

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE - UNIVERSITÉ DU QUÉBEC  
EN COTUTELLE AVEC L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET DE SAINT-ETIENNE,  
FRANCE

THÈSE PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
DOCTORAT EN GÉNIE  
PhD.

PAR Thameur KIDAR

**DIAGNOSTIC DES DÉFAUTS DE FISSURES D'ENGRENAGES PAR  
L'ANALYSE CYCLOSTATIONNAIRE**

ROANNE, Le 14 Juin 2015



Thameur KIDAR, 2015



Cette licence Creative Commons signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

## PRÉSENTATION DU JURY

CE RAPPORT DE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉ PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Marc THOMAS, directeur de thèse, Professeur au département de génie mécanique à l'École de Technologie Supérieure

M. Mohamed EL BADAOURI, directeur de thèse, Professeur à l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne

M. Raynald GUILBAULT, codirecteur de thèse, Professeur au département de génie mécanique à l'École de Technologie Supérieure

M. François GUILLET, président, Professeur à l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne

M. Sassi SADOK, rapporteur, Maître de Conférences et HDR à l'université du Qatar

M. Philippe RAVIER, rapporteur, Maître de Conférences et HDR à l'Université d'Orléans

M. Zhaoheng LIU, examinateur, Professeur au département de génie mécanique à l'École de Technologie Supérieure

Mme. Adeline BOURDON, examinatrice, Maître de conférences à l'INSA de Lyon.

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 11 Mars 2015 À L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET DE SAINT-ÉTIENNE



# REMERCIEMENTS

J'exprime ma sincère reconnaissance à Mr. Philippe RAVIER, Maître de conférences et HDR à l'université d'Orléans (PRISME) ainsi qu'à Mr. Sadok SASSI, Maître de conférences et HDR à l'université de Qatar, pour avoir accepté de juger ce travail en qualité de rapporteurs au sein du jury.

Je remercie très vivement le professeur Zhaocheng LIU et la maître de conférences Adeline BOURDON pour le crédit qu'ils ont bien voulu accorder à mon travail en participant au jury de cette thèse.

Je remercie énormément mon directeur de thèse, Marc THOMAS, professeur titulaire au département de génie mécanique à l'ÉTS (Montréal, Canada), pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire de recherche DYNAMO. Je lui suis également reconnaissant pour sa disponibilité, son aide précieuse et ses qualités pédagogique et scientifiques. J'ai beaucoup appris à ces cotés et je lui adresse toute ma gratitude.

Je tiens à remercier mon co-directeur de thèse, Raynald GUILBAULT, professeur titulaire au département de génie mécanique à l'ÉTS (Montréal, Canada), qui m'a aidé, conseillé et fortement orienté pour que cette thèse puisse bien débuter et se terminer convenablement.

J'adresse mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, Mohammed EL BADAUI, professeur des universités à l'UJM (Saint-Étienne, France), pour m'avoir conseillé, encouragé et soutenu avec patience. Je salue ses qualités scientifiques et ses conseils judicieux apportés tout au long de cette thèse. Je remercie François GUILLET, directeur du laboratoire LASPI, pour m'avoir accueilli au sein de laboratoire LASPI et ses nombreux bons conseils.

Mes remerciements à Mr. Omar TOUHAMI, professeur au département de génie électrique à l'École Nationale Polytechnique d'Alger (ENP), pour son aide, ses conseils précieux et son soutien. Je le salue également pour sa coopération dans notre projet de recherche.

Je remercie infiniment Mr. Salah KHENNOUF, directeur du Centre Universitaire Roannais (CUR), pour m'avoir accueilli au sein de cet établissement, accordé l'atmosphère

convenable à la recherche et encouragé tout au long de mes deux dernières années de ma thèse. Un très grand merci aux plus gentilles des femmes qui se sont occupées de nous : Christelle, Karine, Claudie, Estelle, Coralie, Eleonor, Maryline, Michelle et Nezha.

Encore plus difficile de dire simplement merci puisque Serge, Michel, Olivier et Alain ont partagé avec moi des moments difficiles pour faire fonctionner mon banc d'essais et m'encourager dans mon travail de recherche. J'avais une chance immense d'avoir rencontré des collègues efficaces comme vous.

Je remercie mes amis et mes collègues de LASPI et de l'ETS, pour l'ambiance conviviale qu'ils ont contribué à entretenir, les bons moments passés en leur compagnie et leur sympathie. En particulier, je tiens à saluer Mourad Kedadouche, Mourad Lamraoui, Donald Rotimbo, Sofiane Maiz, Mohamed Telidjen, Zeineb Ben Houria, Afrae Errahout, Ikram Khatrouch, Firas Zakaria, Bechir Badri, Farid Mabrouki, Said Kharraja, Malek Masmoudi, Amine BRAHMI, Abdelahad Chraibi, Lucien, Claude Toulouse, Sylvain Tsangou, Darcy Boungou-Tsoumou et Wenchao Li.

Je remercie tous les membres du CUR, de l'IUT et de l'ETS pour leur soutien et les bons moments passés ensemble.

*À mes chers parents*

*À ma chère femme*

*À mes sœurs et mes frères*

*À mes nièces et mes neveux*

# RÉSUMÉ

La fissure d'engrenages peut être considérée comme un défaut des plus compliqués à diagnostiquer car sa signature vibratoire n'est pas vraiment connue. En plus, l'intégration des fissures dans les modèles numériques n'est pas une tâche simple. D'autre part, le diagnostic des engrenages peut être fait dans le domaine temporel à travers des descripteurs statistiques ou dans le domaine fréquentiel grâce à l'analyse spectrale ou l'analyse cepstrale. Lors de l'apparition d'un défaut de fissure, des phénomènes non linéaires et non-stationnaires se manifestent ce qui rend les outils classiques de traitement du signal moins fiables. Dans ce manuscrit, nous répondons à toutes ces problématiques en développant un modèle d'engrenages à 6 DDL qui porte une fissure qui respire. Le modèle nous permet d'étudier la signature de la fissure et son effet sur les vibrations résultantes indépendamment de l'effet des autres composantes du système. Les résultats ont montré que la fissure conduit à une chute de la rigidité d'engrenement. En plus, la respiration de la fissure cause une fatigue dans le matériau ce qui engendre un terme aléatoire dans le signal vibratoire. La combinaison du terme aléatoire avec la composante périodique due à la rotation des arbres conduit à l'apparition de la cyclostationnarité d'ordre 2. Une étude comparative de sensibilité et de robustesse entre la transformée de Fourier rapide, la cyclostationnarité d'ordre 2 et les estimateurs de la phase instantanée (la transformée de Hilbert, estimation of signal parameters via rrotational invariance techniques avec une fenêtre glissante, weighted least squares estimation et le scalogramme de phase) est effectuée pour la détection précoce des fissures. En plus, des essais expérimentaux ont été effectués sur un banc d'essais d'engrenages avec différentes dimensions de fissures. Les résultats théoriques et expérimentaux ont montré que l'analyse cyclostationnaire est la méthode la plus sensible et la plus robuste pour la détection précoce des fissures par rapport aux méthodes proposées. De plus, l'analyse de la phase instantanée donne également des résultats intéressants dans le cas des défauts de fissures. Nous avons montré que le scalogramme de phase est, à priori, plus performant que les autres approches.

**Mots clés :** Engrenages, fissure, analyse vibratoire, cyclostationnarité, analyse spectrale.

# ABSTRACT

The gear crack is considered as the most complicated failure to diagnose because its vibration signature is not really known. In addition, the integration of crack defect in numerical models is not a simple task. On the other hand, gears diagnosis can be done in the time domain through statistical descriptors or in the frequency domain using spectral analysis or cepstral analysis. During the appearance of a crack defect, nonlinear and non-stationary phenomena occur which makes the classical tools of signal processing unreliable. In this manuscript, we respond to these challenges by developing a gear model of 6 DOF that has a crack that breathes. This allows us to study the signature of the defect in the resulting vibrations with a flexible way away from external vibrations. The results showed that the crack leads to a fall in the mesh stiffness. In addition, the opening and closing of the crack causes a fatigue in the material which generates a random term in the vibration signal. The combination of the random term with periodic component due to the rotation of the shafts leading to the appearance of second-order cyclostationary. A comparative study of sensitivity and robustness between the fast Fourier transform, second-order cyclostationary and estimators of instantaneous phase (the Hilbert transform, Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques with a sliding window, Weighted Least Squares Estimation and phase scalogramme) is performed for the early detection of cracks. In addition, experimental tests were carried out on a test-bench with different sizes of crack. The theoretical and experimental results showed that the cyclostationary analysis is the most sensitive and most robust method for the early detection of cracks in comparison with the other evaluated methods. Furthermore, the analysis of the instantaneous phase also gives good results in the case of crack defects. We have shown that the phase scalogramme is a priori more efficient than other approaches.

**Keywords :** Gears, crack, vibration analysis, cyclostationnarity, spectral analysis.

# Table des matières

<b>1 ÉTAT DE L'ART</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction . . . . .	15
1.2 Modélisation du comportement dynamique des engrenages . . . . .	16
1.2.1 Notions . . . . .	17
1.2.1.1 Les sources de vibrations . . . . .	17
1.2.1.2 Les sources d'amortissement . . . . .	18
1.2.1.3 Les sources d'excitation . . . . .	18
1.2.1.4 Résonance et instabilité . . . . .	19
1.2.2 Les modèles numériques . . . . .	20
1.2.3 Les défauts usuels d'engrenages . . . . .	33
1.2.3.1 La corrosion . . . . .	33
1.2.3.2 La fatigue de contact . . . . .	33
1.2.3.3 Les fissures en fatigue . . . . .	34
1.3 Techniques de diagnostic des engrenages . . . . .	34
1.3.1 L'analyse temporelle . . . . .	35
1.3.2 L'analyse fréquentielle . . . . .	36
1.3.2.1 L'analyse d'enveloppe (HF Resonance Technique) . . . . .	36
1.3.2.2 L'analyse cepstrale . . . . .	37
1.3.2.3 Les méthodes à haute résolution . . . . .	38
1.3.3 L'analyse temps-fréquence . . . . .	38
1.3.3.1 Transformée de Fourier à court terme STFT . . . . .	38
1.3.3.2 Transformée de Wigner Ville (TWV) . . . . .	40
1.3.4 L'analyse temps-échelles . . . . .	41
1.4 Résumé . . . . .	42
1.5 L'objectif et l'originalité de la recherche . . . . .	43
1.6 L'organisation de la thèse . . . . .	43
<b>2 MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DES ENGRÈNAGES</b>	<b>44</b>
2.1 Introduction . . . . .	44
2.2 Méthode de calcul de la rigidité d'engrenement . . . . .	47
2.2.1 Calcul de la rigidité de contact hertzien . . . . .	47
2.2.2 Calcul des rigidités de fléchissement, de cisaillement et décompression axiale . . . . .	48

2.3	Rigidité d'engrènement pour une (deux) paire (s) de contact . . . . .	52
2.3.1	Calcul de la rigidité d'engrènement . . . . .	53
2.3.2	Durée d'un seul (deux) contact (s) de paires de dents . . . . .	56
2.3.3	Validation des équations . . . . .	57
2.4	Relation entre la rigidité d'engrènement et le déplacement angulaire . . . . .	59
2.5	Rigidité d'engrènement d'un pignon avec une dent fissurée . . . . .	59
2.6	Modélisation de la dynamique d'engrenages . . . . .	63
2.6.1	Réponse du système dans la direction $y$ . . . . .	67
2.7	Simulation de la dynamique des engrenages parfaits . . . . .	68
2.8	Simulation de la dynamique du pignon avec une dent fissurée . . . . .	69
2.9	Conclusion . . . . .	70
<b>3</b>	<b>MÉTHODES DE TRAITEMENT DU SIGNAL</b>	<b>72</b>
3.1	Introduction . . . . .	72
3.2	Analyse spectrale . . . . .	73
3.2.1	Application de la transformée de Fourier sur les signaux du modèle numérique . . . . .	74
3.3	Méthodes d'estimation de la phase instantanée . . . . .	75
3.3.1	Phase instantanée de la transformée de Hilbert . . . . .	76
3.3.2	Les méthodes à haute résolution . . . . .	78
3.3.3	La méthode ESPRIT . . . . .	79
3.3.3.1	Estimation des fréquences . . . . .	79
3.3.3.2	Estimation des amplitudes, des phases et des puissances .	80
3.3.4	La méthode WLSE . . . . .	81
3.3.4.1	Application numérique des méthodes à haute résolution .	83
3.3.4.2	Application de ESPRIT sur le modèle numérique d'engre- nages . . . . .	84
3.3.4.3	Application de WLSE sur le modèle numérique d'engrenages	86
3.3.5	scalogramme de phase . . . . .	89
3.3.6	Analyse des signaux du modèle d'engrenages avec le Scalogramme .	92
3.4	Cyclostationnarité . . . . .	93
3.4.1	Définitions et propriétés . . . . .	93
3.4.1.1	Processus aléatoire . . . . .	93
3.4.1.2	Cyclostationnarité du premier ordre . . . . .	94
3.4.1.3	Cyclostationnarité du deuxième ordre . . . . .	94
3.4.1.4	Outils fréquentiels de deuxième ordre . . . . .	95
3.4.2	La cyclostationnarité dans les signaux d'un pignon fissuré . . . . .	97
3.5	Conclusion . . . . .	100

<b>4 ÉTUDE COMPARATIVE DES MÉTHODES DE TRAITEMENT DU SIGNAL PROPOSÉES</b>	<b>102</b>
4.1 Introduction . . . . .	102
4.2 Rapport signal/bruit . . . . .	103
4.3 Comparaison entre les différentes méthodes . . . . .	103
4.3.1 La transformée de Hilbert . . . . .	104
4.3.2 WLSE . . . . .	104
4.3.3 ESPRIT . . . . .	105
4.3.4 Scalogramme de phase . . . . .	106
4.3.5 Cyclostationnarité d'ordre 2 . . . . .	108
4.4 Conclusion . . . . .	108
<b>5 VALIDATION EXPÉRIMENTALE SUR BANC D'ESSAIS</b>	<b>110</b>
5.1 Introduction . . . . .	110
5.2 Banc d'essai Spectra-Quest . . . . .	111
5.2.1 Choix des roues du banc Spectra-Quest . . . . .	112
5.2.2 Analyse modale . . . . .	112
5.2.3 Dimensions des fissures . . . . .	114
5.2.4 Plan d'expériences . . . . .	115
5.3 L'analyse cyclostationnaire des signaux de Spectra-Quest . . . . .	115
5.3.1 De la corrélation à l'analyse d'enveloppe . . . . .	116
5.3.2 Analyse des signaux réels . . . . .	117
5.4 Détection de fissure par le scalogramme . . . . .	120
5.5 Conclusion . . . . .	122
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>123</b>
<b>RECOMMANDATIONS</b>	<b>126</b>
<b>ANNEXE</b>	<b>137</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les réducteurs mécaniques sont fréquemment utilisés dans l'industrie. Ils permettent le fonctionnement des machines tournantes et se retrouvent dans presque tous les domaines (robotiques, moteurs d'avions, engins, éoliennes, montres, ...). Leur fonctionnement engendre des vibrations qui perturbent le comportement des machines (chocs, arrêt du système...) et accélèrent la défaillance de quelques composants mécaniques (dents d'engrenages). Pour cela, plusieurs paramètres de conception doivent être pris en considération pour assurer la transmission de la puissance de façon correcte, d'avoir une bonne résistance à la fatigue et de diminuer la probabilité d'usure.

L'importance des engrenages et leur vaste utilisation dans la vie quotidienne et le fonctionnement industriel ont montré leur sensibilité aux conditions de fonctionnement et la complexité de leur diagnostic. Pour cela, nous citons trois problématiques majeures à propos de ce mécanisme :

## **- Problématique industrielle :**

La maintenance des engrenages doit être analysée lors de leur conception et de leur exploitation, tant pour des questions de sécurité et de sûreté de fonctionnement, que pour des questions de rentabilité. Par exemple, un arrêt de production pour changer des réducteurs sur la chaîne de montage de véhicules peut coûter jusqu'à cent cinquante mille euros par jour [1].

Les mécaniciens souhaitent pouvoir continuer à faire fonctionner correctement l'engrenage affecté d'une ou de plusieurs pannes non critiques, jusqu'à ce que la maintenance ou son remplacement puisse être effectué. Ceci génère des gains de productivité ainsi qu'une sécurité accrue. Pour assurer cela, il faut trouver un outil de surveillance très robuste et très sensible à la présence d'un défaut précoce.

## **- Problématique dans la modélisation :**

Lors de la présence d'un défaut dans les engrenages ou l'endommagement d'une dent, leur comportement vibratoire se modifie [2]. Plusieurs travaux ont été effectués sur la modélisation numérique du comportement vibratoire des engrenages [2–4] sans et avec défauts. La précision de ces modèles varie en fonction du nombre de degrés de liberté. Plus nous augmentons le nombre de degrés de liberté, plus le coût de calcul devient lourd [5] ce qui nous pousse à chercher le nombre de degrés de liberté minimal qui pourra servir à étudier un défaut de fissure avec un coût de calcul faible. Une fissure d'engrenages est

souvent considérée comme un défaut compliqué à diagnostiquer car sa signature vibratoire est moins énergétique qu'un défaut d'écaillage par exemple. Alors, nous devrons chercher le moyen d'intégrer les équations de la fissure dans le développement numérique du modèle qui simule la dynamique des engrenages. Cela nous permettra d'étudier la signature du défaut de fissure dans les vibrations résultantes de manière simple et loin des effets extérieurs (bruit, autres vibrations...). Il restera à étudier également l'effet de la sévérité du défaut, la charge appliquée et la température de fonctionnement sur la signature du défaut. D'autre part, la modélisation numérique permet d'étudier l'influence de la fissure sur la rigidité d'engrènement, ce qui nous aidera à répondre à des questions à propos de la non-linéarité et la non-stationnarité des signaux vibratoires d'engrenages.

### **- Problématique dans les outils de diagnostic :**

La surveillance des machines s'effectue en trois phases : la détection, le diagnostic et finalement la prédiction de la durée de vie résiduelle de la pièce dégradée. Le traitement de signaux vibratoires (les grandeurs mécaniques telles que la vitesse et l'accélération) nous donne une image sur les efforts internes du système étudié [6]. Cette analyse permet de détecter et classifier les défauts et suivre leur évolution temporellement afin d'estimer un seuil de défaillance pour mieux le prévenir. Pour bien éviter la dégradation de la machine et l'arrêt du système de production, l'analyse vibratoire serait indispensable pour la maintenance moderne et afin de réduire aussi les coûts liés aux pannes précoces [6, 7]. Parmi les défauts usuels détectés par cette technique, nous trouvons le balourd, l'excentricité, l'alignement des arbres, ... etc [7]. Par contre, si nous désirons diagnostiquer les défauts d'engrenages, l'opération devient un peu plus compliquée à cause de leur conception et du milieu bruité [5]. Pour cela, les recherches actuelles se concentrent sur le développement des outils de diagnostic un peu plus fiables, sachant que le diagnostic peut être fait dans le domaine temporel (Empirical Mode Decomposition, Local Mean Decomposition, descripteurs scalaires...) ou dans le domaine fréquentiel (Densité spectrale, démodulation en amplitude, Cepstre...). Lors de l'apparition d'un défaut (fissure, usure ...), des phénomènes non linéaires et non-stationnaires se manifestent ce qui rend l'analyse spectrale classique peu fiable [8, 9]. Cette dernière nous oblige de faire un appel à d'autres techniques de traitement du signal. En fait, la rotation des machines transforme leurs propriétés statistiques non-stationnaires à des propriétés cyclostationnaires. À travers cette étude, nous essayons d'exploiter cette théorie afin d'étudier son efficacité et sa robustesse pour le diagnostic des fissures d'engrenages. Cette méthode sera comparée avec d'autres outils de traitement du signal.

La composition et la répartition des chapitres de ce travail de thèse sont données à la fin de l'état de l'art du premier chapitre.

# Chapitre 1

## ÉTAT DE L'ART

### Sommaire

---

1.1	Introduction	15
1.2	Modélisation du comportement dynamique des engrenages	16
1.2.1	Notions	17
1.2.2	Les modèles numériques	20
1.2.3	Les défauts usuels d'engrenages	33
1.3	Techniques de diagnostic des engrenages	34
1.3.1	L'analyse temporelle	35
1.3.2	L'analyse fréquentielle	36
1.3.3	L'analyse temps-fréquence	38
1.3.4	L'analyse temps-échelles	41
1.4	Résumé	42
1.5	L'objectif et l'originalité de la recherche	43
1.6	L'organisation de la thèse	43

---

### 1.1 Introduction

La présence d'une défaillance de denture à un stade précoce, dans les engrenages, n'implique pas son remplacement immédiat tant qu'ils peuvent encore tourner sans endommager d'autres équipements. Cette décision est prise par des experts. Pour cela, les mécaniciens souhaiteraient utiliser des techniques de surveillance efficaces et conviviales afin de suivre l'état des engrenages tout le long du processus de surveillance.

Dans l'industrie, il existe plusieurs techniques qui sont appliquées pour la maintenance des machines tournantes. Parmi ces techniques, nous trouvons la surveillance des machines par l'analyse vibratoire. Les méthodes développées dans ce domaine fonctionnent parfaitement pour détecter des défauts usuels (balourd, désalignement, etc.). Par contre, lorsque nous voulons analyser des défauts d'engrenages qui sont considérés parmi les composants mécaniques les plus sensibles, le diagnostic se complique surtout lorsque nous travaillons dans un milieu bruité.

Le diagnostic peut être mené dans le temps à l'aide des descripteurs scalaires (kurtosis, facteur de crête, RMS, ...) ou en fréquence (la densité spectrale, l'analyse d'enveloppe, ...). Mais très souvent, les signaux vibratoires sont bruités et leurs fréquences significatives sont trop proches les unes des autres. Ils sont difficiles à déchiffrer à moins d'utiliser des techniques à haute résolution (MUSIC, root-MUSIC, ESPRIT, ...) et des techniques de débruitage (soustraction spectrale, ...). De plus, lors de l'apparition d'un défaut (écaillage, fissure, ...), nous remarquons souvent des phénomènes non-linéaires et non-stationnaires pour lesquels une analyse spectrale ordinaire n'est pas adaptée.

Dans la littérature, nous trouvons un nombre important d'articles liés à l'étude du comportement mécanique des engrenages. Afin d'améliorer le niveau de bruit et la durée de vie des dents d'engrenages, plusieurs recherches scientifiques ont été faites sur des techniques numériques permettant la description de la dynamique des engrenages sous différentes conditions et plusieurs facteurs (sec, lubrifié, sain, endommagé) [6]. Souvent, les chercheurs proposent des études théoriques puis ils ajustent et valident leurs modèles numériques par des expériences sur des trains d'engrenages [10].

La grande source de vibrations dans les engrenages est due à l'engrenement qui s'effectue de manière périodique. D'autre part, nous pouvons citer d'autres effets qui s'ajoutent : la flexion des dents qui modifie la ligne d'action, le mauvais montage (désalignement, déséquilibrage, serrage, ...) et il y a aussi les défauts de fabrication (erreur de profil, pas diamétral non constant, rugosité de surfaces, ...). N'importe quelle variation minime de ces facteurs influe de façon énorme sur le comportement dynamique des engrenages [7].

Les points les plus importants à éclairer dans cette partie sont les divers paramètres qui influencent les vibrations et les défauts qui touchent souvent les engrenages. Il sera donc intéressant de montrer l'effet de chaque paramètre sur le comportement dynamique des engrenages. Ensuite, tant que la plupart des chercheurs s'intéressent aux modèles numériques de ce type de mécanismes, il sera nécessaire de citer les différentes études effectuées en fonction des degrés de liberté ainsi que les méthodes de résolution. Puis, nous discutons des différentes approches de traitement du signal qui ont été déjà utilisées pour le diagnostic des défauts d'engrenages. Finalement, nous clarifions les objectifs de notre étude.

## 1.2 Modélisation du comportement dynamique des engrenages

Les engrenages sont l'un des systèmes élémentaires de transmission du mouvement qui peut se définir par une force, une vitesse et un sens de rotation, ou de translation (cas de la crémaillère). Les systèmes d'engrenage permettent de surmultiplier (augmenter) ou démultiplier (réduire) une force ou une vitesse. Les caractéristiques géométriques particulières des dents affectent la dynamique et les vibrations du système d'engrenages. Par conséquent, la recherche dans le domaine de la dynamique d'engrenages a été intensive. De nombreuses études portent sur l'analyse des vibrations de la torsion ou la torsion

latérale en développant des modèles numériques de la dynamique des engrenages. Ces modèles nous apportent une bonne compréhension sur les conditions de fonctionnement de ces mécanismes et d'établir une base pour le diagnostic de leurs défauts.

Avant de présenter les différents travaux effectués sur la modélisation numérique des engrenages, nous devons, d'abord, aborder quelques notions de base sur les phénomènes vibratoires.

## 1.2.1 Notions

### 1.2.1.1 Les sources de vibrations

Même si l'engrenage est en bon état et de bonne qualité, les vibrations sont toujours présentes. Lors de l'engrènement, le nombre de dents en contact varie, ce qui conduit au changement de la rigidité et par conséquent de la dynamique du train d'engrenage. En effet, il n'y a pas que le rapport de conduite qui cause les vibrations [5], car d'autres erreurs peuvent aussi perturber la dynamique des engrenages telle que l'Erreur de Transmission Dynamique (ETD). L'ETD est définie comme l'écart entre la position réelle occupée par la roue d'engrenage et celle théorique qu'elle devrait prendre, si l'engrenage était géométriquement parfait et infiniment rigide [11, 12]. Cette erreur s'exprime souvent soit par un écart de position angulaire de la roue par rapport au pignon, soit par un petit déplacement exprimé en micromètre le long de la ligne d'action. À titre d'exemple, elle est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres pour des engrenages d'une boîte de vitesse d'un véhicule léger. Nous distinguons durant le régime de fonctionnement trois erreurs de transmissions :

1. L'erreur de transmission statique hors charge.
2. L'erreur de transmission statique sous charge.
3. L'erreur de transmission dynamique.

Le premier type de transmission, qui s'appelle aussi erreur cinématique, prend en considération les défauts de géométrie des dentures dus aux défauts de profil, de pas, d'excentricité, d'assemblage et de parallélisme. Cette erreur est donc d'origine purement géométrique. Elle est remarquable en régime quasi-statique (vitesses très faibles), lorsque le couple statique appliqué est quasi-nul de sorte que les dents restent en contact sans déformation [13].

L'erreur statique de transmission sous charge est due à l'erreur précédente et, en plus, elle prend en compte les déformations de denture, ainsi que les déformations de l'ensemble de la transmission (arbres, paliers, roulements,...). Cette erreur modifie la situation des roues en prise.

Concernant l'erreur dynamique de transmission, elle prend en compte les phénomènes dynamiques qui ne sont pas négligeables surtout lorsque la vitesse de rotation est très élevée (exemple : phénomène de résonance linéaire ou non-linéaire). L'erreur dynamique de transmission constitue la réponse dynamique de la transmission à l'excitation induite par l'erreur statique de transmission, en l'absence de sources d'excitations externes. Elle

donne lieu à des surcharges dynamiques sur les dentures, et donc sur l'ensemble de la cinématique via l'arbre et les paliers [13].

### 1.2.1.2 Les sources d'amortissement

Les sources d'amortissement sont différentes et difficiles à prendre en compte. D'autre part, les propriétés de l'amortissement sont mal connues. A titre d'exemple et de façon non exhaustive, nous pouvons citer :

- l'amortissement visqueux induit par la lubrification, correspondant à une perte d'énergie par l'écoulement laminaire d'un fluide dans un amortisseur, et qui donne lieu à une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse.
- l'amortissement hystérotique structurel, présent dans toute structure mécanique, et qui correspond à une dissipation d'énergie par frottement interne entre les matériaux.
- l'amortissement de Coulomb, lié à une dissipation d'énergie par frottement sec entre deux surfaces, et qui donne lieu à une force de dissipation non-linéaire.
- la dissipation d'énergie au niveau des contacts hertziens entre les dentures et dans les roulements (phénomène de fluid-pumping).
- la dissipation d'énergie liée au rayonnement acoustique.

Les données, en termes de taux d'amortissement visqueux équivalent trouvées dans la littérature, varient de 0,5% [14] à 17% [15], ce qui traduit la difficulté à quantifier de manière rigoureuse et précise cet amortissement.

### 1.2.1.3 Les sources d'excitation

Nous distinguons, dans la littérature, de multiples sources d'excitation vibratoire d'une transmission d'engrenages [11–13]. En effet, il y a deux types de sources : sources internes associées au fonctionnement de la transmission et sources externes.

#### Les sources d'excitation interne

Ce type de sources peut être engendré par des interactions de type fluide-solide ou bien des interactions de type solide-solide :

- l'excitation du carter par la projection et l'écoulement de lubrifiant.
- l'excitation du carter par des émissions acoustiques internes où nous trouvons, les deux contributions majeures sont associées au phénomène de fluid-pumping désignant le processus cyclique d'aspiration et de refoulement d'air entre la tête et le pied des dents [13]. Il y aussi le rayonnement des corps d'engrenages qui vibrent sous l'effet des surcharges dynamiques s'exerçant sur les dents.
- des fluctuations des forces normales de contact au niveau des dentures qui résultent de l'erreur statique de transmission, et qui sont transmises aux paliers ou roulements et finalement au carter.
- des fluctuations des forces de contact au niveau des roulements engendrées par leurs défauts propres.

- des fluctuations des forces de frottement au niveau des dentures.
- des forces de contact engendrées par des chocs associées à la présence du jeu fonctionnel dont les pignons fous, par exemple, sont le siège sous certaines conditions.

### Les sources d'excitation externe

Les principales sources d'excitation externe sont engendrées par les fluctuations du couple moteur, les fluctuations du couple de charge, les variations de l'inertie de charge, et enfin par les vibrations transmises via les points de fixation sur la structure externe.

Toutes ces sources d'excitation mentionnées auparavant n'ont pas autant d'importance : à titre d'exemple, en régime de lubrification élastodynamique, les composantes des forces tangentielles sont très faibles devant les composantes des forces normales et les effets excitateurs des frottements sont limités par la présence du lubrifiant [16].

Aussi, il est bien connu que la source d'excitation vibratoire interne dominante est constituée par l'erreur statique de transmission sous charge [12, 13].

#### 1.2.1.4 Résonance et instabilité

Les chercheurs en génie mécanique considèrent la transmission dans les engrenages comme le siège du phénomène de résonance et d'instabilités paramétriques qui se traduisent par une augmentation des amplitudes vibratoires. La résonance est liée à la réponse forcée de la transmission du système [4]. Par contre, l'instabilité paramétrique est associée à la réponse libre. Nous pouvons citer quelques caractéristiques de ces deux phénomènes comme suit :

- Lorsque la pulsation d'engrènement  $\omega_e$  est égale à  $\frac{\Omega_i + \Omega_j}{n}$ , nous remarquons le comportement de l'instabilité paramétrique.  $\Omega_{i,j}$  représentent les pulsations propres des deux modes  $i$  et  $j$  de la transmission et " $n$ " est un nombre entier. Ils ont découvert que le mouvement instable d'un système est limité physiquement par un cycle de pertes de contact suivi de chocs en reprise, qui peuvent être dangereux pour le mécanisme et qui conduisent à la naissance des nuisances sonores.
- Lorsque la pulsation d'engrènement  $\omega_e$  est égale à  $\frac{\Omega_i \pm \omega}{n}$ , les résonances paramétriques apparaissent. " $n$ " est un entier et  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation liée à l'excitation extérieure. Quand l'erreur de transmission est nulle et que seule subsiste un couple moyen statique ( $\omega = 0$ ), la résonance paramétrique se produit lors de la coïncidence entre la fréquence d'engrènement ou l'un de ses harmoniques et la fréquence propre de la transmission.

La figure (1.1) montre un cas d'une résonance engendrée par un modèle d'engrenages simulé numériquement [2]. Nous remarquons l'augmentation brusque du RMS de l'ETD autour de la fréquence d'engrènement 2500 Hz. Celui-ci nous donne une idée sur la plage de résonance de la cinématique du réducteur [2].

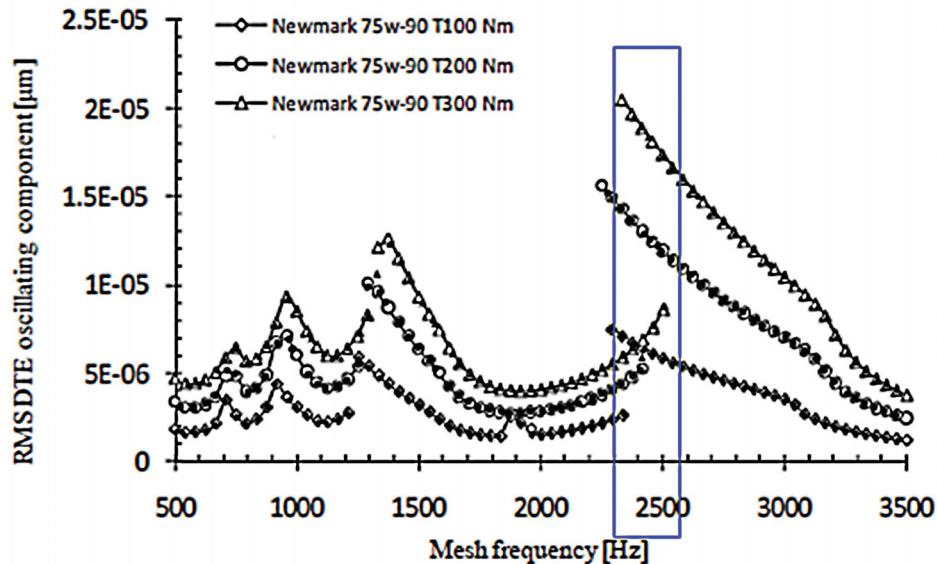


FIGURE 1.1 – Phénomène de résonance [2].

### 1.2.2 Les modèles numériques

La modélisation de la dynamique vibratoire des engrenages peut nous fournir non seulement les vibrations générées par les mécanismes de transmission, mais aussi les propriétés de la dynamique de plusieurs types de défauts. Avec un tel modèle, nous pouvons trouver le comportement vibratoire des sources de vibrations dans le système de transmission sous des conditions normales ou défectueuses.

Il existe trois principaux types de modélisation mathématique utilisés pour la dynamique des engrenages (la dynamique des engrenages est une branche de la mécanique qui étudie l'influence des forces sur le mouvement de ce système) [17].

#### - Modèles de facteur dynamique simple

Ces modèles sont principalement utilisés pour déterminer les facteurs dynamiques et concevoir les engrenages. Le facteur dynamique est utilisé dans les formules de l'effort de racines des dents d'engrenages. Le facteur dynamique,  $DF$ , est défini par [18] :

$$DF = \frac{SL}{DL} \quad (1.1)$$

où  $SL$  est la charge statique (une charge à l'état stable) et  $DL$ , la charge dynamique (la force imposée en mouvement qui peut changer en grandeur et en direction). AGMA (The American Gear Manufacturing Association) [19] donne l'expression empirique de  $DF$  comme suit :

$$DF = \left( \frac{78}{78 + V^{0.5}} \right)^{0.5} \quad (1.2)$$

avec  $V$ , la vitesse de la ligne primitive en pied par minute  $ppm$  (la ligne primitive est une ligne idéale dans un engrenage qui a une vitesse commune avec une ligne correspondante dans l'engrenage accouplé [20]). Ces modèles ont été construits uniquement pour

la conception des engrenages, à partir de laquelle très peu d'informations sur le statut de fonctionnement peuvent être obtenues.

### - Modèles avec la conformité de la dent

Dans ces modèles, seule la conformité de la dent est prise en considération. La flexibilité de tous les autres éléments tels que les arbres, les paliers,... etc. est négligée. Le système est souvent modelé par un système masse-ressort à un seul degré de liberté (SDDL).

Harris [21] a considéré trois sources internes de vibration : erreur dans le rapport de vitesse due à l'erreur d'usinage, la variation de rigidité de la dent et la non-linéarité de sa rigidité. Il semble avoir été le premier à observer plus d'une paire de dents en engrènement. Avec l'aide de la technique photo-élastique, les charges dans toutes les dents engagées ont été mesurées. Il a souligné que l'amortissement joue un rôle très important dans l'accumulation de vibrations. En théorie analytique, la valeur limite du taux d'amortissement critique est de 0,07 [21]. Pour le cas d'un amortissement élevé, le mouvement est un peu comme ce que l'on peut attendre d'un système linéaire. Quand le taux d'amortissement est plus que 0,07, la non-linéarité peut être négligée. Le comportement des roues à denture droite dans les basses vitesses (la roue droite est une roue dentée avec des dents disposées radialement sur la jante parallèlement à son axe) peut être représenté dans une série de courbes d'erreurs de transmission statique (l'erreur de transmission est la différence entre la position réelle de la roue en engrènement et la position qu'elle devait occuper si l'engrenage était parfait). Cependant, dans les expériences, la valeur limite est d'environ 0,1. Gregory et al. [22,23] ont confirmé les résultats théoriques de Harris par des observations expérimentales et des résultats de calcul basés sur un système masse-ressort SDDL. Ils ont considéré des variations sinusoïdales pour la rigidité et ils ont résolu les équations du mouvement, analytiquement pour un amortissement nul et numériquement pour un amortissement non-nul. Ils ont trouvé que la charge dynamique maximale ne dépasse jamais deux fois la charge de conception (la charge de conception est la charge sous laquelle une erreur de transmission constante est donnée) pour toutes les charges appliquées de zéro charge à 1,25 fois la charge de conception.

Ishida et Matsuda [24,25] se sont concentrés sur la friction de glissement entre les dents engagées et ont étudié l'effet de la variation de la force de frottement sur la vibration, pour une rigidité d'engrènement constante. En se basant sur un modèle SDDL d'une impulsion du cercle primitif (le cercle primitif est le centrode de la roue engrenée avec le couteau de rack [20]), ils ont donné les équations du mouvement du système. La méthode de plan de phase, une méthode graphique pour résoudre des systèmes d'équations différentielles afin d'analyser le comportement du système dans le temps, a été utilisée pour la solution. Ils ont fait remarquer que l'impulsion du cercle primitif résulte de la variation de la force de frottement des dents engrenées et est proportionnelle au produit de la vitesse angulaire et de la racine carrée de la charge. Selon leur étude, la rugosité de surface de la dent d'engrenage a peu d'influence sur l'impulsion du cercle primitif.

Lewicki [26] a utilisé un modèle SDDL pour prédire la durée de vie des engrenages. L'analyse du contact hertzien a été appliquée pour le calcul de la rigidité d'engrènement. Pour une seule paire de dents en engrènement, ils ont modélisé la rigidité d'engrènement de deux dents engagées comme la rigidité de deux ressorts en série. La rigidité équivalente correspondante a été considérée comme une constante  $K$ , durant la durée de contact d'une seule paire de dents. Concernant une double paire de dents engagées, la rigidité totale équivalente a été exprimée comme la sommation de deux paires de dents en engrènement, où chacune a été considérée comme le cas d'une seule paire de dents engagées. La rigidité totale équivalente correspondante est une constante  $2K$ , durant la durée de contact d'une double paire de dents.

### - Modèles pour la dynamique des systèmes d'engrenages

La flexibilité des autres éléments telles que la flexibilité de torsion des arbres et la flexibilité latérale des roulements et des arbres le long de la ligne d'action sont incluses dans ces modèles. Le problème de couplage de vibrations entre les différents éléments doit être pris en compte si la rigidité de ces éléments est relativement proche de la rigidité effective d'engrènement.

Fukuma et al. [27] ont étudié les vibrations tri-directionnelles en considérant la flexibilité des arbres et des roulements. Ils ont donné un modèle global MDDL (multiple degré de liberté) en incluant à la fois des vibrations latérales et torsionnelles avec une rigidité variable dans le temps. Dans cette étude, le processus de Runge-Kutta-Merson a été utilisé pour la solution numérique des équations différentielles (cette méthode est la version modifiée de Runge-Kutta par Merson. Le pas d'intégration  $h$  est automatiquement ajusté pour maintenir l'erreur relative estimée, à chaque fois inférieure à une valeur spécifiée  $\epsilon$ . [28]). Dans leur étude expérimentale, quatre accéléromètres de type piézo-électriques ont été utilisés pour mesurer les vibrations radiales, axiales et circonférentielles. Ils ont souligné que les vibrations tri-directionnelles des engrenages droits sont mutuellement couplées et les coefficients couplés sont déterminés par la raideur d'engrènement des dents engagées.

Dans [29], Tordion et Gauvin ont utilisé un modèle torsionnel à 3-DDL pour analyser la stabilité d'un système d'engrenages à deux étages avec le même pas diamétral (le rapport du nombre des dents de la roue au diamètre du cercle primitif [20]) en supposant que l'arbre intermédiaire est rigide, avec une roue à chaque extrémité. Dans leur étude, la rigidité d'engrènement a été considérée comme un signal carré périodique en fonction du temps. Les amplitudes de cette rigidité sont considérées constantes durant la durée d'engrènement d'une seule ou double paire de dents d'engrenages ( $2.5 \times 10^8$  N/m). Ils ont montré que la plage de fréquences d'instabilité est grandement affectée par l'angle de phase entre les deux raideurs d'engrènement.

Sakai et al. [30] ont proposé un modèle torsionnel à 5-DDL pour analyser les vibrations d'un train d'engrenages d'automobile avec cinq vitesses de transmission. Ils ont considéré la non-linéarité du jeu fonctionnel, à la fois, des dents d'engrenages et les cannelures

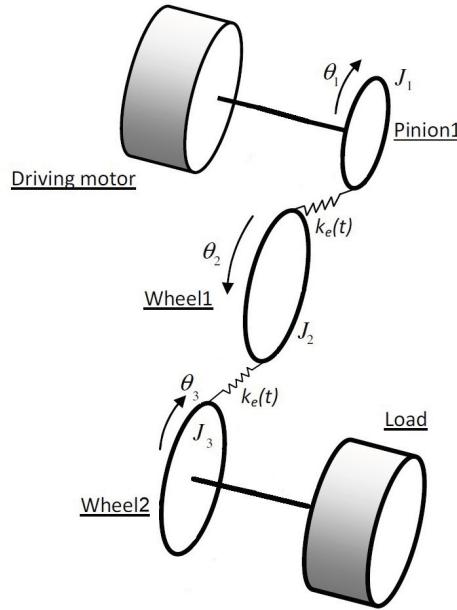


FIGURE 1.2 – Modèle d’engrenages à 3 DDL [29].

du moyeu du disque d’embrayage. Ils ont constaté que le niveau de vibrations peut être affecté par la modification d’embrayage. Il existait une plage optimale de rigidité à la torsion d’embrayage afin de minimiser le niveau de vibrations, qui a été vérifiée par des études expérimentales.

Kumar et al. [31] ont développé une nouvelle approche d’espace d’état pour résoudre le modèle torsionnel d’engrenages à un seul étage. Dans leur étude, la rigidité d’engrenement a été exprimée comme une série de puissance de cinq termes. L’amortissement entre les dents engagées a été décrit en termes de taux d’amortissement critique. Ils ont mentionné que cette méthode doit considérablement réduire le temps de calcul pour l’obtention d’une solution dans le domaine temporel du modèle étudié en sélectionnant correctement les valeurs initiales. Grâce à ce modèle, ils ont étudié les effets de variation de la vitesse de fonctionnement, la position de contact, l’amortissement et la rigidité sur la charge dynamique. Ainsi, il a été trouvé que l’amortissement dans les engrenages a une grande influence sur la stabilité du système.

Lida et al. [32] ont utilisé un modèle masse-ressort SDDL afin d’étudier l’effet de frottement entre les dents en considérant la flexibilité des arbres. Pour une raison de simplification, seule la vibration dans la direction de glissement de la dent a été considérée. Les vibrations dans les autres directions ont été négligées. Ils ont montré que sous des conditions de lubrification mixte et aux limites, le pic d’amplitude de la réponse vibratoire provoquée par la force de frottement entre les dents engagées n’a aucun rapport avec la force transmise et la viscosité de l’huile. Pour la vibration forcée, la puissance d’excitation devrait être déterminée sur l’effet d’amortissement de la force de frottement.

Le couplage des modèles de torsion et des mouvements latéraux a été développé pour diverses propriétés des signaux de vibrations d’engrenages. Bartelmus [33] a développé des modèles d’engrenages à un seul étage en considérant seulement les vibrations torsion-

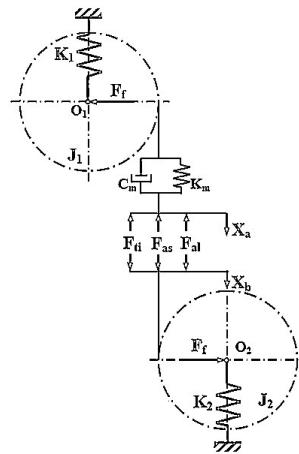


FIGURE 1.3 – Modèle d’engrenages SDDL [32].

nelles et, à la fois, les vibrations torsionnelles et latérales. Dans ses études, quatre facteurs de base dans un système d’engrenages ont été étudiés (conception, production technologique, fonctionnement et changement de conditions). Pour un système à un seul étage, un modèle masse-ressort-amortisseur à 8-DDL a été proposé, et qui comporte les vibrations horizontales, verticales et torsionnelles. Deux constantes de rigidité d’engrènement ( $1.24 \times 10^9$  et  $1.3 \times 10^9$  N/m) ont été utilisées pour des durées de contact concernant une seule et double paire de dents engagées, respectivement. La méthode de Runge-Kutta a été appliquée sur l’ensemble des équations différentielles afin d’obtenir les solutions numériques. Il a été montré que l’augmentation de l’intensité de l’éraflure de la dent se traduit par l’augmentation des forces de frottement entre les dents engagées. En plus, un modèle torsionnel de 6-DDL pour un système de deux étages a été également présenté pour étudier l’influence de vibrations entre ces deux étages.

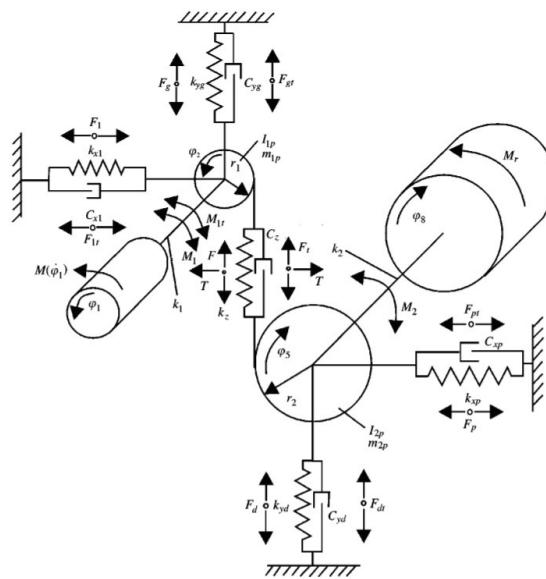


FIGURE 1.4 – Modèle d’engrenages à 8 DDL [33].

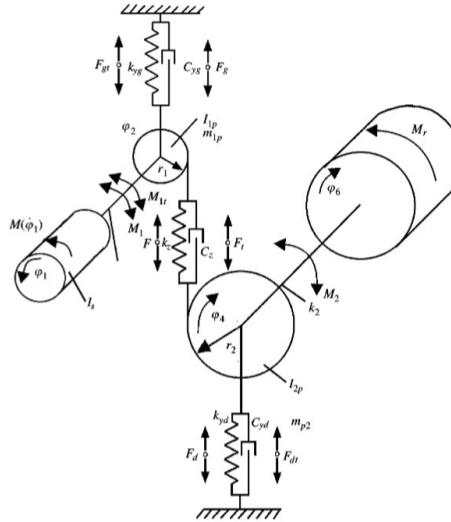


FIGURE 1.5 – Modèle d'engrenages à 6 DDL [33].

Yan et Lin [34] ont proposé un modèle rotationnel masse - ressort - amortisseur en considérant le fléchissement, la compression axiale et le frottement du Coulomb des dents. Une méthode d'énergie potentielle a été utilisée pour obtenir les forces élastiques. Il existe trois types d'énergie (énergie hertzienne, énergie de fléchissement et énergie de compression axiale) qui composent l'énergie totale emmagasinée dans un système d'engrenages. Parmi ces énergies potentielles, l'énergie de fléchissement qui est beaucoup plus élevée par rapport à l'énergie hertzienne (environ 4 à 11 fois plus supérieure). Par contre, l'énergie de compression, est trop faible par rapport aux autres énergies (seulement environ 2 à 3 % de l'énergie de fléchissement). Par ce modèle, ils ont étudié les réponses du système sous un couple d'excitation nul (vibration libre), un couple d'entrée constant et un couple d'entrée sinusoïdal, respectivement. La méthode de Runge-Kutta a été appliquée pour résoudre numériquement les équations de la dynamique. En plus, les méthodes de calcul ont également été données pour deux catégories de dissipation d'énergies causées par l'effet d'amortissement hertzien et l'effet de frottement des dents engagées, respectivement. Selon leur étude, la perte d'énergie due à l'effet d'amortissement hertzien est généralement plus grande que celle de l'effet de friction.

Kahraman et Singh [35] ont examiné les caractéristiques de la réponse fréquentielle d'un modèle d'engrenages non-linéaire à 3-DDL avec une rigidité d'engrènement variante dans le temps. Dans ce modèle, ils ont inclus des fluctuations dans le couple d'entrée et ont gardé le couple de sortie constant. Une simple variation sinusoïdale de la rigidité d'engrènement a été supposée au début ( $1.3 \times 10^8$  N/m). Ils ont supposé aussi que l'amortissement d'engrènement est une fonction sinusoïdale proportionnelle à la rigidité d'engrènement ( $\zeta = 0.05$ ). La méthode de Runge-Kutta d'ordres 5 et 6 a été utilisée afin d'obtenir les solutions numériques de la dynamique du système. Ils ont étudié la relation entre la variation de la rigidité d'engrènement dans le temps et le découplage de la non-linéarité. Ils ont trouvé une forte interaction entre la variation de la rigidité d'engrènement et le jeu fonctionnel et faible interaction entre la rigidité d'engrènement et

les non-linéarités des roulements. Un montage expérimental, comprenant des arbres très rigides et des roulements, a été utilisé pour vérifier les résultats d'analyse théorique.

Theodossiades et Natsiavas [36] ont développé un modèle torsionnel à 2-DDL pour étudier la dynamique des engrenages en considérant le jeu fonctionnel et la variation de la rigidité d'engrènement dans le temps. Une formule de séries de Fourier a été utilisée pour décrire la rigidité d'engrènement. Pour une petite bande fréquentielle spécifique, par exemple, la fréquence d'engrènement ou ses harmoniques, et pour de petites variations de rigidité, des solutions périodiques approximatives ont été obtenues en utilisant des méthodes analytiques approximatives. Des méthodes numériques ont été appliquées afin de vérifier les résultats analytiques. En plus, l'effet de variation de la rigidité d'engrènement sur la périodicité des réponses a été aussi étudié. Des variations relativement importantes de la rigidité d'engrènement renforcent l'influence sur la réponse. À propos du paramètre d'amortissement, ils ont constaté que plus l'amortissement est important, plus l'amplitude de la réponse est faible.

Amabili et Rivola [37] ont utilisé un modèle torsionnel SDDL pour étudier la réponse d'une paire de roues à l'état stable avec un faible rapport de contact (entre 1 et 2). Ils ont considéré que la rigidité varie avec le temps et que la viscosité de l'amortissement est proportionnelle à la rigidité d'engrènement. Dans l'analyse théorique, la rigidité d'engrènement a été exprimée comme une série de Fourier complexe. Pour des raisons de simplification, ils ont considéré seulement les deux premiers termes de l'expansion de Fourier. Une solution de forme fermée a été obtenue à toutes les vitesses de rotation sans la séparation des dents. Dans la simulation numérique, ils ont utilisé la fonction de rigidité d'engrènement proposée par Cai et Hayashi [38], qui peut être calculée comme suit :

$$k(t) = \frac{\left[ \frac{-1.8}{(\epsilon T)^2} t^2 + \frac{1.8}{\epsilon T} + 0.55 \right]}{0.85\epsilon} k_m \quad (1.3)$$

avec  $k_m$ , la rigidité moyenne d'une paire d'engrenages ( $1.8 \times 10^8 \text{ N/m}$  [37]),  $T$ , la période d'engrènement, et  $\epsilon$ , le rapport de contact. Dans leur étude expérimentale, ils ont utilisé une paire de roues d'engrenages avec le même nombre de dents 48, un module de 4mm et un angle de pression de  $14.5^\circ$ . Le rapport de contact  $\epsilon$  est de 1.8. La réponse vibratoire correspondante à la roue entraînée est obtenue sous différentes vitesses de rotation du pignon. Ils ont souligné que pour décrire avec précision la réponse de l'accélération vibratoire à une vitesse relativement faible, plusieurs harmoniques ont dû être pris en compte dans le développement de la série de Fourier utilisée pour l'expression de la rigidité d'engrènement.

