

Optimisation des stratégies de fabrication et de réutilisation de l'aluminium en logistique inverse

par

Franck Eric KEMI YOTAT

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE
LA MAÎTRISE AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M. Sc. A.

MONTREAL, LE 11 MAI 2017

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

©Tous droits réservés, Franck Eric KEMI YOTAT, 2017

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

PRÉSENTATION DU JURY
CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Jean-Pierre Kenné, directeur de mémoire
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Victor Songmene, codirecteur de mémoire
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Christian Belleau, président du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Yvan Beauregard, membre du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 13 AVRIL 2017

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

J'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de recherche, le professeur Jean-Pierre Kenné ainsi qu'à mon codirecteur, le professeur Songmene Victor pour leurs disponibilités, leurs précieuses orientations, leurs encouragements et leur soutien financier m'ayant permis de mener ce travail jusqu'au bout.

J'exprime ma gratitude au professeur Christian Belleau qui a eu la bienveillance de m'honorer en présidant ce jury ainsi qu'au professeur Yvan Beauregard pour avoir accepté d'évaluer ce travail en tant que membre du jury.

Ma reconnaissance à Rodrick Sakou, Hector Rivera, Abdel-Sallam, mes collègues du laboratoire d'intégration des techniques de production (LITP) de l'ETS au sein duquel j'ai travaillé dans une ambiance conviviale.

Je suis également reconnaissant à tous les membres de famille qui n'ont cessé de me soutenir et de m'encourager pendant ce travail. Je remercie particulièrement Virginie Tchantchou, la famille Njiké Achille et la famille Nkouedjeu de Yotat.

Je remercie grandement ma chère maman, Wandjie Marie Thérèse pour l'éducation qu'elle m'a donnée, pour tous ses efforts et sacrifices consentis à mon égard qui m'ont bâti.

J'adresse mes remerciements à ma tendre fiancée, Nelly Estelle, pour son appui et ses multiples encouragements.

Je remercie tous ceux-là, qui, de près ou de loin ont participé à la réalisation de ce travail, trouvez en ces mots, ma profonde gratitude.

OPTIMISATION DES STRATÉGIES DE FABRICATION ET DE RÉUTILISATION DE L'ALUMINIUM EN LOGISTIQUE INVERSE

Franck Eric KEMI YOTAT

RÉSUMÉ

Le présent travail de recherche traite le problème de commande optimale stochastique d'une unité de recyclage de l'aluminium en logistique inverse. L'unité considérée est en boucle ouverte c'est-à-dire, dissociée de la ligne d'approvisionnement directe et assimilée à une machine produisant un seul type de produit (M1P1) sujette à des pannes et réparations aléatoires. L'unité est alimentée à un taux de retour constant des produits en fin de vie en aluminium et doit satisfaire une demande client à taux constant. Face à ces indisponibilités aléatoires de la machine, à la contrainte de satisfaction de la clientèle, il s'avère impératif de mettre sur pied une politique optimale de production devant permettre de suppléer à la demande client. Dans notre travail, nous considérons aussi le cas du taux de retour aléatoire afin de nous rapprocher de la réalité industrielle.

L'objectif de cette étude est de proposer une politique optimale de production qui permettra de minimiser les coûts de mise en inventaire et de pénurie. Les variables de décision sont le taux de production de l'unité ainsi que le taux d'élimination des retours collectés tandis que les variables d'états sont respectivement les niveaux d'inventaires des retours et des produits finis.

Un modèle de commande optimale stochastique du problème posé a été élaboré en utilisant les chaînes de Markov homogènes (taux de transition constant) et a conduit aux équations de type Hamilton-Jacobi Bellman. Compte tenu de l'inexistence des méthodes analytiques de résolution des équations obtenues, une méthode numérique basée sur l'approche de Kushner et Dupuis (1992) a été utilisée et nous avons obtenu une politique optimale de type seuil critique (Hedging Point Policy). Considérant le fait qu'il n'existe pas de relation fonctionnelle entre le critère de performance du modèle étudié et les variables indépendantes dans un cas général, nous avons combiné l'approche analytique à la simulation, le plan d'expériences et l'analyse de la variance (ANOVA) afin de déterminer les facteurs qui influencent la réponse de manière significative, estimer une corrélation entre la réponse et ces facteurs significatifs et de dégager les valeurs optimales des variables qui minimisent les coûts. Les résultats obtenus ont montrés que la politique de production dépend du niveau d'inventaire des retours et des produits finis disponible. Ces résultats obtenus ont été validés par une analyse de sensibilité.

Mots clés : Système manufacturier, commande optimale stochastique, simulation, plan d'expérience, logistique inverse en boucle ouverte, produit en fin de vie en aluminium.

OPTIMIZATION OF STRATEGIES OF MANUFACTURING AND REUSING OF ALUMINUM IN REVERSE LOGISTICS

Franck Éric KEMI YOTAT

ABSTRACT

The present work deals with the problem of optimal stochastic control of an aluminum recycling unit in reverse logistics. The unit considered is in an open loop, that is to say, dissociated from the direct supply line and assimilated to a machine producing a single type of product (M1P1) subject to random failures and repairs. The unit is fueled at a constant rate of return of end-of-life aluminum products and must satisfy a constant rate customer demand. Faced with this random unavailability of the machine, the need to satisfy the customer demand, it is imperative to set up an optimal policy of production to be able to supplement customer demand. In our work, we also consider the case of the random return rate in order to get closer to industrial reality.

The objective of this study is to propose an optimal production policy that will minimize the sum of holding and backlog costs for remanufacturing products. The decision variables are the production rate of the unit and the disposal rate of returned products. The disposal of the returned products from the recycling unit integrates the burial of the returned products, the sending of returned products to subcontracting.

The optimality conditions of the problem has been developed using homogeneous Markov chains (constant transition rate) and led to the Hamilton-Jacobi Bellman equations. Given the non-existence of the analytical methods for solving the obtained equations, a numerical method based on the approach of Kushner and Dupuis (1992) was used and we obtained an optimal Hedging Point Policy type. Considering the fact that, there is no functional relationship between the performance criterion of the model studied and the independent variables in a general case, we have combined the analytical approach with simulation, experimental plans and Analysis of variance (ANOVA) to allow us to determine the factors that influence the response significantly, to estimate a correlation between the response and these significant factors and to identify the optimal values of the variables that minimize the costs. The results obtained showed that the production policy depends on the level of inventory of returns and the finished products available. These results obtained were validated by a sensitivity analysis.

Key words: Manufacturing system, optimal stochastic control, simulation, experimental design, open loop reverse logistics, end of life aluminum products

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 LOGISTIQUE INVERSE ET REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 La logistique inverse	5
1.2.1 Définition de la logistique inverse	5
1.2.2 Les activités de la logistique inverse	6
1.2.3 Différents types de configuration d'un réseau de logistique inverse	7
1.3 Problématique de la recherche	9
1.4 Revue critique de la littérature	12
1.4.1 Optimisation des techniques de recyclage	12
1.4.2 Optimisation du réseau logistique de production en LI	14
1.5 Objectif de la recherche	17
1.6 Méthodologie de la recherche	18
1.7 Conclusion	20
CHAPITRE 2 COMMANDE OPTIMALE D'UNE UNITÉ DE RECYCLAGE AVEC RETOUR DE MATIÈRE ET DE DEMANDE CLIENT À TAUX CONSTANTS	21
2.1 Introduction.....	21
2.2 Structure de l'unité de recyclage.....	22
2.3 Formulation générale du problème d'optimisation.....	23
2.3.1 Diagramme de transition d'états	24
2.3.2 Dynamique de la machine et matrice des taux de transition.....	25
2.3.3 Domaine de commande admissible	25
2.3.4 Probabilités limites condition de faisabilité.....	26
2.3.5 Dynamique des stocks.....	27
2.3.6 Coût instantané et coût total actualisé.....	27
2.3.7 Conditions d'optimum	28
2.3.8 Conditions d'optimums approximés	29
2.4 Méthode de résolution.....	31
2.5 Exemple numérique	35
2.6 Analyse des résultats graphiques	36
2.7 Validation des résultats et analyse de sensibilité	44
2.7.1 Variation du coût de stockage c_1 des retours	44
2.7.2 Variation du coût c_{2m} de pénurie des produits finis	46
2.7.3 Variation du coût c_{2p} de stockage des produits finis	477

2.7.4	Variation du coût c_d d'élimination des produits finis	49
2.8	Conclusion.	51
CHAPITRE 3 COMMANDE OPTIMALE D'UNE UNITÉ DE RECYCLAGE AVEC RETOUR DE MATIÈRE ALÉATOIRE ET DEMANDE CLIENT À TAUX CONSTANT		
3.1	Introduction.....	53
3.2	Structure de l'unité de recyclage.....	53
3.3	Hypothèses et formulation générale du problème d'optimisation	54
3.3.1	Hypothèses de modélisation	54
3.3.2	Diagramme de transition.....	55
3.3.3	Matrice des taux de transition	57
3.3.4	Domaine de commande admissible	57
3.3.5	Probabilités limites et conditions de faisabilité	57
3.3.6	Dynamique du stock	58
3.3.7	Coût instantané et coût actualisé.....	59
3.3.8	Fonction valeur et équation d'HJB	59
3.4	Application numérique.....	63
3.4.1	Données du problème	63
3.4.2	Résultats de la simulation	65
3.5	Analyse de sensibilité	74
3.5.1	Analyse de sensibilité sur c_{2m}	74
3.5.2	Étude du cas où le taux de retour r_2 est inférieur au taux de la demande d	76
3.6	Conclusion	83
CHAPITRE 4 LOGISTIQUE INVERSE EN BOUCLE OUVERTE ET APPROCHE DE COMMANDE BASÉE SUR LA SIMULATION ET LES PLANS D'EXPÉRIENCES.....		
4.1	Introduction.....	85
4.2	Modélisation du système de production	85
4.2.1	Modélisation du retour des matières premières	86
4.2.2	Modélisation du retour de la demande client.....	87
4.2.3	Modélisation du retour de la production.....	88
4.2.4	Modélisation des pannes et réparations de la machine	89
4.3	Implémentation de la politique de production	90
4.3.1	Plans d'expériences.....	90
4.3.2	Surfaces de réponses	93
4.4	Analyse de sensibilité	98
4.4.1	Analyse de sensibilité sur le taux de retour r	99
4.4.2	Analyse de sensibilité sur le taux de transition λ_{21}	100
4.4.3	Analyse de sensibilité sur le coût c_{2p}	101
4.4.4	Analyse de sensibilité sur le coût c_{2m}	102
4.5	Conclusion	103

CONCLUSION	105
ANNEXE I Programme Matlab principal Modèle I: Cas d'une machine de production avec demande et retour à taux constants	107
ANNEXE II Fonction coût modèle I	113
ANNEXE III Programme Matlab principal modèle II: Cas d'une machine de production avec demande à taux constant et retour aléatoire	117
ANNEXE IV Fonction coût modèle II	125
LISTE DES RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	131

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 2.1 Données de la simulation	36
Tableau 3.1 Dynamique du système étudié	55
Tableau 3.2 Données de la simulation	64
Tableau 4.1 Différents niveaux des 2 facteurs.....	91
Tableau 4.2 Analyse de la variance pour coût	92
Tableau 4.3 Coefficients du modèle	94
Tableau 4.4 Valeurs des facteurs à l'optimum	94
Tableau 4.5 Effet de la variation du taux de retour r	99
Tableau 4.6 Effet de la variation du taux de transition λ_{21}	100
Tableau 4.7 Effet de la variation du coût de stockage c_{2p}	101
Tableau 4.8 Effet de la variation du coût de stockage c_{2m}	102

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Cycle de vie du produit comprenant les activités de la logistique inverse tiré de (Abdessalem et al., 2007)6
Figure 1.2	Production primaire mondiale et secondaire de l'aluminium des dernières décennies tiré de (INSTITUTE,2009).....10
Figure 1.3	Les différentes étapes du recyclage de l'aluminium11
Figure 1.4	Méthodologie de recherche.....19
Figure 2.1	Structure de l'unité de recyclage en boucle ouverte.....22
Figure 2.2	Diagramme de transition d'états24
Figure 2.3	Taux de production des produits finis au mode 137
Figure 2.4	Variation du seuil critique au mode 1 en fonction des stocks x_1 et x_237
Figure 2.5	Taux d'élimination des retours au mode 140
Figure 2.6	Seuil critique du taux d'élimination des retours au mode 140
Figure 2.7	Taux d'élimination des retours au mode 242
Figure 2.8	Seuil critique du taux d'élimination des retours au mode 242
Figure 2.9	Domaine conjoint aux taux d'élimination et de production.....44
Figure 2.10	Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_145
Figure 2.11	Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_145
Figure 2.12	Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_{2m}46
Figure 2.13	Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_{2m}47

XVIII

Figure 2.14	Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_{2p}	48
Figure 2.15	Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_{2p}	488
Figure 2.16	Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_d	49
Figure 2.17	Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_d	50
Figure 3.1	Modèle de l'unité de recyclage avec taux de retour variable.....	54
Figure 3.2	Diagramme de transition du système.....	56
Figure 3.3	Taux d'élimination au mode 1.....	65
Figure 3.4	Variation du seuil critique du taux u_{d1} en fonction de x_1 et x_2	65
Figure 3.5	Taux de production au mode 1.....	67
Figure 3.6	Variation du seuil critique de u_1 au mode 1.....	67
Figure 3.7	Taux d'élimination au mode 2.....	68
Figure 3.8	Variation du seuil critique du taux u_{d2} au mode 2.....	69
Figure 3.9	Taux de production au mode 2.....	70
Figure 3.10	Variation du seuil critique de u_2 au mode 2.....	70
Figure 3.11	Taux d'élimination au mode 3.....	71
Figure 3.12	Variation du seuil critique du taux u_{d3} en fonction de x_1 et x_2	72
Figure 3.13	Taux d'élimination au mode 4.....	73
Figure 3.14	Variation du seuil critique du taux u_{d4} en fonction de x_1 et x_2	73
Figure 3.15	Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_{2m}	75
Figure 3.16	Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_{2m}	75
Figure 3.17	Taux de production au mode 1.....	76

Figure 3.18	Taux d'élimination au mode 1	77
Figure 3.19	Comparaison de la politique de production entre les deux scénarios	77
Figure 3.20	Comparaison de la politique d'élimination entre les deux scénarios	78
Figure 3.21	Taux de production au mode 2.....	78
Figure 3.22	Taux d'élimination au mode 2.....	79
Figure 3.23	Comparaison des politiques de production au mode 2 entre les deux scénarios.....	79
Figure 3.24	Comparaison des politiques de d'élimination au mode 2 entre les deux scénarios.....	80
Figure 3.25	Taux d'élimination au mode 3.....	81
Figure 3.26	Comparaison des politiques d'élimination au mode 3 entre les deux scénarios.....	81
Figure 3.27	Taux d'élimination au mode 4	82
Figure 3.28	Comparaison des politiques d'élimination au mode 4 entre les deux scénarios.....	82
Figure 4.1	Bloc diagramme du retour des matières.....	87
Figure 4.2	Bloc diagramme de la demande.....	88
Figure 4.3	Bloc diagramme de la production	89
Figure 4.4	Block diagramme des pannes et réparations machine	89
Figure 4.5	Différents facteurs du plan d'expérience.....	91
Figure 4.6	Diagramme de Pareto.....	93
Figure 4.7	Graphique de superposition des contours	95
Figure 4.8	Zone optimale de production du système	96
Figure 4.9	Implémentation de la politique optimale de gestion des flux	98
Figure 4.10	Variation du domaine en fonction du taux r	99
Figure 4.11	Analyse de sensibilité sur le taux de transition λ_{21}	100

Figure 4.12	Analyse de sensibilité sur le cout c_2p	101
Figure 4.13	Analyse de sensibilité sur le cout c_{2m}	102

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ANOVA	Analyse de la variance
DDL	Degré de Liberté
FMS	Flexible Manufacturing System
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman
HPP	Hedging Point Policy
LI	Logistique inverse
MTBF	Mean Time Between Failures
MTTR	Mean Time to Repair
MnPz	n Machines z produits
UT	Unité de Temps

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

r	Taux de retour des produits usagés constant et connu.
$u_{d\alpha}$	Taux d'élimination des produits retournés, mais non utilisés au mode α .
u_{α}	Taux de production sur la machine au mode α .
$u_{\max}$	Taux de production maximal sur la machine.
$\Gamma(\alpha)$	Domaine des commandes admissibles de la machine au mode α
d	Taux de demande client connu et constant du produit fini.
$x_1(t)$	Niveau d'inventaire des produits retournés au temps t .
$x_2(t)$	Niveau d'inventaire des produits finis au temps t .
$\alpha(t)$	Processus stochastique décrivant la dynamique de la machine au temps t .
λ_{ij}	Taux de transition du processus stochastique du mode i au mode j de la machine.
$Q(.)$	Matrice des taux de transition du processus stochastique
$\pi(.)$	Vecteur des probabilités limite.
$g(.)$	Coût instantané
$J(.)$	Coût actualisé
$\nu(.)$	Fonction valeur
c_1	Coût de mise en inventaire unitaire par unité de temps des produits retournés.
c_{2p}	Coût de mise en inventaire unitaire par unité de temps de pièce des produits finis.
c_d	Coût d'élimination unitaire par unité de temps des produits retournés non recyclés.
c_m	Coût unitaire par unité de temps de fabrication par la machine
c_{2m}	Coût de rupture de stock unitaire par unité de temps de pièce des produits finis
c^{α}	Coût de réparation unitaire de la machine au mode panne.
c_{env}	Coût environnemental pénalisant le manque de recyclage par rapport au quota visé.

XXIV

c_{ecart} Coût pénalisant l'absence de matière première en pénuries des produits finis.

ρ Taux d'actualisation.

INTRODUCTION

Évoluant dans un monde compétitif et de plus en plus exigeant, les entreprises manufacturières doivent se doter des outils devant leur permettre d'atteindre des hauts standards de performance et d'efficacité que sont la quantité, la qualité, le lieu, le coût, et le délai de livraison (Benedetti, 2002). Ces outils ne se réduisent pas seulement à des appareils et équipements de dernière génération, mais aussi à des bonnes politiques de gestion du flux de production.

À cause de l'augmentation de la pollution, de la diminution des ressources naturelles, du désir des gouvernements de lutter contre le réchauffement climatique causé par l'activité humaine, l'homme s'est penché vers la valorisation des produits en fin de vie qui bien souvent, regorgent encore d'énormes potentiels. C'est ainsi qu'est née la logistique inverse (LI), encore appelée logistique des retours ou retro-logistique qui est une discipline qui vise à gérer de façon optimale le flux des produits en provenance du consommateur vers le fabricant. Ce n'est que dans les années 70 que ce canal de distribution inverse a fait son apparition dans la littérature (Guiltinan et Nwokoye, 1974). Lorsque le flux des produits usagés s'effectue entre le consommateur et l'entreprise ayant fabriqué ce produit, on parle de logistique inverse en boucle fermée, dans le cas contraire, il s'agit de la logistique inverse en boucle ouverte tel que traité dans ce travail de recherche.

C'est à cet effet que plusieurs entreprises dans différents secteurs d'activités se sont lancées dans cette discipline; notamment les industries de l'automobile, des produits pharmaceutiques, des boissons gazeuses, des produits électroniques. À titre d'exemple, nous pouvons citer Coca-Cola (recycle les cannettes), Hewlett-Packard (recycle les cartouches d'encre), Kodak (recycle les caméras).

Parmi les ressources naturelles exploitées par l'activité humaine, l'aluminium occupe une place de choix si bien qu'il est devenu aujourd'hui, l'un des métaux les plus utilisés à travers

le monde du fait de ses bonnes propriétés physico-chimiques et du fait qu'il soit le métal le plus abondant de l'écorce terrestre. À cause de son utilisation à grande échelle et de son empreinte écologique, il est devenu urgent de le recycler. Aujourd'hui, 30% des besoins en aluminium de la planète proviennent de l'aluminium recyclé (Actu-Environnement, 2012), cela montre encore l'importance d'intégrer la logistique inverse dans la chaîne d'approvisionnement et ne plus se limiter uniquement à la logistique traditionnelle (logistique directe).

Compte tenu de l'enjeu de la logistique inverse, plusieurs auteurs se sont penchés sur ce sujet. C'est ainsi que Geyer et Jackson (2004) ont proposé un cadre pour aider à identifier et évaluer les stratégies et les contraintes d'approvisionnement en LI, ils l'ont appliqué au cas du recyclage et la réutilisation des profilés en acier utilisés dans le secteur de la construction. Leur étude de cas a souligné l'enjeu des contraintes de la chaîne d'approvisionnement pour rentabiliser une entreprise en LI. De leur côté, Bostel et al. (2005) ont étudié la méthodologie d'optimisation des réseaux logistiques englobant le flux direct et indirect. Kouedeu et al. (2014) ont travaillé sur la minimisation des coûts de mise en inventaire des produits usagés collectés chez les clients et des produits finis pour une entreprise de fabrication /recyclage des cartouches d'encre. Kenné et al. (2012) ont traité le problème de planification de la production des systèmes hybrides de fabrication/ refabrication en boucle fermée soumis à des phénomènes aléatoires tels que les pannes et réparations des machines. L'objectif de leur étude était également de minimiser les coûts de production et donc, d'accroître les bénéfices.

Dès lors, on se pose la question de savoir quelle est la politique optimale de gestion de la production dans le cas d'une entreprise de fabrication et de réutilisation des produits usagés en aluminium en logistique inverse en boucle ouverte. Telle est la problématique de notre travail qui est divisé en quatre chapitres. Dans le CHAPITRE 1, nous ferons une revue critique de la littérature, dégagerons l'objectif de ce travail et situerons notre travail par rapport aux travaux qui ont déjà été effectués dans le domaine. Dans le CHAPITRE 2, nous allons traiter le problème de commande optimale d'une unité de recyclage d'aluminium avec un retour à taux constant ainsi qu'une demande à taux constant. Afin de nous rapprocher de

la réalité industrielle, nous traiterons au CHAPITRE 3, le cas de la commande optimale d'une unité de recyclage approvisionnée à retour variable des produits en fin de vie avec une demande client à taux constant. Le CHAPITRE 4 sera consacré au plan d'expérience couplé à la simulation et l'analyse de la variance (ANOVA) afin de déterminer la politique optimale de production dans le cas des systèmes Markovien non homogènes et dégager la corrélation entre le coût global de production et les facteurs significatifs. Nous terminerons ce chapitre par une analyse de sensibilité afin de valider les résultats obtenus.

CHAPITRE 1

LOGISTIQUE INVERSE ET REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE

1.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, nous présenterons les activités de la logistique inverse ainsi que les différents types de logistique inverse. Dans la suite de cette section, nous présenterons la problématique de notre travail de recherche et situerons la position de nos travaux par rapport aux différents travaux ayant apporté une contribution au problème susmentionné. Dans la troisième partie, nous présenterons les objectifs de notre étude. Nous terminerons ce chapitre en présentant la méthodologie adoptée pour atteindre les objectifs fixés.

1.2 La logistique inverse

Motivé par des raisons économiques, environnementales et sociales, la logistique inverse (LI) a pour principal objectif, la récupération des richesses potentielles se trouvant dans les produits usagés ou en fin de vie (Bennekrouf et al., 2010). Plusieurs auteurs ont proposé des définitions à ce concept.

1.2.1 Définition de la logistique inverse

D'après Fleischmann et al. (2001), la logistique inverse est un processus qui englobe les activités de logistique tout au long des produits utilisés, mais plus désirés par l'utilisateur jusqu'aux produits à nouveau utilisables dans un marché. De leurs côtés, Krikke et al. (1998) définissent la logistique inverse comme étant la collecte, le transport, le stockage et le traitement des produits mis au rebut. Tous ces auteurs s'accordent bien sur l'objectif principal visé par la LI qui est la valorisation des produits usagés. Selon le conseil exécutif américain de la logistique inverse, la logistique inverse ou « reverse logistics (RL)» est :

« le processus de planification, d'implantation, et de contrôle de l'efficience, de la rentabilité des matières premières, des en-cours de production, des produits finis, et l'information pertinente du point d'utilisation jusqu'au point d'origine dans le but de reprendre ou générer de la valeur ou pour en disposer de la bonne façon tout en assurant une utilisation efficace et environnementale des ressources mises en œuvre » (Lambert et Riopel, 2003).

Comme l'indique la définition du conseil exécutif américain, la LI n'entraîne pas toujours à la valorisation des produits usagés, mais aussi à la destruction de ceux-ci lorsqu'ils deviennent inutilisables. Dowlatsahi (2000) a d'ailleurs défini la LI comme étant un processus dans lequel un fabricant accepte systématiquement des produits ou des pièces préalablement expédiées à partir du point de consommation pour un éventuel recyclage, reconditionnement ou une destruction. Dans le paragraphe suivant, nous verrons les différentes activités de la logistique inverse.

1.2.2 Les activités de la logistique inverse

Après la collecte et le tri des produits en fin de vie, trois principaux traitements tel que l'illustre la figure 1.1 sont utilisés à savoir : La réutilisation, la refabrication et le recyclage (Lambert et Riopel, 2003). Abdessalem et al. (2007) ont défini un cahier des charges des caractéristiques à satisfaire par les produits en fin de vie pour chaque catégorie de traitement donné ainsi qu'une méthodologie de conception favorisant la logistique inverse d'un produit.

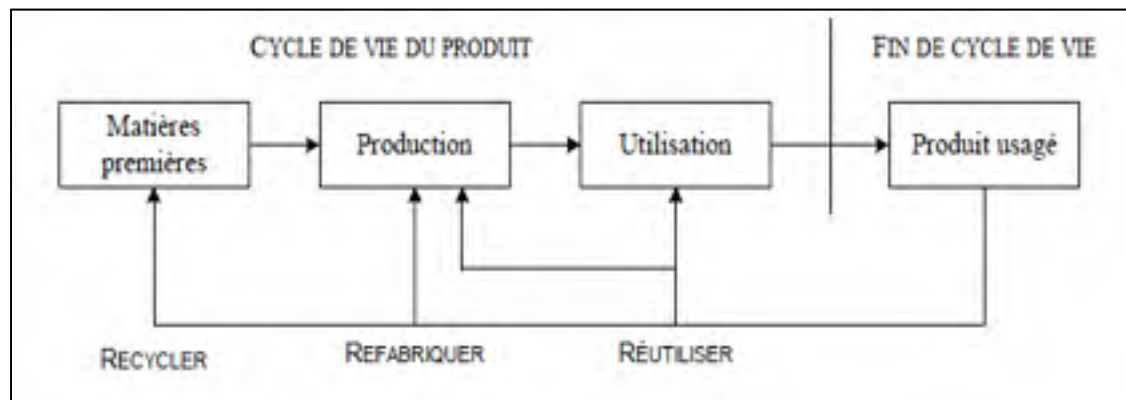


Figure 1.1 Cycle de vie du produit comprenant les activités de la logistique inverse tiré de (Abdessalem et al., 2007)

La réutilisation

Parmi les traitements effectués sur les produits en fin de vie, seule la réutilisation permet une utilisation immédiate de ceux-ci dans le même contexte ou non après une opération additionnelle mineure telle que le nettoyage ou une simple maintenance. La réutilisation intègre aussi la réutilisation des pièces qui la composent comme pièces de rechange. Ce traitement est beaucoup plus appliqué aux emballages (conteneurs).

La refabrication

La réutilisation est un processus de désassemblage des produits utilisés, d'inspection, de réparation/remplacement des composants et leur utilisation pour fabriquer un nouveau produit (Abdessalem et al., 2007). Cela signifie qu'un produit est considéré comme réutilisé lorsqu'il contient un composant provenant d'un produit usagé tel que l'affirme Claudio Benedetti (2002) qui définit la remise à neuf comme étant l'utilisation de certains composants d'anciens produits dans la fabrication de nouveaux produits.

Le recyclage

Selon le domaine dans lequel on se trouve, il existe plusieurs définitions attribuées au recyclage. Parmi celles-ci, nous pouvons retenir que le recyclage est la collecte et le désassemblage d'un matériau à la fin de son cycle de vie pour en récupérer des matériaux (Abdessalem et al., 2007). En d'autres termes, c'est le processus par lequel un produit en fin de vie est soumis à des transformations en vue d'en tirer une matière première secondaire qui sera introduite dans le cycle de production d'un nouveau produit.

1.2.3 Différents types de configuration d'un réseau de logistique inverse

Selon le Conseil canadien Sectoriel de la chaîne d'Approvisionnement (CCSCA), une chaîne d'approvisionnement encore appelée chaîne logistique ou supply chain regroupe l'ensemble des opérations d'approvisionnement en matière première, de fabrication (transformation des

matières premières) et de livraison au consommateur final. En logistique conventionnelle ou logistique directe, la conception d'un réseau est d'un enjeu stratégique pour la rentabilité d'une entreprise. Que ce soit la localisation des unités de production, la localisation et la capacité des entrepôts, l'organisation du réseau de transport, aucune décision ne doit être prise au hasard afin d'assurer la productivité de l'entreprise. En majorité des cas dans la littérature, la conception et l'optimisation des réseaux logistiques sont étudiées à l'aide de la programmation linéaire en nombre entier mixte. En logistique inverse, il existe deux types de configuration du réseau : la logistique inverse en boucle fermée et la logistique inverse en boucle ouverte (Thierry et al., 1995). Nous allons décrire ces deux configurations dans les paragraphes suivants.

1.2.3.1 Logistique inverse en boucle fermée

On parle de logistique inverse en boucle fermée lorsque les produits usagés sont retournés au producteur initial. La complexité d'une telle configuration provient du fait que les informations collectées dans la chaîne inverse doivent être intégrées à celles de la chaîne directe afin d'effectuer des décisions optimales. L'on observe beaucoup plus cette configuration pour les entreprises de fabrication d'appareils électroniques. Comme exemple, Jorjani et al. (2004) ont développé une procédure d'allocation optimale des composants électroniques démontés et ont également examiné l'option de réutilisation de ces composants pour les entreprises de haute technologie lors de leur opération de démontage. De plus, l'élaboration des modèles de recherche opérationnelle pour résoudre les problèmes de planification du recyclage des sous-produits industriels et des produits en fin de vie effectuée par Spengler et al. (1997) nous montrent la complexité de la gestion du flux en LI en boucle fermée.

1.2.3.2 Logistique inverse en boucle ouverte

On parle de logistique inverse en boucle ouverte lorsque le produit en fin de vie n'est pas retourné à son producteur initial, mais est utilisé par une autre entreprise. C'est le cas du recyclage où les produits usagés (métaux, plastiques, déchets ménagers) qui sont

généralement traités par des entreprises spécialisées différentes de celles qui les ont produites. Tout comme en boucle fermée, les entreprises de LI en boucle ouverte rencontrent le problème de conception optimal du réseau logistique afin d'être rentable. Ce problème a été étudié par Realff et al. (2000) qui ont étudié les problèmes entourant la conception d'un système de LI tel que la taille des sites de collecte des retours, la localisation géographique, le mode de transport des matières collectées. Ils ont résolu le problème posé en utilisant la programmation linéaire afin de maximiser le profit. Leur étude se positionne cependant dans le cas des situations déterministes. Listeş et Dekker (2005) ont utilisés la programmation stochastique pour la conception d'un réseau logistique en LI soumis au phénomène incertain du retour des produits.

Nous verrons dans le paragraphe suivant, l'enjeu du recyclage de l'aluminium ainsi que les problèmes rencontrés par les entreprises dans ce secteur d'activité.

1.3 Problématique de la recherche

Afin de satisfaire ses besoins (santé, sécurité, confort), l'homme n'a jamais cessé de transformer les ressources naturelles qui l'entourent en des biens ou services. C'est ainsi que Benedetti (2002) définit la production comme étant l'ensemble des activités permettant de créer, à partir de valeurs quelconques, des biens et des services utiles. Les métaux font partie des ressources naturelles utilisées par l'activité humaine, l'aluminium occupant une place importante à cause de ses bonnes propriétés physico-chimiques si bien qu'il est devenu aujourd'hui l'un des métaux les plus utilisés à travers le monde selon Bergsdal et al. (2004). Ce métal est utilisé dans plusieurs secteurs d'activités tels que l'industrie automobile, l'industrie aéronautique, la construction, l'emballage des produits alimentaires...etc. En outre, l'aluminium est le métal le plus abondant de l'écorce terrestre et le troisième élément le plus abondant après l'oxygène et le silicium et n'a été découvert qu'en 1825. Cependant, il n'existe pas dans la nature à l'état pur, mais sous forme d'oxydes. Bien qu'on le retrouve dans plusieurs minerais, son minerai principal est la bauxite découverte par Pierre Berthier en 1821 dans les baux de Provence en France (Bárdossy, 1997). La diminution de cette ressource primaire due à son exploitation à grande échelle, la pollution de l'environnement

ont poussé les gouvernements à établir des lois sévères pour protéger l'environnement et que doivent respecter les industries. Cela a poussé les industriels dans l'exploration des nouvelles sources de matières premières d'où l'émergence du recyclage de l'aluminium. Selon Actu-Environnement (2012) près de 30% des besoins de fabrication en aluminium aujourd'hui, proviennent de l'aluminium recyclé. La figure 1.2 indique la production mondiale d'aluminium ainsi que les proportions des productions primaires et secondaires des dernières décennies. D'après cette figure de l'Institut Internationale d'Aluminium (IIA), la production mondiale d'aluminium en 1990 était de 28 MT (recyclé : 8MT) tandis qu'elle était de 56 MT en 2007 (recyclé : 18 MT) (INSTITUTE, 2009).

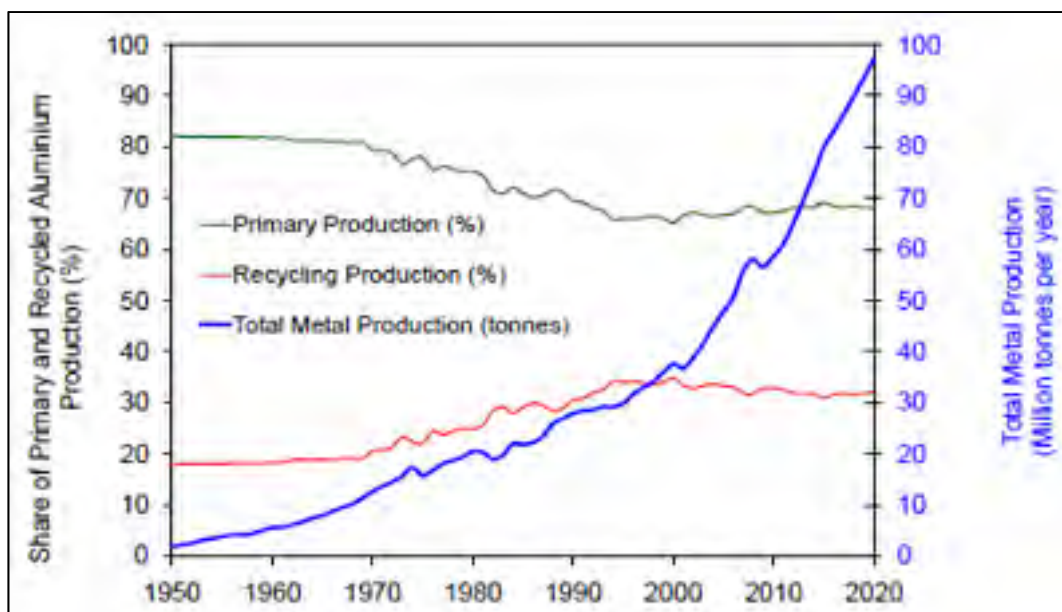


Figure 1.2 Production primaire mondiale et secondaire de l'aluminium des dernières décennies tiré de (INSTITUTE, 2009)

L'autre avantage majeur du recyclage de l'aluminium est qu'il est infiniment recyclable tout en gardant ses propriétés physico-chimiques. De plus, le recyclage de l'aluminium ne nécessite que 5% de l'énergie nécessaire pendant son extraction primaire et émet seulement 5% des gaz à effet de serre émis pendant la production primaire (Millbank, 2004).

La figure 1.3 illustre les différentes étapes nécessaires au recyclage des produits en fin de vie en aluminium. Les quatre étapes principales sont : la collecte sélective des produits usagés, la préparation (élimination des produits indésirables), la mise en balles, l'affinage et la mise en forme. Ce sont en général les produits issus de l'affinage qui servent à la fabrication de nouveaux produits. En général, chaque étape du traitement est effectuée par une entreprise spécialisée qui fonctionne en partenariat avec les autres entreprises du cycle.

