5** *Surface de réponse pour S5*

S6

**Figure VI.6** *Surface de réponse pour S6*

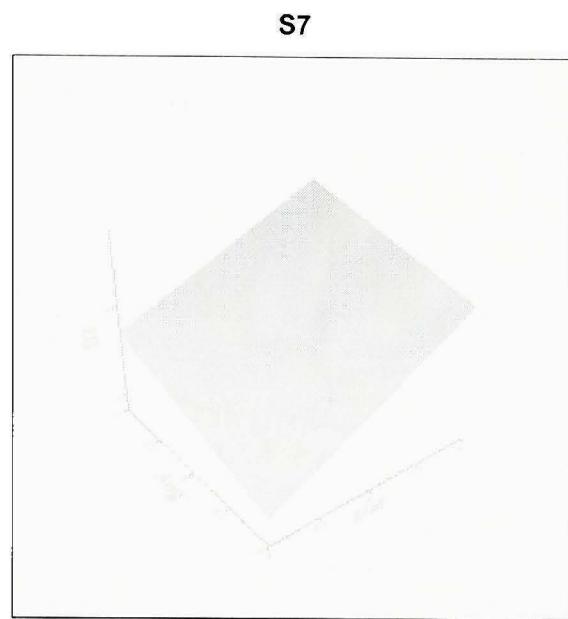


Figure VI.7 *Surface de réponse pour S7*

ANNEXE VII

COURBES DE COMPARAISON

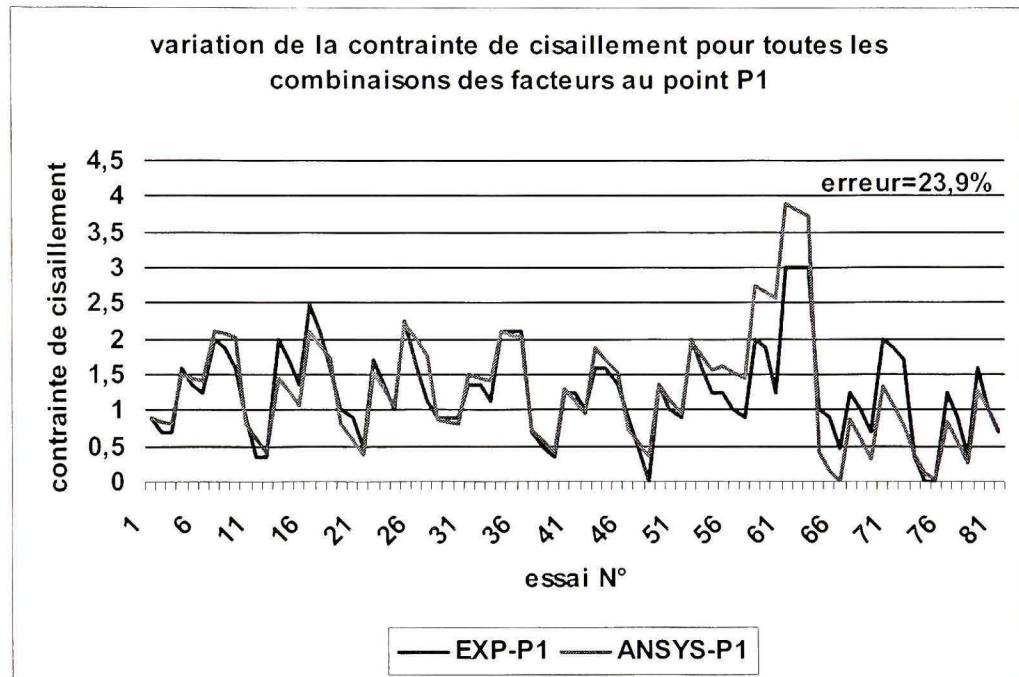


Figure VII.1 *Courbes de comparaison (Expérimental/numérique) au point P1*

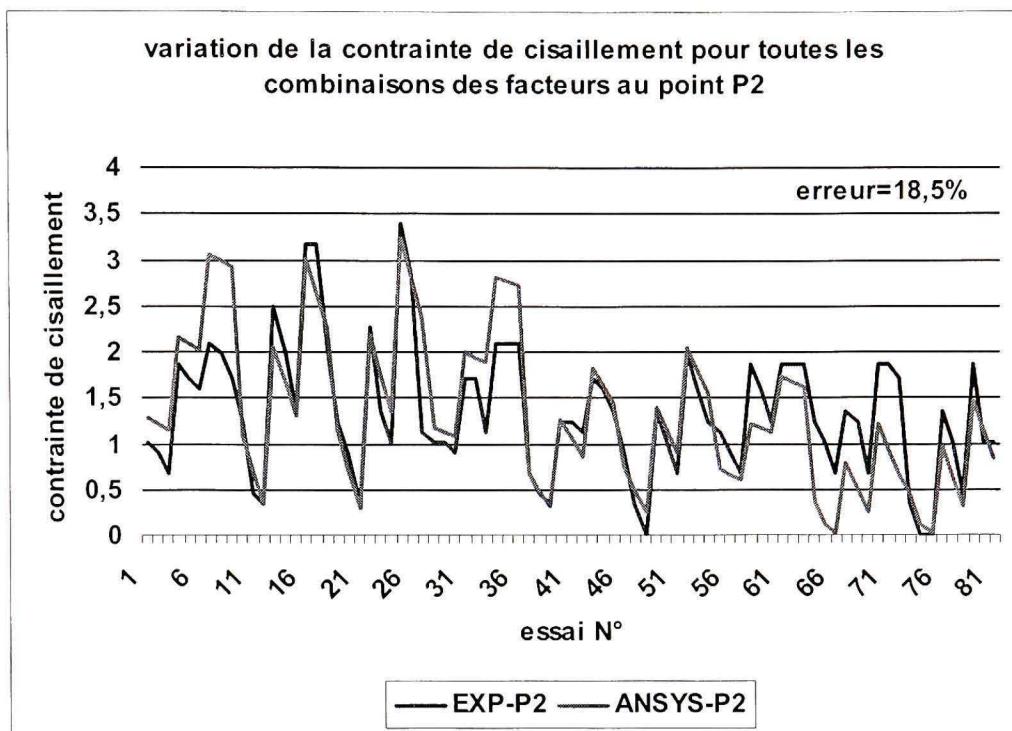


Figure VII.2 *Courbes de comparaison (expérimental/numérique) au point P2*

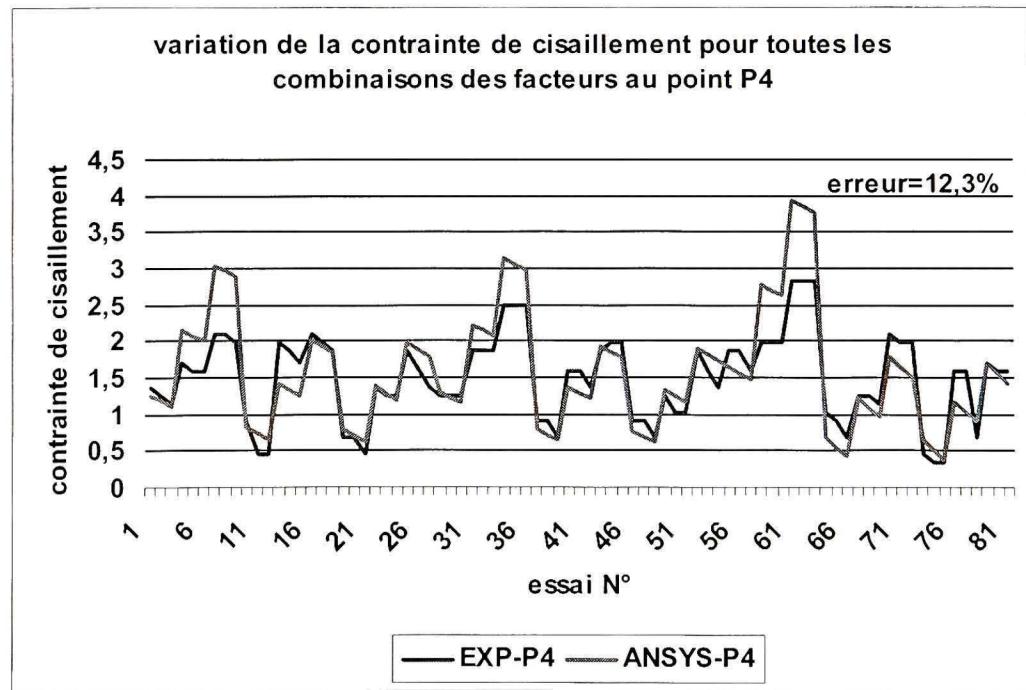


Figure VII.3 *Courbes de comparaison (expérimental/numérique) au point P4*

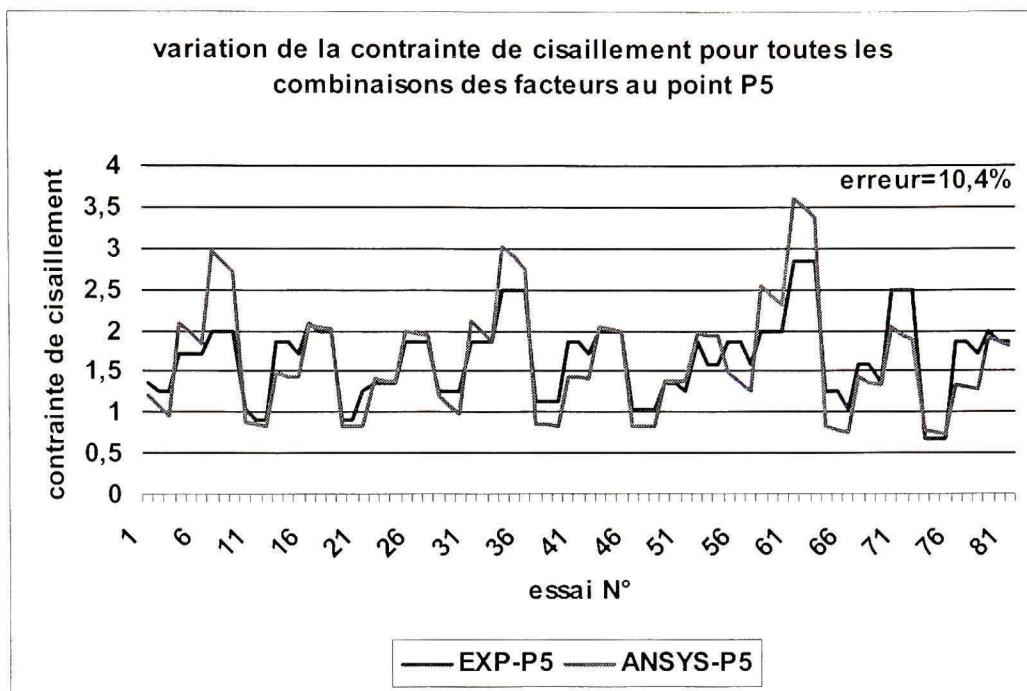


Figure VII.4 *Courbes de comparaison (expérimental/numérique) au point P5*

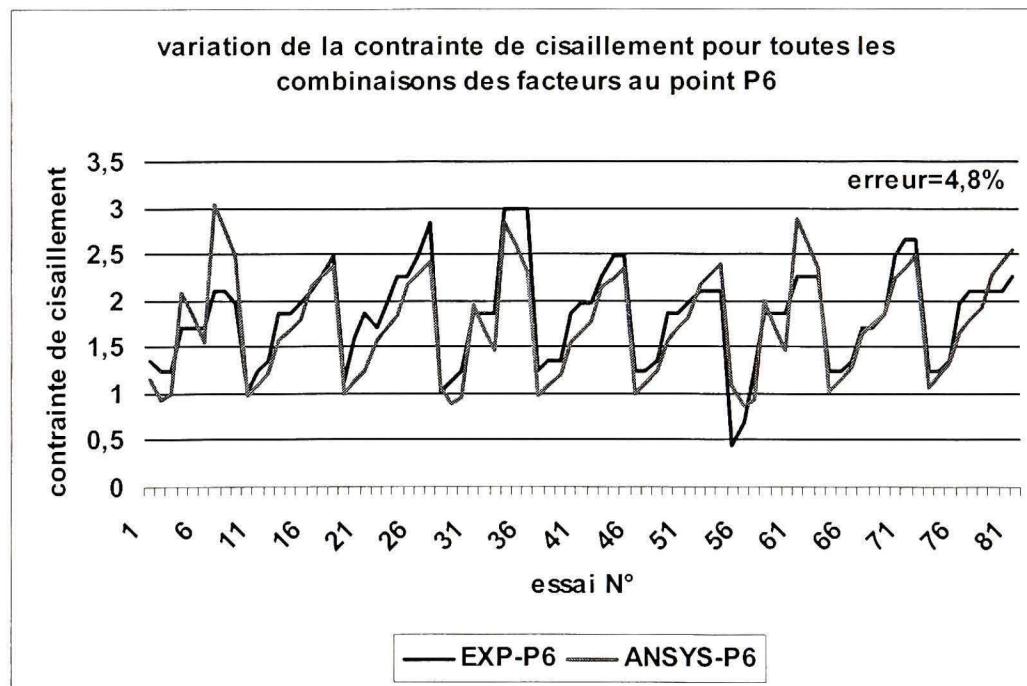


Figure VII.5 *Courbes de comparaison (expérimental/numérique) au point P6*

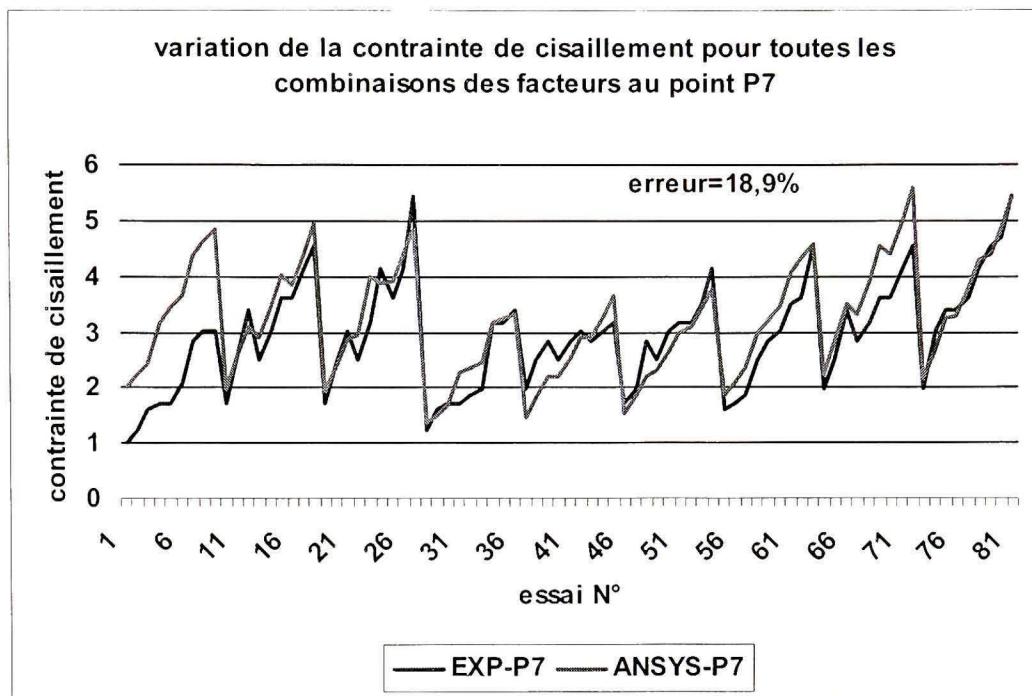


Figure VII.6 *Courbes de comparaison (expérimental/numérique) au point*