Kuang et Lin [39] ont étudié l'effet de l'usure de la dent sur la réponse vibratoire en tenant compte de la répartition de la charge en alternance. Une rigidité d'engrènement dépend de la position, du taux d'amortissement et d'un coefficient de frottement. La rigidité d'engrènement a été exprimée approximativement en fonction du nombre de dents, de la position de chargement, du rayon du cercle primitif et du module des roues. Dans leur analyse, ils ont pris le taux d'amortissement égal à 0,17. Une formule approximative a été utilisée pour calculer la profondeur d'usure cumulée à un moment donné après  $n$  cycles

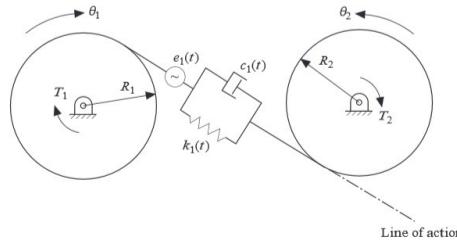


FIGURE 1.6 – Modèle d’engrenages utilisé par Amabili et Rivola [37].

d’engrènement. Dans leur travail, ils ont étudié une paire d’engrenages de 29 et 57 dents, un angle de pression de  $20^\circ$  et un module de  $4mm$ . Les résultats obtenus montrent que la charge dynamique et la vitesse au point d’engrènement ont une influence importante sur l’usure par glissement, qui a changé les profils des dents et la distribution de la charge. La magnitude de la charge dynamique a seulement une faible relation avec l’usure par glissement durant les  $10^5$  premiers cycles de rotation. Le spectre du couple transmis a montré que l’amplitude du pic est localisé à la cinquième harmonique de la fréquence d’engrènement. Lorsque l’usure par glissement progresse, les amplitudes des harmoniques de la fréquence d’engrènement augmentent considérablement alors que l’amplitude de crête augmente légèrement.

Dans [40], Kuang et Lin ont analysé théoriquement le comportement dynamique d’une paire d’engrenages et ont indiqué l’effet de la variation de la rigidité d’engrènement dans le temps sur le spectre vibratoire du couple transmis. Dans leur modèle proposé, ils ont inclus la modulation en amplitude excitée par l’erreur de la dent et la fluctuation de la charge de sortie. Deux valeurs constantes,  $k_s$  ( $0.6 \times 10^9 N/m$ ) et  $k_d$  ( $1.2 \times 10^9 N/m$ ) correspondant aux durées d’engrènement d’une seule et double paire de dents, respectivement, ont été utilisées pour approximer la rigidité d’engrènement  $k_m$  dans une seule période d’engrènement. Dans leur étude numérique, ils se sont concentrés sur l’influence de la fluctuation du couple d’entrée, en utilisant la même paire d’engrenages en acier comme celle utilisée en [39], sur la réponse vibratoire. Les résultats ont été obtenus par la comparaison des amplitudes du spectre correspondant aux couples transmis sous aucune fluctuation et des fluctuations harmoniques. Pour un couple d’entrée constant, le spectre se compose des harmoniques de la fréquence d’engrènement et est dominé par le cinquième et le sixième harmoniques, qui coïncident avec la première fréquence de résonance de l’ensemble d’engrenages utilisés. Par comparaison, pour des fluctuations sinusoïdales dans le couple à la fréquence de rotation de l’arbre, l’amplitude du couple transmis a augmenté et des composantes fréquentielles à la bande latérale sont apparues au niveau des deux côtés des harmoniques de la fréquence d’engrènement. La différence entre la ligne spectrale principale et la bande latérale correspondante est la fréquence de rotation de l’arbre, qui a également été affichée dans le spectre des fréquences. De plus, lorsque l’effet d’erreur du profil de la dent a été pris en considération en même instant, l’amplitude de la fluctuation augmente encore. En outre, une ligne de crête à la deuxième harmonique de la fréquence d’engrènement a été observée.

El Badaoui et al. [41] ont présenté un modèle d'engrenages à 12-DDL pour présenter la réponse de la simulation dynamique d'engrenages droits et autres hélicoïdaux avec l'effet d'un écaillage dans la dent. Dans leur modèle, les roues ont été considérées comme deux cylindres rigides. Pour des raisons de simplification, les variations de la rigidité d'engrènement le long de la largeur du défaut n'ont pas été prises en considération. Ils ont souligné que les petites profondeurs du défaut causent des forces d'excitation externe, qui étaient à peu près proportionnelles au volume de la partie d'écaillage, à savoir le produit de la moyenne de la profondeur et de la largeur du défaut. Par contre, le défaut de profondeur doit avoir une influence sur la rigidité d'engrènement. À partir des études sur les positions de défauts, il a été constaté que la détectabilité de petits défauts était indépendante de leurs positions sur les profils des dents, alors qu'il était plus facile de détecter des défauts plus grands dans la partie centrale du profil de la dent.

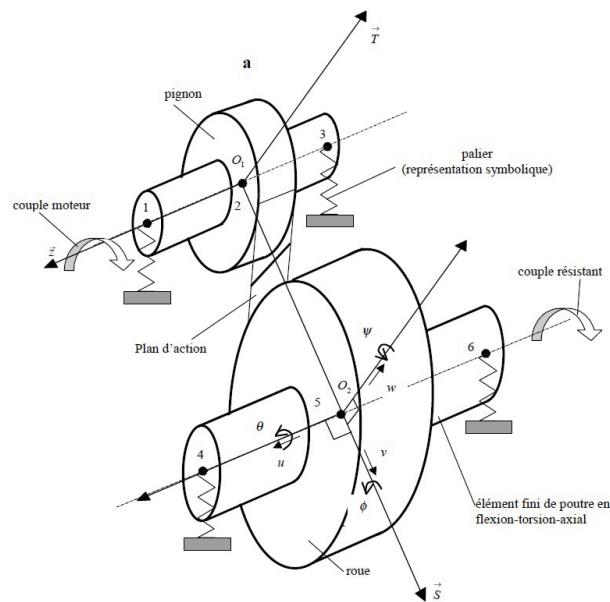


FIGURE 1.7 – Modèle d'engrenages développé par El Badaoui [41].

Lin et Parker [42] ont utilisé un modèle torsionnel de masse-ressort à 3-DDL pour un train d'engrenages de deux étages. Ils ont voulu étudier l'effet de variation de la rigidité d'engrènement avec une forme rectangulaire sur la réponse vibratoire sous différentes fréquences d'engrènement, variation d'amplitude de la rigidité d'engrènement et différents phases d'engrènement et rapports de contact. Dans leur étude, la rigidité d'engrènement a été exprimée approximativement comme une série de Fourier avec les 3 premiers termes. Les résultats ont montré que la phase d'engrènement et le rapport de contact ont une grande influence sur l'instabilité du système (correspondant à la résonance du système). Si l'amortissement a été pris en considération, la stabilité du système s'améliorait. Selon leur étude, quand le rapport de contact est entre 1,4 et 1,6, il a été constaté que la stabilité de la dynamique d'engrenages à un seul étage avec une vitesse élevée est compromise. Par conséquent, la réduction de l'instabilité de la dynamique peut être accomplie en choisissant correctement le rapport de contact et la phase d'engrènement. En plus, pour le cas de

deux étages, quand une fréquence d'engrènement est un multiple entier de l'autre, il existe une interaction entre les réponses vibratoires à partir de deux engrènements. L'instabilité devrait changer de façon significative en comparaison avec le cas où il n'y a aucune interaction quand il n'y a aucun rapport entier entre les deux fréquences d'engrènement.

Peeters [43] a décrit un modèle multi-corps à 12-DDL. Dans son travail et afin d'évaluer les fréquences propres et les formes des modes du système, il a supposé que la rigidité n'est pas constante et les composantes variables dans le temps à cause de l'erreur de transmission ne sont pas inclus. Il a négligé dans son modèle les amortissements, les forces de frottement et le jeu fonctionnel.

Howard et al. [44] ont étudié l'effet du frottement et de la fissure en utilisant un modèle dynamique d'un réducteur à un seul étage. Ils ont utilisé dans leur étude, l'analyse des éléments finis (FEA) de l'ensemble du corps du réducteur à la place du modèle des corps partiels pour analyser la rigidité d'engrènement torsionnelle (le rapport du couple à la déflexion angulaire) des dents avec et sans fissure. Pour introduire les forces du frottement dans les équations du mouvement, la position, la direction et la valeur de la force de frottement de Coulomb entre les dents engagées ont été analysées. La position de la force de frottement par glissement a été donnée en fonction de l'angle de rotation de l'arbre. Cette direction est toujours perpendiculaire à la ligne d'action (cette dernière est définie dans le chapitre suivant). Mais, avec le changement du point de contact, la direction va être opposée au point primitif. À ce moment-là, la force de frottement par glissement est égale à zéro. Par un modèle FEA, ils ont trouvé que la rigidité d'engrènement torsionnelle (250 k-N m/rad) est forcément influencée par les dents fissurées et sa valeur diminue par rapport au cas sans fissure.

Parker et al. [45, 46] ont étudié la réponse dynamique d'une paire engrenages ordinaires et d'une paire d'engrenages planétaire en utilisant les éléments finis/ un modèle de mécanique de contact. Cette méthode a surmonté la limitation de la FEA traditionnelle dans l'analyse dynamique des engrenages pour les composants éloignés de la partie engrenée des dents. Concernant la zone proche de la surface de contact de la dent, la solution analytique est également obtenue. Par contre, pour la zone légèrement éloignée de la surface de contact, ils ont poursuivi la solution par l'approche des éléments finis. La rigidité d'engrènement est approximée comme un signal rectangulaire ( $5.5 \times 10^8$  N/m) où les points de changement soudain correspondent à l'alternance de nombre de paires de dents engagées. Le taux d'amortissement d'engrènement a été fixé à 0.08. Dans les études expérimentales, une paire de roues d'engrenages avec 50 dents, un module de 3mm et un angle de pression égal à 20° ont été impliqués. Le rapport de contact pris est égal à 1.75. La fréquence naturelle du système a été mise en étude. Il a été trouvé qu'il existe une faible relation entre la fréquence naturelle et la charge.

Lee et al. [47] ont appliqué un modèle par éléments finis pour une paire d'engrenages en considérant, à la fois, les vibrations torsionnelles et celles latérales pour étudier les caractéristiques vibratoires d'un système d'engrenages avec une vitesse croissante. Ils ont étudié les formes des modes en faisant varier la rigidité d'engrènement. L'amortissement d'engrènement a été négligé dans leur étude. En plus, la relation entre les fréquences

naturelles et la rigidité d'engrènement a été étudiée. Pour le cas non couplé, les trois premières fréquences naturelles de torsion ont augmenté quand la rigidité d'engrènement a augmenté jusqu'à une certaine valeur, tandis que les fréquences naturelles latérales sont restées inchangées. Parmi ces trois fréquences naturelles, les deux premières ont fortement augmenté avec certaines plages de rigidité d'engrènement et par la suite sont restées presque constantes. Par contre, la troisième a augmenté lentement. En comparant les résultats précédents avec le cas couplé, la deuxième fréquence naturelle de torsion diminue fortement. Les fréquences naturelles latérales d'ordre élevé ont augmenté légèrement avec la rigidité d'engrènement au cours de certaines valeurs. Par l'analyse des modes, il a été trouvé que comme l'augmentation de la rigidité d'engrènement jusqu'à certaines valeurs, le mode dominant pourrait échanger entre le mode torsionnel et celui latéral.

Dernièrement, plusieurs auteurs [48–52] ont étudié le comportement dynamique non-linéaire des engrenages droits. En fait, un modèle linéaire a été vu insuffisant pour décrire le comportement réel de la machine. Guilbault et al. [2] ont étudié l'effet de l'amortissement dans un modèle d'engrenages non-linéaire à 2 DDL (figure 1.8). Dans leur étude, ils se sont concentrés sur le calcul de l'épaisseur de la couche de lubrifiant entre les dents durant la perte de contact. Ils ont pris en compte tous les phénomènes qui peuvent affecter la vibration des engrenages tels que la variation de la rigidité d'engrènement dans le temps, l'amortissement et les forces de frottement. La température du lubrifiant et le jeu fonctionnel ont été mis en œuvre également.

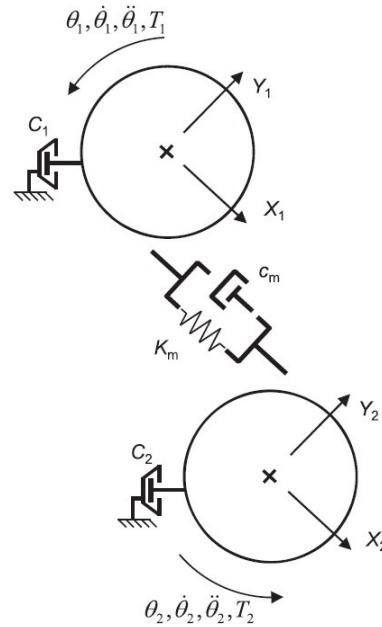


FIGURE 1.8 – Modèle global à 2 DDL [2]

Concernant Palaisi et al. [53], l'objectif de leur étude a été de développer un modèle numérique à 2 DDL permettant de simuler l'effet de défauts sur une denture sur les vibrations résultantes. Ils ont proposés deux types de défauts à traiter : des fissures et des défauts de surface. Ils ont montré que la taille de la fissure influence sur la rigi-

dité. De plus, les défauts de surface brisent qu'en à eux le film d'huile modifiant ainsi l'effort de frottement subis par la dent. Une deuxième étude s'est attachée à évaluer le pourcentage de surface concerné par ce phénomène. Guilbault et al. [4] ont présenté un modèle qui peut prédire les fréquences naturelles axiales, de rotation et d'inclinaison (figure 1.9). En plus des roues dentées, le modèle global intègre les arbres et les paliers en tant que sous-éléments d'un système dynamique, où le processus d'assemblage est réalisé au moyen de la méthode de Dunkerley. Cette étude a visé principalement à explorer et illustrer une manière rapide d'estimer les résonances dominantes de roues dentées dans leur environnement de fonctionnement.

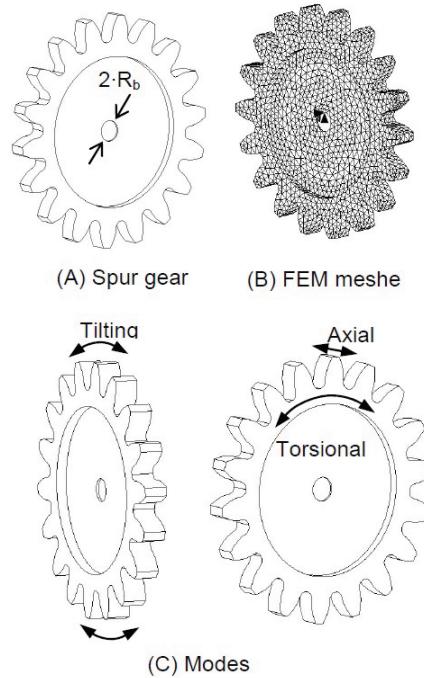


FIGURE 1.9 – Modèle et conditions aux limites pour l'analyse modale [4]

Lalonde et al. [3] ont effectué une étude comparative entre les réponses vibratoires de plusieurs modèles d'engrenages (2 DDL, 6 DDL, 8 DDL et 20 DDL). Pour les solutions numériques des équations des modèles, ils ont utilisé les méthodes de Runge-Kutta de 4<sup>eme</sup> ordre et celle de Newmark qui est beaucoup plus rapide. Il apparaît que tous les modèles ont été comparables sur la base de l'amplitude de la réponse. Cependant, des différences significatives ont été observées dans la forme de la réponse. Des modèles plus détaillés (8 et 20 DDL) montrent clairement l'effet des autres composants du système sur la dynamique des engrenages. En outre, la force dynamique d'engrènement semble être beaucoup plus élevée avec des modèles plus élaborés (figure 1.13), ce qui indique à nouveau que l'analyse critique, des modèles détaillés devraient prévaloir.

Cela n'empêche pas d'obtenir des résultats tout aussi bon avec des modèles à 2 et 6 DDL ce qui nous permettra de réduire énormément le temps de calcul.

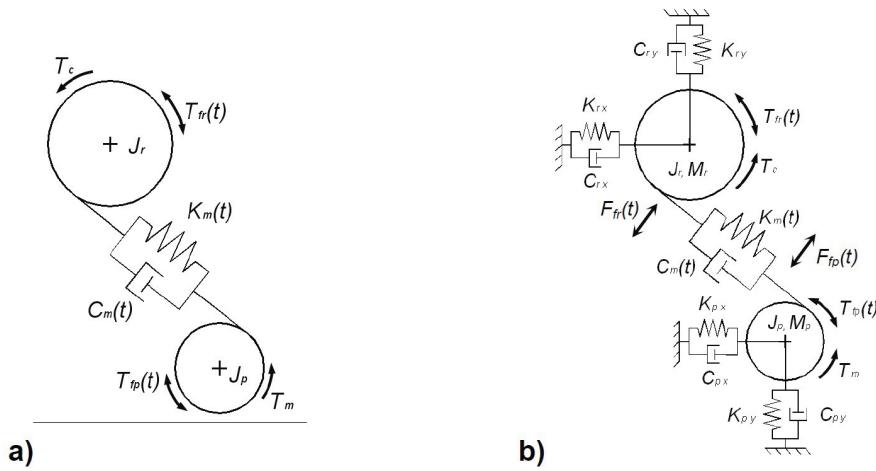


FIGURE 1.10 – Modèle d'engrenages : a) 2 DDL, b) 6 DDL [3].

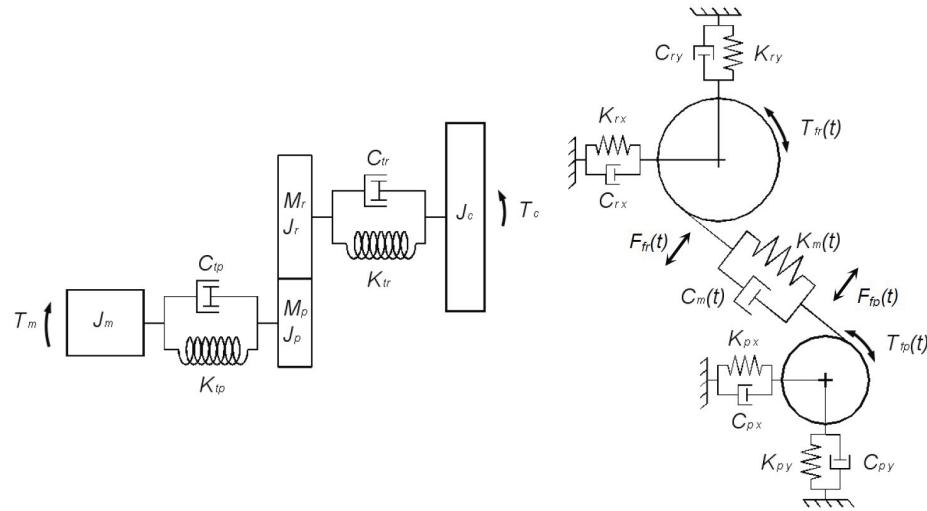


FIGURE 1.11 – Modèle d'engrenages à 8 DDL [3].

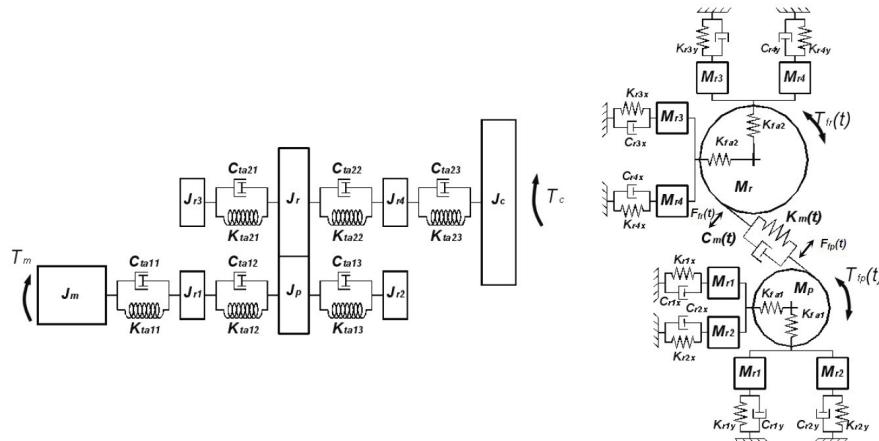


FIGURE 1.12 – Modèle d'engrenages à 20 DDL [3].

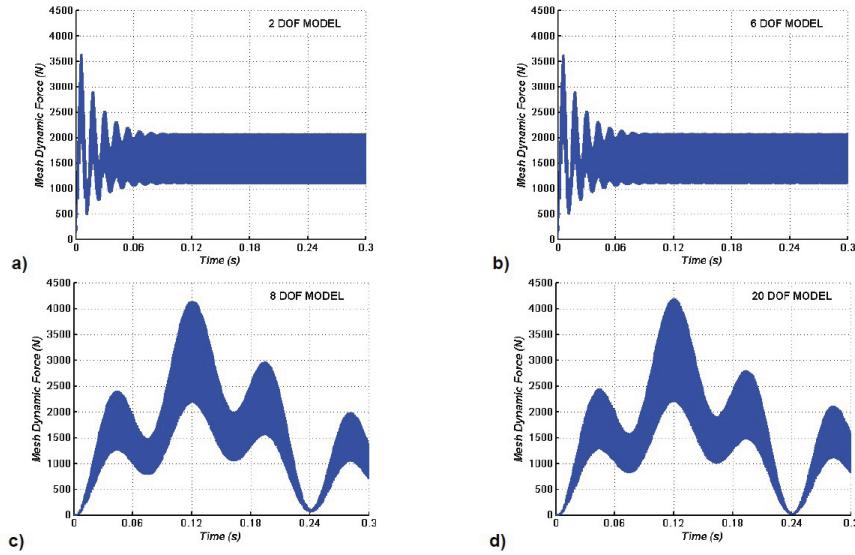


FIGURE 1.13 – La force dynamique d’engrènement : a) 2 DDL, b) 6 DDL c) 8 DDL d) 20 DDL [3]

### 1.2.3 Les défauts usuels d’engrenages

Au début du fonctionnement d’engrenages, c’est-à-dire pendant la période de rodage, les légères imperfections des profils des dents disparaissent progressivement. Après un certain temps, si l’engrenage reste dans un bon environnement de fonctionnement sous des bonnes conditions, l’usure des dentures va rester faible. Sinon lorsque les conditions de fonctionnement se dégradent, il est possible d’observer des détériorations sur les surfaces actives des dents.

#### 1.2.3.1 La corrosion

Ce type de défaut se manifeste sur le flanc des dents par la présence des taches colorées entre le brun et le rouge accompagnées par des légères irrégularités de surface autour de ces taches. Pendant l’engrènement, les traces de rouille ou d’oxydes continuent de se déplacer sur tout le flanc ce qui pourrait entraîner une usure dans la dent. Cette usure va augmenter le jeu entre les dents par la suite [54].

#### 1.2.3.2 La fatigue de contact

Ce type de détériorations de surfaces est le résultat de contraintes répétées à la surface ou sous couches avec des valeurs qui dépassent le support ou l’endurance des matériaux. Ce défaut se caractérise par l’enlèvement de petits morceaux métalliques et la formation de cavités avec le temps. Les conséquences de cette détérioration sont la perturbation de lubrification qui conduit à la modification de la friction, la favorisation de la rupture du film d’huile et l’initiation de la fatigue de flexion [54].

### 1.2.3.3 Les fissures en fatigue

Les fissures en fatigue se produisent souvent dans l'endroit où les contraintes sont maximales, dans les arrondis des pieds des dents, du côté où la dent est sollicitée en traction. Ces fissures fragilisent les dents surtout en s'incurvant pour atteindre l'autre côté de la dent, ce qui diminue la rigidité de cette dernière. Dans la plupart des cas, ce type de fissure s'initie au creux d'une piqûre de contact située autour de la région de forte sollicitation en flexion [54].

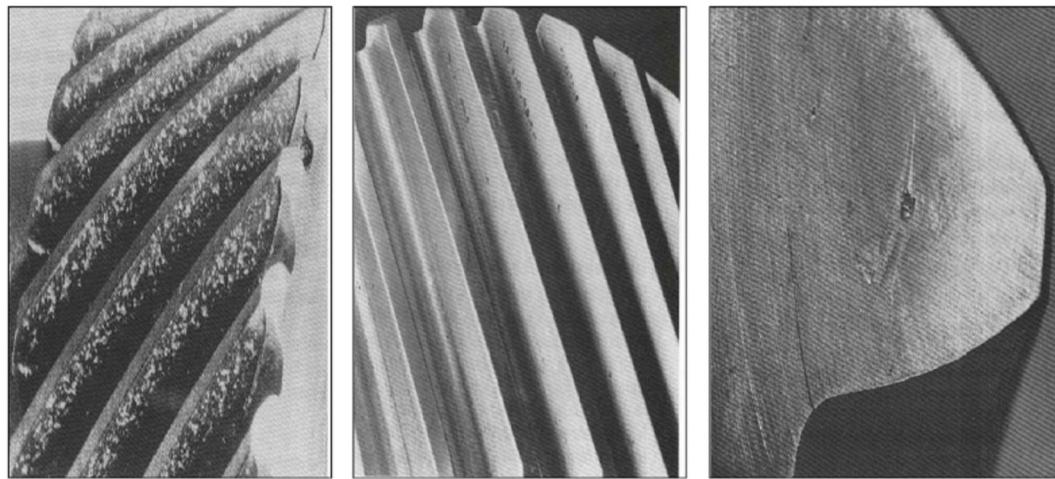


FIGURE 1.14 – Corrosion - Piqûres – Fissure (Source Internet).

Lalonde et Guilbault [3] ont considéré pour leur modèle une fissure, au pied d'une dent du pignon, qui s'agrandit progressivement. Ils ont trouvé que la fissure baisse la rigidité de la dent. D'autre part, Lavoie [55] a fait plusieurs études sur l'influence de la largeur de fissure, sa profondeur, sa position par rapport à sa largeur et son angle par rapport à l'axe de rotation de la roue d'engrenages. Selon son analyse, il a conclu que les paramètres géométriques, la largeur et la profondeur de la fissure sont les deux qui influencent plus la rigidité. Cependant, l'augmentation de l'angle et la profondeur font augmenter la rigidité par rapport à un angle qui se rapproche de zéro. D'autre part, la largeur et la profondeur font diminuer la rigidité. En ce qui concerne la position, elle est la moins influente lorsqu'elle est observée toute seule. Par contre, si elle est jumelée à une augmentation de la largeur ou la profondeur de la fissure, la diminution de la rigidité d'engrènement serait encore plus importante. En général, chacun des paramètres précédents a une influence sur la rigidité mais lorsque plusieurs d'entre eux se combinent, la conséquence est dévastatrice.

## 1.3 Techniques de diagnostic des engrenages

Parmi les techniques de surveillance et de diagnostic des machines tournantes, nous trouvons que l'analyse vibratoire occupe une place très privilégiée. Elle donne une image sur les efforts dynamiques engendrés par les pièces en mouvement ou par les sources exté-

rieures. L'analyse de ce type de signaux permet d'extraire des indications correspondantes aux vibrations provoquées par les pièces de la machine. Souvent, ces signaux sont complexes et difficiles à interpréter. En effet, cette analyse est basée essentiellement sur des méthodes stationnaires classiques. Cependant, il y a d'autres travaux récents qui montrent l'intérêt d'exploiter la non stationnarité des phénomènes vibratoires. Les signaux vibratoires des machines tournantes sont de nature harmonique. Ceci justifie l'emploi de la transformée de Fourier mais cela ne convient guère à tous les types des signaux, notamment les signaux non-stationnaires. Dans la littérature, nous distinguons trois types d'analyse, l'analyse temporelle, l'analyse fréquentielle et l'analyse temps-fréquence ou échelle-fréquence.

### 1.3.1 L'analyse temporelle

Cette approche est la plus simple et la plus facile pour extraire des informations utiles (la présence d'un défaut) des mesures effectuées. Toutefois, l'inconvénient majeur de cette analyse est qu'elle ne permet pas l'identification de l'origine des défauts. Alors, ce que nous pouvons faire avec ce type d'analyse est de comparer la sévérité entre les processus à partir des descripteurs calculés statistiquement [7, 56].

Parmi ces descripteurs, nous trouvons la valeur crête du signal qui nous permet d'estimer l'amplitude du signal si celle-ci est constante, ce qui n'est pas souvent le cas à cause du bruit et d'autres perturbations. Généralement, nous utilisons la valeur efficace du signal (RMS : *Root Mean Square*) car elle est plus significative que la première.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k)^2} \quad (1.4)$$

La formule de RMS est différente de celle de l'écart type qui est, parfois, utilisée pour la surveillance vibratoire :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - x_m)^2} \quad (1.5)$$

Avec :

$N$ , le nombre d'échantillons.

$x_k$ , la valeur  $k^{eme}$  du signal.

$x_m$ , la valeur moyenne du signal.

Ashraf Abdel-Rahim Ali [57] a développé une méthode basée sur le suivi du niveau RMS afin de détecter les défauts. Il a fait des essais sur un moteur monté sur des roulements puis il a effectué une collecte mensuelle des données à partir de l'analyse des signaux vibratoires relevés des paliers de roulements. L'analyse réalisée permettra de déterminer quand est ce que nous pouvons faire intervenir la maintenance mais ça ne détermine plus la cause de défaillance. Il y a aussi le facteur crête (FC) qui est défini comme le rapport de la valeur crête sur la valeur efficace :

$$FC = \frac{\sup_{1 \leq k \leq N} |x_k|}{RMS} \quad (1.6)$$

Avec :

$x_k$ , la valeur  $k^{eme}$  du signal.

Afin d'évaluer la sévérité d'un défaut à partir d'un signal mesuré, les chercheurs ont constaté que la valeur du facteur crête (FC) concernant la vibration d'un rotor sain doit être proche de  $\sqrt{2}$ , et pour le cas défectueux, le FC devient supérieur à 3 [7].

Le troisième descripteur, le plus utilisé aussi, est le Kurtosis. Ce facteur est défini par le rapport du moment statistique d'ordre 4 sur le carré du moment statistique d'ordre 2. Le Kurtosis est un indicateur d'impulsivité, il est indépendant des amplitudes et il permet aussi d'établir un critère de sévérité pour le diagnostic des machines [56].

$$X_{kurt} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - x_m)^4}{\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - x_m)^2 \right)^2} \quad (1.7)$$

Le tableau de la figure (1.15) nous donne une idée sur les stades de dégradation en contrôlant la sévérité par le Kurtosis.

<b>Kurtosis</b>	<b>Sévérité</b>
1,5	Bon: signal harmonique
2,8 à 3,2	Passable: signal aléatoire
3,2 à 4	Elevé
> 4	Critique

FIGURE 1.15 – Critère de sévérité par Kurtosis [7].

### 1.3.2 L'analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle est une représentation où le signal est décomposé en une série des composantes élémentaires définies par leurs amplitudes et leurs fréquences. Nous présentons dans cette section les techniques amplitudes-fréquences les plus utilisées dans la littérature pour le diagnostic des engrenages.

#### 1.3.2.1 L'analyse d'enveloppe (HF Resonance Technique)

Cette méthode est conçue pour les signaux modulés en amplitude [58]. Son principe est de calculer la transformé d'Hilbert du signal temporel  $y(t)$  comme suit :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{y(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1.8)$$

où  $\tau$  est une variable temporelle.

À partir de l'équation (1.8), nous pouvons constater que  $\tilde{y}(t)$  n'est que la convolution de  $y(t)$  avec la fonction  $(\frac{1}{\pi \cdot t})$  :

$$\tilde{y}(t) = y(t) * \frac{1}{\pi \cdot t} \quad (1.9)$$

L'enveloppe de  $y(t)$  est définie par le module de  $\hat{y}(t)$  :

$$|\hat{y}(t)| = \sqrt{y(t)^2 + \tilde{y}(t)^2} \quad (1.10)$$

Avec  $\hat{y}(t) = y(t) + j \cdot \tilde{y}(t)$ , le signal analytique complexe.

Les deux opérations de filtrage (avec la convolution) et de génération de l'enveloppe permettent de reconstituer une information qui fait apparaître les fréquences caractéristiques du système et du défaut. M. Merzoug [58] a montré l'efficacité de cette approche pour analyser le défaut d'excentricité au niveau des engrenages, analytiquement et expérimentalement.

### 1.3.2.2 L'analyse cepstrale

Le Cepstre (l'anagramme du mot spectre) est un opérateur mathématique qui permet d'identifier et de quantifier immédiatement toutes les structures périodiques ou de type écho.

La première application du cepstre a été faite pour la détection des échos [59] puis pour l'analyse vocale [60]. Dans le domaine mécanique, nous trouvons plusieurs recherches et revues à propos de cette méthode [61–65] afin de diagnostiquer les défauts d'engrenages, de roulements,...etc. Mais les études et les applications dans le milieu industriel sont quasiment inexistantes.

Le cepstre d'un signal  $y(t)$  est défini comme la transformée de Fourier inverse du logarithme décimal de sa transformée de Fourier directe :

$$C[y(t)] = C(\tau) = TF^{-1} [\log |TF[y(t)]|] \quad (1.11)$$

L'unité du cepstre  $[\tau]$  a la dimension du temps. Elle est appelée "Quéfrence" (anagramme de la fréquence). D'autre part, l'intérêt du logarithme est d'effectuer une séparation entre la réponse impulsionale de la structure de la machine  $h(t)$  et les forces d'excitations  $e(t)$  comme suit :

$$C(\tau) = TF^{-1} [\log |TF[h(t) * e(t)]|] \quad (1.12)$$

D'après les propriétés du produit de convolution et du logarithme, nous pouvons réécrire l'équation précédente comme suit :

$$C(\tau) = C_h(\tau) + C_e(\tau) \quad (1.13)$$

Pour le diagnostic, nous nous intéressons à la partie  $C_e(\tau)$  qui représente le cepstre des forces d'excitation. Le logarithme permet aussi de mettre en évidence les composantes

spectrales de faibles amplitudes [66]. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est plus valable pour la détection des défauts de fissure dans les engrenages car ces derniers n'influencent pas les amplitudes.

### 1.3.2.3 Les méthodes à haute résolution

Ces méthodes ont été développées en télécommunication afin de détecter les raies spectrales infiniment proches. Ces techniques ont une résolution au dessus de la résolution de Fourier :  $\Delta f = \frac{f_{echant}}{\text{Taille du signal}}$ .

À partir de la théorie de sous-espaces (la décomposition de la matrice d'autocovariance), nous distinguons deux types d'estimateurs : les uns exploitent le sous-espace bruit comme MUSIC et Root-MUSIC et les autres exploitent le sous-espace signal comme ESPRIT. Il existe également d'autres méthodes, plus robustes, qui exploitent la vraisemblance. Parmi ces estimateurs, nous trouvons MODE et PLEDGE qui sont basés sur la minimisation d'une fonction objective donnée. De plus, ils ont l'avantage de traiter les signaux de courte taille [67].

Dans le chapitre 3, nous allons exploiter les performances de certaines de ces techniques pour diagnostiquer la fissure d'une dent d'engrenages.

### 1.3.3 L'analyse temps-fréquence

L'analyse temps-fréquence comprend des techniques qui étudient simultanément un signal dans les domaines temporels et fréquentiels en utilisant les différentes représentations temps-fréquence. La motivation pratique de l'étude temps-fréquence est que l'analyse par la transformée de Fourier classique suppose que les signaux sont infinis dans le temps ou périodiques, tandis que la majorité des signaux en pratique sont de courte durée et changent considérablement au cours de cette durée.

Cet outil offre la possibilité d'analyse 2D d'un signal à travers une de plusieurs transformations connues tels que la transformée de Fourier à court terme (*TFCT*) [68] et la transformée de Wigner Ville (*TWV*) [8, 68].

#### 1.3.3.1 Transformée de Fourier à court terme STFT

La transformée de Fourier à court terme (TFCT), connue également par la transformée de Fourier à fenêtre glissante (en anglais, Short-Time Fourier Transform (STFT)), est un développement qui étend la technique de Transformée de Fourier standard pour analyser des signaux non-stationnaires [68]. Les transformées de Fourier sont appliquées à des fenêtres courtes de données représentées dans le domaine temporel. Ces fenêtres sont déplacées le long du signal et peuvent se chevaucher.

Ceci transforme les signaux 1D en des données 2D : une dimension pour les fréquences et une seconde dimension pour l'emplacement des fenêtres dans les données. La TFCT fournit des informations pour une bande de fréquence fixe et une résolution temporelle qui dépend de la fenêtre. Un événement impulsif apparaît dans une TFCT lors d'une

augmentation des niveaux à toutes les fréquences au moment de l'impulsion. Une des limitations de cette méthode est due au fait que les composantes du signal ayant une faible correspondance avec la résolution fréquentielle et temporelle seront masquées.

Étant donné un intervalle de temps  $T > 0$ , soit  $g(u)$  une fonction (fenêtre) qui s'annule en dehors de l'intervalle  $-T \leq u \leq 0$ . La transformée de Fourier à court terme (TFCT) d'une fonction  $f(u)$  est définie par [68] :

$$F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(u-t) f(u) e^{-i2\pi\omega u} du \quad (1.14)$$

avec  $\bar{g}$  est le complexe conjugué de la fonction  $g(u)$  (appelée fenêtre) et  $t$  est le paramètre de localisation temporelle de la fenêtre  $g$ .

La série des spectres ainsi constituée représente une forme de transformée temps-fréquence du signal appelé *Spectrogramme*.

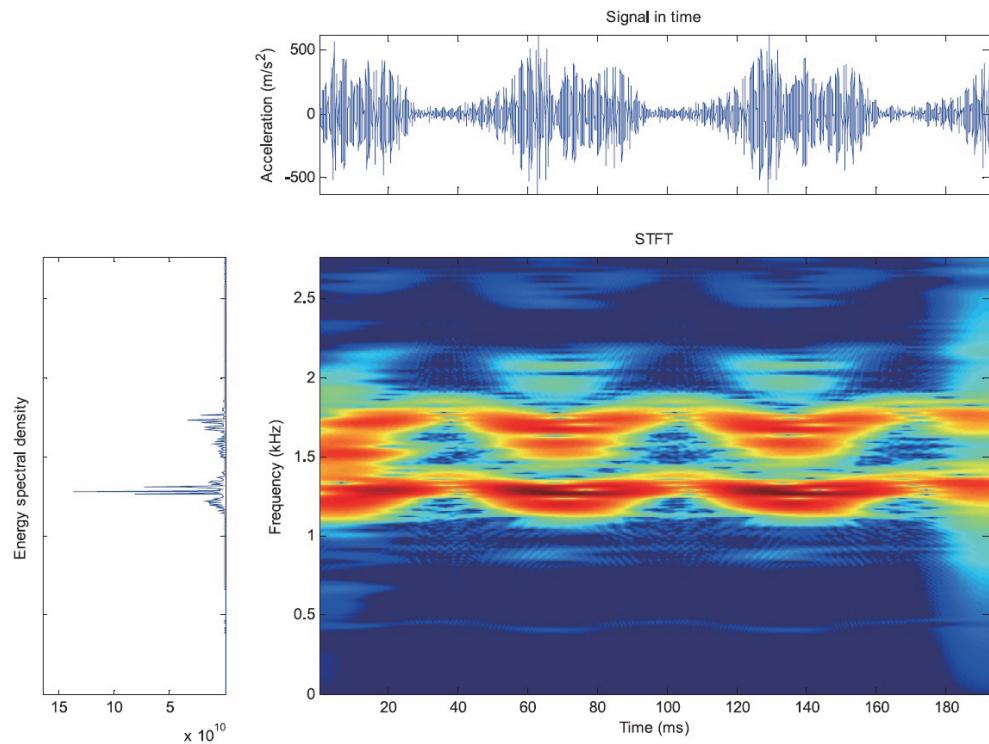


FIGURE 1.16 – STFT de l'accélération du pignon pour une charge variante dans le temps [69].

Selon [69], la figure (1.16) montre l'amplitude de la TFCT pour le signal vibratoire d'un modèle numérique des engrenages. Dans cette étude, le couple de charge varie dans le temps. Le décalage temporel dans la TFCT varie le long de l'axe horizontal au cours de l'enregistrement. L'axe vertical couvre une plage de fréquences en considérant que les basses fréquences sont en bas de l'axe et les hautes fréquences sont en haut de l'axe. Le spectrogramme montre une ligne bleue claire, autour de la fréquence d'engrènement 436Hz (la fréquence d'engrènement qui est définie par le produit du nombre de dents et

la fréquence de rotation du pignon), qui fluctue dans le temps à cause de la variation de la charge. Nous constatons également, deux bandes fréquentielles à haute énergie qui représentent les fréquences naturelles du système. Dans ces deux bandes, nous remarquons bien évidemment la variation de la charge en fonction du temps.

### 1.3.3.2 Transformée de Wigner Ville (TWV)

La transformée de Wigner Ville (TWV) est une transformation non-linéaire qui représente des signaux 1D en 2D : une dimension pour les fréquences et une seconde dimension pour le temps. Cette méthode fournit une décomposition temps-fréquence sans aucune restriction liée à la taille du signal et sur les résolutions temporelles et fréquentielles. Elle est adaptée à l'analyse des signaux non stationnaires puisqu'elle ne nécessite pas d'hypothèses sur le signal d'origine. La transformée de Wigner Ville possède des unités de puissance de signal et non pas d'amplitude. Les informations sur la phase ne sont plus disponibles.

Étant donné une fonction  $f(u)$ , la transformée de Wigner Ville est définie par [71] :

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}\left(t - \frac{u}{2}\right) f\left(t + \frac{u}{2}\right) e^{-i\omega u} du \quad (1.15)$$

avec  $\bar{f}$  est le complexe conjugué de  $f(u)$ .

Cette transformation peut être interprétée comme la densité spectrale de puissance instantanée du signal. Cependant, les phénomènes d'interférence et chevauchement entre temps et fréquence tendent à réduire la lisibilité de cette représentation qui implique que l'interprétation devient dans ce cas presque impossible. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Parmi lesquelles, nous pouvons citer l'utilisation d'un noyau de lissage (fonction à deux variables) afin d'adoucir localement la rigueur de la résolution.

Selon [71], la figure (1.17.a) montre la transformée de Wigner Ville d'un signal vibratoire d'un pignon sain. L'analyse avec la TWV d'une dent cassée avec un défaut avancé de 50% et 100% est présentée dans les figures (1.17.b) et (1.17.c), respectivement. Nous pouvons remarquer dans tous les tracés de contours de la figure (1.17) des motifs solides, verticales avec des lignes sombres dues aux harmoniques d'engrènement et en pointillés, verticales avec des lignes sombres dues à des modulations et des interférences entre ces harmoniques. Aucune caractéristique impulsionale ne peut être observée dans la distribution sur la figure (1.17.a) et (1.17.b).

Le résultat pour une dent cassée à 100% est montré sur la figure (1.17.c). Ici, la distribution présente, en outre, une zone horizontale sombre à environ  $110^\circ$  de rotation comprise entre 900 et 1200 Hz et encore des zones similaires plus petites entre 1200 et 1800 Hz. Ces caractéristiques sont dues à l'impulsion produite par la dent cassée dans les engrenages.

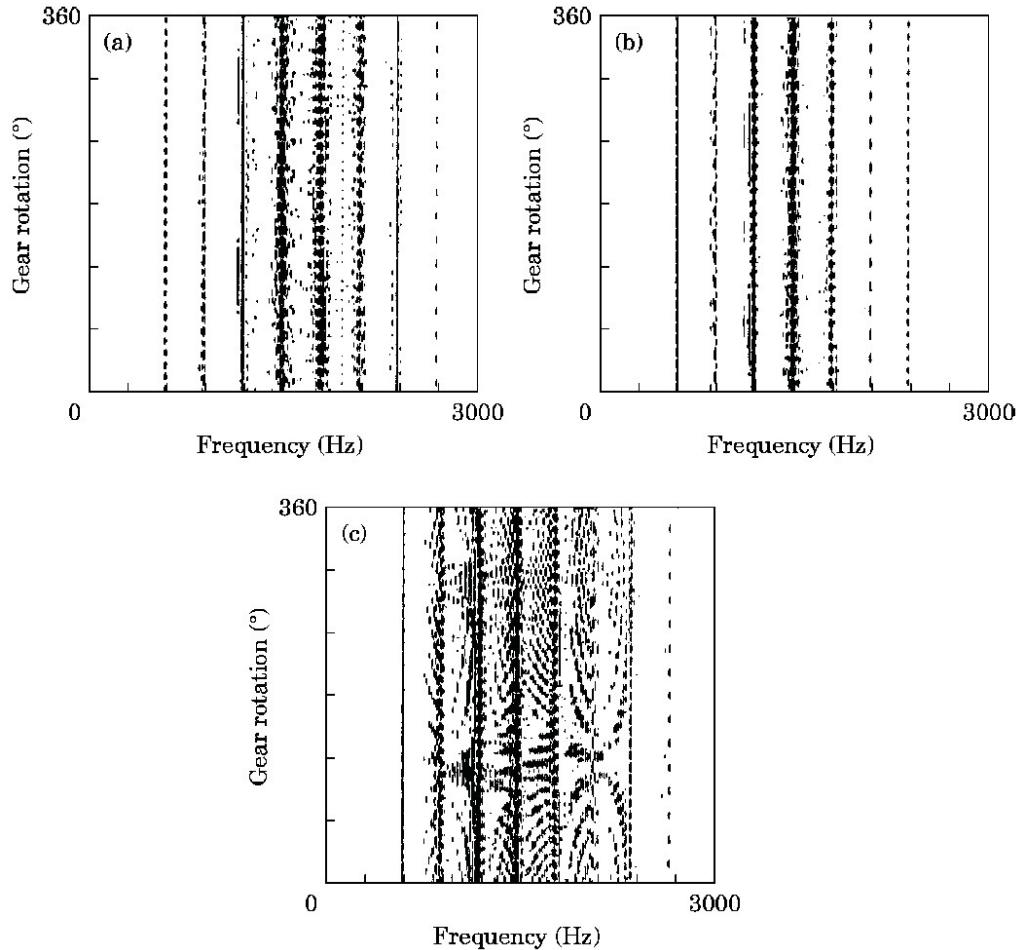


FIGURE 1.17 – Distribution de Wigner-Ville du signal temporel : (a) les conditions normales d'un engrenage droit ; (b) une dent cassée avec un défaut avancé de 50% ; (c) une dent cassée avec un défaut avancé de 100% [71].

### 1.3.4 L'analyse temps-échelles

La transformée en ondelettes appartient aux méthodes de type temps-échelles. Elle consiste à décomposer le signal en une somme d'ondelettes dilatées ou compressées et localisées temporellement. Notons que les ondelettes sont utilisées soit pour débruyer le signal, soit pour diagnostiquer les machines, plus précisément en analyse vibratoire [70]. L'ondelette  $\psi$  est définie comme une fonction de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1.16)$$

La transformée en ondelettes continue (TOC), de la fonction  $f(t)$  est définie par :

$$W(s, u) = w(s) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt \quad (1.17)$$

Avec :

$s$ , un facteur d'échelle.

$u$ , un facteur de translation.

$\psi^*$ , fonction d'ondelette mère.  $*$  signifie le conjugué, ne concerne que les ondelettes complexes.

$w(s)$ , coefficient, le plus souvent choisi est égale à  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  pour des raisons de conservation d'énergie (même énergie à chaque échelle).

L'augmentation du facteur d'échelle entraîne une dilatation de l'ondelette mère, et sa diminution conduit à la contraction de celle-ci.

Le calcul de la transformée en ondelettes continue (TOC) revient, donc, à réaliser la corrélation entre le signal à analyser et les différentes formes dilatées et contractées de l'ondelette mère. Le calcul se fait de telle façon que plus la forme de l'ondelette correspond à celle du signal, plus la valeur du coefficient sera élevée. Cette technique a été utilisée dans plusieurs travaux [71] pour diagnostiquer les défauts d'engrenages. Elle donne des résultats supérieurs par rapport aux techniques classiques mais malheureusement elle n'est pas valable pour les défauts de fissure ou les défauts précoces [71].

## 1.4 Résumé

Cet état de l'art sur les systèmes d'engrenages contient trois groupes principaux portant sur des modèles mathématiques appliqués pour simuler la dynamique des engrenages. En général, les buts de la modélisation numérique sont d'étudier les contraintes de la dent d'engrenage, les fréquences naturelles du système, les caractéristiques de vibration du système d'engrenages telles que les amplitudes et les composantes spectrales, le rayonnement de bruit, l'efficacité de transmission du système, la stabilité du système et les cycles de vie. Selon les différents objectifs, des modèles masse-ressort ou masse-ressort-amortisseur SDDL/MDDL de un ou plusieurs étages ont été traités. Souvent, les vibrations torsionnelles et latérales des systèmes ont été prises en considération dans le développement mathématique des équations des mouvements. Dans ces modèles, la rigidité d'engrènement est considéré comme constante, une fonction sinusoïdale, une série de Fourier, de forme rectangulaire, ...etc. Concernant la solution des équations de la dynamique, des méthodes analytiques, approximativement analytiques ou numériques ont été appliquées. Pour les modèles MDDL des systèmes compliqués, spécialement quand les vibrations torsionnelles et latérales ont été prises en compte, les techniques numériques ont été exploitées. Parmi ces techniques, l'intégration de Runge-Kutta est la plus populaire à cause de son exactitude et son court temps de calcul.

En ce qui concerne les outils de traitement du signal, nous avons constaté que les techniques abordées précédemment donnent de bons résultats si le défaut est dans un état très avancé (grand écaillage ou dents cassées). Mais, la plupart de ces techniques ne sont pas conçues pour travailler dans le milieu non-stationnaire et non-linéaire et ne sont pas sensibles à la présence de la fissure.

Le résultat de notre état de l'art montre des travaux de recherche intéressants dans le cas de diagnostic de défaut d'écaillage d'engrenages. Cependant, la détection des défauts de fissures est plus difficile. En effet, les défauts de fissures ne se manifestent pas sur

l'amplitude.

## 1.5 L'objectif et l'originalité de la recherche

Les premiers résultats d'analyse des signaux d'engrenages en présence de défauts de fissure nous ont permis de mettre en évidence le caractère cyclostationnaire à l'ordre 1 et 2 des signaux d'accélération mesurés aux niveau des paliers d'un réducteur. Pour cela, l'objectif principal et l'originalité de notre thèse s'orientent vers la justification de présence du processus cyclostationnaire d'ordre 2 dans les signaux vibratoires obtenus d'un engrenage fissuré. Afin de mieux comprendre la signature de la fissure et les phénomènes engendrés par sa respiration, nous essayons de développer un modèle numérique qui simule et reflète le comportement dynamique des engrenages réels. Ensuite, et grâce à ce modèle, nous chercherons l'effet de la fissure sur la rigidité d'engrènement et les réponses d'accélération vibratoire (les informations pertinentes liées à la fissure dans le signal temporel, son spectre fréquentiel et les phases instantanées). Notre second objectif porte sur la recherche d'une approche robuste de traitement du signal pour la surveillance et le diagnostic précoce du défaut de fissure. McFadden [9] a montré dans son travail que la fissure d'une dent affecte la phase d'engrènement. Pour l'estimation de cette dernière, il a utilisé la transformé de Fourier. Nous savons que la résolution de Fourier est limitée et cette limitation dépend de la fréquence d'échantillonnage et la taille du signal étudié. Pour cela, nous suggérons d'exploiter les techniques à haute résolution, qui ne subissent pas de contraintes de limitation, afin d'estimer la phase instantanée d'engrènement. Ensuite, nous essayerons d'améliorer leurs performances et de les comparer au scalogramme de phase afin de trouver la meilleure façon de détecter le défaut dans son état précoce et suivre sa sévérité. Par la suite et pendant notre étude, nous allons analyser, également, les signaux vibratoires réels issus des capteurs mécaniques (les accéléromètres) pour valider les résultats théoriques et afin d'aboutir au bon diagnostic.

## 1.6 L'organisation de la thèse

Notre travail de recherche est organisé comme suit. La littérature pertinente a été présentée dans le chapitre 1. Les méthodes de calcul de la rigidité effective d'engrènement, la signature de défaut de fissure et les résultats de simulation de la dynamique des engrenages sains et défectueux sont présentés dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous abordons la théorie de cyclostationnarité et les applications de traitement signal qui peuvent permettre de surveiller les fissures dans leur état précoce. Une étude comparative sur la robustesse des techniques de traitement du signal proposées est présentée dans le chapitre 4. Dans le chapitre 5, nous validons les résultats théoriques par des essais expérimentaux. Finalement, nous interprétons et discutons les résultats et les phénomènes observés dans la conclusion générale.

# Chapitre 2

## MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DES ENGRENAGES

### Sommaire

---

2.1	Introduction	44
2.2	Méthode de calcul de la rigidité d'engrènement	47
2.2.1	Calcul de la rigidité de contact hertzien	47
2.2.2	Calcul des rigidités de fléchissement, de cisaillement et décompression axiale	48
2.3	Rigidité d'engrènement pour une (deux) paire (s) de contact	52
2.3.1	Calcul de la rigidité d'engrènement	53
2.3.2	Durée d'un seul (deux) contact (s) de paires de dents	56
2.3.3	Validation des équations	57
2.4	Relation entre la rigidité d'engrènement et le déplacement angulaire	59
2.5	Rigidité d'engrènement d'un pignon avec une dent fissurée	59
2.6	Modélisation de la dynamique d'engrenages	63
2.6.1	Réponse du système dans la direction $y$	67
2.7	Simulation de la dynamique des engrenages parfaits	68
2.8	Simulation de la dynamique du pignon avec une dent fissurée	69
2.9	Conclusion	70

---

### 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'étudier conjointement les engrenages droits, les développantes des cercles et les réponses vibratoires des modèles numériques. Plus précisément, nous définissons la développante d'un cercle par la courbe décrite par un point  $M$  d'une droite qui roule sans glisser sur un cercle appelé *cercle de base*.

La figure (2.1) montre les nomenclatures techniques des développantes d'engrenages droits. Dans une paire d'engrenages, la plus petite roue s'appelle *le pignon* et la roue

conjuguée s'appelle *l'engrenage*. Le cercle extérieur est un cercle formé par les extrémités des dents. La distance radiale entre le cercle extérieur et le cercle primitif s'appelle *l'addendum*. Pour les engrenages standards, l'addendum peut être calculé par l'inverse du *pas diamétral* (symbolisé par  $P$ ), qui est le nombre de dents par pouce du diamètre du cercle primitif. Pour deux roues conjuguées, elles ont le même pas diamétral.

Dans la figure (2.1), le point  $p$  est le point tangentiel entre les deux cercles primitifs, il s'appelle aussi le point primitif. La ligne  $t-t$  représente la tangente commune des cercles primitifs. La ligne  $B_1B_2$  est *la ligne d'action*, la tangente commune des cercles de base et la normale commune des profils des dents. L'angle  $\alpha_0$  entre les lignes  $t-t$  et  $B_1B_2$  s'appelle *l'angle de pression* ou *l'angle d'action*. Les angles les plus couramment utilisés pour les engrenages droits sont  $14.5^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $25^\circ$  [20, 72].

Les points  $A_2$ ,  $M$  et  $A_1$ , correspondants à trois positions d'engrènement d'une paire de profils de dents, sont des points de contact sur la ligne d'action. Pour les engrenages droits, les points de contact entre deux dents conjuguées sont toujours le long de la ligne d'action. Le point  $A_2$  représente le point de départ de l'engrènement. Le point  $M$  représente la position actuelle du point de contact. Le point  $A_1$  représente la position du contact à la fin d'engrènement de la même paire de profils. Le segment  $\overline{A_2A_1}$ , qui s'appelle *la partie travaillante* de la ligne d'action, indique le lieu des points de contact d'une paire de dents engagées.

Elle peut être calculée comme suit :

$$\overline{A_2A_1} = \sqrt{R_{O1}^2 - R_{b1}^2} + \sqrt{R_{O2}^2 - R_{b2}^2} - \overline{O_1O_2} \sin \alpha_0 \quad (2.1)$$

tels que  $R_{O1}$ ,  $R_{O2}$ ,  $R_{b1}$  et  $R_{b2}$  sont les rayons des cercles extérieurs et ceux de base du pignon et de la roue, respectivement.  $\overline{O_1O_2}$  est *l'entraxe*, qui est la distance entre les deux centres de rotation  $O_1$  et  $O_2$  du pignon et de la roue.  $R_{b1}$ ,  $R_{b2}$ ,  $R_{O1}$ ,  $R_{O2}$  and  $\overline{O_1O_2}$  peuvent être exprimés comme suit [20, 72] :

$$R_{b1} = \frac{N_1}{2P} \cos \alpha_0 \quad (2.2)$$

$$R_{b2} = \frac{N_2}{2P} \cos \alpha_0 \quad (2.3)$$

$$R_{O1} = \frac{N_1 + 2}{2P} \quad (2.4)$$

$$R_{O2} = \frac{N_2 + 2}{2P} \quad (2.5)$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{N_1 + N_2}{2P} \quad (2.6)$$

où  $N_1$  et  $N_2$  sont les nombres de dents du pignon et de la roue, respectivement, et  $P$  est le pas diamétral.

À propos de la développante du profil de la dent  $\widehat{M_0M}$  présentée dans la figure (2.1), les relations des angles relatifs  $\phi$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , arc  $\widehat{M_0B_2}$ , le segment  $\overline{B_2M}$ , et le rayon de base  $R_{b2}$  de la roue sont calculés comme suit :

$$\overline{B_2M} = \lambda R_{b2} = R_{b2} \tan \beta \quad (2.7)$$

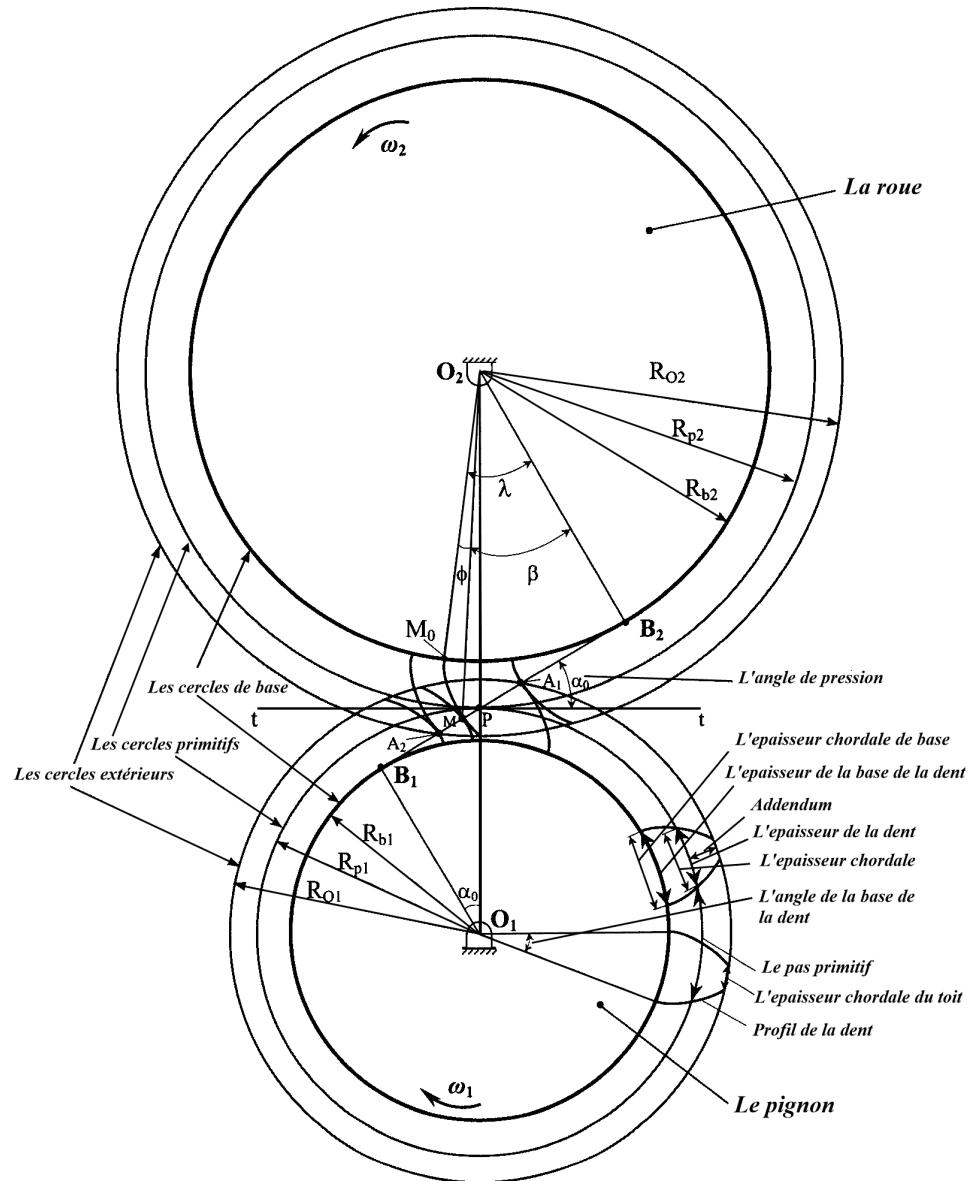


FIGURE 2.1 – Nomenclature d'engrenages [34]

L'équation (2.7) peut être simplifiée de la façon suivante :

$$\lambda = \tan \beta \quad (2.8)$$

De l'équation (2.8), l'angle  $\phi$  peut être exprimée comme suit :

$$\phi = \lambda - \beta = \tan \beta - \beta \quad (2.9)$$

La fonction  $\phi(\beta)$  est désignée comme *invβ* (appelé aussi *la fonction développante*), i.e.

$$\text{inv}\beta = \tan \beta - \beta \quad (2.10)$$

L'objectif de cette partie de travail est de simuler la réponse dynamique des engrenages incluant le défaut de fissure et de poursuivre la relation entre ce dernier et les paramètres relatifs. La réponse vibratoire du système est causée par le contact des charges au niveau de l'engrènement qui varie avec le mouvement du point de contact le long de la ligne d'action. La transition est principalement due à un simple/double contact de paire de dents et à la variation de la rigidité d'engrènement durant ce contact. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier cette variation de rigidité durant la rotation d'engrenages. Dans ce chapitre, nous allons aborder la technique de calcul de rigidité en basant sur la méthode énergétique. Ce calcul est inspiré de [73].

## 2.2 Méthode de calcul de la rigidité d'engrènement

Nous allons considérer que la rigidité d'engrènement d'une paire de développantes de profils des dents d'engrenages droits (comme le montre la figure 2.2) est faite sans aucune erreur d'usinage. La rigidité des autres composantes d'engrenages va être prise en compte dans les prochaines sections. Nous supposons que les conditions de lubrification sont parfaites, ce qui signifie que le frottement est négligé dans cette étude.

Afin de simplifier le calcul de la rigidité, nous ne considérons que la rigidité d'engrènement. Le reste des composantes est considéré rigide. L'erreur de rigidité due à cette simplification peut être ignorée tant que nous nous intéressons à la différence entre les cas sain et défectueux.

Yang et Lin [34] proposent la méthode de l'énergie potentielle, qui peut être utilisée pour le calcul de la rigidité effective. Ils ont indiqué que l'énergie potentielle totale emmagasinée dans un système d'engrenages inclut trois parties : l'énergie *hertzienne*, l'énergie de *fléchissement* et l'énergie de *compression axiale*, qui peuvent être utilisées pour calculer respectivement la rigidité de contact Hertzien, la rigidité de fléchissement et la rigidité de compression axiale. Par contre, ils n'ont pas pris en considération l'énergie de cisaillement, qui va être incluse dans notre étude. Les détails seront données dans les deux sections suivantes.

### 2.2.1 Calcul de la rigidité de contact hertzien

Dans cette étude, nous supposons que les dents engagées sont deux corps élastiques isotropes. Yang and Sun [74] ont indiqué que "Selon la loi de Hertz, la compression élastique

de deux corps élastiques isotropiques peut être approximée par deux paraboloïdes dans le voisinage du contact. L'erreur de cette approximation va être inférieure à 0,5 %. Selon leur analyse, la rigidité du contact hertzien d'une paire de dents fabriquées de la même matière est constante le long de la ligne d'action. Ainsi, elle est indépendante de la position de contact. Cette constante peut être exprimée par [74] :

$$k_h = \frac{\pi E L}{4(1 - \nu^2)} \quad (2.11)$$

où  $E, L, \nu$  représentent le module de Young, la largeur de la dent, et le coefficient de Poisson, respectivement.

De cette expression, il est bien évident que lorsque la largeur de la dent change,  $k_h$  va changer en conséquence. Pour un engrenage parfait, la largeur de la surface travaillante effective demeure invariante.

L'énergie hertzienne est l'énergie potentielle emmagasinée dans le voisinage du point de contact, à cause de la déformation élastique des dents et elle peut être calculée par :

$$U_h = \frac{F^2}{2k_h} \quad (2.12)$$

où  $F$  représente la force agissant par la dent motrice dans le point de contact et  $k_h$  est la rigidité hertzienne effective dans la même direction que la force  $F$ .

## 2.2.2 Calcul des rigidités de fléchissement, de cisaillement et de compression axiale

Les énergies de fléchissement, de cisaillement et de compression axiale emmagasinées dans une dent peuvent être exprimées comme suit :

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b} \quad (2.13)$$

$$U_s = \frac{F^2}{2k_s} \quad (2.14)$$

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a} \quad (2.15)$$

avec  $k_b, k_s$  et  $k_a$  sont les rigidités effectives de fléchissement, de cisaillement et de compression axiale dans la même direction que la force  $F$ , respectivement.

D'après les propriétés de la développante du profil, la ligne d'action est la normale des profils des dents. Par conséquent, la force motrice  $F$  au niveau des dents en contact est souvent le long de la ligne d'action. Ainsi, la force  $F$  peut être décomposée en deux composantes perpendiculaires,  $F_b$  et  $F_a$  (voir Figure 2.3), qui peuvent être calculées de la manière suivante :

$$F_b = F \cos \alpha_1 \quad (2.16)$$

$$F_a = F \sin \alpha_1 \quad (2.17)$$

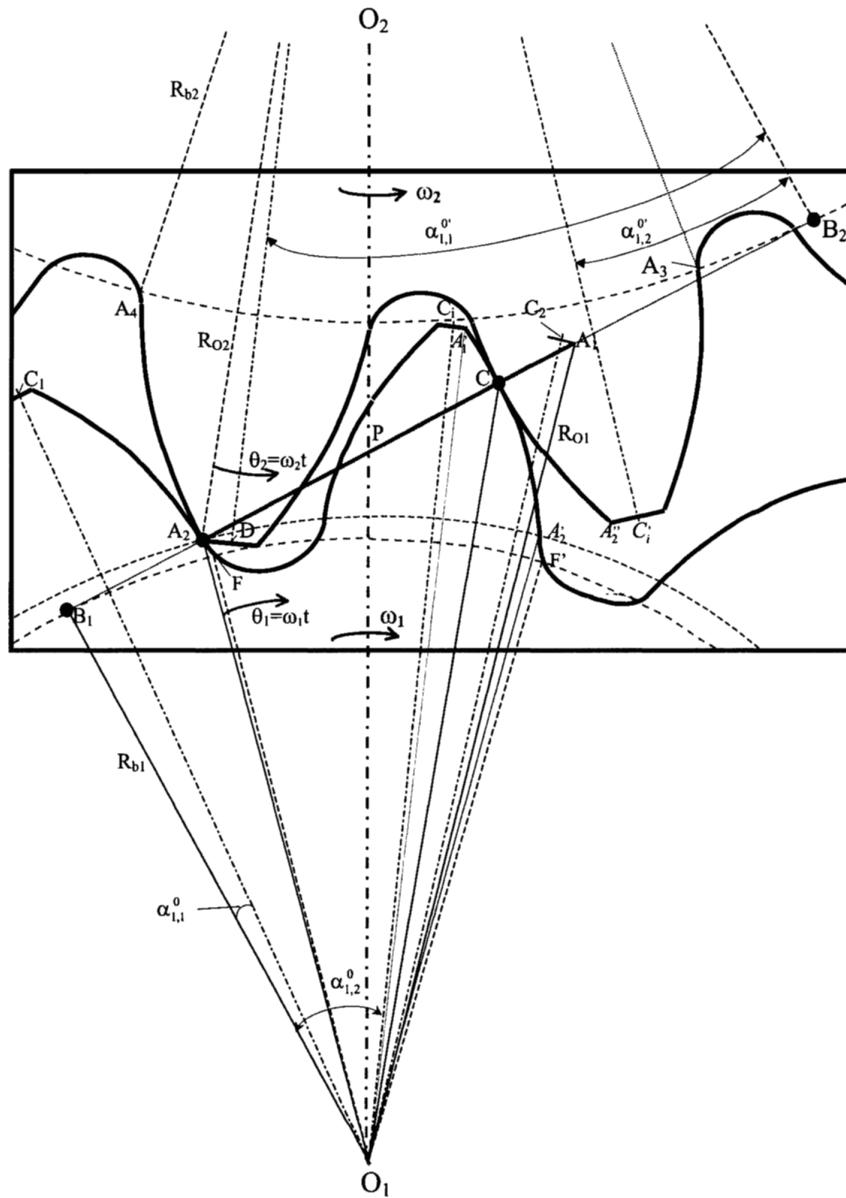


FIGURE 2.2 – Schéma d'engrènement d'une paire d'engrenages [34]

Comme le montre la figure (2.3),  $F_b$  fournit des effets de fléchissement et de cisaillement, tandis que  $F_a$  cause des effets de compression axiale et de fléchissement. Le couple  $M$  représente l'effet de fléchissement de  $F_a$ . Il est exprimé par :

$$M = F_a h \quad (2.18)$$

où  $h$  est la distance entre le point de contact et la ligne centrale de la dent, qui peut être obtenue à partir de l'expression ci-après :

$$h = R_b [(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1] \quad (2.19)$$

$\alpha_2$  représente la moitié de l'angle de la base de la dent (voir la figure 2.1).

Selon la géométrie de la développante de la dent, dans la figure (2.3), la distance  $d$  entre le point de contact et la racine de la dent peut être exprimée par :

$$d = R_b[(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2] \quad (2.20)$$

Dans cette étude, la dent d'engrenage est modélisée comme une poutre encastrée. Il est supposé que la base de la poutre (la racine de la dent) ne subit aucune déflexion [34].

L'énergie potentielle de fléchissement, basée sur la théorie des poutres, peut être obtenue par :

$$U_b = \int_0^d \frac{[F_b(d - x) - M]^2}{2EI_x} dx \quad (2.21)$$

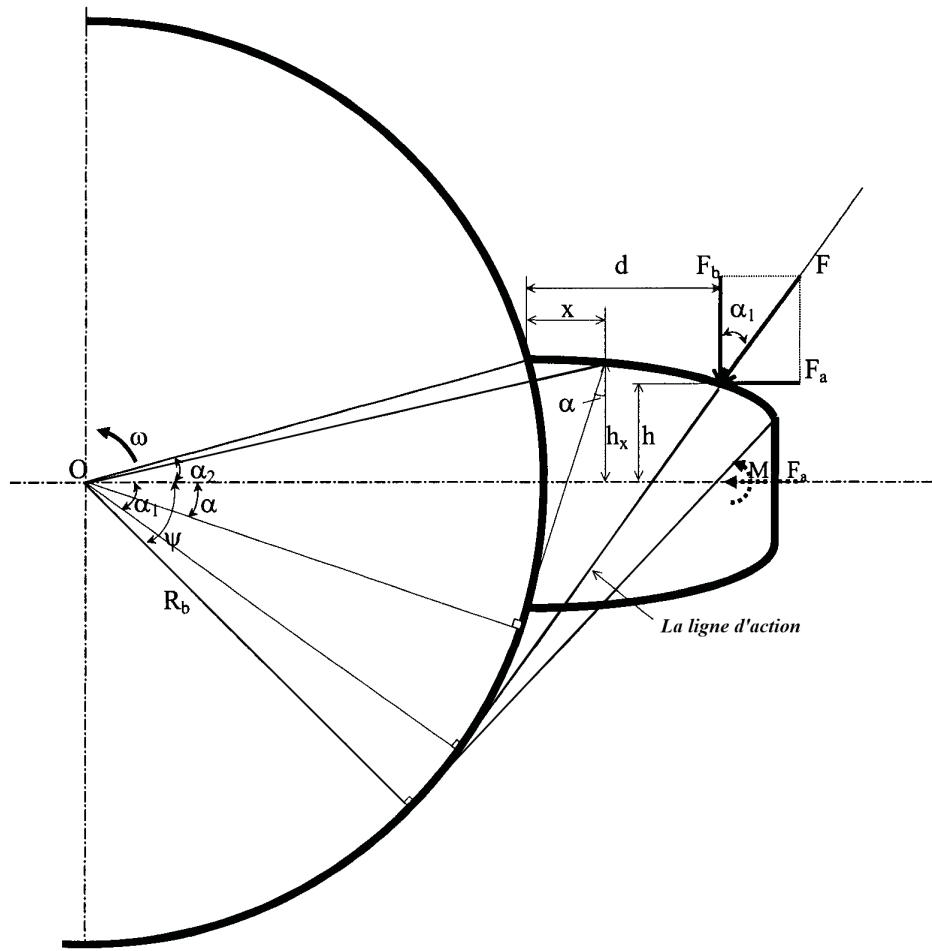


FIGURE 2.3 – La force élastique dans une dent [78]

avec  $I_x$  représente le moment d'inertie de surface et  $x$  est la distance par rapport à la racine de la dent.

Ce moment peut être calculé de la manière suivante :

$$I_x = \frac{1}{12}(2h_x)^3 L = \frac{2}{3}h_x^3 L \quad (2.22)$$

avec  $h_x$  est la distance entre le point de développante correspondant à la section qui se trouve à une distance  $x$  par rapport à la racine de la dent et la ligne centrale de cette dernière.  $h_x$  peut être calculé comme suit :

$$h_x = R_b[(\alpha + \alpha_2) \cos \alpha - \sin \alpha] \quad (2.23)$$

Afin d'étudier les propriétés des paramètres, pour certains déplacements angulaires du pignon/roue (le déplacement angulaire est l'angle effectué par le pignon/roue par rapport à un point de référence), il sera très pratique d'exprimer les relations mathématiques en fonction d'une variable angulaire plutôt que linéaire (réflétant le déplacement). À partir de la géométrie de développante des profils,  $x$  peut être exprimé par la formule suivante :

$$x = R_b[\cos \alpha - (\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha_2] \quad (2.24)$$

La dérivée de l'équation (2.24) est donnée par l'expression suivante :

$$dx = R_b(\alpha - \alpha_2) \cos \alpha. d\alpha \quad (2.25)$$

À partir de cette étape,  $\alpha$  devient la variable d'intégration plutôt que  $x$ . Nous remplaçons la formule de  $U_b$  de l'équation (2.13) dans le membre gauche de l'équation (2.21), et remplaçons  $F_b$ ,  $M$ ,  $d$ ,  $I_x$ ,  $x$  et  $dx$  des équations (2.16), (2.18), (2.20), (2.22), (2.24) et (2.25) dans le membre droit de l'équation (2.21). Après les simplifications, le résultat obtenu est :

$$\frac{1}{k_b} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha_1[(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (2.26)$$

D'autre part, l'énergie de cisaillement peut être exprimée comme suit :

$$U_s = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} dx \quad (2.27)$$

avec  $G$ , le module de cisaillement qui peut être déterminé par la formule suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.28)$$

Dans l'équation (2.27),  $A_x$  est la surface de la section qui peut être calculée par :

$$A_x = 2h_x L \quad (2.29)$$

Nous remplaçons la formule  $U_s$  de l'équation (2.14) dans le membre gauche de l'équation (2.27), et remplaçons  $F_b$ ,  $dx$ ,  $G$  et  $A_x$  des équations (2.16), (2.25), (2.28) et (2.29) dans le membre gauche de l'équation (2.27). Le résultat obtenu de la manière suivante :

$$\frac{1}{k_s} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (2.30)$$

D'une manière semblable, l'énergie de compression axiale est donnée par la formule suivante :

$$U_a = \int_0^d \frac{F_a^2}{2EA_x} dx \quad (2.31)$$

Nous remplaçons la formule de  $U_a$  de l'équation (2.15) dans le membre gauche de l'équation (2.31), et remplaçons  $F_a, dx$  et  $A_x$  des équations (2.17), (2.25) et (2.29) dans le membre droit de l'équation (2.31). Le résultat obtenu est donné par l'expression suivante :

$$\frac{1}{k_a} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha_1}{2EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (2.32)$$

Les équations (2.26), (2.30) et (2.32) montrent que pour une paire de dents avec un profil en développante, les rigidités de fléchissement, de cisaillement et de compression axiale sont en fonction de  $\alpha$  qui détermine la position du point de contact le long des surfaces des dents.

La sommation des énergies de contact hertzien, de fléchissement, de cisaillement et de compression axiale constitue l'énergie potentielle totale emmagasinée dans une seule paire de dents d'engrenages, qui peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{F^2}{2k_t} = U_h + U_{b1} + U_{s1} + U_{a1} + U_{b2} + U_{s2} + U_{a2} \\ &= \frac{F^2}{2} \left( \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec  $k_t$ , la rigidité effective totale d'engrènement d'une paire de dents dans la même direction que la force  $F$ . Elle est calculée grâce à la formule suivante :

$$k_t = \frac{1}{\left( \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} \right)} \quad (2.34)$$

Dans les équations (2.33) et (2.34), les indices 1 et 2 représentent le pignon et la roue, respectivement.

Le calcul des formules (équations (2.21), (2.26), (2.30), (2.32) et (2.34)) de rigidités qui sont en fonction de la variable  $\alpha$ , est obtenu en se basant sur la méthode de l'énergie potentielle [34].

## 2.3 Rigidité d'engrènement pour une (deux) paire (s) de contact

Dans cette partie, nous allons déduire les expressions du calcul concernant la rigidité d'engrènement, pour une durée correspondant à une(deux) paire(s) de contact.

Pour une paire de roues d'engrenages, pour laquelle le rapport de contact varie entre 1 et 2, la variation de la rigidité d'engrènement durant l'engagement d'une dent comporte principalement deux aspects : la variation de la rigidité durant une seule paire de contact et celle durant deux paires de contact. À cet effet, la période d'engrènement sera étudiée en détail tant que le nombre de paires de dents engagées n'est pas constant durant ce processus. Il est nécessaire de déterminer le lien entre le nombre de paires de dents engagées

et l'angle de déplacement du pignon/roue. De plus, la rigidité correspondant à n'importe quel déplacement angulaire de l'arbre peut être calculée par la suite.

En se référant à la figure (2.2), dans cette étude, nous définissons la paire de dents engagée à gauche comme "*la première paire*" et celle qui est à droite comme "*la deuxième paire*", quand il y a deux paires de dents qui s'engrènent simultanément.

### 2.3.1 Calcul de la rigidité d'engrènement

En se basant sur l'équation (2.34), la rigidité effective totale qui se calcule selon l'équation (2.35), pour chaque paire de dents engagée :

$$k_{t,i} = \frac{1}{\left( \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1,i}} + \frac{1}{k_{s1,i}} + \frac{1}{k_{a1,i}} + \frac{1}{k_{b2,i}} + \frac{1}{k_{s2,i}} + \frac{1}{k_{a2,i}} \right)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.35)$$

Les rigidités  $k_{b1,i}$ ,  $k_{s1,i}$ ,  $k_{a1,i}$ ,  $k_{b2,i}$ ,  $k_{s2,i}$  et  $k_{a2,i}$  peuvent être exprimées de la manière suivante (en se référant aux équations (2.26), (2.30) et (2.32)) :

$$\frac{1}{k_{b1,i}} = \int_{-\alpha_{1,i}}^{\alpha_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha_{1,i}[(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{k_{s1,i}} = \int_{-\alpha_{1,i}}^{\alpha_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_{1,i}}{EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (2.37)$$

$$\frac{1}{k_{a1,i}} = \int_{-\alpha_{1,i}}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha_{1,i}}{2EL[\sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{k_{b2,i}} = \int_{-\alpha'_{1,i}}^{\alpha'_2} \frac{3\{1 + \cos \alpha'_{1,i}[(\alpha'_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha}{2EL[\sin \alpha + (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha]^3} d\alpha \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{k_{s2,i}} = \int_{-\alpha'_{1,i}}^{\alpha'_2} \frac{1.2(1 + \nu)(\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha'_{1,i}}{EL[\sin \alpha + (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{k_{a2,i}} = \int_{-\alpha'_{1,i}}^{\alpha'_2} \frac{(\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha'_{1,i}}{2EL[\sin \alpha + (\alpha'_2 - \alpha) \cos \alpha]} d\alpha \quad (2.41)$$

où  $i = 1$  pour la première paire de dents lorsque deux paires de dents sont engagées et  $i = 2$  pour la seconde paire.  $\alpha_2$  et  $\alpha'_2$  sont respectivement les moitiés des angles des racines des dents du pignon et de la roue, et sont constantes pour une paire d'engrenages donnée. Ils sont calculés à partir de l'expression ci-après :

$$\alpha_2 = \angle C_i O_1 F = \frac{\pi}{2N_1} + \mathbf{inv} \alpha_0 \quad (2.42)$$

$$\alpha'_2 = \angle C'_i O_2 A_3 = \frac{\pi}{2N_2} + \mathbf{inv} \alpha_0 \quad (2.43)$$

avec  $N_1$  et  $N_2$ , les nombres de dents du pignon et de la roue, respectivement.

Pour la première paire de dents, étant donné le point de contact  $M$  (comme montré dans la figure 2.1), nous pouvons trouver les équations des angles  $\alpha_{1,1}$  (correspondant à l'angle  $\alpha_1$  du pignon) et  $\alpha'_{1,1}$  (correspondant à l'angle  $\alpha_1$  de la roue) (voir la figure 2.3).

Nous considérons le point  $A_2$  montré dans la figure (2.2), comme un point de référence

qui correspond au point initial d'engrènement de la première paire de dents. En ce point, les déplacements angulaires des roues  $\theta_1$  et  $\theta_2$  valent zéro. L'angle correspondant  $\alpha_{1,1}^0$  peut être exprimé par :

$$\alpha_{1,1}^0 = \angle B_1 O_1 C_1 = \angle B_1 O_1 A_2 - \angle C_1 O_1 A_2 \quad (2.44)$$

où  $\angle B_1 O_1 A_2$  est calculé par la formule suivante :

$$\angle B_1 O_1 A_2 = \arccos \frac{R_{b1}}{O_1 A_2} \quad (2.45)$$

Dans l'équation (2.45),  $\overline{O_1 A_2}$  est obtenu par la formule suivante :

$$\overline{O_1 A_2} = \sqrt{R_{O2}^2 + \overline{O_1 O_2}^2 - 2R_{O2}\overline{O_1 O_2} \cos \angle O_1 O_2 A_2} \quad (2.46)$$

où  $\angle O_1 O_2 A_2$  peut être calculé par :

$$\angle O_1 O_2 A_2 = \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} - \alpha_0 \quad (2.47)$$

Dans l'équation (2.44),  $\angle C_1 O_1 A_2$  peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} \angle C_1 O_1 A_2 &= \angle C_1 O_1 F - \angle A_2 O_1 F \\ &= \alpha_2 - \mathbf{inv} \angle B_1 O_1 A_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nous remplaçons  $\angle C_1 O_1 A_2$  de l'équation (2.48) dans l'équation (2.44) afin d'obtenir :

$$\alpha_{1,1}^0 = \angle B_1 O_1 A_2 - \alpha_2 + \mathbf{inv} \angle B_1 O_1 A_2 = \tan \angle B_1 O_1 A_2 - \alpha_2 \quad (2.49)$$

Nous combinons les équations (2.42), (2.45), (2.47) et (2.2) - (2.6) avec l'équation (2.49). Après les simplifications, l'angle  $\alpha_{1,1}^0$  est donné par la formule :

$$\alpha_{1,1}^0 = -\frac{\pi}{2N_1} - \mathbf{inv} \alpha_0 + \tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2+2)^2 + (N_1+N_2)^2 - 2(N_2+2)(N_1+N_2) \cos \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2+2} - \alpha_0 \right)}} \right] \quad (2.50)$$

L'équation (2.50) donne la formule de calcul concernant  $\alpha_{1,1}$  quand le déplacement angulaire du pignon est nul. Lorsque le déplacement angulaire vaut  $\theta_1$  (comme il est montré dans la figure 2.2), l'angle  $\alpha_{1,1}$  devient :

$$\alpha_{1,1} = \theta_1 + \alpha_{1,1}^0 = \theta_1 - \frac{\pi}{2N_1} - \mathbf{inv} \alpha_0 + \tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2+2)^2 + (N_1+N_2)^2 - 2(N_2+2)(N_1+N_2) \cos \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2+2} - \alpha_0 \right)}} \right] \quad (2.51)$$

Pour la contrepartie de  $\alpha_{1,1}^0$ , l'angle  $\alpha_{1,1}^{0'}$  (correspondant à la roue) peut être exprimé par :

$$\alpha_{1,1}^{0'} = \angle B_2 O_2 D = \angle B_2 O_2 A_2 - \angle A_2 O_2 D \quad (2.52)$$

Les deux angles  $\angle B_2 O_2 A_2$  et  $\angle A_2 O_2 D$  peuvent être calculés comme suit :

$$\angle B_2 O_2 A_2 = \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} \quad (2.53)$$

$$\angle A_2 O_2 D = \alpha'_2 - \angle A_4 O_2 A_2 = \alpha'_2 - \operatorname{inv} \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} \quad (2.54)$$

Nous remplaçons les angles  $\angle B_2 O_2 A_2$  de l'équation (2.53) et  $\angle A_2 O_2 D$  de l'équation (2.54) dans l'équation (2.52) pour obtenir :

$$\alpha_{1,1}^{0'} = \tan \left( \arccos \frac{R_{b2}}{R_{O2}} \right) - \alpha'_2 \quad (2.55)$$

Encore une fois, nous remplaçons les équations (2.3), (2.5) et (2.43) dans l'équation (2.55) et nous simplifions le calcul. Le résultat obtenu est :

$$\alpha_{1,1}^{0'} = \tan \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} - \operatorname{inv} \alpha_0 \quad (2.56)$$

L'équation (2.56) donne la formule de calcul de l'angle  $\alpha_{1,1}'$  au moment où le déplacement angulaire de l'engrenage est nul. Lorsque le déplacement angulaire de la roue vaut  $\theta_2$  (à ce moment, le déplacement angulaire correspondant au pignon vaut  $\theta_1$  (voir la figure 2.2)), l'angle  $\alpha_{1,1}'$  devient :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}' &= \alpha_{1,1}^{0'} - \theta_2 \\ &= \tan \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} - \operatorname{inv} \alpha_0 - \theta_2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le point de référence du déplacement (point  $A_2$  dans la figure 2.2) est sélectionné comme le point de début d'engrènement de deux paires de dents. Le lien entre les vitesses angulaires du pignon et de la roue,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , est donné par :

$$\omega_2 = \frac{N_1}{N_2} \omega_1 \quad (2.58)$$

Ainsi, nous pouvons obtenir :

$$\theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \theta_1 \quad (2.59)$$

Nous substituons  $\omega_2$  de l'équation (2.59) dans l'équation (2.57). Nous obtenons :

$$\alpha_{1,1}' = \tan \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} - \operatorname{inv} \alpha_0 - \frac{N_1}{N_2} \theta_1 \quad (2.60)$$

Les équations (2.51) et (2.60) donnent les formules de calcul des angles  $\alpha_{1,1}$  et  $\alpha_{1,1}'$ , respectivement, et concernent la première paire de dents. De la même façon, à propos de la deuxième paire de dents, nous allons calculer les angles  $\alpha_{1,2}$  et  $\alpha_{1,2}'$  (voir la figure 2.2). Concernant l'angle  $\alpha_{1,2}$ , la différence par rapport à l'angle  $\alpha_{1,1}$  est seulement égale à  $\frac{2\pi}{N_1}$ . Alors, il peut être exprimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \alpha_{1,1} + \frac{2\pi}{N_1} = \theta_1 + \frac{3\pi}{2N_1} - \operatorname{inv} \alpha_0 + \\ &= \tan \left( \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2+2)^2 + (N_1+N_2)^2 - 2(N_2+2)(N_1+N_2) \cos \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2+2} - \alpha_0 \right)}} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Par conséquent, la différence entre les angles  $\alpha'_{1,2}$  et  $\alpha'_{1,1}$  est seulement égale à  $\frac{2\pi}{N_2}$ , mais le signe est négatif, i.e.  $-\frac{2\pi}{N_2}$ . D'où l'expression devient :

$$\begin{aligned}\alpha'_{1,2} &= \alpha'_{1,1} - \frac{2\pi}{N_2} \\ &= \tan\left(\arccos\frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2}\right) - \frac{5\pi}{2N_2} - \frac{N_1}{N_2}\theta_1 - \mathbf{inv}\alpha_0\end{aligned}\quad (2.62)$$

Maintenant, nous possédons toutes les expressions des angles  $\alpha_{1,1}$ ,  $\alpha'_{1,1}$ ,  $\alpha_{1,2}$  et  $\alpha'_{1,2}$ , qui seront utilisées pour la simulation de la dynamique des engrenages. Ces expressions vont être validées par les résultats de simulation.

Concernant le double contact des paires de dents, il se produit lorsqu'il y a deux paires de dents qui s'engrènent simultanément. La rigidité effective pour chaque paire de dents peut être calculée selon l'équation (2.35) quand  $i = 1, 2$ . Nous considérons que la rigidité effective totale  $k_t$  est égale à la somme des rigidités de deux paires de dents  $k_{t,1}$  et  $k_{t,2}$ . Alors,  $k_t$  totale peut être obtenue à partir de l'expression ci-après :

$$\begin{aligned}k_t &= k_{t,1} + k_{t,2} \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\frac{1}{k_{h,i}} + \frac{1}{k_{b1,i}} + \frac{1}{k_{s1,i}} + \frac{1}{k_{a1,i}} + \frac{1}{k_{b2,i}} + \frac{1}{k_{s2,i}} + \frac{1}{k_{a2,i}}}\end{aligned}\quad (2.63)$$

Pour un seul contact entre les paires de dents, la rigidité effective d'engrènement peut être calculée grâce à l'équation (2.34).

### 2.3.2 Durée d'un seul (deux) contact (s) de paires de dents

Dans cette étude, nous définissons le déplacement angulaire par l'angle effectué par le pignon / la roue à partir d'un point de référence. Nous sélectionnons le point  $A_2$  montrée dans la figure (2.2) comme un point de référence, et qui correspond au point initial d'engrènement de la première paire de dents, i.e. le point où le double contact de paires de dents commence. Correspondant à ce point initial  $A_2$ , le point de contact au niveau de la seconde paire de dents engagée est le point  $C$ . En ce point, les déplacements angulaires des roues  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les deux nuls. Quand les déplacements angulaires progressent, le point de contact se déplace du point  $C$  jusqu'au point  $A_1$ . Par conséquent, le point  $A'_1$  dans le pignon se déplace jusqu'au point  $A_1$ . L'angle  $\angle A'_1 O_1 A_1$  va être égale à la durée du déplacement angulaire qui est défini par  $\theta_d$ . Ainsi, durant  $\theta_d$ , il y a toujours deux paires de dents qui s'entraînent simultanément. Après le point  $A_1$ , la seconde paire de dents se sépare. Une durée d'un seul contact de paires de dents commence. Quand le déplacement angulaire atteint  $\theta_1 = 2\pi/N_1$ , nous revenons à une situation similaire à celle de la position zéro. Le déplacement angulaire correspondant est défini par  $\theta_s$ . Selon la géométrie de la développante du profil (voir la figure 2.2), l'angle  $\theta_d$  est égal à  $\angle A'_1 O_1 A_1$  et qui peut être calculé par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\theta_d &= \tan\left(\arccos\frac{N_1 \cos \alpha_0}{N_1 + 2}\right) - \frac{2\pi}{N_1} - \\ &\quad \tan\left[\arccos\frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos\left(\arccos\frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} - \alpha_0\right)}}\right]\end{aligned}\quad (2.64)$$

Ainsi, en basant sur l'équation (2.64), quand il y a deux paires de dents qui s'engrènent simultanément, l'intervalle du déplacement angulaire peut être exprimée par :

$$\theta_1 \in \left[ (n-1) \frac{2\pi}{N_1}, \theta_d + (n-1) \frac{2\pi}{N_1} \right] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.65)$$

La durée de l'angle  $\theta_s$  correspondant à la durée d'un seul contact de paires de dents durant une seule période d'engrènement est donnée par :

$$\theta_s = \frac{2\pi}{N_1} - \theta_d \quad (2.66)$$

L'intervalle du déplacement angulaire peut être exprimée par la formule suivante :

$$\theta_1 \in \left[ (n-1) \frac{2\pi}{N_1} + \theta_d, (n-1) \frac{2\pi}{N_1} + (\theta_d + \theta_s) \right] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.67)$$

### 2.3.3 Validation des équations

Les équations (2.64) et (2.66) peuvent être validées par la vérification du *rapport de contact*, qui est un indicateur de répartition de charge entre les dents étant en engrènement et il est appliqué pour spécifier le nombre moyen de paires de dents en contact. En effet, il existe deux définitions pour ce terme. La première est "le rapport de la longueur de la partie travaillante de la ligne d'action au pas de base" [72, 75]. L'autre est "le nombre moyen de paires de dents en contact en fonction du déplacement angulaire" [72]. Les deux définitions sont utilisées par les chercheurs afin d'expliquer la signification physique du terme *rapport de contact*. La première est une relation en terme de "la distance (ligne)" et la deuxième est une relation en terme de "l'angle". Tandis que la première est plus couramment utilisée, la deuxième est plus utile dans notre étude. La formule de la seconde définition peut utiliser les angles dont les formules de calcul respectives sont déjà développées dans ce chapitre. Pour le même terme du "rapport de contact", nous utilisons deux définitions à partir des deux différents angles (relation linéaire / angulaire). Nous validons la seconde définition en exploitant les équations (2.64) et (2.66). Ainsi, si ces deux résultats sont cohérents, les équations développées seront validées tant que nous utilisons les équations dérivées pour obtenir le second résultat.

En se basant sur la première définition du rapport de contact, il peut être exprimé comme suit :

$$C_{r1} = \frac{\overline{A_1 A_2}}{p_b} \quad (2.68)$$

où  $p_b$  est le pas circulaire de base, qui peut être exprimé par :

$$p_b = p \cos \alpha_0 \quad (2.69)$$

avec  $p$  est le pas circulaire des roues, qui peut être défini par la formule :

$$p = \frac{\pi}{P} \quad (2.70)$$

où  $P$  est le pas diamétral des roues accouplées.

Nous substituons les paramètres des équations (2.1), (2.69), (2.4), (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.68). Nous obtenons :

$$C_{r1} = \frac{\sqrt{(N_1 + 2)^2 - (N_1 \cos \alpha_0)^2} + \sqrt{(N_2 + 2)^2 - (N_2 \cos \alpha_0)^2} - (N_1 + N_2) \sin \alpha_0}{2\pi \cos \alpha_0} \quad (2.71)$$

En se basant sur la dernière description du rapport de contact, nous pouvons le calculer de la manière suivante :

$$C_{r2} = \frac{\theta_s + 2\theta_d}{\frac{2\pi}{N_1}} = \frac{N_1}{2\pi} \left\{ \tan \left( \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{N_1 + 2} \right) - \tan \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha_0}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_0}{N_2 + 2} - \alpha_0 \right)}} \right] \right\} \quad (2.72)$$

Pour tester l'exactitude des équations (2.64) et (2.66), nous pouvons comparer les rapports calculés par les équations (2.71) et (2.72), respectivement. Dans notre étude, seuls les engrenages sans sous-cotation seront considérés. (La sous-cotation est un cas indésirable durant la fabrication des engrenages, et qui met le point initial de la développante hors du cercle de base [72]. Sous ces conditions, l'engrènement des roues ne va pas être selon la développante durant certaines périodes. La sous-cotation va être présente quand le nombre de dents du pignon est relativement petit). Dans ce cas, le point initial de la développante du profil appartient au cercle de base. Telle que le montre la figure (2.2), la distance entre le point initial d'engrènement  $A_2$  et le centre du pignon ne peut être inférieure au rayon du cercle de base afin d'assurer que le contact soit le long de la développante.

Pour plus de commodité, nous définissons l'angle de pression pour rendre la longueur  $\overline{A_2 O_1}$  égale au rayon du cercle de base, comme un *angle de pression critique*  $\alpha_{0b}$ . En donnant les nombres de dents dans une paire d'engrenages,  $\alpha_{0b}$  peut être obtenu par la solution de l'équation suivante :

$$N_1 \cos \alpha_{0b} = \sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha_{0b}}{N_2 + 2} - \alpha_{0b} \right)} \quad (2.73)$$

En basant sur l'équation (2.73), nous pouvons obtenir les angles de pression critiques pour différents nombres de dents d'engrenages.

Selon l'équation (10.5.4) dans [72], l'angle de pression minimal sans sous-cotation peut être calculé par :

$$\alpha_{0m} = \arcsin \sqrt{\frac{2}{N_1}} \quad (2.74)$$

La différence entre l'angle de pression minimal et l'angle critique peut être exprimé par :

$$\Delta \alpha_0 = \alpha_{0m} - \alpha_{0b} \quad (2.75)$$

Nous constatons que les résultats de calcul du *rapport de contact* par les équations (2.71) et (2.72) sont identiques à condition que l'angle de pression soit supérieur à l'angle de pression  $\alpha_{0b}$ .

## 2.4 Relation entre la rigidité d'engrènement et le déplacement angulaire

Pour une paire d'engrenages en acier avec un angle de pression égal à  $20^\circ$ , un nombre de dents 25/30, un pas diamétral  $P = 8 \text{ pouce}^{-1}$  et une largeur de dent  $L = 20 \text{ mm}$ , le déplacement angulaire du pignon durant une seule période d'engrènement est de  $14.4^\circ (= 360^\circ/N_1)$ .

Toutes les composantes de rigidité sont maintenant déterminées. La rigidité effective totale d'engrènement pour une seule période d'engrènement peut être obtenue grâce aux équations (2.63) et (2.34). Cette rigidité varie avec le déplacement angulaire du pignon. Dans une période d'engrènement, la valeur de la rigidité monte d'abord. Après avoir atteint le point maximal, elle descend jusqu'à ce qu'il y est un point discontinu qui correspond au point de transition de deux contacts à un seul contact entre les paires de dents d'engrenages. Après ce point, la durée d'un seul contact entre les paires de dents engagées commence, et donc la valeur de la rigidité monte encore une fois. La figure (2.5) montre l'allure de variation de la rigidité d'engrènement durant une demi-période de rotation qui correspond à 12.5 périodes d'engrènement. Il est bien évident que cette rigidité varie périodiquement avec la période d'engrènement.

Par comparaison, si la rigidité de cisaillement n'était pas considérée dans le calcul de la rigidité d'engrènement, la durée de rigidité du double et du seul contact entre les paires de dents sera calculée selon l'équation (2.63) en se débarrassant des termes  $k_{s1,i}$  et  $k_{s2,i}$  et l'équation (2.34) en éliminant les termes  $k_{s1}$  et  $k_{s2}$ .

En basant sur les formules de calcul de la rigidité d'engrènement des roues parfaites, nous allons aborder le problème des fissures dans la section suivante.

## 2.5 Rigidité d'engrènement d'un pignon avec une dent fissurée

Nous supposons qu'il existe une fissure dans une dent du pignon et sa profondeur  $q_0$  est constante le long de largeur de la dent. Nous supposons aussi que la dent fissurée est toujours considérée comme une poutre encastrée. Dans cette étude, la condition aux limites est que la racine de cette dent ne connaît aucune flexion.

D'autre part, nous allons considérer seulement le cas où  $q_0$  est inférieur à la moitié de l'épaisseur de la base de la dent (voir la figure 2.1). Ce cas correspond à une fissure relativement faible, qui est le plus couramment rencontré réellement dans l'industrie. Quand la profondeur dépasse la moitié de la largeur de la dent, cette dernière va rapidement se briser [77]. L'angle d'intersection  $\nu$  entre la fissure et la ligne centrale de la dent est également constant (voir la figure 2.4). La courbe du profil de la dent reste toujours parfaite. Dans ce cas, et en se basant sur l'équation (2.11), la rigidité du contact hertzien reste toujours constante tant que la surface travaillante de la dent n'a subit aucun défaut et la largeur  $L$  de cette surface est toujours constante. Concernant la rigidité de la compression

axiale, elle va être considérée identique à celle des conditions parfaites tant que la partie fissurée peut encore supporter la force de la compression axiale comme si aucune fissure n'existe. Par conséquent, avec une dent fissurée, les rigidités hertzienne et de compression axiale peuvent être toujours calculées selon les équations (2.11) et (2.32), respectivement.

Cependant, les rigidités de fléchissement et de cisaillement changeront à cause de l'influence de la fissure. En se référant aux figures (2.3), qui montre la définition de certains symboles utilisés dans les équations (2.76) et (2.77), et la figure (2.4) où la fissure se manifeste, le moment d'inertie effectif de la surface et la section transversale à une distance  $x$  à partir de la racine de la dent seront calculés grâce aux équations (2.76) (au lieu de  $I_x$  de l'équation (2.22)) et (2.77) (au lieu de  $A_x$  de l'équation (2.29)), respectivement.

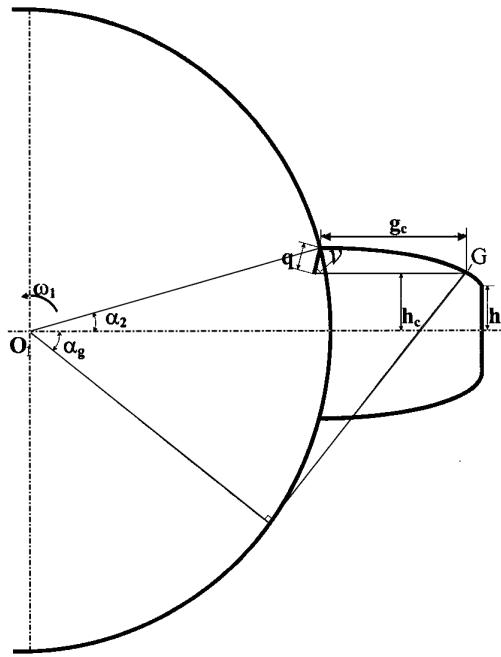


FIGURE 2.4 – Dent fissurée [78].

$$I_{xc} = \begin{cases} \frac{1}{12}(h_c + h_x)^3 L, & \text{if } x \leq g_c \\ \frac{1}{12}(2h_x)^3 L = \frac{2}{3}h_x^3 L, & \text{if } x > g_c \end{cases} \quad (2.76)$$

$$A_{xc} = \begin{cases} (h_c + h_x)L, & \text{if } x \leq g_c \\ 2h_xL, & \text{if } x > g_c \end{cases} \quad (2.77)$$

où  $h_x$  peut être obtenu par l'équation (2.23), et  $h_c$  est la distance entre la racine de la fissure et la ligne centrale de la dent et qui correspond au point  $G$  sur le profil de la dent et l'angle  $\alpha_g$  (voir la figure 2.4).  $h_c$  peut être calculé par :

$$h_c = R_{b1} \sin \alpha_2 - q \sin \nu \quad (2.78)$$

En suivant la même procédure pour obtenir l'équation (2.26) dans la section 2.2.2, la formule correspondant aux rigidités de fléchissement et de cisaillement sous la présence de fissure peut être obtenue selon différents cas.

**a.** Quand  $h_c < h_r$  ou quand  $h_c \geq h_r$  et  $\alpha_1 \leq \alpha_g$

Comme il est montré dans la figure (2.4),  $h_r$  est la moitié de la largeur de racine de la dent (voir la figure 2.1). Dans ce cas,  $x$  présenté dans la figure (2.3) est toujours inférieur ou égal à  $g_c$  montré dans la figure (2.4). Ainsi,  $I_{xc}$  et  $A_{xc}$  doivent être calculés par les membres supérieurs des équations (2.76) et (2.77), respectivement. Nous substituons  $h_c$  de l'équation (2.78) et  $h_x$  de l'équation (2.23) dans les équations (2.76) et (2.77). Nous obtenons les résultats suivants :

$$I_{xc} = \frac{1}{12} \{ R_{b1} [\sin \alpha_2 + (\alpha + \alpha_2) \cos \alpha - \sin \alpha] - q \sin \nu \}^3 L \quad (2.79)$$

$$A_{xc} = \{ R_{b1} [\sin \alpha_2 + (\alpha + \alpha_2) \cos \alpha - \sin \alpha] - q \sin \nu \} L \quad (2.80)$$

Nous remplaçons  $I_x$  de l'équation (2.21) et  $A_x$  de l'équation (2.27) par  $I_{xc}$  et  $A_{xc}$ , respectivement. L'équation (2.21) devient :

$$U_b = \int_0^d \frac{[F_b(d-x) - M]^2}{2EI_{xc}} dx \quad (2.81)$$

et l'équation (2.27) devient :

$$U_s = \int_0^d \frac{1.2F_b^2}{2GA_{xc}} dx \quad (2.82)$$

Nous substituons  $U_b$  de l'équation (2.13) dans le membre gauche de l'équation (2.81), et remplaçons  $F_b$ ,  $M$ ,  $d$ ,  $I_{xc}$ ,  $x$ , et  $dx$  des équations (2.16), (2.18), (2.20), (2.79), (2.24) et (2.25) dans le membre droit de l'équation (2.81). Après simplifications, nous obtenons :

$$\frac{1}{k_{b_{crack}}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{12\{1 + \cos \alpha_1 [(\alpha_2 - \alpha) \sin \alpha - \cos \alpha]\}^2 (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha}{EL \left[ \sin \alpha_2 - \frac{q}{R_{b1}} \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]^3} d\alpha \quad (2.83)$$

Nous substituons  $U_s$  de l'équation (2.14) dans le membre gauche de l'équation (2.82) et substituons  $F_b$ ,  $A_{xc}$ ,  $x$ , et  $dx$  des équations (2.16), (2.80), (2.24) et (2.25) dans le membre droit de l'équation (2.82). Après simplifications, nous obtenons le résultat suivant :

$$\frac{1}{k_{s_{crack}}} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{2.4(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \cos^2 \alpha_1}{EL \left[ \sin \alpha_2 - \frac{q}{R_{b1}} \sin \nu + \sin \alpha + (\alpha_2 - \alpha) \cos \alpha \right]} d\alpha \quad (2.84)$$

**b.** Quand  $h_c \geq h_r$  et  $\alpha_1 > \alpha_g$

Dans ce cas, le point de contact d'une paire de roues dans le profil de la dent va être entre le point  $G$  et le sommet de la dent (voir les figures (2.3) et (2.4)). Ainsi, il existe deux cas pour calculer  $I_{xc}$  et  $A_{xc}$ ,  $x \leq g_c$  (correspondant à  $\alpha \leq \alpha_g$ ) et  $x > g_c$  (correspondant à  $\alpha > \alpha_g$ ), comme il est montré dans les équations (2.76) et (2.77). L'ensemble des intégrations pour le calcul de  $k_b$  et  $k_s$  se fait en deux parties. La première partie, correspondant à  $\alpha \leq \alpha_g$ , et peut être calculée en utilisant les équations (2.81) et (2.82). Les limites inférieures et supérieures de l'intégration de la variable  $\alpha$  sont  $-\alpha_g$  et  $\alpha_2$ , respectivement. La seconde partie, correspondant à  $\alpha > \alpha_g$ , peut être obtenue en se référant aux équations (2.21) et (2.27) avec la limite inférieure  $-\alpha_1$  et la limite supérieure

$-\alpha_g$ . Ainsi, les rigidités de fléchissement et de cisaillement seront égales à la sommation de ces deux parties :

$$\frac{1}{k_{b_{crack}}} = \int_{-\alpha_g}^{\alpha_2} \frac{12\{1+\cos\alpha_1[(\alpha_2-\alpha)\sin\alpha-\cos\alpha]\}^2(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha}{EL\left[\sin\alpha_2 - \frac{q}{R_{b1}}\sin\nu + \sin\alpha + (\alpha_2-\alpha)\cos\alpha\right]^3} d\alpha \\ + \int_{-\alpha_1}^{-\alpha_g} \frac{3\{1+\cos\alpha_1[(\alpha_2-\alpha)\sin\alpha-\cos\alpha]\}^2(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha}{2EL[\sin\alpha + (\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]^3} d\alpha \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{k_{s_{crack}}} = \int_{-\alpha_g}^{\alpha_2} \frac{2.4(1+\nu)(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha\cos^2\alpha_1}{EL\left[\sin\alpha_2 - \frac{q}{R_{b1}}\sin\nu + \sin\alpha + (\alpha_2-\alpha)\cos\alpha\right]} d\alpha \\ + \int_{-\alpha_1}^{-\alpha_g} \frac{1.2(1+\nu)(\alpha_2-\alpha)\cos\alpha\cos^2\alpha_1}{EL[\sin\alpha + (\alpha_2-\alpha)\cos\alpha]} d\alpha \quad (2.86)$$

**Tableau 2.1 :** Les paramètres du système d'engrenages

Type d'engrenage	standard droit
Matériau	Acier
Module de Young	$E = 2.068 \times 10^{11} Pa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Nombre de dents	$N_1 = 25$ et $N_2 = 30$
Angle de pression	$\alpha_0 = 20^\circ$
Pas diamétral	$P = 8 \text{ pouce}^{-1}$
Rayon du cercle de base du pignon	$R_{b1} = 0.03729m$
Rayon du cercle de base de la roue	$R_{b2} = 0.044753m$
Largeur de la dent	$L = 0.016m$
Masse du pignon	$m_1 = 0.3083kg$
Masse de la roue	$m_2 = 0.4439kg$
Rapport de contact	$C_r = 1.6326$
Moment d'inertie du pignon	$I_1 = m_1 R_{p1}^2 / 2 = 0.0002428kgm^2$
Moment d'inertie de la roue	$I_2 = m_2 R_{p2}^2 / 2 = 0.0005034kgm^2$
Fréquence de rotation du moteur	$f_1 = 30Hz$
Fréquence d'engrènement	$f_m = 750Hz$
Couple du moteur	$M_1 = 20.8Nm$
Couple de la charge	$M_2 = 11.9Nm$
Rigidité radiale des roulements	$k_r = 6.56 \times 10^8 N/m$
Coefficient d'amortissement des roulements	$c_r = 1.8 \times 10^5 Ns/m$

En présence d'une fissure dans le pignon, la rigidité effective totale d'engrènement peut être exprimée comme suit :

$$k_{t_{crack}} = \frac{1}{\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b_{crack}}} + \frac{1}{k_{s_{crack}}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}}} \quad (2.87)$$

En considérant une fissure dans la racine d'une dent du pignon avec une profondeur  $q_0 = 0.6\text{mm}$  et un angle  $\nu = 45^\circ$  (comme montré dans la figure 2.4). Dans ce cas, les rigidités du contact hertzien et de compression axiale peuvent être encore calculées selon les équations (2.11) et (2.32), respectivement.

Cependant, les rigidités de fléchissement et de cisaillement changent à cause de l'influence de la fissure, et peuvent être calculées par les équations (2.83), (2.84), (2.85) et (2.86). La rigidité totale d'engrènement  $k_{t_{crack}}$  peut être calculée par l'équation (2.87). Le résultat est montré dans la figure (2.5).

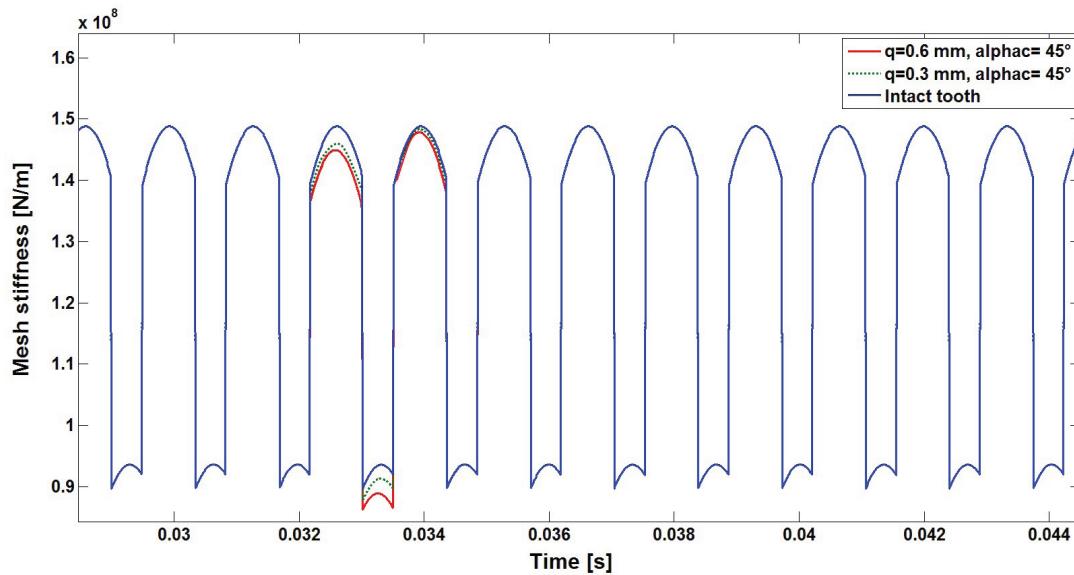


FIGURE 2.5 – Allure de la rigidité d'engrènement.

## 2.6 Modélisation de la dynamique d'engrenages

Dans cette partie, un modèle dynamique d'engrenages d'un seul étage sera simulé afin d'étudier la signature de la fissure dans les signaux vibratoires en considérant les variations de la rigidité et les vibrations latérales. Nous étudions le signal d'accélération obtenu par des méthodes analytiques et/ou numériques, sous certaines conditions.

Dans le premier chapitre, nous avons brièvement décrit les modèles de la dynamique des engrenages utilisés par d'autres chercheurs. Parmi ces modèles, un modèle dynamique considérant les mouvements latéraux est idéal pour étudier les propriétés de la réponse vibratoire d'un système d'engrenages, en particulier pour l'étude de la réponse du carter

d'engrenages. La raison est que nous effectuons souvent la mesure des accélérations latérales par des capteurs montés à proximité des roulements, sur le carter des engrenages. Afin de simplifier le calcul, nous supposons que le carter est rigide et par conséquent la propagation des vibrations le long du carter sera linéaire. Ainsi, les propriétés de la réponse vibratoire des engrenages dans les directions latérales sont conformes avec celles du carter du système.

La figure (2.6) montre le modèle utilisé dans notre étude. Les définitions de certains symboles sont présentés dans la page (56). C'est un modèle masse-ressort-amortisseur d'un seul étage à 6-DDL d'engrenages droits, qui est développé par Omar D. Mohammed et al [78].

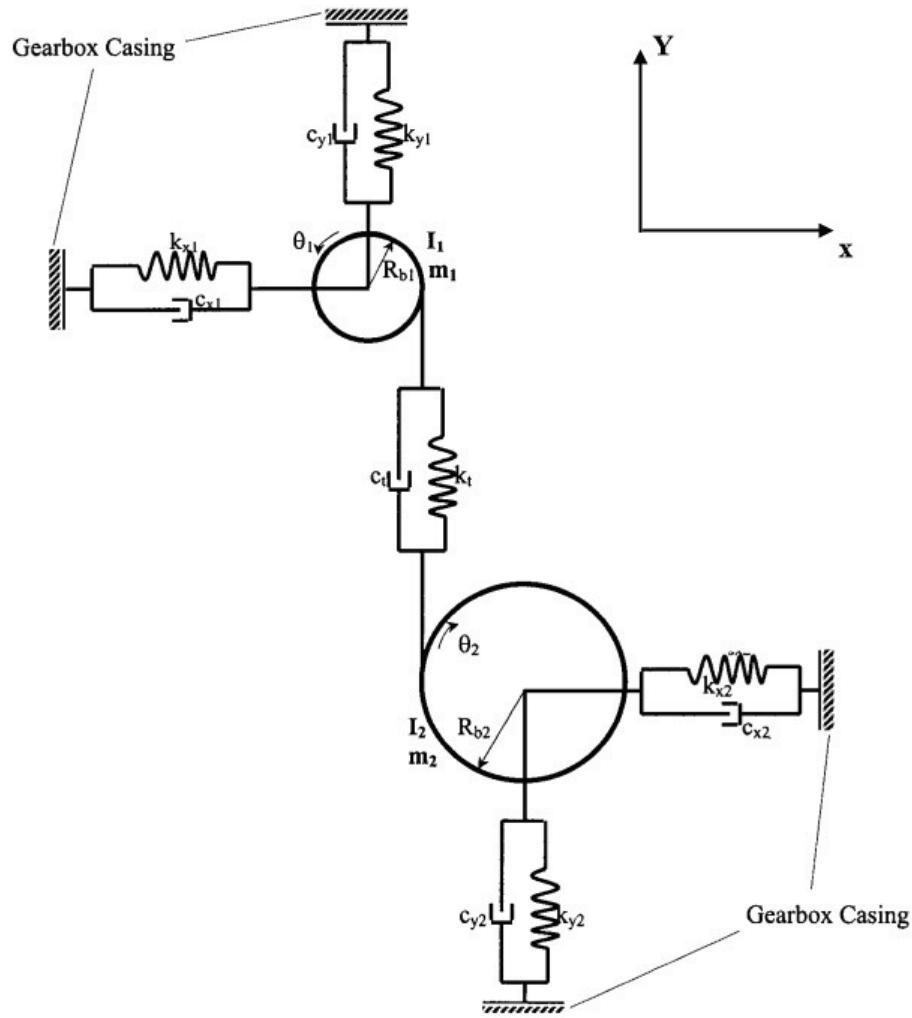


FIGURE 2.6 – Modèle d'engrenages à 6 DDL [78].

Le système est entraîné par un moteur électrique d'un couple  $M_1$ , et chargé par un couple résistant  $M_2$ . Les arbres, sur lesquels le pignon et la roue sont montés, sont supportés par des roulements. Ces derniers sont attachés au carter d'engrenages. Dans la figure (2.6), les quatre parties ombrées représentent le carter, qui est considéré rigide pour sim-

plifier le calcul. Les équations du mouvement du système étudié peuvent être présentées comme suit [33] :

En considérant le mouvement dans la direction  $x$ , les équations sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_{x1}x_1 - c_{x1}\dot{x}_1 \quad (2.88)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_{x2}x_2 - c_{x2}\dot{x}_2 \quad (2.89)$$

Les équations du mouvement dans la direction  $y$  sont :

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_{y1}y_1 - c_{y1}\dot{y}_1 + k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) + c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) \quad (2.90)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k_{y2}y_2 - c_{y2}\dot{y}_2 - k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) - c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) \quad (2.91)$$

Les équations du mouvement rotationnel  $\theta$  sont :

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = M_1 - R_{b1} \left[ k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) + c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) \right] \quad (2.92)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = -M_2 + R_{b2} \left[ k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) + c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) \right] \quad (2.93)$$

où :

$I_1$  - le moment d'inertie du pignon ;

$I_2$  - le moment d'inertie de la roue ;

$M_1$  - le couple du moteur ;

$M_2$  - le couple de la charge ;

$m_1$  - la masse du pignon ;

$m_2$  - la masse de la roue ;

$R_{b1}$  - le rayon du cercle de base du pignon ;

$R_{b2}$  - le rayon du cercle de base de la roue ;

$k_{x1}$  - la rigidité radiale horizontale des roulements d'entrée ;

$k_{x2}$  - la rigidité radiale horizontale des roulements de sortie ;

$k_{y1}$  - la rigidité radiale verticale des roulements d'entrée ;

$k_{y2}$  - la rigidité radiale verticale des roulements de sortie ;

$c_{x1}$  - le coefficient d'amortissement radial horizontal des roulements d'entrée ;

$c_{x2}$  - le coefficient d'amortissement radial horizontal des roulements de sortie ;

$c_{y1}$  - le coefficient d'amortissement radial vertical des roulements d'entrée ;

$c_{y2}$  - le coefficient d'amortissement radial vertical des roulements de sortie ;

$k_t$  - la rigidité d'engrènement ;

$c_t$  - le coefficient d'amortissement d'engrènement ;

$x_1$  - le déplacement linéaire du pignon dans la direction parallèle aux dents en engrènement ;

$x_2$  - le déplacement linéaire de la roue dans la direction  $x$  ;

$y_1$  - le déplacement linéaire du pignon dans la direction verticale aux dents en engrènement ;

$y_2$  - le déplacement linéaire de la roue dans la direction  $y$  ;

$\theta_1$  - le déplacement angulaire du pignon ;

$\theta_2$  - le déplacement angulaire de la roue ;

Les symboles avec un et deux points, comme  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$ , représentent respectivement les vitesses et les accélérations.

Pour rendre les équations plus compactes, les équations (2.88) - (2.93) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$m\ddot{X} + C_x\dot{X} + K_x X = 0 \quad (2.94)$$

$$m\ddot{Y} + C_y\dot{Y} + K_y Y = C_t R \dot{\theta}_d + K_t R \theta_d \quad (2.95)$$

$$I_{12}\ddot{\theta}_d + C_z\ddot{\theta}_d + K_z\theta_d = R' C'_t \dot{Y} + R' C'_t Y + F \quad (2.96)$$

avec :

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}; C_x = \begin{pmatrix} c_{x1} & 0 \\ 0 & c_{x2} \end{pmatrix}; K_x = \begin{pmatrix} k_{x1} & 0 \\ 0 & k_{x2} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

$$C_y = \begin{pmatrix} c_t + c_{y1} & -c_t \\ -c_t & c_t + c_{y2} \end{pmatrix}; K_y = \begin{pmatrix} k_t + k_{y1} & -k_t \\ -k_t & k_t + k_{y2} \end{pmatrix}; C_t = \begin{pmatrix} c_t \\ -c_t \end{pmatrix}; K_t = \begin{pmatrix} k_t \\ -k_t \end{pmatrix};$$

$$C_z = \begin{pmatrix} R_{b1}^2 c_t & -R_{b1} R_{b2} c_t \\ -R_{b1} R_{b2} c_t & R_{b2}^2 c_t \end{pmatrix}; K_z = \begin{pmatrix} R_{b1}^2 k_t & -R_{b1} R_{b2} k_t \\ -R_{b1} R_{b2} k_t & R_{b2}^2 k_t \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} M_1 \\ -M_2 \end{pmatrix};$$

$$R = (R_{b1} \quad -R_{b2}); \theta_d = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}; I_{12} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix};$$

De manière globale, notre système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} c_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{y1} + c_t & -c_t & -c_t R_{b1} & c_t R_{b2} \\ 0 & 0 & -c_t & c_{y2} + c_t & c_t R_{b1} & -c_t R_{b2} \\ 0 & 0 & -c_t R_{b1} & c_t R_{b1} & c_t R_{b1}^2 & -c_t R_{b1} R_{b2} \\ 0 & 0 & c_t R_{b2} & -c_t R_{b2} & -c_t R_{b1} R_{b2} & c_t R_{b2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{y1} + k_t & -k_t & -k_t R_{b1} & k_t R_{b2} \\ 0 & 0 & -k_t & k_{y2} + k_t & k_t R_{b1} & -k_t R_{b2} \\ 0 & 0 & -k_t R_{b1} & k_t R_{b1} & k_t R_{b1}^2 & -k_t R_{b1} R_{b2} \\ 0 & 0 & k_t R_{b2} & -k_t R_{b2} & -k_t R_{b1} R_{b2} & k_t R_{b2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1 \\ -M_2 \end{bmatrix}$$

L'équation (2.94) montre que la vibration dans la direction  $x$  est une réponse libre. Pour cette dernière, quand le système est stable (après le passage du régime transitoire), les vibrations dans cette direction vont disparaître à cause de l'amortissement inhérent [76].

L'équation (2.95) signifie que le système fera l'objet d'une réponse forcée dans la direction  $y$ . La force d'excitation est due à la variation temporelle de la rigidité et l'amortissement, c'est-à-dire, la périodicité de la rigidité d'engrènement rend le système d'engrenages persistant.

Les fréquences naturelles de notre système sont calculées à travers les matrices de masse et de rigidité en utilisant l'algorithme "modenonamorti" présenté dans [3]. Les deux valeurs d'extrémité de la rigidité d'engrènement permettent d'obtenir les résultats suivants :

$$K_t \min(0.89757e + 08 \text{ N/m}) :$$

$$\begin{aligned} Freq_1 &= 7.7712e - 05 \text{ Hz} \\ Freq_2 &= 3.9347e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_3 &= 6.1183e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_4 &= 6.4876e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_5 &= 7.3415e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_6 &= 8.2658e + 03 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$K_t \max(1.4881e + 08 \text{ N/m}) :$$

$$\begin{aligned} Freq_1 &= 8.1056e - 05 \text{ Hz} \\ Freq_2 &= 4.4562e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_3 &= 6.1183e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_4 &= 6.6092e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_5 &= 7.3415e + 03 \text{ Hz} \\ Freq_6 &= 9.2247e + 03 \text{ Hz} \end{aligned}$$

D'après les résultats obtenus, nous remarquons une grande variation dans la fréquence naturelle  $Freq_2$ . Elle varie entre les deux valeurs 3934.7 Hz et 4456.2 Hz et cela revient à la variation de la rigidité d'engrènement entre les deux valeurs (0.89757e+08 et 1.4881e+08 N/m). Pour cela, nous devons choisir une fréquence de rotation qui amène à une fréquence d'engrènement loin de la plage de résonance ( $\sim 4000$  Hz).

### 2.6.1 Réponse du système dans la direction $y$

Tant que la réponse dans la direction  $x$  est transitoire, nous allons nous concentrer sur la réponse dans la direction  $y$ , qui représente l'effet de la variation temporelle de la

rigidité d'engrènement.

Les solutions analytiques ne peuvent pas être obtenues tant que les vibrations latérales sont couplées dans le groupe d'équations (2.90) - (2.93). Les solutions numériques doivent alors être poursuivies pour étudier la réponse du système due à la variation de la rigidité. Dans les sections suivantes, nous allons analyser les réponses du système dans la direction  $y$  et qui correspondent à deux situations, c'est-à-dire, engrenages parfaits et un pignon avec une dent fissurée.

## 2.7 Simulation de la dynamique des engrenages parfaits

Afin d'étudier les réponses vibratoires d'un système d'engrenages incluant un pignon avec un défaut local dans une dent, il est nécessaire, d'abord, de connaître la réponse d'un engrenage parfait. Pour ce cas, nous supposons que tous les composants, y compris les engrenages, le moteur, les arbres et les roulements n'ont pas d'erreurs de fabrication et d'assemblage. De plus, nous supposons que les conditions de lubrification sont parfaites.

Dans le but de simplifier la simulation, nous supposons que les rigidités radiales  $k_{x1}, k_{y1}, k_{x2}$  et  $k_{y2}$  des quatre roulements sont égales à une constante  $k_r$ . De plus, les coefficients d'amortissement  $c_{x1}, c_{y1}, c_{x2}$  et  $c_{y2}$  des roulements sont égaux à une constante  $c_r$ .

Dans cette étude, les principaux paramètres des engrenages appliqués dans ce modèle sont cités dans le tableau (2.1). Ces valeurs sont choisies partiellement en se référant aux paramètres d'un *Gearbox Dynamics Simulator*.

Dans cette étude, nous supposons que le système a un taux d'amortissement ( $\zeta = 0.07$ , se référer à [21]), et le coefficient d'amortissement d'engrènement est proportionnel à la rigidité d'engrènement [37], c'est-à-dire :

$$c_t = \mu k_t \quad (2.97)$$

où  $\mu$  est la constante d'échelle en *seconde (s)*.

Afin de déterminer la constante  $\mu$ , nous considérons les valeurs moyennes  $k_m$  et  $c_m$  de la rigidité et du coefficient d'amortissement d'engrènement dans une seule période d'engrènement. Pour la paire d'engrenages utilisée dans cette étude,  $k_m = 1.2620 \times 10^8 (N/m)$ , le taux d'amortissement peut être calculé par [76] :

$$\zeta = \frac{c_m}{2\sqrt{k_m m}} \quad (2.98)$$

où  $m$  est la masse effective du pignon et de la roue. Elle peut être exprimée par [37] :

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.99)$$

Nous substituons  $m$  dans l'équation (2.98), nous obtenons l'expression de  $c_m$  :

$$c_m = 2\zeta \sqrt{k_m \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (2.100)$$

Nous substituons les valeurs  $\zeta, k_m, m_1$  et  $m_2$  (citées dans le tableau 2.5) dans l'équation (2.99), nous obtenons  $c_m = 0.670 \times 10^3 (Ns/m)$ . Ainsi, nous sélectionnons  $\mu = c_m/k_m = 5.3158 \times 10^{-6} (s)$

Pour l'instant, nous avons déterminé tous les paramètres utilisés dans les équations du mouvement. Pour les équations (2.90)-(2.93), nous ne pouvons pas obtenir des solutions analytiques. Pour cela, nous devons déterminer des solutions numériques. Pendant la recherche de ces solutions, les compromis entre la taille du pas, l'arrondissement des erreurs et la complexité des algorithmes doivent être pris en considération.

En général, la taille de pas la plus petite amène à une grande précision de calcul, mais cela conduit à plus d'accumulation d'erreurs arrondies. Afin de contourner ce problème, nous nous servons de l'augmentation des routines de commande, qui donnent une meilleure précision avec de plus grandes tailles de pas.

La fonction ODE15 de MATLAB va être utilisée pour obtenir les solutions numériques des équations du mouvement. (En général, ODE45, qui est basée sur la méthode de *Runge-Kutta* d'ordre  $4^{th} - 5^{th}$ , est considérée comme la meilleure fonction à appliquer pour les premiers tests afin de résoudre la majorité des problèmes. Quand ODE45 échoue, ou qu'elle devient inefficace, ou soit que le problème est supposé raide, ODE15 devient alors un bon choix. Pour le groupe des équations ci-dessus, dans un "premier essai", ODE45 a échoué. Alors, en se basant sur l'explication ci-dessus, ODE15 a été adoptée).

La figure (2.7) montre la réponse d'accélération d'un système d'engrenages avec deux périodes de rotation (période de rotation de l'arbre de pignon  $T_1 = 1/f_1 = 0,0333$  (s)). Une période d'arbre  $T_1$  se compose de 25 périodes d'engrènement  $T_m$ . Les vallées correspondent aux chocs dûs au passage de la durée de contact de deux paires de dents à la durée de contact d'une seule paire de dents.

## 2.8 Simulation de la dynamique du pignon avec une dent fissurée

La réponse d'accélération d'un système d'engrenages avec une dent fissurée dans le pignon est montrée dans la figure (2.8). Nous pouvons noter une légère augmentation de l'amplitude périodique à la période de rotation de l'arbre  $T_1$ . Finalement, le défaut de fissure impacte légèrement sur l'amplitude globale du signal. De plus, nous remarquons une forte fluctuation autour de ces pics correspondant au changement brusque dans la rigidité d'engrènement. Cette forte fluctuation influe directement sur la phase du signal vibratoire.

Avec la présence d'un bruit important, la signature de la fissure ne serait pas remarquable dans le signal temporel. Pour cela et afin d'assurer l'observation de ce genre de défauts et contrôler sa sévérité, nous aurons besoin des techniques de traitement du signal un peu plus sophistiquées tant que cela affecte principalement la phase du signal d'accélération. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

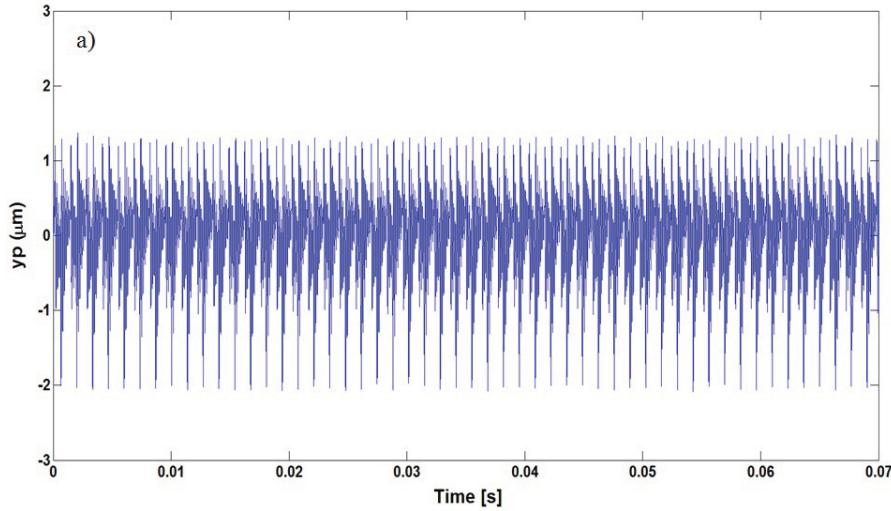


FIGURE 2.7 – Réponse vibratoire d'un pignon sain

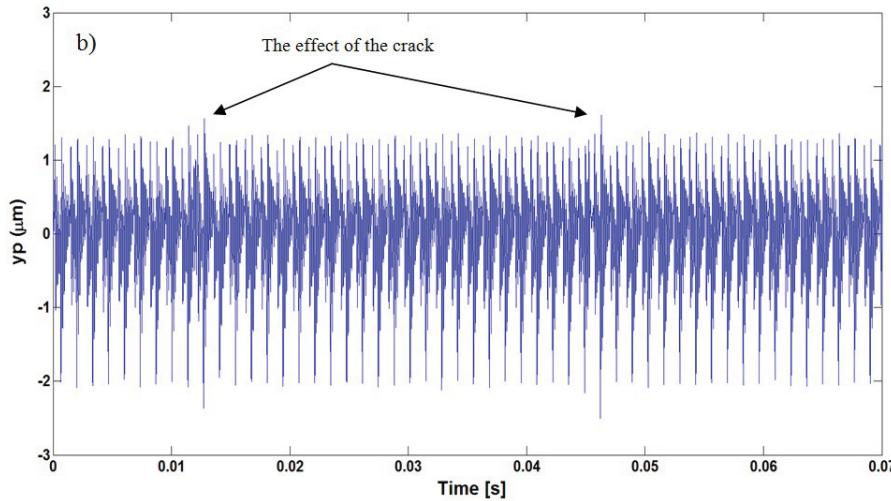


FIGURE 2.8 – Réponse vibratoire d'un pignon fissuré

Afin de valider le modèle appliqué dans cette étude, nous suggérons d'utiliser les mêmes paramètres d'un autre modèle qui est déjà validé et on compare les résultats obtenus. Pour cela, on a choisi le travail de Zaigang Chen et Yimin Shao [121] où ils proposent un modèle de 6 DDL. Le déplacement vibratoire obtenu de leur modèle est similaire en amplitude et en forme à celui appliqué dans notre étude (voir l'annexe D). Alors, nous pouvons constater que le modèle exploité dans notre étude est correct.

## 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les formules du calcul direct de la rigidité d'engrènement en se basant sur la méthode de l'énergie potentielle proposée par Yang et Lin [34]. Les formules de calcul des paramètres correspondants (tels que  $\alpha_{1,1}$ ,  $\alpha'_{1,1}$ ,  $\alpha_{1,2}$  et  $\alpha'_{1,2}$ ) utilisées pour le calcul de la rigidité d'engrènement ont été présentées. Nous avons

développé également les formules de calcul des angles durant le contact d'une seule et double paire de dents. Les formules présentées dans ce chapitre ont été développées en considérant la présence de la rigidité de cisaillement qui a été négligée dans différents travaux [34].

En se basant sur le cas parfait d'engrenages, nous avons dérivé l'expression de la rigidité effective des engrenages conjugués avec la présence d'une fissure localisée dans la base d'une dent du pignon. En plus, nous avons étudié les réponses vibratoires d'un engrenage à un seul étage. Concernant la vibration dans la direction parallèle aux dents en engrènement, nous avons obtenu les solutions analytiques. Les résultats montrent que la vibration dans ce sens est transitoire lorsque le système est stable. À propos de la réponse dans le sens vertical des dents en engrènement, les solutions numériques sont obtenues pour des engrenages sains et un pignon avec une dent fissurée, respectivement. Pour chaque cas, la variation de la rigidité a été étudiée. Les résultats obtenus valident les expressions dérivées dans le début de ce chapitre, qui sont appliquées pour l'étude des réponses d'accélération vibratoire. Les réponses d'accélération dans le cas d'un défaut localisé sont modifiées en comparaison avec le cas idéal. Les résultats sont cohérents avec les propriétés liées au changement de la rigidité d'engrènement, c'est-à-dire que la variation de la rigidité d'engrènement provoque le changement de la réponse vibratoire. La présence de la fissure conduit à la chute de la rigidité d'engrènement à chaque tour du pignon défectueux. Cet effet influence l'amplitude de vibration et l'allure de la phase.

Dans le chapitre suivant, nous proposons quelques algorithmes de traitement du signal qui pourront nous servir à détecter la variation rapide de la phase instantanée. Nous essayerons aussi de contrôler la sévérité de la fissure à travers la théorie de cyclo-stationnarité.

# Chapitre 3

## MÉTHODES DE TRAITEMENT DU SIGNAL

### Sommaire

---

3.1	Introduction	72
3.2	Analyse spectrale	73
3.2.1	Application de la transformée de Fourier sur les signaux du modèle numérique	74
3.3	Méthodes d'estimation de la phase instantanée	75
3.3.1	Phase instantanée de la transformée de Hilbert	76
3.3.2	Les méthodes à haute résolution	78
3.3.3	La méthode ESPRIT	79
3.3.4	La méthode WLSE	81
3.3.5	scalogramme de phase	89
3.3.6	Analyse des signaux du modèle d'engrenages avec le Scalogramme	92
3.4	Cyclostationnarité	93
3.4.1	Définitions et propriétés	93
3.4.2	La cyclostationnarité dans les signaux d'un pignon fissuré	97
3.5	Conclusion	100

---

### 3.1 Introduction

Le bon choix des outils de traitement du signal en analyse vibratoire nécessite des connaissances a priori sur les signaux à traiter. Par exemple, les signaux des machines tournantes peuvent être soit de type déterministe, cela revient à la cinématique des machines et la rotation des composants; soit de type aléatoire, provenant des phénomènes aléatoires liés au fonctionnement propre de ces machines, et également du bruit de mesure.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes de traitement du signal qui ont été développées à la base dans le domaine de télécommunication. Nous essayons de les

adapter au contexte de l'analyse vibratoire des machines tournantes et plus particulièrement, pour les signaux d'engrenages. Nous examinons les méthodes à haute résolution (ESPRIT et WLSE) et nous comparons leurs sensibilités de détection à celle de la transformée de Hilbert et du scalogramme de phase.

D'autre part, nous exploitons les propriétés de la cyclostationnarité pour la détection des défauts de fissures. Nous vérifions la présence de la CS2 (cyclostationnarité d'ordre 2) dans les signaux vibratoires d'engrenages fissurés et sa sensibilité à la sévérité du défaut.

## 3.2 Analyse spectrale

L'analyse fréquentielle ou l'analyse spectrale établit la signature de la machine et révèle les fréquences auxquelles se produisent des variations d'amplitude significatives [7]. Cette analyse consiste à calculer la quantité d'énergie (ou de puissance) contenue dans les différentes composantes fréquentielles du signal. Pour cela, nous associons au signal  $x(t)$  une fonction de la fréquence appelée densité spectrale d'énergie (DSE) ou de puissance (DSP). Les fréquences peuvent généralement être associées à un phénomène mécanique particulier (balourd, alignement, résonances, fréquences d'engrenement...etc). C'est l'étude de la vibration dans le domaine fréquentiel qui est la clef du diagnostic [7].

L'analyse spectrale recouvre l'ensemble des techniques d'estimation de la densité spectrale. La première méthode à utiliser pour analyser le spectre d'un signal est la transformée de Fourier. L'intérêt de cette transformée est de pouvoir dissocier et identifier les sources vibratoires en fonction des caractéristiques de la cinématique du système et les vitesses de rotation (ou des fréquences de mouvement).

La transformée de Fourier est pour toutes fonctions  $x(t) \in \mathcal{R}$  :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (3.1)$$

Pratiquement, nous n'avons pas le signal au complet mais un ensemble fini de points  $x_i = x(t_i)$  avec généralement  $t_i = \frac{i}{f_e}$ ,  $i = 1, \dots, N$  (où  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage et  $N$  le nombre total de points). De la même manière nous ne pouvons calculer la transformée de Fourier que pour un nombre fini de fréquences. Nous calculons donc les coefficients des séries de Fourier suivants :

$$X_k = \sum_{j=0}^{+N-1} x_j e^{-i2\pi k \frac{j}{N}}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

Le calcul numérique des coefficients de Fourier  $X_k$  s'obtiennent par l'algorithme de FFT (pour Fast Fourier Transform) dont la complexité est en  $N \log N$  alors que l'utilisation directe de la formule (3.2) a une complexité de  $N^2$ .

la taille des signaux traités dans ce chapitre est de 97401 points et leur fréquence d'échantillonnage est  $f_e = 96000$  Hz.

### 3.2.1 Application de la transformée de Fourier sur les signaux du modèle numérique

Dans cette section, nous appliquons l'algorithme de la densité spectrale de puissance sur les signaux obtenus de notre modèle développé dans le chapitre précédent. Nous avons utilisé la fenêtre rectangulaire pour le calcul du spectre. Nous analysons les signaux d'accélération issus du modèle sain, puis nous comparons les résultats avec ceux associés à un engrenage fissuré de profondeurs 0.3 mm et 0.6 mm.

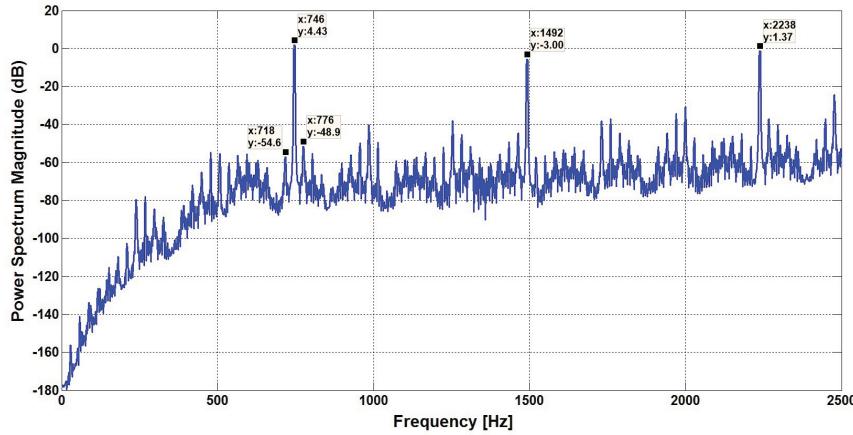


FIGURE 3.1 – La DSP du signal d'accélération du modèle d'engrenage sain

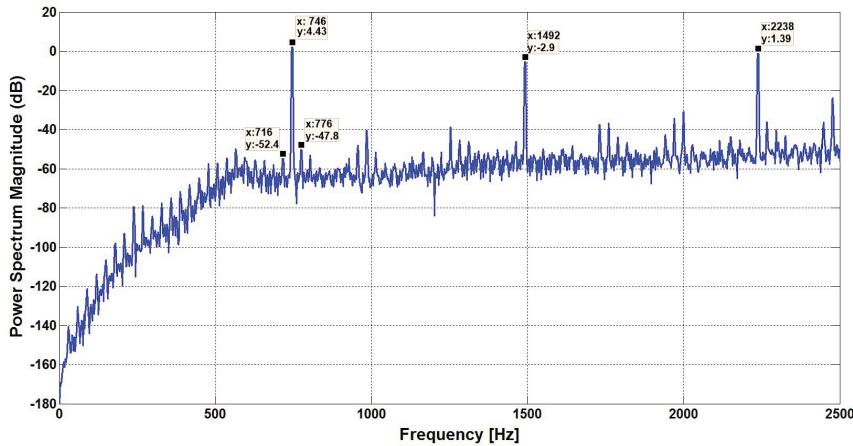


FIGURE 3.2 – La DSP du signal d'accélération du modèle d'engrenage avec une fissure de 0.3 mm

La figure (3.1) représente la densité spectrale de puissance du signal d'accélération du modèle d'engrenage sain. Nous distinguons dans cette figure, la fréquence d'engrènement ( $29.84\text{Hz} \times 25 \text{ dents} = 746\text{Hz}$ ), ses harmoniques et la modulation de la fréquence de rotation du pignon par la fréquence d'engrènement (716 Hz et 776 Hz). L'amplitude de ces fréquences modulées est trop faible (-50 fB). Par contre, à la présence d'une fissure de profondeur de 0.3 mm (figure 3.2) ou de profondeur de 0.6 mm (figure 3.3), nous remarquons une variation très légère au niveau des amplitudes d'engrènement, ses harmoniques

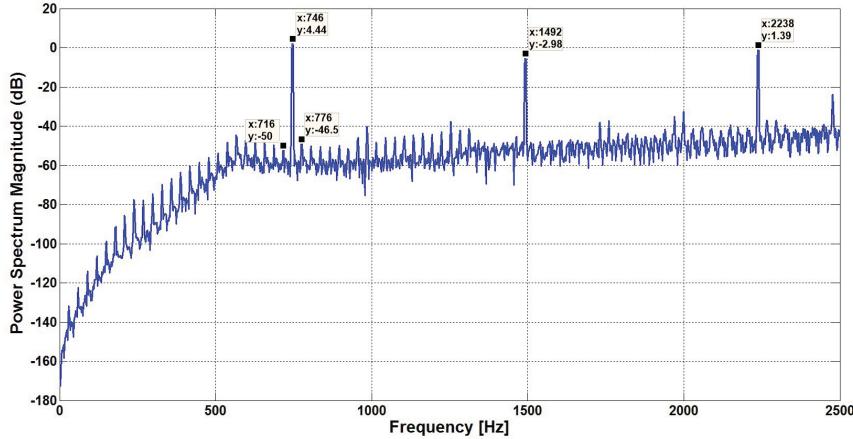


FIGURE 3.3 – La DSP du signal d'accélération du modèle d'engrenage avec une fissure de 0.6 mm

et les fréquences de modulation. Cela signifie que la fissure a une légère influence sur les composantes déterministes du signal vibratoire d'engrenages, les composantes cyclo-stationnaires d'ordre 1 (CS1). Pour cela, nous proposons dans ce manuscrit de passer à l'analyse cyclostationnaire d'ordre 2 (CS2) afin de chercher la signature de la fissure dans la composante aléatoire du signal vibratoire.

### 3.3 Méthodes d'estimation de la phase instantanée

La détection des caractéristiques d'un signal en se basant sur la phase a été étudiée intensivement après la publication du modèle de l'énergie locale (LE) de détection des caractéristiques [84]. Ce modèle postule que les caractéristiques peuvent être définies et classées selon leurs signatures de phase (ou de leur congruence de phase (PC)). Cette observation a conduit à l'élaboration d'un certain nombre d'algorithmes de détection des caractéristiques en se basant sur la phase [85–92]. Ce type de détection (PC & LE) fournit une théorie unique et unifiée pour détecter une large gamme de caractéristiques.

L'information de phase a également été utilisée avec succès pour l'estimation de vitesse. Par exemple, les techniques de différence de phase [93] et de corrélation de phase [94] ont été utilisées dans le domaine des télécommunications afin d'extraire des informations sur les cibles. D'autres nombreux avantages supplémentaires de l'utilisation de mesures basées sur la phase ont été exploités dans le domaine vibratoire. Peut-être la propriété la plus souhaitable de phase est qu'il est théoriquement invariant à l'amplitude d'énergie du signal. Par conséquent, il est, en principe, robuste contre les variations typiques du signal. Toutefois, l'estimation de phase est intrinsèquement bruyant et dépend essentiellement du choix des techniques de traitement du signal.

### 3.3.1 Phase instantanée de la transformée de Hilbert

Un des premiers qui a proposé le diagnostic des fissures d'engrenages par l'analyse de la phase instantanée était McFadden [9]. Il a remarqué la présence de fluctuations dans la phase durant le passage de la dent defectueuse. La phase instantanée peut être estimée à partir du signal analytique  $\hat{x}(t)$  du signal  $x(t)$  qui est défini par ( $i$  : imaginaire) :

$$\hat{x}(t) = x(t) + i \cdot \mathcal{H}\{x(t)\} = |\hat{x}(t)| \cdot e^{i \cdot \theta(t)} \quad (3.3)$$

$\mathcal{H}\{x(t)\}$  représente la transformée de Hilbert du signal  $x(t)$ . La phase du signal analytique se déduit du signal  $x(t)$  par la formule :

$$\phi(t) = \arctg \left[ \frac{\mathcal{H}\{x(t)\}}{x(t)} \right] \quad (3.4)$$

C'est est une fonction du temps, d'où la dénomination phase instantanée.

Dans cette partie, nous essayons d'estimer la phase instantanée du signal d'accélération issu de notre modèle numérique. Nous filtrons notre signal autour de la fréquence d'engrènement (filtre rectangulaire passe-bande de 400 Hz) car c'est la composante qui porte l'information sur l'état des dents et nous appliquons la formule (3.4).

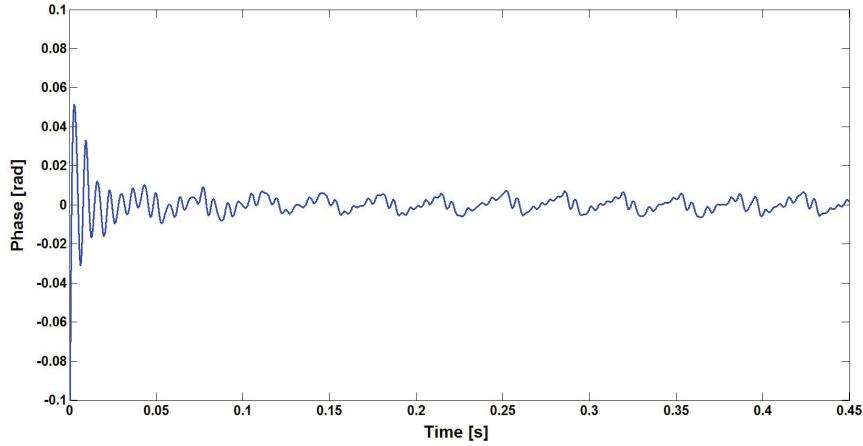


FIGURE 3.4 – La phase instantanée estimée par transformée de Hilbert du signal d'accélération du modèle d'engrenages sans fissure.

La figure (3.4) représente la phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert pour le cas d'un pignon sain. Nous remarquons la présence d'une périodicité correspondant à la fréquence du pignon. La densité spectrale de puissance de la phase instantanée (figure 3.5) montre la dominance de cette fréquence (29 Hz) qui est associée au pignon. Par contre, la présence d'une fissure de 0.3 mm conduit à augmenter l'amplitude des pics correspondant à la périodicité du pignon fissuré dans la phase instantanée (figure 3.6). La PSD de cette phase instantanée (figure 3.7) montre une légère augmentation dans la fréquence du pignon fissuré (1 dB) par rapport au pignon sain. Si nous augmentons la profondeur de la fissure à 0.6 mm, les pics de la phase instantanée augmentent légèrement

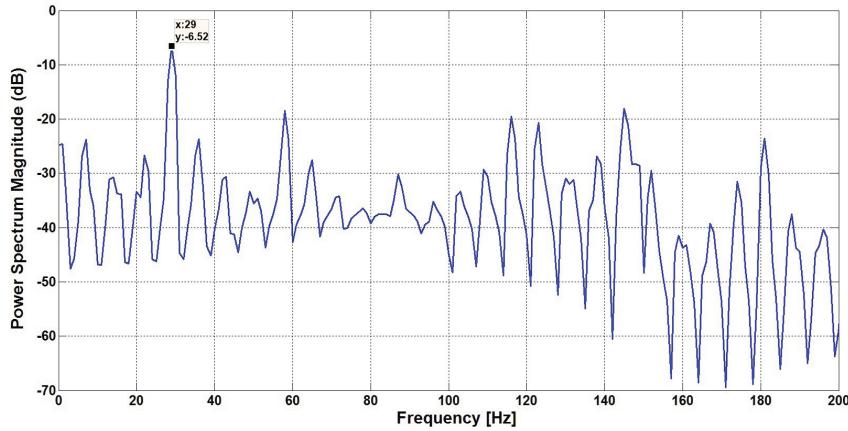


FIGURE 3.5 – Le spectre de la phase instantanée estimée par transformée de Hilbert : pignon sain.

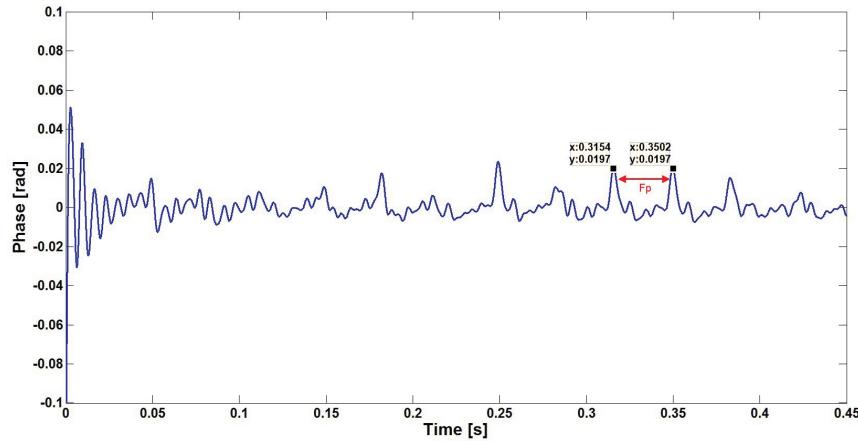


FIGURE 3.6 – La phase instantanée estimée par transformée de Hilbert du signal d'accélération du modèle d'engrenages avec une fissure de 0.3 mm

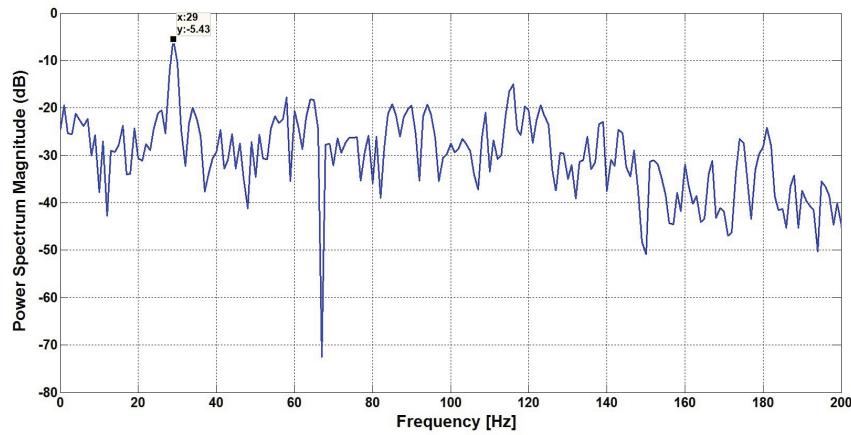


FIGURE 3.7 – Le spectre de la phase instantanée estimée par transformée de Hilbert : pignon avec une fissure de 0.3 mm.

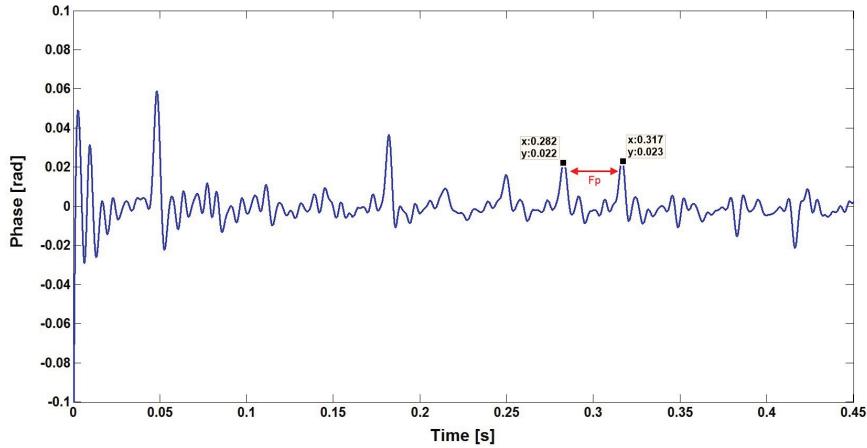


FIGURE 3.8 – La phase instantanée estimée par Hilbert du signal d'accélération du modèle d'engrenages avec une fissure de 0.6 mm.

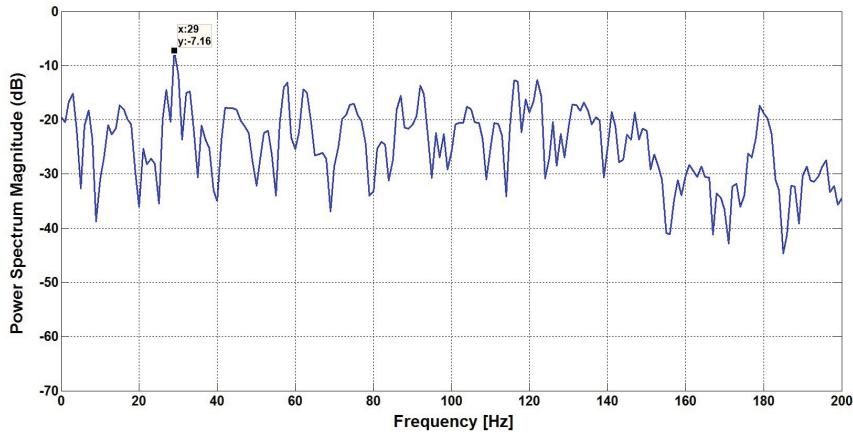


FIGURE 3.9 – Le spectre de la phase instantanée estimée par Hilbert : pignon avec une fissure de 0.6 mm.

(figure 3.8) par rapport au cas d'une fissure de 0.3 mm mais sa DSP montre une légère diminution dans l'amplitude de la fréquence du pignon (figure 3.9). D'autre part, nous pouvons remarquer que le transformée de Hilbert n'estime pas exactement la fréquence de rotation du pignon défectueux ( $F_p = 29$  Hz).

Alors, nous pouvons déduire que la phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert, a priori, peut aider dans le diagnostic des fissures d'engrenages dans leurs états précoce mais elle est mauvaise estimateur pour les fréquences caractéristiques du défaut et sa sévérité.

### 3.3.2 Les méthodes à haute résolution

L'idée de base de ces méthodes est la décomposition de l'espace d'observation en deux sous espaces complémentaires. Contrairement aux méthodes non-paramétriques, ces méthodes utilisent la propriété d'orthogonalité entre les deux sous espaces (Signal-Bruit) pour localiser les sources, ce qui les rend totalement indépendantes.

### 3.3.3 La méthode ESPRIT

ESPRIT est l'acronyme de “*Estimation of Signal Parametres Via Rotational Invariance Techniques*”. Cette méthode a été proposée par Roy et al [80]. Elle se base sur l'approche de sous espaces, mais au lieu d'utiliser l'orthogonalité des sous-espaces bruit et signal, elle utilise les propriétés du sous-espace signal uniquement. L'intérêt principal de ESPRIT est sa simplicité de mise en œuvre et son faible coût calculatoire [67].

Nous considérons le modèle d'un signal complexe  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(2\pi f_k t + \phi_k)}$  où chaque fréquence  $f_k$  est associée à une amplitude réelle  $\alpha > 0$  et une phase  $\phi_k \in [0, 2\pi[$ . En définissant les amplitudes complexes  $\alpha_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_k e^{j\phi_k}$  et les pôles complexes  $e^{j2\pi f_k t}$ .

Nous supposons que le signal  $x(t)$  est observé sur un intervalle temporel  $\{0 \dots N-1\}$  de longueur  $N \geq 2m$ . Nous définissons alors la matrice de Hankel de dimension  $(m \times L)$  contenant les  $N$  échantillons du signal observé :

$$X = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \cdots & x[L-1] \\ x[1] & x[2] & \cdots & x[L] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[m-1] & x[m] & \cdots & x[m+L-2] \end{bmatrix}$$

Nous définissons de même la matrice de Hankel  $S$  (de l'espace signal) de même dimension  $(m \times L)$ , à partir des échantillons du signal  $s(t)$ .

