

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU
DOCTORAT EN GÉNIE
Ph. D.

PAR
Nacera CHERGUI

ÉTUDE PAR SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA DYNAMIQUE D'ÉCOULEMENT
DANS UN MÉLANGEUR PLANÉTAIRE

MONTRÉAL, LE 11 AOÛT 2015



Nacera Chergui, 2015



Cette licence [Creative Commons](#) signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

PRÉSENTATION DU JURY

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Louis Dufresne, directeur de thèse
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

Mme Annie Poulin, président du jury
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

Patrice Sears, membre du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Jérôme Vétel, examinateur externe
Département de génie mécanique à l'École polytechnique

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 12 JUIN 2015

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

À mes très chers parents.

À mon mari Bouziane et mon fils Abdelhakim.

À mes frères et sœurs;

À mes neveux Mohamed, Abderahmane, Othmane et ma nièce Asma

Je remercie chaleureusement mon directeur de recherche, Mr Louis Dufresne pour son encadrement, son assistance, son soutien et sa disponibilité tout le long de mon doctorat.

Je remercie aussi les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Ma gratitude s'adresse aussi à mon ancien professeur Mr Ramdhane Dhib, professeur à Ryerson university, Troronto pour son soutien et à mes chers amis : Amel, Yasmina, Messaoud et Mohamed Cherif pour leur aide ci-précieuse.

ÉTUDE PAR SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA DYNAMIQUE D'ÉCOULEMENT DANS UN MÉLANGEUR PLANÉTAIRE

Nacera CHERGUI

RÉSUMÉ

Le mélangeur planétaire sans lamelle (MPSL) est une technique de mélange utilisée dans plusieurs industries pour mélanger, synthétiser et aérer les produits hautement visqueux avec un degré de contamination le plus bas possible. Plusieurs améliorations ont été apportées à cette technique depuis sa première utilisation, cependant des lacunes scientifiques sont observées, les MPSLs ont connu des problèmes de mélange pour certaines conditions d'opération et de conception. L'objectif de ce travail consiste à étudier numériquement la dynamique de l'écoulement du fluide dans le MPSL afin de comprendre et résoudre son problème de mélange. L'analyse est basée sur la résolution des équations de conservation de masse et de quantité de mouvement en utilisant le code commercial *Fluent*. Des outils de visualisation ont été utilisés pour décrire qualitativement et quantitativement l'effet de la révolution sur la dynamique d'écoulement du fluide qui part d'une rotation uniforme. L'étude qualitative montre que l'écoulement est essentiellement tourbillonnaire avec la présence de trois axes de rotation : l'axe de rotation primaire, l'axe de révolution et l'axe de rotation secondaire, ce dernier change de direction avec la variation de la vitesse de révolution. L'analyse qualitative montre aussi la présence de singularités dans l'écoulement à partir de certains ratios de vitesses, ces singularités ne se manifestent que sur l'un des deux plans méridionaux parallèle et perpendiculaire au bras de révolution. L'étude quantitative établit un lien entre le bilan de forces agissantes sur le fluide et sa topologie d'écoulement : la force de Coriolis est celle qui modifie l'écoulement pour certains ratios de vitesses et le bilan de forces prévoit la présence des points singuliers.

Mots clés : Mélangeur Planétaire Sans Lamelle (MPSL), Technique de visualisation, Cylindre en rotation, Structure tourbillonnaire, Analyse qualitative, Dynamique du fluide.

CFD STUDY OF FLOW DYNAMICS IN BLADE FREE PLANETARY MIXER

Nacera CHERGUI

ABSTRACT

The blade free planetary mixer (BFPM) is a technique of mixture, used in many industries to mix, aerate and synthesize products highly viscous, with a lower degree of contamination as possible. Several improvements were introduced to this technique since its first use, however some scientific shortcomings are still observed. The FBPM have met some mixing issues for certain operating and designing conditions. The objective of this work is to numerically study the dynamics of fluid flow in the FBPM in order to understand and to solve that mixing problem. The analysis is based on solving the conservation equations of mass and of momentum by using the commercial code Fluent. Visualization techniques are used to qualitatively and quantitatively describe the effects of the revolution on the flow dynamics of a fluid which starts with a uniform rotation. The qualitative study shows that the flow is mainly swirl with the presence of three axes of rotation: a primary spin axis, a secondary spin axis and an axis of revolution. The secondary spin axis changes direction with the change of the revolution speed. The qualitative analysis also indicates the existence of singularities in the flow structure beyond certain speed ratios. These singularities appear only on one of the two meridional planes parallel and perpendicular to the revolution arm. The quantitative study establishes a link between the balance of the forces acting on the fluid and the topology of the flow: the Coriolis force is the one that modifies the flow structure for some speed ratios and the force balance forecasts the existence of singular points.

Keywords: Blade free planetary mixer (BFPM), Visualization technique, Rotating cylinder, Vortical structures, Qualitative analysis, Flow dynamic

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 MÉTHODOLOGIE.....	13
1.1 Introduction.....	13
1.2 Le modèle mathématique.....	13
1.3 Le modèle physique	17
1.4 Les hypothèses et les conditions aux limites	18
1.5 La méthode numérique	21
1.6 Validation du calcul numérique : Calcul du GCI.....	23
1.7 Conclusion	25
CHAPITRE 2 ANALYSE QUALITATIVE DE LA DYNAMIQUE D'ÉCOULEMENT DANS LE MPSL	27
2.1 Introduction.....	27
2.2 Visualisation de l'écoulement : Les trajectoires des particules	27
2.2.1 Application des techniques d'identification des structures cohérentes....	43
2.2.1.1 Minimum de pression	43
2.2.1.2 Maximum de vorticité.....	45
2.2.1.3 Critère Q	47
2.2.1.4 Critère du nombre de vorticité cinématique Nk	49
2.2.1.5 Critère $\lambda 2$	51
2.2.1.6 Synthèse des différents critères testés.....	54
2.2.2 Identification géométrique de l'ARS	54
2.3 Visualisation de l'écoulement : Les iso-contours de vitesses	59
2.4 Visualisation de l'écoulement : Les lignes de courant.....	63
2.5 Conclusion	71
CHAPITRE 3 ANALYSE QUANTITATIVE DE LA DYNAMIQUE D'ÉCOULEMENT DANS LE MPSL	75
3.1 Introduction.....	75
3.2 Les débits de pompage.....	76
3.3 Le bilan de forces.....	80
3.3.1 Iso-contours de forces	81
3.3.2 Le bilan de forces appliquées sur une particule	96
3.4 Conclusion	110
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	113
ANNEXE I RÉFÉRENCES DES ARTICLES PUBLIÉS ET DES ARTICLES DE CONFÉRENCES	121

ANNEXE II	LES ÉQUATIONS DE CONSERVATION DANS LES DEUX REPÈRES ROTATION ET RÉVOLUTION	123
ANNEXE III	EXEMPLES POUR VALIDER LES PROGRAMMES MATLAB UTILISÉS DANS L'IDENTIFICATION DES STRUCTURES COHÉRENTES.....	131
ANNEXE IV	LES TRANSFORMATIONS VECTORIELLES DU REPÈRE (B) VERS LE REPÈRE (C).....	137
ANNEXE V	CONTOURS DU MODULE DE LA FORCE DE CORIOLIS.....	141
ANNEXE VI	ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA BALANCE DE FORCES DANS UN MÉLANGEUR PLANÉTAIRE: APPLICATION DES FILTRES RÉCURSIFS	143
ANNEXE VII	CALCUL DES DÉRIVÉES PREMIÈRE ET SECONDE SUR UNE GRILLE IRRÉGULIÈRE	161
ANNEXE VIII	ANALYSE PAR CFD DE L'ÉCOULEMENT DANS UN MÉLANGEUR PLANÉTAIRE.....	167
BIBLIOGRAPHIE		183

LISTE DES TABLEAUX

	Page	
Tableau 1.1	Paramètres de conceptions et d'opération du MPSL	20
Tableau 1.2	Nombre de cellules et le temps de calcul pour chaque maillage	23
Tableau 3.1	Désignation des différents termes de l'équation 1.3	98

LISTE DES FIGURES

	Page	
Figure 0.1.1	Les procédés de mélange conventionnels. (a) Mélangeur en ligne (www.Bakker.org , consulté en juillet 2010), (b) réacteur mécaniquement agité.	2
Figure 0.1.2	Schéma explicite d'un mélangeur planétaire.	3
Figure 0.1.3	Le mouvement planétaire du cylindre Tirée du site www.thinkymixer.net (consulté en juillet 2010).....	4
Figure 0.1.4	Exemple de mélange de deux pâtes de polymères avec le mélangeur planétaire pour les fluides. Tirée du site www.thinkymixer.net	5
Figure 0.1.5	Mouvement de précession d'un objet volant (Lagrange, 2009), Ω_1 vitesse de rotation et Ω_1 vitesse de précession	7
Figure 0.1.6	Mouvement de précession de la terre (Noir, 2000).....	8
Figure 0.1.7	Systèmes en double rotation. (a) Cylindre en précession $R_0 \approx 0$; (b) MPSL $R_0 >> 0$	8
Figure 1.1	Vecteur position d'un point matériel M dans le repère de révolution (\mathbf{B}).15	
Figure 1.2	Vecteur position d'un point matériel M dans le repère de rotation (\mathbf{C})	16
Figure 1.3	Les paramètres de conception et d'opération du MPSL	18
Figure 1.4	La partie du fluide simulée dans le MPSL.....	20
Figure 1.5	Les conditions aux limites du MPSL	20
Figure 1.6	Maillage quasi-structuré utilisé pour le mélangeur. (a) : surface libre et fond, (b) : paroi latérale	21
Figure 1.7	Les plans méridionaux (xz), (yz) et les plans horizontaux (xy)	22
Figure 1.8	La composante selon « x » de la vitesse absolue normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega r \cdot R$) pour les trois maillages testés. Plan (xz), coupe $z/R = 0.4$	24
Figure 1.9	La composante « x » de la vitesse absolue normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega r \cdot R$) pour les trois maillages testés. Plan (yz), coupe $y/R = 0.4$	25

Figure 2.1	Trajectoires des particules qui se trouvaient initialement sur le plan (xz). Voir le texte pour le code de couleurs.....	31
Figure 2.2	Trajectoires des particules qui se trouvaient initialement au voisinage de l'axe de rotation sur une droite. (D) : droite d'équation choisie au voisinage de l'axe de rotation	32
Figure 2.3	Trajectoires des particules qui se trouvaient initialement au voisinage de la paroi sur une surface cylindrique. (C) : surface cylindrique : $x^2 + y^2 = 0.0016$	33
Figure 2.4	Position initiale de quatre particules dans les deux plans (xz) et (yz)	34
Figure 2.5	Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -6$ à $x/R = -0.2$ et $x/R = +0.2$	35
Figure 2.6	Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -6$ à $x/R = +0.4$ et $x/R = -0.4$	36
Figure 2.7	Trajectoires des particules dans le plan (yz)	37
Figure 2.8	Trajectoires des quatre particules dans le plan (yz) pour $n = -6$ à $y/R = +0.4$ et $y/R = -0.4$	38
Figure 2.9	Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -2$ à $x/R = +0.2$ et $x/R = -0.2$	39
Figure 2.10	Trajettoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -2$ à $x/R = +0.4$ et $x/R = -0.4$	40
Figure 2.11	Trajettoires des quatre particules dans le plan (yz) pour $n = -2$ à $y/R = +0.2$ et $y/R = -0.2$	41
Figure 2.12	Trajettoires des quatre particules dans le plan (yz) pour $n = -2$ à $y/R = +0.4$ et $y/R = -0.4$	42
Figure 2.13	Axe de rotation secondaire calculé avec le critère de minimum de pression pour différentes valeurs de n , $Re\omega = 125$	45
Figure 2.14	Iso-contours du module de vorticité. Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$	47
Figure 2.15	Iso-contours de Q . Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$	49
Figure 2.16	Iso-contours de Nk . Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$	50

Figure 2.17	Iso-surfaces de $Nk = 6$. Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$	51
Figure 2.18	Isocontours de $\lambda 2$, Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$	52
Figure 2.19	Iso-surfaces de $\lambda 2 = -2000$, Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$	53
Figure 2.20	Iso-surfaces de $\lambda 2 = -6000$, Résultat de $n = -4$ et $Re\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$	53
Figure 2.21	Méthode des centroïdes des courbes. (a) Exemple de trajectoires des particules de la droite (D) proche axe de rotation géométrique, $n = -8$ et $Re\omega = 125$. (b) Centroïde d'une spirale dans le plan (xy)	55
Figure 2.22	Calcul du centroïde, exemple d'une spirale cylindrique.....	56
Figure 2.23	Le ARS identifié géométriquement pour différentes valeurs de n , $Re\omega = 125$	58
Figure 2.24	Déplacement de l'axe de rotation secondaire du fluide (ARS) par rapport à l'axe de révolution	58
Figure 2.25	Iso-contours des trois composantes de la vitesse relative à la révolution dans le plan (xz) parallèle au bas de révolution. La vitesse est normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega r \cdot R$) et les coordonnées x, y et z sont normalisées par rapport à R . (a _i) : la composante selon x de la vitesse (u_{BM}), (b _i) : la composante selon y de la vitesse (v_{BM}), (c _i) : la composante selon z de la vitesse (w_{BM}). (1) : $n=-50$, (2) : $n=-6$, (3) : $n=-2$. $Re\omega=125$	61
Figure 2.26	Iso-contours des trois composantes de la vitesse relative à la révolution dans le plan (yz) perpendiculaire au bras de révolution. La vitesse est normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega r \cdot R$) et les coordonnées x, y et z sont normalisées par rapport à R . (a _i) : la composante selon x de la vitesse (u_{BM}), (b _i) : la composante selon y de la vitesse (v_{BM}), (c _i) : la composante selon z de la vitesse (w_{BM}). (1) : $n=-50$, (2) : $n=-6$, (3) : $n=-2$. $Re\omega=125$	62
Figure 2.27	Représentation des points singuliers. Tirée du site www.onera.fr (Office National d'Études et Recherches Aérospatiales)	64
Figure 2.28	Topologie d'écoulement dans le mélangeur planétaire pour différents plans horizontaux (xy) perpendiculaires à l'axe de rotation. n variable et $Re\omega=125$	68

Figure 2.29	Topologie d'écoulement dans le mélangeur planétaire pour le plan (<i>xz</i>) parallèle au bras de révolution. n variable et $Re\omega=125$	69
Figure 2.30	Topologie d'écoulement dans le mélangeur planétaire pour le plan (<i>yz</i>) perpendiculaire au bras de révolution. n variable et $Re\omega=125$	70
Figure 2.31	Structure de l'écoulement dans le mélangeur. Les trajectoires et la fonction de courant sont calculées à partir de <i>VBM</i> . Cas de $n = -1$ et $Re\omega = 125$. (a) : exemple montrant comment le fluide est évacué axialement selon des spirales le long de l'axe de rotation. Les trois plans représentés dans la figure sont des plans (<i>xy</i>) à $z/R = 0.5, 0.75$ et 1.25 . (b) : Exemple montrant comment le fluide est évacué horizontalement au centre des foyers sur le plan (<i>xz</i>).....	71
Figure 2.32	Le nombre des points singuliers en fonction du ratio de vitesses pour les deux plans (<i>xz</i>) parallèle au bras de révolution et (<i>yz</i>) perpendiculaire au bras de révolution.	73
Figure 3.1	Présentation schématique des débits de pompage axial et secondaire.....	77
Figure 3.2	Variation du débit de pompage axial le long de l'axe de rotation pour différentes valeurs de n à $Re\omega = 125$	79
Figure 3.3	Variation du débit de pompage secondaire le long de l'axe de rotation pour différentes valeurs de n à $Re\omega = 125$	79
Figure 3.4	Variation du débit de pompage secondaire et axial le long de l'axe de rotation, $n = -4$ et $Re\omega = 125$	80
Figure 3.5	Iso-contour de la force centrifuge pour $n = -50$ et -1 Plan (<i>xz</i>), $Re\omega = 125$	82
Figure 3.6	Iso-contour de la force centrifuge pour $n = -50$ et -1 . Plan (<i>yz</i>), $Re\omega = 125$	83
Figure 3.7	Iso-contours de l'accélération convective pour différentes valeurs de n . Plan (<i>xz</i>), $Re\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail).....	88
Figure 3.8	Iso-contours de la force de Coriolis pour différentes valeurs de n . Plan (<i>xz</i>), $Re\omega = 125$. (voir le texte pour le détail).....	89
Figure 3.9	Iso-contours du gradient de la pression pour différentes valeurs de n . Plan (<i>xz</i>), $Re\omega = 125$. (voir le texte pour le détail).....	90
Figure 3.10	Iso-contours de la force visqueuse pour différentes valeurs de n . Plan (<i>xz</i>) $Re\omega = 125$. (voir le texte pour le détail).....	91

Figure 3.11	Iso-contours de l'accélération convective pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $R\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail).....	92
Figure 3.12	Iso-contours de la force de Coriolis pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $R\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail).....	93
Figure 3.13	Iso-contours du gradient de pression pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $R\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail).....	94
Figure 3.14	Iso-contours de la force visqueuse pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $R\omega = 125$. (voir le texte pour le détaï).....	95
Figure 3.15	Schéma des différences finies centrées.....	96
Figure 3.16	Les coupes dans les plans (xz) et (yz).....	97
Figure 3.17	Composante « x » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.5$	99
Figure 3.18	Composante « y » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.5$	99
Figure 3.19	Composante « z » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.5$	100
Figure 3.20	Composante « x » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.75$	101
Figure 3.21	Composante « y » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.75$	101
Figure 3.22	Composante « z » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.75$	102
Figure 3.23	Composante « x » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.5$	103
Figure 3.24	Composante « y » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.5$	103
Figure 3.25	Composante « z » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.5$	104
Figure 3.26	Composante « x » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $R\omega = 125$, $z/R = 0.75$	105

Figure 3.27	Composante « y » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re\omega = 125$, $z/R = 0.75$	105
Figure 3.28	Composante « z » de le bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re\omega = 125$, $z/R = 0.75$	106
Figure 3.29	Détermination de la position du point singulier sur le plan (xy) à $z/R = 0.75$ à partir du bilan de forces. Exemple de $n = -2$ et $Re\omega = 125$	109
Figure 3.30	Lien entre le bilan de forces et la topologie d'écoulement. Exemple de $n = -2$ et $Re\omega = 125$	110
Figure 3.31	Lien entre le bilan de forces et les trajectoires des particules. Exemple de $n = -6.67$ et $Re\omega = 125$	110

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

2D	Deux Dimension
3D	Trois Dimension
ARP	Axe de Rotation Primaire
ARS	Axe de Rotation Secondaire
CFD	Computational Fluid Dynamics
GCI	Grid Convergence Index
MPSL	Mélangeur Planétaire Sans Lamelle
PBM	Planetary Ball Milling
tr	Trace d'un tenseur
UDF	User Define Function

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

$< \alpha$	Accélération (m/s^2)
(A)	Repère Absolu
(B)	Repère de Révolution
(C)	Repère de Rotation
(D)	Droite
D	Tenseur de déformation
F	Force (N)
F	Rapport d'aspect
g	Accélération gravitationnelle (m/s^2)
H_f	Hauteur du fluide (m)
k	Rapport de forme
M	Un point matériel
N_k	Nombre de la viscosité cinématique
N_{pl}	Nombre de plans
N_{pt}	Nombre de points d'une spirale sur le plan
n	Ratio de vitesse de rotation sur la vitesse de révolution
p	Pression (Pas)
Q	L'un des critères d'identification des structures tourbillonnaires (s^{-1})
Q_{ax}	Débit de pompage axial (m^3/s)
Q_{sd}	Débit de pompage secondaire
R	Tenseur de rotation
R	Rayon du cylindre (m)
R	Vecteur position (m)
R_0	Rayon de révolution (m)
t	Temps (s)
U	Vitesse adimensionnelle d'écoulement
u	Composante selon (ox) de la vitesse d'écoulement (m/s)
V	Vitesse d'écoulement (m/s)

v	Composante selon (oy) de la vitesse d'écoulement (m/s)
w	Composante selon (oz) de la vitesse d'écoulement (m/s)
(x, y, z)	Coordonnées spatiales (m)
(xy)	Plan horizontal
$(xz), (yz)$	Plans méridionaux
x_0	Position initiale d'un point matériel M (m)
x	Position d'un point matériel M en temps t (m)
Ω_r	Vitesse de révolution (rad/s)
ω_r	Vitesse de rotation (rad/s)
ω	Vorticité
$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$	Les trois composantes de la vorticité (s ⁻¹)
α	Angle d'inclinaison du MPSL (°)
ν	Viscosité cinétique du fluide mélangé (m ² /s)
ρ	La masse volumique (kg/m ³)
ψ	La fonction de courant (m ² /s)
ε	Taux de précession
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Valeurs propres du tenseur $\mathbf{D}^2 + \mathbf{R}^2$

INTRODUCTION

0.1 Mise en contexte

L'opération de mélange est l'une des opérations unitaires les plus rencontrées dans l'industrie chimique, biochimique, agroalimentaire, etc. Plusieurs produits qu'on utilise quotidiennement sont issus de cette opération. L'exemple le plus simple est le pétrissage de pain. D'autres exemples sont à citer tels que les détergents, les crèmes, certains produits alimentaires, etc. Les procédés industriels de mélange ont connu d'importants progrès afin de satisfaire aux exigences des consommateurs qui ne cessent d'augmenter. Ces progrès ont été réalisés grâce aux études tant numériques qu'expérimentales menées sur les différentes techniques de mélange. Toutefois, des lacunes scientifiques subsistent toujours, les problèmes de mélange persistent encore. L'industrie de mélange perd des millions voir des milliards de dollars annuellement à cause des produits de mauvaise qualité.

Que veut-on dire par un produit de mauvaise qualité? Pour répondre à cette question, il faut d'abord définir l'opération de mélange pour pouvoir distinguer entre le bon et le mauvais produit. La définition la plus utilisée du mélange est l'association de deux ou de plusieurs substances à l'échelle microscopique ou de deux ou de plusieurs phases à l'échelle macroscopique pour un degré d'homogénéisation donné. Le degré d'homogénéisation est synonyme de la qualité du produit dans les procédés de mélange. Il comprend plusieurs aspects : la morphologie, la rhéologie (consistance ou viscosité par exemple), les propriétés physico-chimiques (tels que le pH, la conductivité thermique ou électrique, la densité, etc.), etc. Le mélange peut se faire avec ou sans réaction chimique. Il existe plusieurs procédés de mélange conventionnels (Trambouze, 1999), les plus connus sont :

- ***les procédés du mélange en continu*** : Cette technique est composée généralement de conduites cylindriques de longueurs variables dont on fait circuler deux fluides miscibles en régime turbulent (figure 0.1.1-a). Des obstacles fixes peuvent être implantés dans les conduites afin de promouvoir l'écoulement et le contact entre les deux phases.

- ***Les procédés de mélange en discontinu*** : La technique la plus utilisée est le réacteur mécaniquement agité (figure 0.1.1-b). Cette technique utilise différents types d'agitateurs (les hélices, les turbines, les agitateurs à pales, les rubans, les vis d'Archimède, les ancrès, etc.). Ces mobiles d'agitation sont implantés pour : 1) mélanger rapidement le contenu en augmentant l'interface de contact, 2) favoriser le transfert de matière, 3) augmenter le transfert thermique entre le mélange et un fluide caloporteur. Ce dernier circule soit dans une double enveloppe, soit dans des serpentins immergés ou enveloppant la cuve agitée.

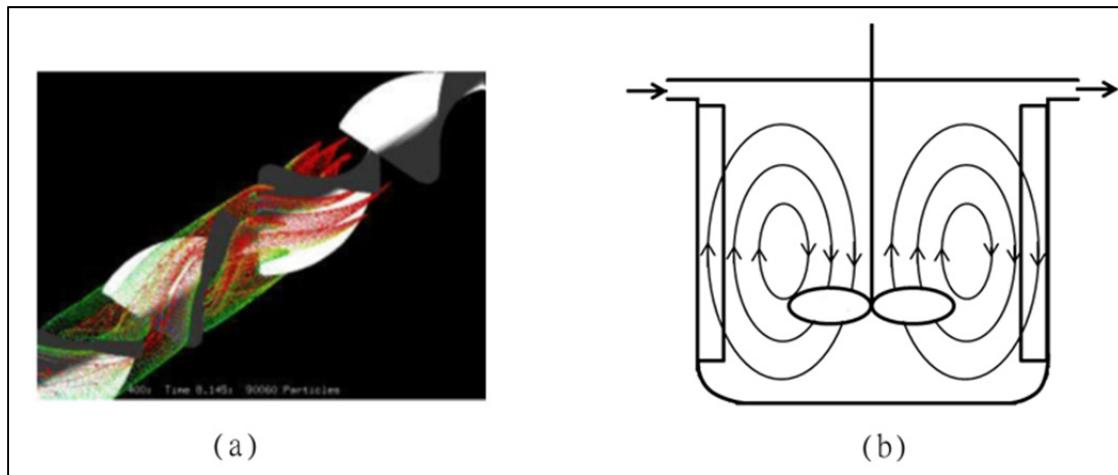


Figure 0.1.1 Les procédés de mélange conventionnels. (a) Mélangeur en ligne (www.Bakker.org, consulté en juillet 2010), (b) réacteur mécaniquement agité.

Bien que ces procédés de mélange aient occupé longtemps une grande place dans l'industrie, une nouvelle technique de mélange a vu le jour depuis plusieurs années : les mélangeurs planétaires. Ces mélangeurs sont utilisés à petite échelle dans l'industrie chimique, pharmaceutique et biotechnologique. Ils sont constitués principalement d'une cuve cylindrique généralement à fond plat exempté d'obstacles ou d'agitateur. Le cylindre est doté d'un double mouvement, le premier est une rotation autour de son axe géométrique, le second est une révolution autour d'un arbre situé à une distance déterminée par rapport au premier axe (Figure 0.1.2). Il peut être incliné d'un angle α pour améliorer la qualité du

mélange. Ce type de mouvement est similaire à celui de la terre autour d'elle-même et autour du soleil, d'où le nom « planétaire ».

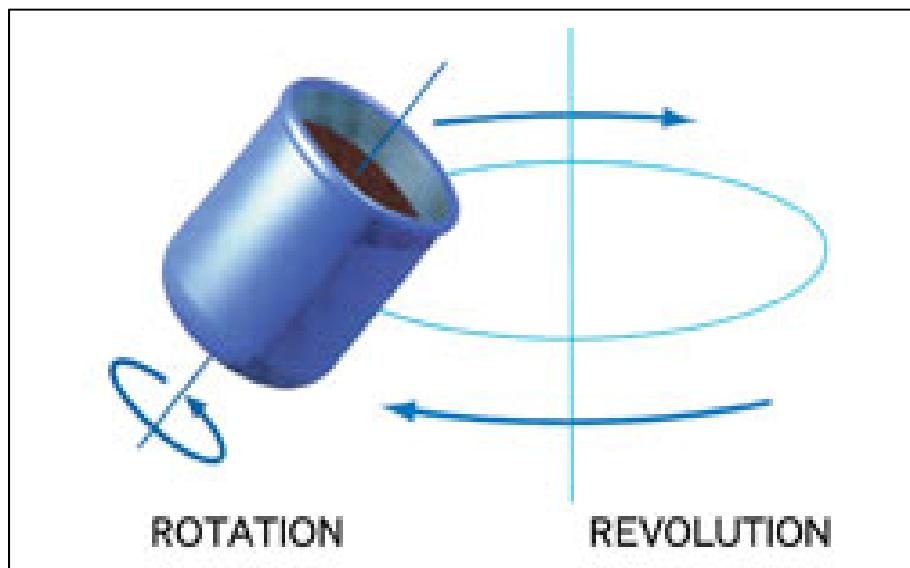


Figure 0.1.2 Schéma explicite d'un mélangeur planétaire.
Tirée du site Thinky (consulté en juillet 2010)

Le mouvement planétaire (ou la double rotation) a été introduit pour la première fois depuis un siècle pour broyer les solides (El-Eskandarany, 2001). Des améliorations ont été apportées depuis ce temps à la technique du broyage. Selon la capacité du broyeur et le broyage à effectuer, des billes de différents diamètres ont été introduites dans le cylindre pour améliorer le broyage et le mélange des solides. La technique est connue actuellement sous le nom de broyeur planétaire à billes (Planetary Ball Milling PBMs). Le mélange et le broyage des solides sont assurés grâce aux deux mouvements de rotation et de révolution qui créent un mouvement brusque des billes et augmentent le nombre des collisions entre elles. Plusieurs études théoriques et expérimentales ont été menées sur les PBM pour améliorer leurs performances (Burgio et al., 1991, Abdellaoui et al., 1995, Pee-Yew et al., 1995, Keifets et Lin, 1996, Moi et al., 2002, 2004).

La technique de PBM a été utilisée telle quelle pour la première fois en 1970 (Massing et al., 2008) pour synthétiser et mélanger des produits en phase fluide (figure 0.1.3), sauf que le

cylindre est exempt de billes ou d'agitateur. Ils sont nommés les mélangeurs planétaires sans lamelle (MPSLs). L'action du mélange est assurée grâce aux deux mouvements, rotation et révolution. Ces deux mouvements combinés favorisent le mélange sans l'intervention d'un agent extérieur : dans un cylindre en simple rotation, le mouvement du fluide à l'intérieur du cylindre est dû à la condition de non glissement sur les parois et la viscosité du fluide. Donc, les couches du fluide, adjacentes à la paroi en rotation, transmettront progressivement le mouvement aux autres couches qui se trouvent plus loin jusqu'à ce que tout le fluide soit animé de la même vitesse de rotation, c'est le mouvement en bloc. L'introduction du mouvement révolutionnaire brisera l'écoulement en corps rigide. Il générera par conséquent un écoulement relatif à la rotation et créera des flux verticaux favorisant ainsi le mélange. La figure 0.1.4 est un exemple de mélange de deux polymères de haute viscosité par le mélangeur planétaire. Elle présente l'évolution du mélange dans le temps et illustre bien la présence des flux axiaux.

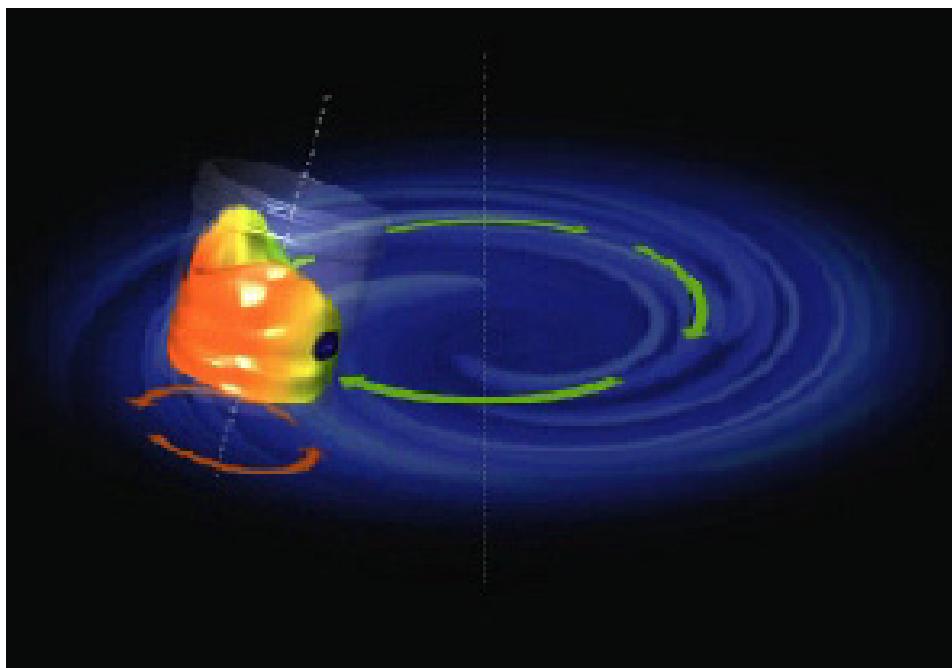


Figure 0.1.3 Le mouvement planétaire du cylindre
Tirée du site www.thinkymixer.net (consulté en juillet 2010)

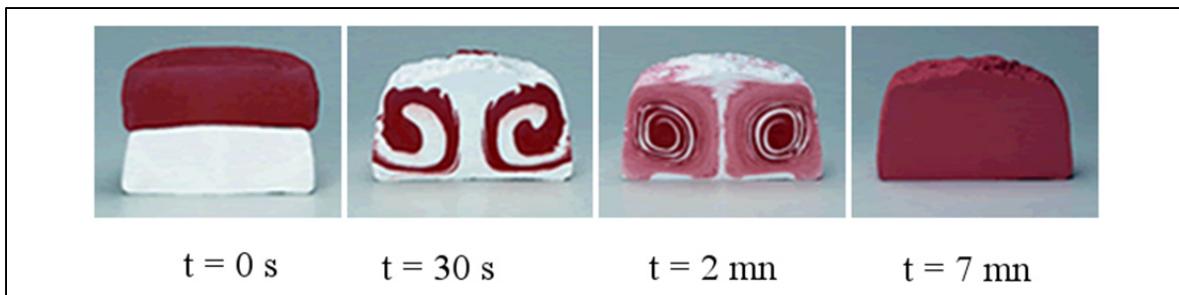


Figure 0.1.4 Exemple de mélange de deux pâtes de polymères avec le mélangeur planétaire pour les fluides. Tirée du site www.thinkymixer.net

0.2 Problématique

Les MPSLs sont actuellement utilisés à petite échelle dans l'industrie chimique, pharmaceutique, biotechnologique, etc. pour mélanger, synthétiser et aérer les produits de haute viscosité avec un degré de contamination le plus bas possible (Chakrabarty et al., 2010, Massing, 2008, Raza et al., 2012, Tenambergen et al., 2013). Cependant, des lacunes subsistent lors de l'application de la technique en phase liquide, des problèmes de mélange sont aperçus, les produits finis sont parfois de mauvaise qualité pour certaines conditions d'opération et/ou de conception (telles que la vitesse de rotation, la vitesse de révolution, le rayon du cylindre, la hauteur du cylindre, le rayon de révolution et l'angle d'inclinaison). Certains auteurs trouvent, par exemple, des produits finis avec une rhéologie ou morphologie qui ne sont pas adéquates pour des paramètres géométriques et/ou d'opération donnés (Adachi et al., 2004, Chakrabarty et al., 2010, Chen et al., 2007, Jacobs et al., 2006, Niwa et Hashimoto, 2008, Hirsch et al., 2009, Lacroix, 2010, Massing et al., 2008, Raza et al., 2012). Ces études ne justifient pas l'obtention de produits de mauvaise qualité. Plus précisément, elles n'ont pas pu déterminer le lien entre les conditions d'opération et de conception et la qualité du produit fini. Pour corriger le problème de mélange, ces auteurs procèdent en général par essais et erreurs. Or, la cinématique du fluide qui est fortement liée à la dynamique du mélange (Ottino, 1989) est-elle même fonction des conditions d'opération et de conception. Autrement dit, pour comprendre le problème de mélange et pouvoir le résoudre par la suite, il faut d'abord comprendre la dynamique de l'écoulement dans les

MPSLs. Pour ce faire, il va falloir chercher les bons outils. Nous allons donc ré-investiguer dans la littérature.

0.3 Recherche bibliographique

Lacroix (2010) était le premier à faire une étude paramétrique expérimentale et numérique sur l'écoulement et le mélange dans les MPSLs. Il a étudié un modèle d'écoulement et de mélange plus simple car le mélange dans le MPSL est plus complexe : un fluide visqueux, non homogène, avec une réaction chimique et un transfert thermique, etc. Il a travaillé sur un fluide newtonien homogène. Il a considéré un régime permanent et un écoulement laminaire incompressible. Il a étudié numériquement la variation de la puissance dissipée, le temps de mélange, l'énergie cinétique et le débit de pompage axial en fonction des paramètres d'opération et de conception. Il a validé son modèle numérique avec des mesures expérimentales de la puissance dissipée, du temps de mélange, de la topologie d'écoulement sur la surface libre et de la topologie du mélange sur des plans verticaux. Lacroix (2010) a fait son analyse paramétrique dans le but d'optimiser les conditions d'opération et de conception dans le MPSL. Il n'a pas fait une étude détaillée de la dynamique d'écoulement ou de mélange pour ce procédé.

À notre connaissance, et jusqu'à la rédaction de cette thèse, aucun travail n'a été publié sur l'analyse de la dynamique d'écoulement dans les MPSL. L'absence des travaux scientifiques dans ce sens est peut-être liée aux raisons de confidentialité et/ou de compétitivité.

Comme nous n'avons pas trouvé de références qui étudient la dynamique d'écoulement ou de mélange dans les MPSL, nous avons élargi notre recherche pour couvrir la dynamique de fluide dans les repères en double rotation. Des études sur des systèmes similaires aux MPSLs ont été trouvées (Lagrange, 2009, 2011, Mouhali, 2009, Vanyo et al.. 1995 et 2000, Noir, 2000). Ces études concernent les cavités (cylindre, sphère) en précession. La précession est le terme utilisé en géophysique, en science de la terre et en aérospatiale pour désigner le changement permanent de la direction de l'axe de rotation de la matière (terre, satellite, etc.)

en fonction du temps. Ce changement est dû à la rotation de cet axe autour d'un autre axe incliné par rapport au premier (figures 0.1.5, 0.1.6 et 0.1.7). Ces travaux ont été réalisés pour étudier le comportement des fluides dans le noyau de la terre et les réservoirs des satellites. Les auteurs ont étudié l'effet de la précession (révolution) sur un écoulement qui part d'une rotation uniforme. Ils ont étudié principalement le changement de direction de l'axe de rotation secondaire et l'identification des couches cisailées (Vanyo et al., 1995 et 2000, Noir, 2000), l'apparition des écoulements secondaires, l'instabilité de l'écoulement et la transition vers la turbulence (Lagrange et al., 2009 et 2011, Mouhali, 2009, Noir, 2000). Leurs études ont été menées par rapport au repère de précession (révolution).

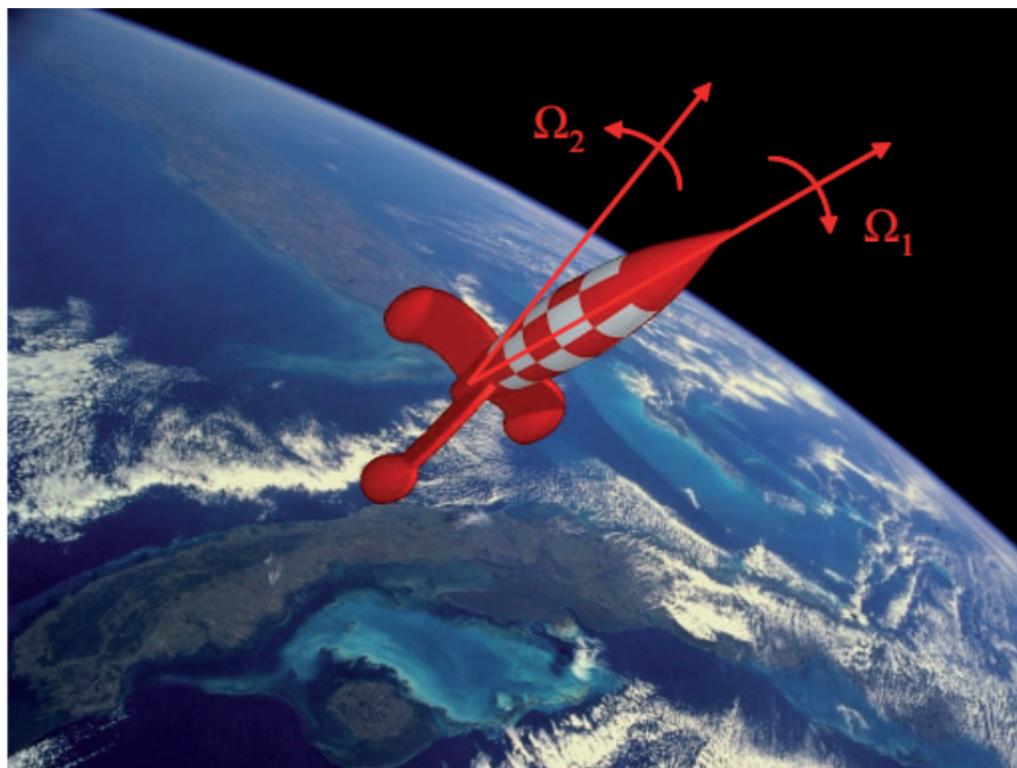


Figure 0.1.5 Mouvement de précession d'un objet volant
(Lagrange, 2009), Ω_1 vitesse de rotation et Ω_2 vitesse de précession

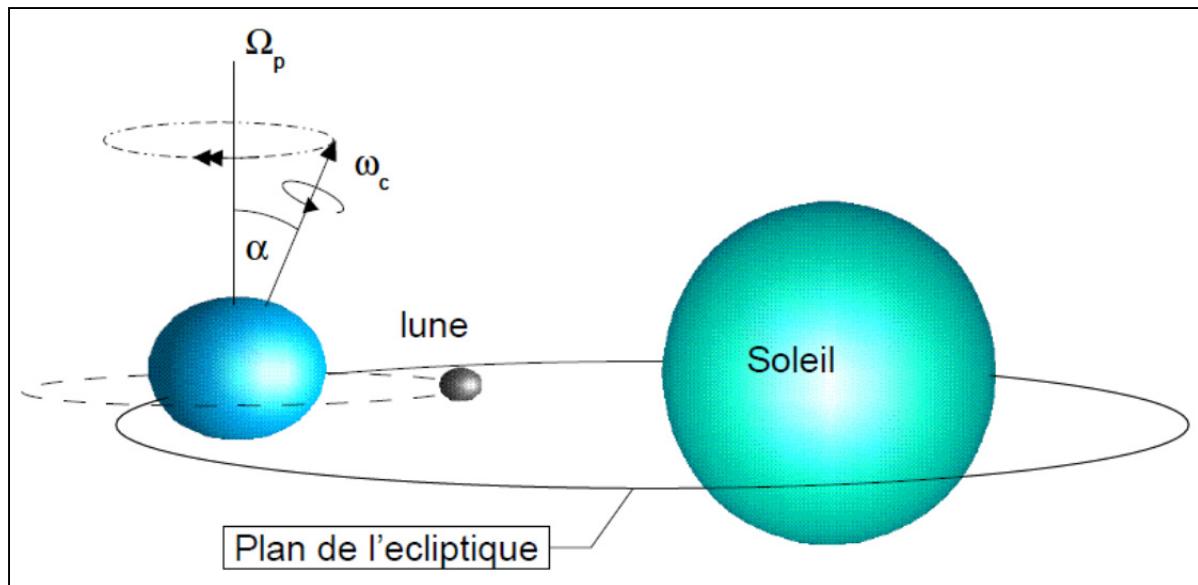


Figure 0.1.6 Mouvement de précession de la terre (Noir, 2000).

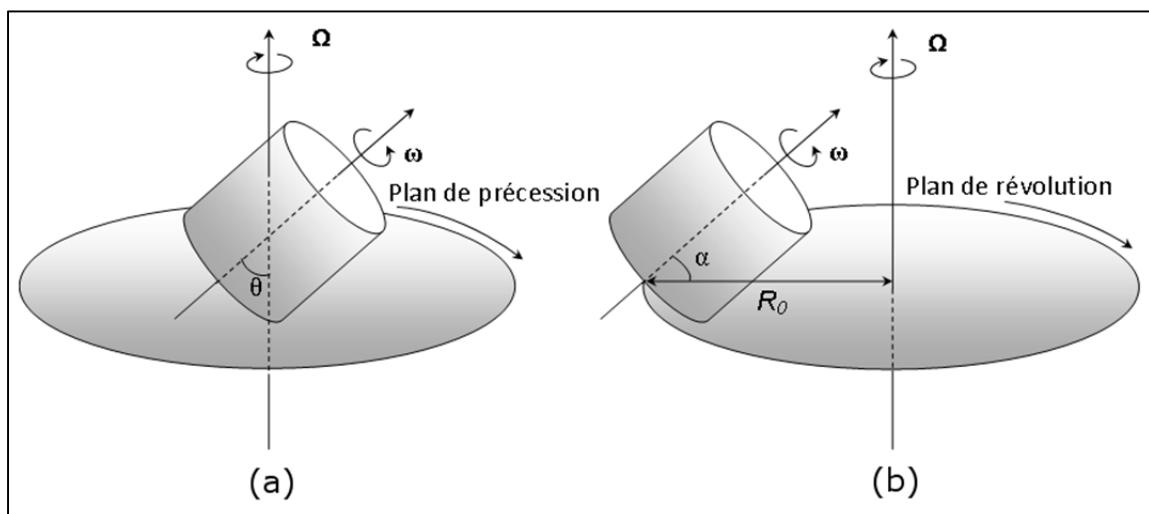


Figure 0.1.7 Systèmes en double rotation. (a) Cylindre en précession $R_0 \approx 0$;
(b) MPSL $R_0 \gg 0$.

Quoique le mouvement de la double rotation et l'accélération de Coriolis soient présents dans les deux configurations (les MPSLs et les cavités en précession), il existe des différences entre elles :

- dans le cas du cylindre en précession, l'axe de rotation intercepte celui de précession à l'intérieur du cylindre (figure 0.1.7a);
- dans le cas du MPSL, l'intersection des deux axes, rotation et révolution, se situe loin du contenant (figure 0.1.7b);
- les champs d'accélérations diffèrent un peu dans les deux systèmes, le centrifuge de révolution est très faible dans le cas de la précession et est significatif dans le cas du mouvement planétaire.

Nous avons aussi investigué dans les repères en simple rotation. Plusieurs études trouvées concernent les réacteurs agités. Ces travaux ont étudié la dynamique de l'écoulement du fluide mélangé en fonction des paramètres de conception et d'opération pour analyser et caractériser le mélange (Devals et al. 2008, Fontaine et al., 2013, Ge et al., 2013, Glover et Fitzpatrick, 2007, Hidalgo-Millán et al., 2012, Hu et al., 2013, Mavros, 2001, Nurtonos et al., 2009, Rice et al., 2006, Rivera et al, 2009) .

Les études menées sur les cavités en précession (système en double rotation) et les réacteurs agités (système en simple rotation) se sont basées sur des techniques de visualisation, qualitative et/ou quantitative, soit expérimentales ou numériques. Ces techniques permettent de mesurer des quantités physiques qui peuvent décrire l'écoulement. La quantité la plus utilisée est le champ de vitesses, ce champ permet de déduire d'autres quantités telles que les trajectoires des particules, les lignes de courant, la vorticité, la circulation, le cisaillement, les débits de pompages, etc. Ces quantités permettent, à leur tour, de décrire et de caractériser la dynamique d'écoulement d'un fluide quelconque. Elles peuvent identifier les structures tourbillonnaires, les zones de recirculation, l'attachement et le ré-attachement des couches limites, l'intensité et la direction du pompage, etc.

0.4 Objectifs

Rappelons que notre problématique est comment peut-on étudier la dynamique de l'écoulement du fluide dans le MPSL pour comprendre et pouvoir résoudre son problème de mélange? L'outil de visualisation de l'écoulement s'avère le plus intéressant. Il est le plus utilisé dans la littérature, que ce soit dans les repères en double rotation (les cavités en précession) ou en simple rotation (les procédés de mélange en continu à savoir les réacteurs agités). La question maintenant est comment peut-on utiliser la visualisation pour étudier l'écoulement dans le MPSL et par où commencer?

L'écoulement et le mélange dans les cuves agitées sont favorisés par la présence de l'outil d'agitation qui est en simple rotation, tandis que dans les MPSLs, ils sont favorisés par un bilan de forces résultantes de la double rotation. Pour un MPSL en simple rotation, l'équilibre est établi entre l'accélération centrifuge et le gradient de pression. L'écoulement est strictement circulaire, dans ce cas le mélange ne s'effectue pas. Cependant, dans un MPSL en rotation mis sous un autre mouvement de révolution, les champs d'accélérations dues à la combinaison rotation /révolution, comme l'accélération de Coriolis (le détail des équations est donné dans le chapitre 1, section 1.2), vont générer un écoulement relatif à la rotation. Autrement dit, le mouvement de révolution va briser la rotation solide et créer des flux axiaux. L'écoulement devient alors tridimensionnel et le mélange est favorisé. Notre objectif principal est donc d'étudier numériquement un écoulement du fluide qui part d'une rotation uniforme dans le MPSL. Il sera alors de déterminer comment un écoulement bidimensionnel devient tridimensionnel par effet de révolution (c.-à-d. une vitesse de rotation constante et une vitesse de révolution variable).

Notre étude est divisée en deux parties :

- La première partie concerne l'étude qualitative de l'écoulement dans le MPSL. L'objectif de cette partie est de faire une visualisation qualitative afin de décrire la dynamique de l'écoulement, identifier les différentes structures qui se développent au sein du fluide et caractériser l'écoulement par rapport à la vitesse de révolution.

- La deuxième partie concerne l'étude quantitative de l'écoulement dans le MPSL. L'objectif de cette partie est de faire une visualisation quantitative qui consiste à quantifier les débits de pompage et établir un bilan de forces appliquées sur le fluide mélangé. Le lien entre la topologie d'écoulement et le bilan de forces est présenté à la fin de cette partie.

0.5 Contenu de la thèse

Trois chapitres viennent s'ajouter à l'introduction générale. Le chapitre 1 présente la méthodologie suivie. Dans ce chapitre, le modèle physique et numérique du MPSL est décrit ainsi que les équations fondamentales qui gouvernent l'écoulement dans ce genre de procédé. Le chapitre 2 est dédié à l'analyse qualitative de l'écoulement. Les méthodologies de visualisation les plus utilisées dans l'étude d'un écoulement quelconque sont présentées. Ces techniques sont testées pour l'étude qualitative de l'écoulement dans le MPSL. Le chapitre 3 concerne l'étude quantitative. Deux quantités physiques sont considérées pour analyser quantitativement l'écoulement. Les deux quantités sont le débit de pompage et le bilan de forces agissantes sur le fluide. Ces deux quantités sont parmi plusieurs quantités physiques qui gouvernent la dynamique de l'écoulement d'un fluide. Une conclusion générale de l'étude et quelques perspectives sont présentées dans le chapitre 4.

CHAPITRE 1

MÉTHODOLOGIE

1.1 Introduction

L'équation de conservation de quantité de mouvement dans un référentiel en rotation est différente de celle dans un référentiel au repos. Toute perturbation appliquée sur un système qui tourne en corps rigide crée un mouvement relatif à sa rotation. Du fait de ces perturbations, on observe d'autres phénomènes qui interviennent et de nouvelles forces viennent agir sur le fluide. Dans ce chapitre, nous développerons mathématiquement ces nouvelles forces. Cependant, nous procéderons avec le calcul numérique (CFD) vu qu'il est difficile techniquement et financièrement d'étudier expérimentalement l'écoulement et le mélange dans les MPSLs à cause du système doublement accéléré. Nous détaillerons la méthodologie suivie pour les calculs numériques de l'écoulement d'un fluide newtonien homogène en régime laminaire. Nous présenterons le modèle numérique avec les deux équations de conservation dans les repères en rotation ainsi que les méthodes de leur discrétisation, il s'agit de l'équation de conservation de masse et l'équation de conservation de quantité de mouvement. Par ailleurs, l'équation d'énergie ne sera pas considérée vu que les effets thermiques liés à l'écoulement seront négligés. Le modèle physique avec les différentes hypothèses adoptées seront aussi présenté. À la fin de ce chapitre, nous serons en mesure de formuler un modèle numérique complet.

1.2 Le modèle mathématique

Trois repères sont à distinguer pour le MPSL, l'inertiel (**A**), le repère de révolution (**B**) et le repère de rotation (**C**) (Figure 1.1). L'étude de la dynamique d'écoulement dans les repères en double rotation repose sur le choix du référentiel. Certains repères semblent plus appropriés numériquement tandis que d'autres le sont physiquement. Dans le repère absolu, un observateur voit un cylindre qui tourne autour de lui et tourne en même temps autour de

(**B**), tandis que s'il était dans le repère de révolution (**B**), il voit un cylindre en simple rotation autour de son axe géométrique. Celui qui est assis dans le repère de rotation (**C**) voit des parois fixes et voit aussi l'axe de révolution (**B**) qui tourne autour de lui. Cependant, dans ce chapitre, nous décrirons les équations dans ces différents référentiels ainsi que les forces agissantes sur le fluide pour chaque point de vue. Le choix du repère et les arguments utilisés sont reportés à la fin de cette analyse.

Dans un référentiel absolu (**A**) l'équation de conservation de quantité de mouvement en régime laminaire pour un fluide newtonien s'écrit (Vanyo, 2001)

$${}^A \frac{d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_{AM}}{\partial t} + \mathbf{V}_{AM} \cdot \nabla \mathbf{V}_{AM} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \varphi + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{AM} \quad (1.1)$$

Avec \mathbf{V}_{AM} , la vitesse d'une particule dans (**A**), $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ le gradient de la pression, $\nabla \varphi$ les forces de volume (comme les forces de gravité et les forces électromagnétiques), $\nu \nabla^2 \mathbf{V}_{AM}$ les forces visqueuses. Dans l'équation 1.1, les forces sont exprimées par unité de masse. Le calcul de l'écoulement dans un repère tournant nécessite des transformations des équations de conservations. Pour ce faire, une relation qui lie les dérivées matérielles dans (**A**) et (**B**) est appliquée. Elle est définie par

$${}^A \frac{d(\cdot)}{dt} = {}^B \frac{d(\cdot)}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\cdot) \quad (1.2)$$

Cette relation nous permet d'établir l'équation de conservation de quantité de mouvement par rapport à (**B**) et (**C**). Dans cette section, nous présentons et discutons seulement les équations obtenues selon les repères tournants. Pour consulter le détail des calculs et des transformations effectuées, nous vous référons à l'annexe II.

Point de vue de révolution

Pour un fluide qui coule relativement au repère de révolution (figure 1.1), l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{BM}}{\partial t} + \mathbf{V}_{BM} \cdot \nabla \mathbf{V}_{BM} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \varphi + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{BM} - 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM} - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) \quad (1.3)$$

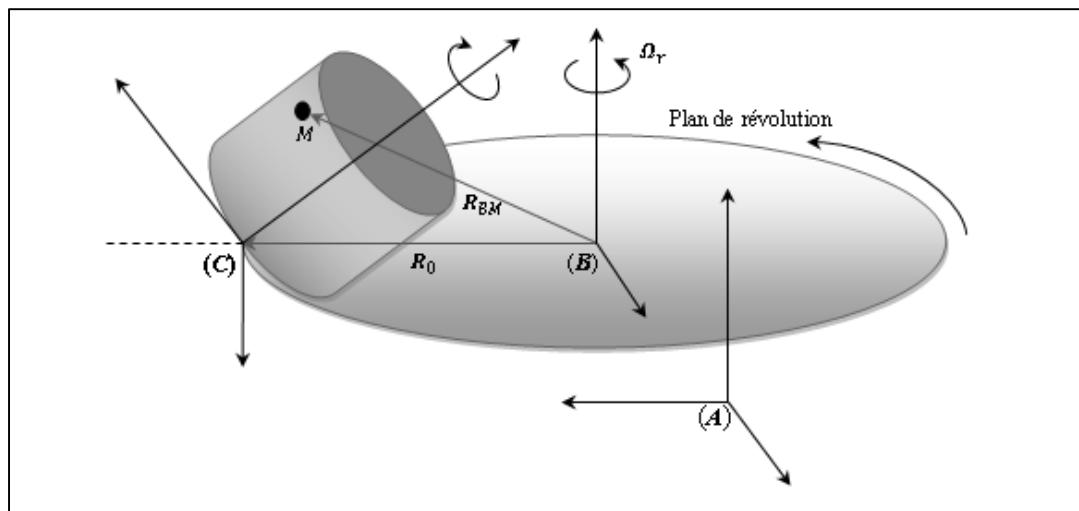


Figure 1.1 Vecteur position d'un point matériel M dans le repère de révolution (\mathbf{B})

\mathbf{R}_{BM} est le vecteur position du point M dans (\mathbf{B}), \mathbf{V}_{BM} sa vitesse d'écoulement et $\boldsymbol{\Omega}_r$ la vitesse de rotation du repère (\mathbf{B}) dans (\mathbf{A}), elle est définie dans ce qui suit du travail comme la vitesse de révolution du MPSL.

Deux nouvelles forces surgissent lors de la révolution du repère (\mathbf{B}), il s'agit de la force de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM}$ et la force centrifuge $\boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM})$. Les deux forces sont dites de révolution parce qu'elles sont calculées par rapport à (\mathbf{B}). La force centrifuge a tendance à évacuer le fluide radialement. La force de Coriolis a, pour sa part, tendance à pousser le fluide perpendiculairement à sa vitesse.

Point de vue de rotation

Dans le repère de rotation (\mathbf{C}), l'équation de conservation de quantité de mouvement obtenue est sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_{CM}}{\partial t} + \mathbf{V}_{CM} \cdot \nabla \mathbf{V}_{CM} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \Delta\varphi + v \nabla^2 \mathbf{V}_{CM} - 2\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} \\ &- \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) - 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) - (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} \\ &- \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

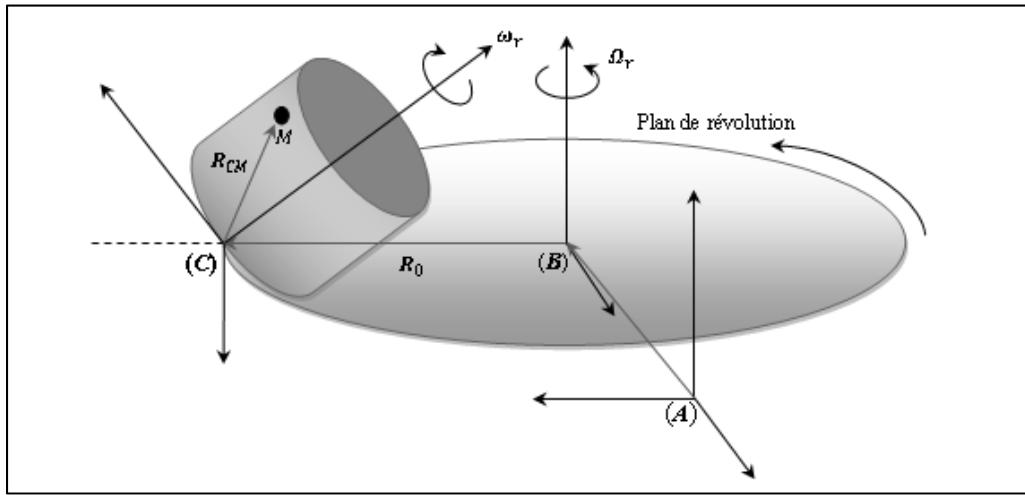


Figure 1.2 Vecteur position d'un point matériel M dans le repère de rotation (\mathbf{C})

\mathbf{R}_{CM} est le vecteur position du point M dans (\mathbf{C}), \mathbf{V}_{CM} sa vitesse d'écoulement dans (\mathbf{C}) et $\boldsymbol{\omega}_r$ la vitesse de rotation du repère (\mathbf{C}) dans (\mathbf{B}). Dans l'équation (1.4), il apparaît clairement que la révolution du repère (\mathbf{C}) (qui est lui-même en rotation) autour de (\mathbf{B}) fait surgir d'autres forces dans le système autres que la force centrifuge $\boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})$ et la force de Coriolis $2\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM}$, qui sont dites de rotation. Nous donnons le nom de « croisement » pour définir les termes qui s'additionnent aux termes de rotation ($-2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) - (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} - \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})$).

Cette définition est appropriée à ce genre de forces parce que ces dernières sont apparues grâce aux effets de croisement qui se fait entre le mouvement de rotation et celui de révolution.

Dans son étude paramétrique de l'écoulement du fluide dans le MPSL, Lacroix (2010) a observé expérimentalement que l'écoulement est permanent dans le repère de révolution et est périodique dans le repère de rotation. De plus, Noir (2000) et Mouhali (2009) ont fait les mêmes remarques lors de leurs travaux réalisés pour les cavités (cylindre, sphère) en précession. Bien conscients que le mélange se fait dans le repère (**C**), le choix du repère (**B**) semble plus approprié pour effectuer les calculs et les analyses numériques, parce que : 1) l'écoulement est permanent dans le repère (**B**), ce qui simplifie davantage le modèle numérique (l'accélération temporelle est nulle) et 2) nous pourrons comparer et discuter nos résultats avec les travaux antérieurs (effet de révolution versus effet de la précession). L'équation de conservation de masse pour un écoulement incompressible et un fluide homogène, quant à elle, est sous la forme :

$$\frac{\partial u_{BM}}{\partial x} + \frac{\partial v_{BM}}{\partial y} + \frac{\partial w_{BM}}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

avec u_{BM} , v_{BM} et w_{BM} sont les trois composantes de la vitesse relative à la révolution \mathbf{V}_{BM} .

1.3 Le modèle physique

Le procédé du mélange dans le MPSL est défini généralement par les paramètres physiques et géométriques adimensionnels suivants (figure 1.3) :

- un ratio du rayon de révolution sur le rayon du cylindre $k = R_0/R$, appelé aussi rapport de forme;
- un ratio de la hauteur du fluide sur le rayon du cylindre $F = H_f/R$; appelé aussi rapport d'aspect;
- un angle d'inclinaison du contenant par rapport au bras de révolution α ;

- un ratio de vitesse de rotation sur la vitesse de révolution $n = \omega_r/\Omega_r$;
- un nombre de Froude $Fr = \Omega_r^2 R_0/g$;
- un nombre de Reynolds de rotation $Re_\omega = \rho \omega_r R^2 / \mu$, ce nombre présente le rapport des forces inertielles sur les forces visqueuses;
- un nombre d'Ekman de rotation $Ek_\omega = \mu / \rho \omega_r R^2$, ce nombre présente le rapport des forces visqueuses sur la force de Coriolis;
- un nombre de Rossby de rotation $Ro_\omega = V / \omega_r R$, ce nombre présente le rapport des forces inertielles sur la force de Coriolis.

avec ρ la masse volumique du fluide, μ sa viscosité dynamique et V une vitesse d'écoulement égale à la vitesse linéaire de rotation $\omega_r R$.

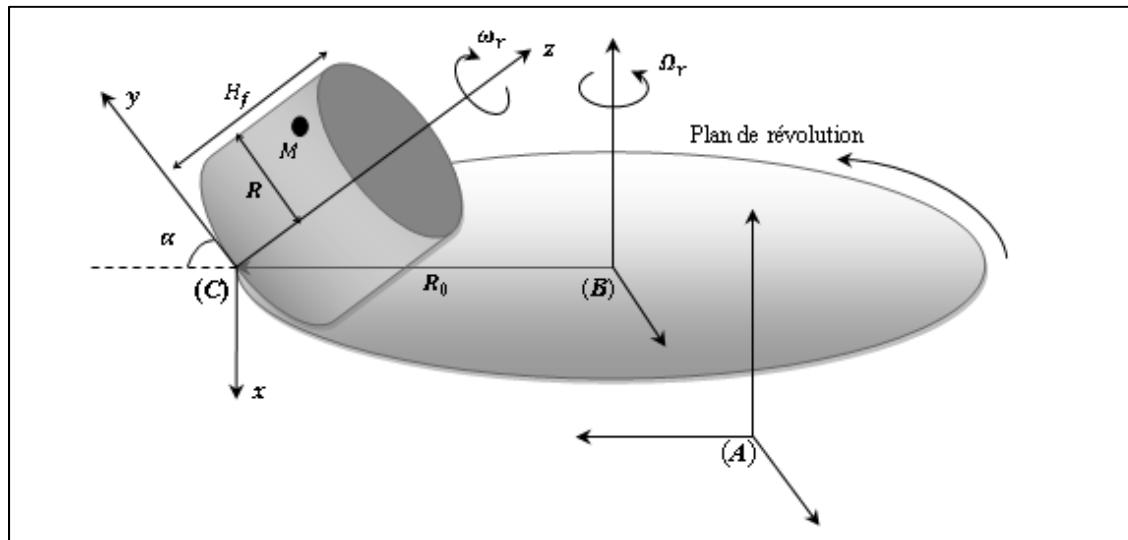


Figure 1.3 Les paramètres de conception et d'opération du MPSL

1.4 Les hypothèses et les conditions aux limites

Avant de détailler les hypothèses et les conditions aux limites, il est important de mentionner que les paramètres qui sont gardés constants durant ce travail ont été fixés à des valeurs optimisées par Lacroix (2010) pour avoir un bon mélange. Lacroix a remarqué que l'écoulement est laminaire pour des valeurs de nombre de Reynolds de rotation (Re_ω)

inférieurs à 300. Comme l'étude concerne l'écoulement qui part d'une rotation solide, la vitesse de rotation du cylindre est gardée constante pour tous les calculs. Le nombre de Reynolds de rotation est donc constant et égal à 125. (valeur optimisée par Lacroix (2010) pour obtenir un bon mélange). Par ailleurs, la vitesse de révolution est variable, ce qui induit un ratio de vitesses n variable. Dans cette plage de données, le régime est laminaire et l'écoulement admet une solution stationnaire. Le signe de n est négatif et indique la contra-rotation. Le choix de la contra-rotation est justifié par les résultats de Mio (2004) et Lacroix (2010). Ils ont trouvé que le broyage et le mélange sont plus performants à contra-rotation. La discussion des résultats dans le chapitre 2 et 3 sera en fonction de la valeur absolue de n .