ANNEXE VIII

PROGRAMME EN LANGAGE C

```
//-----\\
//
\\
// Programme écrit par      Raynald Guilbault (2007) \\
//
\\
//      professeur agégé      \\
//      département de génie mécanique \\
//      École de technologie supérieure \\
//      Montréal (Qc) Canada \\
//
\\
//-----//
```

```
// l_entree_donDlg.cpp : implementation file
//
#include "stdafx.h"
#include "PresContCis.h"
#include "l_entree_donDlg.h"
#include "math.h"
#ifndef _DEBUG
#define new DEBUG_NEW
#endif THIS_FILE
static char THIS_FILE[] = __FILE__;
```

```
#endif

///////////
// Cl_entree_don_dlg dialog
Cl_entree_don_dlg::Cl_entree_don_dlg(CWnd* pParent /*=NULL*/)
    : CDialog(Cl_entree_don_dlg::IDD, pParent)
{
//{{AFX_DATA_INIT(Cl_entree_don_dlg)
m_angle = 105.0;
m_forcev = 133.50;
m_forceh = 0.0;
m_larbase = 50.0;
m_larsommet = 47.4;
m_longueur = 70.0;
m_nbdivbase = 10;
m_nbdivcote = 10;
m_poisson = 0.3;
m_young = 200000.0;
m_epais = 3.0;
//}}AFX_DATA_INIT
}

void Cl_entree_don_dlg::DoDataExchange(CDataExchange* pDX)
{
CDialog::DoDataExchange(pDX);
//{{AFX_DATA_MAP(Cl_entree_don_dlg)
DDX_Text(pDX, IDC_ANGLE_EDIT, m_angle);
DDX_Text(pDX, IDC_FV_EDIT, m_forcev);
DDX_Text(pDX, IDC_FH_EDIT, m_forceh);
DDX_Text(pDX, IDC_LAB_EDIT, m_larbase);
DDX_Text(pDX, IDC_LAS_EDIT, m_larsommet);
}}
```

```

DDX_Text(pDX, IDC_LNG_EDIT, m_longueur);
DDX_Text(pDX, IDC_NBDIVB_EDIT, m_nbdivbase);
DDX_Text(pDX, IDC_NBDIVC_EDIT, m_nbdivcote);
DDX_Text(pDX, IDC_POISSON_EDIT, m_poisson);
DDX_Text(pDX, IDC_YOUNG_EDIT, m_young);
DDX_Text(pDX, IDC_EPAIS_EDIT, m_epais);
//} }AFX_DATA_MAP
}

BEGIN_MESSAGE_MAP(Cl_entree_don_dlg, CDialog)
//{{AFX_MSG_MAP(Cl_entree_don_dlg)
//} }AFX_MSG_MAP
END_MESSAGE_MAP()

```

//////////

// Cl_entree_don_dlg message handlers

```

void Cl_entree_don_dlg::OnOK()
{
// TODO: Add extra validation here

