

Simulation numérique d'une source de chaleur mobile par la  
méthode *Element-Free Galerkin*

par

Olivier CHAMPAGNE

MÉMOIRE PAR ARTICLE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE  
TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE COMME EXIGENCE  
PARTIELLE À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE  
AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M. Sc. A.

MONTRÉAL, LE 19 AVRIL 2020

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC



Olivier Champagne, 2020



Cette licence Creative Commons signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette oeuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'oeuvre n'ait pas été modifié.

**PRÉSENTATION DU JURY**

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Tan Pham, directeur de mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Jean-François Chatelain, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Daniel Rousse, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 24 MARS 2020

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE



## **REMERCIEMENTS**

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche, le professeur Tan Pham, pour ses précieux conseils et son mentorat tout au long de cette maîtrise. Merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir octroyé une certaine liberté pour la recherche. Merci pour votre grande disponibilité et pour toutes les discussions que nous avons eues au cours de ces deux années de collaboration. Ce fût un réel plaisir.

Je tiens également à exprimer mes remerciements les plus sincères au Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT), au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG), ainsi qu'au Fonds de développement de l'ÉTS (FDETS) pour leur soutien financier qui m'a permis de me consacrer pleinement à cette recherche. Ce fût un privilège d'avoir pu bénéficier de ce support et j'en suis immensément reconnaissant.

J'aimerais aussi remercier mon collègue Mehdi pour tout le temps qu'il m'a généreusement accordé lors du volet expérimental de ce projet. Merci également à Charles pour ses encouragements et pour toutes les conversations que nous avons eues sur nos maîtrises respectives.

Finalement, je tiens à remercier ma fiancée pour son immense patience, sa compréhension et son soutien moral durant les innombrables heures que j'ai consacrées à ce projet au cours des dernières années.

*"All models are wrong, but some are useful."*

---

George E. P. Box

# Simulation numérique d'une source de chaleur mobile par la méthode *Element-Free Galerkin*

Olivier CHAMPAGNE

## RÉSUMÉ

Les applications impliquant des sources de chaleur mobiles, telles que le soudage, sont courantes dans l'industrie. Dans le but de contrôler et de maîtriser ces procédés, les ingénieurs ont recours à la simulation numérique et, la plupart du temps, c'est la méthode des éléments finis (MÉF) qui est utilisée. Toutefois, cette dernière possède plusieurs inconvénients principalement liés au maillage, qui est un concept clef de la MÉF. Une alternative de plus en plus envisageable pour surmonter ces inconvénients est l'utilisation des méthodes sans maillage (*meshless methods*). Relativement nouvelles, certaines connaissances techniques relatives à leur utilisation sont encore limitées.

Dans ce mémoire, un code de calcul basé sur la méthode sans maillage *Element-Free Galerkin* (EFG) a été développé pour résoudre un problème tridimensionnel de conduction impliquant une source de chaleur mobile en régime transitoire. Le code a ensuite été validé numériquement en comparant avec la MÉF et un logiciel commercial. Un excellent accord a été obtenu entre les résultats des différentes méthodes.

Par la suite, des essais expérimentaux de soudage MIG sur des échantillons d'aluminium 6061-T6 ont été effectués. Grâce à des thermocouples situés à différentes distances du cordon de soudure, le cycle thermique du procédé a été enregistré et comparé avec les résultats de la simulation. Il a été convenu que la méthode permet de bien prédire les températures maximales et le taux de refroidissement du procédé, malgré l'utilisation de propriétés de matériau constantes.

Finalement, une étude paramétrique a été menée pour déterminer les paramètres optimaux à utiliser, c'est-à-dire la taille et la forme des domaines de support, les différentes fonctions de pondération et la quantité de points de quadrature requise. Il a été conclu que l'utilisation d'un domaine en forme de sphère ou de brique (parallélépipède droit) avec un nombre de points de quadrature 10 fois plus élevé que le nombre de nœuds représentent un choix approprié.

**Mots-clés:** Source de chaleur, soudage MIG, validation expérimentale, méthode *Element-Free Galerkin*, méthode des éléments finis, domaine de support, fonction de pondération, points de quadrature





# **Simulation of a moving heat source using the Element-Free Galerkin method**

Olivier CHAMPAGNE

## **ABSTRACT**

Applications of moving heat sources, such as welding, are common in many industrial areas. In order to master these processes, numerical simulation is generally used. More often than not, it is the finite element method (FEM) that is used. But the FEM has multiple drawbacks related to the use of a mesh, which is a crucial concept of the method. An alternative becoming more attractive to overcome the inconvenience of the FEM is the use of meshless methods. Rather new, the knowledge related to some aspects of these methods is still limited.

In this master's thesis, a computer code relying on the meshless Element-Free Galerkin (EFG) method was developed to solve an unsteady and three-dimensional conduction problem involving a moving heat source. The in-house code was then validated with the FEM and a commercial software. Good agreement was obtained between the results.

Next, experimental work was conducted, consisting of bead-on-plate MIG welds on 6061-T6 aluminum samples. Using four thermocouples located at various distances from the weld bead, the thermal curves were recorded and compared with numerical results. It was shown that the EFG method is able to correctly predict the peak temperatures and the cooling rates, despite the use of constant physical properties.

Lastly, a parametric study was conducted to determine the best parameters to use, i.e. the size and shape of the support domain, the weight functions and the required quantity of quadrature points. It was concluded that the sphere- or brick-shaped domain with a quantity of quadrature points ten times higher than the quantity of field nodes is a suitable choice.

**Keywords:** Heat source, MIG welding, experimental validation, Element-Free Galerkin method, finite element method, support domain, weight function, quadrature points



## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE .....	3
1.1 Source de chaleur mobile .....	3
1.2 Méthodes des éléments finis et travaux antérieurs .....	7
1.3 Méthodes sans maillage .....	11
1.3.1 Méthode <i>Element-Free Galerkin</i> .....	14
1.3.2 Travaux antérieurs .....	19
CHAPITRE 2 OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE .....	23
2.1 Objectifs de recherche .....	23
2.2 Méthodologie .....	24
2.2.1 Développement numérique .....	24
2.2.2 Essais et validation expérimentale .....	29
2.2.3 Analyse de la méthode EFG .....	33
CHAPITRE 3 NUMERICAL SIMULATION OF MOVING HEAT SOURCE IN ARC WELDING USING THE ELEMENT-FREE GALERKIN METHOD WITH EXPERIMENTAL VALIDATION AND NUMERICAL STUDY .....	35
3.1 Résumé .....	35
3.2 Abstract .....	35
3.3 Introduction .....	36
3.4 Element-Free Galerkin method .....	38
3.4.1 Moving Least Square approximation .....	38
3.4.2 Weight function .....	39
3.4.3 Enforcement of essential boundary conditions .....	41
3.5 Numerical formulation of heat equation based on EFG .....	41
3.6 Numerical procedure .....	44
3.6.1 Heat input .....	45
3.6.2 Material data .....	47
3.7 Experimental procedure .....	47
3.8 Results and discussion .....	49
3.8.1 Experimental results .....	49
3.8.2 Weight function, scaling parameter and shape of support domain .....	51
3.8.3 Background mesh .....	52
3.9 Conclusion .....	54
CHAPITRE 4 RETOUR SUR LES RÉSULTATS ET DISCUSSION .....	57
4.1 Temps de calcul .....	58

4.2	Raffinement local .....	60
CONCLUSION .....		61
RECOMMANDATIONS .....		63
ANNEXE I	DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DE ROSENTHAL .....	65
ANNEXE II	DÉVELOPPEMENT DE LA FORMULATION FAIBLE DE L'ÉQUATION DE CHALEUR .....	67
ANNEXE III	INTÉGRATION NUMÉRIQUE EN TROIS DIMENSIONS .....	69
ANNEXE IV	QUADRATURE POUR LE VECTEUR DE CHARGEMENT $\{\mathbf{F}\}$ .....	73
ANNEXE V	INTERPOLATION DES RÉSULTATS DE LA SOLUTION DE RÉFÉRENCE SUR LE MAILLAGE EFG .....	75
BIBLIOGRAPHIE .....		79

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1	Recensement de quelques méthodes sans maillage ..... 13
Tableau 1.2	Valeurs usuelles de $d_{\max}$ pour des applications de transfert de chaleur ..... 16
Tableau 2.1	Coordonnées et pondérations pour la quadrature de Gauss ..... 29
Tableau 3.1	Thermal properties of 6061-T6 alloy ..... 47
Tableau 3.2	Welding parameters ..... 48
Tableau 3.3	Peak temperatures (°C) at thermocouple locations ..... 49
Tableau 3.4	Suggested number of nodes per support domain ..... 51



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Représentation de la distribution de température autour de la source dans l'état « quasi-stationnaire » ..... 4
Figure 1.2	Validation expérimentale du modèle de Rosenthal. Calculé (traits continus) vs expérimental (points) ..... 5
Figure 1.3	Exemple de zone de fusion complexe modélisée par une source composée ..... 7
Figure 1.4	Divers types de sources de chaleur ..... 8
Figure 1.5	Prédiction du taux de refroidissement lors du soudage à l'arc par la MÉF en 2D ..... 9
Figure 1.6	Exemple de maillage adaptatif suivant la source de chaleur ..... 10
Figure 1.7	Gestion des discontinuités ..... 12
Figure 1.8	Discrétisation du domaine et fonction de base/approximation ..... 14
Figure 1.9	Température en un point en fonction de $d_{max}$ , pour un problème 2D de transfert de chaleur ..... 15
Figure 1.10	Quelques fonctions de pondération ..... 17
Figure 1.11	Représentation du <i>background mesh</i> et de la distribution de nœuds ..... 18
Figure 1.12	Taux de convergence et influence du nombre de points de quadrature ..... 19
Figure 1.13	Exemple de raffinement local avec un groupe de nœuds mobiles suivant la source de chaleur ..... 21
Figure 2.1	Algorithme numérique de l'exécution du code de calcul EFG ..... 30
Figure 2.2	Montage expérimental ..... 31
Figure 2.3	Vues de coupe de la zone de fusion, prises à mi-longueur de la trajectoire de soudure ..... 32
Figure 3.1	a) Node distribution over domain b) Node density around weld line ..... 45

Figure 3.2	"Split" heat source model: a) Sources arrangement b) Sources parameters.....	46
Figure 3.3	a) Experimental setup b) Sample dimensions, weld line and thermocouple locations .....	48
Figure 3.4	a) EFG results when source reaches mid-length and b) experimental bead cross section and predicted weld pool size .....	49
Figure 3.5	Experimental and numerical temperature curves for all 4 thermocouples.....	50
Figure 3.6	Effect of the scaling parameter on the $\ell_2$ norm for a) sphere support domain, b) cube support domain and c) brick support domain .....	52
Figure 3.7	$\ell_2$ norm vs $\alpha$ a) Spherical domain with various weight functions b) Cubic weight function with the three domain types.....	54
Figure 4.1	Température maximales aux thermocouples en fonction de la distance par rapport au cordon .....	57
Figure 4.2	Temps de calcul relatifs .....	58
Figure 4.3	Répartition du temps de calcul .....	59
Figure 4.4	Exemple de raffinement local avec un groupe de nœuds mobiles (en rouge) et maillage d'arrière-plan (en noir).....	60



## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

3D	Trois dimensions
CRSNG	Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada
CTWD	Distance entre le tube contact et la pièce à souder ( <i>Contact tip to workpiece distance</i> )
DEM	<i>Diffuse element method</i>
ED	<i>Équation différentielle</i>
EFG	<i>Element-Free Galerkin</i>
ÉTS	École de technologie supérieure
FDETS	Fonds de développement de l'ÉTS
FEM	<i>Finite element method</i>
FPM	<i>Finite point method</i>
FSW	<i>Friction stir welding</i>
FRQNT	Fonds de Recherche du Québec – Nature et technologies
GPGPU	<i>General-purpose computing on graphics processing units</i>
GTAW	<i>Gas tungsten arc welding</i>
MDF	Méthode des différences finies
MÉF	Méthode des éléments finis
MIG	<i>Metal inert gas</i>
MLPG	<i>Meshless local Petrov-Galerkin method</i>
MLS	<i>Moving least square</i>

PIM	<i>Point interpolation method</i>
PSO	<i>Particle swarm optimization</i>
PUFEM	<i>Partition of unity FEM</i>
RKPM	<i>Reproducing kernel particle method</i>
SMAW	<i>Shielded metal arc welding</i>
TIG	<i>Tungsten inert gas</i>

## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

### Alphabet grec

---

$\alpha$	Ratio du nombre de points de quadrature par rapport au nombre de nœuds
$\delta$	Opérateur variationnel
$\Delta$	Opérateur laplacien
$\Delta t$	Incrément de temps, s
$\Gamma$	Frontière du domaine
$\Gamma_\theta$	Frontière sur laquelle une température est imposée
$\Gamma_h$	Frontière sur laquelle une condition de convection est imposée
$\Gamma_q$	Frontière sur laquelle un flux est imposé
$\lambda$	Multiplicateurs de Lagrange
$\Omega$	Domaine de calcul
$\phi_I(\mathbf{x})$	Fonction de forme au nœud $I$
$\rho$	Masse volumique, kg mm <sup>-3</sup>
$\theta$	Température, ° C
$\bar{\theta}$	Température virtuelle arbitraire ( <i>arbitrary temperature distribution</i> ), ° C
$\theta_\infty$	Température du fluide environnant, ° C
$\theta_0$	Température initiale, à $t = 0$ , ° C
$\theta_F$	Température de fusion, ° C
$\theta_n$	Température évaluée au $n^e$ pas de temps, ° C

XX

$\theta^S$	Température imposée, °C
$\{\mathbf{\theta}\}$	Vecteur de degré de liberté/paramètres nodaux
$\{\dot{\mathbf{\theta}}\}$	Vecteur de dérivée temporelle des degrés de libertés/ paramètres nodaux
$\xi, \eta, \psi$	Directions cartésiennes de l'espace de référence

#### Alphabet latin

---

$[\mathbf{C}]$	Matrice de chaleur spécifique
$c_1$	Coefficient personnel (algorithme PSO)
$c_2$	Coefficient social (algorithme PSO)
$c_p$	Chaleur spécifique, J kg <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup>
$c_{xI}, c_{yI}, c_{zI}$	Espacement nodal moyen au nœud $I$ en $x, y, z$ , mm
$d_{max}$	Paramètre de mise à l'échelle
$dm_I$	Taille du domaine de support au nœud $I$ , mm
$\mathcal{D}$	Sous-espace des nombres réels
$\{\mathbf{F}\}$	Vecteur de chargement thermique
$[\mathbf{G}]$	Matrice d'interpolation pour l'imposition des conditions frontières essentielles
$h$	Coefficient de convection, W mm <sup>-2</sup> °C <sup>-1</sup>
$J(\mathbf{x})$	Fonctionnel
$\mathbf{J}^e$	Matrice jacobienne d'un élément $e$
$k$	Conductivité thermique, W mm <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup>
$[\mathbf{K}]$	Matrice de conductivité thermique

$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal
$n_e$	Nombre de nœuds d'un élément
$n_Q$	Nombre de points de quadrature
$n_I$	Nombre de nœuds
$n_t$	Nombre de pas de temps
$N_I$	Polynôme de Lagrange
$P$	Puissance, W
$q$	Flux de chaleur, W mm <sup>-2</sup>
$q^S$	Flux de chaleur imposé, W mm <sup>-2</sup>
$\{\mathbf{q}_\theta\}$	Vecteur d'interpolation pour l'imposition des conditions frontières essentielles
$Q$	Génération de chaleur volumique, W mm <sup>-3</sup>
$Q_0$	Intensité maximale de génération de chaleur, W mm <sup>-3</sup>
$r$	Rayon, mm / Rayon normalisé (adimensionnel)
$r_0$	Rayon effectif, mm
$r_e$	Rayon supérieur de la source conique, mm
$r_i$	Rayon inférieur de la source conique, mm
$\mathcal{R}$	Espace des nombres réels
$S$	Temps (espace de référence), s
$t$	Temps, s
$t_f$	Temps final du calcul, s

$v$	Vitesse, mm/s
$w$	Coefficient d'inertie (algorithme PSO)
$w_i$	Pondération d'un point de Gauss
$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$	Fonction de pondération évaluée en $\mathbf{x}$ par rapport au noeud $I$
$x_i$	Position d'un point de Gauss
$\mathbf{x}_I$	Vecteur de coordonnées au nœud $I$
$z_e$	Position en $z$ du plan supérieur de la source conique, mm
$z_i$	Position en $z$ du plan inférieur de la source conique, mm

#### Unités de mesure

---

A	Ampère
°C	Degré Celcius
J	Joule
kg	Kilogramme
K	Degré Kelvin
L	Litre
min	Minute
mm	Millimètre
s	Seconde
V	Volt
W	Watt

Autres

---

$ \cdot $	Déterminant
$[\cdot]$	Matrice
$\ \cdot\ $	Norme
$\partial$	Opérateur de dérivée partielle
$\nabla$	Opérateur de gradient
$\{\cdot\}$	Vecteur colonne





## INTRODUCTION

Nombreuses sont les applications dans lesquelles on retrouve des sources de chaleur mobiles. Le soudage est probablement la plus populaire de ces applications, mais le placage laser, certains procédés de fabrication additive et le traitement thermique laser en sont d'autres exemples. Pour simuler ces procédés, les ingénieurs ont la plupart du temps recours à la méthode des éléments finis (MÉF), cette méthode qui permet de résoudre des équations différentielles régissant des phénomènes physiques. Apparue au milieu du XX<sup>e</sup> siècle, le principe de la MÉF repose sur la discrétisation du domaine de calcul avec des nœuds, puis ces derniers sont reliés de manière à former des « éléments ». C'est cette combinaison de nœuds et d'éléments qui crée le « maillage ». Bien que la MÉF ait fait ses preuves pour une multitude d'applications, plusieurs inconvénients découlent de l'utilisation d'un maillage. Entre autres, ce dernier gère difficilement les discontinuités, c'est-à-dire que les éléments doivent toujours demeurer entiers ou être retirés complètement. De plus, les éléments ne doivent pas subir de trop grandes distorsions, sans quoi les résultats en seraient affectés négativement. Il est donc parfois nécessaire de remailler tout le domaine, en cours de calcul, pour conserver la « qualité » des éléments. Finalement, la création et la gestion du maillage peuvent s'avérer des tâches fastidieuses en soi.

Ce sont ces désavantages qui ont, en majeure partie, motivé l'intérêt pour le développement de méthodes qui ne se basent pas sur un maillage comme tel. Depuis les dernières décennies, une multitude de méthodes ont émergé, comme la méthode *Element-Free Galerkin* (EFG). Cette dernière ne repose pas sur l'utilisation d'éléments, c'est-à-dire que les nœuds utilisés pour la discrétisation du domaine ne sont pas liés « rigidement » entre eux, mais possèdent plutôt une pondération les uns par rapport aux autres en fonction de la distance qui les séparent. Cette pondération est définie par une « fonction de pondération », sur l'ensemble d'un « domaine de support ». La méthode a déjà été appliquée aux problèmes de transfert de chaleur à plusieurs reprises.

Toutefois, la méthode EFG dépend de plusieurs paramètres, tels que la taille et la forme des domaines de support, les fonctions de pondération et la quantité de points de quadrature. L'influence de ces paramètres n'est pas bien documentée, surtout pour les problèmes tridimensionnels avec une distribution de nœuds irrégulière. Comme la précision des résultats dépend de ces paramètres, il y a un grand intérêt à bien connaître leur impact.

L'objectif principal de ce projet est donc d'évaluer l'influence des divers paramètres de la méthode pour fournir des lignes directrices quant à l'emploi de ceux-ci pour les futures études. L'objectif secondaire, quant à lui, consiste à valider la capacité de la méthode à résoudre un problème de source de chaleur mobile en confrontant les résultats numériques à des données expérimentales.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier est une revue de la littérature qui retrace les développements entourant les problèmes de source de chaleur mobile, l'apparition des méthodes sans maillage, et plus particulièrement, la méthode EFG et son application aux problèmes de transfert de chaleur. Le second chapitre porte sur les objectifs de recherche, ainsi que sur la méthodologie adoptée pour mener à terme le projet. Ce dernier se divise en trois grandes étapes : (i) le développement d'un code de calcul, (ii) la validation expérimentale par un procédé de soudage MIG et (iii) une étude paramétrique de la méthode EFG. Le troisième chapitre présente les résultats obtenus et une discussion relative à ceux-ci sous la forme d'un article publié dans le journal *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Le dernier chapitre fait un bref retour sur l'article et élabore sur quelques points qui n'ont pas été traités dans ce dernier. Finalement, une conclusion et des recommandations pour travaux futurs closent le mémoire.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE

#### 1.1 Source de chaleur mobile

Les sources de chaleur mobiles sont présentes dans une multitude d'applications. Les plus populaires d'entre elles sont sans doute les nombreux procédés de soudage, tels que le SMAW, le GTAW, le MIG, le soudage par friction malaxage (*FSW*) et le TIG, pour ne nommer que ceux-là. D'autres procédés faisant intervenir ces sources sont le procédé de placage par laser et le traitement thermique laser, dans lequel une source laser est utilisée pour effectuer une trempe locale en surface. Pour toutes ces applications, il est essentiel de connaître le cycle thermique du substrat pour être en mesure de bien contrôler le procédé. En particulier pour le soudage, la distribution de température permet, entre autres, de prédire la microstructure et les contraintes résiduelles, qui sont des indicateurs de qualité du joint soudé.

Les premiers travaux notables sur le sujet sont attribuables à Rosenthal (1941; 1946), qui a introduit le concept d'état « quasi-stationnaire ». Cet état est atteint lorsque (i) la source se déplace à une vitesse  $v$  constante, (ii) l'intensité  $q$  de la source demeure constante et (iii) le médium est suffisamment long et large. Dans ce cas bien précis, la distribution de température autour de la source demeurera constante au fil du temps, malgré le fait que cette dernière soit en mouvement. C'est-à-dire qu'un observateur se déplaçant avec la source ne serait pas en mesure de discerner de changement dans la distribution de température autour de la source. Le phénomène est schématisé à la figure 1.1.