Dans la plage paramétrique étudiée, les forces inertielles sont plus importantes que les forces gravitationnelles, par conséquent, le nombre de Froude est largement supérieur à 1 ($Fr \gg 1$), le poids du fluide est donc négligé. En outre, le temps d'accélération du système est largement supérieur au temps du mélange, par conséquent, la phase de l'écoulement considérée est celle où le régime permanent est bien établi. Le tableau 1.1 regroupe les paramètres physiques et géométriques du modèle du MPSL étudié. Le nombre d'Ekman et de Rossby de rotation n'ont pas été considérés vu que le premier est très faible (0.008) et l'autre est de l'ordre de 1.

Seule la partie du cylindre occupée par le liquide est simulée (Figure 1.4). Les conditions aux limites sont choisies telles que (figure 1.5) :

- la surface libre reste indéformable (paroi plane) et parallèle au fond avec des conditions de glissement. Ce choix est basé sur les résultats expérimentaux de Lacroix (2010). Il a remarqué que, pour certaines conditions d'opération, la surface libre est sensiblement parallèle au fond. Cela nous simplifie le modèle numérique et nous n'aurons pas besoin de calculer un écoulement bi-phasic;
- le cylindre est incliné par rapport au bras de révolution avec un angle d'inclinaison α ;
- les parois et le fond du cylindre sont mis en rotation autour de l'axe géométrique du cylindre;

- tout le système (surface libre, parois et fond) est mis ensuite en révolution autour d'un autre axe situé à R_0 du premier.

Tableau 1.1 Paramètres de conceptions et d'opération du MPSL

<i>Paramètres de conception et d'opération</i>	k	F	α	Re_ω	n
<i>Valeurs</i>	4	1.5	45°	125	Variable

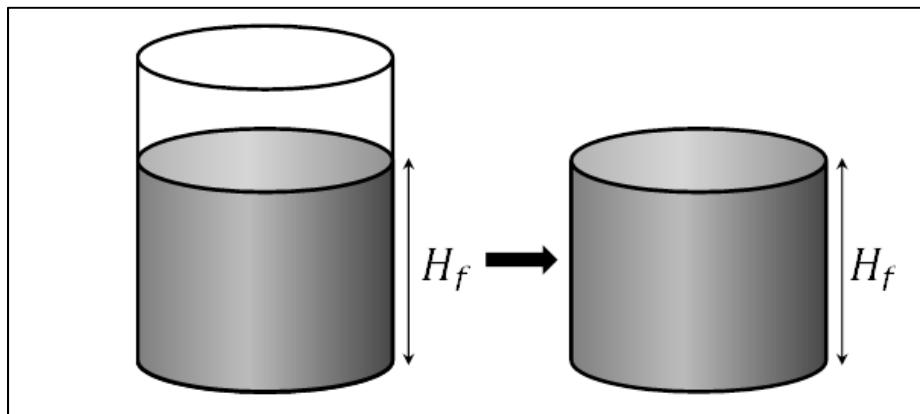


Figure 1.4 La partie du fluide simulée dans le MPSL

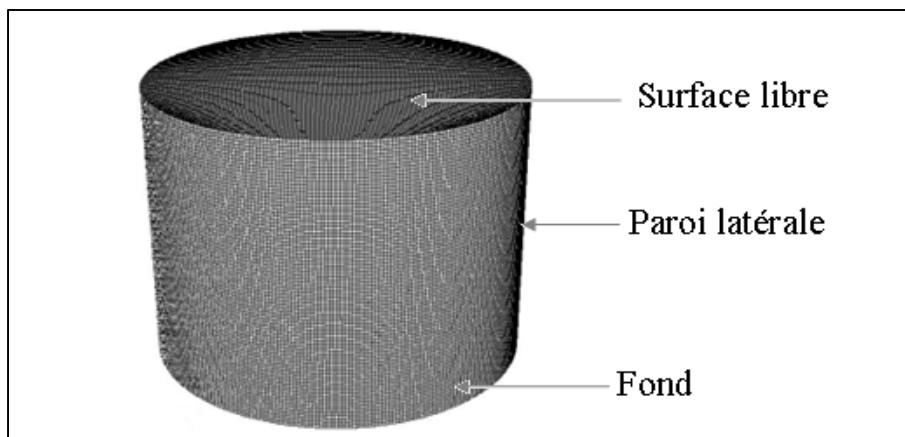


Figure 1.5 Les conditions aux limites du MPSL

1.5 La méthode numérique

Les calculs numériques ont été faits à l'aide du code commercial *Fluent* basé sur la méthode des volumes finis. Plusieurs schémas de discréétisation ont été testés, il s'est avéré que les schémas numériques les plus appropriés sont :

- le schéma numérique du troisième ordre « *third order upwind* » pour la résolution des équations de quantité de mouvement;
- l'algorithme de PRESTO pour le calcul du gradient de pression dans le fluide.

Ces schémas sont stables et convergent plus rapidement dans ce genre de problème (Guide de *Fluent*). Les équations de vitesses et de la pression sont calculées simultanément (équations couplées).

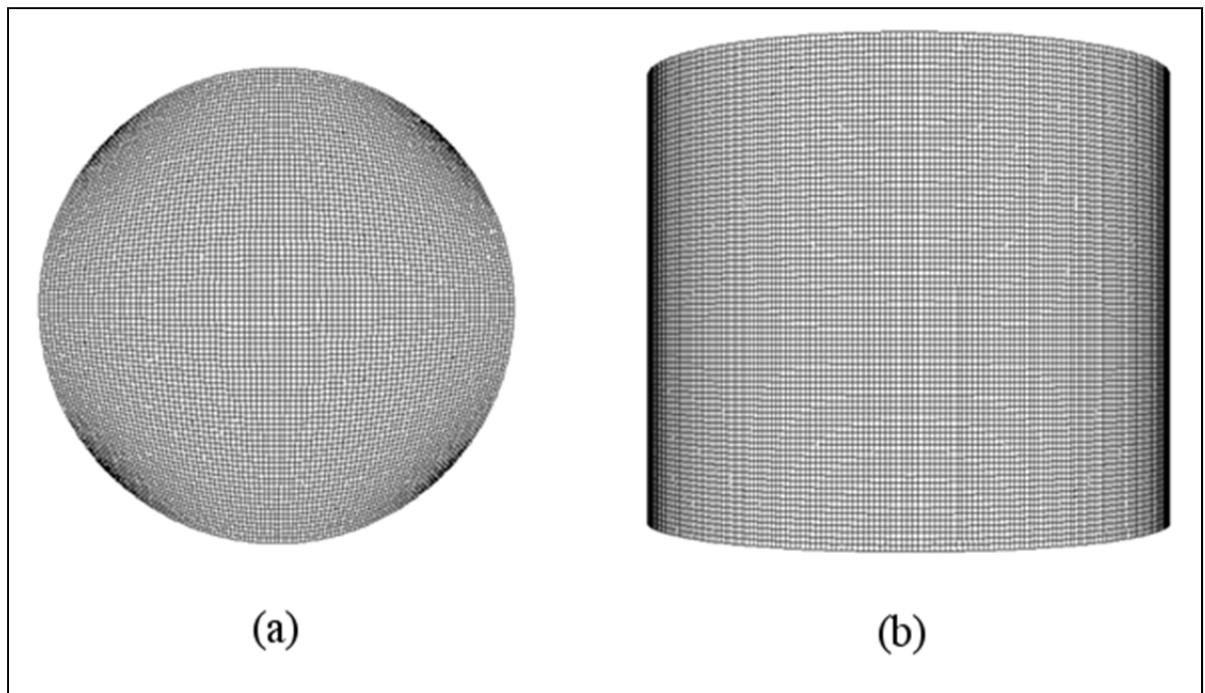


Figure 1.6 Maillage quasi-structuré utilisé pour le mélangeur. (a) : surface libre et fond,
(b) : paroi latérale

Le maillage est effectué avec Gambit. Plusieurs types de maillage ont été testés, le maillage hexaédrique quasi-structuré (figure 1.6) a été choisi pour minimiser l'erreur commise lors du calcul des gradients et du Laplacien (Chergui et Dufresne, 2011) (gradient de vitesse, gradient de pression et les contraintes de cisaillement). Les simulations ont été réalisées en parallèle sur un cluster en utilisant 8 cpu, chacun avec un processeur Xeon E5405 double cœur de 2.0GHz et une mémoire vive de 16GB. La solution numérique est considérée convergée si le résidu du calcul de la pression et des trois composantes de la vitesse d'écoulement est inférieur ou égal à 10^{-6} . Le temps de calcul avec ce cluster est entre 2 et 3 heures pour le calcul de l'écoulement.

La validation des calculs numériques a été assurée avec le calcul du GCI (Grid Convergence Index). La procédure pour le calcul du GCI est largement détaillée dans l'article de Celik et al. (2008) avec des exemples d'application. Cette méthode permet entre autres de tester la fiabilité du maillage utilisé pour les simulations et estimer l'erreur numérique. Les résultats seront portés sur deux plans mérédionaux (xz) et (yz) et des plans horizontaux (xy) à différentes hauteurs (figure 1.7).

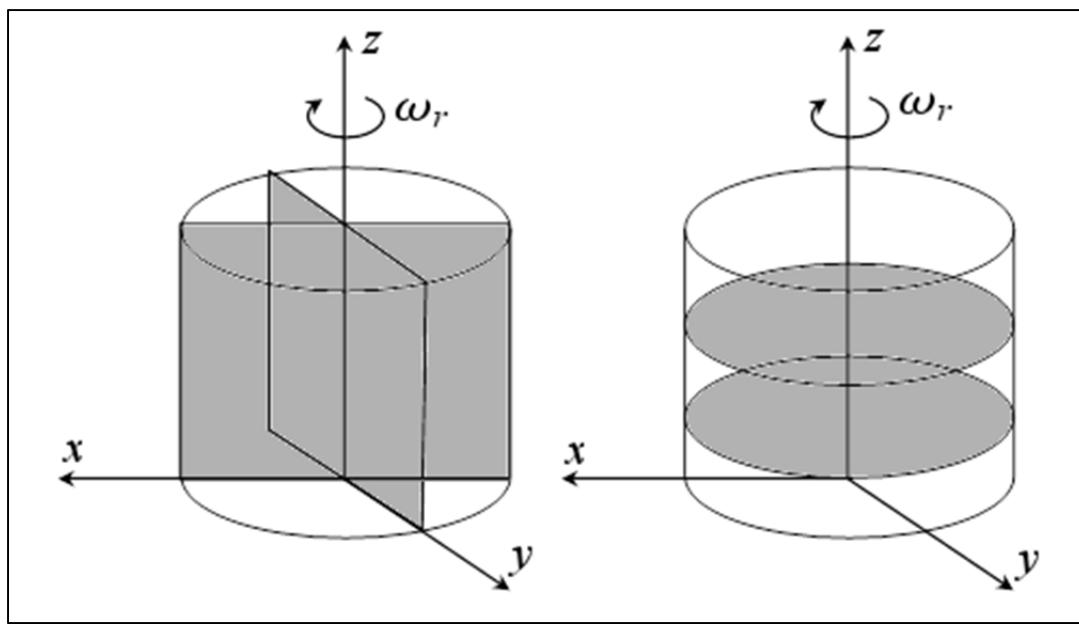


Figure 1.7 Les plans mérédionaux (xz), (yz) et les plans horizontaux (xy)

1.6 Validation du calcul numérique : Calcul du GCI

Tel qu'il a été mentionné dans le paragraphe 1.5, afin d'assurer l'indépendance des calculs numériques par rapport à la résolution du maillage, une étude de maillage a été réalisée dans laquelle le GCI est évalué (Celik et al., 2008) sur les trois composantes de la vitesse de l'écoulement u_{BM} , v_{BM} et w_{BM} . Trois maillages ont été testés, fin, moyen et grossier avec respectivement 1.3×10^6 , 0.6×10^6 et 0.3×10^6 cellules avec un nombre de Reynolds de rotation (Re_ω) égal à 125 tel qu'il est indiqué sur tableau 1.2.

Tableau 1.2 Nombre de cellules et le temps de calcul pour chaque maillage

Maillage	Maillage fin	Maillage moyen	Maillage grossier
Nombre de cellules	1342208	628227	135200
Temps de calcul (Voir le texte pour la plateforme de calcul)	1 h 30 min	2 h 40 min	3 h 40 min

Deux cas ont été considérés dans le calcul du GCI, $n = -13.33$, dont l'écoulement devient progressivement tridimensionnel et $n = -4$ où l'écoulement est plus complexe. Bien que différentes coupes dans le volume du MPSL aient été examinées, seuls les résultats de la vitesse u sur le plan (xz) à $z/R = 0.4$ et sur le plan (yz) à $y/R = 0.4$ (Figure 1.7) pour $n = -4$ sont présentés sur les figures 1.8 et 1.9, les résultats de validation des autres coupes sont similaires. Les vitesses sont normalisées par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega \cdot R$) et les distances sont normalisées par rapport au rayon du cylindre R . Les figures 1.8 et 1.9 montrent que les courbes des vitesses normalisées U sont pratiquement superposées pour les trois maillages testés. Les GCI calculés du maillage moyen par rapport au maillage fin pour tous les points sont très faibles et sont de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-4} pour cent. Le maillage moyen est utilisé dans les calculs pour minimiser l'erreur induite par le calcul des dérivées (Chergui et Dufresne, 2011).

Le modèle numérique utilisé a été validé expérimentalement par Lacroix (2010). Pour la validation qualitative, Lacroix (2010) a utilisé une technique de visualisation par images numériques du mouvement des particules passives agitées à la surface libre. Les trajectoires obtenues expérimentalement par ces images ont été comparées avec celles des résultats numériques pour des conditions d'opération et de conception identiques. Lacroix a remarqué alors que les deux résultats sont en bonne concordance, le modèle numérique prédit parfaitement la topologie de l'écoulement sur la surface libre. La validation quantitative consiste à comparer la puissance d'agitation déterminée expérimentalement et numériquement. Les valeurs expérimentales et numériques suivent pratiquement le même profil en fonction du nombre de Reynolds.

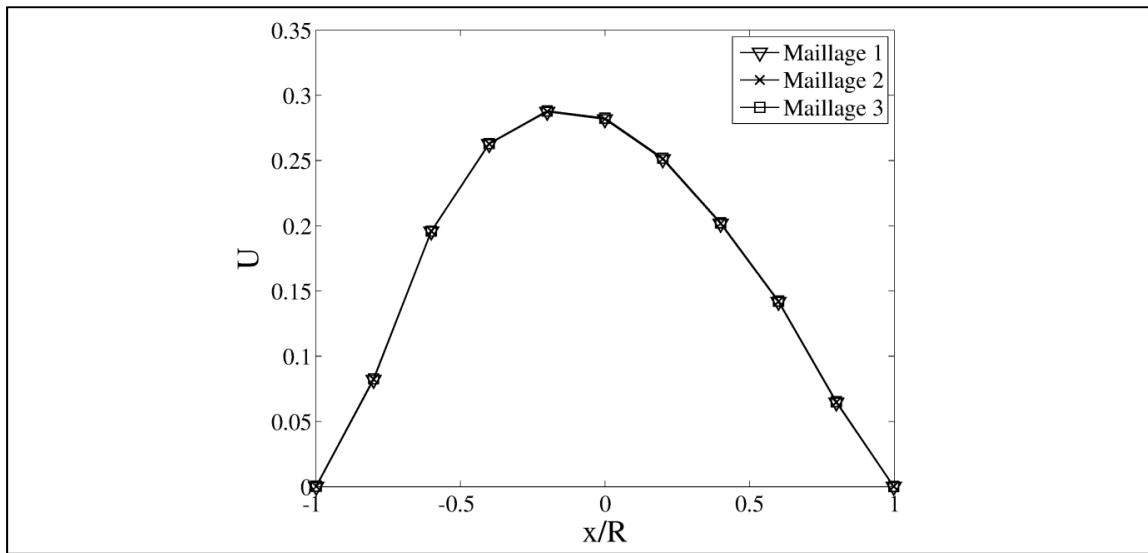


Figure 1.8 La composante selon « x » de la vitesse absolue normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega_r \cdot R$) pour les trois maillages testés. Plan (xz), coupe $z/R = 0.4$

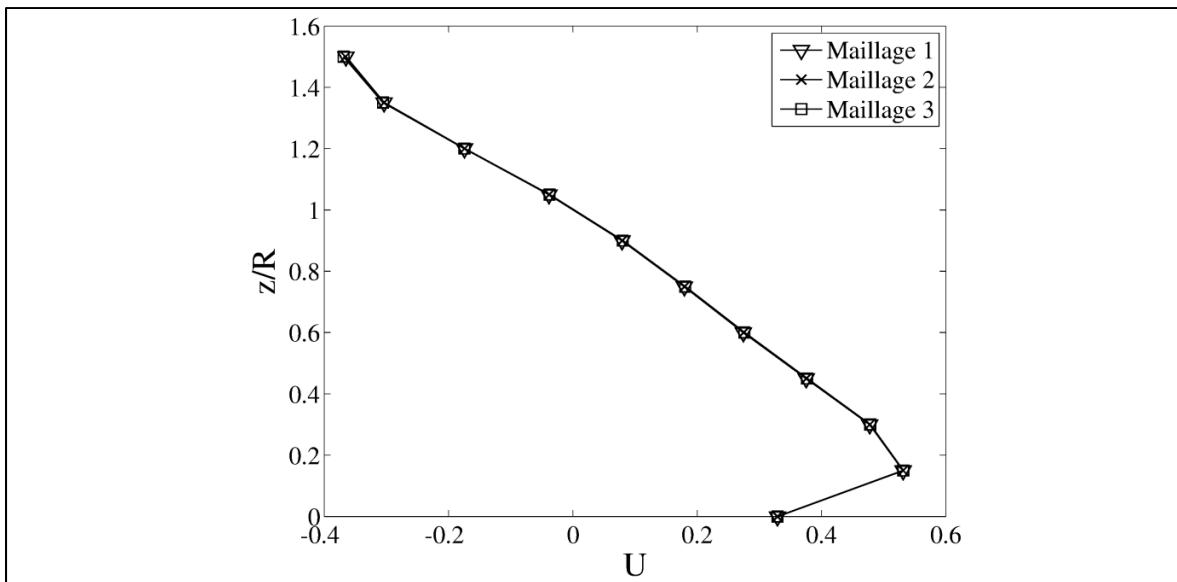


Figure 1.9 La composante « x » de la vitesse absolue normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega_r \cdot R$) pour les trois maillages testés. Plan (yz), coupe $y/R = 0.4$

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les grands traits de la méthodologie adoptée pour les calculs numériques. Les deux points de vue, rotation et révolution, selon lesquels nous pouvons faire notre étude ont été discutés. En nous basant sur les résultats des travaux antérieurs (Lacroix 2010, Mouhali, 2009 et Noir, 2000) nous avons jugé que le point de vue révolution (équation 1.3) était le choix adéquat, nous prenons comme argument que dans le repère (B) le régime est permanent.

Nous avons également présenté le modèle numérique avec les schémas de discrétisation et le type de maillage, le modèle physique avec les paramètres physico-chimiques et géométriques, les paramètres d'opération ainsi que les conditions aux limites. Des hypothèses ont été admises pour la résolution des équations mathématiques. Pour conclure, une démarche détaillée a été présentée dans ce chapitre pour étudier qualitativement et quantitativement la dynamique de l'écoulement et du mélange d'un fluide newtonien homogène en régime laminaire dans un cylindre en double rotation.

CHAPITRE 2

ANALYSE QUALITATIVE DE LA DYNAMIQUE D'ÉCOULEMENT DANS LE MPSL

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est de faire une étude qualitative de la dynamique de l'écoulement dans le MPSL. Plus spécifiquement, nous déterminerons comment un écoulement qui part d'une rotation uniforme (écoulement bidimensionnel) se complexifie et devient tridimensionnel. Différentes méthodes existent pour visualiser les écoulements, ces méthodes sont aussi appliquées pour identifier et/ou quantifier les structures tourbillonnaires au sein de ces écoulements. Nous avons choisi trois méthodes de visualisation pour effectuer notre étude, 1) une méthode lagrangienne : il s'agit des trajectoires des particules et 2) deux méthodes Eulériennes : il s'agit des iso-contours de vitesses et des lignes de courant. Le chapitre comprend alors trois sections :

- la première section concerne la visualisation tridimensionnelle de l'écoulement dans le MPSL avec les trajectoires des particules. Dans cette section, nous appliquerons quelques critères utilisés dans la littérature pour identifier les structures tourbillonnaires dans le MPSL;
- la deuxième section concerne la visualisation bidimensionnelle de l'écoulement dans le MPSL avec les iso-contours de vitesses;
- la troisième section concerne la visualisation bidimensionnelle de l'écoulement dans le MPSL avec les lignes de courant.

2.2 Visualisation de l'écoulement : Les trajectoires des particules

La trajectoire des particules est utilisée généralement pour voir la structure tridimensionnelle de l'écoulement. La trajectoire est obtenue en suivant le mouvement d'une particule dans le temps selon l'équation (Guyon et al., 2001):

$$\boldsymbol{x}(t) = \int \boldsymbol{V} dt + \boldsymbol{x}_0(t_0) \quad (2.1)$$

où \boldsymbol{x} est la position de la particule en fonction du temps, \boldsymbol{x}_0 est sa position initiale à t_0 et \boldsymbol{V} sa vitesse d'écoulement.

Pour avoir une idée globale sur la structure tridimensionnelle de l'écoulement dans le MPSL, un tracé des trajectoires des particules est effectué pour des particules qui se trouvaient initialement sur les plans méridionaux (xz) et (yz) et les plans horizontaux (xy) à plusieurs hauteurs (figure 1.7). Les trajectoires ont été calculées par rapport à la vitesse du fluide relative à la révolution V_{BM} . Le code de couleurs utilisé pour présenter les résultats des trajectoires des particules est fonction de la position initiale des particules à une hauteur donnée. Les particules qui se trouvent au voisinage du fond à un instant t_0 prennent la couleur rouge et les particules qui sont sur la surface libre prennent la couleur bleue, la dégradation de couleurs du rouge en bleu se fait en fonction de la hauteur du cylindre.

La figure 2.1 présente les trajectoires des particules choisies aléatoirement et qui se trouvaient sur le plan méridional (xz) pour différents ratios n . À un ratio de vitesses $n = -50$, qui correspond à une vitesse de révolution très faible et qui traduit le départ de la rotation uniforme, le fluide se déplace selon des trajectoires circulaires parallèles au fond. À ce niveau de révolution, l'écoulement est quasiment bidimensionnel et est très similaire à la rotation solide. L'axe de ces trajectoires est légèrement incliné vers l'axe de révolution par rapport à l'axe géométrique du cylindre. Lorsque la vitesse de révolution augmente (n diminue) l'écoulement dans le MPSL devient plus complexe, plusieurs structures tourbillonnaires ont été observées pour différents ratios de vitesses n . En effet, les particules du fluide quittent le plan parallèle au fond et se déplacent essentiellement selon des structures tourbillonnaires co-centriques qui donnent naissance à un écoulement tridimensionnel plus complexe. Toutefois, nous n'observons pas des boucles de recirculation séparées (c.-à-d. des structures séparées). Ces structures tourbillonnaires sont sous forme de spirales. Leurs tailles et leurs formes dépendent de la vitesse de révolution (c.-à-d. de n). Ainsi pour $n = -50$

jusqu'à $n = -4$, on observe des spirales cylindriques tel qu'il est montré sur la figure 2.2. et pour des ratios plus faibles ($n = -2$ et -1), les spirales tendent vers des formes coniques. D'après cette même figure (figure 2.2), nous remarquons que le diamètre des spirales augmente avec la diminution de ratio de vitesses n . La figure 2.3 montre que pour des faibles vitesses de révolution, les trajectoires des particules s'aplatissent généralement au voisinage de la paroi.

Des structures similaires (c.-à-d. un écoulement spiralé) ont été observées numériquement par Mouhali (2009) pour un cylindre en précession orthogonale (l'axe de précession ou de révolution est perpendiculaire à l'axe de rotation) dans le repère de révolution (précession). Il a travaillé sur des ratios de vitesses n compris entre -6.67 et -16.67 (taux de précession $\varepsilon = 1/n = -0.06$ à -0.15) et un nombre de Reynolds de rotation égal à 1000. La forme et la taille de ces structures étaient aussi fonctions de la vitesse de révolution (taux de précession). Des tourbillons similaires ont été observés aussi dans des cuves agitées avec une turbine excentrée ou introduite par le fond de la cuve (repère en simple rotation) (Galleti et al., 2008 et 2009, Toré et al., 2007 a et b). D'autres remarquent la présence de plusieurs petites spirales avec certains types d'agitateurs (Woziwodzki, 2014).

Bien que l'axe du cylindre et l'axe de révolution tournent en contra-rotation, toutes les particules tournent selon le même sens de rotation du cylindre (sens trigonométrique). L'axe de pompage, quant à lui, suit une diagonale et se déplace quand n diminue (vitesse de révolution augmente).

Les résultats pour $n = -6$ et -2 sont particulièrement intéressants car l'écoulement pour ces deux ratios est un peu particulier par rapport à l'écoulement des autres ratios ($n = -50, -13.33, -10, -8, -4$ et -1). La figure 2.4 présente la position de quatre particules choisies dans le plan (xz) et (yz) à différents diamètres et à différentes hauteurs. Les particules sont choisies au voisinage de l'axe de rotation géométrique ($x/R = +0.2, -0.2$, $y/R = +0.2, -0.2$) et au voisinage des parois ($x/R = +0.4, -0.4$, $y/R = +0.4, -0.4$). Nous avons tracé les trajectoires de ces particules choisies pour les différents ratios n étudiés afin

d'illustrer cette particularité. Seuls les résultats pour $n = -6$ et $n = -2$ sont présentés. Les figures 2.5 à 2.8 présentent les trajectoires des quatre particules pour $n = -6$ et les figures 2.9 à 2.12 pour $n = -2$. Pour $n = -6$ et au voisinage de la mi-hauteur du cylindre (les particules vertes et noires), nous remarquons que les trajectoires des particules qui se trouvaient initialement sur le plan (xz), au voisinage de la paroi ($x/R = +0.4, -0.4$), ont une légère symétrie (figure 2.6). Par contre, le comportement des particules qui se trouvaient initialement sur le plan (yz) proche paroi ($y/R = +0.4, -0.4$) est différent et plus complexe (figure 2.8), la taille des spirales est différente et il n'y a pas de symétrie dans l'écoulement. Les mêmes remarques sont appliquées pour $n = -2$, sauf que les résultats sont inversés, c.-à-d. que le comportement complexe du fluide est dans le plan (xz) (figure 2.10) et la légère symétrie des trajectoires des particules est dans le plan (yz) (figure 2.12). Nous dresserons, par la suite, un portrait plus détaillé lorsque nous visualiserons l'écoulement avec les iso-contours de vitesses et la fonction de courant. Pour les deux ratios (-6 et -2), les particules qui sont au voisinage de l'axe de rotation géométrique sur les deux plans (xz) et (yz) ont un comportement différent à celui des particules qui se trouvaient initialement au voisinage de la paroi tel qu'il est montré sur les figures 2.5, 2.7, 2.9 et 2.11.

D'après l'analyse des figures 2.1, 2.2 et 2.3, on peut diviser l'écoulement en deux parties :

- un écoulement de rotation primaire dû à la rotation du cylindre. Les particules qui se trouvent au voisinage de la paroi se déplacent selon des spirales de grands diamètres (figures 2.1 et 2.3), leur déplacement est pratiquement le même pour $n = -50$ à $n = -4$ étudié. Ces particules ont le même mouvement que la paroi et définissent la rotation primaire;
- un écoulement de rotation secondaire dû à la combinaison rotation/révolution. Cependant, ce sont les particules qui se trouvent initialement au voisinage de l'axe de rotation qui définissent et décrivent mieux la rotation secondaire (figure 2.2).

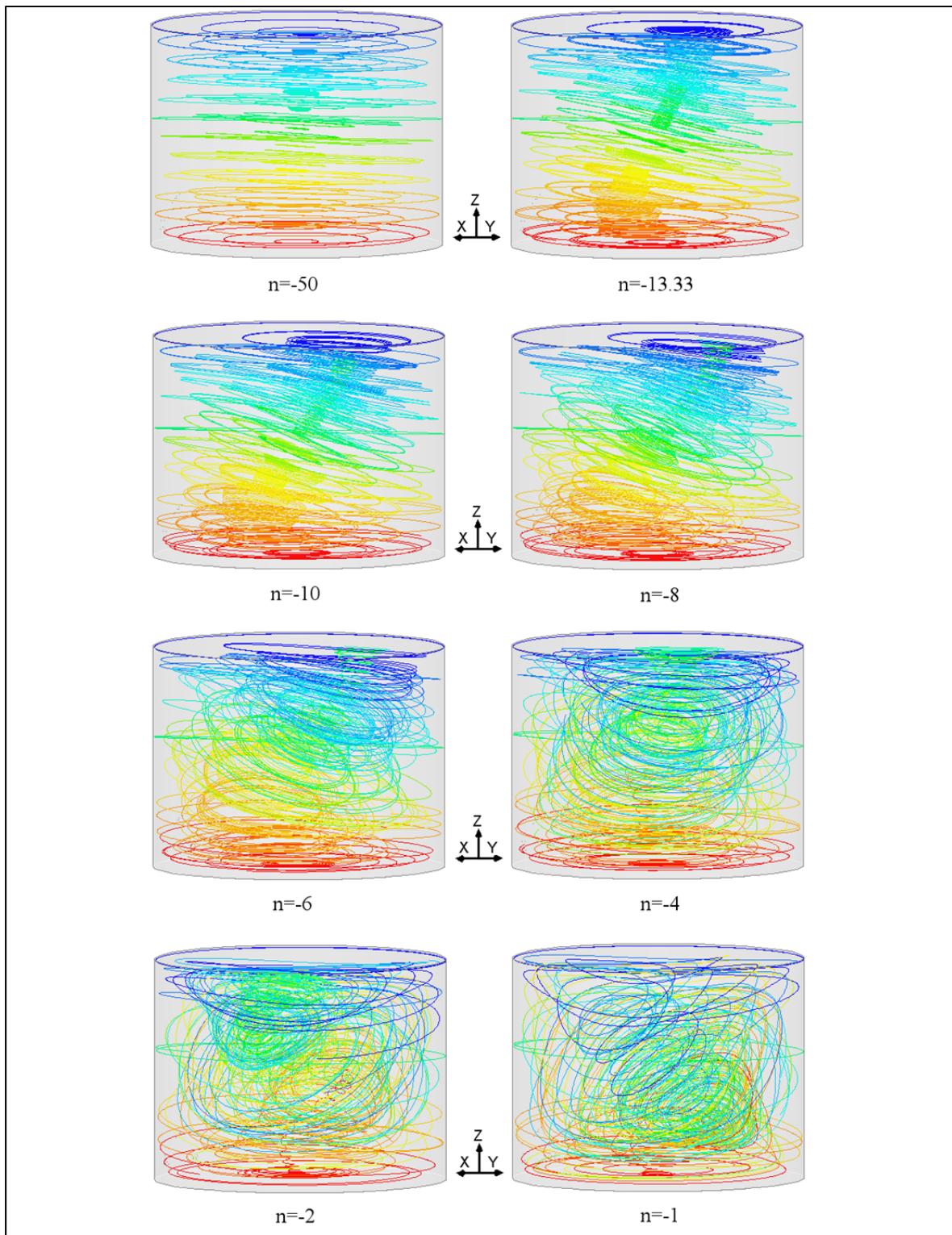


Figure 2.1 Trajectoires des particules qui se trouvaient initialement sur le plan (xz). Voir le texte pour le code de couleurs

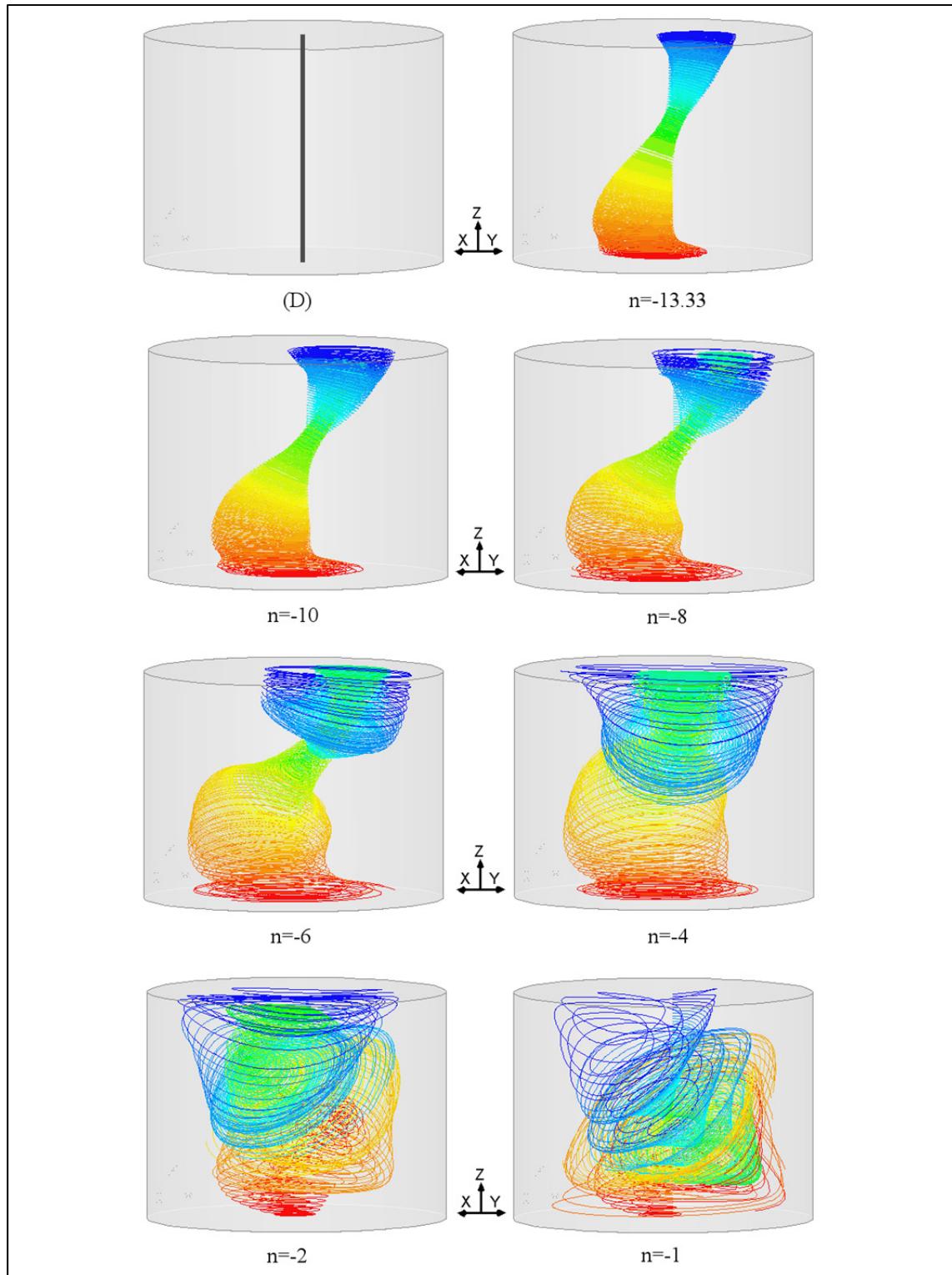


Figure 2.2 Trajectoires des particules qui se trouvaient initialement au voisinage de l'axe de rotation sur une droite. (D) : droite d'équation choisie au voisinage de l'axe de rotation

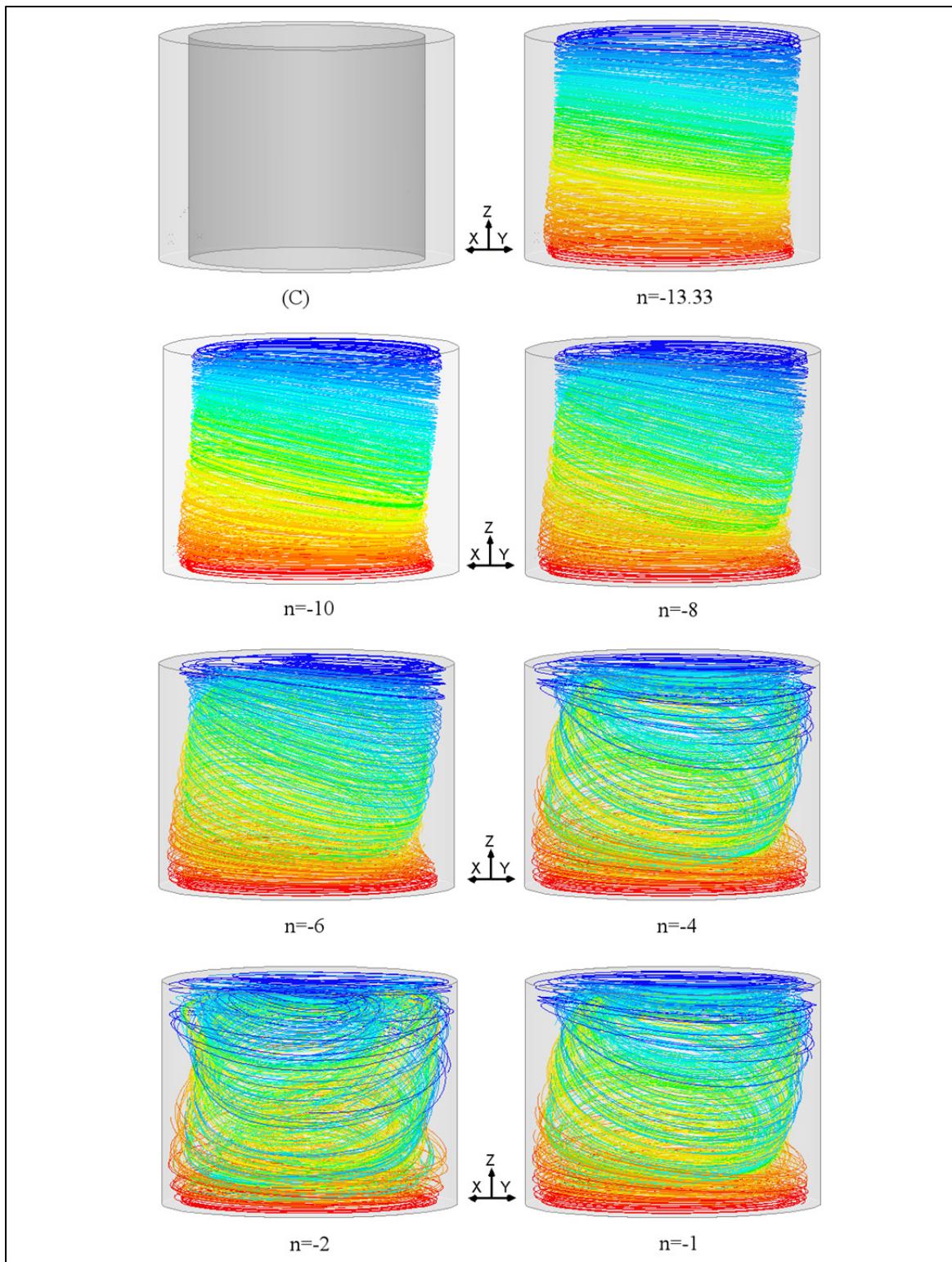


Figure 2.3 Trajectoires des particules qui se trouvaient initialement au voisinage de la paroi sur une surface cylindrique. (C) : surface cylindrique : $x^2 + y^2 = 0.0016$

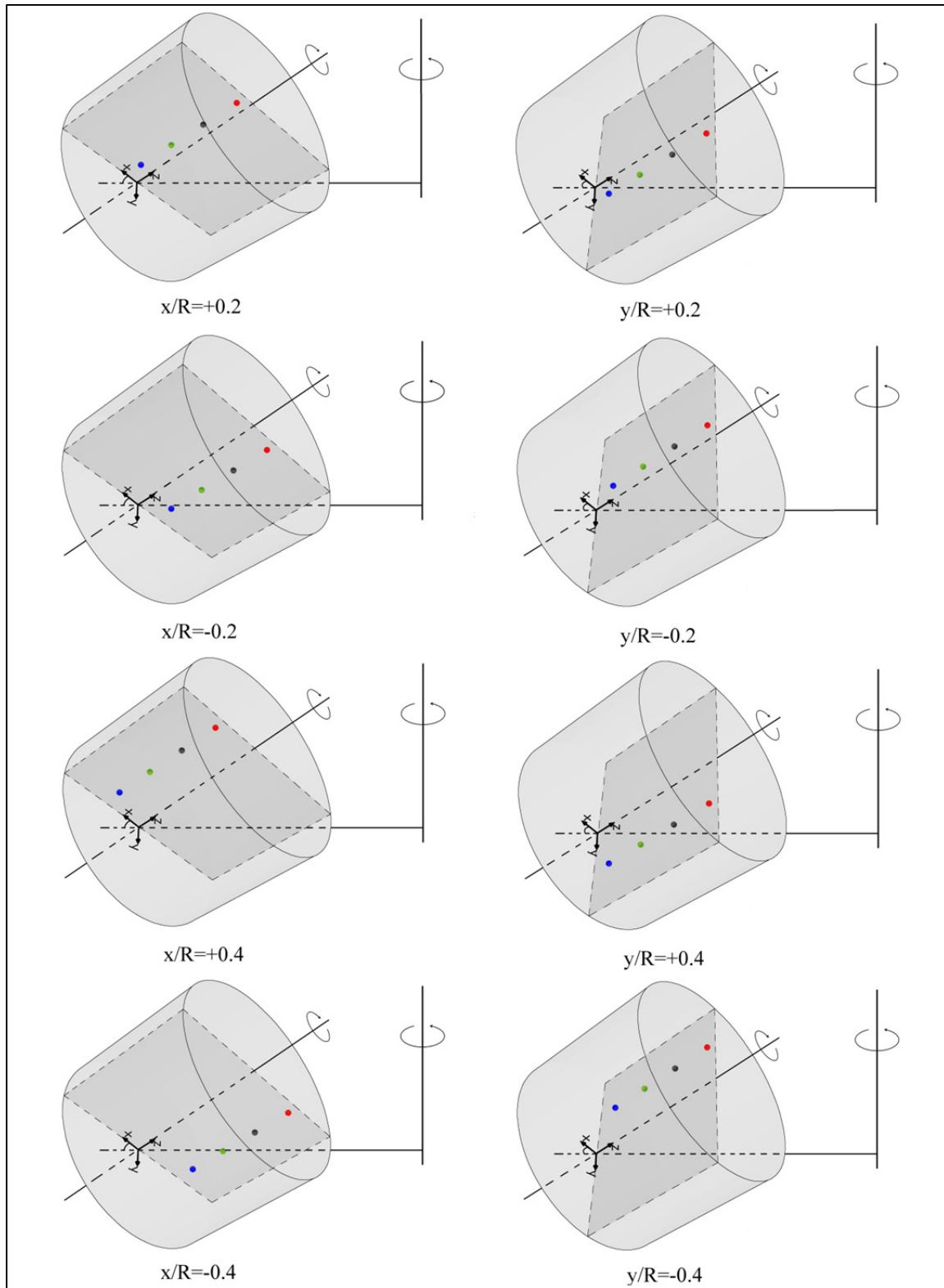


Figure 2.4 Position initiale de quatre particules dans les deux plans (xz) et (yz)

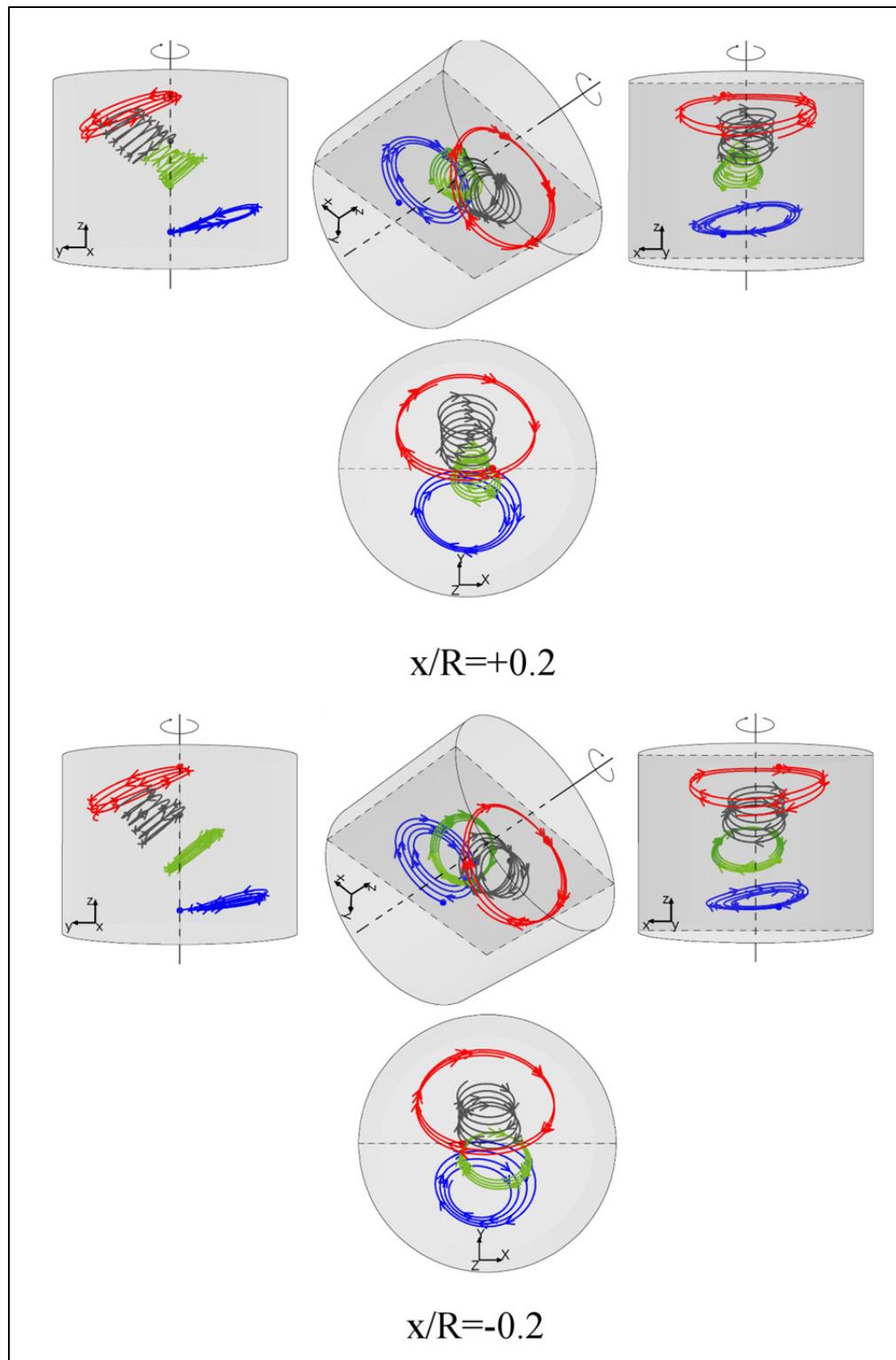


Figure 2.5 Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -6$ à $x/R = -0.2$ et $x/R = +0.2$

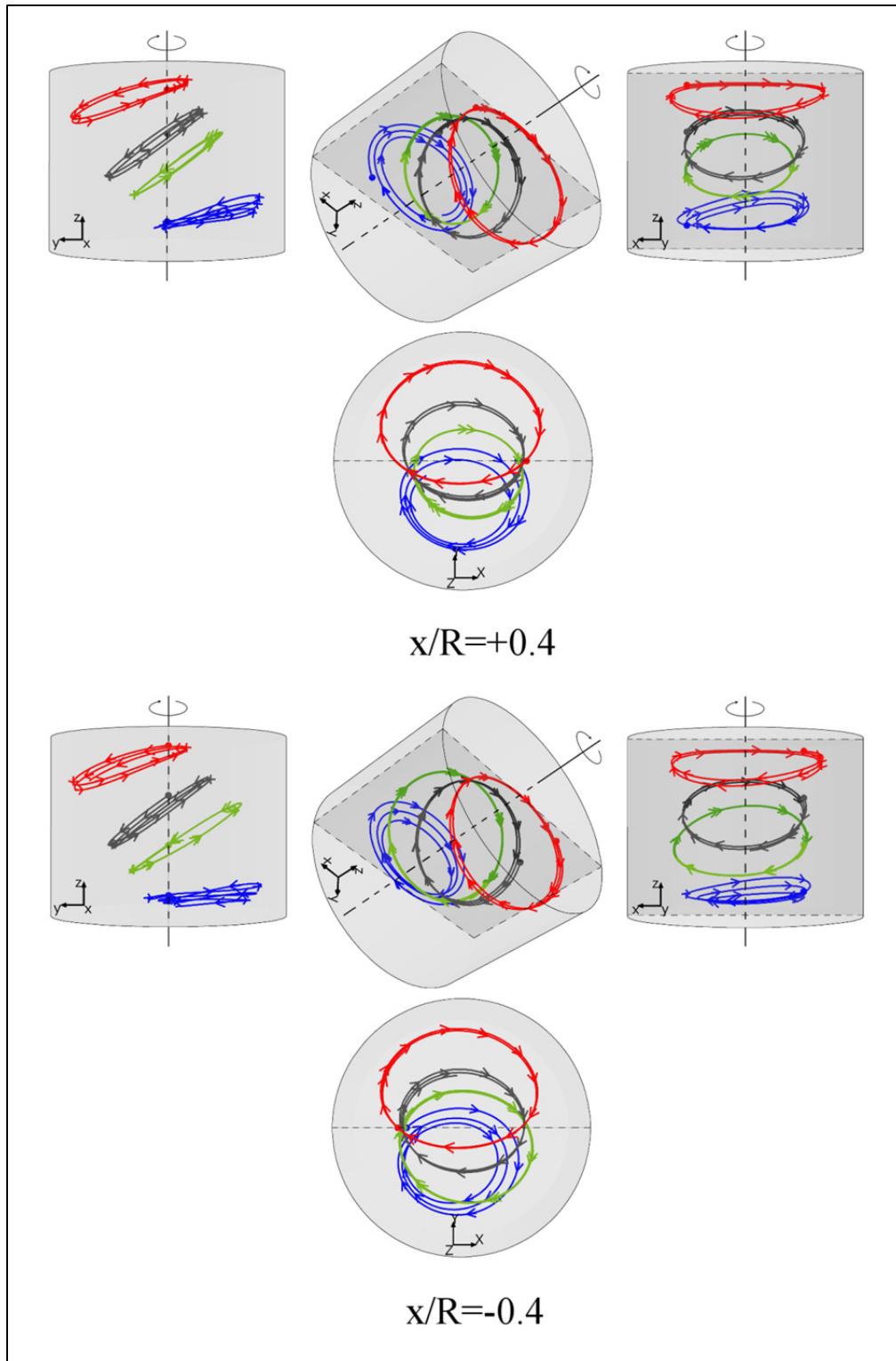


Figure 2.6 Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -6$ à $x/R = +0.4$ et $x/R = -0.4$

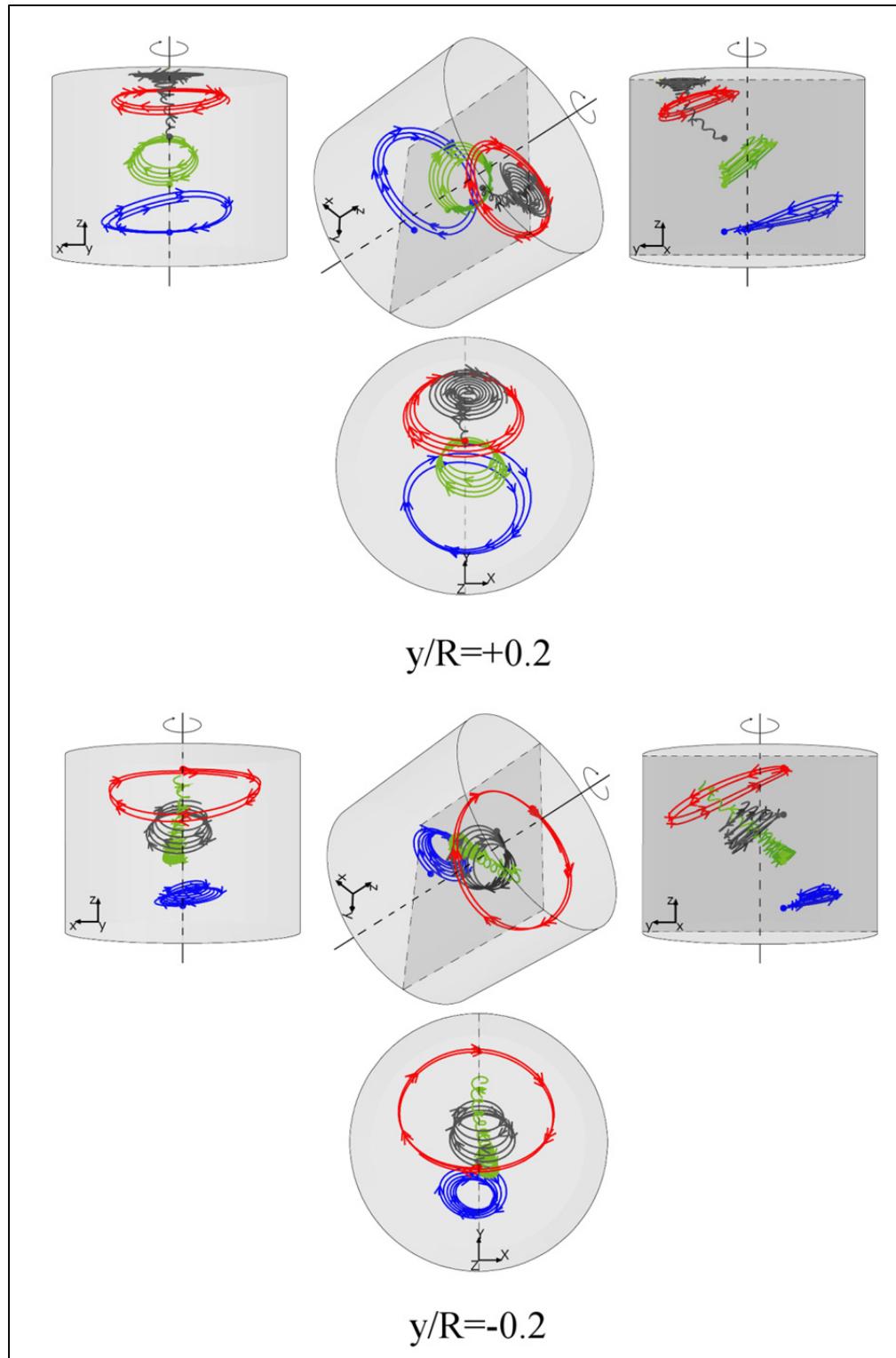


Figure 2.7 Trajectoires des particules dans le plan (yz)
pour $n = -6$ à $y/R = +0.2$ et $y/R = -0.2$

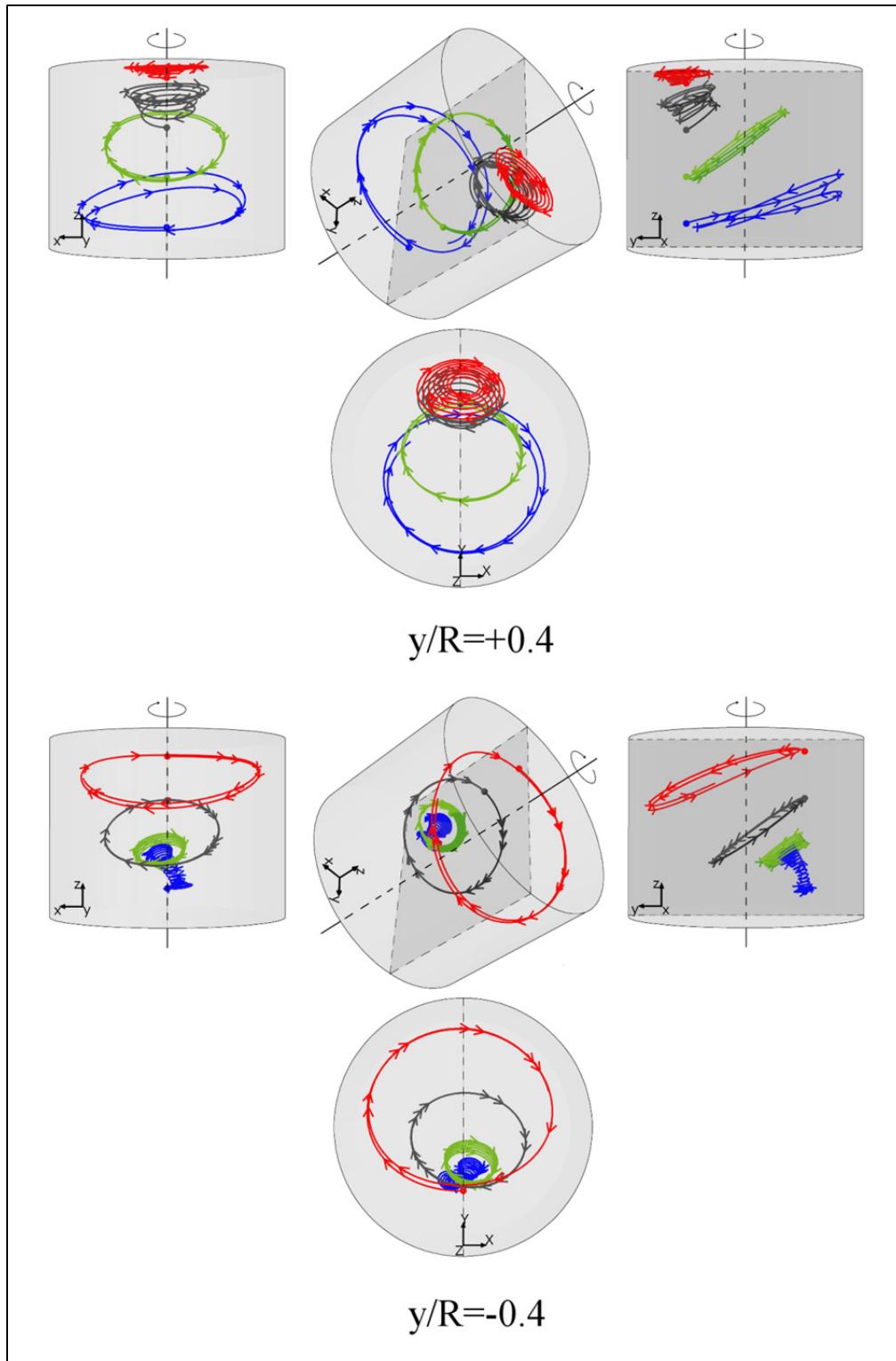


Figure 2.8 Trajectoires des quatre particules dans le plan (yz) pour $n = -6$ à $y/R = +0.4$ et $y/R = -0.4$

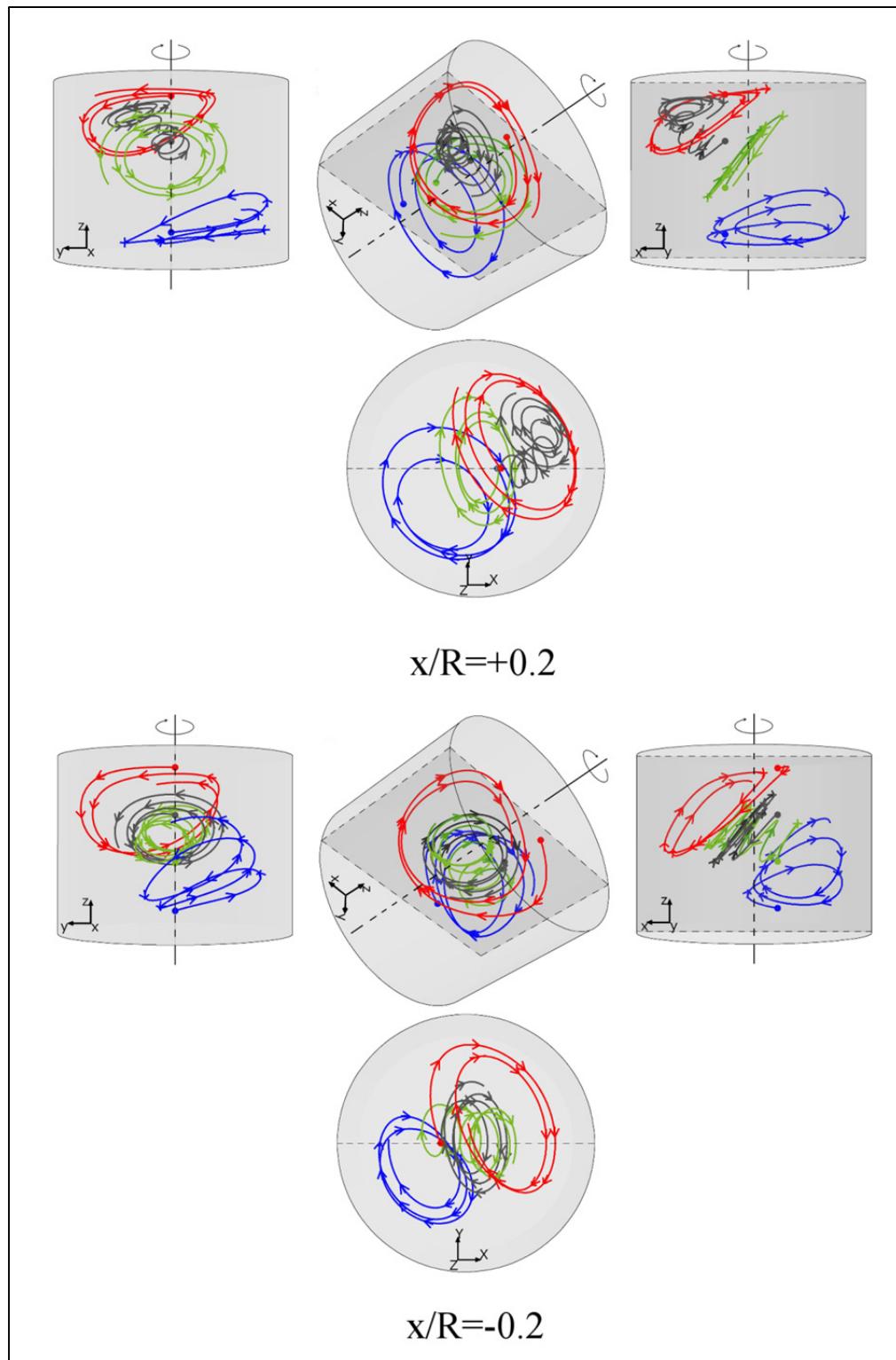


Figure 2.9 Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -2$ à $x/R = +0.2$ et $x/R = -0.2$