```

```
CDialog::OnOK();
```

//////////

//

// Début code

//

//////////

```
const double C=8.317766167;
```

```
const double coefrelaxD = 0.01;
```

```
const double coefrelaxC = 0.005;
```

```
const double Pi = acos(-1.0);
```

```
int i,j,nbited,nbitec;  
double lsegb,lsegc,lsegcV;  
double approche;  
double errd,errc;  
double defmoy;  
double l,lpp;  
double xbp,xcp,zbp,zcp;  
double theta1,theta2,r1,r2;  
double t1,t2,t3,t4,t5,t6;  
double distCbase[10][1000],distCcote[5][1000],distCcoteV[5][1000];  
double pointsS1_7[7][7];
```

```
pointsS1_7[0][0] = 46.5;  
pointsS1_7[0][1] = 5.0;  
pointsS1_7[1][0] = 48;  
pointsS1_7[1][1] = 1.75;  
pointsS1_7[2][0] = 43.5;  
pointsS1_7[2][1] = 1.75;  
pointsS1_7[3][0] = 36.5;  
pointsS1_7[3][1] = 1.75;  
pointsS1_7[4][0] = 28.0;  
pointsS1_7[4][1] = 1.75;  
pointsS1_7[5][0] = 13.5;  
pointsS1_7[5][1] = 1.75;  
pointsS1_7[6][0] = 1.75;  
pointsS1_7[6][1] = 1.75;
```

```
m_angle *= Pi/180.0;  
for(i=0;i<1000;i++)  
{
```

```

distCcoteV[0][i] = 0.0; // Coordonnée z
distCcoteV[1][i] = 0.0; // Pression
distCcoteV[2][i] = 0.0; // Cisaillement
distCcoteV[3][i] = 0.0; // Déplacement

distCcote[0][i] = 0.0; // Coordonnée x
distCcote[1][i] = 0.0; // Coordonnée z
distCcote[2][i] = 0.0; // Pression
distCcote[3][i] = 0.0; // Cisaillement
distCcote[4][i] = 0.0; // Déplacement
distCbase[0][i] = 0.0; // Coordonnée x
distCbase[1][i] = 0.0; // Pression
distCbase[2][i] = 0.0; // Cisaillement
distCbase[3][i] = 0.0; // Déplacement
distCbase[4][i] = 0.0; // Pression produite par la charge correction côté incliné
distCbase[5][i] = 0.0; // Cisaillement produit par la charge correction côté incliné
distCbase[6][i] = 0.0; // Pression produite par la charge correction côté vertical
distCbase[7][i] = 0.0; // Cisaillement produit par la charge correction côté vertical
distCbase[8][i] = 0.0; // Pression totale
distCbase[9][i] = 0.0; // Cisaillement total

}

// Coordonnées des segments du côté
lsegb=0.5*m_larbase/(double)(m_nbddivbase);
t1=lsegb;
for(i=0;i<m_nbddivbase ;i++,t1+=2.0*lsegb)
{
distCbase[0][i] = t1;
}

```

```

// Coordonnées des segments du côté vrtical
lsegcV=0.5*m_longueur/(double)(m_nbdiscote);
t1=lsegcV;
for(i=0;i<m_nbdiscote ;i++,t1+=2.0*lsegcV)
{
    distCcoteV[0][i] = t1;
}

// Coordonnées des segments du côté
lsegc=0.5*(m_larsommet-m_larbase)/(double)(m_nbdiscote);
t1=m_larsommet-lsegc;
for(i=0;i<m_nbdiscote ;i++,t1-=2.0*lsegc)
{
    distCcote[0][i] = t1;
    distCcote[1][i] = (distCcote[0][i]-m_larbase)*tan(m_angle);
}

// Distribution initiale de la charge verticale
t1 = m_forcev/(m_epais*m_larbase);
for(i=0;i<m_nbdiscote;i++)
{
    distCbase[1][i] = t1;
    distCbase[8][i] = t1;
}

// Distribution initiale de la charge horizontale
t1 = m_forceh/(m_epais*m_larbase);
for(i=0;i<m_nbdiscote;i++)
{
    distCbase[2][i] = t1;
    distCbase[9][i] = t1;
}

```

```

}

/*          // Correction du déplacement
// Calcul des déplacements à la base
t1 = (1.0-pow(m_poisson,2.0))/(m_young*Pi);
approche = 1.0;
nbited = 0;

do
{
// Ajustement de la distribution
for(i=0,t2=0.0;i<m_nbdivbase;i++)
{
if(defmoy!=0.0)      distCbase[1][i] *=(1.0+coefrelaxD*(approche-
distCbase[3][i])/defmoy);
else distCbase[1][i] *= (1.0+(approche-distCbase[3][i]));
t2 += (distCbase[1][i]*2.0*lsegb);
}

for(i=0;i<m_nbdivbase;i++)
{
distCbase[1][i] *= (m_forcev/(m_epais*t2));
}

// Calcul des déplacements
for(i=0;i<m_nbdivbase;i++)
{
distCbase[3][i] = 0.0;
for(j=0;j<m_nbdivbase;j++)
{
if(i!=j)
{
if(fabs(t2=distCbase[0][j]-distCbase[0][i])<3.0*lsegb)

```

```

// Pour tenir compte de l'hypothèse de calcul de C
{
    distCbase[3][i] += t1*distCbase[1][j] * (C*lsegb-((t2+lsegb)*log(pow((t2+lsegb)/lsegb,2.0))
- (t2-lsegb)*log(pow((t2-lsegb)/lsegb,2.0))));

    }
}

else distCbase[3][i] += t1*distCbase[1][j] * C*lsegb;

    }

}

for(i=0,approche=0.0;i<m_nbdivbase;i++)
{
    if(fabs(distCbase[3][i])>approche) approche = fabs(distCbase[3][i]);
}

// Évaluation de l'erreur

for(i=0,errd=0.0,defmoy = 0.0;i<m_nbdivbase;i++)
{
    if((t2=fabs(distCbase[3][i]-approche))>errd) errd = t2;
    defmoy += (approche-distCbase[3][i]);
}

defmoy /= (double)(m_nbdivbase);

nbited++;

}while((errd > 1e-8)&&(nbited<50000));

*/
nbitec = 0;

do
{

```

```

// Calcul des contraintes de côté incliné
// Parcours des segments côté
for(i=0;i<m_nbdiscote;i++)
{
    for(j=0,t1=0.0,t2=0.0,t3=0.0;j<m_nbdivbase;j++) // Parcours des segment de la base
    {
        // Cacul theta
        if(distCcote[0][i]<(distCbase[0][j]+lsegb))
        {
            theta1 = Pi - atan(distCcote[1][i]/(-distCcote[0][i]+(distCbase[0][j]+lsegb)));
        }
        else
        {
            theta1 = atan(distCcote[1][i]/(distCcote[0][i]-(distCbase[0][j]+lsegb)));
        }

        if(distCcote[0][i]<(distCbase[0][j]-lsegb))
        {
            theta2 = Pi - atan(distCcote[1][i]/(-distCcote[0][i]+ distCbase[0][j]-lsegb));
        }
        else
        {
            theta2 = atan(distCcote[1][i]/(distCcote[0][i]- distCbase[0][j]+lsegb));
        }

        r1 = sqrt(pow(distCcote[1][i],2.0)+pow(distCcote[0][i]-distCbase[0][j]-lsegb,2.0));
        r2 = sqrt(pow(distCcote[1][i],2.0)+pow(distCcote[0][i]-distCbase[0][j]+lsegb,2.0));
    }
}