Toutefois, pour être en mesure de résoudre ce problème analytiquement, certaines simplifications sont requises. Dans les travaux de Rosenthal, la source est considérée comme ponctuelle, le médium comme étant semi-infini et les échanges thermiques avec l'environnement sont négligés. Traité comme un problème de conduction seulement, le phénomène est régi par l'équation de chaleur :

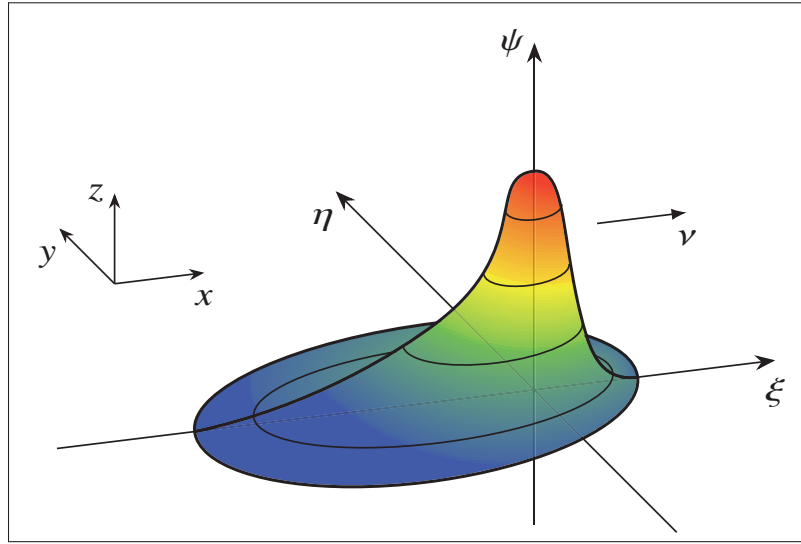


Figure 1.1 Représentation de la distribution de température autour de la source dans l'état « quasi-stationnaire »

$$k\Delta\theta + Q = \rho c_p \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (1.1)$$

où  $\theta$ ,  $k$ ,  $Q$ ,  $\rho$ ,  $c_p$  et  $t$  dénotent respectivement la température, la conductivité thermique, la génération de chaleur (la source), la masse volumique, la chaleur spécifique et le temps. En définissant la direction de la source de manière à ce qu'elle coïncide avec l'axe  $x$  et en introduisant le changement de variable  $\xi = x - vt$ , l'équation 1.1 peut être réécrite sous la forme :

$$k \left( \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \right) + Q = -v\rho c_p \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \quad (1.2)$$

Les détails quant au développement de l'équation 1.2, qui est souvent appelée l'équation de « Rosenthal » ou « quasi-stationnaire », sont présentés à l'annexe I. Malgré son approche simpliste, le modèle de Rosenthal a su montrer son efficacité (Christensen, Davies & Gjermundsen, 1965; Rosenthal, 1946) en prédisant de manière assez satisfaisante la distribution de température pour divers procédés de soudage à l'arc (figure 1.2). Il n'en demeure pas moins que ce modèle présente plusieurs limitations, comme la source ponctuelle qui ne modélise pas adéquatement

l'apport de chaleur des procédés. Les simplifications effectuées par Rosenthal sont toutefois nécessaires, puisqu'il est difficile, voire impossible, de résoudre analytiquement des problèmes plus complexes. Plusieurs années plus tard, l'idée d'utiliser une source de dimension finie a été apportée par Pavelic, Tanbakuchi, Uyehara & Myers (1969). Les auteurs proposent de représenter l'apport de chaleur comme un flux distribué selon une loi gaussienne sur une surface circulaire (figure 1.4a). Ce travail, dans lequel les auteurs ont utilisé la méthode des différences finies (MDF), représente un des premiers travaux numériques portant sur le problème de source de chaleur mobile.

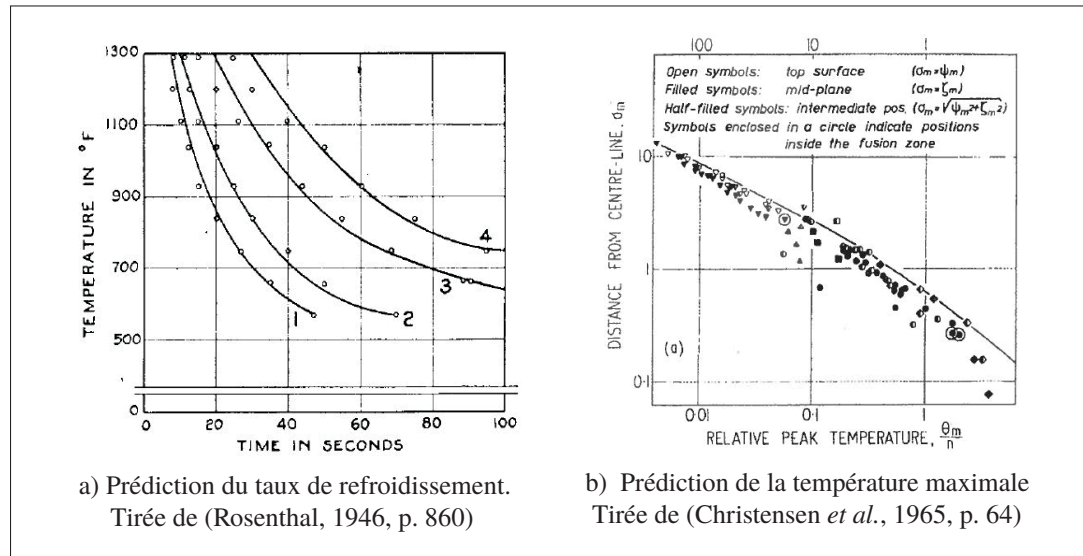


Figure 1.2 Validation expérimentale du modèle de Rosenthal.  
Calculé (traits continus) vs expérimental (points)

Le modèle du « disque de Pavelic » a depuis été repris à maintes reprises, et ce, même pour développer des modèles analytiques, notamment par Modest & Abakins (1986), Zhang (1990) et Vishnu, Li & Easterling (1991). Ce type de source est encore utilisé aujourd'hui avec la MÉF, principalement pour des procédés à faible pénétration ou à faible apport d'énergie (de Feitas Teixeira, de Araujo & Bragança, 2014; Venkatkumar & Ravindran, 2016).

Toutefois, le développement des méthodes numériques ainsi que l'accessibilité grandissante à la puissance de calcul ont permis l'introduction des sources volumiques, c'est-à-dire une génération

d'énergie contenue dans un certain volume. Cette nouvelle approche permet de représenter plus fidèlement les cas où l'apport d'énergie crée une pénétration importante. Ci-dessous sont présentées les sources volumiques les plus fréquemment utilisées :

- Source conique : une génération de chaleur distribuée de façon normale dans un volume conique, définie par

$$Q(x, y, z) = Q_0 \exp\left(\frac{-r(x, y)^2}{r_0(z)^2}\right) \quad (1.3)$$

où  $Q_0$  est l'intensité maximale de la génération de chaleur et  $r_0$  est le « rayon effectif » donné par

$$r_0(z) = r_e - \frac{r_e - r_i}{z_e - z_i}(z_e - z) \quad (1.4)$$

La représentation de ce modèle, ainsi que la signification des paramètres de l'équation 1.4 se retrouvent à la figure 1.4b.

- Double-ellipsoïde : Introduit par Goldak, Aditya & Bibby (1984), ce modèle utilise deux demi-ellipsoïdes, soit un à l'avant et un autre à l'arrière du centre de la source, dans lesquels une génération de chaleur est répartie de façon normale. Le modèle est présenté à la figure 1.4c. Il est l'un des plus populaires, principalement dû à sa flexibilité géométrique lui permettant de s'adapter à diverses formes de bain de fusion. L'intensité de la génération de chaleur dans la partie avant et arrière est définie par les équations 1.5 et 1.6 respectivement :

$$Q_f(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}f_f P}{a b c_f \pi \sqrt{\pi}} \exp\left(-3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{z^2}{c_f^2}\right) \quad (1.5)$$

$$Q_r(x, y, z) = \frac{6\sqrt{3}f_r P}{a b c_r \pi \sqrt{\pi}} \exp\left(-3\frac{x^2}{a^2} - 3\frac{y^2}{b^2} - 3\frac{z^2}{c_r^2}\right) \quad (1.6)$$

où  $f_f$  et  $f_r$  sont des facteurs de pondération de sorte que  $f_f + f_r = 2$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c_f$  et  $c_r$  définissent les géométries des demi-ellipsoïdes et  $P$  est la puissance totale disponible.

- Source composée : Ce modèle se distingue par l'utilisation simultanée de deux sources dans le but de représenter précisément les zones de fusion aux géométries plus complexes.

Généralement, une source volumique est jumelée à un flux de chaleur, tel qu'illustré à la figure 1.4d. Ce modèle a été adopté par Bachorski, Painter, Smailes & Wahab (1999), Luo, You, Ye & Liu (2010) et Wang, Han, Domblesky, Yang, Zhao & Zhang (2016) avec succès. C'est-à-dire que cette combinaison de sources permet de représenter efficacement des zones de fusion plus complexes (figure 1.3, par exemple), et par conséquent, permet de prédire plus précisément la distribution de température. L'idée derrière cette approche est d'utiliser le flux de chaleur (source surfacique) pour représenter la radiation provenant de l'arc de soudage et d'utiliser une source volumique pour représenter le bain de fusion et son action pénétrante.

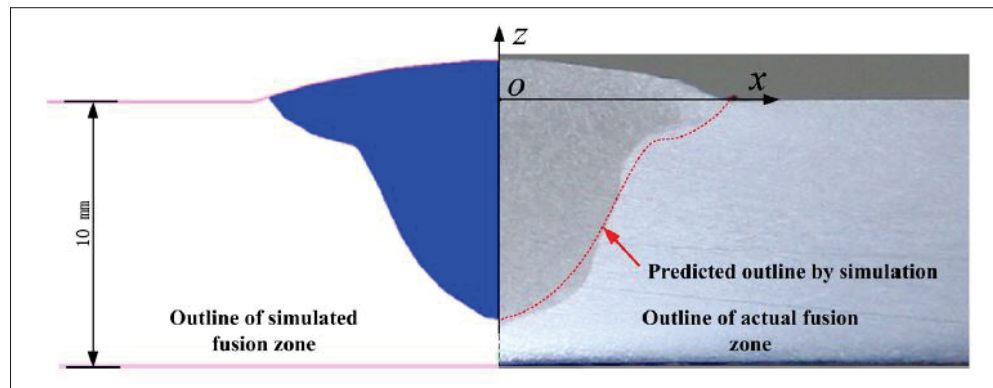


Figure 1.3 Exemple de zone de fusion complexe modélisée par une source composée. Tirée de (Wang *et al.*, 2016, p. 1995)

## 1.2 Méthodes des éléments finis et travaux antérieurs

Bien entendu, pour utiliser les modèles de source présentés ci-haut, une approche numérique est nécessaire. Les premiers travaux, notamment ceux de Westby (1968) et de Paley & Hibbert (1975) pour déterminer la distribution de température lors du soudage, étaient basés sur la méthode des différences finies (MDF). Cependant, cette méthode est très limitée : il est assez fastidieux de traiter de géométries complexes, particulièrement en 3D, avec la MDF. Rapidement, l'intérêt s'est plutôt tourné vers la méthode des éléments finis (MÉF). Cette dernière permet de facilement traiter de cas tridimensionnels avec des géométries plus complexes, un luxe qui n'était pas possible avec la MDF. Avec les ressources informatiques de plus en plus disponibles, des analyses plus complètes ont été rendues possibles : conditions limites (convection et

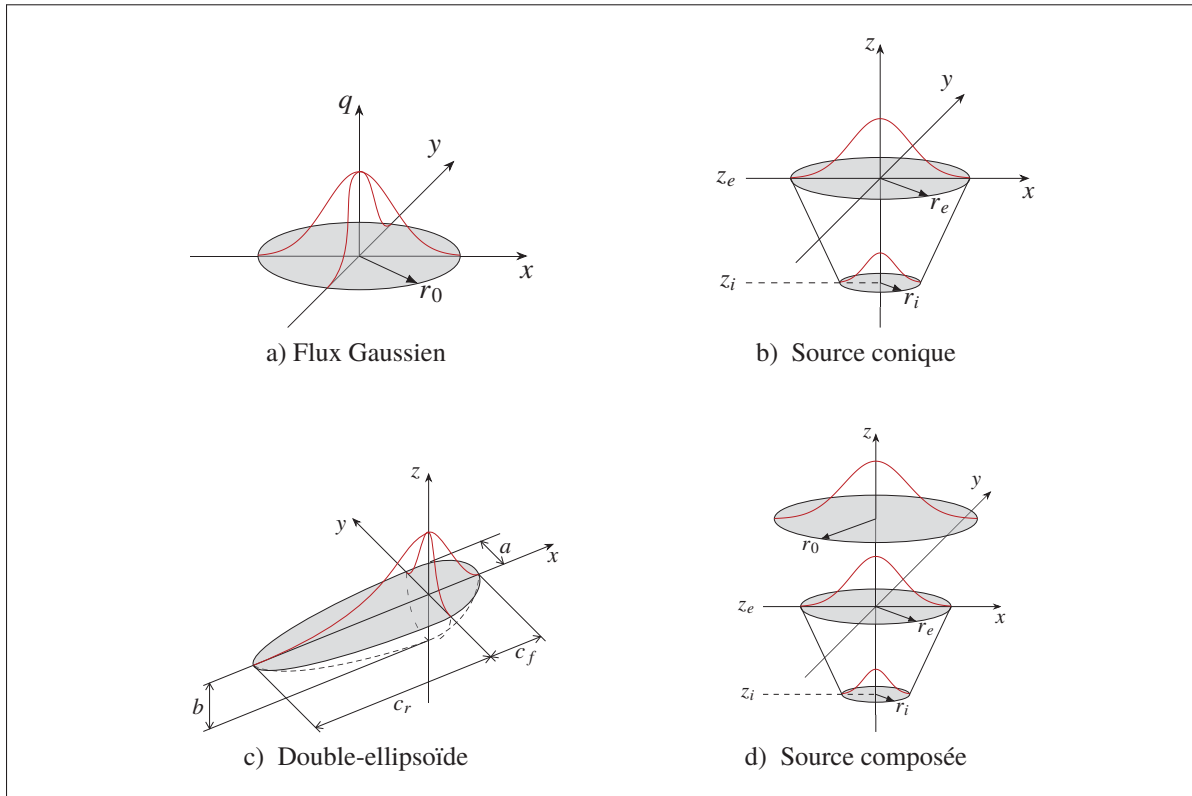


Figure 1.4 Divers types de sources de chaleur

rayonnement), propriétés thermiques dépendantes de la température, trajectoires de soudure complexes, etc.

De manière générale, la MÉF<sup>†</sup> est une méthode qui permet de résoudre de manière discrète la formulation faible d'équations différentielles. Pour ce faire, le domaine de calcul est discrétisé avec des nœuds et ces derniers sont reliés de manière à former des éléments. Apparue dans les années 60, la méthode est maintenant très robuste et efficace, la rendant la méthode la plus couramment utilisée pour les simulations numériques. Les cas dans lesquels elle a été appliquée aux problèmes de source de chaleur mobile sont nombreux, principalement pour le soudage à l'arc. Un des premiers est l'analyse thermomécanique non linéaire d'un cas 2D transitoire de Argyris, Szimmat & William (1982) pour prédire les contraintes résiduelles dans un problème

<sup>†</sup>Cette section présente un survol de la MÉF. Pour une connaissance approfondie des concepts, le lecteur est invité à consulter des ouvrages de référence tels que ceux de Zienkiewicz & Taylor (1967) ou de Bathe (1996).



de soudage axisymétrique. Un autre cas pionnier est l'étude thermomécanique de Friedman (1975) dans laquelle il était question d'un cas 2D, mais en état quasi-stationnaire. Une autre étude 2D intéressante est celle d'Argyris, Szimmat & William (1983), dans laquelle les résultats numériques et expérimentaux ont été comparés et il a été montré que la simulation numérique du procédé permet de prédire de manière acceptable le taux de refroidissement lors du procédé (figure 1.5).

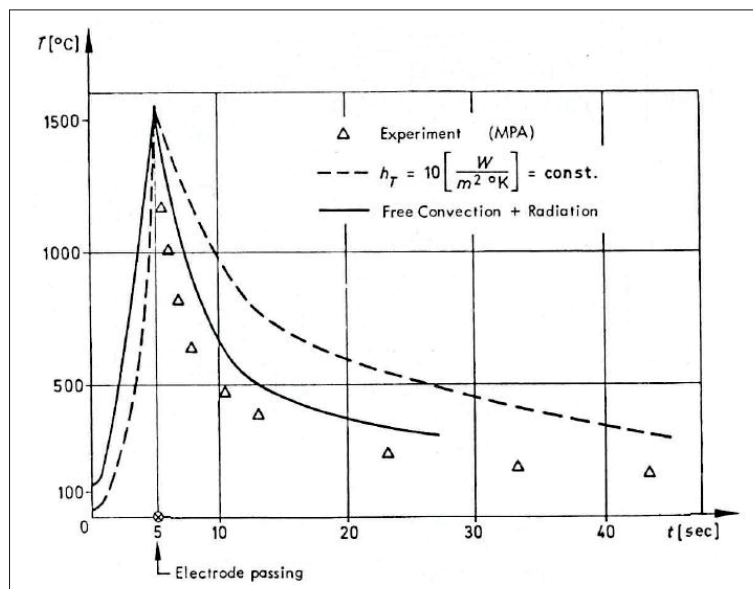


Figure 1.5 Prédiction du taux de refroidissement lors du soudage à l'arc par la MÉF en 2D.  
Tirée de (Argyris *et al.*, 1983, p. 257)

À cette époque, le facteur limitant était la puissance de calcul, c'est pourquoi les études étaient principalement bidimensionnelles. Même pour ces cas 2D, le temps de calcul était un enjeu important. C'est pourquoi, dans le but de réduire ce temps, certains auteurs (Hamide, Massoni & Bellet, 2007; Prasad & Narayanan, 1996) ont amené l'idée d'utiliser un maillage adaptatif. C'est-à-dire un maillage qui se raffine à chaque pas de temps de manière à suivre la source de chaleur, où le gradient est le plus prononcé (figure 1.6). Bien que cette méthode permette de sauver du temps de calcul en réduisant le nombre de degrés de liberté, elle implique tout de même de remailler le domaine à plusieurs reprises et de calquer les résultats sur le nouveau maillage. Comme il sera présenté à la section suivante, les méthodes sans maillage sont

mieux adaptées à ce raffinement local, dans le sens où elles permettent d'ajouter et de retirer des nœuds plus facilement, puisqu'il n'est pas nécessaire que ces derniers forment des éléments.

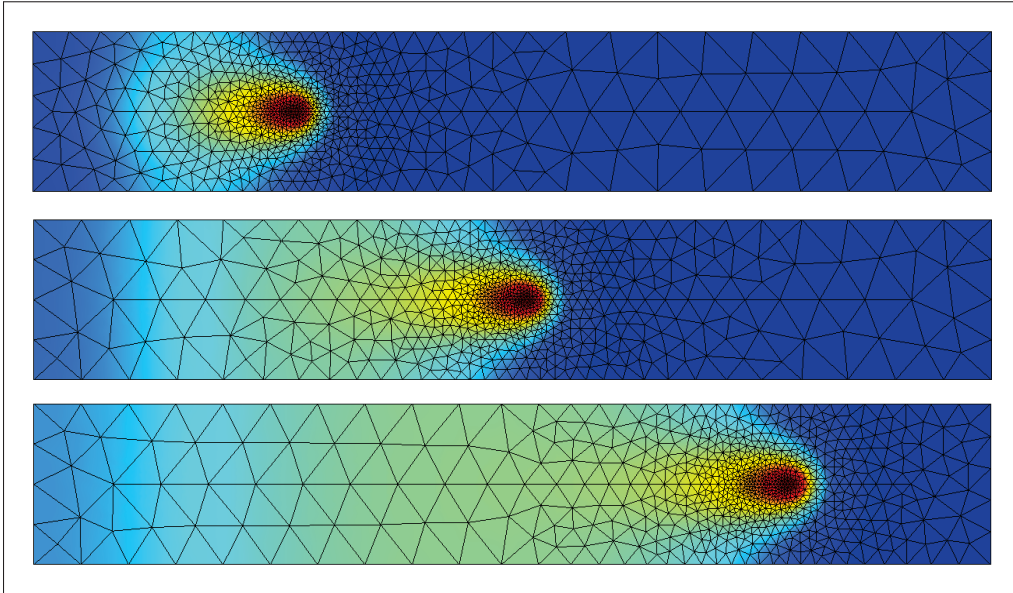


Figure 1.6 Exemple de maillage adaptatif suivant la source de chaleur

Au final, bien que ces simulations 2D soient utiles pour certaines applications simples, il n'en demeure pas moins que pour des géométries plus complexes et pour certains procédés à forte pénétration, il est impératif d'avoir recourt à des études 3D. Heureusement, les ressources informatiques ayant grandement augmenté au fil des dernières années, il est maintenant possible de réaliser des simulations 3D et transitoires sans problème. Ainsi, il est maintenant courant de réaliser des analyses tridimensionnelles, transitoires et non linéaires pour des problèmes de source de chaleur mobile. La tendance actuelle porte plutôt sur la simulation multiphysique des procédés et plus précisément sur le comportement du bain de fusion (Traidia, 2011).

### 1.3 Méthodes sans maillage

Malgré l'efficacité de la méthode des éléments finis, il n'en demeure pas moins qu'un inconvénient majeur réside dans le concept du maillage comme tel. Le fait de lier les nœuds entre eux de manière à former des éléments apporte plusieurs désavantages :

- La création d'un maillage de qualité, surtout pour des géométries 3D complexes avec une importante quantité de nœuds, peut être une tâche colossale. La création de ce maillage fait appel à divers algorithmes mathématiques pour répartir les nœuds dans le domaine de calcul et ensuite les relier entre eux, de manière à ce que les éléments ainsi formés soient optimaux<sup>†</sup>.
- Un raffinement local nécessite souvent un remaillage complet, comme dans le cas (énoncé précédemment) de re-maillage automatique en fonction de la position de la source de chaleur (figure 1.6). De leur côté, les méthodes sans maillage sont dotées de cette capacité à pouvoir ajouter/retirer facilement des nœuds. Elles seraient donc plus efficaces pour ce genre de raffinement adaptatif.
- Certaines applications (ex. : grandes déformations) requièrent le remaillage du domaine en cours de calcul pour conserver la « qualité » des éléments, c'est-à-dire éviter qu'ils se déforment trop, ce qui affecterait négativement les résultats. Les méthodes sans maillage sont plus permissives pour ce type de problèmes, puisqu'il n'y a pas cette notion « d'élément » à respecter.
- Les éléments de la MÉF ne peuvent être scindés, ils doivent demeurer entiers ou être retirés. Ce principe apporte son lot d'inconvénients lorsque le problème étudié comporte des discontinuités. Tel que l'expose la figure 1.7, la discontinuité doit respecter le maillage, ce qui n'est pas nécessaire pour les méthodes sans maillage. Elles sont donc mieux désignées pour résoudre, par exemple, des problèmes de propagation de fissure ou des problèmes dans lesquels des changements de phase se produisent.
- La transposition (*mapping*) des résultats lors du remaillage, c'est-à-dire l'interpolation des résultats sur le nouveau maillage, augmente considérablement le temps de calcul.

---

<sup>†</sup>Voir « *aspect ratio* » ou « *shape factor* » pour en apprendre plus sur les critères utilisés pour juger de la qualité d'un élément.