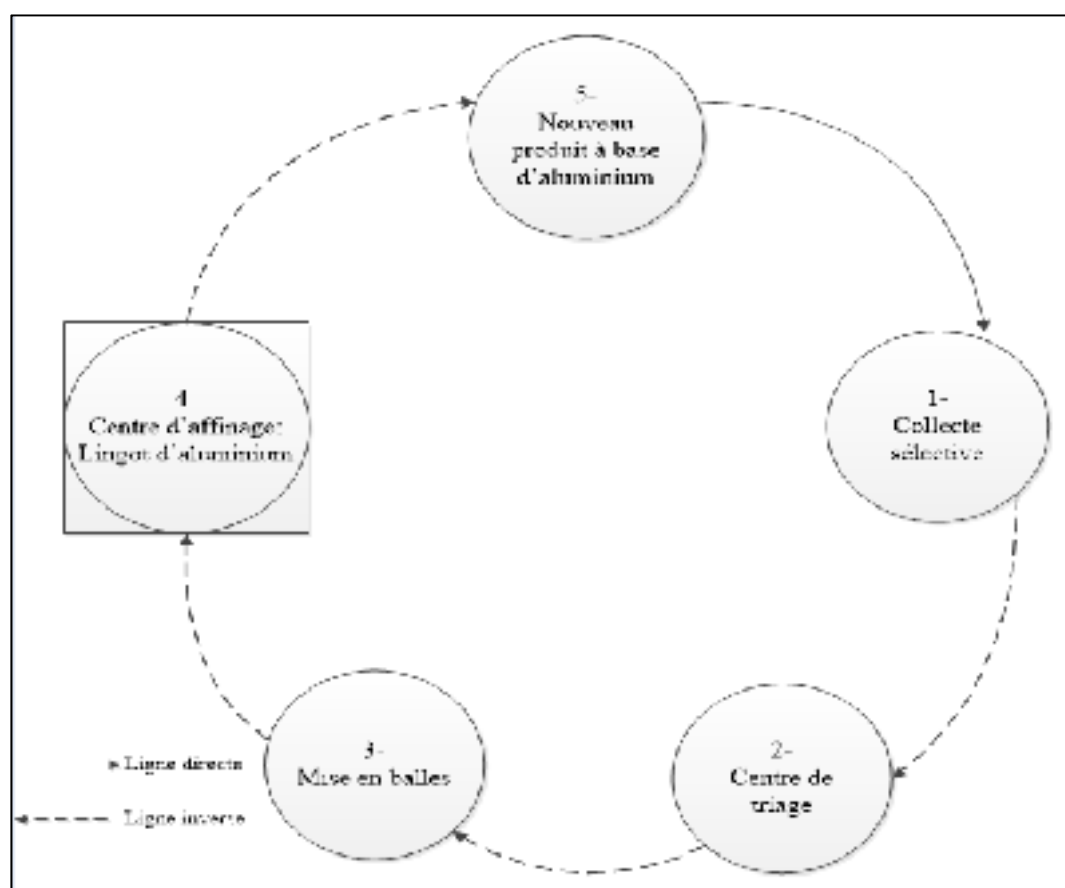


Figure 1.3 Les différentes étapes du recyclage de l'aluminium

Le mandat de notre travail est d'aider les entreprises qui recyclent l'aluminium à optimiser leurs performances afin d'augmenter leur profit. Ces entreprises font face au problème de planification de leur production qui doit satisfaire la demande des clients et ceci à des coûts minimums. Le problème à résoudre est celui de savoir quelle stratégie de gestion du flux des retours les entreprises de LI doivent elles adopter pour satisfaire la demande des clients à

moindre coût ? Avant de nous fixer les objectifs afin de répondre à cette problématique, nous allons effectuer une revue de la littérature afin de présenter les travaux qui ont été réalisés à cet effet.

1.4 Revue critique de la littérature

Il existe deux approches pour traiter le problème de fabrication et de réutilisation de l'aluminium en LI. La première approche traite le problème de l'optimisation des procédés ou techniques de recyclage de l'aluminium proprement dit. L'autre approche traite le problème de gestion du réseau logistique et/ou de la commande optimale du flux de matières depuis la collecte des produits en fin de vie chez le consommateur jusqu'au stockage des produits finis (lingots), cette approche tient en compte, la dynamique de la machine (pannes et réparations aléatoires des machines) et de la dynamique des stocks (stocks produits usagés collectés, stock des produits finis). Dans les paragraphes qui suivent, nous ferons une revue de ces deux approches.

1.4.1 Optimisation des techniques de recyclage

Auparavant, les consommateurs ne se préoccupaient que de la quantité, la qualité et le prix des produits. Le cycle conventionnel des produits allait des sites de production aux sites d'enfouissement (destruction). Cependant, les mentalités ont changé aujourd'hui et ceux-ci se préoccupent de plus en plus de la préservation de l'environnement et de la possibilité de recycler des produits mis à leur disposition comme le mentionnent Thomas et Wirtz (1994). Les auteurs montrent les avantages et l'importance du recyclage de l'aluminium contre leur destruction complète ou enfouissement, car permettant de récupérer leur richesse potentielle. Pour ainsi dire, le besoin de recyclage de l'aluminium n'est plus poussé que pour des raisons économiques, environnementales et législatives, mais aussi pour des raisons sociales. Buxmann (1994) démontre les bénéfices écologiques de l'utilisation grandissante de l'aluminium dans la conception des véhicules et du recyclage de l'aluminium des véhicules en fin de vie. Dans la même lignée, l'opportunité du recyclage de l'aluminium des

carrosseries de véhicules au royaume uni a été étudiée par Hoyle (1995). Il démontre que le recyclage d'une qualité spécifique d'aluminium forgé n'est rentable que si un moyen d'identifier positivement les différents types de déchet est disponible. L'étude menée par Xiao et Reuter (2002) a montré que le comportement de la fusion est grandement influencé par la présence des contaminants dans l'aluminium traité, de leur type et de leur taille. Ces résultats montrent qu'une unité de recyclage des produits en fin de vie en aluminium n'est profitable que lorsque celle-ci trie correctement les retours arrivant à l'usine.

Tel que mentionné précédemment, la technique conventionnelle de production de l'aluminium secondaire à partir des produits en fin de vie comprend les opérations de collecte, compactage, affinage et de mise en forme. Durant ces différentes étapes, du copeau d'aluminium est produit causant des pertes énormes et diminuant ainsi les performances des unités de recyclage. Afin de pallier à ce problème, Samuel (2003) a proposé une nouvelle technique (méthode directe) de production de l'aluminium secondaire à partir des produits en fin de vie produisant seulement 2.5% de copeau contre 48% de copeau produit en utilisant la méthode conventionnelle. L'étude de la formation des copeaux d'aluminium, leurs méthodes de traitement, leurs procédés de recyclage ainsi que leur impact sur les propriétés mécaniques des pièces recomposées ont été étudié par Mougomo et al. (2016b). L'étude expérimentale de l'usinabilité de deux alliages en aluminium recyclés (couvercle de cannettes et copeaux issu de l'usinage) menée par Mougomo et al. (2016a) a montré une différence claire de l'usinabilité de ces deux alliages ainsi que l'influence significatif de la lubrification pendant l'usinage.

Une autre difficulté rencontrée en logistique inverse est celle du caractère aléatoire des produits retournés couplé à une demande aléatoire (Mukhopadhyay et Setaputra, 2011). La littérature impute cela au fait qu'une grande partie des produits usagés n'entre pas dans la chaîne inverse. Cependant, pour assurer leur productivité et leur longévité, les entreprises de logistique inverse ont besoin d'un approvisionnement minimum de produits usagés. À cause de l'incertitude de l'approvisionnement de ces produits, Mukhopadhyay et Setaputra (2011) ont défini une politique de retour devant permettre aux entreprises de LI d'atteindre leurs objectifs. Ainsi, une piste de solution pour les entreprises de LI serait l'optimisation de leur

politique de gestion de la production qui tient compte des taux de retour afin de minimiser leurs coûts de production. Dans le paragraphe suivant, nous ferons une revue de la littérature des techniques d'optimisation des systèmes de production.

1.4.2 Optimisation du réseau logistique de production en LI

La gestion optimale du réseau logistique et de leurs activités en LI est très complexe en raison de la grande variété des décisions de portée différentes, des facteurs de perturbations et l'attention sur l'horizon de temps souhaité (Anthony, 1965). En fonction de l'horizon de temps visé, les politiques de gestion peuvent être classées en trois catégories à savoir les planifications stratégiques, tactiques et opérationnelles.

Les décisions stratégiques sont celles qui nécessitent de grands investissements au sein d'une entreprise et s'étalent sur une durée d'au moins un an. Les décisions tactiques quant à elles nécessitent moins d'investissements et s'étalent sur une période d'un mois. Les décisions opérationnelles traitent des problèmes à court terme sur une base journalière, mais en droite ligne avec les décisions tactiques et stratégiques. L'optimisation des stratégies de fabrication de réutilisation de l'aluminium en LI s'inscrit dans le cadre opérationnel car il consiste à déterminer la politique optimale de production des entreprises de recyclage de l'aluminium sur un horizon journalier.

L'un des défis des entreprises manufacturières est l'atteinte des objectifs de production devant satisfaire la demande des clients. Même si l'on peut souvent prévoir l'état de ces machines (marche, défaillance, arrêt) sur un horizon de temps court avec un degré de confiance, il est difficile de prévoir leur comportement sur un horizon de temps plus grand, car elles sont généralement sujettes à des pannes et réparations aléatoires. L'indisponibilité des actifs de production causée par les pannes entraîne souvent des ruptures de stock. Ces ruptures de stock entraînent des pertes économiques énormes pour les entreprises, car elles sont sévèrement pénalisées par la pénurie. Le besoin de planification optimal de la production devant permettre de faire face à ces aléas a poussé plusieurs auteurs à se pencher sur ce problème. Un pionnier en la matière tel que Rishel (1975) qui a travaillé sur le contrôle

des systèmes avec perturbations à saut Markovien homogène en développant les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir la solution optimale par l'usage de la programmation dynamique. Nous rappelons qu'un processus est dit Markovien homogène lorsque les taux de transition d'un état à un autre sont considérés constants. Autrement dit, l'état futur du phénomène étudié ne dépend que de l'état présent et non pas du passé. Cette hypothèse n'est pas tellement réaliste, car cela suppose par exemple qu'une machine peut tomber en panne pendant qu'elle est en arrêt de production. Lorsque les taux de transition ne sont plus constants, on dit que le processus est Markovien non homogène. En s'appuyant sur les hypothèses de Rishel (1975), Olsder et Suri (1980) ont réussi à modéliser la politique de commande d'un système manufacturier flexible (Flexible Manufacturing System : FMS) sujet aux phénomènes stochastiques tel que les pannes et réparations des machines afin de minimiser le temps de réalisation d'une production cible. En utilisant la programmation dynamique, ils ont déterminé la solution pour un exemple simple, cependant ils n'ont pas pu obtenir la solution pour des systèmes plus larges, donc plus réaliste. Faisant suite aux travaux de Olsder et Suri (1980), Kimemia et Gershwin (1983) ont réussi à démontrer que la politique optimale de commande est une politique de type seuil critique (Hedging Point Policy : HPP). Cette politique stipule de ne pas produire du tout lorsque le niveau d'inventaire est strictement supérieur au seuil critique, de produire à la demande lorsque le niveau d'inventaire est égal au seuil critique, mais de produire au taux maximal (capacité machine maximale) lorsque le niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil critique. Les travaux d'Akella et Kumar (1986) ont permis de déterminer l'expression analytique du seuil critique pour un système manufacturier constitué d'une seule machine et produisant un seul type de produit (M1P1). Ils considèrent uniquement deux états possibles de la machine : marche et arrêt dû à une panne. Ils ont également supposé que leur système était markovien homogène (taux de transitions constants). Les limites de ce modèle résident dans le fait que le système n'est constitué que d'une seule machine et ne peut prendre que deux états alors qu'en réalité, il arrive que la machine se retrouve dans un mode autre que ces deux-là (production en mode dégradé par exemple). Une autre limite à ce modèle est que le stock de matière première est toujours disponible alors qu'en réalité, il peut manquer de matière première nécessaire pour la production. Ceci nous montre bien que pour des systèmes plus

larges (M2P1, M3P1), avec des hypothèses moins simplistes que celles posées par Akella et Kumar (1986), l'expression analytique du seuil critique proposé n'est plus valide.

Afin de réduire les coûts de production moyens (inventaires et pénurie) à long terme pour un système M1P1 modélisé par une chaîne de Markov homogène, Bielecki et Kumar (1988) ont montré également que la politique de type seuil critique est optimale lorsque le taux de demande est constant. Afin de pallier aux limites de la solution analytique élaborée par Akella et Kumar (1986) et à l'inexistence d'une méthode analytique de résolution des équations d'HJB, Kushner et Dupuis (1992) ont développé une méthode numérique de résolution de l'équation d'HJB qui consiste à approximer cette solution avec une marge d'erreur fixée d'avance.

La méthode de programmation dynamique stochastique a été appliquée pour de nombreux systèmes sous différentes considérations initiales. En effet, l'optimisation conjointe de la production et de la maintenance préventive pour un processus Markovien non homogène a été traité par Gharbi et Kenne (2000). L'extension de l'optimisation de la politique de production aux systèmes plus larges (M2P5) soumis aux phénomènes stochastiques tel que les pannes et réparations des machines a également été étudiée par Gharbi et Kenne (2003). Hors-mis les pannes et réparation aléatoires de la machine, Kenne (2004) a pu intégrer l'usure de l'outil et le taux de rejet afin de déterminer les politiques optimales de production et de remplacement préventif d'outils devant minimiser les coûts (mise en inventaire, rupture de stock, de réparations et de remplacements d'outils). Nodem et al. (2011) ont élaboré une politique de production, réparation et maintenance préventive d'un système manufacturier sujet à des pannes et réparations aléatoires; ils ont également obtenu une politique sous-optimale de type seuil critique.

Afin d'optimiser la production pour un système hybride en boucle fermée, Kenné et al. (2012) ont étudié une unité de production constituée de deux machines en parallèle produisant un seul type de produit. Ils ont déterminé les politiques de commandes optimales de chacune des machines afin de suppléer à la demande client tout en minimisant les coûts (inventaire et pénurie).

Listeş et Dekker (2005) ont fait usage de la programmation stochastique pour concevoir un réseau logistique en LI pour recycler du sable issu de la démolition en construction soumis au phénomène incertain du retour des produits. Realff et al. (2000) ont étudié la conception optimale du réseau logistique d'une usine de recyclage des tapis en utilisant la programmation linéaire mixte. Le développement d'un modèle stochastique de maximisation des profits par Kara et Onut (2010) ont permis déterminer une stratégie optimale à long terme de recyclage du papier dans une usine aux USA. De leurs côtés, Silva Filho (2013) ont formulé un problème de planification stochastique (demande et retour aléatoire) de la production en LI en utilisant la programmation linéaire.

Parmi tous les travaux trouvés dans la littérature traitant de l'optimisation de la gestion de la production en logistique inverse, plusieurs études se sont penchées sur le cas des usines de recyclage de composants électroniques, de papier, du sable de construction, des tapis, mais aucune ne s'est penchée sur le cas spécifique d'une usine de recyclage de l'aluminium. L'originalité de notre travail réside dans le fait que nous nous appliquerons dans notre étude, à apporter une contribution afin d'aider les usines de recyclage de l'aluminium, à optimiser leur profit. Le problème est de déterminer la politique de commande optimale d'une telle unité de récupération en logistique inverse en boucle ouverte. Dans le paragraphe suivant, nous éluciderons l'objectif de ce travail.

1.5 Objectif de la recherche

L'objectif principal de ce travail de recherche est de déterminer une politique optimale de planification de la production des centres de recyclage en boucle ouverte afin de minimiser le coût global de production en tenant compte de la dynamique des stocks (stock des produits finis et stock des retours) et de la dynamique de la machine (panne et réparation). En d'autres termes, il s'agit de déterminer le taux de production des produits finis (transformation des retours collectés) et le taux d'élimination des retours de l'usine permettant de minimiser le coût global de production.

Ce coût global tient compte du coût de stockage des produits retournés, du coût d'élimination des retours, du coût de production, du coût de maintenance des machines, du coût de stockage des produits finis, du coût de pénurie des produits finis et du coût environnemental. Pour y arriver, nous avons considéré trois sous-objectifs notamment :

- i) Déterminer la politique optimale (taux de production et d'élimination) de l'unité de recyclage en l'assimilant à une machine produisant un seul type de produit (M1P1) en supposant qu'il est alimenté avec un retour à taux constant et suppléant une demande à taux constant.
- ii) Déterminer la politique optimale de l'unité de recyclage en l'assimilant à une machine produisant un seul type de produit alimenté avec un retour à taux variable et suppléant une demande à taux constant.
- iii) Généraliser la politique de commande obtenue en déterminant les politiques conjointes de production et d'élimination des retours en fonction du niveau d'inventaire des différents stocks.

1.6 Méthodologie de la recherche

Afin d'atteindre nos objectifs, nous avons adopté une méthodologie en six étapes.

- Dans l'étape 1, nous allons formuler le problème de commande optimal en assimilant le système à une machine flexible (temps de setup négligeable devant le temps de fonctionnement) produisant un seul type de produit.
- À l'étape 2, nous élaborerons un modèle mathématique du système considéré en utilisant la programmation dynamique stochastique. Cette méthode permet d'obtenir les conditions optimales à partir d'équations mathématiques obtenues appelées équations d'HJB.
- À l'étape 3, nous utiliserons une méthode numérique basée sur l'approche de Kushner afin de déterminer la fonction valeur qui est la solution de l'équation d'HJB compte tenu de l'inexistence d'une méthode analytique de résolution de cette équation. Nous

déterminerons ainsi les taux optimaux de production et d'élimination des retours minimisant les coûts.

- À l'étape 4, nous élaborerons un modèle de simulation par le logiciel ARENA en nous appuyant sur la structure de la politique de commande obtenue à l'étape 3, ceci afin de généraliser les résultats pour les processus Markovien non homogènes.
- Rendus à l'étape 5, nous allons élaborer un plan d'expériences, c'est-à-dire une combinaison des variables indépendantes pour visualiser leur effet sur la réponse (le coût) et de dégager les facteurs significatifs. L'exécution du modèle de simulation se fera pendant une durée suffisamment longue pour observer le régime permanent.
- À l'étape 6, nous effectuerons un traitement statistique des résultats observés à l'aide du logiciel STATGRAPHICS afin d'obtenir une corrélation entre les facteurs significatifs et le coût de production. Nous pourrons ainsi obtenir les facteurs optimaux qui minimisent les coûts.

La synthèse de la méthodologie adoptée est illustrée par la figure 1.4.

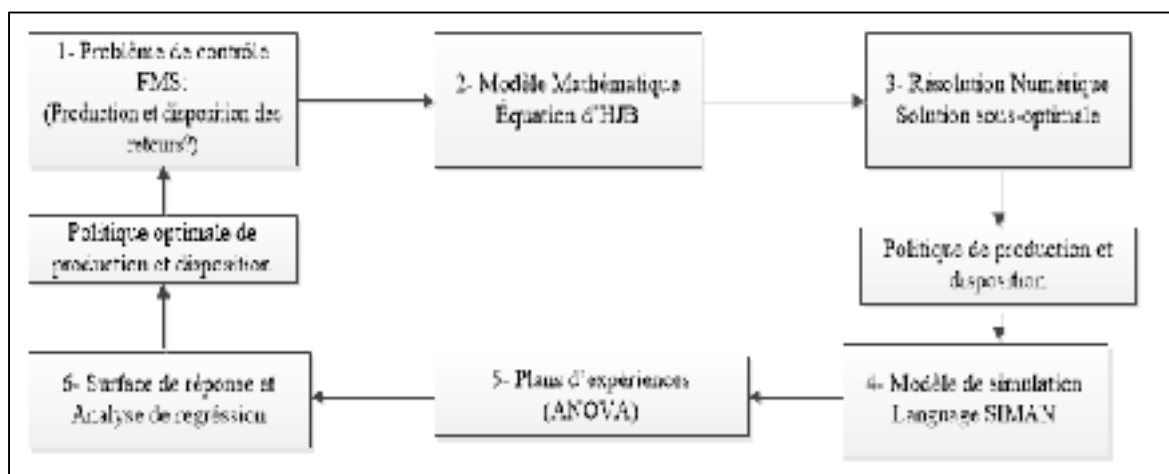


Figure 1.4 Méthodologie de recherche

1.7 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons discuté des différentes activités de la logistique inverse ainsi que des deux configurations existantes. Après avoir posé la problématique de notre étude, nous avons parcouru les différents travaux menés par des auteurs en vue d'optimiser le recyclage des produits en fin de vie de façon générale et de l'aluminium en particulier. Une fois les objectifs de la recherche fixés, nous avons présenté la méthodologie adoptée pour résoudre le problème posé. Cette méthodologie est une combinaison des méthodes analytiques, de la programmation dynamique stochastique, de la simulation, des plans d'expériences, l'analyse de la variance et les surfaces de réponses. Cette approche a plusieurs fois été utilisée dans la littérature telle que l'élaboration des taux de production et de maintenance préventive d'un système manufacturier par Gharbi et Kenne (2000). Dans le prochain chapitre, nous traiterons le cas de la commande optimale d'une unité de recyclage avec retour variable et une demande client à taux constant.

CHAPITRE 2

COMMANDE OPTIMALE D'UNE UNITÉ DE RECYCLAGE AVEC RETOUR DE MATIÈRE ET DE DEMANDE CLIENT À TAUX CONSTANTS

2.1 Introduction

Le présent chapitre traite le problème de commande optimale d'une unité de recyclage des produits en fin de vie en aluminium assimilée à une seule machine sujette à des pannes et réparations aléatoires et produisant un seul type de produit (M1P1). Le retour des produits en fin de vie ainsi que la demande client sont à taux constants. Les différents états de la machine (marche, panne) ainsi que les niveaux d'inventaires (produits en fin de vie collectés et produits finis issus de la fabrication) constituent les variables d'état du système considéré. En outre, les taux d'élimination des matières premières dans les deux modes de la machine ainsi que le taux de fabrication des produits finis au mode marche de la machine constituent les variables de décision. Le but de cette section est de déterminer les variables optimales qui minimisent le coût global de production. Cette étude se fera en trois étapes à savoir :

- La modélisation de l'unité de recyclage basée sur la théorie de commande stochastique tenant en compte la dynamique de la machine, de la dynamique du stock et des variables de décision en utilisant les chaînes de Markov homogènes à temps continu et à états discrets.
- Élaboration des équations qui décrivent l'optimum du problème formulé et qui sont de type Hamilton-Jacobi Bellman (HJB), puis leur résolution numérique afin de déterminer la solution optimale.
- Une analyse de sensibilité afin de vérifier la validité du modèle de simulation ainsi que des résultats obtenus.

Hypothèses de modélisation

Afin de modéliser l'unité de production, nous faisons les hypothèses préalables suivantes :

- L'unité de fabrication est sujette à des pannes et réparations aléatoires.
- Le système est une chaîne de Markov homogène, c'est-à-dire que la moyenne des temps de bon fonctionnement (Mean Time Between failures, MTBF) et le temps moyen des réparations (Mean Time To Repair, MTTR) de la machine sont constantes et connues.
- Les coûts de stockage par unité des produits retournés et des produits finis sont constants et connus.
- Les coûts des pénuries par unité des produits finis sont connus et supérieurs aux coûts de stockage.
- Les taux de demande des produits finis et de retour des produits en fin de vie sont connus et constants.
- Le coût de maintenance de la machine par unité de temps lorsqu'elle est en panne est connu et constant;
- Le taux de production maximal du système est connu.
- Lorsqu'une machine tombe en panne, l'activité de maintenance est immédiatement mise en place et la distribution de temps de réparation est connue.

2.3 Formulation générale du problème d'optimisation

Le critère de performance choisi est le coût global de production incluant le coût de mise en inventaire des retours, le coût d'élimination des retours, le coût de fabrication de l'aluminium secondaire, le coût de maintenance corrective de la machine, le coût de stockage des produits finis ainsi que le coût de pénurie des produits finis. Nous utiliserons comme approche de résolution, la détermination de la fonction valeur qui est le coût global optimal obtenu lorsque les conditions optimales sont appliquées. La fonction valeur est obtenue à partir des équations d'Hamilton-Jacobi Bellman (HJB). La solution analytique de cette équation étant difficile,

nous utiliserons une approche numérique développée par Kushner et Dupuis (1992) qui consiste à utiliser une approximation du gradient de la fonction valeur. Définissons tout d'abord les symboles et notations utilisés pour modéliser notre système.

Symboles et notations utilisés

Nous référons le lecteur à la section liste des symboles et unités de mesure au début de ce rapport pour les symboles et notations utilisées dans cette partie.

2.3.1 Diagramme de transition d'états

Soit $\alpha(t)$ le processus stochastique définissant l'état de la machine à un instant t quelconque et à valeur dans $B = \{1, 2\}$ selon que la machine est en marche ou en panne à un instant t donné. Le système manufacturier peut être vu comme une chaîne de Markov à 2 états.

Nous définissons ainsi les différents modes du système suivants :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1: & \text{La machine est en bon état de marche} \\ 2: & \text{La machine est en panne} \end{cases}$$

Le graphe de transition de changement d'état du système est donné par la figure 2.2 ci-dessous :

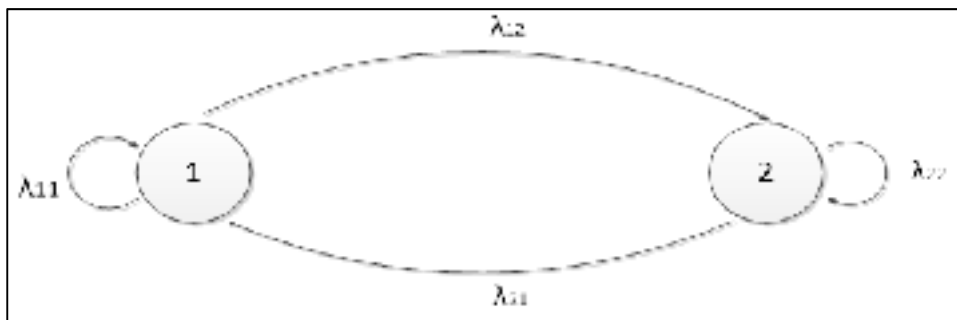


Figure 2.2 Diagramme de transition d'états

Où λ_{12} désigne le taux de panne telle que $\lambda_{12} = \frac{1}{MTBF} > 0$

λ_{21} désigne le taux de réparation telle que $\lambda_{21} = \frac{1}{MTTR} > 0$

On a aussi les relations suivantes : $\lambda_{11} = -\lambda_{12}$ et $\lambda_{22} = -\lambda_{21}$

2.3.2 Dynamique de la machine et matrice des taux de transition

Les probabilités de transition de l'unité de production du mode i au mode j sont données par les équations (2.1) ci-dessous.

$$\Pr[\alpha(t + \delta t) = j / \alpha(t) = i] = \begin{cases} \lambda_{ij}\delta t + o(\delta t) & \text{si } i \neq j \\ 1 + \lambda_{ij}\delta t + o(\delta t) & \text{si } i = j \end{cases} \quad i, j \in B = \{1, 2\} \quad (2.1)$$

$$\text{Avec } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{t} = 0$$

Les états du processus sont modélisés par une chaîne de Markov homogène irréductible à temps continu et à états discrets caractérisés par une matrice des taux de transition $Q = (\lambda_{ij})$ de dimension 2×2 et est définie ci-dessous:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} \end{bmatrix}$$

2.3.3 Domaine de commande admissible

Soit u le taux de production de la machine lorsqu'elle est en marche ($\alpha = 1$) et u_{d_α} le taux d'élimination des retours à un mode α quelconque ($\alpha = 1, 2$). Les valeurs possibles du taux de production ainsi que du taux d'élimination encore appelé domaine de commande admissible est défini par l'équation (2.2).

$$\Gamma(\alpha) = \{(u, u_{d_\alpha}) \in R^2 / 0 \leq u(\alpha) \leq u_{\max}, 0 \leq u_{d_\alpha}(\alpha) \leq r\} \quad (2.2)$$

2.3.4 Probabilités limites et condition de faisabilité

Soit $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ le vecteur des probabilités limites aux modes 1 et 2 du système. Elles définissent la probabilité d'avoir la machine à un état donné en régime permanent. Les probabilités limites π_i ($i=1,2$) sont les solutions du système (2.3):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \pi_i \times \lambda_{ij} = 0 & \forall j = 1, 2 \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

La solution du système d'équations (2.6) précédent conduit à la solution donnée par l'équation (2.4).

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}} \\ \pi_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{21}} \end{cases} \quad (2.4)$$

π_1 représente la probabilité limite que la machine passe le temps au mode marche (mode 1)

π_2 représente la probabilité limite que la machine passe le temps au mode panne (mode 2)

La condition de faisabilité permet de garantir que la production peut suppléer à la demande du produit fini pendant toute la durée maximale de disponibilité de la machine. La machine ne produisant qu'au mode 1 (état de marche), la condition de faisabilité s'exprime par l'inégalité (2.5).

$$\pi_1 \times u_{\max} \geq d \quad (2.5)$$

Cette condition de faisabilité est similaire au cas où le stock de matière première serait infini dû au fait que, le taux de production maximal de la machine est inférieur au taux de retour

constant des produits usagés. En effet, la matière première est toujours disponible pour la machine.

2.3.5 Dynamique des stocks

Les variations des différents stocks au cours du temps sont régies par les équations différentielles données par le système d'équations (2.6):

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = r - u_{d_\alpha} - u, & x_1(0) = x_{10} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u - d, & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (2.6)$$

où x_{10} et x_{20} sont les stocks des retours et des produits finis à l'instant initial.

Ces équations traduisent le fait qu'à chaque instant, le retour des produits augmente le stock des matières premières tandis que la demande de la machine et l'élimination des retours le diminuent. De façon analogue, la production effectuée par la machine augmente le niveau d'inventaire des produits finis tandis que la demande client la diminue.

2.3.6 Coût instantané et coût total actualisé

Le coût instantané est fonction des coûts de stockage des produits retournés c_1 , du coût de stockage des produits finis c_{2p} , du coût de pénurie des produits finis c_{2m} , du coût de destruction des matières premières excédentaires c_d , du coût de fabrication c_m , et du coût de maintenance corrective c^a , du coût lié à l'environnement c_{env} et du coût pénalisant l'absence des matières premières lors des pénuries des produits finis c_{ecart} . Son expression est donnée par l'équation (2.7).

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \alpha) = & c_1 x_1 + (c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^-) + c_d u_{d_\alpha} + c_m u + c^a \text{ind}\{\alpha(t)=2\} + c_{env} (x_{1\max} - x_1) \\ & + c_{ecart} |(|x_2| - x_1)| \text{ind}\{x_2 < 0\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où :

$$ind\{\Theta(.)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } \Theta(.) \text{ est vrai} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} ; \quad x_2^+ = \max(0, x_2) \quad ; \quad x_2^- = \max(-x_2, 0) .$$

Les différents coûts se trouvant dans la fonction coût instantanée sont définis dans la section liste des symboles et unités de mesure en début de ce mémoire.

Coût total actualisé

L'objectif est de contrôler le taux d'élimination des matières premières aux différents modes qui influence le niveau d'inventaire des matières premières puis de contrôler le taux de production qui à son tour, influence à la fois le niveau d'inventaire des retours et le niveau d'inventaire des produits finis; tout ceci afin de minimiser le coût total actualisé de l'unité de production donné par la relation (2.8).

$$J(x_1, x_2, \alpha) = E \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_1, x_2, \alpha) dt \mid x(0) = x, \alpha(0) = \alpha \right\} \quad (2.8)$$

Où :

- $E(B|A)$ est l'espérance mathématique de B sachant A
- ρ est le taux d'actualisation qui tient compte du flux monétaire (Garceau, 1996).
- $x = (x_1, x_2)$ est le vecteur des niveaux d'inventaire

2.3.7 Conditions d'optimum

La détermination des conditions optimales fait appel à la fonction valeur sur un horizon de temps infini et aux équations d'HJB associées. Les travaux de Boukas et Kenne (1997) montrent que la fonction valeur est lipchitzienne (par conséquent continue), strictement convexe et différentiable. Elle satisfait les équations d'HJB et cela justifie bien le fait que le coût obtenu par cette expression soit optimal. La fonction valeur est donnée par la relation (2.9):

$$v(x_1, x_2, \alpha) = \inf_{u \in \Gamma(\alpha)} J(x_1, x_2, \alpha), \quad \alpha \in B = \{1, 2\} \quad (2.9)$$

La fonction valeur $v(x_1, x_1, \alpha)$ est la solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre donné par l'équation (2.10) appelée équation d'HJB. Cette équation est obtenue en se basant sur le principe de programmation dynamique en temps continu introduite par Richard Bellman en 1957. Le lecteur peut se référer au chapitre 8 de Gershwini (1994) pour avoir plus d'information sur les équations d'HJB.

$$\rho v(x_1, x_2, \alpha) = \min_{(u, u_{d\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left[g(x_1, x_2, \alpha) + \sum_{j \in B} \lambda_{\alpha j} v(x_1, x_2, j) + (r - u_{d\alpha} - u) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} + (u - d) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} \right] \quad (2.10)$$

La fonction valeur $v(x_1, x_1, \alpha)$, solution de l'équation (2.10) est obtenue lorsque les conditions optimales sont appliquées. Cependant, cette équation ne peut être résolue analytiquement. Nous utiliserons une méthode de résolution numérique présentée au paragraphe 2.4. Le paragraphe qui suit justifie la démarche adoptée telle que aussi utilisée dans Kenne et Boukas (1998).

2.3.8 Conditions d'optimums approximés

Nous nous posons la question de savoir si la valeur obtenue par cette approche est optimale. Pour y répondre, nous considérons les théorèmes 1 à 3 suivants.

Théorème 1.

Si $g(x_1, x_2, \alpha)$ est conjointement convexe, alors $v(x_1, x_2, \alpha)$ est convexe pour tout $\alpha \in B$

Preuve.

Nous référons le lecteur aux travaux de Kenne (2004) pour la preuve de ce théorème.

Théorème 2.

La fonction valeur $v(x_1, x_2, \alpha)$ est continue, différentiable et satisfait les équations d'HJB données par l'équation (2.10).

Preuve.

Nous référons le lecteur au développement effectué par Clarke (1983) pour la preuve de ce théorème.

Soit $v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha)$ une séquence de fonctions qui convergent vers $v(x_1, x_2, \alpha)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

et $(u^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha), u_{d_\alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha))$ une fonction qui minimise

$$g(x_1, x_2, \alpha) + \sum_{j \in B} \lambda_{\alpha j} v(x_1, x_2, j) + (r - u_{d_\alpha} - u) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} + (u - d) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2}$$

À travers $(u, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)$.

Avant d'énoncer le théorème 3, nous considérons les trois hypothèses suivantes.

Hypothèse 1 :

$v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha)$ est continu et différentiable tel que pour des constantes $C, \kappa_1, \text{ et } \kappa_2 > 0$, nous avons :

$$0 \leq v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha) \leq C(1 + |x_1|^{\kappa_1} + |x_2|^{\kappa_2})$$

$$\text{Et } |v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha) - v^\varepsilon(x_1', x_2', \alpha)| \leq C \left[(1 + |x_1|^{\kappa_1} + |x_1'|^{\kappa_1}) |x_1 - x_1'| + (1 + |x_2|^{\kappa_2} + |x_2'|^{\kappa_2}) |x_2 - x_2'| \right]$$

Hypothèse 2 :

Tout $v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha)$ satisfait approximativement les équations d'HJB si :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \min_{(u, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left\{ g(x_1, x_2, \alpha) + \sum_{j \in B} \lambda_{\alpha j} v^\varepsilon(x_1, x_2, j) + (r - u_{d_\alpha} - u) \frac{\partial v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} + (u - d) \frac{\partial v^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} \right\} \right\} = 0$$

uniformément par rapport à x_1 et x_2 dans tout sous ensemble compact de $\mathbf{R}^2$.

Hypothèse 3 :

Sous une loi de commande $(u^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha), u_{d_\alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, \alpha))$, les équations différentielles (2.9), pour une condition initiale donnée ont une solution.

Théorème 3.

Sous les trois hypothèses précédentes, la loi de commande $(u^\varepsilon, u_{d_\alpha}^\varepsilon)$ est asymptotiquement optimale, c'est-à-dire,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(x_1, x_2, u^\varepsilon, u_{d_\alpha}^\varepsilon, \alpha) = v(x_1, x_2, \alpha)$$

Preuve.

Pour la preuve de ce théorème, nous référons le lecteur à Yan et Zhang (1997) ■

Nous allons dans la suite nous appuyer sur ces résultats pour résoudre numériquement l'équation d'HJB.

2.4 Méthode de résolution

Une méthode analytique de résolution de cette équation est inexistante. L'approche de résolution utilisée est une méthode numérique développée par (Kushner et Dupuis, 1992), méthode que l'on retrouve aussi bien dans les travaux de (Kenné, 2003), (Kenné et Gharbi, 2004) et bien d'autres encore. Elle consiste à simplifier l'équation d'HJB en faisant une approximation de la fonction valeur $v(x_1, x_2, \alpha)$ par la fonction $v^h(x_1, x_2, \alpha)$ et l'approximation du gradient de la fonction valeur $\partial v(x_1, x_2, \alpha) / \partial x_i$ ($i = 1, 2$) respectivement par les expressions résumées par les systèmes d'équations (2.11) et (2.12) :

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{v^{h_1}(x_1 + h_1, x_2, \alpha) - v^{h_1}(x_1, x_2, \alpha)}{h_1}, & \text{si } r - u_{d_\alpha} - u_m \geq 0 \\ \frac{v^{h_1}(x_1, x_2, \alpha) - v^{h_1}(x_1 - h_1, x_2, \alpha)}{h_1}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} = \begin{cases} \frac{v^{h_2}(x_1, x_2 + h_2, \alpha) - v^{h_2}(x_1, x_2, \alpha)}{h_2}, & \text{si } u - d \geq 0 \\ \frac{v^{h_2}(x_1, x_2, \alpha) - v^{h_2}(x_1, x_2 - h_2, \alpha)}{h_2}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

Où h_i ($i = 1, 2$) est le pas de discrétisation de la variable d'état x_i .

Ainsi, on peut écrire que:

$$\begin{aligned} (r - u_{d_\alpha} - u) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} = & \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} v^{h_1}(x_1 + h_1, x_2, \alpha) \text{ind} \{r - u_{d_\alpha} - u \geq 0\} \\ & + \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} v^{h_1}(x_1 - h_1, x_2, \alpha) \text{ind} \{r - u_{d_\alpha} - u < 0\} - \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} v^{h_1}(x_1, x_2, \alpha) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Et

$$\begin{aligned} (u - d) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} = & \frac{|u - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 + h_2, \alpha) \text{ind} \{u - d \geq 0\} \\ & + \frac{|u - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 - h_2, \alpha) \text{ind} \{u - d < 0\} - \frac{|u - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2, \alpha) \end{aligned} \quad (2.14)$$

La mise en œuvre de la technique développée par Kushner et Dupuis (1992) consiste à déterminer une approximation du gradient de la fonction valeur en chacun des points du maillage fini et prédéterminé à l'avance. Cependant, cette approximation nécessite en un point donné les valeurs de la fonction valeur en amont ou en aval de ce point. Ces valeurs n'étant pas définies aux frontières du maillage, elles doivent donc être approximées à partir des valeurs existantes. Étant donné que la fonction valeur est continue, cette approximation n'a pas d'effet sur le résultat final, de plus, la solution optimale recherchée ne se trouve pas aux frontières telles que le démontrent Yan et Zhang (1995).

En insérant les équations (2.13) et (2.14) dans l'équation (2.10) initiale, on obtient alors l'équation (2.15) suivante :

$$\rho V^h(x_1, x_2, \alpha) = \min_{(u, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} & g(x_1, x_2, \alpha) + \lambda_{\alpha\alpha} V^h(x_1, x_2, \alpha) + \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j} V^h(x_1, x_2, j) \\ & + \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} V^h(x_1 + h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r - u_{d_\alpha} - u \geq 0\} + \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} V^h(x_1 - h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r - u_{d_\alpha} - u < 0\} \\ & + \frac{|u - d|}{h_2} V^h(x_1, x_2 + h_2, \alpha) \text{ind}\{u - d \geq 0\} + \frac{|u - d|}{h_2} V^h(x_1, x_2 - h_2, \alpha) \text{ind}\{u - d < 0\} \\ & - \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} V^h(x_1, x_2, \alpha) - \frac{|u - d|}{h_2} V^h(x_1, x_2, \alpha) \end{aligned} \right] \quad (2.15)$$

Après simplification de l'équation (2.15), on obtient finalement l'équation (2.16):

$$V^h(x_1, x_2, \alpha) = \min_{(u, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} & (\rho + |\lambda_{\alpha\alpha}| + \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} + \frac{|u - d|}{h_2})^{-1} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_\alpha} + c_m u + c^p \text{ind}\{\zeta(t) = 2\} + c_{\text{en}} (x_{\text{limax}} - x_1) + c_{\text{ext}} (|x_2| - x_1) \text{ind}\{x_2 < 0\} + \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j} V^h(x_1, x_2, j) \\ & + \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} V^h(x_1 + h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r - u_{d_\alpha} - u \geq 0\} + \frac{|r - u_{d_\alpha} - u|}{h_1} V^h(x_1 - h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r - u_{d_\alpha} - u < 0\} \\ & + \frac{|u - d|}{h_2} V^h(x_1, x_2 + h_2, \alpha) \text{ind}\{u - d \geq 0\} + \frac{|u - d|}{h_2} V^h(x_1, x_2 - h_2, \alpha) \text{ind}\{u - d < 0\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (2.16)$$

Où :

$\Gamma(\alpha)$ est le domaine de commande admissible.

u est le taux de production de la machine au mode marche ($\alpha = 1$).

u_{d_α} est le taux d'élimination des matières premières à un mode α quelconque ($\alpha = 1, 2$).

Au mode 1, $\alpha=1$: La machine est en marche, le coût de maintenance est nul et on a obtenu l'expression de la fonction valeur au mode 1 donnée par l'équation (2.17):

$$v^h(x_1, x_2, 1) = \min_{(u, u_{d_1}) \in \Gamma(\alpha)} \left[\left(\rho + |\lambda_{11}| + \frac{|r - u_{d_1} - u|}{h_1} + \frac{|u - d|}{h_2} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \left\{ c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_1} + c_m u + c_{env} (x_{1\max} - x_1) + \lambda_{12} v^h(x_1, x_2, 2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|r - u_{d_1} - u|}{h_1} v^h(x_1 + h_1, x_2, 1) \text{ind}\{r - u_{d_1} - u \geq 0\} + \frac{|r - u_{d_1} - u|}{h_1} v^h(x_1 - h_1, x_2, 1) \text{ind}\{r - u_{d_1} - u < 0\} \right\} \right. \\ \left. \left. + \frac{|u - d|}{h_2} v^h(x_1, x_2 + h_2, 1) \text{ind}\{u - d \geq 0\} + \frac{|u - d|}{h_2} v^h(x_1, x_2 - h_2, 1) \text{ind}\{u - d < 0\} \right\} \right] \quad (2.17)$$

Au mode 2, $\alpha=2$, $u=0$: La machine est en arrêt pour maintenance corrective et l'expression de la fonction valeur est donnée par l'équation (2.18):

$$v^h(x_1, x_2, 2) = \min_{u_{d_2} \in \Gamma(\alpha)} \left[\left(\rho + |\lambda_{22}| + \frac{|r - u_{d_2}|}{h_1} + \frac{|d|}{h_2} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \left\{ c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_2} + c^\alpha + c_{env} (x_{1\max} - x_1) + c_{ecart} (|x_2| - x_1) + \lambda_{21} v^h(x_1, x_2, 1) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{|r - u_{d_2}|}{h_1} v^h(x_1 + h_1, x_2, 2) + \frac{|d|}{h_2} v^h(x_1, x_2 - h_2, 2) \right\} \right] \quad (2.18)$$

Pour un ordre de précision δ et un pas h donnés, l'algorithme d'approximation successive développée par Yan et Zhang (1995) se résume dans les quatre étapes suivantes :

Étape 1 :

Choisir l'ordre de précision $\delta \in \mathbb{R}^+$

Initialiser

$n = 1$

$$(v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_n := 0 \quad \forall \alpha \in B$$

$(v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_0 := 0$ ($n=0$) correspond à la valeur initiale de mémorisation de la fonction valeur.

Étape 2 :

Calculer la nouvelle valeur de la fonction valeur au rang n ($(v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_n$) à partir de la formule et des données initiales et la remplacer avec l'ancienne valeur en mémoire.

$$(v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_{n-1} := (v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_n$$

Étape 3 :

Calculer la fonction valeur pour obtenir la politique de commande

$$T(v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_{n-1} = (v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_n = T^*(v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_{n-1}$$

Étape 4 :

Calculer successivement les valeurs :

$$\bar{c} := \min_{(x_1, x_2)} \left\{ (v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_n - (v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_{n-1} \right\}$$

$$\underline{c} := \max_{(x_1, x_2)} \left\{ (v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_n - (v^h(x_1, x_2, u, u_{d_\alpha}, \alpha))_{n-1} \right\}$$

$$C_{\min} := \frac{\rho}{1-\rho} \bar{c}$$

$$C_{\max} := \frac{\rho}{1-\rho} \underline{c}$$

Test de convergence :

Si : $|C_{\min} - C_{\max}| \leq \delta$ alors, arrêter les itérations et $u = u^*$, $u_{d_\alpha} = u_{d_\alpha}^*$

Sinon $n := n + 1$, exécuter de nouveau les étapes 2, 3 et 4.

2.5 Exemple numérique

Dans cette partie, nous allons résoudre numériquement l'équation d'HJB (2.10) afin de déterminer la politique de commande optimale de l'unité de recyclage décrite au paragraphe 2.2, nous utiliserons à cet effet, le logiciel Matlab (Voir annexe 1 et 2). Nous y parviendrons par approximation successive en utilisant l'algorithme de Yan et Zhang (1997). Les variables d'états sont les niveaux d'inventaires (matières retournées et produits finis). Les variables de

décisions sont le taux de production des produits finis au mode marche, le taux d'élimination des matières retournées aux modes marche et panne.

Le pas de discrétisation utilisé est $hx_1 = hx_2 = 0.5$ tandis que le domaine d'étude considéré est le domaine D décrit ci-dessous :

$$D = \{0 \leq x_1 \leq 20; -10 \leq x_2 \leq 20\}$$

La valeur initiale du stock x_1 fixée à 0 vient du fait qu'il n'y a pas de pénalité lors de l'absence des retours qui peut soit être nul ou positif tandis que la valeur initiale du stock x_2 fixée à -10 vient du fait qu'il arrive des pénuries des produits finis qui pénalisent l'unité de recyclage, cependant cela n'excède pas le seuil de dix unités manquantes. Les données utilisées pour la simulation sont celles collectées dans la littérature et présentées au tableau 2.1 ci-dessous. Ces valeurs respectent bien la condition de faisabilité énoncée par l'inéquation 2.5.

Tableau 2.1 Données de la simulation

Variables	c_m	c_d	c_l	c_{2p}	c_{2m}	c^a	c_{ecart}
Valeur	14	1.5	1.8	3.5	55	13	55
Unités	\$/produit/UT	\$/produit/UT	\$/produit/UT	\$/produit/UT	\$/produit/UT	\$/panne/UT	\$/produit/UT

Variables	C_{env}	ρ	r	d	u_{max}	q_{12}	q_{21}
Valeur	1	0.1	0.55	0.4	0.5	0.01	0.1
Unités	\$/produit/UT	/UT	produit/UT	produit/UT	produit/UT	/UT	/UT

2.6 Analyse des résultats graphiques

Après résolution numérique à l'aide du logiciel Matlab, nous avons obtenu les résultats suivants :

❖ Taux de production au mode marche

La politique optimale de production au mode marche (mode 1) est illustrée à la figure 2.3. Dans cette figure, x_1 représente le stock des matières premières tandis que x_2 représente le stock des produits finis.

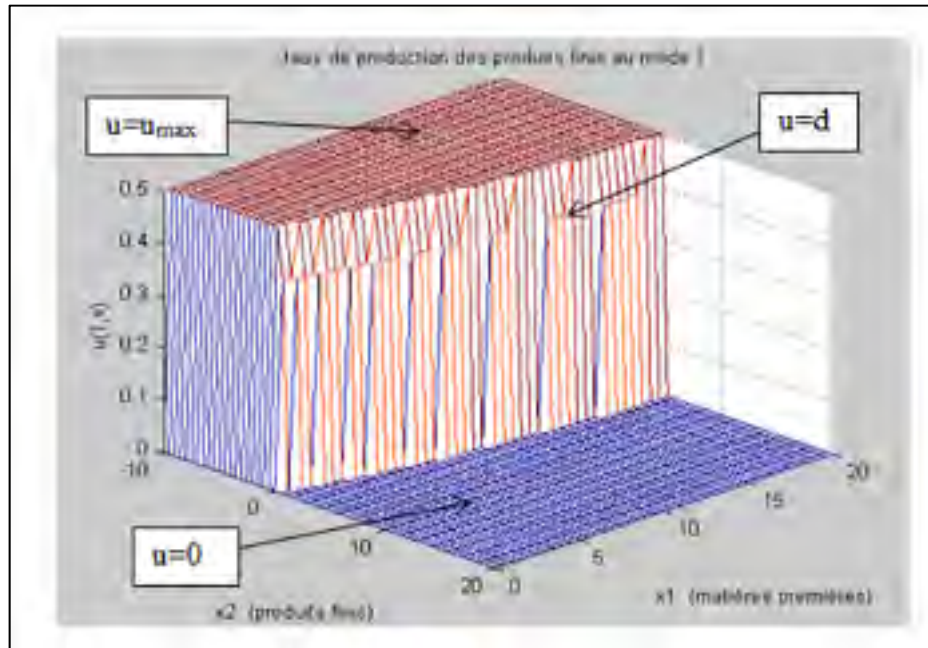


Figure 2.3 Taux de production des produits finis au mode 1

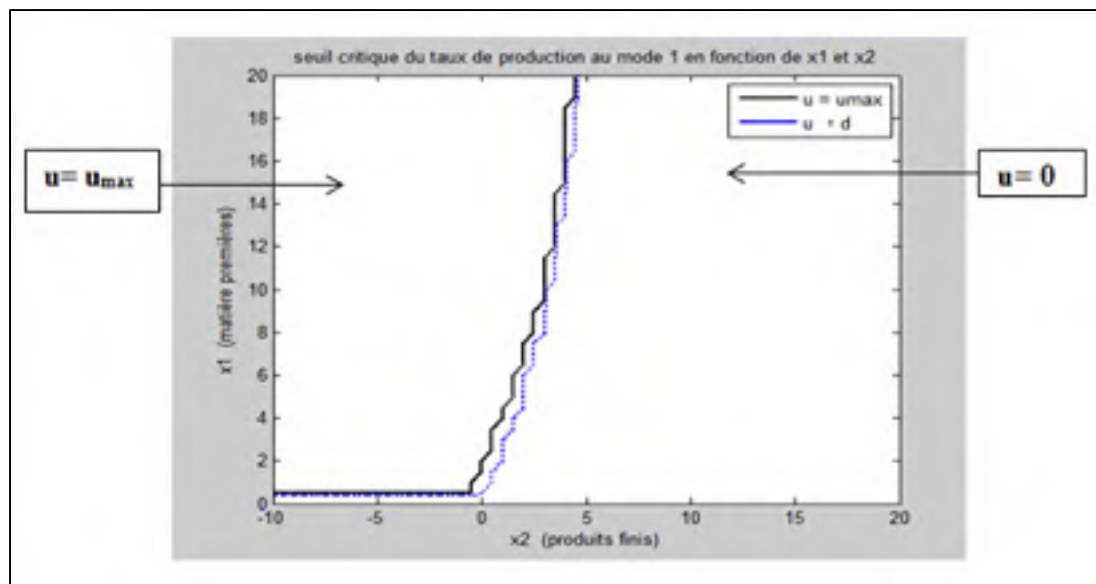


Figure 2.4 Variation du seuil critique au mode 1 en fonction des stocks x_1 et x_2

L'allure en escalier du taux de production nous montre que la politique optimale de production est une politique de type seuil critique (Hedging Point Policy HPP). Cette politique stipule qu'il est nécessaire de produire à un taux maximal presque durant la période où le niveau de stock des produits est négatif (rupture de stock) jusqu'à un seuil critique z_2^* qui dépend aussi du niveau d'inventaire des matières premières. C'est-à-dire qu'au mode marche ($\alpha = 1$), pour une valeur fixe du niveau d'inventaire des produits finis x_2 , le taux de production ne dépend que du stock des matières premières ($u(x_1, x_2, \alpha) = u(x_1)$).

À titre d'exemple $u(7, 2, 1) = u_{\max}$ est le taux de production optimal des produits finis au mode marche lorsque le niveau d'inventaire du stock de retour est égal à 7 ($x_1 = 7$) et le niveau d'inventaire des produits finis est égal à 2 ($x_2 = 2$);

$u(6, 2, 1) = 0$ est le taux de production optimal des produits finis au mode marche lorsque le niveau d'inventaire des retours est égal à 6 ($x_1 = 6$) et le niveau d'inventaire des produits finis est égal à 2 ($x_2 = 2$).

Ainsi, pour un même niveau d'inventaire des produits finis ($x_2 = 2$), la politique de production diffère en fonction du niveau du stock des retours, ce qui est tout à fait réaliste.

Pour un niveau des matières premières donné, lorsque le niveau d'inventaire des produits finis est égal au seuil critique z_2^* , la production au taux de la demande d est le taux optimal.

Nous constatons également qu'au-delà du seuil critique positif z_2^* , la machine arrête de produire ($u = 0$), car le stock optimal devant suppléer à la demande et minimiser les coûts (coût de stockage, pénurie, production...etc.) est atteint.

La politique optimale de production est ainsi résumée par le système d'équations (2.19):

$$u(x_1, x_2, 1) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } x_2 < \phi(x_1) \\ d & \text{si } x_2 = \phi(x_1) \\ 0 & \text{si } x_2 > \phi(x_1) \end{cases} \quad (2.19)$$

Où $\phi(x_1)$ est une fonction qui donne la valeur du seuil critique z_2^* en fonction du niveau d'inventaire des matières premières x_1 et dont l'allure est celle de la courbe en pointillé illustrée à la figure 2.4. La politique optimale de production se résume ainsi qu'il suit :

- Produire au taux maximum lorsque le niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil critique $\phi(x_1)$.
- Produire à la demande lorsque le niveau d'inventaire est égal au seuil critique $\phi(x_1)$.
- Ne pas produire du tout lorsque le niveau d'inventaire est strictement supérieur au seuil critique $\phi(x_1)$.

Ce résultat est une extension des résultats de Akella et Kumar (1986). En effet, contrairement d'obtenir un seuil critique constant pour toute la production, comme c'est le cas dans leur travaux, nous avons obtenu une valeur du seuil critique variable. Le résultat obtenu est réaliste puisque, la production est maintenue au taux maximum ($u=u_{\max}$) jusqu'à formation d'un stock de sécurité correspondant au seuil critique. Dès que ce stock de sécurité est atteint, il devient optimal de produire à la demande ($u=d$) dans le cas contraire, la production est arrêtée ($u=0$).

❖ Taux d'élimination des retours au mode 1

La courbe du taux d'élimination des matières premières au mode 1 ainsi que sa trace en fonction des stocks des matières premières et des produits finis sont illustrées par les figures 2.5 et 2.6.

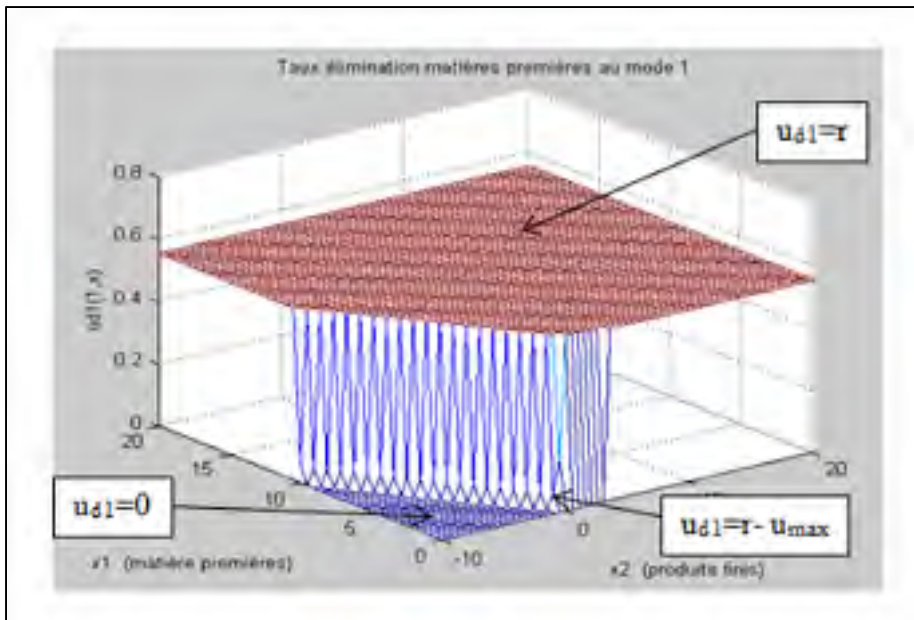


Figure 2.5 Taux d'élimination des retours au mode 1

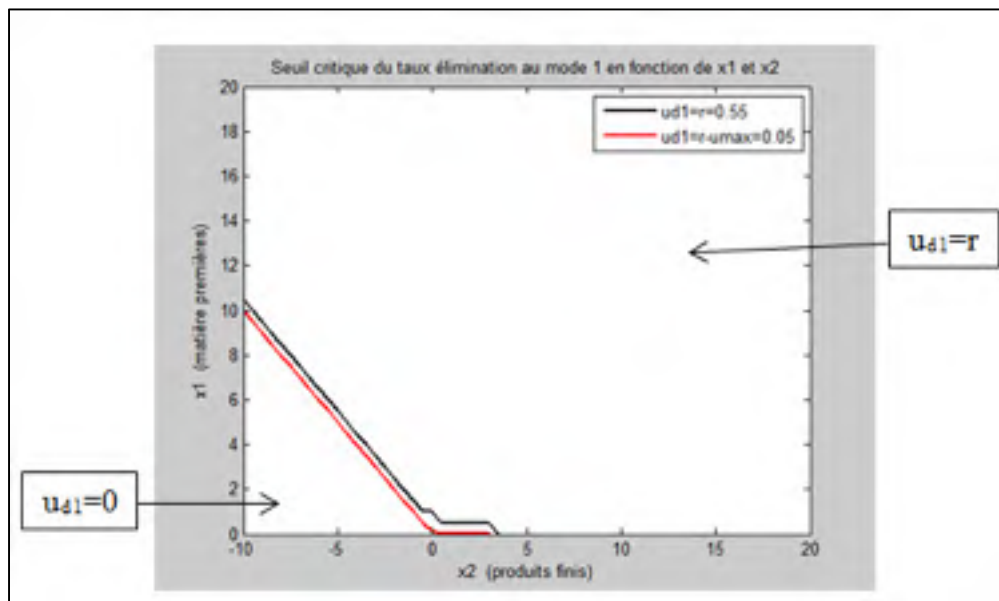


Figure 2.6 Seuil critique du taux d'élimination des retours au mode 1

Nous constatons également que le taux d'élimination au mode 1 a une allure en escalier comme c'est le cas pour le taux de production. La politique d'élimination donnée par l'équation (2.20) se résume de la façon suivante :

- Éliminer la totalité des produits en fin de vie retournés lorsque leur niveau d'inventaire est strictement supérieur au seuil critique $z_{11}^* = \chi(x_2)$, où $\chi(x_2)$ est fonction du niveau d'inventaire des produits finis.
- Éliminer les produits retournés au taux $r - u_{\max}$ lorsque le niveau d'inventaire des produits retournés est égal au seuil critique.
- Ne rien éliminer tant que le niveau d'inventaire des matières premières est strictement inférieur au seuil critique.

$$u_{d_1}(x_1, x_2, 1) = \begin{cases} r & \text{si } x_1 > \chi(x_2) \\ r - u_{\max} & \text{si } x_1 = \chi(x_2) \\ 0 & \text{si } x_1 < \chi(x_2) \end{cases} \quad (2.20)$$

Cette politique est réaliste, car, elle stipule de bâtir le stock de matière première nécessaire à la production lorsqu'il y a pénurie de produits finis. Puis, lorsqu'on sort de la pénurie (augmentation du niveau de stock des produits finis), le stock optimal des matières premières nécessaire à détenir pour la production diminue proportionnellement jusqu'à s'annuler lorsque le stock de sécurité des produits finis est atteint, car le stock des produits finis peut suppléer à la demande.

❖ Taux d'élimination des retours au mode 2

La politique optimale d'élimination des matières premières au mode panne et sa trace sont illustrées par les figures 2.7 et 2.8.

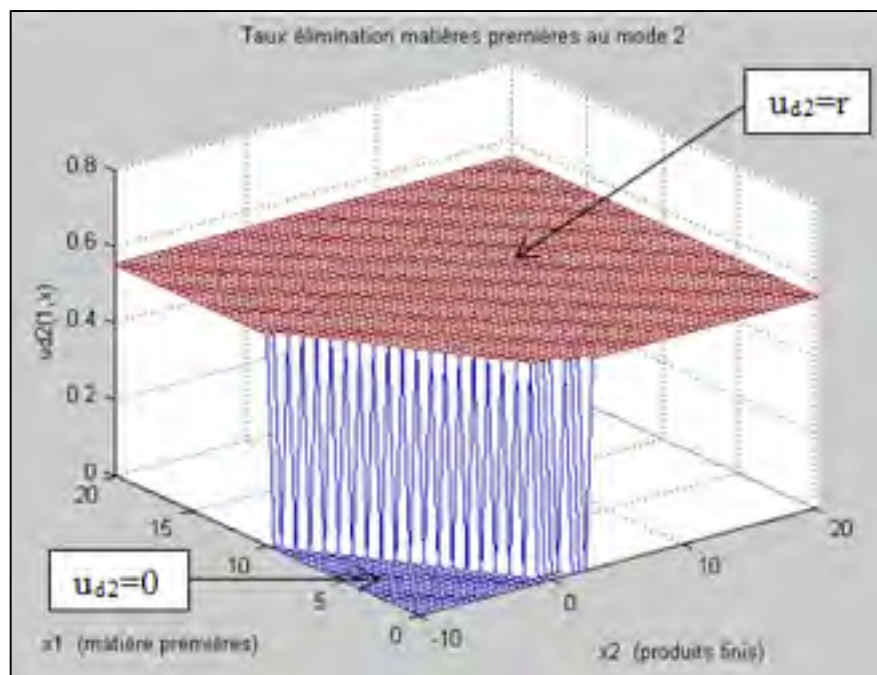


Figure 2.7 Taux d'élimination des retours au mode 2

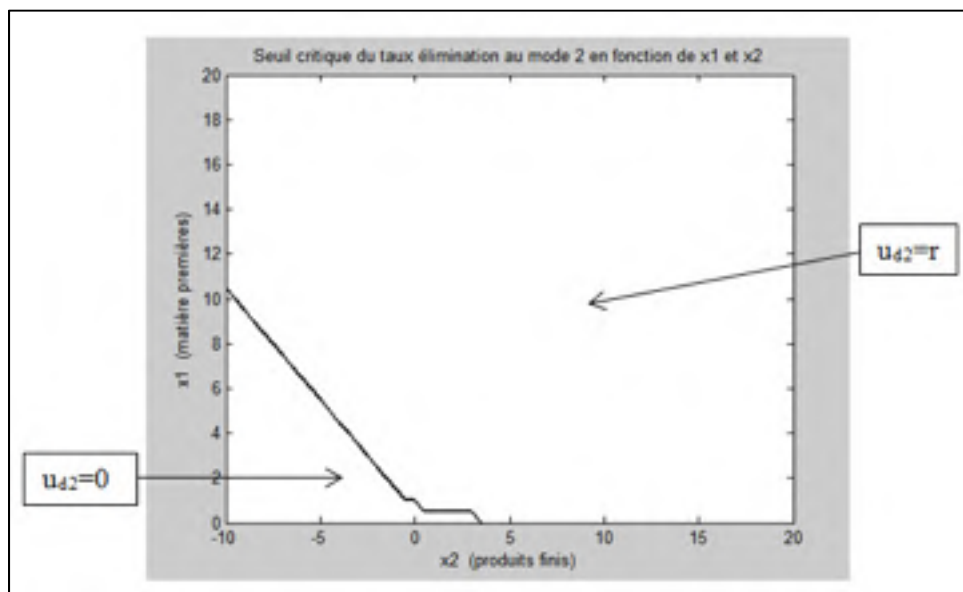


Figure 2.8 Seuil critique du taux d'élimination des retours au mode 2

Comme dans les deux cas précédents, la politique optimale d'élimination des matières premières au mode panne est une politique de type seuil critique (HPP). Explicitée par

l'équation (2.21), elle se résume de la manière suivante :

- Éliminer les produits en fin de vie retournés au taux maximal ($u_{d2} = r$) lorsque leur niveau du stock est supérieur ou égal au seuil $z_{12}^* = \theta(x_2)$, où $\theta(x_2)$ est fonction du niveau d'inventaire des produits finis.
- Stocker toutes les retours collectés ($u_{d2} = 0$) tant que leur niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil.

$$u_{d_2}(x_1, x_2, 2) = \begin{cases} r & \text{si } x_1 \geq \theta(x_2) \\ 0 & \text{si } x_1 < \theta(x_2) \end{cases} \quad (2.21)$$

❖ Politique conjointe de l'élimination et de la production au mode 1

Ayant obtenu les politiques d'élimination et de production simultanément au mode 1, nous nous posons de façon légitime la question de savoir d'où proviendrait la matière première nécessaire à la production au mode 1 puisque la politique obtenue nous stipule aussi d'éliminer de la matière première à ce même mode ? C'est pour répondre à cette question nous avons étudié le domaine conjoint aux deux résultats (taux d'élimination et de production) illustré par la figure 2.9 (zone hachurée) qui nous montre bien l'existence d'un domaine conjoint à la production au taux maximal ($u=u_{\max}$) et à l'élimination des retours au taux nul ($u_d=0$). Cette intersection correspond au domaine de faisabilité, donc au domaine où la machine opérera tout en étant suffisamment alimenté.

Dans le chapitre 4, nous utiliserons la combinaison des plans d'expérience, la simulation et l'analyse de la variance afin de généraliser ce résultat pour les processus Markoviens non homogènes.

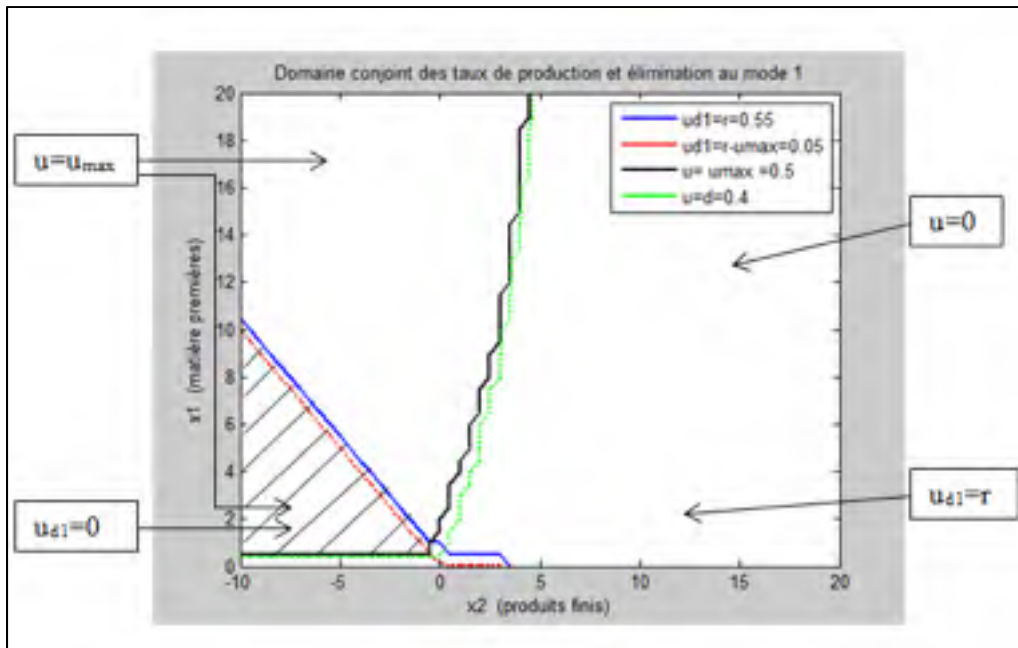


Figure 2.9 Domaine conjoint aux taux d'élimination et de production

2.7 Validation des résultats et analyse de sensibilité

Afin de valider notre modèle de simulation ainsi que les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, nous allons effectuer une analyse de sensibilité. Cette analyse consiste à observer l'effet de la variation du coût de stockage des matières premières, du coût de pénurie des produits finis, du coût de stockage des produits finis et du coût d'élimination des matières premières sur la politique optimale de production, plus précisément sur la variation des seuils critiques. Nous nous attarderons uniquement sur le taux de production et d'élimination des matières premières au mode marche de la machine. Les observations effectuées sont présentées par les figures 2.10 à 2.17.

2.7.1 Variation du coût de stockage c_1 des retours

Les variations des seuils critiques du taux de production ainsi que du taux d'élimination au mode marche en fonction des différentes valeurs de c_1 (coût de stockage des matières premières) sont illustrées par les figures 2.10 et 2.11.

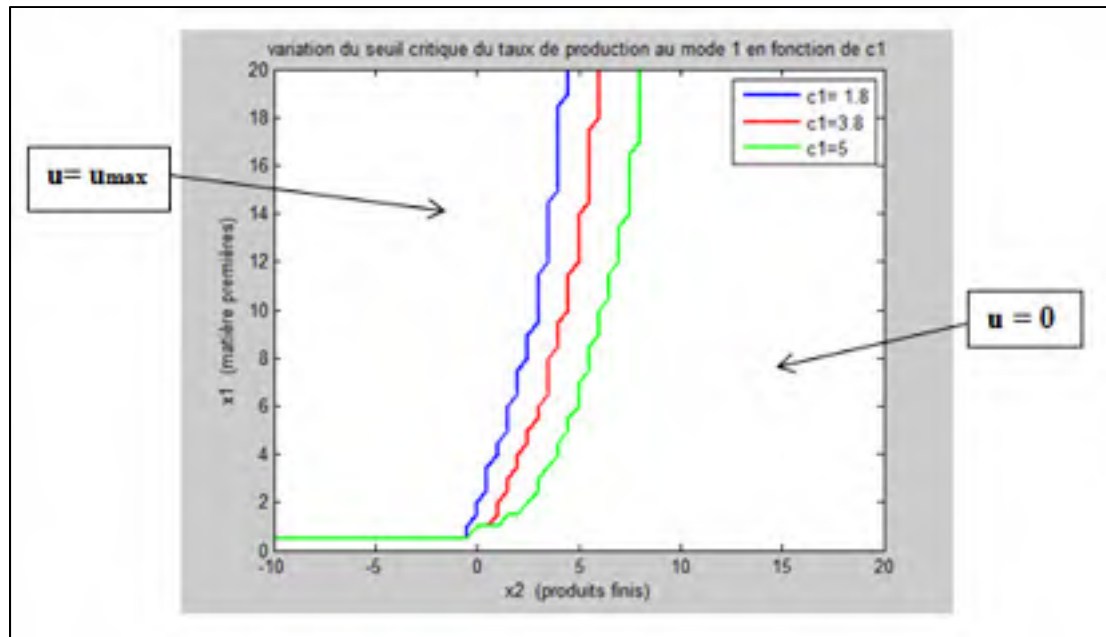


Figure 2.10 Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_1

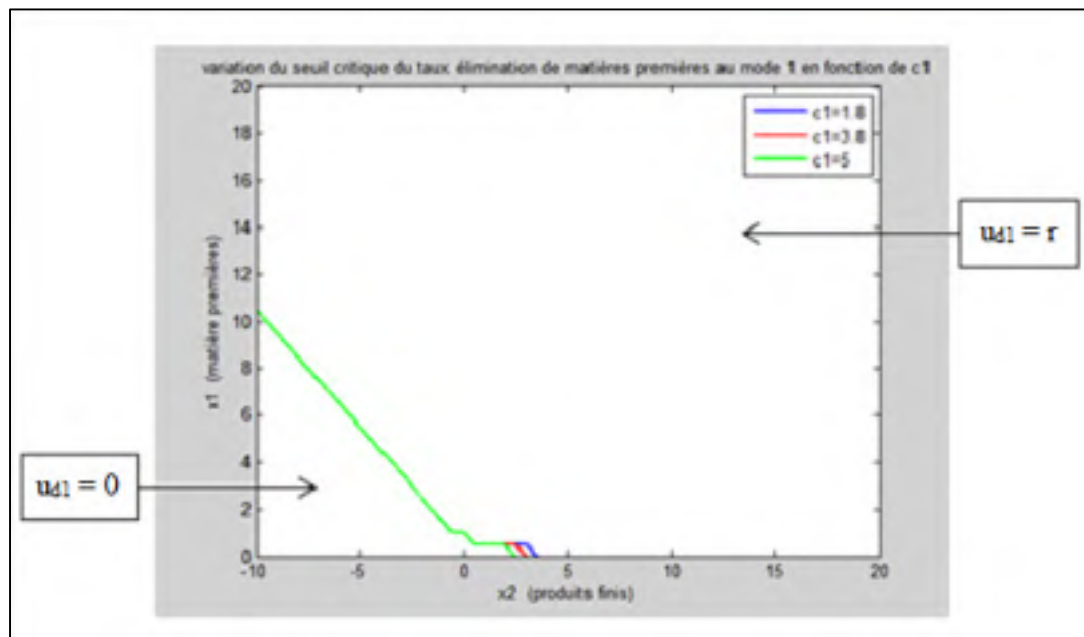


Figure 2.11 Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_1

En observant les courbes de la figure 2.10, nous constatons que lorsque le coût c_1 de stockage des matières premières augmente, le seuil critique des produits finis z_2^* augmente également. Cependant, le seuil critique z_{11}^* d'élimination des matières premières à la figure 2.11 en mode marche ne change pas pour différentes valeurs de c_1 et est presque identique au cas où $c_1=1.8$. Ces observations se justifient bien par le fait que, lorsque le coût de mise en inventaire des matières premières augmente, l'entreprise se doit d'augmenter le niveau de stock des produits finis (traduit par l'élargissement de la zone de production au taux maximal) afin de rentabiliser ses investissements. Ceci montre bien que le modèle est réaliste.

2.7.2 Variation du coût c_{2m} de pénurie des produits finis

L'analyse des variations du seuil critique du taux de production et du taux d'élimination au mode marche en fonction des différentes valeurs de c_{2m} (coût de pénurie des produits finis) sont illustrées par les figures 2.12 et 2.13 ci-dessous.

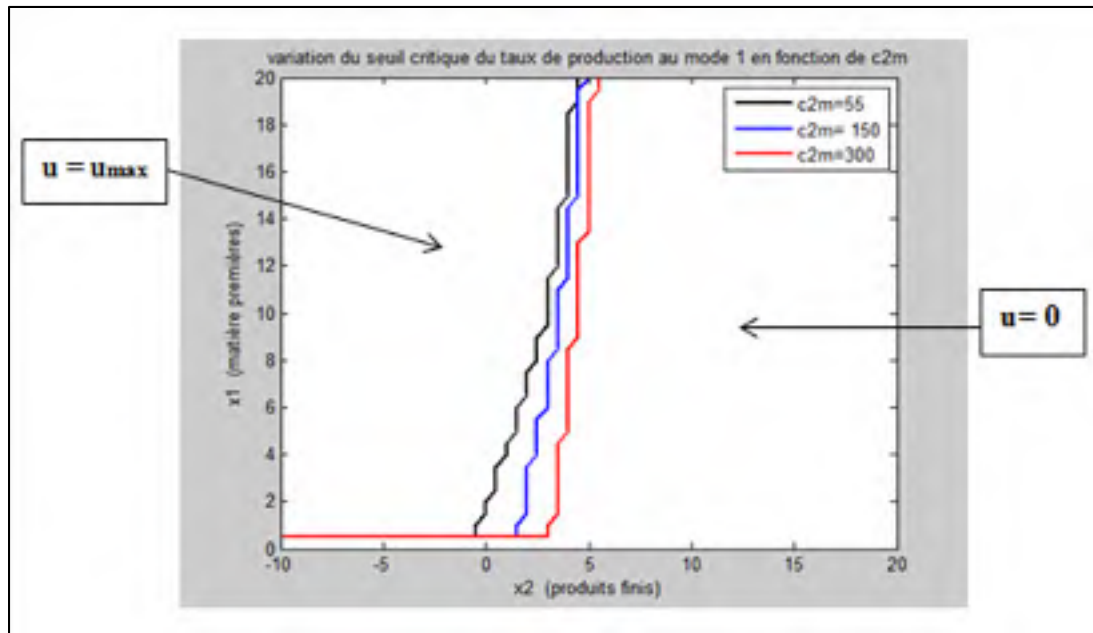


Figure 2.12 Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_{2m}

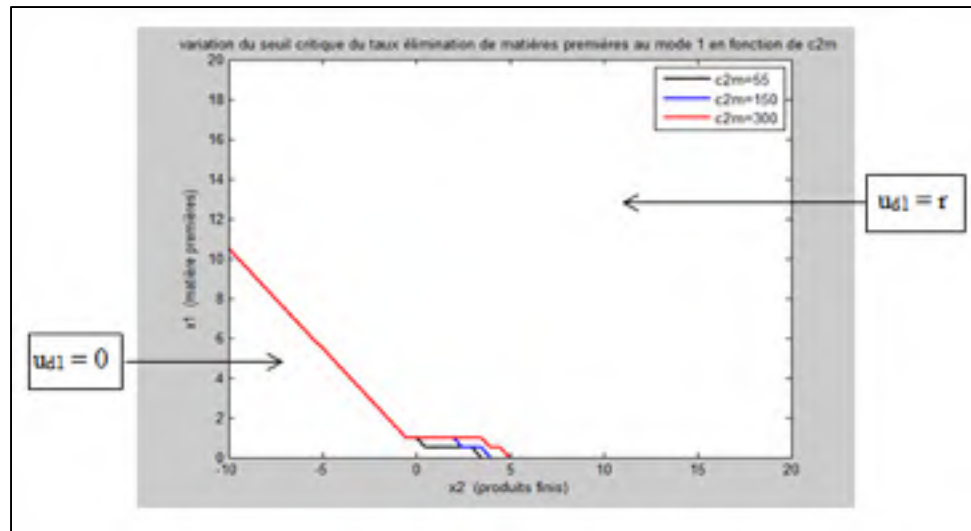


Figure 2.13 Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_{2m}

En augmentant les valeurs de c_{2m} (coût de pénurie des produits finis), nous constatons une augmentation des valeurs prises par le seuil critique z_2^* du taux de production tel que le montre la figure 2.12. Cette augmentation du seuil critique z_2^* des produits finis dû à l'augmentation du coût de pénurie c_{2m} s'explique par le fait qu'il est nécessaire de s'éloigner au maximum de la pénurie qui pénalise fortement l'entreprise; d'où l'élargissement de la zone à taux de production maximal. Nous observons également une légère modification de la politique d'élimination à partir des valeurs positives du stock x_2 , avant cela, toutes les valeurs sont confondues illustrée à la figure 2.13. Cela est justifié par le fait que le coût de pénurie ne s'applique qu'en cas d'absence des produits finis, mais ne s'applique pas en cas d'absence des retours dans l'unité de recyclage. Ces observations confirment une fois de plus, la validité de notre modèle.

2.7.3 Variation du coût c_{2p} de stockage des produits finis

Les figures 2.14 et 2.15 illustrent l'effet de l'augmentation du coût de stockage des produits finis (c_{2p}) sur les variations du seuil critique du taux de production ainsi que et les variations du seuil critique du taux d'élimination au mode marche.

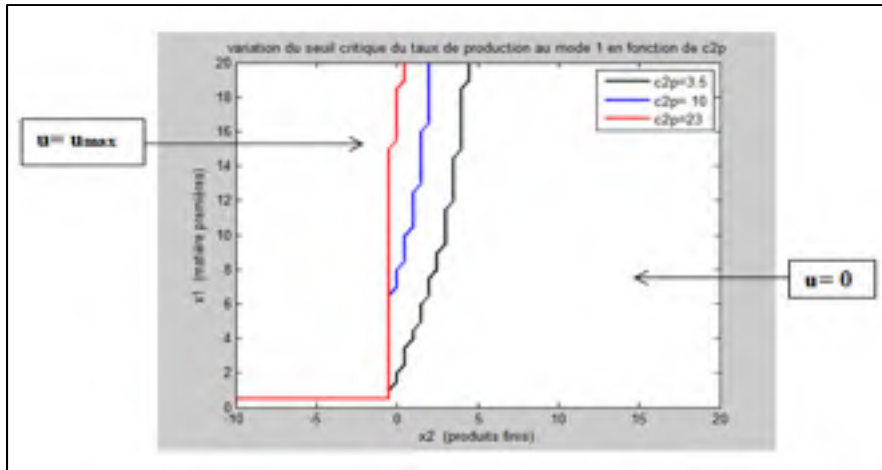


Figure 2.14 Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_{2p}

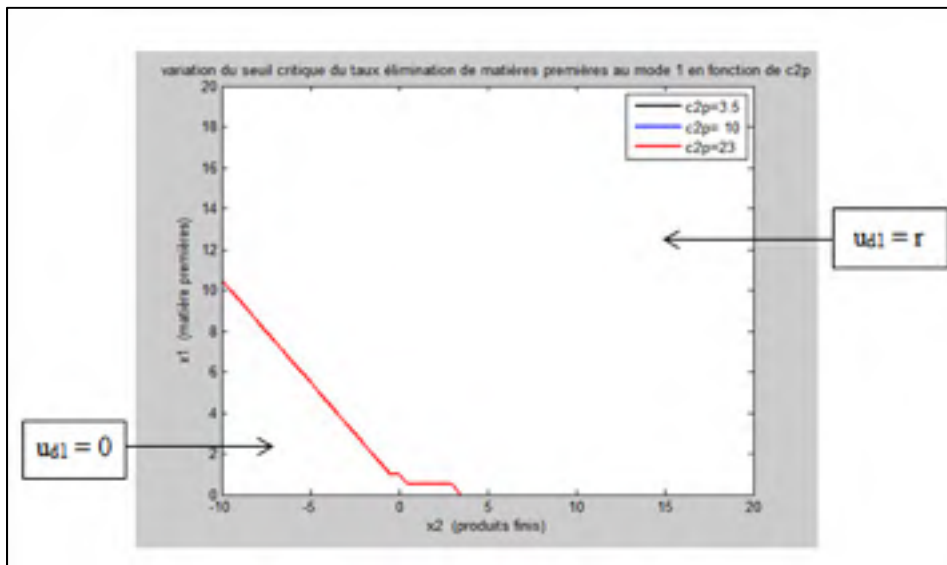


Figure 2.15 Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_{2p}

En observant les courbes de la figure 2.14, nous constatons que lorsque le coût c_{2p} augmente, les valeurs du seuil critique z_2^* du taux de production diminuent. Toutefois, l'augmentation du coût c_{2p} n'influence pas les valeurs du seuil critique du taux d'élimination des matières premières au mode marche tel que nous le montre la figure 2.15, car toutes les courbes y sont confondues, cela est dû au fait que le coût c_{2p} ne concerne que les produits

finis mais, pas les matières premières (retours). Cette diminution des valeurs du seuil z_2^* se justifie par le fait que, lorsque le coût de mise en inventaire des produits finis c_{2p} augmente, il devient économique de diminuer le niveau du stock de sécurité de ces produits. Cette analyse de sensibilité, ajoutée aux deux précédentes vient confirmer la validité du modèle.

2.7.4 Variation du coût c_d d'élimination des produits finis

L'influence de l'augmentation de c_d (coût d'élimination des produits retournés) sur les valeurs du seuil critique du taux de production et les valeurs du seuil critique du taux d'élimination au mode marche sont présentées par les figures 2.16 et 2.17 ci-dessous.

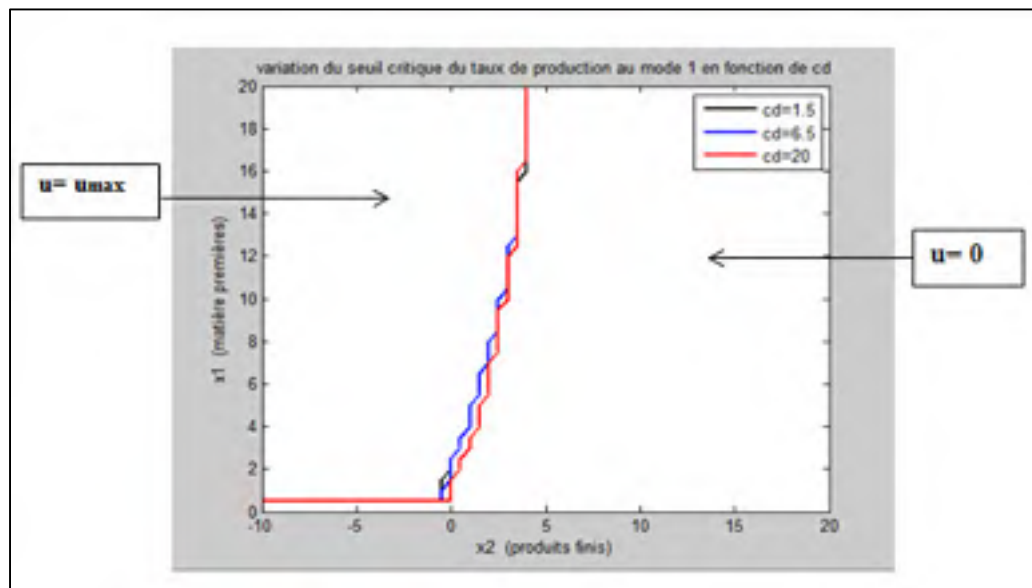


Figure 2.16 Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_d

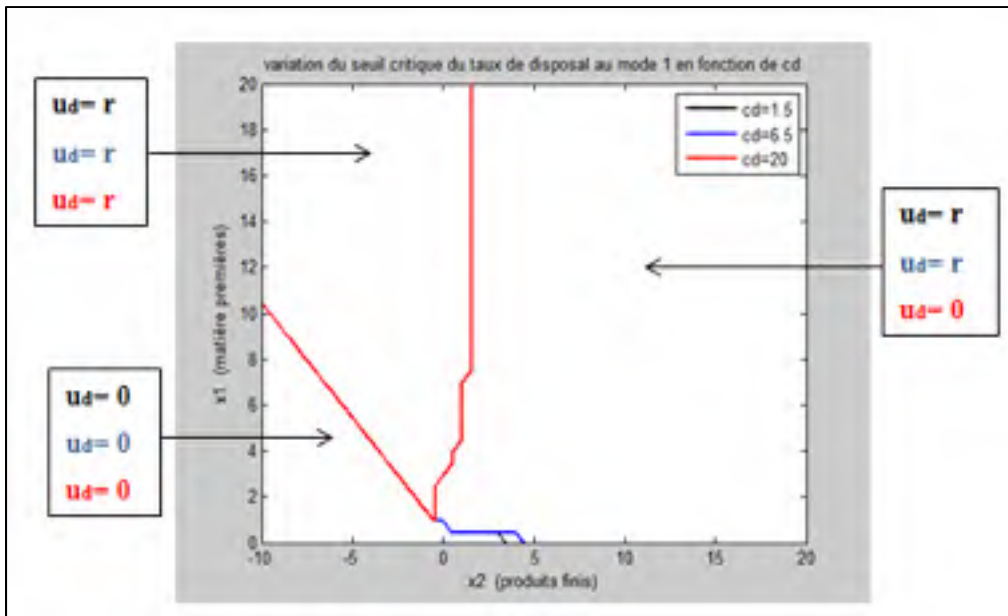


Figure 2.17 Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_d

En augmentant le coût unitaire d'élimination des produits retournés c_d , nous constatons que les valeurs du seuil critique du taux de production z_2^* ne changent presque pas, car toutes les courbes de la figure 2.16 sont confondues. Nous constatons en outre à la figure 2.17 que pour des grandes valeurs du coût d'élimination ($c_d=20$, courbe en rouge), la politique optimale de commande préconise une réduction de la plage d'élimination au taux maximal ($u_d=r$), cependant un élargissement de la plage de stockage de la matière première ($u_d=0$). Ces résultats sont réalistes compte tenu du coût élevé d'élimination de cette matière première, cela vient une fois de plus confirmer la validité de notre modèle.

2.8 Conclusion.

Nous avons pu dans ce chapitre, modéliser à l'aide des chaînes de Markov homogènes à temps continu et à état discret, une unité de recyclage des produits en fin de vie dans lequel la machine de production ne pouvait prendre que deux états : marche et panne. Le critère de performance considéré était le coût global de production intégrant les coûts de stockage, les coûts de pénurie, les coûts de production, les coûts de maintenance, les coûts d'élimination des retours et les coûts liés aux contraintes environnementales. Le coût optimal était représenté par la fonction valeur qui est la solution de l'équation de type HJB.

Nous avons résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab, les équations d'HJB en utilisant l'approche développée par Kushner et Dupuis. Nous avons ainsi obtenu une approximation des valeurs optimales de la fonction valeur aux deux modes de fonctionnement de la machine ainsi que la politique de commande optimale recherchée à savoir, le taux de production des produits finis au mode marche de la machine et les taux d'éliminations des produits retournés aux modes marche et panne. Toutes les politiques obtenues étaient des politiques de type seuils critiques (HPP). Par une analyse de sensibilité, nous avons montré l'influence de la variation de certains coûts sur les différents seuils critiques, ceci afin de valider nos résultats.

Étant donné que le retour des produits est variable dans la réalité, nous nous pencherons dans le prochain chapitre sur la modélisation et l'optimisation d'une unité de recyclage avec taux de retour variable. Nous considérerons à cet effet, le cas où le taux de retour prend plusieurs valeurs avec un taux de transition entre ces différentes valeurs, mais avec un taux de demande qui demeure constant.

CHAPITRE 3

COMMANDE OPTIMALE D'UNE UNITÉ DE RECYCLAGE AVEC RETOUR DE MATIÈRE ALÉATOIRE ET DEMANDE CLIENT À TAUX CONSTANT

3.1 Introduction

Le présent chapitre traite le cas de la commande optimale d'une unité de recyclage constituée d'une seule machine sujette à des pannes et réparations aléatoires dont la demande client est à taux constant tandis que le retour des produits en fin de vie est aléatoire. Ce taux de retour peut prendre deux valeurs différentes tous deux strictement supérieurs au taux de la demande client. Nous allons résoudre le problème en quatre étapes principales à savoir :

- La modélisation de l'unité de recyclage moyennant des hypothèses afin de déterminer les équations d'optimum de type Hamilton Jacobi Bellman (HJB).
- La résolution numérique des équations d'Hamilton Jacobi Bellman et la détermination des variables de décision optimales.
- La validation du modèle de simulation par une analyse de sensibilité.
- Une étude du cas où l'un des taux de retour est strictement inférieur au taux de la demande tandis que l'autre taux de retour est strictement supérieur au taux de la demande.

3.2 Structure de l'unité de recyclage

Nous considérons dans cette partie, une unité de recyclage constituée d'une seule machine sujette à des pannes et réparations aléatoires. L'état de la machine est décrite par le processus stochastique α détaillé au paragraphe 3.3.2. Les produits usagés sous forme de balles arrivent à l'unité de recyclage avec un taux variable. Les différentes valeurs prises par le taux de retour sont r_1 et r_2 . Ces produits en fin de vie sont stockés dans l'entrepôt de matières

premières, de manière à constituer le stock x_1 . Il arrive que les coûts d'entretien de ces matières collectées deviennent élevés ou bien que la quantité de matière collectée atteigne la capacité maximale de stockage de l'unité de recyclage x_{1max} ; dans ce cas, les retours collectés sont alors éliminés de l'entrepôt et acheminés à une sous-traitance à un taux variable noté $u_{d\alpha}$. Cette opération a lieu aussi bien pendant que la machine est en marche ou en panne. La machine, sujette à des pannes et réparations aléatoires est alimentée en matière première par le stock x_1 , elle en fabrique les produits, ce qui permet de constituer le stock x_2 des produits finis. Celle-ci produit avec un taux de production variable u_a afin de suppléer à la demande client à taux constant et connu d . La description du modèle considéré est illustrée à la figure 3.1.

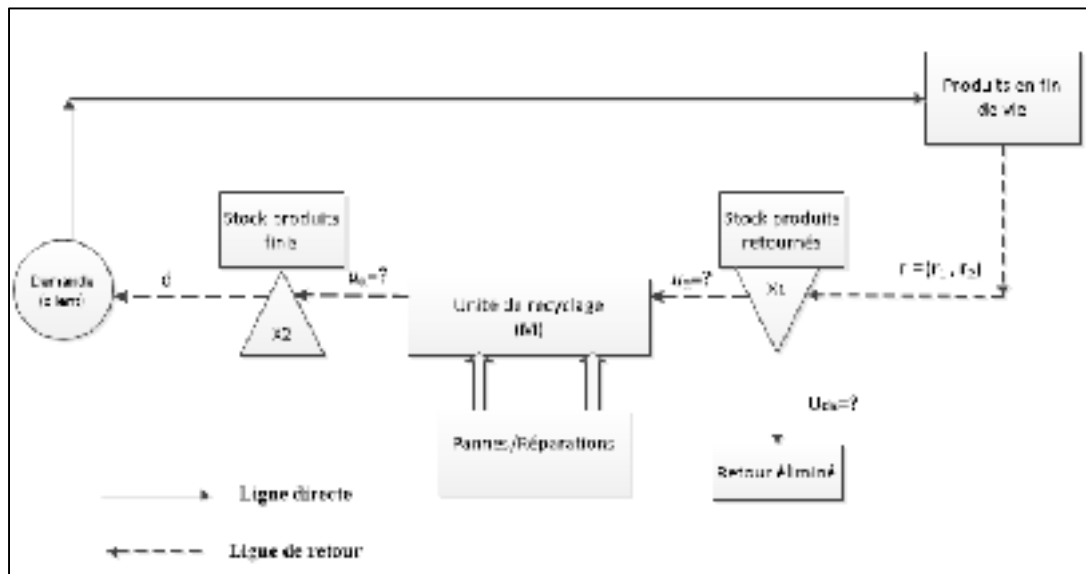


Figure 3.1 Modèle de l'unité de recyclage avec taux de retour variable

3.3 Hypothèses et formulation générale du problème d'optimisation

3.3.1 Hypothèses de modélisation

Nous considérons dans cette partie, les mêmes hypothèses que celles adoptées à la section 2.3 à la seule différence que le retour des produits collecté est aléatoire telle que:

- Les différentes valeurs possibles du taux de retour des produits en fin de vie sont connues ainsi que le taux de transition entre ces différentes valeurs.

En plus des symboles énumérés à la section liste des symboles et unités de mesure au début de ce mémoire, nous définissons les symboles suivants:

$r_1(.)$: Première valeur possible du taux de retour des produits usagés constant et connu.

$r_2(.)$: Deuxième valeur possible du taux de retour des produits usagés constant et connu.

$\alpha_1(t)$: Processus stochastique décrivant la dynamique de la machine.

$\alpha_2(t)$: Processus stochastique décrivant la variation du retour.

$\alpha(t)$: Processus stochastique décrivant la dynamique du système au temps t .

3.3.2 Diagramme de transition

Soit $\alpha_1(t) = \{0, 1\}$ le processus stochastique décrivant la disponibilité de la machine à un instant quelconque, prenant la valeur 0 lorsque la machine est indisponible (en panne) et la valeur 1 lorsque la machine est disponible (bon état de marche).

Soit $\alpha_2(t) = \{1, 2\}$ le processus stochastique décrivant la variation du taux de retour des matières retournées à un instant quelconque, prenant la valeur 1 ou 2 selon que le taux de retour vaut r_1 ou r_2 .

Soit $\alpha(t)$ le processus stochastique définissant l'état du système à un instant t quelconque et à valeurs dans $B = \{1, 2, 3, 4\}$ selon que la machine est en marche ou en panne et alimenté au taux r_1 ou r_2 à un instant t donné. Les différents modes décrivant la dynamique du système sont présentés par le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Dynamique du système étudié

$\alpha_1(t)$	1	1	0	0
$\alpha_2(t)$	1	2	1	2
$\alpha(t)$	1	2	3	4

Ainsi, le système manufacturier peut être vu comme une chaîne de Markov à 4 états. Les différents états du système sont définis de la manière suivante :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 : \text{La machine est en marche et alimentée au taux } r_1. \\ 2 : \text{La machine est en marche et alimentée au taux } r_2. \\ 3 : \text{La machine est en panne et alimentée au taux } r_1. \\ 4 : \text{La machine est en panne et alimentée au taux } r_2. \end{cases}$$

Les taux de transition des différents états du système sont obtenus sachant que :

- ✓ Indépendamment du taux d'alimentation du système, le taux de transition du mode marche au mode panne est τ tandis que le taux de transition du mode panne au mode marche est μ .
- ✓ Indépendamment du mode de fonctionnement de la machine, le taux de transition du niveau d'alimentation r_1 au niveau r_2 est θ tandis que le taux de transition du niveau d'alimentation r_2 au niveau r_1 est γ .

Le graphe de transition de changement d'état du système est donné par la figure 3.2.

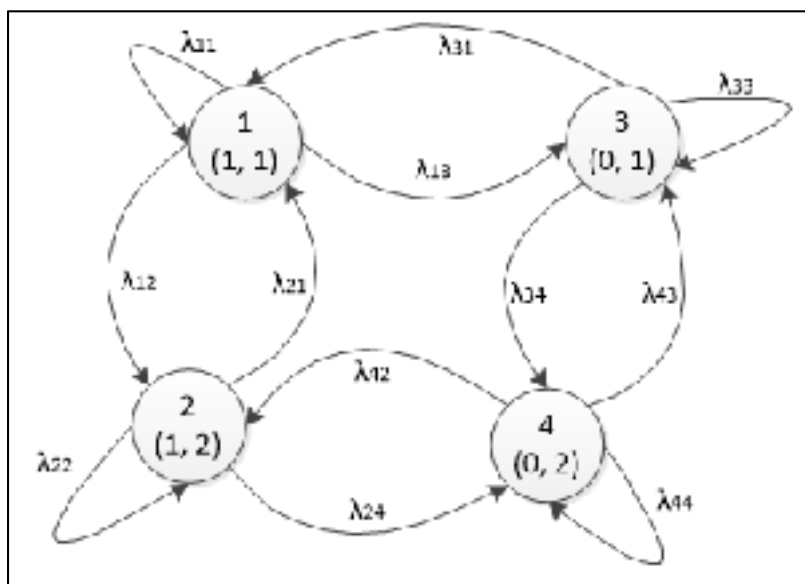


Figure 3.2 Diagramme de transition du système

3.3.3 Matrice des taux de transition

L'état du système est modélisé par une chaîne de Markov à temps continu à états discrets avec une matrice des taux de transition $Q = (\lambda_{ij})$ de dimension 4×4 . Cependant, la relation entre le taux de transition λ_{ij} et la probabilité de transition du mode i au mode j sont données par l'équation 3.1 :

$$\Pr[\alpha(t + \delta t) = j / \alpha(t) = i] = \begin{cases} \lambda_{ij} \delta t + o(\delta t) & \text{si } i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii} \delta t + o(\delta t) & \text{si } i = j \end{cases} \quad i, j \in B = \{1, 2, 3, 4\} \quad (3.1)$$

$$\text{Avec } \lambda_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \lambda_{ii} = -\sum_{i \neq j} \lambda_{ij} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{t} = 0$$

La matrice des taux de transitions est définie de la manière suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ 0 & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\theta + \tau) & \theta & \tau & 0 \\ \gamma & -(\tau + \gamma) & 0 & \tau \\ \mu & 0 & -(\mu + \theta) & \theta \\ 0 & \mu & \gamma & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix}$$

3.3.4 Domaine de commande admissible

Soit u_α le taux de production du produit par la machine à l'un des modes marche α ($\alpha=1, 2$) et u_{d_α} le taux d'élimination des matières premières à un mode quelconque α ($\alpha=1, 2, 3, 4$); le domaine de commande admissible est défini à l'équation (3.2).

$$\Gamma(\alpha) = \{(u_\alpha, u_{d_\alpha}) \in R^2 / 0 \leq u_\alpha \leq u_{\max}, 0 \leq u_{d_\alpha} \leq r, \alpha = 1, 2, 3, 4\} \quad (3.2)$$

3.3.5 Probabilités limites et conditions de faisabilité

Soit $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ le vecteur des probabilités limites aux modes 1, 2, 3 et 4 du système.

Les probabilités limites π_i ($i=1, 2, 3, 4$) sont les solutions du système d'équations (3.3).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \pi_i \times \lambda_{ij} = 0 & \forall j = 1, 2, 3, 4 \\ \sum_{i=1}^4 \pi_i = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

π_1 représente la probabilité que la machine soit en marche alimentée au taux r_1 (mode 1).

π_2 représente la probabilité que la machine soit en marche alimentée au taux r_2 (mode 2).

π_3 représente la probabilité que la machine soit en panne alimentée au taux r_1 (mode 3).

π_4 représente la probabilité que la machine soit en panne alimentée au taux r_2 (mode 4).

La condition de faisabilité permet de garantir que le système (l'unité de production) réponde à la demande du produit fini pendant tout le temps de disponibilité de la machine. Sachant qu'au mode $\alpha = 1$ (1^{er} mode marche), le taux de retour r_1 est strictement supérieur au taux de production maximal $u_{\max}$ de la machine, elle peut donc être suffisamment alimentée pour produire à ce taux maximal. Par contre, le taux de retour r_2 des matières premières au mode 2^e mode marche ($\alpha = 2$) est inférieur au taux de production maximal de la machine. Considérant tout cela, le système est faisable à condition que l'inéquation (3.4) soit vérifiée:

$$(\pi_1 \times u_{\max} + \pi_2 \times r_2) \geq d \quad (3.4)$$

3.3.6 Dynamique du stock

L'évolution des différents stocks est décrite par les équations (3.5). Ces équations tiennent compte du fait que, à un instant t quelconque, au mode de fonctionnement α donné du système, le niveau de stock de matières premières est augmenté par le taux de retour r_α tandis que ce même stock est diminué par le taux d'élimination u_{d_α} et par le taux de production u_α . De manière analogue, le niveau de stock des produits finis est alimenté par le taux de production u_α et diminué par le taux de demande d .

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha, & x_1(0) = x_{10} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u_\alpha - d, & x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (3.5)$$

Où x_{10} et x_{20} sont les stocks respectifs des retours et des produits finis à l'instant initial.

3.3.7 Coût instantané et coût actualisé

De manière analogue au chapitre précédent, le coût instantané est explicité par l'équation (3.6). Le lecteur peut se rapporter au paragraphe 2.10 de ce mémoire pour avoir les détails de chaque coût entrant dans cette équation.

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \alpha) = & c_1 x_1 + (c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^-) + c_d u_{d_\alpha} + c_m u_\alpha + c^\alpha (ind\{\alpha(t)=3\} + ind\{\alpha(t)=4\}) \\ & + c_{env} (x_{1max} - x_1) + c_{ecart} |(|x_2| - x_1)| ind\{x_2 < 0\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Où :

$$x_2^+ = \max(0, x_2), \quad x_2^- = \max(-x_2, 0).$$

Afin de tenir compte des fluctuations monétaires, le coût total actualisé est obtenu par l'équation (3.7), où ρ est le taux d'actualisation (Garceau, 1996) :

$$J(x_1, x_2, \alpha) = E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x_1, x_2, \alpha) dt \mid x(0) = x, \alpha(0) = \alpha \right\} \quad (3.7)$$

Dans cette équation, $E(B|A)$ est l'espérance mathématique de l'évènement B sachant A.

$x = (x_1, x_2)$ est le vecteur des niveaux de stock.

3.3.8 Fonction valeur et équation d'HJB

La fonction valeur a pour expression :

$$v(x_1, x_2, \alpha) = \inf_{(u_\alpha, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} J(x_1, x_2, \alpha), \quad \forall \alpha \in B \quad (3.8)$$

La fonction valeur satisfait l'équation d'HJB donnée par la relation (3.9). Ainsi, pour obtenir la fonction valeur, il nous suffit de résoudre l'équation d'HJB.

$$\rho v(x_1, x_2, \alpha) = \min_{(u, u_{d\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left[g(x_1, x_2, \alpha) + \sum_{j \in B} \lambda_{\alpha j} v(x_1, x_2, j) + (r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} + (u_\alpha - d) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} \right] \quad (3.9)$$

Nous avons montré au paragraphe 2.13 du chapitre 2 que la fonction valeur obtenue en résolvant les équations d'HJB est le coût optimal de production, car elle est obtenue lorsque la commande optimale est appliquée. Bien qu'il n'existe pas de méthode analytique pour résoudre cette équation, l'approche de résolution numérique développée par (Kushner et Dupuis, 1992) permet d'obtenir une bonne approximation de celle-ci à une marge d'erreur près δ fixée d'avance (dans cette section $\delta=10^{-1}$). Cette méthode numérique consiste à simplifier l'équation d'HJB en faisant une approximation de la fonction valeur $v(x_1, x_2, \alpha)$ par la fonction $v^h(x_1, x_2, \alpha)$ et l'approximation du gradient de la fonction valeur $\partial v(x_1, x_2, \alpha) / \partial x_i$ ($i = 1, 2$) respectivement par les expressions résumées par les équations (3.10) et (3.11) :

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{v^h(x_1 + h_1, x_2, \alpha) - v^h(x_1, x_2, \alpha)}{h_1}, & \text{si } r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha \geq 0 \\ \frac{v^h(x_1, x_2, \alpha) - v^h(x_1 - h_1, x_2, \alpha)}{h_1}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} = \begin{cases} \frac{v^h(x_1, x_2 + h_2, \alpha) - v^h(x_1, x_2, \alpha)}{h_2}, & \text{si } u_\alpha - d \geq 0 \\ \frac{v^h(x_1, x_2, \alpha) - v^h(x_1, x_2 - h_2, \alpha)}{h_2}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.11)$$

Où h_i ($i = 1, 2$) est le pas de discrétisation de la variable d'état x_i . Ainsi, on peut écrire que:

$$\begin{aligned} (r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_1} &= \frac{|r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1 + h_1, x_2, \alpha) \text{ind} \{r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha \geq 0\} \\ &\quad + \frac{|r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1 - h_1, x_2, \alpha) \text{ind} \{r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha < 0\} - \frac{|r_\alpha - u_{d\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1, x_2, \alpha) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Et :

$$\begin{aligned}
 (u_\alpha - d) \frac{\partial v(x_1, x_2, \alpha)}{\partial x_2} &= \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 + h_2, \alpha) \text{ind}\{u_\alpha - d \geq 0\} \\
 &+ \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 - h_2, \alpha) \text{ind}\{u_\alpha - d < 0\} - \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2, \alpha)
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Considérant les expressions données par les équations 3.12 et 3.13, l'équation (3.9) devient l'équation (3.14) :

$$\rho v^h(x_1, x_2, \alpha) = \min_{(u_\alpha, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} &g(x_1, x_2, \alpha) + \lambda_{\alpha\alpha} v^h(x_1, x_2, \alpha) + \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j} v^h(x_1, x_2, j) \\ &+ \frac{|r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1 + h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha \geq 0\} + \frac{|r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1 - h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha < 0\} \\ &+ \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 + h_2, \alpha) \text{ind}\{u_\alpha - d \geq 0\} + \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 - h_2, \alpha) \text{ind}\{u_\alpha - d < 0\} \\ &- \frac{|r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1, x_2, \alpha) - \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2, \alpha) \end{aligned} \right] \quad (3.14)$$

En regroupant les termes semblables, on obtient alors l'équation (3.15)

$$v^h(x_1, x_2, \alpha) = \min_{(u_\alpha, u_{d_\alpha}) \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} &(\rho + |\lambda_{\alpha\alpha}| + \frac{|r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha|}{h_1} + \frac{|u_\alpha - d|}{h_2})^{-1} \times \\ &\left\{ \begin{aligned} &c_1 x_1 + c_2 x_1^+ + c_3 x_2^- + c_4 u_{d_\alpha} + c_5 u_\alpha + c^\alpha (\text{ind}\{\xi(0) = 3\} + \text{ind}\{\xi(0) = 4\}) + c_{\alpha n} (x_{\text{inax}} - x_1) + c_{\alpha \alpha t} (|x_2| - x_1) \text{ind}\{x_2 < 0\} + \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j} v^h(x_1, x_2, j) \\ &+ \frac{|r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1 + h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha \geq 0\} + \frac{|r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha|}{h_1} v^h(x_1 - h_1, x_2, \alpha) \text{ind}\{r_\alpha - u_{d_\alpha} - u_\alpha < 0\} \\ &+ \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 + h_2, \alpha) \text{ind}\{u_\alpha - d \geq 0\} + \frac{|u_\alpha - d|}{h_2} v^{h_2}(x_1, x_2 - h_2, \alpha) \text{ind}\{u_\alpha - d < 0\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3.15)$$

Au mode 1, $\alpha = 1$.

$$\nu^h(x_1, x_2, 1) = \min_{(u_1, u_2) \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} & (\rho + |\lambda_{11}| + \frac{|r_1 - u_{d_1} - u_1|}{h_1} + \frac{|u_1 - d|}{h_2})^{-1} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_1} + c_m u_1 + c_{\text{cart}} (|x_2| - x_1) \text{ind}\{x_2 < 0\} \\ & + c_{\text{env}} (x_{1\max} - x_1) + \lambda_{12} \nu^h(x_1, x_2, 2) + \lambda_{13} \nu^h(x_1, x_2, 3) \\ & + \frac{|r_1 - u_{d_1} - u_1|}{h_1} \nu^h(x_1 + h_1, x_2, 1) \text{ind}\{r_1 - u_{d_1} - u_1 \geq 0\} + \frac{|r_1 - u_{d_1} - u_1|}{h_1} \nu^h(x_1 - h_1, x_2, 1) \text{ind}\{r_1 - u_{d_1} - u_1 < 0\} \\ & + \frac{|u_1 - d|}{h_2} \nu^h(x_1, x_2 + h_2, 1) \text{ind}\{u_1 - d \geq 0\} + \frac{|u_1 - d|}{h_2} \nu^h(x_1, x_2 - h_2, 1) \text{ind}\{u_1 - d < 0\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3.16)$$

Au mode 2, $\alpha = 2$.

$$\nu^h(x_1, x_2, 2) = \min_{(u_2, u_{d_2}) \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} & (\rho + |\lambda_{22}| + \frac{|r_2 - u_{d_2} - u_2|}{h_1} + \frac{|u_2 - d|}{h_2})^{-1} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_2} + c_m u_2 + c_{\text{cart}} (|x_2| - x_1) \text{ind}\{x_2 < 0\} \\ & + c_{\text{env}} (x_{1\max} - x_1) + \lambda_{21} \nu^h(x_1, x_2, 1) + \lambda_{24} \nu^h(x_1, x_2, 4) \\ & + \frac{|r_2 - u_{d_2} - u_2|}{h_1} \nu^h(x_1 + h_1, x_2, 2) \text{ind}\{r_2 - u_{d_2} - u_2 \geq 0\} + \frac{|r_2 - u_{d_2} - u_2|}{h_1} \nu^h(x_1 - h_1, x_2, 2) \text{ind}\{r_2 - u_{d_2} - u_2 < 0\} \\ & + \frac{|u_2 - d|}{h_2} \nu^h(x_1, x_2 + h_2, 2) \text{ind}\{u_2 - d \geq 0\} + \frac{|u_2 - d|}{h_2} \nu^h(x_1, x_2 - h_2, 2) \text{ind}\{u_2 - d < 0\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3.17)$$

Au mode 3, $\alpha = 3$.

$$\nu^h(x_1, x_2, 3) = \min_{u_{d_3} \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} & (\rho + |\lambda_{33}| + \frac{|r_1 - u_{d_3}|}{h_1} + \frac{|d|}{h_2})^{-1} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_3} + c^\alpha + c_{\text{cart}} (|x_2| - x_1) \text{ind}\{x_2 < 0\} \\ & + c_{\text{env}} (x_{1\max} - x_1) + \lambda_{34} \nu^h(x_1, x_2, 4) + \lambda_{31} \nu^h(x_1, x_2, 1) \\ & + \frac{|r_1 - u_{d_3}|}{h_1} \nu^h(x_1 + h_1, x_2, 3) \text{ind}\{r_1 - u_{d_3} \geq 0\} + \frac{|r_1 - u_{d_3}|}{h_1} \nu^h(x_1 - h_1, x_2, 3) \text{ind}\{r_1 - u_{d_3} < 0\} \\ & + \frac{|d|}{h_2} \nu^h(x_1, x_2 - h_2, 3) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3.18)$$

Au mode 4, $\alpha = 4$.

$$V^h(x_1, x_2, 4) = \min_{u_{d_4} \in \Gamma(\alpha)} \left[\begin{aligned} & (\rho + |\lambda_{44}| + \frac{|r_2 - u_{d_4}|}{h_1} + \frac{|d|}{h_2})^{-1} \times \\ & \left\{ \begin{aligned} & c_1 x_1 + c_{2p} x_2^+ + c_{2m} x_2^- + c_d u_{d_4} + c^\alpha + c_{\text{ecart}} (|x_2| - x_1) \text{ind}\{x_2 < 0\} \\ & + c_{\text{env}} (x_{1\max} - x_1) + \lambda_{43} V^h(x_1, x_2, 3) + \lambda_{42} V^h(x_1, x_2, 2) \\ & + \frac{|r_2 - u_{d_4}|}{h_1} V^h(x_1 + h_1, x_2, 4) \text{ind}\{r_2 - u_{d_4} \geq 0\} + \frac{|r_2 - u_{d_4}|}{h_1} V^h(x_1 - h_1, x_2, 4) \text{ind}\{r_2 - u_{d_4} < 0\} \\ & + \frac{|d|}{h_2} V^h(x_1, x_2 - h_2, 4) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] \quad (3.19)$$

Les variables de décision sont donc :

- Le taux de production u_1 et le taux d'élimination u_{d_1} au mode 1
- Le taux de production u_2 et le taux d'élimination u_{d_2} au mode 2
- Le taux d'élimination u_{d_3} au mode 3
- Le taux d'élimination u_{d_4} au mode 4

Les variables d'états sont respectivement :

- Les niveaux d'inventaire x_1 et x_2 .

3.4 Application numérique

3.4.1 Données du problème

On se propose dans cette section de résoudre numériquement l'équation d'HJB afin de déterminer la politique de commande optimale de l'unité de recyclage décrite au paragraphe 3.2. Nous utiliserons à cet effet, le logiciel Matlab. Nous référons le lecteur à l'annexe 3 et 4 pour s'imprégner des programmes utilisés à cet effet. Nous y parviendrons par approximation successive en utilisant l'algorithme de (Yan et Zhang, 1997). Le pas de discrétisation utilisé est $hx_1 = hx_2 = 0.5$ tandis que le domaine d'étude considéré est le domaine D décrit ci-dessous :

$$D = \{0 \leq x_1 \leq 20; -10 \leq x_2 \leq 20\} \quad (3.20)$$

Les données utilisées pour la simulation sont celles collectées dans la littérature et présentées au tableau 3.2.

Tableau 3.2 Données de la simulation

Variables	c_m	c_d	c_l	c_{2p}	c_{2m}	c^a	c_{cart}
Valeur	14	1.5	1.8	3.5	55	13	55
Unités	\$/produit/UT	\$/produit/UT	\$/produit/ UT	\$/produit/UT	\$/produit/ UT	\$/panne/UT	\$/produit/UT

Variables	C_{env}	ρ	r_1	r_2	d	u_{max}
Valeur	1	0.1	0.55	0.45	0.4	0.5
Unités	\$/produit/UT	/UT	produit/UT	produit/UT	produit/UT	produit/UT

La matrice des taux de transition est la suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ 0 & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06 & 0.05 & 0.01 & 0 \\ 0.1 & -0.11 & 0 & 0.01 \\ 0.1 & 0 & -0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

La résolution du système conduit aux probabilités limites suivantes :

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.606 \\ \pi_2 = 0.303 \\ \pi_3 = 0.060 \\ \pi_4 = 0.030 \end{cases}$$

Ces valeurs respectent bien la condition de faisabilité donnée par l'inéquation (3.4), car on a bien :

$$\begin{cases} \pi_1 \times u_{\text{max}} + \pi_2 \times r_2 = 0.439 \\ d = 0.4 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \times u_{\text{max}} + \pi_2 \times r_2 > d$$

3.4.2 Résultats de la simulation

La simulation sur Matlab a permis d'obtenir les résultats qui sont présentés dans les paragraphes qui suivent. Dans toutes ces figures, x_1 représente le stock des matières premières tandis que x_2 représente le stock des produits finis.

❖ Taux d'élimination u_{d1} et taux de production u_1 au mode 1

L'allure de la politique optimale d'élimination est explicitée par les figures 3.3 et 3.4.

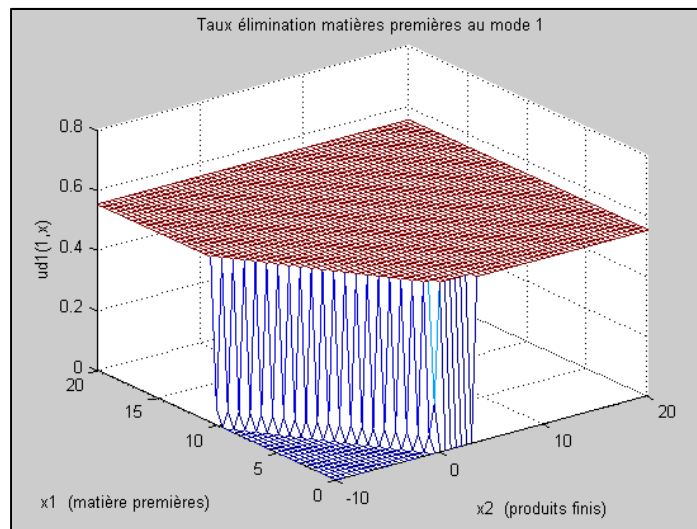


Figure 3.3 Taux d'élimination au mode 1

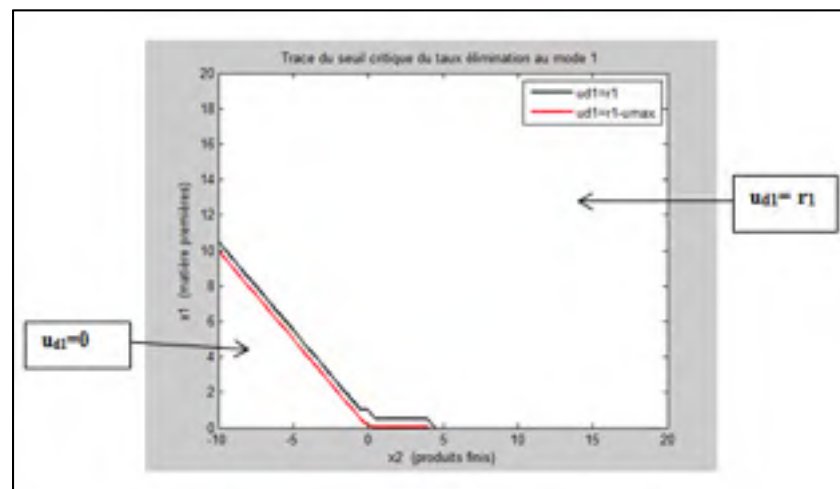


Figure 3.4 Variation du seuil critique du taux u_{d1} en fonction de x_1 et x_2

Nous observons que le taux d'élimination u_{d1} au mode 1 a une allure en escalier, ce résultat est similaire à celui obtenu au chapitre 2. Sa politique optimale se résume par l'équation (3.21) et stipule qu'il faut:

- Éliminer de l'unité de production la totalité des produits en fin de vie retournés lorsque leur niveau d'inventaire est strictement supérieur au seuil critique $z_1^* = \sigma(x_2)$ où $\sigma(x_2)$ est fonction polynomiale qui donne la valeur du seuil critique z_1^* en fonction du niveau de stock des produits finis disponible x_2 .
- Éliminer les produits retournés au taux $r_1 - u_{\max}$ lorsque le niveau de stock des produits retournés est égal au seuil critique.
- Ne rien éliminer du tout ($u_{d1}=0$) tant que le niveau de stock des matières premières est strictement inférieur au seuil critique.

$$u_{d_1}(x_1, x_2, 1) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x_1 > \sigma(x_2) \\ r_1 - u_{\max} & \text{si } x_1 = \sigma(x_2) \\ 0 & \text{si } x_1 < \sigma(x_2) \end{cases} \quad (3.21)$$

La raison d'une telle politique de commande vient du fait que lorsqu'il y a pénurie des produits finis, il est important de bâtir un stock de retour (matières premières) nécessaire pour la production ($u_{d1}=0$); puis lorsqu'on sort de la pénurie et qu'un stock de sécurités des produits finis est obtenu, il n'est plus nécessaire de stocker la matière première ($u_{d1}=r_1$), ce qui est tout à fait réaliste. Ces résultats nous rassurent de la validité du modèle considéré.

La commande optimale de la production au mode 1 est explicitée par les figures 3.5 et 3.6.

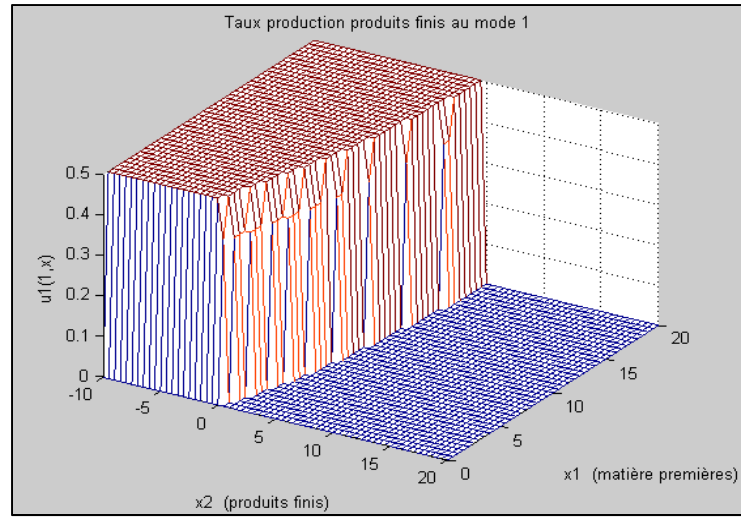
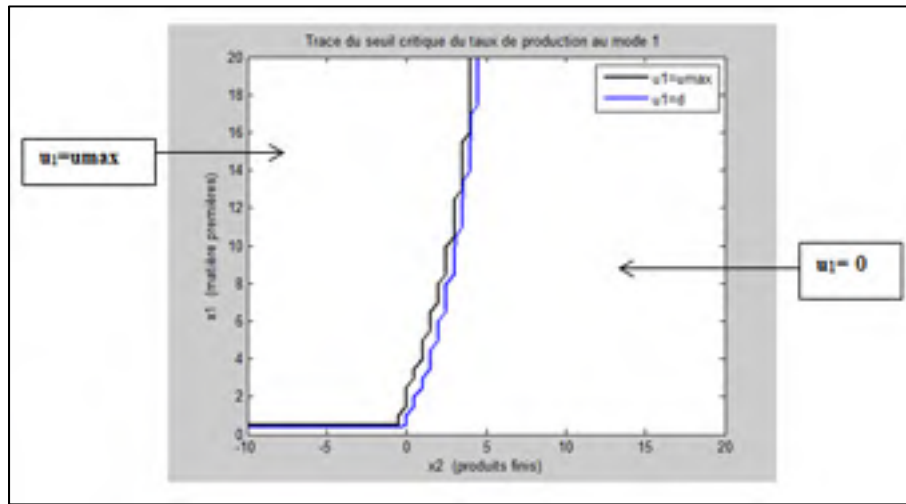


Figure 3.5 Taux de production au mode 1

Figure 3.6 Variation du seuil critique de u_1 au mode 1

L'allure en escalier du taux de production nous montre que la politique optimale de production est également une politique à seuil critique. Ainsi, la politique optimale de production a la structure résumée par l'équation (3.22) :

$$u_1(x_1, x_2, 1) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } x_2 < \psi(x_1) \\ d & \text{si } x_2 = \psi(x_1) \\ 0 & \text{si } x_2 > \psi(x_1) \end{cases} \quad (3.22)$$

Où $\psi(x_1)$ est une fonction qui détermine la valeur du seuil critique z_2^* en fonction du niveau d'inventaire des matières premières x_1 ; l'allure de la fonction $\psi(x_1)$ est illustrée à la figure 3.6 (courbe en bleue), l'autre courbe représente le seuil de la production à taux maximal. La politique optimale de production se résume ainsi qu'il suit :

- Produire au taux maximum lorsque le niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil critique $\psi(x_1)$.
- Produire à la demande lorsque le niveau d'inventaire est égal au seuil critique $\psi(x_1)$.
- Ne pas produire du tout ($u_1=0$) lorsque le niveau d'inventaire est strictement supérieur au seuil critique $\psi(x_1)$.

La politique optimale de production est une politique à seuil critique variable. Le résultat obtenu est réaliste puisqu'il faut produire au taux maximum ($u_1=u_{\max}$) jusqu'à atteindre un stock de sécurité. Dès que ce stock de sécurité est atteint, il devient optimal de produire à la demande ($u_1=d$) dans le cas contraire, il serait optimal de ne pas produire du tout ($u_1=0$).

❖ Taux d'élimination u_{d_2} et taux de production u_2 au mode 2

L'allure de la politique optimale d'élimination dont l'allure est en escalier est illustrée par les figures 3.7 et 3.8.

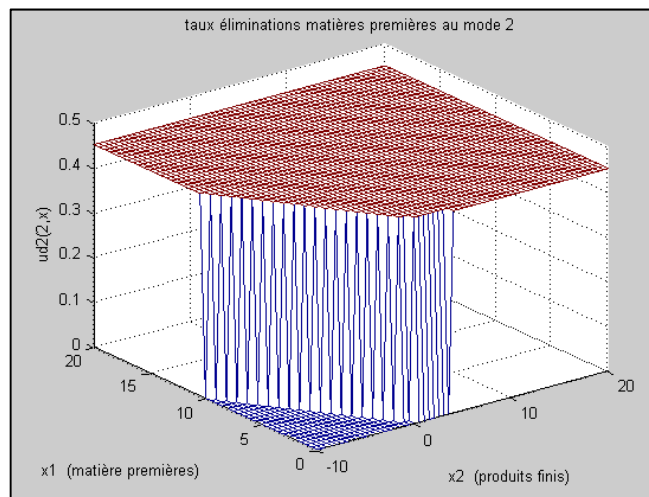


Figure 3.7 Taux d'élimination au mode 2

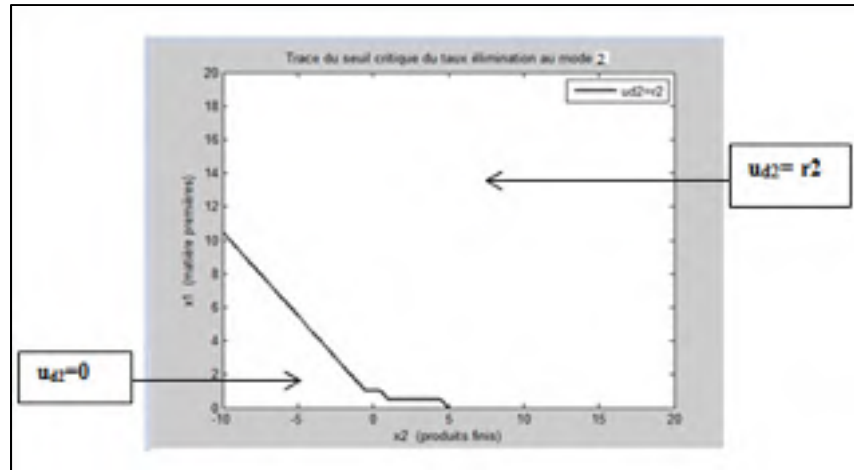


Figure 3.8 Variation du seuil critique du taux u_{d2} au mode 2

La politique optimale d'élimination au mode 2 représentée par l'équation (3.23) se résume comme suit :

- Éliminer les matières retournées au taux maximal ($u_{d2} = r_2$) lorsque leur niveau du stock est supérieur ou égal au seuil $z_2^* = \delta(x_2)$, où $\delta(x_2)$ est une fonction qui dépend du niveau de stock des produits finis x_2 .
- Stocker toutes les matières premières ($u_{d2} = 0$) tant que leur niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil.

$$u_{d_2}(x_1, x_2, 2) = \begin{cases} r_2 & \text{si } x_1 \geq \delta(x_2) \\ 0 & \text{si } x_1 < \delta(x_2) \end{cases} \quad (3.23)$$

Tout comme la politique d'élimination obtenue au mode 1, les résultats observés se justifient par le fait que lorsqu'il y a pénurie des produits finis, il est important de bâtir un stock de matières premières nécessaire pour la production, l'unité de production stocke toute la matière première entrante traduite par $u_{d2}=0$. Ensuite, lorsqu'on s'éloigne de la pénurie et qu'un stock de sécurité des produits finis est obtenu, il n'est plus nécessaire de stocker la matière première, d'où leur élimination complète traduit par $u_{d2}= r_2$. Ces observations réalistes permettent une fois de plus de nous rassurer quant à la validité du modèle considéré. La politique optimale de production au mode 2 est explicitée par les figures 3.9 et 3.10.

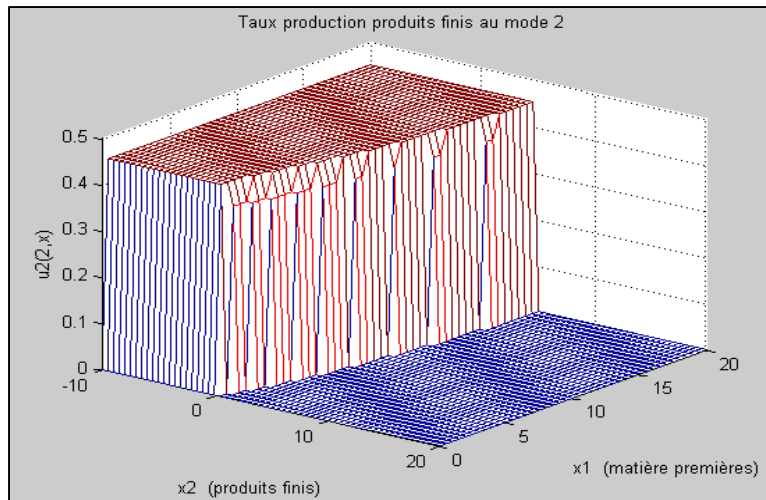
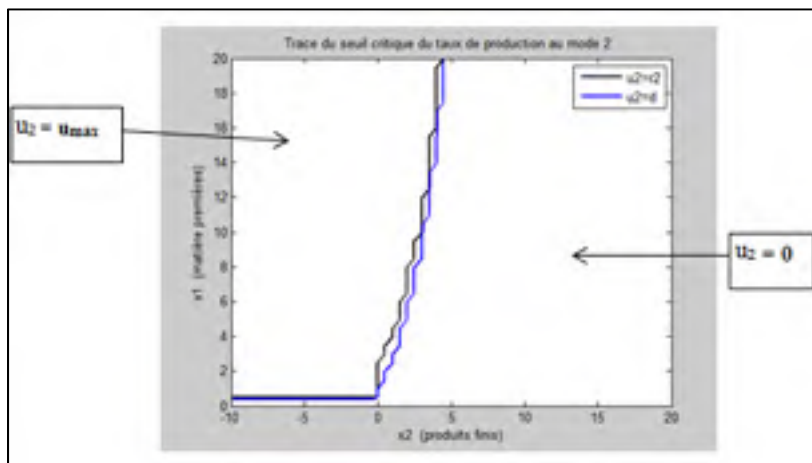


Figure 3.9 Taux de production au mode 2

Figure 3.10 Variation du seuil critique de u_2 au mode 2

La politique optimale qui est une politique à seuil critique explicitée par l'équation (3.24) se résume ainsi qu'il suit :

- Produire au taux de retour r_2 (utiliser toute la matière première entrante) lorsque le niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil critique $\varpi(x_1)$.
- Produire à la demande lorsque le niveau d'inventaire est égal au seuil critique $\varpi(x_1)$.
- Ne pas produire du tout lorsque le niveau d'inventaire est strictement supérieur au seuil critique $\varpi(x_1)$.

$$u_2(x_1, x_2, 2) = \begin{cases} r_2 & \text{si } x_2 < \varpi(x_1) \\ d & \text{si } x_2 = \varpi(x_1) \\ 0 & \text{si } x_2 > \varpi(x_1) \end{cases} \quad (3.24)$$

La commande optimale de production au mode 2 se justifie par les mêmes raisons que celles évoquées pour la politique de production au mode 1. Cependant on remarque bien dans ce cas que, le taux de production maximal correspond au taux de retour r_2 qui lui, est inférieur au taux maximal de la machine ($r_2 < u_{\max}$). L'unité de production ne peut produire qu'avec les matières premières disponibles, ce qui explique bien l'allure de la courbe observée.

Ce taux de retour r_2 est certes inférieur au taux de production maximal, mais il reste supérieur au taux de la demande ($d < r_2 < u_{\max}$). Par la suite, il serait important d'étudier le cas où le taux de retour est inférieur au taux de la demande ($r_2 < d < u_{\max}$) afin de le comparer avec ce cas de figure ($d < r_2 < u_{\max}$).

❖ Taux d'élimination u_{d_3} au mode 3

L'allure de la politique optimale d'élimination au mode 3 est explicitée par les figures 3.11 et 3.12.

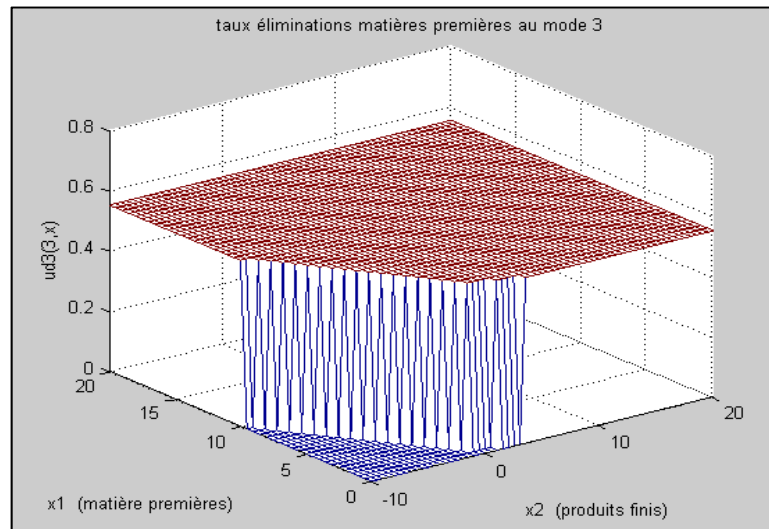


Figure 3.11 Taux d'élimination au mode 3

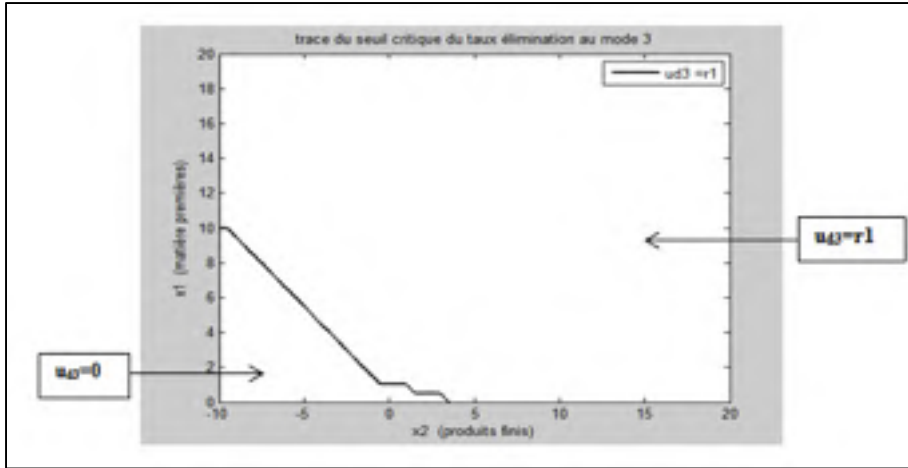


Figure 3.12 Variation du seuil critique du taux u_{d3} en fonction de x_1 et x_2

La politique optimale d'élimination explicitée par l'équation (3.25) se résume ainsi :

- Éliminer les produits en fin de vie retournés au taux maximal ($u_{d3} = r_1$) lorsque leur niveau du stock est supérieur ou égal au seuil $z_1^* = \eta(x_2)$, où $\eta(x_2)$ est fonction du niveau d'inventaire des produits finis.
- Stocker toutes les matières premières ($u_{d3} = 0$) tant que leur niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil.

$$u_{d_3}(x_1, x_2, 3) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x_1 \geq \eta(x_2) \\ 0 & \text{si } x_1 < \eta(x_2) \end{cases} \quad (3.25)$$

Au mode 3, la machine est en panne, La commande optimale d'élimination à ce mode s'explique par les mêmes raisons que celles évoquées pour la politique d'élimination au mode 1.

❖ Taux d'élimination u_{d_4} au mode 4

La structure de la politique optimale d'élimination au mode 3 est explicitée par les figures 3.13 et 3.14.

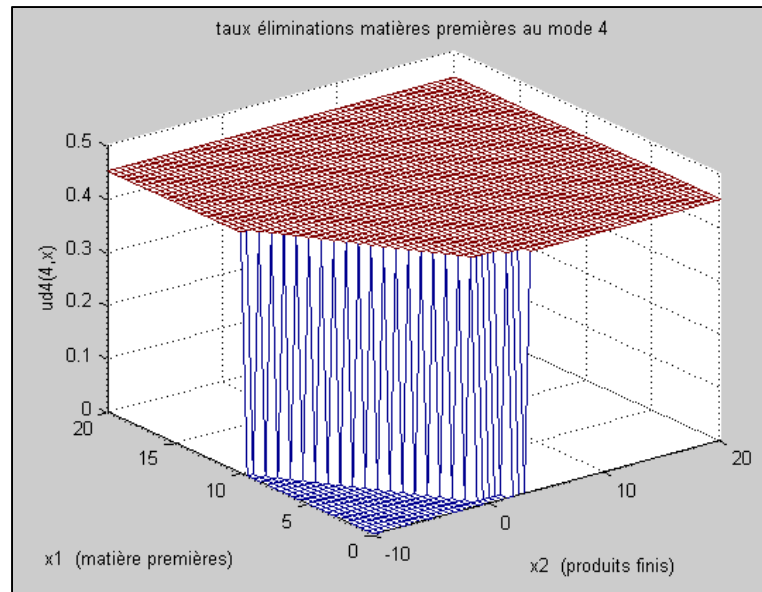
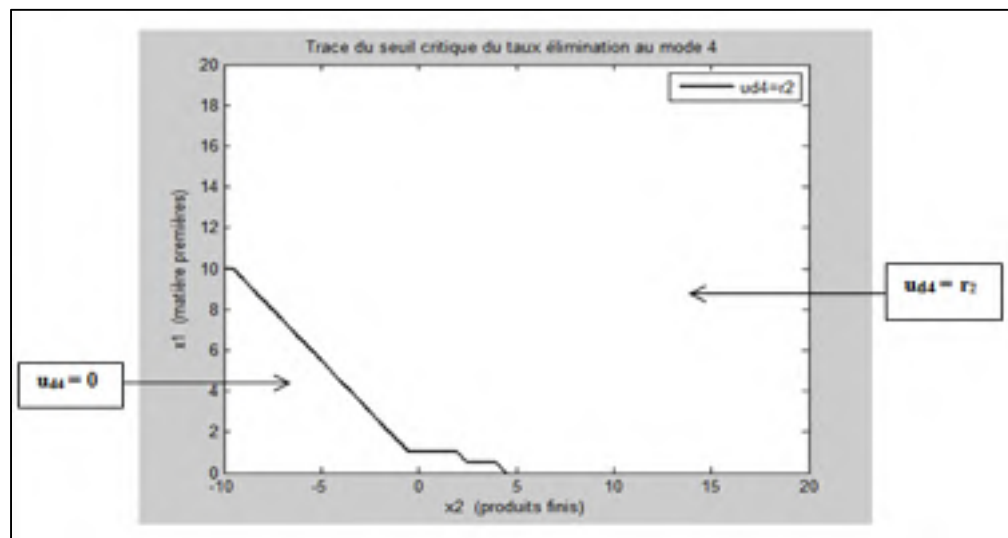


Figure 3.13 Taux d'élimination au mode 4

Figure 3.14 Variation du seuil critique du taux u_{d4} en fonction de x_1 et x_2

La politique optimale d'élimination explicitée par l'équation (3.28) se résume ainsi :

- Éliminer les produits la matière première au taux maximal ($u_{d4} = r_2$) lorsque leur niveau du stock est supérieur ou égal au seuil $z_1^* = \tau(x_2)$, où $\tau(x_2)$ est une fonction qui dépend du niveau d'inventaire des produits finis x_2 .

- Stocker toutes les matières premières ($u_{d4} = 0$) tant que leur niveau d'inventaire est strictement inférieur au seuil.

$$u_{d_4}(x_1, x_2, 4) = \begin{cases} r_2 & \text{si } x_1 \geq l(x_2) \\ 0 & \text{si } x_1 < l(x_2) \end{cases} \quad (3.28)$$

Au mode 4, la machine est également en panne, l'unité de production est alimentée au taux de retour r_2 , La commande optimale d'élimination à ce mode s'explique par les mêmes raisons que celles évoquées pour la politique d'élimination au mode 2.

3.5 Analyse de sensibilité

Afin de valider notre modèle, nous allons effectuer une analyse de sensibilité sur quelques variables indépendantes afin d'observer le comportement du système face à ces variations.

Analyse de sensibilité sur c_{2m}

La figure 3.15 nous montre que lorsqu'on augmente les valeurs de c_{2m} (coût de pénurie des produits finis), le domaine de production au taux maximal ($u=u_{\max}$) au mode marche 1 augmente. Les valeurs du seuil critique du taux d'élimination des matières premières au mode marche 1 illustrées à la figure 3.16 sont quasiment identiques.

Ces observations sont réalistes, car, lorsque la pénurie est d'avantage pénalisée, il est important d'avoir plus de produits finis en stock pour éviter au maximum la pénurie.

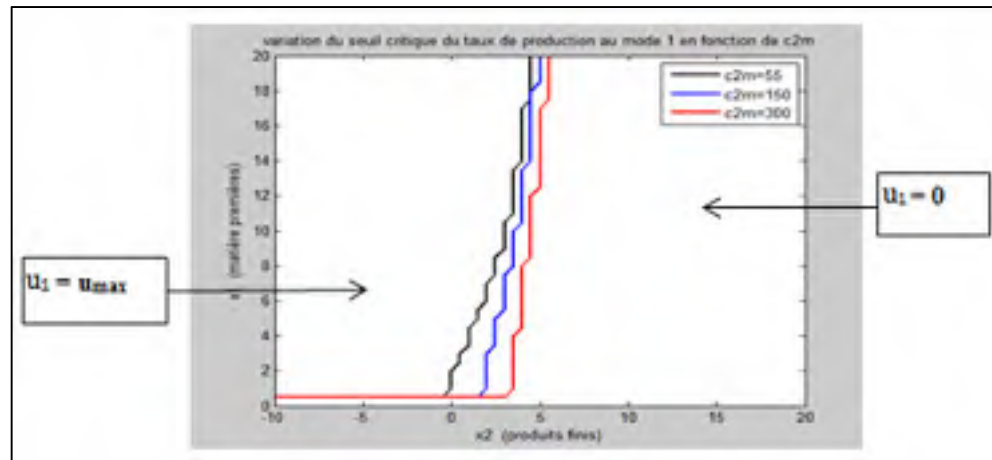


Figure 3.15 Variation du seuil critique du taux de production au mode 1 en fonction de c_{2m}

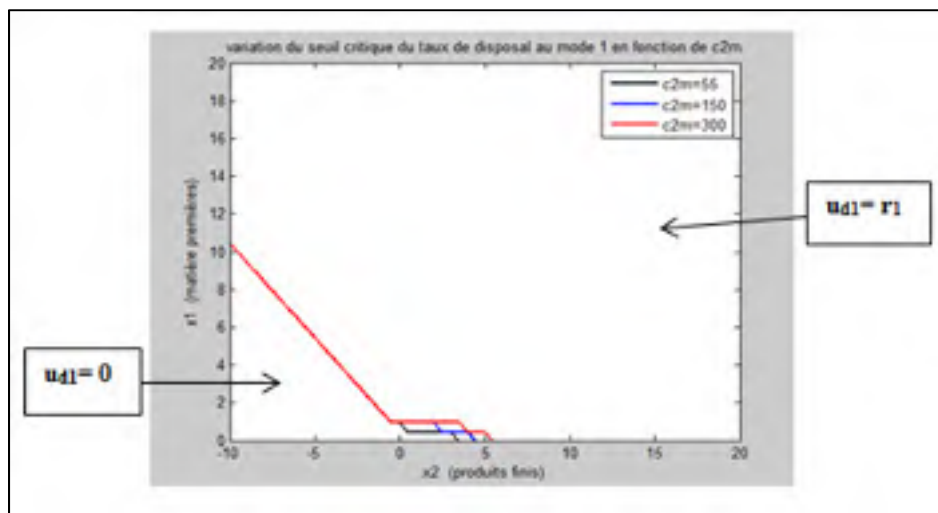


Figure 3.16 Variation du seuil critique du taux d'élimination au mode 1 en fonction de c_{2m}

- Analyse de sensibilité sur r

Afin d'analyser les effets de la variation du taux de retour r sur les performances de notre modèle, nous allons étudier dans le paragraphe suivant le comportement du système lorsque le taux de retour r_2 prend des valeurs inférieures au taux de la demande d ($r_2 < d < u_{\max}$).

3.5.2 Étude du cas où le taux de retour r_2 est inférieur au taux de la demande d

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié le comportement du système dans le cas où le taux de retour r_2 était inférieur au taux de la production maximal, tout en restant supérieur au taux de la demande ($d < r_2 < u_{\max}$). Dans cette section, nous nous intéressons au cas où ce taux de retour est également inférieur au taux de la demande ($r_2 < d < u_{\max}$) afin de le comparer avec le premier cas de figure ($d < r_2 < u_{\max}$).

Dans ce modèle tout comme dans le précédent, le système est alimenté 67% du temps au taux r_1 et 33% du temps au taux r_2 . Sans modifier les autres paramètres entrants du système tout en satisfaisant la condition de faisabilité, le taux r_2 a été fixé à $r_2=0.37$, nous avons alors obtenu les résultats suivants illustrées par les figures 3.17 à 3.28:

❖ Résultats et comparaison au mode 1

Dans ce scénario où $r_2 < d < u_{\max}$, la commande optimale de production au mode 1 du système donnée par les courbes 3.17 et 3.18 ci-dessus a la même allure que celle obtenue dans le cas où on avait $d < r_2 < u_{\max}$. Le lecteur peut se référer à la section 3.5 pour l'analyse et l'interprétation de ces résultats. Les résultats obtenus étaient prévisibles, car le taux de retour r_1 est identique dans les deux scénarios.

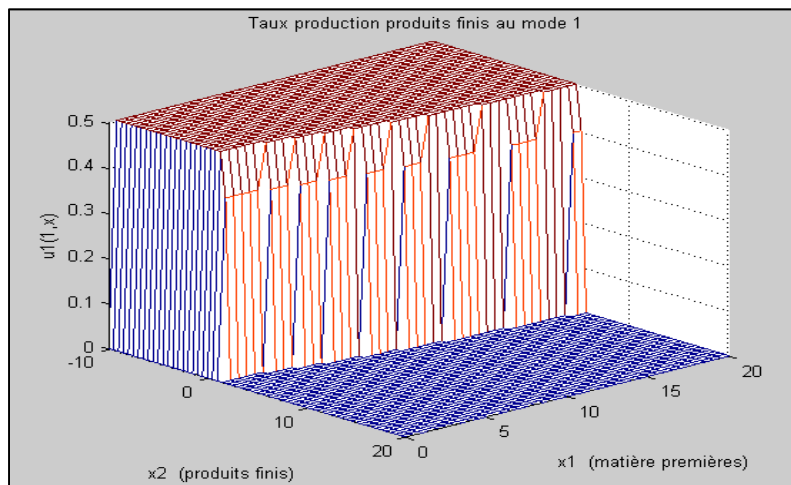


Figure 3.17 Taux de production au mode 1

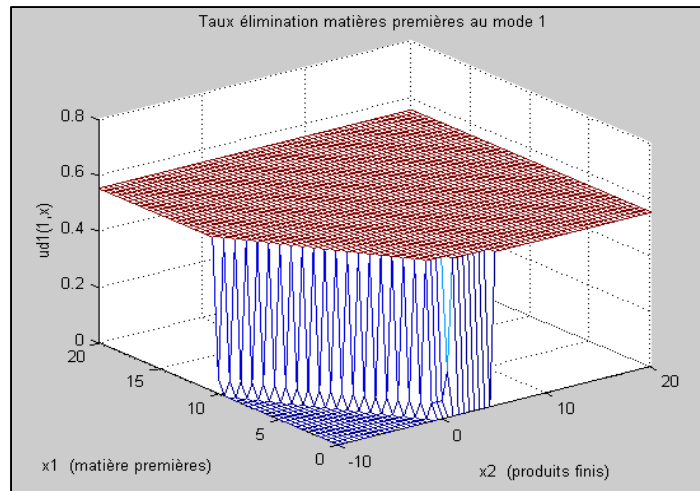


Figure 3.18 Taux d'élimination au mode 1

▪ **Comparaison entre les deux scénarios :**

Les comparaisons des différentes politiques de production et d'élimination aux deux scénarios sont illustrées par les figures 3.19 et 3.20.

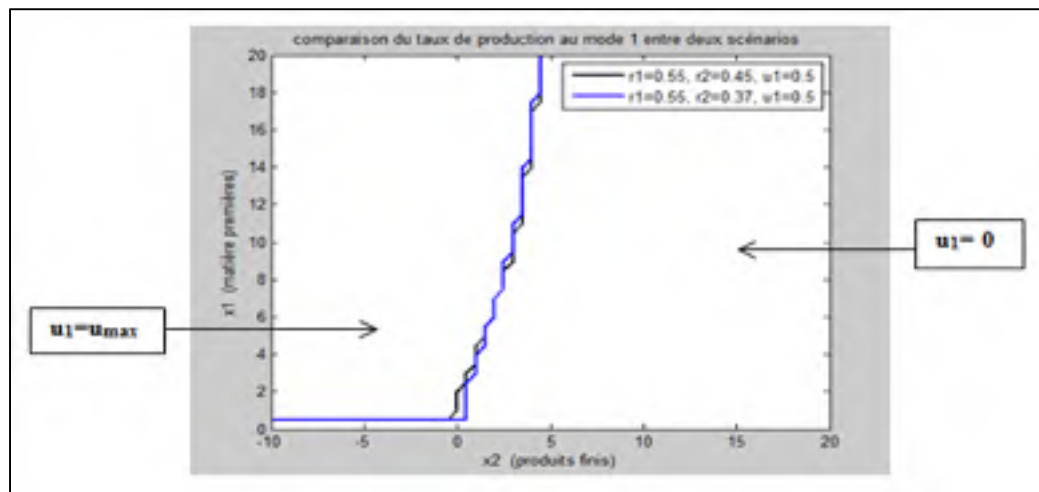


Figure 3.19 Comparaison de la politique de production entre les deux scénarios

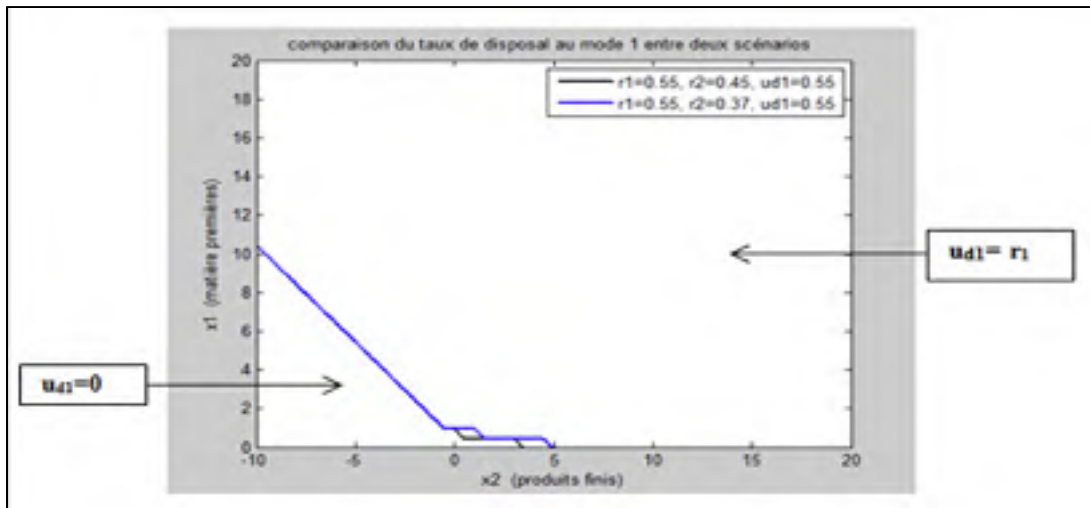


Figure 3.20 Comparaison de la politique d'élimination entre les deux scénarios

À l'analyse de ces figures, nous constatons que les deux politiques sont quasiment identiques dans les deux cas de figure, ce qui est tout à fait logique, car à ce mode et dans ces deux cas, le système est alimenté au même taux r_1 .

❖ Résultats et comparaison au mode 2

La comparaison des différentes politiques de production et d'élimination au mode 2 sont illustrées par les figures 3.21 et 3.22.

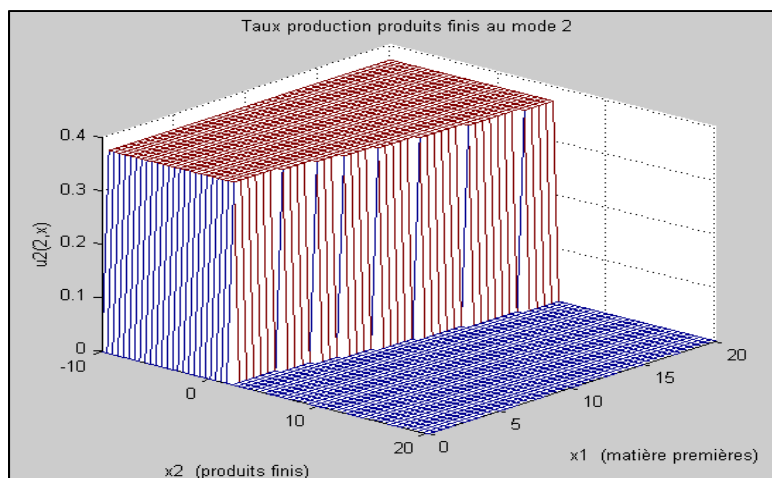


Figure 3.21 Taux de production au mode 2

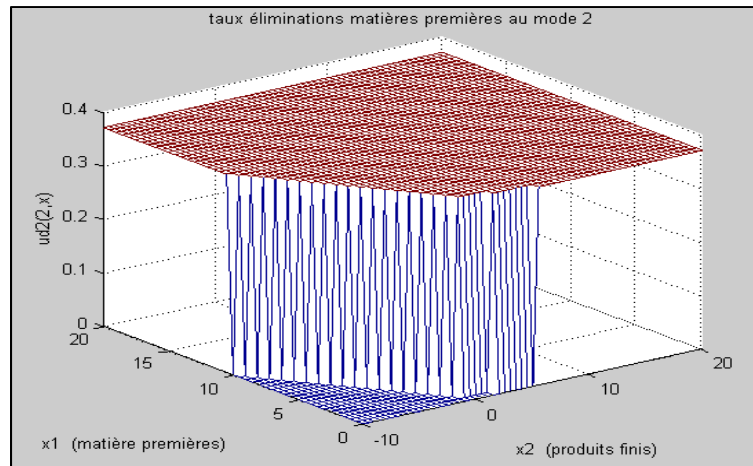


Figure 3.22 Taux d'élimination au mode 2

En observant la politique optimale d'élimination au mode 2, nous constatons une forte similitude avec celle obtenue dans le scénario précédent. Cependant, la production dans ce cas s'effectue entre deux paliers seulement ($u_2=r_2=0.37$ ou $u_2=0$) contrairement au cas précédent où la production pouvait en plus s'effectuer au taux de la demande; ceci est tout à fait normal, car la matière première disponible à ce mode est insuffisante pour produire au taux de la demande ($r_2 < d < u_{\max}$). Les figures 3.23 et 3.24 permettent de comparer les deux politiques à ce mode.

- **Comparaison entre les deux scénarios :**

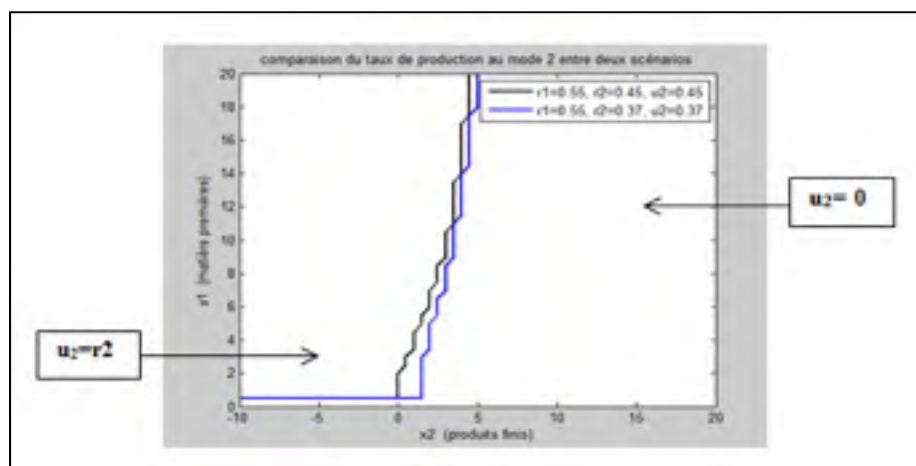


Figure 3.23 Comparaison des politiques de production au mode 2 entre les deux scénarios

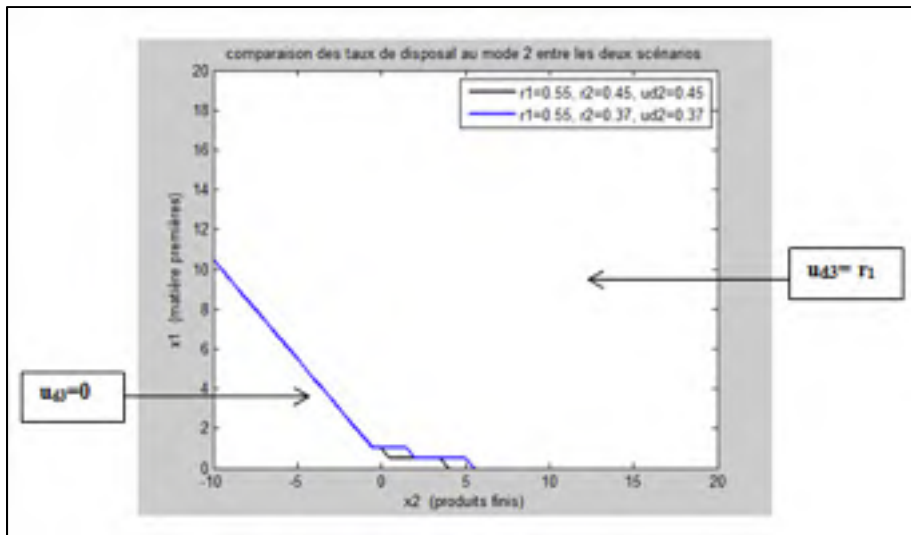


Figure 3.24 Comparaison des politiques de d'élimination au mode 2 entre les deux scénarios

En visualisant la courbe 3.23, nous constatons que la production est maintenue au taux maximal pendant une plus longue durée lorsque le taux de retour r_2 est faible ($r_2 < d < u_{\max}$) que dans le cas où le taux de retour r_2 est élevé ($d < r_2 < u_{\max}$). On observe à la figure 3.24 que la politique d'élimination des retours est sensiblement la même lorsque le taux de retour est faible ($r_2 < d < u_{\max}$) que lorsqu'il est élevé ($d < r_2 < u_{\max}$). Ces résultats sont réalistes car lorsque le retour des matières est faible, il est important de produire au taux maximal pendant une plus longue période afin de bâtir un stock et de protéger l'unité de production des pénuries que lorsque la matière première est abondante. De même, lorsqu'il y a panne, il est réaliste de moins se débarrasser des produits retournés lorsque le taux de retour est faible ($r_2 < d < u_{\max}$) que lorsqu'il y a beaucoup plus de matière première disponible pour la production ($d < r_2 < u_{\max}$). Ces résultats nous montrent que le système réagit bien face à la fluctuation du taux de retour.

❖ Résultats et comparaison au mode 3

Les figures 3.25 et 3.26 illustrent la politique d'élimination au mode 3 et la comparaison au scénario précédent.

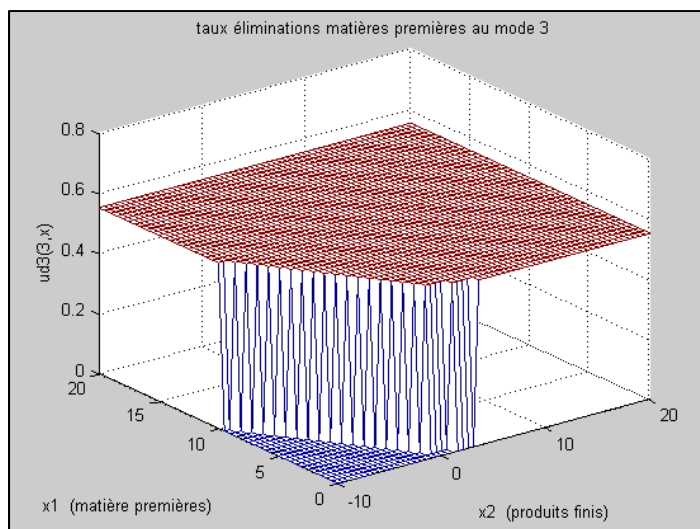


Figure 3.25 Taux d'élimination au mode 3

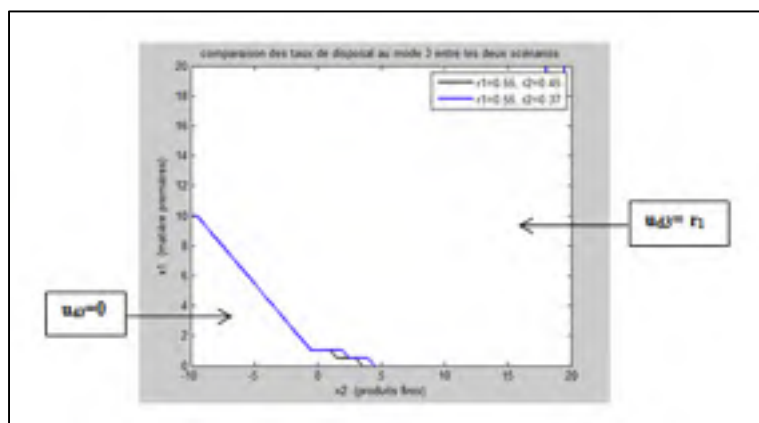


Figure 3.26 Comparaison des politiques d'élimination au mode 3 entre les deux scénarios

La politique d'élimination au mode 3 donnée par la figure 3.25 est semblable à celle obtenue au mode 3 dans le cas où on avait $d < r_2 < u_{\max}$. Le lecteur peut se rapporter au paragraphe 3.5 pour l'analyse et l'interprétation de ce graphique. En comparant les deux politiques dans les deux scénarios (figure 43), nous constatons qu'elles sont quasi identiques. Cela n'est pas étonnant, car dans ces deux cas, le système est en arrêt pour maintenance corrective et alimentée au taux r_1 .

❖ Résultats et comparaison au mode 4

La politique d'élimination au mode 4 et sa comparaison au scénario précédent sont illustrées par les figures 3.27 et 3.28.

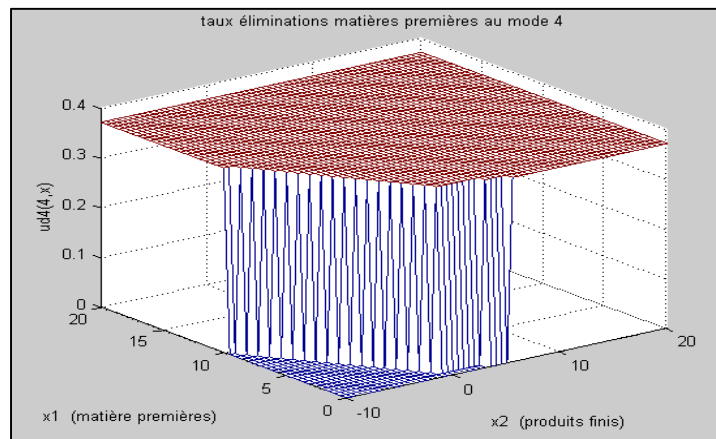


Figure 3.27 Taux d'élimination au mode 4

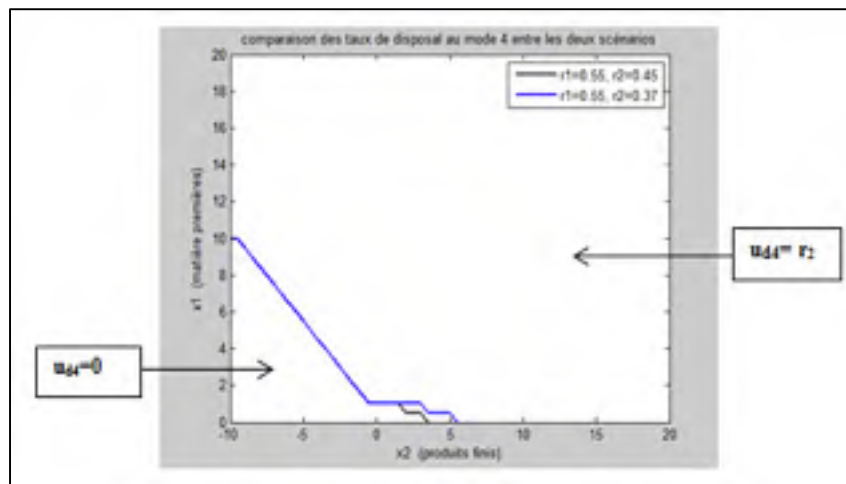


Figure 3.28 Comparaison des politiques d'élimination au mode 4 entre les deux scénarios

La politique d'élimination au mode 4 illustrée à la figure 3.27 a la même allure que celle obtenue au scénario précédent ($d < r_2 < u_{\max}$). Nous référons le lecteur au paragraphe 3.5 pour l'analyse et l'interprétation de ce graphique. Nous notons toutefois légère différence de la politique d'élimination dans les deux cas. En effet, on constate à la figure 3.28 un

élargissement de la courbe en bleu au voisinage de l'abscisse $x_2=5$. Cela se justifie par le fait qu'il faut moins se débarrasser des retours collectés lorsqu'il est faible ($r_2 < d < u_{\max}$) que lorsqu'il est élevé ($d < r_2 < u_{\max}$) afin de bâtir le stock optimal de matière nécessaire à la production.

3.6 Conclusion

Arrivé au terme de ce chapitre, nous pouvons dire que les objectifs ont été atteints, car nous avons pu modéliser le système (unité de recyclage) constitué d'une seule machine sujette aux pannes et réparations aléatoires dont la demande client était à taux constant tandis que le retour était aléatoire.

Après avoir modélisé le système, nous avons déterminé les équations d'optimum par les équations d'HJB, nous avons pu résoudre numériquement ces équations par la méthode de Kushner et Dupuis (1992) et déterminé les commandes sous-optimales. Les variables de décisions étaient notamment les taux de production du système à chaque mode de marche (mode 1 et mode 2), puis les taux d'élimination des retours du système à chaque mode du système (mode 1, 2, 3 et 4). Nous avons obtenu les approximations des politiques optimales qui sont de type seuil critique (Hedging Point Policy).

Nous avons effectué une analyse de sensibilité afin de valider notre modèle en variant un seul paramètre d'entrée à la fois et avons observé le comportement du système face à cette fluctuation. Nous avons constaté avec satisfaction que le modèle réagissait comme attendu.

Nous avons terminé ce chapitre en nous penchant sur le cas où le taux de retour r_2 est inférieur au taux de la demande ($r_2 < d < u_{\max}$) et avons comparé les résultats obtenus dans ce cas de figure au scénario où le taux de retour r_2 était supérieur au taux de demande ($d < r_2 < u_{\max}$). Nous avons également constaté que le système s'adaptait bien à cette variation du taux de retour.

Dans le prochain chapitre, allons étendre les résultats obtenus au cas des processus Markoviens non homogènes en développant un modèle de simulation décrivant la dynamique de la machine et la dynamique des stocks. Nous utiliserons ensuite le plan d'expérience afin de déterminer les facteurs significatifs qui influencent la réponse (le coût de production). La méthodologie des surfaces de réponse sera ensuite exploitée pour déterminer la corrélation entre de ces facteurs et le coût de production afin de dégager les facteurs optimaux qui minimisent le coût.

CHAPITRE 4

LOGISTIQUE INVERSE EN BOUCLE OUVERTE ET APPROCHE DE COMMANDE BASÉE SUR LA SIMULATION ET LES PLANS D'EXPÉRIENCES

4.1 Introduction

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous avons déterminé la structure de la politique optimale de production d'une unité de recyclage de l'aluminium en LI en boucle ouverte. Le système étudié était assimilé à une machine produisant un seul type de produit (M1P1). Nous allons dans cette partie, utiliser la combinaison de la simulation, des plans d'expériences, l'analyse de la variance (ANOVA) ainsi que l'analyse des surfaces de réponse afin d'étendre les résultats obtenus à des contextes de production dans un cas général. Nous déterminerons également la corrélation entre le coût de production et les facteurs significatifs afin d'en tirer l'optimum.

Cette étude est divisée en trois parties essentielles à savoir :

- ❖ La modélisation du système de production par le logiciel ARENA.
- ❖ L'implémentation de la politique à l'aide d'un plan d'expérience et l'analyse des surfaces de réponses au moyen du logiciel STATGRAPHICS.
- ❖ La validation de notre étude par une analyse de sensibilité.

4.2 Modélisation du système de production

D'après le dictionnaire de vocabulaire, la simulation est l'acte d'imiter le comportement de certaines situations ou certains processus au moyen de quelque chose analogue adéquat. Shubik et Brewer (1971) la définissent comme étant l'opération d'un modèle (simulateur) qui est une représentation d'un système ou d'un organisme; en d'autre terme, simuler signifie imiter artificiellement un dispositif. La simulation est généralement utilisée lorsque des manipulations sur le système réel seraient difficiles, dangereuses, impossibles, très coûteuses

ou nécessiterait un délai trop long à mettre en œuvre. Les opérations sur un modèle de simulation permettent de répondre aux « what if ? » scenario, c'est-à-dire prévoir le comportement du système réel en fonction des différentes configurations à l'entrée. Ainsi dire, la simulation ne fournit pas les meilleures décisions, mais constitue un outil d'aide à la décision.

Nous utiliserons dans notre étude, le langage «SIMAN» du logiciel ARENA (Rossetti, 2016) afin de modéliser le système à événement discret et décrivant la dynamique du système considéré. Le modèle est constitué des ÉLEMENTS appelés «experimental frame» et des BLOCKS appelés «model frame», il est constitué de quatre parties essentielles notamment :

- La modélisation du retour des matières premières et de leur éventuelle élimination du système.
- La modélisation de la demande client.
- La modélisation de la production.
- La modélisation des pannes et réparations de la machine.

Les diagrammes blocs seront utilisés à la suite pour décrire ces différentes parties.

4.2.1 Modélisation du retour des matières premières

Tel que l'illustre la figure 4.1, le retour des matières à taux constant est représenté par le block initial. Une fois la matière réceptionnée, un test est effectué afin de comparer le stock des matières premières x_1 disponible au seuil critique. Lorsque le stock x_1 est strictement inférieur au seuil critique, la matière entrante est stockée afin de suppléer au besoin de la production ($u_d = 0$). Lorsque le stock disponible x_1 est égal au seuil critique, l'excédent de matières correspondant est éliminé de l'unité au taux $u_d = r - u_{\max}$. Dans le cas contraire,

lorsque le stock x_1 est strictement supérieur à la demande, la matière entrante est envoyée à la sous-traitance au taux $u_d = r$. Après chaque décision, la valeur du stock x_1 est mise à jour.

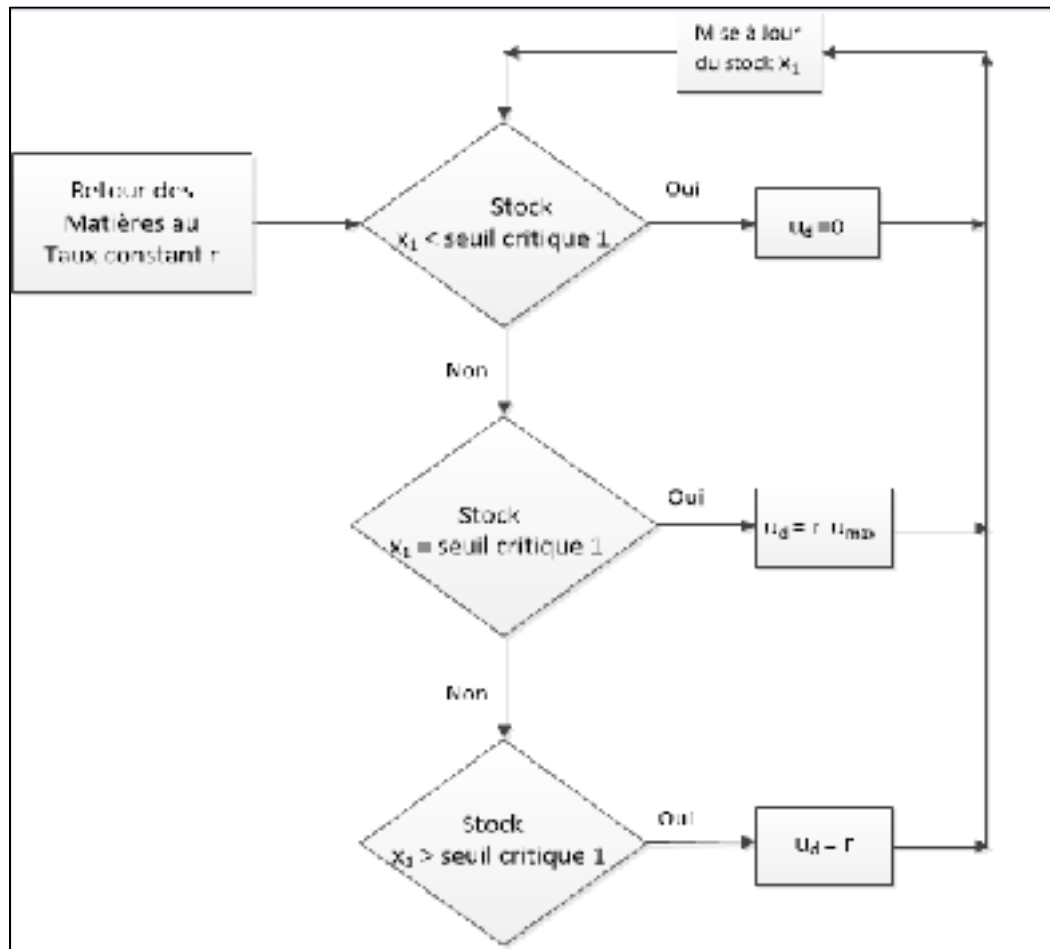


Figure 4.1 Bloc diagramme du retour des matières

4.2.2 Modélisation du retour de la demande client

La demande client arrive au taux constant d tel que l'illustre la figure 4.2. Lorsque le stock des produits finis est disponible, c'est-à-dire lorsque $x_2 > 0$, la demande est satisfaite. Cependant, lorsque ce stock est nul ou négatif ($x_2 \leq 0$), la demande ne peut être satisfaite, il y a pénurie. À chaque traitement de la commande client, le stock des produits finis est mis à jour.

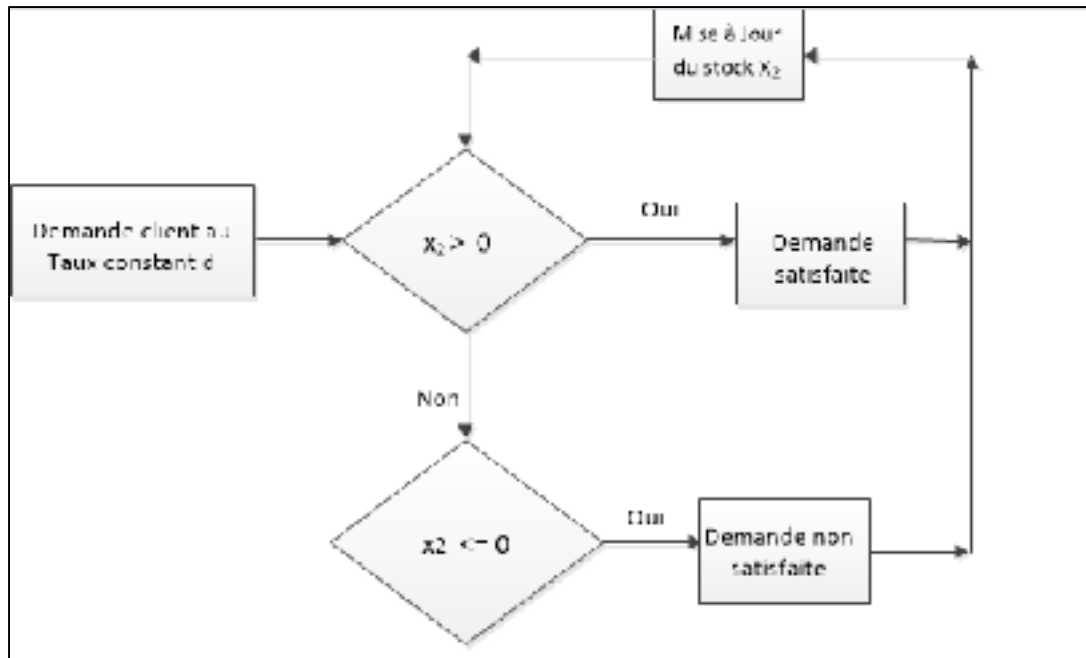


Figure 4.2 Bloc diagramme de la demande

4.2.3 Modélisation du retour de la production

La figure 4.3 illustre le principe de fonctionnement du modèle représentant la production. Lorsque la machine est alimentée et est en état de marche, le niveau du stock x_2 des produits finis est évalué. Lorsque $x_2 < \text{seuil critique 2}$, la machine produit au taux maximal ($u = u_{\max}$). Lorsque $x_2 = \text{seuil critique 2}$, la machine produit au taux de la demande ($u = d$). Lorsque $x_2 > \text{seuil critique 2}$, la machine ne produit pas du tout ($u = 0$), dans ce cas la pièce attend en file d'attente tout comme lorsque la machine est en panne.

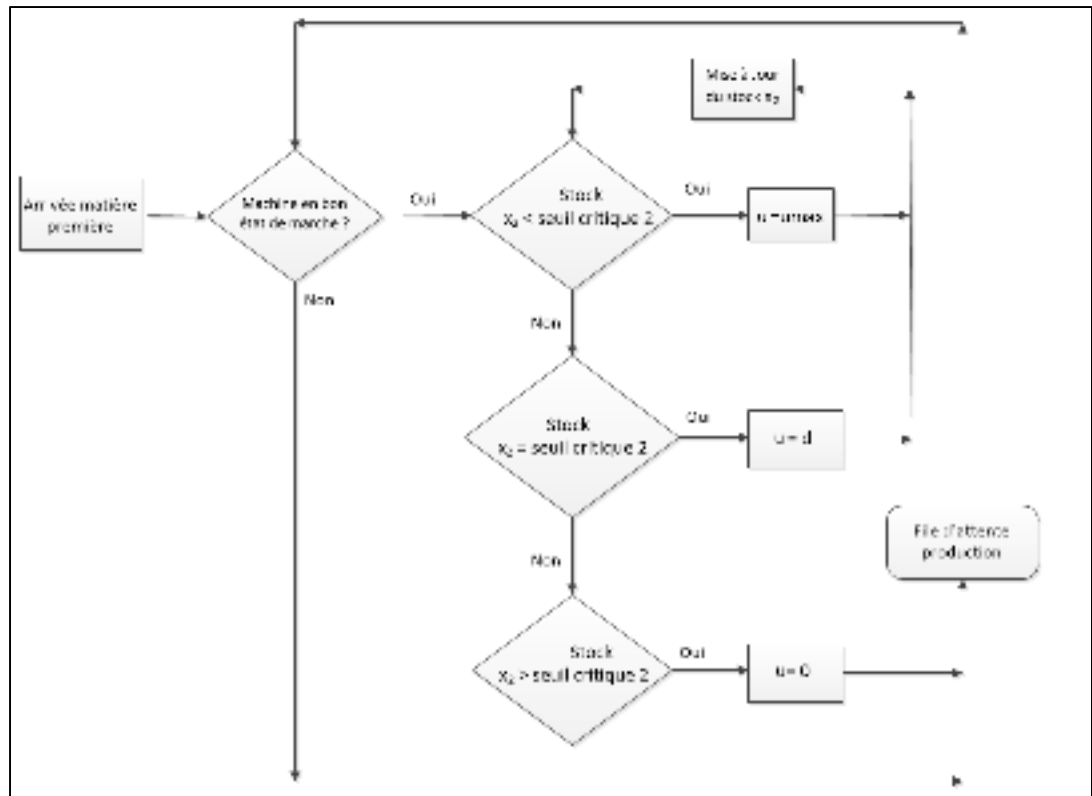


Figure 4.3 Bloc diagramme de la production

4.2.4 Modélisation des pannes et réparations de la machine

La figure 4.4 illustre la modélisation des pannes et réparations machine. Après le démarrage du système, la machine tombe en panne suivant une distribution de temps exponentielle de moyenne MTBF. Elle est ensuite réparée à l'état neuf suivant une distribution exponentielle de moyenne MTTR. Ce cycle d'états se reproduit tout au long de la simulation du système.

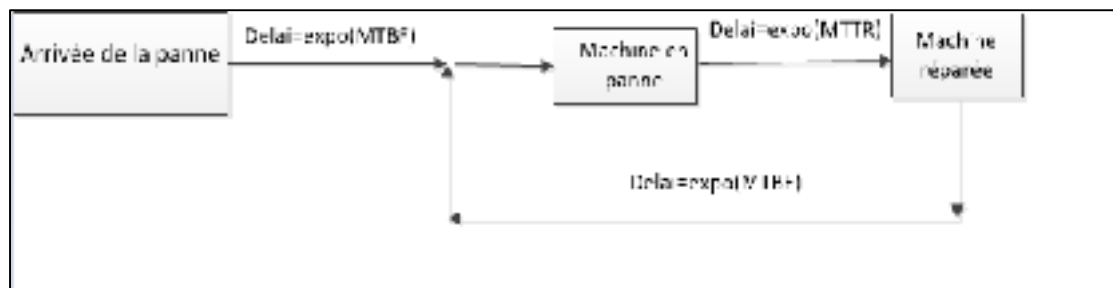


Figure 4.4 Block diagramme des pannes et réparations machine

4.3 Implémentation de la politique de production

Dans le chapitre deux de ce mémoire, nous avons observé l'existence d'une zone conjointe à la production et à l'élimination des matières premières. Nous allons dans cette section :

- ❖ Étudier les facteurs significatifs qui affectent la réponse (cout global de la production).
- ❖ Estimer la corrélation entre la réponse et ces facteurs.
- ❖ Déterminer les facteurs optimaux qui minimisent la réponse.

4.3.1 Plans d'expériences

L'efficacité des plans d'expériences est dû au faite que l'on varie les niveaux (valeurs) de tous les facteurs, mais de manière programmée, permettant ainsi de diminuer le nombre des essais, de détecter les interactions entre les facteurs, détecter les optimaux tout en ayant une meilleure précision (Goupy, 1988). Dans le cadre de notre étude, le plan d'expérience consiste à faire varier les seuils critiques de la production et de l'élimination tous deux décrites par des droites dont les pentes respectives sont connues, afin de déterminer les politiques optimales dans le cas général. Pour y arriver, il suffit de déterminer l'abscisse P_1 de la droite décrivant le seuil de production au taux maximal et l'abscisse P_2 de la droite décrivant le seuil d'élimination au taux nul telle que le montre la figure 4.5. Dans notre étude, nous avons également remarqué que l'abscisse P_2 oscille autour de celle de P_1 .

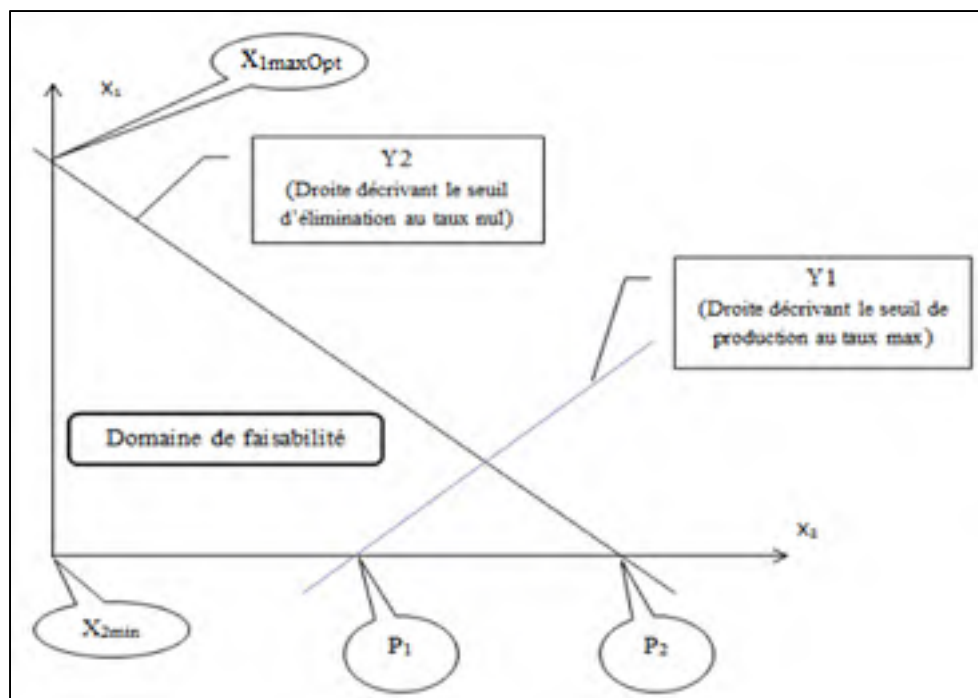


Figure 4.5 Différents facteurs du plan d'expérience

Le tracé de la courbe des surfaces de réponses décrite par un modèle du second ordre requiert au moins que 3 niveaux de chaque facteur soit étudié (Montgomery, 2000). Pour un nombre de facteurs petit ($n \leq 3$) comme dans notre cas, un plan complet est adéquat, c'est-à-dire 3^2 essais. Pour un plus grand nombre de facteurs ($n > 3$), un plan fractionnaire à 3^{n-p} essais ($p < n$) peut être utilisé. Afin d'obtenir des résultats plus fiables, nous allons répliquer 3 fois notre plan, nous effectuerons donc au total 27 essais. Les différents niveaux de chaque facteur sont représentés au tableau 4.1.

Tableau 4.1 Différents niveaux des 2 facteurs

Facteur	Niveau bas	Niveau moyen	Niveau haut	Description
P ₁	-4	28	60	Abscisse de la droite décrivant la production
P ₂	-4	0	4	Abscisse de la droite décrivant l'élimination

Le traitement statistique des performances du système obtenu par simulation sur Arena s'effectue à l'aide du logiciel STATGRAPHICS, il permet de fournir plusieurs informations notamment : La somme des carrés, le degré de liberté (ddl), les moyennes quadratiques, les différents rapports F, le P-value, l'analyse de la régression (R-carré) qui représente le degré de variabilité expliqué par le modèle. Le logiciel permet aussi de dégager la corrélation entre la réponse et les différents facteurs ainsi que les facteurs optimaux. Dans la suite de notre travail, nous allons supposer que les variances des variables P_1 et P_2 sont homogènes tel que stipulé dans (Baillargeon, 1990).

Après avoir simulé le modèle pendant une durée de 50000 unités de temps, suffisamment longue pour observer le régime permanent, nous avons pu collecter les performances du système et évaluer ainsi le cout global de production. Le traitement statistique des valeurs obtenues par le logiciel STATGRAPHICS a permis d'obtenir la table de l'ANOVA présentée au tableau 4.2.

Tableau 4.2 Analyse de la variance pour coût

<i>Source</i>	<i>Somme des carrés</i>	<i>DDL</i>	<i>Moyenne quadratique</i>	<i>Rapport F</i>	<i>Probabilité</i>
A:P1	1.51047E7	1	1.51047E7	102.75	0.0000
B:P2	861615.	1	861615.	5.86	0.0277
AA	1.88115E7	1	1.88115E7	127.96	0.0000
AB	1.8043E6	1	1.8043E6	12.27	0.0029
BB	397458.	1	397458.	2.70	0.1196
blocs	264324.	2	132162.	0.90	0.4266
Erreur totale	2.3521E6	19	147006.		
Total (corr.)	5.67761E7	26			

- R-carré = 95,8572 pour cent(s)

- Statistique de Durbin-Watson = 2.68468 (P=0.9014)

Nous constatons que le coefficient de détermination (R-carré) est égal à 95.85%, cela traduit le fait qu'environ 96% de variabilité totale est expliquée par le modèle. Nous observons également que P_1 , P_2 , P_1^2 , $P_1 \times P_2$ sont significatifs, car leurs P-values ou probabilité dans le tableau 4.2 sont inférieures à 0.05. De plus, P_1^2 et $P_1 \times P_2$ influencent positivement la réponse tandis que P_1 et P_2 l'influencent négativement telle que l'illustre le diagramme de Pareto à la figure 4.6.

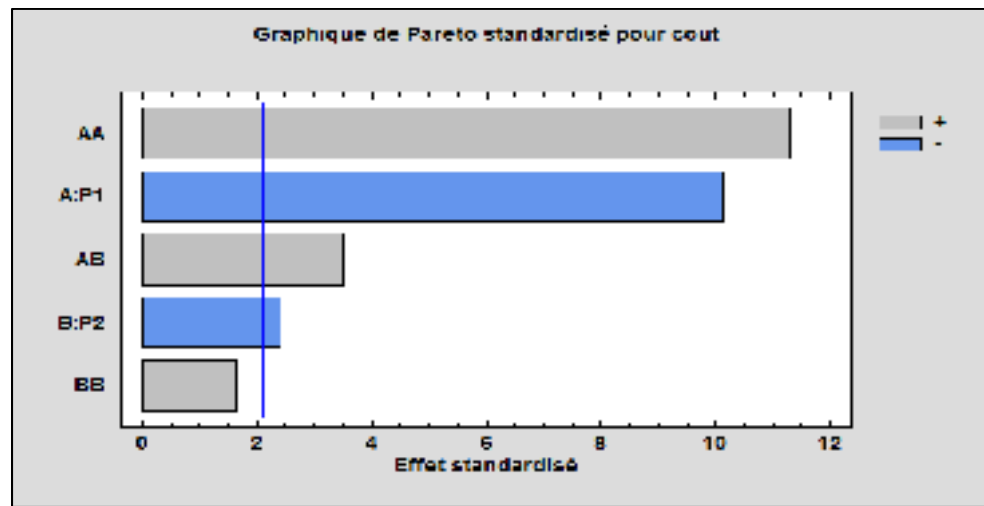


Figure 4.6 Diagramme de Pareto

4.3.2 Surfaces de réponses

La méthodologie du plan d'expérience nous a permis de définir la politique optimale conjointe de production et d'élimination. Elle nous permet également de dégager la corrélation entre la réponse et les différents facteurs. La fonction «coût» obtenue est appelée surface de réponse (Montgomery, 2000). Cette fonction se présente sous la forme suivante :

$$coût = \beta_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \beta_i P_i + \sum_{i=1}^{i=k} \beta_{ii} P_i^2 + \sum_{i=1}^{i=k-1} \sum_{j=2, i < j}^k \beta_{ij} P_i P_j + \varepsilon \quad (4.1)$$

Où :

- β_i , β_{ii} et β_{ij} sont les coefficients du modèle.
- k le nombre de facteur du modèle (dans ce cas k=2).
- P_i sont les valeurs prises par les facteurs.

- ε est la variation de l'erreur.

Dans notre cas, $k=2$, la fonction coût est donnée par l'équation 4.2 :

$$\text{coût} = \beta_0 + \beta_1 \times P_1 + \beta_2 \times P_2 + \beta_{11} \times P_1^2 + \beta_{12} \times P_1 P_2 + \beta_{22} \times P_2^2 + \varepsilon \quad (4.2)$$

Après analyse statistique des données, nous avons obtenu les coefficients de la corrélation résumés dans le tableau 4.3 suivant.

Tableau 4.3 Coefficients du modèle

coefficient	β_0	β_1	β_2	β_{11}	β_{22}	β_{12}
valeur	35929.4	-2496.73	-596.311	4015.49	583.346	1172.48

D'après le tableau 4.3, il ressort la corrélation entre la réponse et les différents facteurs du modèle exprimé par l'équation (4.3)

$$\text{cout} = 35929.4 - 2496.73 \times P_1 - 596.311 \times P_2 + 4015.49 \times P_1^2 + 1172.48 \times P_1 P_2 + 583.676 \times P_2^2 \quad (4.3)$$

Les valeurs optimales des facteurs de ce modèle sont résumées dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4 Valeurs des facteurs à l'optimum

Facteur	Valeur
P_1^*	42.39
P_2^*	-0.87

Les coordonnées des points P_1^* et P_2^* sont ceux de l'optimum des courbes des surfaces de réponses illustrées à la figure 4.7.

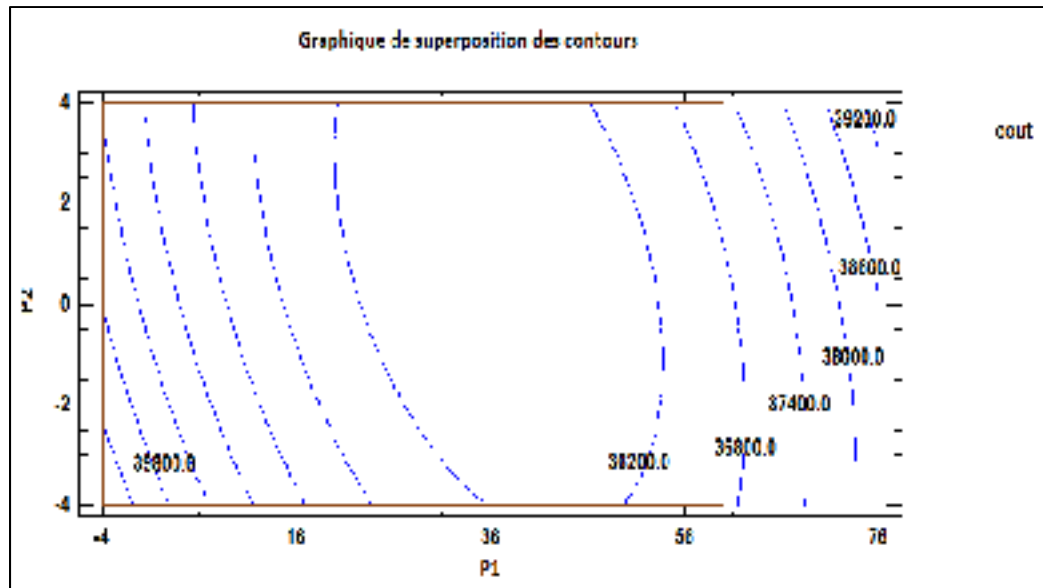


Figure 4.7 Graphique de superposition des contours

Ainsi, la droite (Y1) issue de P_1 de pente égale à 0.5 et décrivant le seuil de production à taux maximal a pour abscisse 42.39 tandis que la droite (Y2) issue de P_2 de pente égale à -1 décrivant le seuil d'élimination à taux nul diffère d'un pas de -0.87 du point P_1 , il a donc pour abscisse 41.52 ($42.39 - 0.87 = 41.52$) illustrée par la figure 4.8.

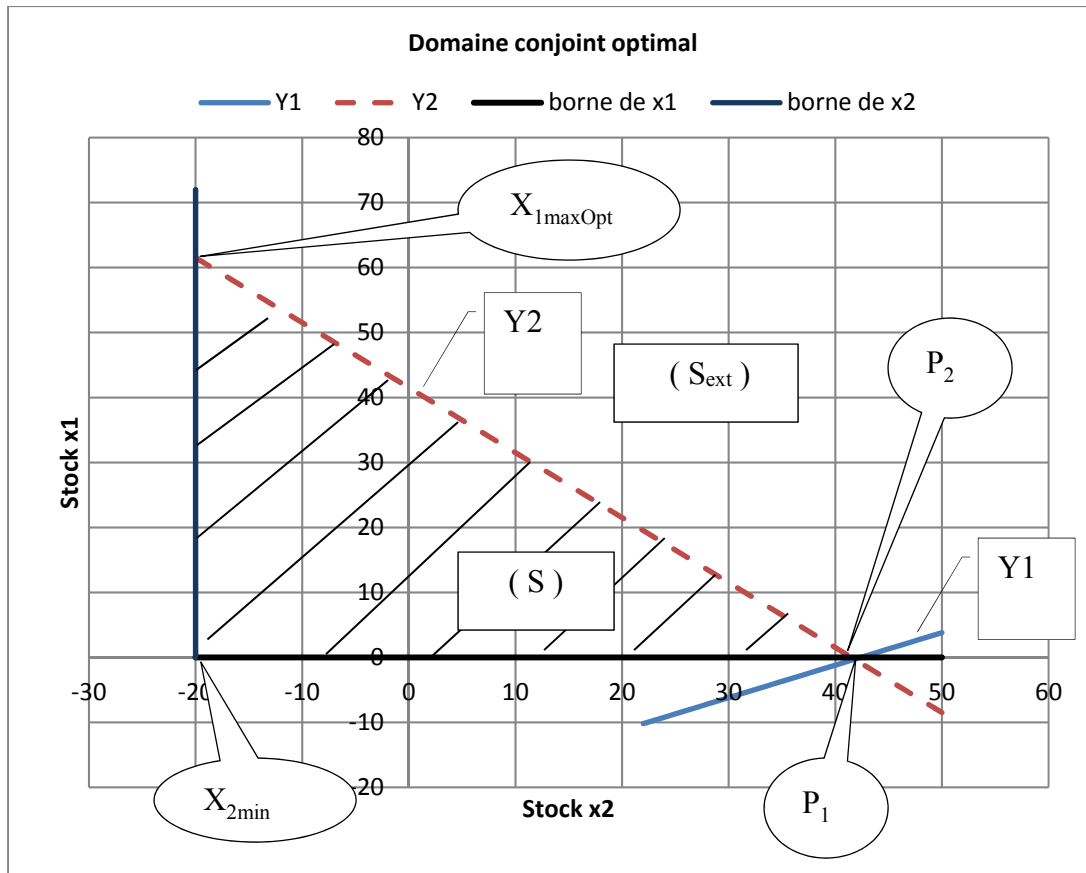


Figure 4.8 Zone optimale de production du système

Les frontières (Y1) et (Y2) du domaine sont décrites par l'équation (4.4)

$$\begin{cases} x_1 = 0.5x_2 - 21.19 & (Y_1) \\ x_1 = -x_2 + 41.52 & (Y_2) \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous pouvons ainsi décrire le domaine de faisabilité (S) hachuré à la figure 4.7 par le système d'équation (4.5). Dans la figure 4.8, $X_{1maxOpt}$ est le niveau maximal optimal des produits retournés à disposer en stock, X_{2min} est le niveau de stock minimal des produits finis admissible (le seuil de pénurie tolérable à ne pas franchir) et (S_{ext}) est le domaine extérieur au domaine de faisabilité.

$$(S) : \begin{cases} x_1 > 0.5x_2 - 21.19 \\ x_1 < -x_2 + 41.52 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq -20 \end{cases} \quad (4.5)$$

La politique optimale de production et d'élimination se déduisent des équations (4.6) et (4.7) et se résument de la manière suivante :

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } (x_1, x_2) \in (S) \\ d & \text{si } (x_1, x_2) \in (Y_1 \cup Y_2) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$u_d(x_1, x_2) = \begin{cases} r & \text{ailleurs} \\ r - d & \text{si } (x_1, x_2) \in (Y_1 \cup Y_2) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in (S) \end{cases} \quad (4.7)$$

L'implémentation de la politique optimale décrite par les équations 4.6 et 4.7 est résumé à la figure 4.9. À partir de cette figure, le gestionnaire de l'unité de recyclage est capable de prendre les décisions optimales de production et d'élimination des retours en fonction du niveau des différents stocks en inventaire.

Dans le paragraphe suivant, nous effectuerons une analyse de sensibilité du résultat obtenu.

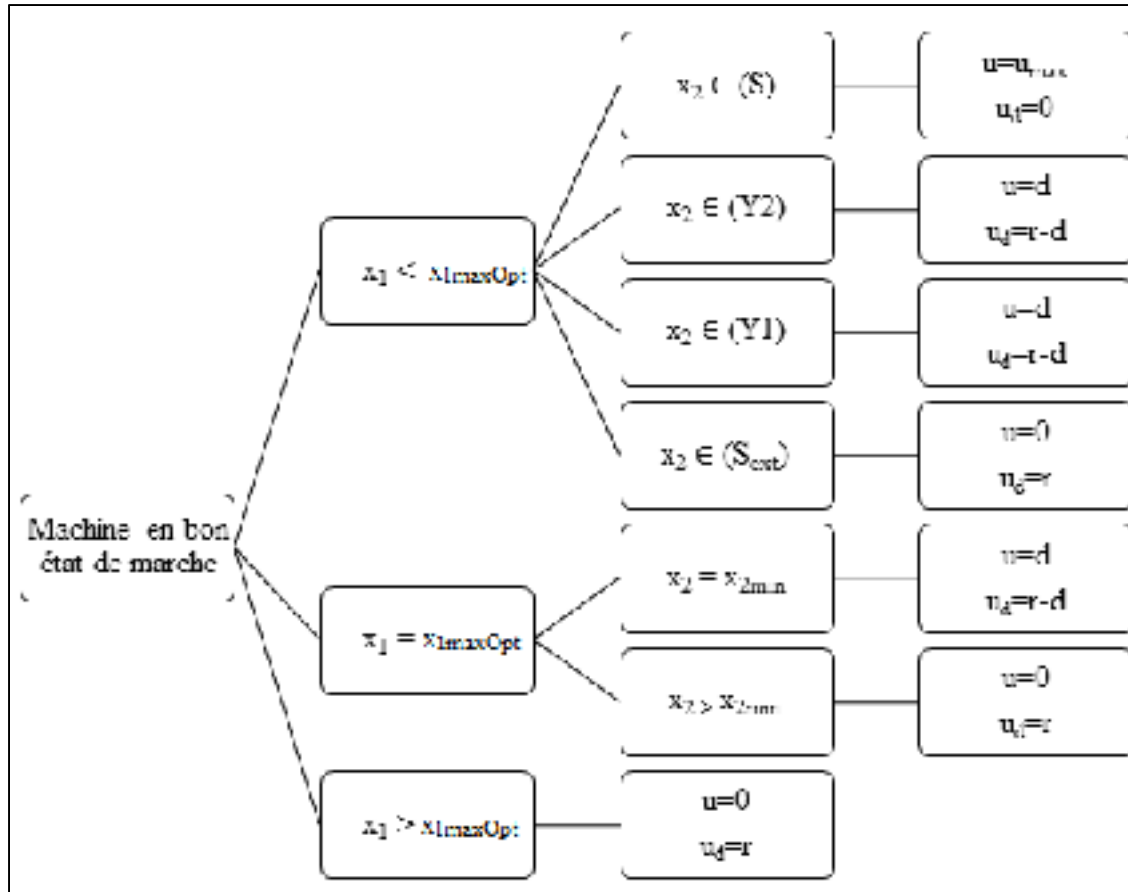


Figure 4.9 Implémentation de la politique optimale de gestion des flux

4.4 Analyse de sensibilité

Afin de valider la fiabilité de nos résultats, nous allons effectuer une analyse de sensibilité. Cette analyse consiste à varier différents paramètres du modèle afin d'observer leur effet sur les performances du modèle; un seul paramètre est modifié à la fois tout en conservant tous les autres constants. Les variables choisies pour cette étude sont notamment le taux de retour r , le taux de transition du mode panne au mode marche λ_{21} , le coût c_1 de stockage des matières premières, le coût c_{2p} de stockage des produits finis et le coût c_{2m} de pénurie des produits finis.

4.4.1 Analyse de sensibilité sur le taux de retour r

En simulant le modèle avec différentes valeurs du taux de retour r , nous observons les résultats suivants récapitulés dans le tableau 4.5.

Tableau 4.5 Effet de la variation du taux de retour r

R	0.55	0.5	0.45
P ₁	42.39	32.34	31.28
P ₂	-0.87	0.18	0.19

L'analyse de sensibilité montre que lorsque le taux de retour r **diminue**, le domaine **diminue** tel que l'illustre la figure 4.10 ce qui est raisonnable, car la matière première nécessaire à la production devient de moins en moins disponible.

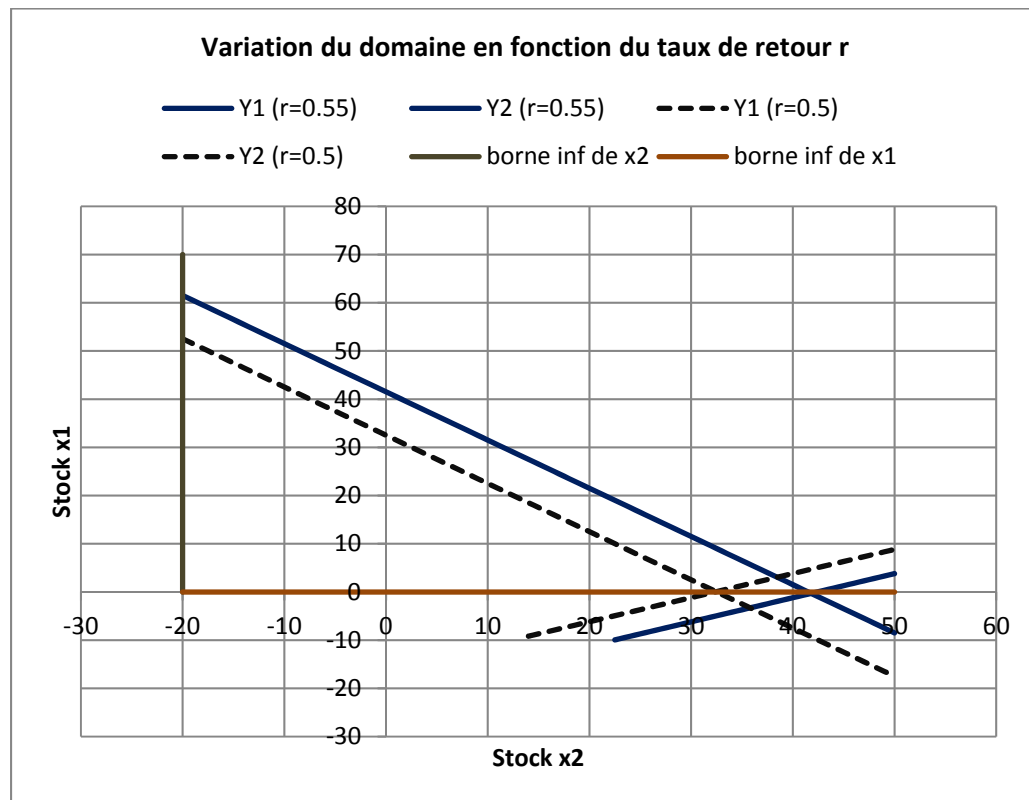


Figure 4.10 Variation du domaine en fonction du taux r

4.4.2 Analyse de sensibilité sur le taux de transition λ_{21}

En faisant varier le taux de transition λ_{21} du mode panne au mode marche, nous observons les résultats récapitulés dans le tableau 4.6.

Tableau 4.6 Effet de la variation du taux de transition λ_{21}

λ_{21}	0.075	0.10	0.15
P ₁	42.72	42.39	39.15
P ₂	-0.40	-0.87	-0.85

L'analyse de sensibilité montre que lorsque λ_{21} **augmente (ce qui correspond à une diminution de la MTTR)**, le domaine **diminue**, ce qui est raisonnable, car la machine est de plus en plus disponible, donc on peut diminuer le stock de sécurité telle que l'illustre la figure 4.11.

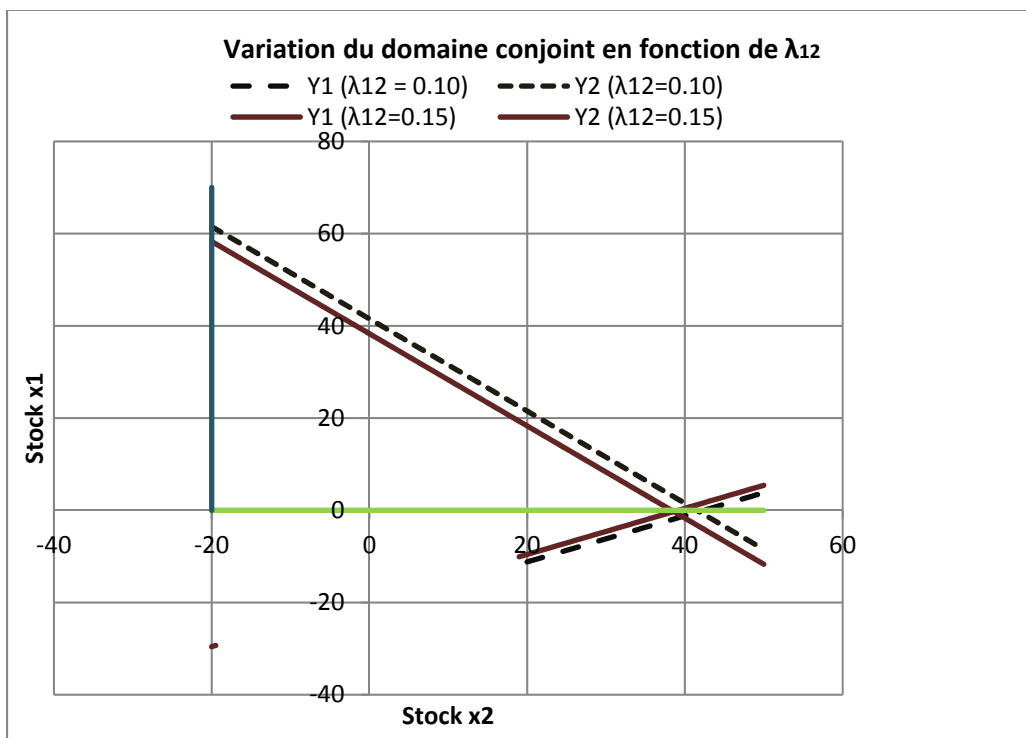


Figure 4.11 Analyse de sensibilité sur le taux de transition λ_{21}

4.4.4 Analyse de sensibilité sur le coût c_{2p}

En faisant varier le coût de stockage des produits finis c_{2p} , nous observons les performances du modèle résumées dans le tableau 4.7.

Tableau 4.7 Effet de la variation du coût de stockage c_{2p}

c_{2p}	2.8	30	60	120
P_1	42.39	31.22	25.31	14.55
P_2	-0.87	1.04	1.16	0.64

L'analyse montre bien que, lorsque c_{2p} **augmente**, le domaine **diminue**, ce qui correspond à nos attentes tel que le montre la figure 4.12 car il devient coûteux de stocker les produits finis.

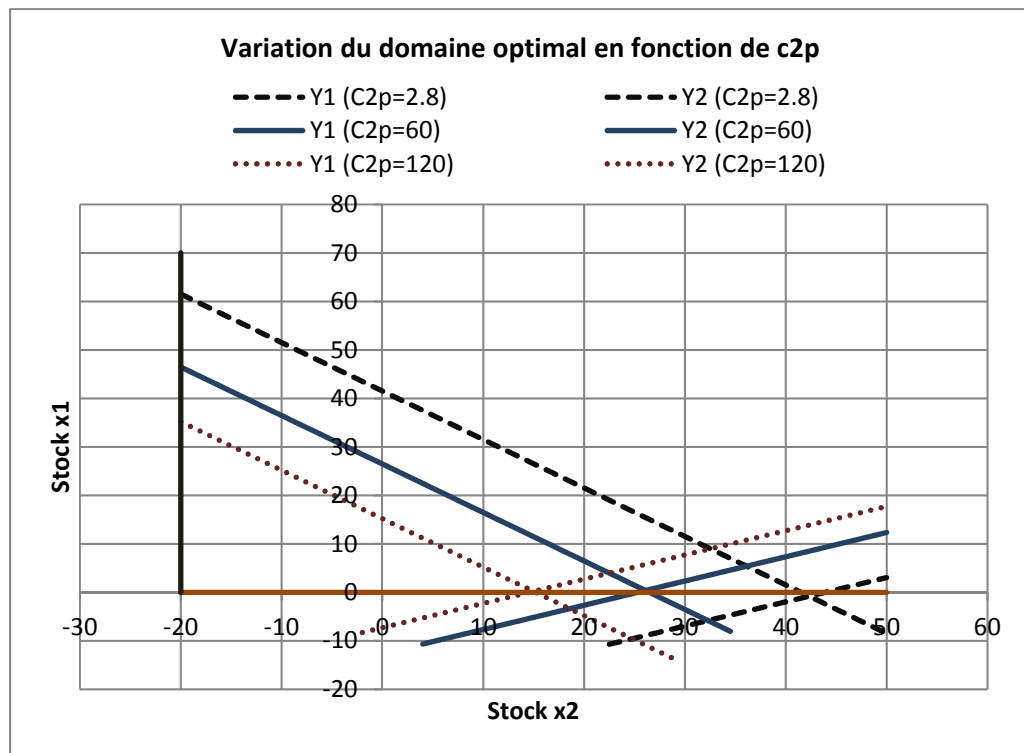


Figure 4.12 Analyse de sensibilité sur le coût c_{2p}

4.4.5 Analyse de sensibilité sur le cout c_{2m}

En faisant varier le coût de pénurie des produits finis c_{2m} , nous observons les performances du modèle résumées dans le tableau 4.8.

Tableau 4.8 Effet de la variation du coût de stockage c_{2m}

C_2 -	500	250	100	50
P_1	42.39	31.34	17.90	2.42
P_2	-0.87	1.03	1.12	0.89

Telle qu’illustrée à la figure 4.13, l’analyse montre que lorsque c_{2m} **diminue**, le domaine **diminue**, ce qui est tout à fait logique, car le manque de produit finis pénalise moins l’entreprise.

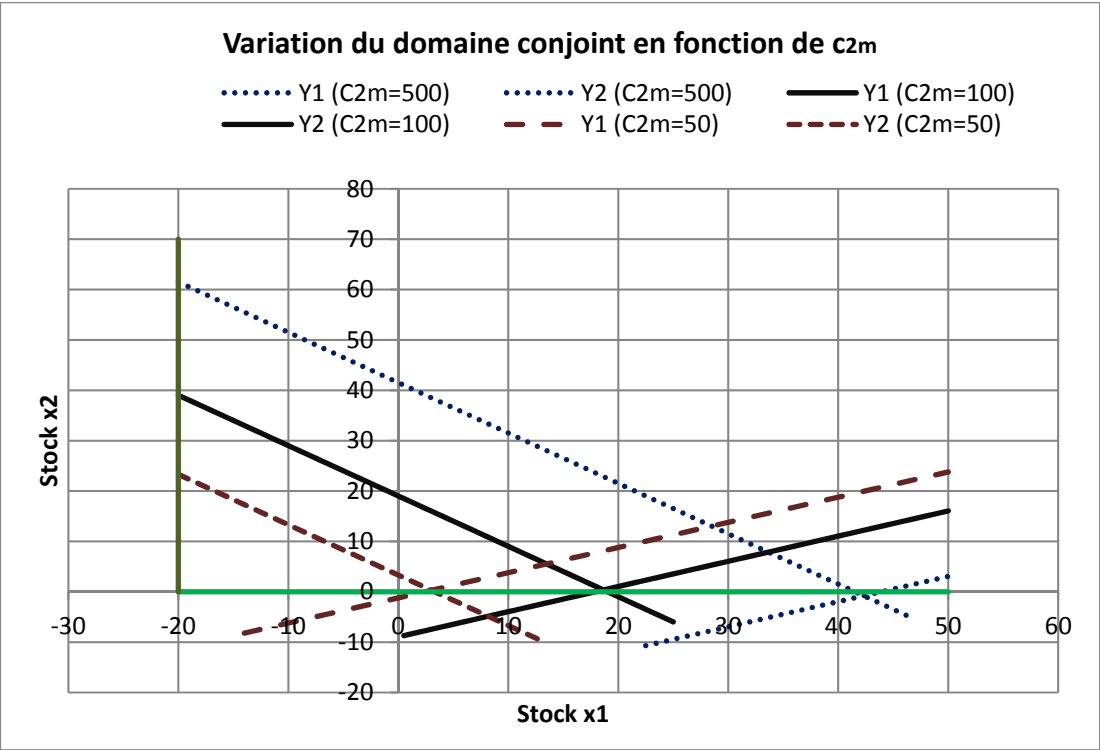


Figure 4.123 Analyse de sensibilité sur le cout c_{2m}

4.5 Conclusion

À partir de la résolution numérique des équations d'HJB par la méthode de Kushner dans le chapitre 2, nous avons déterminé la structure de la politique de production et d'élimination des retours. Dans le présent chapitre, nous avons utilisé la combinaison d'un plan d'expérience, la simulation et l'analyse des surfaces de réponse afin d'étendre les résultats obtenus à des contextes de production dans un cas général. Nous avons déterminé une corrélation entre le coût de production et les différents facteurs, ceci après trois répliques. Nous avons pu déterminer la loi de commande optimale avec une bonne précision, car le coefficient de détermination (R-carré) obtenu est égal à 95.85%, traduisant le fait qu'environ 96% de la variabilité totale est expliquée par notre modèle. Les travaux de ce chapitre se sont achevés par une analyse de sensibilité qui ont permis de montrer que notre modèle réagissait bien selon les attentes lorsqu'on faisait varier un paramètre à la fois, validant ainsi les résultats obtenus.

CONCLUSION

Ce travail de recherche effectué au sein du Laboratoire d'Intégration des Techniques de Production de l'ETS (LITP) portait sur l'optimisation des stratégies de fabrication et de réutilisation de l'aluminium en logistique inverse et avait pour objectif la détermination de la politique de commande optimale d'une unité de recyclage de l'aluminium en logistique inverse en boucle ouverte afin de minimiser les coûts.

Dans le chapitre 1, nous avons présenté les différentes activités de la logistique inverse ainsi que les différentes configurations existantes. Nous avons dégagé la problématique de notre sujet puis avons présenté les deux principales approches adoptées par des auteurs afin d'optimiser le recyclage de l'aluminium en mettant l'accent sur la commande optimale des systèmes de production qui fait appel à la programmation dynamique stochastique. Après avoir élucidé les objectifs de notre travail, nous avons présenté la méthodologie adoptée qui est une combinaison de l'approche analytique, de la simulation, les plans d'expériences et l'analyse de la variance.

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous avons assimilé l'unité de recyclage à une machine produisant un seul type de produit (M1P1). En s'appuyant sur des hypothèses, nous avons développé un modèle mathématique du système considéré en le considérant alimenté à un retour des matières à taux constant et suppléant une demande client à taux constant. Après avoir résolu les équations d'HJB obtenues par une méthode numérique, nous avons montré que la solution optimale est du type seuil critique. Ces résultats obtenus ont été validés par une analyse de sensibilité.

Au chapitre 3 de notre travail, nous avons étendu notre premier modèle en considérant le cas d'une unité de recyclage alimenté à un retour variable et suppléant une demande à taux constant. Après une résolution numérique des équations d'HJB obtenues, nous avons également obtenu une politique optimale du type seuil critique. Les observations faites par l'analyse de sensibilité nous ont montré que les résultats obtenus étaient valides.

Dans le chapitre 4 de notre travail, nous avons utilisé une combinaison de la simulation, du plan d'expérience et de l'analyse de la variance afin de d'étendre les résultats pour le cas des processus Markoviens non homogènes. Nous avons obtenu une corrélation entre le coût et les différents niveaux de stocks et avons pu obtenir la politique optimale. Les résultats obtenus ont également été validés par une analyse de sensibilité.

Ce travail de recherche a des retombées économiques et environnementales car, il permet aux entreprises de recyclage de l'aluminium d'optimiser leur profit tout en préservant l'environnement. La contribution scientifique de ce travail de recherche réside dans la formulation des modèles mathématiques utilisant la programmation dynamique stochastique permettant de déterminer la politique optimale de production et d'élimination des retours pour les systèmes en logistique inverse en boucle ouverte. La validité de nos modèles a été confirmée par des analyses de sensibilité. Notre travail a permis de montrer que la politique de production et d'élimination des retours dépend à la fois des niveaux d'inventaires des produits finis et des retours collectés et que cette dernière dépend du taux de retour des produits en fin de vie. Ce travail offre toutefois de nombreuses perspectives.

- i) L'étude du système avec retour et demande tous deux à taux variables.
- ii) L'étude du système considéré en intégrant les stratégies de maintenance et l'usure de la machine.
- iii) L'intégration les différentes étapes dans le processus de fabrication, c'est-à-dire en assimilant le système à plusieurs machines en série produisant un seul type de produit.
- iv) Étendre l'étude pour le cas des systèmes non Markovien pour prendre avantage des résultats du chapitre 4 sur la combinaison de la méthode analytique, le plan d'expériences et la simulation.

ANNEXE I

Programme Matlab principal Modèle I: Cas d'une machine de production avec demande et retour à taux constants

```
Cm=14;          % Coût de fabrication des prod finis par la machine incluant
main d'oeuvre
Cd=1.5;          % Pénalise la destruction des retours d'alu collectés mais
détruits
C1=1.8;          % pénalise le stock des matières premières
C2p=3.5;         % penalise le stock positif des produits finis
C2m=55;          % penalise le stock negatif (pénurie) des produits finis
Calpha=13;       % Coût moyen de maintenance de la machine au mode panne;
Cecart=55;        % penalise l'ecart entre les stocks x1 et x2
Cdiff=1;         % penalise le risque d'avoir un stock nul matiere premiere
hx1=0.5;         % pas suivant x1
hx2=0.5;         % pas suivant x2
rho=0.1;         % Taux d'actualisation de la monnaie
r= 0.55;         % taux de retour constant des matières premières
d=0.4;          % taux de demande du produit fini
Umax=0.5;        % taux de production max des produits finis par la machine
q12=1/100;       % taux de transition du mode marche au mode panne
q21=1/10;        % taux de transition du mode panne au mode marche
q11=-q12;
q22=-q21;

x1inf=0;         % borne inferieure du stock matiere premiere
x1sup=20;        % borne superieure du stock matiere premiere
x2inf=-10;       % borne inferieure du stock des produits fini
x2sup=20;        % borne superieure du stock des produit finis
Nx1=1+(x1sup-x1inf)/hx1; % nombre de points sur la grille des matières
premières
Nx2=1+(x2sup-x2inf)/hx2; % nombre de points sur la grille des produits
finis
xx1=[];
xx2=[];

UU1(1)=0;
UU1(2)=r-d;      % différentes valeurs du taux de rejet Ud au mode marche!!
UU1(3)=r-Umax;
UU1(4)=r;

UU2(1)= 0; % différentes valeurs du taux de production des produits finis
UU2(2)= d;
UU2(3)= Umax;

UU3(1)=0;        % différentes valeurs du taux de rejet Ud au mode panne
UU3(2)=r-Umax;
UU3(3)=r-d;
UU3(4)=r;
```

```

Vp1=zeros(Nx1,Nx2);
Vp2=zeros(Nx1,Nx2);
Va1=zeros(Nx1,Nx2);
Va2=zeros(Nx1,Nx2);

X11_op=0;      % seuil critique du stock x1 de la fonction valeur au mode 1
X12_op=0;      % seuil critique du stock x2 de la fonction valeur au mode 1
X21_op=0;      % seuil critique du stock x1 de la fonction valeur au mode 2
X22_op=0;      % seuil critique du stock x2 de la fonction valeur au mode 2

cont11=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de disposal au
mode marche (1)
cont12=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de disposal au
mode panne (2)
cont2=zeros(Nx1,Nx2);  % initialise la matrice des taux de production
des produits finis

C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
it=0; precis=0.01;
Err=100000; %pour while err > precis

while Err > precis %boucle d'iteration
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
it=it+1;
%
% Policy evaluation
%
for i=1:Nx1
    x1=x1inf+(i-1)*hx1;
    xx1(i)=x1;
    for j=1:Nx2
        x2=x2inf+(j-1)*hx2;
        xx2(j)=x2;
        u1=cont11(i,j);
        u2=cont2(i,j);
        u3=cont12(i,j);
        [Va11,
Va21]=cout_mem7(i,j,x1,x2,hx1,hx2,r,u1,u2,u3,q11,q22,Vp1,Vp2,d,Nx1,Nx2,rho
,Cm,Cd,C1,C2p,C2m,Calpha,Cecart,Cdiff);
        Va1(i,j)=Va11;
        Va2(i,j)=Va21;

        if abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j))> C1MAX
            C1MAX=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));
        end

        if abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j))< C1MIN
            C1MIN=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));
        end

        if abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j))> C1MAX
            C1MAX=abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j));
        end
    end
end

```

```

        if abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j)) < C1MIN
            C1MIN=abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j));
        end
    end % end de for j=1: policy evaluation
end %end de for i=1

vmin=(rho/(1-rho))*C1MIN;
vmax=(rho/(1-rho))*C1MAX;
Err=abs(vmin-vmax)
tabErr(it)=Err;
    Vp1=Va1;
    Vp2=Va2;

%
% policy improvement
%
V1_op=5e+10;
V2_op=5e+10;
    for i=1:Nx1
        x1=x1inf+(i-1)*hx1;
        xx1(i)=x1;
        for j=1:Nx2
            x2=x2inf+(j-1)*hx2;
            xx2(j)=x2;
            VP1M=5e+10;
            VP2M=5e+10;

            for c1=1:4
                u1=UU1(c1);

                for c2=1:3;
                    u2=UU2(c2);
                    if x1==0
                        u2=0;
                    end
                    for c3=1:4;
                        u3=UU3(c3);
                        [Va11,
Va21]=cout_mem7(i,j,x1,x2,hx1,hx2,r,u1,u2,u3,q11,q22,Vp1,Vp2,d,Nx1,Nx2,rho
,Cm,Cd,C1,C2p,C2m,Calpha,Cecart,Cdiff);
                        if Va11 < VP1M
                            VP1M = Va11;
                            cont11(i,j)=u1;
                            cont2(i,j)=u2;
                        end

                        if Va21 < VP2M
                            VP2M = Va21;
                            cont12(i,j)=u3;
                        end

                        if Va11<V1_op
                            V1_op=Va11;
                            X11_op=x1;

```

```

        X12_op=x2;
    end

    if Va21<V2_op
        V2_op=Va21;
        X21_op=x1;
        X22_op=x2;
    end
    end % for c3
end % for c2
end % for c1=1:2
end %for j=Nx2
end % for i=x1 policy improv
    Va1(i,j)=VP1M;
    Va2(i,j)=VP2M;
end % iteration while
Hedging_point11 =X11_op;
Hedging_point12 =X12_op;
Hedging_point21 =X21_op;
Hedging_point22 =X22_op;
figure(1)
mesh(xx2,xx1,Va1)
xlabel ('produits finis')
ylabel ('matière premières')
zlabel('v(1,x)')
title ('Value function at mode 1')
grid on

figure(2)
mesh(xx2,xx1,Va2)
xlabel ('produits finis')
ylabel ('matière premières')
zlabel('v(2,x)')
title ('Value function at mode 2')
grid on

figure(3)
mesh(xx2,xx1,cont11)
xlabel ('x1 (produits finis)')
ylabel ('x2 (matière premières)')
zlabel('ud1(1,x)')
title('Taux élimination matières premières au mode 1')
grid on

figure(4)
mesh(xx2,xx1,cont12)
xlabel ('x1 (produits finis)')
ylabel ('x2 (matière premières)')
zlabel('ud2(1,x)')
title('Taux élimination matières premières au mode 2')
grid on

figure(5)
mesh(xx2,xx1,cont2)

```

```
xlabel ('x2 (produits finis)')  
ylabel ('x1 (matière premières)')  
zlabel('u(1,x)')  
title('taux de production des produits finis au mode 1')  
grid on  
  
figure(6)  
plot(tabErr)
```


ANNEXE II

Fonction coût modèle I

```
function [Va11,Va21] = cout_model1(
i,j,x1,x2,hx1,hx2,r,u1,u2,u3,q11,q22,Vp1,Vp2,d,Nx1,Nx2,rho,Cm,Cd,C1,C2p,C2
m,Calpha,Cecart,Cdiff )

VV=[]; %vecteur des différentes grandeurs entrants dans le calcul des
fonctions valeurs
if x2>=0
    gc2=C2p*x2;
    gc1=C1*x1+Cdiff*(Nx1-x1);    %+Cecart*(abs(x2-x1));
else
    gc2=-C2m*x2;
    gc1=C1*x1+Cdiff*(Nx1-x1)+Cecart*abs((abs(x2)-x1));
end
gc31=Cd*u1; %% cout de disposal en mode marche
gc32=Cd*u3; %% cout de disposal en mode panne
gc4=Cm*u2; %% cout de manufacturing sur la machine
gc5=Calpha; % cout constant de maintenance

VV(1)=Vp2(i,j);
VV(6)=Vp1(i,j);

if i==1
    if j==1;

        VV(2)=Vp1(i+1,j);
        VV(3)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
        VV(4)=Vp1(i,j+1);
        VV(5)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
        VV(7)=Vp2(i+1,j);
        VV(8)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
        VV(9)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
    elseif j==Nx2

        VV(2)=Vp1(i+1,j);
        VV(3)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
        VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
        VV(5)=Vp1(i,j-1);
        VV(7)=Vp2(i+1,j);
        VV(8)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
        VV(9)=Vp2(i,j-1);
    else

        VV(2)=Vp1(i+1,j);
        VV(3)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
        VV(4)=Vp1(i,j+1);
        VV(5)=Vp1(i,j-1);
        VV(7)=Vp2(i+1,j);
```

```

        VV(8)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
        VV(9)=Vp2(i,j-1);
    end
elseif i==Nx1
    if j==1
        VV(2)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
        VV(3)=Vp1(i-1,j);
        VV(4)=Vp1(i,j+1);
        VV(5)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
        VV(7)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
        VV(8)=Vp2(i-1,j);
        VV(9)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
    elseif j==Nx2
        VV(2)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
        VV(3)=Vp1(i-1,j);
        VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
        VV(5)=Vp1(i,j-1);
        VV(7)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
        VV(8)=Vp2(i-1,j);
        VV(9)=Vp2(i,j-1);
    else
        VV(2)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
        VV(3)=Vp1(i-1,j);
        VV(4)=Vp1(i,j+1);
        VV(5)=Vp1(i,j-1);
        VV(7)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
        VV(8)=Vp2(i-1,j);
        VV(9)=Vp2(i,j-1);
    end
else
    if j==1
        VV(2)=Vp1(i+1,j);
        VV(3)=Vp1(i-1,j);
        VV(4)=Vp1(i,j+1);
        VV(5)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
        VV(7)=Vp2(i+1,j);
        VV(8)=Vp2(i-1,j);
        VV(9)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
    elseif j==Nx2
        VV(2)=Vp1(i+1,j);
        VV(3)=Vp1(i-1,j);
        VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
        VV(5)=Vp1(i,j-1);
        VV(7)=Vp2(i+1,j);
        VV(8)=Vp2(i-1,j);
        VV(9)=Vp2(i,j-1);
    else
        VV(2)=Vp1(i+1,j);
        VV(3)=Vp1(i-1,j);
        VV(4)=Vp1(i,j+1);
        VV(5)=Vp1(i,j-1);
        VV(7)=Vp2(i+1,j);
        VV(8)=Vp2(i-1,j);
        VV(9)=Vp2(i,j-1);
    end
end

```

```

end
if (r-u1-u2 >= 0)
    Vs1=1;
    Vs2=0;
else
    Vs1=0;
    Vs2=1;
end
if (u2-d >= 0)
    Vs3=1;
    Vs4=0;
else
    Vs3=0;
    Vs4=1;
end
if (r-u3 >= 0)
    Vs5=1;
    Vs6=0;
else
    Vs5=0;
    Vs6=1;
end
Q1=1/(rho+abs(q11)+(abs(r-u1-u2)/hx1)+(abs(u2-d)/hx2));
Q2=1/(rho+abs(q22)+(abs(r-u3)/hx1)+(abs(d)/hx2));
Va11=Q1*(gc1+gc2+gc31+gc4+(abs(q11)*VV(1))+(abs(r-u1-
u2)/hx1)*VV(2)*Vs1+(abs(r-u1-u2)/hx1)*VV(3)*Vs2+(abs(u2-
d)/hx2)*VV(4)*Vs3+(abs(u2-d)/hx2)*VV(5)*Vs4)); %
Va21=Q2*(gc1+gc2+gc32+gc5+(abs(q22)*VV(6))+(abs(r-
u3)/hx1)*VV(7)*Vs5+(abs(r-u3)/hx2)*VV(8)*Vs6+(abs(d)/hx2)*VV(9)); %
fin du programme %

```


ANNEXE III

Programme Matlab principal modèle II: Cas d'une machine de production avec demande à taux constant et retour aléatoire

```
Cm=14;          % Coût de fabrication des prod finis par la machine incluant
main d'oeuvre
Cd=1.5;          % coût d'élimination des retours d'alu collectés mais non
transformés
Cl=1.8;          % coût de stockage des matières premières par unité de
pièces
C2p=3.5;         % penalise le stock positif des produits finis
C2m=55;          % penalise le stock negatif (pénurie) des produits finis
Calpha=13;       % Coût moyen de maintenance de la machine au mode panne;
Cecart=55;       % penalise l'ecart entre les stocks x1 et x2 négatif
Cenv=1;          % penalise l'écart entre le quota de mat à recycler et la
quote effectiv. recyclee
hx1=0.5;         % pas suivant x1
hx2=0.5;         % pas suivant x2
rho=0.1;         % Taux d'actualisation de la monnaie
r1= 0.55;        % 1er taux de retour des matières premières
r2=0.45;         % 2e taux de retour des matières premières
d=0.4;           % taux de demande constant du produit fini
Umax=0.5;        % taux de production max des produits finis par la machine

q12=0.05;        % taux de transition du système du mode 1 au mode 2
q13=0.01;        % taux de transition du système du mode 1 au mode 3
q11=-(q12+q13);
q21=0.1;         % taux de transition du mode 2 au mode 1
q24=0.01;        % taux de transition du mode 2 au mode 4
q22=-(q21+q24);
q31=0.1;         % taux de transition du mode 3 au mode 1
q34=0.05;        % taux de transition du mode 3 au mode 4
q33=-(q31+q34);
q42=0.1;         % taux de transition du mode 4 au mode 2
q43=0.1;         % taux de transition du mode 4 au mode 3
q44=-(q42+q43);

x1inf=0;         % borne inferieure du stock matière première
x1sup=20;        % borne superieure du stock matière première
x2inf=-10;       % borne inferieure du stock des produits fini
x2sup=20;        % borne superieure du stock des produit finis
Nx1=1+(x1sup-x1inf)/hx1; % nombre de points sur la grille des matières
premières
Nx2=1+(x2sup-x2inf)/hx2; % nombre de points sur la grille des produits
finis
xx1=[];
xx2=[];

UU1(1)=0;
```

```

UU1(2)=r1-d;      % différentes valeurs du taux de rejet Ud1 au mode 1
UU1(3)=r1-Umax;
UU1(4)=r1;

UU2(1)= 0;        % différentes valeurs du taux de production u1 au mode 1
UU2(2)= d;
UU2(3)= Umax;

UU3(1)=0;
UU3(2)=r2-d;      % différentes valeurs du taux de rejet Ud2 au mode 2
UU3(3)=r2;

UU4(1)= 0;        % différentes valeurs du taux de production u2 au mode 2
UU4(2)= d;
UU4(3)= r2;

UU5(1)=0;
UU5(2)=r1-d;      % différentes valeurs du taux de rejet Ud3 au mode 3
UU5(3)=r1-Umax;
UU5(4)=r1;

UU6(1)=0;
UU6(2)=r2-d;      % différentes valeurs du taux de rejet Ud4 au mode panne 4
UU6(3)=r2;

Vp1=zeros(Nx1,Nx2);
Vp2=zeros(Nx1,Nx2);
Vp3=zeros(Nx1,Nx2); % matrice des valeurs précédentes de la fonction
valeur
Vp4=zeros(Nx1,Nx2);

Va1=zeros(Nx1,Nx2);
Va2=zeros(Nx1,Nx2);
Va3=zeros(Nx1,Nx2); % matrice des valeurs actuelles de la fonction valeur
Va4=zeros(Nx1,Nx2);

X11_op=0;         % valeur optimale du stock x1 de la fonction valeur au mode
1
X12_op=0;         % valeur optimale du stock x2 de la fonction valeur au mode
1
X21_op=0;         % valeur optimale du stock x1 de la fonction valeur au mode
2
X22_op=0;         % valeur optimale du stock x2 de la fonction valeur au mode
2
X31_op=0;         % valeur optimale du stock x1 de la fonction valeur au mode
3
X32_op=0;         % valeur optimale du stock x2 de la fonction valeur au mode
3
X41_op=0;         % valeur optimale du stock x1 de la fonction valeur au mode
4
X42_op=0;         % valeur optimale du stock x2 de la fonction valeur au mode 4

```

```

disp1=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de disposal au
mode 1
prod1=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de production au
mode 1
disp2=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de disposal au
mode 2
prod2=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de production au
mode 2
disp3=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de disposal au
mode 3
disp4=zeros(Nx1,Nx2); % initialise la matrice des taux de disposal au
mode 4

C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
it=0; precis=0.1;
Err=100000; %pour while err > precis

while Err > precis %boucle d'iteration
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
it=it+1
%
% Policy evaluation
%
for i=1:Nx1
    x1=x1inf+(i-1)*hx1;
    xx1(i)=x1;
    for j=1:Nx2
        x2=x2inf+(j-1)*hx2;
        xx2(j)=x2;
        ud1=disp1(i,j);
        u1=prod1(i,j);
        ud2=disp2(i,j);
        u2=prod2(i,j);
        ud3=disp3(i,j);
        ud4=disp4(i,j);

        [Va11,Va21,Va31,Va41]=cout_model2(i,j,x1,x2,hx1,hx2,r1,r2,ud1,u1,ud2,u2,ud
3,ud4,q11,q12,q13,q21,q22,q24,q31,q33,q34,q42,q43,q44,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,d,Nx
1,Nx2,rho,Cm,Cd,C1,C2p,C2m,Calpha,Cecart,Cenv);
        Va1(i,j)=Va11;
        Va2(i,j)=Va21;
        Va3(i,j)=Va31;
        Va4(i,j)=Va41;

        if abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j))> C1MAX
            C1MAX=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));
        end

        if abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j))< C1MIN
            C1MIN=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));
        end

        if abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j))> C1MAX

```

```

        C1MAX=abs (Va2 (i,j) -Vp2 (i,j));
    end

    if abs (Va2 (i,j) -Vp2 (i,j)) < C1MIN
        C1MIN=abs (Va2 (i,j) -Vp2 (i,j));
    end

    if abs (Va3 (i,j) -Vp3 (i,j)) > C1MAX
        C1MAX=abs (Va3 (i,j) -Vp3 (i,j));
    end

    if abs (Va3 (i,j) -Vp3 (i,j)) < C1MIN
        C1MIN=abs (Va3 (i,j) -Vp3 (i,j));
    end

    if abs (Va4 (i,j) -Vp4 (i,j)) > C1MAX
        C1MAX=abs (Va4 (i,j) -Vp4 (i,j));
    end

    if abs (Va4 (i,j) -Vp4 (i,j)) < C1MIN
        C1MIN=abs (Va4 (i,j) -Vp4 (i,j));
    end
end % end de for j=1: policy evaluation
end %end de for i=1

vmin=(rho/(1-rho))*C1MIN;
vmax=(rho/(1-rho))*C1MAX;
Err=abs (vmin-vmax)
tabErr(it)=Err;
    Vp1=Va1;
    Vp2=Va2;
    Vp3=Va3;
    Vp4=Va4;

%
% policy improvement
%
V1_op=5e+10;
V2_op=5e+10;
V3_op=5e+10;
V4_op=5e+10;
    for i=1:Nx1
        x1=x1inf+(i-1)*hx1;
        xx1(i)=x1;
        for j=1:Nx2
            x2=x2inf+(j-1)*hx2;
            xx2(j)=x2;
            VP1M=5e+10;
            VP2M=5e+10;
            VP3M=5e+10;
            VP4M=5e+10;

            for c1=1:4
                ud1=UU1 (c1);
                for c2=1:3;

```

```

u1=UU2(c2);
if x1==0
u1=0;
end

for c3=1:3;
ud2=UU3(c3);
for c4=1:3;
u2=UU4(c4);
if x1==0
u2=0;
end

for c5=1:4;
ud3=UU5(c5);

for c6=1:3;
ud4=UU6(c6);

[Va11,Va21,Va31,Va41
]=cout_model2(i,j,x1,x2,hx1,hx2,r1,r2,ud1,u1,ud2,u2,ud3,ud4,q11,q12,q13,q2
1,q22,q24,q31,q33,q34,q42,q43,q44,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,d,Nx1,Nx2,rho,Cm,Cd,C1,C
2p,C2m,Calpha,Cecart,Cenv);
if Va11 < VP1M
VP1M = Va11;
disp1(i,j)=ud1;
prod1(i,j)=u1;
end
if Va21 < VP2M
VP2M = Va21;
disp2(i,j)=ud2;
prod2(i,j)=u2;
end

if Va31 < VP3M
VP3M = Va31;
disp3(i,j)=ud3;
end

if Va41 < VP4M
VP4M = Va41;
disp4(i,j)=ud4;
end

if Va11<V1_op
V1_op=Va11;
X11_op=x1; % determine les coordonnées du pt
optimal de la fonc val au mode 1
X12_op=x2;
end
%X11= mode 1 stock 1
%X12= mode 1 stock 2
if Va21<V2_op

```

```

        V2_op=Va21; % determine les coordonnées du pt
optimal de la fonc val au mode 2
        X21_op=x1;
        X22_op=x2;
    end

    if Va31<V3_op
        V3_op=Va31;
        X31_op=x1; % determine les coordonnées du pt
optimal de la fonc val au mode 3
        X32_op=x2;
    end

    if Va41<V4_op
        V4_op=Va41; % determine les coordonnées du pt
optimal de la fonc val au mode 4
        X41_op=x1;
        X42_op=x2;
    end
end % for c6
end % for c5
end % for c4
end %for c3
end % for c2
end % for c1
end % for j=x2 policy improv
end % for i=Nx1
    Va1(i,j)=VP1M;
    Va2(i,j)=VP2M;
    Va3(i,j)=VP3M;
    Va4(i,j)=VP4M;
end % iteration while
Hedging_point11 =X11_op;
Hedging_point12 =X12_op;
Hedging_point21 =X21_op;
Hedging_point22 =X22_op;
Hedging_point31 =X31_op;
Hedging_point32 =X32_op;
Hedging_point41 =X41_op;
Hedging_point42 =X42_op;

figure(1)
mesh(xx2,xx1,Va1)
xlabel ('produits finis')
ylabel ('matière premières')
zlabel('v(1,x)')
title ('Value function at mode 1')
grid on

figure(2)
mesh(xx2,xx1,Va2)
xlabel ('produits finis')
ylabel ('matière premières')
zlabel('v(2,x)')

```

```

title ('Value function at mode 2')
grid on

figure(3)
mesh(xx2,xx1,Va3)
xlabel ('produits finis')
ylabel ('matière premières')
zlabel('v(3,x)')
title ('Value function at mode 3')
grid on

figure(4)
mesh(xx2,xx1,Va4)
xlabel ('produits finis')
ylabel ('matière premières')
zlabel('v(4,x)')
title ('Value function at mode 4')
grid on

figure(5)
mesh(xx2,xx1,disp1)
xlabel ('x2 (produits finis)')
ylabel ('x1 (matière premières)')
zlabel('ud1(1,x)')
title('Taux élimination matières premières au mode 1')
grid on

figure(6)
mesh(xx2,xx1,prod1)
xlabel ('x2 (produits finis)')
ylabel ('x1 (matière premières)')
zlabel('u1(1,x)')
title('Taux production produits finis au mode 1')
grid on

figure(7)
mesh(xx2,xx1,disp2)
xlabel ('x2 (produits finis)')
ylabel ('x1 (matière premières)')
zlabel('ud2(2,x)')
title('taux éliminations matières premières au mode 2')
grid on

figure(8)
mesh(xx2,xx1,prod2)
xlabel ('x2 (produits finis)')
ylabel ('x1 (matière premières)')
zlabel('u2(2,x)')
title('Taux production produits finis au mode 2')
grid on

figure(9)
mesh(xx2,xx1,disp3)
xlabel ('x2 (produits finis)')

```

```
ylabel ('x1  (matière premières)')  
zlabel('ud3(3,x)')  
title('taux éliminations matières premières au mode 3')  
grid on
```

```
figure(10)  
mesh(xx2,xx1,disp4)  
xlabel ('x2  (produits finis)')  
ylabel ('x1  (matière premières)')  
zlabel('ud4(4,x)')  
title('taux éliminations matières premières au mode 4')  
grid on
```

```
figure(11)  
plot(tabErr)
```

ANNEXE IV

Fonction coût modèle II

```
function [Va11,Va21,Va31,Va41] =  
cout_model2(i,j,x1,x2,hx1,hx2,r1,r2,ud1,u1,ud2,u2,ud3,ud4,q11,q12,q13,q21,  
q22,q24,q31,q33,q34,q42,q43,q44,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,d,Nx1,Nx2,rho,Cm,Cd,C1,C2p  
,C2m,Calpha,Cecart,Cenv)  
  
VV=[]; %vecteur des différentes grandeurs entrants dans le calcul des  
fonctions valeurs  
  
if x2>=0  
    gc2=C2p*x2;  
    gc1=C1*x1+Cenv*(Nx1-x1);    %%+Cecart*(abs(x2-x1));  
  
else  
    gc2=-C2m*x2;  
    gc1=C1*x1+Cenv*(Nx1-x1)+Cecart*abs((abs(x2)-x1));  
end  
  
gc3=Cd*ud1; %% cout de disposal au mode 1  
gc4=Cm*u1; %% cout de production au mode 1  
gc5=Cd*ud2; %% cout de disposal au mode 2  
gc6=Cm*u2; %% cout de production au mode 2  
gc7=Cd*ud3; %% cout de disposal au mode 3  
gc8=Calpha;  
gc9=Cd*ud4; %% cout de disposal au mode 4  
  
VV(1)=Vp2(i,j);  
VV(2)=Vp3(i,j);  
VV(7)=Vp1(i,j);  
VV(8)=Vp4(i,j);  
  
if i==1  
    if j==1;  
        VV(3)=Vp1(i+1,j);  
        VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);  
        VV(5)=Vp1(i,j+1);  
  
        VV(6)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);  
        VV(9)=Vp2(i+1,j);  
  
        VV(10)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);  
        VV(11)=Vp2(i,j+1);  
  
        VV(12)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);  
        VV(13)=Vp3(i+1,j);  
  
        VV(14)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);
```

```

VV(15)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);
VV(16)=Vp4(i+1,j);

VV(17)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);
VV(18)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j+1);

elseif j==Nx2
VV(3)=Vp1(i+1,j);
VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
VV(5)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(6)=Vp1(i,j-1);

VV(9)=Vp2(i+1,j);
VV(10)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(12)=Vp2(i,j-1);
VV(13)=Vp3(i+1,j);
VV(14)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);
VV(15)=Vp3(i,j-1);
VV(16)=Vp4(i+1,j);
VV(17)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);
VV(18)=Vp4(i,j-1);

else
VV(3)=Vp1(i+1,j);
VV(4)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i+1,j);
VV(5)=Vp1(i,j+1);
VV(6)=Vp1(i,j-1);
VV(9)=Vp2(i+1,j);
VV(10)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i+1,j);
VV(11)=Vp2(i,j+1);
VV(12)=Vp2(i,j-1);
VV(13)=Vp3(i+1,j);
VV(14)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i+1,j);
VV(15)=Vp3(i,j-1);
VV(16)=Vp4(i+1,j);
VV(17)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i+1,j);
VV(18)=Vp4(i,j-1);
end %%if j==1

elseif i==Nx1

    if j==1

VV(3)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
VV(4)=Vp1(i-1,j);
VV(5)=Vp1(i,j+1);
VV(6)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
VV(9)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
VV(10)=Vp2(i-1,j);
VV(11)=Vp2(i,j+1);
VV(12)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
VV(13)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);

```

```

VV(15)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);
VV(16)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
VV(17)=Vp4(i-1,j);
VV(18)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j+1);

    elseif j==Nx2
VV(3)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
VV(4)=Vp1(i-1,j);
VV(5)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(6)=Vp1(i,j-1);
VV(9)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
VV(10)=Vp2(i-1,j);
VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(12)=Vp2(i,j-1);

VV(13)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp3(i,j-1);
VV(16)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
VV(17)=Vp4(i-1,j);
VV(18)=Vp4(i,j-1);

    else %i=Nx1 et j varie mais diff de 1 et Nx2

VV(3)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i-1,j);
VV(4)=Vp1(i-1,j);
VV(5)=Vp1(i,j+1);
VV(6)=Vp1(i,j-1);
VV(9)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i-1,j);
VV(10)=Vp2(i-1,j);
VV(11)=Vp2(i,j+1);
VV(12)=Vp2(i,j-1);
VV(13)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i-1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp3(i,j-1);
VV(16)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i-1,j);
VV(17)=Vp4(i-1,j);
VV(18)=Vp4(i,j-1);

    end % if j==1
else

    if j==1 %j=1, mais i varie et diff de 1 et Nx1

VV(3)=Vp1(i+1,j);
VV(4)=Vp1(i-1,j);
VV(5)=Vp1(i,j+1);
VV(6)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j+1);
VV(9)=Vp2(i+1,j);
VV(10)=Vp2(i-1,j);
VV(11)=Vp2(i,j+1);

```

```

VV(12)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j+1);
VV(13)=Vp3(i+1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=2*Vp3(i,j)-Vp3(i,j+1);
VV(16)=Vp4(i+1,j);
VV(17)=Vp4(i-1,j);
VV(18)=2*Vp4(i,j)-Vp4(i,j+1);

elseif j==Nx2 %j=Nx2, mais i varie et diff de 1 et Nx1
%%%%%%%%
VV(3)=Vp1(i+1,j);
VV(4)=Vp1(i-1,j);
VV(5)=2*Vp1(i,j)-Vp1(i,j-1);
VV(6)=Vp1(i,j-1);
VV(9)=Vp2(i+1,j);
VV(10)=Vp2(i-1,j);
VV(11)=2*Vp2(i,j)-Vp2(i,j-1);
VV(12)=Vp2(i,j-1);

VV(13)=Vp3(i+1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp3(i,j-1);
VV(16)=Vp4(i+1,j);
VV(17)=Vp4(i-1,j);
VV(18)=Vp4(i,j-1);

else %i et j a l'interieur du maillage !!
VV(3)=Vp1(i+1,j);
VV(4)=Vp1(i-1,j);
VV(5)=Vp1(i,j+1);
VV(6)=Vp1(i,j-1);
VV(9)=Vp2(i+1,j);
VV(10)=Vp2(i-1,j);
VV(11)=Vp2(i,j+1);
VV(12)=Vp2(i,j-1);
VV(13)=Vp3(i+1,j);
VV(14)=Vp3(i-1,j);
VV(15)=Vp3(i,j-1);
VV(16)=Vp4(i+1,j);
VV(17)=Vp4(i-1,j);
VV(18)=Vp4(i,j-1);
end
end

if (r1-ud1-ul >= 0)
    Vs1=1;
    Vs2=0;
else
    Vs1=0;
    Vs2=1;
end

if (u1-d >= 0)

```

```

        Vs3=1;
        Vs4=0;

else
    Vs3=0;
    Vs4=1;
end

if (r2-ud2-u2 >= 0)
    Vs5=1;
    Vs6=0;

else
    Vs5=0;
    Vs6=1;
End

%%%%%
if (u2-d >= 0)
    Vs7=1;
    Vs8=0;

else
    Vs7=0;
    Vs8=1;
end

%%%%%
%%%%%
if (r1-ud3 >= 0)
    Vs9=1;
    Vs10=0;

else
    Vs9=0;
    Vs10=1;
End

if (r2-ud4 >= 0)
    Vs11=1;
    Vs12=0;

else
    Vs11=0;
    Vs12=1;
end

Q1=1/(rho+abs(q11)+(abs(r1-ud1-u1)/hx1)+(abs(u1-d)/hx2));
Q2=1/(rho+abs(q22)+(abs(r2-ud2-u2)/hx1)+(abs(u2-d)/hx2));
Q3=1/(rho+abs(q33)+(abs(r1-ud3)/hx1)+(abs(d)/hx2));

```

```

Q4=1/(rho+abs(q44)+(abs(r2-ud4)/hx1)+(abs(d)/hx2));

Va11=Q1*(gc1+gc2+gc3+gc4+(q12*VV(1)+q13*VV(2))+(abs(r1-ud1-
u1)/hx1)*VV(3)*Vs1+(abs(r1-ud1-u1)/hx1)*VV(4)*Vs2+(abs(u1-
d)/hx2)*VV(5)*Vs3+(abs(u1-d)/hx2)*VV(6)*Vs4);%
Va21=Q2*(gc1+gc2+gc5+gc6+(q21*VV(7)+q24*VV(8))+(abs(r2-ud2-
u2)/hx1)*VV(9)*Vs5+(abs(r2-ud2-u2)/hx1)*VV(10)*Vs6+(abs(u2-
d)/hx2)*VV(11)*Vs7+(abs(u2-d)/hx2)*VV(12)*Vs8);
Va31=Q3*(gc1+gc2+gc7+gc8+q34*VV(8)+q31*VV(7)+(abs(r1-
ud3)/hx1)*VV(13)*Vs9+(abs(r1-ud3)/hx1)*VV(14)*Vs10+(abs(d)/hx2)*VV(15));
Va41=Q4*(gc1+gc2+gc9+gc8+q43*VV(2)+q42*VV(1)+(abs(r2-
ud4)/hx1)*VV(16)*Vs11+(abs(r2-ud4)/hx1)*VV(17)*Vs12+(abs(d)/hx2)*VV(18));

% fin du programme

```

LISTE DES RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abdessalem, Mhamed, Diane Riopel et Atidel Hadj-Alouane. 2007. « Conception pour la logistique inverse: proposition d'un cahier des charges ».
- Actu-Environnement. 2012. « L'aluminium recyclé, un taux d'incorporation qui stagne à 30% ». In *Actu-Environnement*. <<http://www.actuenvironnement.com/ae/dossiers/matieres-recyclees/recyclage-alu.php>>. Consulté le 12 Octobre 2015.
- Akella, Ramakrishna, et P Roshan Kumar. 1986. « Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 31, n° 2, p. 116-126.
- Anthony, RN. 1965. « Planning and control systems: A framework for analysis. Harvard University Graduate School of Business Administration ». *Studies in Management Control, Cambridge, Mass.*
- Baillargeon, Gérald. 1990. *Méthodes statistiques de l'ingénieur* (1990), 2e ed. rev. et corr. Trois-Rivières (Québec): Éditions SMG, v. p.
- Bárdossy, György. 1997. « Berthier, les Baux et l'histoire de la bauxite ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIA-Earth and Planetary Science*, vol. 324, n° 12, p. 1031-1040.
- Benedetti, Claudio. 2002. *Introduction à la Gestion Des Opérations, biens et services, 4e édition*. Montréal-Canada: Chenelière/ Mc Graw-Hill.
- Bennekrouf, Mohamed, Lyes Benyoucef et Zaki Sari. 2010. « Problèmes de conception et pilotage des chaînes logistiques inverses: Etat de l'art ». In *8ème Conférence Internationale de Modélisation et de Simulation-MOSIM 2010*.
- Bergsdal, Håvard, Anders H Strømman et Edgar G Hertwich. 2004. « The aluminium industry-environment, technology and production ».
- Bielecki, T, et PR Kumar. 1988. « Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems ». *Operations research*, vol. 36, n° 4, p. 532-541.
- Bostel, Nathalie, Pierre Dejax et Zhiqiang Lu. 2005. « The design, planning, and optimization of reverse logistics networks ». In *Logistics systems: design and optimization*. p. 171-212. Springer.

- Boukas, E. K., A. Haurie et P. Michel. 1990. « An optimal control problem with a random stopping time ». *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 64, n° 3, p. 471-480.
- Buxmann, Kurt. 1994. « Ecological aspects of the use of aluminium in cars, with particular regard to recycling techniques ». *Resources, Conservation and Recycling*, vol. 10, n° 1, p. 17-23.
- Clarke, F. 1983. « Optimization and nonsmooth analysis wiley ». *New York*.
- Dowlatshahi, Shad. 2000. « Developing a theory of reverse logistics ». *Interfaces*, vol. 30, n° 3, p. 143-155.
- Fleischmann, Moritz, Patrick Beullens, JACQUELINE M BLOEMHOF-RUWAARD et Luk N Wassenhove. 2001. « The impact of product recovery on logistics network design ». *Production and operations management*, vol. 10, n° 2, p. 156-173.
- Garceau, J. J. 1996. *Analyse de rentabilité en ingénierie* (1996). Trois-Rivières: Éditions SMG, xx, 515 p. p.
- Gershwin, Stanley B. 1994. *Manufacturing systems engineering*. Prentice Hall.
- Geyer, Roland, et Tim Jackson. 2004. « Supply loops and their constraints: the industrial ecology of recycling and reuse ». *California Management Review*, vol. 46, n° 2, p. 55-73.
- Gharbi, A., et J. P. Kenne. 2000. « Production and preventive maintenance rates control for a manufacturing system: An experimental design approach ». *International Journal of Production Economics*, vol. 65, n° 3, p. 275-287.
- Gharbi, Ali, et Jean Pierre Kenne. 2003. « Optimal production control problem in stochastic multiple-product multiple-machine manufacturing systems ». *IIE Transactions*, vol. 35, n° 10, p. 941-952.
- Goupy, Jacques. 1988. *La méthode des plans d'expériences: optimisation du choix des essais & de l'interprétation des résultats*. Dunod.
- Guiltinan, Joseph, et Nonyelu Nwokoye. 1974. « Reverse channels for recycling: an analysis of alternatives and public policy implications ». In *American Marketing Association Proceedings*. Vol. 36, p. 341-46. Spring and Fall.
- Hoyle, Graeme. 1995. « Recycling opportunities in the UK for aluminium-bodied motor cars ». *Resources, conservation and recycling*, vol. 15, n° 3, p. 181-191.

- INSTITUTE, INTERNATIONAL ALUMINIUM. 2009. « Global Aluminium Recycling: A Cornerstone of Sustainable Development ». INTERNATIONAL ALUMINIUM INSTITUTE.
- Jorjani, S, J Leu et C Scott. 2004. « Model for the allocation of electronics components to reuse options ». *International Journal of Production Research*, vol. 42, n° 6, p. 1131-1145.
- Kara, Selin Soner, et Semih Onut. 2010. « A two-stage stochastic and robust programming approach to strategic planning of a reverse supply network: The case of paper recycling ». *Expert Systems with Applications*, vol. 37, n° 9, p. 6129-6137.
- Kenné, J. P., et A. Gharbi. 2004. « Stochastic optimal production control problem with corrective maintenance ». *Computers & Industrial Engineering*, vol. 46, n° 4, p. 865-875.
- Kenné, Jean-Pierre. 2004. « Commande optimale stochastique appliquée à la gestion de production d'une unité de fabrication ». *Journal européen des systèmes automatisés*, vol. 38, n° 3-4, p. 269-290.
- Kenné, Jean-Pierre, et El-Kébir Boukas. 1998. « Optimal control of the production and corrective maintenance of a multiple-machine flowshop ». *Cahiers du GERAD*.
- Kenné, Jean-Pierre, Pierre Dejax et Ali Gharbi. 2012. « Production planning of a hybrid manufacturing–remanufacturing system under uncertainty within a closed-loop supply chain ». *International Journal of Production Economics*, vol. 135, n° 1, p. 81-93.
- Kimemia, Joseph, et Stanley B Gershwin. 1983. « An algorithm for the computer control of a flexible manufacturing system ». *AIIE Transactions*, vol. 15, n° 4, p. 353-362.
- Kouedeu, AF, Jean-Pierre Kenne, Pierre Dejax, Victor Songmene et V Polostki. 2014. « Stochastic models and numerical solutions for manufacturing/remanufacturing systems with applications to the printer cartridge industry ».
- Krikke, HR, A Van Harten et PC Schuur. 1998. « On a medium term product recovery and disposal strategy for durable assembly products ». *International Journal of Production Research*, vol. 36, n° 1, p. 111-140.
- Kushner, Harold, et Paul G Dupuis. 1992. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, 24. Springer Science & Business Media.
- Lambert, Serge, et Diane Riopel. 2003. *Logistique inverse: revue de littérature*. Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions.

- Listeş, Ovidiu, et Rommert Dekker. 2005. « A stochastic approach to a case study for product recovery network design ». *European Journal of Operational Research*, vol. 160, n° 1, p. 268-287.
- Millbank, Paul. 2004. « Aluminium recycling vital to global supply chain ». *Aluminium International Today*, vol. 16, n° 5, p. 44.
- Montgomery, D.C. 2000. « Design and Analysis of Experiments ». *John Wiley and Sons, New York.*, vol. fifth edition.
- Moungomo, JB Mandatsy, D Nganga-Kouya, V Songmene, J Kouam et JP Kenné. 2016a. « Machinability study of recycled aluminum cans and machining chips ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, p. 1-16.
- Moungomo, Mandatsy, Jean Brice, Donatien Nganga Kouya et Victor Songmene. 2016b. « Aluminium Machining Chips Formation, Treatment & Recycling: A Review ». In *Key Engineering Materials*. Vol. 710, p. 71-76. Trans Tech Publ.
- Mukhopadhyay, Samar K., et Robert Setaputra. 2011. « Return policy in product reuse under uncertainty ». *International Journal of Production Research*, vol. 49, n° 17, p. 5317-5332.
- Nodem, FI Dehayem, JP Kenné et A Gharbi. 2011. « Simultaneous control of production, repair/replacement and preventive maintenance of deteriorating manufacturing systems ». *International Journal of Production Economics*, vol. 134, n° 1, p. 271-282.
- Olsder, GJ, et R Suri. 1980. « Time-optimal control of parts-routing in a manufacturing system with failure-prone machines ». In *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 1980 19th IEEE Conference on*. p. 722-727. IEEE.
- Realff, Matthew J., Jane C. Ammons et David Newton. 2000. « Strategic design of reverse production systems ». *Computers & Chemical Engineering*, vol. 24, n° 2, p. 991-996.
- Rishel, Raymond. 1975. « Control of systems with jump Markov disturbances ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 20, n° 2, p. 241-244.
- Rossetti, Manuel D. 2016. *Simulation modeling and Arena* (2016), Second edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., xxiv, 719 pages p.
- Samuel, M. 2003. « A new technique for recycling aluminium scrap ». *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 135, n° 1, p. 117-124.
- Shubik, Martin, et Garry D Brewer. 1971. « Systems Simulation and Gaming as an Approach to Understanding Organizations ».

- Silva Filho, Oscar Salviano. 2013. « An open-loop approach for a stochastic production planning problem with remanufacturing process ». In *Informatics in Control, Automation and Robotics*. p. 211-225. Springer.
- Spengler, Th, Holger Püchert, Torsten Penkuhn et Otto Rentz. 1997. « Environmental integrated production and recycling management ». In *Produktion und Umwelt*. p. 239-257. Springer.
- Thierry, Martijn, Marc Salomon, Jo Van Nunen et Luk Van Wassenhove. 1995. « Strategie issues in product recovery management ». *California management review*, vol. 37, n° 2, p. 114-135.
- Thomas, MP, et AH Wirtz. 1994. « The ecological demand and practice for recycling of aluminium ». *Resources, Conservation and Recycling*, vol. 10, n° 1, p. 193-204.
- Xiao, Y, et MA Reuter. 2002. « Recycling of distributed aluminium turning scrap ». *Minerals engineering*, vol. 15, n° 11, p. 963-970.
- Yan, H, et Q Zhang. 1995. « A numerical method in optimal production and setup scheduling of stochastic manufacturing systems: summary of results ». In *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*. Vol. 3, p. 2872-2877. IEEE.
- Yan, H, et Q Zhang. 1997. « A numerical method in optimal production and setup scheduling of stochastic manufacturing systems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 42, n° 10, p. 1452-1455.