```

```

// Effet de la force normale
t1 += (-0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte x
t2 += (-0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z
t3 += ( 0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte xy

// Effet du cisaillement
t1 += ( 0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x
t2 += ( 0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte z
t3 += (-0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte xy
}

// Transformation des contraintes en x'z'
t4 = 0.5*(t1+t2)+0.5*(t1-t2)*cos(2.0*(Pi-m_angle))+t3*sin(2.0*(Pi-m_angle)); // Contrainte x'
distCcote[2][i] = 0.5*(t1+t2)-0.5*(t1-t2)*cos(2.0*(Pi-m_angle))-t3*sin(2.0*(Pi-m_angle)); // Contrainte z'
distCcote[3][i] = -0.5*(t1-t2)*sin(2.0*(Pi-m_angle))+t3*cos(2.0*(Pi-m_angle)); // Contrainte x'z'
}

// Calcul des contraintes produites à la base par la correction du côté incliné
// Parcours des segments base
for(i=0,errc=0.0;i<m_nbdivbase;i++)
{
for(j=0,t1=0.0,t2=0.0,t3=0.0,t4=0.0,t5=0.0,t6=0.0;j<m_nbdivcote;j++) // Parcours des segment du côté
{

```

```

// Changement de repère

xbp = (distCbase[0][i]- m_larsommet)*cos(Pi-m_angle) - (-m_larsommet-
m_larbase)*tan(m_angle))*sin(Pi-m_angle);
zbp = (distCbase[0][i]- m_larsommet)*sin(Pi-m_angle) + (-m_larsommet-
m_larbase)*tan(m_angle))*cos(Pi-m_angle);

xcp = (distCcote[0][j]- m_larsommet)*cos(Pi-m_angle) - (distCcote[1][j]-(m_larsommet-
m_larbase)*tan(m_angle))*sin(Pi-m_angle);
zcp = (distCcote[0][j]- m_larsommet)*sin(Pi-m_angle) + (distCcote[1][j]-(m_larsommet-
m_larbase)*tan(m_angle))*cos(Pi-m_angle);

// Cacul theta

if(xbp<(xcp+lsegc))
{
    theta1 = Pi - atan(-zbp/(xcp+lsegc-xbp));
}
else
{
    theta1 = atan(-zbp/(xbp-(xcp+lsegc)));
}

if(xbp<(xcp-lsegc))
{
    theta2 = Pi - atan(-zbp/(xcp-lsegc-xbp));
}
else
{
    theta2 = atan(-zbp/(xbp-(xcp-lsegc)));
}

```

```

r1 = sqrt(pow(zbp,2.0)+pow(xbp-(xcp+lsegc),2.0));
r2 = sqrt(pow(zbp,2.0)+pow(xbp-(xcp-lsegc),2.0));

// Négatifs selon la définition des équations
theta2 *= -1.0;
theta1 *= -1.0;

// Effet de la force normale
t1 += (-0.5/Pi)*distCcote[2][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte x'
t2 += (-0.5/Pi)*distCcote[2][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z'
t3 += ( 0.5/Pi)*distCcote[2][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte x'y'

// Effet du cisaillement
t4 += ( 0.5/Pi)*distCcote[3][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x
t5 += ( 0.5/Pi)*distCcote[3][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte z
t6 += (-0.5/Pi)*distCcote[3][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte xy
}

t1 += t4;
t2 += t5;
t3 += t6;

// Transformation des contraintes en xz
t4 = 0.5*(t1+t2)+0.5*(t1-t2)*cos(-2.0*(Pi-m_angle))+t3*sin(-2.0*(Pi-m_angle));// Contrainte x

```

```

t5 = 0.5*(t1+t2)-0.5*(t1-t2)*cos(-2.0*(Pi-m_angle))-t3*sin(-2.0*(Pi-m_angle)); //  

Contrainte z  

t6 = -0.5*(t1-t2)*sin(-2.0*(Pi-m_angle))+t3*cos(-2.0*(Pi-m_angle)); //  

Contrainte xz  

if(fabs(distCbase[4][i]+t5)>errc) errc = fabs(100.0*(distCbase[4][i]+t5)/distCbase[4][i]);  

distCbase[4][i] = -t5;  

if(fabs(distCbase[5][i]+t6)>errc) errc = fabs(100.0*(distCbase[5][i]+t6)/distCbase[5][i]);  

distCbase[5][i] = -t6;  

}  

// Calcul des contraintes de côté verticale  

// Parcours des segments côté  

for(i=0;i<m_nbdivcote;i++)  

{  

for(j=0,t1=0.0,t2=0.0,t3=0.0;j<m_nbdivbase;j++) // Parcours des segment de la base  

{  

// Cacul theta  

theta2 = Pi-atan(distCcoteV[0][i]/(distCbase[0][j]-lsegb));  

theta1 = Pi-atan(distCcoteV[0][i]/(distCbase[0][j]+lsegb));  

r1 = sqrt(pow(distCcoteV[0][i],2.0)+pow(distCbase[0][j]+lsegb,2.0));  

r2 = sqrt(pow(distCcoteV[0][i],2.0)+pow(distCbase[0][j]-lsegb,2.0));  

// Effet de la force normale  

t1 += (-0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); //  

Contrainte x

```

```

t2 += (-0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z
t3 += ( 0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte xy

// Effet du cisaillement
t1 += ( 0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x
t2 += ( 0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte z
t3 += (-0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte xy
}

// Transformation des contraintes en x'z'
t4 = 0.5*(t1+t2)+0.5*(t1-t2)*cos(Pi)+t3*sin(Pi); // Contrainte x'
distCcoteV[1][i] = 0.5*(t1+t2)-0.5*(t1-t2)*cos(Pi)-t3*sin(Pi); // Contrainte z'

distCcoteV[2][i] = -0.5*(t1-t2)*sin(Pi)+t3*cos(Pi); // Contrainte x'z'
}

// Calcul des contraintes produites à la base par la correction du côté vertical
// Parcours des segments base
for(i=0;i<m_nbdivbase;i++)
{
  for(j=0,t1=0.0,t2=0.0,t3=0.0,t4=0.0,t5=0.0,t6=0.0;j<m_nbdivcote;j++)
    // Parcours des segment du côté
    {
      // Cacul theta

      theta1 = atan(distCbase[0][j]/(distCcoteV[0][i]-lsegcV));
      theta2 = atan(distCbase[0][j]/(distCcoteV[0][i]+lsegcV));
    }
}