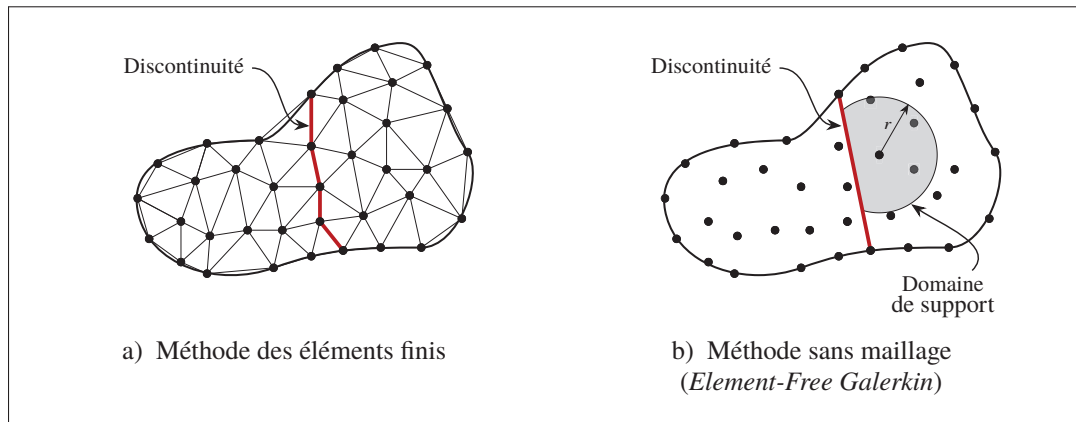


Figure 1.7 Gestion des discontinuités

Motivés à surmonter ces désavantages, plusieurs chercheurs ont orienté leurs efforts vers le développement de méthodes ne nécessitant pas de maillage conventionnel. C'est pourquoi les « méthodes sans maillage » connaissent un essor considérable depuis les années 1970. Au cours des décennies suivantes, une multitude de méthodes différentes ont été recensées. Le tableau 1.1 retrace, en ordre chronologique, l'apparition des méthodes les plus populaires. De part l'absence de maillage, ces méthodes sont particulièrement attrayantes pour :

- Résoudre des problèmes de propagation de fissure : un remaillage complet n'est pas nécessaire à mesure que la fissure se propage.
- Gérer les interfaces entre différents matériaux (discontinuité).
- Traiter des problèmes avec des changements de phases (discontinuités). Un exemple typique est le soudage par fusion, dans lequel l'interface solide/liquide évolue en fonction de la position de la source de chaleur. Avec la MÉF, il faut sans cesse remailler de manière à ce que le maillage coïncide avec l'interface.
- Analyser des problèmes en grands déplacements et grandes déformations, dans lesquels le remaillage est inévitable avec la MÉF. Ces problèmes incluent les procédés de formage (estampage, écouissage, etc.), les problèmes d'impacts, les cas de détachement de matière (comme les copeaux en usinage), etc.
- Solutionner les problèmes avec des surfaces libres, comme la surface du bain de fusion en soudage. Encore une fois, des remaillages seraient nécessaires avec la MÉF.

Plusieurs problèmes ont été traités avec ces méthodes et jusqu'à présent, les plus utilisées en mécanique des solides et en transfert de chaleur sont probablement les méthodes EFG et *Meshless local Petrov-Galerkin* (MLPG). Tandis que pour les applications de mécanique des fluides (CFD), d'analyses dynamiques et de problèmes en grands déplacements, les méthodes *Smooth particle hydrodynamics* (SPH) et *Reproducing kernel particle method* (RKPM), qui est une version améliorée de la précédente, sont les plus courantes. Pour une revue plus exhaustive des diverses méthodes et de leurs applications, le lecteur est invité à consulter les ouvrages de Liu (2003) et Chen, Hillman & Chi (2017).

Dans le cadre de ce projet, la méthode EFG a été sélectionnée pour résoudre le problème de source de chaleur mobile. Le choix s'explique principalement par la facilité d'utilisation de la méthode et les nombreux travaux antérieurs en transfert de chaleur qui ont démontré que la méthode s'applique bien à ces problèmes. Dans cette section, un bref survol théorique de la méthode sera présenté à titre de mise en contexte. La théorie complète est présentée à la section 3.4.

Tableau 1.1 Recensement de quelques méthodes sans maillage

Méthode	Référence	Formulation
Smooth particle hydrodynamics (SPH)	(Lucy, 1977)	Forte
Diffuse element method (DEM)	(Nayroles, Touzot & Villon, 1992)	Faible
Reproducing kernel particle method (RKPM)	(Liu, Adee, Jun & Belytschko, 1993)	Faible
Element-Free Galerkin (EFG)	(Belytschko, Lu & Gu, 1994)	Faible
<i>hp</i> clouds method	(Duarte & Oden, 1996)	Faible
Partition of unity (PUFEM)	(Melenk & Babuška, 1996)	Faible
Finite point method (FPM)	(Onate, Idelsohn, Zienkiewicz & Taylor, 1996)	Forte
Meshless local Petrov-Galerkin method (MLPG)	(Atluri & Zhu, 1998)	Faible
Point interpolation method (PIM)	(Liu & Gu, 2001)	Faible

### 1.3.1 Méthode *Element-Free Galerkin*

Selon la méthode EFG, l'approximation de la solution d'une équation différentielle est basée sur les *Moving Least Squares* (MLS), introduits par Lancaster & Salkauskas (1981), repris par Nayroles *et al.* (1992) pour la *diffuse element method* et finalement par Belytschko *et al.* (1994) pour la méthode EFG. La solution numérique (approximée)  $\theta^h$  de  $\theta$  est

$$\theta^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) \theta_I \quad (1.7)$$

où  $\phi(\mathbf{x})$  est la fonction d'approximation MLS,  $\theta_I$  est le paramètre nodal au nœud  $I$  et  $N$  est le nombre de nœuds dans le domaine.

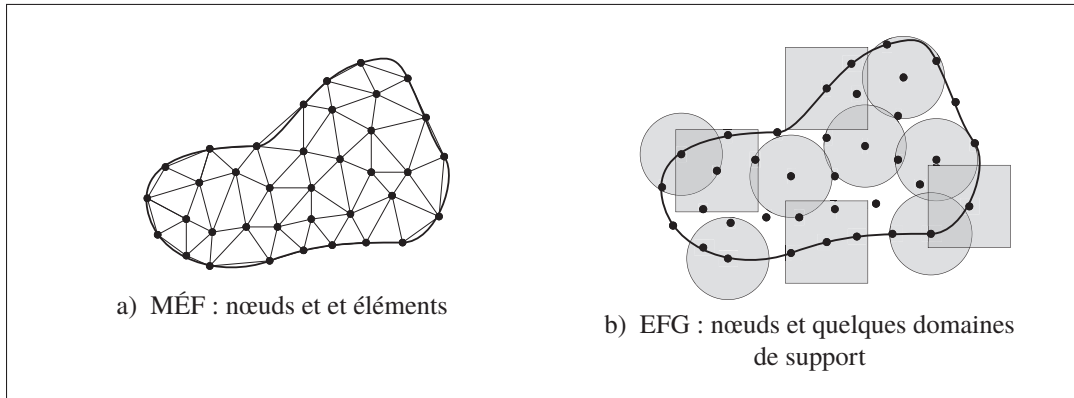


Figure 1.8 Discretisation du domaine et fonction de base/approximation

Tout comme la MÉF, la méthode EFG discrétise le domaine de calcul et ses frontières en distribuant des nœuds de manière uniforme ou non, tel qu'illustré à la figure 1.8. Toutefois, plutôt que de lier les nœuds de manière à former des éléments, la méthode utilise des « domaines d'influence » ou « domaines de support ». La taille de ces derniers est définie par

$$d_{mI} = d_{\max} \times c_I \quad (1.8)$$

où  $d_{max}$  est un facteur d'échelle (*scaling parameter*) constant pour tous les noeuds et  $c_I$  est l'espacement nodal moyen au nœud  $I$ . En trois dimensions, les formes usuelles de domaine sont la sphère, le cube et la brique (parallélépipède droit). Le tableau 1.2 présente les valeurs usuelles de  $d_{max}$  recensées dans la littérature pour des problèmes de transfert de chaleur. De manière générale, un facteur  $1.0 \leq d_{max} \leq 2.0$  semble mener à de « bons » résultats. Par contre, peu d'auteurs se sont attardés à quantifier l'influence de la taille du domaine de support sur les résultats. Pourtant, Singh (2005) a montré qu'un domaine de trop grande taille provoque la divergence des résultats (figure 1.9). Il y aurait donc intérêt à définir une taille optimale de domaine. Il serait aussi pratique de définir la taille des domaines en termes de nombre de nœuds qui y sont inclus, puisque la façon utilisée pour déterminer l'espacement nodal moyen  $c_I$  peut varier d'un analyste à l'autre, particulièrement pour des distributions de nœuds irrégulières.

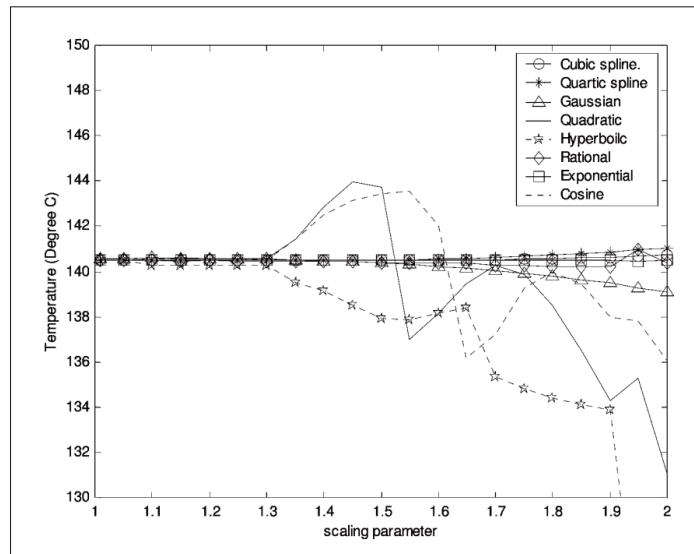


Figure 1.9 Température en un point en fonction de  $d_{max}$ , pour un problème 2D de transfert de chaleur.  
Tirée de (Singh, 2005, p. 1042)

À défaut d'utiliser des éléments, le lien entre les nœuds est défini par une pondération qui est fonction de la distance qui les sépare. Chaque nœud *voisin* se trouvant à l'intérieur d'un domaine possède une pondération par rapport au nœud  $I$ , propriétaire du domaine. Cette pondération, à n'importe quel point  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$  par rapport au nœud  $I$  en  $\mathbf{x}_I = [x_I \ y_I \ z_I]^T$ , s'écrit :

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv w_I(\mathbf{x}) = w(r) \quad (1.9)$$

où  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|/d_{mI}$  est la distance normalisée entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_I$ . Le choix de la fonction de pondération est plus ou moins arbitraire, en autant que quelques critères soient respectés (Liu & Gu, 2005) :

- $w_I(\mathbf{x}) > 0$  dans le domaine de support ;
- $w_I(\mathbf{x}) = 0$  hors du domaine de support ;
- $w_I(\mathbf{x})$  doit décroître continuellement à mesure que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$  augmente ;
- $w_I(\mathbf{x})$  doit être suffisamment lisse.

La dernière condition n'est pas un prérequis, mais mène généralement à de meilleurs résultats (Belytschko *et al.*, 1994). Quelques fonctions de pondération usuelles sont tracées à la figure 1.10 et leurs expressions sont fournies à la section 3.4.2, page 39.

Tableau 1.2 Valeurs usuelles de  $d_{\max}$  pour des applications de transfert de chaleur

$d_{\max}$	Type de domaine	Application	Référence
1.0 ~ 1.5	Rectangle	Problèmes 1D et 2D linéaire, régime permanent	Singh, Sandeep & Prakash (2003)
1.0 ~ 2.0	Rectangle Brique	Problèmes 1D, 2D et 3D en régime transitoire	Singh (2005)
1.0 ~ 1.5	Rectangle	Problème 3D dans un domaine composé de 2 matériaux	Singh & Tanaka (2006)
1.5 ~ 1.7	Rectangle	État quasi-stationnaire 2D	Pham (2013)
2.0 ~ 3.5	Rectangle Cercle	Problème 2D avec géométrie complexe	Zhang, Zhou, Wang & Hu (2017a)

Malgré le fait que la méthode EFG n'utilise pas de maillage comme tel, elle requiert tout de même un maillage d'arrière-plan (*background mesh*) pour évaluer numériquement les intégrales découlant de la formulation faible (voir section 3.5). Ainsi, une règle de quadrature est utilisée sur l'ensemble des cellules d'arrière-plan (*background cells*), de la même manière qu'elle serait



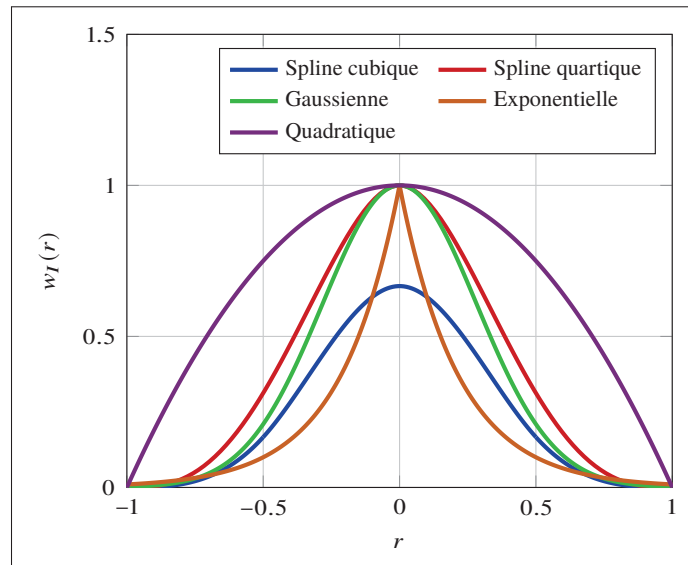


Figure 1.10 Quelques fonctions de pondération

réalisée sur chaque élément pour la MÉF. Toutefois, ce *background mesh* est en aucun cas relié aux nœuds utilisés pour discrétiser le domaine de calcul, tel que représenté à la figure 1.11. Ce maillage d'arrière-plan a une influence considérable sur les résultats : Liu (2003) a montré qu'une quantité trop faible ou trop élevée de points de quadrature affecte négativement les résultats (figure 1.12b). Il est donc nécessaire de porter une attention particulière à cet aspect. Il faut admettre que ce concept de *background mesh* figure sur la liste des inconvénients de la méthode EFG. Parmi ces inconvénients, il y a également le temps de calcul habituellement plus long (comparativement à la MÉF), puisque la matrice représentant le système d'équations à résoudre est plus dense, et par conséquent, plus longue à inverser. De plus, l'assemblage de cette matrice mène généralement à une matrice moins bien conditionnée, ce qui contribue aussi à augmenter le temps de résolution. Il faut aussi tenir compte du temps nécessaire à la création des domaines de support à chaque nœud et à chaque point de quadrature.

Un autre aspect à noter est le fait que, de par l'utilisation des MLS, les fonctions d'approximation ne répondent pas au delta de Kronecker, c'est-à-dire :

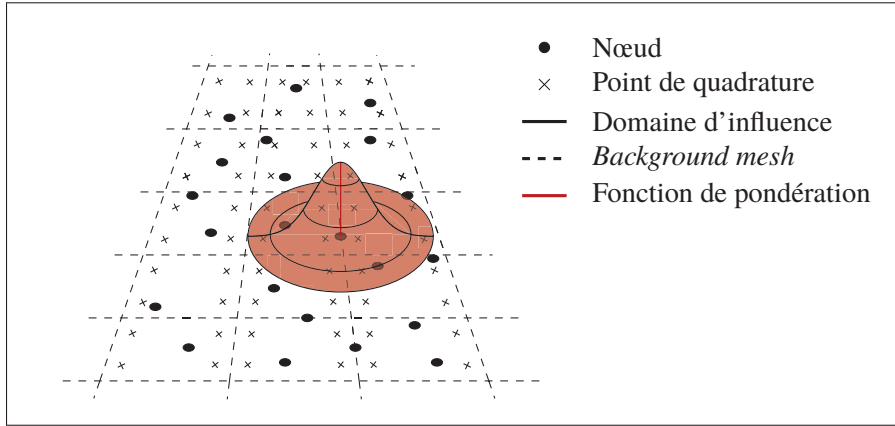


Figure 1.11 Représentation du *background mesh* et de la distribution de nœuds

$$\theta^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}_I) \theta_i \neq \theta_I \quad (1.10)$$

Évidemment, cela cause un problème au niveau des conditions limites essentielles, puisqu'elles ne peuvent être imposées directement, comme c'est le cas avec la MÉF. Il y a généralement trois façons pour palier ce problème :

- La méthode de pénalisation (*penalty method*), dans laquelle un facteur multiplicatif radicalement élevé est appliqué aux nœuds contraints, de manière à modifier le système d'équations pour que la solution respecte (approximativement) la condition essentielle ;
- La méthode des multiplicateurs de Lagrange, dans laquelle la solution est contrainte à respecter précisément la condition essentielle. Cette méthode implique toutefois d'introduire de nouvelles équations dans le système ;
- Le couplage avec des éléments finis aux nœuds contraints (Belytschko, Organ & Krongauz, 1995).

Pour sa précision et sa simplicité, la méthode des multiplicateurs de Lagrange a été adoptée pour ce projet. La façon avec laquelle le système d'équations est contraint est décrite en détail dans l'article, section 3.4.3.

Concernant la convergence de la méthode EFG, il a été montré par Liu & Gu (2005) et par Belytschko *et al.* (1994) que la méthode EFG peut présenter un meilleur taux et une meilleure précision que la MÉF (figure 1.12a). Le constat a été fait pour des problèmes 2D de mécanique des solides. À la connaissance de l'auteur, aucune étude n'a comparé la convergence et la précision de la méthode EFG avec la MÉF pour des problèmes de transfert de chaleur.

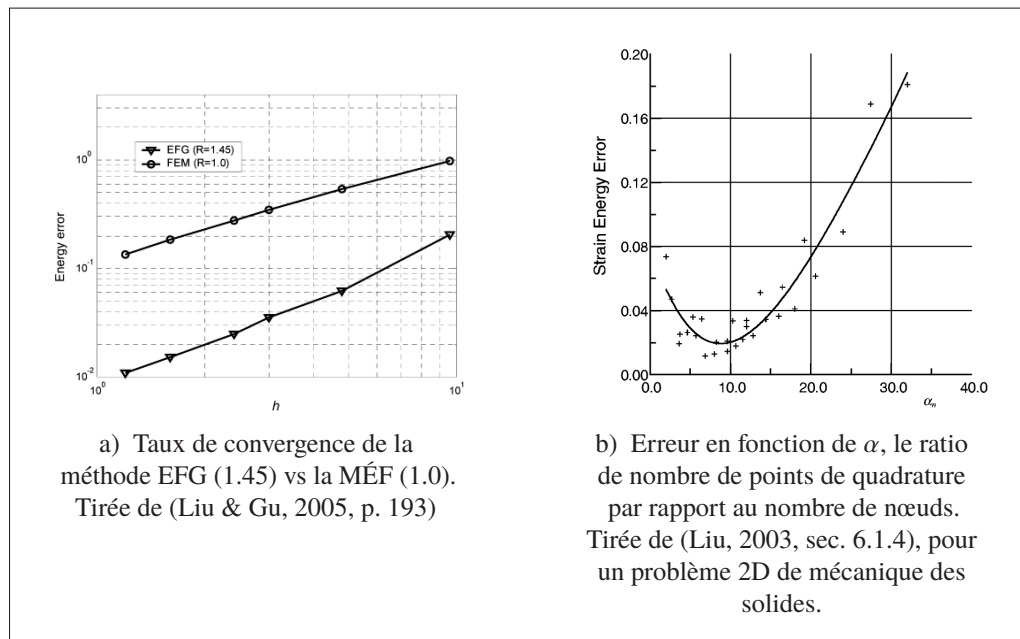


Figure 1.12 Taux de convergence et influence du nombre de points de quadrature

### 1.3.2 Travaux antérieurs

Plusieurs travaux utilisant la méthode EFG ont déjà été recensés pour des problèmes de transfert de chaleur, comme la comparaison entre la méthode EFG et la MÉF pour des problèmes simples 1D et 2D transitoires par Singh *et al.* (2003). Des cas transitoires 3D ont été traités par Singh & Prakash (2003) et Singh & Tanaka (2006). Dans tous les cas, il a été montré que les résultats *meshless* concordent très bien avec ceux obtenus par la MÉF. De plus, une étude portant sur l'influence des fonctions de pondération et le facteur de mise à l'échelle a été réalisée par Singh (2005). Toutefois, malgré leur pertinence, ces études présentent quelques limitations :

- Les domaines de calculs/géométries et conditions limites sont simples, aucun cas pratique est étudié ;
- La distribution de nœuds est régulière, ce qui n'est presque jamais le cas dans les problèmes d'applications pratiques ;
- L'utilisation des différentes formes de domaine de support n'est pas étudiée ;
- Le sujet du *background mesh* est peu ou pas abordé. Pourtant, il a été montré par Liu (2003) que ce dernier a une influence considérable sur les résultats.

Des études ont tout de même été réalisées spécifiquement sur des problèmes de source de chaleur mobile avec les méthodes sans maillage. Notamment, Pham (2013) a résolu l'état quasi-stationnaire de Rosenthal en 2D avec la méthode EFG. Un cas similaire, c'est-à-dire en 2D, mais réellement transitoire, a été traité par Reséndiz-Flores & Saucedo-Zendejo (2015) avec la méthode FPM. Un autre cas semblable a été résolu avec la méthode EFG par Das, Bhattacharjee & Rao (2011), mais avec validation expérimentale. Dans tous les cas, les résultats ont été comparés avec la MEF et une excellente concordance a été observée. Toutefois, même si ces cas bidimensionnels peuvent s'avérer utiles pour plusieurs applications, il n'en demeure pas moins que dans la majorité des cas pratiques, un modèle 3D est requis. Malgré que quelques études tridimensionnelles aient été rapportées, telle que celle de Xiao, Zhan, Gu & Li (2016) pour le procédé de soudage par friction-malaxage, peu ou pas d'études ont réellement traité de cas 3D transitoires, en plus de considérer l'influence des divers paramètres de la méthode. De plus, à la connaissance de l'auteur, aucune étude n'a inclus la validation expérimentale pour un procédé de soudage par fusion, qui implique de forts gradients de température.

Un aspect intéressant qui n'a presque pas été exploité dans la littérature est la capacité des méthodes sans maillage à pouvoir facilement ajouter/retirer des nœuds. Cette habileté a été exploitée par Shibahara & Atluri (2011) pour un cas 2D de source mobile avec la méthode MLPG. Les auteurs ont utilisé un groupe de nœuds mobiles se déplaçant avec la source de manière à raffiner localement la solution, plutôt que d'utiliser une distribution nodale dense tout le long de la trajectoire. Un exemple visuel d'un tel raffinement est illustré à la figure 1.13. Cette approche est très intéressante, puisqu'elle a le potentiel de réduire considérablement le temps de

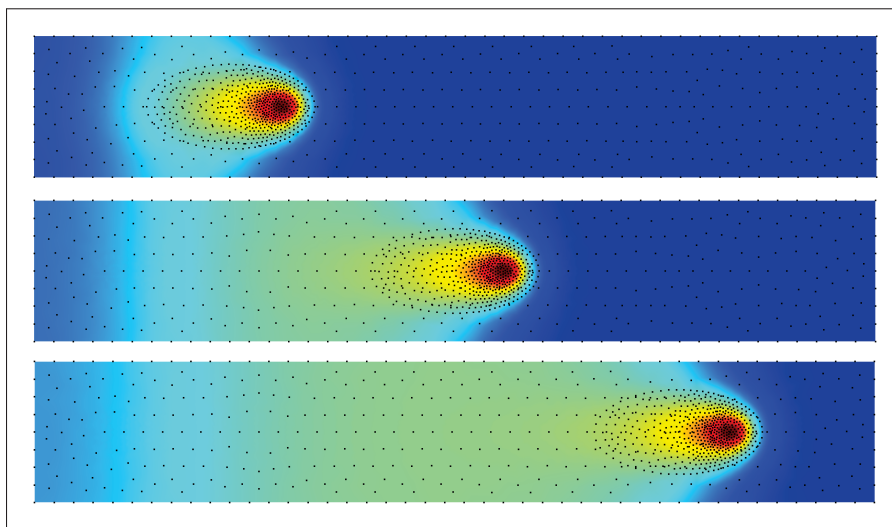


Figure 1.13 Exemple de raffinement local avec un groupe de nœuds mobiles suivant la source de chaleur

calcul, qui est le principal désavantage de la méthode. Malheureusement, les auteurs n'ont pas quantifié cette réduction de temps dans leur étude. Une autre solution pour pallier le problème du temps de calcul est l'utilisation du calcul parallèle. Karatarakis, Metsis & Papadrakakis (2013) ont parallélisé l'assemblage de la matrice représentant le système d'équations et une accélération de 100 fois a été obtenue pour un problème d'environ 50 000 nœuds. D'autres excellents résultats ont été obtenus par Singh & Jain (2005) en parallélisant la résolution du système d'équations ; une accélération de près de 5 fois pour un problème d'aussi peu que ~1000 nœuds. Bien que fort efficace, il ne faut pas oublier que la parallélisation d'un code demande des efforts supplémentaires considérables lors de la programmation.