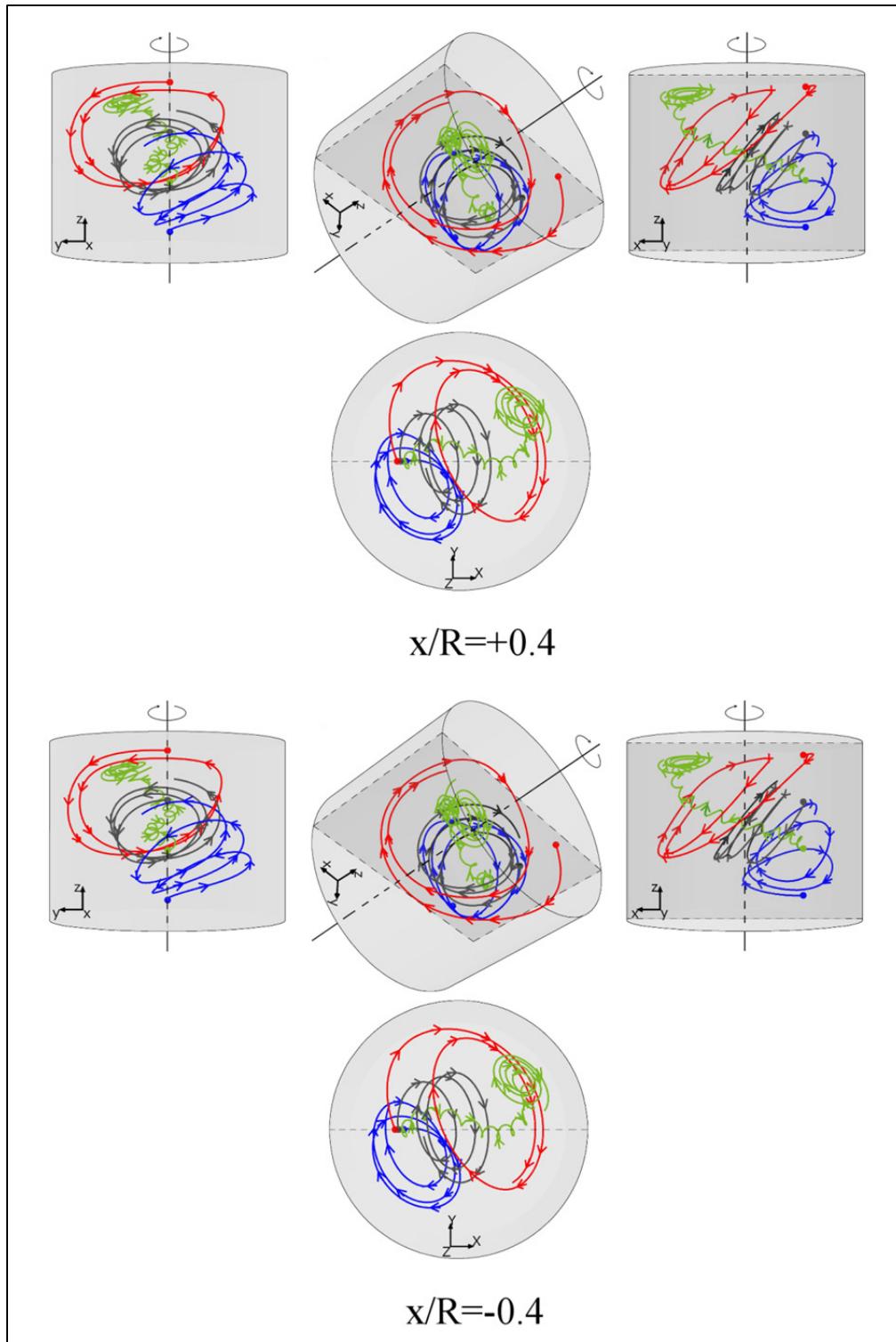


Figure 2.10 Trajectoires des quatre particules dans le plan (xz) pour $n = -2$ à $x/R = +0.4$ et $x/R = -0.4$

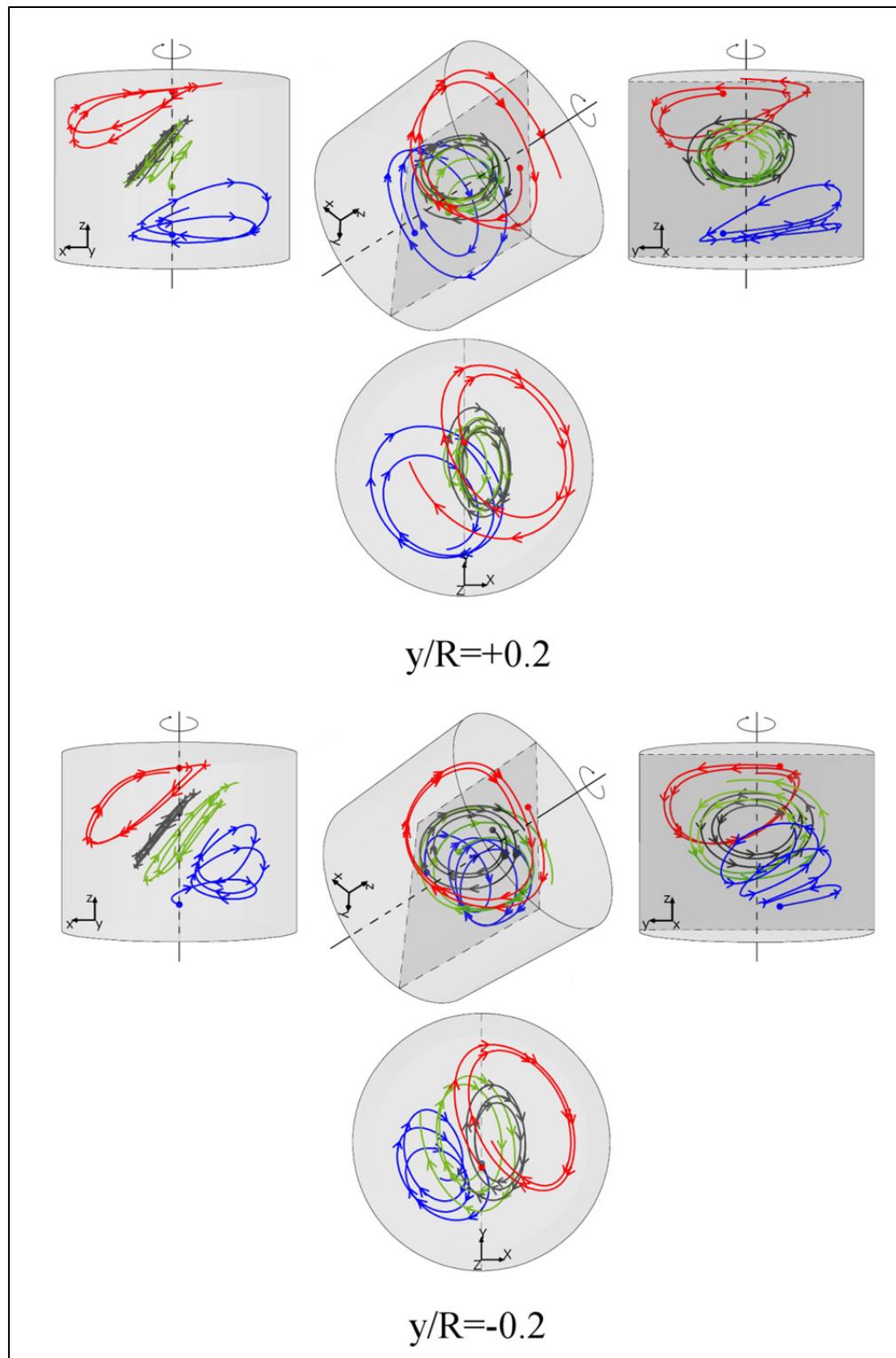


Figure 2.11 Trajectoires des quatre particules dans le plan (yz) pour $n = -2$ à $y/R = +0.2$ et $y/R = -0.2$

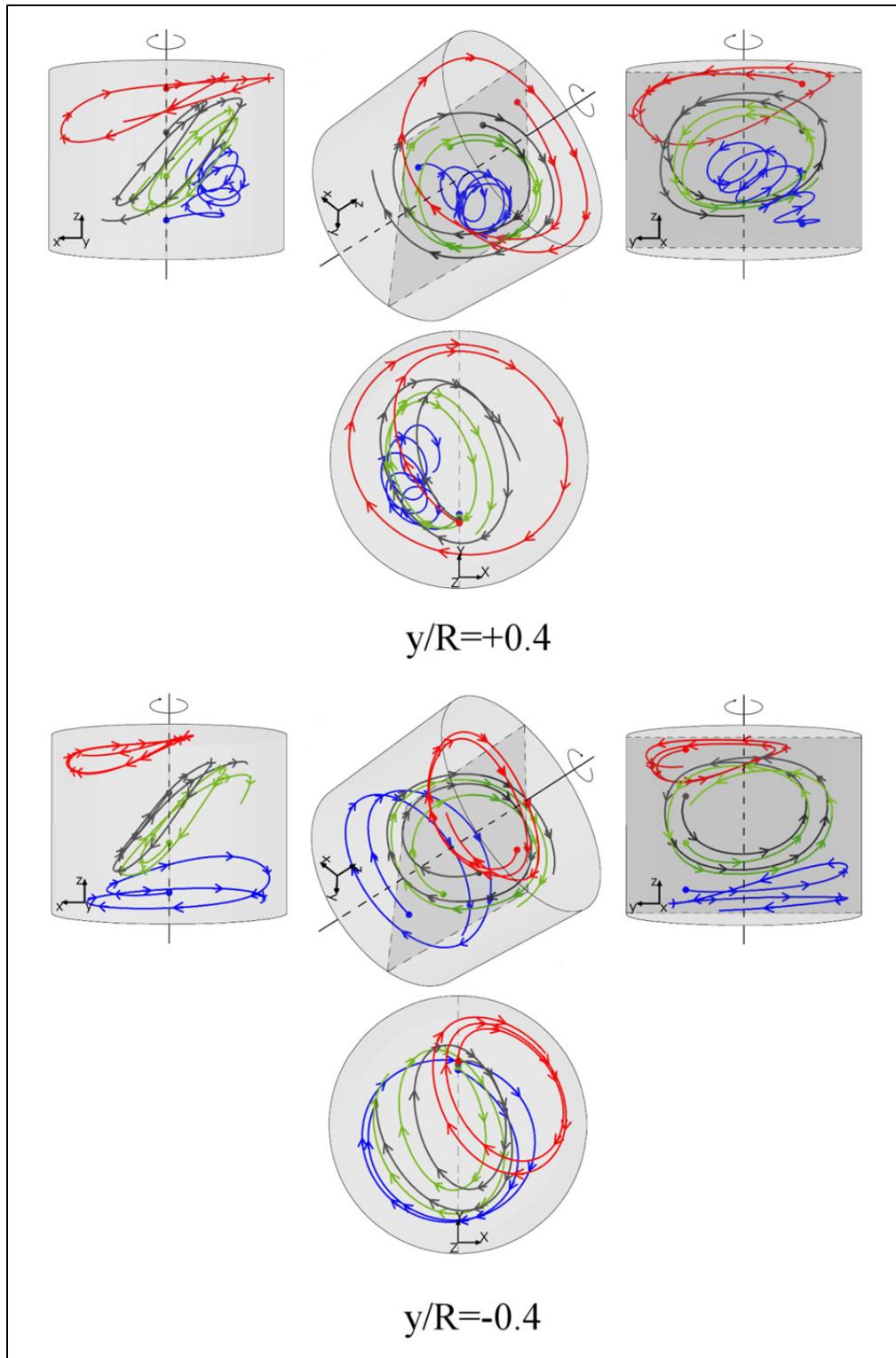


Figure 2.12 Trajectoires des quatre particules dans le plan (yz) pour $n = -2$ à $y/R = +0.4$ et $y/R = -0.4$

Nous distinguons alors trois axes. Deux de ces axes sont géométriquement connus, il s'agit de l'axe de rotation primaire (ARP), qui est l'axe géométrique du cylindre et l'axe de révolution. Le troisième axe est pour le moment inconnu et a été distingué par simple visualisation. Cet axe est celui de la rotation secondaire, il est aussi celui de pompage, il est nommé ARS dans la suite du travail. En outre, cet axe change de direction avec la variation du ratio n . Toutefois, la détermination de l'ARS permet l'identification de la direction de pompage en fonction de la vitesse de révolution (ou de n).

Nous avons testé différentes techniques d'identification des structures cohérentes pour identifier les structures tourbillonnaires dans le MPSL et tracer l'axe de rotation secondaire. En effet, l'axe de certains tourbillons, plus spécifiquement ceux qui sont au voisinage de l'axe de rotation géométrique (figure 2.2), correspond à celui de la rotation secondaire. Nous choisirons par la suite le critère qui définit adéquatement cet axe. Les critères étudiés sont basés sur la définition du centre de tourbillon. Les plus utilisés dans la littérature sont : minimum de pression, maximum de vorticité ω , critère Q , le nombre de vorticité cinématique N_k et le critère λ_2 .

2.2.1 Application des techniques d'identification des structures cohérentes

2.2.1.1 Minimum de pression

Le minimum de pression est un critère qui définit l'axe d'un tourbillon comme un minimum local de pression dans l'écoulement sans identifier sa forme. Cette définition est l'une des plus anciennes définitions du tourbillon dont la pression balance la force centrifuge. Certains auteurs prouvent sa limitation en présentant des contre-exemples (Cucitore et al., 1999, Jeong et Hussain, 1995, Kida et Miura, 1998, Noir, 2000). Il y a des écoulements qui présentent un minimum de pression sans avoir un mouvement tourbillonnaire (exemple de l'écoulement puits et écoulement source : la pression est minimale au centre de l'écoulement). D'autres écoulements sont tourbillonnaires alors que la pression n'atteint pas un minimum à leurs centres (exemple de l'écoulement de Von Karman : écoulement tourbillonnaire induit par un

disque en rotation, la pression reste constante à travers le tourbillon au voisinage de la paroi du disque tandis que la force centrifuge est balancée par la force visqueuse).

Pour un fluide dans un cylindre en simple rotation, l'écoulement est délimité par les parois du cylindre et le minimum de pression correspond à l'axe de rotation géométrique. Pour calculer l'ARS en utilisant ce critère, nous procédons comme suit :

- soustraire la pression centrifuge de révolution (l'écoulement est calculé dans le repère de révolution);
- tracer les isocontours de la pression résultante sur dix plans horizontaux uniformément espacés dans le MPSL ainsi que sur la surface libre et le fond du cylindre;
- identifier les coordonnées du minimum de pression sur ces plans;
- l'ensemble des points identifiés présente l'axe de rotation secondaire (l'ARS).

La figure 2.13 présente le tracé de l'ARS avec le critère de minimum de pression pour différentes valeurs de n . Pour $n = -50$, l'ARS obtenu est bien présentatif, il coïncide avec l'axe de rotation géométrique. Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.3, ce cas est très similaire à la rotation solide. Pour les valeurs de n plus faibles, plus spécifiquement $n = -13.33, -10, -8$, les ARSs obtenus se décalent de plus en plus de l'axe de rotation primaire et perdent en même temps leur linéarité (figure 2.13). Par ailleurs, et bien que les ARSs épousent la forme des spirales qui forment la rotation secondaire, ces mêmes ARSs sont un peu décalés par rapport aux centres de ces spirales (résultats non montrés). À partir de $n = -6$, les pressions minimales ne nous donnent plus d'informations sur cet axe, elles sont plus loin de l'axe des tourbillons et indiquent seulement les zones où la pression est minimale. Nous ne pouvons donc utiliser ce critère pour définir les ARSs pour toute la plage de n étudiée.

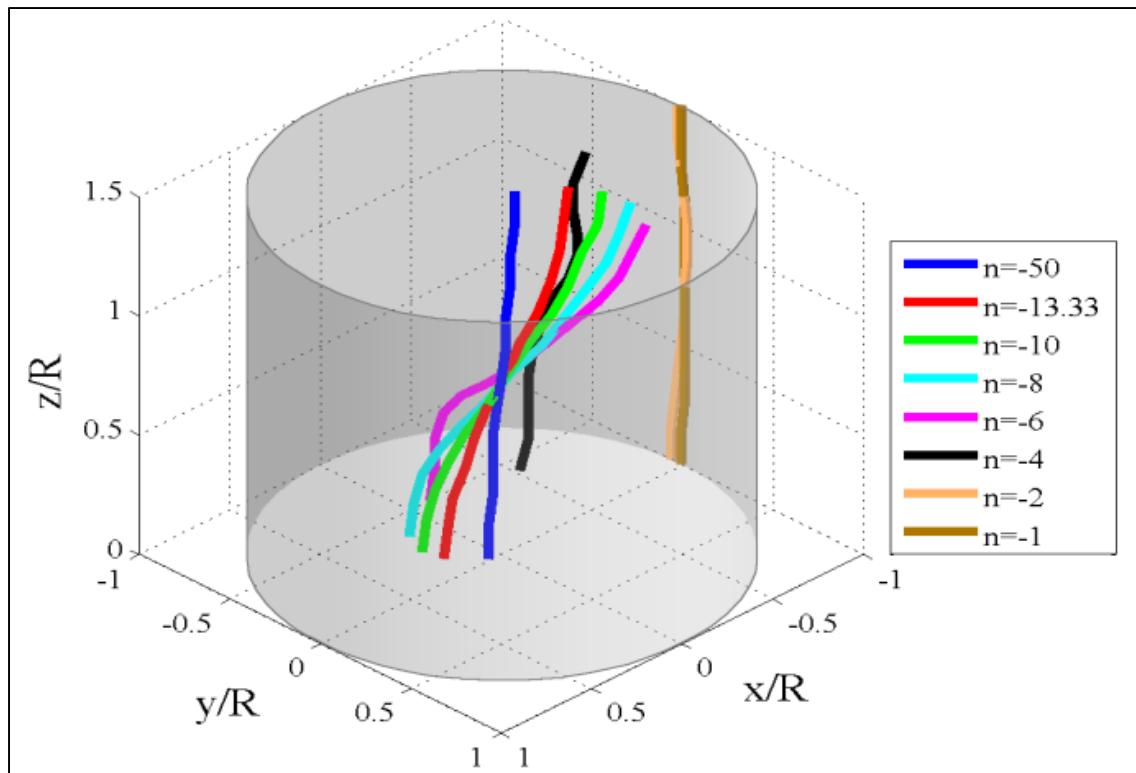


Figure 2.13 Axe de rotation secondaire calculé avec le critère de minimum de pression pour différentes valeurs de n , $Re_\omega = 125$

2.2.1.2 Maximum de vorticité

La vorticité est considérée depuis longtemps comme l'un des candidats les plus utilisés pour visualiser les tourbillons dans les écoulements turbulents (Kida et Miura, 1999, Kolar, 2007, Millan et al., 2012, Mouhali, 2009, Noir, 2000). Le critère de maximum de vorticité définit le centre du tourbillon comme étant le maximum local du module de vorticité donné par l'équation suivante

$$\|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (2.2)$$

avec

$$\omega_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

$$\omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

$$\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

et u , v , w sont les trois composantes de la vitesse du fluide.

Par ailleurs, ce critère ne distingue pas entre la rotation et le cisaillement. Il a été critiqué par plusieurs chercheurs (Cucitore et al. 1999, Jeong et Hussain, 1995, Kida et Miura, 1999, Mavros, 2001) et considéré comme insuffisant pour détecter les structures cohérentes. L'écoulement de Couette est un bon exemple où la vorticité est maximale sur la paroi (vorticité due au cisaillement entre le fluide et la paroi mobile) alors qu'il n'y a pas de tourbillon dans l'écoulement. Un autre contre-exemple qui montre que ce critère a des limites est celui d'un tourbillon dans un écoulement cisaillé (Jeong et Hussain, 1995) (Voir l'Annexe III, exemple 2). Dans cet écoulement, le module de vorticité présente deux maximums alors qu'il existe un seul tourbillon.

Dans le cas d'un fluide qui tourne en bloc, la vorticité est uniforme dans tout le volume et est égale à deux fois la vitesse de rotation. Nous avons testé ce critère pour différentes valeurs de n . Nous avons calculé et tracé les iso-contours du module de vorticité à différents plans horizontaux. Tous les résultats ont pratiquement la même tendance. Le module de vorticité augmente en s'éloignant du centre de rotation primaire. Son maximum est sur les parois du contenant et son minimum est plus à l'intérieur. Le résultat de $n = -4$ est porté comme exemple sur la figure 2.14 pour un plan horizontal (xy) à $z/R = 0.75$. Nos résultats sont semblables à ceux obtenus par Mouhali (2009) dans le repère de précession pour un ratio de vitesse $n = -16.67$ (taux de précession $\varepsilon = -0.06$) et $Re_\omega = 1000$ (rappelons que le cylindre utilisé par Mouhali est en précession orthogonale).

La vorticité calculée dans le MPSL est celle d'une somme de deux vorticités, une vorticité dite de rotation et une autre dite de cisaillement. Le fait qu'elle soit plus importante sur la paroi latérale du cylindre est dû d'une part à la présence d'une couche fortement cisaillée (due elle-même à la combinaison rotation/révolution) et d'autre part à la rotation des parois qui font tourner le fluide à la même vitesse.

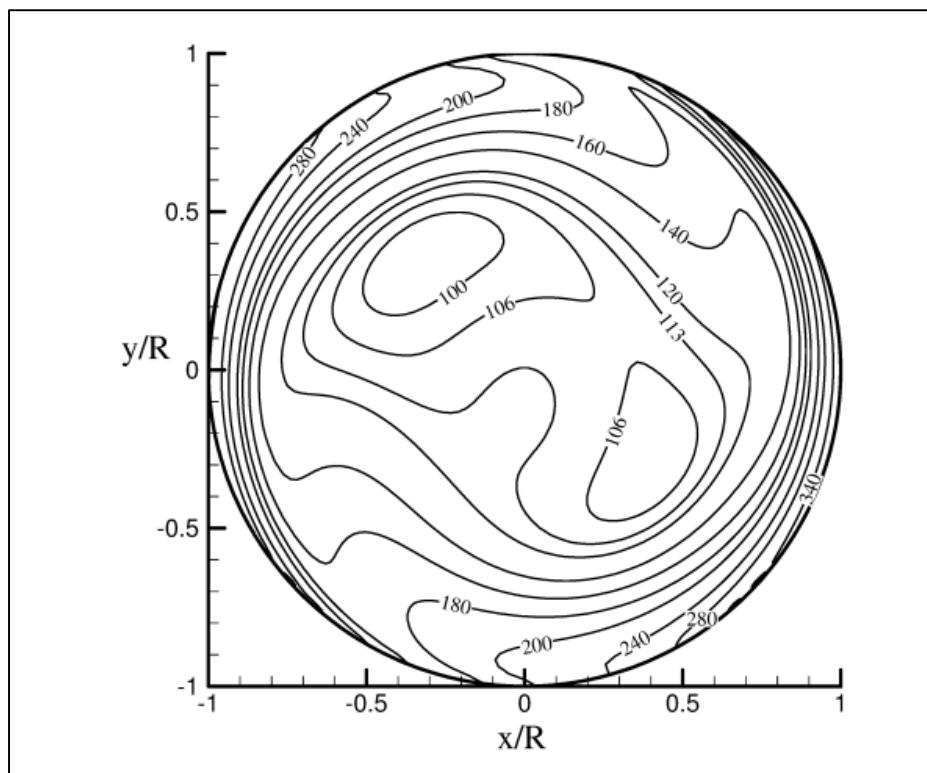


Figure 2.14 Iso-contours du module de vorticité.
Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$

2.2.1.3 Critère Q

C'est l'un des critères qui se basent sur le calcul du tenseur du gradient de vitesse ∇V . Il est le deuxième invariant de ce gradient. Ce critère décrit le tourbillon comme une zone où $Q > 0$ avec la condition de pression inférieure à la pression ambiante. Il définit le centre du tourbillon comme étant la valeur maximale de Q , il a été proposé par Hunt et col. (1988). Il s'écrit sous la forme

$$Q = \frac{1}{2}(\|\mathbf{R}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2) \quad (2.6)$$

avec

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^t)} \text{ et } \|\mathbf{R}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{R}^t)}$$

\mathbf{D} et \mathbf{R} sont respectivement la partie symétrique (tenseur de déformation) et antisymétrique (tenseur de rotation) du gradient de vitesses ∇V , $\text{tr}(\cdot)$ est la trace du tenseur et $(\cdot)^t$ sa transposée. Q présente alors l'équilibre local entre le taux de cisaillement et le module de vorticité (Jeong et Hussain, 1995). Il mesure ainsi la dominance locale de la rotation par rapport à la déformation (Carl et al., 2008).

La condition de la pression minimale avec $Q > 0$ n'est pas toujours vérifiée (Chakraborty et al., 2005, Cucitore et al., 1999, Jeong et Hussain, 1995). De plus, ce critère n'est pas toujours adéquat pour visualiser la forme du tourbillon (Cucitore et al., 1999, Jeong et Hussain, 1995). Jeong et Hussain donnent l'exemple du tourbillon symétrique à forme conique, ce tourbillon est obtenu en faisant immerger un jet en rotation dans un écoulement sur une paroi plane. Cet écoulement est induit par une source de quantité de mouvement et de circulation dans la

direction axiale du jet (Shtern et Hussain, 1993). Le Critère Q ne décrit pas adéquatement la forme du tourbillon généré dans cet exemple d'écoulement.

Les résultats du critère Q sont montrés sur la figure 2.15 pour $n = -4$ à $z/R = 0.75$, ces résultats montrent que la valeur de Q est positive, elle est élevée au voisinage de la paroi et est plus faible au voisinage de l'axe de rotation primaire. Cela traduit la forte rotation du fluide à côté des parois latérales par rapport au cisaillement. Cependant, la définition du tourbillon avec ce critère n'est pas vérifiée.

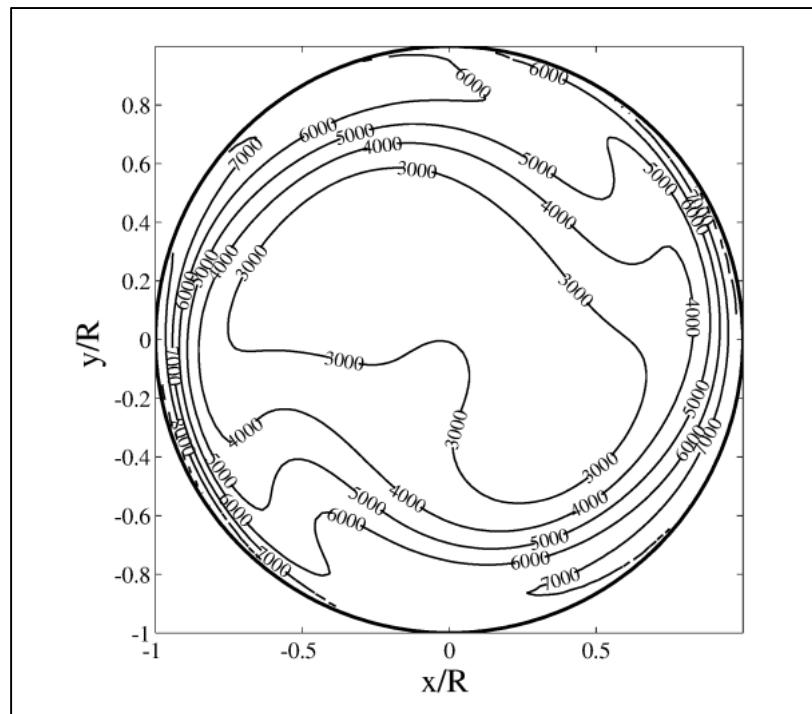


Figure 2.15 Iso-contours de Q .
Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$

2.2.1.4 Critère du nombre de vorticité cinématique N_k

Basé également sur le calcul du tenseur du gradient de vitesses, le critère du nombre de vorticité cinématique mesure le ratio entre la rotation et la déformation du fluide. Il est

proposé par Truesdell (1953). Ce nombre tend vers l'infini pour une rotation solide et tend vers zéro pour un écoulement irrotationnel. Il est calculé par la relation suivante :

$$N_k = \frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{D}\|} \quad (2.9)$$

Les iso-contours de N_k sont portés sur la figure 2.16 pour $n = -4$ à $z/R = 0.75$, les isocontours nous montrent deux maximum avec une augmentation du nombre de vorticité cinématique au centre de l'écoulement. Les iso-surfaces ont une forme aléatoire qui ne suit pas la forme des spirales (figure 2.17). L'augmentation de Q et la diminution de N_k en fonction de r montre que la déformation diminue plus rapidement que la rotation lorsqu'on s'éloigne des parois.

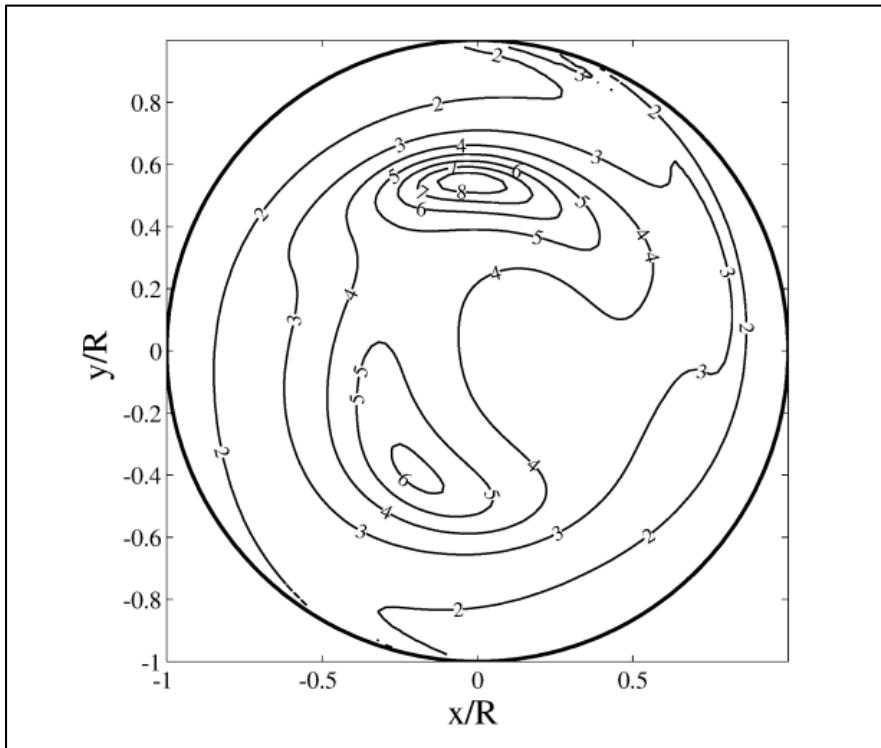


Figure 2.16 Iso-contours de N_k .
Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$

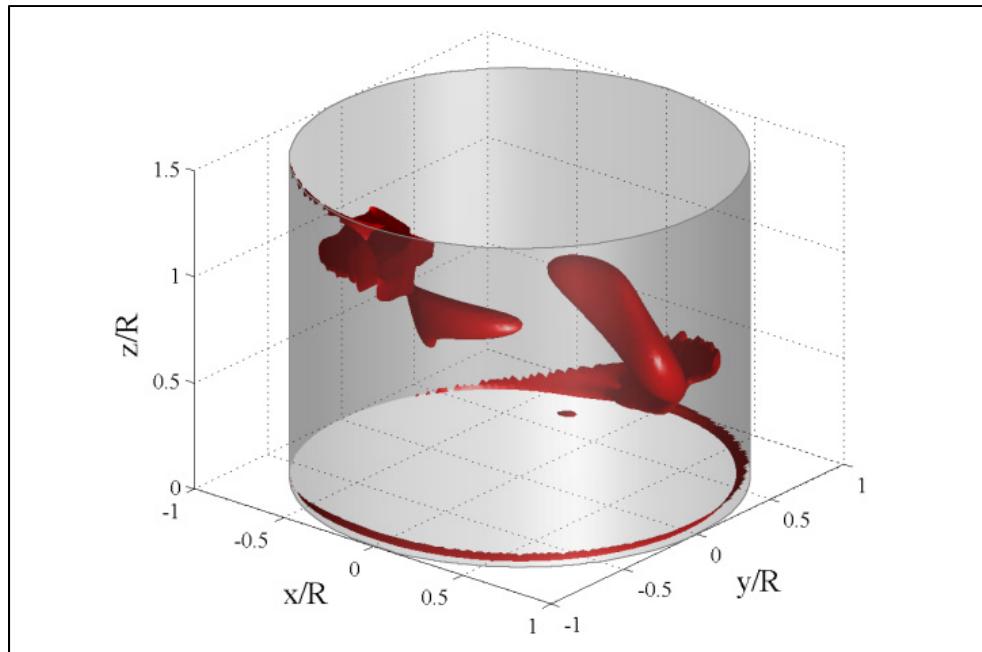


Figure 2.17 Iso-surfaces de $N_k = 6$. Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$

2.2.1.5 Critère λ_2

C'est le critère le plus utilisé pour l'identification des structures cohérentes. Il a été proposé par Jeong et Hussain (1995). Il est largement utilisé pour identifier les structures tourbillonnaires dans un écoulement turbulent (leurs formes, leurs tailles et leurs nombres) et localiser leurs centres (Cala et al., 2006, Carl et al., 2008, Ducci et Yianneskis, 2007, Koched et al., 2011, Rongchun et Weijun, 2012, Roy et al., 2010, Sibilla et Beretta, 2005). Son principe consiste à trouver les valeurs propres du tenseur symétrique $\mathbf{D}^2 + \mathbf{R}^2$ (\mathbf{D} tenseur de déformation et \mathbf{R} tenseur de rotation), celui-ci admet donc des valeurs propres réelles λ_1 , λ_2 et λ_3 telles que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Les zones où $\lambda_2 < 0$ définissent le corps du tourbillon et correspondent aux pressions minimales tourbillonnaires. Ce critère permet donc de distinguer la vorticité de rotation de celle de cisaillement. L'extrémum de λ_2 est le centre du tourbillon.

Koched et al., (2011) admettent que le calcul de λ_2 est indépendant du choix du repère. Cela signifie que même s'il existe plusieurs repères, comme dans le cas du MPSL, ce critère permet l'identification des tourbillons dans l'écoulement.

Pour un écoulement en simple rotation, le λ_2 est négatif et est égal à la vitesse de rotation à la puissance deux. Nous avons testé plusieurs exemples pour ce critère (voir Annexe III). Les résultats de λ_2 (figure 2.18) sont similaires à ceux de Q , les valeurs décroissent en s'éloignant des parois et en s'approchant de l'axe géométrique de rotation. De même, les iso-surfaces (figure 2.19 et 2.20) ne suivent pas la forme des spirales créées à l'intérieur du mélangeur. Ces résultats contredisent Koched et al. (2011-a), ils mettent en doute alors la capacité de ce critère d'identifier les tourbillons dans n'importe quel repère choisi dans les systèmes doublement accélérés.

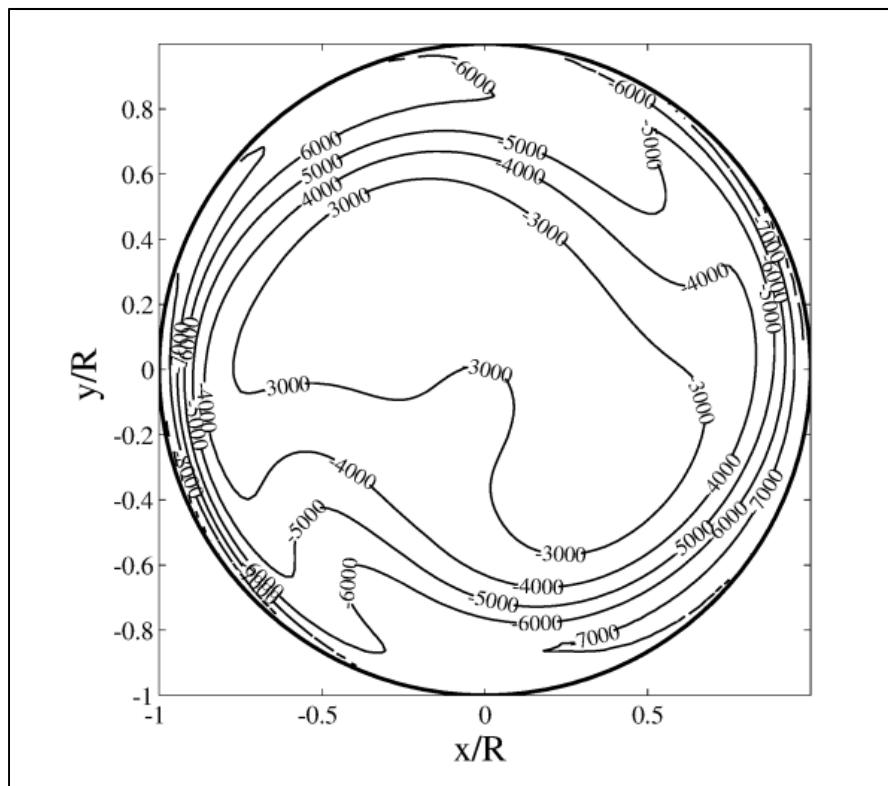


Figure 2.18 Isocontours de λ_2 , Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$

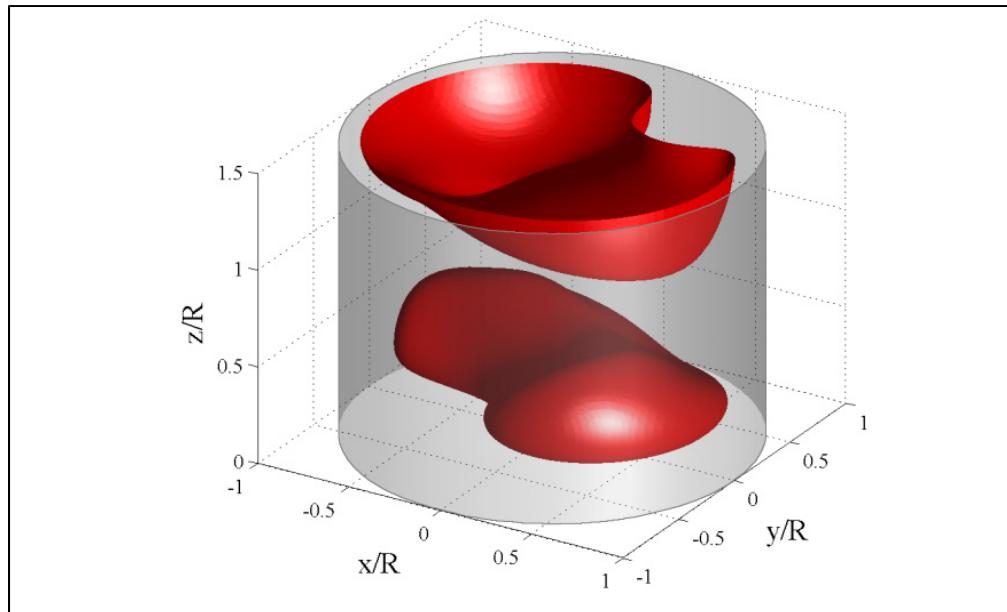


Figure 2.19 Iso-surfaces de $\lambda_2 = -2000$, Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$

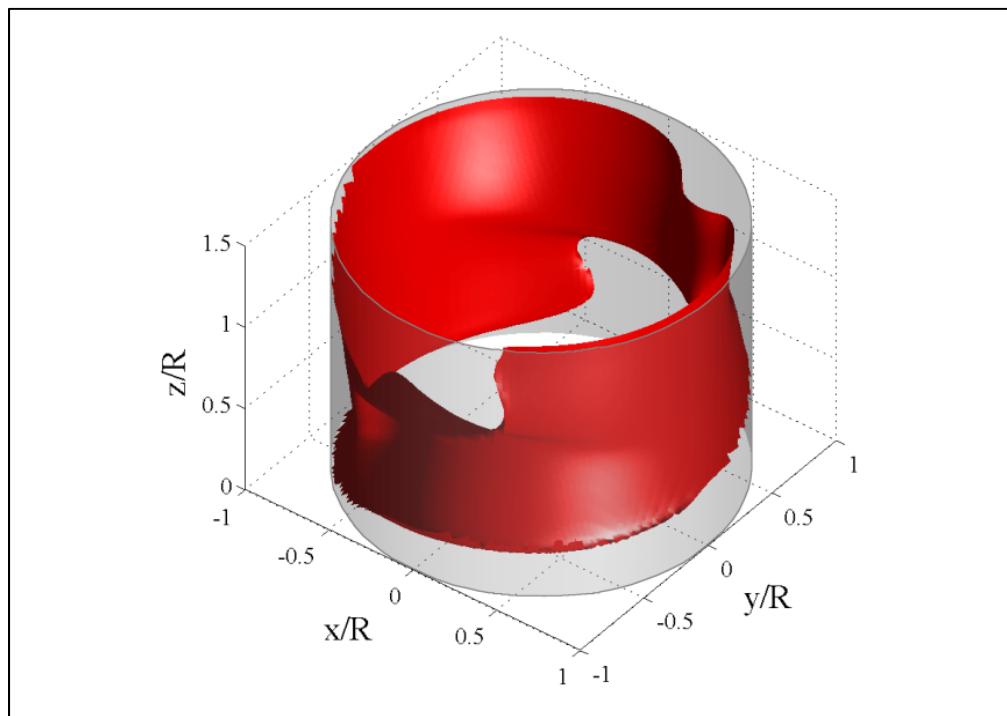


Figure 2.20 Iso-surfaces de $\lambda_2 = -6000$, Résultat de $n = -4$ et $Re_\omega = 125$, plan (xy) à $z/R = 0.75$

2.2.1.6 Synthèse des différents critères testés

En analysant les résultats obtenus pour les différents critères d'identification de l'ARS, nous avons constaté qu'aucun des critères étudiés ne peut décrire adéquatement les structures tourbillonnaires dans le MPSL ainsi que leur axe de rotation. Cela est probablement dû au calcul de l'écoulement dans le repère de révolution. Le système du mélangeur est accéléré par deux mouvements, rotation et révolution, pour ce cas, il est très difficile de soustraire ces deux mouvements qui engendrent une vorticité de fond, cette dernière est fortement présente dans l'écoulement confiné dans le cylindre. D'autre part, l'analyse sera différente si l'écoulement est calculé dans le repère de rotation : Mouhali (2009) a pu détecter des tourbillons dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation et parallèle à l'axe de précession. Ces tourbillons ont été identifiés par le maximum du module de vorticité instantanée et correspondaient parfaitement aux tourbillons identifiés par les iso-contours de la fonction de courant. Les calculs de la vorticité et de la fonction de courant ont été effectués avec les mesures expérimentales des vitesses instantanées pour un ratio de vitesses $n = -30.33$ ($\varepsilon = -0.033$) et $Re_\omega = 140806$. Ces mesures ont été réalisées dans le repère de rotation.

2.2.2 Identification géométrique de l'ARS

Pour une estimation approximative de l'ARS dans le repère de révolution (**B**), nous proposons une méthode géométrique basée sur la détermination des centroïdes des courbes dans le plan. Nous procédons comme suit

- puisque les particules qui se trouvent initialement au voisinage de l'axe de rotation sont celles qui décrivent la rotation secondaire, une droite (**D**) de particules est choisie proche de la paroi (figure 2.21-a);
- la grande spirale 3D (figure 2.21-a) de longueur h est décomposée en petites spirales de longueur Δh_j , ces dernières sont projetées sur les plans $(xy)_j$ (figure 2.21-b);
- le centroïde de la courbe obtenu dans le plan $(xy)_j$ est calculé par la suite avec :

$$\bar{x}_j = \frac{\sum x_i \Delta L}{\sum \Delta L} \quad (2.10)$$

$$\bar{y}_j = \frac{\sum y_i \Delta L}{\sum \Delta L} \quad (2.11)$$

- l'ensemble des centroides M_j de coordonnées (\bar{x}_j, \bar{y}_j) obtenus pour les différents plans $(xy)_j$ forme l'axe de rotation de la grande spirale.

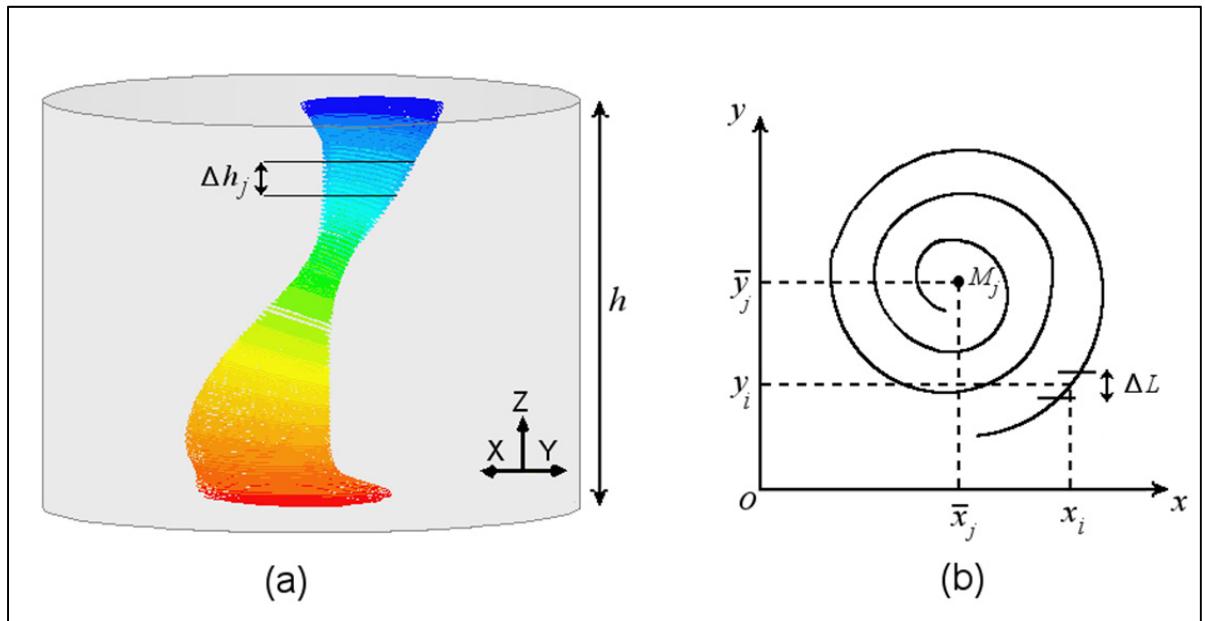


Figure 2.21 Méthode des centroïdes des courbes. (a) Exemple de trajectoires des particules de la droite (D) proche axe de rotation géométrique, $n = -8$ et $Re_\omega = 125$. (b) Centroïde d'une spirale dans le plan $(xy)_j$

Un exemple d'une spirale cylindrique a été étudié pour valider la méthode géométrique (figure 2.22). L'axe géométrique de la spirale est (oz) .

L'erreur commise lors du calcul dépend du nombre des points N_{pt} sur le plan $(xy)_j$ et le nombre des plans (xy) N_{pl} . Plus le nombre de points sur le plan $(xy)_j$ est élevé et le nombre des plans horizontaux est faible, plus on s'approche de la valeur géométrique. La

combinaison $[N_{pt} \ N_{pl}]$ est bien étudiée et celle qui donne une plus faible erreur pour chaque ratio de vitesse est choisie.

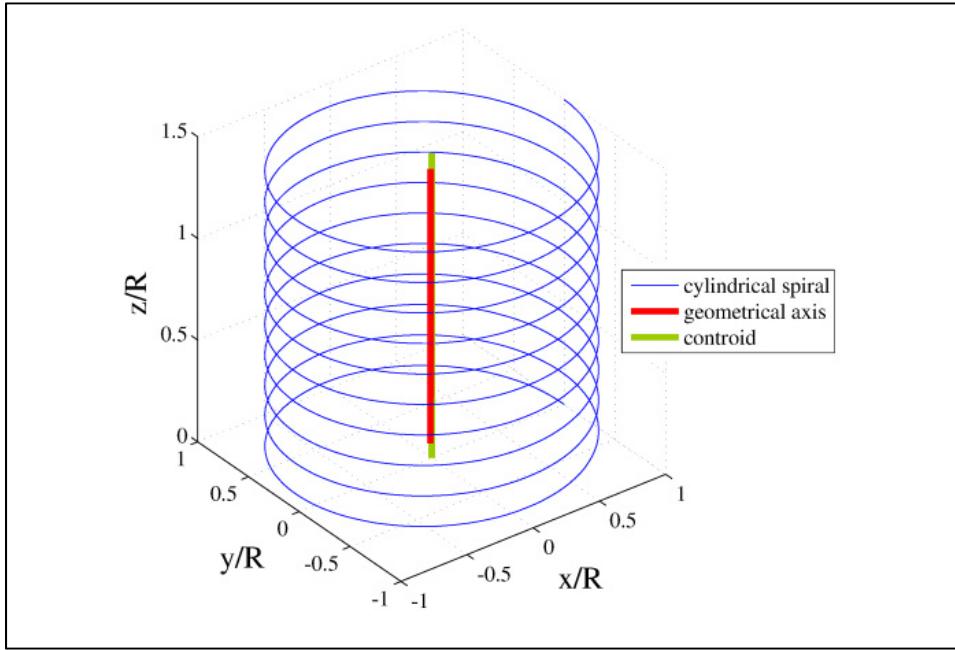


Figure 2.22 Calcul du centroïde, exemple d'une spirale cylindrique

Par ailleurs, la courbe obtenue de l'ARS est bruitée, cela est dû, d'une part, au nombre de points qui décrivent la grande spirale et, d'autre part, à la forme des spirales des différentes particules. Un filtre est appliqué pour obtenir un axe moyen.

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}}_j &= \frac{\bar{x}_{j+1} + \bar{x}_j}{2} \\ \bar{\bar{y}}_j &= \frac{\bar{y}_{j+1} + \bar{y}_j}{2} \\ \bar{\bar{z}}_j &= \frac{\bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j}{2}\end{aligned}$$

Les résultats de la méthode géométrique obtenus sont portés sur la figure 2.23. Ils révèlent que la méthode géométrique permet de donner une idée qualitative de l'ARS dans le MPSL. D'après cette figure, tous les axes s'interceptent aux alentours de $z/R = 0.5$. À $n = -50$,

l'ARS coïncide avec l'axe de rotation primaire, rappelons qu'à ce niveau de n le fluide est en rotation solide et les particules se déplacent selon des trajectoires circulaires. Lorsque n diminue, les particules se déplacent selon des spirales cylindriques du fond à la surface libre du contenant (figure 2.2, $n = -13.33$ à -4). L'ARS commence à perdre sa linéarité et devient de plus en plus hélicoïdal. À $n = -2$ et -1 , l'écoulement est de plus en plus compliqué, les spirales sont devenues coniques (figure 2.2, $n = -2$ et -1), la rotation secondaire commence plus loin du fond du cylindre et se termine avant la surface libre.

En outre, l'ARS change de direction et les trajectoires de ses points dessinent un cône lorsque la vitesse de révolution varie. L'une des deux extrémités (celle du haut) de l'axe de rotation secondaire se déplace selon un cercle (figure 2.24) et l'autre garde sa position au centre du fond. Vanyo et al. (1995) et Noir (2000) ont aussi remarqué expérimentalement que l'axe de rotation du fluide s'incline par rapport à l'axe géométrique du contenant et change de direction lorsque la vitesse de révolution (précession) augmente. Les expériences de Vanyo et al. (1995) et Noir (2000) ont été menées sur un fluide newtonien dans un ellipsoïde en précession. Les visualisations ont été effectuées dans le repère de révolution (précession). L'étude de Vanyo et al. (1995) était pour des ratios n variant de -2000 jusqu'à -17.4 ($\varepsilon = -0.0005$ à -0.0575) avec un $Re_\omega = 7700$, et les expériences de Noir (2000) pour des ratios allant de -300 jusqu'à -50 ($\varepsilon = -0.0033$ à -0.02) avec $Re_\omega = 1960$. Par contre, ces deux auteurs ne pouvaient plus identifier l'axe de rotation du fluide au-delà de $n = -17.4$ (Vanyo et al., 1995) et $n = -50$ (Noir, 2000) avec les techniques de visualisation qu'ils ont utilisé parce que cet axe a commencé à perdre sa linéarité.

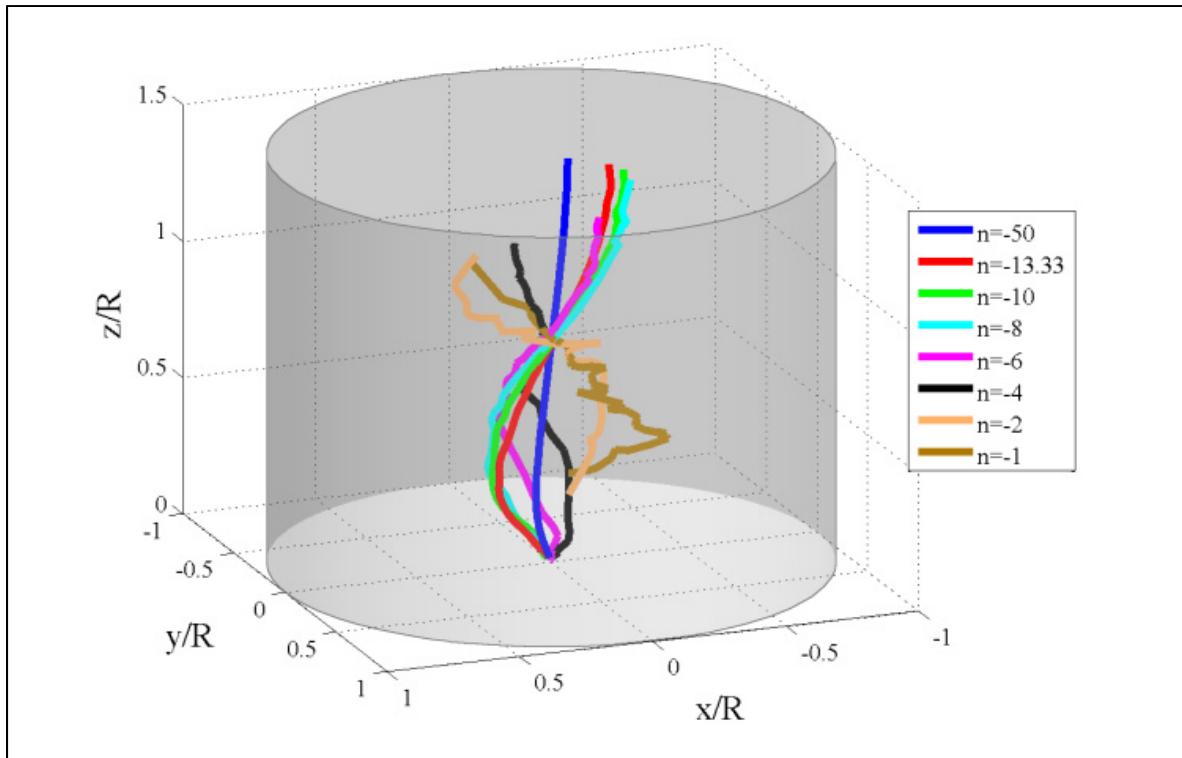


Figure 2.23 Le ARS identifié géométriquement pour différentes valeurs de n , $Re_\omega = 125$.

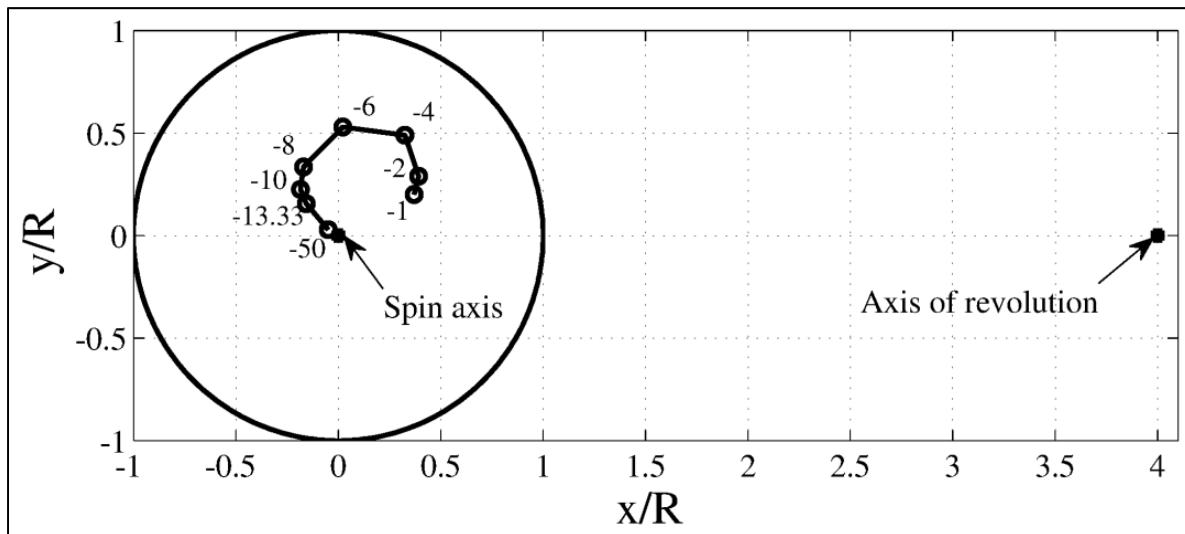


Figure 2.24 Déplacement de l'axe de rotation secondaire du fluide (ARS) par rapport à l'axe de révolution

2.3 Visualisation de l'écoulement : Les iso-contours de vitesses

Les iso-contours et les vecteurs de vitesses sont très répandus et constituent aussi un moyen de visualisation de l'écoulement dans le plan (Devals et al., 2008, Fontaine et al., 2013, Jahoda et al., 2007, Mavros, 2001, Millan et al., 2012, Solano et al., 2012). Les iso-contours de vitesses sont des lignes qui passent par des particules ayant la même vitesse à un instant donné.

Comme les cas de $n = -6$ et $n = -2$ semblent avoir une dynamique d'écoulement plus particulière, une analyse des iso-contours de vitesses de ces deux ratios par rapport à $n = -50$ a été effectuée pour bien illustrer la symétrie observée dans l'écoulement. Les résultats sont ceux des trois composantes de la vitesse relative à la révolution (\mathbf{V}_{BM}) sur les deux plans méridionaux (xz) et (yz) (figure 4).

Dans le cas d'une rotation en corps rigide, dans le plan (xz), u_{BM} et w_{BM} seront nulles et v_{BM} sera linéaire par rapport à R et constante le long de l'axe de rotation. Dans le plan (yz), c'est les composantes v_{BM} et w_{BM} qui seront nulles tandis que u_{BM} sera linéaire en fonction de R et constante le long de l'axe de rotation. Le départ de la rotation solide ($n = -50$) est très similaire à la rotation uniforme, l'écoulement est quasi-symétrique et bidimensionnel. Loin du fond, les iso-contours sont quasi-droits et parallèles à l'axe de rotation pour la composante v_{BM} dans le plan (xz) (figure 2.25-b1) et pour u_{BM} dans le plan (yz) (figure 2.26-a1). Ces deux vitesses varient linéairement selon R . En revanche, proche du fond, ces deux composantes ont une allure légèrement courbée. En outre, l'ordre de grandeur de la composante u_{BM} et w_{BM} dans le plan (xz) et de v_{BM} et w_{BM} dans le plan (yz) est très faible. On remarque aussi une parfaite symétrie de la composante w_{BM} par rapport à l'axe de rotation (figure 2.25-c1 et 2.26-c1). Par contre, les iso-contours de u_{BM} dans le plan (xz) (figure 2.25- a1) et v_{BM} dans le plan (yz) (figure 2.26-a1) sont peu symétriques à cause de la condition de glissement pour la surface libre et de la condition d'adhérence pour le fond du contenant. Les composantes qui étaient plus faibles dans le cas de faible vitesse de révolution ($n = -50$) deviennent de plus en plus significatives lorsque la vitesse de révolution

augmente (n plus faible), ce qui affirme la tridimensionnalité de l'écoulement. Pour $n=-6$, la symétrie est fortement rompue pour les composantes u_{BM} et w_{BM} dans le plan (yz) (figure 2.26-a2 et c2) et légèrement rompue pour u_{BM} et w_{BM} dans le plan (xz) (figure 2.25-a2 et c2). Or, pour $n = -2$, le résultat est inversé, c.-à-d. que la symétrie est fortement rompue dans le plan (xz) (figure 2.25-a3 et c3) et moins rompue dans le plan (yz) (figure 2.26-a3 et c3).