Pour tout  $k \in \{0 \dots N-1\}$ , nous considérons la composante  $s_k(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k e^{j2\pi f_k t}$ . Nous définissons alors la matrice de Hankel de dimensions  $(m \times L)$  :

$$S_k = \begin{bmatrix} s[0] & s[1] & \cdots & s[L-1] \\ s[1] & s[2] & \cdots & s[L] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s[m-1] & s[m-2] & \cdots & s[m+L-2] \end{bmatrix}$$

Donc, nous pouvons estimer la matrice d'autocorrélation  $\hat{R}_x$  par :

$$\hat{R}_x = \frac{1}{L} (S_k \times S_k^H) \quad (3.5)$$

Nous supposons que l'espace signal est de dimension  $L$ , et la matrice  $S$  est la matrice de Hankel de dimension  $(m \times N-m)$ . Nous pourrons diagonaliser la matrice  $\hat{R}_x$  à l'aide de la décomposition en valeurs singulières ( $\text{svd } [U_1, \Lambda, U_2] = \text{svd}(\hat{R}_x)$ ). La matrice  $\hat{R}_x$  étant symétrique définie positive, les vecteurs colonnes des matrices  $U_1$  et  $U_2$  (de dimension  $m \times m$ ) sont les vecteurs propres de  $\hat{R}_x$ , associés aux  $m$  valeurs propres rangées dans la matrice diagonale  $\Lambda$  par ordre décroissant (nous avons alors  $\hat{R}_x = U_1 \Lambda U_1^H = U_2 \Lambda U_2^H$ ). Nous pouvons ainsi extraire de  $U_1$  (ou de  $U_2$ ) une base de l'espace signal  $U_S$  (de dimension  $m \times L$ ).

#### 3.3.3.1 Estimation des fréquences

Pour estimer les fréquences, nous pouvons procéder de la façon suivante : Soit  $A_{\downarrow}^m$  la matrice de dimensions  $(m-1 \times L)$  qui contient les  $(m-1)$  premières lignes de

$A$  (matrice de Vandermonde) , et  $A_{\uparrow}^m$  la matrice de dimensions  $(m - 1 \times L)$  qui contient les  $(m - 1)$  dernières lignes de  $A$ . Alors, nous vérifions que :

$$A_{\uparrow}^m = A_{\downarrow}^m D \quad (3.6)$$

où  $D = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_L)$ , et  $z_i = e^{j\omega_i}$ .

Il existe une matrice inversible  $G$  de dimension  $(L \times L)$  telle que :

$$A = U_s G \quad (3.7)$$

où  $G$  est définie comme la matrice de passage de la première base à la seconde.

Puis nous extrayons de  $U_s$  les matrices  $U_{s\downarrow}$ (obtenue en supprimant la dernière ligne de  $U_s$ ) et  $U_{s\uparrow}$ (obtenue en supprimant la première ligne de  $U_s$ ) ;

En substituant l'équation (3.7) dans l'équation (3.6), nous obtenons la formule suivante :

$$U_{s\uparrow} = U_{s\downarrow} \cdot \Phi \quad (3.8)$$

où  $\Phi$  appelée *la matrice spectrale*, et elle est définie par :

$$\hat{\Phi} = G \cdot D \cdot G^{-1}. \quad (3.9)$$

Grâce à la méthode des moindres carrées, nous pourrons ensuite estimer  $\hat{\Phi}$  :

$$\hat{\Phi} = \left( (U_{s\downarrow}^H U_{s\downarrow})^{-1} U_{s\downarrow}^H \right) U_{s\uparrow} = U_{s\downarrow}^{\dagger} U_{s\uparrow} \quad (3.10)$$

où le symbole  $\dagger$  représente l'opérateur de pseudo inverse. D'ailleurs, nous pouvons calculer les valeurs propres de  $\hat{\Phi}$  à l'aide de la fonction "eig" de Matlab (nous rappelons que les valeurs propres de  $\hat{\Phi}$  sont les pôles  $z_k = e^{i2\pi f_k}$ ). Nous pouvons en déduire que :

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \text{angle}(z_k) \quad (3.11)$$

### 3.3.3.2 Estimation des amplitudes, des phases et des puissances

Il s'agit d'utiliser la méthode des moindres carrés pour estimer les amplitudes  $a_k$  et les phases  $\phi_k$ , avec la connaissance du signal  $x$  et les fréquences  $f_k$ . L'estimation des amplitudes complexes est basée sur la relation suivante :

$$s = A^{\dagger} x = \left( (A^H A)^{-1} A^H \right) x \quad (3.12)$$

où  $x$  est le vecteur  $[x(0) \dots x(m-1)]^T$  et  $A$  est la matrice de Vandermonde de dimension  $(m \times L)$ . Sachant que les éléments de cette matrice vérifient la relation  $A_{(t,k)} = z_k^t$ . Tant que les éléments de la matrice  $\alpha$  s'écrivent sous la forme exponentielle, nous pouvons déduire  $a_k = |\alpha_k|$  et  $\phi_k = \text{angle}(\alpha_k)$  pour  $k \in \{0 \dots L-1\}$ .

Afin d'estimer les phases instantanées par cette technique, nous proposons d'utiliser une fenêtre glissante avec un pas de  $\Delta t$  le long du signal (figure 3.10). Pour chaque fenêtre, nous estimons tout d'abord la fréquence désirée, puis sa phase par :

$$\phi_k = \text{angle}(\delta_k) \quad (3.13)$$

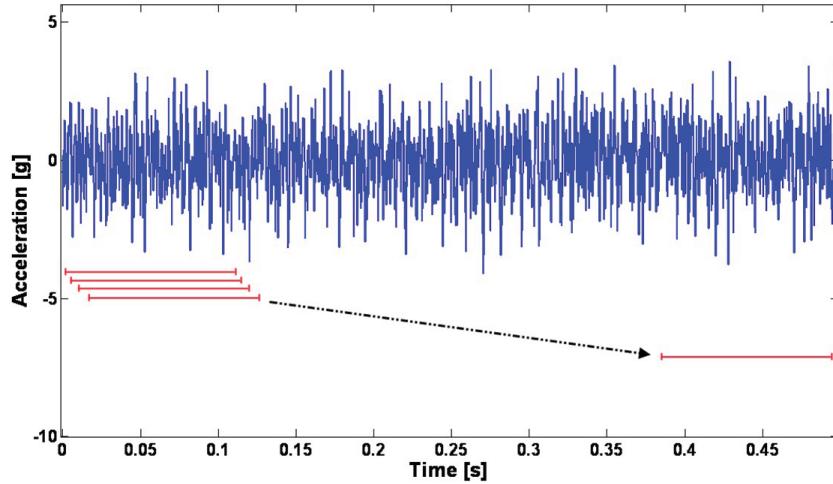


FIGURE 3.10 – Fenêtre glissante pour estimer la phase instantanée du signal

où  $\delta_k = \alpha_k e^{j\phi_k}$  représentent les éléments de la première colonne de la matrice  $s$  donnée dans l'équation (3.12).

Cette opération proposée va permettre d'estimer la moindre variation dans la phase.

D'autre part, et à partir de la matrice des amplitudes qui a été estimée précédemment, nous pouvons estimer également, les puissances de nos sources par deux méthodes différentes, soit nous élevons les éléments  $a_k$ , qui correspondent aux fréquences recherchées, au carré, soit par le calcul d'espérance mathématique de la matrice  $S(t)$  :

$$P_{uis} = E[S(t).S^*(t-k)] = \frac{1}{L+1} (S(t).S^*(t)) \quad (3.14)$$

où chaque élément de la diagonale de la matrice  $P_{uis}$  est associé à une puissance de nos sources.

### 3.3.4 La méthode WLSE

Dans cette section, nous abordons un algorithme très rapide et performant pour estimer la phase instantanée d'un signal donné. WLSE est l'acronyme de "Weighted Least-Squares Estimation". Cette technique fonctionne bien, même sous des variations soudaines de l'amplitude et des fréquences contenues dans le signal. L'algorithme d'estimation de la phase est dérivé de la technique des moindres carrés pondérés (WLSE) avec la technique de remise à zéro de la covariance [81].

Avec la méthode d'estimation proposée, nous pouvons trouver l'angle de phase, la fréquence et la composante fondamentale du signal vibratoire au bout de quelques périodes d'échantillonnage [81].

Nous supposons que notre signal vibratoire est donné comme suit :

$$E_s(t) = \bar{E} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.15)$$

avec  $\bar{E}$  est l'amplitude du signal,  $\omega$  est sa fréquence angulaire,  $\phi$  est l'angle de la phase.

Nous pouvons réécrire l'équation (3.15) sous la forme suivante :

$$E_s(t) = E_d \cos(\omega t) - E_q \sin(\omega t) \quad (3.16)$$

où  $E_d = \bar{E} \cos \phi$  et  $E_q = \bar{E} \sin \phi$ . Nous notons que  $E_d, E_q$  et  $\phi$  sont constantes durant le développement des équations. Nous exprimons l'équation (3.16) sous la forme matricielle, nous obtenons :

$$y(t_i) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{x}(t_i) \quad (3.17)$$

avec :

$$\mathbf{H}(t_i) = [\cos(\omega t_i) \quad -\sin(\omega t_i)], \quad (3.18)$$

$$\mathbf{x}(t_i) = [E_d(t_i) \quad E_q(t_i)]^T, \quad (3.19)$$

$$y(t_i) = E_s(t_i). \quad (3.20)$$

$t_i$  : représente la discrétisation du temps pour l'analyse numérique des signaux.

La fonction objectif est choisie de telle sorte que :

$$J[\mathbf{x}(t_i)] = \sum_{j=0}^i \lambda^{i-j} (y(t_j) - \mathbf{H}(t_j)\hat{\mathbf{x}}(t_j))^2. \quad (3.21)$$

où  $\lambda \in (0, 1)$  est le facteur d'oubli.

La solution  $\hat{\mathbf{x}}(t_i)$  qui minimise la fonction objectif  $J[\hat{\mathbf{x}}(t_i)]$  est obtenue en suivant l'algorithme des moindres carrés pondérés réalisée par filtrage de Kalman étendu de telle sorte que [82]

$$\hat{\mathbf{x}}(t_i) = \hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}) + \mathbf{k}(t_i) (y(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1})), \quad (3.22)$$

$$r(t_i) = 1 + \mathbf{H}(t_i)\mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{H}(t_i)^T, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{k}(t_i) = \mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{H}(t_i)^T r(t_i)^{-1}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{P}(t_i) = \lambda^{-1}\mathbf{P}(t_{i-1}) - \lambda^{-1}\mathbf{k}(t_i)\mathbf{H}(t_i)\mathbf{P}(t_i), \quad (3.25)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}(t_1) = 0$ ,  $\mathbf{P}(t_1) = \pi_0 \mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$  et  $\pi_0 > 0$  (arbitrairement  $\pi_0 = \frac{\pi}{6}$ ) est la constante de covariance initiale.

À partir des équations (3.19) à (3.22), nous pouvons obtenir l'angle de la phase comme suit :

$$\hat{\phi}(t_i) = \text{atan2}(\hat{E}_q(t_i), \hat{E}_d(t_i)), \quad (3.26)$$

où  $\text{atan2}$  est la fonction arc-tangente étant capable de distinguer entre le  $45^\circ$  et le  $225^\circ$ , ce qui est le cas de la bibliothèque standard du langage *C*.

Afin d'améliorer la qualité de suivi du saut de l'angle de phase provoquée par une variation brusque dans la fréquence de rotation, la technique de *recalage de covariance* est adoptée. Quand un changement soudain dans la fréquence instantanée est reconnu, la covariance  $\mathbf{P}$  est réinitialisée avec une valeur élevée, ce qui correspond à l'augmentation du gain de convergence  $\mathbf{k}$  et l'augmentation de la vitesse d'estimation, comme il est bien connu avec la méthode WLSE [82]. L'existence d'un changement soudain dans l'angle

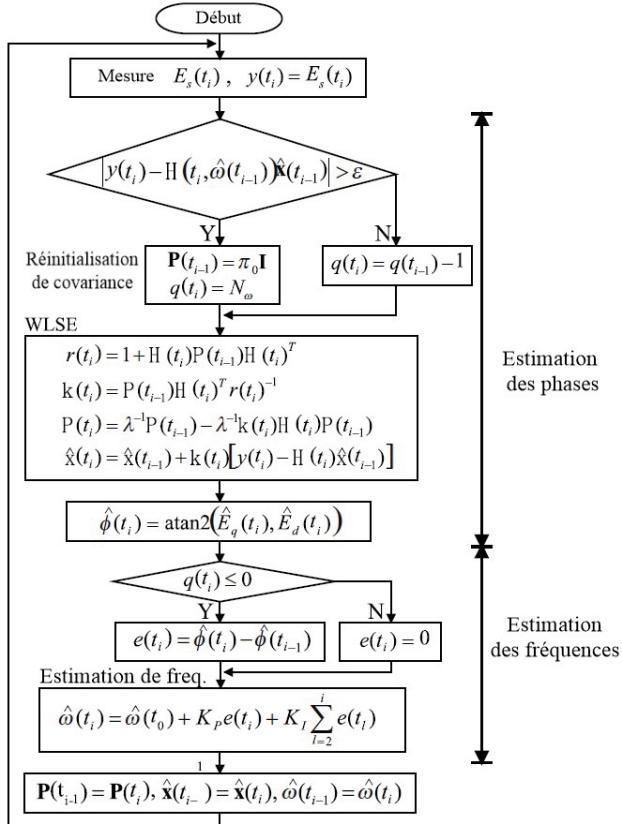


FIGURE 3.11 – Organigramme de la méthode WLSE [81].

de phase ou l'amplitude du signal de vibration est déterminée d'après l'état normal par l'amplitude de  $|y(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\hat{x}(t_{i-1})|$ . Si  $|y(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\hat{x}(t_{i-1})| > \epsilon$ , alors  $\mathbf{P}_{i-1}$  est réinitialisé à la covariance initiale  $\pi_0 \mathbf{I}$ . Pour éviter la réinitialisation fréquente causée par le bruit dans les conditions normales, la valeur limite  $\epsilon$  n'a pas besoin d'être très faible. D'après un guide heuristique, la valeur de  $\epsilon$  doit être comprise entre  $20 \sim 40\%$  de l'amplitude maximale du signal vibratoire. Nous notons également qu'avec la technique WLSE nous pouvons augmenter l'immunité au bruit de l'estimateur par la sélection d'un  $\lambda$  très grande. La figure (3.11) montre l'organigramme de l'algorithme d'estimation proposé.

L'algorithme proposé WLSE ne nécessite pas beaucoup d'efforts de calcul, car il est basé sur l'algorithme de moindres carrés récursifs. Par exemple, si nous utilisons une virgule flottante DSP *TMS320C31* dont le temps de l'instruction est de  $33\text{ns}$ , le temps de calcul de l'algorithme proposé WLSE est environ de  $3\mu\text{s}$  (91 cycles d'instruction), comme il est indiqué dans le tableau suivant.

### 3.3.4.1 Application numérique des méthodes à haute résolution

Dans la littérature, nous trouvons des études qui visent le diagnostic des fissures d'engrenages en exploitant les variations de la phase instantanée. À propos de ce sujet, les travaux de McFadden [9] suggèrent d'analyser la phase estimée de la fréquence d'engrenement à l'aide de la transformée de Fourier. D'autre part, l'analyse de la phase estimée par

Le contenu de calcul	nombre d'instructions de l'assembleur	Temps [ $\mu\text{s}$ ]
$e = y(t_i) - \mathbf{H}(t_i)\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1})$	5	0.165
$\mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{H}(t_i)^T$	12	0.396
$r(t_i) = 1 + \mathbf{H}(t_i)\mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{H}(t_i)^T$	15	0.495
$\mathbf{k}(t_i) = \mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{H}(t_i)^T r(t_i)^{-1}$	10	0.330
$\mathbf{P}(t_i) = \lambda^{-1}\mathbf{P}(t_{i-1}) - \lambda^{-1}\mathbf{k}(t_i)\mathbf{H}(t_i)\mathbf{P}(t_{i-1})$	16	0.528
$\hat{\mathbf{x}}(t_i) = \hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}) + \mathbf{k}(t_i)e$	8	0.264
atan2 (table de conversion)	25	0.825
<b>Total</b>	91	3.003

FIGURE 3.12 – Temps de calcul de l'algorithme proposé WLSE avec un DSP *TMS320C31* [81].

l'application de ESPRIT et WLSE sur le signal vibratoire d'une poutre fissurée a donné des très bons résultats par rapport à la phase estimée par Hilbert [83]. Pour cela, nous proposons de traiter les signaux de notre modèle numérique par ces deux méthodes afin de vérifier leurs performances pour détecter la présence d'une fissure précoce.

### 3.3.4.2 Application de ESPRIT sur le modèle numérique d'engrenages

Pour montrer les effets de la respiration de la dent fissurée sur la phase instantanée, nous proposons d'appliquer la méthode ESPRIT avec une fenêtre glissante (de taille plus grande au double de la période de rotation) sur les signaux d'engrenages. Nous traitons les signaux vibratoires d'un pignon sain, pignon avec une fissure de profondeur de 0.3 mm et un pignon avec une fissure de 0.6 mm de profondeur.

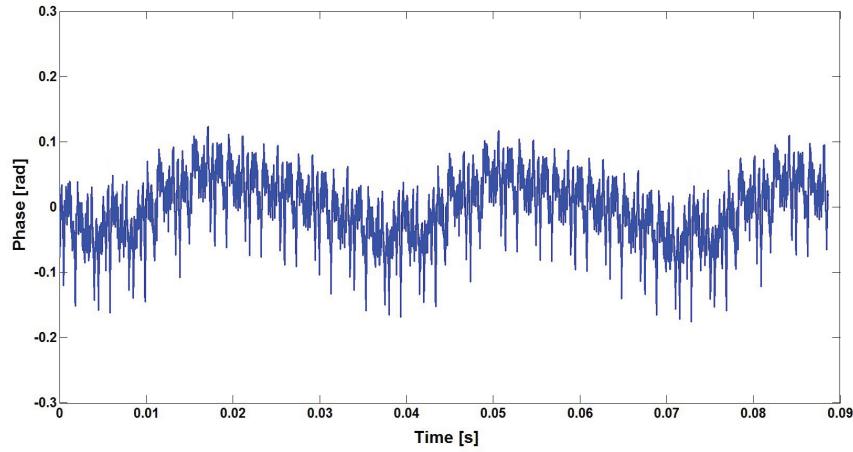


FIGURE 3.13 – La phase instantanée estimée par ESPRIT du signal d'accélération du modèle d'engrenages sans fissure.

Nous remarquons une périodicité dans la phase instantanée estimée par ESPRIT du signal d'accélération d'engrenage sain (figure 3.13). Sa densité spectrale de puissance montre la présence de la fréquence du pignon, la fréquence d'engrènement et ses harmoniques (figure 3.14) au contraire de la transformée de Hilbert qui estime uniquement la

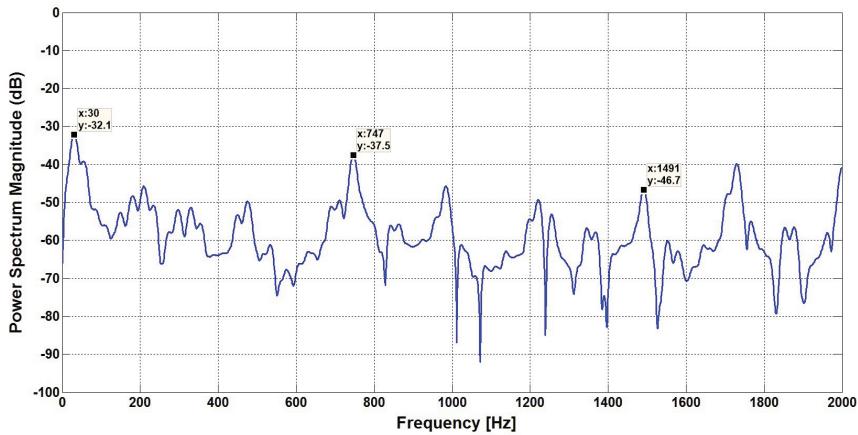


FIGURE 3.14 – Le spectre de la phase instantanée estimée par ESPRIT : pignon sain.

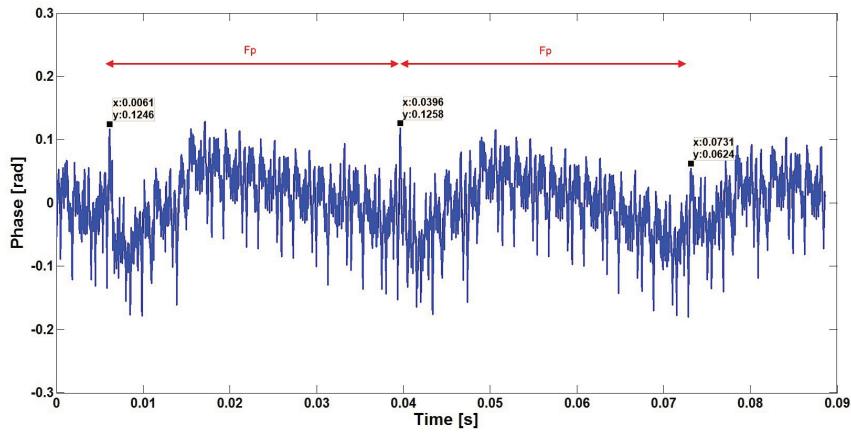


FIGURE 3.15 – La phase instantanée estimée par ESPRIT du signal d'accélération du modèle d'engrenages avec une fissure de 0.3 mm

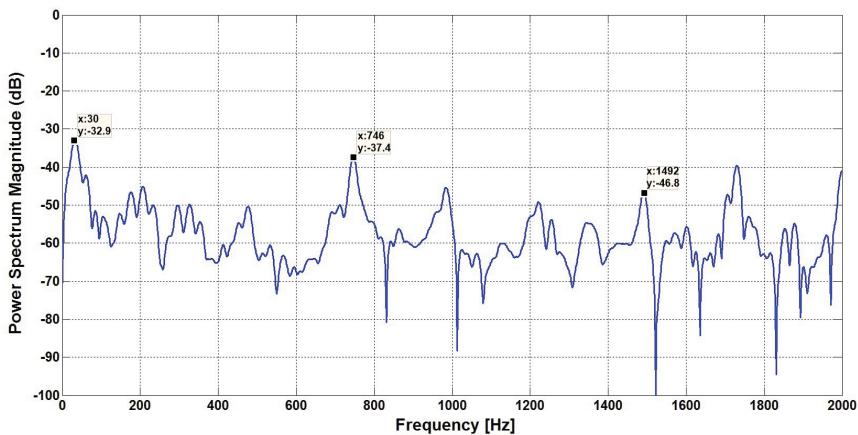


FIGURE 3.16 – Le spectre de la phase instantanée estimée par ESPRIT : pignon avec une fissure de 0.3 mm.

fréquence de pignon (voir l'annexe C). Si nous comparons les résultats obtenus d'un engrenage fissuré de 0.3 mm de profondeur (figure 3.15) à ceux obtenus d'un engrenage sain

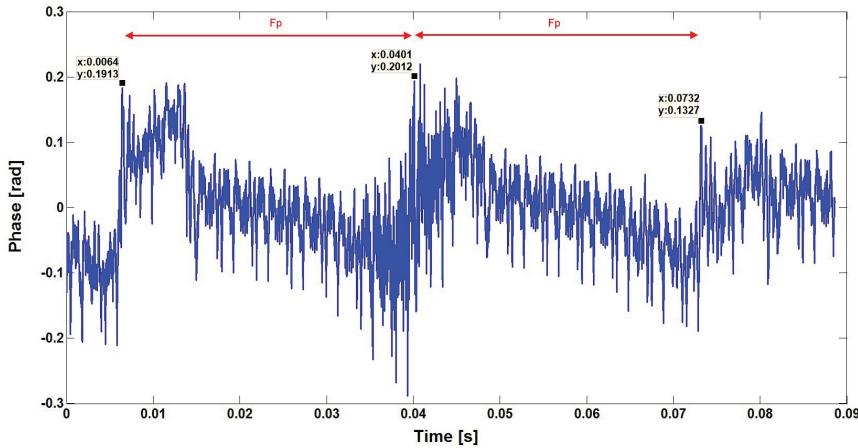


FIGURE 3.17 – La phase instantanée estimée par ESPRIT du signal d'accélération du modèle d'engrenages avec une fissure de 0.6 mm

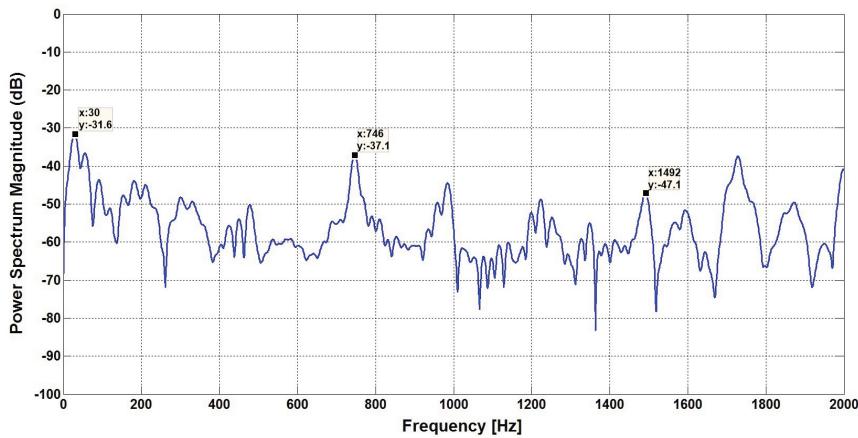


FIGURE 3.18 – Le spectre de la phase instantanée estimée par ESPRIT : pignon avec une fissure de 0.6 mm

(figure 3.13), nous remarquons l'apparition des pics dans la phase instantanée à chaque période correspondant à la rotation du pignon fissuré. Si nous augmentons la profondeur du défaut à 0.6 mm (figure 3.17), les amplitudes de ces pics deviennent importantes par rapport à ceux de la fissure de 0.3 mm. Par contre, la variation au niveau de l'amplitude de la fréquence du pignon fissuré (figures 3.16 et 3.18) est très légère par rapport au cas d'un pignon sain (environ 1 dB).

Nous pouvons déduire que la méthode ESPRIT avec une fenêtre glissante donne une idée sur la présence d'une fissure à travers l'estimation de la phase instantanée. Cette technique est légèrement sensible à la sévérité du défaut.

### 3.3.4.3 Application de WLSE sur le modèle numérique d'engrenages

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques pour illustrer les performances de la technique WLSE pour l'estimation de la phase instantanée et la détection de présence du défaut de fissure.

Nous analysons les même signaux traités dans la section précédente. Ensuite, nous étudions les performances de cette technique en comparant les résultats obtenus des différentes fissures, 0.3 mm et 0.6 mm, à ceux obtenus du modèle d'engrenage sain.

Pour l'estimation de la phase, nous utilisons la fonction "detrend" afin d'avoir une forme linéaire à la phase instantanée.

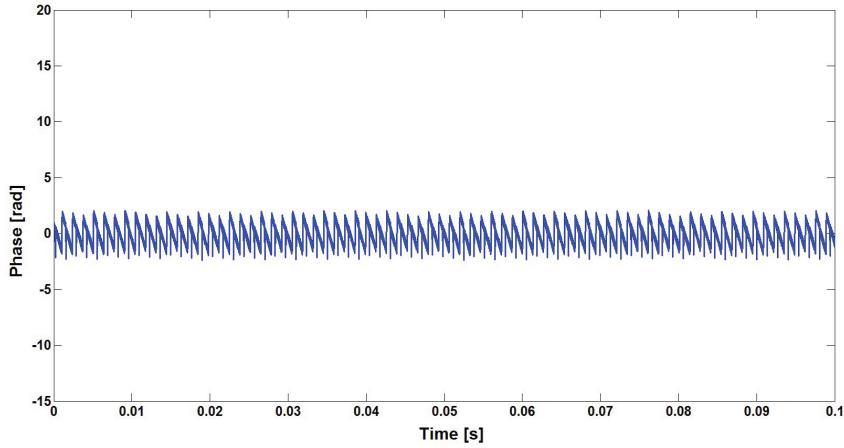


FIGURE 3.19 – La phase instantanée estimée par WLSE du signal d'accélération du modèle d'engrenages sans fissure.

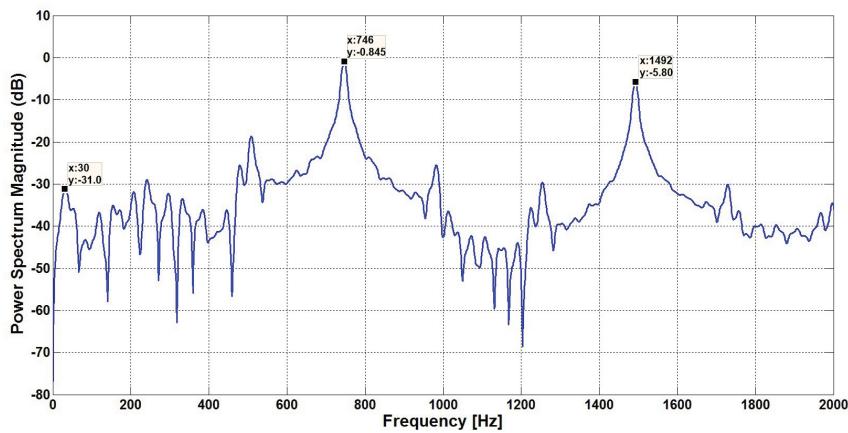


FIGURE 3.20 – Le spectre de la phase instantanée estimée par WLSE : pignon sain.

La phase instantanée d'engrenage sain (figure 3.19) a une allure en dents de scie qui varient entre deux niveaux constants. La durée entre deux pics adjacents correspond à la durée d'engrènement. La DSP de la phase instantanée (figure 3.20) montre la fréquence d'engrènement qui est important par rapport à ses harmoniques et la fréquence du pignon. La présence d'une fissure de profondeur de 0.3 mm engendre une énorme variation dans la phase instantanée pendant chaque période de rotation du pignon fissuré (figure 3.21). Le spectre fréquentiel de la phase instantanée (figure 3.22) montre que l'amplitude de la fréquence du pignon fissuré devient beaucoup plus important par rapport à la fréquence

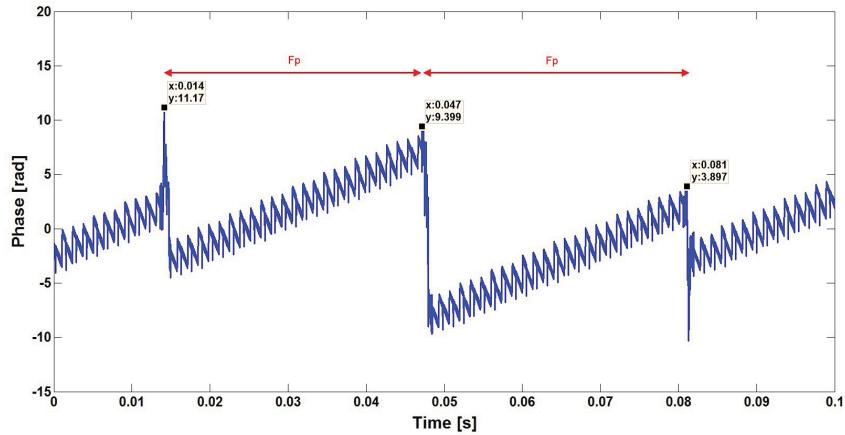


FIGURE 3.21 – La phase instantanée estimée par WLSE du signal d'accélération du modèle d'engrenages avec une fissure de 0.3 mm

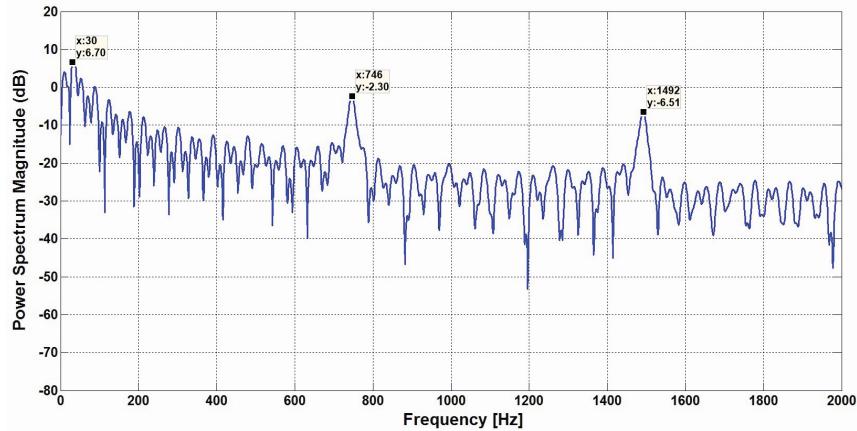


FIGURE 3.22 – La phase instantanée estimée par WLSE : pignon avec une fissure de 0.3 mm.

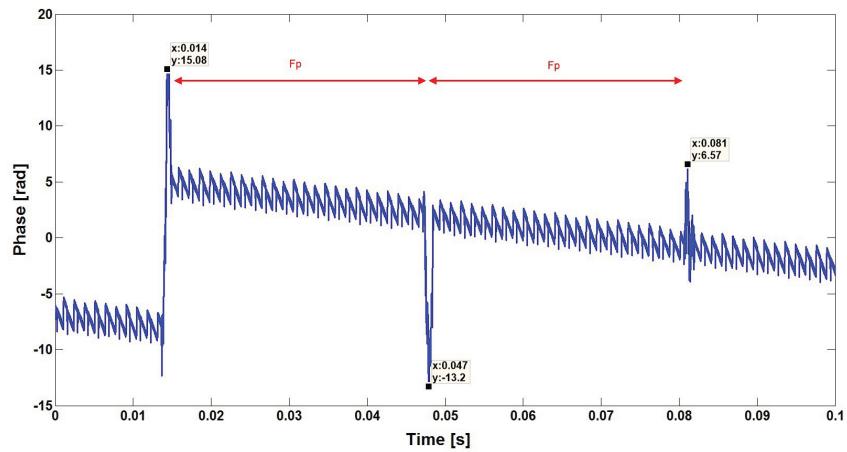


FIGURE 3.23 – La phase instantanée estimée par WLSE du signal d'accélération du modèle d'engrenages avec une fissure de 0.6 mm

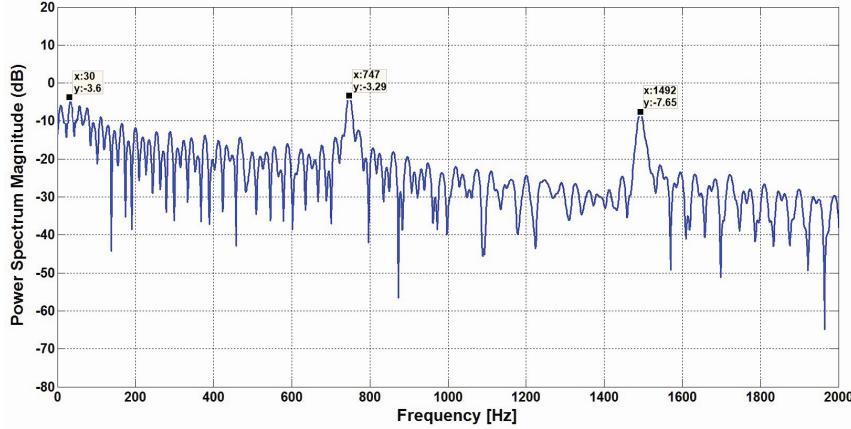


FIGURE 3.24 – La phase instantanée estimée par WLSE : pignon avec une fissure de 0.6 mm.

d'engrènement et son amplitude dans le cas d'un pignon sain (différence de 30 dB). Cette variation ne change pas de niveau si nous approfondissons la profondeur de la fissure jusqu'à 0.6 mm (figure 3.23). Dans le spectre fréquentiel de la phase (figure 3.24), nous remarquons une diminution dans l'amplitude de la fréquence du pignon par rapport au cas d'un défaut de 0.3 mm (différence de 10 dB).

La signature de la fissure a été évidente dans la phase instantanée estimée par la méthode WLSE. La DSP de la phase instantanée a prouvé que cette signature influence l'amplitude de la fréquence de la roue défectueuse. Par contre, la méthode WLSE est également peu sensible à la sévérité du défaut comme la méthode ESPRIT.

### 3.3.5 scalogramme de phase

Mathématiquement, les propriétés locales (l'amplitude et la phase) d'un signal réel mono-dimensionnel  $x(t)$  sont définies par ce que nous appelons *le signal analytique*  $x_A(t)$  [95] :

$$x_A(t) = x(t) + ix_{\mathcal{H}}(t); \quad (3.27)$$

avec  $i = \sqrt{-1}$  et  $x_{\mathcal{H}}(t)$  est la transformée de Hilbert de  $x(t)$  définie par :

$$x_{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau \Leftrightarrow X_{\mathcal{H}}(\omega) = X(\omega).i\text{sign}(\omega), \quad (3.28)$$

où,  $X(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $x(t)$  et :

$$\text{sign}(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega < 0 \\ +1 & \omega \geq 0 \end{cases}$$

À partir de (3.27) et (3.28), il est simple de montrer que :

$$X_A(\omega) = X(\omega).[1 + \text{sign}(\omega)]. \quad (3.29)$$

Par conséquent, le signal analytique correspondant à  $x$  est obtenu en supprimant toutes les fréquences négatives, et en multipliant l'ensemble des fréquences positives par deux. Étant donné la définition du signal analytique, nous pouvons exprimer les définitions suivantes :

L'amplitude local de  $x(t)$  :

$$A(t) = \|x_A(t)\| = \sqrt{x^2(t) + x_{\mathcal{H}}^2(t)}. \quad (3.30)$$

La phase locale :

$$\phi(t) = \arg(x_A(t)) = \arctan \{x_{\mathcal{H}}(t)/x(t)\}. \quad (3.31)$$

De l'équation ci-dessus de la phase locale, nous pouvons tirer un certain nombre de signatures de phase pour différentes caractéristiques du signal (voir par exemple [95]). Cependant, le calcul direct de ces grandeurs locales, tel que défini ci-dessus, ne peut pas être fait dans une technique basée sur la phase. C'est principalement parce que la transformée de Hilbert / signal analytique, comme nous pouvons le voir à partir de l'équation (2) et (3), est définie sur l'ensemble du rapport signal/spectre du signal ; tandis que, par exemple, pour la détection de caractéristiques, la localisation dans le temps et la fréquence sont hautement souhaitables. En d'autres termes, nous devons concevoir un opérateur pour approximer ces quantités dans un petit laps temporel et sur une gamme étroite de fréquences (échelles) afin d'améliorer la localisation temporelle et d'éviter l'effet de bruit. Une façon très utile est de "fenêtrer" le signal  $x(t)$ ,  $x_w(t) = w(t) \times x(t)$ , en utilisant, par exemple, une fonction Gaussienne comme  $w(t)$  menant à la transformée de Fourier à courte durée (STFT) (pour plus de détails, voir [96] (chap. 4)).

Une approche alternative consiste à estimer la phase locale / l'énergie d'une version filtrée du signal. Une propriété qui devrait satisfaire est la réponse zéro pour un signal constant (invariant au gris de décalage de niveau [91]), ce qui implique que le filtre d'approximation  $x_e(t)$  doit être :

- 1- un filtre passe bande (zero-DC).
- 2- symétrique (avec une phase constante, afin de ne pas modifier l'information de la phase du signal d'origine). La condition de symétrie implique que le filtre doit être pair (pour cela il est noté  $x_e$  (e=even)).

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \hat{x}_A(t) &= x_e(t) \circledast x(t) + i\mathcal{H}(x_e(t) \circledast x(t)) \\ &= (x_e(t) + i\mathcal{H}(x_e(t))) \circledast x(t) \\ &= (x_e(t) + ix_o(t)) \circledast x(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

où "⊗" représente l'opérateur de convolution 1-D et  $x_o(t)$  est la transformé de Hilbert de  $x_e(t)$ . On peut montrer, étant donné la définition de la transformée de Hilbert et la propriété Hermitienne de la transformée de Fourier, que  $x_o(t)$  est impair, filtre passe-bande zéro DC (voir [95]).

En pratique, le calcul d'une approximation de la phase locale et de l'amplitude locale utilise une paire de filtres passe-bande en quadrature (un filtre impair  $x_o(t)$  et un filtre pair  $x_e(t)$ ), où :

$$\hat{\phi}(t) = \arctan \{x_o(t) \circledast x(t)/x_e(t) \circledast x(t)\}, \quad (3.33)$$

$$\hat{A}(t) = \sqrt{[x_e(t) \circledast x(t)]^2 + [x_o(t) \circledast x(t)]^2} \quad (3.34)$$

L'équation (3.33) donne la définition du "Scalogramme de la phase" (variation de la phase en fonction de la fenêtre glissante). Nous allons appliquer cette technique sur des signaux de synthèse modulés en fréquence. Ensuite, nous montrerons son efficacité d'extraire des informations utiles du signal d'origine.

### - Exemple numérique :

Dans cet exemple, nous appliquons la technique du scalogramme de phase sur un signal sinusoïdal modulé en phase donné comme suit :

$$S = A.\cos(2\pi f_c t + B.\sin(2\pi f_m t)) \quad (3.35)$$

où  $f_c$  représente la fréquence du signal porteuse ( $f_c = 100Hz$ ) et  $f_m$  représente la fréquence du message ( $f_m = 10Hz$ ),  $A$  et  $B$  sont les amplitudes de ces deux signaux, respectivement.

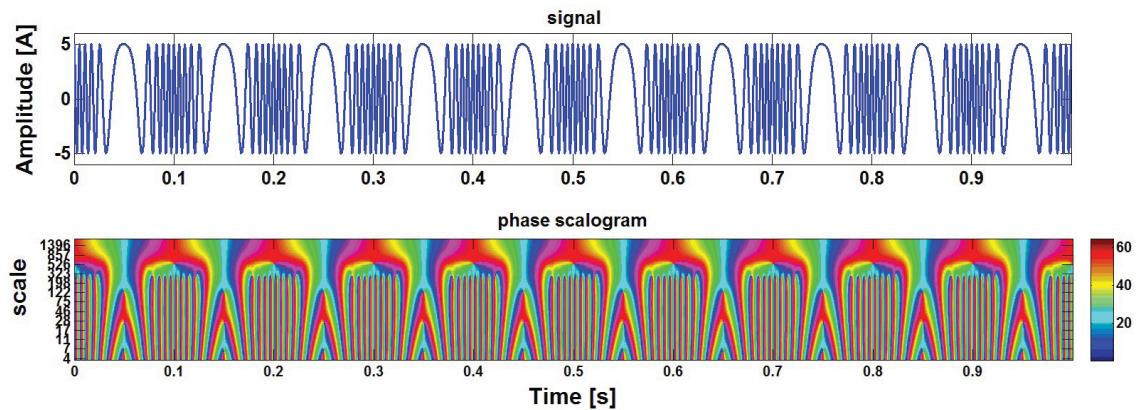


FIGURE 3.25 – Résultat du scalogramme : a) signal modulé b) scalogramme de phase.

Dans la figure (3.25), nous observons que toutes les fluctuations, indépendamment de leurs formes, sont détectées et peuvent être classées selon leurs phases. Cependant, l'interprétation d'un type de variation dépend évidemment de l'échelle. En inspectant le scalogramme de phase, nous remarquons que sur de petites échelles, la variation de phase est détectée par l'absence des contours et l'énergie de phase prend différentes formes. Par contre, à très grandes échelles, la détection de variation de phase devient de plus en plus compliquée. Nous notons que les caractéristiques du signal de synthèse ne sont plus identifiables à grande échelle.

### 3.3.6 Analyse des signaux du modèle d'engrenages avec le Scalogramme

Dans cette section, nous appliquons l'algorithme du scalogramme de phase sur les signaux issus de notre modèle. Notre objectif est toujours de prouver que la fissure d'une dent d'engrenage affecte principalement la phase du signal vibratoire du système. Pour

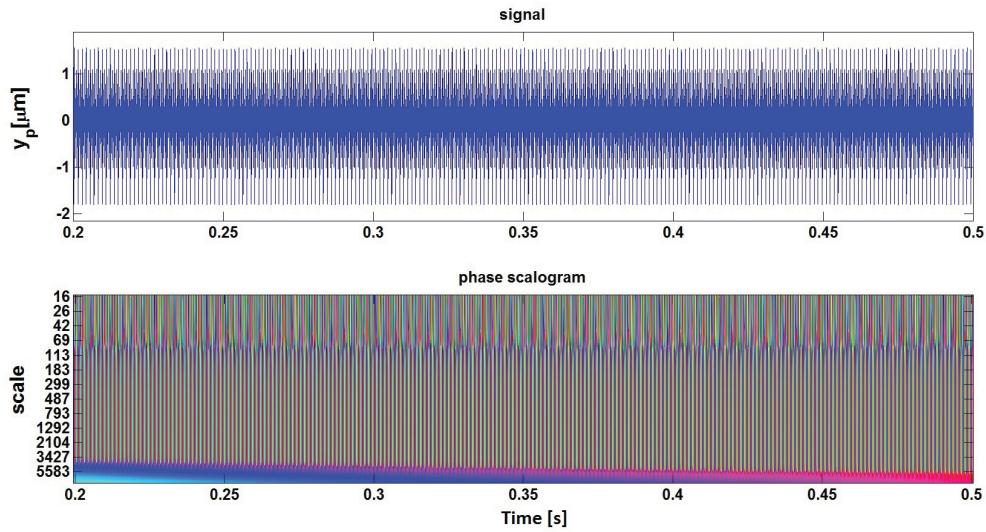


FIGURE 3.26 – La réponse vibratoire du modèle d'engrenages : a) avec des dents intactes b) scalogramme de phase.

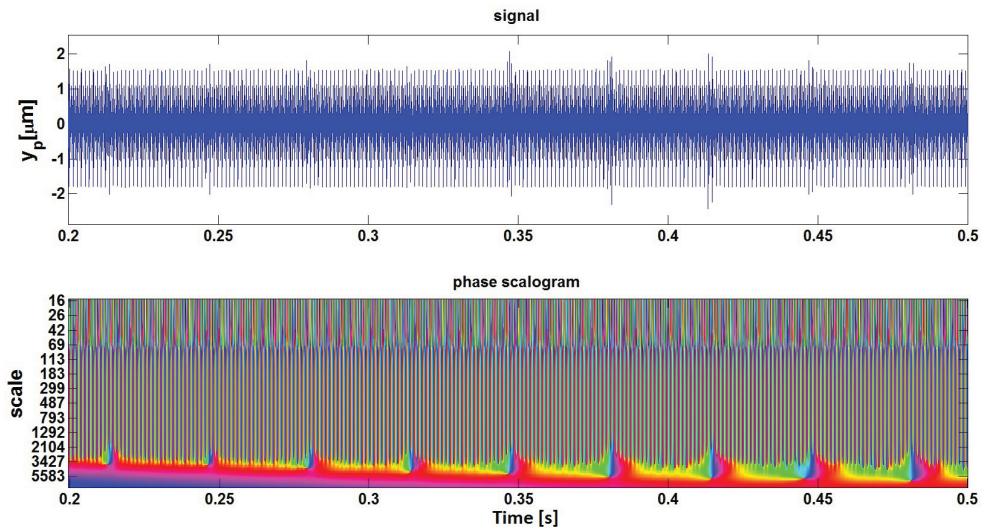


FIGURE 3.27 – La réponse vibratoire du modèle d'engrenages : a) avec une dent fissurée b) scalogramme de phase.

cela, nous comparons, dans cette étude, les phases estimées, grâce à notre application, d'un pignon sain avec ceux obtenues d'un pignon fissuré.

Les figures (3.26.a) et (3.27.a) montrent les réponses dynamiques du système, pour un pignon sain et avec une dent fissurée, respectivement. Nous avons sélectionné la direction "y" qui correspond au plan où il est souvent placé les accéléromètres. La figure (3.26.b) correspond au scalogramme de la phase du pignon sain ; nous constatons, dans ce cas, qu'il n'y a aucune anomalie dans la phase même durant le changement d'échelle. Cependant, quand il y a une fissure dans la dent du pignon avec une profondeur de 0,3mm, nous distinguons la présence des changements brusques dans l'énergie de phase. Ces changements sont bien évidents dans les échelles élevées et à chaque période de rotation du pignon  $T_p$

(Fig. 3.27.b). Cela confirme encore une fois que la phase du signal vibratoire permet une bonne détection d'un défaut de fissure.

## 3.4 Cyclostationnarité

La cyclostationnarité permet d'analyser à la fois le caractère périodique et aléatoire d'un signal vibratoire. Les machines tournantes se prêtent bien à cette propriété statistique qui est liée au mode de fonctionnement cyclique, rotation d'un arbre par exemple [97–101]. Le caractère aléatoire peut être dû à des variations aléatoires de la vitesse ou de la charge, ou à la présence d'un défaut [102,104]. Dans ce qui suit nous allons montrer que la présence d'un défaut de fissure génère de la cyclostationnarité d'ordre 2 et que cette CS2 peut être exploitée pour caractériser la sévérité d'une fissure.

### 3.4.1 Définitions et propriétés

#### 3.4.1.1 Processus aléatoire

Un processus stochastique ou processus aléatoire représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire. Nous pouvons le définir, également, par un ensemble des signaux aléatoires  $X_k(t) \in R^R, k \in Z$  qui sont appelés "réalisations" de  $X(t)$ .

Les premiers processus stochastiques étudiés sont les processus stationnaires. Ils sont les plus faciles à mesurer et à caractériser puisque leurs moments statistiques sont constants. Au début, ces processus ont été abusivement exploités pour traiter des processus non stationnaires. Ensuite, l'apparition d'une nouvelle catégorie de processus : les processus cyclostationnaires [105, 106], a mis fin à plusieurs hypothèses dans la modélisation des phénomènes. Les processus cyclostationnaires incluent les processus stationnaires comme des cas particuliers.

En fait, les processus stochastiques se caractérisent par leurs densités de probabilité. Souvent, ce type d'information est inconnu d'où vient l'intérêt d'estimer les descripteurs statistiques.

Les moments et les cumulants d'ordre supérieur (les statistiques d'ordre supérieur) sont exploités principalement en complément des statistiques d'ordre deux. Elles donnent une description plus générale et complète des données et de leurs propriétés [107].

Considérons un signal échantillonné, avec un pas d'échantillonnage  $T_s$  :  $X_k(nT_s) = X_k[n]; k, n \in Z$ ,  $n$  est l'indice temporel et  $X_k[n]$  est la discrétisation réelle du processus stochastique.

**Définition 1 :** Si les statistiques d'un processus aléatoire sont périodiques (respectivement presque périodiques) jusqu'à l'ordre  $p$ , alors, il est cyclostationnaire d'ordre  $p$  fortement (respectivement faiblement) [107].

Le signal est *cyclostationnaire au sens strict* s'il est cyclostationnaire à tout ordre. Mais bien entendu, il pourra l'être faiblement ou fortement. En plus, la périodicité (ou presque-périodicité) s'entend ici sur le temps. Nous constatons donc l'apparition de la notion fondamentale du temps de référence, qui est absente de toutes les théories stationnaires. En

effet, pour un signal stationnaire, les corrélations entre p instants du signal ne dépendent que des écarts entre les instants. En revanche, cette propriété disparaît dans les théories non-stationnaires où le rôle de l'instant de référence devient primordial.

### 3.4.1.2 Cyclostationnarité du premier ordre

Le moment du premier ordre d'un processus  $X_k[n]$  correspond à la moyenne,  $\mu_x[n]$  de ses réalisations :  $\mu_x[n] = E\{X_k[n]\}$ . Un processus est cyclostationnaire à l'ordre 1 si son moment d'ordre "1" est périodique avec une période N [108] :

$$\mu_X[n] = \mu_X[n + N] \quad \forall n \in Z \quad (3.36)$$

Quand le moment d'ordre (1) est périodique, alors, il accepte une décomposition en séries de Fourier :

$$\mu_X[n] = \sum_{k \in Z} \mu_X^k e^{j2\pi f_k n} \quad (3.37)$$

$\mu_X^k$  sont les coefficients de Fourier de  $\mu_X[n]$  aux fréquences discrètes  $f_k = \frac{k}{N}$ .

### 3.4.1.3 Cyclostationnarité du deuxième ordre

Le moment d'ordre deux d'un processus aléatoire  $X_k[n]$  est donné par :

$$R_X[n, \tau] = E\{X[n + \beta\tau]X[n - \bar{\beta}\tau]\}, \beta + \bar{\beta} = 1 \quad (3.38)$$

Le paramètre  $\beta$  permet de généraliser la formule pour différentes définitions équivalentes dans la littérature.  $\beta = \frac{1}{2}$  correspond à la version symétrique de la fonction d'autocorrélation.

$\beta = 1$  ou  $\beta = 0$ , correspond à la version asymétrique de la fonction d'autocorrélation.  $\tau$  est un nombre entier qui appartient à  $Z$ .

Le processus aléatoire  $X_k[n]$  est généralement centré pour pouvoir analyser uniquement les contributions d'ordres supérieurs à (1). Nous obtenons alors le moment centré d'ordre deux comme suit :

$$C_X[n, \tau] = E\{(X[n + \beta\tau] - \mu_X[n + \beta\tau])(X[n - \bar{\beta}\tau] - \mu_X[n - \bar{\beta}\tau])\} \quad (3.39)$$

Nous remarquons que si  $\tau = 0$ , nous retrouvons la définition de la variance.

Par la suite, nous considérons systématiquement les définitions centrées des moments d'ordre deux.