## **CHAPITRE 2**

### **OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE**

#### **2.1 Objectifs de recherche**

Comme énoncé au chapitre précédent, les études antérieures comportent des lacunes principalement en lien avec l'influence des différents paramètres de la méthode EFG. De plus, peu de problèmes d'application pratique ont été résolus avec la méthode EFG. Les objectifs principaux de recherche sont donc :

- Réaliser une étude paramétrique pour déterminer l'influence des paramètres de la méthode et ainsi être en mesure de fournir des lignes directrices pour les études ultérieures.
- Démontrer expérimentalement que la méthode EFG permet de modéliser efficacement un problème de source de chaleur mobile 3D transitoire, plus précisément pour un cas de soudage par fusion, dans lequel de forts gradients de température interviennent.

L'atteinte de ces objectifs généraux sous-entend aussi l'atteinte des objectifs spécifiques suivants :

- Développer un code de calcul basé sur la méthode EFG pour résoudre l'équation de chaleur en 3D et en régime transitoire ;
- Comparer les résultats EFG avec ceux obtenus grâce à la MÉF ;
- Valider le code avec des essais expérimentaux et ainsi montrer que la méthode EFG permet de modéliser expérimentalement un procédé de source de chaleur mobile ;
- Développer un algorithme pour représenter numériquement l'apport de chaleur. Ce qui implique de choisir un modèle de source de chaleur (flux gaussien, conique, double ellipsoïde, etc.) et de le calibrer de manière à représenter le plus fidèlement possible la forme du bain de fusion.

La méthodologie adoptée pour mener à terme ces objectifs est présentée de façon détaillée à la section suivante.

## 2.2 Méthodologie

Le déroulement de ce projet peut être divisé en trois volets principaux : soit le développement du code de calcul, la validation expérimentale et l'étude paramétrique de la méthode EFG. Le but de cette section est de présenter plus en détail la méthodologie suivie lors de la recherche, qui est tout de même décrite de façon succincte dans l'article (chapitre 3).

### 2.2.1 Développement numérique

La première étape est le développement du code de calcul pour résoudre l'équation de chaleur avec la méthode EFG. Pour ce faire, il faut développer la formulation discrète (ou matricielle) de l'équation de chaleur. Le problème de conduction dans un domaine  $\Omega$  borné par  $\Gamma$ , du temps  $t = 0$  au temps  $t_f$ , est défini comme suit :

$$k\Delta\theta + Q = \rho c_p \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega \times (0, t_f) \quad (2.1)$$

$$\theta = \theta^S \quad \text{sur } \Gamma_\theta \times (0, t_f) \quad (2.2)$$

$$-k\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = q^S \quad \text{sur } \Gamma_q \times (0, t_f) \quad (2.3)$$

$$-k\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = h(\theta - \theta_\infty) \quad \text{sur } \Gamma_h \times (0, t_f) \quad (2.4)$$

$$\theta = \theta^0 \quad \text{dans } \Omega, \text{ à } t = 0 \quad (2.5)$$

où  $\theta^S$  est une température prescrite sur la frontière  $\Gamma_\theta$ ,  $q^S$  est un flux imposé sur la frontière  $\Gamma_q$ ,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$ ,  $h$  est le coefficient de convection,  $\theta_\infty$  est la température du fluide environnant et  $\theta^0$  est la température initiale, c'est-à-dire au temps  $t = 0$ . Comme la MÉF, la méthode EFG permet de résoudre la formulation faible (*weak form*) d'une équation différentielle (ÉD), c'est-à-dire d'exprimer l'ÉD sous forme d'intégrales. En bref, cela signifie qu'il n'est plus requis que l'ÉD soit satisfaite en tout point, mais plutôt qu'elle soit satisfaite au sens de l'intégration. En utilisant le *principe de température virtuelle*<sup>†</sup> (Bathe, 1996, chap. 7), la formulation faible présentée à l'équation 2.6 est obtenue en multipliant l'ÉD par une distribution

<sup>†</sup>Aussi appelé *principe of virtual work*, dû à son utilisation dans le domaine de la mécanique des solides.



de température arbitraire  $\bar{\theta}$  et en intégrant sur tout le domaine. Le développement complet de la formulation faible, à partir de l'ÉD originale, est présenté brièvement dans l'article (section 3.5) et de manière plus détaillée à l'annexe II.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega}_{\text{masse thermique}} + \underbrace{\int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega}_{\text{conduction}} - \underbrace{\int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega}_{\text{génération de chaleur}} + \underbrace{\int_{\Gamma_q} q^S \bar{\theta} \, d\Gamma}_{\text{flux imposé}} \dots \\
 & \dots + \underbrace{\int_{\Gamma_h} h(\theta - \theta_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma}_{\text{convection}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\theta}} \delta \lambda (\theta - \theta^S) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\theta}} \lambda \delta \theta \, d\Gamma}_{\text{condition essentielle imposée avec multiplicateurs de Lagrange}} = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il suffit maintenant de considérer l'équation 1.7 pour la distribution de température virtuelle :

$$\bar{\theta}(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \bar{\theta}_J \tag{2.7}$$

$$\nabla \bar{\theta}(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N \nabla \phi_J(\mathbf{x}) \bar{\theta}_J \tag{2.8}$$

En introduisant les équations 2.7 et 2.8 dans l'équation 2.6, on obtient la forme discrète de la formulation faible. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega} \rho c_p \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \bar{\theta}_I \right)^T \left( \sum_{J=1}^n \phi_J \dot{\theta}_J \right) d\Omega \dots}_{\{\bar{\boldsymbol{\theta}}\}^T [\mathbf{C}] \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\}} \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} k \left( \sum_{I=1}^n \nabla \phi_I \bar{\theta}_I \right)^T \left( \sum_{J=1}^n \nabla \phi_J \theta_J \right) d\Omega + \int_{\Gamma_h} h \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \bar{\theta}_I \right) \left( \sum_{J=1}^n \phi_J \theta_J \right) d\Gamma \dots}_{\{\bar{\boldsymbol{\theta}}\}^T [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\theta}\}} \\
& - \underbrace{\int_{\Omega} Q \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \bar{\theta}_I \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^S \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \bar{\theta}_I \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_h} h \theta_{\infty} \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \bar{\theta}_I \right) d\Gamma \dots}_{\{\bar{\boldsymbol{\theta}}\}^T \{\mathbf{F}\}} \\
& \underbrace{\int_{\Gamma_{\theta}} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \theta_I - \theta^S \right) d\Gamma}_{\delta \{\boldsymbol{\lambda}\}^T \left( [\mathbf{G}]^T \{\boldsymbol{\theta}\} - \{\mathbf{q}_{\theta}\} \right)} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\theta}} \left( \sum_{I=1}^n \phi_I \bar{\theta}_I \right)^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma}_{\{\bar{\boldsymbol{\theta}}\}^T [\mathbf{G}] \{\boldsymbol{\lambda}\}} = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  est une « variation » des multiplicateurs de Lagrange, voir (Bathe, 1996, sec. 3.3.2). En forme compacte, l'équation 2.9 devient :

$$\{\bar{\boldsymbol{\theta}}\}^T \left[ [\mathbf{C}] \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\} + [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\theta}\} + \{\mathbf{F}\} + [\mathbf{G}] \{\boldsymbol{\lambda}\} \right] + \delta \{\boldsymbol{\lambda}\}^T \left[ [\mathbf{G}]^T \{\boldsymbol{\theta}\} - \{\mathbf{q}_{\theta}\} \right] = 0 \tag{2.10}$$

Puisque  $\{\bar{\boldsymbol{\theta}}\}$  et  $\delta \{\boldsymbol{\lambda}\}$  sont complètement arbitraires, l'équation 2.10 est satisfaite seulement si

$$[\mathbf{C}] \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\} + [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\theta}\} + [\mathbf{G}] \{\boldsymbol{\lambda}\} = \{\mathbf{F}\} \tag{2.11}$$

$$[\mathbf{G}]^T \{\boldsymbol{\theta}\} = \{\mathbf{q}_{\theta}\} \tag{2.12}$$

où

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} k \begin{Bmatrix} \phi_{I,x} \\ \phi_{I,y} \\ \phi_{I,z} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{J,x} \\ \phi_{J,y} \\ \phi_{J,z} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \phi_I h \phi_J d\Gamma \quad (2.13)$$

$$C_{IJ} = \int_{\Omega} \rho c_p \phi_I \phi_J d\Omega \quad (2.14)$$

$$G_{IK} = \int_{\Gamma_{\theta}} \phi_I N_k d\Gamma \quad (2.15)$$

$$(q_{\theta})_K = \int_{\Gamma_{\theta}} \theta^S N_k d\Gamma \quad (2.16)$$

$$F_I = \int_{\Omega} \phi_I Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} \phi_I q^S d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \phi_I h \theta_{\infty} d\Gamma \quad (2.17)$$

Pour la discrétisation temporelle, le schéma inconditionnellement stable d'Euler implicite (*Backward Euler*) a été utilisé. Soit  $\theta(x, y, z, t_n) \equiv \theta_n$  la distribution de température au  $n^e$  pas de temps et en utilisant une série de Taylor pour approximer ce terme, on peut écrire :

$$\theta_n = \theta_{n+1} - \Delta t \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{n+1} + O(\Delta t^2) \quad (2.18)$$

où  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . En réarrangeant l'équation 2.18, le schéma bien connu d'Euler implicite est obtenu :

$$\theta_{n+1} \approx \theta_n + \Delta t \dot{\theta}_{n+1} \quad (2.19)$$

En injectant l'équation 2.19 dans l'équation 2.11, on obtient :

$$([C]_{n+1} + \Delta t [K]_{n+1}) \{\theta\}_{n+1} + \Delta t [G]_{n+1} \{\lambda\}_{n+1} = [C]_{n+1} \{\theta\}_n + \Delta t \{F\}_{n+1} \quad (2.20)$$

En introduisant  $\Delta t$  dans  $\{\lambda\}$  de manière à ce que  $\Delta t [\mathbf{G}] \{\lambda\} = [\mathbf{G}] \{\lambda^*\}$  et en soulignant que la valeur numérique des multiplicateurs de Lagrange importe peu, la distinction entre  $\{\lambda\}$  et  $\{\lambda^*\}$  peut être omise et les équations 2.20 et 2.12 sont réécrites sous leur forme finale :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}^* + \mathbf{C} & \mathbf{G} \\ \hline \mathbf{G}^T & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}_{n+1} \\ \lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_{n+1}^* \\ \mathbf{q}_0 \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

où  $[\mathbf{K}^*] = \Delta t [\mathbf{K}]$  et  $\{\mathbf{F}^*\}_{n+1} = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\theta}\}_n + \Delta t \{\mathbf{F}\}_n$ .

En ce qui concerne les intégrales des équations 2.13 à 2.17, elles sont évaluées numériquement par la quadrature de Gauss<sup>†</sup> :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n_Q} w_i f(x_i) \quad (2.22)$$

où  $n_Q$  est le nombre de points de quadrature,  $x_i$  est la position du  $i^e$  point de Gauss et  $w_i$  est sa pondération. Les positions et les pondérations des points sur l'intervalle de référence  $[-1, 1]$  sont présentées au tableau 2.1. La quadrature est exécutée sur chaque cellule du maillage d'arrière-plan, de manière à couvrir tout le domaine. Pour plus de détails concernant l'intégration en trois dimensions, le lecteur peut consulter l'annexe III.

L'équation 2.21 représente maintenant la forme discrète en espace-temps de l'équation de chaleur. Pour la résoudre, un code de calcul a été développé dans l'environnement MATLAB, jumelé avec le logiciel de maillage à code source libre GMSH (Geuzaine & Remacle, 2009) pour générer la distribution de nœuds et le *background mesh*. Schématisé à la figure 2.1, le code présente la même architecture typique d'un code basé sur la MÉF. La majeure différence réside principalement dans les procédures de quadrature, c'est-à-dire qu'il y a une distinction entre les cellules d'intégration et les nœuds de discrétisation. La procédure de quadrature est aussi présentée à l'annexe IV pour l'assemblage du vecteur de chargement  $\{\mathbf{F}\}$  (équation 2.17).

---

<sup>†</sup>Ce concept de base est détaillé dans tout bon ouvrage de référence sur la MÉF. Le lecteur est invité à s'y référer pour de plus amples détails.

Tableau 2.1 Coordonnées et pondérations pour la quadrature de Gauss (Oñate, 2009, p. 91)

Nombre de points	Coordonnées $\xi_i$	Pondération $w_i$
1	0.0	2.0
2	$\pm 0.5773502692$	1.0
3	$\pm 0.774596697$	0.5555555556
	0.0	0.8888888889
4	$\pm 0.8611363116$	0.3478548451
	$\pm 0.3399810436$	0.6521451549
5	$\pm 0.9061798459$	0.2369268851
	$\pm 0.5384693101$	0.4786286705
	0.0	0.5688888889

Un code équivalent basé sur la méthode des éléments finis a aussi été développé, dans le but de pouvoir valider le code EFG et de pouvoir comparer les deux méthodes. Finalement, pour valider les deux codes maison, les résultats ont été comparés avec le logiciel commercial SYSWELD.

### 2.2.2 Essais et validation expérimentale

Pour valider expérimentalement les résultats numériques, le code de calcul a été utilisé pour prédire la distribution de température lors d'une application de soudage. Le procédé MIG a été choisi et les essais ont été réalisés avec le système de soudage robotisé de l'ÉTS, sur des échantillons d'aluminium 6061-T6. Le procédé MIG est un candidat idéal, puisqu'il fait intervenir d'importants gradients de température dus à l'apport d'énergie considérable provenant de l'arc de soudage. Quant au type de joint exécuté, c'est le *bead on plate* (cordon sur plaque) qui a été choisi, qui consiste simplement à faire un cordon de soudure sur une plaque. Quatre thermocouples ont été placés à 3, 6, 9 et 12 mm du cordon de soudure pour enregistrer le cycle thermique. Les courbes obtenues pourront ensuite être comparées avec les résultats des simulations. Tous les détails techniques, incluant les équipements, les paramètres de soudage, les propriétés physiques du substrat, ainsi que l'équipement d'acquisition de données sont présentés

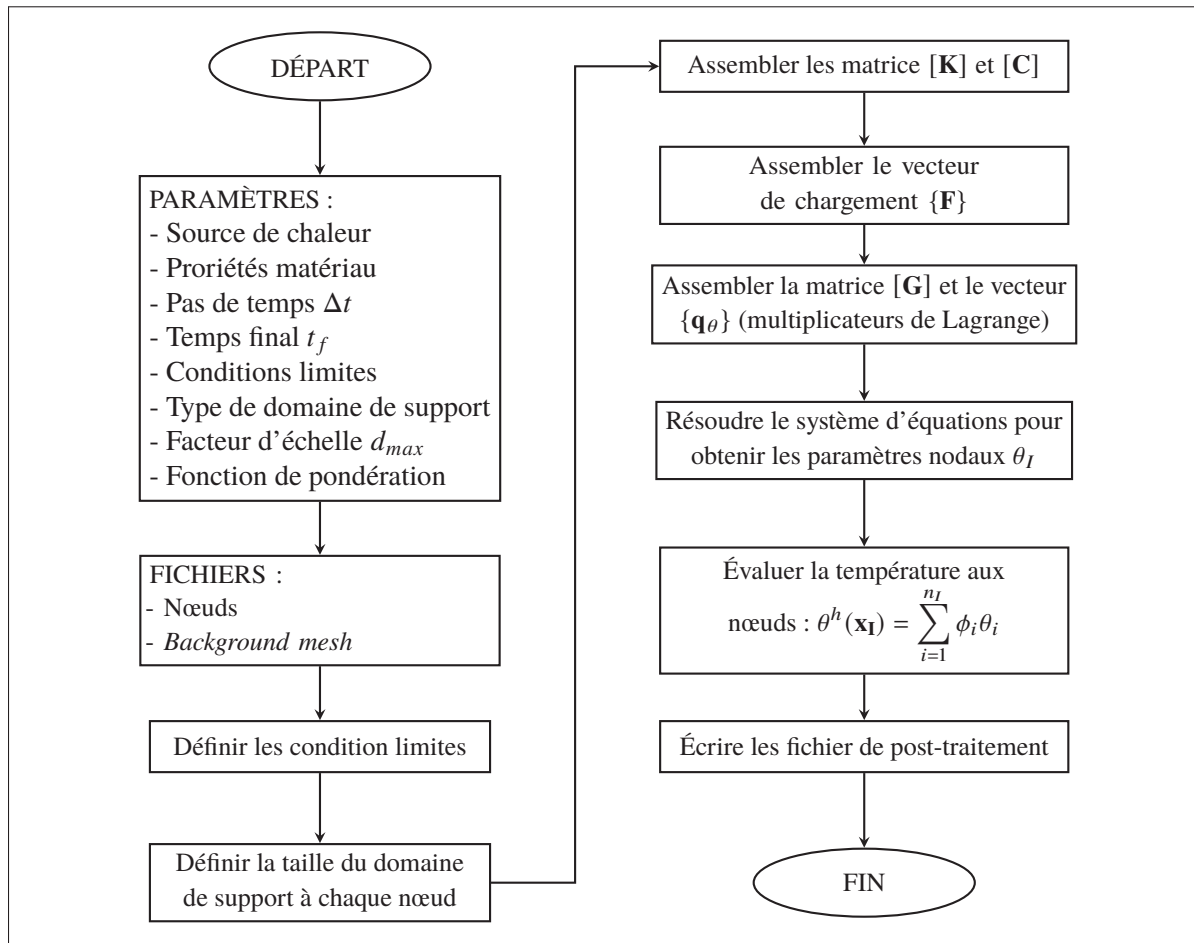


Figure 2.1 Algorithme numérique de l'exécution du code de calcul EFG

à la section 3.7. Le montage expérimental, relativement simple, est montré à la figure 2.2. Une fois le procédé de soudage calibré, c'est-à-dire que les paramètres (voltage, ampérage, débit de fil, etc.) ont été ajustés pour obtenir un cordon de soudure satisfaisant, les échantillons ont été découpés pour voir la forme du bain de fusion. Le but étant de pouvoir calibrer numériquement le modèle de source de chaleur pour répliquer cette forme de bain de fusion dans la simulation numérique. Ce qui signifie d'ajuster les paramètres de la source jusqu'à ce que l'isotherme de la température de fusion coïncide avec les frontières de la zone de fusion. Due à sa forme relativement complexe (figure 2.3a), il a été convenu que le modèle de source composée (voir section 1.1) était tout désigné. Plus spécifiquement, une source volumique conique surmontée

par un flux gaussien (voir figure 1.4d). Par contre, il ne faut pas oublier que le modèle numérique de la source dépend d'une multitude de paramètres ( $r_0$ ,  $q_0$ ,  $r_e$ ,  $r_i$ , etc.) qui ne peuvent être déduits directement par les paramètres de soudage. Il est donc plus judicieux d'utiliser un algorithme d'optimisation, plutôt que de calibrer le modèle par essai-erreur. L'algorithme choisit est celui d'optimisation par essaims particulaires ou *particle swarm optimization* (PSO), introduit par Kennedy & Eberhart (1995). Le choix s'est arrêté sur cet algorithme principalement à cause de sa simplicité d'implémentation et de son efficacité. Pour réaliser l'optimisation, des nœuds ont été placés dans le domaine de calcul, de manière à coïncider avec la géométrie de la zone de fusion expérimentale (figure 2.3b, en rouge). La vue de coupe expérimentale (figure 2.3a) a été prise environ à la mi-longueur de la trajectoire de soudure. Les nœuds servant à calibrer la source ont donc été positionnés au même endroit dans le modèle numérique.

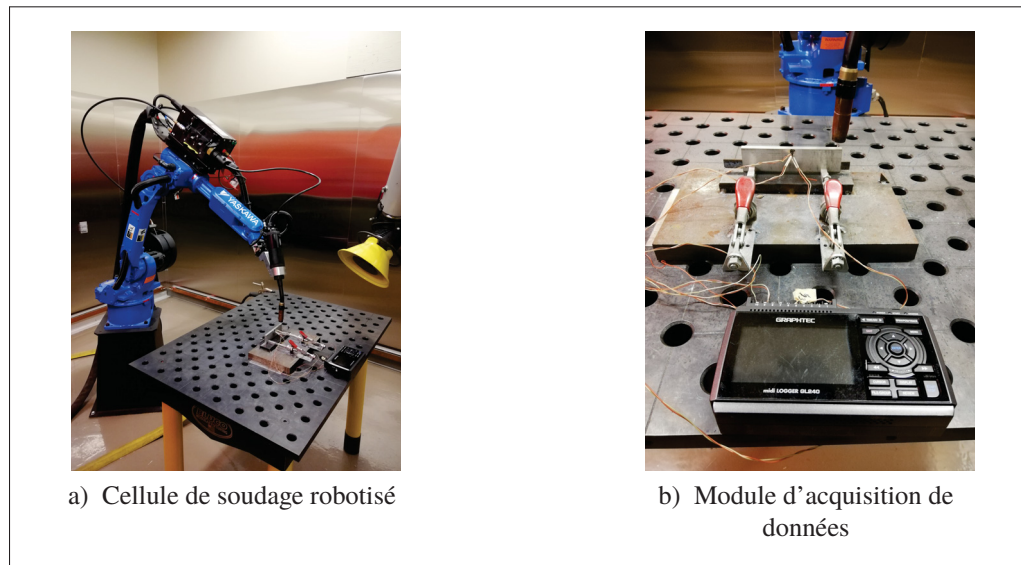


Figure 2.2 Montage expérimental

L'objectif de l'optimisation est de calibrer la source de manière à minimiser l'erreur à ces nœuds. C'est-à-dire de minimiser la norme  $\ell_2$  de la différence entre la température aux nœuds (provenant de la simulation) et la température de fusion  $\theta_F$  :

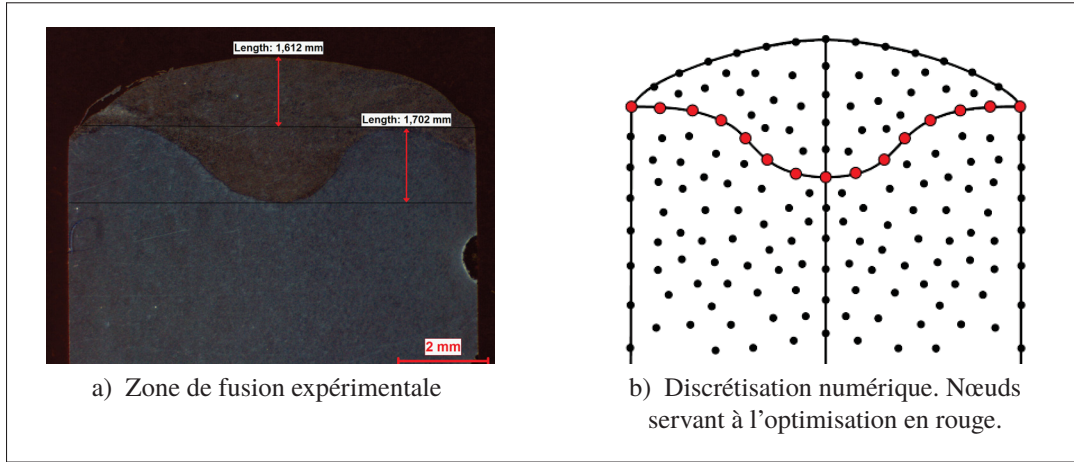


Figure 2.3 Vues de coupe de la zone de fusion, prises à mi-longueur de la trajectoire de soudure

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\theta_i - \theta_F)^2} \quad (2.23)$$

où  $k$  est le nombre de nœuds placés sur la frontière de la zone de fusion,  $\theta_i$  représente la température à ces nœuds et  $\theta_F$  est la température de fusion du substrat. Plus spécifiquement, la fonction à minimiser est  $f : \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{R}$ , avec  $\mathcal{D}^n \subset \mathcal{R}^n$  l'espace de recherche borné par des valeurs limites propres pour chaque  $n$  paramètre. Ces bornes ont pour but de restreindre l'espace de recherche de manière à obtenir des paramètres ayant un sens physique (par exemple, rayon de la source  $> 0$ ), et par le fait même, à réduire le temps nécessaire à l'optimisation. En bref, l'algorithme consiste à positionner aléatoirement des solutions candidates (« particules ») dans l'espace de recherche et d'évaluer la fonction à optimiser à ces positions. Ensuite, pour chaque itération, les particules sont déplacées en fonction de leur meilleure position connue (facteur personnel) et selon la meilleure position connue de l'essaim (facteur social). L'algorithme est présenté en pseudo-code à la page 34. Les coefficients utilisés sont  $w \approx 0.7$  qui est le coefficient d'inertie,  $c_1 \approx 1.5$  qui est le coefficient personnel et  $c_2 \approx 1.5$  qui est le coefficient social des particules. Ces coefficients influencent le déplacement des particules à chaque itération. Une fois l'optimisation terminée, c'est-à-dire que la source de chaleur numérique est calibrée, le code de



calcul peut être utilisé pour prédire la distribution de température pour le procédé expérimental de soudage MIG.