```

```

r1 = sqrt(pow(distCcoteV[0][j]-lsegcV,2.0)+pow(distCbase[0][i],2.0));
r2 = sqrt(pow(distCcoteV[0][j]+lsegcV,2.0)+pow(distCbase[0][i],2.0));

// Effet de la force normale
t1 += (-0.5/Pi)*distCcoteV[1][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte x'
t2 += (-0.5/Pi)*distCcoteV[1][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z'
t3 += ( 0.5/Pi)*distCcoteV[1][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2));
// Contrainte x'y'

// Effet du cisaillement
t4 += ( 0.5/Pi)*distCcoteV[2][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x
t5 += ( 0.5/Pi)*distCcoteV[2][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2));
// Contrainte z
t6 += (-0.5/Pi)*distCcoteV[2][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte xy
}

t1 += t4;
t2 += t5;
t3 += t6;

// Transformation des contraintes en xz
t4 = 0.5*(t1+t2)+0.5*(t1-t2)*cos(Pi)+t3*sin(Pi); // Contrainte x
t5 = 0.5*(t1+t2)-0.5*(t1-t2)*cos(Pi)-t3*sin(Pi); // Contrainte z

```

```

t6 = -0.5*(t1-t2)*sin(Pi)+t3*cos(Pi);           // Contrainte xz

if(fabs(distCbase[6][i]+t5)>errc) errc = fabs(100.0*(distCbase[6][i]+t5)/distCbase[6][i]);
distCbase[6][i] = -t5;
if(fabs(distCbase[7][i]+t6)>errc) errc = fabs(100.0*(distCbase[7][i]+t6)/distCbase[7][i]);
distCbase[7][i] = -t6;

distCbase[8][i] += coefrelaxC*(distCbase[4][i]+distCbase[6][i]);
if(distCbase[8][i]<0.0) distCbase[8][i] = 0.0;
distCbase[9][i] += coefrelaxC*(distCbase[5][i]+distCbase[7][i]);
}

// Ajustement de la force verticale totale
for(j=0,t2=0.0;j<m_nbdivbase;j++)
{
t2 += (distCbase[8][j]*2.0*lsegb);
}

for(j=0;j<m_nbdivbase;j++)
{
distCbase[8][j] *= (m_forcev/(m_epais*t2));
}

// Ajustement de la force horizontale totale
if(m_forceh!=0.0)
{
for(j=0,t2=0.0;j<m_nbdivbase;j++)
{
t2 += (distCbase[9][j]*2.0*lsegb);
}
}

```

```

for(j=0;j<m_nbdivbase;j++)
{
    distCbase[9][j] *= (m_forceh/(m_epais*t2));
}
nbitec++;
}while((errc > 0.001)&&(nbitec<100000));

/** Calcul des contrainte aux points de farouk

for(i=0;i<7;i++)
{
for(j=0,t1=0.0,t2=0.0,t3=0.0;j<m_nbdivbase;j++) // Parcours des segment de la base
{
// Cacul theta
if(pointsS1_7[i][0]<(distCbase[0][j]+lsegb))
{
    theta1 = Pi - atan(pointsS1_7[i][1]/(-pointsS1_7[i][0]+(distCbase[0][j]+lsegb)));
}
else
{
    theta1 = atan(pointsS1_7[i][1]/(pointsS1_7[i][0]-(distCbase[0][j]+lsegb)));
}

if(pointsS1_7[i][0]<(distCbase[0][j]-lsegb))
{
    theta2 = Pi - atan(pointsS1_7[i][1]/(-pointsS1_7[i][0]+ distCbase[0][j]-lsegb));
}
else
{
}
}

```

```

theta2 = atan(pointsS1_7[i][1]/(pointsS1_7[i][0]- distCbase[0][j]+lsegb));
}

r1 = sqrt(pow(pointsS1_7[i][1],2.0)+pow(pointsS1_7[i][0]-distCbase[0][j]-lsegb,2.0));
r2 = sqrt(pow(pointsS1_7[i][1],2.0)+pow(pointsS1_7[i][0]-distCbase[0][j]+lsegb,2.0));

// Effet de la force normale
t1 += (-0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte x
t2 += (-0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z
t3 += ( 0.5/Pi)*distCbase[8][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte xy

// Effet du cisaillement
t1 += ( 0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x
t2 += ( 0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2)); // Contrainte z
t3 += (-0.5/Pi)*distCbase[9][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte xy

}

for(t4=0.0,t5=0.0,t6=0.0,j=0;j<m_nbddivcote;j++)
// Parcours des segment du côté vertical
{
// Cacul theta
if(pointsS1_7[i][1]>(distCcoteV[1][j]-lsegb))
{
theta1 = atan((pointsS1_7[i][1]-(distCcoteV[1][j]-lsegb))/pointsS1_7[i][0]);
}

```

```

else
{
    theta1 = atan(pointsS1_7[i][0]/(pointsS1_7[i][1]-(distCcoteV[1][j]-lsegb)));
}

if(pointsS1_7[i][1]>(distCcoteV[1][j]+lsegb))
{
    theta2 = atan((pointsS1_7[i][1]-(distCcoteV[1][j]+lsegb))/pointsS1_7[i][0]);
}

else
{
    theta2 = atan(pointsS1_7[i][0]/(pointsS1_7[i][1]-(distCcoteV[1][j]+lsegb)));
}

r1 = sqrt(pow(pointsS1_7[i][0],2.0)+pow(pointsS1_7[i][1]-(distCcoteV[1][j]-lsegb),2.0));
r2 = sqrt(pow(pointsS1_7[i][0],2.0)+pow(pointsS1_7[i][1]-(distCcoteV[1][j]+lsegb),2.0));

// Effet de la force normale
t4 += (-0.5/Pi)*distCcoteV[1][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte x'
t5 += (-0.5/Pi)*distCcoteV[1][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z'
t6 += ( 0.5/Pi)*distCcoteV[1][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2));
// Contrainte x'y'

// Effet du cisaillement
t4 += ( 0.5/Pi)*distCcoteV[2][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x
t5 += ( 0.5/Pi)*distCcoteV[2][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2));
// Contrainte z