**Définition 2 :** Le processus aléatoire  $X_k[n]$  est cyclostationnaire à l'ordre 2 de période N si son moment d'ordre (2) (fonction autocorrélation) est périodique de période N :

$$C_X[n, \tau] = C_X[n + N, \tau] \quad \forall n \in Z \quad (3.40)$$

Si la fonction d'autocorrélation instantanée est périodique, alors, elle accepte un développement en séries de Fourier :

$$C_X[n, \tau] = \sum_{\alpha_k \in A} C_X[\alpha_k, \tau] e^{j2\pi\alpha_k n} \quad (3.41)$$

La somme est effectuée sur les multiples entiers correspondant à la fréquence fondamentale  $\alpha_1$ . Dans cette décomposition,  $\alpha$  est appelé *la fréquence cyclique*,  $A : \{\alpha_k = \frac{k}{N}, k \in Z\}$  est l'ensemble des fréquences cycliques.  $C_X[\alpha_k, \tau]$  est appelée *la fonction d'autocorrélation cyclique* (FAC) donnée par :

$$C_X[\alpha_k, \tau] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} C_X[n, \tau] e^{-j2\pi\alpha_k n} \quad (3.42)$$

Il s'agit d'une fonction continue de la variable  $\tau$  et discrète de la variable  $\alpha_k$ . La limite est supposée exister dans le sens des moindres carrés. Elle est non nulle pour quelques  $\alpha_k \neq 0$  et elle présente par rapport  $\alpha_k$  et  $\tau$  les propriétés de symétries suivantes :

$$\begin{aligned} C_X[\alpha_k, -\tau] &= C_X[\alpha_k, \tau] \\ C_X[-\alpha_k, \tau] &= C_X^*[\alpha_k, \tau] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dans le cas strictement stationnaire, la fonction d'autocorrélation cyclique est nulle pour toutes les fréquences  $\alpha_k \neq 0$ . En effet, pour  $\alpha = 0$ , la fonction d'autocorrélation cyclique devient exactement la fonction d'autocorrélation classique. Cette propriétés du modèle cyclostationnaire fait de lui un modèle attractif dans beaucoup d'applications notamment en télécommunications.

Un processus qui vérifie (3.36) et (3.40) est dit cyclostationnaire au sens large (CSSL). Dans cette étude, nous nous intéressons aux processus cyclostationnaire au sens large qui représente le cas le plus probable en mécanique vibratoire.

#### 3.4.1.4 Outils fréquentiels de deuxième ordre

Dans le cas d'un processus stationnaire, le théorème de *Wiener-Khintchine* permet de définir sa Densité Spectrale de Puissance (DSP) comme étant la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Ce théorème est valable pour le cas cyclostationnaire et nous pouvons écrire [109] :

$$W_X[n, f] = F_\tau \{C_X[n, \tau]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_X[n, \tau] e^{-j2\pi f \tau} \quad (3.44)$$

$F_\tau$  et  $W_X[n, f]$  représentent la transformée de Fourier par rapport à la variable  $\tau$  et le spectre de Wigner-Ville, respectivement. Cette dernière est aussi périodique par rapport à la variable  $n$ . Donc, elle admet le développement en série de Fourier selon la variable  $n$  :

$$W_X[n, f] = \sum_{\alpha_k \in A} S_X[\alpha_k, f] e^{j2\pi\alpha_k n} \quad (3.45)$$

De manière semblable au cas de développement en série de Fourier de la fonction d'autocorrélation cyclique, l'équation (3.41), la somme ici est effectuée sur l'ensemble des

fréquences cycliques. Le coefficient de Fourier  $S_X[\alpha_k, f]$  désigne la fonction de corrélation spectrale ou la densité spectrale de puissance cyclique et elle est donnée par :

$$S_X[\alpha_k, f] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_X[n, f] e^{-j2\pi\alpha_k n} \quad (3.46)$$

Nous remplaçons la fonction d'autocorrélation  $W_X[n, f]$  dans l'équation (3.44) par son développement en séries de Fourier, l'équation (3.41), et en identifiant le résultat obtenu au développement de l'équation (3.45), nous obtenons une relation semblable à celle de Wiener-Khintchine dans le domaine des fréquences cycliques :

$$S_X[\alpha_k, f] = F_\tau \{C_X[\alpha_k, \tau]\} \quad (3.47)$$

Nous constatons que la fonction de corrélation spectrale est bien la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation cyclique et elle présente les mêmes propriétés que cette dernière.

D'autre part, nous trouvons la définition de la densité spectrale de puissance classique quand  $\alpha = 0$ . Dans le cas cyclostationnaire, la corrélation spectrale est discrète suivant les fréquences  $\alpha$ .

$$S_X[\alpha_k, f] \begin{cases} \neq 0 & \text{si } \alpha_k = \frac{k}{N}, \quad \forall k \in Z \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.48)$$

Les signaux stationnaires sont traités avec la fonction de corrélation invariante dans le temps (domaine d'analyse lié au retard) ou avec la densité spectrale de puissance (domaine fréquentiel). Par contre, les signaux non-stationnaires et cyclostationnaires comprennent quatre variables  $(n, \tau, \alpha, f)$  correspondant respectivement au (temps, retard, fréquence cyclique, fréquence). Donc, quatre domaines d'analyse sont disponibles et la figure (3.28) résume leurs relations [110].

La cyclostationnarité peut être vue comme le cas général de la stationnarité. Dans le cas où les densités spectrales cycliques sont toutes nulles sauf à la fréquence  $\alpha = 0$ , le processus est stationnaire. Dans ce cas là, sa densité spectrale de puissance s'identifie par  $S_X[0, f]$  et la fonction d'autocorrélation classique par  $C_X[0, \tau]$ . En rendant les processus stationnaires, ça va conduire à une perte d'informations en limitant l'étude sur le support  $\alpha = 0$ . En revanche, la cyclostationnarité exploite au mieux le signal en extrayant d'autres informations inaccessibles.

L'étude cyclostationnaire propose quatre espaces d'analyse. La transition de l'un à l'autre se fait par dualité (figure 3.28). Le choix d'un espace d'analyse dépend de l'application étudiée. À titre d'exemple, il est préférable d'utiliser l'espace (fréquence cyclique, fréquence) dans le cas des machines tournantes car il est plus adapté à la recherche des fréquences cycliques cachées qui représentent le défaut.

Nous pouvons interpréter l'autocorrélation cyclique comme une mesure de la corrélation temporelle entre les composantes spectrales du signal distantes de la fréquence cyclique  $\alpha$ . En d'autres termes, elle est l'intercorrélation des signaux  $u(t)$  et  $v(t)$ , versions décalées du signal fréquentiel de  $-\alpha/2$  et  $\alpha/2$ , respectivement.

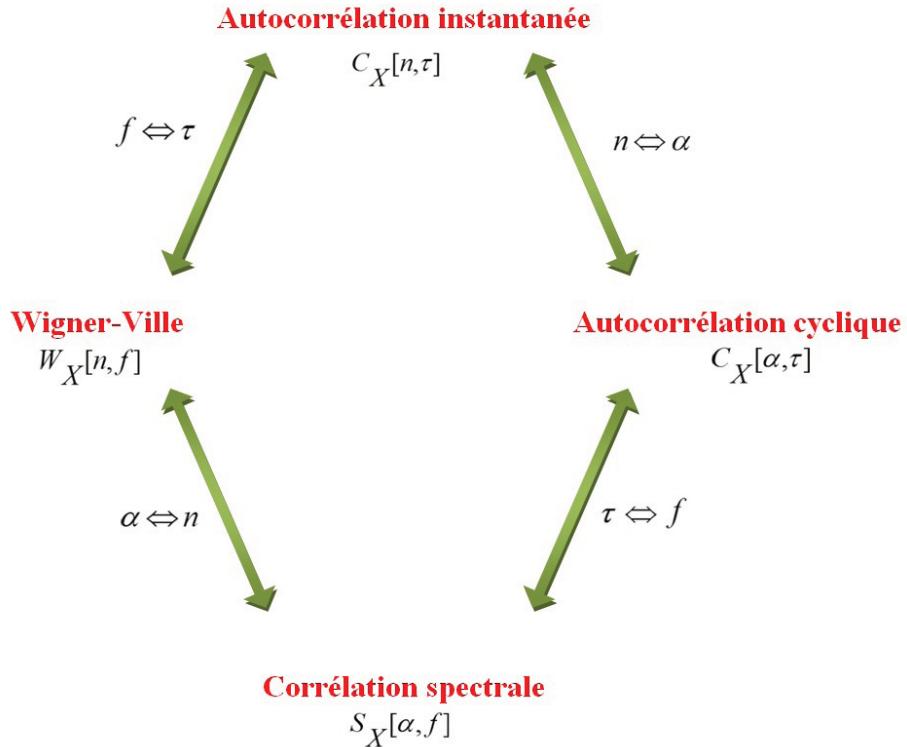


FIGURE 3.28 – Espace de représentation d'un processus cyclostationnaire à l'ordre (2).

### 3.4.2 La cyclostationnarité dans les signaux d'un pignon fissuré

Afin d'étudier la présence des composantes cyclostationnaires d'ordre 2 dans les signaux du modèle numérique, nous avons ajouté un bruit blanc Gaussien à la raideur (ce qui représente un phénomène stationnaire). L'addition du bruit s'effectue seulement au cours de perte de la rigidité pour simuler l'effet de la respiration de la fissure.

Après avoir enlevé la moyenne synchrone (les composantes cyclostationnaires d'ordre 1) de nos signaux, nous obtenons le signal résiduel qui englobe tous les phénomènes aléatoires de notre système. En plus, nous trouvons que la variance synchrone est l'outil le plus simple pour confirmer l'existence des composantes CS2.

Dans le cas d'un pignon sain, nous remarquons uniquement la fréquence de rotation du pignon avec une faible amplitude dans le spectre de la variance du signal d'accélération (figure 3.29).

En revanche, quand une fissure se manifeste dans la racine d'une dent (de profondeur de 0.3 mm), nous observons l'apparition de la fréquence cyclique ( $\alpha = 29.84\text{Hz}$ ) et ses harmoniques dans le spectre de la variance (figure 3.30).

Si nous augmentons la profondeur de la fissure, ça conduit à l'augmentation de l'amplitude de la fréquence cyclique et ses harmoniques (figure 3.31).

Les mêmes résultats peuvent être étudiés en utilisant la fonction d'autocorrélation cyclique, équation (3.42), pour un autre type de présentation.

Dans les figures (3.33 et 3.34), nous observons clairement les harmoniques de la fréquence cyclique du pignons défectueux avec des amplitudes importantes par rapport au

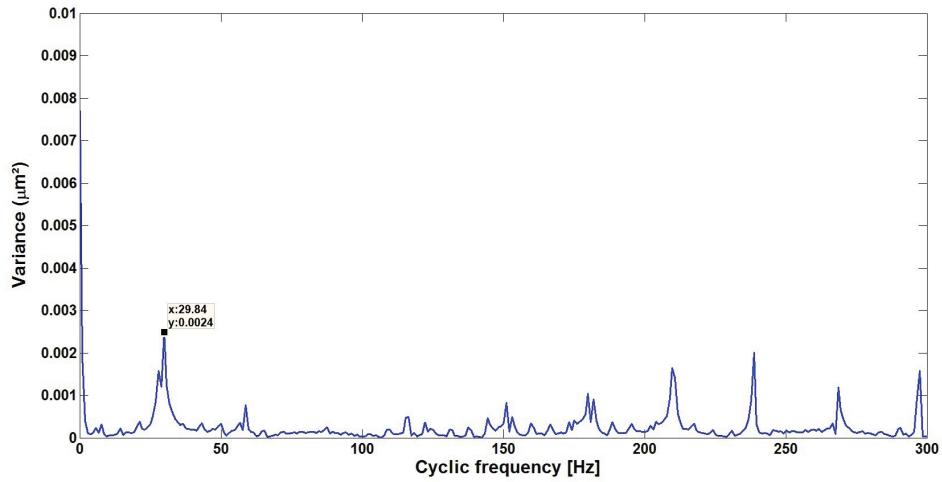


FIGURE 3.29 – Le spectre de la variance d'un pignon sain

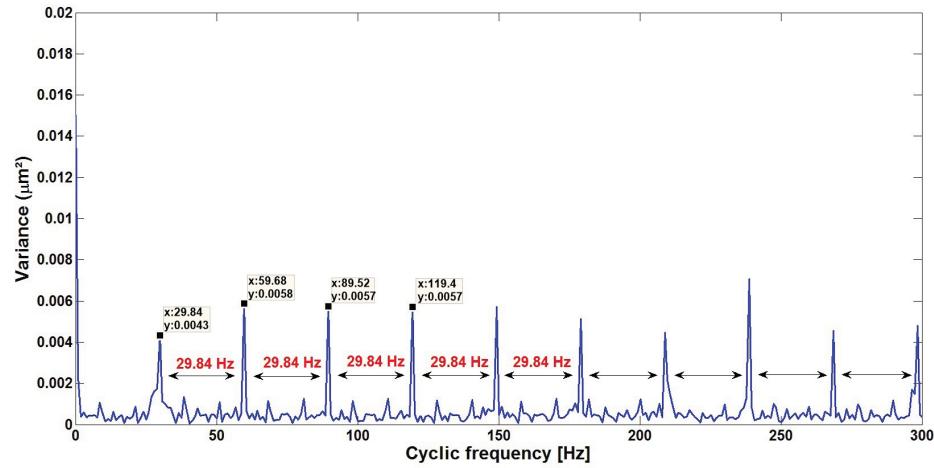


FIGURE 3.30 – Le spectre de la variance d'un pignon fissuré : 0.3 mm de profondeur

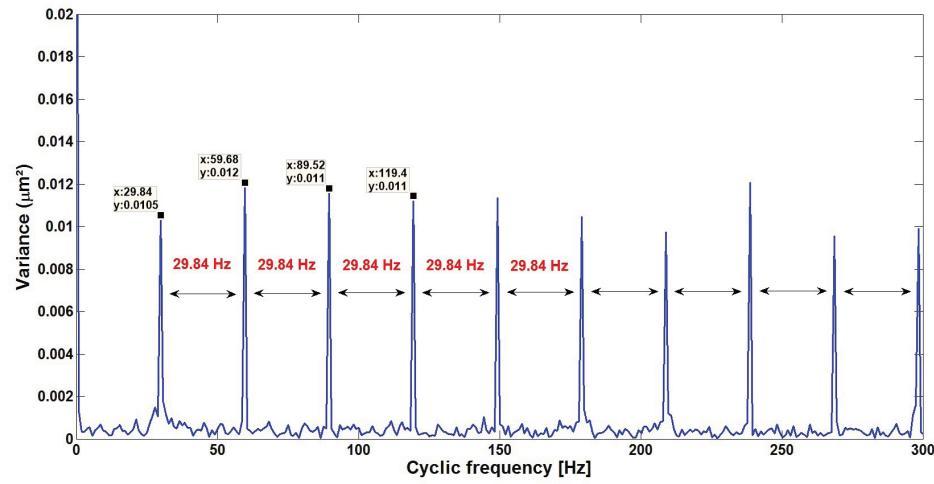


FIGURE 3.31 – Le spectre de la variance d'un pignon fissuré : 0.6 mm de profondeur

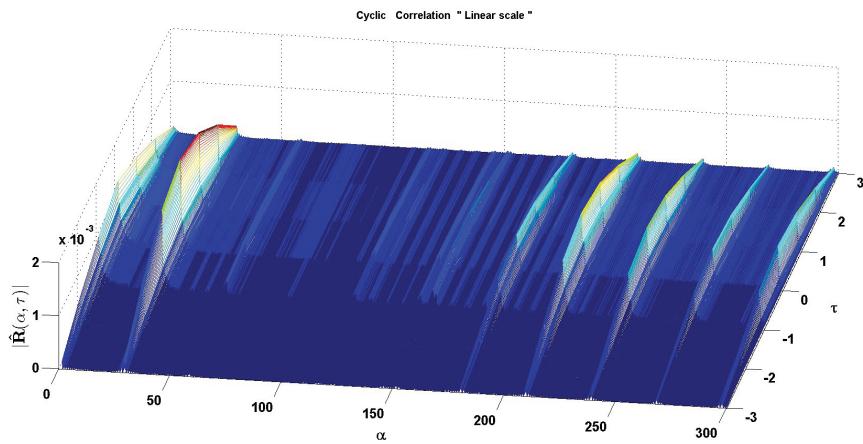


FIGURE 3.32 – La fonction d'autocorrélation cyclique du pignon sain

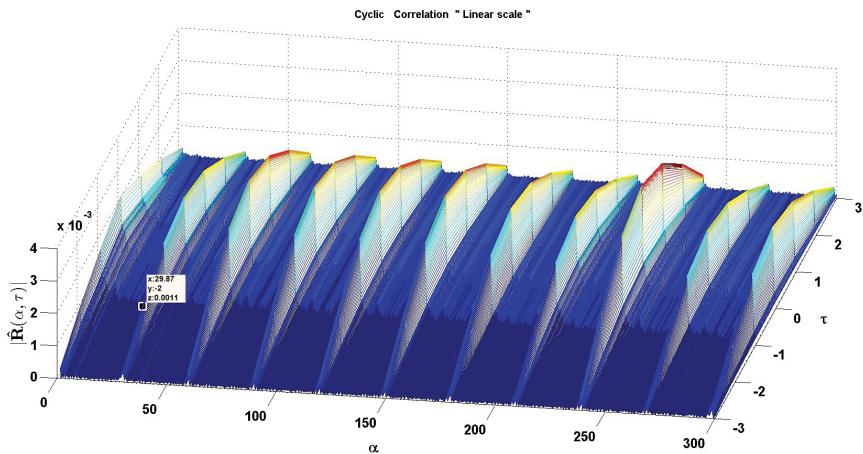


FIGURE 3.33 – La fonction d'autocorrélation cyclique du pignon fissuré : 0.3 mm de profondeur

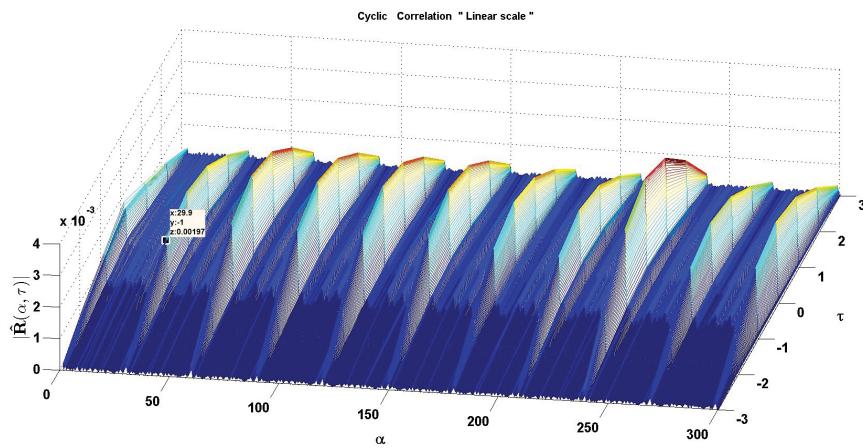


FIGURE 3.34 – La fonction d'autocorrélation cyclique du pignon fissuré : 0.6 mm de profondeur

cas d'un pignon sain (figure 3.32).

Nous constatons que la fissure d'une dent d'engrenages conduit à l'apparition des composantes CS2 dans les signaux vibratoires d'un modèle numérique. Dans le prochain chapitre, nous essayons de valider ces résultats avec des signaux réels issus d'un banc d'essais qui comporte un pignon fissuré avec différentes dimensions.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la transformée de Fourier et l'avons appliquée sur les signaux vibratoires issus de notre modèle numérique. Nous avons remarqué que cette méthode ne permet pas la détection d'un défaut de fissure d'engrenages. Ensuite, nous avons effectué une comparaison de sensibilité de détection de fissure entre les différentes méthodes d'estimation de la phase instantanée. Nous avons trouvé que la phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert peut aider dans la détection de la fissure mais elle est mauvaise pour l'estimation de la fréquence du défaut. La méthode WLSE fonctionne bien pour la détection de la fissure mais elle n'est pas sensible à la sévérité du défaut. En revanche, la méthode ESPRIT avec une fenêtre glissante est très performante et très sensible à la sévérité de la fissure mais son temps de calcul est trop long. Nous avons vu, également, qu'avec le scalogramme de phase nous pouvons avoir une information sur l'état des dents d'engrenages. Quand nous l'avons appliquée sur les signaux accélérométriques issus de notre modèle d'engrenages fissuré, nous avons remarqué clairement les variations de la phase dues à la respiration de la fissure. Le scalogramme peut aussi donner une idée sur la sévérité de la fissure.

Finalement, nous avons présenté les définitions et les propriétés liées au concept de la cyclostationnarité. Nous avons exploité ce concept dans le cadre de l'analyse vibratoire. Ensuite, nous l'avons appliquée sur les signaux d'accélération d'un modèle d'engrenages à 6 DDL. Lorsqu'il y a une dent fissurée dans le pignon, nous avons remarqué l'apparition de la fréquence cyclique (composantes cyclostationnaires d'ordre 2) correspondant à la roue défectueuse. L'amplitude spectrale à cette fréquence dépend à la sévérité de la fissure. Nous avons montré que l'apparition des composantes CS2 est due à la combinaison de la périodicité de la rigidité d'engrenement avec la respiration aléatoire de la fissure. Il nous reste à valider ces résultats avec les signaux réels issus d'un banc d'engrenages.

Dans le chapitre suivant, nous allons effectuer une étude comparative de robustesse au bruit entre les méthodes présentées dans ce chapitre.

# Chapitre 4

## ÉTUDE COMPARATIVE DES MÉTHODES DE TRAITEMENT DU SIGNAL PROPOSÉES

### Sommaire

---

4.1	Introduction	102
4.2	Rapport signal/bruit	103
4.3	Comparaison entre les différentes méthodes	103
4.3.1	La transformée de Hilbert	104
4.3.2	WLSE	104
4.3.3	ESPRIT	105
4.3.4	Scalogramme de phase	106
4.3.5	Cyclostationnarité d'ordre 2	108
4.4	Conclusion	108

---

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté quelques outils de traitement du signal qui exploitent la signature spécifique des défauts de fissures, notamment la modulation de phase d'un modèle numérique d'engrenages. La détection de fissures est faite grâce à l'estimation de la phase instantanée ou l'exploitation de la cyclostationnarité des signaux vibratoires d'engrenages. En réalité, les conditions de fonctionnement des engrenages engendrent du bruit. L'objectif de ce chapitre est de comparer la sensibilité et la robustesse des techniques de traitement du signal utilisées pour la détection des fissures dans des milieux bruités. Ensuite, nous choisissons les méthodes les plus performantes et robustes pour les appliquer sur les signaux réels issus d'un pignon fissuré.

## 4.2 Rapport signal/bruit

Le rapport signal/bruit (nous utilisons parfois l'abréviation SNR du terme anglais signal-to-noise ratio), exprimé généralement en décibel (dB), correspond à l'écart mesuré entre un signal fourni à l'entrée d'un mécanisme et le "bruit de fond" généré par l'électronique de l'appareil et les autres équipements de l'environnement, qui est mesuré à sa sortie. Il s'obtient en comparant l'énergie du signal original de la source avec l'énergie du signal obtenue en sortie du mécanisme, pour mesurer le niveau de bruit (signal parasite).

L'énergie du signal est représentée par sa valeur moyenne  $\mu$ , et celle du bruit par l'écart-type  $\sigma$ . Le rapport signal à bruit est donc :

$$\frac{S}{B} = \frac{\mu}{\sigma} \quad (4.1)$$

Si le signal est affecté d'un biais systématique  $b$ , il faut en tenir compte dans l'estimation de ce rapport, et retirer au préalable sa contribution :

$$\frac{S}{B} = \frac{\mu - b}{\sigma} \quad (4.2)$$

Si les différents bruits contribuant à un signal sont indépendants les uns des autres, leurs écarts-types s'ajoutent quadratiquement pour construire l'écart-type total :

$$\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2 \quad (4.3)$$

Il s'ensuit le rapport signal à bruit :

$$\frac{S}{B} = \frac{\mu - b}{\sqrt{\sum_i \sigma_i^2}} \quad (4.4)$$

Afin de mesurer ce rapport en décibel, nous utilisons cette formule :

$$\frac{S}{B} = 10 \log_{10} \frac{\mu - b}{\sigma} \quad (4.5)$$

## 4.3 Comparaison entre les différentes méthodes

Dans cette section, nous traitons le signal vibratoire issu du modèle numérique d'engrenage, développé dans le chapitre 2, qui porte un pignon fissuré. Pour cette étude, nous choisissons une profondeur de défaut de 0.3 mm afin d'évaluer également la sensibilité des techniques utilisées. Nous ajoutons à ce signal un bruit blanc avec différentes énergies afin de varier le SNR du signal. Nous passons d'un SNR important (signal peu bruité) à un très faible SNR (signal très bruité). Nous commençons par la valeur 40 dB et cela se dégrade par 5 dB jusqu'à l'incapacité de la méthode à distinguer le défaut. À chaque valeur de SNR, nous évaluons les performances des techniques pour la détection d'une fissure. Les signaux traités sont de taille de 97401 points et leur fréquence d'échantillonnage est 96 kHz.

### 4.3.1 La transformée de Hilbert

En appliquant la transformée de Hilbert autour de la fréquence d'engrènement (nous utilisons un filtre passe-bande de largeur de 400 Hz), nous analysons la phase instantanée estimée du signal d'accélération de notre modèle numérique. Après l'addition du bruit au signal du pignon fissuré, nous comparons les résultats issus des signaux de  $\text{SNR} = 40 \text{ dB}$ ,  $\text{SNR} = 30 \text{ dB}$  et  $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ .

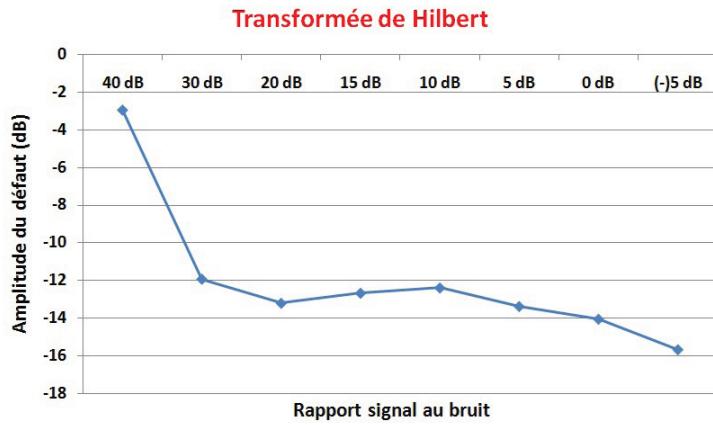


FIGURE 4.1 – Évolution de l'amplitude de défaut  $F_p$  en fonction du SNR : La phase instantanée estimée par Hilbert.

Dans cette étude, nous suivons l'évolution de l'amplitude de la fréquence normalisée  $\frac{A_{F_p}}{A_{F_{p0}}}$  en fonction du SNR.  $A_{F_p}$  et  $A_{F_{p0}}$  représentent l'amplitude de la fréquence  $F_p$  dans la présence du bruit et son absence, respectivement. Pour avoir des résultats en décibel, nous utilisons la formule suivante :

$$\text{Amplitude}_{\text{norm}} = 20 \log \frac{A_{F_p}}{A_{F_{p0}}}.$$

D'après la figure (4.1), nous notons que pour un SNR de 40 dB, la signature du défaut est évidente dans le spectre de la phase instantanée (-3 dB). En revanche, quand nous augmentons l'énergie du bruit pour un SNR de 30 dB, la distinction de la fréquence du défaut devient un peu plus compliquée (-12 dB). L'amplitude normalisée du défaut varie entre -12 dB et -14 dB quand le SNR varie de 30 dB jusqu'à 0 dB. Elle atteint -16 dB avec un rapport signal au bruit de -5 dB. L'estimation de la fréquence du défaut devient compliquée avec la transformée de Hilbert même avec un faible bruit.

Nous pouvons déduire que la phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert est peu robuste pour détecter la signature d'une fissure dans un signal de  $\text{SNR} \leq 30 \text{ dB}$ .

### 4.3.2 WLSE

Nous analysons dans cette partie l'effet du bruit sur la phase instantanée estimée par la méthode WLSE. Après le test de plusieurs rapport signal au bruit, nous ne présentons, cette fois-ci, que trois valeurs de SNR : 40 db, 30 dB et 20 dB :

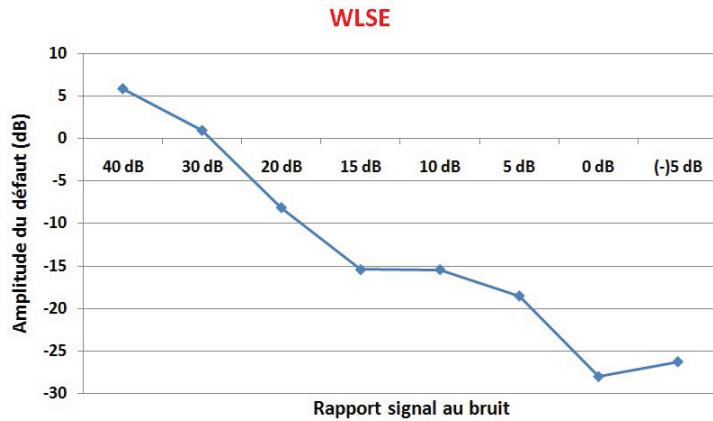


FIGURE 4.2 – Évolution de l'amplitude de défaut  $F_p$  en fonction du SNR : La phase instantanée estimée par WLSE.

Au contraire de la méthode de Hilbert, les valeurs de l'amplitude normalisée de  $F_p$  sont positives (6 dB et 1 dB) pour des SNR=40 dB et 30 dB, respectivement (figure 4.2). Plus nous diminuons le rapport du signal au bruit (de 20 dB jusqu'à -5 dB), plus l'amplitude normalisée de  $F_p$  diminue pour chuter jusqu'à -27 dB.

D'après les résultats obtenus, nous constatons que la technique de WLSE est plus performante par rapport à la transformée de Hilbert pour décrire la signature de la fissure dans un milieu bruité.

### 4.3.3 ESPRIT

Si nous estimons la phase instantanée par la méthode ESPRIT à travers une fenêtre glissante, nous arrivons à distinguer la signature de la fissure dans un signal non bruité. De manière semblable, nous comparons dans cette partie l'effet du bruit sur la qualité de détection de la signature de fissure en utilisant cette technique. Les tests ont été effectués pour plusieurs valeurs de SNR.

Pour un SNR compris entre 20 dB et 40 dB (figure 4.3), la valeur de l'amplitude normalisée de la fréquence  $F_p$  est presque constante (-2 dB). Ensuite, elle chute jusqu'à -13 dB pour un SNR de 15 dB. Elle remonte un petit peu (-11 dB) pour un SNR de 10 dB, puis elle se dégrade graduellement jusqu'à -18 dB avec la diminution du SNR jusqu'à -5 dB. La distinction du défaut dans la phase instantanée estimée par ESPRIT devient un peu plus compliquée quand le SNR est inférieur ou égale à 15 dB.

Nous pouvons déduire que la méthode ESPRIT avec une fenêtre glissante est a priori plus performante par rapport à WLSE et la transformée de Hilbert. Elle permet de détecter le défaut dans un signal bruité de SNR = 20 dB.

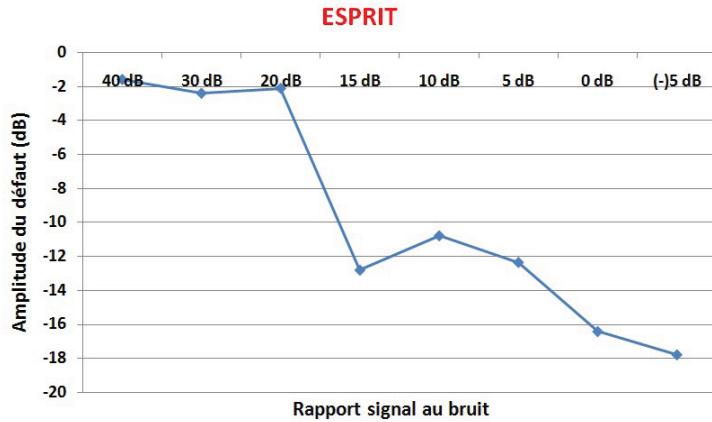


FIGURE 4.3 – Évolution de l'amplitude de défaut  $F_p$  en fonction du SNR : La phase instantanée estimée par ESPRIT.

#### 4.3.4 Scalogramme de phase

Dans cette partie, nous traitons la phase instantanée en utilisant le scalogramme. Cette méthode permet d'évaluer la phase pour plusieurs tailles de fenêtres de filtrage. Nous refaisons la même procédure précédente sur les signaux bruités afin de tester la robustesse du scalogramme pour détecter le défaut de fissure.

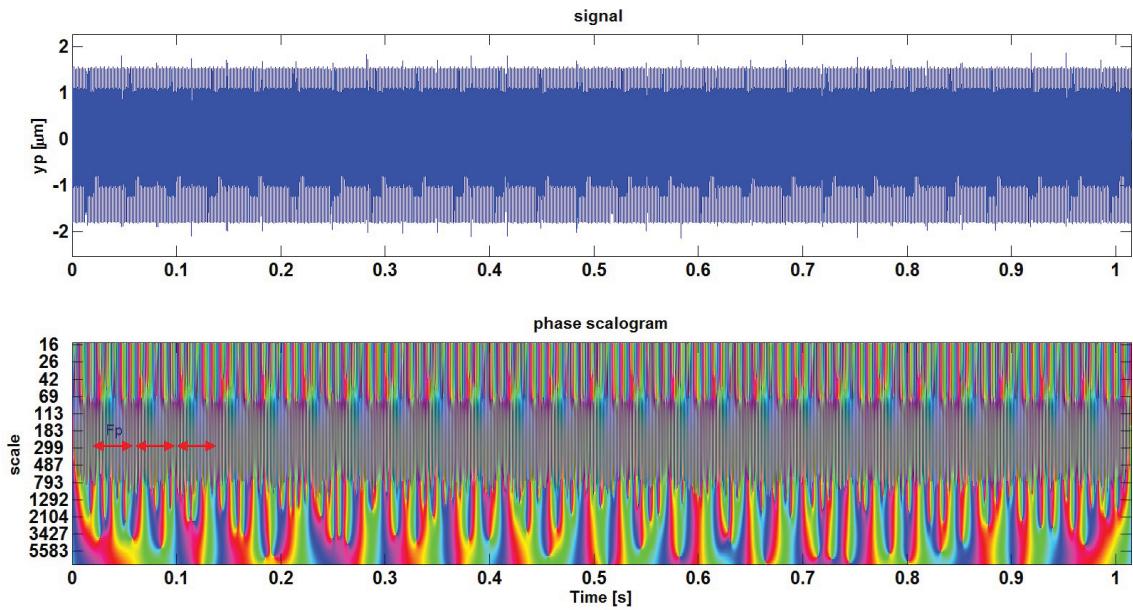


FIGURE 4.4 – Le scalogramme de phase : SNR de 40 dB.

Dans la figure (4.4), nous remarquons le changement de phase pendant chaque période de rotation du pignon fissuré où le SNR = 40 dB. Après plusieurs tests de SNR, nous avons constaté que cette méthode peut distinguer la signature de la fissure dans la phase sous un SNR de 10 dB (figure 4.5). Par contre, si nous œuvrons dans milieu trop bruité de SNR = 5 dB (figure 4.6), le scalogramme de phase ne peut fournir d'indication sur la

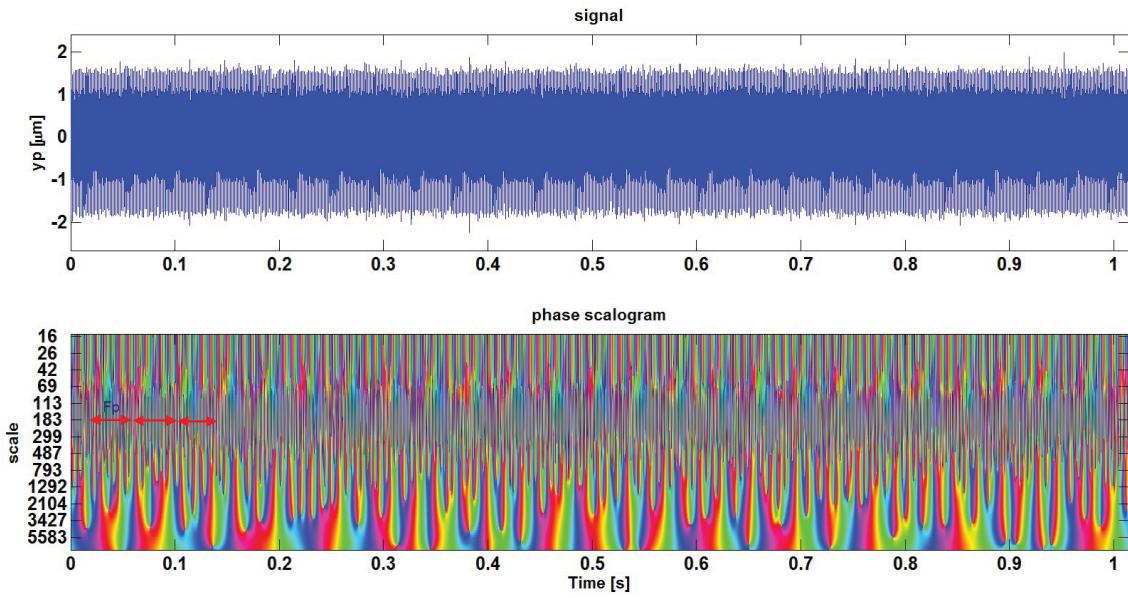


FIGURE 4.5 – Le scalogramme de phase : SNR de 10 dB.

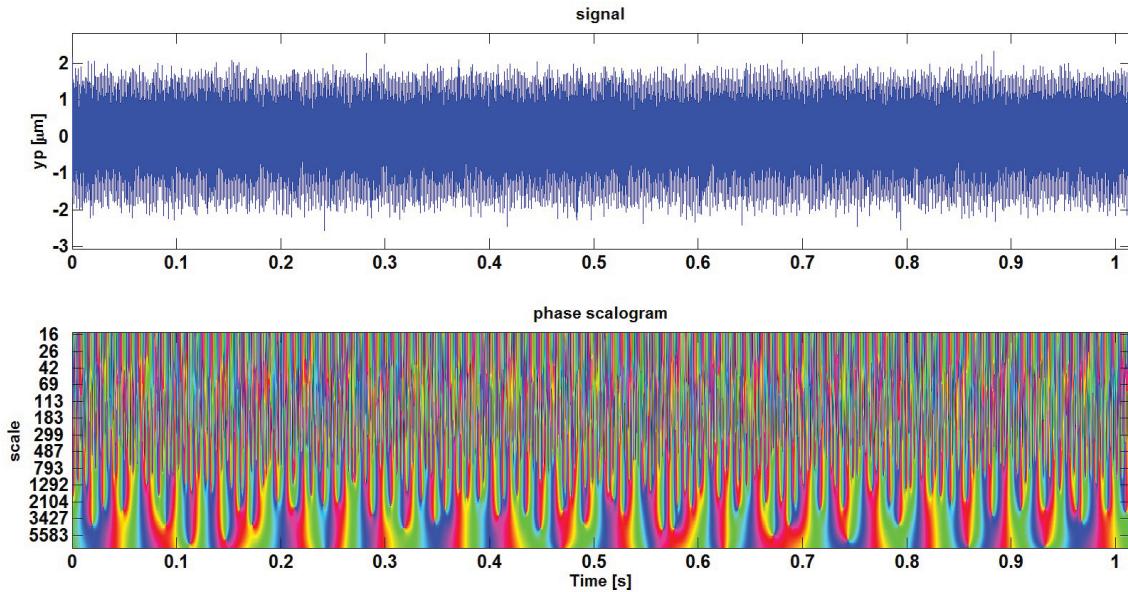


FIGURE 4.6 – Le scalogramme de phase : SNR de 05 dB.

présence de la fissure.

Après tous ces tests, nous pouvons déduire que les performances du scalogramme de phase sont un peu meilleures que la méthode ESPRIT avec une fenêtre glissante. Le scalogramme de phase peut distinguer les changements brusques de phase, dus à la respiration de la fissure, dans les signaux bruité de  $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ . En plus, l'avantage du scalogramme de phase par rapport à ESPRIT est qu'il a un temps de calcul beaucoup plus réduit.

### 4.3.5 Cyclostationnarité d'ordre 2

Après avoir évalué les méthodes d'estimation de la phase instantanée pour détecter la fissure d'engrenages dans un milieu bruité, nous cherchons dans cette section le niveau de capacité et de robustesse de la cyclostationnarité d'ordre 2 pour estimer la fréquence du défaut. Nous effectuons le même principe d'évaluation en changeant le SNR du signal d'accélération de 40 dB jusqu'au -5 dB.

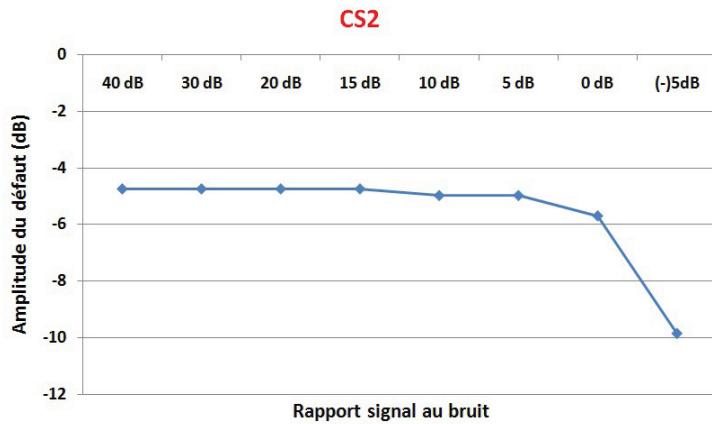


FIGURE 4.7 – Évolution de l'amplitude normalisée de défaut  $F_p$  en fonction du SNR : la cyclostationnarité d'ordre 2.

La figure (4.7) représente l'évolution de l'amplitude normalisée de la fréquence cyclique en fonction du rapport signal à bruit. La valeur de l'amplitude reste proche de -5 dB pour les SNR supérieurs ou égaux à 5 dB. Pour un SNR de 0 dB, l'amplitude de la fréquence cyclique diminue à -6 dB. Par contre, quand le SNR = -5 dB, l'amplitude de la fréquence du défaut chute à -10 dB. Nous pouvons améliorer ces résultats si nous augmentons la taille du signal traité afin d'avoir autant d'informations et une grande périodicité dans les composantes aléatoires (voir l'annexe C).

Nous pouvons dire que la cyclostationnarité d'ordre 2 est l'outil le plus robuste et capable de détecter une fissure précoce dans un milieu bruité (SNR = -5 dB) par rapport aux techniques proposées. Cela s'explique par le fait que le bruit est stationnaire et il impacte que le spectre en  $\alpha = 0$ . Les autres fréquences cycliques sont théoriquement peu impactées.

## 4.4 Conclusion

D'après l'évaluation effectuée dans ce chapitre, nous pouvons déduire que toutes les méthodes sont capables de détecter une fissure précoce d'engrenages si nous travaillons avec un bruit faible (SNR supérieur à 40 dB). La transformée de Hilbert a montré qu'elle est la technique la moins performante pour détecter la fissure. Elle devient peu efficace pour estimer la phase instantanée exacte si nous avons un  $\text{SNR} \leq 30 \text{ dB}$ . La méthode

WLSE est meilleure par rapport à la transformée de Hilbert concernant la détection de la fissure mais ses résultats se dégradent à partir d'un  $\text{SNR} \leq 20 \text{ dB}$ . Par contre, la méthode ESPRIT avec une fenêtre glissante a montré sa capacité pour mettre en évidence la signature de la fissure dans la phase instantanée d'un signal de  $\text{SNR} = 20 \text{ dB}$ . Ce niveau d'énergie du bruit n'est pas négligeable et rend cet outil beaucoup plus performant par rapport à WLSE et la transformée de Hilbert. Les performances du scalogramme de phase sont beaucoup mieux par rapport à celle d'ESPRIT. Il peut fonctionner dans un milieu bruité ( $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ ). L'avantage de cette méthode est qu'elle a un temps de calcul faible par rapport à ESPRIT car ce temps dépend de la taille du signal et de celle de la fenêtre glissante. Pour cela, nous classons le scalogramme de phase comme la méthode la plus rapide et la plus robuste parmi les méthodes d'analyse de phase proposées.

D'autre part, nous avons montré que la cyclostationnarité d'ordre 2 a le pouvoir d'estimer la fréquence cyclique liée à la fissure même sous un  $\text{SNR}$  nul. Cette technique perd ses performances si le bruit est fort ( $\text{SNR} = -5 \text{ dB}$ ) à moins que nous augmentions la durée du signal traité. Ces résultats montrent clairement que la CS2 a des performances bien supérieures aux autres méthodes. Cela s'explique par le fait que le bruit additif est stationnaire et il impacte donc que le spectre en  $\alpha = 0$ . Or la CS2 est distribuée sur des canaux cycliques différents de 0. Donc, théoriquement peu impacté par le bruit stationnaire.

Après toutes ces tests et ces évaluations théoriques, nous optons pour les outils du scalogramme de phase et la cyclostationnarité d'ordre 2 pour effectuer l'analyse des signaux réels. Dans le chapitre suivant, nous essayons de valider les résultats obtenus par un ensemble des essais expérimentaux. Nous cherchons à montrer la présence des composantes CS2 dans les signaux vibratoires d'un engrenage fissuré et l'efficacité de cet outil dans le diagnostic des fissures précoces. Nous montrons également l'avantage d'analyser la phase instantanée des pignons fissurés en utilisant le scalogramme de phase.

# Chapitre 5

## VALIDATION EXPÉRIMENTALE SUR BANC D'ESSAIS

### Sommaire

---

5.1	Introduction	110
5.2	Banc d'essai Spectra-Quest	111
5.2.1	Choix des roues du banc Spectra-Quest	112
5.2.2	Analyse modale	112
5.2.3	Dimensions des fissures	114
5.2.4	Plan d'expériences	115
5.3	L'analyse cyclostationnaire des signaux de Spectra-Quest	115
5.3.1	De la corrélation à l'analyse d'enveloppe	116
5.3.2	Analyse des signaux réels	117
5.4	Détection de fissure par le scalogramme	120
5.5	Conclusion	122

---

### 5.1 Introduction

Dans le deuxième chapitre, nous avons développé un modèle numérique de 6 DDL qui simule le comportement dynamique des engrenages sains et fissurés. Après avoir proposé et appliqué certains outils de traitement du signal sur les signaux issus de ce modèle, nous aurons besoin, par la suite, de valider tous les résultats théoriques obtenus. Cette procédure consiste à effectuer des tests expérimentaux sur un banc d'engrenages sans et avec un défaut de fissure et faire une comparaison entre les résultats théoriques et ceux réels. Afin de réaliser une bonne étude, nous devrons proposer un plan d'expérience bien adapté avec nos objectifs.

Dans un premier temps, l'objectif de ce chapitre sera donc de présenter le banc d'essais, la chaîne d'acquisition et les mesures effectuées. Plusieurs dimensions de fissure seront traitées sous différentes vitesses et différentes charges.

## 5.2 Banc d'essai Spectra-Quest

Les premiers essais ont été réalisés sur un banc d'essai de la marque Spectra-Quest (figure 5.1). Les mesures ont été effectuées grâce au système d'acquisition BetaVib et deux accéléromètres uni-axiaux. Le moteur est de vitesse variable (0 à 5000 tr/min). La vitesse est mesurée sur l'arbre d'entrée par un tachymètre. À la sortie, un frein électromagnétique (qui joue le rôle d'une charge) est commandé en courant et permet de faire varier le couple entre 0 et 65 N.m. Le banc comporte deux engrenages. L'engrenage portant le défaut est la roue N°4 sur la figure (5.2). Il est positionné sur l'arbre de sortie proche de la charge. Les capteurs uni-axiaux sont placés sur le porte-roulement (palier) de cet arbre et l'arbre intermédiaire. Ce montage permet donc d'avoir l'accélération suivant l'axe de la ligne d'action dans le domaine temporel.

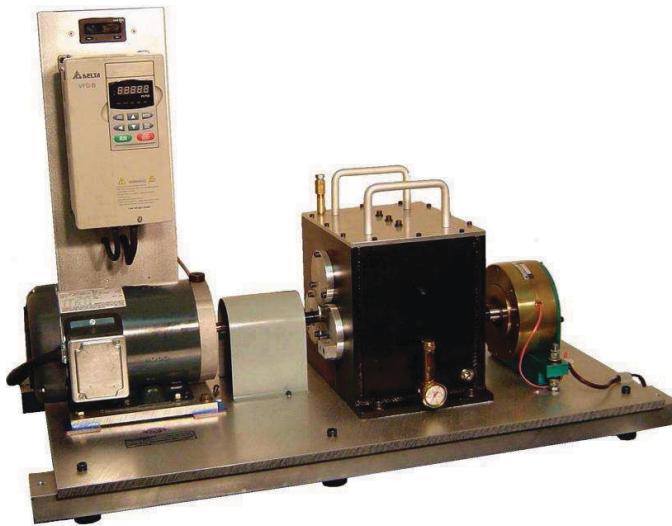


FIGURE 5.1 – Le banc d'engrenages Spectra-Quaest avant les modifications.



FIGURE 5.2 – Le banc d'engrenages Spectra-Quaest après les modifications.

Des modifications ont été menées sur ce banc d'essai pour contrôler et améliorer les conditions d'acquisition de différentes mesures. Nous avons changé le frein électromagnétique par un autre très puissant qui peut tenir de longues durées d'acquisition. Nous avons placé un couplemètre avant le frein afin de mesurer les valeurs du couple résistant.

D'autre part, nous avons fixé un élément chauffant dans le lubrifiant avec une sonde liée à un régulateur PID pour assurer une température fixe durant chaque test. Pour évaluer la température dans différents endroits sur la roue d'engrenages, nous avons placé des thermocouples en 8 points de la roue (voir l'annexe). Ces thermocouples passent à travers l'arbre intermédiaire vers le Slip-ring puis vers la carte d'acquisition.

L'objectif de cette partie est de comparer les résultats des simulations numériques avec ceux obtenus sur un banc d'essai expérimental, dans le but de valider notre modèle numérique à l'égard de différents aspects. Pour cela, une étude préliminaire des résonances est menée sur le banc d'essai Spectra-Quest afin d'évaluer l'influence de celui-ci sur les mesures. Cette étude permet d'établir les conditions optimales pour effectuer la prise de mesure et de choisir les bonnes vitesses de rotation durant les essais. Des fissures et des piqûres avec différentes dimensions sont alors testés sur le banc et les vibrations résultantes sont mesurées par des accéléromètres sous des températures bien définies.

### 5.2.1 Choix des roues du banc Spectra-Quest

Le premier engrenage sert uniquement à transmettre la puissance à l'arbre intermédiaire. Le second permet la connexion avec le frein électromagnétique qui applique le couple. Le défaut est placé sur l'arbre de sortie. Afin de minimiser l'influence du premier engrenage dans le domaine fréquentiel, sa fréquence d'engrènement a été choisie trois fois supérieure à celle du second. De plus, le rapport de réduction a été choisi proche de 1. Cela permet aux arbres d'avoir une vitesse de rotation similaire et de ne pas exciter le bâti à des fréquences différentes :

- Premier palier : 88/90 dents.
- Deuxième palier : 29/30 dents.

Ainsi, pour une fréquence de moteur de 16,66 Hz, la fréquence d'engrènement du premier étage est  $feng_1 = 1466$  Hz et celle du second étage est  $feng_2 = 489$  Hz.

Les engrenages sont constitués de roues à dentures droites commerciales et faites d'acier (Quality Transmission Components, QTC). Leurs caractéristiques sont données dans l'annexe I. Il est nécessaire de vérifier la résistance des roues par rapport aux conditions du banc d'essai. Cette vérification consiste à calculer le facteur de sécurité (FS) pour les contraintes en flexion et les contraintes en surface. L'objectif étant de trouver un facteur de sécurité supérieur à 1 pour ne pas avoir d'usure prématuée des engrenages. Afin d'optimiser le choix des roues, la limite du facteur de sécurité est prise à 1,5. Les calculs sont faits pour une durée de vie de  $10^7$  cycles avec une fiabilité de 0,9999. Pour cela, il faut considérer la contrainte au pied de la dent. Les contraintes sont calculées à partir de la norme AGMA [5].

### 5.2.2 Analyse modale

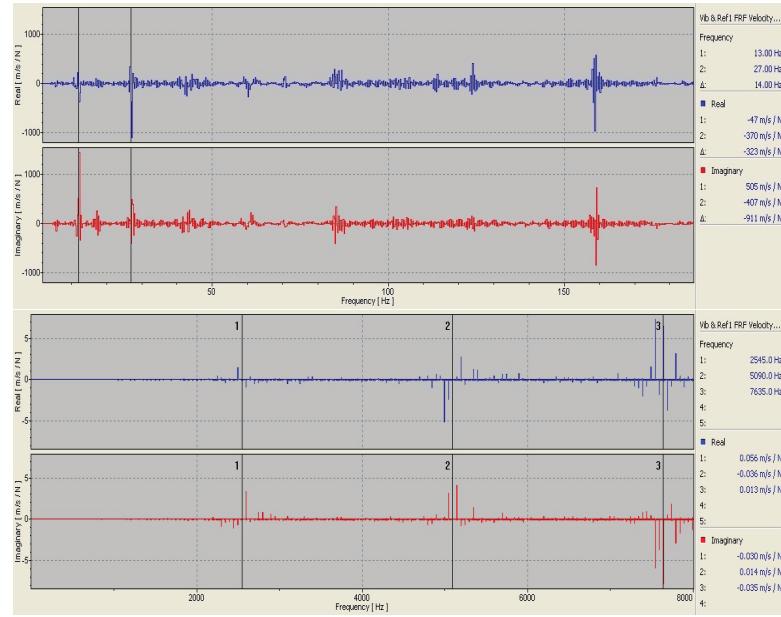
L'objectif est d'établir les résonances du banc pour que le boîtier ne perturbe pas les mesures en amplifiant certaines fréquences. Différents facteurs influencent ces résonances, tels que le type et la quantité d'huile, la présence ou non des engrenages, la mise en

rotation des éléments. Afin de se rapprocher du cas expérimental, l'analyse modale a été effectuée sur le banc monté au complet et à l'arrêt. Pour cette procédure, la technique choisie est un test d'impact au marteau. Cette méthode permet d'exciter le banc à toutes les fréquences en un seul essai. L'impact est donné au niveau de la dent de l'engrenage. Un capteur laser de type *POLYTECH* (figure 5.3) très sensible aux vibrations a été utilisé pour mesurer les réponses vibratoires sur la dent excitée. Les signaux sont ensuite traités par l'application fournie avec l'appareil de *POLYTECH* (figure 5.4).



FIGURE 5.3 – Le système *POLYTECH* et le test d'impact au marteau.

Les mesures ont été réalisées avec les engrenages choisis au paragraphe précédent, c'est-à-dire 88/90 dents de module 1 pour le premier palier et 29/30 dents de module 3 pour le palier 2 soumis à l'impact. Dans ce cas, nous nous intéressons aux vibrations suivant la direction rotationnelle pour calculer les fréquences propres de notre système. D'après les résultats obtenus (figure 5.4), nous remarquons deux fréquences naturelles dans la zone des basses fréquences (12 Hz et 27 Hz) et trois fréquences dans la zone des hautes fréquences (2545 Hz, 5090 Hz et 7635 Hz). Alors, dans nos essais, nous allons choisir des fréquences différentes de celles de résonance et surtout que l'engrènement ne se coïncide pas avec les trois dernières fréquences.

FIGURE 5.4 – Les fréquences propres obtenues grâce au système *POLYTECH*.

### 5.2.3 Dimensions des fissures

Les fissures sont définies grâce à deux paramètres : la profondeur et la largeur (figure 5.5).

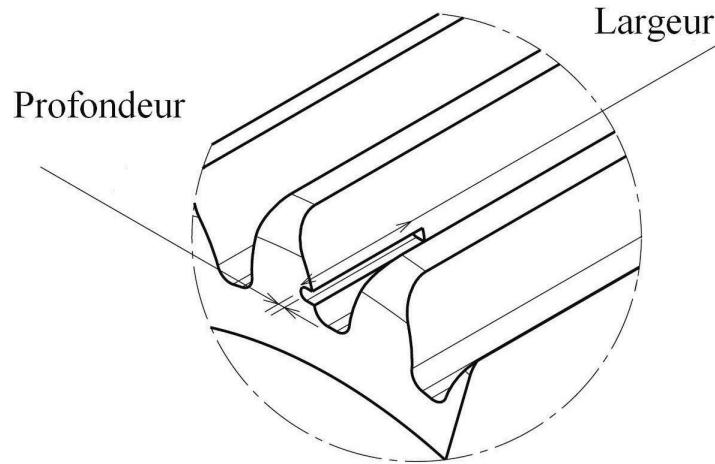


FIGURE 5.5 – Modélisation d'une fissure.

Afin de pouvoir, par la suite, généraliser à d'autres cas, la profondeur de la fissure est donnée en pourcentage du module et la largeur de celle-ci est donnée en pourcentage de la largeur de l'engrenage. Les différents cas testés sont marqués par une croix dans le tableau de la figure (5.6). Ces points expérimentaux sont choisis dans un plan  $2^2$ , c'est-à-dire qu'ils permettent l'étude de l'influence quadratique de deux paramètres. Cette étude nécessite de préférence 8 points équi-répartis autour du domaine d'étude et d'un point au centre. Dans notre cas, le point central n'a pas été choisi afin de réduire les coûts et la durée de

l'expérience [5].

Largeur \ Profondeur	13 %	26 %	39 %
33 %	x	x	x
66 %	x		x
100 %	x	x	x

FIGURE 5.6 – Les dimensions disponibles de la fissure.

La figure (5.7) représente deux fissures, d'une profondeur de 39% et de largeurs différentes (33% et 100%), utilisées pendant les tests expérimentaux.

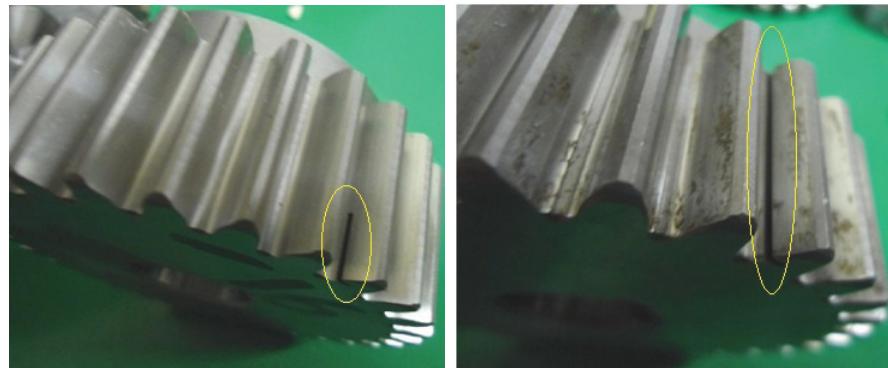


FIGURE 5.7 – Deux dimensions de fissure utilisées durant les tests expérimentaux.

#### 5.2.4 Plan d'expériences

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons l'ensemble des essais effectués avec le banc d'engrenages Spectra-Quest. Sachant que, nous ne traitons que quelques signaux vibratoires concernant la fissure. Par contre, le reste des mesures nous le gardons pour les perspectives envisagées après la thèse de doctorat.

Pour chaque essai, nous effectuons des mesures de vibrations sur deux arbres, le courant électrique sur un seul câble électrique sortant du moteur, le signal acoustique à l'endroit le plus proche de la roue défectueuse, la température à 10 endroits différents de la boîte d'engrenages. Grâce à un tachymètre, nous enregistrons le signal carré de la vitesse de manière synchrone avec les autres mesures. Les vitesses sont choisies différentes des fréquences propres du banc d'essai. Le contrôle du couple et des températures s'effectue sur une application développée sous LabView.

### 5.3 L'analyse cyclostationnaire des signaux de Spectra-Quest

D'après la description du banc d'engrenages, nous constatons que le rapport de réduction est proche de 1. Dans ce cas, la séparation de moments d'ordre 1 est délicate

La fissure		Température								
		30°			45°			60°		
		Vitesses								
Profondeur	Largeur	12Hz			25Hz			34Hz		
		Couples								
13%	33%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	66%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	100%	x	x	X	x	x	x	x	x	x
26%	33%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	66%									
	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
39%	33%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	66%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

FIGURE 5.8 – Plan d'expériences concernant le défaut de fissure.

car les fréquences des trois arbres sont proches et cela peut gêner notre diagnostic (cas de signaux poly-cyclostationnaires). Sur la figure (5.9), nous notons après l'enlèvement de la moyenne synchrone du signal accélérométrique de notre banc la présence des harmoniques des autres arbres dans le résidu du signal. La présence des ces harmoniques pose des problèmes. Afin de minimiser l'influence des harmoniques d'ordre 1, l'autre solution consiste à faire une analyse d'enveloppe [101] afin de pouvoir analyser uniquement la contribution CS2.

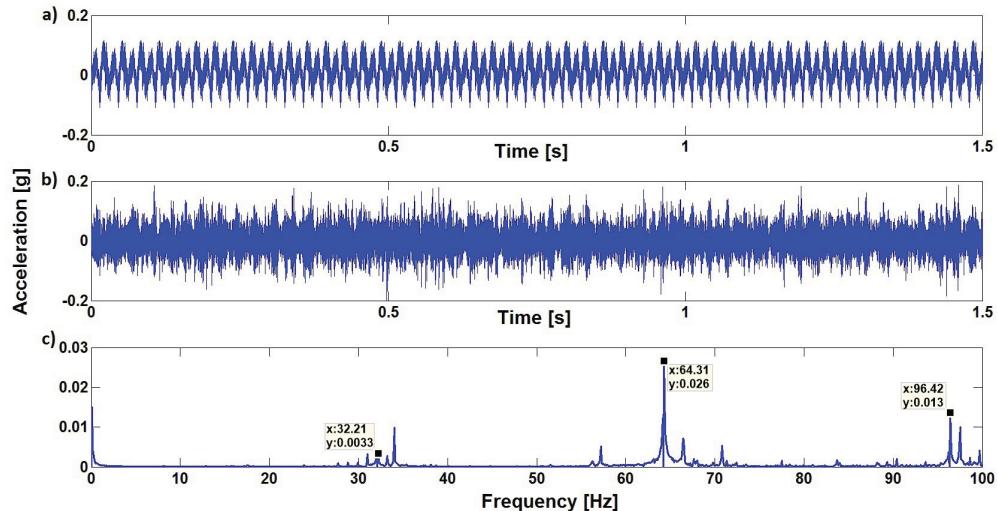


FIGURE 5.9 – a) la moyenne synchrone b) le résiduel c) la fft de la variance.

### 5.3.1 De la corrélation à l'analyse d'enveloppe

La fonction d'autocorrélation étant périodique suivant le temps et le retard, il apparaît évident de faire des transformées de Fourier :

- suivant  $\tau$  pour faire apparaître la fréquence  $f$ ,

- suivant  $t$  pour faire apparaître la fréquence cyclique  $\alpha$ .

Nous pouvons également faire apparaître à l'aide de deux transformées de Fourier la corrélation spectrale :

$$S_x(f, \alpha) = \mathbb{E}\{X(f)X^*(f - \alpha)\} \quad (5.1)$$

Cette dernière mesure le lien (ou la corrélation) entre la composante  $X(f)$  et  $X(f_\alpha)$ . Si le signal est cyclostationnaire, ce lien n'existe (c'est à dire  $S_x(f, \alpha) \neq 0$ ) que pour des valeurs de  $\alpha$  multiples de  $1/T$ .

Dans notre application, nous ne nous intéressons pas nécessairement au détail du lien entre deux fréquences, mais plus simplement à l'existence de ce lien (présence d'un phénomène cyclique) et à la qualité de ce lien (puissance d'interaction).

Dans [101], il a été démontré que :

$$\int_{\mathbb{R}} S_x(f, \alpha) df = \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{-W/2}^{W/2} \mathbb{E}[x(t)^2] e^{-j2\pi\alpha t} dt, \quad (5.2)$$

c'est-à-dire que la transformée de Fourier de l'enveloppe du signal correspond à l'intégrale de la fonction de corrélation spectrale suivant l'axe des fréquences. Il nous suffira donc d'élever le signal au carré et d'étudier son spectre pour pouvoir relever les fréquences cycliques présentes dans le signal et leur contribution.

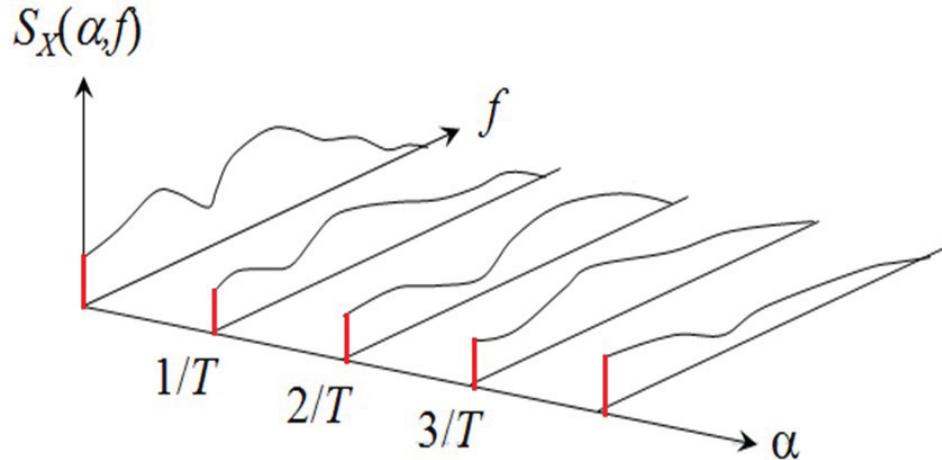


FIGURE 5.10 – Corrélation spectrale cyclique de la partie stochastique.

### 5.3.2 Analyse des signaux réels

Avant d'appliquer la théorie de la cyclostationnarité sur les signaux de Spectra-Quest, nous montrons l'inefficacité de la transformée de Fourier pour détecter le défaut de fissure. La figure (5.11.a) présente la comparaison entre le spectre fréquentiel d'un engrenage avec une fissure de 33% de largeur et 39% de profondeur sous une charge de

$3N.m$  et le spectre du même défaut sous une charge de  $5N.m$  dans les basses fréquences. Nous remarquons que la charge, dans ce cas là, influence un petit peu sur l'harmonique fondamental. Par contre, quand nous augmentons la largeur de la fissure à 100% (figure 5.11.b), nous constatons une diminution dans les harmoniques par rapport au premier cas. De plus, la charge a un grand effet sur le spectre surtout le deuxième harmonique qui devient très important. D'autre part, dans la zone fréquentielle d'engrènement (figure 5.12), toutes les fréquences significatives diminuent largement quand nous passons d'une fissure de 33% (figure 5.12.a) à une fissure de 100% (figure 5.12.b). Donc, nous pouvons déduire que la transformée de Fourier n'est plus utile pour le diagnostic des fissures d'engrenages (la fissure se comporte comme un filtre passe bas).

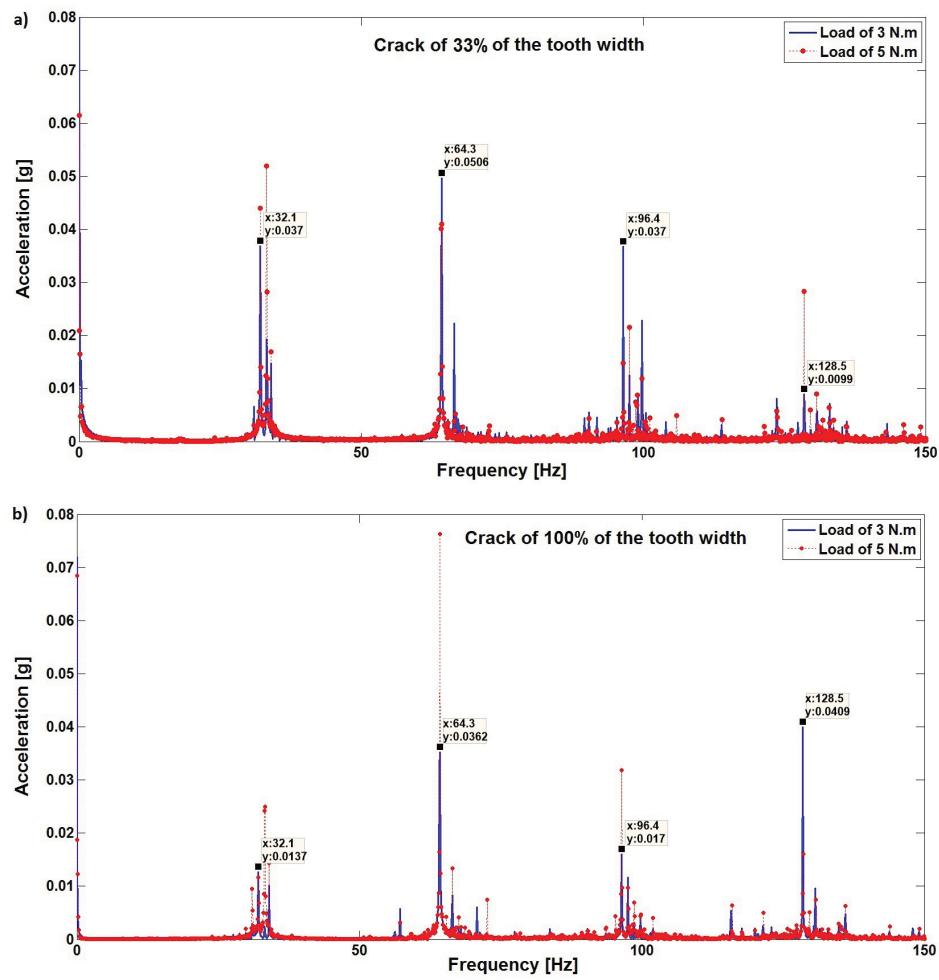


FIGURE 5.11 – Les basses fréquences de la transformée de Fourier du signal vibratoire : a) fissure de 33% b) fissure de 100%.

L'analyse d'enveloppe consiste à filtrer le signal vibratoire dans la zone des hautes fréquences (autour de 20 KHz), afin d'assurer l'absence des composantes déterministes du signal traité, à travers un filtre passe-bande (de taille de 2000 Hz). Ensuite, nous levons au carré le signal issu du filtre et nous analysons son spectre fréquentiel. Si nous appliquons cette technique pour confirmer la présence des composantes cyclostationnaires d'ordre

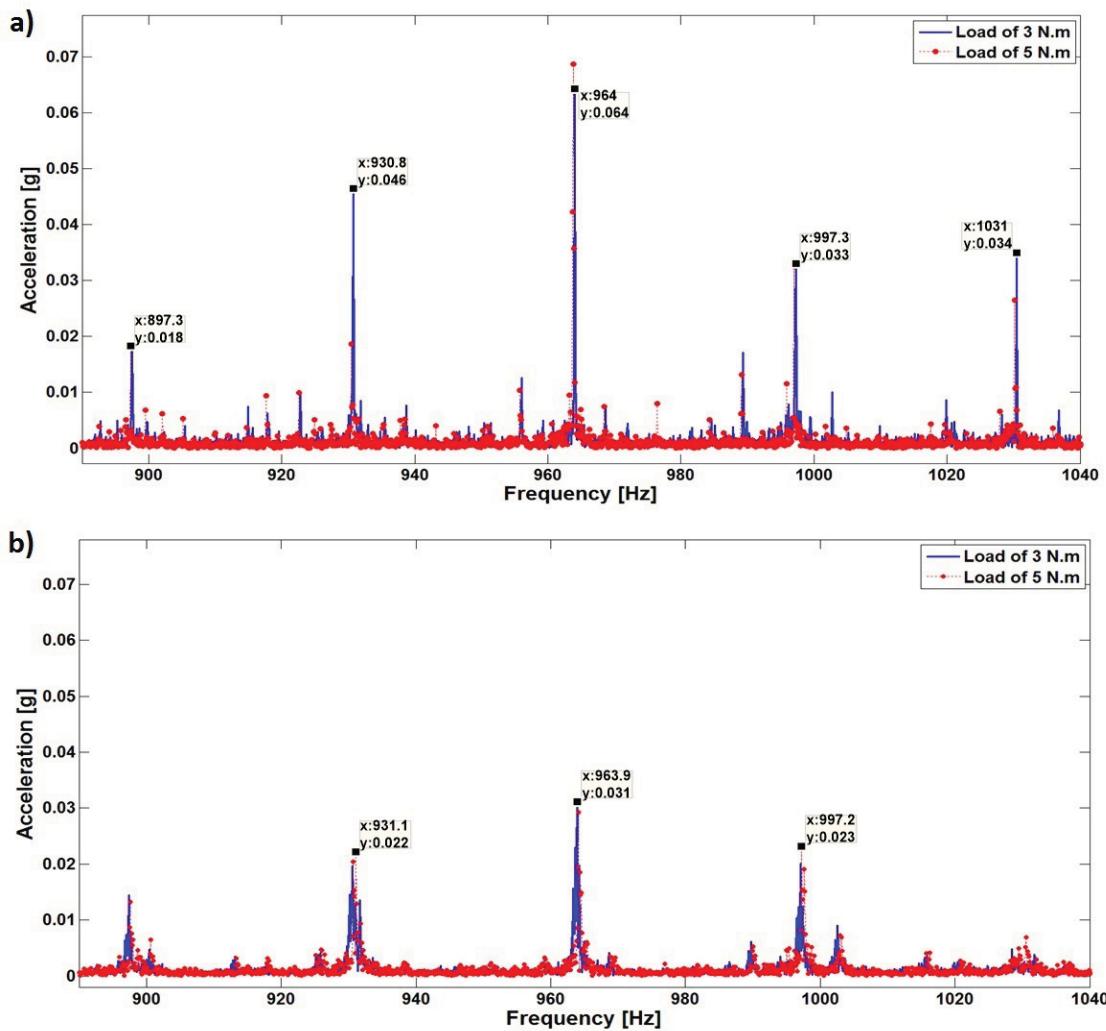


FIGURE 5.12 – Les hautes fréquences de la transformée de Fourier du signal vibratoire : a) fissure de 33% b) fissure de 100%.

2 (CS2) dans les signaux vibratoires d'engrenages fissurés, nous trouvons des très faibles harmoniques dans le cas d'une fissure de 33% (figure 5.13.a). Par contre, la signature de la CS2 est bien visible si la largeur de la fissure est à 100% (figure 5.13.b). Nous remarquons aussi que la charge a une grande influence pour mettre en évidence les fréquences cycliques (figure 5.13.b).

D'après les résultats obtenus, nous confirmons que l'ouverture et la fermeture de la fissure engendrent un phénomène aléatoire dans les signaux vibratoires d'engrenages. Quand ce phénomène se combine avec la périodicité de la rigidité d'engrènement, cela va conduire à l'apparence des composantes cycliques d'ordre 2 dans les signaux accélérométriques. Afin de bien faire apparaître ces composantes, nous agrandissons la valeur de la charge pour donner plus d'énergie au phénomène aléatoire (la respiration de la fissure).

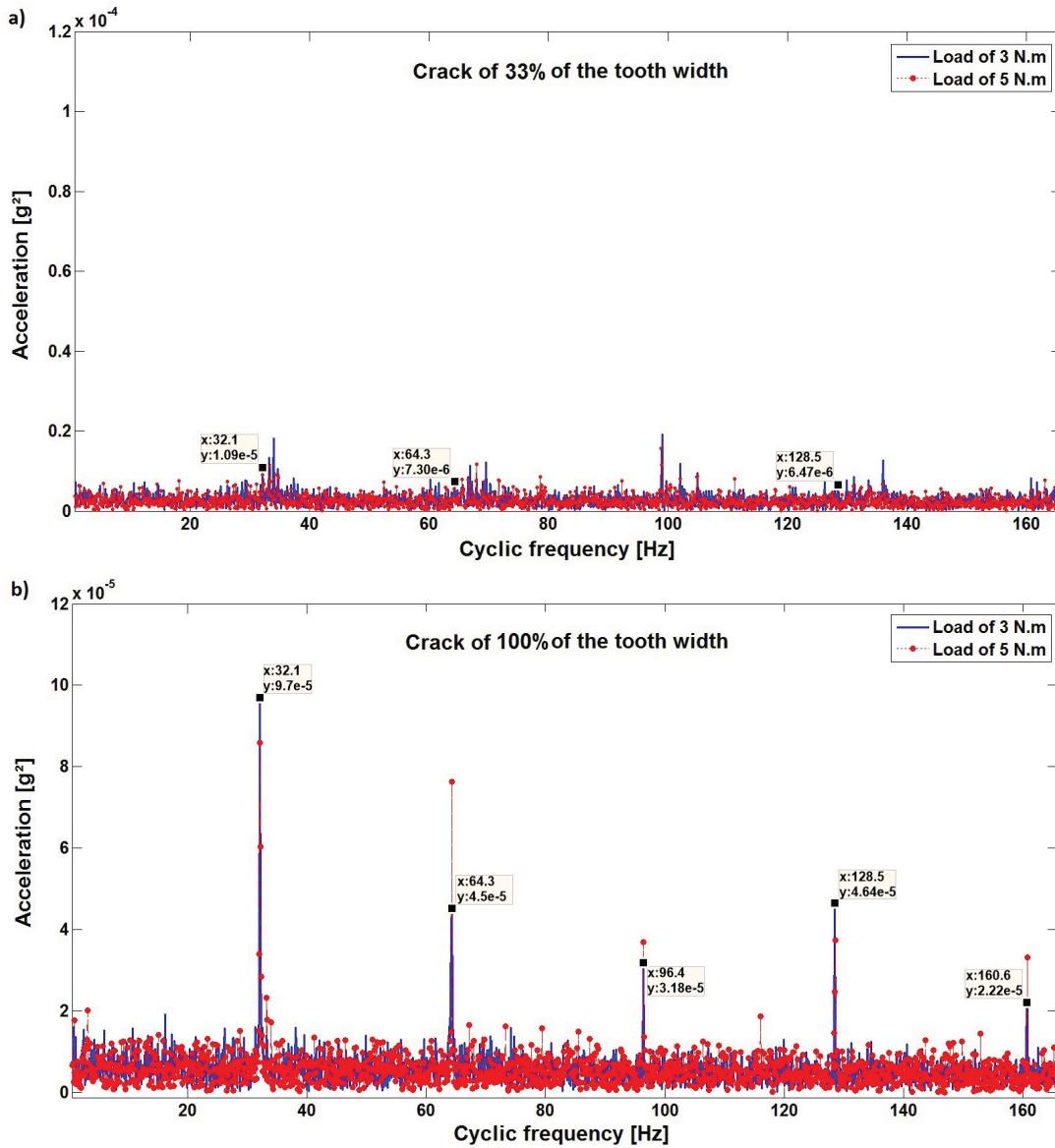


FIGURE 5.13 – Le spectre fréquentiel des signaux défectueux (hautes fréquences).

## 5.4 Détection de fissure par le scalogramme

Dans les parties précédentes, nous avons montré l'effet de la fissure sur les composantes cyclostationnaires dans les signaux vibratoires. Cette approche a prouvé son efficacité pour évaluer la gravité du défaut. Dans cette section, nous allons appliquer l'algorithme de scalogramme de phase sur les signaux vibratoires issus du banc de Spectra-Quest. L'objectif de ce test est de confirmer l'influence de la fissure sur les phases des signaux accélérométriques.

La figure (5.14.a) représente le signal temporel d'un pignon fissuré avec 33% de largeur. Dans ce signal, nous ne remarquons rien de particulier. Par contre, dans la figure (5.14.b) qui représente le scalogramme de phase, nous remarquons la présence des lobes dont chaque tour correspond au pignon fissuré. À cause des petites dimensions de la fissure et

la faible charge, ces lobes ne sont remarquables que dans certaines zones du signal.

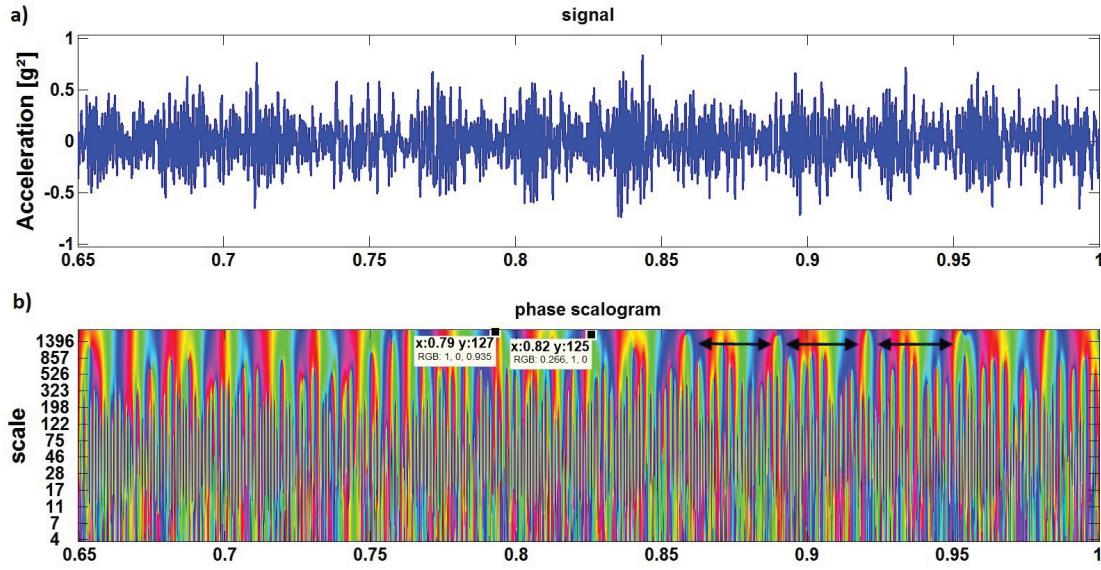


FIGURE 5.14 – Le scalogramme de phase : fissure de 33% de largeur et charge de 3 N.m.

En revanche, quand nous traitons les signaux issus du pignon qui porte une fissure de 100% de la longueur (figure 5.15.a) avec le scalogramme de phase, nous distinguons mieux les lobes de variation de phase durant chaque période de rotation du pignon. Ces lobes sont bien visibles dans les grandes échelles (figure 5.15.b) sous une charge de 3 N.m.

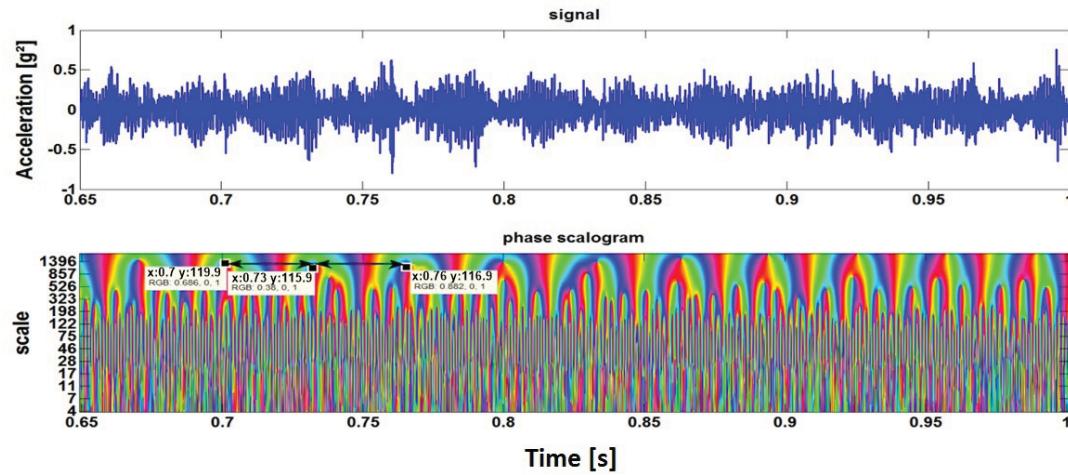


FIGURE 5.15 – Le scalogramme de phase : fissure de 100% de largeur et charge de 3 N.m.

De plus, si nous reprenons le dernier test et que nous augmentons la valeur de la charge à 5 N.m, le scalogramme de phase (figure 5.16.b) montre les lobes de variation de phase correspondant au pignon fissuré par rapport au cas de la charge de 3 N.m. La seule raison pour interpréter ces résultats, c'est que la forte charge ouvre encore plus la fissure (augmente sa respiration) et par conséquence, cela met mieux en évidence les variations brusques de la phase et nous avons donc un plus grand rapport signal à bruit.

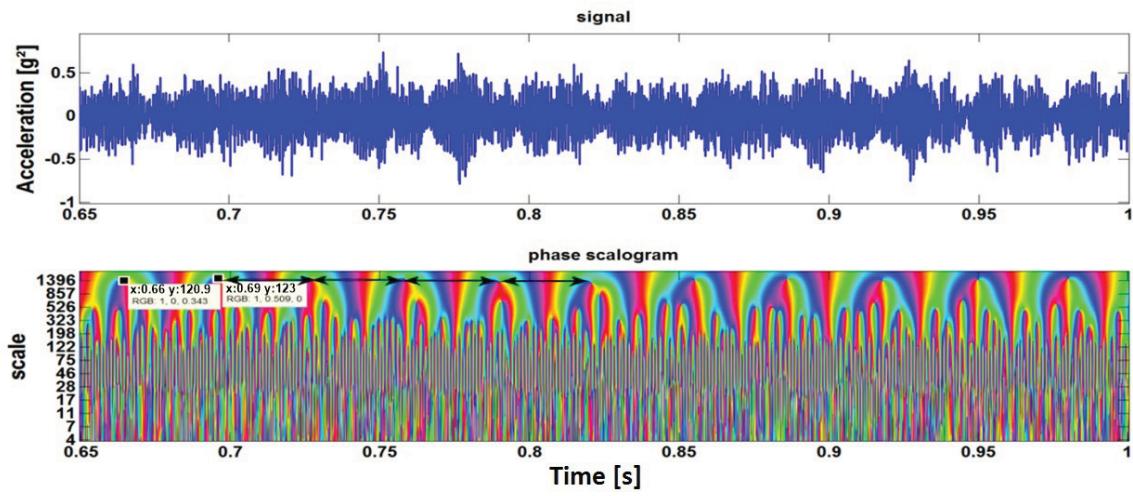


FIGURE 5.16 – Le scalogramme de phase : fissure de 100% de largeur et charge de 5 N.m.

## 5.5 Conclusion

D'après les analyses effectuées dans ce chapitre, nous pouvons déduire que nos résultats théoriques sont relativement vérifiés et que le défaut de fissure des dents d'engrenages conduit vraiment à l'apparition des composantes cyclostationnaires d'ordre 2. Dans ce cas, trois éléments essentiels jouent sur l'importance des amplitudes des fréquences cycliques, soit : la largeur et la profondeur du défaut et la charge appliquée. De plus, nous avons montré que le spectre fréquentiel ordinaire (FFT) ne porte pas d'information sur la présence de la fissure. Ensuite, nous avons montré également que le défaut de fissure affecte la phase instantanée de la roue défectueuse. De plus, les même paramètres qui influencent l'apparition de la CS2, influencent également la qualité de détection de fissure à travers le scalogramme de phase.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Le diagnostic de l'état d'engrenages n'est possible que si nous connaissons les symptômes vibratoires associés à chaque défaut susceptible d'affecter les roues ou leurs dents, c'est à dire si nous connaissons les images vibratoires induites par ces défauts. La connaissance de ces images vibratoires et de la cinématique du système permet de formuler un bon diagnostic de l'état de la machine. Malheureusement, une même image vibratoire peut correspondre à plusieurs type de défauts. Parfois, la signature des défauts dans le signal vibratoire n'est pas discernable à cause du bruit du milieu ou la non-linéarité et/ou la non-stationnarité des phénomènes engendrés par les engrenages. Alors, pour donner beaucoup de crédibilité à nos méthodes de surveillance et de diagnostic et faire la comparaison avec les techniques classiques, nous avons effectué des essais sur un modèle numérique d'engrenages.

Dans ce travail, nous avons étudié les réponses vibratoires obtenues d'un modèle numérique d'un système d'engrenages droits à 6 DDL avec un défaut local (fissure). En plus, nous avons introduit une méthode de simulation pour le défaut local, c'est-à-dire, nous avons joué sur les paramètres de la rigidité d'engrènement des dents en engagement, par lequel le défaut de fissure est simulé en se basant sur les propriétés géométriques de la développante des dents.

Les formules de calcul de la rigidité d'engrènement ont été obtenues en se basant sur la méthode d'énergie potentielle proposée par Yang et Lin [34]. Dans notre étude, nous avons pris en compte l'énergie de cisaillement qui n'était pas inclue dans le travail de Yang et Lin. Sachant que l'énergie de cisaillement affecte l'énergie totale par un facteur de 2. Elle a une large influence sur l'énergie totale par rapport à l'énergie de fléchissement et de compression axiale.

En examinant le défaut de fissure, les rigidités de cisaillement et de fléchissement sont fortement influencées à cause de l'existence de la fissure. Cependant, la rigidité de contact Hertzien et celle de compression axiale sont considérées inchangées en comparaison avec ceux de la dent intacte.

Dans le cas d'un engrenage parfait, la vibration des engrenages est périodique avec la période d'engrènement. La réponse vibratoire d'un pignon fissuré dispose d'une large influence sur les valeurs où nous avons remarqué des pics qui reflètent l'engrènement de la dent fissurée. Ces pics sont entourés par une forte fluctuation en fréquence. Cependant, si nous travaillons dans un milieux bruité, la distinction de ces informations est difficile. Pour cela, nous avons exploité un grand nombre de techniques de traitement du signal afin de mettre la signature de la fissure en évidence.

Notre première contribution dans ce travail demeure sur l'exploitation de la théorie de la cyclostationnarité d'ordre 2 pour déterminer la sévérité de la fissure. Dans le cadre de la propriété de cyclostationnarité, les signaux d'accélération générés à partir de l'entraînement des engrenages peuvent être décomposés en une partie périodique et en une partie résiduelle aléatoire qui dépend de la respiration de la fissure. Puisque la période cyclique est parfaitement définie par l'engrènement d'une paire de dents et par la rotation de l'arbre, le traitement des signaux est simplifié. La moyenne synchrone donne la contribution périodique du signal vibratoire. Dans ce cas, nous pouvons dire que le signal est cyclostationnaire d'ordre un. Ce type de cyclostationnarité résulte d'un phénomène répétitif de nature déterministe (défaut d'écaillage, excentricité de l'arbre ...). La variance synchrone, quant à elle, indique les fluctuations aléatoires périodiques de l'énergie, si le signal est cyclostationnaire d'ordre deux. Nous avons montré que durant la respiration de la fissure, elle influence la rigidité d'engrènement et crée un phénomène aléatoire à cause la fatigue du matériau. Ce phénomène devient de plus en plus important avec la profondeur de la fissure et la charge appliquée. Quand la partie aléatoire devient importante et se combine avec la partie déterministe de l'engrenage (la variation de la rigidité), cela provoque l'apparition des composantes cyclostationnaires d'ordre 2. D'autre part, nous avons trouvé que la CS2 est le seul outil de traitement du signal qui peut détecter la fissure précoce dans un milieu trop bruité ( $SNR = -5$  dB) par rapport aux autres méthodes proposées. Cela revient à l'effet que le bruit est stationnaire et il n'affecte que spectre en ( $\alpha = 0$ ) et le reste composantes cycliques ( $\alpha_k$ ) sont indépendantes du bruit additif. Ceci nous permet de visualiser clairement la signature du défaut. Donc, nous concluons que la cyclostationnarité d'ordre 2 est la technique la plus performante et robuste par rapport aux méthodes proposées pour diagnostiquer le défaut de fissure tant qu'elle prend en considération les parties aléatoires générées par le système.

Notre deuxième contribution concerne le diagnostic de la fissure de la dent en contrôlant la phase instantanée du signal vibratoire. Cette idée a été déjà proposée par McFadden [9] en utilisant la transformée de Fourier. Nous savons que la résolution de cette dernière dépend de la taille d'échantillon traité et de sa fréquence d'échantillonnage, c'est-à-dire, elle est limitée en résolution. Par contre, nous savons aussi que les techniques à haute résolution ont été proposées pour surmonter ce problème. Alors, nous avons suggéré pour traiter notre problématique les deux méthodes ESPRIT et WLSE. La technique ESPRIT estime seulement la phase initiale du signal et pour avoir une image sur la phase instantanée d'une composante fréquentielle quelconque, nous avons proposé d'appliquer cette méthode sur une fenêtre glissante le long du signal. Dans cette partie de l'étude, nous avons utilisé ces deux méthodes sur un signal vibratoire obtenu de notre modèle numérique d'engrenages. Les résultats ont montré que ces deux méthodes estiment bien la variation brusque de la phase dues à la respiration de la fissure de la dent. Par contre, la phase instantanée estimée par WLSE n'est pas sensible à la sévérité de la fissure. En plus, cette technique n'est plus robuste si nous avons un milieu bruité ( $SNR = 20$  dB),

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

au contraire de la méthode ESPRIT qui est sensible aux dimensions de la fissure et peut détecter sa présence dans un signal bruité (SNR = 20 dB).

Nous avons exploité également la technique de scalogramme de phase pour confirmer l'influence de la fissure sur la phase instantanée. Nous avons trouvé que cette méthode donne une bonne indication sur la respiration de la fissure du modèle numérique. En plus, il a la même robustesse que la méthode ESPRIT où il peut détecter une fissure précoce sous un SNR = 10 dB. L'avantage du scalogramme par rapport à ESPRIT glissant est qu'il a un cout de calcul faible. Ensuite, nous l'avons appliqué sur les signaux issus des engrenages réels qui porte une fissure avec plusieurs dimensions. Nous avons conclu que cette méthode fonctionne bien quand la fissure est dans un état avancé et soumis à une charge importante pour bien provoquer l'ouverture et la fermeture du défaut.

# RECOMMANDATIONS

En termes de perspectives, il est important d'étudier la signature de la fissure dans les signaux électriques parce que ces grandeurs sont beaucoup plus disponibles par rapport aux signaux vibratoires. En plus, le matériel d'acquisition du courant électrique (les pinces électriques) coûte beaucoup moins cher en comparaison avec les accéléromètres. L'idée, c'est de surveiller le courant électrique issu du moteur qui entraîne les engrenages. Nous pensons que la respiration de la fissure influence la rotation de l'arbre du moteur, et par conséquent, le flux magnétique, ce qui perturbe le courant absorbé par la machine électrique.

Nous essayerons également de développer un modèle d'une machine asynchrone associé à notre modèle d'engrenages. À partir du nouveau modèle électromécanique, l'effet des défauts électriques sur l'oscillation du couple électromagnétique transmis et, par suite, sur la transmission mécanique par engrenages pourront être étudiés.

D'autre part, nous proposons de traiter l'effet de la viscosité de lubrifiant et sa température sur la qualité de diagnostic des défauts de fissure et de surface. En fait, les piqûres changent la distribution de la couche d'huile entre les dents en engrènement et cela permet d'accélérer leur usure. De plus, nous chercherons de trouver une approche de traitement du signal qui nous permettra d'estimer les grandeurs d'amortissement pour bien évaluer la sévérité des défauts par la suite.

Finalement, Il semble également intéressant d'étudier les indices de cyclostationnarité formulés par Gardner et de vérifier s'il y a une corrélation entre ces indices et la taille d'un défaut de fissure par exemple. Des méthodes d'intelligence artificielle (Support Vector Machines, réseau de neurones ...) seront alimentées en utilisant les indicateurs de cyclostationnarité développés afin de nous aider au diagnostic de sévérité de défauts d'engrenages à l'aide de reconnaissance de forme et fusion de données.

# Bibliographie

- [1] Philippe ARQUÈS, "Diganostic prédictif et défaillances des machines : Théorie - Traitement - Analyse - Reconnaissance - Prédiction", Editions Technip, Paris, 2009.
- [2] Guilbault R. Sébastien Lalonde and Thomas M. "Non-linear damping calculation in cylindrical gear dynamic modeling". *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012) 2110–2128.
- [3] Lalonde, S., Guilbault, R. "Dynamic analysis of spur gears by nonlinear modélisation". Proceedings of the 24nd Seminar on machinery vibration, Canadian Machinery Vibration Association, ISBN 2-921145-61-8, Montréal, Paper A3, 2006. p. 15-35.
- [4] Guilbault R. and Thomas M. "Prediction of resonances of thin-rimmed cylindrical gears from a sub-structuring approach". Proceedings of the CSME, Forum 2008, Ottawa, No 1569100493, June 2008, 8 p.
- [5] Palaisi David, "Simulation numérique du comportement vibratoire d'engrenages endommagés". Mémoire de maîtrise ETS, Fev 2011.
- [6] Chiementin Xavier, "Localisation et quantification des sources vibratoires dans le cadre d'une maintenance préventive conditionnelle en vue de abiliser le diagnostic et le suivi de l'endommagement des composants mécaniques tournants :application aux roulements à billes". Thèse de doctorat, 2007. Université de Reims, France.
- [7] Marc Thomas, "Fiabilité, maintenance prédictive et vibration des machines", ISBN 978-2-7605-3357-8 , 2011, 633 pages.
- [8] Mohamed El Badaoui, "Contribution au Diagnostic Vibratoire des Réducteurs Complexes à Engrenages par l'Analyse Cepstrale". Thèse de doctorat à l'université de saint-Etienne, France. Juillet 1999. 141 pages.
- [9] P. D. McFadden, "Detecting fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing Vibration". *Journal of Vibration and Acoustics*, 108(2), (Apr 01, 1986), pp. 165-170.
- [10] Parker, R.G., S.M. Vijayakar, and T. Imajo, "Non-linear dynamic response of a spur gear pair : modelling and experimental comparisons". *Journal of Sound and Vibration*, 2000. 237(3) : p. 435-455.

- [11] Harris, S. "Dynamic loads on the teeth of spur gears". Proceedings of Institution of Mechanical Engineering, 1958. 172 :87–112.
- [12] Welbourn, D. "Fundamental knowledge of gear noise - a survey". Dans Proceedings of IMechE Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions Conference, pages 09–29, Cranfield (UK), 1979. Paper C117/79.
- [13] Emeline REBOUL. "Vibroacoustique des mécanismes à hautes fréquences : application aux transmissions par engrenages". Thèse de doctorat, Ecole centrale de LYON, 2005, p :230.
- [14] Kasuba, R. and Evans, J. "An extended model for determining dynamic loads in spur gearing". Journal of Mechanical Design, 1981. 103 :853–864.
- [15] Ishimaru, K. and Hirano, F. "Dynamic behaviour of heavy loaded spur gears". ASME Journal of Engineering for Industry, 1974. 96 :373–381.
- [16] G. Dalpiaz, A. Fernández del Rincón, E. Mucchi, A. Rivola, "Model-based analysis of dynamic phenomena in gear pumps", Surveillance 5 CETIM Senlis, Oct 2004.
- [17] H. Nevzat zgven and D. R. Houser, "Mathematical models used in gear dynamics- A review". Journal of Sound and Vibration, 121(3), 1988, pp. 383-411.
- [18] A. Fisher, "Factors in calculating the load-carrying capacity of helical gears". Machinery, 98, 1961, pp. 545-552.
- [19] E. J. Wellauer, "An analysis of factors used for strength rating helical gears". American Society of Mechanical Engineers Paper, 59-A-121, 1959.
- [20] D. P. Townsend, "Gear Handbook". McGRAW-HILL, INC., 1992.
- [21] S. L. Harris, "Dynamic loads on the teeth of spur gears". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 172, 1958, pp. 87-112.
- [22] R. W. Gregory, S. L. Harris and R. G. Munro, "Dynamic behavior of spur gears". Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, 178, 1964, pp. 207-226.
- [23] R. W. Gregory, S. L. Harris and R. G. Munro, "Rorsional motion of a pair of spur gears". Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, 178, 1964, pp. 166-173.
- [24] K. Ishida and T. Matsuda, "Study on pitch circle impusle noise of gear". American Society of Mechanical Engineers Paper, 80-C2/DET-69, 1980.
- [25] K. Ishida and T. Matsuda, "Effect of tooth surface roughness on gear noise and gear noise transmitting path". American Society of Mechanical Engineers Paper, 80-C2/DET-70, 1980.
- [26] D. Lewicki, "Predicted effect of dynamic load on pitting fatigue life for low-contact ratio spur gears". NASA Technical Paper 2610, 1986.

- [27] H. Fukuma, T. Furukawa and T. Aida, "Fundamental research on gear noise and vibration (6th Report, Generation mechanism of radial and axial vibration of spur gears)". *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 16, 1973, pp. 1094-1107.
- [28] G. N. Lance, "Numerical methods for high-speed computers". Iliffe & Sons, 1960, London.
- [29] G. V. Tordion and R. Gauvin, "Dynamic stability of a two-stage gear train under the influence of variable meshing stiffnesses". *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 99, 1977, pp. 785-791.
- [30] T. Sakai, Y. Doi, K. Yamamoto, T. Ogasawara and M. Narita, "Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox". *Society of Automotive Engineers Paper*, 810773, 1981.
- [31] A. S. Kumar, T. S. Sankar and M. O. M. Osman, "On dynamic tooth load and stability of a spur-gear system using the state-space approach". *Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 107, 1985, pp. 54-60.
- [32] H. Lida, A. Tamura and Y. Yamada, "Vibrational characteristics of friction between gear teeth". *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 28, 1985, pp. 1512-1519.
- [33] W. Bartelmus, "Mathematical modeling and computer simulations as an aid to gearbox diagnostics". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 2001, pp. 855-871.
- [34] D. C. H. Yang and J. Y. Lin, "Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics". *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 109, 1987, pp. 189-196.
- [35] A. Kahraman and R. Singh, "Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system". *Journal of Sound and Vibration*, 146, 1991, pp. 135-156.
- [36] S. Theodossiades and S. Natsiavas, "Nonlinear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash". *Journal of Sound and vibration*, 229(2), 2000, pp. 287-310.
- [37] M. Amabili and A. Rivola, "Dynamic analysis of spur gear pairs : Steady-state response and stability of the SDOF model with time-varying meshing damping". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(3), 1997, pp. 375-390.
- [38] Y. Cai and T. Hayashi, "The linear approximated equation of vibration of a pair of spur gears (Theory and Experiment)". *Journal of Mechanical Design*, 116, 1994, pp. 558-564.

- [39] J. H. Kuang and A. D. Lin, "The effect of tooth wear on the vibration spectrum of a spur gear pair". *Journal of Vibration and Acoustics*, 123, 2001, pp. 311-317.
- [40] J. H. Kuang and A. D. Lin, "Theoretical aspects of torque responses in spur gearing due to mesh stiffness variation". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(2), 2003, pp. 255-271.
- [41] M. El Badaoui, V. Cahouet, F. Guillet, J. Daniere and P. Velex, "Modeling and detection of localized tooth defects in geared systems". *Journal of Mechanical Design*, 123, 2001, pp. 422-430.
- [42] J. Lin and R. G. Parker, "Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems". *Journal of Vibration and Acoustics*, 124, 2002, pp. 68-76.
- [43] J. Peeters, "Simulation of Dynamic drive Train Loads in a Wind Turbine". Ph.D dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, 2006, Leuven, Belgium.
- [44] I. Howard, S. Jia and J. Wang, "The dynamic modeling of a spur gear in mesh including friction and a crack". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), 2001, pp. 831-853.
- [45] R. G. Parker, S. M. Vijayakar and T. Imajo, "Nonlinear dynamic response of a spur gear pair : Modelling and experimental comparisons". *Journal of Sound and Vibration*, 237(3), 2000, pp. 435-455.
- [46] R. G. Parker, V. Agashe and S. M. Vijayakar, "Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/ contact mechanics model". *Journal of Mechanical Design*, 122, 2000, pp. 304-310.
- [47] A. S. Lee, J. W. Ha and D. Choi, "Coupled lateral and torsional vibration characteristics of a speed increasing geared rotor-bearing system". *Journal of Sound and Vibration*, 263(4), 2003, pp. 725-742.
- [48] A. Kahraman, R. Singh, "Non-linear dynamics of a spur gear pair". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142(1), 1990, pp. 49-75.
- [49] A. Kahraman, R. Singh, "Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144(3), 1991, pp. 469-506.
- [50] A. Kahraman, R. Singh, "Interactions between Time-varying Mesh Stiffness and Clearance Non-Linearities in a Geared System". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146, 1991, pp. 135-156.
- [51] N. Sarkar, R. E. Ellis and T. N. Moore, "Backlash detection in geared mechanisms : modeling, simulation, and experimentation". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 11(3), 1997, pp. 391-408.
- [52] L. Walha, T. Fakhfakh, M. Haddar, "Nonlinear dynamics of a two-stage gear systems with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash". *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, 2009, pp. 1058-1069.

- [53] Palaisi D., Guilbault R., Thomas M., Lakis A. and Mureithi N., "Numerical simulation of vibratory behavior of damaged gearbox", (in French). Proceedings of the 27th Canadian Machinery Vibration Seminar (2009), Canadian Machinery Vibration Association, Vancouver, CB, 16 p.
- [54] Faure L., "Aspect des dentures d'engrenages après fonctionnement". Mécanique et maintenance CETIM Senlis, 1992.
- [55] Lavoie P., "Analyse de l'effet d'une fissure dans un engrenage". Rapport de projet de fin d'études. École de technologie supérieure. Montréal (Qc), Canada.
- [56] C. Benchaabane, A. Djebala, N. Ouelaa and S. Guenfoud, "Diagnostic vibratoire des défauts d'engrenages base sur les indicateurs scalaires". Groupe Comportement Dynamique des Structures et Maintenance Industrielle, Guelma, Algerie, 2008. P 10.
- [57] Ashraf Abdel-Rahim Ali, "Center-Hung Induced Draft Fan Axial Vibration". Vibrations, Volume 23, Number 2, 2007. Pages 14-16.
- [58] Mustapha Merzoug, Abdelhamid Miloudi, "Diagnostic des transmissions par engrenages double étages via l'analyse d'enveloppe". 18ème Congrès Français de Mécanique, Août 2007.
- [59] Bogert B.P, Healy M.J.R, Tukey J.W., "The frequency analysis of time series for echoes : Cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking". Proc.symp.time series analysis, M.Rosemblah (ed), New York, Woley, 1963. PP 209-243.
- [60] Noll A. M., "Cepstrum pitch determination". J.A.S.A, vol 41, N° 2, 1967. PP 293-309.
- [61] Randall R. B., "Cepstrum Analysis". Technical Review of Brüel&Kjaer, N° 3, 1980. PP 3-40.
- [62] C. Capdessus and M. Sidahmed, "Analyse des vibrations d'un engrenage : cepstre, corrélation, spectre". Traitement du signal, ISSN 0765-0019 1992, vol. 8, N° 5, p. 365-372.
- [63] Kim J. T., "Cepstral analysis as a tool for robust processing, reverberation and detection of transients". Mechanical System and Signal Processing, N° 6, 1992.
- [64] Bigret R, Féron J. L, Pachaud C., "Diagnostic-maintenance, disponibilité des machines tournantes". modèle—mesurage—analyses des vibrations, collection technologie, édition MASSON, 1994. PP 448-454 .
- [65] M. El Badaoui, F, Guillet, N.Nejjar, P.Martini and J. Danière, "Diagnostic d'un train d'engrenages par analyse cepstrale synchrone". 16éme colloque GRESTI sur le traitement du signal et des images, Grenoble, septembre 1997.
- [66] Olivier Cousinard, Patrick Marconnet, "Détection de l'endommagement d'un engrenage par l'emploi de l'analyse cepstrale et de la détection d'enveloppe : application et validation industrielles pour le diagnostic d'un réducteur fonctionnant à faible vitesse". 16ème Congrès Français de Mécanique, Sept 2003.

- [67] G. Bouleux, T. Kidar and F. Guillet, "An Improper Random Vector Approach for ESPRIT and Unitary ESPRIT Frequency Estimation". The 7th International Workshop on Systems, Signal Processing and their Applications (WOSSPA 2011).
- [68] Fakher Chaaria, Walter Bartelmus, Radoslaw Zimroz, Tahar Fakhfakh and Mohamed Haddar, "Gearbox vibration signal amplitude and frequency modulation". Shock and Vibration 19 (2012), pp. 635–652.
- [69] W. J. Staszewski, K. Worden and G. R. Tomlinson, "Time–Frequency analysis in gearbox fault detection using the Wigner-Ville distribution and pattern recognition". Mechanical Systems and Signal Processing, 11(5), (1997), pp. 673-692.
- [70] Bouzida Ahcene, "Diagnostic de défauts de la machine asynchrone à cage par la technique des ondelettes". Thèse de Magister, École Polytechnique d'Alger, Algérie, Janvier 2008.
- [71] Farag K.O. and Gaouda A.M. "Dynamic wavelet-based tool for gearbox diagnosis". Mechanical Systems and Signal Processing, 26, 2011, pp. 190–204.
- [72] F. L. Litvin, "Gear geometry and applied theory". Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [73] Xinhao Tian, "Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults". Thèse de doctorat, Université d'Alberta, 2004.
- [74] D. C. H. Yang and Z. S. Sun, " A rotary model for spur gear dynamics". ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 85-DET-2, 1985.
- [75] J. D. Smith, "Gears and their vibration". The Macmillan Press LTD., 1983.
- [76] D. J. Inman, "Engineering vibration". Prentice Hall, 1994.
- [77] S. Wu, M.J. Zuo and A. Parey, "Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth". Journal of Sound and Vibration, 317, 2008, pp. 608-624.
- [78] Omar D. Mohammed, Matti Rantatalo, Jan-Olov Aidanpää, Uday Kumar, "Vibration signal analysis for gear fault diagnosis with various crack progression scenarios". Mechanical Systems and Signal Processing 41 (2013), pp. 176–195.
- [79] A. Boulenger, Ch. Pachaud, "Surveillance des machines par analyse des vibrations, du dépistage au diagnostic". Edition Afnor 1998.
- [80] R. Roy, A. Paulaj, and T. Kailath, "Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques - ESPRIT". Proc. IEEE MILCON, 1986, pp. 41.6.1-41.6.5.
- [81] Hong-Seok Song, Kwanghee Nam, and Mutschler. P., "Very fast phase angle estimation algorithm for a single-phase system having sudden phase angle jumps". Industry Applications Conference, 2002, 37th IAS Annual Meeting, pp. 925-931.

- [82] Torsten Söderström, and Petre Stoica, "System Identification". Prentice Hall, 1989.
- [83] Thameur Kidar, Marc Thomas, Mohamed El Badaoui and Raynald Guilbault, "Control of phases by ESPRIT and WLSE methods for the early detection of gear cracks". *Journal of Mechanics and Industry*, Volume 15, Issue 06, January 2014, pp 487-495.
- [84] Morrone, M. C. and Owens, R. A., "Feature detection from local energy". *Pattern Recogn. Lett.* 6(5), 1987, pp. 303–313.
- [85] Felsberg, M. and Sommer, G., "A new extension of linear signal processing for estimating local properties and detecting features, in G. Sommer, N. Krüger and C. Perwass (eds)". 22. DAGM Symposium Mustererkennung, Kiel, Springer-Verlag, Heidelberg, 2000, pp. 195–202.
- [86] Heitger, F., "Feature detection using suppression and enhancement". Technical Report NR.163, Image Science Lab, ETH-Zurich, 1995, Switzerland.
- [87] Peli, E., "Feature detection algorithm based on a visual system model". *Proceeding of IEEE 90*, Vol. 1, USA, 2002, pp. 78–93.
- [88] Pellegrino, F. A., Vanzella, W. and Torre, V., "Edge detection revisited". *IEEE Trans Syst., Man, Cybern.Part B* 34(3), 2004, pp. 1500–1518.
- [89] Reisfeld, D., "The constrained phase congruency feature detector : Simultaneous localization, classification and scale determination", *Pattern Recognition Letters*, 1996, 17(11), pp. 1161–1169.
- [90] Robbins, B. and Owens, R., "2D feature detection via local energy". *Image & Vision Computing* 15(5), 1997, pp. 353–368.
- [91] Ronse, C., "On idempotence and related requirements in edge detection". *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 15(5), 1993, pp. 484–491.
- [92] Ronse, C., "The phase congruence model for edge detection in two-dimensional pictures : A mathematical study". Technical Report Rap 95-11, Université de Strasbourg, 1995, LSIIT-URA 1871.
- [93] Jepson, A. and Jenkin, M. R. M., "The fast computation of disparity from phase differences". *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, CA, USA, 1989, pp. 398–403.
- [94] Kuglin, C. D. and Hines, D. C., "The phase correlation image alignment method". *Int. Conf. Cybernetics and Society*, 1975, pp. 163–165.
- [95] Granlund, G. H. and Knutsson, H., "Signal Processing for Computer Vision". 1975, Kluwer.
- [96] Mallat, S. G., "A Wavelet Tour of Signal Processing". 1999, Academic Press.
- [97] J. Antoni, F. Guillet, M. El Badaoui, and F. Bonnardot, "Blind separation of convolved cyclostationary processes". *Signal Processing*, 85(1), 2005, pp. 51-66.

- [98] K. A. Sghir, M. El Badaoui, M. Thomas, F. Guillet, M. Bakrim, and D. Abou-tajdine, "Parametric blind identification of the transfer function from vibration measurements based on second order cyclostationarity". 2009.
- [99] J. Antoni, P. Wagstaff and J. C. Henrio, "A consistent estimator for frequency response functions with input and output noise". Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 53(2), 2004, pp. 457-465.
- [100] J. Antoni, J. Daniere, and F. Guillet, "Effective vibration analysis of ic engines using cyclostationarity. part i-a methodology for condition monitoring". Journal of Sound and Vibration, 257(5), 2002, pp. 815-837.
- [101] R. B. Randall, J. Antoni, and S. Chobsaard. "The relationship between spectral correlation and envelope analysis in the diagnostics of bearing faults and other cyclostationary machine signals". Mechanical Systems and Signal Processing, 15(5), 2001, pp. 945-962.
- [102] J. Antoni, F. Bonnardot, A. Raad, and M. El Badaoui, "Cyclostationary modelling of rotating machine vibration signals". Mechanical Systems and Signal Processing, 18(6), 2004, pp. 1285-1314.
- [103] M. Lamraoui, M. Thomas, M. El Badaoui, I. Zaghbani, and V. Songméné, "New indicators based on cyclostationarity approach for machining monitoring". Proceedings of the international conference surveillance 6, 2011, (29) :27.
- [104] M. Lamraoui, M. Thomas, M. El Badaoui, and F. Girardin. "Cyclostationarity analysis of instantaneous angular speeds for monitoring chatter in high speed milling". IECON 2012 - 38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, 2012, pp. 3868-3873.
- [105] W. Bennett, "Statistics of regenerative digital transmission". Bell Systems Technical Journal, 37, 1958, pp. 1501-1542.
- [106] E.G. Gladyshev, "Periodically correlated random sequences". 1961.
- [107] J.L. Lacoume, P.O. Amblard, and P. Comon, "Statistiques d'Ordre Supérieur pour le Traitement du Signal". Paris, 1997.
- [108] W.A. Gardner, "An introduction to cyclostationary signals". Chapter 1 in Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, 1994, pp. 1-90.
- [109] William A Gardner, "Statistical spectral analysis : a nonprobabilistic theory". 1986.
- [110] W. Gardner, "Measurement of spectral correlation". Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, 34(5), 1986, pp. 1111-1123.
- [111] Badri B., Thomas M., and Sassi S., "Étude et développement d'un système expert basé sur les réseaux de neurones pour le diagnostic des défauts de roulements". Proceedings of the 24nd Seminar on machinery vibration, paper B1-Canadian Machinery Vibration Association, ISBN 2-921145-61-8, ÉTS Montréal, 2006, pp. 386- 403

- [112] Sassi, S., Badri, B., and Thomas, M., ““TALAF” and “THIKAT” as innovative time domain indicators for tracking BALL bearings”. Proceedings of the 24nd Seminar on machinery vibration, Canadian Machinery Vibration Association, éditeur M. Thomas, Montréal, Canada, 2006, pp.404-419.
- [113] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L.Wu, H.H. Shih, Q.Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung and H.H. Liu, “The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis”. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 454, 1998, pp. 903–995.
- [114] E.P. Souza Neto and al., “Assessment of cardiovascular autonomic control by the Empirical Mode Decomposition”. 4th Int. Workshop on Biosignal Interpretation, Como (I), 2002, pp. 123-126.
- [115] R. Fournier, “Analyse stochastique modale du signal stabilométrique. Application à l'étude de l'équilibre chez l'Homme”. Thèse de Doctorat, Univ. Paris XII Val de Marne, 2002.
- [116] R.C. Sharpley and V. Vatchev, “Analysis of the intrinsic mode functions”. Constructive Approximation, 24(1), 2006, pp. 17–47.
- [117] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalvès, “On empirical mode decomposition and its algorithms”. In IEEE-EURASIP workshop on nonlinear signal and image processing NSIP-03, 2003, Grado (I).
- [118] Smith, J. S., “The Local Mean Decomposition and Its Application to EEG Perception Data,” J. R. Soc., Interface, 2(5), 2005, pp. 443–454.
- [119] Wang, Y. X., He, Z. J., and Zi, Y. Y., “A Demodulation Method Based on Improved Local Mean Decomposition and Its Application in Rub-Impact Fault-Diagnosis,” Meas. Sci. Technol., 20(2), 2009, pp. 025704.
- [120] Yanxue Wang, Zhengjia He and Yanyang Zi “A Comparative Study on the Local Mean Decomposition and Empirical Mode Decomposition and Their Applications to Rotating Machinery Health Diagnosis”, Journal of Vibration and Acoustics, APRIL 2010, Vol. 132, 021010.
- [121] Zaigang Chen, Yimin Shao, “Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth”. Engineering Failure Analysis, Volume 18, Issue 8, December 2011, pp. 2149–2164.
- [122] Thomas M. and Lakis A.A., “Detection of breathing crack by time-frequency analysis”. 30th Computer and Industrial Engineering (CIE) conference, Tinos (Greece), 2, 2002, pp. 905-910.
- [123] Ouahabi A., Thomas M and Lakis A.A, “Detection of damage in beams and composite plates by harmonic excitation and time-frequency analysis”. Proceedings of the 3rd European Workshop on Structural Health Monitoring, 2006, Granada, Spain, pp. 775-782.

- [124] Lamraoui Mourad, "Surveillance des centres d'usinages grande vitesse par approche cyclostationnaire et vitesse instantanée". Thèse de doctorat, université de Saint-Étienne, 2013, France.

# ANNEXE A

Dans cette partie, nous présentons les différents équipements utilisés pour la réalisation du projet de recherche.

## 1- Les accéléromètres

La mesure de vibration se fait pas des accéléromètres piézoélectriques (PCB, ICP) axial de type PCB352C22. Les caractéristiques de ce accéléromètre sont présentées dans le tableau suivant :

Performance	ENGLISH	SI
Sensitivity ( $\pm 15\%$ )	10 mV/g	$1.0 \text{ mV}/(\text{m/s}^2)$
Measurement Range	$\pm 500 \text{ g pk}$	$\pm 4900 \text{ m/s}^2 \text{ pk}$
Frequency Range ( $\pm 5\%$ )	1.0 to 10000 Hz	1.0 to 10000 Hz
Frequency Range ( $\pm 10\%$ )	0.7 to 13000 Hz	0.7 to 13000 Hz
Frequency Range ( $\pm 3 \text{ dB}$ )	0.3 to 20000 Hz	0.3 to 20000 Hz
Resonant Frequency	$\geq 50 \text{ kHz}$	$\geq 50 \text{ kHz}$
Broadband Resolution (1 to 10000 Hz)	0.004 g rms	$0.04 \text{ m/s}^2 \text{ rms}$
Non-Linearity	$\leq 1\%$	$\leq 1\%$
Transverse Sensitivity	$\leq 5\%$	$\leq 5\%$

FIGURE A.1 – Les caractéristiques de l'accéléromètre PCB352C22 [124].



FIGURE A.2 – Position de l'accéléromètre.

## 2- Le système d'acquisition

Le système d'acquisition contient une carte d'acquisition ("DT Data Translation 9837") et des ordinateurs portables munis d'un logiciel développé par une compagnie Québécoise "BetaVib".



FIGURE A.3 – Le système BetaVib [124].

## 3- Les accessoires du banc d'essais

L'ensemble du système est entraîné par une machine asynchrone commandée par un onduleur MLI. Les différentes caractéristiques de cette machine sont présentées dans sa plaque signalétique :

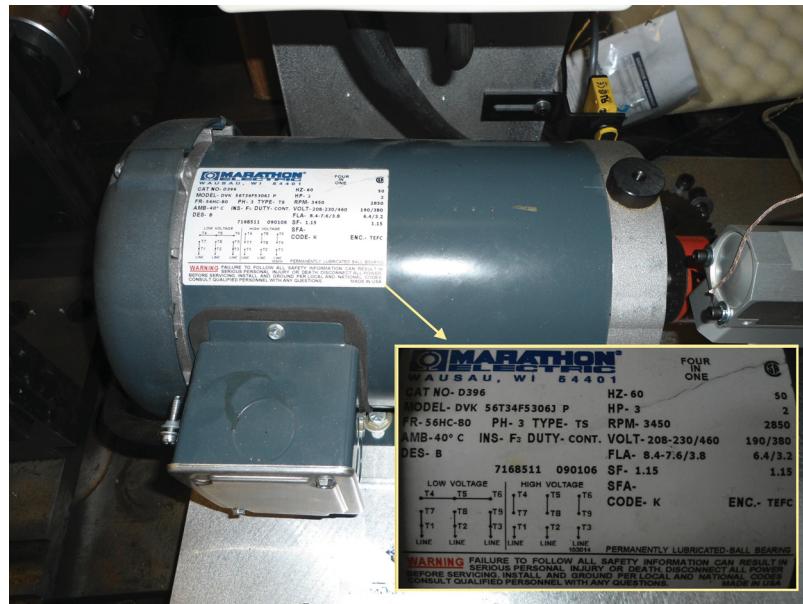


FIGURE A.4 – Le moteur asynchrone de Spectra-Quest.

C'est connu que l'onduleur est un élément perturbateur pour le réseau. Pour cela, nous avons installé un filtre passe bas entre la machine et l'onduleur afin supprimer les harmoniques perturbatrices.



FIGURE A.5 – Le couple-mètre utilisé dans le tests.

Pour lire et maintenir la valeur de la charge appliquée au système d'engrenages, nous avons utilisé un couple-mètre de type *iml*. Sa capacité maximale atteint jusqu'à 250 N.m comme il est illustré dans sa plaque signalétique dans la figure précédente.

D'autre part, nous montrons dans la figure suivante les thermocouples et les différents points de leurs emplacements sur la roue d'engrenages. Cette opération a été effectuée seulement sur l'arbre intermédiaire.



FIGURE A.6 – Placement des thermocouples.

Les thermocouples passent à l'intérieur de l'arbre jusqu'à son extrémité puis nous les attachons à un *slip-ring*. Cet outil permet de transmettre les données des thermocouples

vers la carte d'acquisition sans dégrader les fils à cause de leur rotation. Le *slip-ring* est de marque *InterTechnology* et contient 20 Inputs/Outputs :

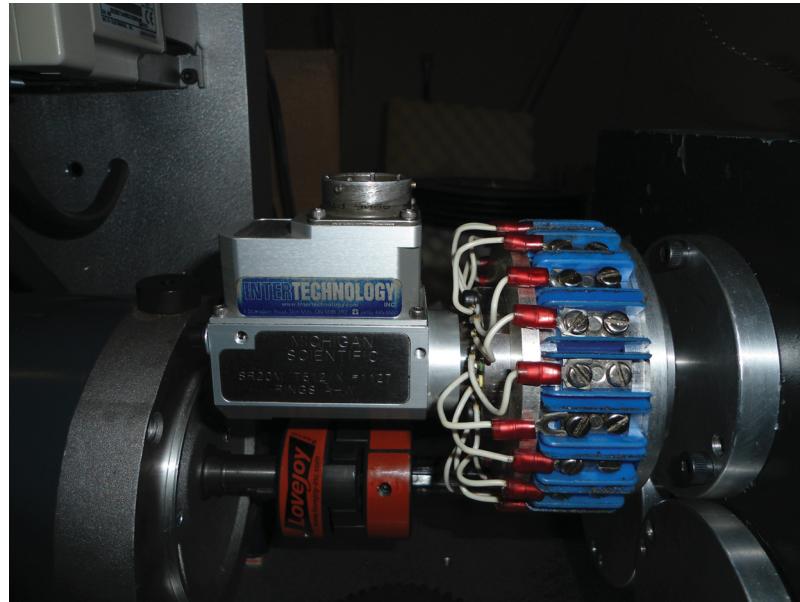


FIGURE A.7 – Le slip-ring.

Par contre, les deux fils de la sonde qui mesure la température du lubrifiant passent directement au contrôleur PID afin de maintenir une température fixe durant chaque essai.

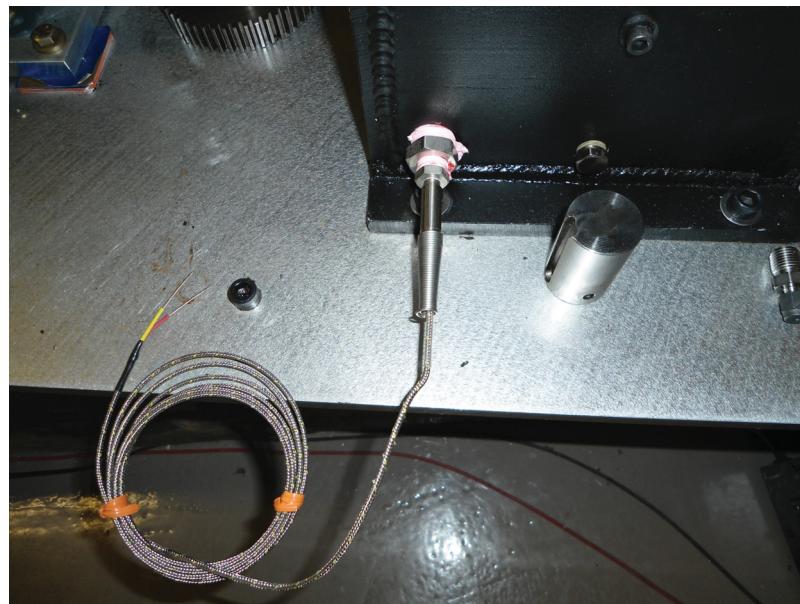


FIGURE A.8 – L'élément chauffant.

Les différentes valeurs des thermocouples, de la vitesse, de la charge et du courant sont contrôlés grâce à une interface *LabView* de *National Instruments* développée par

## ANNEXE A

l'ingénieur électricien du département de génie mécanique de l'ETS. Toutes les mesures collectées dans cette application peuvent être sauvegardées dans un fichier (.txt). Ce qui nous permettra de les étudier par la suite :

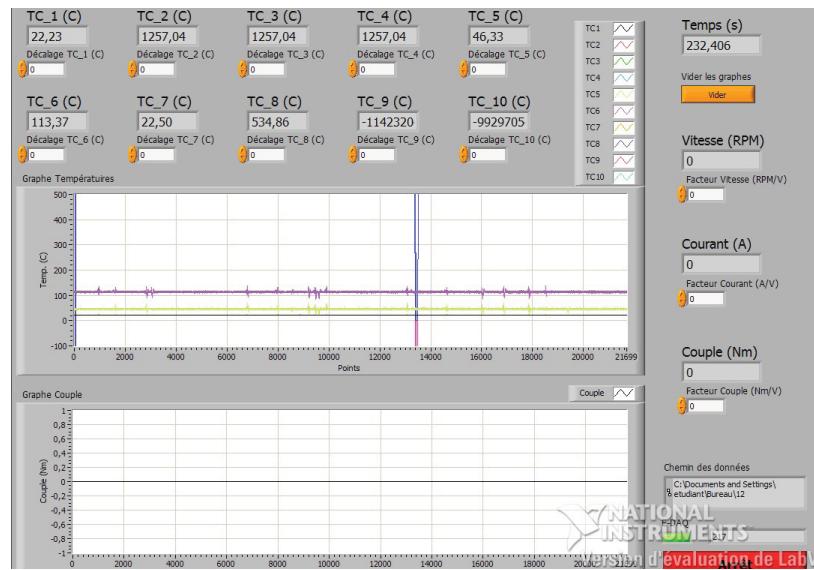


FIGURE A.9 – Interface de contrôle de données.

# ANNEXE B

## 1- Développement des équations du modèle numérique

Dans cette section, nous présentons le diagramme des corps libres (DCL) de notre système d'engrenages à 6 DDL. Le modèle de la figure ci-dessous peut être mis sous la forme de six équations correspondant chacune à un degré de liberté. Le couplage provenant une force d'excitation  $W$ . Cette force de contact  $W$  dépend des positions et des vitesses des différents degrés de liberté. En plus, elle est perpendiculaire à la surface de contact.

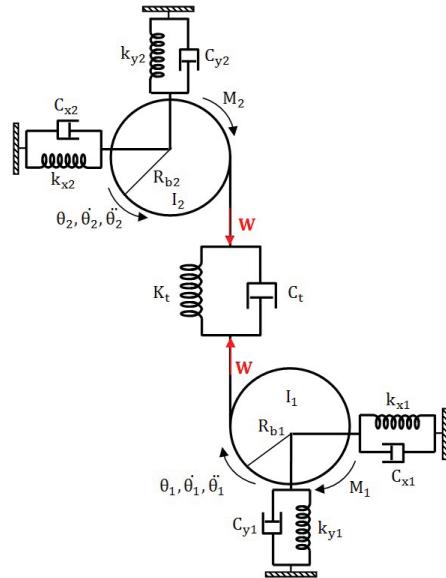


FIGURE B.1 – Le système d'engrenages à 6 DDL.

**-Le corps (1) :** d'après le schéma des éléments d'engrènement, nous pouvons écrire l'équation de la force d'excitation  $W$  comme suit :

$$W = c_t(y_p - y_r) + k_t(y_p - y_r)$$

D'autre part :

$$y_p = R_{b1}\theta_1 - y_1$$

$$y_r = R_{b2}\theta_2 - y_2$$

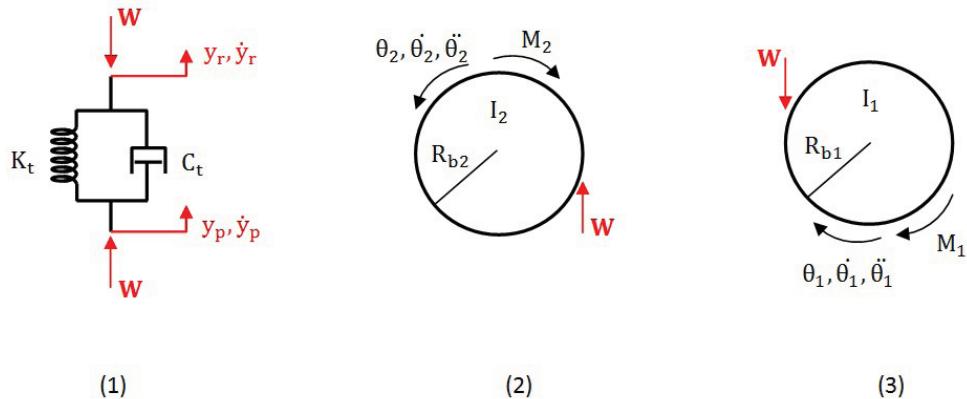


FIGURE B.2 – Le diagramme des corps libres du système.

D'où :

$$W = c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2)$$

-Le corps (2) : l'équation différentielle de la roue s'écrit de la façon suivante :

$$I_2\ddot{\theta}_2 = R_{b2}W - M_2$$

Par conséquent :

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -M_2 + R_{b2} \left[ c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) \right]$$

-Le corps (3) : l'équation différentielle du pignon s'écrit de la façon suivante :

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -R_{b1}W + M_1$$

Par conséquent :

$$I_1\ddot{\theta}_1 = M_1 - R_{b1} \left[ c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k_t(R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 - y_1 + y_2) \right]$$

-Les corps (4) et (5) : après l'application de l'approche Newtonienne sur les deux roues, nous trouvons les équations du mouvement horizontal :

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_{x2}x_2 - c_{x2}\dot{x}_2$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_{x1}x_1 - c_{x1}\dot{x}_1$$

-Les corps (6) et (7) : après l'application de l'approche Newtonienne sur les deux roues, nous trouvons les équations du mouvement vertical :

$$m_2\ddot{y}_2 = -k_{y2}y_2 - c_{y2}\dot{y}_2 - W$$

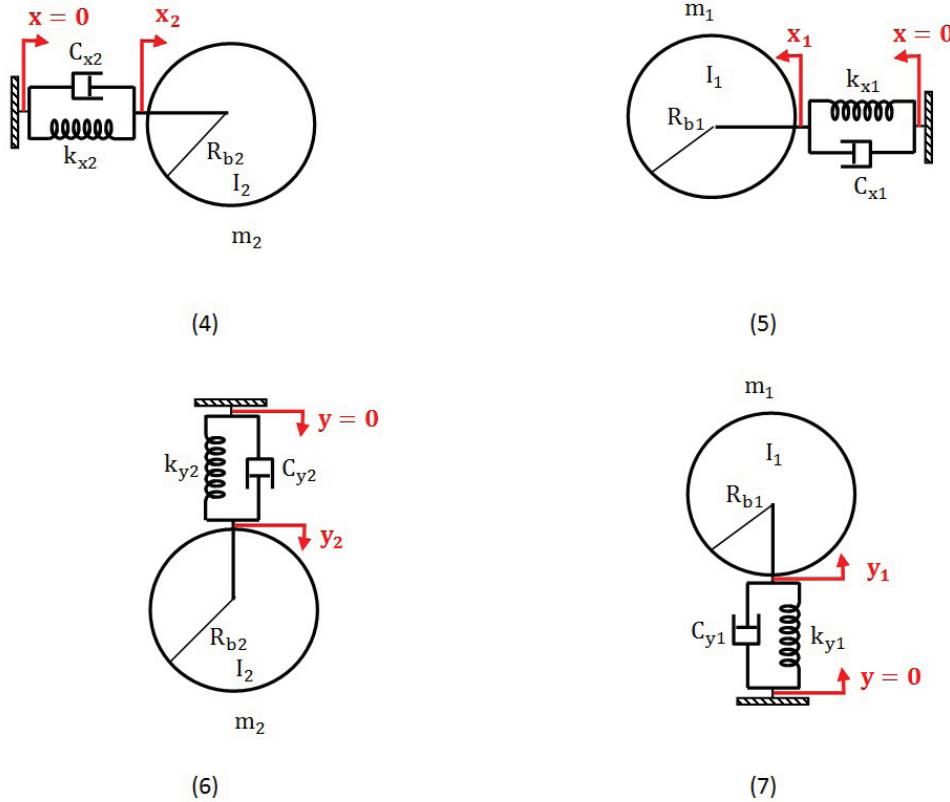


FIGURE B.3 – Le diagramme des corps libres du système.

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_{y1}y_1 - c_{y1}\dot{y}_1 + W$$

Alors, les six équations du système sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_1 + c_{x1} \dot{x}_1 + k_{x1} x_1 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{x2} \dot{x}_2 + k_{x2} x_2 = 0 \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_{y1} \dot{y}_1 + k_{y1} y_1 = c_t(R_{b1} \dot{\theta}_1 - R_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k_t(R_{b1} \theta_1 - R_{b2} \theta_2 - y_1 + y_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_{y2} \dot{y}_2 + k_{y2} y_2 = -c_t(R_{b1} \dot{\theta}_1 - R_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) - k_t(R_{b1} \theta_1 - R_{b2} \theta_2 - y_1 + y_2) \\ I_1 \ddot{\theta}_1 = M_1 - R_{b1} \left[ c_t(R_{b1} \dot{\theta}_1 - R_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k_t(R_{b1} \theta_1 - R_{b2} \theta_2 - y_1 + y_2) \right] \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = -M_2 + R_{b2} \left[ c_t(R_{b1} \dot{\theta}_1 - R_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k_t(R_{b1} \theta_1 - R_{b2} \theta_2 - y_1 + y_2) \right] \end{array} \right.$$

À partir du système d'équations précédent, nous extrayons les matrices de masse et de rigidité qui nous aideront dans le calcul des fréquences propre de notre modèle d'engrenages :

- La matrice de masse :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

- La matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} k_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{y1} + k_t & -k_t & -k_t R_{b1} & k_t R_{b2} \\ 0 & 0 & -k_t & k_{y2} + k_t & k_t R_{b1} & -k_t R_{b2} \\ 0 & 0 & -k_t R_{b1} & k_t R_{b1} & k_t R_{b1}^2 & -k_t R_{b1} R_{b2} \\ 0 & 0 & k_t R_{b2} & -k_t R_{b2} & -k_t R_{b1} R_{b2} & k_t R_{b2}^2 \end{bmatrix}$$

# ANNEXE C

Nous présentons dans cette annexe les différentes allures de la phase instantanée estimée par les méthodes proposées dans ce manuscrit. L'analyse a été appliquée sur le signal d'accélération du modèle numérique d'engrenage fissuré (0.3 mm de profondeur). Différentes valeurs du rapport signal à bruit ont été testées.

## Phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert

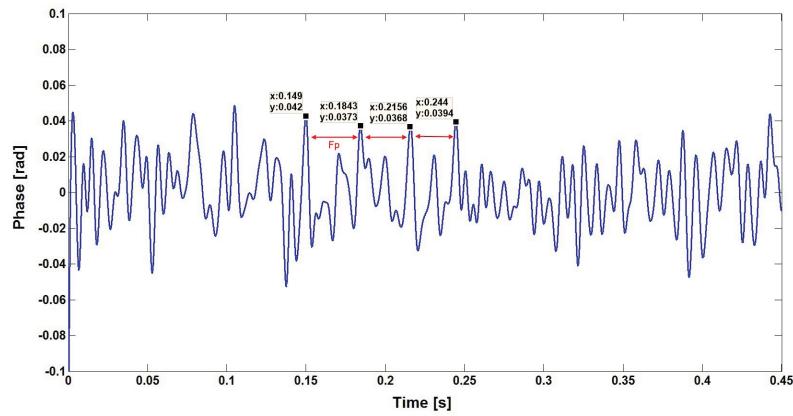


FIGURE C.1 – La phase instantanée estimée par Hilbert : SNR de 40 dB.

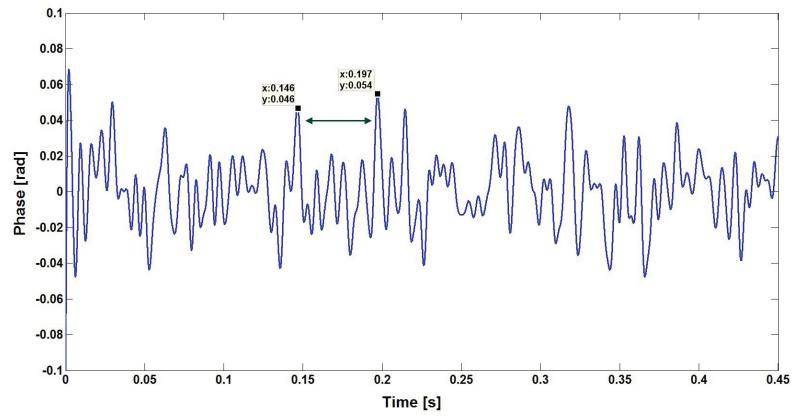


FIGURE C.2 – La phase instantanée estimée par Hilbert : SNR de 30 dB.

## Phase instantanée estimée par WLSE

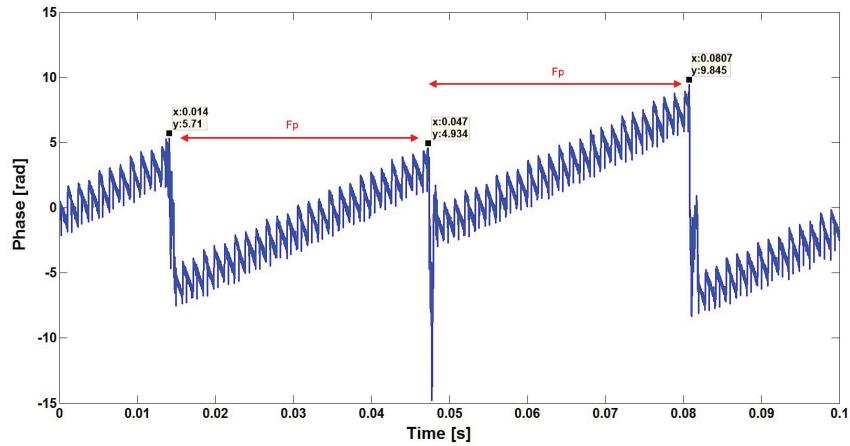


FIGURE C.3 – La phase instantanée estimée par WLSE : SNR de 40 dB.

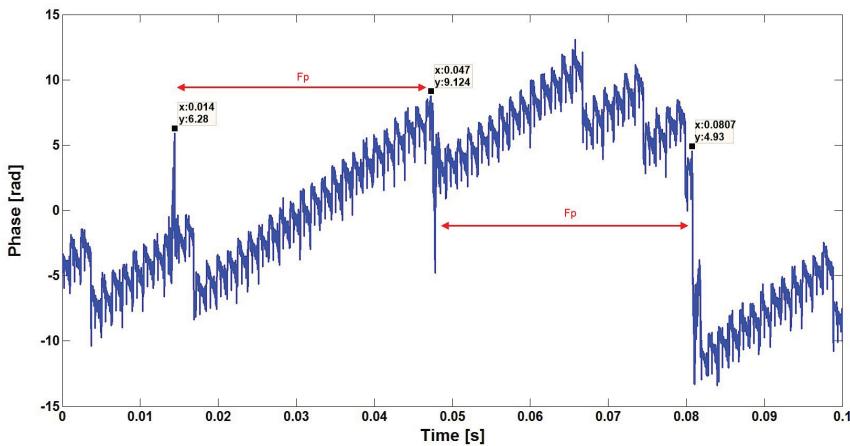


FIGURE C.4 – La phase instantanée estimée par WLSE : SNR de 30 dB.

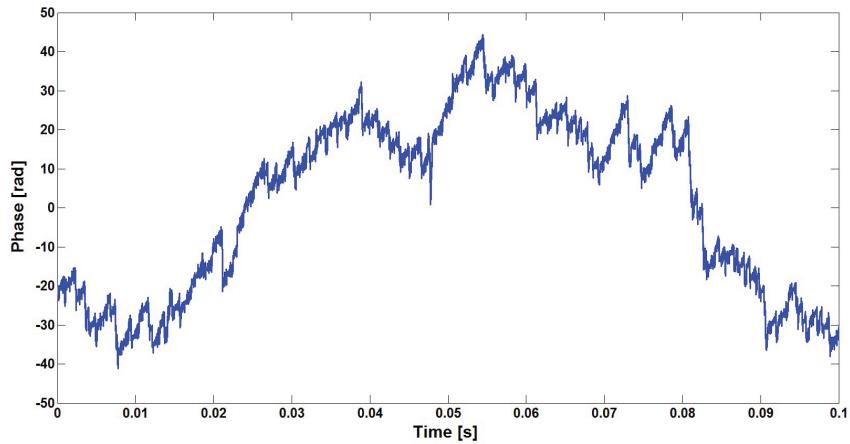


FIGURE C.5 – La phase instantanée estimée par WLSE : SNR de 20 dB.

## Phase instantanée estimée par ESPRIT

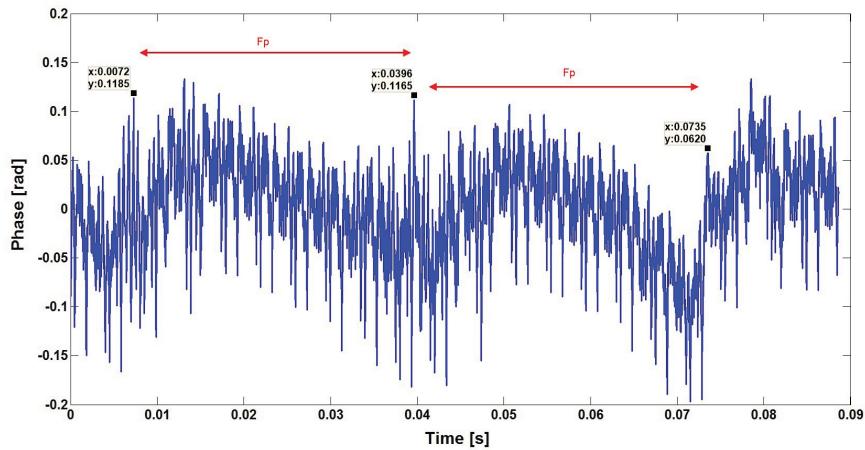


FIGURE C.6 – La phase instantanée estimée par ESPRIT : SNR de 30 dB.

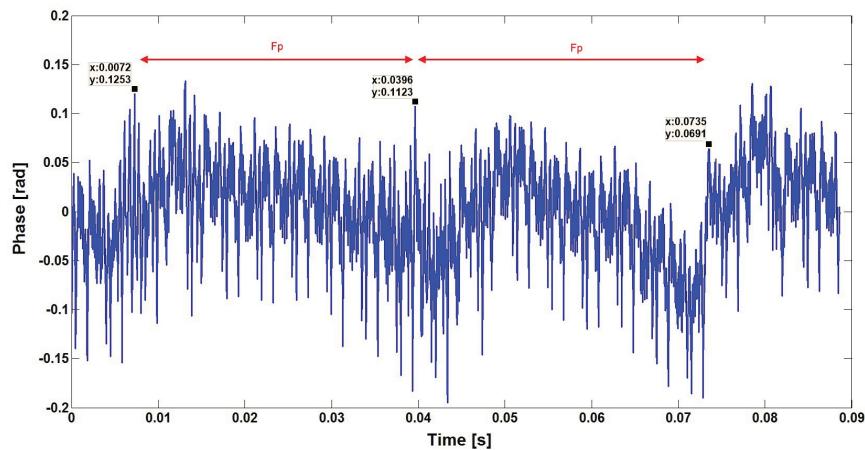


FIGURE C.7 – La phase instantanée estimée par ESPRIT : SNR de 30 dB.

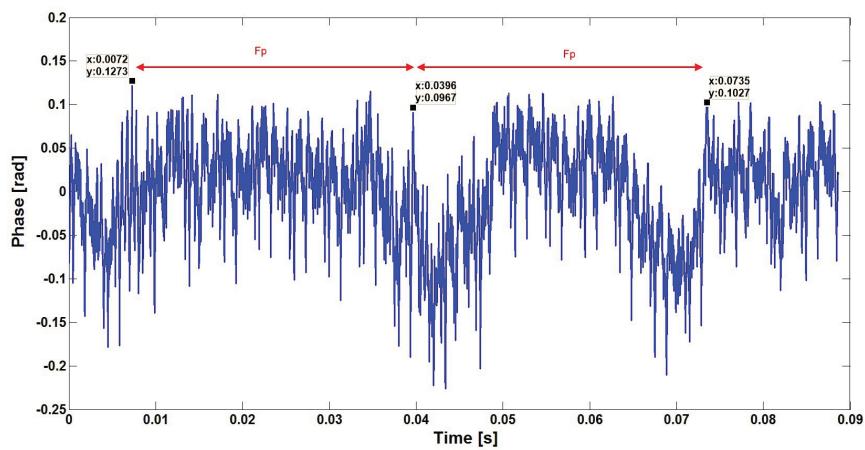


FIGURE C.8 – La phase instantanée estimée par ESPRIT : SNR de 20 dB.

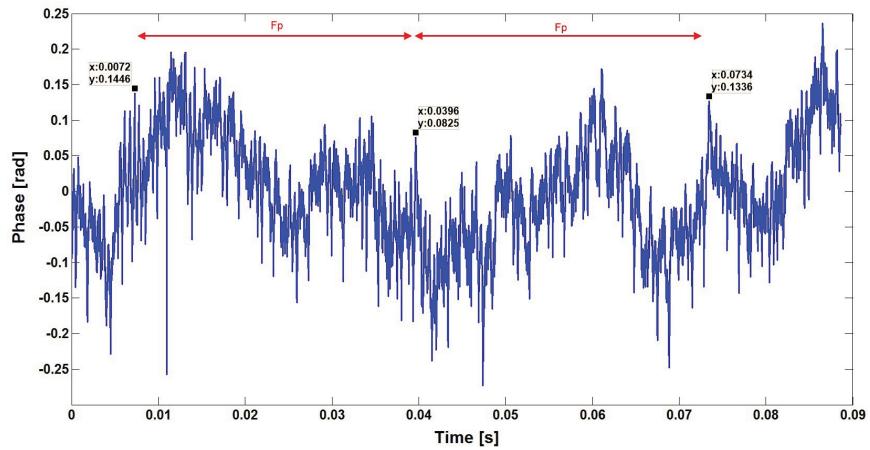


FIGURE C.9 – La phase instantanée estimée par ESPRIT : SNR de 15 dB.

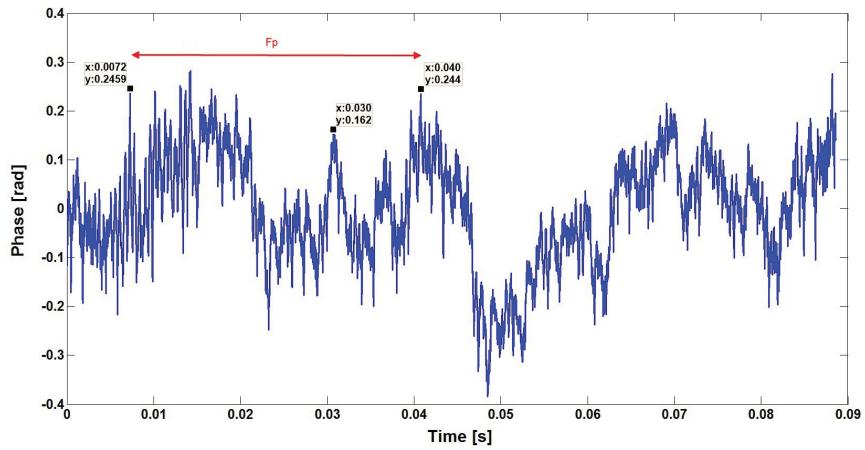


FIGURE C.10 – La phase instantanée estimée par ESPRIT : SNR de 10 dB.

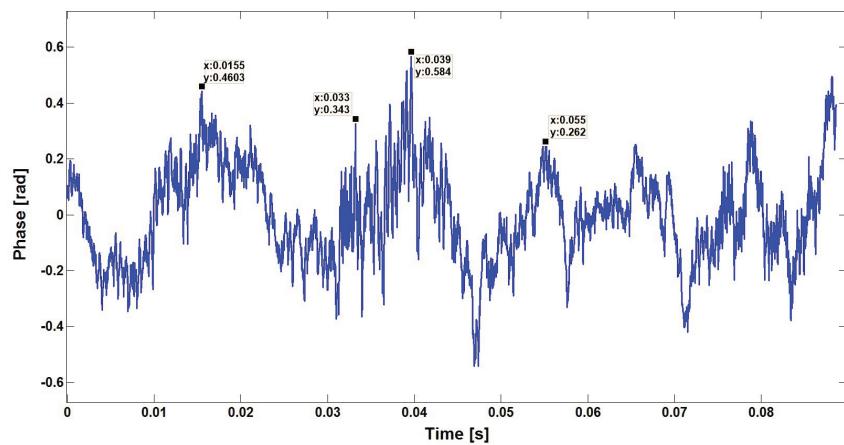


FIGURE C.11 – La phase instantanée estimée par ESPRIT : SNR de 05 dB.

## Étude de la cyclostationnarité d'ordre 2

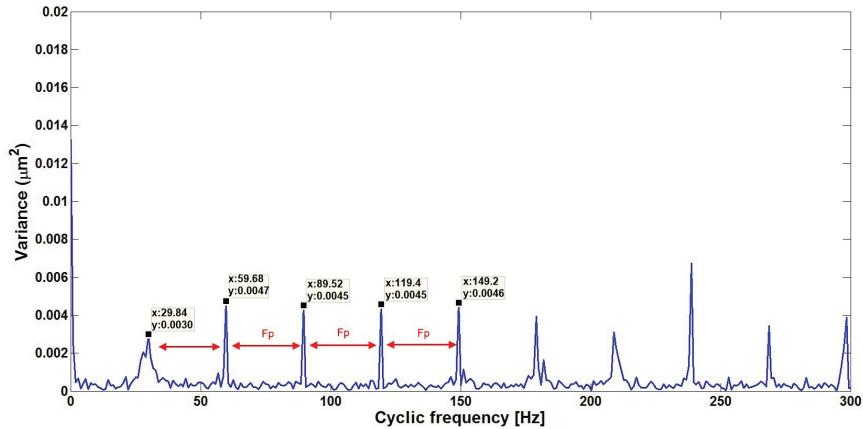


FIGURE C.12 – Le spectre de la variance d'un pignon fissuré : SNR de 40 dB.

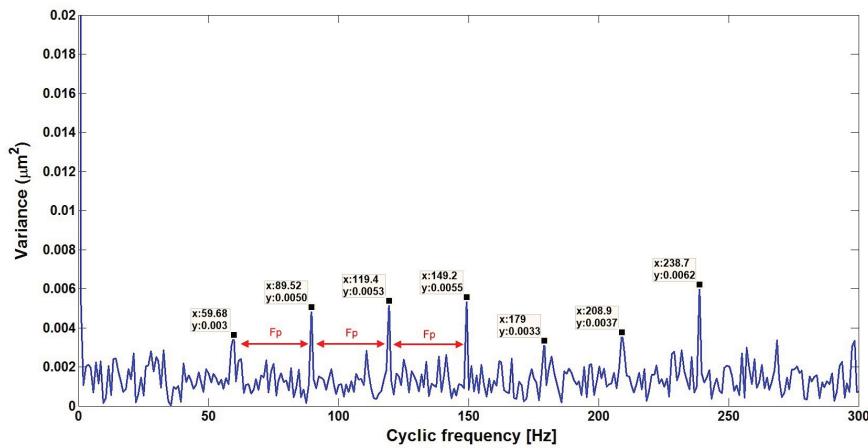


FIGURE C.13 – Le spectre de la variance d'un pignon fissuré : SNR de 00 dB.

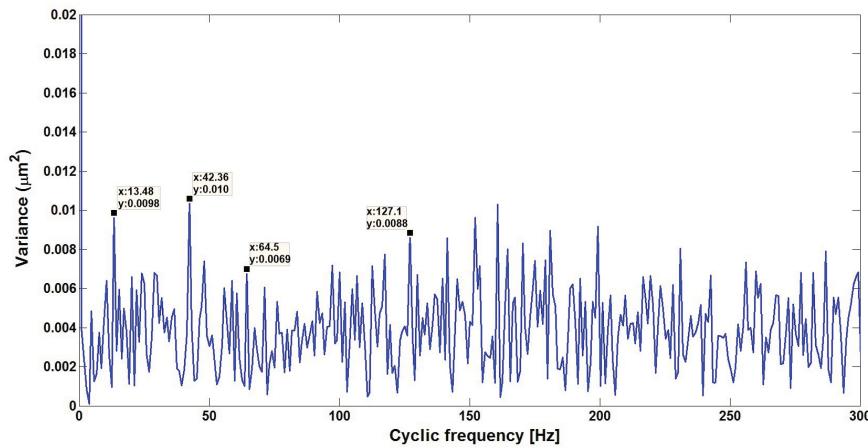


FIGURE C.14 – Le spectre de la variance d'un pignon fissuré : SNR de -5 dB.

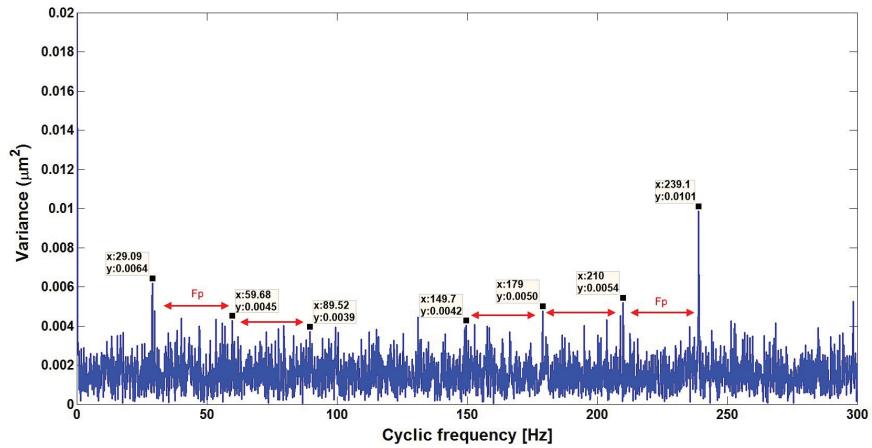


FIGURE C.15 – Le spectre de la variance d'un pignon fissuré : SNR de  $-5$  dB (signal de 7s).

## Spectre de la phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert

Dans cette figure nous montrons que la transformée de Hilbert n'est pas capable d'estimer l'effet de l'engrènement sur la phase instantanée comme les autres méthodes proposées (ESPRIT et WLSE).

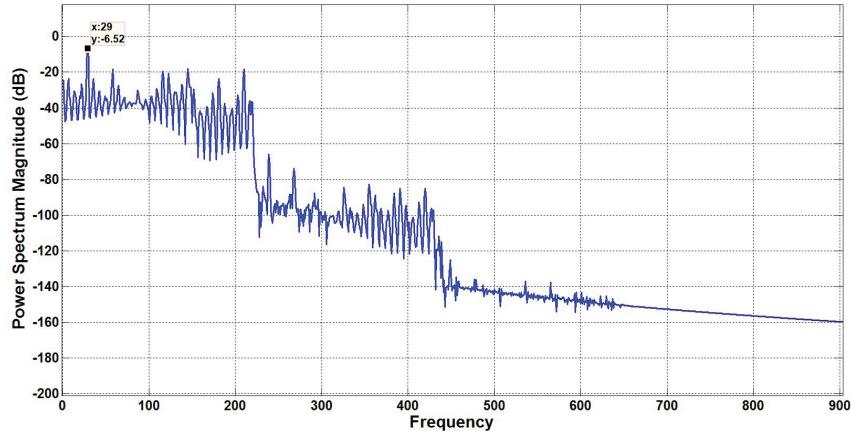


FIGURE C.16 – Le spectre de la phase instantanée estimée par la transformée de Hilbert.

## ANNEXE D

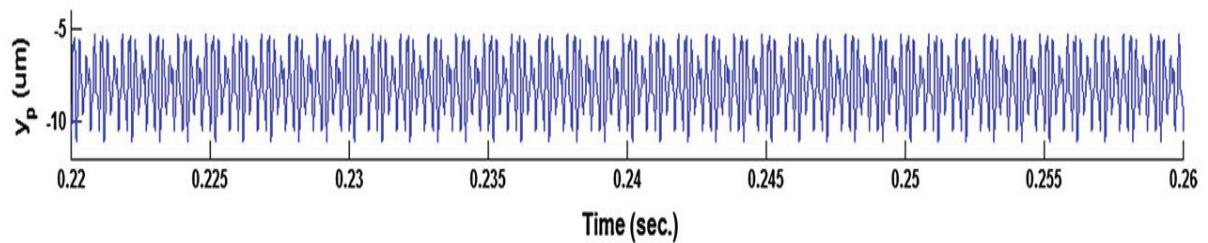


FIGURE C.17 – Le déplacement vibratoire du pignon selon la direction  $y$  [121].

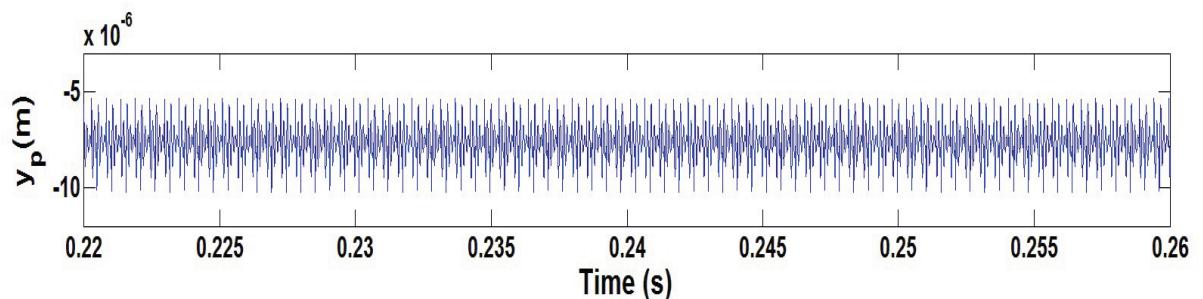


FIGURE C.18 – Le déplacement vibratoire du pignon selon la direction  $y$  obtenu du modèle de notre étude.