### 2.2.3 Analyse de la méthode EFG

Une fois le code de calcul validé numériquement et expérimentalement, la dernière étape est de déterminer les paramètres optimaux de la méthode EFG et d'étudier l'influence de chacun d'entre eux. Toujours pour le cas de soudure MIG, une solution de référence a été calculée avec la MÉF. Cette solution est basée sur un maillage de 151 213 nœuds formant 831 867 éléments. Les résultats de la solution de référence ont ensuite été calqués (interpolés) sur le maillage utilisé pour calculer la solution EFG (28 009 nœuds) et la norme de la différence relative entre les résultats EFG et les résultats de référence sont calculés selon l'équation 2.24.

$$\text{diff} = \sum_{n=1}^{n_t} \sqrt{\sum_{i=1}^{n_I} \left( \frac{\theta_{i,\text{EFG}}^n - \theta_{i,\text{REF}}^n}{\theta_{i,\text{REF}}^n} \right)^2} \quad (2.24)$$

où  $n_t$  est le nombre de pas de temps,  $n_I$  est le nombre total de nœuds et  $\theta_{i,\text{EFG}}^n$  et  $\theta_{i,\text{REF}}^n$  sont les températures au  $n^{\text{e}}$  pas de temps, évalués au  $i^{\text{e}}$  nœud, provenant respectivement de la méthode EFG et de la solution de référence projetée au nœud  $i$ . Pour projeter les résultats de la solution de référence sur le maillage utilisé pour la simulation EFG, les fonctions d'interpolation standards de la MÉF ont été utilisées. La procédure est détaillée à l'annexe V.

Algorithme 2.1 *Particle swarm optimization*

```

1 Input :
2 Résidu max admissible Rmax
3 Nombre maximal d'itérations itmax
4 Valeurs bornant l'espace de recherche, et ce, pour chaque paramètre : {L} et {U}
5
6 Output :
7 Meilleure position (solution) B trouvée
8
9 for Toutes les particules  $i = 1, \dots, N_p$  do
10 |   Initialiser sa position aléatoirement dans  $\mathcal{D}^n$  :  $\mathbf{x}_i \leftarrow \text{rand}(\mathbf{L}(i), \mathbf{U}(i))$ 
11 |   Initialiser la position initiale comme étant la meilleure position :  $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ 
12 end
13
14 Définir la meilleure particule :  $[f(\mathbf{b}_i), i] \leftarrow \min \left( f(\mathbf{b}_1), f(\mathbf{b}_2), \dots, f(\mathbf{b}_{N_p}) \right)$ 
15 Définir la meilleure position :  $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{b}_i$ 
16 while  $f(\mathbf{B}) > \mathbf{Rmax} \ \&\& \ it < \text{itmax}$  do
17 |   for Toutes les particules  $i = 1, \dots, N_p$  do
18 | |   for Toutes les dimensions (paramètres)  $j = 1, \dots, n$  do
19 | | |   Définir deux nombres aléatoires entre 0 et 1 :
20 | | |    $r_1 \leftarrow \text{rand}(0, 1)$ 
21 | | |    $r_2 \leftarrow \text{rand}(0, 1)$ 
22 | | |   Mettre à jour la vitesse :
23 | | |    $\mathbf{v}_i(j) \leftarrow w \times \mathbf{v}_i(j) + c_1 r_1 [\mathbf{b}_i(j) - \mathbf{x}_i(j)] + c_2 r_2 [\mathbf{B}(j) - \mathbf{x}_i(j)]$ 
24 | | |
25 | | |   Mettre à jour la position :  $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i$ 
26 | | |
27 | | |   for Toutes les dimensions (paramètres)  $j = 1, \dots, n$  do
28 | | | |   if  $\mathbf{x}_i(j) > \mathbf{U}(j)$  then
29 | | | | |    $\mathbf{x}_i(j) \leftarrow \mathbf{U}(j)$ 
30 | | | | else if  $\mathbf{x}_i(j) < \mathbf{L}(j)$  then
31 | | | | |    $\mathbf{x}_i(j) \leftarrow \mathbf{L}(j)$ 
32 | | | | end
33 | | | end
34 | | |
35 | | |   if  $f(\mathbf{x}_i) < f(\mathbf{b}_i)$  then
36 | | | |   Mettre à jour la meilleure position de la particule :  $\mathbf{b}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ 
37 | | | |   if  $f(\mathbf{p}_i) < f(\mathbf{B})$  then
38 | | | | |   Mettre à jour la meilleure position de l'essaim  $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{b}_i$ 
39 | | | | end
40 | | | end
41 | end
42 end

```

## **CHAPITRE 3**

### **NUMERICAL SIMULATION OF MOVING HEAT SOURCE IN ARC WELDING USING THE ELEMENT-FREE GALERKIN METHOD WITH EXPERIMENTAL VALIDATION AND NUMERICAL STUDY**

Olivier Champagne <sup>1</sup>, Xuan-Tan Pham <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Mécanique, École de Technologie Supérieure,  
1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, Québec, Canada H3C 1K3

Article publié dans la revue « International Journal of Heat and Mass Transfer » en mars 2020.

#### **3.1 Résumé**

Un modèle tridimensionnel transitoire de transfert de chaleur basé sur la méthode Element-Free Galerkin (EFG) a été développé pour prédire la distribution de température générée par une source de chaleur mobile. Les résultats numériques obtenus avec la méthode EFG ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Les résultats numériques ont ensuite été vérifiés avec des résultats expérimentaux provenant du soudage robotisé. Un bon accord a été obtenu entre les résultats numériques et expérimentaux. Une étude paramétrique de la méthode EFG a aussi été effectuée pour étudier les effets de (i) la taille et la forme des domaines de support, (ii) le ratio du nombre de points de quadrature par rapport au nombre de nœuds et (iii) les différentes fonctions de pondération. Mots-clefs : Source de chaleur mobile, méthode Element-Free Galerkin, soudage robotisé, simulation numérique, validation expérimentale, domaine de support, fonction de pondération

#### **3.2 Abstract**

A three-dimensional unsteady heat transfer model based on the meshless Element-Free Galerkin (EFG) method was developed to predict the temperature field generated by a moving heat source. Numerical results obtained from the EFG method were compared with those from the finite element method (FEM) and then validated with robotic arc welding experimental results. Good

agreements were found between the numerical and experimental results. An EFG parametric study was also carried out to investigate the effects of (i) the size and shape of the support domains, (ii) the ratio of quadrature points to field nodes, and (iii) the different weight functions. Keywords: Moving heat source, Meshless Element-Free Galerkin, robotic arc welding, numerical simulation, experimental validation, support domain, weight function

### 3.3 Introduction

Being one of the most common joining processes, welding is present in a wide range of industries. There is a tremendous amount of interest in determining the temperature distribution during the welding process, since it has an indispensable effect on the metallurgical properties of the joint, and thus, on its quality and strength (Oldland, Ramsay, Matlock & Olson, 1989). The first remarkable efforts on the subject were through the analytical work of Rosenthal (1941; 1946), with its "quasi-stationary" point source model. Later, advances in the Finite Element Method (FEM) and greater accessibility of computing resources allowed performing more complex numerical simulations in the field of materials manufacturing involving moving heat sources (Argyris *et al.*, 1983; Friedman, 1975; Janes & Wang, 1980; Kuang & Atluri, 1985). Although FEM is now well developed and robust, it does have certain limitations, with the most notable being the time-consuming mesh generation task, the need for adaptive remeshing, and especially, its difficulty handling discontinuities.

Meshless methods attracted considerable attention over the past decades, thanks to their potential to overcome the complications associated with mesh-based methods such as FEM. Their appearance can be traced back to the late 1970s with the introduction of the Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) by Lucy (1977). Since then, many more have been introduced, such as the Diffuse Element Method (DEM) (Nayroles *et al.*, 1992), the Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) (Liu *et al.*, 1993), the Meshless Local Petrov-Galerkin Method (MLPG) (Atluri & Zhu, 1998) and the Element-Free Galerkin Method (EFG) (Belytschko *et al.*, 1994). Many applications of these methods have been reported for solving a wide range of heat transfer problems (Singh & Prakash, 2003; Singh & Tanaka, 2006; Tian & Rao, 2012; Zhang, Zhou,

Gong & Wang, 2017b) and more specifically, for problems involving moving heat sources such as welding. The two-dimensional Rosenthal equation was treated in (Pham, 2013) with the EFG method and results were in comparably good agreement with the FEM. The transient case of the 2D moving heat source was studied in (Reséndiz-Flores & Saucedo-Zendejo, 2015) and (Shibahara & Atluri, 2011), with the Finite Pointset Method and the MLPG method, respectively. The 2D EFG method was also applied in (Das *et al.*, 2011) to predict the temperature field during arc welding and compared to experimental data with a satisfactory agreement. While two-dimensional analyses can provide adequate results for some applications, three-dimensional analyses must be performed for many others. Even if some cases were reported in the literature, such as the transient model for friction stir welding (FSW) presented in (Xiao *et al.*, 2016), very few studies have been conducted using meshless methods to investigate fully 3D transient cases for fusion welding processes that involve high-temperature gradients yielded by high intensity heat sources.

Of note, an important aspect of the EFG method, which is currently not well documented, is the influence of EFG parameters, such as the domain type, the domain size (scaling parameter) and the weight function. Despite notable efforts accomplished in (Singh & Prakash, 2003) and (Singh, 2005) to better understand the effect of these parameters in 3D heat transfer problems, no work has been reported based on irregular node distributions. Moreover, to the author's knowledge, no work has covered the effect of the ratio of quadrature points to field nodes for 3D transient heat transfer problems.

In this study, a 3D transient model based on the EFG method was developed to predict the temperature field during arc welding. The method utilizes the moving least square (MLS) approximant (Lancaster & Salkauskas, 1981), which is constructed solely on nodes. EFG results were compared with those obtained both from our in-house FEM code and with the commercial FEM software *SYSWELD* as well. Experimental work was conducted with MIG welding on 6061-T6 aluminum alloy samples. Temperature curves acquired with thermocouples were compared with simulated results for validation. Further investigation was also performed with regard to the influence of different parameters in the EFG method, namely the size and shape of

the support domain, the ratio of quadrature points to field nodes and the weight function. The objective was to find the optimal parameters and to provide guidelines for further studies.

### 3.4 Element-Free Galerkin method

#### 3.4.1 Moving Least Square approximation

The Element-Free Galerkin method (Belytschko *et al.*, 1994) relies on the moving least square (MLS) approximant, which is formulated using only nodes, and not demanding the application of the concept of elements and connectivity required in FEM. For the unknown function  $\theta(\mathbf{x})$ , the MLS approximant  $\theta^h(\mathbf{x})$  is given by:

$$\theta^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(x) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) , \quad (3.1)$$

where  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}) \ p_2(\mathbf{x}) \ \dots \ p_m(\mathbf{x})]$  is a complete monomial basis of length  $m$ . As for the term  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}) \ a_2(\mathbf{x}) \ \dots \ a_m(\mathbf{x})]$ , it contains unknown coefficients which can be obtained at point  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$  by minimizing the following functional  $J(\mathbf{x})$  with respect to  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ :

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \theta_I]^2 , \quad (3.2)$$

where  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv w_I(\mathbf{x})$  is the weight function for node  $I$  and  $N$  is the number of nodes in the support domain, for which  $w_I(\mathbf{x}) \neq 0$ .  $\theta_I$  refers to the nodal value of node  $I$  located at  $\mathbf{x}_I$ . The minimization of Eq. (3.2) gives

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta} , \quad (3.3)$$

where

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1 \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \ w_2 \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \ \dots \ w_N \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)], \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N]. \quad (3.6)$$

Therefore, by substituting Eq. (3.3) in Eq. (3.1), the MLS approximant can be rewritten as:

$$\theta^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \left( \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{jI} \theta_I = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) \theta_I, \quad (3.7)$$

where the MLS shape function is given by

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_j(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{jk}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{kI}(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

### 3.4.2 Weight function

The weight function must be carefully chosen, since it will affect the approximated solution. It should be constructed according to specific conditions, which can be found in (Belytschko *et al.*, 1994) and (Liu & Gu, 2005). For this study, the following weight functions were used:

- Cubic Spline (Belytschko *et al.*, 1995; Singh, 2005):

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{if } r \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{if } 0.5 < r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

- Quartic Spline (Belytschko *et al.*, 1995):

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r > 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

- Gaussian (Belytschko *et al.*, 1995):

$$w(r) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{r}{0.4}\right)^2\right) & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r > 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

- Exponential (Singh, 2004):

$$w(r) = \begin{cases} 100^{-r} & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r > 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

- Quadratic (Krysl & Belytschko, 2001):

$$w(r) = \begin{cases} 1 - r^2 & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r > 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

It is noted that  $r = d_I/dm_I$  is the normalized distance,  $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$  is the distance between  $\mathbf{x}$  and the node  $I$  and  $dm_I$  is the size of the support domain at node  $I$ , defined by  $dm_I = d_{max} \times c_I$ . Here,  $d_{max}$  is a scaling parameter and  $c_I$  is the average nodal spacing at node  $I$ . In three-dimensional space, the weight function at a given point  $\mathbf{x}$ , within the support domain of  $\mathbf{x}_I$ , is given by

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(r) = w(r_x)w(r_y)w(r_z). \quad (3.14)$$



### 3.4.3 Enforcement of essential boundary conditions

Given the lack of the Kronecker delta property, additional work is required to enforce essential boundary conditions. The use of finite elements on the essential boundaries (Krongauz & Belytschko, 1995), the penalty method or the Lagrange multipliers method can be employed to this end. Because of its simplicity and its accuracy, the latter method was used in the present work. The Lagrange multiplier  $\lambda$  is defined by

$$\lambda(\mathbf{x}) = N_I(s)\lambda \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Gamma_\theta, \quad (3.15)$$

where  $N_I(s)$  is a Lagrange interpolant and  $s$  designates the surface on the essential boundary  $\Gamma_\theta$ .

### 3.5 Numerical formulation of heat equation based on EFG

The heat equation with temperature-independent thermal properties for isotropic domain  $\Omega$  bounded by  $\Gamma$  is as follows:

$$k \nabla^2 \theta + Q = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3.16)$$

where  $\theta$  is the temperature,  $k$  is the heat conduction,  $t$  is the time,  $\rho$  is the density,  $c_p$  is the specific heat and  $Q$  the volume heat rate. The boundary conditions are as follows:

- Prescribed temperature:  $\theta = \theta^S$  on  $\Gamma_\theta$
- Prescribed heat flux:  $-k \nabla \theta \mathbf{n} = q^S$  on  $\Gamma_q$
- Convection:  $-k \nabla \theta \mathbf{n} = h(\theta - \theta_\infty)$  on  $\Gamma_h$

with  $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_h$ ,  $\Gamma_\theta \cap \Gamma_q \cap \Gamma_h = \emptyset$  and  $\mathbf{n}$  being the outward unit vector. Using the virtual temperature principle and noting  $\bar{\theta}$  as an arbitrary temperature distribution with  $\bar{\theta} = 0$  on  $\Gamma_\theta$ , Eq. (3.16) can be written as

$$\int_{\Omega} \left( k \nabla^2 \theta + Q - \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \bar{\theta} \, d\Omega = 0. \quad (3.17)$$

Integrating by parts (with the use of the divergence theorem) the first term in Eq (3.17) and recalling that  $\bar{\theta} = 0$  on  $\Gamma_{\theta}$ , the following equation is obtained:

$$\int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Gamma} k \nabla \theta \cdot \mathbf{n} \bar{\theta} \, d\Gamma = 0. \quad (3.18)$$

Then, including the natural boundary conditions leads to

$$\int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^S \bar{\theta} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_h} h(\theta - \theta_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma = 0. \quad (3.19)$$

Here,  $\bar{\theta}$  can be seen as an arbitrary variation on  $\theta$  and therefore, the principle of virtual temperature coincides with the condition of stationarity of the functional, i.e.  $\bar{\theta} \equiv \delta \theta$  (Bathe, 1996).

In addition, the constraint  $C(\theta) = (\theta - \theta^S)$  is used to enforce the condition  $\theta = \theta^S$  on  $\Gamma_{\theta}$ . First, let  $\mathbf{C}(\theta)$  and  $\boldsymbol{\lambda}$  be

$$\mathbf{C}(\theta) = \begin{Bmatrix} C_1(\theta) \\ C_2(\theta) \\ \vdots \\ C_{n_c}(\theta) \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n_c} \end{Bmatrix}, \quad (3.21)$$

where  $n_c$  is the number of conditions to be enforced. The constrained weak form is now given by

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^S \bar{\theta} \, d\Gamma \dots \\ & \dots + \int_{\Gamma_h} h(\theta - \theta_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_{\theta}} \lambda(\theta - \theta^S) \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Applying the laws of variations, we get

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^S \bar{\theta} \, d\Gamma \dots \\ & \dots + \int_{\Gamma_h} h(\theta - \theta_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\theta}} \delta \lambda(\theta - \theta^S) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{\theta}} \lambda \delta \theta \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Recognizing that  $\bar{\theta}$  and  $\delta \lambda$  are completely arbitrary and invoking Eqs. (3.1) and (3.15), from Eq. (3.23) the following set of discrete equations is obtained:

$$[\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\theta}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\} + [\mathbf{G}] \{\boldsymbol{\lambda}\}^T = \{\mathbf{F}\}, \quad (3.24)$$

$$[\mathbf{G}^T] \{\boldsymbol{\theta}\} = \{\mathbf{q}_{\theta}\}, \quad (3.25)$$

where

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} k \begin{Bmatrix} \phi_{I,x} \\ \phi_{I,y} \\ \phi_{I,z} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{J,x} \\ \phi_{J,y} \\ \phi_{J,z} \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Gamma_h} h \phi_I \phi_J d\Gamma, \quad (3.26)$$

$$C_{IJ} = \int_{\Omega} \rho c_p \phi_I \phi_J d\Omega, \quad (3.27)$$

$$G_{IK} = \int_{\Gamma_{\theta}} \phi_I N_k d\Gamma, \quad (3.28)$$

$$(q_{\theta})_K = \int_{\Gamma_{\theta}} \theta^S N_k d\Gamma, \quad (3.29)$$

$$F_I = \int_{\Omega} \phi_I Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} \phi_I q^S d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \phi_I h \theta_{\infty} d\Gamma. \quad (3.30)$$

The use of the unconditionally stable backward Euler scheme for time discretization yields

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}^* + \mathbf{C} & \mathbf{G} \\ \hline \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{n+1}^* \\ \mathbf{q}_{\theta} \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

where  $[\mathbf{K}^*]_{n+1} = \Delta t [\mathbf{K}]_{n+1}$  and  $\{\mathbf{F}^*\}_{n+1} = [\mathbf{C}]_{n+1} \{\boldsymbol{\theta}\}_n + \Delta t \{\mathbf{F}\}_{n+1}$ . The subscript  $n$  denotes the time step.

### 3.6 Numerical procedure

In-house codes based on the MATLAB language were developed to solve Eq. (3.31) with both EFG and FEM methods. The discretized EFG domain, shown on Fig. 3.1a, consists of 28 009 field nodes, with a nodal spacing in the vicinity of the weld line of 0.75 mm, as shown in Fig. 3.1b. The node distribution for the FEM mesh is identical, i.e., 28 009 nodes and 140 069

tetrahedral elements. GMSH (Geuzaine & Remacle, 2009) was used as the meshing tool in our work.

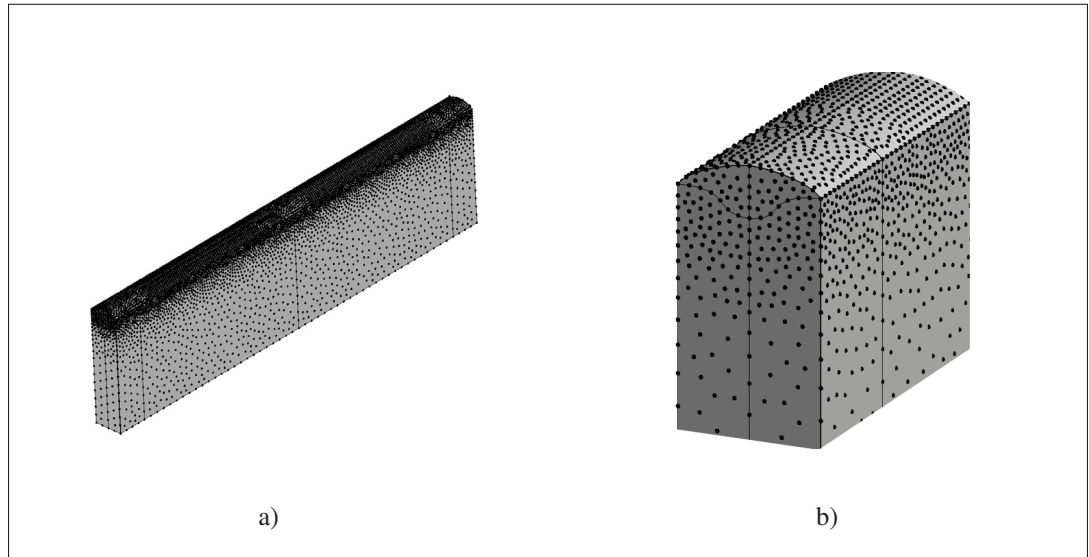


Figure 3.1 a) Node distribution over domain b) Node density around weld line

For this study, the heat exchange with the surroundings was modelled only with a convection boundary condition, applied to all boundaries. A global convection coefficient of  $h = 15 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  and a surrounding temperature of  $\theta_{\infty} = 22^{\circ}\text{C}$  were used, corresponding to the experimental conditions.