```

```

t6 += (-0.5/Pi)*distCcoteV[2][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); //  

Contrainte xy  

}  

// Transformation des contraintes en xz  

t1 += 0.5*(t4+t5)+0.5*(t4-t5)*cos(Pi)+t6*sin(Pi); // Contrainte x  

t2 += 0.5*(t4+t5)-0.5*(t4-t5)*cos(Pi)-t6*sin(Pi); // Contrainte z  

t3 += -0.5*(t4-t5)*sin(Pi)+t6*cos(Pi); // Contrainte xz  

for(t4=0.0,t5=0.0,t6=0.0,j=0;j<m_nbddivcote;j++)  

// Parcours des segment du côté incliné  

{  

// Changement de repère  

// Point Farouk  

xbp = (pointsS1_7[i][0]- m_larsommet)*cos(Pi-m_angle) - (pointsS1_7[i][1]-(m_larsommet-  

m_larbase)*tan(m_angle))*sin(Pi-m_angle);  

zbp = (pointsS1_7[i][0]- m_larsommet)*sin(Pi-m_angle) + (pointsS1_7[i][1]-(m_larsommet-  

m_larbase)*tan(m_angle))*cos(Pi-m_angle);  

// Changement de repère  

// Point côté incliné  

xcp = (distCcote[0][j]- m_larsommet)*cos(Pi-m_angle) - (distCcote[1][j]-(m_larsommet-  

m_larbase)*tan(m_angle))*sin(Pi-m_angle);  

zcp = (distCcote[0][j]- m_larsommet)*sin(Pi-m_angle) + (distCcote[1][j]-(m_larsommet-  

m_larbase)*tan(m_angle))*cos(Pi-m_angle);  

// Cacul theta  

if(xbp<(xcp+lsegc))  

{  

theta1 = Pi - atan(-zbp/(xcp+lsegc-xbp));  

}

```

```

else
{
    theta1 = atan(-zbp/(xbp-(xcp+lsegc)));
}

if(xbp<(xcp-lsegc))
{
    theta2 = Pi - atan(-zbp/(xcp-lsegc-xbp));
}

else
{
    theta2 = atan(-zbp/(xbp-(xcp-lsegc)));
}

r1 = sqrt(pow(zbp,2.0)+pow(xbp-(xcp+lsegc),2.0));
r2 = sqrt(pow(zbp,2.0)+pow(xbp-(xcp-lsegc),2.0));

// Négatifs selon la définition des équations
theta2 *= -1.0;
theta1 *= -1.0;
// Effet de la force normale
t4 += (-0.5/Pi)*distCcote[2][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte x'
t5 += (-0.5/Pi)*distCcote[2][j]*(2.0*(theta1-theta2)-sin(2.0*theta1)+sin(2.0*theta2)); // Contrainte z'
t6 += ( 0.5/Pi)*distCcote[2][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2));
// Contrainte x'y'

// Effet du cisaillement
t4 += ( 0.5/Pi)*distCcote[3][j]*(4.0*log(r1/r2)-(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2))); // Contrainte x

```

```

t5 += ( 0.5/Pi)*distCote[3][j]*(cos(2.0*theta1)-cos(2.0*theta2));
// Contrainte z

t6 += (-0.5/Pi)*distCote[3][j]*(2.0*(theta1-theta2)+sin(2.0*theta1)-sin(2.0*theta2)); // Contrainte xy

}

// Transformation des contraintes en xz

t1 += 0.5*(t4+t5)+0.5*(t4-t5)*cos(-2.0*(Pi-m_angle))+t6*sin(-2.0*(Pi-m_angle)); // Contrainte x

t2 += 0.5*(t4+t5)-0.5*(t4-t5)*cos(-2.0*(Pi-m_angle))-t6*sin(-2.0*(Pi-m_angle)); // Contrainte z

t3 += -0.5*(t4-t5)*sin(-2.0*(Pi-m_angle))+t6*cos(-2.0*(Pi-m_angle)); // Contrainte xz

// Transformation des contraintes en x'z'

pointsS1_7[i][2] = t1; // Contrainte x'
pointsS1_7[i][3] = t2; // Contrainte z'
pointsS1_7[i][4] = t3; // Contrainte x'z'
pointsS1_7[i][5] = sqrt(pow(t1,2.0)+pow(t2,2.0)-t1*t2+3.0*fabs(t3)); // Contrainte von Mises

pointsS1_7[i][6] = sqrt(pow(0.5*(t1-t2),2.0)+pow(t3,2.0)); // Contrainte tau max

}

// Sauvegarde des résultats

CString accesoA; // Chemin d'accès aux fichiers d'entrées-sorties
FILE *foden; // Fichier de données

accesoA = "C:\RGuilbault\Étudiants maîtrise\Farouk Hadri\Res_Prg\Res_sim.txt";

```

```

// Ouverture des fichiers
foden = fopen(accesoA,"w");

fprintf(foden,"Fichier Resultat\n\nErreur de convergence %-10.7lf\nNombre itération %d
\nCharge vertical %-10.7lf; Charge horizontale %-10.7lf\n\nPosition x      Pression
Cisaillement\n",errc,nbitec,m_forcev,m_forceh);

for(i=0;i<m_nbddivbase;i++) // Parcours des noeuds créés
{
    fprintf(foden,"%-10.7lf      %-10.7lf
%-10.7lf\n",distCbase[0][i],distCbase[8][i],distCbase[9][i]);
}

fprintf(foden,"\\n\\n Resultats aux points 1 à 7\\n\\n\nPosition x  Contrainte x  Contrainte z
Cisaillement von Mises      Cisail. Max\\n");
for(i=0;i<7;i++)      // Parcours des noeuds créés
{
    fprintf(foden,"S%-d      %-10.7lf      %-10.7lf      %-
10.7lf      %-10.7lf      %-
10.7lf\\n",i+1,pointsS1_7[i][2],pointsS1_7[i][3],pointsS1_7[i][4],pointsS1_7[i][5],pointsS1_7[i][6]);
}
fclose( foden );
///////////
//
// Fin code
//
///////////
}

}

```

LISTE DE RÉFÉRENCES

Acary. V et Brogliato. B. (2004). *Coefficients de restitution et efforts aux impacts. Revue et comparaison des estimations analytiques.* Institut national de recherche en informatique et en automatique. Rhône-Alpes, France.

Avril. J. (1974). *Analyse des contraintes.* Vishay-Micromesures, Encyclopédie vishey.

Belphégor. Adherence du contact roué/rail. En ligne.

<http://belph80001.free.fr/TechFer/Dyn/Adher.htm>. Consulté en 2005.

Bijak-Zochowski. M et Marek. P. (1996). *Development of plastic zones and residual stress in elasto-plastic contact problems with stress singularities in elastic range.* Int. J. Mech. Sci, v 38, n 2, p.175-190.

Bijak-Zochowski. M, Marek. P et Tracz. M. (1994). *On methods of reduction and elimination of stress singularities in some elastic Contact problems.* Int. J. Mech. Sci. v36, n4, p. 279-296.

Bijak-Zochowski. M, Waas. A. M, Anderson. W. J et Miniatt. C. E. (1991). *Reduction of contact stress by use of relief notches.* Experimental Mechanics.

Bruno. M. (2006). Application de la photoélasticité à la mesure de la contrainte dynamique des engrenages cylindriques. ÉTS, Montréal.

Burguete. R. L et Patterson. E. A. (1997). *A photoelastic study of contact between a cylinder and a half-space.* Experimental Mechanics, v 37, n 3.

Burguete. R. L et Patterson. E. A. (1997). *A photoelastic study of the effect on subsurface stresses of the contact geometry and friction.* Journal of Strain Analysis, v 32, n 6, p. 425-433.

Chandachekhara. K et Antony. S. J. (1994). *An experimental-Numerical hybrid method for elastic contact.* Mech. Struct. And Mach, v22, n4, p. 487-504.

Ciavarella. M. (1999). *Indentation by nominally flat or conical indenters with rounded corners*. International Journal of Solids and Structures. v 36, P. 4149-4181.

Cornell University. *Disks in point contact*. En ligne. <http://instruct1.cit.cornell.edu/courses/ansys/contact/index.htm>. consulté en juillet 2006.

Dally. J. W. et Chen. Y. -M. (1991). *A photoelastic study of friction at multipoint contacts*. Experimental Mechanics, p. 144-149.

Dominique. F, Pineau. A et Zaoui. A. (1995). *Comportement mécanique des matériaux*. Paris : Harmès.

Dumont. M. L, Nelias. D et Flamand. L. (1994). *Influence des rugosités et du frottement sur le tenseur des contraintes dans un massif élastique semi-infini*. Revue Française de Mécanique. n°1994-2, P. 104-113.

Encyclopédie libre. *Les plans factoriels*. [En ligne]. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Plan-d'exp>.

Eritenel. T, Houser. D, Vijayakar. S. M et Casella. J. M. (2003). *Effect of tooth deflection and corner contact on backside separation (backlash) of gear pairs*. Design Engineering Technical Conferences and computers and Information in Engineering conference, Chicago, Illinois, USA, septembre 2-6.

Ghidossi. P. (2003). Contribution à l'étude de l'effet des conditions d'usinage d'éprouvette en composites à matrice polymère sur leur réponse mécanique. ÉNSAM, Châlons-en-Champagne, France.

Gotoh. J et Shiratori. M. (2000). *Viscoelastic stress analysis of a strip plate under moving contact with dry friction*. Mechanics of time-Dependent Materials, v 4, p.43-56.

Goupy. J. (2005). *Pratiquer les plans d'expériences*. Paris: L'usine nouvelle, Dunod.

Goupy. J. (1988). *La méthode des plans d'expériences*. Paris : Dunod; Paris : Bordas.

Guilbault. R. (2005). *Express Model for Load Sharing and Stress Analysis in Helical Gears*. Journal of Mechanical Design. v127, p.1161-1172.

Guilbault. R. (2000). *Développement d'un modèle tridimensionnel d'engrenages cylindriques hélicoïdaux; calcul des distributions linéaires de charge et contraintes au pied des dents*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec.

Guilbault. R. (2007). Mec 727, Tribologie, chapitre 3. École de technologie supérieure.

Hasebe. N, Kojimaet. K et Qian. J. (1999). *Incomplete frictional flat-ended punch on half-plane with edge crack*. Journal of Engineering Mechanics. P. 300-306.

Hasebe. N et Qian. J. (1998). *Edge crack due to circular rigid punch in incomplete contact*. Mechanics of Materials, v28, p. 271-279.

Hetenyi. M. (1970). *A general solution for the elastic quarter space*. Journal of applied mechanics. ASME, v37, p. 70-76.

Institut de productique. *Plan d'expériences*. En ligne. <http://www.institutdeproductique.com/?page=planexperience#conclusion>. Consulté en mars 2006.

Institut de statistique. *Plans d'expériences pour l'estimation des surfaces de réponses*. En ligne. <http://www.stat.ucl.ac.be/cours/stat2520/transparents/ordre2.pdf>. Consulté le 12 février 2006.

Johnson. K. L. (1989). *Contact mechanics*. Cambridge University Press. Great Britain

Kim. H. -K et Lee. S. -B. (2001). *Influence of indenter geometry on half-plane with edge crack subjected to fretting contact*. Theoretical and applied fracture mechanics, v36, p. 125-139.

Le dain. M-A. (2000). Photoélasticimétrie. Ecole nationale supérieure de génie industriel.

Midwest Ansys User Group. *Techniques for Successfully Using ANSYS Contact Elements*. En ligne.

http://www.midwest-ansys-ug.com/051805_presentations/051805_maug_contact_presentation.pdf. Consulté en juillet 2006.

Minhatt. E. C, Waas. A. M et Anderson. W. J. (1990). *An experimental study of stress singularities at a sharp corner in a contact problem*. Experimental Mechanics.

Mugadu. A et Hills. D. A. (2002). *A generalised stress intensity approach to characterising the process zone in complete fretting contacts*. International Journal of solids and structures, v 39, p.1327-1335.

Panait. A. (2004). *Etude expérimentale et numérique des problèmes de contact unilatéral et de frottement sec dans les assemblages verriers*. Université de Marne-la-Vallée.

Penn State – Erie. *Contact analysis problem*. En ligne.
<http://engr.bd.psu.edu/davej/contact03.html>. Consulté en juillet 2006.

Sackfield. A, Mugadu. A et Hills. D. A. (2002). *The influence of an edge radius on the local stress field at the edge of a complete fretting contact*. International Journal of solids and structure, v 39, n 17, p.4407-4420.

Shih. C. W, Schlein. W. S et Li. J. C. M. (1992). *Photoelastic and finite element analysis of different size spheres in contact*. Department of Mechanical Engineering, University of Rochester, Rochester, New York. V 7, n 4.

Université de Limoges. *Journée de découverte-Plans d'expériences*. En ligne.
http://unilim.fr/edsts/formations/Plans_experiences.pdf. Consulté en mars 2006

University of Alberta. *Contact elements*. En ligne.
<http://www.mech.ualberta.ca/tutorials/ansys/AT/Contact/Contact.html>. Consulté le 13 octobre 2006

Vial. J et Jardy. A. (1998). *Utilisation des plans d'expériences pour évaluer la robustesse d'une méthode d'analyse quantitative par chromatographie en phase liquide*. EDP Sciences, v26, n1, p. 15-24.

- Yoneyama. S, Gotoh. J et Takashi. M. (2000). *Experimental analysis of rolling contact stresses in a viscoelastic strip*. Mechanics of time-Dependent Materials, v40, n2.
- Yoneyama. S, Takashi. M et Gotoh. J. (1997). *Photoviscoelastic stress analysis near contact regions under complex loads*. Mechanics of time-Dependent Materials, v 1, n 1, p. 51-65.
- Zuber. J. (2005). Utilisation des plans d'expériences dans la recherche, le développement et la production, Statoos consulting, Lausanne