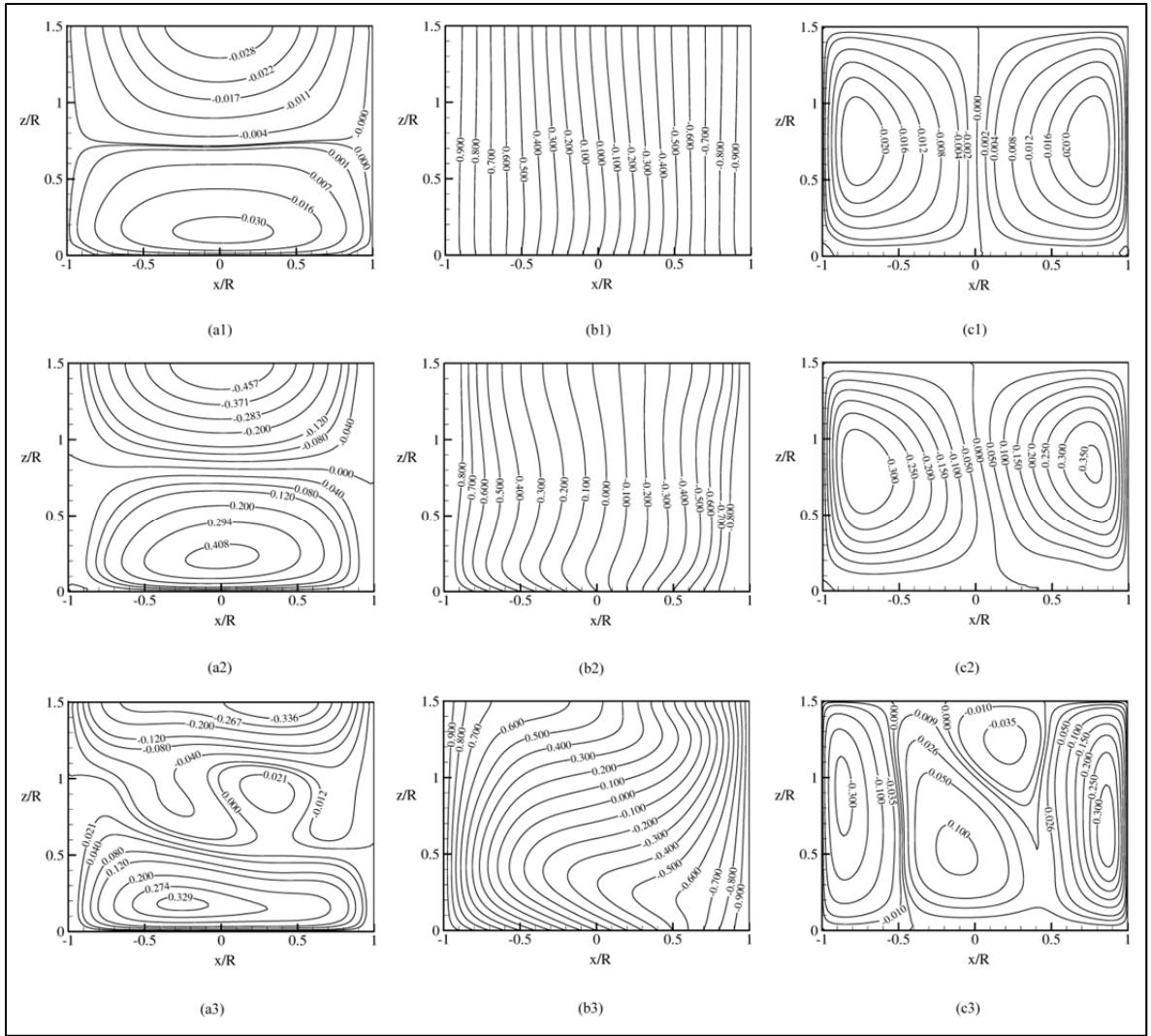


Figure 2.25 Iso-contours des trois composantes de la vitesse relative à la révolution dans le plan (xz) parallèle au bas de révolution. La vitesse est normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega_r \cdot R$) et les coordonnées x , y et z sont normalisées par rapport à R . (a_i) : la composante selon x de la vitesse (u_{BM}), (b_i) : la composante selon y de la vitesse (v_{BM}), (c_i) : la composante selon z de la vitesse (w_{BM}). (1) : $n = -50$, (2) : $n = -6$, (3) : $n = -2$.

$$Re_\omega = 125.$$

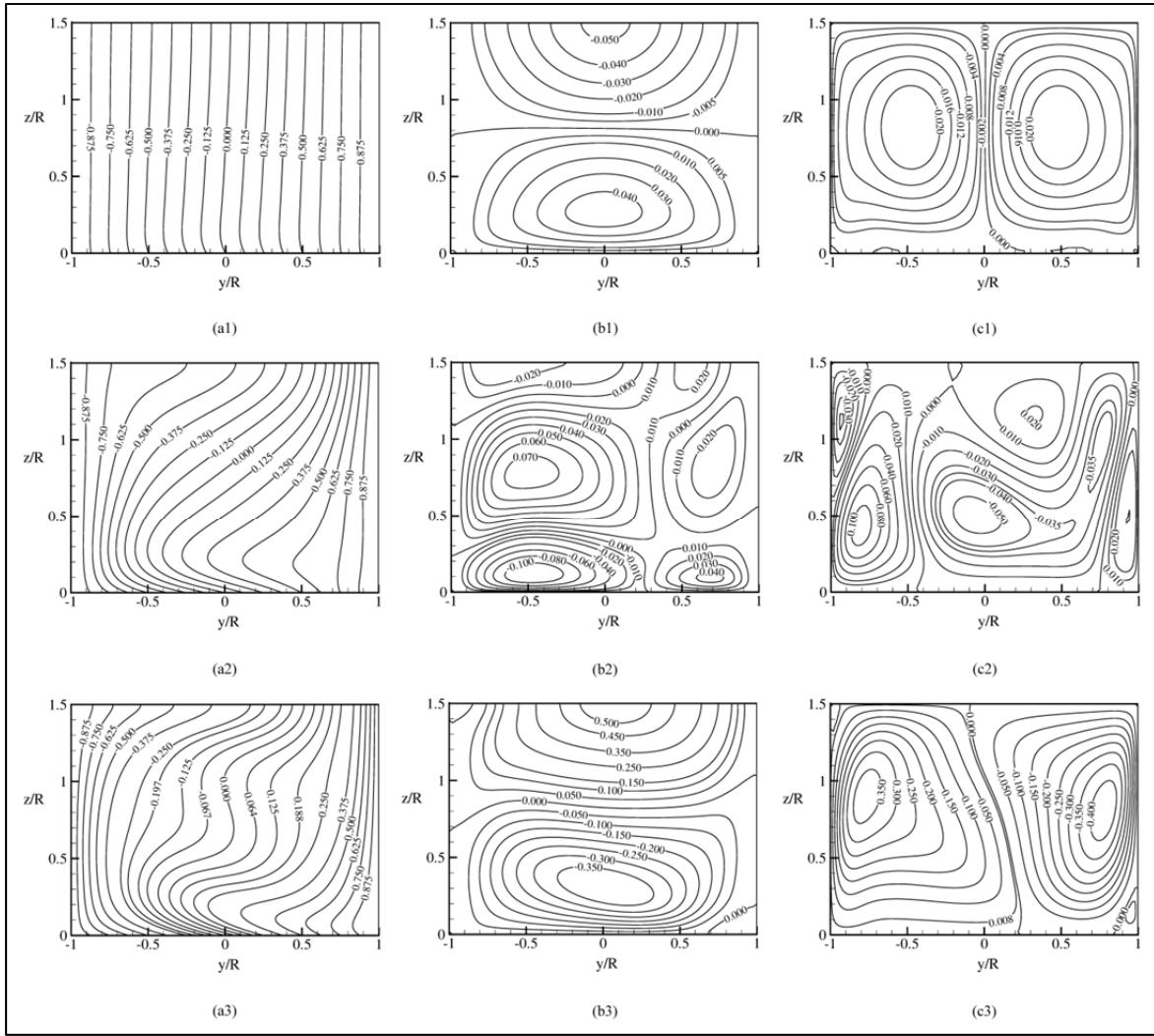


Figure 2.26 Iso-contours des trois composantes de la vitesse relative à la révolution dans le plan (yz) perpendiculaire au bras de révolution. La vitesse est normalisée par rapport à la vitesse linéaire de rotation ($\omega_r \cdot R$) et les coordonnées x , y et z sont normalisées par rapport à R . (a_i) : la composante selon x de la vitesse (u_{BM}), (b_i) : la composante selon y de la vitesse (v_{BM}), (c_i) : la composante selon z de la vitesse (w_{BM}). (1) : $n = -50$, (2) : $n = -6$, (3) : $n = -2$. $Re_\omega = 125$.

2.4 Visualisation de l'écoulement dans le MPSL: Les lignes de courant

Les résultats des iso-contours de vitesses de $n = -6$ et $n = -2$ confirment la particularité de l'écoulement pour ces deux ratios. Pour mieux étudier cette distinction, une autre technique de visualisation 2D a été utilisée, il s'agit des lignes de courant. Par ailleurs, l'étude a été étendue pour couvrir d'autres ratios de vitesses afin d'identifier le ratio à partir duquel la topologie d'écoulement commence à subir un changement significatif.

Les lignes de courant sont largement utilisées pour identifier l'écoulement dans le plan (Bartels et al., 2002, Chong et Perry, 1990, Nam et al., 2009, Rivera et al., 2009). Pour un plan considéré, les lignes de courant sont obtenues en intégrant les composantes de vitesses tangentes à ce plan (Guyon et al., 2001). Pour le plan (xy), la fonction de courant est exprimée par

$$\psi_z = \int u dy - \int v dx \quad (2.12)$$

avec u la composante de la vitesse \mathbf{V} dans la direction (x) et v sa composante dans la direction (y).

L'analyse des résultats obtenus pour la topologie d'écoulement montre que l'écoulement confiné dans un cylindre en double rotation a une certaine concordance avec l'écoulement autour des obstacles, des similarités ont été remarquées, particulièrement la présence des points singuliers (ou points critiques) dans l'écoulement (figure 2.27), tels que : centre, foyer, nœud et selle (ou col) (Tobak et Peake, 1982). On rappelle qu'un point singulier est défini comme étant le point où deux ou les trois composantes de la vitesse du fluide et leurs dérivées spatiales sont nulles. Ces points singuliers se trouvent généralement autour des obstacles ou autour des corps profilés quoiqu'ils puissent être aussi trouvés dans certains écoulements. La théorie des points critiques a été largement étudiée et appliquée pour déterminer la topologie de l'écoulement sur les surfaces solides et déduire les zones de séparation et de rattachement de l'écoulement en amont et en aval de ces surfaces (Hunt et

al., 1978). Dans un écoulement comme le nôtre, la présence des points singuliers dans l'écoulement donne une idée préalable sur les zones de stagnation (centres) et les zones de recirculation (selles et foyers). La vérification de la présence de ces deux zones est primordiale dans les procédés du mélange, on parle dans ce cas des zones mortes et des zones de pompage.

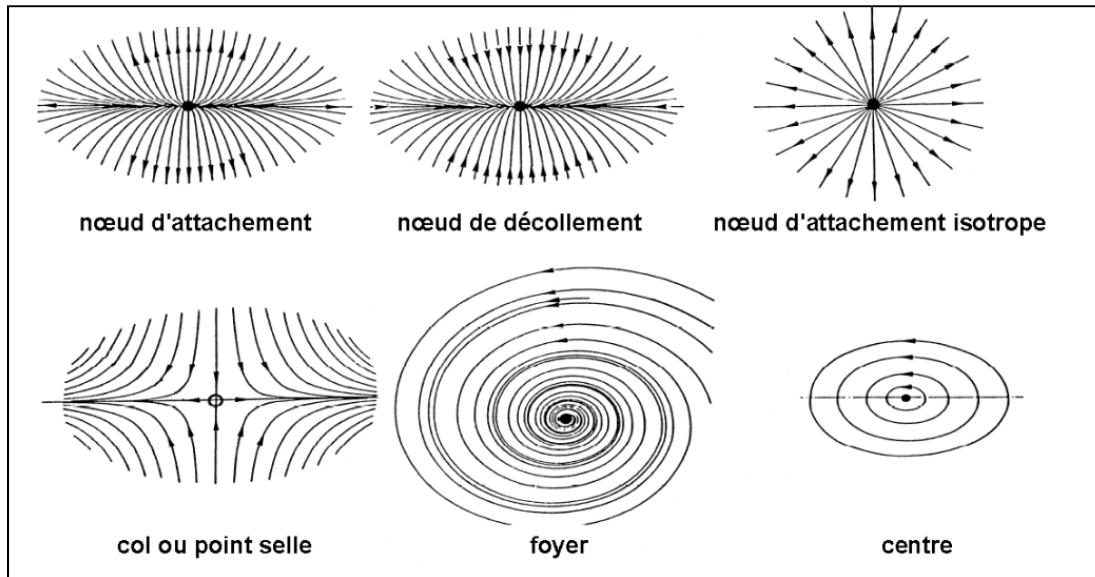


Figure 2.27 Représentation des points singuliers. Tirée du site www.onera.fr (Office National d'Études et Recherches Aérospatiales)

La figure 2.28 présente les résultats de la fonction de courant sur des plans horizontaux (xy) perpendiculaires à l'axe de rotation à différentes hauteurs dans le contenant. Le ratio de vitesses n étant variable et le nombre de Reynolds de rotation constant et égal à 125. La fonction de courant est calculée à partir des vitesses relatives à la révolution. Le cas de $n = -50$ est typique d'une rotation uniforme, les lignes de courant sont circulaires avec un point de stagnation au centre du plan (en parle ici du centre), ce qui signifie que l'écoulement se fait globalement en 2D. Quand n devient plus faible (c.-à-d. quand la vitesse de révolution devient plus élevée), les lignes deviennent de plus en plus spiralées (en parle alors de foyer) avec une composante de vitesse perpendiculaire à ce plan qui permet l'évacuation du fluide axialement. Le centre du foyer change de position en s'éloignant du fond du mélangeur.

Donc cette composante axiale oblige le fluide à se déplacer verticalement selon une spirale et selon un axe non linéaire, confirmant le résultat obtenu avec les trajectoires des particules. D'autre part, ces centres changent constamment de position pour chaque plan lorsque la vitesse de révolution augmente (ou n diminue). La trajectoire dessinée par ces centres suit la trajectoire de l'axe de rotation secondaire (figure 2.31-a).

Bien que l'écoulement dans les plans (xy) donne une idée assez claire sur la circulation axiale du fluide, deux autres plans méridionaux ont été vérifiés pour la topologie d'écoulement, il s'agit du plan (xz) parallèle au bras de révolution et du plan (yz) perpendiculaire à celle-ci. Cela permet de voir comment le fluide circule radialement avec bien évidemment les composantes de la vitesse perpendiculaires aux deux plans. Nous avons analysé la topologie d'écoulement pour $n = -50, -13.33, -10, -8, -6, -4, -2, -1$. Nous avons remarqué que la particularité de l'écoulement dont nous avons discuté dans les sections précédentes commence à apparaître à partir de $n = -8$ jusqu'à $n = -4$ pour le plan (yz) et à partir de $n = -2.5$ pour le plan (xz) (figure 2.29 et 2.30). Nous avons constaté alors que les ratios inférieurs à -8 sont les plus critiques pour l'écoulement. Nous avons pu noter aussi que cette singularité se manifeste seulement sur l'un des deux plans méridionaux, c.-à-d que l'écoulement reprend sa topologie initiale dans un plan lorsque le changement commence dans l'autre plan. Cependant, l'écoulement dans le plan (xz) ne subit pas les mêmes changements que dans le plan (yz). Nous présentons sur les figures 2.29 et 2.30 les lignes de courant pour les ratios n dont lesquels l'écoulement subit des changements majeurs, c'est-à-dire que nous présentons les résultats des ratios de vitesses inférieurs à -4 pour le plan (xz) et les résultats des ratios de vitesses compris entre -8 et -5 pour le plan (yz). Nous comparons les résultats de ces ratios avec celui du $n = -50$ afin d'identifier les singularités subies par l'écoulement.

Pour une rotation en corps rigide, les composantes de la vitesse tangentes sur les plans (xz) et (yz) sont nulles, il n'y aura donc pas des tracés de lignes de courant sur ces plans. Les figures 2.29 et 2.30 montrent qu'à $n = -50$, nous obtenons des lignes pratiquement circulaires sur les deux plans (xz) et (yz), cela indique que malgré que l'écoulement soit

quasiment bidimensionnel, il y a une composante axiale selon z et une autre selon x de l'écoulement, mais elles sont très faibles.

Les deux figures 2.29 et 2.30 montrent que la topologie est plus complexe avec la présence de plusieurs points critiques sur le plan (xz) lorsque $|n| \leq 2.5$ et sur le plan (yz) pour des valeurs de n comprises entre -8 et -5 . Pour le plan (xz) (figure 2.29), nous remarquons que le centre commence à se déplacer vers la gauche à partir de $n = -4$ pour se transformer en foyer à $n = -2.5$. Ce même foyer va se diviser en d'autres foyers au fur et à mesure que nous augmentons la vitesse de révolution laissant la place à l'apparition des selles et des zones de séparation. En outre, nous remarquons que le fluide est évacué horizontalement selon des spirales de différentes tailles. Sur le plan (yz), lorsque n diminue, un foyer se forme au-dessus du fond, ce foyer se décolle du fond et pousse le centre déjà présent vers le haut. Le décollement du fluide est manifesté par l'apparition des demi-selles sur la paroi du fond et par le sens de l'écoulement dans cette zone. Le centre déplacé se divise en plusieurs structures spiralées ($n = -6.5, -6, -5.84, -5$) pour finir à se confiner sur la paroi latérale selon deux foyers. L'autre foyer qui s'est vu décoller auparavant s'agrandit pour occuper progressivement tout le plan pour des très faibles ratios de vitesses ($n = -4$ à -1 , résultats non montrés) et revenir à son état initial (l'état de $n = -50$). Par ailleurs, nous remarquons aussi à partir des deux figures 2.29 et 2.30, que l'écoulement se colle et se détache souvent des parois solides dans le plan (yz) contrairement au plan (xz) pour les valeurs de n étudiées. Le Tableau 2 résume les caractéristiques de l'écoulement dans les deux plans méridionaux (xz) et (yz).

La figure 2.31 présente un exemple d'écoulement à $n = -1$ qui montre, à partir des trajectoires des particules superposées aux lignes de courant, comment le fluide est évacué axialement et horizontalement selon des spirales.

Tableau 2 : Récapitulatif des caractéristiques de l'écoulement des deux plans (xz) et (yz)

	<i>Plan (yz)</i>	<i>Plan (xz)</i>
<i>Position du plan</i>	- Perpendiculaire au bras de révolution	- Parallèle au bras de révolution
<i>L'effet de n</i>	<ul style="list-style-type: none"> - La singularité commence à $n=-8$. - L'écoulement commence à reprendre son état initial à $n=-4$. 	<ul style="list-style-type: none"> - La singularité commence à $n=-4$. - Elle continue pour n inférieur à -4
<i>Caractéristiques de l'écoulement</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Présence de zones de séparation et de zones de recirculation au sein du fluide. - Les spirales se collent et se décollent souvent des parois 	<ul style="list-style-type: none"> - Présence de zones de séparation et de zones de recirculation au sein du fluide - Les spirales sont séparées des parois

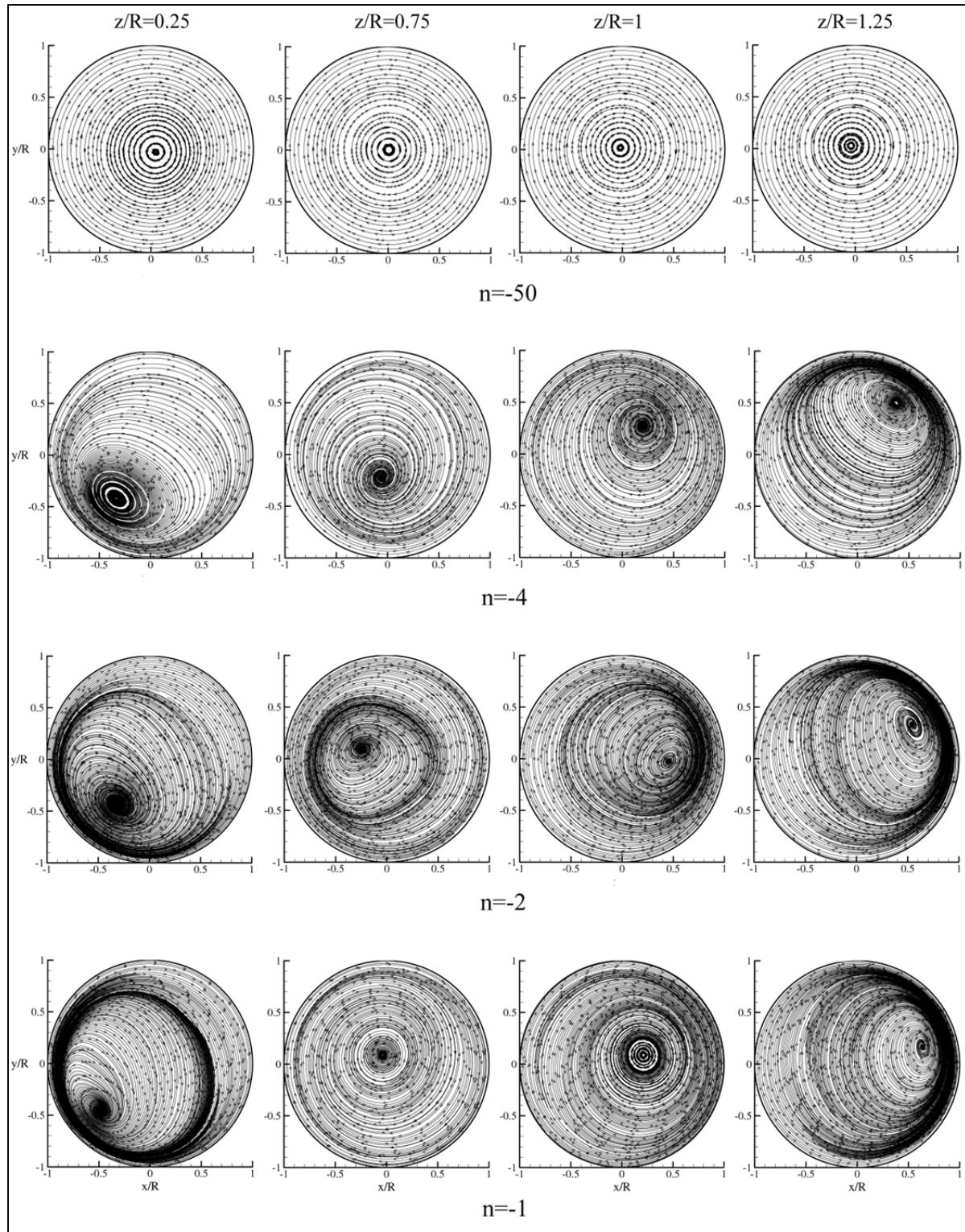


Figure 2.28 Topologie d'écoulement dans le mélangeur planétaire pour différents plans horizontaux (xy) perpendiculaires à l'axe de rotation. n variable et $Re_\omega=125$

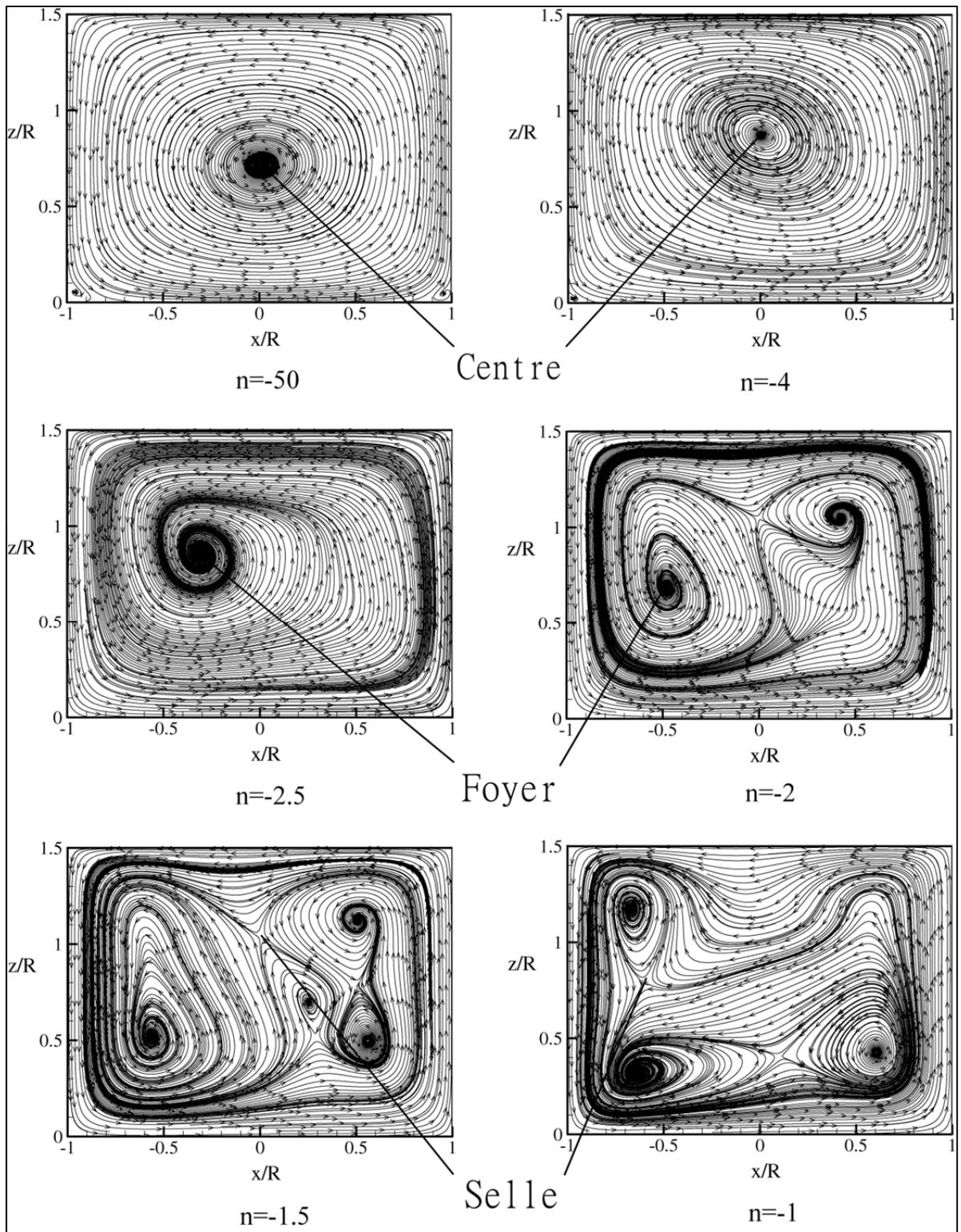


Figure 2.29 Topologie d'écoulement dans le mélangeur planétaire pour le plan (xz) parallèle au bras de révolution. n variable et $Re_\omega=125$.

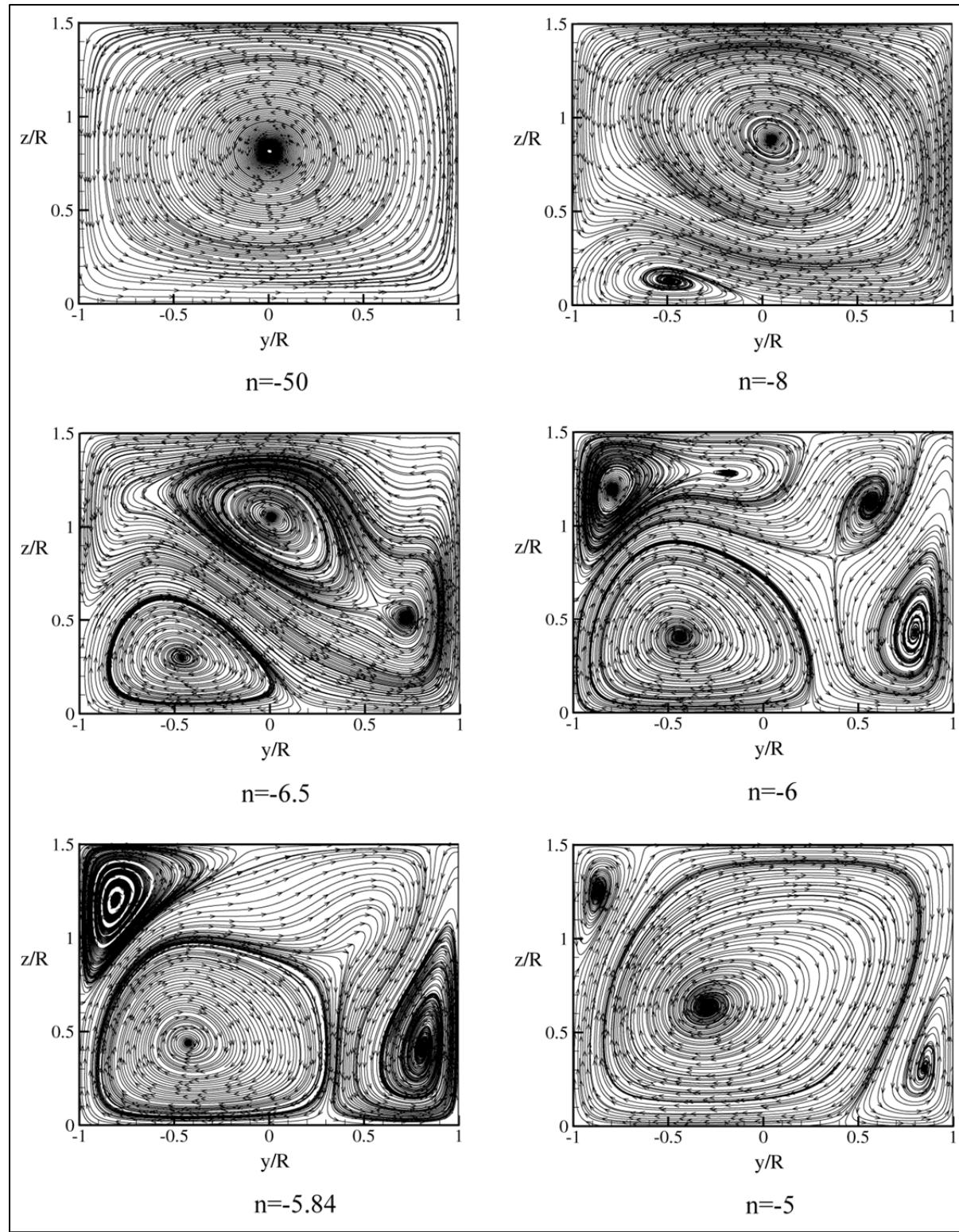


Figure 2.30 Topologie d'écoulement dans le mélangeur planétaire pour le plan (yz) perpendiculaire au bras de révolution. n variable et $Re_\omega=125$.

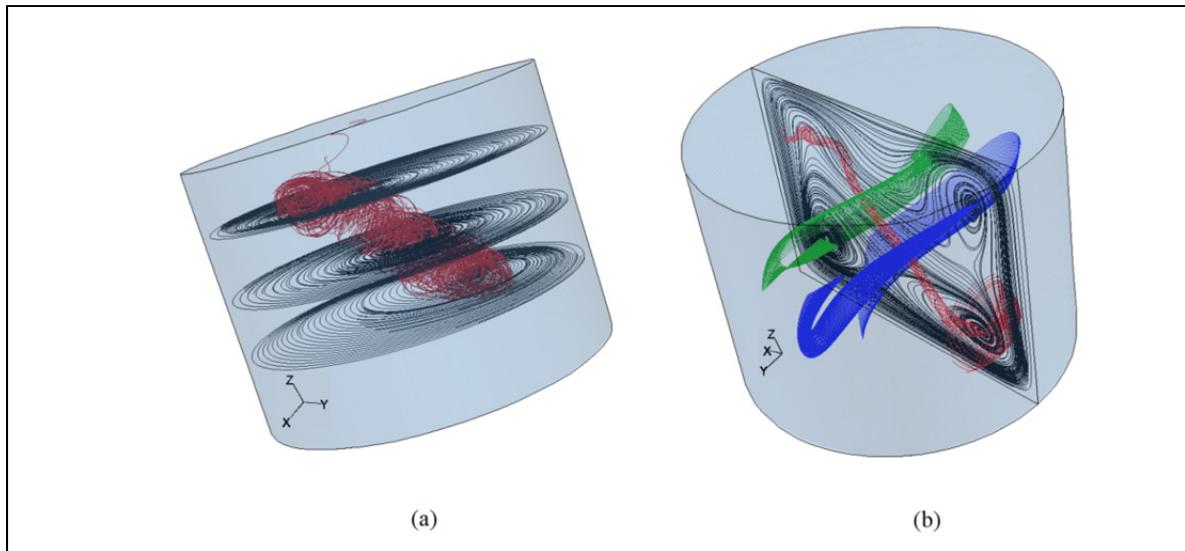


Figure 2.31 Structure de l’écoulement dans le mélangeur. Les trajectoires et la fonction de courant sont calculées à partir de V_{BM} . Cas de $n = -1$ et $Re_\omega = 125$. (a) : exemple montrant comment le fluide est évacué axialement selon des spirales le long de l’axe de rotation. Les trois plans représentés dans la figure sont des plans (xy) à $z/R = 0.5, 0.75$ et 1.25 . (b) : Exemple montrant comment le fluide est évacué horizontalement au centre des foyers sur le plan (xz).

2.5 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à l’analyse qualitative de l’écoulement dans le MPSL. Cette analyse nous a permis de dessiner un portrait qualitatif global de la dynamique d’écoulement dans le MPSL pour les ratios de vitesses étudiés. Des structures tourbillonnaires ont été observées dans ce mélangeur pour un ratio de vitesses rotation/révolution variable et un nombre de Reynolds de rotation constant. Selon l’analyse des résultats obtenus, l’écoulement se divise en deux parties, une rotation primaire au voisinage de la paroi, et une rotation secondaire au voisinage de l’axe géométrique du MPSL.

La rotation secondaire est définie par des spirales et est fonction du ratio n . Pour pouvoir mesurer l’axe de rotation secondaire, nous avons testé différents critères d’identification des structures tourbillonnaires disponibles dans la littérature (minimum de pression, maximum de

vorticité, le critère Q , le nombre de vorticité cinématique N_k et le critère λ_2). Il s'est avéré qu'aucun d'eux ne peut présenter adéquatement les spirales observées dans le mélangeur ni déterminer leurs axes de rotation. Nous avons alors utilisé une méthode géométrique basée sur le calcul des centroïdes des courbes. Les résultats sont très concluants, nous avons pu déterminer approximativement l'axe des spirales étudiées (l'ARS). Le tracé des différents ARS a montré que cet axe change de direction en fonction de n . Au total, nous avons pu identifier trois axes de rotation dans le MPSL, axe de rotation primaire, axe de rotation secondaire et axe de révolution.

Certains résultats de cette analyse qualitative sont similaires à ceux de Vanyo et al. (1995), Noir (2000) et Mouhali (2009) tels que les contours de vorticité, les spirales cylindriques, la présence d'un axe de rotation secondaire, la variation de la direction de l'axe de rotation secondaire, etc. Cela mène à conclure que l'écoulement dans le MPSL n'est pas caractérisé par l'ensemble de conditions de conception et d'opération choisies (F, k, α, n et Re_ω). Il existe donc d'autres nombres adimensionnels qui peuvent caractériser cet écoulement tels que le nombre de Rossby et le nombre d'Ekman ou la combinaison entre ces deux nombres avec le ratio de vitesses n .

L'analyse des trajectoires, des iso-contours de vitesses et de la fonction de courant nous a révélé aussi qu'il y a des ratios de vitesses critiques à partir desquels la dynamique d'écoulement subit des changements majeurs. Ces changements ne peuvent se manifester que sur l'un des deux plans méridionaux étudiés. La figure 2.32 résume ces changements. Elle présente la variation du nombre des points singuliers en fonction du ratio de vitesses. Elle montre que le nombre de points singuliers dans le plan (yz) augmente avec la diminution de n jusqu'à $n = -6$ pour lequel une symétrie de l'écoulement est observée dans ce plan. Le nombre des points singuliers diminue par la suite pour des ratios inférieurs à -6 dans le plan (yz) et commence à augmenter pour le plan (xz). Cette augmentation continue pour les ratios inférieurs à $n = -2$, le ratio de vitesse pour lequel une symétrie de l'écoulement est encore une fois observée dans le plan (xz). Rappelons que, pour les mêmes conditions physiques choisies (k, α, F, Re_ω), Lacroix a remarqué que la puissance dissipée et le temps

de mélange prennent des valeurs optimales pour des ratios de vitesses n comprises entre -6 et -2 .

À ce stade de l'étude, nous ne pouvions pas expliquer ce phénomène qui apparaît dans le MPSL avec l'analyse qualitative. De ce fait, l'analyse quantitative de cet écoulement s'avère nécessaire et va peut-être pouvoir répondre à deux questions : premièrement, qu'est-ce qui fait changer la direction de l'axe de rotation secondaire? Deuxièmement, pourquoi l'écoulement dans le MPSL change de topologie pour certains ratios de vitesses n ? L'analyse quantitative va faire l'objet du chapitre 3.

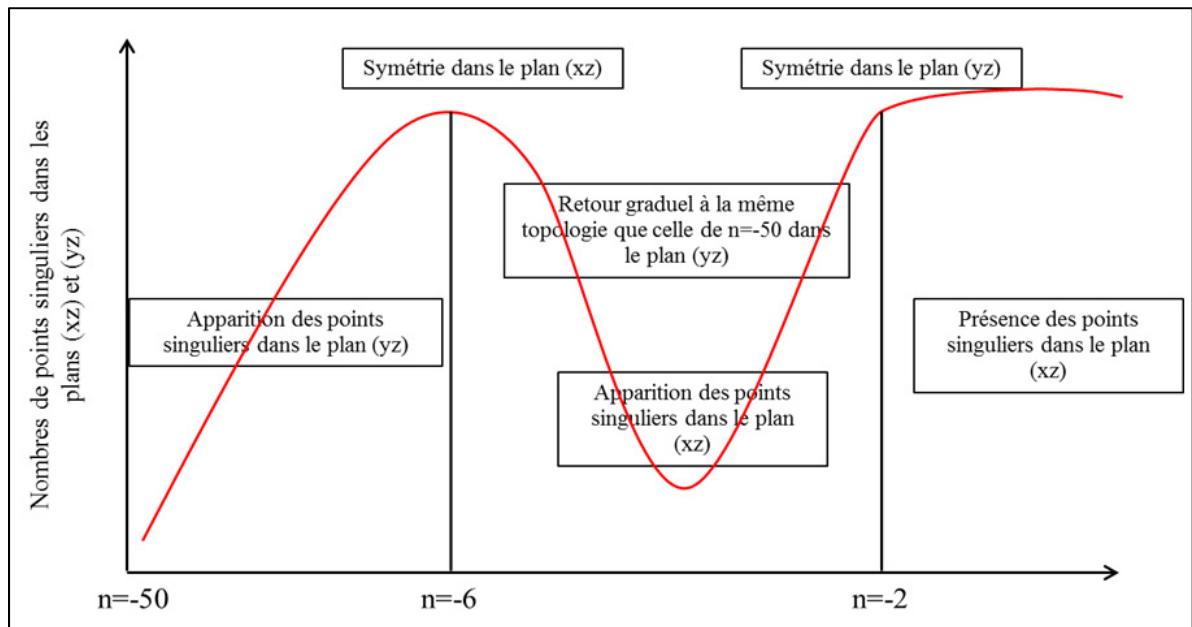


Figure 2.32 Le nombre des points singuliers en fonction du ratio de vitesses pour les deux plans (xz) parallèle au bras de révolution et (yz) perpendiculaire au bras de révolution.

$$Re_\omega = 125$$

CHAPITRE 3

ANALYSE QUANTITATIVE DE LA DYNAMIQUE D'ÉCOULEMENT DANS LE MPSL

3.1 Introduction

Tel qu'il a été mentionné dans la conclusion du chapitre 2, le chapitre 3 est consacré à l'analyse quantitative de l'écoulement dans le MPSL. Rappelons que notre objectif principal est d'étudier l'effet de la révolution sur un écoulement en rotation uniforme. Dans ce chapitre, nous visualisons quantitativement l'écoulement, ce qui permet d'identifier et de quantifier les grandeurs physiques qui agissent sur le fluide et gouvernent sa dynamique d'écoulement. Plusieurs quantités peuvent bien représenter physiquement l'écoulement tels que le débit de pompage et le bilan de forces. Le débit de pompage permet de quantifier le flux axial qui favorise l'action du mélange, ce flux est généré par le déplacement du fluide en spirales. Le bilan de forces identifie et estime les forces dominantes et responsables de toute la dynamique (l'écoulement et le mélange).

Ce chapitre est composé de deux sections :

- calcul des débits de pompage à savoir le débit axial et secondaire;
- calcul du bilan de forces à savoir les iso-contours de forces pour les plans verticaux (xz) et (yz) et le bilan de force pour des coupes dans les plans (xz) et (yz).

L'analyse du bilan de forces pour étudier et caractériser l'écoulement dans le MPSL est inspirée d'un travail d'Iwatsu (2005). Ce dernier a étudié un écoulement 2D axisymétrique dans un cylindre à fond tournant et une surface libre indéformable. Son analyse du bilan de forces a pu simplifier les équations de conservation de quantité de mouvement en négligeant certains termes de forces ou d'accélérations qui ont une faible amplitude.

3.2 Les débits de pompage

Le débit de pompage est parmi les caractéristiques globales qui définissent un procédé de mélange. Certains procédés nécessitent un pompage fort afin de favoriser la turbulence et par conséquent le mélange, d'autres tels que le mélange des pâtes, demandent un débit plus faible qui assure un bon cisaillement. Sa quantification s'avère donc importante pour n'importe quelle technique de mélange. Le pompage du fluide dans une cuve agitée se fait selon différentes directions :

- la direction axiale : où le fluide est pompé axialement selon l'axe géométrique du contenant. On définit dans ce cas le débit de pompage axial Q_{ax} comme étant le débit du fluide qui passe à travers le plan (xy) perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 3.1). il est défini par l'équation 3.1 (Alliet-Gaubert et al., 2006, Devals et al., 2007, Farhat et al.2007);

$$Q_{ax}(z) = \int_A w_{BM}^- dx dy = \int_A w_{BM}^+ dx dy \quad (3.1)$$

Où w_{BM}^- et w_{BM}^+ sont respectivement les composantes axiales de la vitesse d'écoulement de signe négatif et positif.

- la direction secondaire : où le fluide est pompé tangentiellement au plan (xy) perpendiculaire à l'axe de rotation. Le débit secondaire Q_{sd} est défini tel que (Heniche et Tanguy, 2005)

$$Q_{sd}(z) = R[\psi_{max}(z) - \psi_{min}(z)] \quad (3.2)$$

ψ_{max} et ψ_{min} sont respectivement les valeurs maximale et minimale de la fonction de courant dans le plan (xy) et R le rayon du cylindre. On rappelle que la fonction de courant ψ est obtenue en intégrant les deux composantes de vitesses u_{BM} et v_{BM} tangentes au plan (xy) (équation 2.2). Il reste à noter aussi que le débit de pompage secondaire englobe les

deux pompages radial et tangentiel. Ces deux derniers sont obtenus en remplaçant ψ par ψ^r ou ψ^θ dans l'équation 3.2 (Farhat et al., 2007).

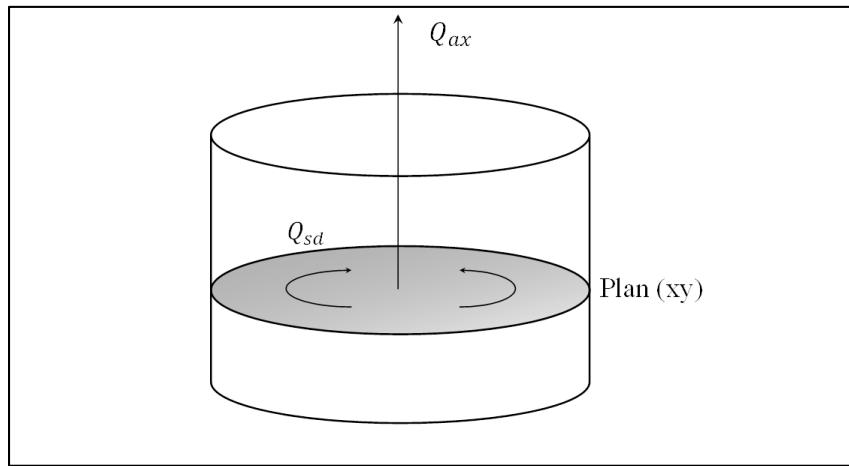


Figure 3.1 Présentation schématique des débits de pompage axial et secondaire

Pour notre part, nous procédons par analogie avec les réacteurs agités pour, d'un côté, caractériser la technique du mélange avec le MPSL, et d'un autre côté, quantifier les résultats du pompage par spirales observés qualitativement avec les trajectoires des particules, les contours de vitesses et la fonction de courant. Treize plans horizontaux (xy) uniformément espacés y compris le fond et la surface libre sont choisis pour calculer le débit de pompage axial et secondaire.

La figure 3.2 présente la variation du débit axial en fonction de la hauteur du cylindre pour différents ratios de vitesses n et à $Re_\omega = 125$. La hauteur est normalisée par rapport au rayon du cylindre R et le débit axial par rapport au débit $R^3 \omega_r$. Nous remarquons que, même si pour des ratios de vitesses inférieures à -8 le fluide est pompé différemment dans la direction axiale (selon les iso-contours des vitesses obtenues dans les figures 2.25 et 2.27), le débit de pompage subit les mêmes variations et les courbes ont la même tendance pour chaque ratio de vitesses, c'est-à-dire que le débit axial augmente en s'éloignant du fond pour atteindre une valeur maximale à la mi-hauteur du cylindre et diminue par la suite pour

s'annuler à la surface libre. En outre, ce débit devient de plus en plus important lorsque la vitesse de révolution est élevée (n plus faible).

Les résultats du débit de pompage secondaire sont portés sur la figure 3.3. Cette fois-ci, seuls les ratios compris entre -8 et -5 qui se comportent différemment des autres ratios parce qu'ils ont une variation du pompage secondaire un peu particulière. Pour ces ratios, la variation du débit secondaire est très faible au-delà de $z/R = 0.2$. Par contre, pour les ratios supérieurs ou égaux à -8 et inférieurs ou égaux à -5 , ce débit varie de la même manière, toutes les courbes prennent la forme S, cela veut dire que le débit augmente avec la hauteur du cylindre jusqu'aux alentours de $z/R = 0.2$ et décroît par la suite jusqu'au voisinage de $z/R = 0.8$ et réaugmente au-delà de ce plan. En outre, un accroissement notable du débit secondaire est noté lorsque la vitesse de révolution augmente jusqu'à un ratio $n = -2$. Par ailleurs, malgré que les courbes du débit de pompage pour $n = -1$ et -2 suivent les mêmes variations, elles se croisent à deux reprises. Rappelons que lorsque nous avons analysé la topologie d'écoulement avec la fonction de courant nous avons constaté que l'écoulement avait une topologie particulière sur le plan (yz) pour des ratios compris entre -8 et -5 et sur le plan (xz) pour des ratios inférieurs à -2.5 .

Nous remarquons, à partir des deux figures 3.2 et 3.3 que les variations des deux débits diffèrent. Nous avons pris l'exemple de $n = -4$ sur la figure 3.4 pour illustrer cette différence. Nous constatons alors que

- le débit axial augmente plus rapidement que le débit secondaire au voisinage du fond;
- la valeur maximale du pompage axial correspond à la valeur minimale du pompage secondaire. Ces deux valeurs sont au voisinage de la mi-hauteur ($z/R = 0.8$);
- les deux débits sont inversement proportionnels au-delà de $z/R = 0.3$, c'est-à-dire que le pompage axial diminue lorsque le secondaire ré-augmente.

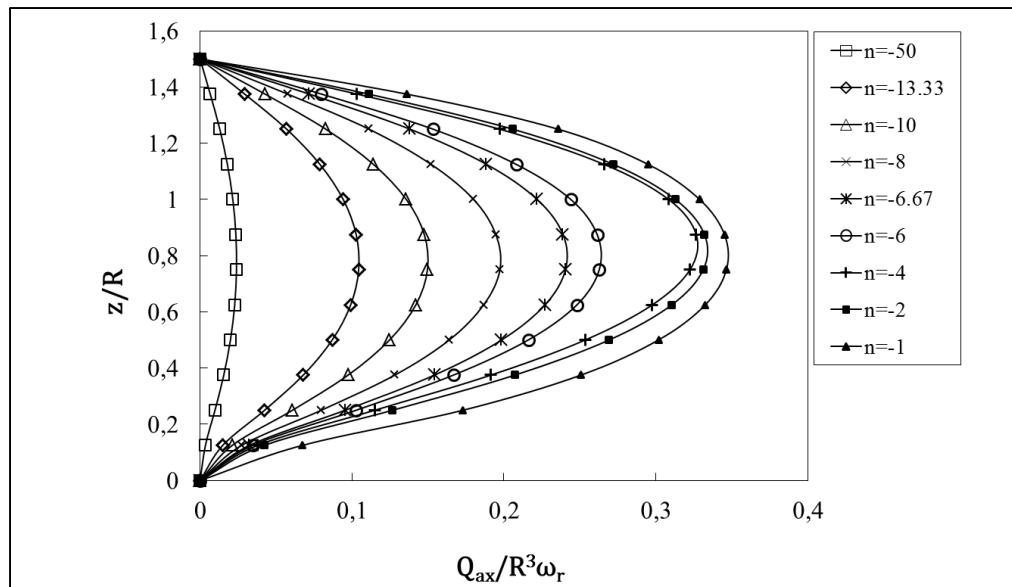


Figure 3.2 Variation du débit de pompage axial le long de l'axe de rotation pour différentes valeurs de n à $Re_\omega = 125$

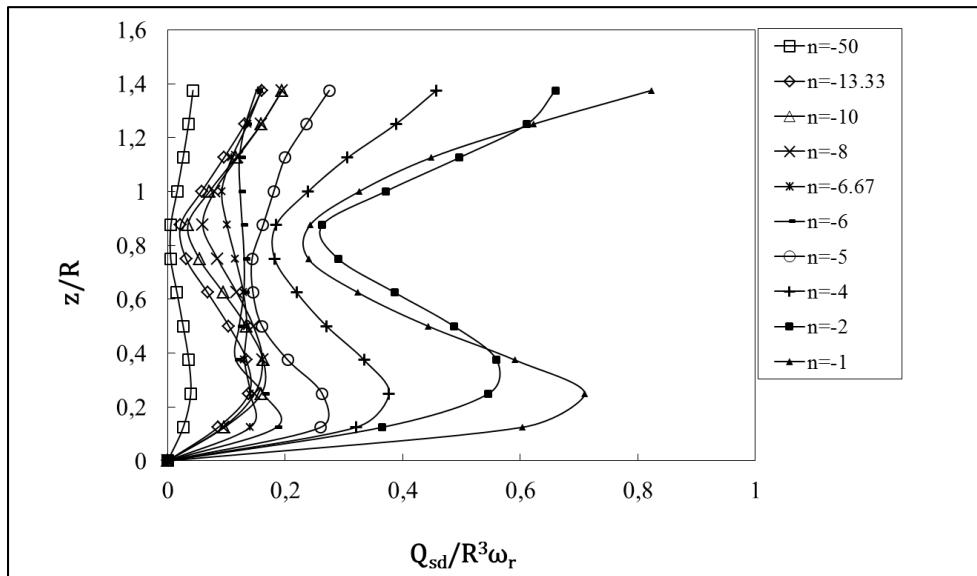


Figure 3.3 Variation du débit de pompage secondaire le long de l'axe de rotation pour différentes valeurs de n à $Re_\omega = 125$

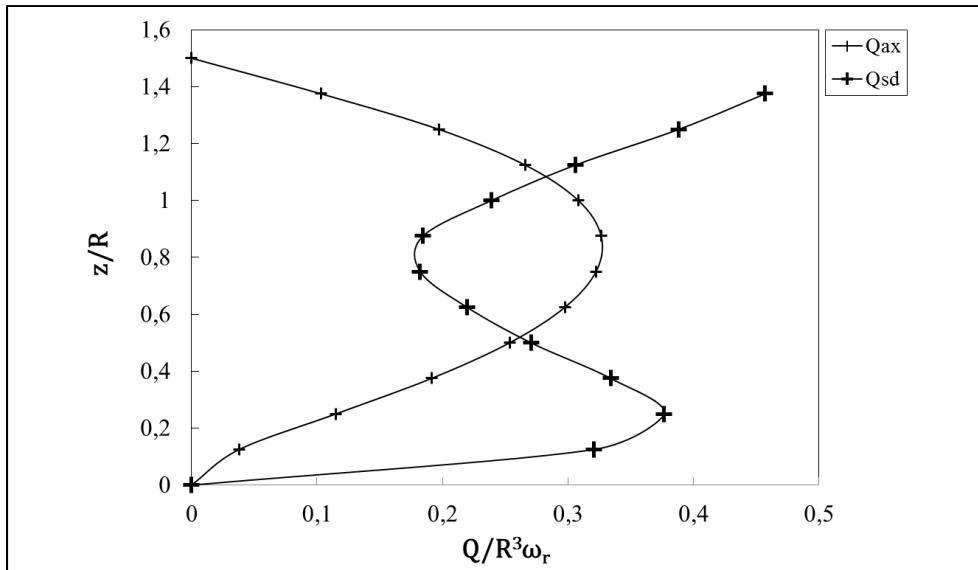


Figure 3.4 Variation du débit de pompage secondaire et axial le long de l'axe de rotation, $n = -4$ et $Re_\omega = 125$

3.3 Le bilan de forces

La topologie d'écoulement dans le MPSL dépend de l'accélération qui dépend elle-même des forces agissantes sur le fluide. L'idée dans cette section sera donc d'essayer de lier ces forces à la topologie d'écoulement obtenue dans le chapitre analyse qualitative de l'écoulement à savoir les trajectoires de particules, les contours de vitesses et les lignes de courant. Nous présenterons en premier lieu les iso-contours de chacune des forces appliquées (Équations 3.3, 3.4 et 3.5) sur les deux plans méridionaux parallèle (xz) et perpendiculaire (yz) à l'axe de révolution. En second lieu, nous établirons le bilan de toutes les forces agissantes sur une particule pour différentes coupes dans ces deux plans.

Le calcul de l'écoulement est fait par rapport à la révolution mais les calculs numériques dans *Fluent* ont été faits tel que les vecteurs de forces et d'accélération ont été projetés dans un repère en simple révolution mais superposé au repère de rotation. Les transformations vectorielles du repère (**B**) vers le repère (**C**) sont détaillées dans l'annexe IV. Les trois composantes de l'équation (1.3) s'écrivent comme suit

- selon (*ox*)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 2\Omega_r v \cos \alpha + [(\Omega_r \cos \alpha)^2 (x + R_0 \cos \alpha) - \Omega_r^2 \sin \alpha \cos \alpha (z - R_0 \sin \alpha)] \quad (3.3)$$

- selon (*oy*)

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - 2\Omega_r (u \cos \alpha - w \sin \alpha) + \Omega_r^2 y \quad (3.4)$$

- selon (*oz*)

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - 2\Omega_r v \sin \alpha - [\Omega_r^2 \sin \alpha \cos \alpha (x + R_0 \cos \alpha) - (\Omega_r \cos \alpha)^2 (z - R_0 \sin \alpha)] \quad (3.5)$$

Dans les équations 3.3, 3.4 et 3.5, u , v et w sont les trois composantes de la vitesse relative à la révolution. Pour alléger le texte, nous avons omis de mettre l'indice (_{BM}) pour les vitesses dans les équations 3.3 à 3.5. Nous avons normalisé les forces par rapport à la force centrifuge de rotation ($\omega_r^2 \cdot R$) et les coordonnées par rapport au rayon du cylindre R . Nous rappelons aussi que les forces dans ces équations sont exprimées par unité de masse (accélération).

3.3.1 Iso-contours de forces

Dans cette sous-section, nous étudions le comportement du fluide pour les deux plans méridionaux (*xz*) et (*yz*), nous allons le faire en analysant les iso-contours de chaque terme dans l'équation 1.3 selon les trois directions (équation 3.3, 3.4 et 3.5), cela va nous permettre d'identifier la force qui modifie la topologie d'écoulement dans ces deux plans. Le terme convectif et le gradient de pression ont été calculés par *Fluent*, les résultats ont été validés selon deux méthodes. Dans la première méthode nous avons utilisé une *UDF* (User Define Function, un code écrit en langage *C*, compilé et exécuté par *Fluent*), avec cette *UDF* nous

avons calculé le gradient des vitesses et le gradient de la pression pour chaque cellule. Dans la deuxième méthode, nous avons calculé les termes de gradient avec un code *Matlab* à partir d'un champ de vitesses et de pression exporté de *Fluent*. Les trois composantes du terme visqueux ont été déduites des équations 3.3, 3.4 et 3.5.

Nous avons choisi de présenter, en premier lieu, la force centrifuge de révolution dans les figures 3.5 et 3.6 parce qu'elle est simplement fonction des coordonnées et de la vitesse de révolution. Cette force intervient en réponse au mouvement de révolution, elle augmente quand on fait augmenter la vitesse de révolution. Elle varie linéairement par rapport aux coordonnées : pour les deux composantes « x » et « z » des droites de pente positive dans le plan (*xz*) (équations 3.3 et 3.5) et des droites horizontales dans le plan (*yz*) (équation 3.4) sont obtenues. La composante « y » est nulle dans le plan (*xz*) et varie linéairement par rapport à *y* dans le plan (*yz*).

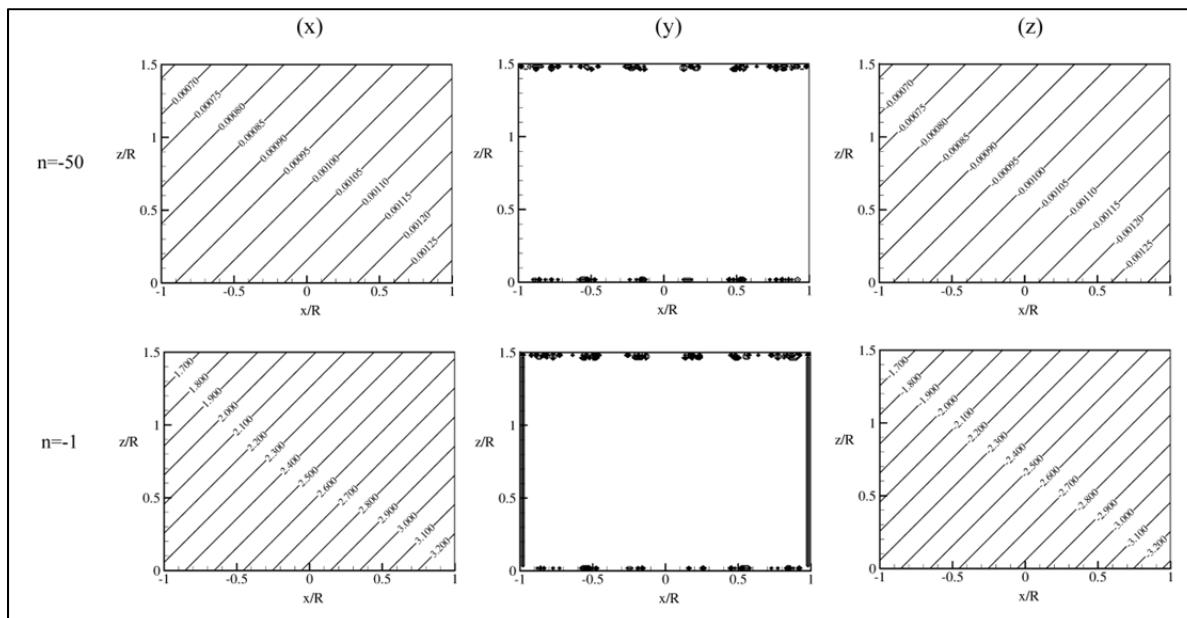


Figure 3.5 Iso-contour de la force centrifuge pour $n = -50$ et -1 Plan (*xz*), $Re_{\omega} = 125$

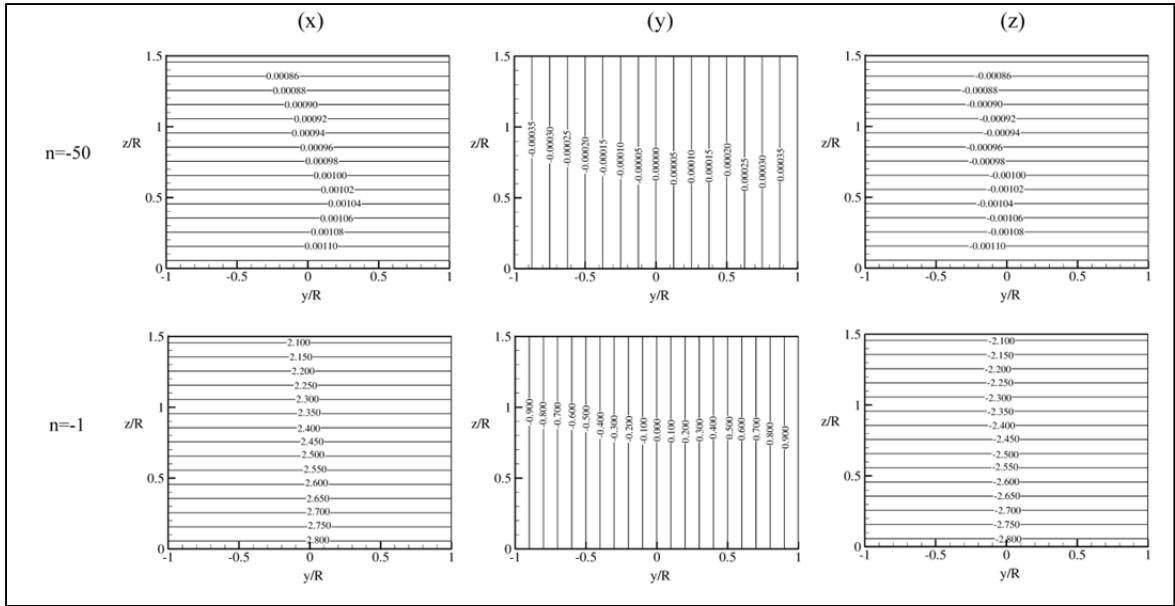


Figure 3.6 Iso-contour de la force centrifuge pour $n = -50$ et -1 . Plan (yz), $Re_\omega = 125$

Les figures 3.7 à 3.14 présentent les iso-contours des autres termes de l'équation de conservation de quantité de mouvement dans les trois directions (Eq. 3.3, 3.4 et 3.5) (l'accélération convective, la force de Coriolis, le gradient de pression et la force visqueuse) pour les deux plans méridionaux (xz) et (yz).

Point de vue quantitatif

Selon le point de vue quantitatif, l'amplitude des forces et d'accélérations varie d'un ratio n à l'autre. Pour les figures 3.7 à 3.14 nous remarquons que :

1) pour l'accélération convective :

Les figures 3.7 et 3.11 présentent les iso-contours des trois composantes de l'accélération convective sur le plan (xz) et (yz) respectivement. Ces figures montrent que :

- le fluide a une accélération plus importante au voisinage des parois par rapport à l'intérieur du contenant, cette remarque est valable pour les trois composantes du terme convectif;

- l'accélération « x » dans le plan (xz) et « y » dans le plan (yz) suivent des quasi-droites verticales à inclinées vers la droite jusqu'à $n = -2$ dans les zones qui sont loin du fond tandis qu'au voisinage du fond les iso-contours sont courbés. Cette forme des courbes est due aux conditions de non glissement du fond en rotation/révolution et de glissement de la surface libre rigide en révolution. Au-delà de $n = -2$ les lignes sont plus courbées. Ces accélérations augmentent lorsqu'on s'approche des parois latérales, leurs maximums atteignent ± 1.0 pour les ratios étudiés;
- l'accélération « y » dans le plan (xz) et l'accélération « x » dans le plan (yz) augmentent généralement loin des parois latérales et en allant vers la surface libre et vers le fond. Le maximum varie entre 0.03 et 0.6 (de $n = -50$ à -1) pour l'accélération « y » et entre 0.05 et 0.45 pour l'accélération « x »;
- l'accélération « z » se concentre plus à l'intérieur dans le plan (xz) et croît significativement pour les ratios $n = -50, -8$ et -6 (le maximum varie entre ± 0.024 à ± 0.16) tandis qu'elle se concentre diagonalement et augmente faiblement pour les autres ratios (le maximum varie entre ± 0.25 à ± 0.3).

2) pour la force de Coriolis :

Les figures 3.8 et 3.12 présentent les iso-contours des trois composantes de la force de Coriolis par unité de masse sur le plan (xz) et (yz) respectivement. Ces figures montrent que :

- le terme de Coriolis augmente avec la diminution du ratio de vitesses et il devient plus important lorsqu'on s'approche des parois;
- le module de la force de Coriolis est légèrement élevé dans le plan (xz) (parallèle au bras de révolution) par rapport au plan (yz) (perpendiculaire au bras de révolution) (le résultat est montré dans l'annexe V); si nous prenons comme exemple le cas $n = -2$ le maximum est de 0.9 dans le plan (xz) alors qu'il est égal à 0.7 dans le plan (yz);
- les iso-contours de la composante « x » et « z » dans le plan (xz) et la composante « y » dans le plan (yz) du terme de Coriolis sont des quasi-droites à faibles vitesses de

révolution, ces droites deviennent de plus en plus courbées quand cette vitesse augmente, particulièrement au voisinage du fond. Le maximum varie entre ± 0.025 et ± 1.4 ;

- les autres composantes de la force de Coriolis ont la même topologie et un axe de symétrie soit diagonal (composante « y » dans le plan (xz) pour $n = -50$ à $n = -4$) soit horizontal (composantes « x » et « z » dans le plan (yz) pour $n = -50, -4, -2, -1$), excepté pour les ratios dont la dynamique est particulière ($n = -2$ et -1 pour le plan (xz), et $n = -8$ et $n = -6$ pour le plan (yz)) (figures 3.8 et 3.12). La symétrie n'est pas totale à cause des conditions de non glissement du fond et de glissement de la surface libre. Ces mêmes composantes (composante « y » dans le plan (xz) et composantes « x » et « z » dans le plan (yz)) sont moins importantes par rapport aux premières (composantes « x » et « z » dans le plan (xz) et la composante « y » dans le plan (yz)), le maximum varie de ± 0.0014 à ± 0.8 .

3) pour le gradient de la pression :

Les figures 3.9 et 3.13 présentent les iso-contours des trois composantes du gradient de pression par unité de masse sur le plan (xz) et (yz) respectivement. Ces figures montrent que :

- le gradient de pression augmente lentement de $n = -50$ à $n = -4$, tandis qu'il subit une très forte augmentation de $n = -2$ à -1 ;
- le gradient de pression balance une grande partie le terme convectif à faible vitesse de révolution (de $n = -50$ à $n = -8$) (figures 3.7 avec 3.9 et figures 3.11 avec 3.13). Au-delà, tous les termes interviennent dans le bilan;
- les iso-contours de la composante « y » du gradient de pression dans le plan (yz) pour $n = -50$ à -1 sont quasi-symétriques par rapport à un axe légèrement décalé de l'axe de rotation géométrique avec un inversement de signe (figure 3.13).

4) pour la force visqueuse :

Les figures 3.10 et 3.14 présentent les iso-contours des trois composantes de la force visqueuse par unité de masse sur le plan (xz) et (yz) respectivement. Ces figures montrent que :

- la force visqueuse devient de plus en plus importante lorsqu'on s'approche des parois latérales, du fond et de la surface libre. En outre, et même si le fluide subit de déformation et de rotation, le terme visqueux est très faible loin des parois et plus à l'intérieur du cylindre, il est de l'ordre de 10^{-2} pour tous les ratios étudiés. Rajoutons que le cisaillement n'est pas forcément augmenté avec l'augmentation de la vitesse de révolution, excepté pour les parois.

Point de vue qualitatif

Dans ce qui suit, nous discutons et décrivons les résultats du terme convectif par rapport aux forces appliquées sur le fluide. L'interprétation des résultats des contours de forces concerne l'ensemble des forces et d'accélérations pour les valeurs de n étudiées. Selon le point de vue qualitatif, et même s'ils varient d'une manière bien structurée et ordonnée par rapport à n , les iso-contours des forces ont un comportement très complexe. Nous remarquons que :

- premièrement, les iso-contours de la force de Coriolis (figures 3.8 et 3.12) ont un lien direct avec la fonction de courant (figure 2.29 et 2.30), ils subissent les mêmes changements de topologie, cela signifie que c'est la force de Coriolis qui modifie la dynamique d'écoulement pour les ratios $n \leq |-8|$ ($n \leq |-2.5|$ pour le plan (xz) et $|-8| \leq n \leq |-3|$ pour le plan (yz));
- deuxièmement, la composante « y » dans le plan (xz) (figure 3.8) et la composante « x » dans le plan (yz) (figure 3.12) de la force de Coriolis modifient directement la composante « y » dans le plan (xz) (figure 3.7) et la composante « z » dans le plan (yz) (figure 3.11) de l'accélération convective jusqu'à avoir une même topologie d'iso-contours des deux forces pour $n = -2$ et $n = -1$;
- troisièmement, les composantes « x » et « z » du terme de Coriolis sont identiques avec un signe « - » (équation 3.3 et 3.5, figures 3.8 et 3.12);

- quatrièmement, la composante « z » de l'accélération convective dans le plan (xz) et (yz) a un plan de symétrie qui change de forme et de position en fonction du ratio n (figures 3.7 et 3.11). Ce plan de symétrie devient très courbé et tourne pour atteindre la diagonale dans le sens trigonométrique dans le plan (yz) tandis qu'il tourne dans le sens inverse dans le plan (xz)
- cinquièmement, la dynamique est similaire entre l'accélération convective et le gradient de pression pour $n = -50$ à $n = -6$ sauf pour les ratios dont l'écoulement est modifié par la force de Coriolis (figures 3.7 et 3.9, figures 3.11 et 3.13) (les ratios $n = -8$ et -6 pour le plan (yz)).
- sixièmement, le terme visqueux agit indépendamment des autres termes, les iso-contours sont particuliers, mais l'accélération est aussi influencée par le cisaillement (figures 3.10 et 3.14).

La description des iso-contours de chaque terme de l'équation de Navier-Stokes nous a donné une idée assez globale sur les forces agissantes sur le fluide dans les deux plans méridionaux (xz) et (yz). L'idée était au départ de voir comment ces contours de forces sont liés à la topologie d'écoulement. Nous avons jugé, par la suite, qu'il est plus judicieux et important aussi d'examiner le bilan de forces appliquées sur une particule de fluide. Cette fois-ci, le portrait sera plus détaillé et complet.

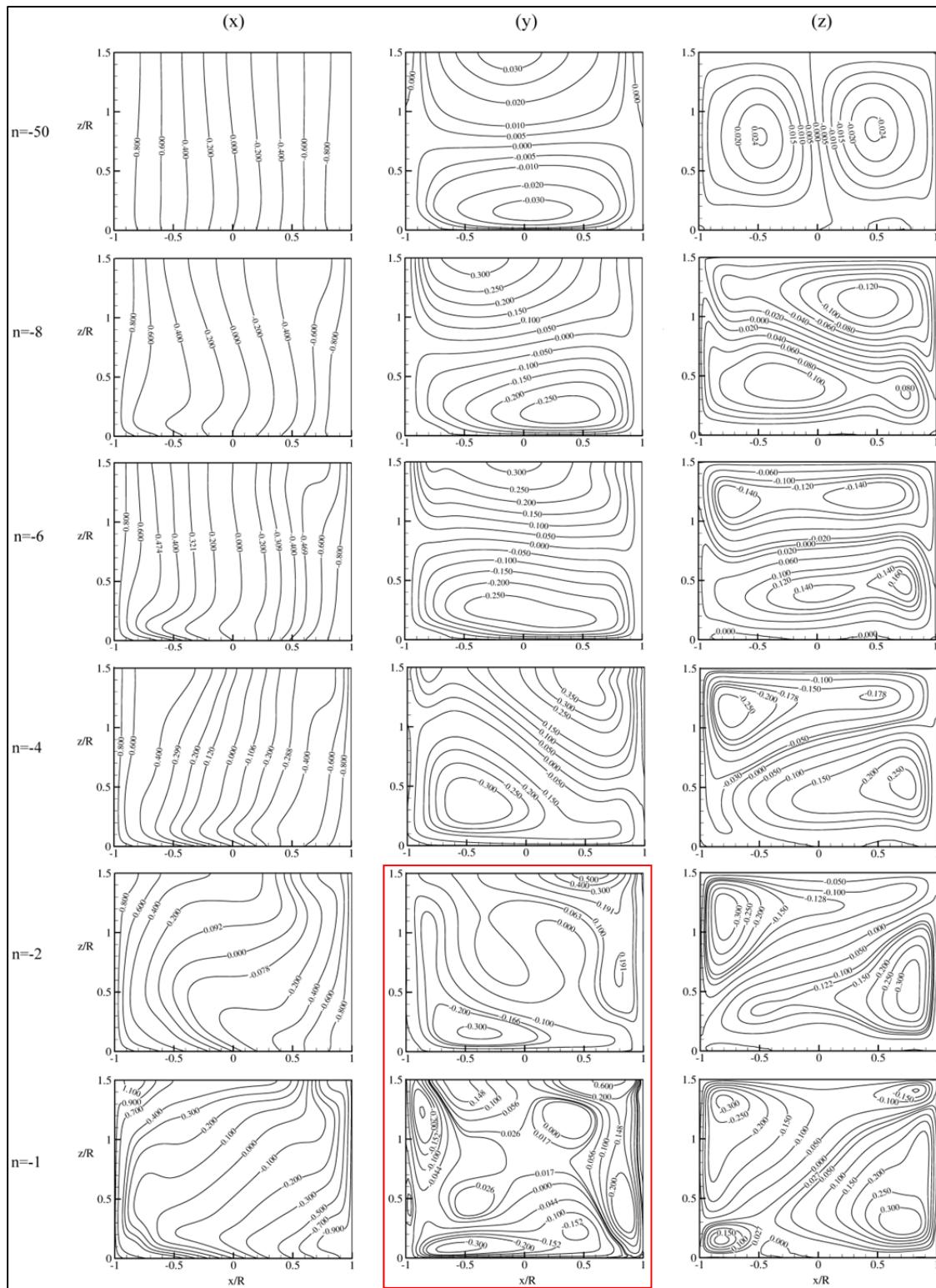


Figure 3.7 Iso-contours de l'accélération convective pour différentes valeurs de n . Plan (xz), $Re_\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail)

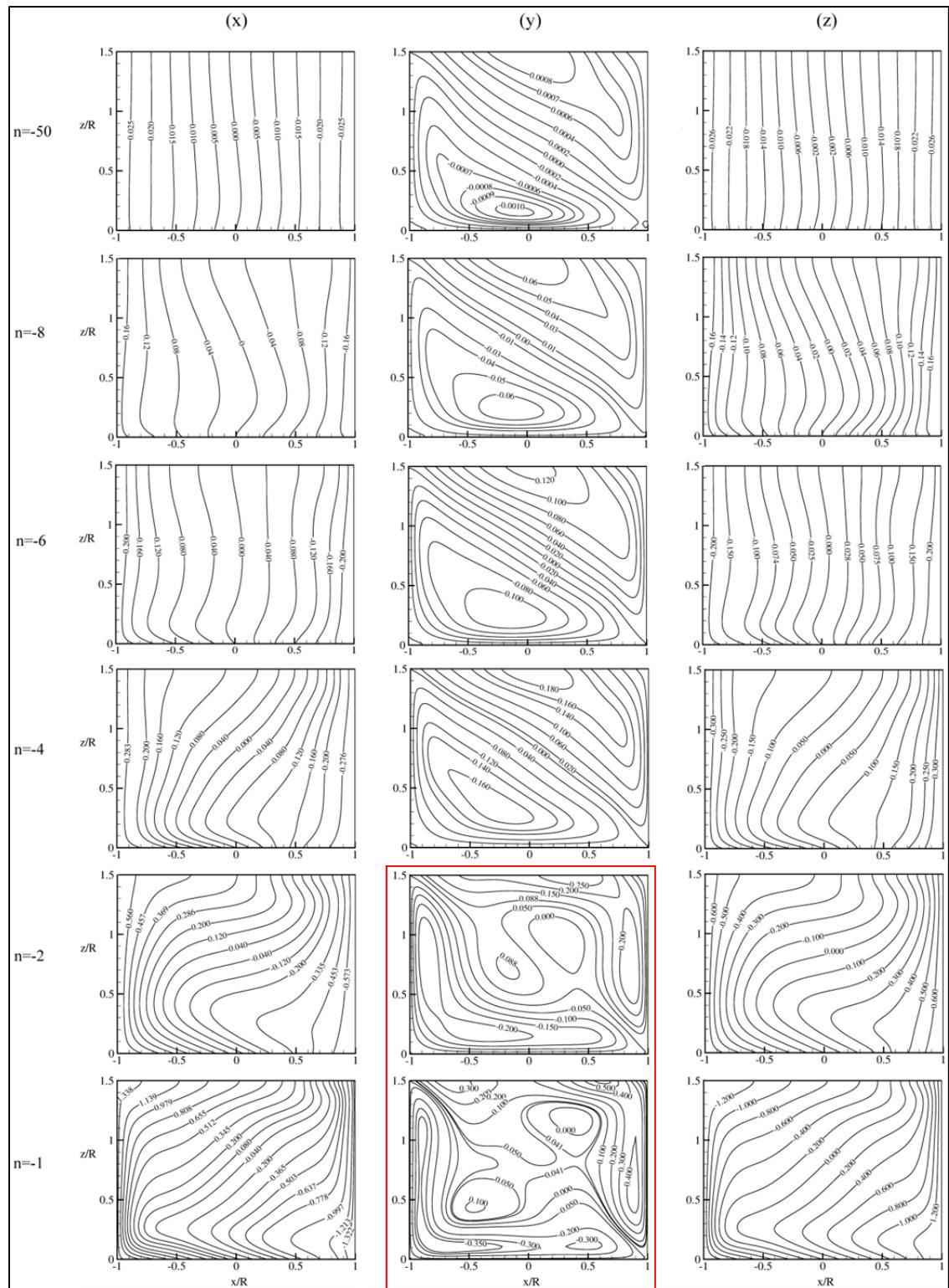


Figure 3.8 Iso-contours de la force de Coriolis pour différentes valeurs de n . Plan (xz), $Re_\omega = 125$. (voir le texte pour le détail)

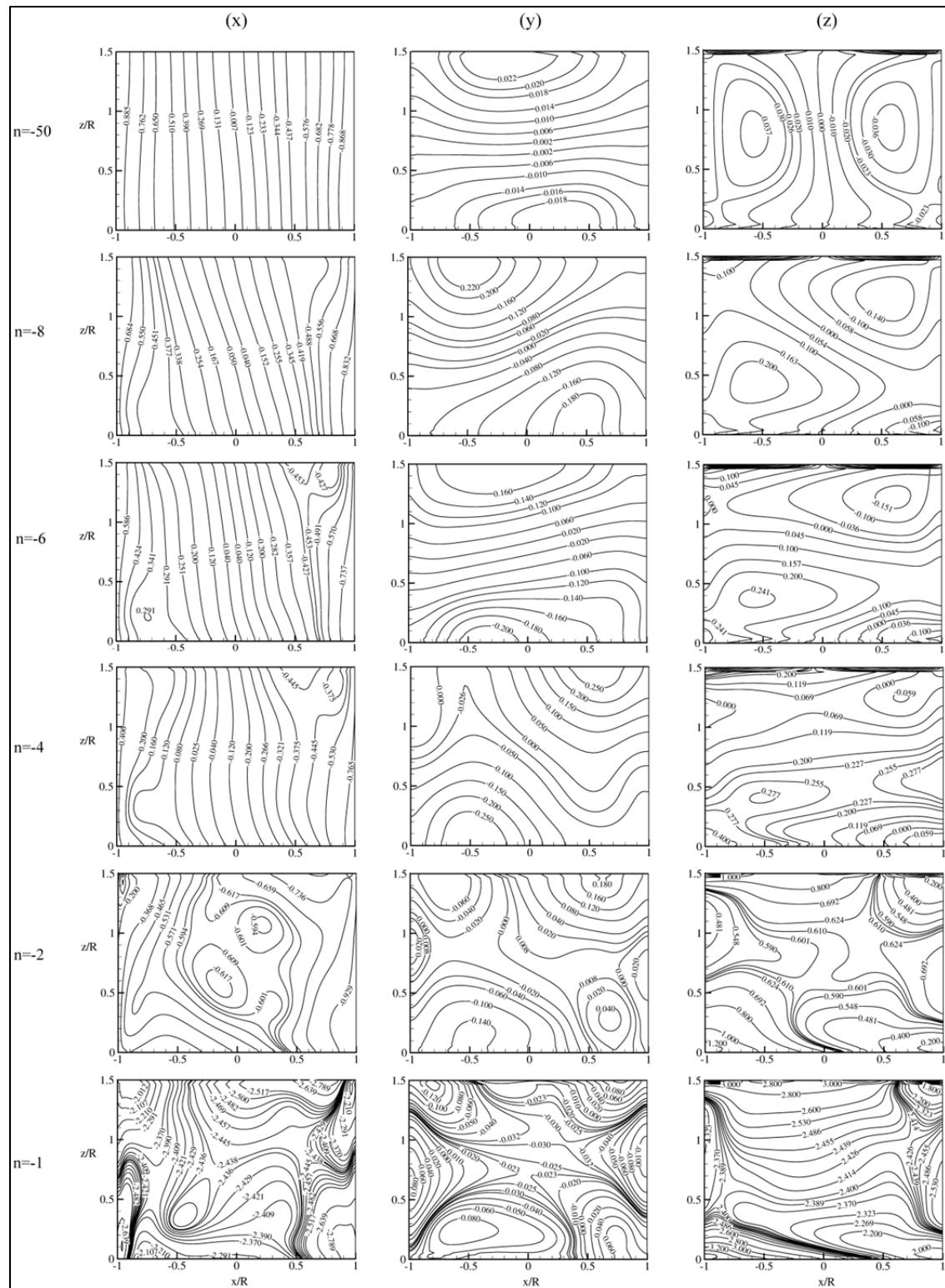


Figure 3.9 Iso-contours du gradient de la pression pour différentes valeurs de n . Plan (xz), $Re_\omega = 125$. (voir le texte pour le détail)

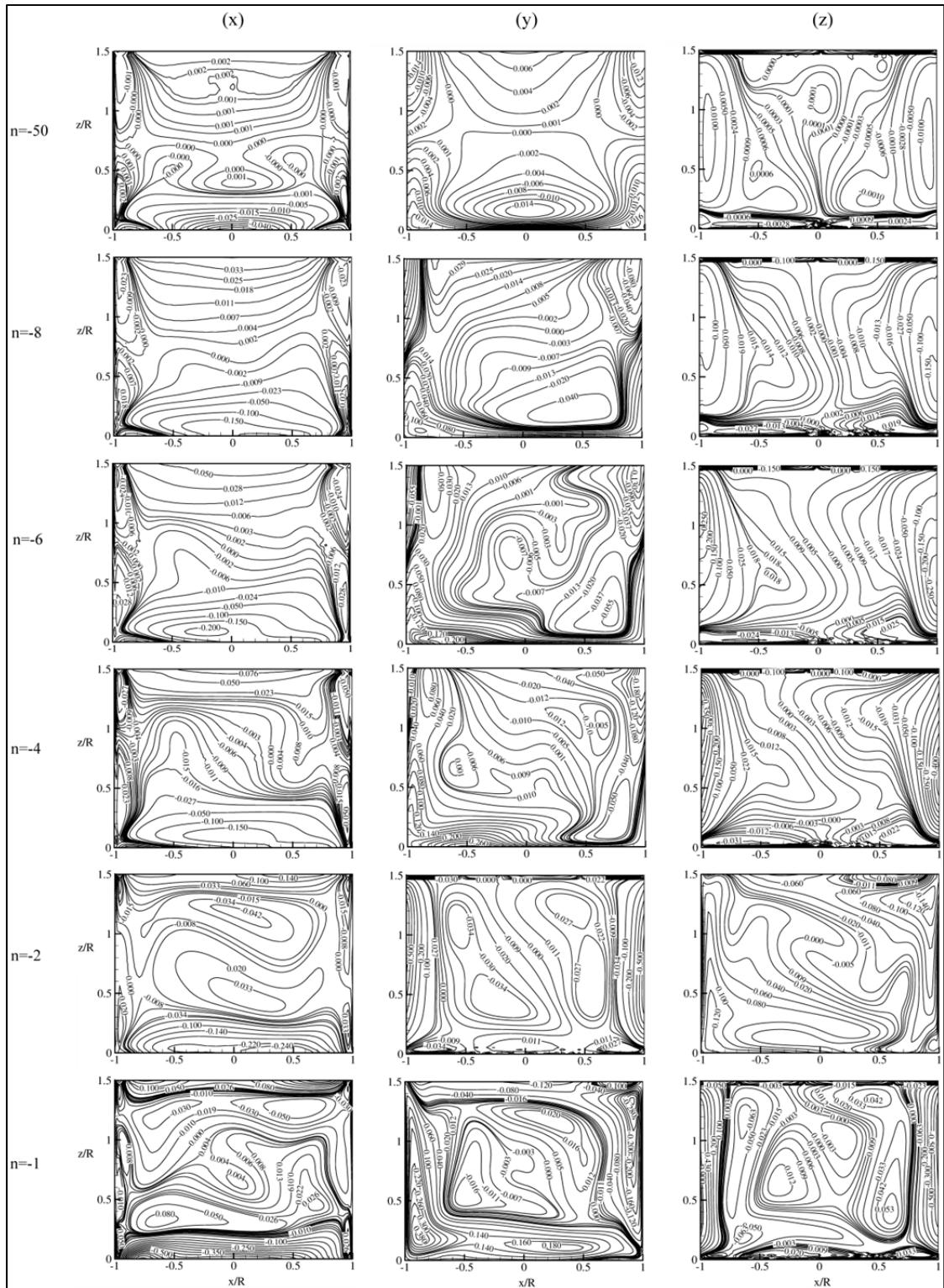


Figure 3.10 Iso-contours de la force visqueuse pour différentes valeurs de n . Plan (xz) $Re_\omega = 125$. (voir le texte pour le détail)

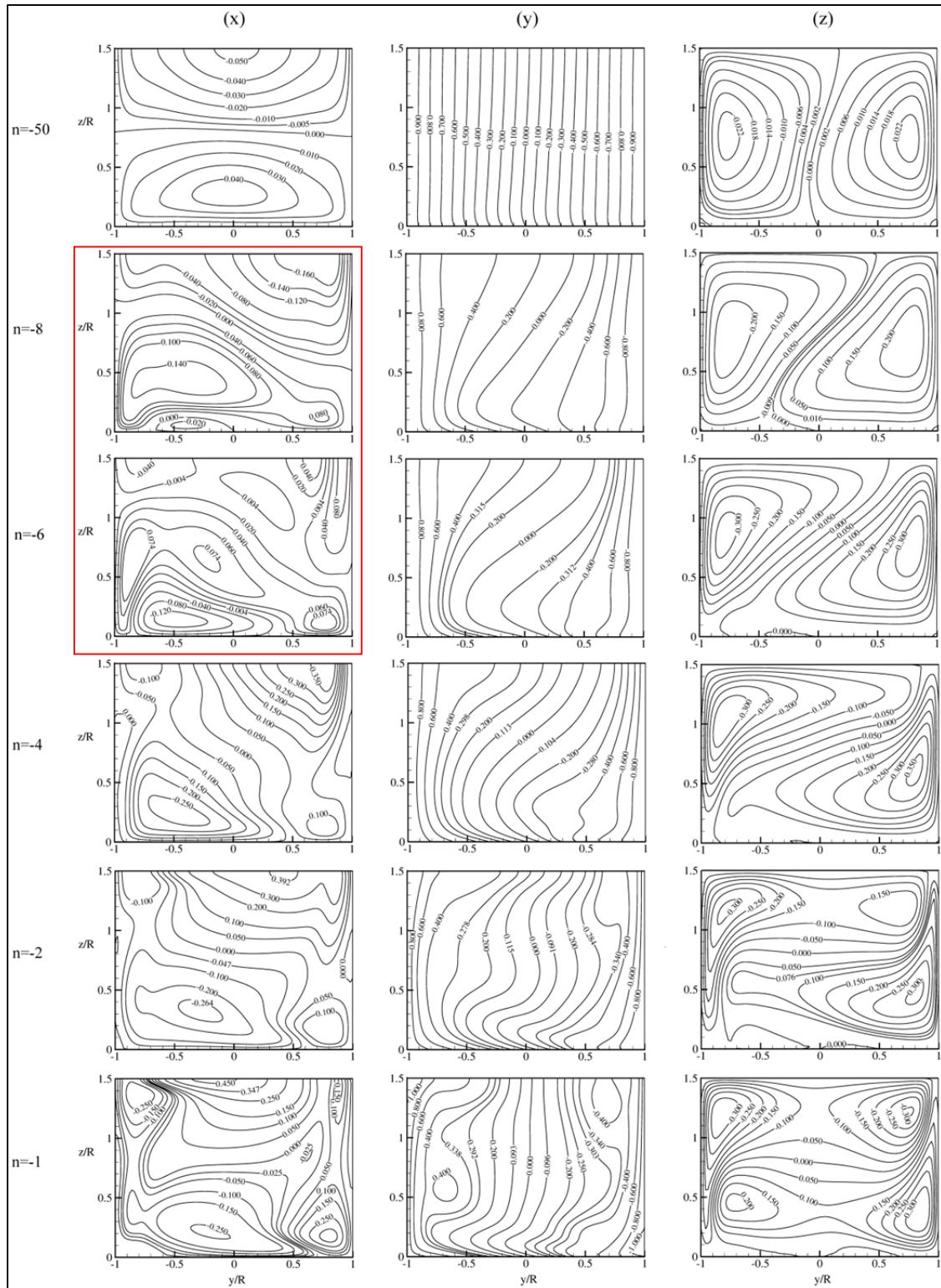


Figure 3.11 Iso-contours de l'accélération convective pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $Re_\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail)

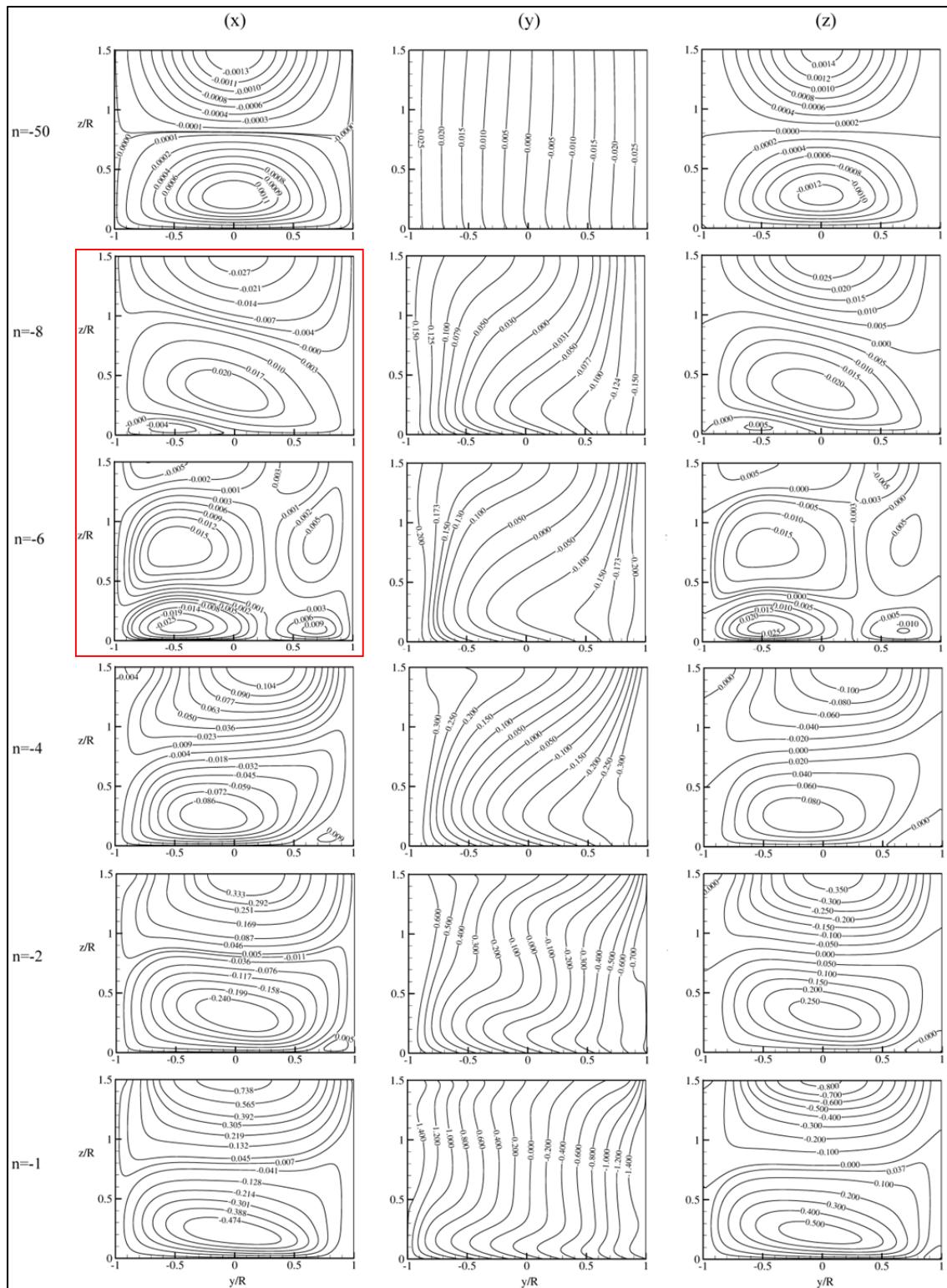


Figure 3.12 Iso-contours de la force de Coriolis pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $Re_\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail)

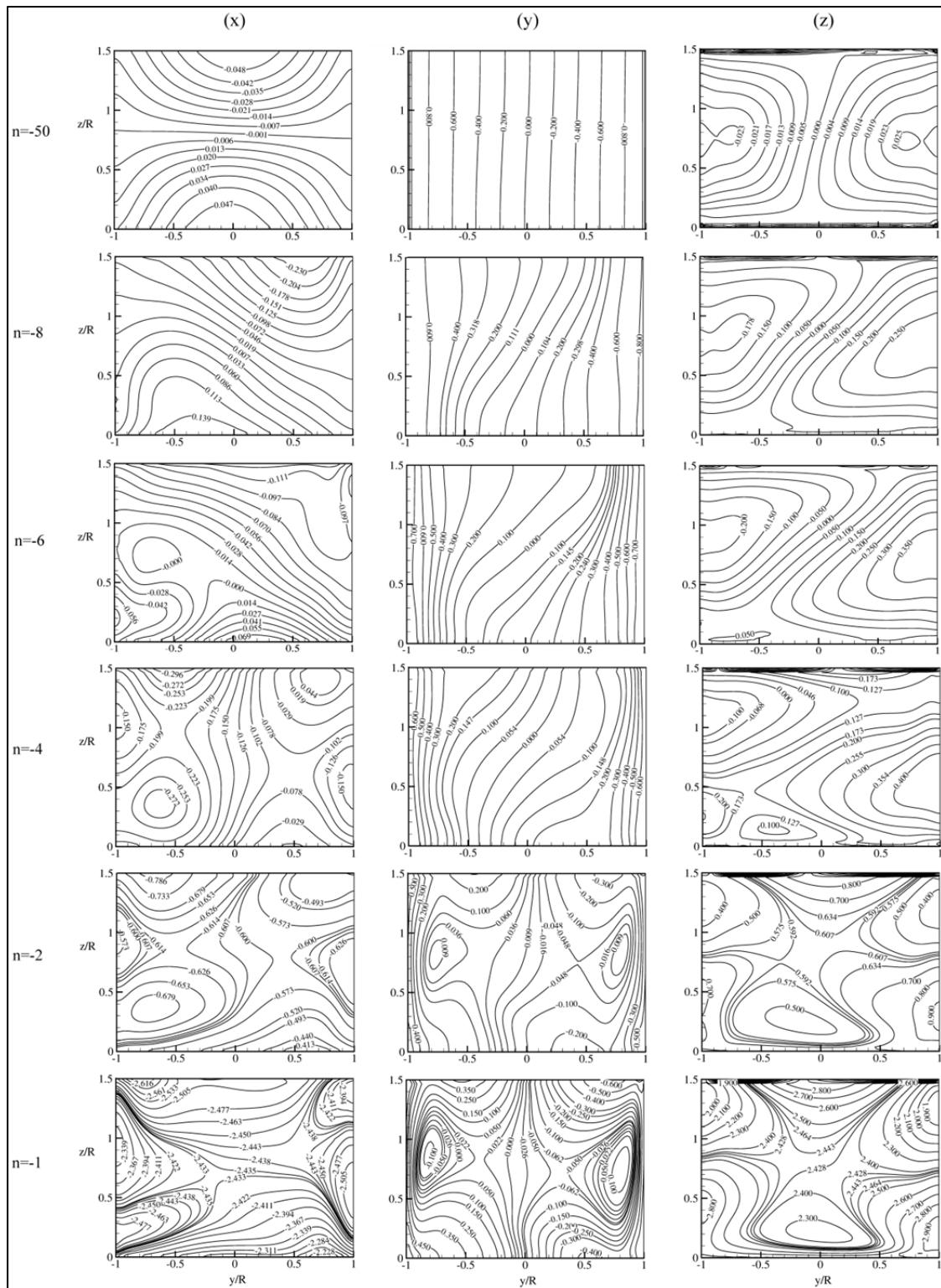


Figure 3.13 Iso-contours du gradient de pression pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $Re_\omega = 125$. (Voir le texte pour le détail)

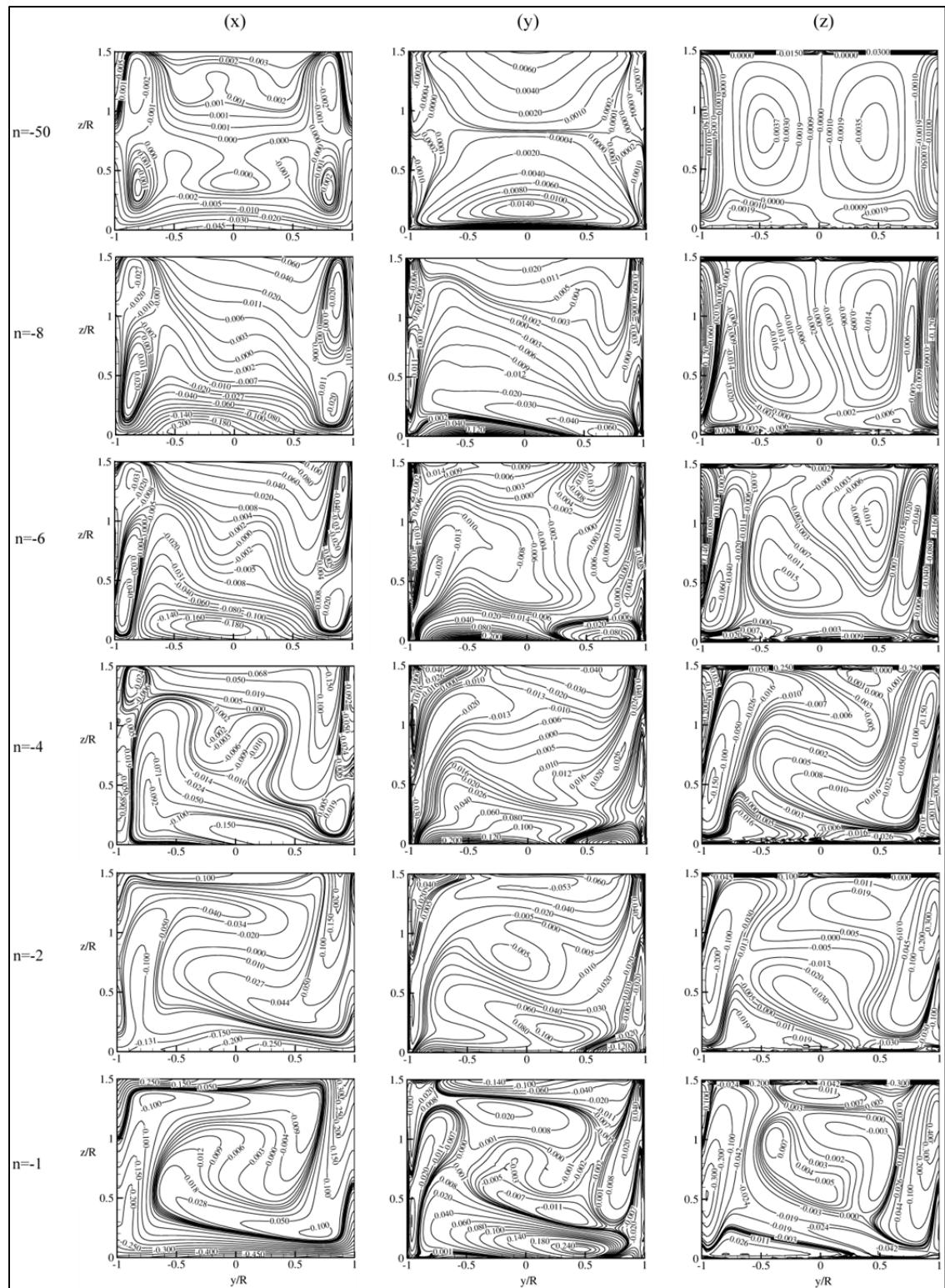


Figure 3.14 Iso-contours de la force visqueuse pour différentes valeurs de n . Plan (yz), $Re_\omega = 125$. (voir le texte pour le détail)

3.3.2 Le bilan de forces appliquées sur une particule

Pour cette fois-ci, nous avons établi le bilan de forces appliquées sur une particule dans le fluide, nous avons choisi quelques coupes dans les deux plans méridionaux (xz) et (yz). L'analyse est similaire à celle établie pour les iso-contours de forces et d'accélérations, c'est-à-dire que nous nous basons sur les termes de l'équation de Navier-Stokes. En revanche, les dérivées premières (le terme convectif et le gradient de pression) et secondes (le terme visqueux) sont calculées avec le schéma des différences finies centrées de deuxième ordre avec une erreur de troncature de l'ordre de $O(\Delta x^2)$ pour la dérivée première et de $O(\Delta x^3)$ pour la dérivée seconde selon les équations suivantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.7)$$

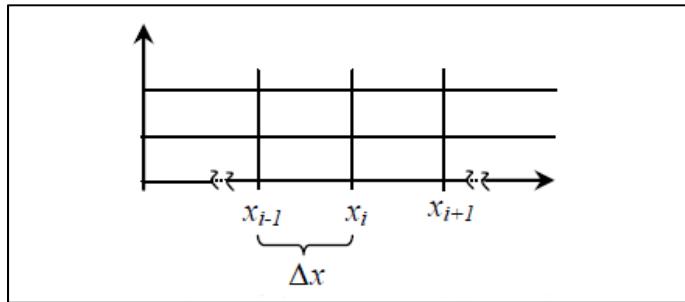


Figure 3.15 Schéma des différences finies centrées

Les champs de vitesses et de la pression sont exportés pour effectuer les calculs sur Matlab, les résultats obtenus pour les dérivées premières et secondes sont parfois bruités (erreur due à la discrétisation numérique), ce bruit peut nuire au calcul de la dynamique d'écoulement et donner un bilan de forces complètement erroné. L'application d'un filtre s'avère nécessaire pour nettoyer ce bruit et avoir une bonne estimation de chaque terme de l'équation de conservation de quantité de mouvement (équation 1.3). Le filtre utilisé est un filtre récursif

(Chergui et Dufresne, 2011) (Annexe VI). Cependant, le type et la qualité du maillage ont un impact direct sur l'application de ce type de filtre, une grille irrégulière peut générer un bruit additif lors du filtrage (Voir annexe VII) et c'est pour cette raison que nous avons choisi le maillage quasi-structuré pour effectuer les calculs numériques.

Le tableau 3.1 regroupe les désignations des différents termes des trois composantes de l'équation de Navier-Stokes (1.3) selon le point de vue de révolution. Les termes sont toujours normalisés par rapport à la force centrifuge de rotation $\omega^2 R$.

Nous avons calculé le bilan de forces pour tous les ratios de vitesses et pour différentes coupes horizontales et verticales dans le plan (xz), (yz) et les plans (xy) à différentes hauteurs (figure 3.16). Nous ne pouvons pas présenter tous ces résultats. Par ailleurs, nous avons choisi de présenter les résultats des $n = -50, -6.67, -2$ et -1 pour le plan (xz) et $n = -50, -6.67, -4$ et -2 pour le plan (yz) afin de couvrir les singularités observées lors du calcul de la fonction de courant. Nous décrirons d'abord ce bilan en fonction des modules des forces. Nous chercherons par la suite à établir un lien entre ce bilan et les trajectoires des particules et/ou la fonction de courant.

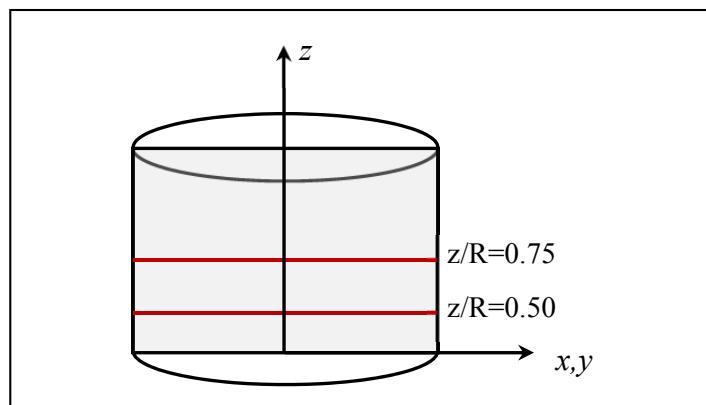


Figure 3.16 Les coupes dans les plans (xz) et (yz)

Les figures 3.17 à 3.28 présentent le bilan de forces dans les trois directions « x, y et z » pour les coupes $z/R = 0.5$ et 0.75 dans les deux plans (xz) et (yz).

Tableau 3.1 Désignation des différents termes de l'équation 1.3

Ax_x	$u \cdot \partial u / \partial x$
Ay_x	$v \cdot \partial u / \partial y$
Az_x	$w \cdot \partial u / \partial z$
fp_x	$(1/\rho)(\partial p / \partial x)$
$fvis_x$	$-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$
$fcor_x$	$-2\Omega_r v \cos \alpha$
$fcent_x$	$-[(\Omega_r \cos \alpha)^2 (x + R_0 \cos \alpha) - \Omega_r^2 \sin \alpha \cos \alpha (z - R_0 \sin \alpha)]$
Ax_y	$u \cdot \partial v / \partial x$
Ay_y	$v \cdot \partial v / \partial y$
Az_y	$w \cdot \partial v / \partial z$
fp_y	$(1/\rho)(\partial p / \partial y)$
$fvis_y$	$-\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$
$fcor_y$	$2\Omega_r (u \cos \alpha - w \sin \alpha)$
$fcent_y$	$-\Omega_r^2 y$
Ax_z	$u \cdot \partial w / \partial x$
Ay_z	$v \cdot \partial w / \partial y$
Az_z	$w \cdot \partial w / \partial z$
fp_z	$(1/\rho)(\partial p / \partial z)$
$fvis_z$	$-\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$
$fcor_z$	$2\Omega_r v \sin \alpha$
$fcent_z$	$[\Omega_r^2 \sin \alpha \cos \alpha (x + R_0 \cos \alpha) - (\Omega_r \cos \alpha)^2 (z - R_0 \sin \alpha)]$

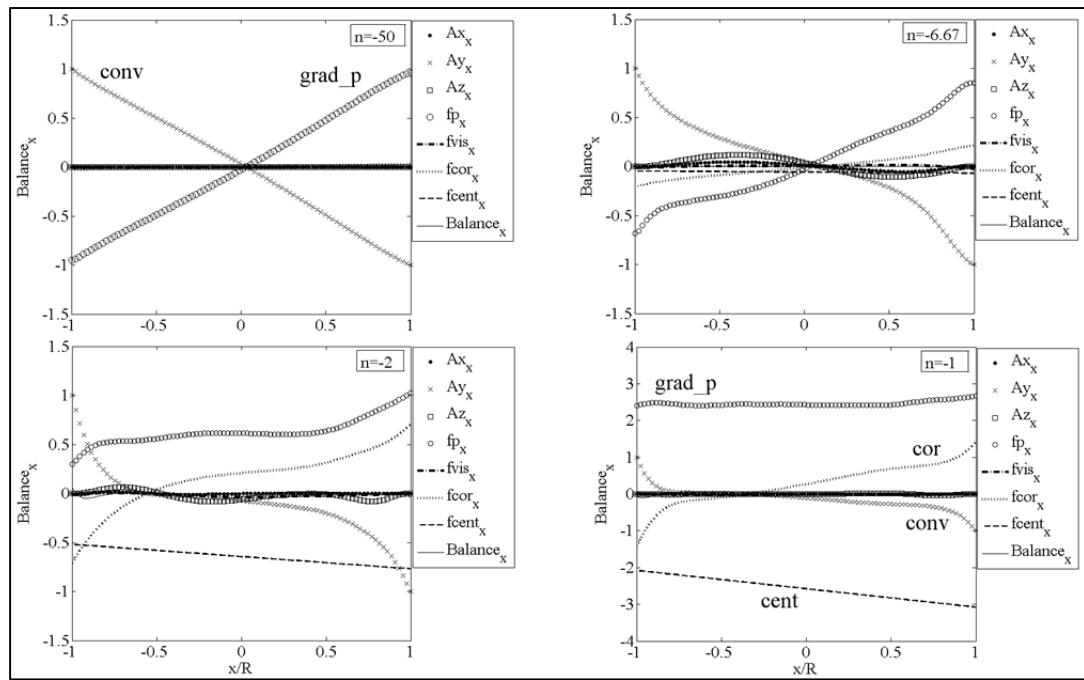


Figure 3.17 Composante « x » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.5$

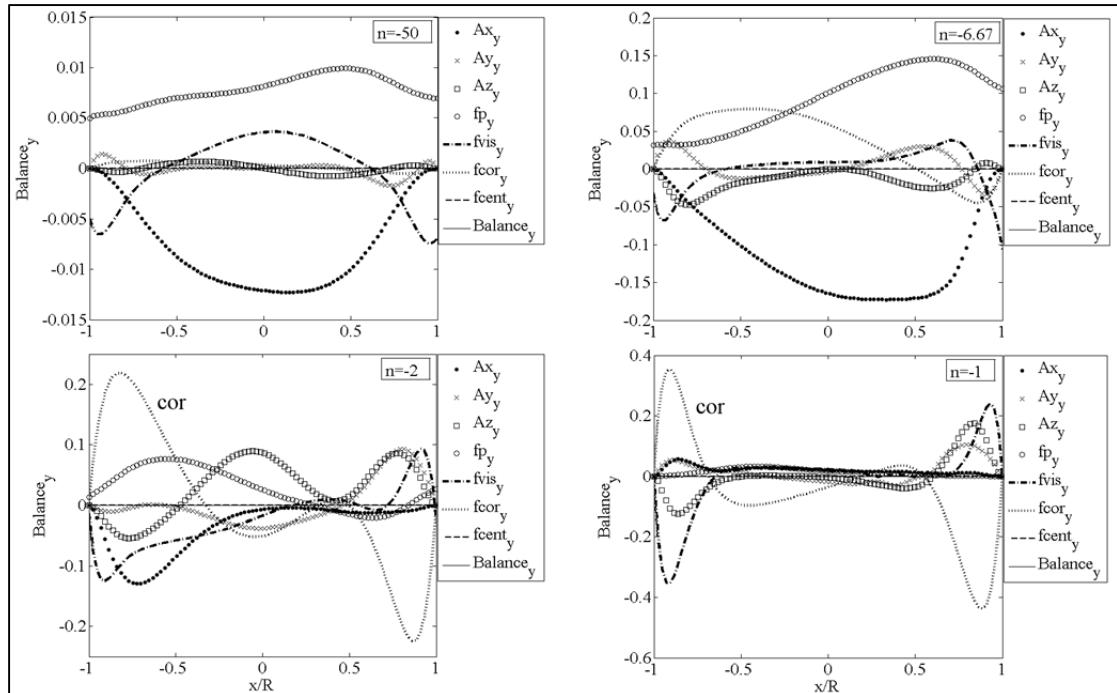


Figure 3.18 Composante « y » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.5$

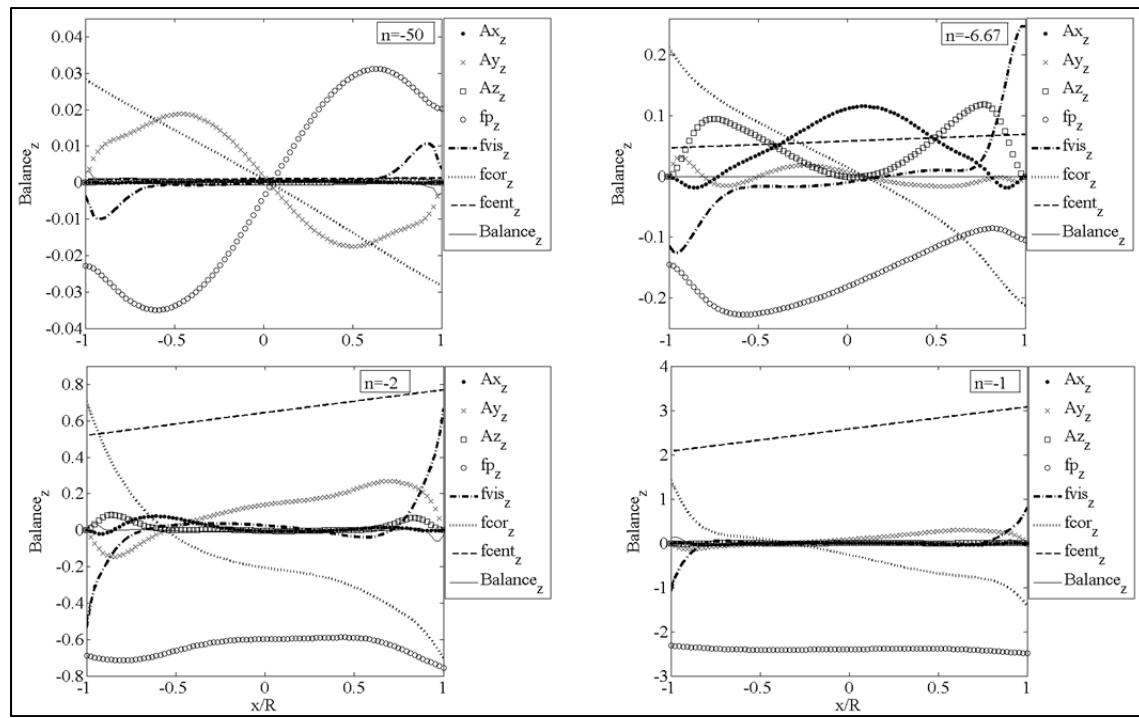


Figure 3.19 Composante « z » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.5$

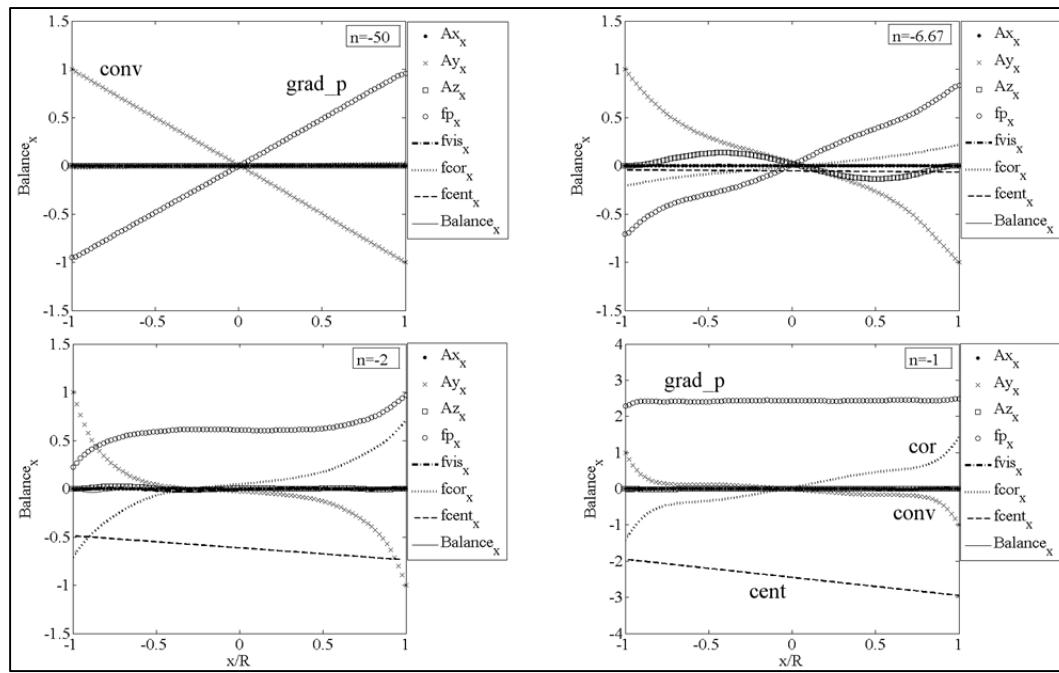


Figure 3.20 Composante « x » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.75$

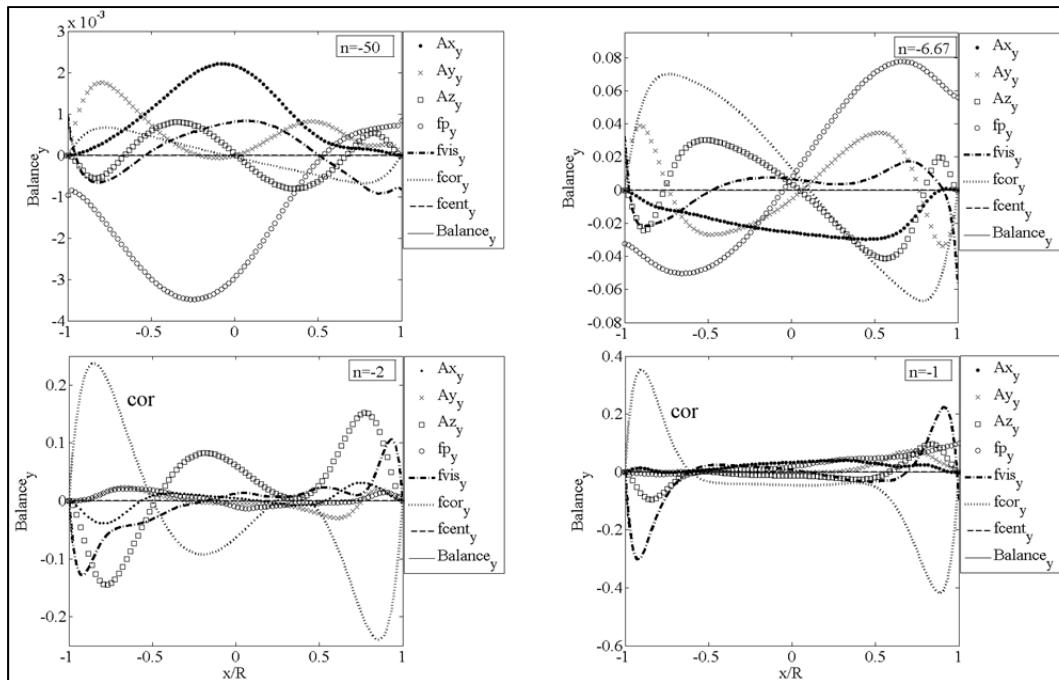


Figure 3.21 Composante « y » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.75$

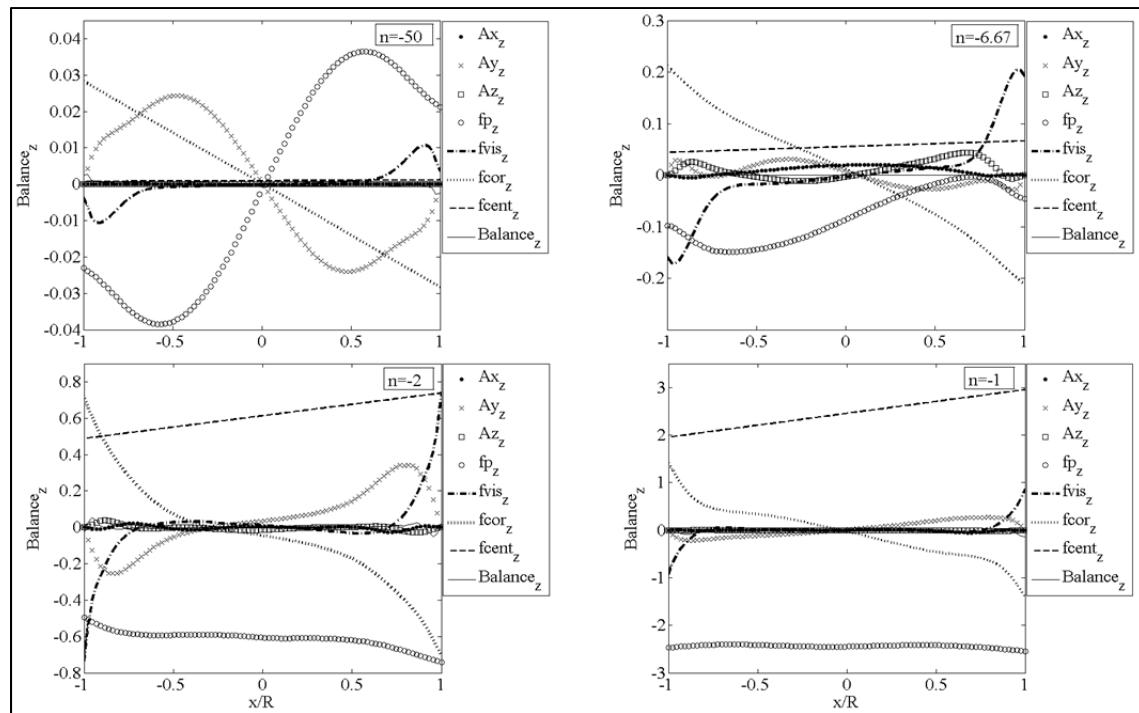


Figure 3.22 Composante « z » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (xz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.75$

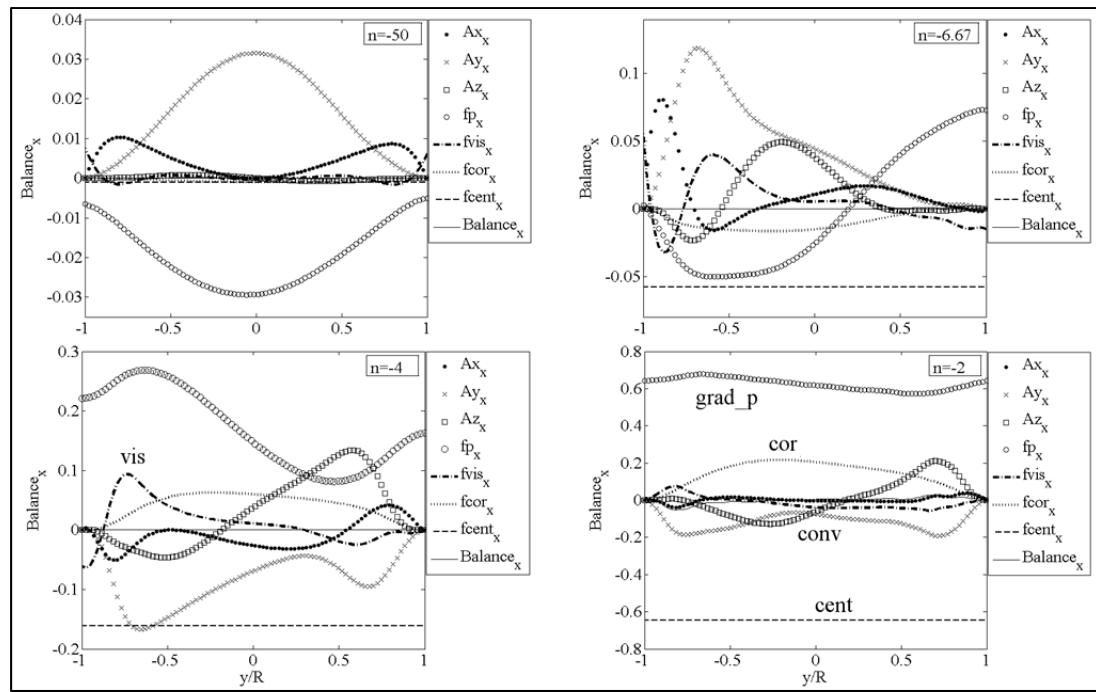


Figure 3.23 Composante « x » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.5$

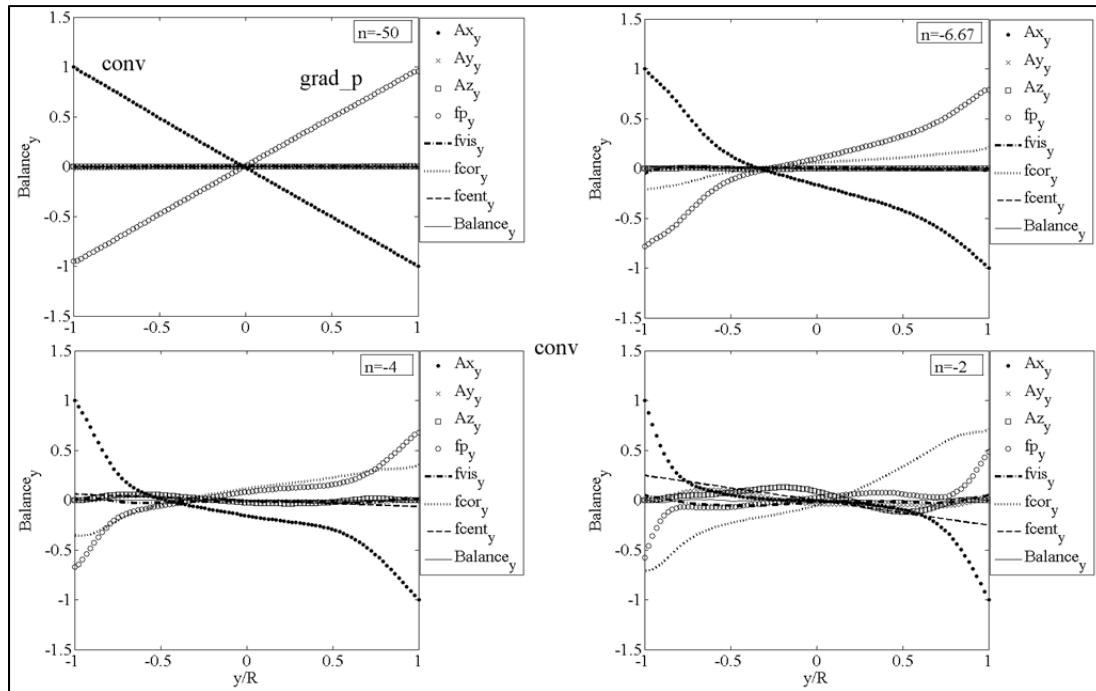


Figure 3.24 Composante « y » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.5$

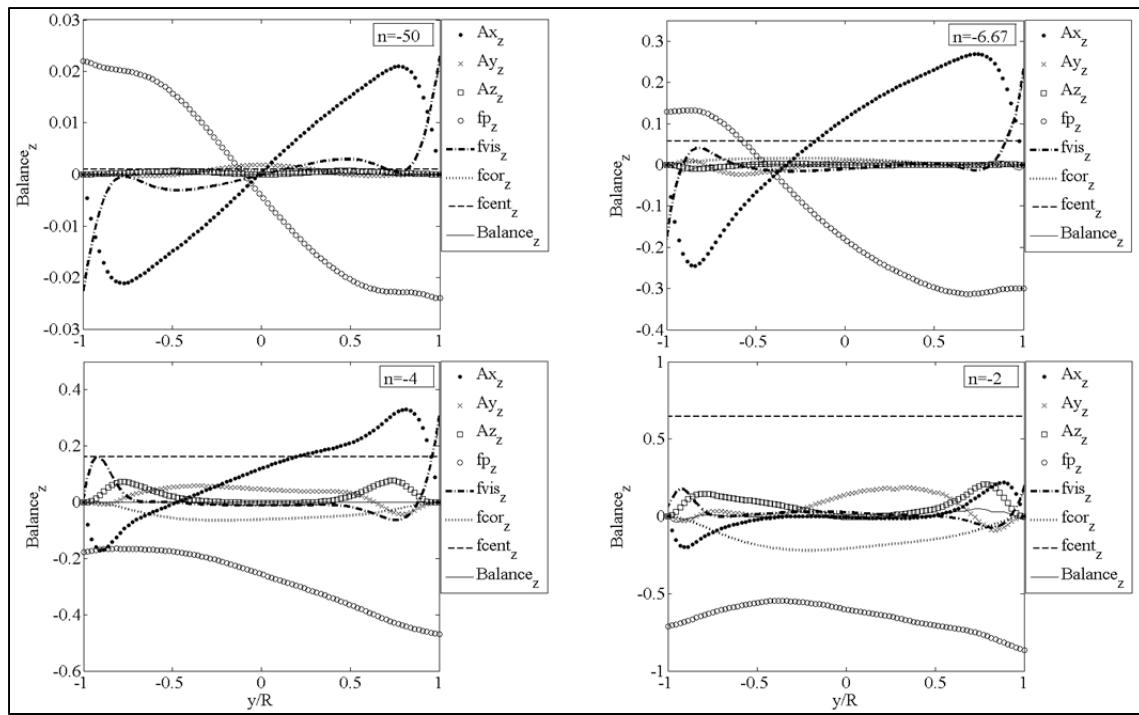


Figure 3.25 Composante « z » du bilan de forces pour différentes valeurs de n ,
plan (yz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.5$

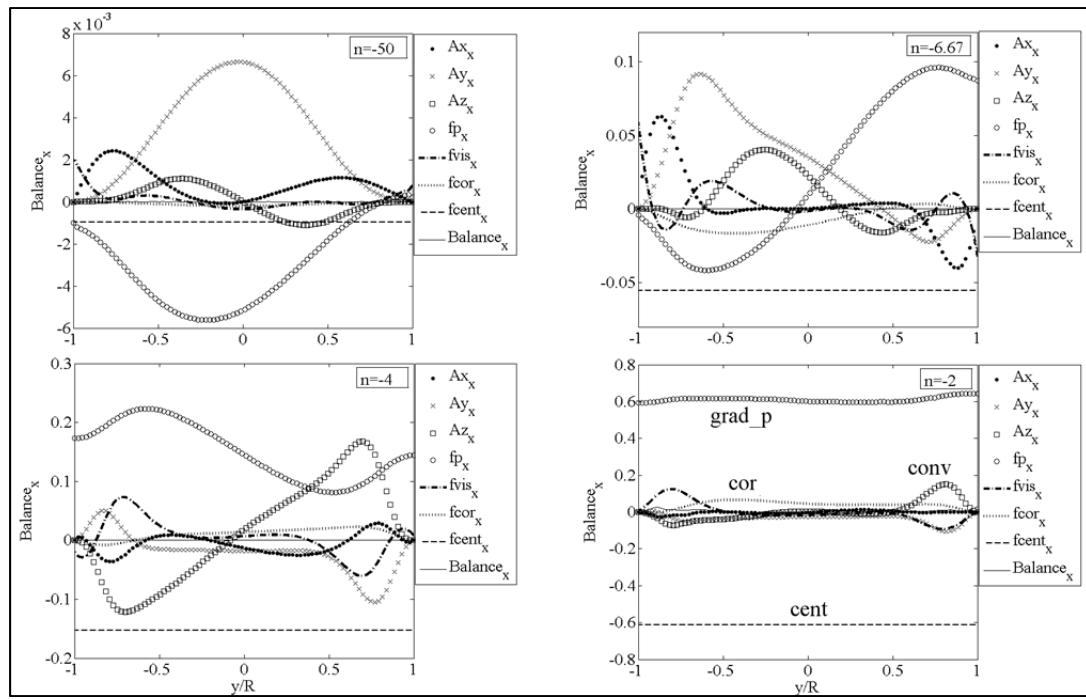


Figure 3.26 Composante « x » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.75$

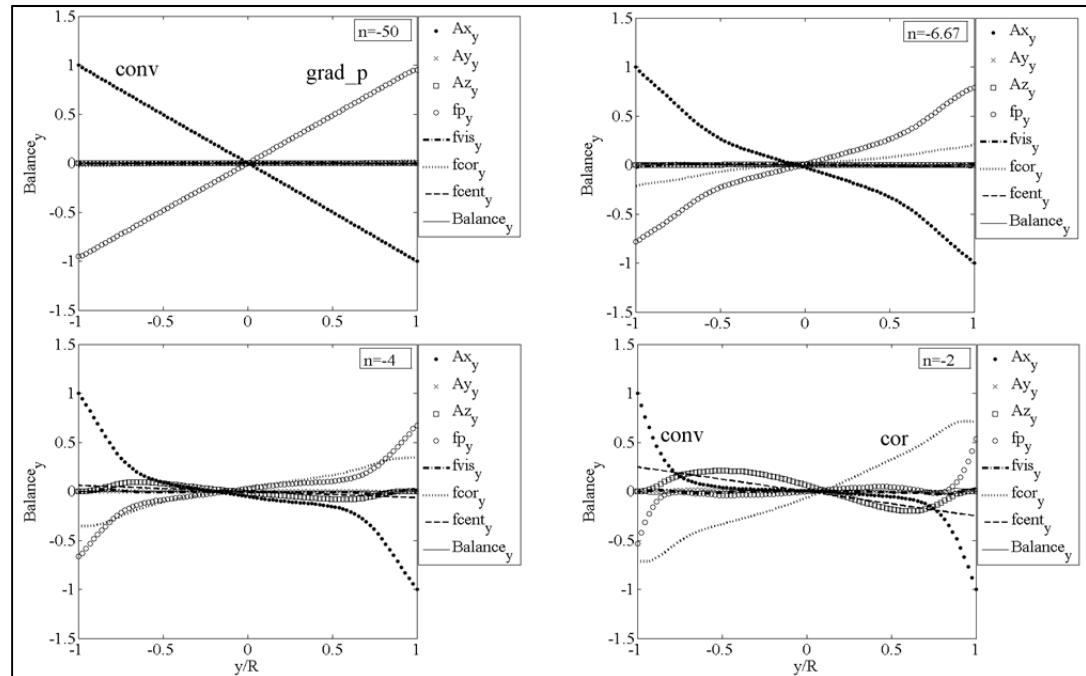


Figure 3.27 Composante « y » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.75$

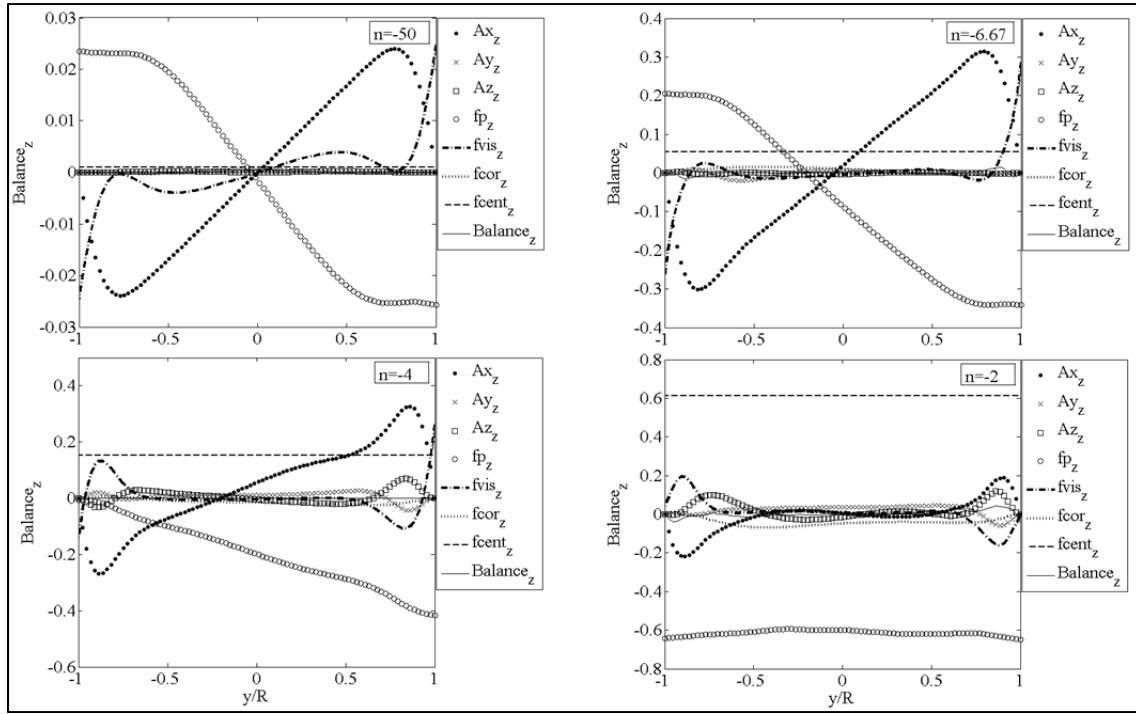


Figure 3.28 Composante « z » du bilan de forces pour différentes valeurs de n , plan (yz), $Re_\omega = 125$, $z/R = 0.75$

À n très élevé ($n = -50$), dans la direction « x » dans le plan (xz) (figures 3.17 et 3.20 pour $n = -50$) et dans la direction « y » dans le plan (yz) (figures 3.24 et 3.27 pour $n = -50$), le bilan est similaire à celui d'une rotation uniforme, l'équilibre est établi entre le gradient de pression et la force centrifuge de rotation qui se manifeste par l'accélération convective ($v \partial u / \partial y$). Les courbes varient selon deux droites qui se croisent au voisinage du centre. Dans la direction « y » et « z » dans le plan (xz) (figures 3.18, 3.19, 3.21 et 3.22 pour $n = -50$) et la direction « x » et « z » dans le plan (yz) (figures 3.23, 3.25, 3.26 et 3.28 pour $n = -50$), les forces sont de très faibles amplitudes. Quand n augmente, le bilan de forces se déplace vers un autre point d'équilibre, cela est traduit par la courbure des profils de forces dans la direction « x » dans le plan (xz) (figures 3.17 et 3.20 pour $n = -6.67, -4$ et -2) et la direction « y » dans le plan (yz) (figures 3.24 et 3.27 pour $n = -6.67, -4$ et -2) et l'augmentation de l'ordre de grandeur des autres composantes, c.-à-d. les composantes « y » et « z » dans le plan (xz) (figures 3.18, 3.19, 3.21 et 3.22 pour $n = -6.67, -4$ et -2) et les composantes « x » et « z » dans le plan (yz) (figures 3.23, 3.25, 3.26 et 3.28 pour $n =$

$-6.67, -4$ et -2). Par ailleurs, pour tous les ratios de vitesses étudiés, la composante « x » dans le plan (xz) et la composante « y » dans le plan (yz) sont elles qui dominent l'écoulement, particulièrement au voisinage de la paroi latérale, en outre, la force visqueuse est plus importante à cet endroit par rapport aux autres zones dans le fluide. D'autres remarques ont pu être tirées à partir du bilan de forces, les plus importantes sont :

- Le bilan de forces agissantes sur une particule semble complexe pour l'ensemble des résultats présentés (figures 3.17 à 3.28). Chaque terme de chaque composante d'accélération convective agit différemment en réponse des forces appliquées, on désigne les termes de chaque composante de l'accélération convective, les termes qui se trouvent à gauche de l'égalité dans les équations 3.3, 3.4 et 3.5. Certains termes d'accélération sont plus importants que d'autres termes pour certains ratios n , alors que pour d'autres ratios la somme des trois termes d'accélération est presque nulle, ce qui veut dire que le fluide n'accélère pas;
- les figures 3.17 et 3.20 montrent que le terme de Coriolis est celui qui fait accélérer le fluide dans la direction « x » pour les faibles ratios de vitesses ($n = -2$ et -1) pour le plan (xz) alors que le gradient de pression balance la force centrifuge de révolution;
- les figures 3.23 et 3.26 montrent que le gradient de pression est balancé en grande partie par le centrifuge de révolution dans la direction « x » pour le plan (yz) et pour $n = -2$, le fluide ne subit qu'une très faible accélération due aux forces visqueuses et à la force de Coriolis;
- les figures 3.26 et 3.28 montrent que le terme de Coriolis est significativement plus faible dans la direction « x » et « z » dans le plan (yz) que le gradient de pression et le centrifuge de révolution. Rappelons que c'est le Coriolis qui change la topologie de l'écoulement (résultats obtenus en comparant les iso-contours de forces et de la fonction de courant dans les deux plans méridionaux (xz) et (yz)).

Bien qu'il ne soit pas aussi évident, les derniers résultats du bilan de forces nous indiquent qu'il existe un lien entre celle-ci et la topologie d'écoulement :

- l'intersection de la composante « x » de la force de Coriolis avec l'axe (ox) dans le plan (xz) (figure 3.17 et 3.20) et de la composante « y » avec (oy) dans le plan (yz) (figure 3.24 et 3.27) correspond au changement de signe de cette force et nous donne une idée préalable sur la position du centre de la spirale dans le plan (xy). Prenons comme exemple le cas de $n = -2$ à $z/R = 0.75$ (figure 3.20 et 3.27), nous pouvons prévoir que le centre de la spirale se trouve dans le cadran 2 du cercle (figure 3.29), nous pouvons vérifier et confirmer cette prédiction si nous regardons le résultat de la fonction de courant sur ce plan (figure 2.27);
- ces intersections correspondent aussi aux intersections des termes convectifs $v \partial u / \partial v$ dans le plan (xz) et $u \partial v / \partial x$ dans le plan (yz). Nous constatons aussi que c'est la vitesse v (dans le plan (xz)) et la vitesse u (dans le plan (yz)) qui convectent le fluide radialement selon une spirale;
- l'intersection (ou le changement de signe) de la composante « y » de la force de Coriolis avec (ox) (figures 3.18 et 3.21) et de la composante « x » avec (oy) (figures 3.23 et 3.26) prévoit la présence des points singuliers dans les plans (xz) et (yz) aux alentours de la coupe sans déterminer leurs genres (centre, foyer, nœud, etc.). Par ailleurs, le nombre d'intersections n'est pas égal aux nombres de points singuliers. Pour trois intersections dans une coupe (Exemple : figure 3.18, cas de $n = -2$ et -1 et 3.21, cas de $n = -2$), on prédit la présence de trois points singuliers au minimum (figure 2.29). La présence d'une seule intersection ou l'absence d'intersection (exemple : figure 3.23 et 3.26, cas de $n = -4$ et -2) prévoit l'existence d'un seul point singulier. La figure 3.30 illustre ce lien qui existe entre le bilan de forces et la topologie d'écoulement.
- la balance « x » dans le plan (xz) (figures 3.17 et 3.20) et « y » dans le plan (yz) (figures 3.24 et 3.27) pour $n = -50$ sont semblables à celle d'une rotation solide et représentent les trajectoires circulaires des particules. Nous avons aussi remarqué qu'elles sont significatives au voisinage de la paroi latérale par rapport aux autres composantes pour tous les ratios de vitesse étudiés. Cela nous mène à constater que ces deux composantes gouvernent la dynamique d'écoulement dans cette zone et que le fluide suit la rotation de la paroi, un résultat qui a été déjà obtenu lorsque nous avons

calculé les trajectoires des particules au voisinage des parois pour les différents ratios de vitesses tel qu'il est montré avec exemple de $n = -6.67$, figure 3.31.

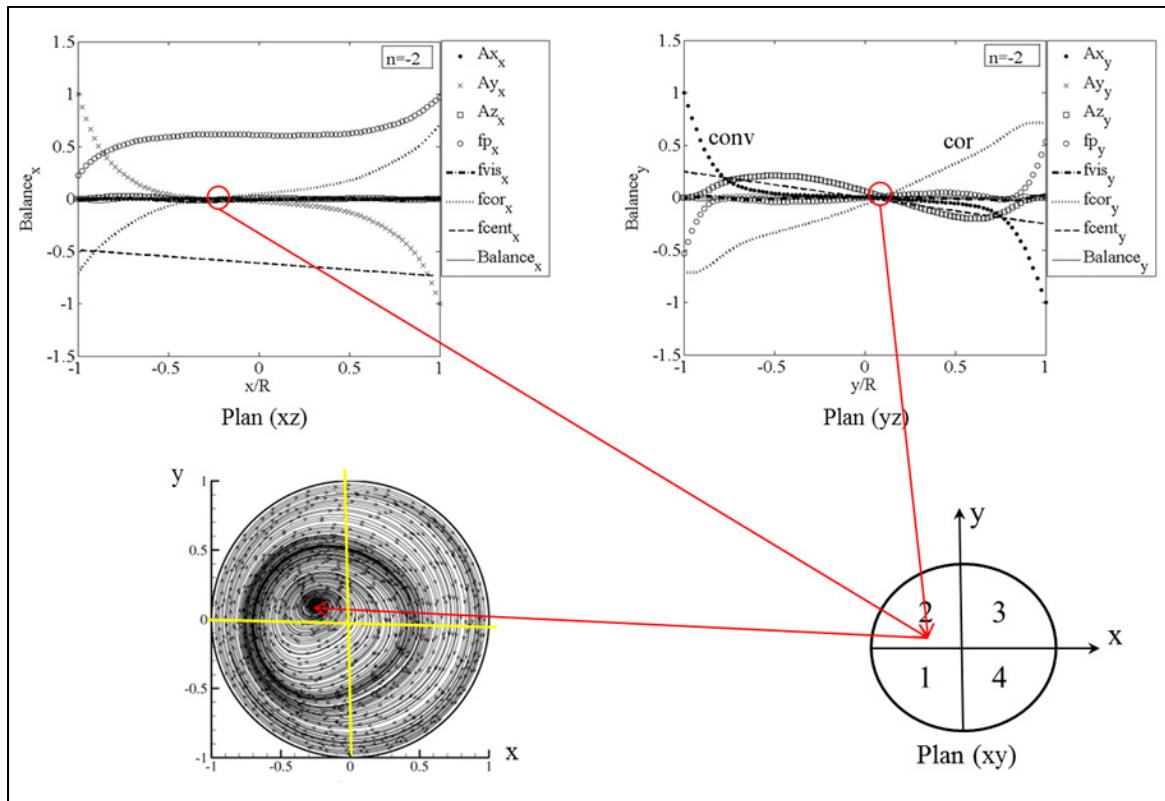


Figure 3.29 Détermination de la position du point singulier sur le plan (xy) à $z/R = 0.75$ à partir du bilan de forces. Exemple de $n = -2$ et $Re_\omega = 125$

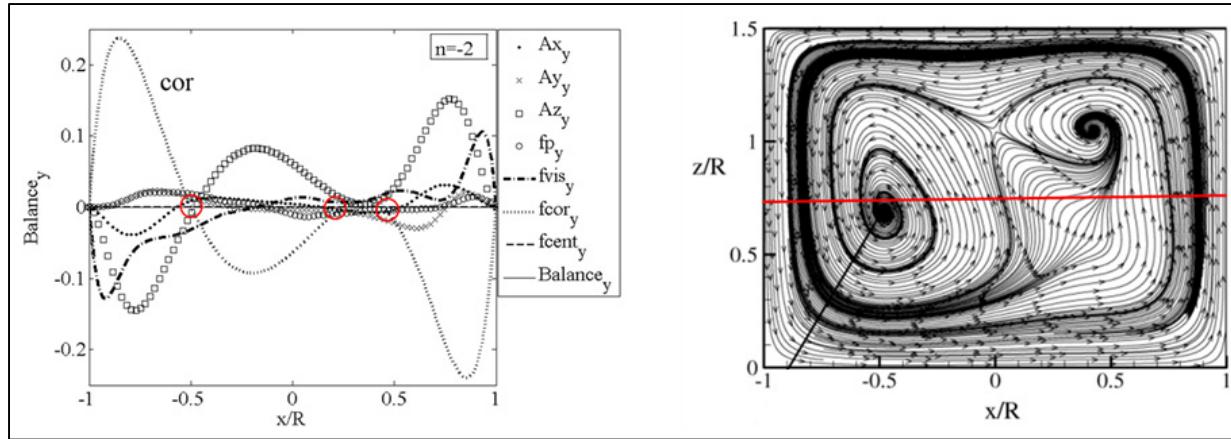


Figure 3.30 Lien entre le bilan de forces et la topologie d'écoulement. Exemple de $n = -2$ et $Re_\omega = 125$

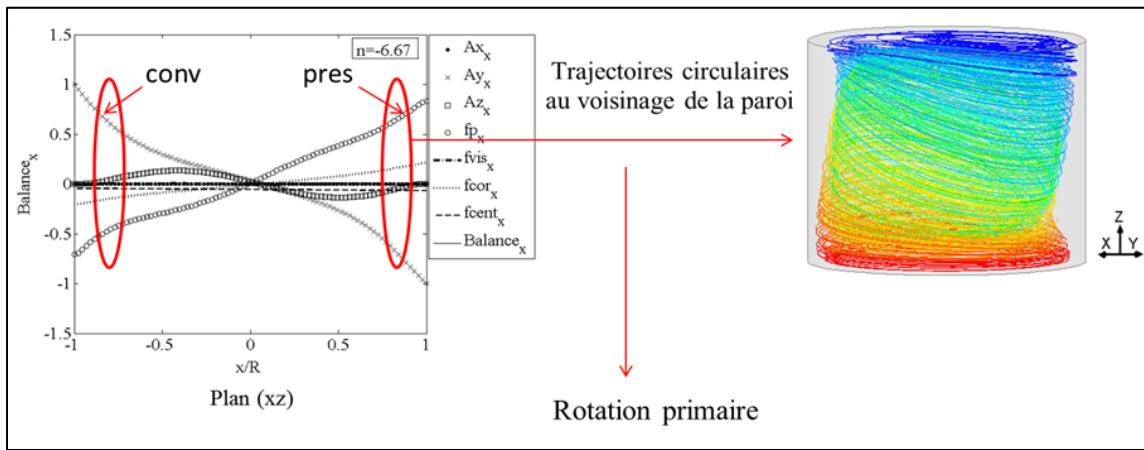


Figure 3.31 Lien entre le bilan de forces et les trajectoires des particules. Exemple de $n = -6.67$ et $Re_\omega = 125$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu quantifier l'écoulement dans le MPSL, premièrement en calculant les débits de pompage dans les deux principales directions, et deuxièmement, en estimant les forces et les accélérations sur les plans méridionaux (xz) et (yz). L'examen des iso-contours et de bilan de forces a montré que ces derniers ont un lien direct avec la topologie d'écoulement dans les deux plans et les trajectoires de particules dans le contenant. Bien qu'il ne soit pas aussi visible, la force de Coriolis et le gradient de pression sont les

seules forces responsables du changement de direction de l'axe de rotation secondaire. Nous ignorons, à ce jour, de quelle manière ces deux forces interviennent dans l'écoulement pour apporter ces modifications. Cette information est basée sur la variation de la force centrifuge et la force visqueuse, l'une agit en réponse du mouvement de révolution et l'autre est significative seulement à côté des parois. Une analyse plus poussée du bilan de forces dans tout le volume, c.-à-d. sur les autres plans (horizontaux et obliques), peut apporter une réponse à cette question.

Pour conclure ce chapitre, nous pouvons dire que cette étude est une deuxième du genre après l'étude d'Iwatsu (2005) dans les écoulements en rotation et une première du genre dans la dynamique d'écoulement du fluide dans les repères en double rotation en général et dans l'industrie du MPSL et tous les procédés du mélange en particulier.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion générale

Les Mélangeurs planétaires sans lamelle (MPSL) sont parmi les techniques de mélange utilisées à petite échelle pour la synthèse et l'aération des produits hautement visqueux. Les MPSLs sont constitués simplement d'une cuve cylindrique en double rotation. La technique est sollicitée pour sa capacité à mélanger efficacement deux constituants en quelques minutes, voire quelques secondes grâce à son mouvement de la double rotation. En outre, l'absence d'un mobile d'agitation à l'intérieur de la cuve facilite l'entretien de celle-ci et minimise le risque de contamination des produits. Cependant, des problèmes de mélange ont été observés pour certaines conditions d'opération et de conception. L'analyse bibliographique a montré que peu de travaux ont été effectués pour résoudre le problème de mélange des MPSLs. Notre étude a été particulièrement motivée par l'absence d'études pour analyser l'effet des conditions d'opération et/ou de conception sur la qualité du produit fini.

Vu que la dynamique du mélange est directement liée à la dynamique de l'écoulement, notre objectif principal consistait à analyser la dynamique de l'écoulement du fluide dans le MPSL en fonction des paramètres d'opération et de conception. Plus spécifiquement, nous voulions analyser numériquement (CFD) comment un écoulement dans un cylindre en simple rotation se complexifie et devient tridimensionnel par effet de révolution. Notre étude reposait sur l'utilisation des outils de visualisation des écoulements.

La méthodologie a été discutée dans le chapitre 1. Deux points de vue ont été discutés: le point de vue rotation et le point de vue révolution. Le bilan de forces dans le repère de rotation était différent de celui dans le repère de révolution. Le point de vue révolution a été retenu pour l'analyse car selon ce point de vue, le régime est considéré permanent.

L'analyse CFD a été basée sur la méthode des volumes finis avec l'utilisation du code commercial Fluent comme outil de calcul et de visualisation. Elle a été effectuée pour un

modèle de mélange simple c.-à-d. un fluide newtonien homogène, un écoulement laminaire et un régime permanent. Le départ de la rotation uniforme a été traduit par une vitesse de rotation constante et une vitesse de révolution variable. La solution numérique a été validée avec le calcul du GCI sur les trois composantes de la vitesse en choisissant trois maillages hexaédriques. Malgré que les valeurs des GCIs obtenues aient été très faibles, le maillage moyen a été choisi pour minimiser l'erreur due aux calculs des dérivées premières et secondes.

L'analyse a été divisée en deux parties : la première a concerné l'étude qualitative. Dans cette partie, trois quantités ont été utilisées pour la visualisation de l'écoulement, à savoir: les trajectoires de particules, les iso-contours de vitesses et les lignes de courant. La deuxième partie a concerné l'étude quantitative dont les débits de pompage et le bilan de forces ont été évalués.

La première partie de cette étude a fait l'objet du chapitre 2. Dans ce chapitre, un bref rappel de certaines techniques de visualisation tridimensionnelle et bidimensionnelle a été présenté. Quelques techniques ont été appliquées par la suite pour décrire la structure de l'écoulement dans tout le volume du MPSL. La première technique est basée sur le calcul de trajectoires des particules. Elle a montré que l'écoulement dans le contenant se fait essentiellement sous forme de spirales co-centriques. Les remarques les plus importantes qui ont été tirées sont :

- la taille des tourbillons est plus importante au voisinage des parois latérales du cylindre. À cet endroit, les tourbillons suivent le mouvement de ces parois;
- les tourbillons qui sont aux voisinages de l'axe de rotation ont différentes formes en fonction du ratio de vitesses n . Pour des ratios compris entre -50 et -4 , les tourbillons sont sous forme de spirales cylindriques et pour des ratios inférieurs à -4 , ils sont sous forme de spirales coniques;
- une légère symétrie de trajectoires est observée pour les ratios de vitesses -6 et -2 au voisinage de la mi-hauteur de cylindre et proche paroi latérale. La symétrie est marquée

pour les particules qui se trouvaient initialement dans le plan (xz) pour $n = -6$ et dans le plan (yz) pour $n = -2$;

- trois axes ont été distingués: l'axe de rotation primaire (ARP), l'axe de révolution et l'axe de rotation secondaire (ARS). Des techniques d'identification des structures tourbillonnaires ont été utilisées pour calculer l'ARS. Aucun critère parmi ceux testés n'a pu décrire adéquatement l'ARS dans le repère de révolution à cause du système du MPSL doublement accéléré. Une méthode géométrique basée sur le calcul des centroides a été testée, cette méthode était fiable et a pu dessiner approximativement l'ARS;
- le tracé de l'ARS a montré que ce dernier change de forme et de direction en fonction de n . Plus particulièrement, c'est le haut de l'axe qui change de position tandis que celui du bas, qui se trouve au fond du cylindre, garde sa position initiale.

L'analyse tridimensionnelle de l'écoulement est en bonne concordance avec certains résultats de littérature à savoir: la présence de structures tourbillonnaires spiralées, la tendance des iso-contours de vorticité, la présence de trois axes de rotation et le changement de direction de l'axe de rotation secondaire.

Pour compléter l'analyse qualitative, une première visualisation 2D a été effectuée avec les contours de vitesses. Pour $n = -6$ et -2 , la symétrie de l'écoulement avec les trajectoires des particules a été reproduite avec les contours de vitesses. Dans le plan (xz) et pour $n = -6$, les contours de vitesses sont similaires à celles pour $n = -50$ avec un léger décalage de symétrie tandis que celles de $n = -2$ sont tout à fait différentes. Le cas contraire a été observé dans le plan (yz), c.-à-d. que, pour $n = -6$, les contours de vitesses sont différents à ceux obtenus pour $n = -50$ et pour $n = -2$, ils sont similaires.

La deuxième visualisation 2D a été effectuée avec les lignes de courant. La plage paramétrique de n a été étalée pour couvrir toutes les valeurs comprises entre -50 et -1 afin de déterminer à partir de quel ratio de vitesses la topologie de l'écoulement subit un changement significatif. Il s'est avéré qu'à $n = -8$, des singularités (ou l'apparition des points critiques comme les selles, les nœuds, les foyers) commencent à apparaître dans le

plan (yz) pour s'intensifier à des valeurs inférieures. L'écoulement commence à revenir à son état initial (l'état de $n = -50$) à partir de $n = -4$. Cependant, les singularités ne commencent à apparaître dans le plan (xz) qu'à partir de $n = -3$ ce qui implique que l'apparition des points critiques ne se fait pas dans les deux plans en même temps.

La deuxième partie a concerné l'étude quantitative et a fait l'objet du chapitre 3. L'objectif de cette étude était de quantifier l'effet de révolution sur la dynamique d'écoulement dans le MPSL. Deux quantités ont été considérées, le débit de pompage (axial et secondaire) et les forces appliquées sur une particule de fluide. Les résultats du débit de pompage ont montré que le pompage axial a la même variation pour les ratios de vitesses étudiées : il augmente loin du fond et diminue en s'approchant de la surface libre avec un pompage axial maximal au centre. Le pompage secondaire varie différemment pour certains ratios : il prend la forme en S pour des ratios de -50 à -8 et de -5 à -1 tandis que la forme pour des ratios compris entre -8 et -5 est différente.

L'estimation des forces appliquées sur un point matériel a nécessité le calcul des termes de l'équation de Navier-Stokes dans le repère de révolution. Elle a été effectuée pour lier la topologie d'écoulement aux forces agissantes sur le fluide dans les deux plans méridionaux (xz) et (yz). Deux méthodes ont été utilisées, la première était d'estimer chaque force sur ces plans et la deuxième était d'estimer le bilan de toutes les forces agissantes sur un élément de fluide pour certaines coupes dans ces deux plans. Les informations suivantes ont été tirées :

- seuls les iso-contours de la force de Coriolis qui sont directement liés à la fonction de courant ce qui implique que c'est la force de Coriolis qui est responsable des singularités observées pour certains ratios de vitesses (n inférieur à -8);
- la variation de la force de Coriolis pour une coupe donnée est directement liée aux points singuliers, l'intersection (ou le changement de signe) des composantes de la force de Coriolis avec (ox) et (oy) prévoit la présence des points singuliers aux alentours de cette

coupe sans déterminer leurs types (centre, foyer, noeud, etc.). Par ailleurs, le nombre d'intersections n'est pas égal aux nombres de points singuliers;

- le terme convectif est balancé en grande partie par le gradient de pression au voisinage des parois latérales pour les ratios de vitesses supérieurs à -2 , donc l'écoulement est quasi-circulaire.

Pour conclure, le présent travail constitue une contribution dans l'étude de la dynamique d'écoulement du fluide dans les repères en double rotation à savoir: 1) en géophysique (atmosphérique, océanique); 2) en aérospatiale (l'écoulement dans les réservoirs des satellites); 3) en science de la terre (l'écoulement du fluide dans le noyau de la terre) ; et 4) dans le MPSL. L'écoulement de ce fluide qui présente presque un tiers de la masse totale de la terre (liquide du noyau) et allant de 50 à 90% de la masse du satellite (carburant) (Vanyo, 2001) peut modifier le mouvement de la terre et les trajectoires des satellites ainsi que la dynamique du mélange dans les mélangeurs planétaires. Rappelons que cet écoulement est influencé en grande partie par le mouvement de la précession ou de la révolution. Notre contribution dans ce domaine consiste à la description qualitative et quantitative de l'effet de révolution sur la dynamique d'écoulement d'un fluide qui part d'une rotation uniforme. Nos contributions scientifiques originales sont :

- détermination de l'axe de rotation secondaire et sa variation de forme et de position en fonction du ratio n avec les autres paramètres d'opération et de conception constants;
- présence et cartographie des points singuliers dans l'écoulement pour les paramètres étudiés;
- identification d'une plage d'opération critique en terme de complexité d'écoulement;
- identification de la force de Coriolis comme le moteur de l'écoulement;
- détermination du lien entre le bilan de forces et la présence et la position des points singuliers sur les plans horizontaux (xy) et les plans méridionaux (xz) et (yz).

Recommandations

Avec l'analyse qualitative et quantitative de l'écoulement, nous avons pu dessiner une cartographie de l'écoulement dans les deux plans parallèle et perpendiculaire à l'axe de révolution. Néanmoins, cette analyse n'est pas encore complète. Nous recommandons alors de :

- caractériser l'écoulement et la présence des points singuliers en fonction du nombre de Rossby et d'Ekman définis par rapport à la révolution;
- caractériser l'efficacité du mélange par rapport à la topologie d'écoulement et le bilan de forces;
- étudier l'effet des nombres de Reynolds, de Rossby et d'Ekman de rotation sur la caractérisation de l'écoulement;
- tester d'autres méthodes lagrangiennes pour l'identification des structures tourbillonnaires dans le MPSL ainsi que l'axe de rotation secondaire;
- étudier l'effet des autres paramètres tels que : le rapport de forme, le rapport d'aspect et l'angle d'inclinaison sur la topologie d'écoulement;
- étudier l'écoulement et le mélange du point de vue rotation;
- considérer les effets thermiques : souvent, le mélange se fait avec une dissipation de chaleur due aux cisaillements pour les fluides hautement visqueux et/ou aux réactions chimiques;
- considérer la surface libre comme une surface déformable : avoir recours donc au calcul de l'écoulement bi-phasic;
- analyser l'écoulement pour un fluide non newtonien : c'est le cas du mélange dans l'industrie (des pâtes, des résines, etc.). Le comportement rhéologique pour ce fluide est fonction du taux de cisaillement qui est lui-même fonction des conditions d'opération et de conception;
- modéliser et optimiser l'écoulement et le mélange : tester les différentes méthodes pour modéliser et optimiser le débit de pompage, la puissance dissipée et le temps de mélange. Nous suggérons la méthode des plans d'expériences parce que 1) elle est facile

à mettre en œuvre, 2) elle peut couvrir tout l'espace de design en faisant varier tous les paramètres avec un nombre d'expériences minimal, 3) elle peut déterminer les variables qui ont un effet significatif sur la réponse (le débit de pompage, la puissance dissipée...) ainsi que les effets de leurs interactions, 4) elle peut modéliser mathématiquement la réponse en fonction des variables significatives, et enfin 5) elle permet de déterminer le point de fonctionnement optimal à l'aide des surfaces de réponse.

ANNEXE I

RÉFÉRENCES DES ARTICLES PUBLIÉS ET DES ARTICLES DE CONFÉRENCES

Article de journal

Nacera, Chergui, Mohamed, Lateb, Étienne, Lacroix et Louis, Dufresne. 2015. « CFD study of flow dynamics in a free blade planetary mixer (FBPM) – A qualitative flow study». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 102, p. 100-115.

Articles de conférences

Nacera, Chergui, et Louis, Dufresne. 2012. « Analyse par CFD de l'écoulement dans un mélangeur planétaire ». In 20th Annual conference of the CFD Society of Canada (Canmore, AB, Canada, 2012) University of Alberta Conference Services.

Nacera, Chergui,.et Louis, Dufresne. 2011. « Étude numérique de la balance des forces dans un mélangeur planétaire : application des filtres récursifs ». In 19th Annual Conference of the CFD Society of Canada (Montréal, Canada, Apr. 27-29, 2011) CFD Society of Canada.

ANNEXE II

LES ÉQUATIONS DE CONSERVATION DANS LES DEUX REPÈRES ROTATION ET RÉVOLUTION

A.II.1 Point de vue de révolution

Pour un fluide qui coule relativement au repère de révolution, sa vitesse est dite relative à la révolution et est notée \mathbf{V}_{BM} .

Nous allons adopter certaines notations pour développer nos équations :

- le vecteur \mathbf{R}_{AM} est le vecteur de position du point M dans le repère absolu (\mathcal{A});
- \mathbf{R}_{AB} est le vecteur position de l'origine du repère de révolution (\mathcal{B}) dans le repère absolu (\mathcal{A});
- \mathbf{R}_{BM} est le vecteur position du point M dans le repère de révolution (\mathcal{B});
- $\boldsymbol{\Omega}_r$ est le vecteur de révolution du repère (\mathcal{B}) relativement à (\mathcal{A}).

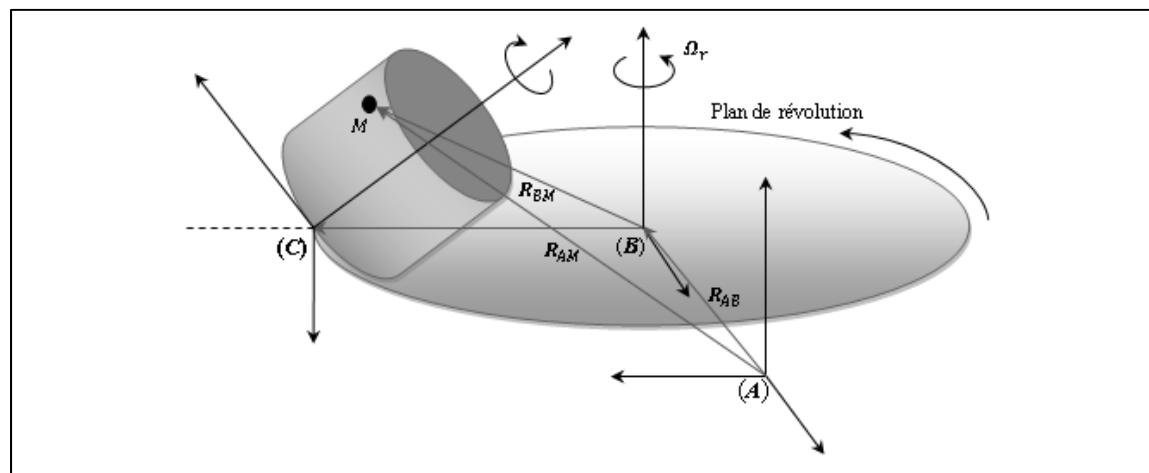


Figure A.II.1 Vecteur position d'un point matériel M dans le repère inertiel (\mathcal{A}) et le repère de révolution (\mathcal{B})

Le vecteur \mathbf{R} peut être déterminé par

$$\mathbf{R}_{AM} = \mathbf{R}_{AB} + \mathbf{R}_{BM} \quad (\text{A.II.8})$$

En appliquant la dérivée matérielle à \mathbf{R}_{AM}

$${}^A\frac{d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = {}^A\frac{d\mathbf{R}_{AB}}{dt} + {}^A\frac{d\mathbf{R}_{BM}}{dt} \quad (\text{A.II.9})$$

Les dérivées matérielles dans le repère (A) et dans le repère (B) en rotation sont liées par la relation suivante

$${}^A\frac{d(\cdot)}{dt} = {}^B\frac{d(\cdot)}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\cdot) \quad (\text{A.II.10})$$

Comme le \mathbf{R}_{BM} est relatif au repère (B), sa dérivée matérielle par rapport au repère (A) est

$${}^A\frac{d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = \mathbf{V}_{AB} + {}^B\frac{d\mathbf{R}_{BM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM} \quad (\text{A.II.11})$$

L'origine du repère (B) est fixe par rapport au repère inertiel (A)

$${}^A\frac{d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = {}^B\frac{d\mathbf{R}_{BM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM} \quad (\text{A.II.12})$$

Sachant que

$${}^A\frac{d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = \mathbf{V}_{AM} \quad \text{et} \quad {}^B\frac{d\mathbf{R}_{BM}}{dt} = \mathbf{V}_{BM} \quad (\text{A.II.13})$$

L'équation (8) devient

$$\mathbf{V}_{AM} = \mathbf{V}_{BM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM} \quad (\text{A.II.14})$$

En appliquant encore une fois la dérivée matérielle de \mathbf{V}_{AM} , on obtient :

$$\frac{^A d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = \frac{^A d\mathbf{V}_{BM}}{dt} + \frac{^A d}{dt}(\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) \quad (\text{A.II.15})$$

$$\frac{^A d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = \frac{^A d\mathbf{V}_{BM}}{dt} + \frac{^A d\boldsymbol{\Omega}_r}{dt} \times \mathbf{R}_{BM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \frac{^A d\mathbf{R}_{BM}}{dt} \quad (\text{A.II.16})$$

Avec $\frac{^A d\boldsymbol{\Omega}_r}{dt} = 0$ puisque le repère de révolution (B) n'accélère pas par rapport au repère absolu (A).

$$\frac{^A d\mathbf{V}_{BM}}{dt} = \frac{^B d\mathbf{V}_{BM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM} \quad (\text{A.II.17})$$

Et

$$\frac{^A d\mathbf{R}_{BM}}{dt} = \frac{^B d\mathbf{R}_{BM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM} \quad (\text{A.II.18})$$

L'équation (11) devient alors

$$\frac{^A d\mathbf{R}_{BM}}{dt} = \frac{^B d\mathbf{R}_{BM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM} \quad (\text{A.II.19})$$

$$\frac{^A d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = \frac{^B d\mathbf{V}_{BM}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) \quad (\text{A.II.20})$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement est établie par rapport un repère inertiel (A) comme suite

$${}^A \frac{d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \varphi + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{AM} \quad (\text{A.II.21})$$

Où $\nabla \varphi$ représente les forces de volume qui vont être négligées dans la suite de l'analyse, ∇p est le gradient de pression et $\nu \nabla^2 \mathbf{V}_{AM}$ est la force visqueuse. À partir de l'équation (A.II.14) on obtient

$${}^B \frac{d\mathbf{V}_{BM}}{dt} = {}^A \frac{d\mathbf{V}_{AM}}{dt} - 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM} - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) \quad (\text{A.II.22})$$

$${}^B \frac{d\mathbf{V}_{BM}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \varphi + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{AM} - 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM} - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) \quad (\text{A.II.23})$$

La rotation du repère ne modifie pas la déformation visqueuse du fluide, par conséquent $\nu \nabla^2 \mathbf{V}_{AM} = \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{BM}$. L'équation (A.II.16) traduit le principe de conservation de quantité de mouvement par rapport au repère (**B**) qui est en rotation relativement à (**A**). Nous rappelons aussi que ${}^B d/dt$ est la dérivée Lagrangienne. La présentation Eulérienne de l'équation (A.II.16) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_{BM}}{\partial t} + \mathbf{V}_{BM} \cdot \nabla \mathbf{V}_{BM} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \varphi + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{BM} - 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{BM} \\ &\quad - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) \end{aligned} \quad (\text{A.II.24})$$

A.II.2 Point de vue de rotation

Pour le repère en rotation, la vitesse de l'écoulement est dite relative à la rotation et est notée \mathbf{V}_{CM} . Nous garderons la même notation utilisée auparavant en ajoutant

- \mathbf{R}_{BC} est le vecteur de position de l'origine du repère de rotation (**C**) dans le repère de révolution (**B**);
- \mathbf{R}_{CM} est le vecteur de position du point *M* du mélangeur dans le repère de rotation (**C**);

- ω_r est le vecteur de rotation du repère (C) relativement à (B) .

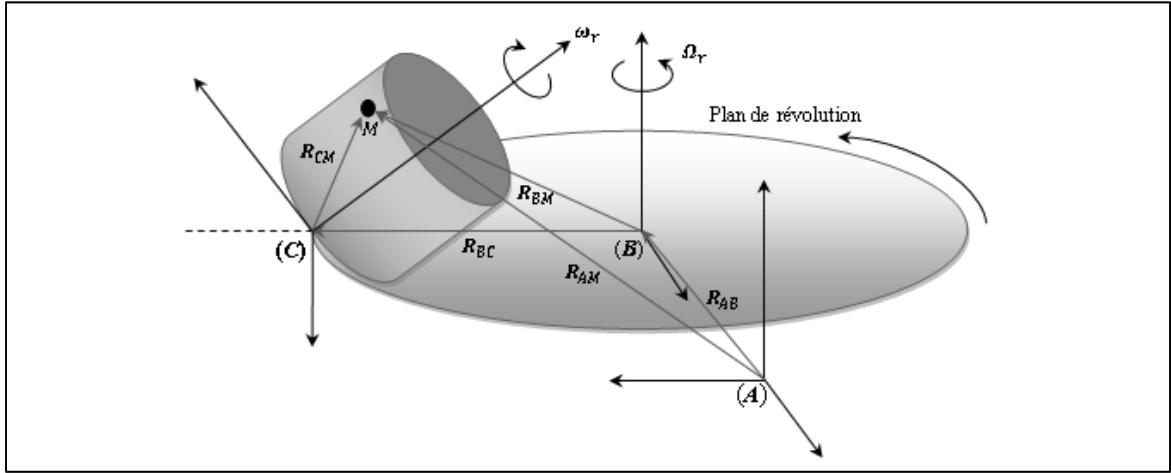


Figure A.II.2 Vecteur position d'un point matériel M dans le repère inertiel (A) et le repère de rotation (C)

De même, le vecteur de position du point M dans le repère absolu peut être obtenu par

$$\mathbf{R}_{AM} = \mathbf{R}_{AB} + \mathbf{R}_{BC} + \mathbf{R}_{CM} \quad (\text{A.II.25})$$

Et la dérivée matérielle de ce vecteur s'écrit

$$\frac{^A d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = \frac{^A d\mathbf{R}_{AB}}{dt} + \frac{^A d\mathbf{R}_{BC}}{dt} + \frac{^A d\mathbf{R}_{CM}}{dt} \quad (\text{A.II.26})$$

En appliquant la relation vectorielle (A.II.3) à l'équation (A.II.27) on obtient

$$\frac{^A d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = \left(\frac{^B d\mathbf{R}_{BC}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC} \right) + \left(\frac{^B d\mathbf{R}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \right) \quad (\text{A.II.27})$$

$$\frac{^A d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC} + \left(\frac{^C d\mathbf{R}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \right) \quad (\text{A.II.28})$$

Avec

$${}^C \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} = \mathbf{V}_{CM} \quad \text{et} \quad {}^A \frac{d\mathbf{R}_{AM}}{dt} = \mathbf{V}_{AM} \quad (\text{A.II.29})$$

$$\mathbf{V}_{AM} = \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC} + \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \quad (\text{A.II.30})$$

Et si on applique encore une fois la dérivée matérielle à l'équation (A.II.31)

$${}^A \frac{d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC}) + {}^A \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} + {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) \quad (\text{A.II.31})$$

On calcul chaque terme de l'équation (A.II.32) à part :

-

$$\begin{aligned} {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC}) &= {}^A \frac{d\boldsymbol{\Omega}_r}{dt} \times \mathbf{R}_{BC} + \boldsymbol{\Omega}_r \times {}^A \frac{d\mathbf{R}_{BC}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_r \times \left({}^B \frac{d\mathbf{R}_{BC}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC} \right) \\ & {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC}) = \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC}) \end{aligned} \quad (\text{A.II.32})$$

•

$${}^A \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = {}^B \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} = {}^C \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} \quad (\text{A.II.33})$$

$${}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) = {}^A \frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times {}^A \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} \quad (\text{A.II.34})$$

$$\begin{aligned}
& {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) \\
&= \left({}^B \frac{d\boldsymbol{\omega}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r \right) \times \mathbf{R}_{CM} \\
&\quad + \boldsymbol{\omega}_r \\
&\quad \times \left({}^B \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \right)
\end{aligned} \tag{A.II.35}$$

Le terme ${}^B d\boldsymbol{\omega}_r/dt$ est nul parce que (**C**) n'a pas d'accélération par rapport à (**B**)

$$\begin{aligned}
& {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) = (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times \left({}^C \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \right) \\
& {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) = (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + \\
&\quad \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})
\end{aligned} \tag{A.II.36}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \\
& {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) = {}^A \frac{d\boldsymbol{\Omega}_r}{dt} \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times {}^A \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_r \times \left({}^B \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \right) \\
&= \boldsymbol{\Omega}_r \times \left({}^C \frac{d\mathbf{R}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM} \right) \\
& {}^A \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) = \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})
\end{aligned} \tag{A.II.38}$$

En remplaçant les équations (A.II.33), (A.II.34), (A.II.37), (A.II.38) et dans l'équation (A.II.32) on obtient

$$\begin{aligned}
& {}^A \frac{d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC}) + {}^C \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \\
&\quad \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + \boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \\
&\quad \times \mathbf{R}_{CM}) + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^A \frac{d\mathbf{V}_{AM}}{dt} = & {}^C \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BC}) + \boldsymbol{\omega}_r \\
& \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + \boldsymbol{\Omega}_r \\
& \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) + \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})
\end{aligned} \tag{A.II.37}$$

En remplaçant la dérivée matérielle de la vitesse absolue dans le repère inertiel (A) par son expression (Équation A.II.14) dans l'équation (A.II.31) on obtient

$$\begin{aligned}
{}^C \frac{d\mathbf{V}_{CM}}{dt} = & \frac{\partial \mathbf{V}_{CM}}{\partial t} + \mathbf{V}_{CM} \nabla \mathbf{V}_{CM} \\
= & -\frac{1}{\rho} \nabla p + \Delta\varphi + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{CM} - 2\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} - 2\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{V}_{CM} - \boldsymbol{\Omega}_r \\
& \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{BM}) - \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) - (\boldsymbol{\Omega}_r \times \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{R}_{CM} - \boldsymbol{\omega}_r \\
& \times (\boldsymbol{\Omega}_r \times \mathbf{R}_{CM}) - \boldsymbol{\Omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{R}_{CM})
\end{aligned} \tag{A.II.38}$$

ANNEXE III

EXEMPLES POUR VALIDER LES PROGRAMMES MATLAB UTILISÉS DANS L'IDENTIFICATION DES STRUCTURES COHÉRENTES

Pour le calcul de λ_2 , nous allons exporter les résultats du gradient de vitesses ∇V_{BM} de *Fluent* vers *Marlab* pour calculer les deux tenseurs de déformation et de rotation pour chaque cellule dans le fluide ainsi que les valeurs propres du tenseur $\mathbf{D}^2 + \mathbf{R}^2$. Nous tracerons par la suite les iso-contours de la deuxième composante du vecteur propre λ_2 sur des plans horizontaux (xy).

A.III.1 Exemple 1 : Distribution Gaussienne de vorticité

L'écoulement est défini comme suit :

$$u_\theta = \frac{1}{r} (1 - e^{-r^2}) \quad (\text{A.III.1})$$

$$u = \frac{-y}{r^2} (1 - e^{-r^2}) \quad (\text{A.III.2})$$

$$v = \frac{x}{r^2} (1 - e^{-r^2}) \quad (\text{A.III.3})$$

$$w = 0 \quad (\text{A.III.4})$$

$$\omega_z = 2e^{-r^2} \quad (\text{A.III.5})$$

La vorticité a une distribution gaussienne (figure A.III.1), la vitesse circonférentielle augmente jusqu'à une valeur maximale (0.6382) à $r = R_1 = 1.12$ (figure A.III.2) et diminue par la suite. Les valeurs de λ_2 sont négatives pour $r \leq R_1$ et positives pour $r > R_1$ (figure A.III.3). Les contours de λ_2 négatifs identifient bien le tourbillon.

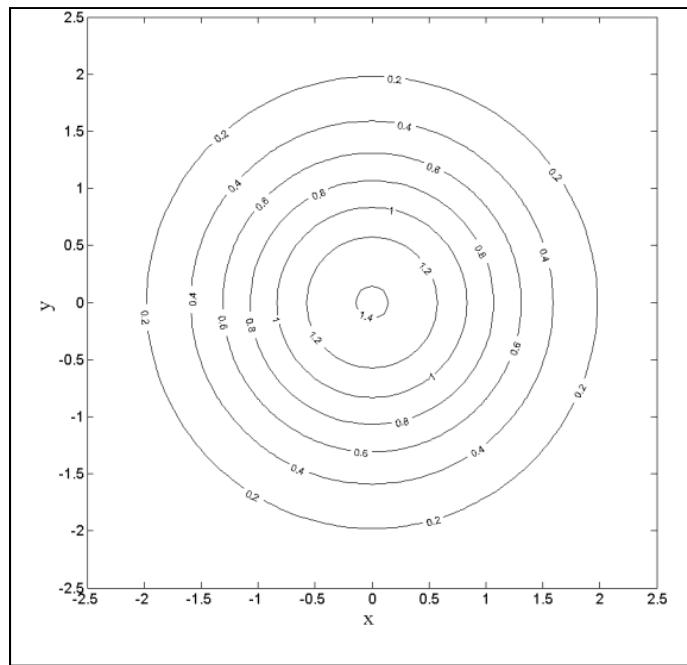


Figure A.III.1 Contours du module de vorticité.

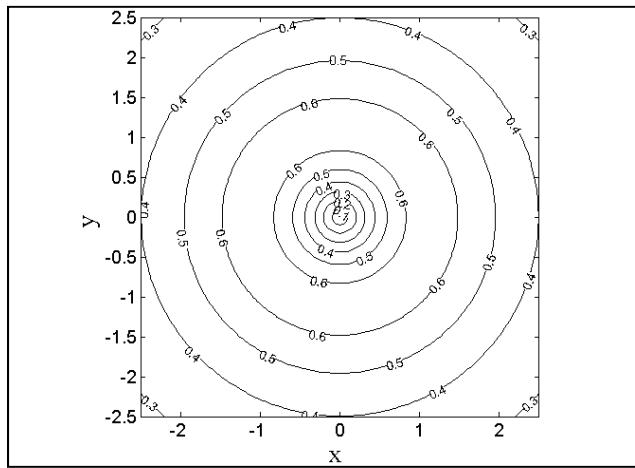


Figure A.III.2 Contours de λ_2 .

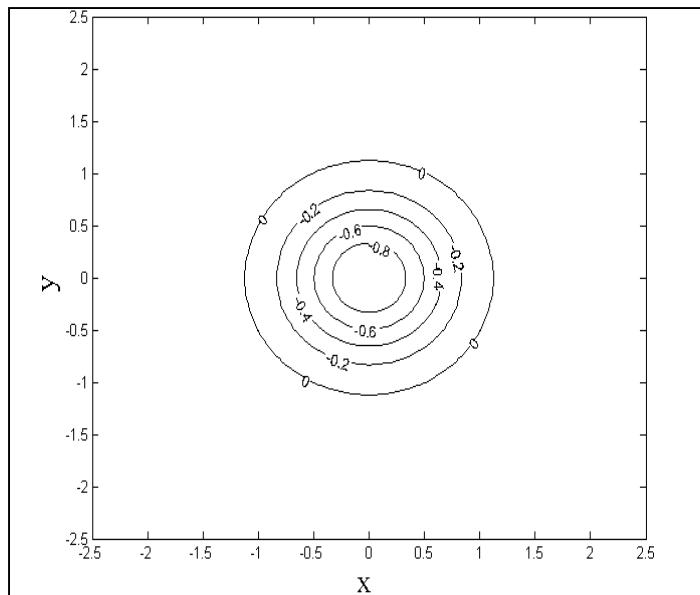


Figure A.III.3 Contour de la vitesse circonférentielle u_θ .

A.III.2 Exemple 2 : Distribution Gaussienne de vorticité dans un écoulement cisaillé

C'est l'exemple détaillé dans l'article de Jeong et Hussain (1995) (figure A.III.4) où un tourbillon avec une distribution initiale gaussienne de vorticité $\omega_x = 2e^{-r^2}$ est immergé dans un écoulement cisaillé $u(y) = Sy$ avec $r^2 = y^2 + z^2$. Le champ de vitesse obtenu est défini comme suit :

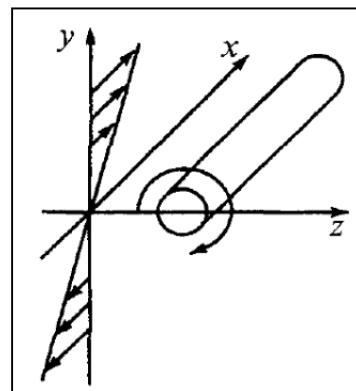


Figure A.III.4 Schéma d'un tourbillon à distribution gaussienne de la vorticité dans un écoulement cisaillé

$$u = S r \sin \left(\frac{(1 - e^{-r^2})t}{r^2} + \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) \right) \quad (\text{A.III.6})$$

$$v = \frac{(1 - e^{-r^2})z}{r^2} \quad (\text{A.III.7})$$

$$w = \frac{(1 - e^{-r^2})y}{r^2} \quad (\text{A.III.8})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.III.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= S \frac{y}{r} \sin \left(\frac{(1 - e^{-r^2})t}{r^2} + \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) \right) \\ &+ r \left(\frac{2ye^{-r^2}t}{r^2} - \frac{2y(1 - e^{-r^2})t}{r^4} \right. \\ &\left. + \frac{\frac{1}{z}}{1 + \left(\frac{y}{z} \right)^2} \right) \cos \left(\frac{(1 - e^{-r^2})t}{r^2} + \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.III.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= S \frac{z}{r} \sin \left(\frac{(1 - e^{-r^2})t}{r^2} + \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) \right) \\ &+ r \left(\frac{2ze^{-r^2}t}{r^2} - \frac{2z(1 - e^{-r^2})t}{r^4} \right. \\ &\left. - \frac{\frac{y}{z^2}}{1 + \left(\frac{y}{z} \right)^2} \right) \cos \left(\frac{(1 - e^{-r^2})t}{r^2} + \tan^{-1} \left(\frac{y}{z} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.III.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \left(\frac{2yze^{-r^2}}{r^2} - \frac{2yz(1 - e^{-r^2})}{r^4} \right) \quad (\text{A.III.12})$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \left(\frac{(1 - e^{-r^2})}{r^2} + \frac{2z^2 e^{-r^2}}{r^2} - \frac{2z^2(1 - e^{-r^2})}{r^4} \right) \quad (\text{A.III.13})$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{(1 - e^{-r^2})}{r^2} + \frac{2y^2 e^{-r^2}}{r^2} - \frac{2y^2(1 - e^{-r^2})}{r^4} \right) \quad (\text{A.III.14})$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{2yze^{-r^2}}{r^2} - \frac{2yz(1 - e^{-r^2})}{r^4} \right) \quad (\text{A.III.15})$$

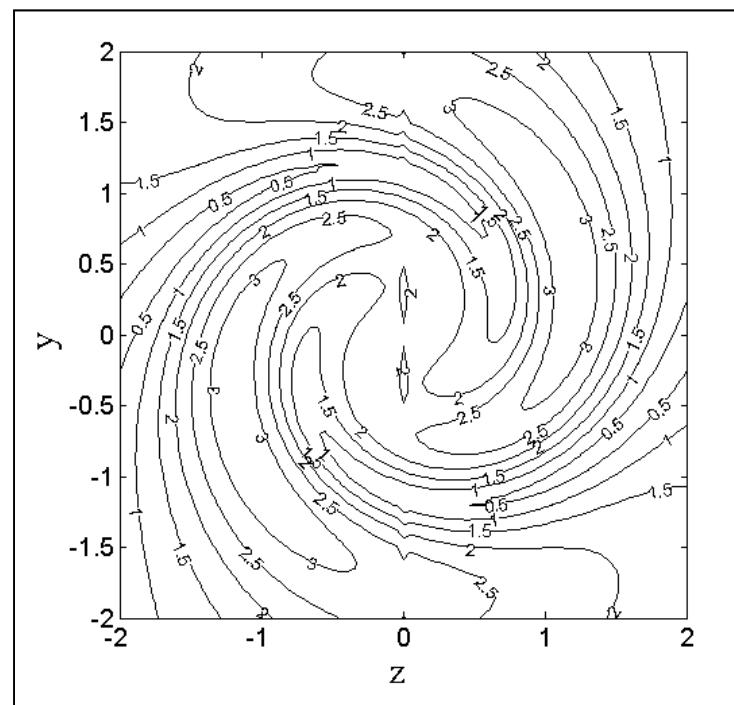


Figure A.III.5 Contours du module de vorticité à $t = 5s$ et $S = 1$

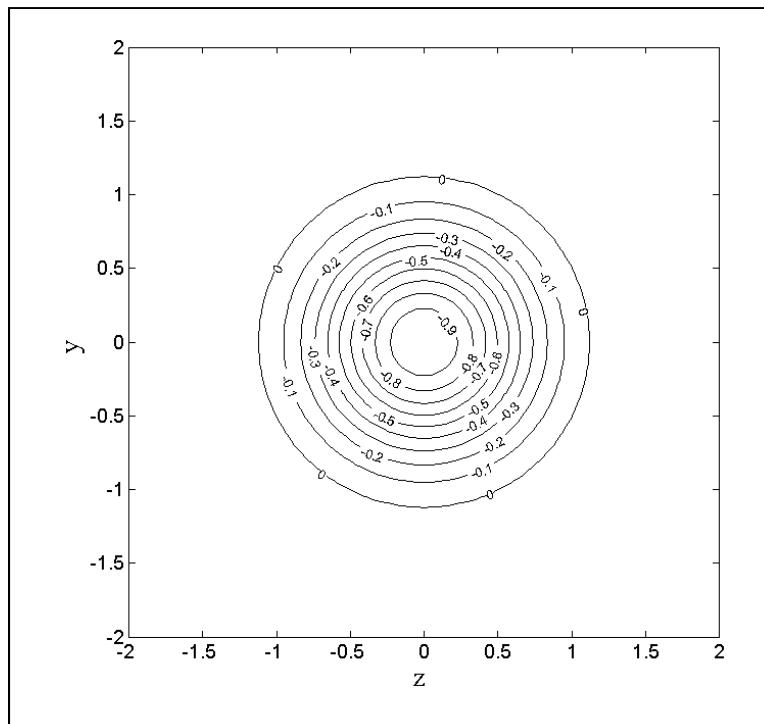


Figure A.III.6 Contours : Contours
de λ_2 à $t = 5s$ et $S = 1$

Étant donné que la composante u de la vitesse est fonction du temps, le module de vorticité sera donc fonction du temps. Les contours de vorticité sur la figure A.III.5 sont obtenus pour $t = 5s$. Elles montrent qu'il y a deux extréums de vorticité dans l'écoulement. Le critère d'extrémum de vorticité (Jeong et Hussain, 1995) au cœur du tourbillon n'est pas alors vérifié. Par ailleurs les valeurs négatives de λ_2 permettent de bien identifier le tourbillon (figure A.III.6).

ANNEXE IV

LES TRANSFORMATIONS VECTORIELLES DU REPÈRE (B) VERS LE REPÈRE (C)

L'étude numérique de la dynamique de l'écoulement dans le mélangeur planétaire a été faite d'un point de vue relatif à la révolution, mais dans *Fluent*, les vecteurs sont calculés dans un repère en simple révolution autour de (B) et superposé au repère de rotation (C) qu'on va le nommer (C_s). Pour pouvoir traiter les résultats et déterminer la balance des forces du point de vue de révolution, il va falloir effectuer quelques transformations vectorielles. Les vecteurs dans l'équation A.IV.1 sont projetés sur le repère qui se superpose à (C). On rappelle que selon le point de vue de révolution, l'équation de conservation de quantité de mouvement pour un point matériel M dans le mélangeur s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{BM} \cdot \nabla V_{BM} = & -\frac{1}{\rho} \nabla p + \Delta \varphi + \nu \nabla^2 V_{AM} - 2\Omega_r \times \mathbf{V}_{BM} \\ & - \Omega_r \times (\Omega_r \times \mathbf{R}_{BM}) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.1})$$

Seules la force de Coriolis ($-2\Omega_r \times \mathbf{V}_{BM}$) et la force centrifuge ($-\Omega_r \times (\Omega_r \times \mathbf{R}_{BM})$) nécessitent des transformations, les autres termes restent inchangés puisque les vitesses sont calculées par rapport à (C_s) dans Fluent. Si $(\hat{\mathbf{e}}_x', \hat{\mathbf{e}}_y', \hat{\mathbf{e}}_z')$ et $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$ sont respectivement les bases orthonormales de (B) et (C_s), les vecteurs Ω_r et \mathbf{R}_{BM} s'écrivent dans (B) comme

$$\Omega_r = \begin{pmatrix} \Omega_{x'} \\ \Omega_{y'} \\ \Omega_{z'} \end{pmatrix} = \Omega_{x'} \hat{\mathbf{e}}_{x'} + \Omega_{y'} \hat{\mathbf{e}}_{y'} + \Omega_{z'} \hat{\mathbf{e}}_{z'} = \Omega_{z'} \hat{\mathbf{e}}_{z'} \quad (\text{A.IV.2})$$

$$\mathbf{R}_{BM} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x' \hat{\mathbf{e}}_{x'} + y' \hat{\mathbf{e}}_{y'} + z' \hat{\mathbf{e}}_{z'} \quad (\text{A.IV.3})$$

et dans (C_s) comme

$$\mathbf{R}_{BM} = \begin{pmatrix} R_{BM_x} \\ R_{BM_y} \\ R_{BM_z} \end{pmatrix} = R_{BM_x} \hat{\mathbf{e}}_x + R_{BM_y} \hat{\mathbf{e}}_y + R_{BM_z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.IV.4})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \Omega_x \hat{\mathbf{e}}_x + \Omega_y \hat{\mathbf{e}}_y + \Omega_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.IV.5})$$

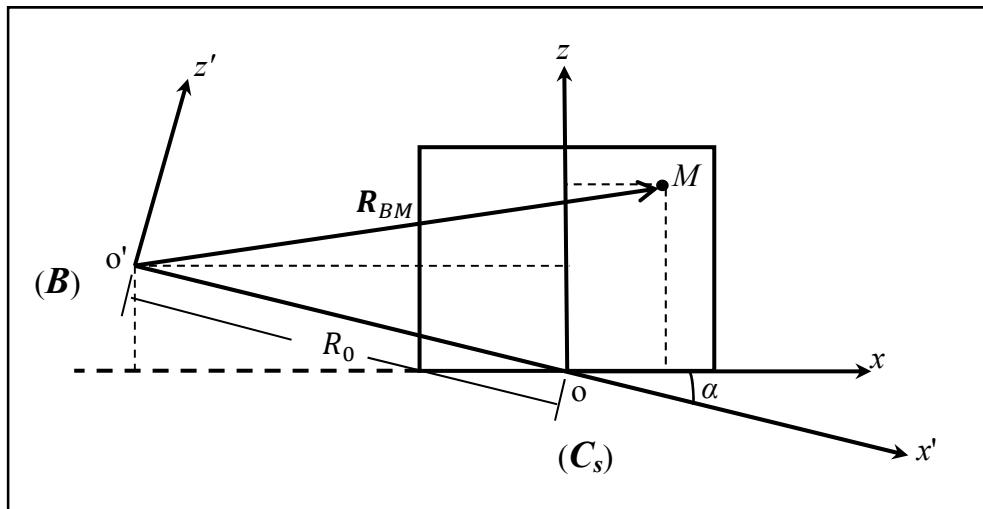


Figure A.IV.1 Les coordonnées du point o' et du point M dans les deux repères (B) et (C_s)

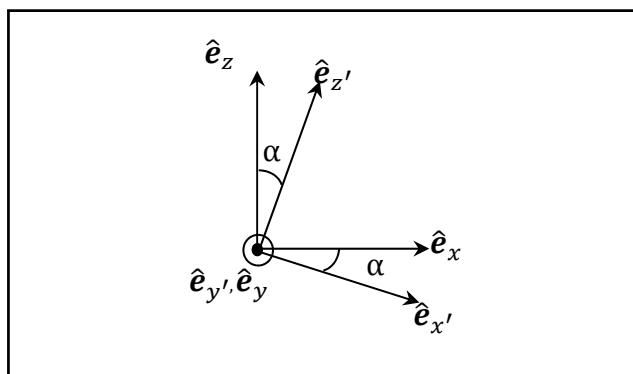


Figure A.IV.2 Les bases orthonormales des deux repères (B) et (C_s)

Les coordonnées du vecteur position R_{BM} dans le repère (C_s) peuvent être déterminées par

$$O \cdot \begin{pmatrix} -R_0 \cos \alpha \\ 0 \\ R_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{O}'\mathbf{M} = \mathbf{R}_{BM} = \begin{pmatrix} x + R_0 \cos \alpha \\ y \\ z - R_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{BM} = (x + R_0 \cos \alpha) \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + (z - R_0 \sin \alpha) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.IV.6})$$

et la vitesse de révolution s'écrit

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \Omega_r \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_x + 0 \hat{\mathbf{e}}_y + \Omega_r \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.IV.7})$$

L'équation (A.IV.1) s'écrit alors comme suit

- selon (ox)

$$\begin{aligned} u_{BM} \frac{\partial u_{BM}}{\partial x} + v_{BM} \frac{\partial u_{BM}}{\partial y} + w_{BM} \frac{\partial u_{BM}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ v \left(\frac{\partial^2 u_{BM}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{BM}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{BM}}{\partial z^2} \right) + 2\Omega_r v_{BM} \cos & \\ + [(\Omega_r \cos \alpha)^2 (x + R_0 \cos \alpha) - \Omega_r^2 \sin \alpha \cos \alpha (z - R_0 \sin \alpha)] & \end{aligned} \quad (\text{A.IV.8})$$

- selon (oy)

$$\begin{aligned} u_{BM} \frac{\partial v_{BM}}{\partial x} + v_{BM} \frac{\partial v_{BM}}{\partial y} + w_{BM} \frac{\partial v_{BM}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ v \left(\frac{\partial^2 v_{BM}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{BM}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{BM}}{\partial z^2} \right) - 2\Omega_r (u_{BM} \cos \alpha - w_{BM} \sin \alpha) + \Omega_r^2 y & \end{aligned} \quad (\text{A.IV.8})$$

- selon (oz)

$$u_{BM} \frac{\partial w_{BM}}{\partial x} + v_{BM} \frac{\partial w_{BM}}{\partial y} + w \frac{\partial w_{BM}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \quad (\text{A.IV.8})$$

$$\begin{aligned} & \nu \left(\frac{\partial^2 w_{BM}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{BM}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_{BM}}{\partial z^2} \right) - 2\Omega_r v_{BM} si \\ & \quad - [\Omega_r^2 \sin \alpha \cos \alpha (x + R_0 \cos \alpha) \\ & \quad - (\Omega_r \cos \alpha)^2 (z - R_0 \sin \alpha)] \end{aligned}$$

ANNEXE V

CONTOURS DU MODULE DE LA FORCE DE CORIOLIS

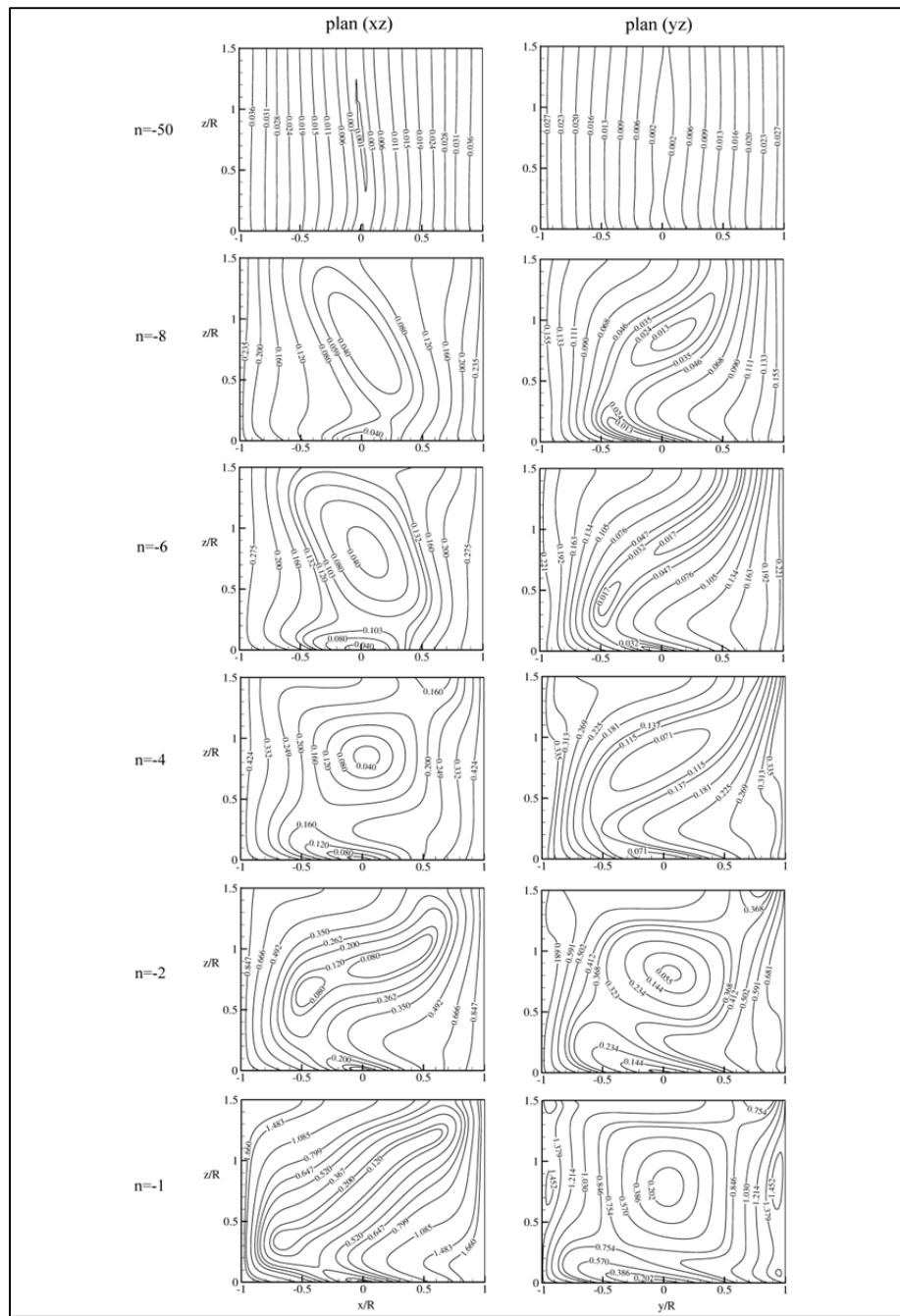


Figure A.V.1 Module de la force de Coriolis dans les deux plans méridionaux (xz) et (yz) pour différentes valeurs de n , $Re_\omega = 125$

ANNEXE VI

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA BALANCE DE FORCES DANS UN MÉLANGEUR PLANÉTAIRE: APPLICATION DES FILTRES RÉCURSIFS

Nacéra Chergui et Louis Dufresne

Département de Génie mécanique, École de Technologie Supérieure, Université du Québec,

1100 rue Notre Dame-Ouest, Montréal (Québec) H3C 1K3

Email: nacera.chergui.1@ens.etsmtl.ca ; louis.dufresne@etsmtl.ca

In 19th Annual Conference of the CFD Society of Canada (Montréal, Qc, Canada, 2011)
CFD Society of Canada

Résumé

Ce travail consiste à établir un bilan de forces appliquées sur le fluide dans un mélangeur planétaire. Une simulation numérique en 3D de l'écoulement a été réalisée avec le code *Fluent*, cette simulation donne lieu à des résultats numériques qui peuvent parfois être bruités. Ce bruit peut se répercuter sur le calcul des termes de gradients et de dérivées secondes dans la balance des forces (les termes d'accélération convective, le gradient de pression et les contraintes visqueuses). Pour corriger ce problème, nous avons appliqué une technique de filtrage des résultats numériques. Le filtre utilisé est le filtre récursif. Un exemple d'une rotation solide du mélangeur est présenté pour tester l'efficacité du filtre choisi. Les résultats filtrés de la rotation uniforme pour un plan méridional, en coordonnées cartésiennes, montrent que le gradient de pression est correctement balancé par l'accélération convective. Par la suite, nous avons étudié la balance de forces établie dans le fluide lorsque le mouvement de rotation en corps rigide commence à être brisé, cela correspond à une vitesse de révolution de mélangeur très faible. Pour ce cas, un faible changement dans l'équilibre est observé. On constate aussi que le choix de l'ordre et la récursivité du filtre dépendent des résultats numériques. Nous avons comparé par la suite les résultats de deux simulations pour un nombre de Reynolds égal à 300, la première utilise une grille structurée et la deuxième une grille non structurée avec l'application du filtre, les deux résultats sont comparables et donnent pratiquement la même balance de forces.

A.V.1 Introduction

Le mélangeur planétaire trouve une très grande application à petite échelle dans de nombreuses industries telles que l'industrie chimique, biochimique, biotechnologique et pharmaceutique. Il présente une technique de mélange, non intrusive, de fluides ou de solides (poudres) [1,2]. Il est constitué d'un cylindre généralement incliné et exempt d'agitateur mécanique, ce cylindre est mis en rotation autour de son axe géométrique et en révolution autour d'un 2ème axe (figure 1). Cette technique présente parfois certains problèmes de mélange [3,4]. Peu de travaux sont publiés dans ce domaine pour des raisons de confidentialité et/ou de compétitivité. Une bonne compréhension des mécanismes physiques qui gouvernent l'écoulement dans le mélangeur planétaire pourrait résoudre ces problèmes de mélange.

Le but de notre présent travail est l'étude de la dynamique de l'écoulement d'un fluide newtonien pour un modèle de mélangeur planétaire, et pour ce faire, nous allons débuter par une analyse de la balance des différentes forces exercées sur un élément de fluide. Cette analyse est basée essentiellement sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, en 3D pour un écoulement incompressible, avec la méthode des volumes finis en utilisant le code commercial *Fluent*.

Il faut distinguer trois repères cartésiens (Fig. 1), le repère absolu (**A**) où le cylindre sera en double rotation, le repère (**B**) dit de révolution parce que le cylindre sera en révolution autour de lui, et le repère (**C**) dit de rotation dont l'axe des coordonnées « *z* » coïncide avec l'axe de rotation du pot. Le mélange se fait par rapport au pot, donc par rapport au repère de rotation (**C**).

A.V.2 Les Équations fondamentales de l'écoulement

Pour commencer, nous avons choisi le repère de révolution (**B**) pour étudier la dynamique de l'écoulement parce que dans ce repère, le régime d'écoulement du fluide est permanent comme le montre l'étude expérimentale de Lacroix [5].

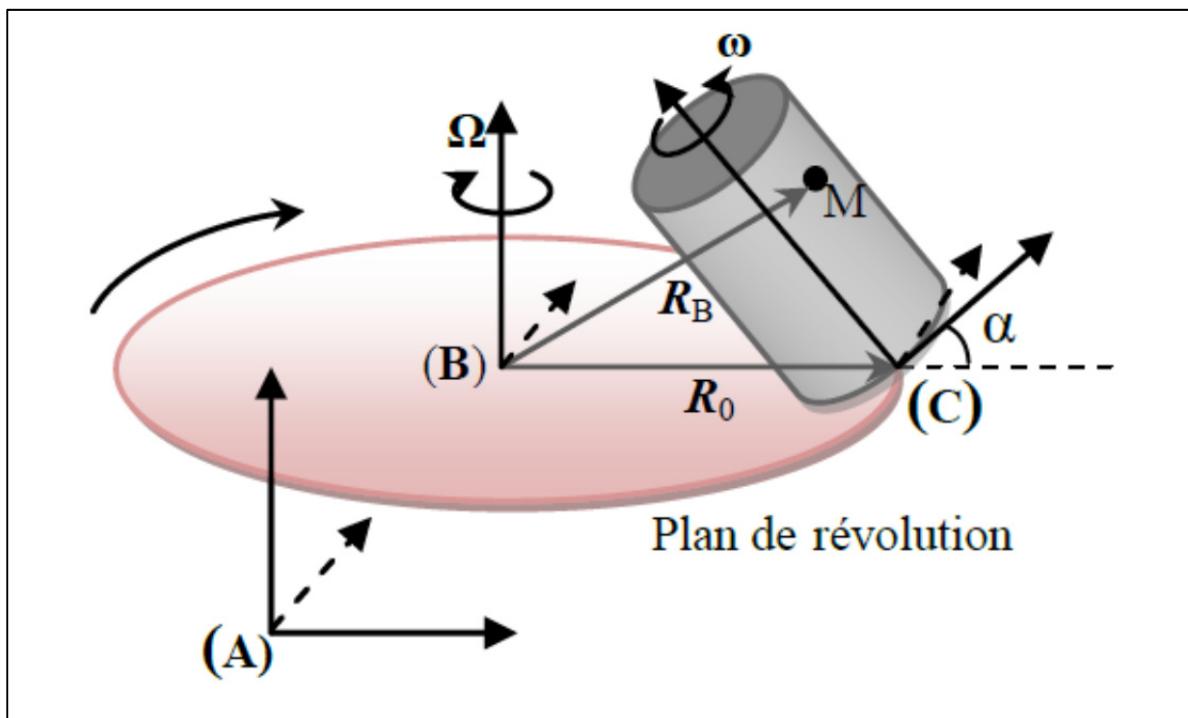


Figure A.V.1 Le schéma d'un mélangeur planétaire. (**A**) repère absolu, (**B**) repère de révolution et (**C**) repère de rotation

Dans le repère en révolution (**B**), pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial u_B}{\partial x} + \frac{\partial v_B}{\partial y} + \frac{\partial w_B}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.V.1})$$

tandis que l'équation de conservation de quantité de mouvement par rapport à (**B**) pour un fluide newtonien est sous la forme [6]

$$\frac{\partial \mathbf{V}_B}{\partial t} + \mathbf{V}_B \cdot \nabla \mathbf{V}_B = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_v + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_B - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_B - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_B \quad (\text{A.V.2})$$

Dans cette équation, \mathbf{V}_B est la vitesse du point M relative à la révolution, $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ est la force de pression, \mathbf{f}_v regroupe les forces de volume qui vont être négligées dans la suite du calcul, $\nu \nabla^2 \mathbf{V}_B$ est la force visqueuse, $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_B$ est la force de Coriolis et $-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_B$ est la force centrifuge, toutes les forces sont par unité de masse. Les deux forces, centrifuge et de Coriolis, qui s'ajoutent aux autres termes de l'équation de Navier-Stokes sont dues à la révolution du repère (\mathbf{B}) et sont dites de révolution.

A.V.3 Description du modèle numérique

La simulation numérique va se faire pour un fluide newtonien dans un cylindre en rotation et en révolution. Le régime d'écoulement est permanent et est laminaire pour des nombres de Reynolds inférieurs à 2500 (Lacroix, 2010), ce nombre de Reynold est dit de révolution et est défini par rapport à la vitesse et le rayon de révolution R_0 qui présente la distance entre l'axe de rotation et celui de révolution (Figure A.V.1). La surface libre va être considérée indéformable et va être assimilée à une paroi plane, parallèle au fond du cylindre avec des conditions d'imperméabilité de la paroi et de glissement du fluide (Figure A.V.2). La simulation est faite à l'aide d'un calculateur en utilisant 8 CPU. Ce modèle numérique de CFD réalisé a déjà été testé par Lacroix [5], cet auteur a fait une étude paramétrique de l'écoulement dans un mélangeur planétaire par simulations numériques validées expérimentalement.

Le tableau 1 regroupe les conditions géométriques du mélangeur planétaire. Les résultats qui vont être présentés par la suite sont ceux d'un plan méridional (xz) (figure A.V.3) avec $z = 0.025m$.

Tableau A.V.1 Les conditions géométriques du mélangeur planétaire.

R_0 : Rayon de révolution (m).	0.200
R : Rayon du cylindre (m).	0.050
H : Hauteur du fluide dans le cylindre (m).	0.075
α : Angle d'inclinaison du cylindre ($^{\circ}$)	45

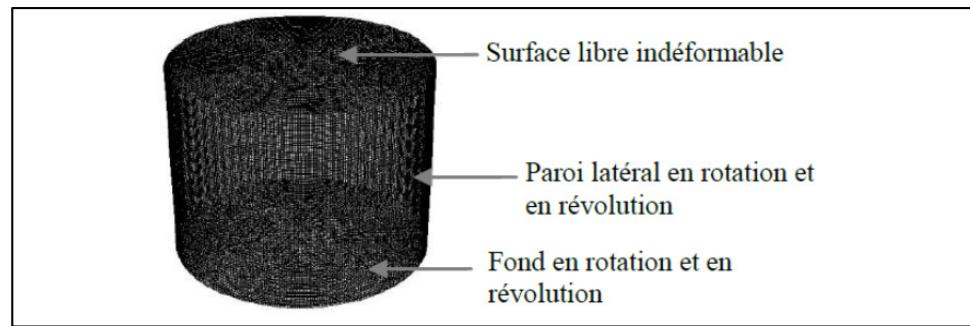


Figure A.V.2 Le schéma du maillage utilisé et les conditions aux limites

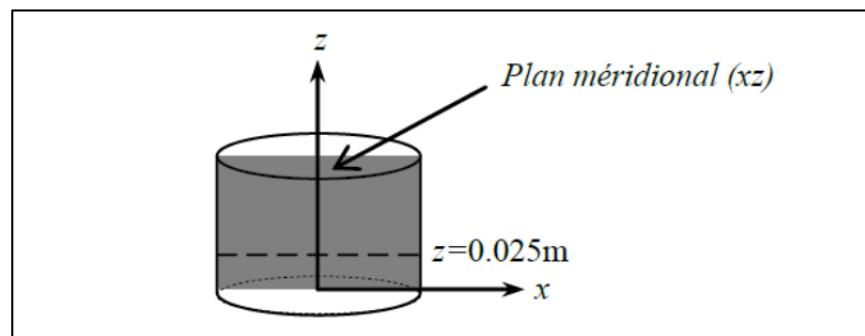


Figure A.V.3 Illustration du plan méridional

A.V.4 Cas de la rotation uniforme

Le premier cas considéré est celui d'une rotation uniforme du cylindre autour de son axe, avec une vitesse de révolution nulle, cela correspond à un nombre de Reynolds de révolution égal à 0. La vitesse de rotation ω est égale à -60 rad/s . Ce cas est le plus simple, l'équilibre de forces est établi entre le gradient de pression et la force centrifuge. Si on se met dans le repère de révolution (B) (Éq. A.V.2), et étant donné que les forces visqueuses, l'accélération centrifuge et de Coriolis de révolution sont nulles, l'équilibre va être différent et c'est l'accélération convective qui va balancer le gradient de pression.

L'évaluation des termes de l'équation de conservation de quantité de mouvement nécessite le calcul des dérivées premières et secondes afin de déterminer l'accélération convective, le gradient de pression et les contraintes visqueuses. Ces dérivées sont calculées ici avec le schéma des différences finies centrées du deuxième ordre avec une erreur de troncature de l'ordre de $O\Delta x^2$ (Figure A.V.4). Pour des valeurs de « y » et « z » données, les dérivées première et seconde d'une fonction par rapport à « x » sont données par

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (\text{A.V.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i+1} + 2f_i - 2f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (\text{A.V.4})$$

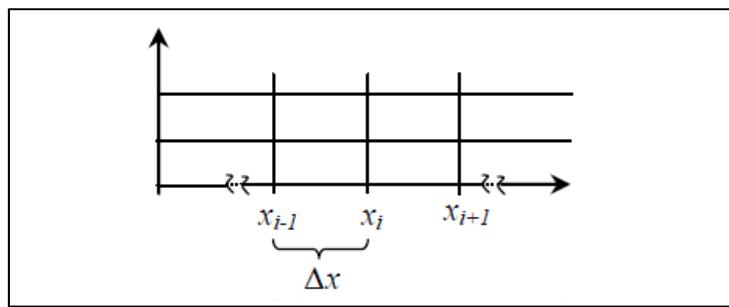


Figure A.V.4 Schéma des différences finies centrées

Bien que la solution de l'écoulement soit convergée avec un résidu de 10^{-6} , les résultats obtenus pour le calcul des dérivées peuvent être bruités, particulièrement si le calcul est fait sur un maillage non structuré. L'évaluation des forces appliquées sur le fluide à partir de ces résultats donnera lieu à une balance complètement erronée. Les figures 5, 6 et 7 présentent respectivement la balance des forces exercées sur le fluide dans la direction « x », dans la direction « y » et dans la direction « z » (c.-à-d. la composante « x », la composante « y » et la composante « z » de l'équation 2). Les résultats sont ceux du plan méridional (xz) pour une hauteur de fluide $z = 0.025m$

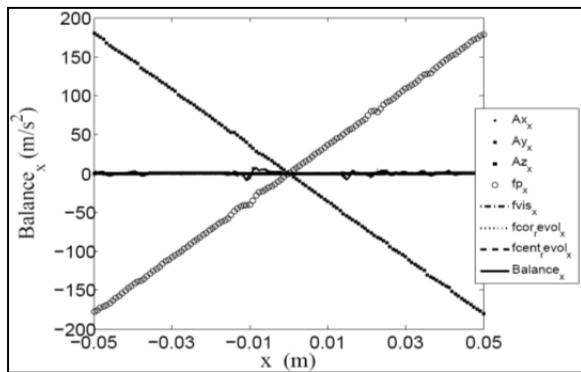


Figure A.V.5 La composante « x » de l'équation de conservation de quantité de mouvement (Éq. 2) pour le plan méridional (xz) avec $z=0.025m$, $Re=0$

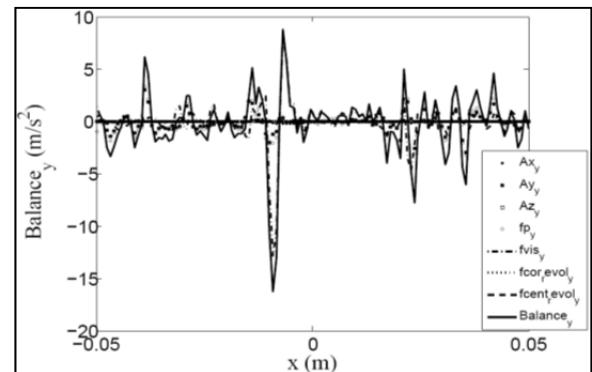


Figure A.V.6 La composante « y » de l'équation de conservation de quantité de mouvement (Éq. 2) pour le plan méridional (xz) avec $z=0.025m$, $Re=0$

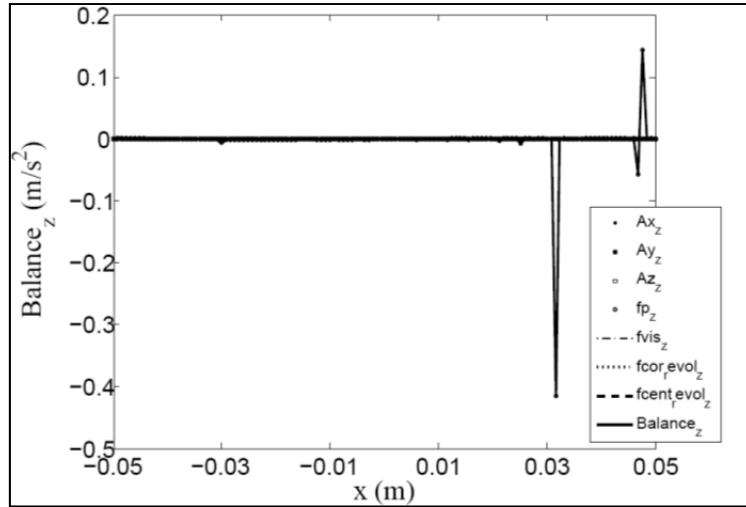


Figure A.V.7 La composante « z » de l'équation de conservation de quantité de mouvement (Eq. 2) pour le plan méridional (xz) avec $z=0.025\text{m}$, $\text{Re}=0$

Le tableau 2 regroupe les désignations des différents termes de l'équation de conservation de quantité de mouvement selon le point de vue de révolution (Eq. A.V.2). u_B , v_B et w_B sont les trois composantes de la vitesse V_B , Ω_x , Ω_y et Ω_z sont les composantes de la vitesse de révolution, R_{B_x} , R_{B_y} et R_{B_z} sont les composantes du vecteur R_B .

La balance est calculée à partir des valeurs numériques brutes obtenues avec *Fluent*. Il apparaît clairement que l'utilisation des données brutes bruitées peut modifier l'équilibre dynamique du fluide (Fig. A.V.6), alors que le fluide ne devrait subir aucune accélération dans la direction « y ».

L'utilisation d'un filtre pour "nettoyer" les valeurs bruitées semble être nécessaire pour une bonne estimation de chaque terme de l'équation de Navier- Stokes.

Tableau A . V . 2 Les désignations des différents termes des trois composantes de l'équation A.V.2 (en m/s^2)

Ax_x	$u_B \cdot \partial u_B / \partial x$
Ay_x	$v_B \cdot \partial u_B / \partial y$
Az_x	$w_B \cdot \partial u_B / \partial z$
fp_x	$(1/\rho)(\partial p / \partial x)$
$fvis_x$	$-\nu \left(\frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right)$
$fcor-revol_x$	$2(\Omega_y w_B - \Omega_z v_B)$
$fcent-revol_x$	$-\Omega_x \Omega_y R_{B_x} - (\Omega_x^2 + \Omega_z^2) R_{B_y} + \Omega_y \Omega_z R_{B_z}$
Ax_y	$u_B \cdot \partial v_B / \partial x$
Ay_y	$v_B \cdot \partial v_B / \partial y$
Az_y	$w_B \cdot \partial v_B / \partial z$
fp_y	$(1/\rho)(\partial p / \partial y)$
$fvis_y$	$-\nu \left(\frac{\partial^2 v_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_B}{\partial z^2} \right)$
$fcor-revol_y$	$2(\Omega_z u_B - \Omega_x w_B)$
$fcent-revol_y$	$-\Omega_x \Omega_y R_{B_x} - (\Omega_x^2 + \Omega_z^2) R_{B_y} + \Omega_y \Omega_z R_{B_z}$
Ax_z	$u_B \cdot \partial w_B / \partial x$
Ay_z	$v_B \cdot \partial w_B / \partial y$
Az_z	$w_B \cdot \partial w_B / \partial z$
fp_z	$(1/\rho)(\partial p / \partial z)$
$fvis_z$	$-\nu \left(\frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_B}{\partial z^2} \right)$
$fcor-revol_z$	$2(\Omega_x v_B - \Omega_y u_B)$
$fcent-revol_z$	$\Omega_x \Omega_z R_{B_x} + \Omega_y \Omega_z R_{B_y} - (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) R_{B_z}$

A.V.5 Les filtres récursifs

Les filtres sont utilisés généralement dans plusieurs domaines afin de traiter les données bruitées, ces données peuvent être des signaux, des images, des résultats numériques, etc. [7,8,9,10]. On trouve plusieurs types de filtres, et leur efficacité varie d'une application à l'autre. Le choix du filtre récursif pour cette étude revient en fait à sa simplicité de mettre en

œuvre. La fonction filtrée est obtenue par le produit de convolution entre le filtre et la fonction bruitée

$$\bar{f}(x) = (\tilde{f} * f)(x) = \int \tilde{f}(x - y)f(y)dy \quad (\text{A.V.5})$$

Il est important de noter qu'il existe plusieurs modèles de filtre récursif. Nous avons opté pour un modèle de filtre à trois points basé sur la définition du Laplacien, similaire à un schéma de différences finies centrées. Dans l'espace physique, ce filtre est défini sous sa forme générale par

$$\tilde{f}_i^{(j)} = -a[\tilde{b}\tilde{f}_{i+1}^{(j-1)} - c\tilde{f}_i^{(j-1)} + d\tilde{f}_{i-1}^{(j-1)}] \quad (\text{A.V.6})$$

Plusieurs tests de filtrage ont été faits en faisant varier les coefficients de pondération a , b , c et d afin de déterminer les plus appropriés pour un bon nettoyage des valeurs bruitées. Ces tests ont abouti au modèle de filtre suivant

$$\tilde{f}_i^{(j)} = -\frac{1}{4}[\tilde{f}_{i+1}^{(j-1)} - 2\tilde{f}_i^{(j-1)} + \tilde{f}_{i-1}^{(j-1)}] \quad (\text{A.V.7})$$

Avec j variant de 1 à m , où m est l'ordre du filtre et f_i est la valeur de la fonction à filtrer au point x_i et avec $\tilde{f}_i^{(0)} = f_i$. La fonction filtrée \bar{f}_i est calculée par :

$$\bar{f}_{i(1)}^{(m)} = f_i^{(m)} - \tilde{f}_i^{(m)} \quad (\text{A.V.8})$$

Le filtre est ensuite réappliqué récursivement n fois et la fonction filtrée finale est calculée par :

$$\bar{f}_{i(n)}^{(m)} = \bar{f}_{i(n-1)}^{(m)} - \tilde{f}_{i(n-1)}^{(m)} \quad (\text{A.V.9})$$

Dans l'espace spectral, le produit de convolution dans l'équation 5 est l'équivalent d'un produit entre deux fonctions :

$$\widehat{\bar{f}}_l = \widehat{\tilde{f}}_l \cdot \widehat{f}_l \quad (\text{A.V.10})$$

Où $\widehat{\dots}$ désigne la transformée de Fourier. Le modèle de filtre récursif choisi (Éq. 7) est écrit sous la forme [10]

$$\hat{f}_{(n)}^{(m)} = \left[1 - \left(\sin \frac{k\Delta x}{2} \right)^m \right]^n \quad (\text{A.V.11})$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et λ la longueur d'onde. Un exemple de filtre récursif est présenté sur la figure A.V.8 avec $m=5$ et $n= 15$. Ce filtre va permettre de nettoyer le bruit de grande amplitude qui correspond à un nombre d'onde supérieur à 1000.

Le filtre récursif est conçu généralement pour une grille régulière, dans le cas contraire, c.-à-d. si la grille est irrégulière, l'application du filtre peut nuire aux résultats et engendrer un bruit de faible amplitude sur la valeur mesurée. De ce fait, comme le maillage utilisé est non structuré, nous avons fait une interpolation linéaire des résultats importés de Fluent sur une grille régulière.

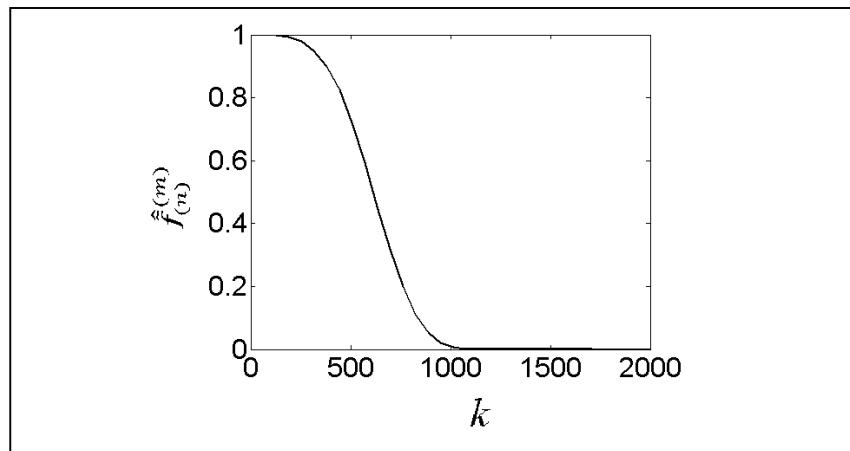


Figure A.V.8 Le filtre récursif d'ordre $m=5$ et de récursivité $n=15$ dans l'espace spectral

La technique de filtrage utilisée dans ce travail permet ainsi d'éliminer la majeure partie du bruit sans affecter significativement les résultats à être mesurés.

A.V.6. Rotation uniforme filtrée

Les figures A.V.9, 10 et 11 présentent respectivement les valeurs numériques et filtrées de la composante « x » de la vitesse d'écoulement du fluide, de sa dérivée première et de sa dérivée seconde selon « x ». Ces valeurs sont celles utilisées pour le calcul de bilan de forces pour la rotation uniforme (Figure A.V.5, 6 et 7). Physiquement, on s'attend que la composante « x » de la vitesse et ses dérivées soient nulles dans le plan méridional (xz).

Les résultats numériques bruts ont été d'abord tronqués à quatre chiffres significatifs, cela peut être défini comme un autre type de filtre. Après la troncation, le bruit est de l'ordre de 10^{-4} pour la vitesse, de 10^{+1} pour sa dérivée première et de 10^{+3} pour sa dérivée seconde. Les valeurs filtrées sont obtenues après plusieurs essais pour définir l'ordre m et la récursivité n du filtre qui nettoie mieux le bruit et donne une balance de forces nulle. Pour un ordre de $m=1$ et une récursivité de $n=1000$, le filtre récursif appliqué a permis, en quelques secondes, d'atténuer le bruit d'un facteur de 10^{+1} pour la vitesse, de 10^{+2} pour la dérivée première et de 10^{+4} pour la dérivée seconde (Fig. A.V.9, 10 et 11).

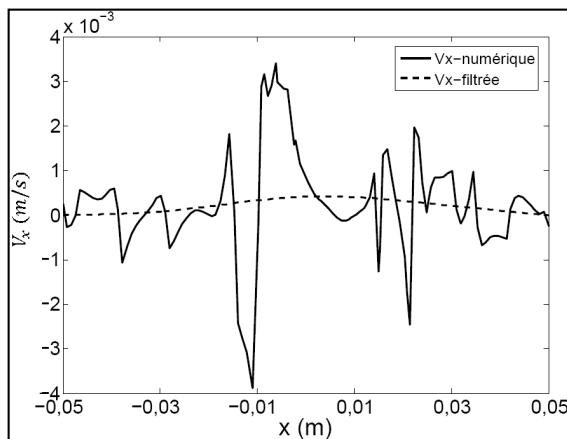


Figure A.V.9 : La composante « x » de la vitesse dans le plan méridional (xz).
 $z = 0.0025m$.
Filtre récursif avec $m=1$ et $n=1000$

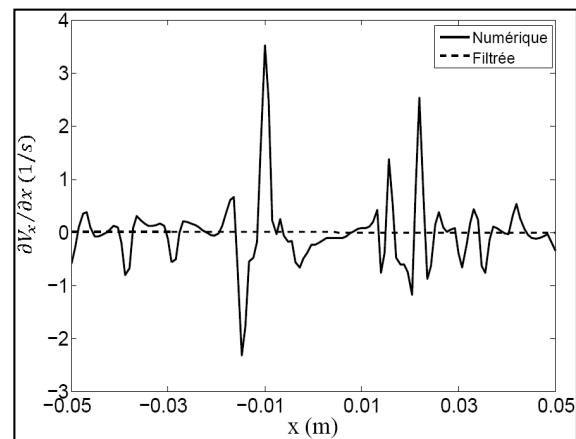


Figure A.V.10 La dérivée première de la composante « x » de la vitesse dans le plan méridional (xz). $z=0.0025m$.
Filtre récursif avec $m=1$ et $n=1000$

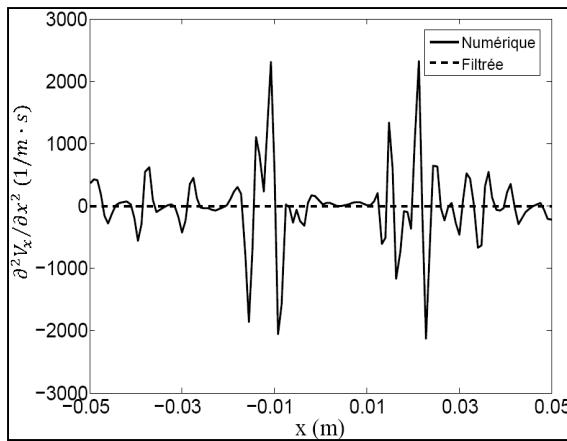


Figure A.V.11 La dérivée seconde de la composante « x xz). $z = 0.0025m$.
Filtre récursif avec $m=1$ et $n=1000$

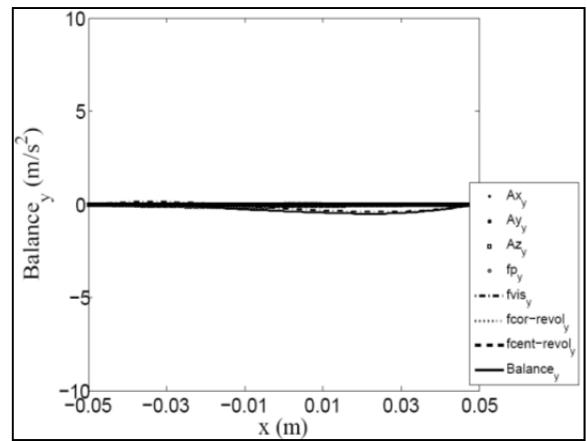


Figure A.V.12 La composante « y xz). $z=0.025m$, $Re=0$.
Filtre récursif avec $m=1$ et $n=1000$

L'application du filtre récursif semble être bénéfique pour le bilan de force calculé, les résultats sont significativement améliorés (Figure A.V.6 et 12). L'analyse de ces résultats confirme que seuls l'accélération convective selon « y xxyz ».

A.V.7 Cas de rotation et de révolution

Considérons maintenant une faible vitesse de révolution. La vitesse de rotation étant toujours égale à -60 rad/s. Cela va nous permettre de déterminer le nouvel équilibre de forces pour une particule de fluide, soumise à un champ de forces de révolution, qui vient juste de quitter sa trajectoire de rotation solide. Notre grand intérêt ici sera d'examiner plus particulièrement l'efficacité du filtre appliqué dans le cas du mélangeur planétaire, et de voir si la balance de forces est bien nulle. L'étude de l'effet du nombre de Reynolds de révolution sur l'équilibre dynamique du fluide mélangé avec une interprétation physique plus approfondie et plus détaillée des résultats obtenus fera l'objet de travaux futurs.

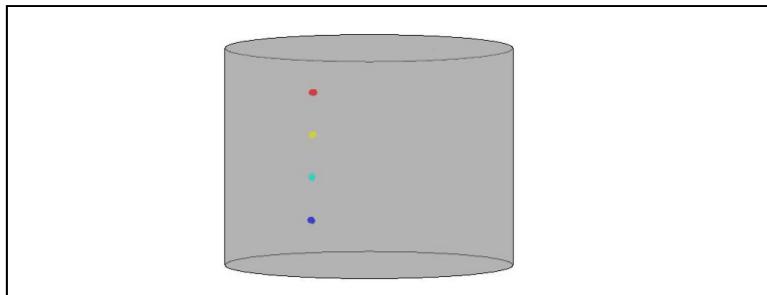


Figure A.V. 13 La position initiale de quatre particules passives dans le mélangeur initialement au repos.

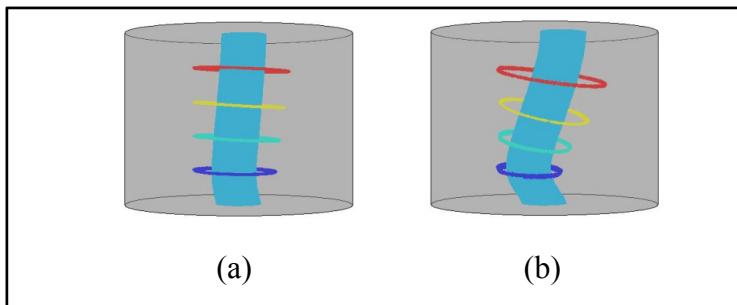


Figure A.V.14 Iso-surfaces de la vitesse relative à la révolution et les trajectoires parcourues par les particules passives. (a) : $Re = 40$, (b) : $Re = 150$

Les figures A.V.13 et 14 présentent les trajectoires de quatre particules passives de fluide initialement au repos (Figure A.V.13) et l'iso-surface d'un module de vitesse égale à 0.6 m/s pour les nombres de Reynolds de révolution de 40 et de 150. Dans le cas de la rotation simple, ces particules vont avoir une trajectoire circulaire avec une vitesse tangentielle constante tout au long du cylindre pour un rayon donné. Le cas de $Re=40$ est très proche de la rotation uniforme (Figure A.V.14-a). Pour $Re=150$, particulièrement au voisinage de l'axe de rotation, les particules de fluide vont commencer à dévier leurs trajectoires circulaires et à quitter leur plan initial, créant par conséquent des flux verticaux (Figure A.V.14-b), leur mouvement n'est plus circonférentiel et leur vitesse tangentielle est variable pour un rayon donné le long du cylindre.

Les figures A.V.15, 16 et 17 représentent les trois composantes vectorielles de l'équation de conservation de quantité de mouvement (Éq. A.V.2) dans le plan méridional (xz) et pour $z=0.025\text{m}$, ces résultats sont pour un nombre de Reynolds de révolution égal à 150. Plusieurs tests ont été effectués aussi pour le traitement des dérivées premières et secondes afin de déterminer l'ordre et la récursivité du filtre qui permettent d'éliminer le bruit. Le filtre récursif qui nettoie le mieux est d'ordre $m=1$ et d'une récursivité $n=20$ pour $\text{Re}=40$ et $n=100$ pour $\text{Re}=150$.

Il ressort des résultats montrés auparavant que le filtre a bien agi sur le calcul des dérivées, cela a permis de donner une bonne estimation d'ordre de grandeur des différentes forces dans l'écoulement. On note aussi que le choix de la récursivité n du filtre peut varier selon le nombre de Reynolds de révolution et selon les résultats numériques, dépendamment du rapport signal/bruit obtenu pour chaque simulation. Toute fois les valeurs des gradients ainsi que des dérivées secondes peuvent être légèrement sous-estimées si la récursivité est très élevée.

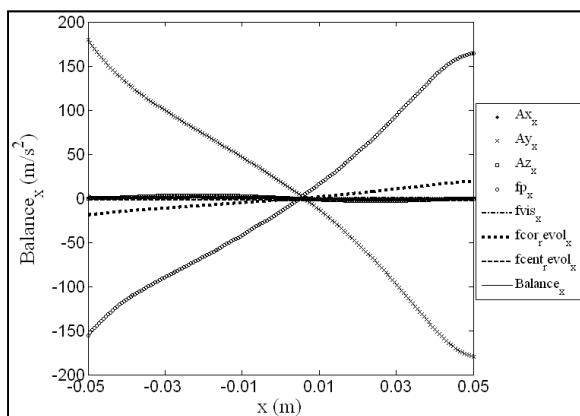


Figure A.V.15 La composante « x » de l'équation 2 pour le plan méridional (xz) avec : $z=0.025\text{m}$.

$\text{Re} = 150, n = 100$ et $m = 1$

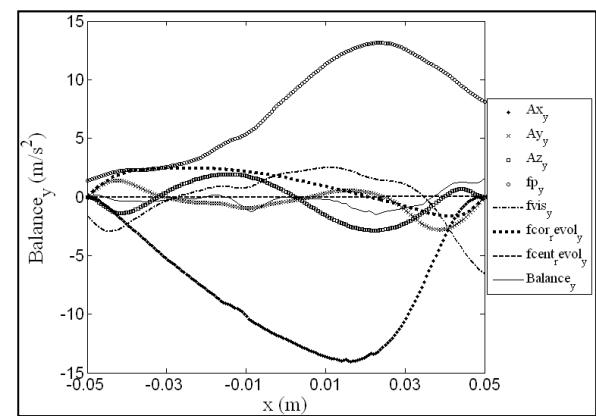


Figure A.V.16 La composante « y » de l'équation 2 pour le plan méridional (xz) avec : $z=0.025\text{m}$.

$\text{Re} = 150, n = 100$ et $m = 1$

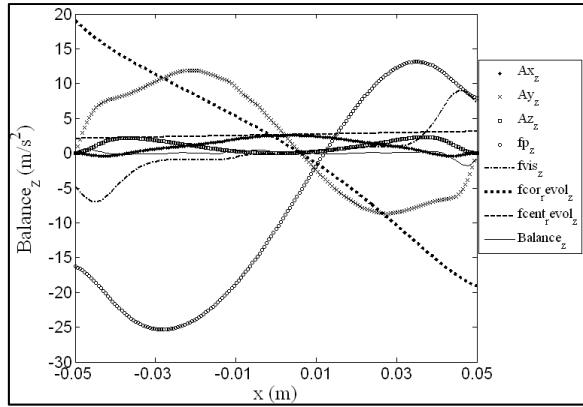


Figure A.V.17 La composante « z » de l'équation 2 pour le plan méridional (xz) avec $z=0.025\text{m}$. $\text{Re}=150$, $n=100$ et $m=1$

Physiquement, les résultats montrent qu'à ce niveau du cylindre, l'équilibre dynamique est majoritairement établi entre l'accélération convective selon « y » et le gradient de pression selon « x » dans la direction « x » de l'écoulement. Ces figures révèlent aussi que ces deux forces prédominent totalement le mouvement du fluide. On observe la même chose pour les deux autres directions, c.-à-d. que le gradient de pression est toujours balancé en grande partie par l'accélération convective. Les contraintes visqueuses, quant à elles, commencent à être plus significatives, particulièrement au voisinage des parois. Les autres forces interviennent progressivement dans les autres directions de l'écoulement au fur et à mesure que le nombre de Reynolds de révolution augmente.

A.V.8 Discussion complémentaire

Dans cette partie, nous voulions faire une comparaison des résultats de simulation obtenus avec une grille structurée et une grille non-structurée. La figure 18 représente la composante « y » de l'équation 2 pour $\text{Re}=300$ avec l'utilisation d'un maillage structuré et non structuré. L'utilisation d'une grille structurée améliore considérablement le calcul des dérivées, le bruit est plus faible. À titre de comparaison, et pour pouvoir éliminer la majeure partie du bruit, un filtre d'ordre $m=1$ et d'une récursivité $n=20$ est appliqué sur toutes les dérivées

premières et secondes calculées dans le cas de la grille non-structurée, tandis que pour la grille structurée, aucun filtre n'est appliqué.

En outre, le nombre de cellules pour une grille structurée est de 628227 avec un nombre d'itérations de 380, pour un même résidu de convergence (10^{-6}), le maillage non structuré nécessite 270 itérations pour converger avec un nombre de cellules de 873096. Il est important de noter aussi que les résultats de la balance de forces obtenus pour une grille structurée sont en concordance avec ceux de la grille non structurée qui sont filtrés.

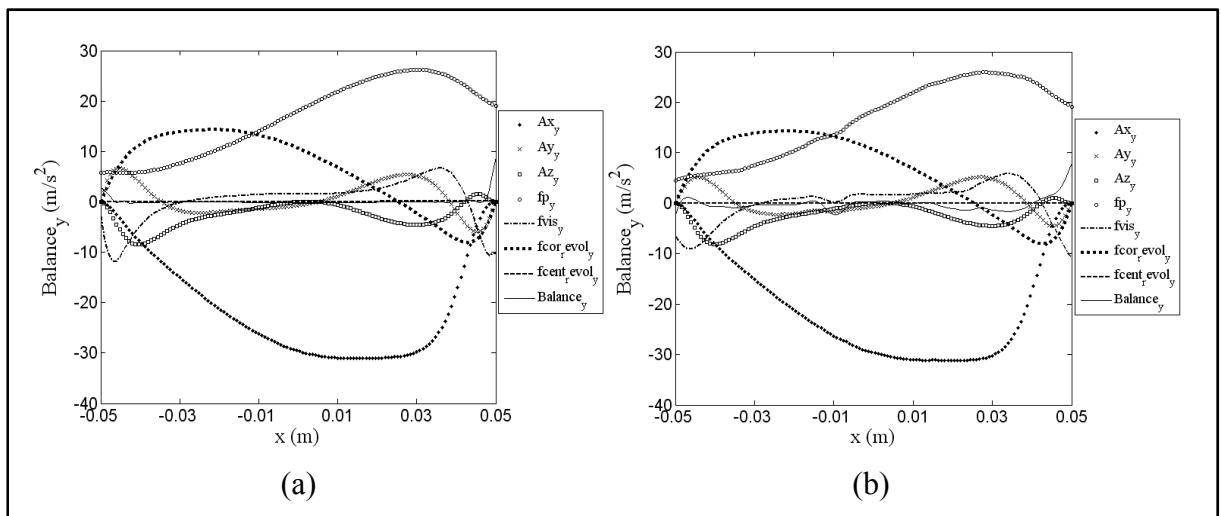


Figure A.V.18 La composante « y » de l'équation 2 pour le plan méridional (xz) avec $z=0.025\text{m}$ et $\text{Re}=300$. (a) : résultats pour une grille quasi-structurée sans l'utilisation de filtre, (b) : résultats pour une grille non-structurée, un filtre récursif est utilisé avec $n=20$ et $m=1$

A.V.8 Conclusion

Du point de vue physique, l'écoulement du fluide dans le mélangeur planétaire est très complexe, et pour comprendre les mécanismes physiques qui gouvernent ce type d'écoulement il faut étudier en détail l'effet des différentes conditions d'opération et de conception sur la dynamique des forces appliquées sur le fluide favorisant ainsi son mélange.

Ce travail a été effectué afin de développer une technique pour le post-traitement des résultats numériques bruités dans le but d'étudier l'équilibre de forces établi dans un mélangeur planétaire. Le filtre récursif apparaît donc comme un outil efficace pour bien filtrer les résultats de la simulation obtenus avec le code *Fluent*. Le choix de l'ordre m et de la récursivité n du filtre peut cependant être fonction de certaines conditions telles que les conditions d'opération comme pour notre cas du mélangeur. Le filtrage d'une constante bruitée nécessite une récursivité plus élevée. Même si l'application du filtre risque de diminuer l'amplitude de la réponse mesurée si l'ordre ou la récursivité sont très élevés, l'ordre de grandeur des différentes forces qui intervient dans l'écoulement peut bien être estimé. Comme il a été mentionné dans l'article, il existe plusieurs types de filtres, nous avons testé par ce présent travail l'un d'entre eux et ce sera plus intéressant d'examiner les autres afin de juger le plus efficace.

Les résultats du maillage non structuré, obtenus après le filtrage, sont satisfaisants et sont comparables avec ceux du maillage structuré. Dans certains cas, le maillage structuré ne peut être appliqué, plus particulièrement en 3D, alors si la grille est non structurée; l'utilisation des filtres pour post-traiter les résultats est très recommandée.

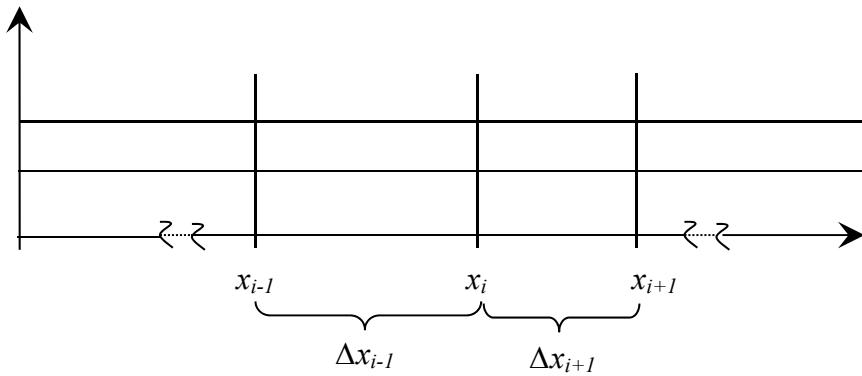
REMERCIEMENT

Un grand merci s'adresse au support financier de CRSNG et à monsieur Étienne Lacroix pour sa grande contribution dans l'élaboration de ce travail>

ANNEXE VII

CALCUL DES DÉRIVÉES PREMIÈRE ET SECONDE SUR UNE GRILLE IRRÉGULIÈRE

La dérivée première et la dérivée seconde d'une fonction quelconque $f(x)$ sont calculées en utilisant la série de Taylor. Pour une grille irrégulière :



$$f(x + \Delta x_{i+1}) = f(x) + (\Delta x_{i+1}) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x + O(\Delta x_{i+1}^2) \quad (\text{A.VI.1})$$

$$f(x - \Delta x_{i-1}) = f(x) - (\Delta x_{i-1}) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x + O(\Delta x_{i-1}^2) \quad (\text{A.VI.2})$$

En prenant Eq.A.VI.1-Eq.A.VI.2 et en négligeant les termes de troncature:

$$f(x + \Delta x_{i+1}) - f(x - \Delta x_{i-1}) = (\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1}) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x \quad (\text{A.VI.3})$$

Alors la première dérivée de la fonction f peut-être calculée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x = \frac{f(x + \Delta x_{i+1}) - f(x - \Delta x_{i-1})}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1})} = \frac{f(x + \Delta x_{i+1}) - f(x - \Delta x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (\text{A.VI.4})$$

Ce qui revient à écrire :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (\text{A.VI.5})$$

Reprendons maintenant la série de Taylor pour le calcul de la dérivée seconde

$$f(x + \Delta x_{i+1}) = f(x) + (\Delta x_{i+1}) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x + \left(\frac{\Delta x_{i+1}^2}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x + O(\Delta x_{i+1}^3) \quad (\text{A.VI.6})$$

$$f(x - \Delta x_{i-1}) = f(x) - (\Delta x_{i-1}) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x + \left(\frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x + O(\Delta x_{i-1}^3) \quad (\text{A.VI.7})$$

À partir de l'équation A.VI.6 et en négligeant toujours les termes de troncature

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x = \frac{f(x + \Delta x_{i+1}) - f(x)}{\Delta x_{i+1}} - \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x \quad (\text{A.VI.8})$$

En remplaçant le terme A.VI.8 dans l'équation A.VI.7 on obtient

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x_{i-1}) &= f(x) \\ &\quad - (\Delta x_{i-1}) \left[\frac{f(x + \Delta x_{i+1}) - f(x)}{\Delta x_{i+1}} - \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x \right] \\ &\quad + \left(\frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x \end{aligned} \quad (\text{A.VI.7})$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{i+1} f(x - \Delta x_{i-1}) + \Delta x_{i-1} f(x + \Delta x_{i+1}) - (\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1}) f(x) & \quad (\text{A.VI.8}) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta x_{i-1} \Delta x_{i+1}^2 + \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i+1}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x \end{aligned}$$

Et la dérivée seconde la fonction f peut être exprimée par :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\Delta x_{i-1} f_{i+1} + \Delta x_{i+1} f_{i-1} - (\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1}) f_i}{\frac{1}{2} (\Delta x_{i-1} \Delta x_{i+1}^2 + \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i+1})} \quad (\text{A.VI.9})$$

Pour une grille régulière $\Delta x_{i+1} = \Delta x_{i-1} = \Delta x$, la dérivée première et seconde s'écrivent alors respectivement:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}$$

Effet d'application d'un filtre récursif sur une grille irrégulière :

Le type et la qualité du maillage ont un impact direct sur l'application d'un filtre récursif. Une grille irrégulière peut générer un bruit additif lors du filtrage. Pour mieux élucider ce problème, nous avons pris l'exemple d'un polynôme de 4ème degrés, nous avons utilisé le maillage structuré et le non structuré de notre mélangeur planétaire, nous avons appliqué, par la suite, un filtre d'ordre $m=2$ et d'une récursivité $n= 20$ (ici, le n représente la récursivité du filtre et non pas le ratio de vitesses) sur ce polynôme.

$$f(x) = 5000x^4 + 400x^3 - 30x^2 - 2x - 0.001 \quad (3.39)$$

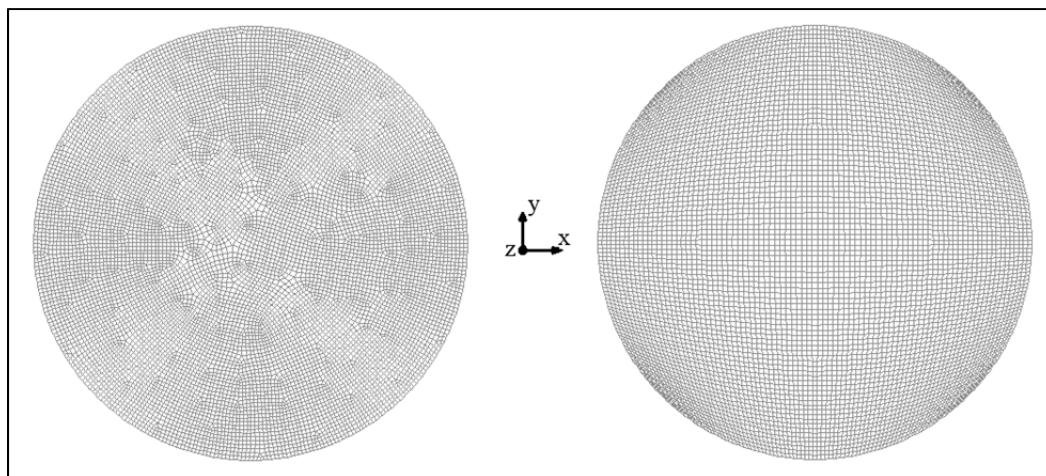


Figure A.VII.1 Grille non structurée vs grille quasi-structurée

Les calculs de la dérivée première et seconde du polynôme sur une grille irrégulière sont expliqués dans l'annexe VII. Les résultats de cet exemple sont présentés sur la figure 3.17.

Le bruit de faible amplitude généré par le filtre s'amplifie lorsqu'on calcule les dérivées première (2 fois) et seconde (jusqu'à 10^5 fois). Nous avons testé plusieurs exemples de polynôme, nous avons aussi utilisé les champs de vitesses et de pression obtenus par *Fluent*, les tests ont mené à la même constatation.

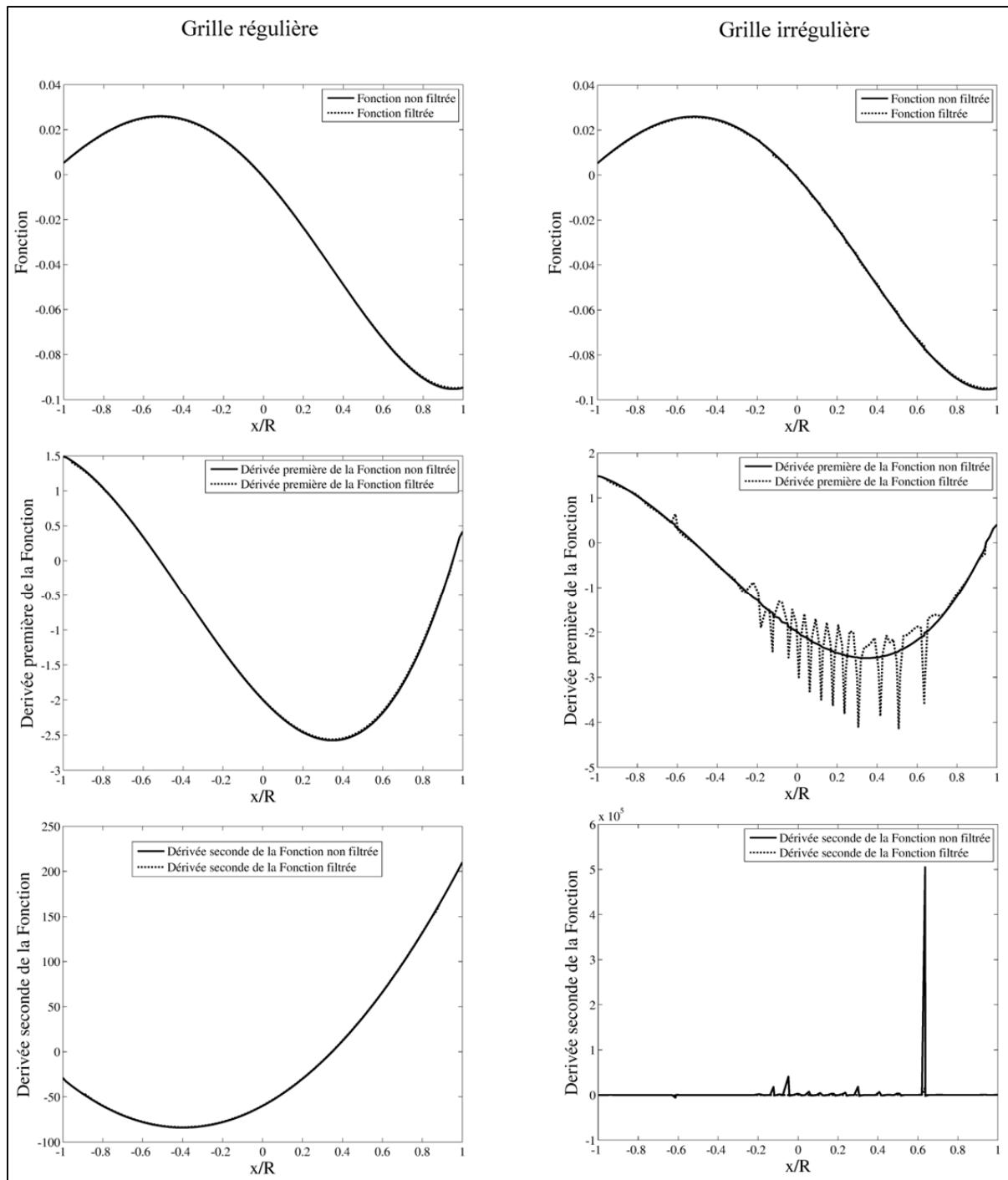


Figure A.VII.2 Bruit généré lors de l'application d'un filtre récursif sur une grille irrégulière

ANNEXE VIII

ANALYSE PAR CFD DE L'ÉCOULEMENT DANS UN MÉLANGEUR PLANÉTAIRE

Nacéra Chergui et Louis Dufresne

*Département de Génie mécanique, École de Technologie Supérieure, Université du Québec,
1100 rue Notre Dame-Ouest, Montréal (Québec) H3C 1K3*

Email: nacera.chergui.1@ens.etsmtl.ca ; louis.dufresne@etsmtl.ca

In 20th Annual conference of the CFD Society of Canada (Canmore, AB, Canada, 2012)
University of Alberta

Résumé

Ce travail consiste à étudier numériquement la dynamique de l'écoulement dans un mélangeur planétaire. Une simulation numérique a été réalisée avec le code Fluent. L'étude a été débutée par l'analyse d'un écoulement qui part de la rotation uniforme. Nous avons fait varier la vitesse de révolution tout en gardant la vitesse de rotation constante. Les débits de pompage axial et secondaire du fluide ont été déterminés à partir des résultats numériques obtenus. Les résultats montrent que ces deux débits augmentent avec l'augmentation de la vitesse de révolution. Les lignes de courant dans le plan horizontal montrent que dans le repère de révolution et pour un ratio de vitesses $n = -50$, l'écoulement est presque axisymétrique et est très proche de la rotation en corps rigide. Dans le plan transversal, pour le même nombre n , les lignes de courant montrent qu'il y a un mouvement vertical. À $n = -4$, le fluide circule selon des lignes circulaires dans le plan horizontal avec un point de stagnation qui change de position le long du cylindre. La balance de forces révèle que, à $n = -50$, l'équilibre est globalement établi entre le gradient de pression et la force centrifuge de rotation dans la direction radial, les autres composantes sont de très faible amplitude. Quand n augmente l'écoulement devient de plus en plus complexe et les accélérations convectives, les forces centrifuges de révolution et les forces de Coriolis deviennent de plus en plus importantes.

A.V.III.1 Introduction

Il existe un nombre considérable de techniques de mélange industrielles à grande ou à petite échelle, parmi ces techniques, on trouve les mélangeurs planétaires (Adachi et al, 2004, Niwa et Hashimoto, 2008). Ces mélangeurs comportent un cylindre sans agitateur mécanique munis de deux mouvements, un mouvement de rotation autour de son axe géométrique et un mouvement de révolution autour d'un autre axe situé à une certaine distance par rapport au premier (figure A.VIII.1). Le cylindre est souvent incliné pour garantir un bon mélange au moindre coût. Selon les produits mélangés et les paramètres d'opération, la qualité du mélange peut parfois poser problème. De plus, peu de travaux sont publiés dans ce domaine pour des raisons de confidentialité et/ou de compétitivité. Dans une perspective de mieux comprendre l'origine possible des problèmes de mélange, une meilleure compréhension de la dynamique de l'écoulement est nécessaire.

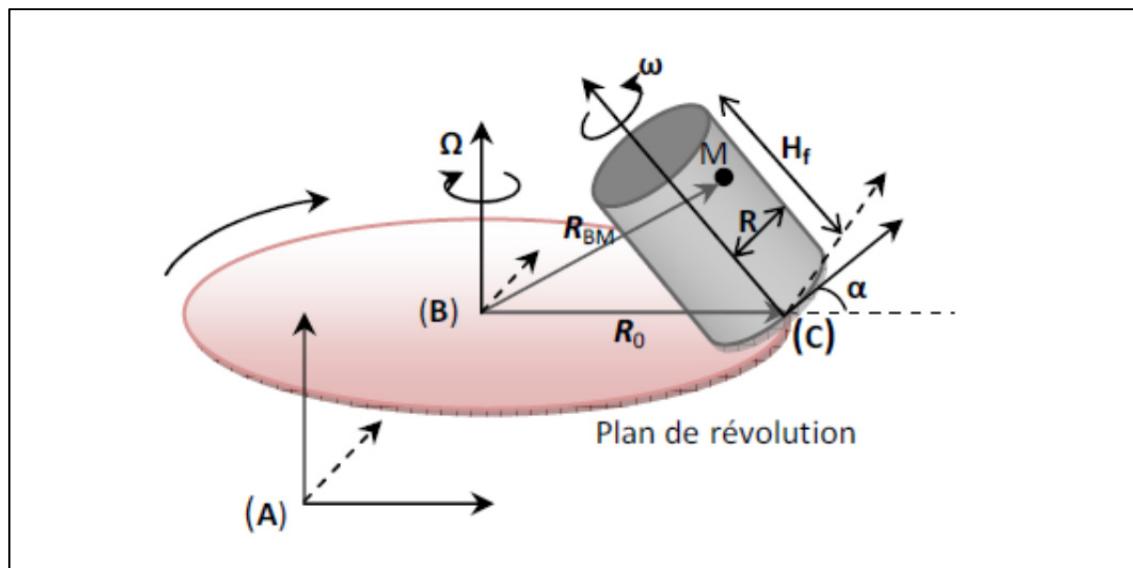


Figure A.VIII.1 : Schéma d'un mélangeur planétaire: **(A)** repère absolu, **(B)** repère de révolution et **(C)** repère de rotation

La présente étude est basée sur une analyse par CFD de l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible homogène dans un cylindre incliné en double rotation. Une étude paramétrique expérimentale et numérique a été effectuée au préalable par Lacroix (2010). Il a

montré expérimentalement que le régime d'écoulement est permanent dans le repère de révolution et est laminaire pour des valeurs de Reynolds de révolution inférieures à 2500 ($Re_{\Omega} = \rho\Omega R_0^2/\mu$ avec ρ la masse volumique du fluide, μ est sa viscosité dynamique, Ω est la vitesse de révolution et R_0 le rayon de révolution). Dans ce qui suit, nous allons commencer par une analyse de l'écoulement qui part de la rotation uniforme. En effet, lorsque le mélangeur est en simple rotation (rotation en corps rigide), l'équilibre dynamique est établi entre le gradient de pression et la force centrifuge. Cependant, si on ajoute en plus un mouvement de révolution, cela va venir briser la symétrie. D'autres forces vont alors intervenir dans l'écoulement telles que la force de Coriolis. Elles vont générer un écoulement relatif à la rotation et créent des flux dans différentes directions ce qui va éventuellement permettre le mélange.

A.VIII.2 Équations fondamentales et modèle numérique

En régime permanent, l'équation de conservation de quantité de mouvement pour un fluide newtonien incompressible et dont les forces sont définies par unité de masse s'écrit (Vanyo, 2010)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_{BM}}{\partial t} + \mathbf{V}_{BM} \cdot \nabla \mathbf{V}_{BM} & \quad (\text{A.VIII.1}) \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}_v + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_{BM} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_{BM} - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_{BM} \end{aligned}$$

Dans l'équation A.VIII.1, \mathbf{V}_{BM} est la vitesse du point M (figure A.VIII.1) relative à la révolution (dans le repère (B)), $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ le gradient de pression, \mathbf{f}_v regroupe les forces de volume qui vont être négligées dans la suite du calcul, $\nu \nabla^2 \mathbf{V}_B$ l'accélération visqueuse, $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_B$ est l'accélération de Coriolis et $-\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_B$ est l'accélération centrifuge. L'équation de continuité s'écrit sous la forme

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_{BM} = 0 \quad (\text{A.VIII.2})$$

La surface libre sera considérée comme une paroi rigide avec condition de glissement. Les parois et le fond du cylindre seront en rotation avec condition de non glissement. Cette approche a été validée qualitativement et quantitativement par Lacroix (2010). Il a constaté que les résultats de la simulation et les résultats numériques étaient en bonne concordance en ce qui concerne le temps et la puissance de mélange, la topologie du mélange pour un plan méridional à différents instants et la topologie de l'écoulement sur la surface libre. Les paramètres d'écoulement sont définis par :

- un ratio du rayon de révolution sur le rayon du cylindre $k = R_0/R = 4$;
- un ratio de la hauteur du fluide sur le rayon du cylindre $F = H_f/R = 1.5$;
- un angle d'inclinaison du contenant par rapport au bras de révolution $\alpha = 45^\circ$.

Les simulations sont réalisées avec le code commercial Fluent. Le nombre de cellules étant égal à 628000 et la solution numérique est convergée pour un résidu de 10^{-6} . Nous allons commencer l'étude par une augmentation progressive de la vitesse de révolution tout en gardant la vitesse de rotation constante, cela correspond à un nombre de Reynolds de rotation constant ($Re_\omega = \rho\omega R^2/\mu$) et un ratio de la vitesse de rotation sur la vitesse de révolution $n = \omega/\Omega$ variable.

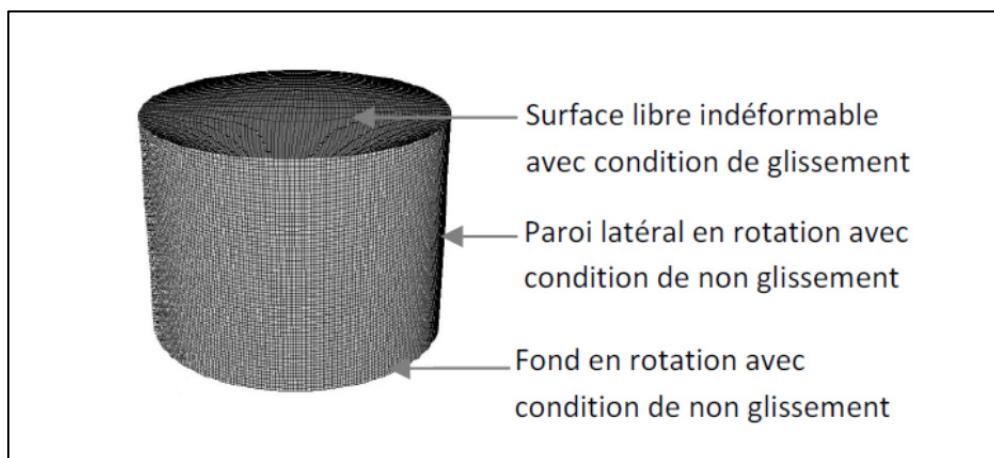


Figure A.VIII.2 Le schéma du maillage utilisé et les conditions aux limites

A.VIII.3 Résultats et discussions

Nous allons dans ce qui suit évaluer en premier lieu les débits de pompage axial et radial le long du contenant, examiner en second lieu la topologie de l'écoulement à partir des lignes de courant et établir la balance de forces correspondante.

A.VIII.3.1 Débit de Pompage

Nous allons calculer au début le débit de pompage axial et secondaire (Heniche et al., 2007) en faisant varier les paramètres d'écoulement. Le débit axial (Q_{ax}) est le débit du fluide qui passe à travers le plan (xy) perpendiculaire à l'axe de rotation (figure A.VIII.3). Il est défini par

$$Q_{ax}(z) = \int_A w_{BM}^- dx dy = \int_A w_{BM}^+ dx dy \quad (\text{A.VIII.3})$$

où w_{BM}^- et w_{BM}^+ sont respectivement les composantes axiales de la vitesse d'écoulement de signe négatif et positif. Le débit secondaire (Q_{sd}) est le débit du fluide tangent au plan (xy). Il est défini par

$$Q_{sd}(z) = L[\psi_{max}(z) - \psi_{min}(z)] \quad (\text{A.VIII.4})$$

ψ_{max} et ψ_{min} sont respectivement les valeurs maximale et minimale de la fonction de courant dans le plan (xy) et L une longueur caractéristique du mélangeur qui va être ici égale au rayon du cylindre R . La fonction de courant ψ est obtenue en intégrant les composantes de vitesses tangentes au plan (xy) suivant la définition

$$\psi_z = \int u dy - \int v dx \quad (\text{A.VIII.5})$$

Les débits axial et secondaire sont calculés sur 10 plans (xy) horizontaux uniformément espacés.

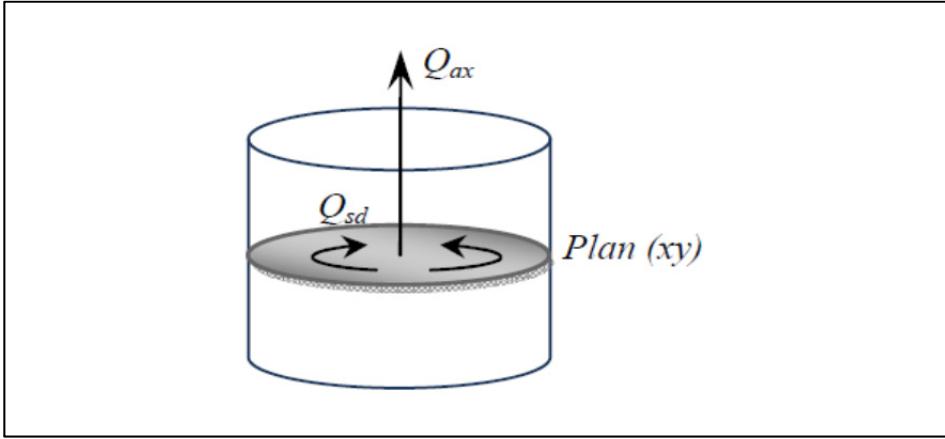


Figure A.VIII.3 Présentation schématique des débits axial et secondaire

Nous avons fixé le nombre de Reynolds de rotation Re_ω à 125, nous avons ensuite fait varier le ratio de vitesses n de -50 à -4 . Le signe négatif de n indique la contra-rotation. La figure A.VIII.4 représente la variation du débit axial le long de l'axe du cylindre. On remarque que le débit axial augmente assez rapidement lorsqu'on s'éloigne du fond du cylindre jusqu'à atteindre une valeur maximale à la mi-hauteur (approximativement), il diminue ensuite de la même manière pour s'annuler à la surface libre. Le pompage axial du fluide est donc au maximum au voisinage du plan central horizontal du mélangeur pour toutes les valeurs de n étudiées ici. La figure A.VIII.5 illustre les valeurs du débit secondaire le long de l'axe de rotation, ce débit est calculé à partir des équations A.VIII.4 et A.VIII.5 en utilisant les vitesses relatives à la rotation tel que

$$\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{V}_{BM} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (\text{A.VIII.6})$$

où \mathbf{r} est le vecteur position du point M dans le plan horizontal (xy). On remarque alors un accroissement notable du pompage secondaire dans le plan (xy) avec l'augmentation de la vitesse de révolution. Toutes les courbes présentent la même variation, le débit secondaire

augmente avec z jusqu'à une valeur maximale, puis diminue au voisinage de la mi-hauteur du cylindre et ré-augmente par la suite. Le cas de $n = -6.67$ apparaît différent.

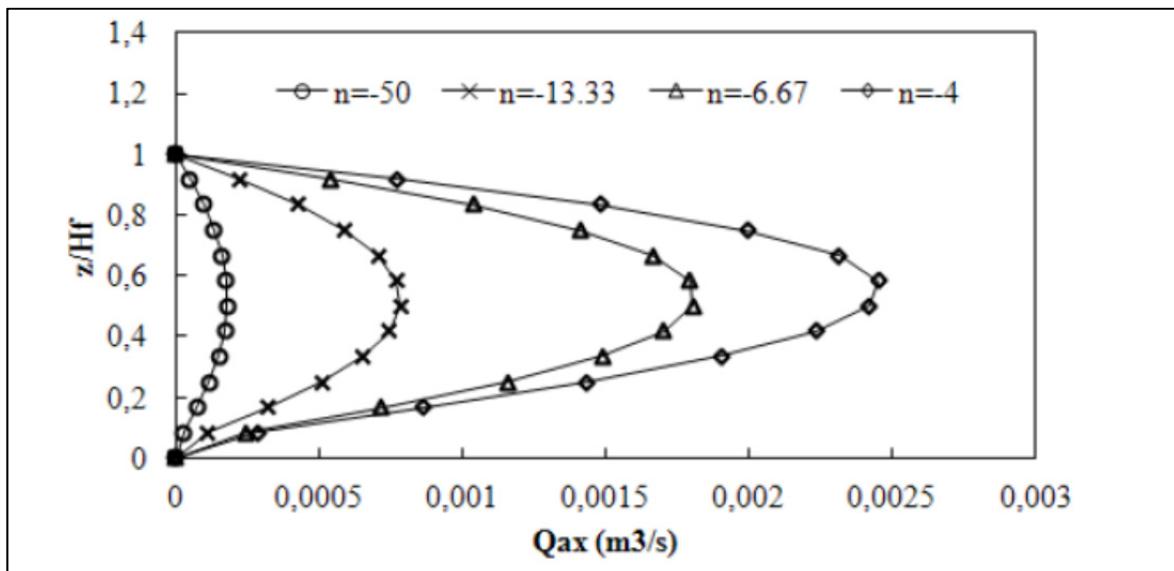


Figure A.VIII.4 Variation du débit axial le long de l'axe du cylindre pour différentes valeurs de n à $Re_\omega = 125$

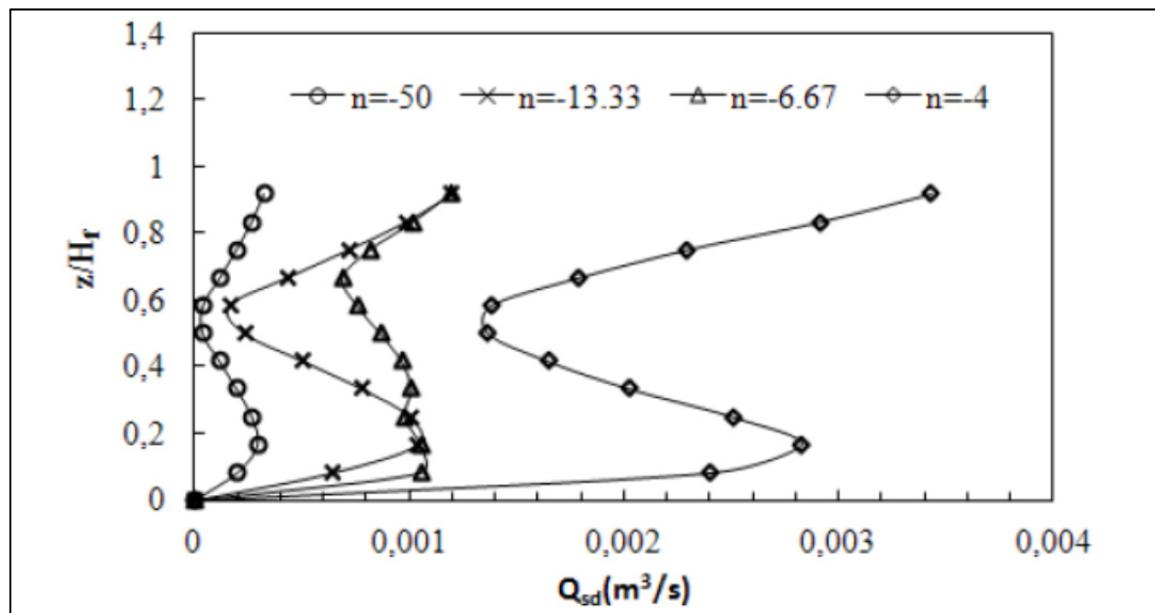


Figure A.VIII.5 Variation du débit secondaire le long du cylindre pour différentes valeurs de n à $Re_\omega = 125$

A.VIII.3.2 Topologie d'Écoulement

Dans ce qui suit, nous allons déterminer la structure de l'écoulement et la balance de forces associées aux débits de pompage calculés pour les deux limites du domaine étudié, c.-à-d. à $n = -50$ et $n = -4$. La topologie de l'écoulement est déterminée à partir de la fonction de courant décrite dans la section (A.VIII.3.1) pour des plans horizontaux (xy) à différentes hauteurs du mélangeur et les deux plans méridionaux (xz) et (yz). Nous allons calculer la fonction de courant selon deux points de vue. Le premier, sera d'utiliser directement les vitesses relatives à la révolution (repère (B)). Pour le plan (xy) par exemple

$$\psi_z = \int u_{BM} dy - \int v_{BM} dx \quad (\text{A.VIII.7})$$

La visualisation des lignes de courant du point de vue révolution confirme, qu'à très grande valeur de ratio de vitesses ou lorsque la vitesse de rotation est beaucoup plus importante que la vitesse de révolution ($n = -50$), l'écoulement est pratiquement équivalent à la rotation solide. La figure A.VIII.6 montre, que dans le plan horizontal (xy), le fluide suit des lignes circulaires à différentes hauteurs z/H_f avec un point de stagnation au centre. À $n = -4$ (figure A.VIII.7), les lignes de courant ont perdu leur symétrie et sont devenues spiralées. Le point de stagnation change de position en fonction de la hauteur du contenant; près du fond (à $z/H_f=0.33$), il est dans le troisième quadrant situé en bas à gauche du plan (xy) (sur la feuille), il se déplace progressivement le long du cylindre vers le premier quadrant situé en haut à droite.

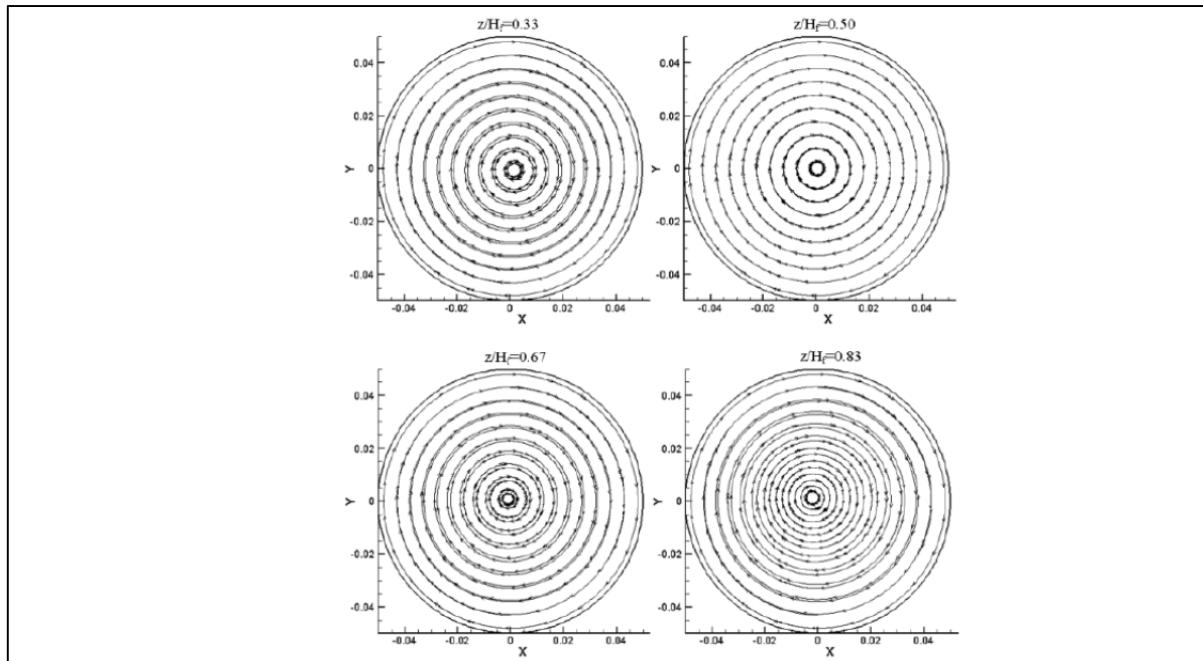


Figure A.VIII.6 Les lignes de courant dans le plan (xy) à différentes hauteurs du fluide dans le cylindre. La fonction de courant est calculée à partir de \mathbf{V}_{BM} . $Re_\omega = 125$ et $n = -50$

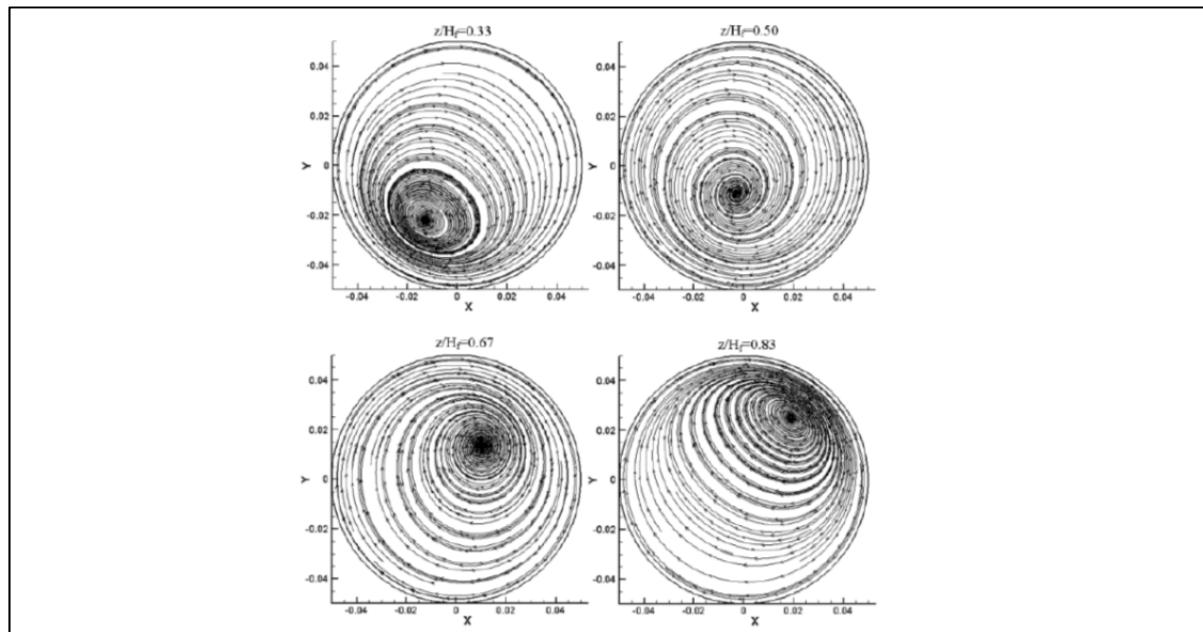


Figure A.VIII.7 Les lignes de courant dans le plan (xy) à différentes hauteurs du fluide dans le cylindre. La fonction de courant est calculée à partir de \mathbf{V}_{BM} . $Re_\omega = 125$ et $n = -4$

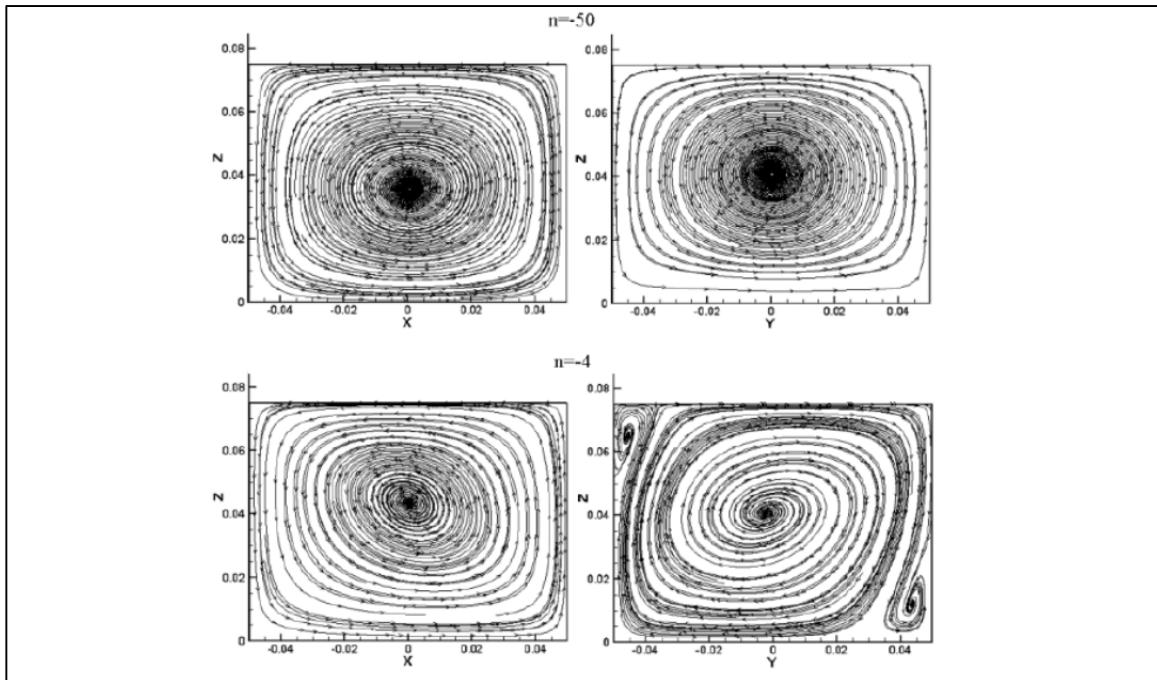


Figure A.VIII.8 Les lignes de courant dans le plan (xz) et (yz) . La fonction de courant est calculée à partir de \mathbf{V}_{BM} . $Re_\omega = 125$

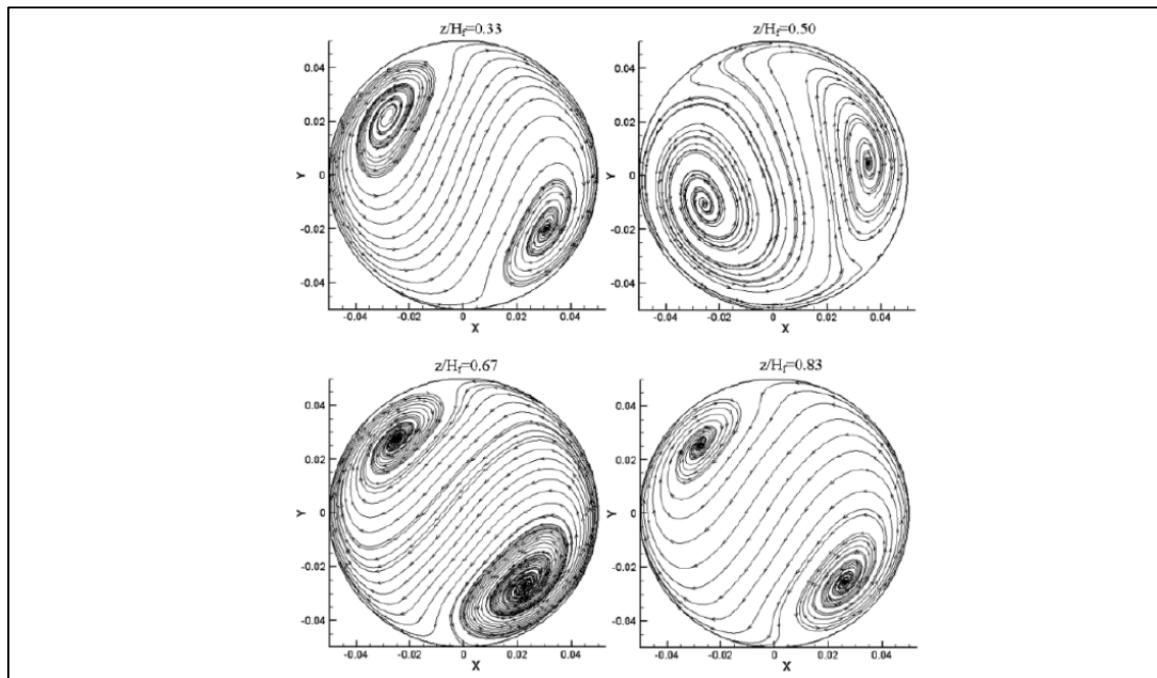


Figure A.VIII.9 Les lignes de courant dans le plan (xy) à différentes hauteurs du fluide dans le cylindre. La fonction de courant est calculée à partir de \mathbf{V}_{CM} . $Re_\omega = 125$ et $n = -50$

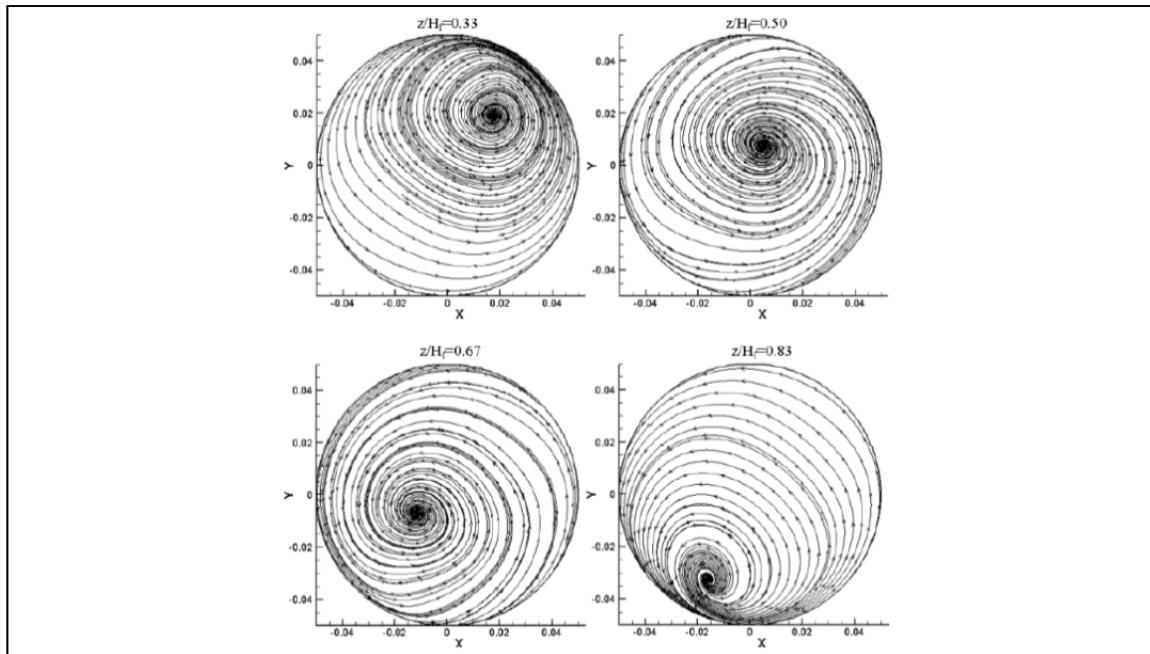


Figure A.VIII.10 Les lignes de courant dans le plan (xy) à différentes hauteurs du fluide dans le cylindre. La fonction de courant est calculée à partir de \mathbf{V}_{CM} . $Re_\omega = 125$ et $n = -4$

Les lignes de courant, qui se présentent sur les plans transversaux (xz) et (yz) respectivement parallèle et perpendiculaire au bras de révolution à $n = -50$ (figure A.VIII.8), montrent qu'il y a une activité axiale du fluide même si le mouvement circulaire dans le plan (xy) est dominant, cela est vérifié avec les résultats des débits de pompage axial et secondaire (figures A.VIII.4 et A.VIII.5). On note aussi la présence d'une seule et grande boucle de recirculation dans les plans (xz) et (yz) avec un point de stagnation situé au voisinage du centre des plans. Ces boucles se déforment un peu à $n = -4$ dans le plan (xz) avec un léger déplacement vertical du point de stagnation vers le haut et donnent naissance à deux autres de taille plus petite au voisinage des parois dans le plan (yz).

Le second point de vue sera de soustraire la rotation uniforme du fait que le mélange s'effectue dans le cylindre, c.-à-d. que c'est le mouvement relatif à rotation qui favorise le mélange. Nous allons alors utiliser les vitesses relatives à la rotation \mathbf{V}_{CM} (repère (C)) pour le calcul de la fonction de courant

$$\psi_z = \int u_{CM} dy - \int v_{CM} dx \quad (\text{A.VIII.8})$$

Les résultats sont rapportés sur la figure A.VIII.9 pour $n = -50$ et la figure A.VIII.10 pour $n = -4$. Nous notons deux boucles de recirculations proches des parois à $n = -50$. La topologie est presque la même le long du cylindre mise à part la mi-hauteur où les deux boucles font une légère rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et augmentent aussi légèrement leur taille. Dans le cas où $n = -4$. Une seule boucle de recirculation est marquée, cependant le point de stagnation se déplace cette fois-ci dans le sens inverse le long du contenant, c.-à-d. qu'il se déplace depuis le premier quadrant en haut à droit du plan (xy) vers le troisième quadrant en bas à gauche.

A.VIII.3.3 La Balance de Forces

Pour étudier la dynamique des forces appliquées sur le fluide, nous allons utiliser les résultats numériques obtenus pour évaluer chaque terme de l'équation (A.VIII.1). Les bilans des accélérations seront rapportés pour le plan méridional (xz) parallèle au bras de révolution à $z/H_f = 0.5$ (figure A.VIII.11). Les dérivées de l'équation (A.VIII.1) sont évaluées par la méthode des différences finies centrées du deuxième ordre (chergui et Dufresne, 2011). Suivant cette méthode et même avec une bonne convergence de la solution (résidu de l'ordre de 10^{-6}), les résultats numériques obtenus peuvent parfois être bruités (amplification de l'erreur de discréétisation), plus spécifiquement la dérivée première de la pression (gradient de pression) et la dérivée première et seconde de la vitesse (forces inertielles et visqueuses). Nous avons alors utilisé un filtre récursif afin d'éliminer ce bruit (chergui et Dufresne, 2011).

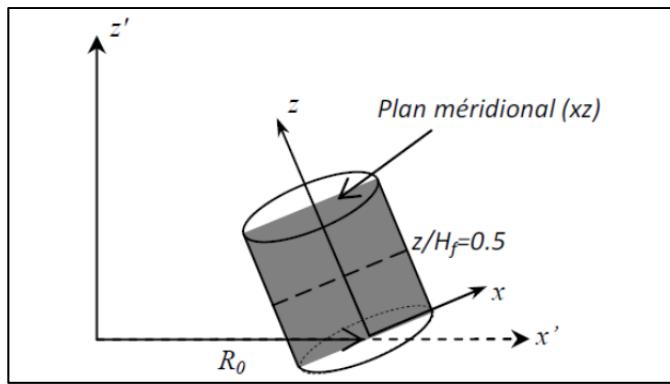


Figure A.VIII.11 Le plan méridional (xz)

À $n = -50$ (figure A.VIII.12-a), La balance « x » dans le plan méridional (xz) est similaire à celle d'une rotation uniforme, le gradient de pression est totalement balancé par l'accélération centrifuge de rotation qui se manifeste dans le graphe par la composante « y » de l'accélération convective dans la direction « x » ($v \partial u / \partial y$). Ces deux accélérations varient selon deux droites de pente positive pour le gradient de pression, et de pente négative pour la force convective. Pour ce même ratio de vitesses, dans la direction « y » et « z », le fluide est aussi soumis à des forces mais elles sont de très faibles amplitudes (figure A.VIII.12-c et A.VIII.12-e). Le débalancement des forces agissantes sur le fluide en rotation est plus marqué lorsque la vitesse de révolution augmente et le ratio de vitesses n diminue en valeur absolue, cela est traduit par la courbure du gradient de pression et de l'accélération convective selon « y » dans la balance « x » des forces (figure A.VIII.12-a et A.VIII.12-b), et l'augmentation d'ordre de grandeur des différents termes de la balance « y » et « z » (figure A.VIII.12-c avec A.VIII.12-d et figure A.VIII.12-e avec A.VIII.12-f). Les autres forces, telles que la force de Coriolis, la force centrifuge et la force convective selon « x » et « z », augmentent sensiblement avec l'augmentation de la vitesse de révolution. Quand n diminue en valeur absolue (de $n = -50$ jusqu'à $n = -4$), l'accélération de Coriolis devient de plus en plus importante dans l'écoulement et est la plus dominante dans la direction « y » (figure A.VIII.12-d). L'accélération visqueuse, quant à elle, est présente juste dans la direction « y » et « z » et est plus importante au voisinage des parois (figure A.VIII.12-d et A.VIII.12-f). L'accélération centrifuge, résultante de la révolution, augmente aussi par conséquence de l'augmentation de la vitesse de révolution (Éq. A.VIII.1).

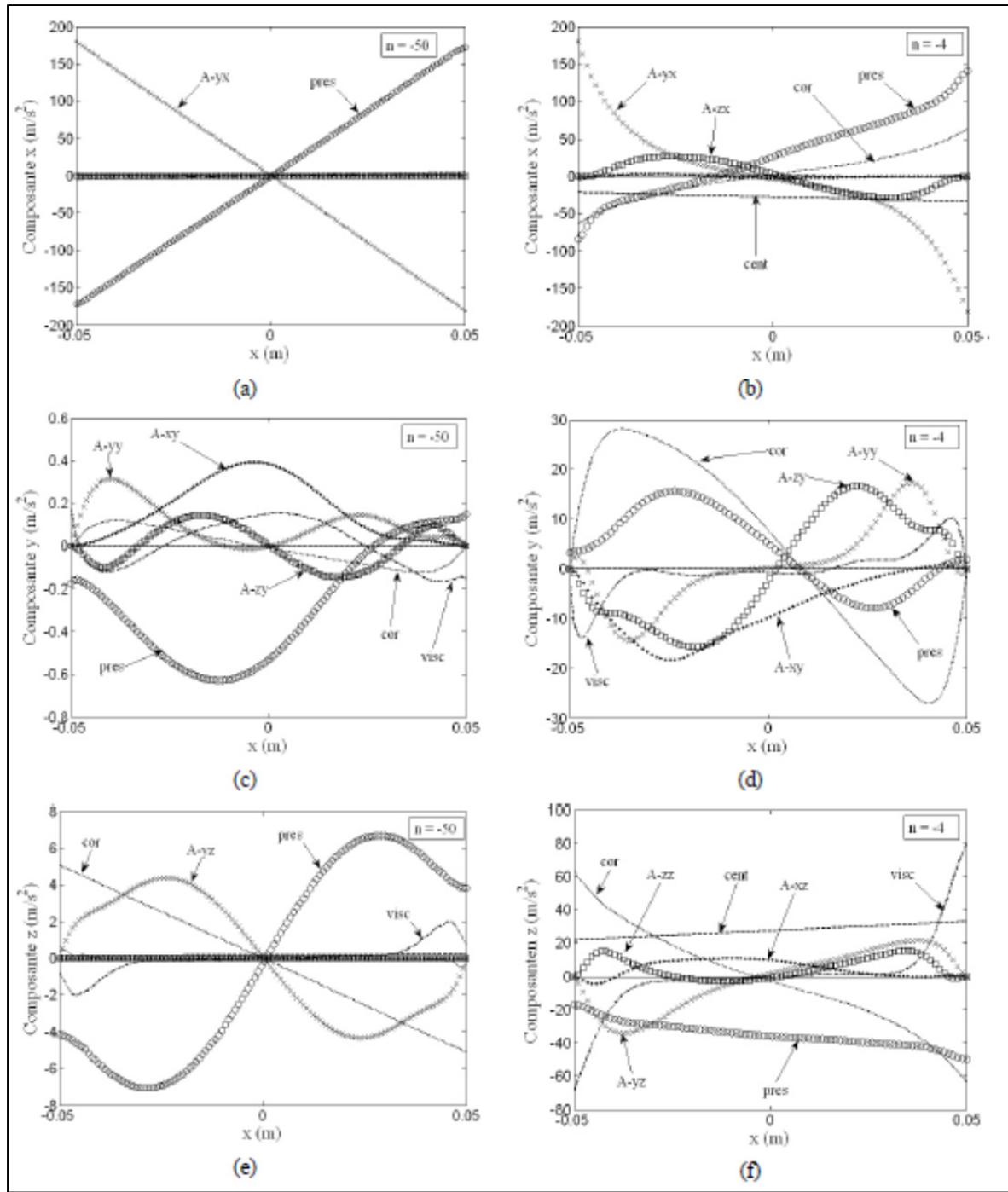


Figure A.VIII.11 Les trois composantes de l'équation de conservation de quantité de mouvement. $Re=125$.

(◆) : A_{-xx} , A_{-yx} , A_{-zx} . (×) : A_{-xy} , A_{-yy} , A_{-zy} . (□) : A_{-xz} , A_{yz} , A_{-zz} . (○) : $pres$. (.....) : cor . (- - -) : $cent$. (- - -) : $visc$. (—) : balance. Notez que les échelles verticales varient d'une figure à l'autre (voir le texte pour plus de détails). Voici quelques exemples pour les désignations des différents termes de l'équation 1 : $A_{-xx} : (u \frac{\partial u}{\partial x})$, $A_{-xy} : (u \frac{\partial v}{\partial x})$, $A_{-xz} : (u \frac{\partial w}{\partial x})$, $cor_x : 2(\Omega_y w_B - \Omega_z v_B)$, $visc_x : -v \left(\frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_B}{\partial z^2} \right)$, $cent_x : -\Omega_x \Omega_y R_{B_x} - (\Omega_x^2 + \Omega_z^2) R_{B_y} + \Omega_y \Omega_z R_{B_z}$

A.VIII.4 Conclusion

Dans le but de comprendre la dynamique d'écoulement dans un mélangeur planétaire, nous avons étudié l'effet de la révolution qui s'ajoute à un écoulement en rotation uniforme. Pour ce faire, nous avons varié la vitesse de révolution en gardant la vitesse de rotation constante ($Re_\omega = 125$ et n variable). Nous avons commencé notre analyse par la détermination des débits de pompage générés dans la direction axiale et dans le plan horizontal (xy) et cela à différentes hauteurs. On a constaté que les deux débits augmenteraient si on fait augmenter la vitesse de révolution. Le débit axial est au maximum au voisinage de la mi-hauteur et le débit secondaire est important à $z/H_f = 0.33$ et près de la surface libre. Nous avons ensuite déterminé la topologie d'écoulement en utilisant la fonction de courant calculée à partir des vitesses relatives à la révolution et des vitesses relatives à la rotation. Les résultats montrent que dans le repère de révolution, il y a une seule boucle de recirculation dans le plan (xy) pour les deux valeurs de n testées avec l'apparition de deux petites boucles près des parois dans le plan (yz) pour $n = -4$. Nous avons calculé par la suite la fonction de courant en soustrayant la rotation uniforme. Le résultat est peu différent avec la présence de deux boucles de recirculation dans les plans horizontaux (xy) pour $n = -50$. Nous avons évalué en dernier lieu la balance des accélérations agissantes sur le fluide et cela pour les mêmes paramètres d'écoulement. Cette balance montre que l'écoulement devient de plus en plus complexe et les forces appliquées sur le fluide sont de plus en plus importantes lorsque la vitesse de révolution augmente. À $n = -4$, la force de Coriolis est comparable aux autres forces. Le cas de $n=-50$ est similaire à une rotation uniforme. Dans le plan (xy), le tracé des lignes de courant dans le repère de révolution pour ce nombre présente des lignes circulaires avec un point de stagnation au milieu. De plus, la balance « x » de forces montre que l'équilibre dynamique est établi globalement entre le gradient de pression et l'accélération centrifuge de rotation. Par ailleurs, les résultats des débits (figures A.VIII.4 et A.VIII.5), de la topologie d'écoulement (figures A.VIII.8 et A.VIII.9) et de la balance de forces (figures A.VIII.12-c et A.VIII.12-e) montrent que, même si le mouvement circulaire est dominant à $n = -50$, il y a un mouvement axial du fluide qui s'ajoute à l'écoulement.

Remerciement

Un remerciement s'adresse au Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie (CRSNG) du Canada, (programme de subventions à la découverte) pour son soutien financier

BIBLIOGRAPHIE

- Abdellaoui, M., Cracco, D. et Percheron-Guegan, A. 1999. « Structural investigation and solid-H₂ reaction of Mg₂Ni rich nanocomposite materials elaborated by mechanical alloying ». *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 293, p. 501-507.
- Abdellaoui, M., et Gaffet, E. 1995. « The physics of mechanical alloying in a planetary ball mill: mathematical treatment ». *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 43, n° 3, p. 1087-98.
- Adachi, N., Hashiba, M. et Sakurada, O. 2004. « Rheological properties of slurries prepared using a planetary mixer ». *Ceramics International*, vol. 30, n° 6, p. 1055-1058.
- Alliet-Gaubert, M., Sardeing, R., Xuereb, C. Hobbes, P., Letellier, B. et Swaels, P. 2006. « CFD analysis of industrial multi-staged stirred vessels ». *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, vol. 45, n° 5, p. 415-427.
- Bartels, C., Breuer, M., Wechsler, K. et Durst, F. 2002. « Computational fluid dynamics applications on parallel-vector computers: computations of stirred vessel flows ». *Computers & fluids*, vol. 31, n° 1, p. 69-97.
- Burgio, N., Iasonna, A., Magini, M. et Padella, F. 1990. « Mechanical alloying of the Fe-Zr system in different milling conditions ». In *Colloque de physique 4*. (Rome, Italie, Rome, 15 juillet), p. 265-271.
- Busse, F.H. 1968. « Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 33, n° 04, p. 739-751.
- Cala, C. E., Fernandes, E. C., Heitor, M. et Shtork, S. I. 2006. « Coherent structures in unsteady swirling jet flow ». *Experiments in Fluids*, vol. 40, n° 2, p. 267-276.
- Carl, C., Konrath, R., Schröder, A. et Monnier, J. C. 2008. « Identification of vortex pairs in aircraft wakes from sectional velocity data ». *Experiments in Fluids*, vol. 44, n° 3, p. 367-380.
- Celik, I., Ghia, C. U. et Roache, P. J. 2008. « Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications ». *Journal of fluids Engineering-Transactions of the ASME*, vol. 130, n° 7.
- Chakrabarty, S., Zhang, X., Bharti, P., Chujo, Y., Miyake, J., Wynne, K. J. et adavalli, V. K. 2010. « Processing dependence of surface morphology in condensation cured PDMS nanocomposites ». *Polymer*, vol. 51, n° 24, p. 5756-5763.

- Chakraborty, P., Balachandar, S. et Adrian, R. J. 2005. « On the relationships between local vortex identification schemes ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 535, p. 189-214.
- Chen, H., Jacobs, O., Wu, W., Rüdiger, G. et Schädel, B. 2007. « Effect of dispersion method on tribological properties of carbon nanotube reinforced epoxy resin composites ». *Polymer Testing*, vol. 26, n° 3, p. 351-360.
- Chergui, N. et Dufresne, L. 2012. « Analyse par CFD de l'écoulement dans un mélangeur planétaire ». In 20th Annual conference of the CFD Society of Canada (Canmore, AB, Canada, 2012) University of Alberta Conference Services. Document non disponible dans le dépôt.
- Chergui, N. et Dufresne, L. 2011. « Étude numérique de la balance des forces dans un mélangeur planétaire : application des filtres récursifs ». In 19th Annual Conference of the CFD Society of Canada (Montréal, Canada, Apr. 27-29, 2011) CFD Society of Canada.
- Chong, MS, Perry, A. Eo et Cantwell., B.J. 1990. « A general classification of three-dimensional flow fields ». *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, vol. 2, n° 5, p. 765-777.
- Cucitore, R, Quadrio, M. et Baron, A. 1999. « On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex ». *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 18, n° 2, p. 261-282.
- Devals, C., Heniche, M., Takenaka, K. et Tanguy, P. A. 2008. « CFD analysis of several design parameters affecting the performance of the Maxblend impeller ». *Computers & Chemical Engineering*, vol. 32, n° 8, p. 1831-1841.
- Ducci, A. et Yianneskis, M. 2007. « Vortex identification methodology for feed insertion guidance in fluid mixing processes ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 85, n° 5, p. 543-550.
- Duck, P. W., et Foster, M. R. 2001. « Spin-up of homogeneous and stratified fluids ». *Annual review of fluid mechanics*, vol. 33, n° 1, p. 231-263.
- El-Eskandarany, M S. 2001. *Mechanical Alloying: For Fabrication of Advanced Engineering Materials*. William Andrew.
- Enayati, M. H., Karimzadeh, F. et Anvari. S. Z. 2009. « Synthesis and characterization of NiAl-Al₂O₃ nanocomposite powder by mechanical alloying ». *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 477, n° 1-2, p. 178-81.

- Farhat, M., Rivera, C., Fradette, L., Heniche, M. et Tanguy, P. A. 2007. « Numerical and experimental study of a dual-shaft coaxial mixer with viscous fluids ». *Industrial & engineering chemistry research*, vol. 46, n° 14, p. 5021-5031.
- Fontaine, A., Guntzburger, Y., Bertrand, F., Fradette, L. et Heuzey, M. C. 2013. « Experimental investigation of the flow dynamics of rheologically complex fluids in a Maxblend impeller system using PIV ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 91, n° 1, p. 7-17.
- Galletti, C, Pintus, S. et Brunazzi, E. 2009. « Effect of shaft eccentricity and impeller blade thickness on the vortices features in an unbaffled vessel ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 87, n° 4, p. 391-400.
- Galletti, C., et Brunazzi., E. 2008. « On the main flow features and instabilities in an unbaffled vessel agitated with an eccentrically located impeller ». *Chemical Engineering Science*, vol. 63, n° 18, p. 4494-4505.
- Ge, C. Y., Wang, J.J. Gu , X. P. et Feng, L. F. 2013. « CFD simulation and PIV measurement of the flow field generated by modified pitched blade turbine impellers ». *Chemical Engineering Research and Design*.
- Glover, G.M., et Fitzpatrick, J. J. 2007. « Modelling vortex formation in an unbaffled stirred tank reactors ». *Chemical Engineering Journal*, vol. 127, n° 1, p. 11-22.
- Golubkova, G. V., Yu Belyaev. E et Lomovsky, I. O. 1998. « Mechanochemical synthesis of nonstoichiometric tantalum disilicide ». *Journal of Alloys and Compounds*, vol. 270, n° 1-2, p. 224-227.
- Guyon, É., Hulin, J. P. et Petit.L. 2001. *Hydrodynamique physique*, Nouv. éd. revue et augm. --. Coll. « Savoirs actuels. Physique ». Les Ulis, France
Paris: EDP Sciences ;CNRS Éditions, 674 p. p.
- Heniche, M, Tanguy, P. A, Reeder, M. F. et Fasano, J. B. 2005. « Numerical investigation of blade shape in static mixing ». *AICHE journal*, vol. 51, n° 1, p. 44-58.
- Hidalgo-Millán, A, Zenit, A., Palacios, C., Yatomi, R., Horiguchi, H., Tanguy, P. A. et Ascanio, G. 2012. « On the hydrodynamics characterization of the straight Maxblend impeller with Newtonian fluids ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 90, n° 9, p. 1117-1128.
- Hirsch, M., Ziroli. V, Helm, M. et Massing, H. 2009. « Preparation of small amounts of sterile siRNA-liposomes with high entrapping efficiency by dual asymmetric centrifugation (DAC) ». *Journal of Controlled Release*, vol. 135, n° 1, p. 80-88.

- Hu, Y., Wang, W., Shao, T., Yang, J. et Cheng, y 2012. « Visualization of reactive and non-reactive mixing processes in a stirred tank using planar laser induced fluorescence (PLIF) technique ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 90, n° 4, p. 524-533.
- Hunt, J. C. R, Abell, C. J., Peterka, J. A. et Woo, H. 1978. « Kinematical studies of the flows around free or surface-mounted obstacles; applying topology to flow visualization ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 86, n° 01, p. 179-200.
- Inamuro, T., Yamaguchi, A. et Ogino, F. 1997. « Fluid flow in a rotating cylindrical container with a rotating disk at the fluid surface ». *Fluid dynamics research*, vol. 21, n° 6, p. 417.
- Iwatsu, R. 2005. « Vortex breakdown flows in cylindrical geometry ». In *New Developments in Computational Fluid Dynamics*. p. 141-151. Springer.
- Iwatsu, R. 2005. « Numerical study of flows in a cylindrical container with rotating bottom and top flat free surface ». *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 74, n° 1, p. 333-344.
- Jacobs, O., Xu, W., Schadel B. et Wu,W. 2006. « Wear behaviour of carbon nanotube reinforced epoxy resin composites ». *Tribology Letters*, vol. 23, n° 1, p. 65-75.
- Jahoda, M, Moštěk, M., Kukuková, A. et Machoň, V. 2007. « CFD modelling of liquid homogenization in stirred tanks with one and two impellers using large eddy simulation ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 85, n° 5, p. 616-625.
- Jeong, J. et Hussain, F. 1995. « On the identification of a vortex ». *Journal of fluid mechanics*, vol. 285, p. 69-94.
- Kheifets, A. S., et Lin, I. J. 1996. « Energy transformations in a planetary grinding mill Part I. General treatment and model design ». *International Journal of Mineral Processing*, vol. 47, n° 1-2, p. 1-19.
- Kida, S. et Miura, H. 1998. « Identification and analysis of vortical structures ». *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 17, n° 4, p. 471-488.
- Kched, A, Pavageau, M. et Aloui, A. 2011a. « Vortex structure in the wall region of an impinging plane jet ». *Journal of Applied Fluid Mechanics*, vol. 4, n° 2 -s 1, p. 61-69.
- Kched, A., Pavageau, M., et Aloui, F. 2011b. « Experimental Investigations of Transfer Phenomena in a Confined Plane Turbulent Impinging Water Jet ». *Journal of Fluids Engineering*, vol. 133, n° 6, p. 061204.

- Kolář, V. 2007. « Vortex identification: New requirements and limitations ». *International journal of heat and fluid flow*, vol. 28, n° 4, p. 638-652.
- Lacroix, E. 2010. « Modélisation CFD et caractérisation de la dynamique de l'écoulement et du mélange dans un mélangeur planétaire sans lamelle ». Mémoire de maîtrise. École de technologie supérieure.
- Lagrange, R. 2009. « Dynamique d'un fluide dans un cylindre en précession ». thèse de Doctorat. AIX-Marseille Université de Provence, 220 p.
- Martinelli, F., Olivani, A. et Coghe, A. 2007. « Experimental analysis of the precessing vortex core in a free swirling jet ». *Experiments in Fluids*, vol. 42, n° 6, p. 827-839.
- Massing, U., Cicko, S. et Ziroli, V. 2008. « Dual asymmetric centrifugation (DAC)-A new technique for liposome preparation ». *Journal of Controlled Release*, vol. 125, n° 1, p. 16-24.
- Mavros, P. 2001. « Flow visualization in stirred vessels: A review of experimental techniques ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 79, n° 2, p. 113-127.
- Meunier, P., Eloy, C., Lagrange, F. et Nadal, F. 2008. « A rotating fluid cylinder subject to weak precession ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 599, p. 405-440.
- Mio, H., Kano, J., Saito, F. et Kaneko, K. 2002. « Effects of rotational direction and rotation-to-revolution speed ratio in planetary ball milling ». *Materials Science and Engineering A*, vol. 332, n° 1-2, p. 75-80.
- Mio, H., Kano, J., Saito, F., Kaneko, K.,. 2004. « Optimum revolution and rotational directions and their speeds in planetary ball milling ». *International Journal of Mineral Processing*, vol. 74, n° SUPPL., p. S85-S92.
- Mochales, C., El Briak-BenAbdeslam, H., Pau Ginebra, M., Terol, A., Planell, J. A. et Boudeville, P. 2004. « Dry mechanochemical synthesis of hydroxyapatites from DCPD and CaO: Influence of instrumental parameters on the reaction kinetics ». *Biomaterials*, vol. 25, n° 7-8, p. 1151-1158.
- Mouhali, W.. 2009. « Etude d'un écoulement en précession. Transition vers la turbulence et application à l'effet dynamo ». Doctorat. Université Paris-Diderot-Paris VII.
- Munson, B. R., Young, D. F et Hisao Okiishi, T. 1990. *Fundamentals of fluid mechanics*. New York.
- Murthy Shekhar, S, et Jayanti, S. 2002. « CFD study of power and mixing time for paddle mixing in unbaffled vessels ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 80, n° 5, p. 482-498.

- Nam, J., Scriven, L. E. et Carvalho, M. S. 2009. « Tracking birth of vortex in flows ». *Journal of Computational Physics*, vol. 228, n° 12, p. 4549-4567.
- Niwa, T., et Hashimoto, N. 2008. « Novel technology to prepare oral formulations for preclinical safety studies ». *International Journal of Pharmaceutics*, vol. 350, n° 1-2, p. 70-78.
- Noir, J. 2000. « Écoulement d'un fluide dans une cavité en précession: Approches numérique et expérimentale ». Doctorat. Grenoble, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 173 p.
- Nurtono, T, Setyawan, H., Altway, A. et Winardi, S. 2009. « Macro-instability characteristic in agitated tank based on flow visualization experiment and large eddy simulation ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 87, n° 7, p. 923-942.
- Ottino, J. M. 1989. *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*, 3. Cambridge University Press.
- Panton, Ronald L. 2013. *Incompressible flow*. John Wiley & Sons.
- Pee, Y, Chen L. T. R., Yang J. L., et Chin Tsung-Shune. 1995. « Synthesis of MoSi₂ powder by mechanical alloying ». In. (Switzerland) Vol. A192-A193, p. 556-62. Coll. « Mater. Sci. Eng. A, Struct. Mater., Prop. Microstruct. Process. (Switzerland) ». <[http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093\(94\)03274-2](http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093(94)03274-2)>.
- Raza, MA, AVK Westwood et C Stirling. 2012. « Effect of processing technique on the transport and mechanical properties of graphite nanoplatelet/rubber epoxy composites for thermal interface applications ». *Materials Chemistry and Physics*, vol. 132, n° 1, p. 63-73.
- Reyn, J. W. 1964. « Classification and description of the singular points of a system of three linear differential equations ». *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, vol. 15, n° 5, p. 540-557.
- Rice, M, Hall, J., Papadakis, G. et Yianneskis. M. 2006. « Investigation of laminar flow in a stirred vessel at low Reynolds numbers ». *Chemical engineering science*, vol. 61, n° 9, p. 2762-2770.
- Rivera, C. A., Heniche, M., Takenaka, K. et Tanguy, P. A. 2009. « Finite element modeling of the laminar and transition flow of the Superblend dual shaft coaxial mixer on parallel computers ». *Chemical Engineering Science*, vol. 64, n° 21, p. 4442-4456.
- Roy, S., Acharya, S. et Cloeter, M. D. 2010. « Flow structure and the effect of macro-instabilities in a pitched-blade stirred tank ». *Chemical Engineering Science*, vol. 65, n° 10, p. 3009-3024.

- Shtern, V, et Hussain, F. 1993. « Hysteresis in a swirling jet as a model tornado ». *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, vol. 5, n° 9, p. 2183-2195.
- Sibilla, S., et Beretta, C. P. 2005. « Near-wall coherent structures in the turbulent channel flow of a dilute polymer solution ». *Fluid dynamics research*, vol. 37, n° 3, p. 183-202.
- Solano, J.P, Herrero, R., Espín, S., Phan, A. N et Harvey, A. P 2012. « Numerical study of the flow pattern and heat transfer enhancement in oscillatory baffled reactors with helical coil inserts ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 90, n° 6, p. 732-742.
- Tenambergen, F., Maruiaama, C. H et Mäder, K.. 2013. « Dual asymmetric centrifugation as an alternative preparation method for parenteral fat emulsions in preformulation development ». *International journal of pharmaceutics*, vol. 447, n° 1, p. 31-37.
- Tobak, M, et Peake, D. J. 1981. « Topological structures on three-dimensional separated flows ». *AIAA paper*, n° 1260.
- Torré, J. P., Fletcher, D. F., Lasuye, T. et Xuereb, C. 2007a. « An experimental and computational study of the vortex shape in a partially baffled agitated vessel ». *Chemical Engineering Science*, vol. 62, n° 7, p. 1915-1926.
- Torré, J. P, Fletcher, D. F, Lasuye, T. et Xuereb, C.. 2007b. « Single and multiphase CFD approaches for modelling partially baffled stirred vessels: Comparison of experimental data with numerical predictions ». *Chemical Engineering Science*, vol. 62, n° 22, p. 6246-6262.
- Trambouze, P.. 1999. *Raffinage du pétrole 4: Matériels et équipements*. Editions TECHNIP
- Tritton, D. J. 1988. *Physical fluid dynamics*, 2nd ed. Coll. « Oxford science publications ». Oxford: Clarendon Press, xvii, p. 519.
- Truesdell, C.. 1954. *The kinematics of vorticity*. Bloomington.
- Vanyo, J., Wilde, P., Cardin, P. et Olson, P. 1995. « Experiments on precessing flows in the Earth's liquid core ». *Geophysical Journal International*, vol. 121, n° 1, p. 136-136.
- Vanyo, J. P. 2001. *Rotating fluids in engineering and science*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, x, p. 429.
- Vanyo, J.P, et Dunn, J. R. 2000. « Core precession: flow structures and energy ». *Geophysical Journal International*, vol. 142, n° 2, p. 409-425.

Woziwodzki, Szymon. 2014. « Mixing of viscous Newtonian fluids in a vessel equipped with steady and unsteady rotating dual-turbine impellers ». *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 92, n° 3, p. 435-446.