### 3.6.1 Heat input

In order to represent the heat input generated by welding processes, many heat source models have been introduced over the years. The "disc source" proposed by Pavelic *et al.* (1969), consisting of a Gaussian heat flux distributed over a circular area, is a notable improvement of Rosenthal's point source. To better represent the heat distribution inside the fusion zone, Westby (1968) and Paley & Hibbert (1975) proposed a heat flux applied in the fusion zone. A few years later, in 1984, Goldak *et al.* introduced a highly versatile model, known as the "double-ellipsoidal" heat source. It can represent shallow and deep welds, making it a widely

used model. Since then, other volume heat source models have been introduced, such as the 3D conical heat source and the rotary Gauss heat source (Wu, Zhao, Wang & Zhang, 2004). Another interesting approach is the simultaneous use of two types of heat source models, constituting what is known as a "split" or "composite heat source". For this type of heat source, a heat flux is generally combined with a volume heat source as presented in Fig. 3.2. While the surface heat source models the radiation coming from the arc, the volume heat source accounts for the heat coming from the droplets. This approach has been successfully employed in (Wang *et al.*, 2016), (Bachorski *et al.*, 1999) and (Luo *et al.*, 2010).

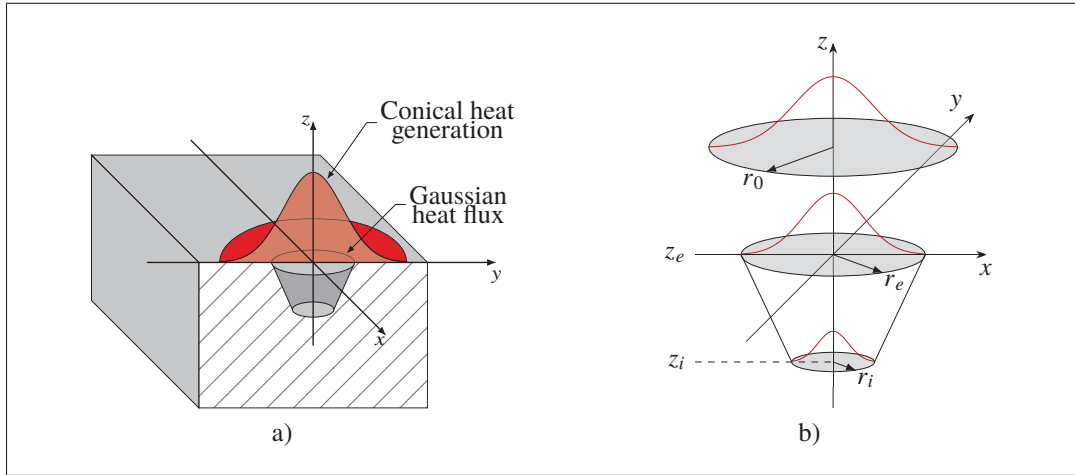


Figure 3.2 "Split" heat source model: a) Sources arrangement b) Sources parameters

The "split" heat source model was chosen for this study. The upper part, a Gaussian heat flux, is defined by

$$q(r) = q_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (3.32)$$

where  $q_0$  is the maximum heat flux at the heat source center,  $r$  is the radial distance from a given point to the heat source center and  $r_0$  is the effective radius and defines the region in which 95%

of the heat flux is applied (Friedman, 1975). The heat generation in the lower part, the conical volume source, is given by

$$Q(x, y, z) = Q_0 \exp\left(-\frac{r(x, y)^2}{r_0(z)^2}\right), \quad (3.33)$$

where the effective radius is

$$r_0(z) = r_e - \frac{r_e - r_i}{z_e - z_i}(z_e - z). \quad (3.34)$$

The signification of parameters  $r_e$ ,  $r_i$ ,  $z_e$  and  $z_i$  can be found in Fig. 3.2b. Since the heat source depends on numerous parameters, which cannot be deduced from the welding conditions, it was calibrated from an actual bead cross-section. The metaheuristic "particle swarm optimization" method (Kennedy & Eberhart, 1995) was used to fit the numerical fusion zone, delimited by the melting temperature isotherm, to the experimental one.

### 3.6.2 Material data

Analyses were carried out with the temperature-independent physical properties of the aluminum alloy 6061-T6 as shown in Table 3.1.

Table 3.1 Thermal properties of 6061-T6 alloy

Thermal conductivity ( $\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ )	Specific heat capacity ( $\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )	Density ( $\text{kg m}^{-3}$ )	Metling point ( $^{\circ}\text{C}$ )
167	896	2700	650

### 3.7 Experimental procedure

Experimental tests were conducted using a DX-100 Yaskawa robot paired with a Fronius TransPuls Synergic 4000 power source, as shown in Fig. 3.3a. Bead-on-plate welds were

executed by the MIG process with Argon as shielding gas. The samples were made out of cold-rolled 6061-T6 aluminum, with the following dimensions:  $150 \text{ mm} \times 9.5 \text{ mm} \times 38 \text{ mm}$  ( $L \times W \times T$ ). The samples were mounted vertically to reduce as much as possible the arc-radiation effect on the thermocouples, which were spot-welded on the side of the samples at various distances from the weld line as schematized in Fig. 3.3b. This setup allowed recording the temperature near the weld bead, without having the arc damaging the thermocouples or altering the readings. The temperatures were recorded using four 0.5 mm diameter type-K thermocouples, paired with a Graphtec GL220 data acquisition module, recording at a rate of 10 readings per second. The welding trajectory and the thermocouple locations are presented in Fig. 3.3b, while the welding parameters are given in Table 3.2.

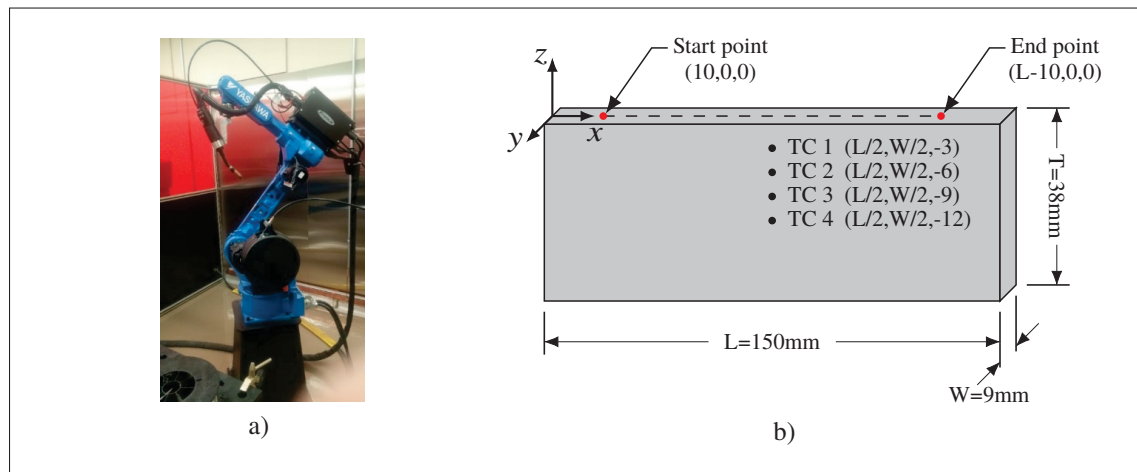


Figure 3.3 a) Experimental setup b) Sample dimensions, weld line and thermocouple locations

Table 3.2 Welding parameters

Voltage (V)	Current (A)	Travel speed (mm/s)	Wire feed speed (mm/s)	Wire diameter (mm)	Gas flow (L/min)	CTWD <sup>†</sup> (mm)
23.1	167	16.5	124.9	1.2	14.2	18

<sup>†</sup> Contact tip-to-work piece distance



### 3.8 Results and discussion

#### 3.8.1 Experimental results

Fig. 3.4a shows a contour plot of the temperature field as the heat source reaches the position of the thermocouples, located at the mid-length of the weld line. A side-by-side comparison of the bead cross-section and the simulated fusion zone is presented in Fig. 3.4b.

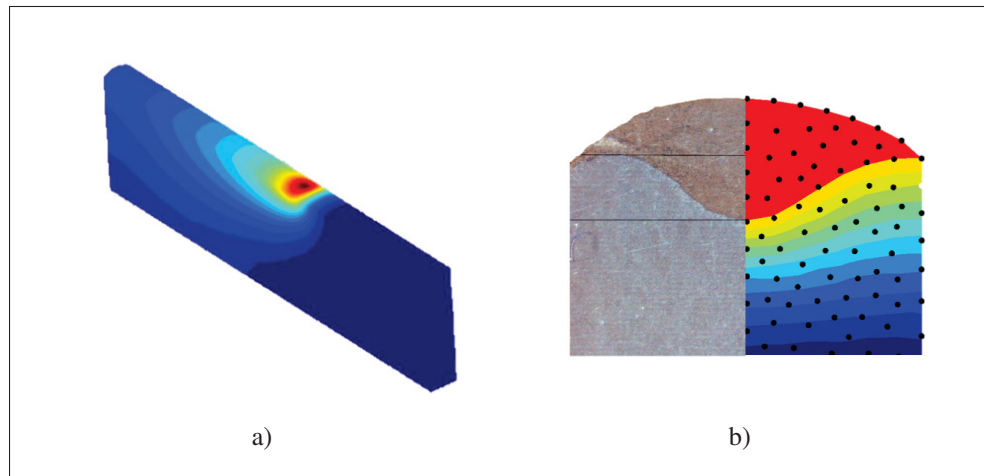


Figure 3.4 a) EFG results when source reaches mid-length and b) experimental bead cross section and predicted weld pool size

Fig. 3.5 presents the temperature curves for each thermocouple. It can be seen that there is considerable agreement between experimental and numerical results, particularly for the heating and cooling rates. Slight discrepancies were observed only at thermocouples next to the weld bead. These may be mainly associated with the use of constant physical properties. It is also worth noting that the EFG results match those obtained by the FEM very narrowly. Moreover, very good agreement was found between the results from the in-house FEM code and the FEM software *SYSWELD* as depicted both in Fig. 3.5 and Table 3.3.

It can be observed in Table 3.3 that the difference in the peak temperature decreases as the distance from the weld line increases. Such results were predictable since the high temperature in

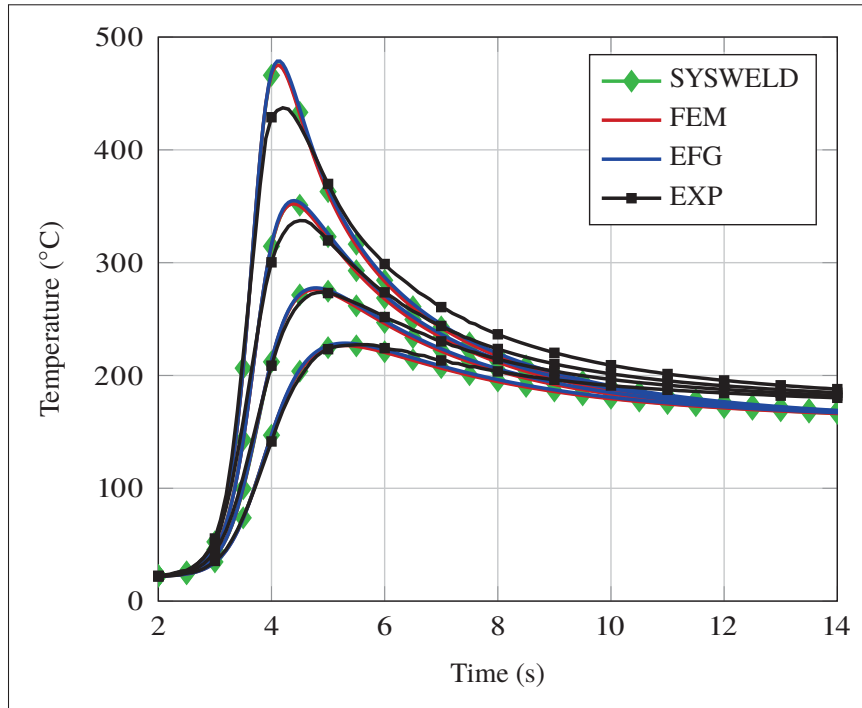


Figure 3.5 Experimental and numerical temperature curves for all 4 thermocouples

Table 3.3 Peak temperatures (°C) at thermocouple locations

	TC1	TC2	TC3	TC4
Experimental	437.3	337.3	273.9	227.3
EFG <sup>†</sup>	476.11	356.14	276.81	228.18
FEM	475.05	352.11	276.03	226.55
SYSWELD	475.26	352.18	276.92	226.92

<sup>†</sup> Using sphere domain,  $d_{\max}=1.4$ , 10 nodes/domain, quadratic weight function,  $\alpha = 10$  (see Eq. (3.35))

the region of the weld bead may cause the actual physical properties to be considerably different from the ones used in the numerical model. The inaccuracy in the location of the thermocouples may also have an important influence over the peak temperatures, especially when close to the welding torch where important gradients are present. It is also worth recalling that welding is a

complex multiphysics phenomenon and it was handled solely as a conduction problem. Despite this simplistic approach, good results were obtained in this study.

### 3.8.2 Weight function, scaling parameter and shape of support domain

For meshless methods, the creation of the support domain is a sensitive task. The domains must include a sufficient amount of nodes to satisfy the basis, while being as compact as possible, in order to induce a sparser system matrix. It has also been shown in (Singh, 2005) that an unnecessary large support domain leads to erroneous results. To find the optimal support size, the  $\ell_2$  norm of the relative difference between EFG results and a reference solution was computed. The reference solution is based on the FE method with 151 213 nodes and 831 867 elements and the  $\ell_2$  norms were summed for each time step in the  $0s \leq t \leq 12s$  interval, which includes the heating and cooling stages. The sphere-, cube- and brick-shaped support domains were studied. The evolution of the  $\ell_2$  norm with respect to the scaling parameter  $d_{\max}$  for different weight functions is depicted in Fig. 3.6.

For irregular node distributions, the size of the domain is greatly influenced by the method used to evaluate the average nodal spacing. Therefore, it can be more convenient to express the size of the support domain using number of nodes, instead of scaling parameter. Based on the results presented Fig. 3.6, Table 3.4 expresses an optimal range of nodes corresponding to the domain types.

Results in Table 3.4 show that the spherical domain tends to require a smaller amount of nodes per domain, while the cubical domain tends to require a greater amount. Such results were expected since for an equivalent scaling parameter, the cube will have a greater volume, including unnecessary nodes in its corner. While having a similar behaviour, the brick-shaped domain can adapt its size in each Cartesian direction, leading to a lower average number of nodes per domain. Since more densely populated domains will lead to a denser system matrix, and therefore a longer inversion time, one should opt for a domain that yields a smaller amount of nodes. In that

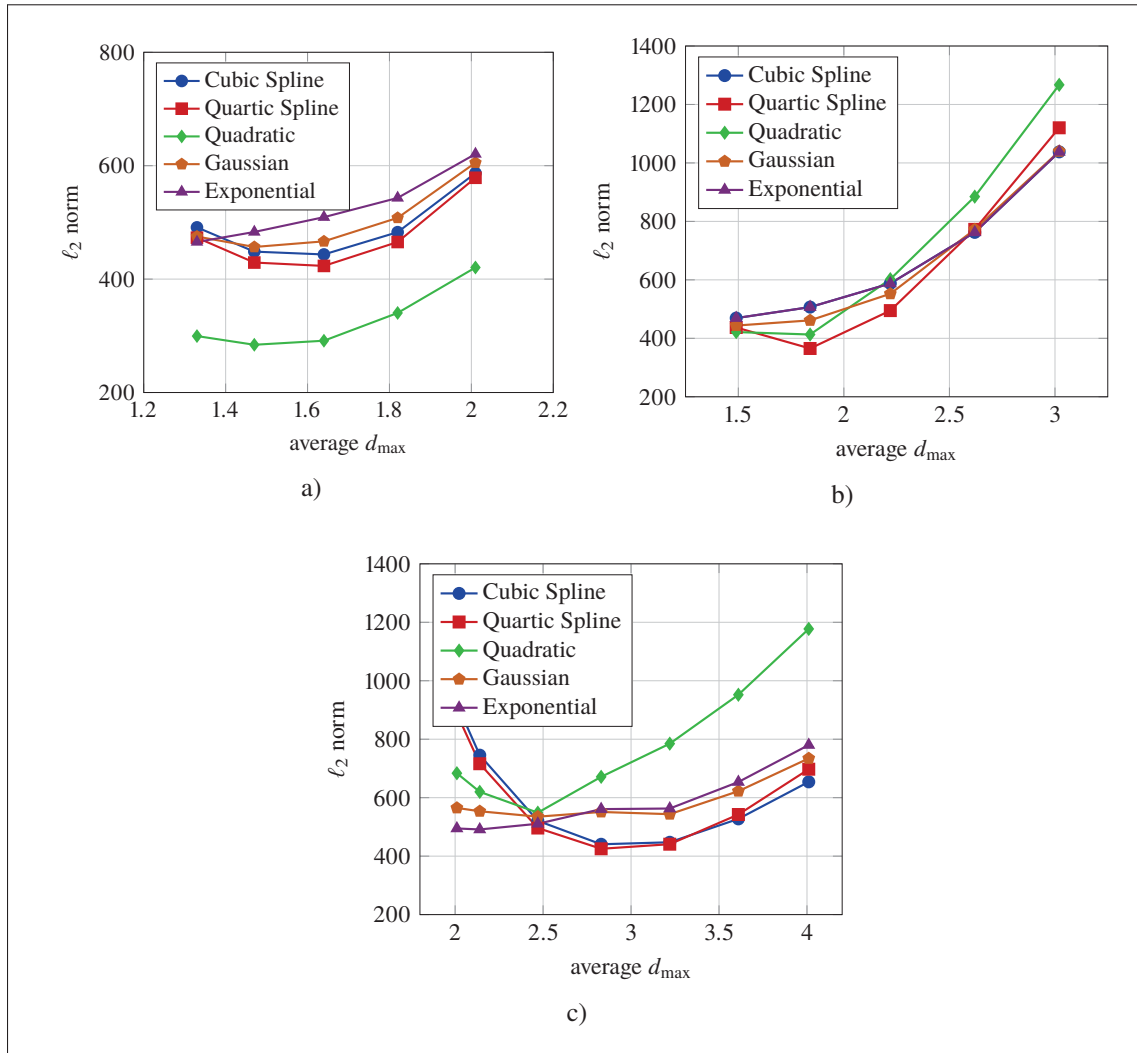


Figure 3.6 Effect of the scaling parameter on the  $\ell_2$  norm for a) sphere support domain, b) cube support domain and c) brick support domain

regard, the sphere- or brick-shaped domains represent a good choice, although the spherical domain can be somewhat easier for numerical implementation.

### 3.8.3 Background mesh

Remarkable efforts were made in (Liu, 2003) in order to better understand the effect of the background mesh for numerical integration on the results in EFG method, based on a 2D stress

Table 3.4 Suggested number of nodes per support domain

Domain type	Weight function	Average $d_{\max}$	Average quantity of nodes per domain
Sphere	Cubic Spline	1.3 ~ 1.6	8 ~ 13
	Quartic Spline		
	Quadratic		
	Gaussian		
	Exponential	1.3 ~ 1.5	8 ~ 11
Cube	Cubic Spline	1.5 ~ 2.0	14 ~ 34
	Quartic Spline		
	Gaussian		
	Exponential		
	Quadratic	1.75 ~ 2.0	19 ~ 34
Brick	Cubic Spline	2.0 ~ 2.5	12 ~ 20
	Quartic Spline		
	Quadratic		
	Gaussian		
	Exponential		

problem. It has been shown that having a number of quadrature points ensuring a non-singular system matrix is not enough to ensure an accurate solution. On the other hand, it has also been shown that, despite the system matrix being invertible, too few or too many quadrature points can lead to inaccurate results. Therefore, a lot of attention should be paid to the background mesh, which is something that has been neglected in most EFG studies. Let us define  $\alpha$ , the ratio of quadrature points  $n_Q$  to unconstrained field nodes  $n_I$ , as follows:

$$\alpha = \frac{n_Q}{n_I}. \quad (3.35)$$

Using various weight functions and the three different support domain types, the  $\ell_2$  norm of the difference between EFG and the reference solution was computed for various values of  $\alpha$ . The results of the  $\ell_2$  norms are presented in Fig. 3.7.

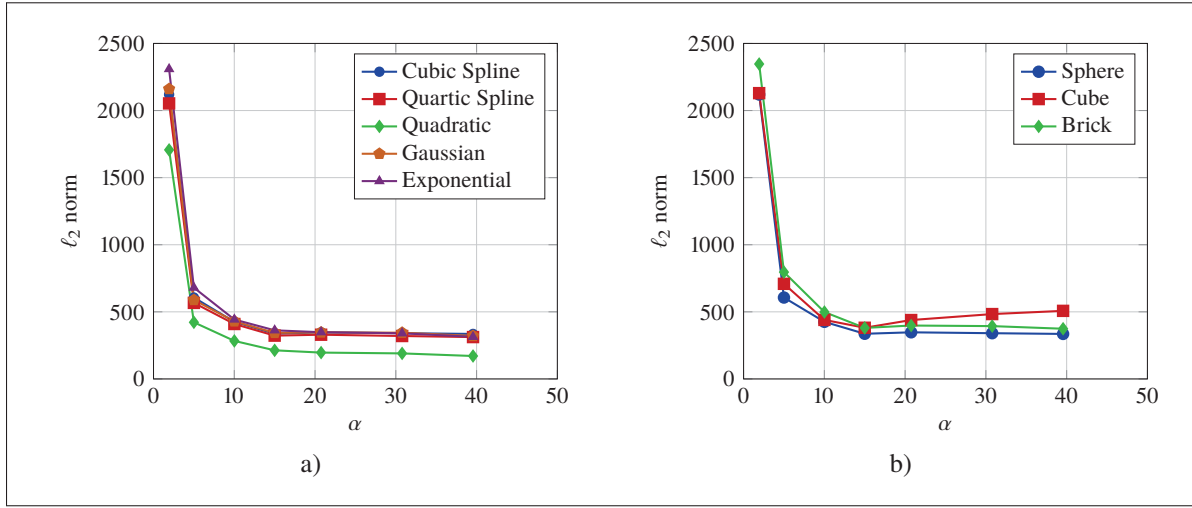


Figure 3.7  $\ell_2$  norm vs  $\alpha$  a) Spherical domain with various weight functions b) Cubic weight function with the three domain types

For the present heat transfer problem, a ratio  $10 \leq \alpha \leq 20$  leads to accurate results, while ratios in the range of  $5 \leq \alpha \leq 10$  represent a good compromise between accuracy and computation time. This result is, of course, independent of the support domain type, as well as the weight function, as shown in Fig. 3.7a and 3.7b, respectively. One should also keep in mind that the quadrature points must be distributed in the same irregular pattern as the field nodes to respect the overall  $\alpha$  ratio.

### 3.9 Conclusion

A 3D transient heat transfer model based on the EFG method was developed in this study to determine the temperature distribution during a welding process with moving heat sources. To numerically validate the model, the EFG results were compared with those obtained from an in-house FEM code, as well with the commercial FEM package *SYSWELD*. Excellent agreement was obtained between the EFG method and the FEM results. Furthermore, experimental tests, which consisted of MIG welding of 6061-T6 aluminum alloy, were carried out to validate the simulated results. A side-to-side comparison of the fusion zones was used to validate the numerical heat input. The temperature history was recorded at various distances from the

welding line using thermocouples. They were compared with the numerical results and it was concluded that the numerical model can predict well the temperature in the weldment. Regarding the cooling stage, a slight discrepancy was observed for both EFG and FE methods.

It was also concluded that a spherical or brick-shaped domain is more suitable for this heat conduction problem since they provide accurate results with a smaller amount of nodes. With regard to the ratio of quadrature points to field nodes, it was concluded that a ratio of around 10 represents a good compromise between accuracy and computation time.





## CHAPITRE 4

### RETOUR SUR LES RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans l'article présenté au chapitre précédent, il a été montré que le code de calcul permet de bien prédire les températures maximales aux thermocouples pour le procédé étudié de soudage par fusion. Il y avait toutefois une légère différence entre les taux de refroidissement numériques et expérimentaux. Cela peut être expliqué notamment par le fait que le modèle de transfert de chaleur est linéaire, c'est-à-dire que les propriétés thermiques du matériau sont assumées constantes (indépendantes de la température). Cela cause inévitablement une erreur, surtout dans la région du cordon de soudure, où la température est particulièrement élevée. À la figure 4.1, il est évident que l'écart entre les résultats numériques et expérimentaux diminue à mesure que la distance du cordon du soudure augmente. L'absence de données fiables pour les propriétés thermiques à haute température de l'alliage 6061-T6 est la principale raison pour laquelle un modèle linéaire a été utilisé. Tout de même, les résultats obtenus sont assez satisfaisants.

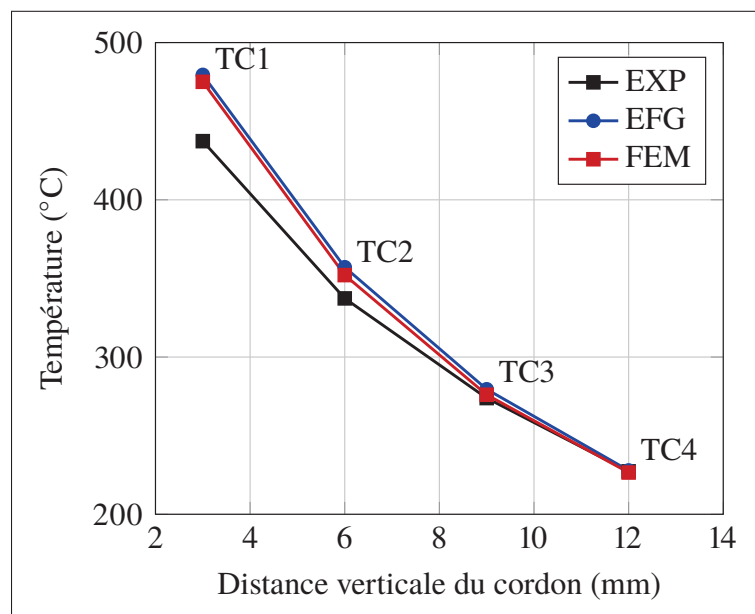


Figure 4.1 Température maximales aux thermocouples en fonction de la distance par rapport au cordon

Quant à l'étude paramétrique, elle a permis de conclure qu'un domaine de support en forme de sphère ou de brique est bien désigné, puisque ces formes tendent à inclure moins de nœuds par domaine de support, et ultimement, mènent à un temps de résolution plus court. L'étude paramétrique a également permis de conclure qu'un ratio de nombre de points de quadrature par rapport au nombre de nœuds de  $\sim 10$  offre un bon compromis entre temps de calcul et précision des résultats.

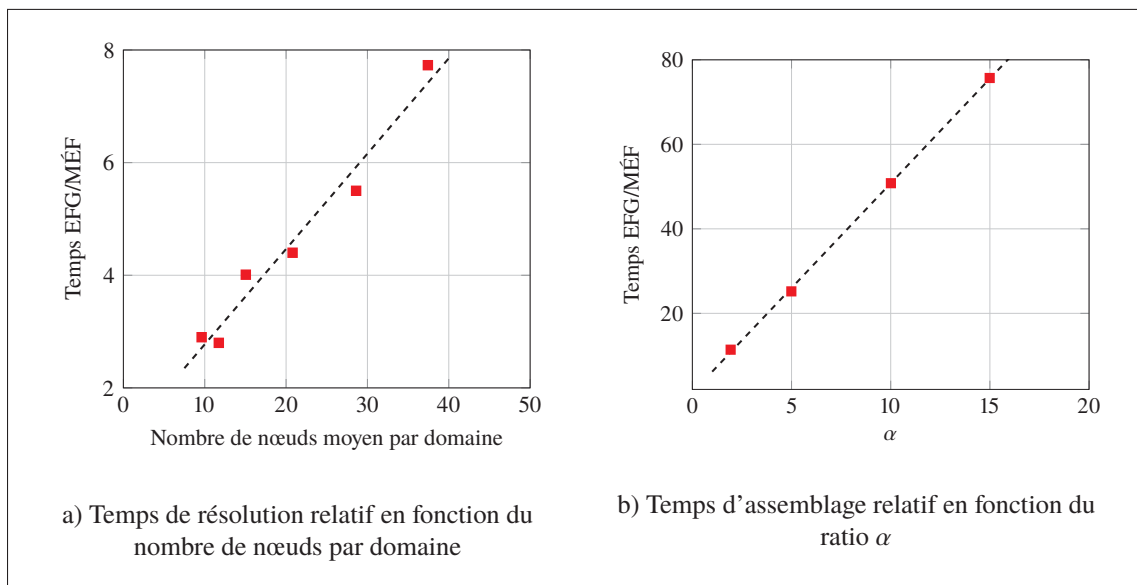


Figure 4.2 Temps de calcul relatifs

#### 4.1 Temps de calcul

Concernant le temps de calcul, il est bien connu que c'est le principal désavantage de la méthode EFG et des méthodes sans maillage en général. Les causes principales sont la matrice représentant le système d'équations qui est plus dense et le temps nécessaire à définir les tailles des domaines de support. La figure 4.2a montre le temps de résolution relatif par rapport à la MÉF. Ce temps de résolution inclue l'inversion de la matrice du système d'équations pour obtenir les paramètres nodaux  $\theta_I$  et l'évaluation des températures aux nœuds  $\theta(\mathbf{x}_I)$ . Quant à elle, la figure 4.2b montre le temps relatif pour l'assemblage des matrices  $[\mathbf{K}]$  et  $[\mathbf{C}]$ , qui est

directement lié au nombre de cellules d'intégration. Même avec le plus petit nombre de nœuds admissibles par domaine, la méthode EFG prend tout de même trois fois plus de temps pour la résolution. Pour l'assemblage des matrices, même avec un ratio  $\alpha = 5$ , la méthode nécessite  $\sim 20$  fois plus de temps que la MÉF. Le diagramme de la figure 4.3 montre justement que l'assemblage des matrices et du vecteur de chargement représente la majeure partie du temps de calcul. Même s'il était probablement possible de réduire ces temps de calcul en optimisant la façon dont le code est programmé, ce n'était pas l'objectif du projet. Il n'en demeure pas moins qu'avec les ressources informatiques devenant de plus en plus accessibles pour le calcul parallèle, les méthodes sans maillage deviennent des outils de plus en plus attrayants pour surmonter les limitations associées à la MÉF, spécialement pour les discontinuités dans les phénomènes multiphysiques comme le soudage.

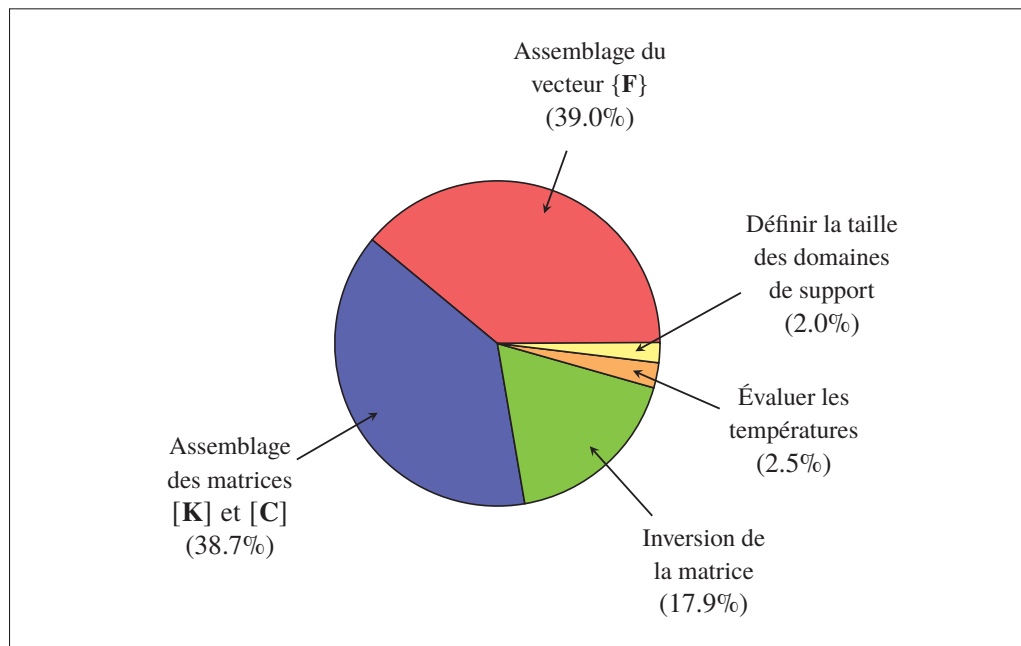


Figure 4.3 Répartition du temps de calcul

## 4.2 Raffinement local

Finalement, il a été évoqué à la section 1.3.2 qu’il serait intéressant d’utiliser un groupe de nœuds mobiles suivant la source de chaleur pour raffiner localement la solution. Sachant maintenant qu’il doit y avoir 5 à 10 fois plus de points de quadrature que de nœuds ( $5 \leq \alpha \leq 10$ ) en tout point dans le domaine, cela implique que le *background mesh* doit être suffisamment fin tout au long de la trajectoire. Le temps nécessaire à l’assemblage des matrices et des vecteurs étant directement lié au nombre de cellules d’intégration<sup>†</sup>, cela signifie un plus long processus. Il serait intéressant de voir s’il y aurait un gain substantiel en termes de temps de calcul à utiliser un groupe de nœuds mobiles avec la méthode EFG. Par contre, cette approche serait tout à fait désignée pour les méthodes « réellement » sans maillage, c’est-à-dire qui n’utilisent pas de maillage d’arrière-plan, comme la méthode MLPG. Même si cette façon de faire permet de réduire considérablement le nombre de degrés de liberté, il faut tout de même prendre en compte le temps nécessaire à calquer/interpoler les résultats à chaque fois que la position du groupe de nœuds est modifiée.

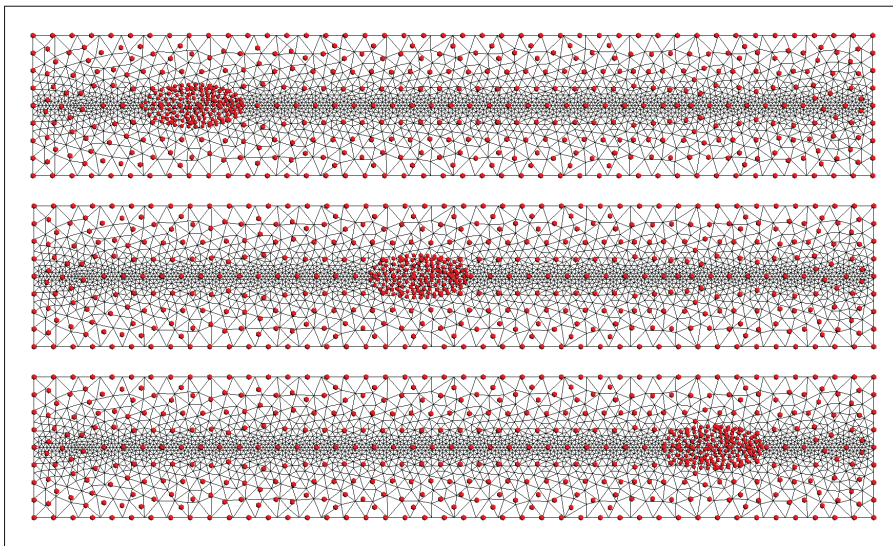


Figure 4.4 Exemple de raffinement local avec un groupe de nœuds mobiles (en rouge) et maillage d’arrière-plan (en noir)

<sup>†</sup>Plus de cellules d’intégration implique plus de tours de boucle dans le code de calcul. Voir annexe IV

## CONCLUSION

Les méthodes sans maillage ont connu un essor considérable dans les dernières décennies, principalement dû à leur capacité à relever les problèmes de maillage associés à la MÉF. Toutefois, certaines connaissances par rapport à leur utilisation sont encore limitées. Dans ce mémoire, la méthode sans maillage *Element-Free Galerkin* a été appliquée à un problème tridimensionnel de conduction en régime transitoire.

Le premier objectif de la recherche était de définir les paramètres optimaux de la méthode et de quantifier leurs effets sur les résultats, en termes de précision et de temps de calcul, pour être en mesure de fournir des lignes directrices pour les études futures. Pour y arriver, un code de calcul basé sur la méthode EFG a été développé, permettant de résoudre un problème de conduction linéaire<sup>†</sup> en 3D et en régime transitoire. Une validation numérique du code maison a été menée en comparant les résultats de ce code avec des résultats provenant du logiciel commercial SYSWELD, ainsi qu'avec des résultats provenant d'un autre code maison, cette fois-ci basé sur la MÉF. Par la suite, une étude paramétrique a été conduite pour déterminer l'effet de la taille et de la forme des domaines de support, des différentes fonctions de pondération et du nombre de points de quadrature. Cette dernière étape a permis de comprendre l'influence des divers paramètres et ainsi d'émettre des recommandations quant au choix desdits paramètres, de manière à optimiser la précision des résultats.

Le second objectif de recherche était d'appliquer la méthode EFG à un problème de conduction avec une source de chaleur mobile. Pour ce faire, des tests expérimentaux de soudage à l'arc ont été réalisés. Au cours des tests, le cycle thermique a été enregistré avec plusieurs thermocouples, situés à différentes distances du cordon de soudure. En parallèle, le code de calcul a été utilisé pour simuler le procédé de soudage. Les données acquises expérimentalement ont ainsi pu être comparé aux prédictions numériques. Il a été conclu que la simulation numérique permet de

---

<sup>†</sup>Propriétés thermiques constantes en fonction de la température.

bien prédire les températures maximales du cycle thermique, malgré un certain écart entre les résultats. Cet écart est plus important dans les zones à haute température, c'est-à-dire près du cordon de soudure. Concernant le taux de refroidissement, une légère contradiction est également observé, fort probablement due à l'utilisation d'un modèle linéaire.

## RECOMMANDATIONS

Même si la recherche a couvert plusieurs aspects de la méthode EFG en transfert de chaleur, il est évident qu'elle n'a fait qu'effleurer la surface du sujet. Plusieurs autres pistes de recherche mériteraient d'être explorées.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques faite au chapitre 3 met en lumière un certain écart entre les deux groupes de données. Tel que discuté, l'utilisation de propriétés thermiques constantes en fonction de la température pourrait expliquer ladite différence. Pour être en mesure de valider cette hypothèse, la difficulté ne serait non pas de faire une analyse non-linéaire, mais plutôt d'obtenir les propriétés thermiques du matériau, et ce, à haute température.

Tel que discuté à maintes reprises dans ce document, un avantage fort intéressant de la méthode EFG (et des méthodes sans maillage en général) est leur capacité naturelle à pouvoir ajouter ou retirer des nœuds (voir figure 1.13, p. 21). Il serait donc fort pertinent d'implémenter cette fonctionnalité dans le code de calcul et voir s'il y a un réel avantage à cette façon de faire. Les conclusions tirées de cette piste de recherche pourraient également être applicables à d'autres problèmes, tels que ceux de propagation de fissure, dans lequel un groupe de nœuds suivrait le bout de la fissure à mesure que cette dernière se propage.

À plus long terme, il serait très pertinent d'étudier un cas de soudage multiphysique, dans lequel une méthode sans maillage serait utilisée pour gérer l'interface sans cesse changeante entre la phase solide, liquide et gazeuse. C'est dans ce genre d'applications que les méthodes sans maillage peuvent réellement briller et se distinguer de la méthode des éléments finis.





## ANNEXE I

### DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DE ROSENTHAL

En composantes cartésiennes, l'équation 1.1 s'écrit

$$k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + Q = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{A I-1})$$

L'approche proposée par Rosenthal nécessite d'utiliser un système de coordonnées mobile avec la source. En supposant que la source se déplace dans la direction  $x$ , le changement de variable de  $(x, y, z, t)$  vers le nouvel espace  $(\xi, \eta, \psi, S)$  est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (\text{A I-2})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (\text{A I-3})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \quad (\text{A I-4})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} = -v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial S} \quad (\text{A I-5})$$

L'équation A I-1 devient donc

$$k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right) + Q = \rho c_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial S} - v \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \quad (\text{A I-6})$$

Si l'état *quasi-stationnaire* est atteint, c'est-à-dire  $\frac{\partial \theta}{\partial S} = 0$ , l'équation précédente se réduit à

$$k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right) + Q = -v \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (\text{A I-7})$$

Finalement, en ignorant la distinction entre  $\eta$ ,  $\psi$  et  $y$ ,  $z$ , l'équation A I-7 devient :

$$k \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + Q = -v \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (\text{A I-8})$$

## ANNEXE II

### DÉVELOPPEMENT DE LA FORMULATION FAIBLE DE L'ÉQUATION DE CHALEUR

Soit la formulation forte du problème de conduction dans le domaine  $\Omega$  borné par  $\Gamma$  :

$$k \nabla^2 \theta + Q = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{A II-1})$$

$$\theta = \theta^S \quad \text{sur } \Gamma_\theta \quad (\text{A II-2})$$

$$-k \nabla \theta \mathbf{n} = q^S \quad \text{sur } \Gamma_q \quad (\text{A II-3})$$

$$-k \nabla \theta \mathbf{n} = h(\theta - \theta_\infty) \quad \text{sur } \Gamma_h \quad (\text{A II-4})$$

$$(\text{A II-5})$$

En utilisant le *principale de température virtuelle* pour obtenir la formulation faible, il suffit de multiplier l'équation A II-1 par une distribution de température arbitraire  $\bar{\theta}$  qui est nulle sur la frontière de la condition essentielle ( $\bar{\theta} = 0$  sur  $\Gamma_\theta$ ) et d'intégrer sur tout le domaine :

$$\int_{\Omega} \left( k \nabla^2 \theta + Q - \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \bar{\theta} \, d\Omega = 0 \quad (\text{A II-6})$$

En considérant l'identité

$$\nabla \cdot (a \vec{b}) = a \nabla \cdot \vec{b} + (\nabla a) \cdot \vec{b} \quad (\text{A II-7})$$

pour le premier terme de l'équation A II-6, on obtient :

$$\int_{\Omega} -k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \cdot (\bar{\theta} \nabla \theta) \, d\Omega + \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega = 0 \quad (\text{A II-8})$$

Le théorème de flux-divergence

$$\iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{b}) \, dV = \oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \vec{b}) \, d\Gamma \quad (\text{A II-9})$$

permet de décomposer le second terme de l'équation A II-8 de manière à faire apparaître les conditions naturelles :

$$\int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega - \oint_{\Gamma} k \mathbf{n} \cdot \nabla \theta \bar{\theta} \, d\Gamma = 0 \quad (\text{A II-10})$$

Avec loi de Fourier

$$q = -k \nabla \theta \quad (\text{A II-11})$$

appliquée au dernier terme de l'équation A II-10, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k \nabla \theta \nabla \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \bar{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{\theta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} q^S \bar{\theta} \, d\Gamma \dots \\ \dots + \int_{\Gamma_h} h(\theta - \theta_{\infty}) \bar{\theta} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\theta}} q \bar{\theta} \, d\Gamma \overset{0}{=} 0 \end{aligned} \quad (\text{A II-12})$$

Le dernier terme s'annule puisque  $\bar{\theta} = 0$  sur  $\Gamma_{\theta}$ . L'équation A II-12 représente la formulation faible de l'équation de chaleur. Pour la forme contrainte avec les multiplicateurs de Lagrange, voir section 3.5.

## ANNEXE III

### INTÉGRATION NUMÉRIQUE EN TROIS DIMENSIONS

#### 1. Élément hexaédrique

Pour une intégration numérique sur l'hexaèdre de référence (figure III-1), la quadrature n'est qu'une extension du cas unidimensionnel, c'est-à-dire d'appliquer la règle de quadrature dans chacune des directions (Oñate, 2009, p. 290) :

$$\iiint_{\Omega_e} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \psi) \, |\mathbf{J}^e| \, d\xi \, d\eta \, d\psi \quad (\text{A III-1})$$

où  $\mathbf{J}^e$  est la matrice jacobienne de l'élément qui permet de la passage de l'élément hexaédrique dans l'espace  $(x, y, z)$  à l'élément de référence dans  $(\xi, \eta, \psi)$  :

$$dV = dx \, dy \, dz = |\mathbf{J}^e| \, d\xi \, d\eta \, d\psi \quad (\text{A III-2})$$

La matrice jacobienne est donnée par :

$$\mathbf{J}^e = \sum_{i=1}^{n_e} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \psi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \psi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \psi} z_i \end{bmatrix} \quad (\text{A III-3})$$

où  $n_e$  correspond au nombre de nœuds de l'élément et les  $N_i$  correspondent aux fonctions d'interpolation. Pour un hexaèdre linéaire, ces dernières sont :

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \psi) \quad (\text{A III-4}) \quad N_5 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \psi) \quad (\text{A III-8})$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \psi) \quad (\text{A III-5}) \quad N_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \psi) \quad (\text{A III-9})$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \psi) \quad (\text{A III-6}) \quad N_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \psi) \quad (\text{A III-10})$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \psi) \quad (\text{A III-7}) \quad N_8 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \psi) \quad (\text{A III-11})$$

Ainsi, l'équation A III-1 devient :

$$\iiint_{\Omega_e} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = |\mathbf{J}^e| \sum_{i=1}^{n_Q^\xi} \sum_{j=1}^{n_Q^\eta} \sum_{k=1}^{n_Q^\psi} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \psi_k) \quad (\text{A III-12})$$

Les positions ainsi que les pondérations des points de Gauss sont données au tableau 2.1.

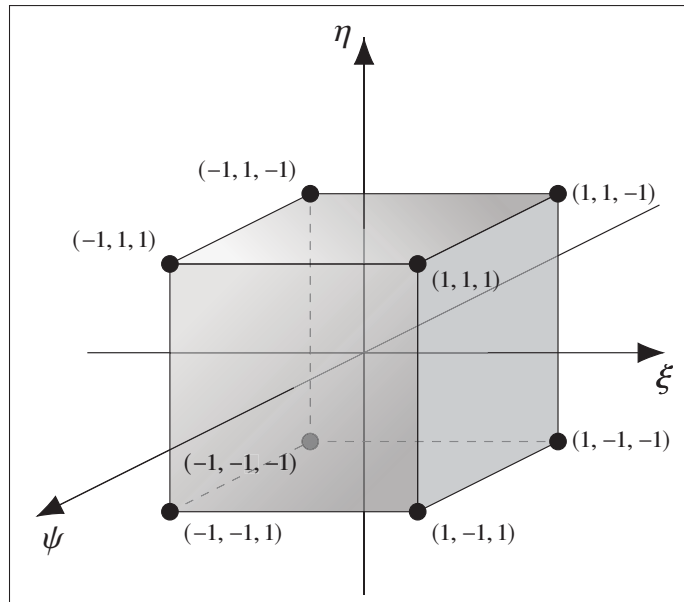


Figure-A III-1 Élément hexaédrique de référence

## 2. Élément tétraédrique

Pour une quadrature sur le tétraèdre de référence (figure III-2), les positions ainsi que les pondérations des points de Gauss sont données au tableau III-1.

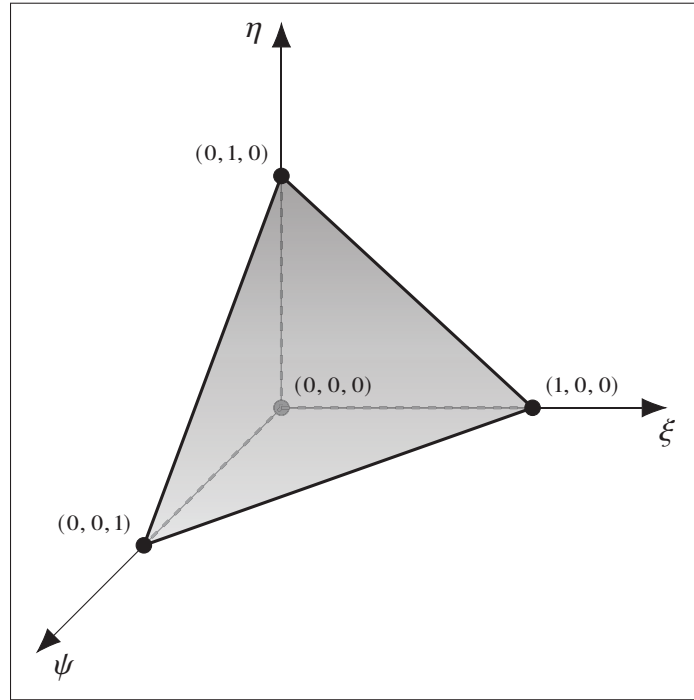


Figure-A III-2 Élément tétraédrique de référence

Pour cet élément, l'intégration a la forme suivante (Oñate, 2009, p. 291) :

$$\iiint_{\Omega_e} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{6} |\mathbf{J}^e| \sum_{i=1}^{n_Q} w_i f(\xi_i, \eta_i, \psi_i) \quad (\text{A III-13})$$

Tableau-A III-1 Points de quadrature pour le tétraèdre  
de référence (Zienkiewicz & Taylor, 1967)

Ordre	Nombre de points	Coordonnées $(\xi, \eta, \psi)$	Pondération
Linéaire	1	$(1/4, 1/4, 1/4)$	1
Quadratique	4	$(\alpha, \beta, \beta)^\dagger$ $(\beta, \alpha, \beta)$ $(\beta, \beta, \alpha)$ $(\beta, \beta, \beta)$	$1/4$
Cubique	5	$(1/4, 1/4, 1/4)$	$-4/5$
		$(1/2, 1/6, 1/6)$	$9/20$
		$(1/6, 1/2, 1/6)$	
		$(1/6, 1/6, 1/2)$	
		$(1/6, 1/6, 1/6)$	

$$^\dagger \alpha = \frac{5+3\sqrt{5}}{20}, \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{20}$$



## ANNEXE IV

### QUADRATURE POUR LE VECTEUR DE CHARGEMENT $\{F\}$

Exemple de procédure pour l'intégration de l'équation 2.17 :

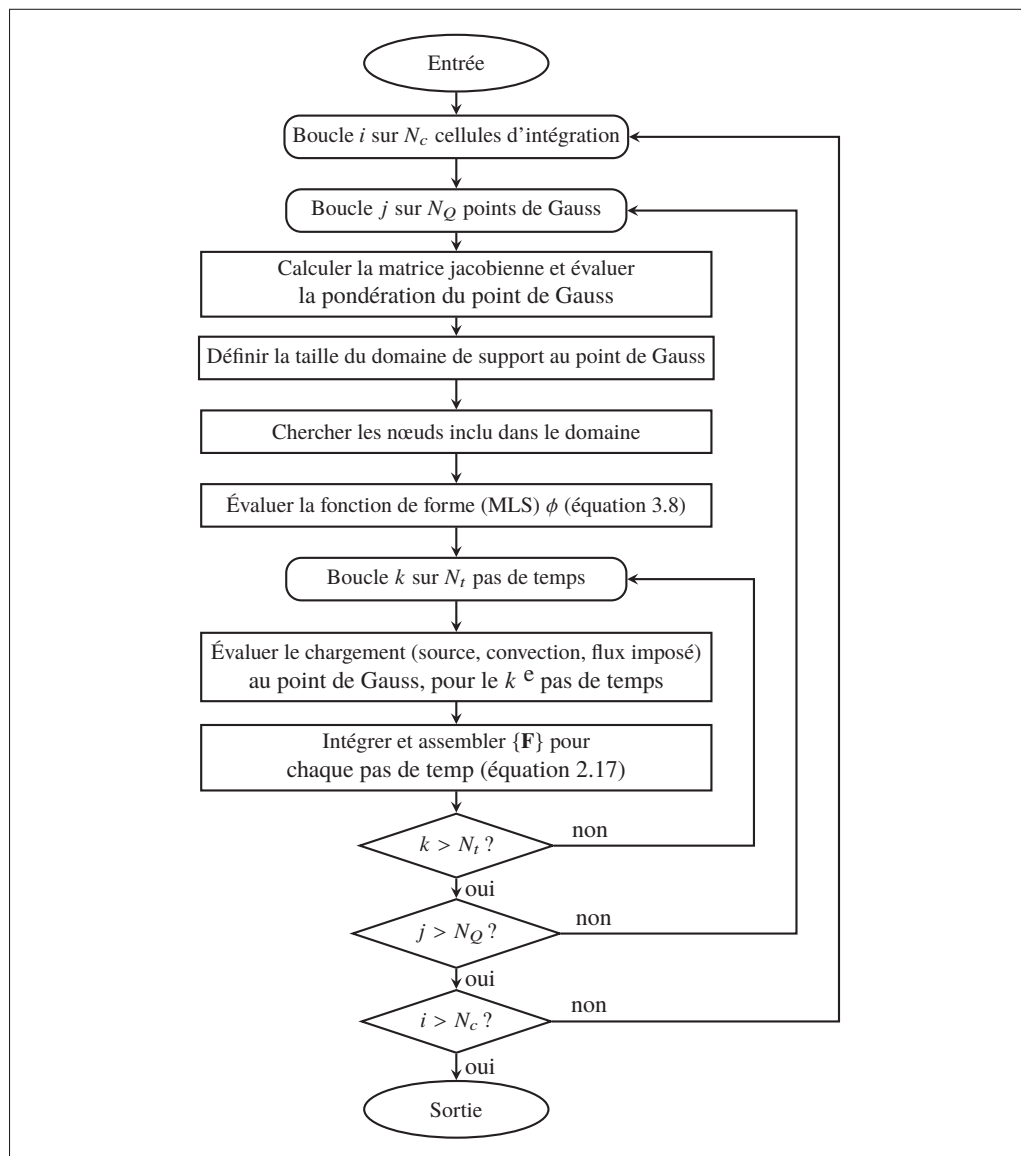


Figure-A IV-1 Diagramme d'assemblage du vecteur de chargement



## ANNEXE V

### INTERPOLATION DES RÉSULTATS DE LA SOLUTION DE RÉFÉRENCE SUR LE MAILLAGE EFG

Pour interpoler la température au point  $p$ , correspondant à un nœud de la solution EFG et contenu dans un élément de la solution de référence, il faut évaluer les fonctions d'interpolation  $N_i$  au point  $p$  dans l'espace de référence  $(\xi, \eta, \psi)$ . Ainsi, la température en  $p$  pourra être évaluée par

$$\theta_p = [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\theta}\} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_k] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_k \end{array} \right\}_{\text{REF}} \quad (\text{A V-1})$$

Toutefois, la position du point  $p$  dans l'élément de référence n'est pas connue, et par conséquent, les fonctions d'interpolations  $N_i$  ne peuvent pas être évaluées directement : il faut d'abord déterminer la position  $\boldsymbol{\xi}_p = [\xi_p, \eta_p, \psi_p]^T$  dans l'élément de référence, équivalente à  $\mathbf{x}_p = [x_p, y_p, z_p]^T$  dans l'élément du maillage (voir figure V-1). Pour trouver  $\boldsymbol{\xi}_p$  il suffit d'utiliser les coordonnées des nœuds de l'élément et de résoudre

$$\mathbf{x}_p^T = [\mathbf{N}][\mathbf{X}]_e, \quad (\text{A V-2})$$

où  $[\mathbf{X}]_e$  est la matrice de coordonnées des éléments.

Pour la solution de référence, le domaine a été discrétisé avec des éléments tétraédriques. Les fonctions d'interpolations pour ce type d'élément sont les suivantes :

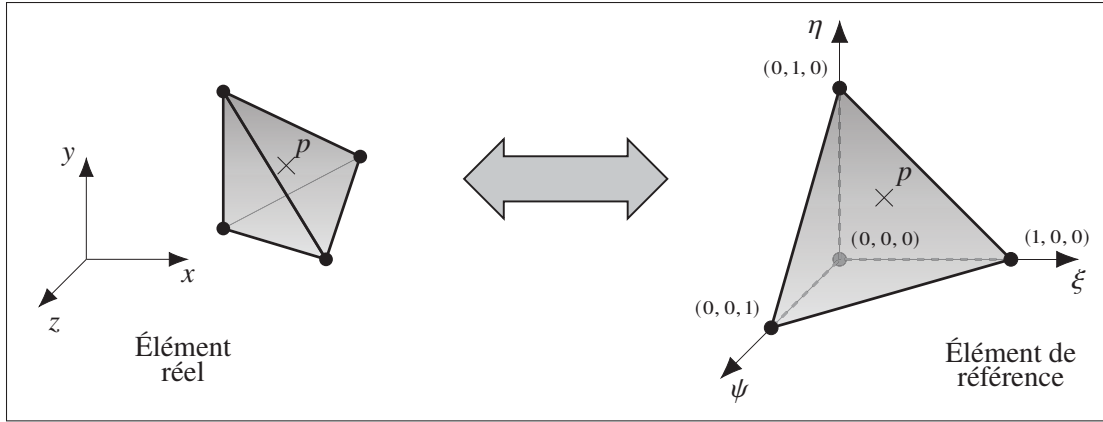


Figure-A V-1 Point  $p$  dans l'élément réel et dans l'élément de référence

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \psi \quad (\text{A V-3})$$

$$N_2 = \xi \quad (\text{A V-4})$$

$$N_3 = \eta \quad (\text{A V-5})$$

$$N_4 = \psi \quad (\text{A V-6})$$

L'équation A V-2 devient donc :

$$\mathbf{x}_p^T = [N_1(\xi_p), N_2(\xi_p), N_3(\xi_p), N_4(\xi_p)] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A V-7})$$

Pour résoudre l'équation A V-7, la méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée. Il faut donc trouver la racine de :

$$\mathbf{F}(\xi, \eta, \psi) = \mathbf{x}_p^T - [\mathbf{N}(\xi, \eta, \psi)] [\mathbf{X}]_e = 0. \quad (\text{A V-8})$$

La méthode de Newton nécessite le calcul de la matrice jacobienne :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \mathbf{X}_e = - \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \psi} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} & \frac{\partial N_4}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{A V-9})$$

Le principe de la méthode est de calculer un incrément  $\delta \boldsymbol{\xi}^k$  à chaque  $k$  itération et d'ensuite mettre à jour la solution :

$$\mathbf{J}^k \delta \boldsymbol{\xi}^k = -\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}^k) \quad (\text{A V-10})$$

$$\boldsymbol{\xi}^{k+1} = \boldsymbol{\xi}^k + \delta \boldsymbol{\xi}^k \quad (\text{A V-11})$$

L'algorithme itératif est présenté de façon explicite ci-bas.

Algorithme-A V-1 *Méthode de Newton-Raphson*

```

1 Input :
2 Résidu max admissible Rmax
3 Nombre maximal d'itérations itmax
4
5 Output :
6 La position  $\xi = [\xi, \eta, \psi]^T$  de  $p$  dans l'espace de référence
7 _____
8 Initialisation :
9  $\delta\xi \leftarrow Rmax$ 
10  $\xi^0 = \mathbf{0}$ 
11  $k \leftarrow 0$ 
12
13 while  $\delta\xi \geq Rmax$  ||  $k > itmax$  do
14   Évaluer la matrice jacobienne :  $\mathbf{J}^k \leftarrow -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{X}_e$ 
15   Évaluer le résidu :  $\mathbf{F}(\xi^k) \leftarrow \mathbf{x}_p^T - \mathbf{N} \mathbf{X}_e$ 
16
17   Évaluer l'incrément :  $\delta\xi^k \leftarrow \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}$ 
18
19   Mettre à jour la solution :  $\xi^{k+1} \leftarrow \xi^k + \delta\xi^k$ 
20
21   Mettre à jour le compteur :  $k \leftarrow k + 1$ 
22 end

```

Une fois les itérations complétées, les équations A V-3 à A V-6 peuvent être évaluées et les résultats utilisés dans l'équation A V-1 pour finalement interpoler la température de référence au point  $p$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- Argyris, J. H., Szimmat, J. & William, K. J. (1982). Computational aspects of welding stress analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 143.
- Argyris, J. H., Szimmat, J. & William, K. J. (1983). Finite element analysis of arc welding process. Dans Lewis, R. W. & Morgan, K. (Éds.), *Numerical Methods in Heat Transfer* (vol. 3). Wiley.
- Atluri, S. N. & Zhu, T. (1998). A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 25(2), 169-179.
- Bachorski, A., Painter, M. J., Smailes, A. J. & Wahab, M. A. (1999). Finite-element prediction of distorsion during gas metal arc welding using the shrinkage volume approach. *Journal of Materials Processing Technology*, 92-93, 405-409.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures* (éd. 1st). Prentice Hall.
- Belytschko, T., Organ, D. & Krongauz, Y. (1995). A coupled finite element-element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 17, 186-195.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. & Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2), 229-256.
- Chen, J.-S., Hillman, M. & Chi, S.-W. (2017). Meshfree Methods : Progress Made after 20 Years. *Journal of Engineering Mechanics*, 143.
- Christensen, N., Davies, V. d. L. & Gjermundsen, K. (1965). Distribution of Temperatures in Arc Welding. *British Welding Journal*, 12(54), 54-75.
- Das, R., Bhattacharjee, K. S. & Rao, S. (2011). Welding heat transfer analysis using Element Free Galerkin Method. *Advanced Materials Research*, 410, 298-301.
- de Feitas Teixeira, P. R., de Araújo, D. B. & Bragança, L. A. (2014). Study of the Gaussian distribution heat source model applied to numerical thermal simulation of TIG welding processes. *Science and Engineering Journal*, 23(1), 115-122.
- Duarte, C. A. & Oden, J. T. (1996). H-p Clouds - An h-p Meshless Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12, 673-695.
- Friedman, E. (1975). Thermomechanical Analysis of the Welding Process Using the Finite Element Method. *Journal of the Pressure Vessel Technology*, 97(3), 206-213.
- Geuzaine, C. & Remacle, J.-F. (2009). Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical*

*Methods in Engineering*, 79(11), 1309-1331.

Goldak, J., Aditya, C. & Bibby, M. (1984). A New Finite Element Model for Welding Heat Sources. *Metallurgical Transactions B*, 15(2), 299-305.

Hamide, M., Massoni, E. & Bellet, M. (2007). Adaptive mesh technique for thermal-metallurgical numerical simulation of arc welding processes. *International journal for numerical methods in engineering*, 73, 624-641.

Janes, M. G. & Wang, H.-P. (1980). Experimental Evaluation and Finite Element Analysis of Laser Welded Copper-Copper And Copper-Aluminum Joints. *Advances in Laser Engineering and Applications*, SPIE Vol. 247, 45-54.

Karatarakis, A., Metsis, P. & Papadrakakis, M. (2013). GPU-acceleration of stiffness matrix calculation and efficient initialization of EFG meshless methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 258.

Kennedy, J. & Eberhart, R. (1995). *Particle swarm optimization*. Conference Proceedings présentée à Proceedings of ICNN'95.

Krongauz, Y. & Belytschko, T. (1995). Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 131, 133-145.

Krysl, P. & Belytschko, T. (2001). ESFLIB : A library to compute the element free Galerkin shape functions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190, 2181-2205.

Kuang, Z. & Atluri, S. N. (1985). Temperature Field Due to a Moving Heat Source : A Moving Mesh Finite Element Analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 52, 274-280.

Lancaster, P. & Salkauskas, K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of computation*, 37(155), 141-158.

Liu, G. R. (2003). *Mesh Free Methods : Moving beyond the finite element method*. CRC Press LLC.

Liu, G. R. & Gu, Y. T. (2001). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4), 937-951.

Liu, G. R. & Gu, Y. T. (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*. Netherlands : Springer.

Liu, W. K., Adey, J., Jun, S. & Belytschko, T. (1993). *Reproducing Kernel Particle Methods for elastic and plastic problems*. Conference Proceedings présentée à Proceedings of the 1993 ASME Winter Annual Meeting (pp. 175-189).



- Lucy, L. (1977). A numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82(12), 1013-1024.
- Luo, Y., You, G., Ye, H. & Liu, J. (2010). Simulation on welding thermal effect of AZ61 magnesium alloy based on three-dimensional modeling of vacuum electron beam welding heat source. *Vacuum*, 84(7), 890-895.
- Melenk, J. M. & Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139, 289-314.
- Modest, M. F. & Abakins, H. (1986). Heat Conduction in a Moving Semi-Infinite Solid Subjected to Pulsed Laser Irradiation. *Journal of Heat Transfer*, 108.
- Nayroles, B., Touzot, G. & Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10(5), 307-318.
- Oldland, P. T., Ramsay, C. W., Matlock, D. K. & Olson, D. L. (1989). Significant Features of High-Strength Steel Weld Metal Microstructures. *Welding Journal*, 68(4), 158s-168s.
- Oñate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method : Linear Statics*. Springer.
- Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. & Taylor, R. (1996). A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 39, 3839-3866.
- Paley, Z. & Hibbert, P. D. (1975). Computation of temperatures in actual weld designs. *Welding Journal*, 54(11), 385-392.
- Pavelic, V., Tanbakuchi, R., Uyehara, O. A. & Myers, P. S. (1969). Experimental and computed temperature histories in gas tungsten arc welding of thin plates. *Welding Journal Research Supplement*, (48), 295-305.
- Pham, X.-T. (2013). Two-dimensional rosenthal moving heat source analysis using the meshless element free Galerkin method. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 63(11), 807-823.
- Prasad, N. S. & Narayanan, T. K. S. (1996). Finite Element Analysis of Temperature Distribution during Arc Welding Using Adaptive Grid Technique. *Welding Research Supplement*, 75(4), 123-128.
- Reséndiz-Flores, E. O. & Saucedo-Zendejo, F. R. (2015). Two-dimensional numerical simulation of heat transfer with moving heat source in welding using the FInite Poinset Method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 90, 239-245.
- Rosenthal, D. (1941). Mathematical Theory of Heat Distribution during Welding and Cutting. *Welding Journal*, 20(5), 220-234.

- Rosenthal, D. (1946). The Theory of Moving Source of Heat And Its Applications to Metal Treatments. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 68, 849-865.
- Shibahara, M. & Atluri, S. N. (2011). The meshless local Petrov-Galerkin method for the analysis of heat conduction due to a moving heat source, in welding. *International Journal of Thermal Sciences*, 50, 984-992.
- Singh, I. V. (2004). Meshless EFG method in three-dimensional heat transfer problems : A numerical comparison, cost and error analysis. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 46(2), 199-220.
- Singh, I. V. (2005). A Numerical Study of Weight Functions, Scaling, and Penalty Parameters for Heat Transfer Applications. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 47(10), 1025-1053.
- Singh, I. V. & Jain, P. K. (2005). Parallel EFG algorithm for heat transfer problems. *Advances in Engineering Software*, 36, 554-560.
- Singh, I. V. & Prakash, R. (2003). The numerical solution of three dimensional transient heat conduction problems using element free Galerkin method. *International Journal of Heat and Technology*, 21(2), 73-80.
- Singh, I. V. & Tanaka, M. (2006). Heat transfer analysis of composite slabs using meshless element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 38(6), 521-532.
- Singh, I. V., Sandeep, K. & Prakash, R. (2003). Meshless EFG method in transient heat conduction problems. *International Journal of Heat and Technology*, 21(2), 99-105.
- Tian, J. & Rao, S. S. (2012). Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Three-Dimensional Heat Transfer Analysis. *Journal of Heat Transfer*, 134(11).
- Traidia, A. (2011). *Multiphysics modelling and numerical simulation of GTA weld pools*. (Thesis).
- Venkatkumar, D. & Ravindran, D. (2016). 3D finite element simulation of temperature distribution, residual stress and distortion on 304 stainless steel plates using GTA welding. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30(1), 67-76.
- Vishnu, R. P., Li, W. B. & Easterling, K. E. (1991). Heat flow model for pulsed welding. *Materials Science and Technology*, 7.
- Wang, J., Han, J., Domblesky, J. P., Yang, Z., Zhao, Y. & Zhang, Q. (2016). Development of a new combined heat source model for welding based on a polynomial curve fit of the experimental fusion line. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 87, 1985-1997.

- Westby, O. (1968). Temperature Distribution in the Workpiece by Welding. *Department of Metallurgy and Metals Working, The Technical University*.
- Wu, S., Zhao, H.-Y., Wang, Y. & Zhang, X.-H. (2004). A new heat source model in numerical simulation of high energy beam welding. *Transactions of the China Welding Institution*, 25, 91-94.
- Xiao, Y., Zhan, H., Gu, Y. & Li, Q. (2016). Modeling heat transfer during friction stir welding using a meshless particle method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 104, 288-300.
- Zhang, H. J. (1990). Non-Quasi-Steady Analysis of Heat Conduction From a Moving Heat Source. *Journal of Heat Transfer*, 112, 777-779.
- Zhang, J.-P., Zhou, G.-Q., Wang, S.-S. & Hu, S. (2017a). Steady heat transfer analysis of orthotropic structure based on Element-Free Galerkin method. *International Journal of Thermal Sciences*, 121, 163-181.
- Zhang, J., Zhou, G., Gong, S. & Wang, S. (2017b). Transient heat transfer analysis of anisotropic material by using Element-Free Galerkin method. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 84, 134-143.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1967). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill.