

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
Ph.D.

PAR  
Jean-Pierre ARZ

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION DU BRUIT D'IMPACT DES  
STRUCTURES PAR AJOUT D'UNE COUCHE MINCE D'ÉLASTOMÈRE

MONTRÉAL, LE 11 JANVIER 2010

© Jean-Pierre Arz, 2009

**PRÉSENTATION DU JURY**

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE

M. Frédéric Laville, directeur de thèse  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Zhaocheng Liu, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Philippe Bocher, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Jean-Claude Pascal, examinateur externe  
École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 16 DÉCEMBRE 2009

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

## REMERCIEMENTS

Mes remerciements s'adressent tout particulièrement à Frédéric Laville, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ce projet de doctorat. Je le remercie de m'avoir confié un sujet de recherche ayant une portée à la fois théorique et expérimentale et de m'avoir laissé une grande autonomie, tout en guidant mon travail par ses conseils avisés et ses commentaires critiques pertinents.

Je voudrais remercier également Messieurs Zhaoheng Liu, Philippe Bocher et Jean-Claude Pascal pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir participer à mon jury de thèse.

Je remercie chaleureusement Victor Songmene pour le prêt de la caméra haute-vitesse.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes « collègues de doctorat » du local A-2215, en particulier Jérémie Voix, Marc-André Gaudreau et Cécile Le Cocq pour leur aide sur des points spécifiques et pour l'intérêt général qu'ils ont démontré à l'égard de mon projet.

De nombreuses autres personnes ont contribué de manière indirecte à ce travail ; je remercie tout particulièrement Karine et Rodolphe pour le prêt de leur chez eux qui m'a permis de finir à temps l'écriture de ce manuscrit.

Du fond du cœur je remercie mes parents, Martine et Lucien, pour tout.

Enfin, Merci à Maria pour son soutien fidèle et continu et Merci à notre petit bonhomme, Samuel, pour son inhérente joie de vivre.

# DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE RÉDUCTION DU BRUIT D'IMPACT DES STRUCTURES PAR AJOUT D'UNE COUCHE MINCE D'ÉLASTOMÈRE

Jean-Pierre ARZ

## RÉSUMÉ

Le point de départ de la recherche présentée dans cette thèse est la problématique industrielle soumise à l'ÉTS par la compagnie Bombardier Produits Récréatifs (BRP) de la réduction du bruit généré par le système d'entraînement par chenille de la motoneige. L'identification des mécanismes physiques responsables de la génération du bruit dans la chenille a été faite par des mesures effectuées en partie avant le début de cette thèse (mesures sur bancs d'essais) et en partie dans le cadre de cette thèse (mesures de portions de chenille soumises à des impacts). Les résultats de l'ensemble de ces mesures montrent que la source principale du bruit d'entraînement est due aux impacts mécaniques générés entre les barreaux de la chenille et d'autres éléments (barbotin, roues, glissières) du système de guidage et d'entraînement.

Dans le cadre de ce doctorat, le moyen pratique envisagé pour réduire le bruit d'impact généré par les barreaux consiste à des réductions à la source. Plus précisément, l'action typique considérée est celle qui consiste à réduire la force générée lors de l'impact en ajoutant, dans la zone contact entre les deux structures, une couche mince d'un matériau souple tel que les élastomères.

L'objectif général de cette thèse est de développer une méthode permettant de prédire la réduction du bruit d'impact permise par l'ajout d'une couche mince d'élastomère entre l'objet impactant et la structure impactée qui est une structure complexe (c'est-à-dire une structure dont la géométrie est complexe et dont la composition fait intervenir plusieurs matériaux).

Pour atteindre cet objectif général, trois objectifs spécifiques ont été fixés : (1) caractériser le comportement sous impact de différentes couches minces d'élastomères; (2) prédire la nouvelle force d'impact générée dans le cas où une couche mince d'élastomère est ajoutée entre l'impacteur et une structure vibrante complexe et (3) valider expérimentalement l'ensemble de la méthode de prédiction en l'appliquant à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige.

Pour atteindre le premier objectif spécifique (caractériser le comportement sous impact de différentes couches d'élastomères), une méthode expérimentale spécifique de caractérisation a été développée. Dans un premier temps, un dispositif expérimental a été réalisé dans le but de soumettre les couches à l'action reproductible d'un marteau d'impact. La pénétration de l'impacteur dans la couche est mesurée en filmant sa trajectoire avec une caméra haute-vitesse puis en détectant sa position sur chacun des clichés. Dans un deuxième temps, l'analyse des signaux expérimentaux de force et de pénétration obtenus a permis de guider le choix d'un modèle de contact permettant de les reproduire. Dans un troisième temps, les

paramètres du modèle sont estimés à partir des résultats expérimentaux et du modèle. Huit couches d'élastomère différentes (quatre matériaux et deux épaisseurs) ont été caractérisées en utilisant cette méthode. Les résultats obtenus montrent que la méthode permet une caractérisation plus précise qu'une mesure de dureté.

Pour atteindre le deuxième objectif spécifique (prédir la nouvelle force d'impact générée dans le cas où une couche mince d'élastomère est ajoutée entre l'impacteur et une structure vibrante complexe), le phénomène de l'impact sur une structure vibrante a été modélisé. Le modèle retenu est un modèle de simulation sonore qui a développé dans le cadre du projet européen « Sounding Object » (Rocchesso et Fontana, 2003). Par analogie entre l'approche modale utilisée dans ce modèle et le formalisme modal utilisé pour l'étude des vibrations de structures, de premières modifications ont été apportées au programme initial (programme MATLAB `impact_modal.m` de Sounding Object) afin de modéliser physiquement l'impact d'une masse sur une structure vibrante. De secondes modifications ont été apportées au programme afin de prendre en compte le mouvement d'ensemble de la structure dans le cas de conditions aux limites libres (car la structure considérée pour la validation de la méthode est sous conditions aux limites libres).

Pour atteindre le troisième objectif spécifique (valider expérimentalement la méthode de prédiction en l'appliquant à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige), la première étape a consisté à mesurer la force et la pression acoustique rayonnée par la barre dans deux configurations d'impact : AVEC et SANS couche d'élastomère dans la zone de contact. La deuxième étape a consisté à modéliser la configuration AVEC élastomère en appliquant le modèle d'impact d'une masse sur une structure vibrante (présenté au Chapitre 2). Pour déterminer la valeur des paramètres d'entrée du modèle qui décrivent la barre, les paramètres modaux des six premiers modes de flexion de la barre ont été mesurés en effectuant une analyse modale expérimentale. Enfin, la validation de la méthode a consisté dans un premier temps à vérifier expérimentalement l'hypothèse de linéarité en comparant les réductions des spectres de force permises par l'ajout de la couche d'élastomère aux réductions des spectres de bruit. Dans un deuxième temps, la méthode a été validée dans les domaines temporel et fréquentiel par des comparaisons entre les signaux de force simulés et les signaux de force mesurés. Ces comparaisons montrent que les différences sont relativement importantes pour certaines couches (en particulier car le mouvement d'ensemble de la structure libre est plus compliqué qu'une simple translation) mais que l'ordre de grandeur des signaux temporels et fréquentiels simulés est satisfaisant.

**Mots-clés :** impact, élastomère, réduction de bruit, mesure, simulation

# DEVELOPPEMENT OF AN IMPACT NOISE REDUCTION METHOD BY THE ADDING OF A SMALL THICKNESS ELASTOMERIC MATERIAL

Jean-Pierre ARZ

## ABSTRACT

The starting point of this Ph.D. is the industrial issue submitted to the ÉTS by the company Bombardier Recreational Products (BRP) of the noise reduction of the tracked drive mechanism of snowmobiles. The identification of the physical mechanisms responsible for the track noise generation has been realized by measurements made partly before this Ph.D. (measurements on test beds) and partly during this Ph.D. (measurements on track parts submitted to manual impacts). The results of these measurements show that the main noise source of the tracked drive mechanism is due to mechanical impacts generated between the bars of the track and other elements (wheels, rails) of the guiding and driving mechanism.

In this Ph.D., the practical mean investigated to reduce the impact noise generated by the bars is reduction at the source. More precisely, the typical action considered consists in reducing the impact force magnitude by adding, in the contact zone between the colliding bodies, a soft material layer such as elastomeric materials.

The overall goal of this Ph.D. is to develop a method to predict the impact noise reduction obtained by the adding of an elastomeric layer specimen of small thickness between the impacting body and the impacted structure which is a complex structure (i.e. a structure whose geometry is complex and whose composition involves several materials).

To reach this overall goal, three specific goals have been fixed: (1) characterize the behavior under impact of different small thickness elastomeric layers; (2) predict the impact force generated when an elastomeric layer is added on a complex vibrating structure and (3) validate experimentally the whole method by applying it to the impact noise reduction of a bar of the snowmobile track.

To reach the first specific goal (characterize the behavior under impact of different small thickness elastomeric layers), a specific experimental characterization method has been developed. Firstly, an experimental device has been realized to submit the elastomeric layer specimens to the reproducible impact conditions of an impact hammer. The measurement of the penetration depth of the hammer into the elastomeric layer is achieved by recording its motion with a high-speed camera and by detecting its position by further analysis on the individual images. Secondly, the experimental curves obtained are analyzed to point out their main characteristics and choose an appropriate impact model. Thirdly, the contact force parameters are estimated from the experimental results and from the impact model. Using this method, eight impacted elastomeric specimens have been characterized. The results show that a more precise characterization than hardness is obtained.

To reach the second specific goal (predict the impact force generated when an elastomeric layer is added on a complex vibrating structure), a simulation model of the impact on a structure whose vibrations are due to bending waves has been used. The physical model developed by the European project « Sounding Object » (Rocchesso et Fontana, 2003) has been chosen. From an analogy between the theory used in this model and the modal formulation used in vibration studies, some first modifications of the original program (MATLAB impact\_modal.m script) have been made to simulate physically the impact of a mass on a vibrating structure. Some other modifications of the original program have been made in order to simulate the rigid body motion of the structure in the case of free boundary conditions (because the structure used for the validation of the method has free boundary conditions).

To reach the third specific goal (validate experimentally the whole method by applying it to the impact noise reduction of a bar of the snowmobile track), the first step has been the measurement of the force and the acoustic pressure in two configurations: WITH and WITHOUT the elastomeric layer in the contact zone. The second step has been the simulation of the configuration WITH the elastomeric layer by applying the impact model of a mass on a vibrating structure (presented in Chapter 2). In order to estimate the value of the model parameters describing the track bar, the modal parameters of the six first bending modes of the bar have been measured using experimental modal analysis. Finally, validation of the method has been performed firstly by checking experimentally the hypothesis of linearity by comparisons between the reductions of force spectra obtained thanks to the adding of the elastomeric specimen and the reductions of noise spectra. Secondly, validations of the method in time and frequency domains have been performed by comparisons between simulated and measured force signals. These comparisons show that the discrepancies may be high enough for some specimens (especially because the rigid motion of the structure is more complicated than a pure translation) but that the order of magnitude of simulated time and frequency signals is satisfactory.

**Key-words :** impact, elastomeric materials, noise reduction, measurements, simulation

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
<b>INTRODUCTION .....</b>	1
0.1    Problématique industrielle .....	1
0.2    Identification des mécanismes responsables du bruit d'entraînement : résultats de mesures préliminaires .....	2
0.2.1    Bruit d'ensemble des motoneiges .....	2
0.2.2    Mesures sur bancs d'essais du bruit d'entraînement .....	3
0.2.3    Mesures sous impact de portions de chenille .....	8
0.3    Définition des objectifs de la thèse .....	12
0.3.1    Moyen pratique de réduction de bruit envisagé : actions « à la source » .....	12
0.3.2    Objectif général de la thèse .....	13
0.3.3    Principe de la méthode de réduction du bruit d'impact .....	13
0.3.4    Objectifs spécifiques de la thèse .....	14
0.4    Méthodologie .....	14
0.5    Plan de la thèse .....	16
 <b>CHAPITRE 1 DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE CARACTÉRISATION DE COUCHES MINCES D'ÉLASTOMÈRE SOUMISES À DES IMPACTS ..</b>	17
1.1    Revue de littérature .....	17
1.1.1    Caractérisation des élastomères sous impact .....	17
1.1.2    Autres études de force d'impact .....	18
1.2    Caractérisation de couches d'élastomères sous impact - Partie expérimentale .....	20
1.2.1    Dispositif expérimental .....	20
1.2.2    Acquisition des données .....	23
1.2.3    Traitement des données : mesure de pénétration par analyse des images .....	25
1.2.3.1    Mesure position marteau $x(t)$ .....	25
1.2.3.2    Détection du début du contact .....	28
1.2.4    Résultats expérimentaux typiques (couche #1) .....	29
1.3    Caractérisation de couches d'élastomères sous impact - Partie modélisation .....	32
1.3.1    Système continu d'équations .....	32
1.3.2    Résolution numérique .....	33
1.4    Caractérisation de couches d'élastomères sous impact - Estimation des paramètres à partir des résultats expérimentaux et du modèle .....	34
1.5    Résultats .....	37
1.5.1    Variabilité des données expérimentales .....	37
1.5.2    Paramètres uniques $\alpha$ , $\mu$ , $k$ .....	40
1.5.3    Comparaisons finales simulation-expérience .....	41
 <b>CHAPITRE 2 MODÈLE DE PRÉDICTION DE LA FORCE D'IMPACT ET DE LA RÉPONSE D'UNE STRUCTURE COMPLEXE VIBRANTE ..</b>	44
2.1    Revue de littérature .....	45

2.1.1	Impact de cordes .....	46
2.1.2	Impact de barres et de plaques .....	48
2.2	SOb : modèle modal des vibrations de structures .....	50
2.2.1	Formalisme de l'analyse modale .....	51
2.2.2	Théorie modale du modèle SOb .....	53
2.3	SOb : modèle d'impact d'une masse sur une structure vibrante .....	56
2.3.1	Modèle complet continu SOb .....	56
2.3.2	Résolution numérique .....	57
2.3.3	Modifications de impact_modal.m .....	58
 CHAPITRE 3 APPLICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODE DE RÉDUCTION DU BRUIT D'IMPACT SUR UNE BARRE DE CHENILLE DE MOTONEIGE .....		
3.1	Cas testés et résultats expérimentaux SANS couche d'élastomère .....	60
3.1.1	Dispositif expérimental et cas testés .....	60
3.1.2	Signaux temporels expérimentaux de force SANS couche d'élastomère .....	61
3.2	Analyse modale expérimentale (AME) de la structure .....	64
3.2.1	Hypothèses générales .....	64
3.2.1.1	Hypothèse SDOF .....	64
3.2.1.2	Modes réels et modes complexes .....	65
3.2.1.3	Formulation modale des FRF .....	65
3.2.2	Mesure des FRF .....	67
3.2.3	Mesure des paramètres modaux ( $\omega_r$ , $\zeta_r$ et $\phi_r$ ) .....	69
3.2.3.1	Mesure des fréquences de résonance .....	69
3.2.3.2	Mesure des amortissements .....	72
3.2.3.3	Mesure des modes .....	73
3.2.4	Résultats de l'AME .....	74
3.2.4.1	Fréquences et amortissements modaux .....	74
3.2.4.2	Modes normalisés par rapport à une masse modale unitaire .....	77
3.3	Validation de la méthode .....	79
3.3.1	Validation de l'hypothèse de linéarité .....	79
3.3.1.1	Spectres SANS couche d'élastomère .....	79
3.3.1.2	Comparaisons des réductions des spectres de force et de pression AVEC couche d'élastomère .....	81
3.3.2	Comparaisons simulation-expérience de la force d'impact AVEC couche d'élastomère dans le domaine temporel .....	85
3.3.3	Comparaisons simulation-expérience de la force d'impact AVEC couche d'élastomère dans le domaine fréquentiel .....	92
 CONCLUSION .....		
		97
 RECOMMANDATIONS .....		
		102

ANNEXE I	CARACTÉRISATION DE COUCHES MINCES D'ÉLASTOMÈRE : COMPARAISONS SIMULATION-EXPÉRIENCE.....	107
ANNEXE II	PROGRAMME IMPACT_MODAL_JPA1.M.....	116
ANNEXE III	PROGRAMME IMPACT_MODAL_JPA2.M.....	123
ANNEXE IV	FRÉQUENCES ET AMORTISSEMENTS MODAUX POUR LES 19 POSITIONS D'IMPACT.....	130
ANNEXE V	MODES PROPRES NORMALISÉS PAR RAPPORT À UNE MASSE MODALE UNITAIRE.....	134
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....		135

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1 Propriétés des huit couches d'élastomère testées .....	22
Tableau 1.2 Variations du paramètre $k$ pour les huit couches testées .....	41
Tableau 1.3 Paramètres uniques $\alpha, k, \mu$ .....	41
Tableau 3.1 Paramètres pour l'acquisition des FRF.....	68
Tableau 3.2 Positions d'excitation choisies (cases grisées) pour la mesure des fréquences et des amortissements.....	75
Tableau 3.3 Comparaison des fréquences modales $f_r$ .....	76
Tableau 3.4 Comparaison des amortissements modaux $\zeta_r$ .....	77
Tableau 3.5 Valeurs des paramètres d'entrée de la structure .....	86

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 0.1 Schéma d'une motoneige.....	3
Figure 0.2 Spectre de puissance acoustique d'une motoneige – mesure terrain à 100 km/h.	3
Figure 0.3 Banc d'essais simplifié .....	4
Figure 0.4 Banc d'essais complet. ....	4
Figure 0.5 Schéma du système d'entraînement. ....	5
Figure 0.6 Schéma en coupe d'une portion de chenille. ....	6
Figure 0.7 Schéma de principe des impacts sur barreaux .....	8
Figure 0.8 Portions de chenilles : un barreau (à gauche) et six barreaux (à droite).....	9
Figure 0.9 Portion de un barreau - Comparaison du bruit d'impact. En haut : impact sur le barreau. En bas : impact à coté du barreau.....	11
Figure 0.10 Portion de six barreaux - Comparaison du bruit d'impact. En haut : impact sur le barreau. En bas : impact entre deux barreaux.....	11
Figure 1.1 Schéma du dispositif expérimental d'impact : (1) marteau d'impact; (2) tube en plastique; (3) couche d'élastomère testée; (4) bloc en acier; (5) cible pour la détection.....	20
Figure 1.2 Vue d'ensemble du dispositif expérimental .....	21
Figure 1.3 Exemple de clichés pris durant le contact. En haut : au début du contact ( $t=0$ ). En bas : pendant le contact ( $t>0$ ). ....	24
Figure 1.4 Détection de la position du marteau: effet de l'interpolation des valeurs de couleur par une fonction spline. --o-- valeurs originales; — valeurs interpolées.	26
Figure 1.5 Diagrammes force-pénétration: effet de l'interpolation du signal de couleur sur les positions détectées pendant l'impact. --o-- valeurs originales; — valeurs interpolées. ....	27
Figure 1.6 Diagrammes force-pénétration expérimentaux de la couche #1 pour trois vitesses initiales d'impact : $V_1=1,93$ m/s; $V_2=2,98$ m/s; $V_3=3,78$ m/s (de l'intérieur vers l'extérieur). Trois essais individuels sont présentés pour chacune des trois vitesses initiales considérées. ....	29

Figure 1.7	Signaux temporels expérimentaux de la couche #1 pour trois vitesses initiales d'impact : (a) : $V_1=1,93$ m/s; (b) : $V_2=2,98$ m/s; (c) : $V_3=3,78$ m/s. Trois essais individuels sont présentés pour chacune des trois vitesses initiales considérées.....	30
Figure 1.8	Rôle du paramètre $\alpha$ : diagrammes force-pénétration pour $m=0.1$ kg, $V_0=3$ m/s et trois valeurs de $\alpha$ : $\alpha=3/2$ (—); $\alpha=2$ (---) et $\alpha=3$ (···).....	35
Figure 1.9	Rôle du paramètre $\mu$ : diagrammes force-pénétration pour $m=0.1$ kg, $V_0=3$ m/s, $\alpha=2,5$ , $k=1,776 \times 10^9$ N m <sup>-a</sup> et trois valeurs de $\mu$ : $\mu=0,05$ (—); $\mu=0,2$ (---); $\mu=0,6$ (···).....	36
Figure 1.10	Couche #1 : variabilité des données expérimentales et comparaisons simulation-expérience des diagrammes F-x. — : simulations; .... : expériences.....	39
Figure 1.11	Couche #1 : variabilité des données expérimentales et comparaisons simulation-expérience temporelles. (a) : $F(t)$ ; (b) : $x(t)$ . — : simulations; .... : expériences. ....	39
Figure 3.1	Dispositif expérimental : (1) fil de pêche; (2) barre de chenille de motoneige; (3) couche d'élastomère; (4) microphone.....	61
Figure 3.2	Signaux temporels expérimentaux de force SANS élastomère pour trois vitesses initiales d'impact. (a) : $V_1=1,93$ m/s; (b) : $V_2=2,98$ m/s; (c) : $V_3=3,78$ m/s. ....	63
Figure 3.3	Positions des points d'excitation sur la barre .....	67
Figure 3.4	Module et Phase de la $FRF_{19,4}$ .....	70
Figure 3.5	Module et Phase de la $FRF_{19,4}$ – zoom 3 <sup>ème</sup> mode. ....	70
Figure 3.6	Partie réelle et partie imaginaire de la $FRF_{19,4}$ . ....	71
Figure 3.7	Partie réelle et partie imaginaire de la $FRF_{19,4}$ – zoom 3 <sup>ème</sup> mode. ....	72
Figure 3.8	Modes normalisés par rapport à une masse unitaire. Modes 1 à 6 (de gauche à droite et de bas en haut). ....	78
Figure 3.9	Spectres de force SANS élastomère pour trois vitesses initiales (de bas en haut) : $V_1=1,93$ m/s; $V_2=2,98$ m/s; $V_3=3,78$ m/s.....	80
Figure 3.10	Spectres de pression SANS élastomère pour trois vitesses initiales (de bas en haut) : $V_1=1,93$ m/s; $V_2=2,98$ m/s; $V_3=3,78$ m/s.....	81

Figure 3.11	Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #3 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s.....	82
Figure 3.12	Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #4 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s.....	83
Figure 3.13	Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #7 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s.....	84
Figure 3.14	Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #8 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s.....	85
Figure 3.15.	Comparaisons simulation-expérience de $F(t)$ avec couche #3 pour trois vitesses d’impact :(a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	88
Figure 3.16.	Comparaisons simulation-expérience de $F(t)$ avec couche #4 pour trois vitesses d’impact :(a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	89
Figure 3.17.	Comparaisons simulation-expérience de $F(t)$ avec couche #7 pour trois vitesses d’impact :(a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	90
Figure 3.18.	Comparaisons simulation-expérience de $F(t)$ avec couche #8 pour trois vitesses d’impact :(a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	91
Figure 3.19.	Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#3 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	93
Figure 3.20.	Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#4 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	94
Figure 3.21.	Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#7 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	95
Figure 3.22.	Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#8 pour trois vitesses d’impact : (a) $V_1=1,93$ m/s; (b) $V_2=2,98$ m/s; (c) $V_3=3,78$ m/s; — : simulation; --- : expérience.....	96

## **LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES**

BRP	Bombardier Produits Récréatifs
EDP	Équations aux dérivées partielles
MDF	Méthode des différences finies
MEF	Méthode des éléments finis
AME	Analyse modale expérimentale
DDL	Degré de liberté
SDOF	Single degree of freedom
MDOF	Multiple degrees of freedom
FRF	Fonctions de réponse en fréquence
SOb	Sounding object
Pd	Pure data
FFT	Fast Fourier Transform

## INTRODUCTION

### 0.1 Problématique industrielle

Le point de départ de la recherche présentée dans cette thèse est la problématique industrielle soumise à l'ÉTS par la compagnie Bombardier Produits Récréatifs (BRP) de la **réduction du bruit généré par le système d'entraînement par chenille de la motoneige**.

Pour BRP comme pour les autres fabricants de motoneige, la réduction de l'ensemble du bruit des motoneiges vise à satisfaire d'une part les règlements qui limitent leur émission sonore et d'autre part les utilisateurs (avec la nuance que certains veulent une réduction du bruit et d'autres une amélioration de la qualité sonore) et les riverains des sentiers de motoneige. Il y a deux grands enjeux économiques :

- l'augmentation de la part de marché d'une compagnie qui, en offrant aux utilisateurs un confort accru, obtiendrait ainsi un avantage sur la concurrence;
- le développement de cette activité de loisir en diminuant les réactions des riverains des sentiers de motoneige, ce qui s'accompagnerait d'une augmentation du nombre d'utilisateurs et donc d'une augmentation des ventes de motoneiges en général.

Sur une motoneige, il y a deux sources principales de bruit d'une importance sensiblement égale pour des vitesses stabilisées supérieures ou égales à 70 km/h : le moteur et le système d'entraînement par chenille. Initialement, la recherche sur ces deux sources a été confiée à deux universités, l'Université de Sherbrooke pour le moteur et l'ÉTS pour le système d'entraînement par chenille dans le cadre de deux projets RDC (recherche et développement coopératif) du CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada). La recherche présentée dans cette thèse est issue de ce projet avec l'ÉTS et elle est donc centrée sur la source de bruit constituée par la chenille. Si cette source a la même importance en terme de niveau acoustique que la source moteur, la motivation à la réduire est plus grande car elle est perçue par les utilisateurs comme ayant une mauvaise qualité sonore alors que le moteur est perçu comme un son agréable synonyme de puissance. De plus, alors

que plusieurs techniques de réduction du bruit moteur sont connues et assez facilement mises en œuvre, la réduction du bruit de chenilles s'est heurtée à de grandes difficultés avec des améliorations très limitées voire inexistantes de la part des fabricants qui ont utilisé des approches empiriques. Il était donc nécessaire, dans une première phase, de bien identifier les mécanismes physiques responsables de la génération du bruit dans la chenille. Ceci a été réalisé en partie par des mesures effectuées avant le début de cette thèse et en partie par des mesures effectuées dans le cadre de cette thèse. Cette identification des mécanismes est présentée dans la sous-section suivante, elle permet de définir les objectifs de la thèse.

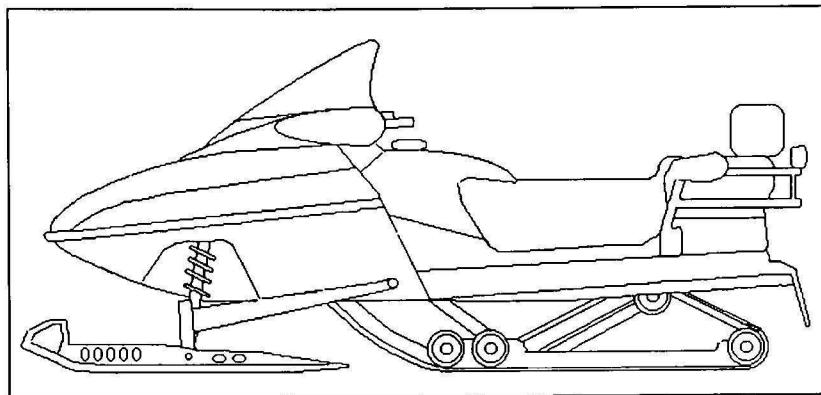
## **0.2 Identification des mécanismes responsables du bruit d'entraînement : résultats de mesures préliminaires**

### **0.2.1 Bruit d'ensemble des motoneiges**

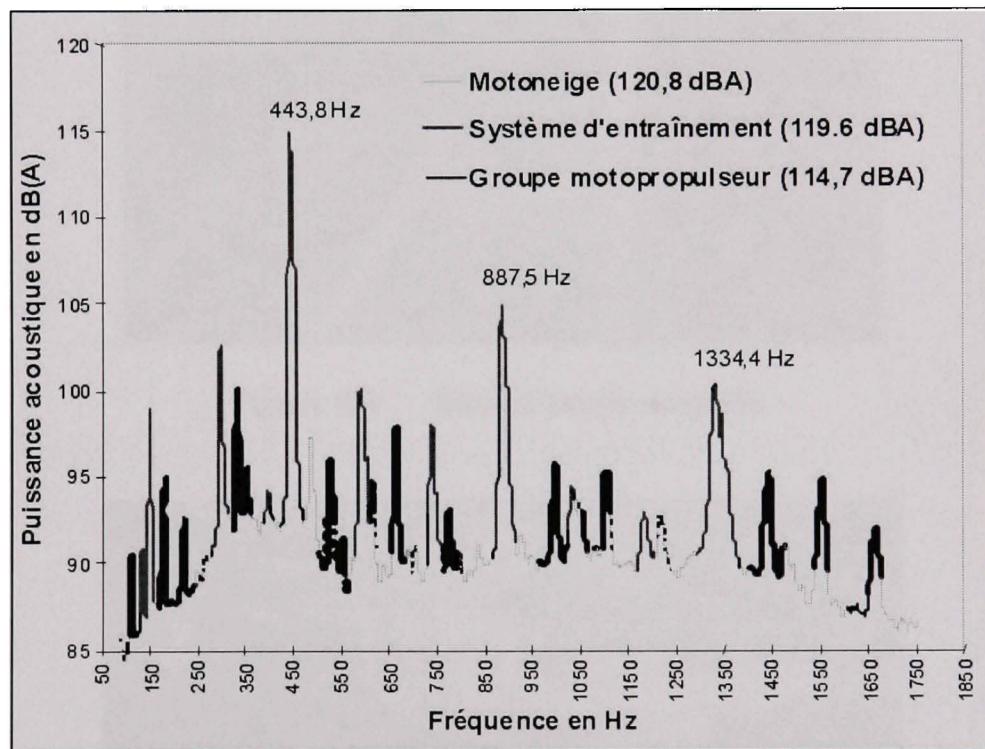
Les deux principales sources de bruit d'une motoneige en fonctionnement sont (*Voir Figure 0.1*) :

- le groupe motopropulseur (partie avant de la motoneige);
- le système d'entraînement (partie arrière de la motoneige).

Le spectre de puissance acoustique en bandes fines présenté Figure 0.2 correspond à la mesure d'une motoneige sur sentier à une vitesse d'environ 100 km/h. La séparation des contributions respectives des deux sources montre que le système d'entraînement domine avec un niveau de puissance acoustique de 119,6 dB(A) contre 114,7 dB(A) pour le groupe motopropulseur. Le spectre du système d'entraînement se caractérise par des raies qui correspondent à la fréquence de passage des éléments de la chenille (443,8 Hz) et à ses deux premiers harmoniques (887,5 Hz et 1334,4 Hz). D'autres raies sont présentes à un niveau moindre comme celles correspondant à 1/3 de la fréquence de passage et ses harmoniques car le patron de motifs des crampons de la chenille testée se répète tous les 3 crampons.



**Figure 0.1** Schéma d'une motoneige.

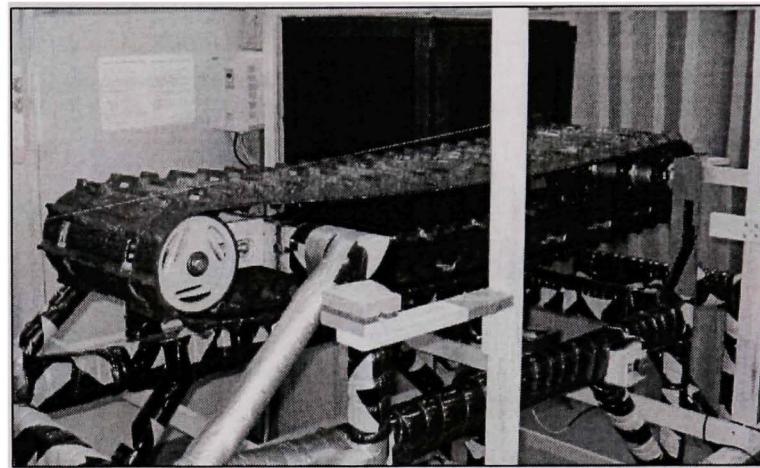


**Figure 0.2** Spectre de puissance acoustique d'une motoneige – mesure terrain à 100 km/h.

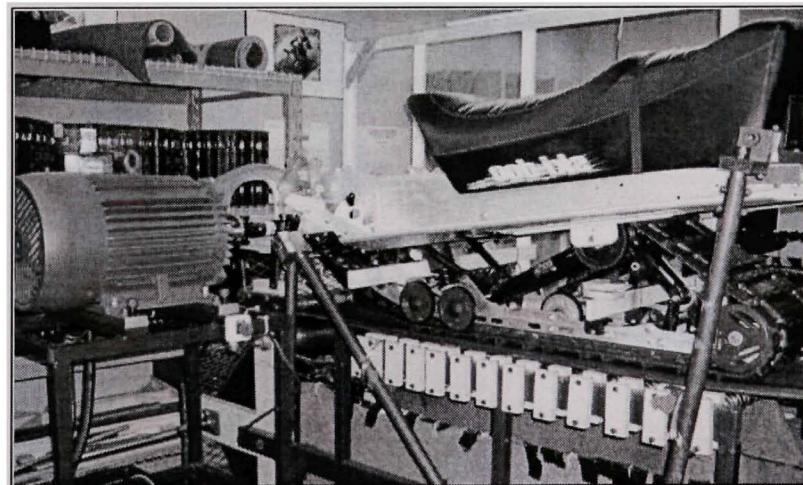
### 0.2.2 Mesures sur bancs d'essais du bruit d'entraînement

Dans le but de tester différentes chenilles sous des conditions de fonctionnement reproductibles, deux bancs d'essais ont été réalisés au cours de la collaboration ÉTS-BRP. L'entraînement des chenilles est réalisé avec des moteurs électriques asynchrones peu

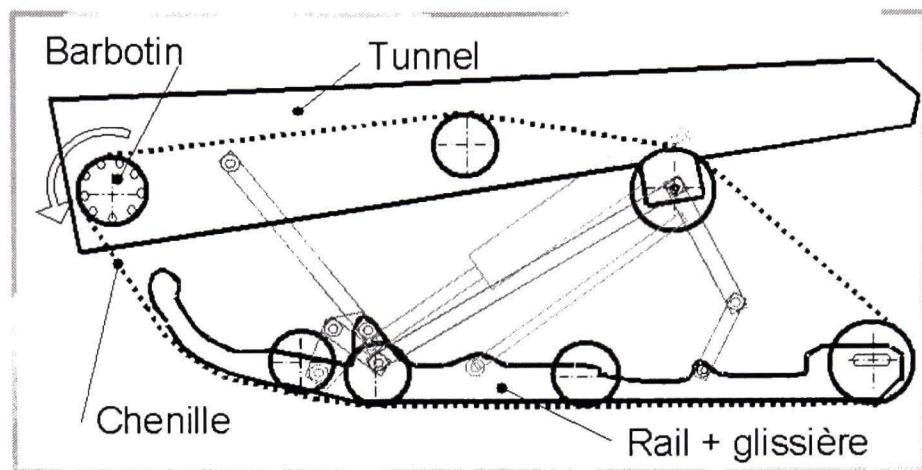
bruyants qui permettent l'étude spécifique du bruit d'entraînement. Le premier banc, présenté en Figure 0.3, est un banc « simplifié » mettant en jeu une chenille montée entre deux axes (barbotin d'un côté et disques de guidage de l'autre coté) qui permet d'étudier spécifiquement le bruit de la chenille. Le second, présenté en Figure 0.4, est un banc « complet » mettant en jeu une motoneige complète montée sur un tapis roulant qui permet d'étudier l'ensemble du bruit d'entraînement.



**Figure 0.3** Banc d'essais simplifié.



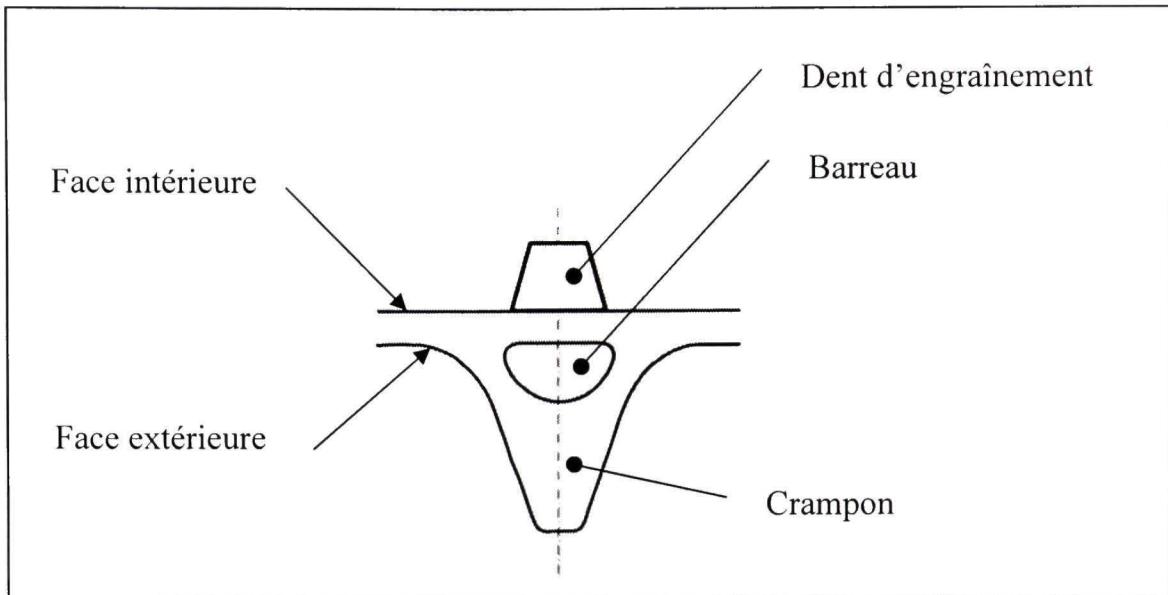
**Figure 0.4** Banc d'essais complet.



**Figure 0.5 Schéma du système d'entraînement.**

Le système d'entraînement, schématisé en Figure 0.5, fait intervenir quatre éléments principaux : la chenille, le barbotin, les roues de guidage et l'ensemble rail/glissière.

La chenille est une bande continue en caoutchouc (renforcé par de fines toiles de fibre de verre) qui est obtenue par moulage. Sur la face extérieure se trouvent les crampons (entrant en contact avec la neige) et en vis-à-vis, sur la face intérieure, se trouvent les dents d'engrainement. Des agrafes métalliques sont également disposées sur la face intérieure afin de limiter le frottement et l'usure entre la chenille et l'ensemble rail/glissière. Un schéma en coupe d'une portion de chenille est présenté à la Figure 0.6.



**Figure 0.6 Schéma en coupe d'une portion de chenille.**

Des barreaux de renfort en fibre de verre et résine polymérique, disposés suivant la largeur de la chenille et noyés dans son épaisseur (entre les crampons et les dents), sont présents afin de rigidifier la chenille en torsion.

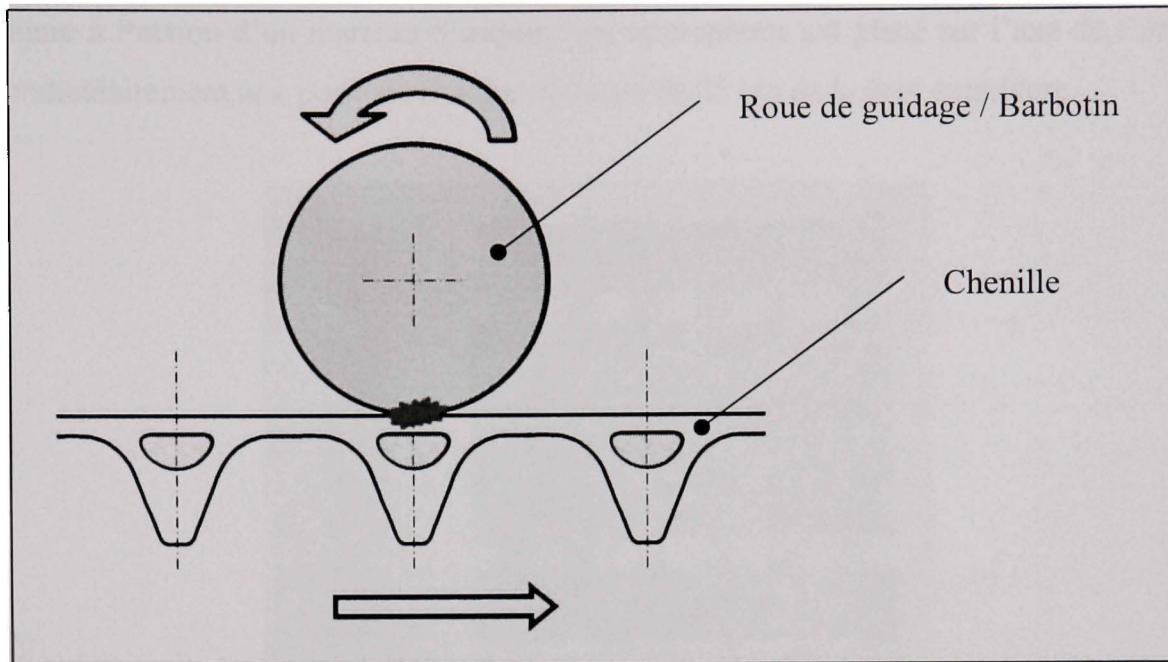
La chenille est mise en mouvement via ses dents d'engrainement par le barbotin et elle est guidée par plusieurs roues ainsi que par l'ensemble rail/glissière qui assure une bonne répartition de la pression de contact au sol.

Tableau 0.1 Comparaison des niveaux de pression acoustique (dB) pour des chenilles avec et sans renforts à 60 km/h

	Fondamentale (266 Hz)	Harmonique 1 (532 Hz)	Harmonique 2 (798 Hz)
Chenille AVEC barreaux	119,5	124,3	112,9
Chenille SANS barreaux	107,1 (-12,4)	110 (-14,3)	Pas détectable

Les mesures acoustiques réalisées sur bancs d'essais ont montré que le bruit du système d'entraînement est beaucoup plus faible pour des chenilles sans barreaux de renfort que pour des chenilles avec barreaux. Pour une vitesse de 60 km/h, les données du Tableau 0.1 obtenues à partir du banc simplifié montrent que les niveaux de pression acoustique (SPL) de la fondamentale et du premier harmonique ont été réduits de plus de 12 dB.

Ces résultats montrent que **la source principale du bruit d'entraînement est due aux impacts mécaniques générés entre les barreaux de la chenille et d'autres éléments (barbotin, roues, glissière) du système de guidage et d'entraînement**. La Figure 0.7 présente un schéma de principe des impacts sur les barreaux.



**Figure 0.7 Schéma de principe des impacts sur barreaux.**

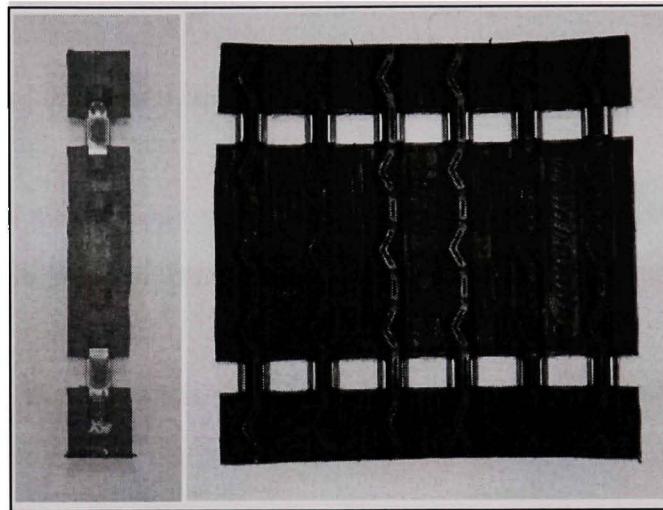
### 0.2.3 Mesures sous impact de portions de chenille

Afin de mieux caractériser le bruit d'impact rayonné par une chenille, d'autres types de mesures mettant en jeu des portions de chenille de tailles différentes soumises à des impacts manuels ont été réalisées au cours des deux premières années de ce doctorat. Les deux objectifs principaux de ces mesures étaient :

- de caractériser les points communs et les différences du bruit d'impact rayonné par des portions de chenille de tailles différentes;
- d'évaluer, pour chaque portion de chenille testée, la différence entre un impact situé en face des barreaux de renfort et un impact situé entre deux barreaux consécutifs.

Sept « portions de chenille » constituées respectivement de un à sept barreaux ont été étudiées. La Figure 0.8 présente deux de ces portions qui sont composées respectivement de un et de six barreaux. Elles ont été obtenues en découplant une chenille dans le sens de la largeur.

Les portions sont suspendues verticalement avec du fil de pêche et soumises sur leur face intérieure à l'action d'un marteau d'impact. Un microphone est placé sur l'axe de l'impact, perpendiculairement aux portions et à une distance de 25 cm de la face extérieure.



**Figure 0.8 Portions de chenilles :**  
**un barreau (à gauche) et six barreaux (à droite).**

La Figure 0.9 présente l'évolution des spectres de pression acoustique dans un diagramme temps-fréquence pour la portion composée d'un seul barreau. Dans le cas de l'impact situé en face du barreau, le bruit présente deux parties successives :

- une partie initiale très brève caractérisée par une excitation large bande;
- une partie pseudo-permanente prolongée caractérisée par deux résonnances principales (autour de 100 Hz et 400 Hz) qui correspondent à des modes de vibration du barreau en flexion.

Ces deux parties successives correspondent à deux régimes de vibrations distincts pour la structure et ont été mis en évidence dans la littérature (*Voir* notamment (Akay, 1978) ainsi que (Trocaz, Woodcock et Laville, 2000)). Pendant l'impact, la structure est en régime forcée par l'excitation. Ce régime forcé se caractérise une déformation locale et par une accélération de l'ensemble de la structure; et le bruit associé à ces deux mécanismes physiques de génération s'appelle le bruit d'accélération (*Voir* (Ross, 2000)). Après l'impact, la structure est en régime libre. Ce régime libre, qui fait intervenir les modes de flexion de la structure,

est en général beaucoup plus long que le régime forcé; et le bruit associé à ce mécanisme physique de génération s'appelle le bruit de réverbération (*Voir* (Ross, 2000)).

Dans le cas de l'impact situé à coté du barreau, on observe que :

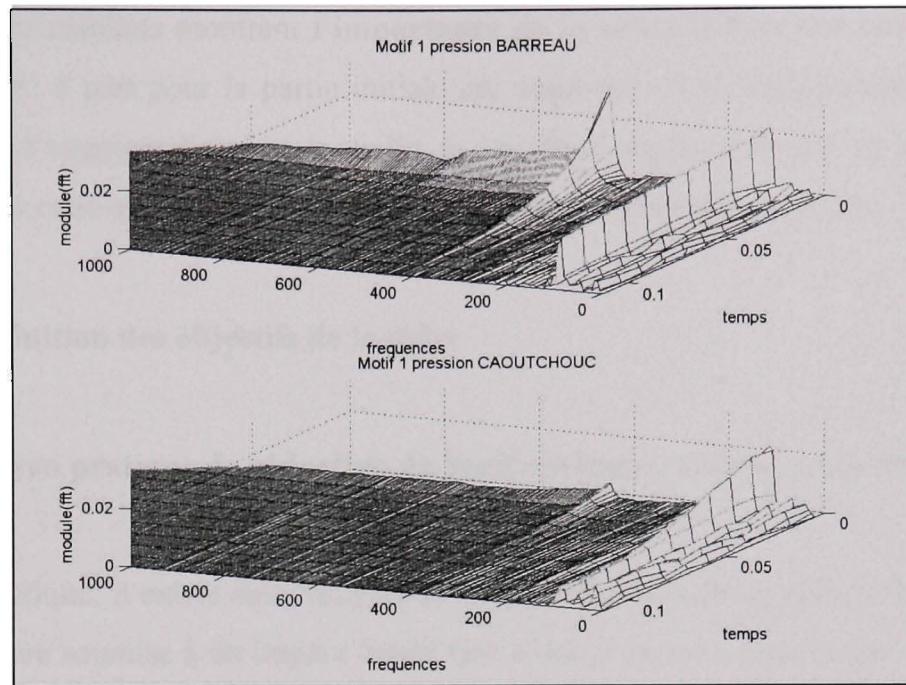
- la partie transitoire initiale est beaucoup moins marquée;
- les résonances de la partie pseudo-permanente sont toujours présentes.

La Figure 0.10 présente les résultats pour la portion composée de six barreaux. Dans le cas de l'impact situé en face du barreau, on observe par comparaison avec le cas de la portion à un barreau que :

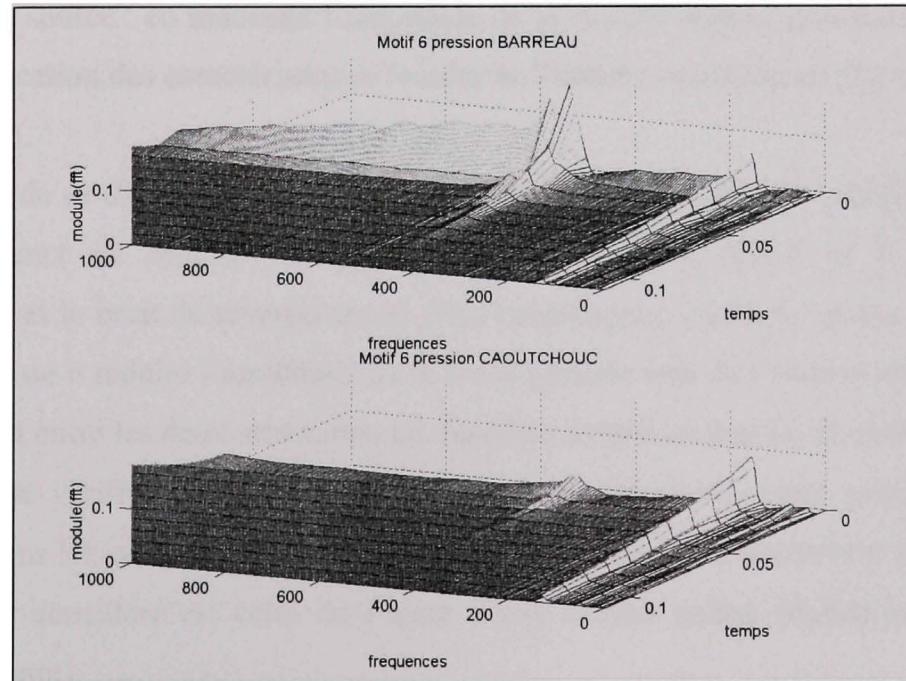
- la partie initiale est plus marquée, ce qui est dû à la plus grande taille de la portion;
- la partie pseudo-permanente est très similaire : elle est toujours caractérisée par les deux résonances principales des barreaux (les deux pics observés autour de 400 Hz peuvent s'expliquer par des légères variations des résonances de chaque barreau).

Dans le cas de l'impact situé entre deux barreaux, on observe que le résultat est très similaire à celui de la portion composée d'un seul barreau.

Il apparaît donc que les portions de chenille constituées de plus d'un barreau n'ont pas de modes « d'ensemble » dus à la longueur des portions. Cette caractéristique est due au fait que la zone située entre deux barreaux est essentiellement constituée de caoutchouc; la présence de cette zone beaucoup plus souple et amortie explique que la réponse des modes suivant la longueur de la chenille est de très faible amplitude.



**Figure 0.9 Portion de un barreau - Comparaison du bruit d'impact.**  
**En haut : impact sur le barreau. En bas : impact à coté du barreau.**



**Figure 0.10 Portion de six barreaux - Comparaison du bruit d'impact.**  
**En haut : impact sur le barreau. En bas : impact entre deux barreaux.**

Finalement, ces résultats montrent **l'importance de la contribution des barreaux dans le bruit rayonné** : à part pour la partie initiale qui augmente avec l'augmentation de la taille des portions, l'augmentation de la taille a un effet négligeable sur la partie pseudo-permanente car celle-ci est due principalement au rayonnement des barreaux.

### 0.3 Définition des objectifs de la thèse

#### 0.3.1 Moyen pratique de réduction de bruit envisagé : actions « à la source »

Sur le plan pratique, il existe deux moyens principaux permettant de réduire le bruit rayonné par une structure soumise à un impact donné (par exemple le choc généré par un impacteur à une vitesse d'impact donnée) :

- action sur le rayonnement propre de la structure : soit en augmentant son amortissement interne, soit en modifiant ses conditions aux limites;
- action à la source : en réduisant l'amplitude de la force d'impact transmise à la structure par modification des caractéristiques locales de l'impact (matériau et géométrie des corps en contact).

Dans le cadre de ce doctorat il a été choisi de viser des réductions à la source car ce type de réduction permet de réduire l'ensemble du bruit rayonné (c.à.d. à la fois le bruit d'accélération et le bruit de réverbération). Plus précisément, l'action typique considérée est celle qui consiste à réduire l'amplitude de la force générée lors de l'impact en ajoutant, dans la zone contact entre les deux structures, un matériau souple tel que les élastomères. De plus, dans le but de vérifier des contraintes de masse et d'encombrement minimaux souvent rencontrées dans les systèmes mécaniques (tel que le système d'entraînement par chenille), le cas particulier considéré est celui de l'ajout d'une couche **mince** d'élastomère (épaisseur inférieure à 6 mm).

### 0.3.2 Objectif général de la thèse

Étant donné que le financement industriel a été interrompu assez tôt dans le projet et vu le caractère général de la réduction du bruit d'impact, il a été décidé de mettre l'emphase sur la problématique générale de réduction du bruit d'impact par l'ajout d'une couche mince d'élastomère, tout en gardant l'application au cas de la motoneige comme un support aux développements expérimentaux, ce qui a permis de définir l'objectif général ci-dessous.

**L'objectif général de cette thèse est de développer une méthode permettant de prédire la réduction du bruit d'impact permise par l'ajout d'une couche mince d'élastomère entre l'objet impactant et une structure impactée dont la géométrie et la composition sont complexes.**

### 0.3.3 Principe de la méthode de réduction du bruit d'impact

La méthode envisagée de réduction du bruit d'impact par ajout d'une couche mince d'élastomère comprend quatre étapes principales :

- 1) Réalisation d'un montage expérimental représentatif du mécanisme d'impact et des structures impliquées dans le système mécanique qui fait l'objet de l'étude;
- 2) Mesure de la force d'impact dans le montage;
- 3) Prédiction dans le domaine temporel de la nouvelle force d'impact générée dans le cas où une couche mince d'élastomère est ajoutée dans la zone d'impact. Cette étape nécessite deux sous-étapes : (1) l'utilisation d'une méthode de caractérisation du comportement de couches minces d'élastomères soumises à des impacts et (2) la caractérisation de la structure par l'analyse modale expérimentale (ou simplement par la mesure de son impédance au point d'entrée si la position d'impact considérée est toujours la même);
- 4) Prédiction dans le domaine fréquentiel de la réduction du spectre de la force d'impact permise par l'ajout de la couche d'élastomère. En faisant l'hypothèse de linéarité entre la force d'impact, les vibrations de la structure et son rayonnement acoustique, la réduction

du spectre de bruit d'impact prédicté sera considérée égale à la réduction du spectre de la force d'impact.

### **0.3.4 Objectifs spécifiques de la thèse**

En vue de prédire la réduction du bruit d'impact permise par l'ajout d'une couche d'élastomère entre l'objet impactant (l'impacteur) et la structure impactée, les trois objectifs spécifiques qui ont été fixés sont de :

- 1) Caractériser le comportement sous impact de différentes couches minces d'élastomères;
- 2) Prédire la nouvelle force d'impact générée dans le cas où une couche mince d'élastomère est ajoutée entre l'impacteur et une structure vibrante dont la géométrie et la composition sont complexes;
- 3) Valider expérimentalement l'ensemble de la méthode de prédiction en l'appliquant à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige.

## **0.4 Méthodologie**

La méthodologie utilisée pour atteindre chacun des trois objectifs spécifiques fixés est présentée dans les trois paragraphes ci-dessous.

Pour atteindre le premier objectif spécifique (caractériser le comportement sous impact de différentes couches d'élastomères), la méthodologie a consisté dans un premier temps à développer une méthode expérimentale spécifique de caractérisation. Le dispositif expérimental réalisé permet de soumettre les couches à l'action reproductible d'un impacteur. L'utilisation d'un marteau d'impact comme impacteur permet une mesure directe de la force d'impact appliquée sur la couche. La méthode de mesure de la pénétration de l'impacteur dans la couche consiste à filmer sa trajectoire avec une caméra haute-vitesse puis à détecter sa position sur chacun des clichés. Dans un deuxième temps, l'analyse des signaux expérimentaux obtenus a permis d'observer les principales caractéristiques du comportement sous impact des couches d'élastomère et de guider le choix d'un modèle de contact

permettant de les reproduire. Dans un troisième temps, les paramètres du modèle sont estimés à partir des résultats expérimentaux et du modèle.

Pour atteindre le deuxième objectif spécifique (prédir la nouvelle force d'impact générée dans le cas où une couche mince d'élastomère est ajoutée entre l'impacteur et une structure vibrante), il a fallu modéliser temporellement le phénomène d'impact sur une structure vibrante. Suite à un examen des modèles disponibles dans la littérature, le modèle retenu est un modèle physique qui a développé dans le cadre du projet européen « Sounding Object » (Rocchesso et Fontana, 2003). Par analogie entre l'approche modale utilisée dans ce modèle et le formalisme modal utilisé pour l'étude des vibrations de structures, des modifications ont été apportées au programme initial (programme MATLAB `impact_modal.m` de Sounding Object) afin de modéliser physiquement l'impact d'une masse sur une structure vibrante et dont les conditions aux limites sont libres.

Pour atteindre le troisième objectif spécifique (valider expérimentalement l'ensemble de la méthode de prédiction en l'appliquant à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige), la première étape a consisté à mesurer la force et la pression acoustique rayonnée par la barre dans deux configurations d'impact : AVEC et SANS couche d'élastomère dans la zone de contact. La deuxième étape a consisté à modéliser la configuration AVEC élastomère en appliquant le modèle d'impact d'une masse sur une structure vibrante (présenté au Chapitre 2). Pour déterminer la valeur des paramètres d'entrée du modèle qui décrivent la barre, les paramètres modaux des six premiers modes de flexion de la barre ont été mesurés en effectuant une analyse modale expérimentale. Enfin, la validation de la méthode a consisté dans un premier temps à vérifier expérimentalement l'hypothèse de linéarité en comparant les réductions des spectres de force permises par l'ajout de la couche d'élastomère aux réductions des spectres de bruit. Dans un deuxième temps, la méthode a été validée dans les domaines temporel et fréquentiel par des comparaisons entre les signaux de force simulés et les signaux de force mesurés.

## 0.5 Plan de la thèse

La thèse est composée de trois chapitres qui correspondent aux trois objectifs spécifiques fixés :

- le Chapitre 1 présente la méthode spécifique développée pour caractériser le comportement de couches minces d'élastomère soumises à des impacts;
- le Chapitre 2 présente la modélisation de l'impact d'une masse sur une structure vibrante;
- le Chapitre 3 présente la validation de l'ensemble de la méthode en l'appliquant à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige.

Étant donné que les aspects des chapitres 1 et 2 sont bien distincts, des revues de littérature séparées ont été effectuées et sont présentées au début de chacun de ces chapitres.

## CHAPITRE 1

### DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE CARACTÉRISATION DE COUCHES MINCES D'ÉLASTOMÈRE SOUMISES À DES IMPACTS

La méthode de caractérisation de couches minces d'élastomère présentée dans ce chapitre ayant fait l'objet d'une publication (Arz et Laville, 2009), l'organisation et le contenu de ce chapitre sont très similaires à ceux de l'article.

#### 1.1 Revue de littérature

##### 1.1.1 Caractérisation des élastomères sous impact

Parmi les méthodes expérimentales de test des élastomères, la méthode de pénétration statique est la plus simple pour caractériser la propriété d'un matériau à résister à l'action d'un pénétrateur sous un chargement donné. Cette méthode est notamment utilisée pour mesurer la dureté des élastomères selon les normes internationales ISO 48 (ISO 48, 1994) et ISO 7619 (ISO 7619, 1997). Cependant, des couches d'épaisseur minimale 6 mm sont requises et la charge appliquée est faible si bien que les profondeurs de pénétration restent faibles comparées à l'épaisseur de la couche.

De plus, ces méthodes statiques ne permettent pas de prendre en compte les phénomènes dissipatifs caractéristiques des élastomères soumis à des impacts, il faut donc utiliser des méthodes dynamiques. Il n'existe pas de normes internationales pour la caractérisation des élastomères sous impacts mais (Vriend et Kren, 2004) ont notamment proposé une méthode de pénétration dynamique (« dynamic indentation method ») dans le but de trouver les caractéristiques viscoélastiques d'élastomères sous impact. Dans le dispositif expérimental qu'ils utilisent, les couches sont fixées sur une surface immobile très rigide et soumis à l'impact d'un pénétrateur fixé à un bras en rotation. La seule variable mesurée pendant le contact est la vitesse du pénétrateur, grâce à une bobine à induction posée sur la couche et à

un aimant permanent fixé sur le pénétrateur. La force de contact et le déplacement du pénétrateur sont alors obtenus respectivement par dérivation et intégration numériques du signal de vitesse. Les couches ayant une épaisseur de 6 mm et les vitesses initiales d'impact étant inférieures à 1,2 m/s, les profondeurs de pénétration restent faibles comparées à l'épaisseur de la couche. Une autre limitation de cette étude est l'utilisation du modèle linéaire de Kelvin-Voigt pour décrire le comportement des élastomères car il conduit à un « saut » peu réaliste de la force au début du contact alors que les signaux expérimentaux de force se caractérisent par une croissance continue depuis une valeur nulle.

### 1.1.2 Autres études de force d'impact

Dans le but de proposer un modèle d'impact plus réaliste qui soit capable de reproduire les caractéristiques observées lors de nos tests d'impact sur des couches en élastomère, des études de force d'impact développées dans d'autres domaines ont été recherchées. Basée sur des hypothèses de petites déformations de deux corps pouvant être considérés comme des demi espaces élastiques, la loi de contact non linéaire de Hertz  $F(t)=Ku(t)^{3/2}$  (*Voir* (Goldsmith, 1960)), où  $u(t)$  représente l'interpénétration entre les deux corps, est largement utilisée car  $K$  peut être facilement calculé pour des géométries simples (en particulier les interactions sphère-sphère et sphère-plaque) en fonction des constantes élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) et des rayons de courbure des deux corps. Dans plusieurs études, la force de la loi de Hertz est approximée par des fonctions trigonométriques dans le but de simplifier les calculs. Cependant, (Akay et Latcha, 1983) ont trouvé dans l'étude d'une plaque impactée que l'approximation de la force par un demi-sinus introduit des discontinuités peu réalistes de l'accélération de la plaque en début et en fin de contact, alors que l'approximation par un demi-sinus au carré, caractérisée par des discontinuités moins marquées de l'accélération de la plaque, permet une meilleure concordance avec les résultats expérimentaux.

Un modèle sans cette approximation de la force et qui inclut une phase de déformations plastiques a été développé par (Trocaz, Woodcock et Laville, 2000) pour l'étude de l'impact

inélastique entre une sphère en acier et une plaque en aluminium. La force d'impact est obtenue en résolvant numériquement par la méthode de Newton-Raphson un système de trois équations couplées et le contact est décrit par trois phases successives : (1) phase de déformations élastiques selon la loi de Hertz; (2) phase de déformation purement plastique; (3) phase de déformations élastiques pour le déchargement selon une loi de type Hertz qui prend en compte la déformation résiduelle (plastique) et la déformation maximale (élastique et plastique). Cependant les pertes durant le contact ne sont pas prises en compte.

De nombreuses études de la force d'impact ont été menées en acoustique musicale pour simuler les sons d'instruments de percussion car les caractéristiques de la force (en particulier sa durée) ont une grande influence sur le spectre du son produit. En particulier pour la simulation de sons de pianos, l'abondance d'études expérimentales et théoriques consacrées à l'interaction entre un marteau de piano (fait de bois et recouvert de feutre) et une corde témoigne d'une part de la nécessité d'une modélisation précise de la force afin d'obtenir des sons réalistes et d'autre part de la complexité à mesurer dans la pratique des paramètres expérimentaux caractéristiques du feutre permettant de prédire son comportement. Dans le but d'obtenir les lois liant la force à l'écrasement du feutre, plusieurs études utilisent un dispositif dans lequel le marteau frappe un capteur de force fixé à une surface rigide et immobile (*Voir* par exemple (Giordano et Winans Ii, 2000) et (Stulov, 1994)). Les premiers modèles basés uniquement sur des déformations élastiques (*Voir* notamment (Chaigne et Askenfelt, 1994)) ont du être améliorés pour pouvoir décrire le comportement hystérotique et viscoélastique du feutre soumis à des impacts. Un des derniers modèles proposés, utilisé notamment par (Bensa, Gipouloux et Kronland-Martinet, 2005), qui reproduit convenablement les caractéristiques expérimentales du feutre est la loi de contact viscoélastique non linéaire initialement établie par (Hunt et Crossley, 1975).

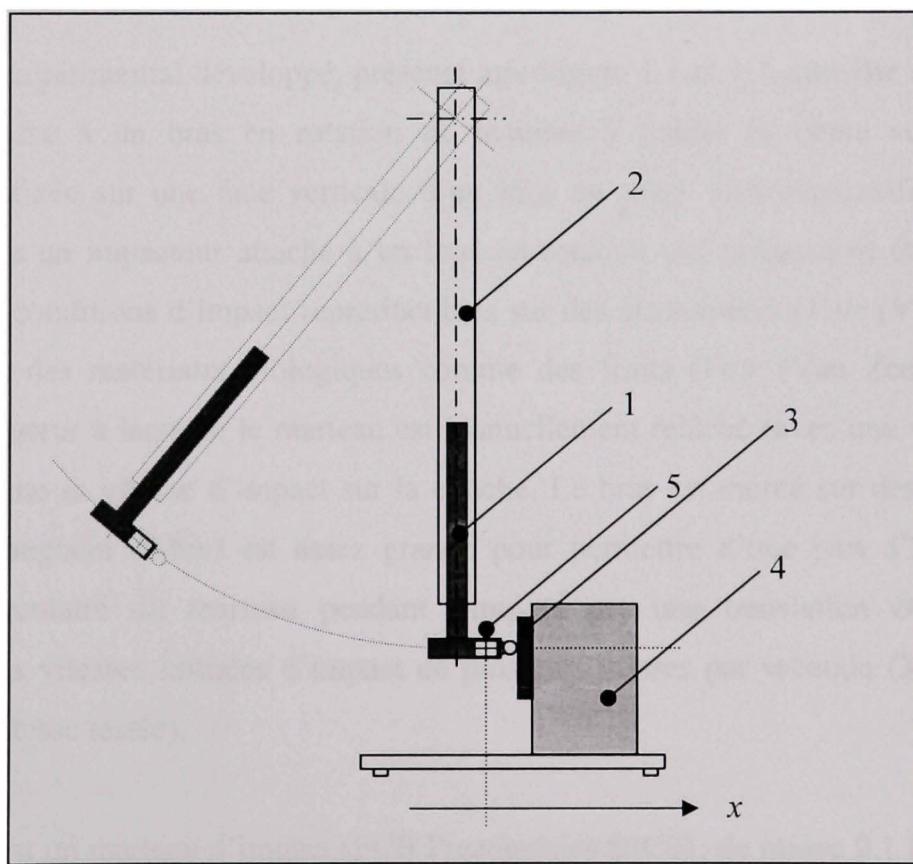
C'est cette loi de contact qui a été choisie pour modéliser le comportement sous impact des élastomères car, comme le montrent les courbes expérimentales que nous avons obtenues (*Voir* Figure 1.6 de la section 1.3.4), leur comportement est très similaire à celui du feutre de piano (*Voir* par exemple les courbes obtenues par (Stulov, 1994)).

## 1.2 Caractérisation de couches d'élastomères sous impact - Partie expérimentale

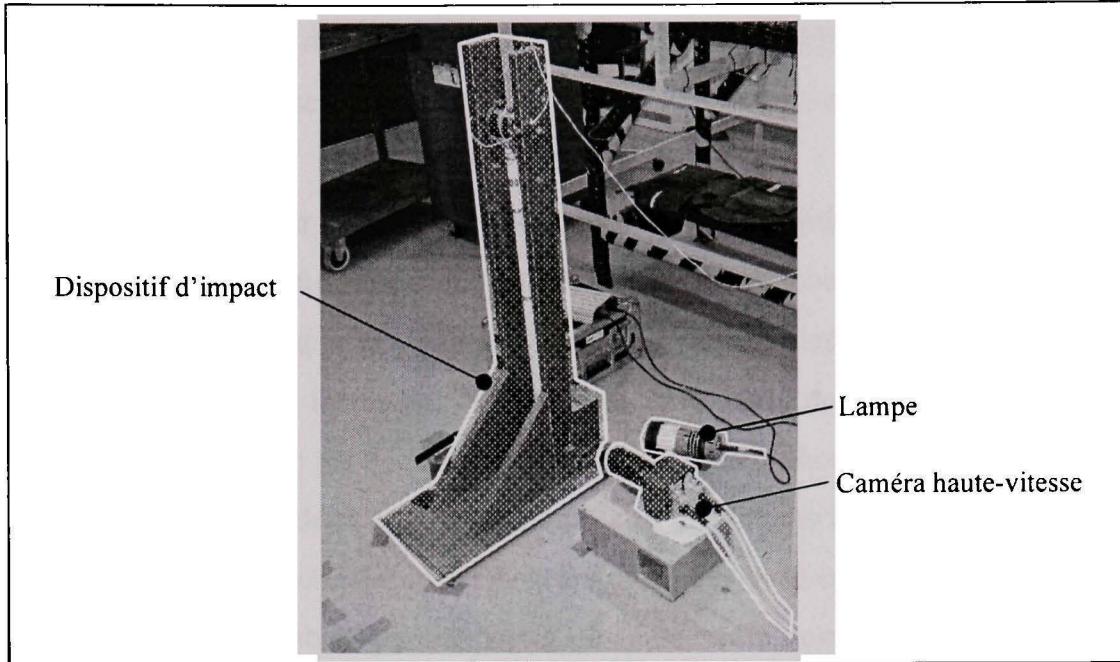
Cette section présente la méthode expérimentale développée pour caractériser le comportement sous impact de couches minces d'élastomères.

### 1.2.1 Dispositif expérimental

Dans le but de comparer le comportement sous impact de différentes couches d'élastomère, le dispositif expérimental doit permettre de les soumettre à des conditions d'impact reproductibles (masse  $m$  et vitesse initiale  $V_0$  d'un impacteur) et de mesurer pendant le contact la force d'impact et la profondeur de pénétration de l'impacteur dans la couche.



**Figure 1.1** Schéma du dispositif expérimental d'impact : (1) marteau d'impact; (2) tube en plastique; (3) couche d'élastomère testée; (4) bloc en acier; (5) cible pour la détection.



**Figure 1.2    Vue d'ensemble du dispositif expérimental**

Le dispositif expérimental développé, présenté aux Figure 1.1 et 1.2, consiste en un marteau d'impact attaché à un bras en rotation de manière à guider sa chute vers la couche d'élastomère fixée sur une face verticale d'un bloc en acier. Des dispositifs comparables mettant en jeu un impacteur attaché à un bras en rotation ont notamment été utilisés afin d'obtenir des conditions d'impact reproductibles sur des élastomères (*Voir* (Vriend et Kren, 2004)) et sur des matériaux biologiques comme des fruits (*Voir* (Van Zeebroeck et al., 2003)). La hauteur à laquelle le marteau est manuellement relâché (avec une vitesse initiale nulle) détermine sa vitesse d'impact sur la couche. Le bras est monté sur des roulements à billes et sa longueur (0,8m) est assez grande pour permettre d'une part d'approximer la trajectoire circulaire du marteau pendant l'impact par une translation et d'autre part d'atteindre des vitesses initiales d'impact de plusieurs mètres par seconde (3,78 m/s est la plus grande vitesse testée).

L'impacteur est un marteau d'impact (PCB Piezotronics 86C01, de masse 0.1 kg) qui intègre un capteur de force ICP convertissant la force en signal électrique (sensibilité nominale 11.2 mV/N). Une sphère en acier (bille de roulement) de diamètre 7.9375 mm (5/8 pouce) est utilisée comme embout afin de pouvoir négliger ses déformations pendant l'impact. De plus,

la fréquence de résonance du marteau étant supérieure à 15 kHz, ses propriétés modales peuvent être négligées et il sera considéré comme une masse pure dans nos modèles.

Les couches sont placées sur un bloc en acier assez rigide et lourd pour pouvoir négliger son déplacement et ses déformations pendant l'impact. Les huit couches testées, présentés dans le tableau [1], font intervenir quatre types d'élastomères disponibles dans le commerce (NBR, Néoprène, SBR et NR) . La forme des échantillons est un carré de 60 mm de côté et la seule propriété mécanique donnée par le distributeur est leur dureté Shore. Ils sont obtenus à partir de feuilles d'élastomère de deux épaisseurs nominales différentes : 3,175 mm (2/16 pouce) et 6,35 mm (4/16 pouce). Cependant, les épaisseurs mesurées avec un pied à coulisse montrent des variations non négligeables par rapport à ces épaisseurs nominales; par conséquent ce paramètre est également présenté dans le tableau 1.

Tableau 1.1 Propriétés des huit couches d'élastomère testées

Numéro couche	Nom du matériau	Dureté Shore (HS)	Épaisseur nominale (mm)	Épaisseur mesurée (mm)
1	BNIT	60	3,175	$3,25 \pm 0,01$
2	NECOM	60	3,175	$2,95 \pm 0,01$
3	SB60	60	3,175	$3,06 \pm 0,01$
4	PGUM	40	3,175	$3,65 \pm 0,01$
5	BNIT	60	6,35	$5,88 \pm 0,01$
6	NECOM	60	6,35	$6,06 \pm 0,01$
7	SB60	60	6,35	$5,89 \pm 0,01$
8	PGUM	40	6,35	$6,25 \pm 0,01$

Dans la plupart des études dont le but est de mesurer la position d'un impacteur, la position est obtenue par intégration(s) temporelle(s) de mesures faites par des capteurs de vitesse ou d'accélération. Cependant, comme le soulignent (Musiol et Harty, 1991), l'incertitude liée à la détermination des constantes d'intégration (une pour une mesure de vitesse, deux pour une mesure d'accélération) crée une erreur sur les signaux intégrés et cette erreur augmente avec l'augmentation de temps.

Au lieu d'utiliser un accéléromètre ou un capteur de vitesse, la méthode utilisée pour mesurer la position du marteau consiste à filmer sa trajectoire pendant l'impact avec une caméra haute-vitesse et à détecter ensuite sa position par traitement d'image. Les quatre principaux avantages de cette méthode sont que :

- la quantité mesurée est directement la position;
- la mesure est réalisée sans contact (et ni l'impacteur ni la couche testée ne nécessitent d'équipement additionnel);
- la vitesse initiale d'impact peut être calculée à partir des images qui précèdent le début du contact;
- des informations additionnelles sur le mouvement de l'impacteur peuvent être obtenues en visionnant le film à des vitesses réduites.

Les limites actuelles de la méthode sont ses résolutions en espace et en temps. La résolution spatiale est obtenue en prenant un cliché d'un objet ayant une longueur de référence et en mesurant cette longueur en nombre de pixels; le résultat pour nos tests est qu'un pixel représente un carré d'environ 0,04729 mm en réalité. Cette résolution spatiale pourrait être améliorée en utilisant un objectif ayant une plus grande distance focale. La résolution temporelle, quant à elle, pourra s'améliorer dans le futur grâce à de nouvelles caméras haute-vitesse permettant d'acquérir un nombre d'images par seconde plus élevé.

### 1.2.2 Acquisition des données

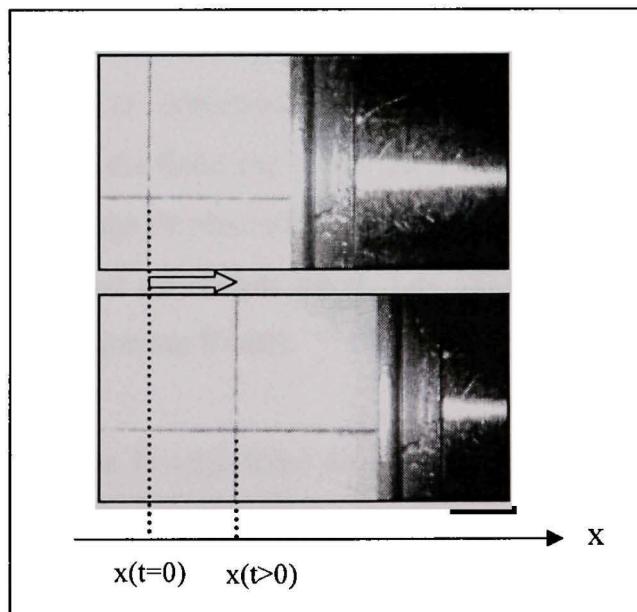
La trajectoire du marteau est mesurée avec une caméra haute-vitesse monochrome (Photron FASTCAM-ultima APX) équipée d'une lentille macro (Tamron 272E); une puissante source de lumière doit être utilisée afin d'obtenir des clichés suffisamment exposés. L'axe de la caméra est perpendiculaire au plan de la trajectoire du marteau et le capteur d'image est situé à environ 0,29 m du point d'impact. On choisit les paramètres suivants pour l'acquisition à l'aide du logiciel Photron File Viewer :

- nombre de clichés par secondes : 30000;

- temps d'exposition (le temps pendant lequel le capteur reçoit la lumière) : 1/120000 s;
- résolution : 256 pixels  $\times$  128 pixels.

Pour l'acquisition de la force, la tension analogique délivrée par le capteur de force est numérisée avec une carte d'acquisition (National Instrument BNC-2140) contrôlée à l'aide de « MATLAB digital acquisition toolbox ». On choisit la même fréquence d'échantillonnage que celle des clichés (30 kHz) afin que chaque échantillon temporel de force corresponde à un cliché.

Afin de synchroniser les deux systèmes d'acquisition utilisés (un pour la caméra, l'autre pour la force), une source externe délivrant une impulsion électrique est activée manuellement avant l'impact et cette impulsion est envoyée aux deux systèmes pour déclencher simultanément les acquisitions.



**Figure 1.3 Exemple de clichés pris durant le contact.**

**En haut : au début du contact ( $t=0$ ).**

**En bas : pendant le contact ( $t>0$ ).**

Après l'acquisition, les clichés qui composent le film (fichier au format avi) sont enregistrés individuellement sous forme d'images (fichiers au format bitmap) de résolution 256  $\times$  128. À

titre d'exemple, la Figure 1.3 présente deux clichés pris à deux instants différents au cours de l'impact : un cliché au début du contact ( $t=0$ ) et un cliché à un instant plus tard, alors que le marteau s'est déplacé vers la droite. La méthode d'analyse de ces images en vue de détecter la position du marteau est détaillée dans la prochaine section.

### 1.2.3 Traitement des données : mesure de pénétration par analyse des images

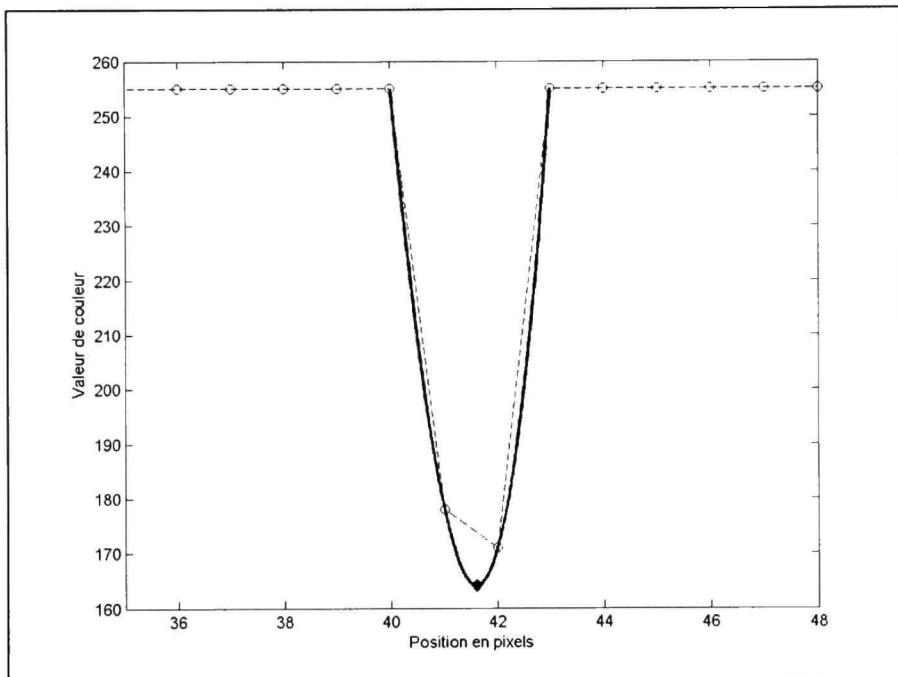
Étant donné que les déformations du bloc en acier et de l'embout du marteau sont négligeables devant les profondeurs de pénétration du marteau dans les échantillons d'élastomère, la pénétration  $X(t)$  est calculée à partir de la position  $x(t)$  du marteau par :  $X(t)=x(t)-x(0)$  où l'instant  $t=0$  correspond au début du contact.

#### 1.2.3.1 Mesure position marteau $x(t)$

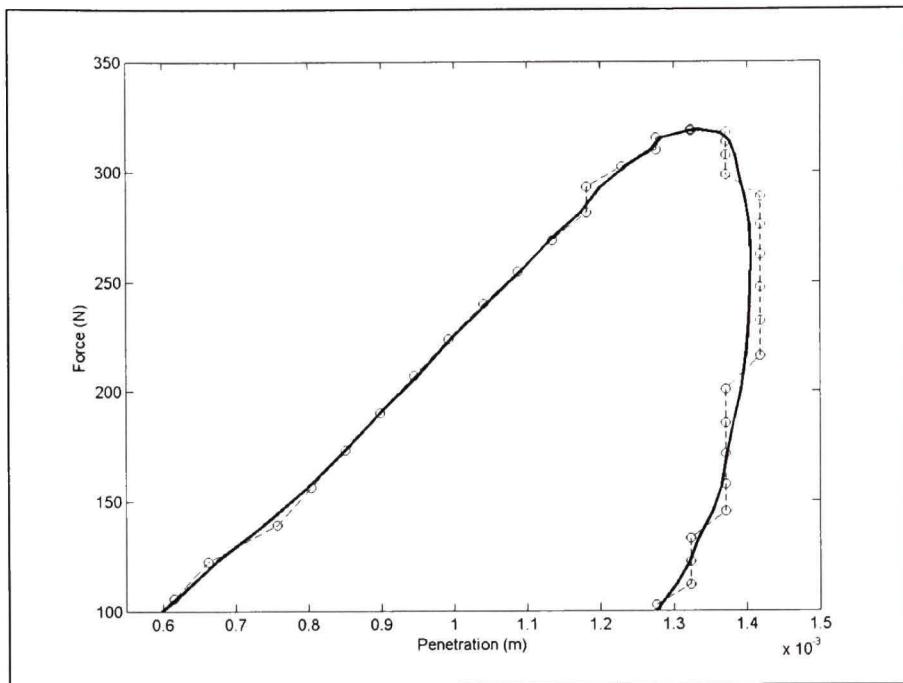
Le but de l'analyse est de détecter avec une bonne précision la position du marteau sur chaque image. Pour faciliter la détection, une cible composée de deux traits noirs perpendiculaires sur fond blanc est fixée sur la tête du marteau, juste derrière l'embout. Les données contenues dans une image de résolution  $256 \times 128$  est une matrice (256 lignes  $\times$  128 colonnes) des valeurs de couleur de chaque pixel. Les valeurs de couleur s'étendent dans notre cas de 0 à 255 (quantification sur 8 bits).

Étant donné que l'on approxime la trajectoire du marteau pendant le contact par une pure translation horizontale, la détection de la position du marteau se limite à la détection du trait vertical de la cible suivant un axe horizontal. On définit donc sur chaque image un segment horizontal et on trace les valeurs de couleur qui lui correspondent; la Figure 1.4 montre un exemple de tracé obtenu en ligne discontinue. Le trait noir vertical se caractérise par des valeurs de couleur inférieures à 255 pour les pixels 41 et 42 (la valeur maximale de 255 correspond au fond blanc de la cible) et le moyen le plus simple de détecter la position du milieu du trait est de trouver le pixel correspondant au minimum de couleur (ceci donne le pixel 42 pour l'exemple en Figure 1.4). Cependant, parce que la taille d'un pixel est

relativement grande par rapport à l'épaisseur du trait, le milieu réel du trait peut se trouver entre deux pixels consécutifs. Afin d'augmenter la précision de la détection, les valeurs de couleur correspondant au trait sont interpolées (sur 100 valeurs intermédiaires entre deux pixels) avec la fonction « spline » de MATLAB et l'on détecte le minimum des valeurs de couleur de ce signal interpolé. Le signal de couleur interpolé et son minimum sont représentés en ligne continue à la Figure 1.4.



**Figure 1.4 Détection de la position du marteau:  
effet de l'interpolation des valeurs de couleur par une fonction spline.**  
--o-- valeurs originales; — valeurs interpolées.



**Figure 1.5 Diagrammes force-pénétration:  
effet de l'interpolation du signal de couleur sur les positions détectées  
pendant l'impact. --o-- valeurs originales; — valeurs interpolées.**

De plus, la Figure 1.5 présente dans le diagramme force-pénétration une comparaison entre les pénétrations mesurées en se basant soit le signal brut de couleur, soit le signal interpolé. Dans le cas de la détection basée sur le signal brut, la pénétration détectée pour plusieurs clichés successifs reste la même. Cet effet est particulièrement marqué sur la partie la plus à droite des diagrammes, quand la pénétration est proche de la pénétration maximale, car la vitesse du marteau devient très faible. Nous préférons travailler avec les courbes obtenues en basant la détection sur le signal interpolé car elles se caractérisent par une unique valeur de pénétration maximale et par une unique valeur pour la force correspondante; ces deux valeurs étant utilisées dans la procédure d'estimation des paramètres du modèle (présentée en section 1.4). Par conséquent, toutes les mesures de pénétration présentées dans la suite du document ont été obtenues en basant la détection sur le signal de couleur interpolé.

### 1.2.3.2 Détection du début du contact

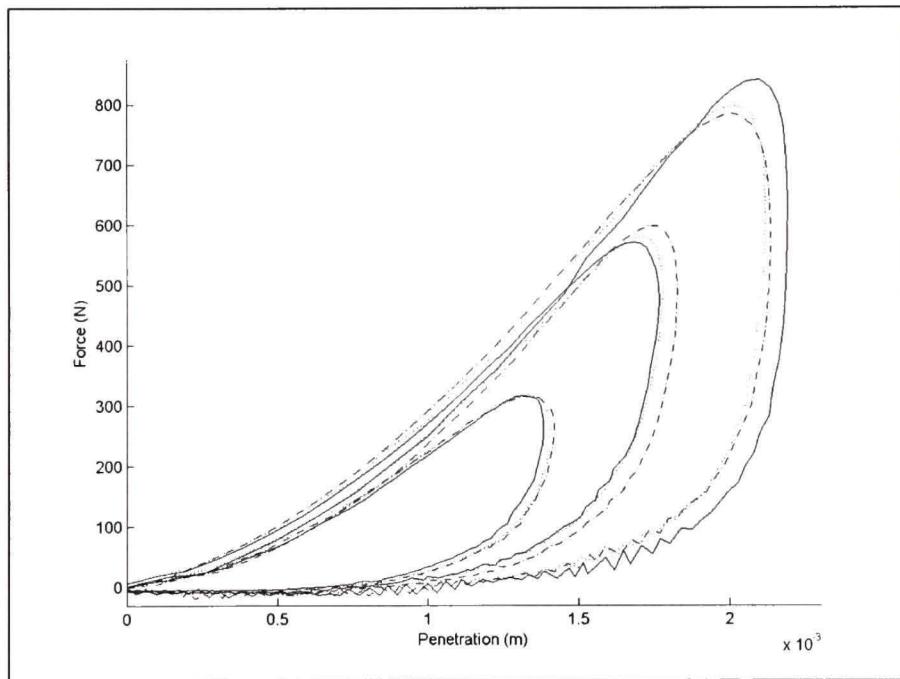
Le début du contact est classiquement déterminé à partir du signal de force : en théorie, la force est nulle avant le contact et le début du contact est défini à partir du signal échantillonné de force comme l'instant correspondant au dernier échantillon temporel qui a une valeur nulle. Dans la pratique, la force n'est pas rigoureusement nulle avant le contact car elle présente un certain bruit (et ce niveau de bruit augmente avec l'augmentation de la gamme utile du marteau) si bien que la détection du début du contact n'est pas très précise. La précision de la détection peut être améliorée d'une part en augmentant la fréquence d'échantillonnage et d'autre part en utilisant des techniques de traitement de signal. Trois techniques de traitement de signal proposées par (Humbert, 2002) dans le cadre d'une étude sur l'interaction marteau-corde du piano ont été testées. La première technique est, une technique de lissage (moyennage du signal avec un filtre à réponse impulsionnelle finie) qui permet de diminuer partiellement le bruit de mesure. La deuxième technique, basée sur l'utilisation d'un seuil de force relatif au niveau du bruit hors contact, et la troisième technique, basée sur l'utilisation d'un seuil de pente à l'origine du diagramme force-pénétration; donnent des résultats satisfaisants pour une vitesse initiale d'impact donnée et pour un matériau donné mais ne permettent pas d'améliorer les résultats pour l'ensemble des vitesses et des matériaux testés.

Au lieu d'utiliser le signal de force, nous avons testé une autre méthode visant à déterminer le début du contact à partir du signal de position. Le principe est de mesurer la position du marteau lorsqu'il est en contact statique (pas de charge) avec un point de la surface de la couche et de considérer que le début du contact dynamique a lieu à cette même position. Cependant, cette méthode aboutit dans nos tests à des résultats non reproductibles et à des écarts parfois peu réalistes par rapport aux résultats obtenus en utilisant le signal de force. Notre explication de l'échec de la méthode est que le contact dynamique n'a pas lieu exactement au même point de la surface de la couche que celui utilisé pour la mesure statique et que ce sont des variations locales d'épaisseur de la couche qui expliquent que la position du début de contact dynamique diffère de la position statique. En conséquence et malgré son

côté arbitraire, nous avons déterminé le début du contact en examinant visuellement les signaux de force.

#### 1.2.4 Résultats expérimentaux typiques (couche #1)

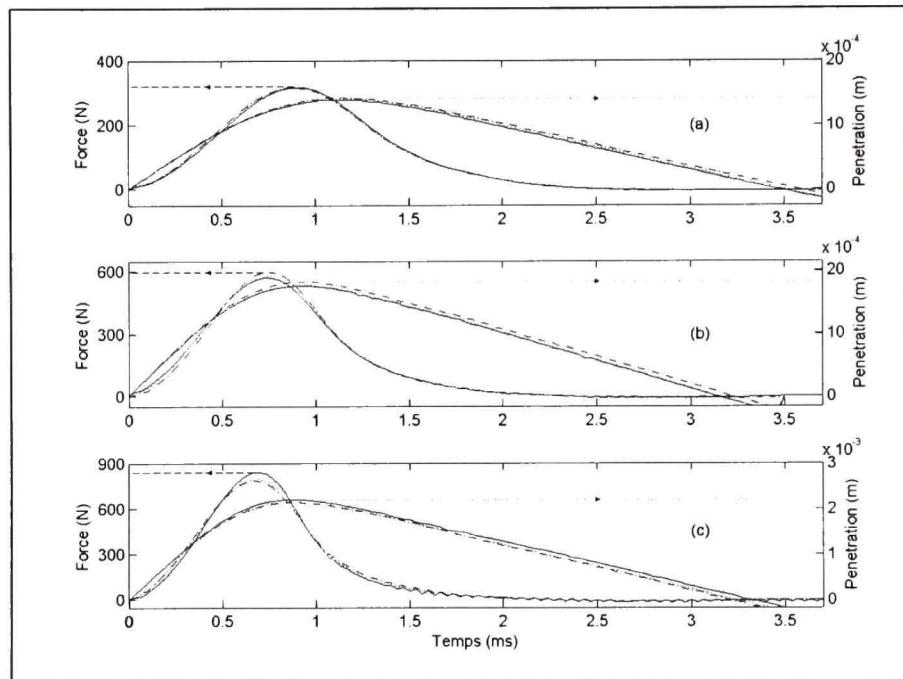
Dans cette section, les données expérimentales obtenues pour la couche #1 sont tracées en Figure 1.6 et Figure 1.7 afin d'en présenter les principales caractéristiques et de guider le choix d'un modèle capable de les reproduire (les caractéristiques des autres couches testées sont similaires, *Voir ANNEXE I*). La variabilité des données expérimentales n'est pas discutée ici, elle le sera à la section 1.5.1.



**Figure 1.6 Diagrammes force-pénétration expérimentaux de la couche #1 pour trois vitesses initiales d'impact :**  
 $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ;  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ;  $V_3=3,78 \text{ m/s}$  (de l'intérieur vers l'extérieur).  
**Trois essais individuels sont présentés pour chacune des trois vitesses initiales considérées.**

Les neuf courbes présentées sur la Figure 1.6 sont les diagrammes force-pénétration obtenus pour trois essais à chacune des trois vitesses initiales d'impact testées : 1,93 m/s; 2.98 m/s et 3.78 m/s. Les principales observations sont que :

- l'hystérésis est important : l'impact se caractérise par une boucle d'hystérésis (les courbes de chargement et de déchargement sont différentes) dont l'aire est proportionnelle aux pertes d'énergie pendant l'impact;
- les lois force-pénétration sont non-linéaires (à la fois pour le chargement et le déchargement);
- la pente du chargement tend à augmenter avec l'augmentation de la vitesse d'impact donc la couche se caractérise également par un comportement visqueux.



**Figure 1.7 Signaux temporels expérimentaux de la couche #1 pour trois vitesses initiales d'impact :**  
**(a) :  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b) :  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c) :  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ .**  
**Trois essais individuels sont présentés pour chacune des trois vitesses initiales considérées.**

Les mêmes données expérimentales que celles utilisées pour la Figure 1.6 sont présentées en Figure 1.7 en fonction du temps. Cette représentation temporelle des signaux permet d'observer que :

- le maximum de pénétration a lieu après le maximum de force, ce qui est caractéristique du comportement viscoélastique;

- la durée du contact (c'est-à-dire le temps où la force est positive) diminue avec l'augmentation de vitesse initiale, ce qui est caractéristique du comportement non linéaire;
- à la fin du contact (quand la force devient nulle), la pénétration n'est pas nulle. Pour la plus petite vitesse testée, la pénétration résiduelle s'annule complètement un certain temps après la fin de l'impact. Pour les vitesses supérieures et selon la couche testée, la pénétration résiduelle peut se composer au moins en partie d'une pénétration permanente qui ne s'annule pas (cette pénétration permanente est clairement visible sur certaines couches).

Les caractéristiques expérimentales obtenues pour les couches d'élastomère montrent que leur comportement sous impact est très similaire à celui du feutre de piano (*Voir* par exemple les courbes obtenues par (Stulov, 1994)). Par conséquent, la loi de contact choisie dans la section suivante pour modéliser le comportement sous impact des couches d'élastomère est une loi qui a déjà permis une bonne description du comportement des feutres de piano sous impact.

### 1.3 Caractérisation de couches d'élastomères sous impact - Partie modélisation

#### 1.3.1 Système continu d'équations

La force d'impact  $F(t)$  est décrite par deux équations continues temporelles :

$$\sum \text{Forces} = F(x, \dot{x}) = -m\ddot{x}, \quad (1.1)$$

$$F(x, \dot{x}) = kx^\alpha(1 + \mu\dot{x}), \quad (1.2)$$

où  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$  représentent respectivement la position du marteau, sa vitesse et son accélération.

L'équation (1.1) est la seconde loi de Newton appliquée au marteau considéré comme une masse en translation selon un axe horizontal. Dans la réalité, le mode de vibration correspondant à la fréquence de résonance du marteau (de l'ordre de 15 kHz) peut être excité et engendrer de rapides fluctuations de la force en fin de contact (en particulier pour la plus grande vitesse d'impact testée) mais l'amplitude des variations de force est plutôt faible.

L'équation (1.2) est la loi de contact viscoélastique non linéaire initialement formulée par (Hunt et Crossley, 1975). Elle a été utilisée notamment par (Marhefka et Orin, 1999) pour simuler des impacts sur des systèmes robotiques et par (Bensa, Gipouloux et Kronland-Martinet, 2005) pour modéliser le comportement du feutre dans l'interaction marteau-corde de piano. La force est la somme d'un terme élastique non linéaire  $kx^\alpha$  et d'un terme dissipatif non linéaire  $\mu kx^\alpha \dot{x}$ . Parce que le terme dissipatif est proportionnel au produit  $x^\alpha \dot{x}$ , sa valeur est nulle à  $t=0$ , ce qui constitue un avantage par rapport au modèle de Kelvin-Voigt caractérisé par un saut peu réaliste de la force à  $t=0$ .

### 1.3.2 Résolution numérique

Résoudre numériquement le système des équations (1.1) et (1.2) nécessite d'évaluer les quantités  $F(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$  aux instants discrets  $t=n \times \Delta t$  (avec  $n= [0 \ 1 \ 2 \ \dots \ N]$  l'indice de l'échantillon temporel et  $\Delta t$  l'inverse de la fréquence d'échantillonnage). On adopte la notation  $U_n=U(n \times \Delta t)$ . En approximant la vitesse  $\dot{x}(t)$  par un opérateur décentré du premier

ordre  $\dot{x}_n = \frac{1}{\Delta t} (x_n - x_{n-1}) + o(\Delta t)$  et l'accélération par un opérateur décentré du second ordre

$\ddot{x}_n = \frac{1}{(\Delta t)^2} (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}) + o(\Delta t)^2$ , le système est résolu de manière explicite à chaque

pas de temps en utilisant une boucle :

*Pour  $n=1$  à  $N$*

$$F_n = kx_n^\alpha \left( 1 + \mu \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \right)$$

$$x_{n+1} = -\frac{\Delta t^2}{m} F_n + 2x_n - x_{n-1}$$

*Fin*

avec les conditions initiales suivantes :

- à  $t=0$ ,  $x_0=0$  et  $F_0=0$ ;
- à  $t=\Delta t$ ,  $x_1=V_0 \times \Delta t$ .

Les résultats obtenus en utilisant cette résolution explicite approchée sont stables pour des fréquences d'échantillonnage suffisamment élevées. La précision de la solution numérique pourrait être améliorée en utilisant une formulation par variables d'état (du type  $y_1 = x$  et  $y_2 = \dot{y}_1$ ) et en appliquant un schéma numérique d'ordre plus élevé. Ceci n'a toutefois pas été entrepris car les résultats obtenus en utilisant la résolution explicite présentée ci-dessus sont déjà très similaires à ceux obtenus en utilisant la résolution plus complète de SOb (qui est présentée en section 2.3.2).

#### 1.4 Caractérisation de couches d'élastomères sous impact - Estimation des paramètres à partir des résultats expérimentaux et du modèle

Au total, le modèle nécessite seulement cinq paramètres d'entrée : deux paramètres pour caractériser l'impacteur (sa masse et sa vitesse initiale) et les trois paramètres ( $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $K$ ) de la loi de contact pour caractériser la couche.

La vitesse initiale d'impact  $V_0$  est déterminée expérimentalement pour chaque test à partir des clichés qui précèdent le contact par :

$$V_0 = \frac{x_{-10} - x_0}{10 \times \Delta t} \quad (1.3)$$

où  $x_{-10}$  est la position du marteau mesurée sur le 10<sup>ème</sup> cliché précédent le début contact (avec la même méthode d'interpolation du signal de couleur que celle présentée en section 1.2.3 et utilisée pendant le contact).

L'estimation des paramètres ( $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $k$ ) de la loi de contact est basée sur des comparaisons simulation-expérience pour les signaux de force et de pénétration. Tout d'abord, on utilise le fait que quand la pénétration atteint sa valeur maximale (le point le plus à droite sur un diagramme force-pénétration), la vitesse de pénétration devient nulle (tangente verticale sur un diagramme force-pénétration); l'équation (1.2) aboutit à la relation :

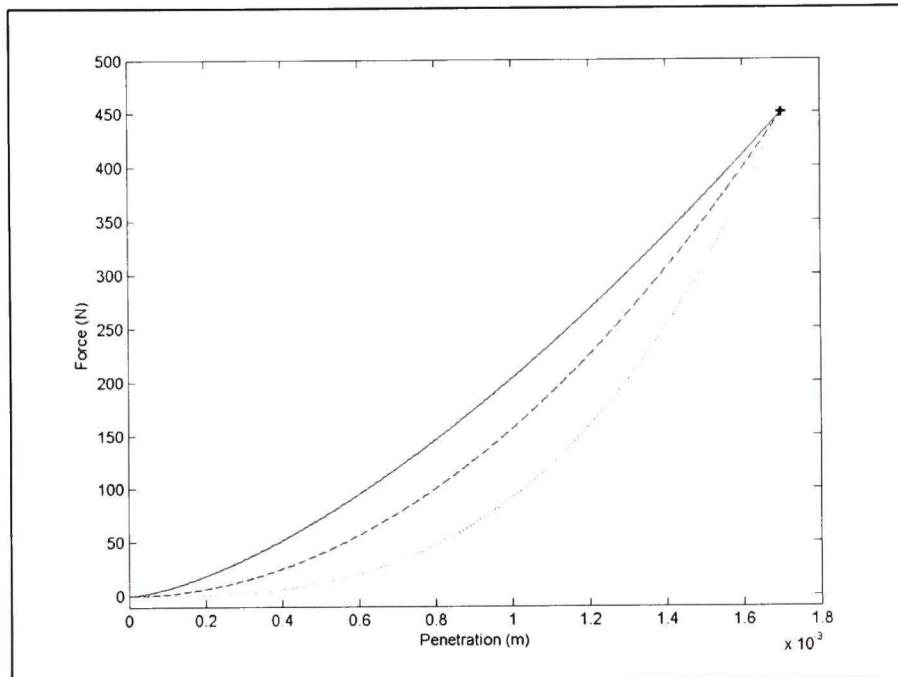
$$F(x_{\max}, 0) = k \cdot x_{\max}^{\alpha}. \quad (1.4)$$

Grâce à cette relation, l'estimation des trois paramètres peut se limiter à l'estimation deux paramètres indépendants. Nous avons choisi d'estimer les paramètres  $\alpha$  et  $\mu$  car leur rôle est bien défini et distinct :

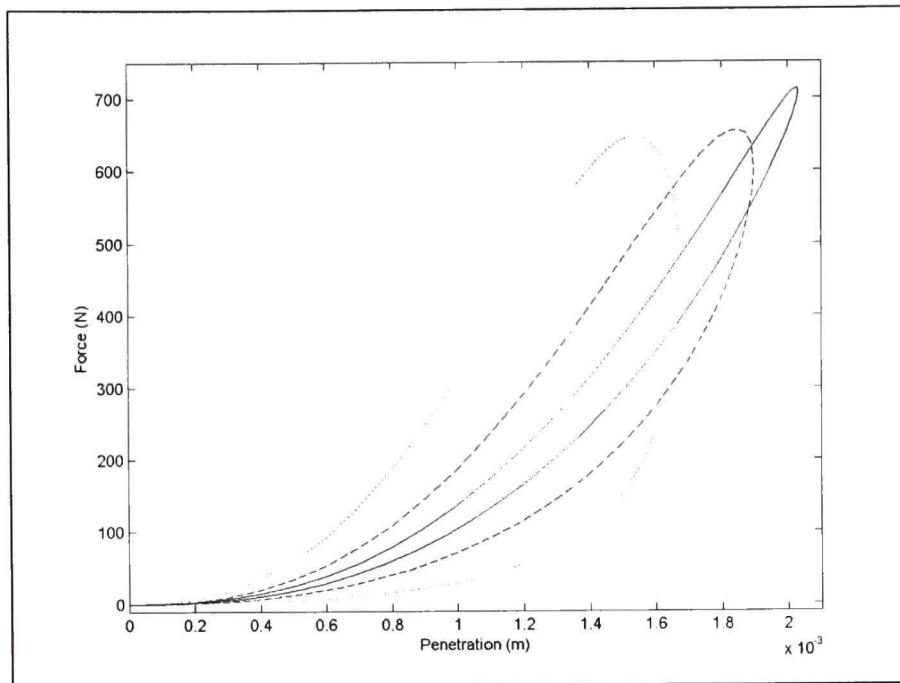
- la Figure 1.8, qui présente des courbes correspondant des chargements élastiques du type  $F(x) = kx^{\alpha}$  avec  $\alpha$  variable (et toutes ces courbes passent par le point de coordonnées  $(1,7 \times 10^{-3} \text{ m} ; 450 \text{ N})$ ), montre que le paramètre  $\alpha$  contrôle la non-linéarité de la partie

élastique de la force. Ces courbes correspondent à la limite des cycles force-pénétration quand les pertes deviennent nulles;

- la Figure 1.9 montre que le paramètre  $\mu$  contrôle l'hystéresis (la « largeur ») du cycle force-pénétration.



**Figure 1.8 Rôle du paramètre  $\alpha$  : diagrammes force-pénétration pour  $m=0.1$  kg,  $V_0=3$  m/s et trois valeurs de  $\alpha$  :  $\alpha=3/2$  (—);  $\alpha=2$  (---) et  $\alpha=3$  (…).**



**Figure 1.9 Rôle du paramètre  $\mu$  : diagrammes force-pénétration pour  $m=0.1$  kg,  $V_0=3$  m/s,  $\alpha=2,5$ ,  $k=1,776 \times 10^9$  N m $^{-\alpha}$  et trois valeurs de  $\mu$  :  $\mu=0,05$  (—);  $\mu=0,2$  (---);  $\mu=0,6$  (···).**

Finalement, l'estimation de  $\alpha$  et  $\mu$  à partir des signaux expérimentaux est réalisée en suivant la procédure itérative suivante :

- 1) Choix d'une valeur de  $\alpha$ ;
- 2) Mesure de la pénétration maximale  $x_{\max}$  et de la force correspondante  $F(x_{\max})$  pour le calcul de  $k$  vérifiant l'équation (1.4). A ce stade, le tracé de la courbe d'équation  $F(x) = kx^\alpha$  peut être superposé au cycle force-déformation expérimental afin de vérifier qu'elle situe « entre » les parties de chargement et de déchargement du cycle;
- 3) Choix d'une valeur de  $\mu$ ;
- 4) Résolution du modèle avec les paramètres  $\alpha$ ,  $k$  et  $\mu$ ;
- 5) Comparaison simulation-expérience : tracés superposés de  $F(t)$ ,  $x(t)$  et  $F(x)$ ;
- 6) Retour à l'étape 3 avec une nouvelle valeur de  $\mu$  ou retour à l'étape 1 avec une nouvelle valeur de  $\alpha$ .

Les résultats obtenus en utilisant cette procédure d'estimation (basée essentiellement sur des comparaisons des cycles force-pénétration) montrent que l'amélioration des résultats dans un

diagramme force-pénétration ne s'accompagne pas forcément d'une amélioration des signaux temporels de force et de pénétration. Étant donné que la méthode de réduction de bruit développée (*Voir* section 0.3.3) repose sur la prédiction temporelle de la force d'impact, l'estimation a été réalisée de manière à reproduire le mieux possible les signaux temporels de force (quitte à ce que les cycles force-pénétration soient moins bien reproduits).

D'autre part, les paramètres  $\alpha$ ,  $k$  et  $\mu$  pourraient être estimés en utilisant un algorithme tel que celui de Levenberg-Marquardt. Ceci n'a cependant pas été entrepris car les écarts non négligeables entre signaux simulés et mesurés sont essentiellement dus au fait que le modèle ne prend pas en compte la déformation résiduelle des élastomères, si bien qu'il faudrait avant tout améliorer le modèle de force avant d'utiliser une méthode plus évoluée pour l'estimation des paramètres.

## 1.5 Résultats

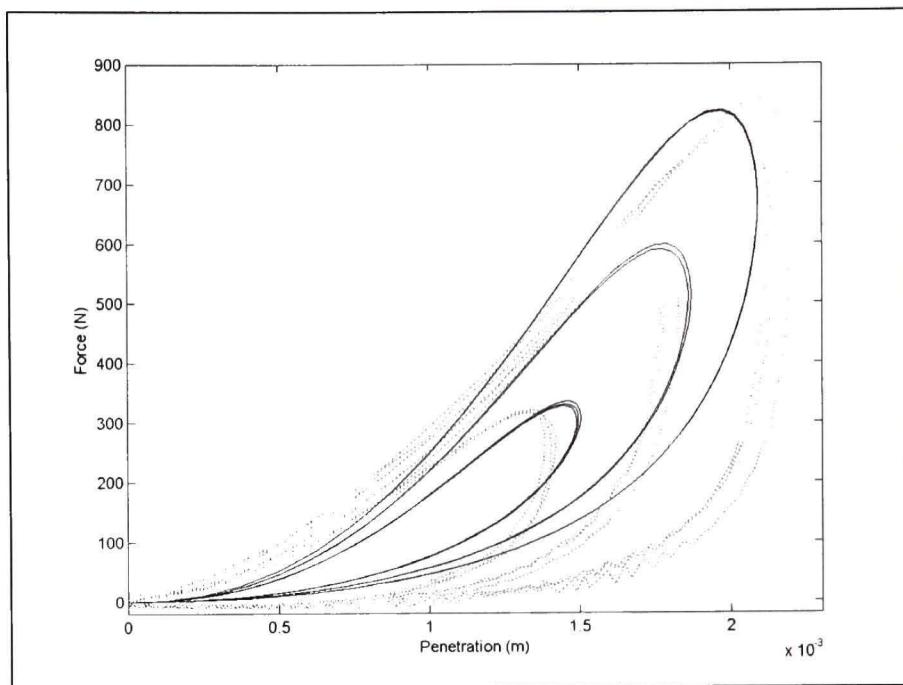
Les résultats sont présentés suivant trois sous-sections. La première sous-section est consacrée à l'étude de la variabilité des données expérimentales. La deuxième sous-section présente la méthode utilisée pour caractériser chaque couche par un jeu unique de paramètres  $\alpha$ ,  $k$  et  $\mu$ . La troisième sous-section présente les comparaisons entre les signaux expérimentaux et les signaux simulés à partir du jeu unique de paramètres  $\alpha$ ,  $k$  et  $\mu$ .

### 1.5.1 Variabilité des données expérimentales

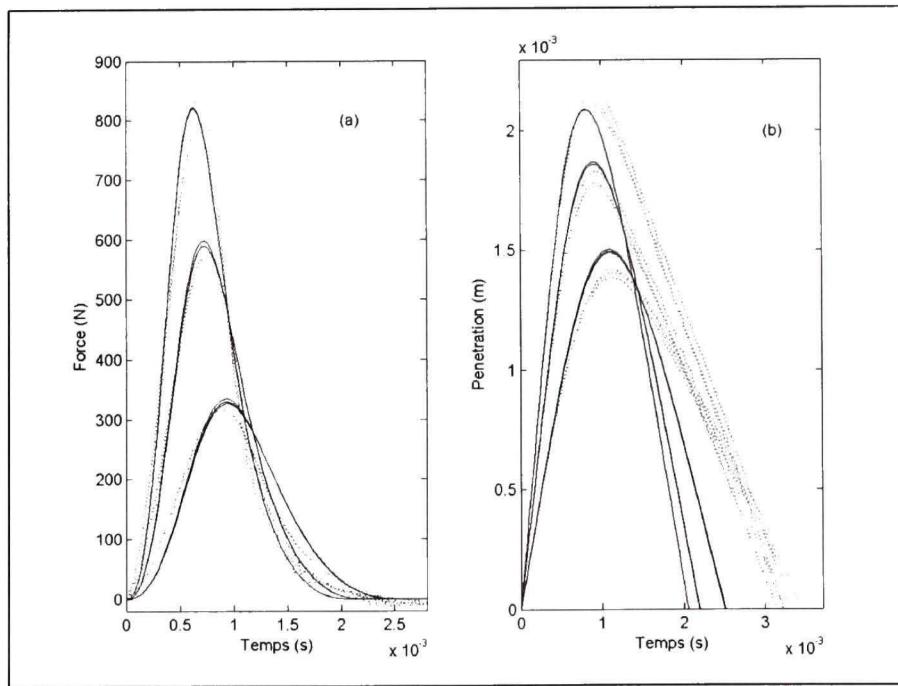
La variabilité des données expérimentales a été testée grâce à la répétition de trois essais pour chacune des trois vitesses d'impact testées ( $V_1=1,93$  m/s;  $V_2=2,98$  m/s;  $V_3=3,78$  m/s). Les courbes expérimentales pour la couche #1 sont présentées en pointillés aux Figure 1.10 et Figure 1.11 (les courbes pour les autres couches sont présentées en ANNEXE I). Pour chaque vitesse, on peut observer des variations des valeurs expérimentales des maxima de force et de pénétration. La variabilité expérimentale de la vitesse initiale d'impact ne permet pas

d'expliquer les variations des maxima de force et de pénétration. En effet, les courbes de simulation obtenues en prenant comme paramètre d'entrée la vitesse mesurée expérimentalement pour chaque essai (*Voir* section 1.4), alors que les autres paramètres ( $m$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $k$ ) ont une valeur unique pour les neuf essais (*Voir* section 1.5.2), présentent beaucoup moins de variations que les courbes expérimentales.. Ce résultat (qui est plutôt rassurant car le dispositif expérimental a été conçu dans le but d'obtenir des vitesses d'impact reproductibles) est confirmé par les faibles valeurs obtenues pour l'écart type de la vitesse : pour chacune des trois vitesses testées, l'écart type calculé sur les vingt-quatre essais (huit couches et trois essais par vitesse) n'excède jamais 3%.

Puisque la variabilité de la vitesse initiale n'est pas responsable des variations des maxima de force et pénétration, deux autres explications sont proposées. Tout d'abord, les variations de pénétration maximale peuvent être dues à l'incertitude liée à la détection du début du contact. Nous rappelons que l'instant  $t=0$  correspondant au début du contact est déterminé à partir du signal de force et qu'à  $t=0$  on considère que la pénétration est nulle ( $X(t)=x(t)-x(t=0)$ ); si bien qu'un choix différent de  $t=0$  résulte dans un diagramme force-pénétration à une **translation horizontale** des courbes obtenues. Ce phénomène a notamment été observé par Humbert dans des essais consacrés à la mesure des déformations du feutre dans l'interaction marteau-corde de piano et selon l'auteur (*Voir* (Humbert, 2002)), « Cela pourrait peut-être expliquer qu'aucune évolution nette de  $\alpha$  n'ait jamais pu être exhibée, alors qu'en théorie devrait être lié au rayon de courbure des marteaux, rayon qui diminue du grave vers l'aigu. ». Cependant, puisque ce phénomène n'explique pas les variations de  $F_{\max}$ , nous pensons finalement que la variabilité de nos données expérimentales est principalement causée par des variations locales d'épaisseur de la couche qui conduisent à des variations locales de ses propriétés physiques; et au final à un comportement différent.



**Figure 1.10 Couche #1 : variabilité des données expérimentales et comparaisons simulation-expérience des diagrammes F-x.**  
 — : simulations; .... : expériences.



**Figure 1.11 Couche #1 : variabilité des données expérimentales et comparaisons simulation-expérience temporelles.(a) :  $F(t)$ ; (b) :  $x(t)$ .** — : simulations; .... : expériences.

### 1.5.2 Paramètres uniques $\alpha, \mu, k$

En appliquant à chaque essai individuellement la procédure itérative décrite en section 1.4, on aboutit à des triplets de paramètres ( $\alpha, \mu, k$ ) différents pour chaque essai. Cependant, un des enjeux de la méthode est de caractériser une couche avec un unique jeu de paramètres et de tester si le modèle est capable de simuler son comportement sur toute la plage de vitesses initiales testées à partir de cet unique jeu de paramètres. En vue d'obtenir un triplet unique de paramètres ( $\alpha, \mu, k$ ), la procédure itérative est appliquée avec les trois spécificités suivantes : on choisit une valeur unique de  $\alpha$  pour les neuf essais, on calcule une valeur individuelle du paramètre  $k$  pour chaque essai puis on choisit une valeur unique de  $\mu$  pour les neuf essais. De la sorte, seul le paramètre  $k$  admet des variations et le Tableau 1.2 montre, pour chaque couche, les moyennes ( $\bar{k}_{v_1}$ ,  $\bar{k}_{v_2}$  et  $\bar{k}_{v_3}$ ) de  $k$  calculées sur les trois essais à la vitesse  $V_i$  ( $V_1=1,93$  m/s,  $V_2=2,98$  m/s et  $V_3=3,78$  m/s) ainsi que la moyenne  $\bar{k}_v$  et l'écart type  $\sigma_{k_v}$  de  $k$  sur l'ensemble des neuf essais. Étant donné qu'il n'existe pas de relation particulière entre la vitesse d'impact  $V_i$  testée et la valeur correspondante  $\bar{k}_{v_i}$ , on choisit finalement  $\bar{k}_v$  comme valeur unique du paramètre  $k$ . Les grandes valeurs obtenues pour l'écart type de  $\bar{k}_v$  (jusque 17,8 % pour la couche #2) sont dues au fait que la variabilité des signaux expérimentaux (*Voir* section 1.5.1) est maintenant rassemblée dans les variations de  $\bar{k}_v$ .

Tableau 1.2 Variations du paramètre k pour les huit couches testées

Numéro couche	$\bar{k}_{v_1}$	$\bar{k}_{v_2}$	$\bar{k}_{v_3}$	$\bar{k}_v$	$\pm \sigma_{k_v}$
1	9,740E+08	1,005E+09	8,507E+08	$9,432 \times 10^8$	$\pm 7,97 \%$
2	2,851E+09	4,286E+09	3,808E+09	$3,648 \times 10^9$	$\pm 17,84 \%$
3	9,909E+08	9,402E+08	8,120E+08	$9,143 \times 10^8$	$\pm 11,21 \%$
4	4,231E+17	4,860E+17	5,722E+17	$4,938 \times 10^{17}$	$\pm 14,26 \%$
5	2,030E+07	2,077E+07	2,061E+07	$2,056 \times 10^7$	$\pm 4,89 \%$
6	1,909E+07	1,887E+07	1,890E+07	$1,896 \times 10^7$	$\pm 3,42 \%$
7	9,581E+07	8,816E+07	1,004E+08	$9,478 \times 10^7$	$\pm 10,31 \%$
8	3,727E+09	3,045E+09	3,178E+09	$3,316 \times 10^9$	$\pm 9,94 \%$

Tableau 1.3 Paramètres uniques  $\alpha$ , k,  $\mu$ 

Numéro couche	Épaisseur mesurée (mm)	$\alpha$	k	$\mu$
1	$3,25 \pm 0,01$	2,3	$9,432 \times 10^8$	0,3
2	$2,95 \pm 0,01$	2,5	$3,648 \times 10^9$	0,3
3	$3,06 \pm 0,01$	2,2	$9,143 \times 10^8$	0,3
4	$3,65 \pm 0,01$	6	$4,938 \times 10^{17}$	0,1
5	$5,88 \pm 0,01$	1,8	$2,056 \times 10^7$	0,25
6	$6,06 \pm 0,01$	1,8	$1,896 \times 10^7$	0,25
7	$5,89 \pm 0,01$	2	$9,478 \times 10^7$	0,25
8	$6,25 \pm 0,01$	3	$3,316 \times 10^9$	0,05

### 1.5.3 Comparaisons finales simulation-expérience

À titre de validation de l'ensemble de la méthode, des comparaisons entre signaux simulés et signaux expérimentaux sont présentées pour la couche 1 aux Figure 1.10 et Figure 1.11 (les

courbes pour les autres couches sont présentées en ANNEXE I). La Figure 1.10 présente les diagrammes force-pénétration et la Figure 1.11 présente dans deux fenêtres distinctes les signaux temporels de force et de pénétration. Chaque fenêtre présente un total de 18 courbes : neufs courbes expérimentales (en trait pointillé) et neufs courbes de simulation (en trait plein). Les valeurs des paramètres d'entrée du modèle sont  $m=0.1$  kg et  $(\alpha, \mu, k)$  tels que définis dans le Tableau 1.3 si bien que seul le paramètre  $V_0$  prend une valeur différente pour chaque essai (égale à la valeur mesurée expérimentalement).

Une remarque générale est que l'on obtient de bonnes concordances pour les signaux temporels de force mais que la concordance est moins bonne pour les cycles force-déformation, en particulier pendant la phase de déchargement. Ceci est confirmé par les courbes temporelles de pénétration qui montrent que pendant la phase de déchargement, la pénétration simulée est inférieure à la pénétration mesurée. Cette différence s'explique par le fait que le modèle utilisé ne prend pas en compte la déformation résiduelle de la couche. En particulier pour la couche #4, le fait que le modèle ne prend pas en compte la déformation résiduelle aboutit à de grands écarts entre les signaux simulés et les signaux mesurés : expérimentalement, une déformation permanente est observée dès la plus faible vitesse testée; pour les essais à la plus grande vitesse testée, l'impact conduit de plus à une perforation de la couche.

Concernant les paramètres de contact, les valeurs du Tableau 1.3 montrent que les trois matériaux ayant une dureté Shore de 60 (couches #1 à #3 et #5 à #7) sont caractérisés, pour une épaisseur nominale donnée, par des valeurs distinctes de  $\alpha$  et des valeurs identiques de  $\mu$ . Le quatrième matériau ayant une dureté Shore de 40 (couches #4 et #8) se caractérise par des plus grandes valeurs de  $\alpha$  et des plus petites valeurs de  $\mu$ . Pour la plus grande épaisseur testée (couche #8), c'est le matériau qui permet de réduire le plus l'amplitude maximale la force d'impact.

Pour chacun des quatre matériaux testés, le paramètre  $\alpha$  diminue avec l'augmentation d'épaisseur mais il reste toujours supérieur à la valeur limite (3/2) de la loi de Hertz. On

s'attend à ce que cette valeur limite soit atteinte dans le cas de couches de grande épaisseur qui vérifient l'hypothèse de « demi-espace infini ».

## CHAPITRE 2

### MODÈLE DE PRÉDICTION DE LA FORCE D'IMPACT ET DE LA RÉPONSE D'UNE STRUCTURE COMPLEXE VIBRANTE

Dans la méthode de caractérisation des élastomères sous impact présentée au chapitre précédent, les couches d'élastomères étaient placés sur une surface immobile et indéformable. Dans le présent chapitre, on s'intéresse à la réduction du bruit d'impact qu'ils permettent d'obtenir lorsqu'ils sont ajoutés entre un impacteur et une structure complexe vibrante. En faisant l'hypothèse de linéarité entre la force d'impact, les vibrations de la structure et son rayonnement acoustique, l'objectif général est d'utiliser un modèle permettant de prédire l'effet de l'ajout de couche sur la force d'impact générée sur la structure.

Finalement, la modélisation de l'action d'un impacteur sur une structure vibrante nécessite la modélisation de plusieurs grandeurs physiques interdépendantes :

- le déplacement de l'impacteur, sa vitesse et son accélération;
- le déplacement de la structure au point d'impact, sa vitesse et son accélération;
- la force d'impact.

La loi de contact de Hunt-Crossley  $F(x, \dot{x}) = kx^\alpha(1 + \mu\dot{x})$  utilisée au Chapitre 1 pour modéliser la force d'interaction sur des couches d'élastomères impactées reste valable mais les variables  $x$  et  $\dot{x}$  représentent maintenant la pénétration relative et la vitesse relative entre l'impacteur et la structure. En raison de la non-linéarité de la force d'interaction, le système couplé ne peut pas en général être résolu analytiquement et des méthodes numériques doivent être utilisées.

Bien que nous cherchions un modèle d'impact le plus général possible, nous nous limitons à des configurations où l'impacteur peut être considéré comme une masse pure et où son rayonnement acoustique est négligeable devant celui de la structure impactée. Les structures complexes envisagées sont des structures de type corde, barre et plaque pour lesquelles le

bruit d'impact est majoritairement dû aux ondes de flexion. Ces ondes de flexion sont décrites linéairement par des équations aux dérivées partielles (EDP) en temps et en espace.

Ce chapitre est organisé en trois sections principales :

- la première section est une revue de littérature des méthodes de modélisation des vibrations de structures utilisées dans des études du bruit d'impact. Le modèle retenu est celui qui a été développé dans le cadre du projet européen The Sounding Object (SOb) dont l'objectif général est de simuler le son produit par des objets sous différents types d'excitations, en particulier l'impact (Rocchesso et Fontana, 2003);
- la deuxième section est consacrée à faire l'analogie entre le formalisme modal utilisé pour l'étude des vibrations de structures et la théorie modale utilisée dans SOb pour modéliser les vibrations d'une structure soumise à une force d'excitation quelconque;
- la troisième section présente le modèle d'impact complet issu de SOb pour décrire l'impact d'une masse sur une structure vibrante et sa résolution numérique. Finalement, la différence entre la théorie générale de SOb et la théorie utilisée dans l'implémentation sous Matlab (Avanzini et al., 2002) (*Voir* programmes `impact_modal.m` et `nlsheared.m`) du modèle est présentée et aboutit à des modifications des programmes originaux.

## 2.1 Revue de littérature

Il existe une quantité importante de travaux consacrés dans différents domaines à l'étude des impacts et la présente revue ne se veut en aucun cas exhaustive. L'objectif est plutôt de dresser un rapide inventaire des méthodes couramment utilisées pour la simulation du bruit d'impact, puis de donner quelques exemples d'application à des structures de type corde, barre et plaque.

Relativement peu d'études traitent l'ensemble du problème et les approches les plus complètes sont certainement celles développées en acoustique musicale pour reproduire physiquement le son d'instruments de musique.

Les méthodes temporelles de modélisation des vibrations de structures peuvent se classer dans deux grandes familles selon qu'elles utilisent une approche modale ou une autre approche. Les approches modales nécessitent de connaître les paramètres modaux de la structure (ses fréquences naturelles, ses amortissements et ses déformées modales) mais permettent de simplifier considérablement les calculs. Les autres approches ne nécessitent de connaître les paramètres modaux de la structure mais sont en général plus lourdes à mettre en œuvre et plus difficiles à résoudre.

### 2.1.1 Impact de cordes

Les différentes études menées pour simuler les sons produits par une corde de piano sont intéressantes car elles mettent en œuvre différentes méthodes de modélisation pour les vibrations de la corde et pour l'interaction entre le marteau et la corde. L'autre intérêt, tel que présenté à la section 1.1, est que le comportement sous impact des couches élastomères que nous avons testées est très similaire à celui du feutre de piano.

L'approche modale présentée par (Humbert, 2002) est basée sur les fonctions de Green (les réponses impulsionales) de la corde. La réponse de la corde est obtenue par le produit de convolution dans le domaine temporel entre la force et la fonction de Green. La fonction de Green est calculée par la méthode des résidus et s'exprime comme une somme de sinusoïdes amorties. Étant donné qu'une sinusoïde amortie correspond à la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande d'ordre 2, la position de la corde au point d'impact est obtenue en sommant les sorties du filtrage de la force par un banc de filtres résonnantes. Le modèle de la force de contact est celui de (Hunt et Crossley, 1975). Pour permettre un calcul explicite de la force, la vitesse de la structure au point de contact est obtenue à partir de la position par un schéma d'Euler explicite. Les comparaisons simulation-expérience montrent que le modèle permet une bonne prédiction des signaux de force et de compression du feutre.

D'autres méthodes qui ne nécessitent pas la connaissance des modes ont également été utilisées pour la simulation des sons de piano. (Chaigne et Askenfelt, 1994) utilisent la

méthode des différences finies (MDF) qui consiste à discréteriser en temps et en espace les EDP qui modélisent les vibrations de flexion de la corde. En utilisant des schémas centrés en espace et en temps pour les opérateurs de dérivées partielles, le déplacement à l'instant ( $n+1$ ) d'un point  $i$  de la corde peut finalement s'exprimer explicitement à partir des valeurs temporelles précédentes ( $n$ ,  $n-1$  et  $n-2$ ) et des valeurs spatiales ( $i-2$ ,  $i-1$ ,  $i+1$ ,  $i+2$ ) adjacentes au point  $i$  par une équation de récurrence très facile à résoudre. De plus, la résolution de la force de contact, modélisée par une loi de puissance du type  $F=Kx^p$  (avec  $x$  le déplacement relatif entre le marteau et la corde), s'intègre sans difficulté à l'ensemble du calcul par différences finies. Plus récemment, la MDF a également été utilisée par (Bensa, Gipouloux et Kronland-Martinet, 2005) pour résoudre la force de contact de type Hunt-Crossley. La principale différence par rapport à (Chaigne et Askenfelt, 1994) est la formulation en vitesse (au lieu du déplacement) qui permet de réduire l'ordre des dérivées temporelles de 2 à 1 et d'appliquer plus directement les conditions aux limites. L'autre avantage de cette formulation est que la force de contact dépend linéairement de la vitesse, ce qui permet une résolution numérique plus rapide.

Une autre méthode qui ne nécessite pas la connaissance des modes de la corde est celle des guides d'onde (« digital waveguides ») développée par Julius O. Smith III et décrite en détail dans (Smith III, 2008). Le principe de la méthode repose sur le fait bien connu que l'équation non amortie des ondes à une dimension peut être résolue par deux ondes qui se propagent suivant des directions opposées. La méthode des guides d'onde consiste à travailler directement sur ces ondes propagatives et chaque onde peut être modélisée simplement par une ligne de retard (delay line) implémentée sous forme de filtres. Cette approche a été mise en application par (Bensa et al., 2003) pour simuler les vibrations de cordes de piano. La propagation tout le long de la corde est modélisée sans perte et les pertes sont modélisées par la prise en compte de filtres aux extrémités de la corde. Cependant, le calcul de la force d'interaction n'est pas inclus dans cette étude : l'excitation choisie est une gaussienne centrée au point d'impact qui simule la distribution des vitesses initiales de la corde. D'autres développements spécifiques (*Voir* section 9.2 dans (Smith III, 2008)) ont été apportés en vue

de prendre en compte la force d'interaction. La limite est que ces développements sont lourds à mettre en œuvre et qu'ils ne sont valables que lorsque la corde est initialement au repos.

### 2.1.2 Impact de barres et de plaques

La méthode des différences finies (MDF) utilisée pour l'interaction corde-marteau a aussi été appliquée au cas de barres et de plaques impactées. Dans une étude par (Chaigne et Doutaut, 1997) consacrée à la modélisation numérique de xylophones, la MDF est utilisée pour discréteriser l'équation d'Euler-Bernoulli décrivant la flexion de la barre. Les auteurs montrent qu'en raison des conditions de stabilité imposées par les schémas de différences finies, une méthode explicite n'est pas valable. La méthode finalement utilisée est une méthode implicite, c.à.d. que la solution chaque pas de temps nécessite la résolution d'un système de plusieurs équation linéaires interdépendantes. La force de contact est modélisée par la loi de Hertz et, encore une fois, la formulation par différences finies permet une résolution sans difficulté. Des comparaisons simulation-expérience du signal temporel de force sont présentées pour deux têtes de maillet différentes : en caoutchouc et en bois. Dans le cas de la tête en caoutchouc, les durées de contact des signaux simulés sont systématiquement plus courtes que celles des signaux expérimentaux; ceci montre que la loi de contact pour le caoutchouc est plus compliquée que la loi de Hertz. Dans le cas de la tête en bois, les durées de contact simulées et expérimentales sont semblables mais les amplitudes simulées sont plus faibles (d'environ 30%) aux amplitudes simulées. Les auteurs expliquent cette différence par le manque de précision dû à la détermination expérimentale de la constante de Hertz; en réajustant ce paramètre les amplitudes deviennent comparables.

La MDF a également été appliquée à des plaques impactées dans une étude très complète du bruit d'impact qui prend en compte le couplage vibro-acoustique (*Voir* (Lambourg, 1997), (Chaigne et Lambourg, 2001) et (Lambourg, Chaigne et Matignon, 2001)). L'originalité du modèle réside dans la prise en compte de trois types d'amortissements distincts pour les vibrations de la plaque (viscoélasticité, rayonnement acoustique et thermoélasticité). Les termes d'amortissement sont approximés par des schémas décentrés, ce qui permet une

résolution numérique explicite du problème. La force d'impact est modélisée par la loi de Hertz et sa résolution numérique s'intègre facilement dans l'ensemble de la résolution. A titre de validation, les signaux temporels de simulation de la force sont comparés à ceux obtenus par (McMillan, 1992) par une méthode différente. La méthode utilisée par McMillan est basée sur les fonctions de Green de la plaque au point d'impact et la force est calculée en linéarisant entre deux instants discrets consécutifs la loi de Hertz. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont très similaires.

Une approche modale a également été utilisée par (Trocaz, Woodcock et Laville, 2000) pour modéliser l'impact inélastique d'une plaque en aluminium par une bille en acier. La plaque étant en appuis simples suivant tous ses cotés, les modes peuvent s'exprimer analytiquement et le déplacement temporel de la structure est obtenu par convolution du signal de force avec la réponse impulsionnelle de la structure. La force d'impact est décrite par trois phases successives : (1) phase de déformations élastiques selon la loi de Hertz; (2) phase de déformation purement plastique; (3) phase de déformations élastiques pour le déchargement. La force d'impact est résolue numériquement par la méthode de Newton-Raphson. Le rayonnement acoustique est calculé en utilisant l'intégrale de Rayleigh. Le modèle a été validé en comparant les signaux de pression simulés et expérimentaux pour plusieurs points entourant la structure. Les résultats mettent en évidence que le rayonnement acoustique de la plaque fait intervenir deux mécanismes différents de génération de bruit. Le premier mécanisme est dû à la déformation locale de la plaque dans la zone de contact et s'accompagne d'un bref pic de pression. Le second mécanisme est dû à la déformation propagée dans toute la plaque par les ondes de flexion; il correspond à la partie pseudo-permanente du bruit. Ces mécanismes de génération de bruit avaient également été également observés et simulés par (Akay et Latcha, 1983) dans l'étude d'une plaque circulaire en acier impactée par une bille en acrylique. Cependant cette étude n'inclut pas le calcul de la force d'impact (la force est approximée par une demi-période d'un sinus au carré).

Nous terminons cette revue par le modèle qui a été retenu : il s'agit d'un modèle modal développé dans le cadre du projet européen « The Sounding Object » (Rocchesso et Fontana,

2003) et que nous désignerons dans la suite par son acronyme : SOb. Le but du projet SOb est de modéliser le son produit par des objets lorsqu'ils sont soumis à différents types d'interactions (notamment l'impact et le frottement). Nous avons choisi ce modèle car :

- il utilise une approche physique (par opposition aux modèles de simulation orientés « signaux » plus conventionnellement utilisés en synthèse sonore dont le but est de reproduire des signaux acoustiques, sans forcément utiliser d'approche physique);
- l'approche modale utilisée le rend applicable à un grand nombre de structures;
- il utilise comme loi de contact la loi de Hunt-Crossley que nous avons utilisée pour modéliser l'impact sur des élastomères;
- les sources sont libres (licence GNU), si bien que les programmes peuvent facilement être téléchargés (sur [www.soundobject.org](http://www.soundobject.org)) et modifiés selon nos besoins.

Un autre avantage du modèle de SOb est qu'il permet de traiter le cas général de l'impact entre deux structures vibrantes. La théorie de ce modèle est présentée dans les deux sections suivantes.

## 2.2 SOb : modèle modal des vibrations de structures

L'ensemble de la théorie du modèle SOb est présentée dans un ouvrage de référence (Rocchesso et Fontana, 2003). Le modèle utilise une approche modale qui consiste à considérer chaque structure comme un ensemble de résonateurs modaux. Nous commencerons donc par un rappel du formalisme modal puis nous présenterons la formulation utilisée dans le modèle SOb afin de faire l'analogie entre ces deux formulations (deux notations spécifiques sont utilisées dans les deux sous-sections suivantes de manière à respecter les notations classiquement utilisées pour chacune des deux formulations).

### 2.2.1 Formalisme de l'analyse modale

Les concepts généraux rappelés ci-dessous sont décrits dans plusieurs ouvrages de référence consacrés à l'analyse modale. On pourra se référer notamment à (Ewins, 2000) (en anglais) et à (Thomas et Laville, 2005) (en français).

Dans l'analyse par la méthode des éléments finis (MEF) des vibrations des structures continues, l'approche classique consiste à discréteriser la structure en un ensemble de N masses discrètes liées entre elles par des raideurs et des amortisseurs; on parle alors d'un système discret à N nœuds, ou à N degrés de liberté (DDL). Dans le cas des vibrations en flexion d'une structure de type poutre, les déformations n'ont lieu que suivant la direction z et le système obtenu peut se mettre sous la forme :

$$M\ddot{Z}(t) + C\dot{Z}(t) + KZ(t) = F_{ext}(t) \quad (2.1)$$

où M, C et K sont des matrices (de taille  $N \times N$ ) représentant respectivement la masse, l'amortissement et la raideur; Z représente le vecteur des déformations des N DDL (taille  $N \times 1$ ) et  $F_{ext}$  le vecteur des forces extérieures appliquées aux N DDL (taille  $N \times 1$ ).

Une caractéristique du système est que les N équations obtenues sont couplées; ce couplage se traduit par des matrices K et C non diagonales. La théorie de l'analyse modale montre que généralement il est possible de transformer le système de N équations couplées en un système de N équations découplées qui peuvent être résolues indépendamment. Pour ce faire, l'hypothèse est que la solution continue  $Z(x,t)$  est à variables séparables, c'est-à-dire qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$Z(x,t) = \phi(x)Q(t)$$

et pour un système discret suivant x, la relation correspondante est :

$$Z(x_n, t) = \phi Q(t). \quad (2.2)$$

Les colonnes de la matrice  $\phi$  sont des vecteurs propres de M et K et correspondent physiquement aux déformées modales de la structure. Les nouvelles variables Q(t) sont souvent appelées coefficients de participation modale, ou plus simplement coordonnées modales.

En substituant l'équation (2.2) dans (2.1) et en pré-multipliant les deux membres par  $\phi^t$ , on obtient :

$$\phi^t M \phi \ddot{Q}(t) + \phi^t C \phi \dot{Q}(t) + \phi^t K \phi Q(t) = \phi^t F_{ext}(t). \quad (2.3)$$

Les matrices de masse modale  $m_r$  et de raideur modale  $k_r$  sont définies par :

$$m_r = \phi^t M \phi;$$

$$k_r = \phi^t K \phi.$$

Grâce à l'orthogonalité des modes propres, les matrices  $m_r$  et  $k_r$  obtenues sont diagonales. De plus, en normalisant les déformées modales par rapport à une masse modale unitaire, on obtient :

$$m_r = \phi^t M \phi = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$k_r = \phi^t K \phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & (0) \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \omega_3^2 & \\ (0) & & & \omega_4^2 \\ & & & & \omega_5^2 \end{bmatrix},$$

où les termes  $\omega_i$  représentent les pulsations de résonnance.

Le terme  $\phi^t C \phi$  n'étant pas diagonal en général, on a recours à l'hypothèse « d'amortissement proportionnel » qui suppose que  $C$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de  $M$  et de  $K$  :  $C = \alpha M + \beta K$ . Finalement, en introduisant  $\zeta_k = \frac{\alpha + \beta \omega_k^2}{2\omega_k}$ , on aboutit au système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_N(t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} + \Omega^2 \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} = \phi^t F_{ext}(t), \quad (2.4)$$

avec :

$$G = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\zeta_N\omega_N \end{bmatrix},$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas d'une excitation au  $k^{\text{ième}}$  DDL de la structure, uniquement la  $k^{\text{ième}}$  composante du vecteur des forces est non-nulle, si bien que :

$$\phi^t F_{ext}(t) = \phi^t(:,k) \times f_{ext}(t) \quad (2.5)$$

où  $\phi^t(:,k)$  représente la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $\phi$  et  $f_{ext}(t)$  est un scalaire.

Remarque : dans la théorie,  $\phi$  est souvent présentée comme une matrice carrée de taille  $(N_{\text{DDL}} \times N_{\text{DDL}})$  car ceci permet le calcul de son inverse  $\phi^{-1}$ . Dans la pratique, la condition est d'avoir un nombre de DDL supérieur ou égal au nombre de modes cherchés, si bien que  $\phi$  est de taille  $(N_{\text{DDL}} \times N_{\text{modes}})$ .

### 2.2.2 Théorie modale du modèle SOb

Nous rappelons succinctement la théorie modale présentée au chapitre 8 de (Rocchesso et Fontana, 2003) pour modéliser les vibrations d'une structure. L'approche modale utilisée consiste à représenter chaque mode (indice  $i$ ) de la structure par un oscillateur du second ordre du type :

$$\ddot{q}_i(t) + g_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{1}{m_i} F_{ext}(t), \quad (2.6)$$

Pour prendre en compte plusieurs modes distincts, il suffit d'ajouter des équations identiques à (2.6) et le système obtenu peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_N(t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} + \Omega^2 \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_1 \\ \vdots \\ 1/m_N \end{bmatrix} F_{ext}(t), \quad (2.7)$$

avec :

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_N \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

En notant  $T = \{t_{jl}\}$  la matrice de transformation de l'espace physique à l'espace modal, le déplacement physique et la vitesse en un point  $j$  de la structure sont donnés respectivement par :

$$x_j = \sum_{l=1}^N t_{jl} q_l(t), \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_j = \sum_{l=1}^N t_{jl} \dot{q}_l(t). \quad (2.11)$$

Dans la terminologie de SOb, les quantités  $m_i$  sont appelées masses modales et les quantités  $1/m_i$  sont appelées les « poids modaux ». On remarque que les poids modaux permettent de contrôler la force qui excite chaque oscillateur.

Par analogie avec le système d'équations (2.4), on trouve que pour modéliser avec SOb une excitation localisée au  $k^{\text{ième}}$  DDL de la structure :

- chaque terme  $g_i$  de la matrice d'amortissement doit vérifier  $g_i = 2\zeta_i\omega_i$  ;
- la matrice de transformation  $T$  doit être égale à  $\phi$  (avec  $\phi$  la matrice des modes propres **normalisés pour une masse modale unitaire**);
- le vecteur des poids modaux doit être égal à la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $\phi^t$  :

$$\begin{bmatrix} 1/m_1 \\ \vdots \\ 1/m_N \end{bmatrix} = \phi^t(:,k) ; \quad (2.12)$$

## 2.3 SOb : modèle d'impact d'une masse sur une structure vibrante

### 2.3.1 Modèle complet continu SOb

Pour modéliser l'impact dû à l'interaction entre un impacteur et une structure décrite par les équations (2.7) à (2.11), il faut également modéliser la dynamique de l'impacteur et la force de contact générée. La théorie de SOb traite le cas général de l'impact entre deux structures vibrantes (*Voir* dans (Rocchesso et Fontana, 2003) le système d'équations continues (8.14) page 149). En considérant l'impacteur comme une masse pure  $m_h$  en translation et en lui appliquant la loi de Newton, on obtient :  $\sum \text{Forces} = -m_h \ddot{x}_h$  avec  $x_h$  la position de l'impacteur. En l'absence d'autres forces extérieures que la force de contact décrite par le modèle de Hunt-Crossley (présenté en section 1.3.1), le système complet d'équations continues obtenu est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_N(t) \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} + \Omega^2 \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_1 \\ \vdots \\ 1/m_N \end{bmatrix} F_{ext}(t) , \\ X = x_j - x_h = \sum_{l=1}^N t_{jl} q_l(t) - x_h(t) , \\ \dot{X} = \dot{x}_j - \dot{x}_h = \sum_{l=1}^N t_{jl} \dot{q}_l(t) - \dot{x}_h(t) , \\ \sum \text{Forces} = F(X, \dot{X}) = -m_h \ddot{x}_h(t) , \\ F(X(t), \dot{X}(t)) = \begin{cases} kX^\alpha(1 + \mu\dot{X}) & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases} . \end{array} \right. \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Résolution numérique

Nous rappelons seulement le principe de la méthode de résolution numérique, celle-ci étant présentée en détail dans le chapitre 8 de (Rocchesso et Fontana, 2003). En appliquant la

transformation bilinéaire  $s = 2F_s \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  au système (2.13), le système discrétisé en temps

obtenu (*Voir* pp.143-144 dans (Rocchesso et Fontana, 2003)) apparaît comme un banc de filtres résonnants d'ordre deux, chaque filtre représentant un mode spécifique de la structure. A cause de la non-linéarité de l'interaction entre l'impacteur et la structure, un problème apparaît dans la résolution du système complet (2.13) : à chaque pas de temps, les trois variables (position de la structure au point d'impact, position de l'impacteur et force d'impact) sont interdépendantes. La « méthode K » développée par (Borin, De Poli et Roccheso, 2000) permet de résoudre ce problème de manière efficace et précise. Finalement, l'implémentation de la méthode K est réalisée en appliquant la méthode itérative de Newton-Raphson (*Voir* section 8.A dans (Rocchesso et Fontana, 2003)). Les résultats obtenus montrent que le nombre d'itérations reste toujours inférieur à dix si bien que la méthode peut facilement être implémentée en temps réel.

Le modèle d'impact SOb a fait l'objet de deux implémentations numériques :

- une implémentation, sous forme de programmes Matlab (Avanzini et al., 2002), dans laquelle l'impacteur est considéré comme une masse pure (et la structure comme un ensemble de résonateurs modaux);
- une implémentation « temps réel » plus complète sous forme de modules Pure-data dans laquelle chacune des deux structures est décrite par un ensemble de résonateurs modaux.

Dans notre cas, étant donné que d'une part l'aspect temps réel n'est pas une priorité et que d'autre part notre marteau d'impact peut être approximé par une masse pure, nous avons choisi d'utiliser l'implémentation Matlab.

### 2.3.3 Modifications de `impact_modal.m`

L'implémentation sous Matlab utilise deux programmes : le programme principal `impact_modal.m` et le programme `nlsheared.m` pour le calcul de la force de contact avec la méthode de Newton-Raphson. Cependant, la théorie utilisée dans ces programmes (*Voir* (Avanzini et Roccheso, 2001a) et (Avanzini et Roccheso, 2001b)) est légèrement différente de la théorie générale de SOb (*Voir* section précédente). La différence est que le changement de base permettant de passer de l'espace modal à l'espace physique n'est pas inclus : la

pénétration relative  $X$  est calculée avec  $X = \sum_{l=1}^N q_l(t) - x_h$  au lieu de

$$X = x_j - x_h = \sum_{l=1}^N t_{jl} q_l(t) - x_h, \text{ si bien que cette approche est moins physique.}$$

Par conséquent, une première modification a été apportée au programme original `impact_modal.m` afin de calculer la pénétration relative avec  $X = x_j - x_h = \sum_{l=1}^N t_{jl} q_l(t) - x_h$ ; le programme `impact_modal_jpa1.m` qui intègre cette modification est présenté en ANNEXE II.

Une seconde modification a été apportée afin de prendre en compte le mouvement d'ensemble de la structure (translation) : elle consiste à considérer un terme additionnel de « masse pure » pour la structure. Cette modification est justifiée par le fait que les conditions aux limites de la structure envisagée pour l'application sont libres. Le programme `impact_modal_jpa2.m` qui intègre ces deux modifications est présenté en ANNEXE III.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie issue du modèle SOb utilisée pour modéliser l'impact d'une masse pure sur une structure vibrante dont les vibrations sont régies par de la flexion. Ce modèle sera utilisé au chapitre suivant pour modéliser le cas d'une barre de chenille de motoneige soumise à la chute d'un marteau d'impact.

## CHAPITRE 3

### APPLICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODE DE RÉDUCTION DU BRUIT D'IMPACT SUR UNE BARRE DE CHENILLE DE MOTONEIGE

L'objectif de ce chapitre est de valider l'ensemble de la méthode développée en l'appliquant au cas expérimental de la réduction de bruit d'une barre de chenille de motoneige impactée par ajout d'une couche mince d'élastomère dans la zone d'impact. La démarche consiste dans un premier temps à mettre en œuvre la méthode sur la barre (sections 3.1 et 3.2) et dans un deuxième temps à valider la méthode (section 3.3).

La mise en œuvre de la méthode pour la barre de chenille de motoneige comprend deux étapes. La première étape est la mesure SANS couche d'élastomère de la force générée sur la barre par l'action d'un impacteur à différentes vitesses initiales d'impact. La deuxième étape consiste à appliquer le modèle d'impact sur une structure vibrante (présenté au Chapitre 2) au cas des impacts sur la barre dans la configuration AVEC élastomère. Ceci nécessite en particulier de définir les valeurs d'entrée des paramètres qui caractérisent chacun des trois éléments modélisés : l'impacteur, la couche d'élastomère et la barre de chenille :

- pour caractériser l'impacteur, les deux paramètres d'entrée sont sa masse (0,1 kg) et sa vitesse initiale d'impact : les mêmes vitesses de référence que celles testées au Chapitre 1 pour la caractérisation des élastomères sont utilisées (1,93 m/s ; 2,98 m/s et 3,78 m/s);
- pour caractériser la couche d'élastomère, les valeurs des trois paramètres d'entrée ( $\alpha$ ,  $k$ ,  $\mu$ ) sont celles qui ont été déterminées au Chapitre 1 par la méthode de caractérisation (ces valeurs sont présentées dans le Tableau 1.3);
- pour caractériser la barre de chenille, la méthode consiste à déterminer expérimentalement la valeur de ses paramètres modaux grâce à l'analyse modale expérimentale (section 3.2).

La démarche de validation utilisée (section 3.3) comprend les trois étapes principales décrites ci-dessous :

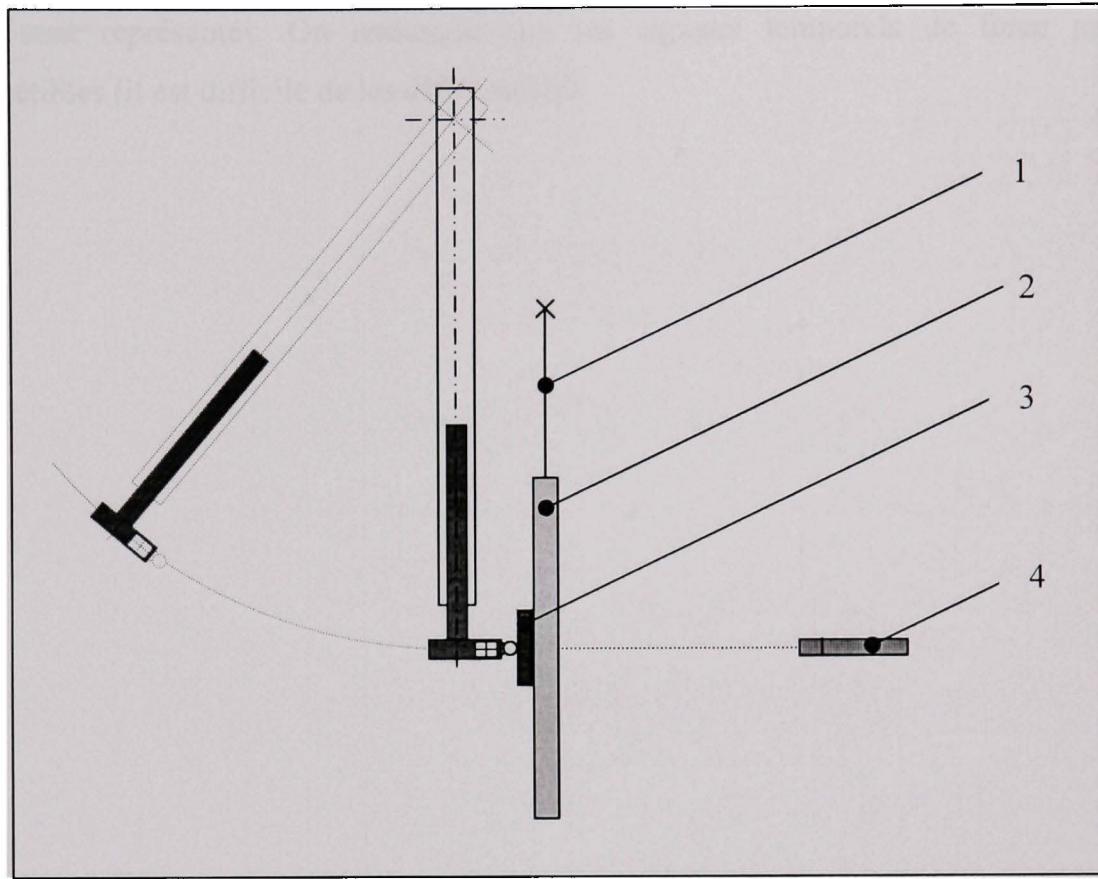
- 1) La première étape est la validation expérimentale de l'hypothèse de linéarité (entre la force, les vibrations et le rayonnement acoustique) par des comparaisons entre les réductions des spectres de force et les réductions des spectres de bruit permises par l'ajout de la couche d'élastomère;
- 2) La deuxième étape est la comparaison, pour le cas AVEC élastomère, entre les signaux temporels de force simulés et les signaux mesurés;
- 3) La troisième étape est la comparaison, pour le cas AVEC élastomère, entre les spectres fréquentiels de force simulés et les spectres mesurés.

### **3.1 Cas testés et résultats expérimentaux SANS couche d'élastomère**

#### **3.1.1 Dispositif expérimental et cas testés**

Le dispositif expérimental utilisé est schématisé à la Figure 3.1. L'impact est réalisé de la même manière que pour la caractérisation des élastomères : chute d'un marteau d'impact monté dans un bras en rotation. La barre de motoneige est suspendue verticalement avec du fil de pêche de manière à réaliser des conditions aux limites libres. Elle est soumise à un impact en son milieu, du côté de la face intérieure de la chenille. Le marteau est arrêté manuellement au cours du rebond qui suit l'impact pour l'empêcher de refrapper la barre.

La mise en œuvre de la méthode de réduction de bruit nécessite seulement de mesurer la force d'impact sur la structure dans la configuration SANS couche d'élastomère. Cependant, dans le but de valider expérimentalement les résultats de la méthode, des mesures de la force dans la configuration AVEC couche d'élastomère sont aussi réalisées. Quatre couches d'élastomère différentes (couches #3, 4, 7 et 8 du Tableau 1.1) sont testées; elles correspondent à deux matériaux (SB60 et PGUM) et deux épaisseurs (2/16" et 4/16"). De plus, afin de valider l'hypothèse de linéarité entre réduction des spectres de force et réduction des spectres de bruit, la pression acoustique est également mesurée : un microphone est placé dans l'axe de l'impact, du côté de la face extérieure de la chenille, à environ 0,5 m du point d'impact.



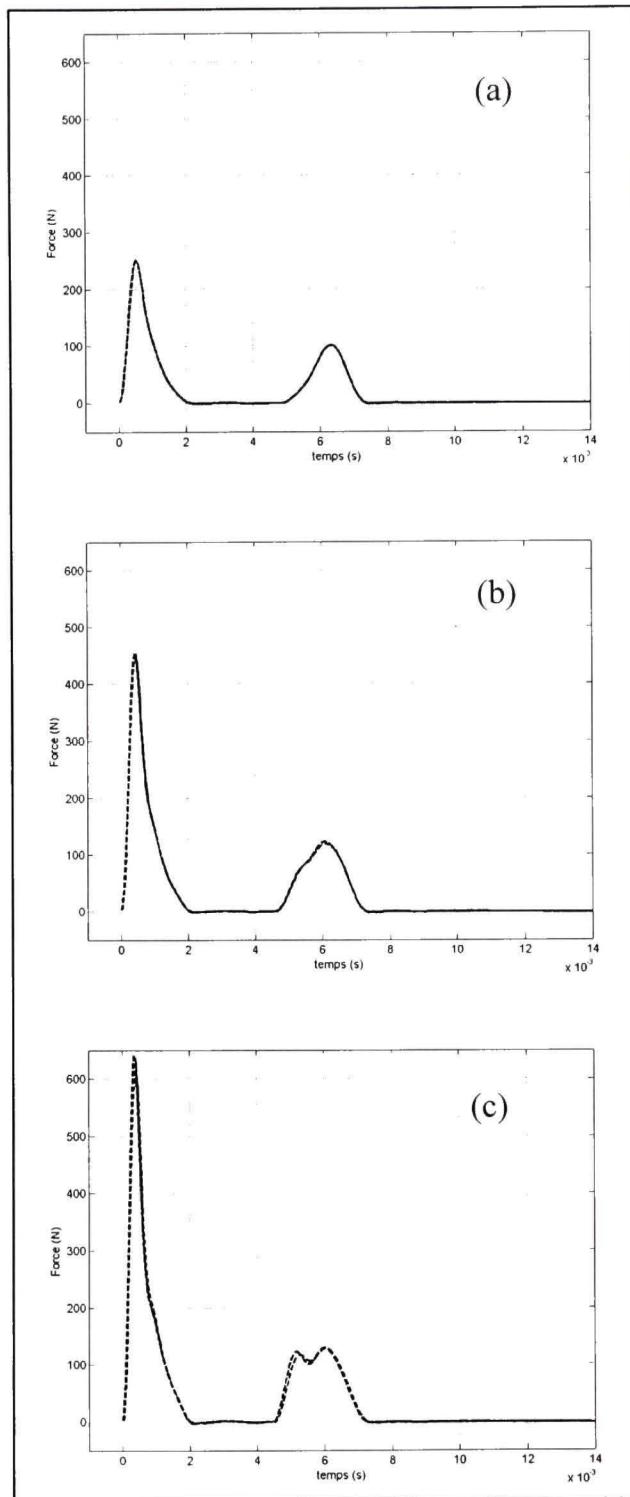
**Figure 3.1 Dispositif expérimental : (1) fil de pêche; (2) barre de chenille de motoneige; (3) couche d'élastomère; (4) microphone.**

L'acquisition temporelle de la force d'impact et de la pression acoustique est réalisée avec le système Pulse de B&K à une fréquence d'échantillonnage de 65536 Hz.

### 3.1.2 Signaux temporels expérimentaux de force SANS couche d'élastomère

Les signaux temporels de force d'impact SANS élastomère sont présentés à la Figure 3.2 pour les trois vitesses initiales d'impact testées. **L'impact se caractérise par une perte et une reprise de contact** : les signaux de force sont composés d'un premier pic de force, d'une phase où la force est nulle, puis d'un second pic de plus faible amplitude dû à la réaction de la structure mise en vibration par le premier pic de force.

Afin de juger de la variabilité expérimentale, trois essais différents pour chacune des vitesses testées sont représentés. On remarque que les signaux temporels de force sont très reproductibles (il est difficile de les différencier).



**Figure 3.2** Signaux temporels expérimentaux de force SANS élastomère pour trois vitesses initiales d'impact.  
(a) :  $V_1=1,93$  m/s; (b) :  $V_2=2,98$  m/s; (c) :  $V_3=3,78$  m/s.

### 3.2 Analyse modale expérimentale (AME) de la structure

Cette section décrit les détails de l'analyse modale expérimentale (AME) de la barre de motoneige; le but est de déterminer expérimentalement les paramètres modaux de la structure, à savoir :

- ses fréquences de résonance  $\omega_r$ ;
- ses amortissements modaux  $\zeta_r$ ;
- ses déformées modales  $\phi_r$  (modes normalisés par rapport à une masse modale unitaire).

Ces paramètres expérimentaux seront ensuite pris comme valeurs d'entrée des paramètres du modèle pour décrire la structure.

La base de l'AME est la mesure des fonctions de réponse en fréquence (FRF) qui représentent des fonctions de transfert, dans le domaine de Fourier, entre la réponse en un point de la structure et la force appliquée au point d'excitation.

Sur le plan pratique, l'AME consiste à :

- exciter la structure en un point et mesurer la force dans le domaine temporel;
- mesurer dans le domaine temporel la réponse en un point de la structure;
- calculer par FFT les spectres fréquentiels de la force et de la réponse;
- calculer des fonctions de transfert du type :  $FRF_{i,j} = \text{Réponse en } j / \text{Excitation en } i$ .

#### 3.2.1 Hypothèses générales

##### 3.2.1.1 Hypothèse SDOF

Lorsque le couplage entre les modes est faible (c'est-à-dire que les « pics » correspondant à chaque mode sont suffisamment espacés en fréquence), on peut traiter chaque mode séparément en considérant qu'autour de la fréquence du mode, toute la réponse de la structure provient de cet unique mode : c'est l'hypothèse SDOF pour « *single degree of*

*freedom* ». Lorsque le couplage entre les modes est fort, l'hypothèse SDOF n'est plus valable et il faut appliquer des méthodes qui estiment simultanément les paramètres de plusieurs modes à la fois : ces méthodes sont couramment appelées MDOF pour « *multiple degrees of freedom* ».

### 3.2.1.2 Modes réels et modes complexes

Les modes dits « réels » correspondent à des ondes stationnaires : ils sont caractérisés par le fait que toutes les parties de la structure bougent soit en phase soit en opposition de phase l'une par rapport à l'autre. Les vecteurs propres correspondant sont réels; leurs valeurs sont positives si la réponse et l'excitation sont en phase et négatives si la réponse et l'excitation sont en opposition de phase. Dans la pratique, les modes réels sont caractéristiques des structures continues peu amorties. Dans le cas de la barre de chenille, les modes peuvent être considérés comme des modes réels. Les modes dits « complexes » correspondent à des ondes propagatives : la phase entre la réponse et l'excitation est quelconque et les vecteurs propres correspondant sont complexes. Ils sont caractéristiques des systèmes mécaniques dans lesquels l'amortissement est très concentré.

### 3.2.1.3 Formulation modale des FRF

Dans le cas où l'hypothèse SDOF est vérifiée, les FRF de compliance (rapport de la position sur la force) peuvent être mises sous la forme d'un modèle modal du type :

$$FRF_{i,j}(\omega) = \frac{X_i}{F_j}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[ \frac{R_{ijr}}{j\omega - p_r} + \frac{R_{ijr}^*}{j\omega - p_r^*} \right], \quad (3.1)$$

où  $r$  est l'indice du mode considéré et  $N$  le nombre de modes;  $p_r$  sont les pôles et  $R_{ijr}$  les résidus (la notation « \* » désigne le conjugué complexe).

Les pôles  $p_r$  sont donnés par :

$$p_r = -\zeta_r \omega_r + j\omega_{dr}, \quad (3.2)$$

où  $\omega_{dr}$  représente la pulsation amortie du mode  $k$  en oscillation libre; la relation entre  $\omega_{dr}$  et la pulsation naturelle  $\omega_{nr}$  (non-amortie) est :

$$\omega_{dr} = \omega_{nr} \sqrt{1 - \zeta_k^2} . \quad (3.3)$$

On remarque que les pôles sont des paramètres dits « d'ensemble », c.à.d. qu'ils ne dépendent pas des points  $i$  et  $j$  choisis pour la mesure. Par opposition, les résidus  $R_{ijr}$  sont des paramètres dits « locaux », c.à.d. qu'ils dépendent des points  $i$  et  $j$  mesurés (d'où l'indice  $ijr$ ); ils sont reliés aux modes propres  $\phi$  par la relation :

$$R_{ijr} = a_r \phi_{ir} \phi_{jr} , \quad (3.4)$$

où  $a_r$  est une constante pour le mode  $r$  qui est donnée en fonction de la masse modale  $m_r$  par :

$$a_r = \frac{1}{2j\omega_{dr}m_r} . \quad (3.5)$$

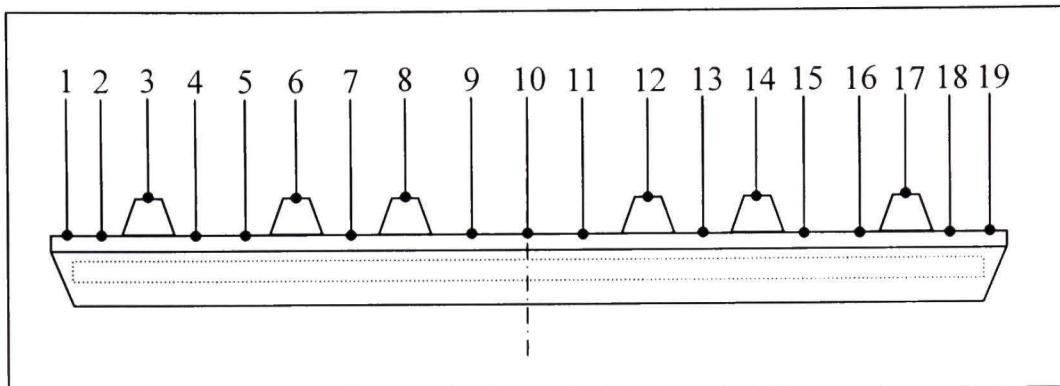
Afin d'obtenir des modes propres **normalisés par rapport à une masse modale unitaire**, que l'on note  $\phi$ , on choisit  $m_r=1$  et l'équation (3.4) devient :

$$R_{ijr} = \frac{1}{2j\omega_{dr}} \phi_{ir} \phi_{jr} . \quad (3.6)$$

Pour une résonance  $\omega_{dr}$ , l'équation (3.1) peut être approximée, en négligeant le second terme de la somme par rapport au premier, par :

$$FRF_{i,j}(\omega_{dr}) = \frac{X_i}{F_j}(\omega_{dr}) \approx \frac{R_{ijr}}{\zeta_r \omega_{dr}} . \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Mesure des FRF



**Figure 3.3 Positions des points d'excitation sur la barre**

La barre de motoneige est discrétisée en 19 points tels que présentés à la Figure 3.3 et elle est suspendue verticalement à l'aide de fil de pêche; le but étant de se rapprocher au maximum de conditions limites de type libre-libre. L'excitation de la structure est réalisée **manuellement** avec le même marteau d'impact que celui utilisé pour la caractérisation des couches d'élastomères (*Voir Chapitre 1*).

Pour mesurer la réponse de la structure, l'accéléromètre PCB 352C23 est utilisé car ses dimensions (environ 5 mm × 3 mm) et sa masse (1,7 g) sont très faibles si bien que le comportement vibratoire de la structure est peu modifié par sa présence. Il est fixé à une extrémité de la barre (DDL#19) car aux extrémités tous les modes sont caractérisés par un « ventre » de vibration. Le marteau excite successivement les 19 DDL.

L'acquisition des FRF est réalisée avec un système LMS SCADAS III (modèle SC305-UTP) en utilisant le module « Test.Lab Impact testing » qui guide le processus d'acquisition en plusieurs étapes. Les principaux paramètres d'acquisition utilisés sont définis dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1 Paramètres pour l'acquisition des FRF

Nom du paramètre	Valeur
Largeur de bande $f_{max}$	2560 Hz
Fréquence d'échantillonnage $Fs$	$Fs = 2 \times f_{max} = 5120$ Hz
Résolution temporelle $\Delta t$	$\Delta t = 1/Fs = 1.953125 \times 10^{-4}$ s
Nombre de lignes fréquentielles $N_f$	8192 lignes
Résolution fréquentielle $\Delta f$	$\Delta f = f_{max} / N_f = 0,3125$ Hz
Temps d'acquisition $t_a$	$t_a = 1 / \Delta f = 3,2$ s
Nombre de FRF moyennées	4

Étant donné que la partie utile du signal de la force a une durée (de quelques millisecondes) beaucoup plus courte que le temps d'acquisition (de 3,2 s), on utilise une fenêtre rectangulaire de durée 10 ms afin de la mettre à zéro après cette durée. Pour le signal de l'accéléromètre, on utilise une fenêtre de type « exponentielle décroissante » afin de limiter son amplitude en fin d'acquisition. L'effet des fenêtrages sur les spectres fréquentiels est corrigé en amplitude par le logiciel.

À partir des signaux temporels fenêtrés, la fonction de transfert  $H_1(j\omega)$  est calculée; elle est définie par :

$$H_1(j\omega) = \frac{S_{FX}(\omega)}{S_{FF}(\omega)} \quad (3.8)$$

où  $S_{FF}(\omega)$  est l'auto-spectre de la force F et  $S_{FX}(\omega)$  est le spectre croisé entre la force F et la réponse X. Cette fonction permet d'éliminer le bruit sur le signal de sortie X (l'accélération dans nos mesures). Pour chaque couple de positions mesuré, les FRF sont obtenues en moyennant linéairement quatre FRF individuelles.

### 3.2.3 Mesure des paramètres modaux ( $\omega_r$ , $\zeta_r$ et $\phi_r$ )

Le logiciel « Test.Lab » de LMS utilisé pour l'acquisition des FRF comporte également des modules permettant d'obtenir les paramètres modaux de la structure. Cependant, l'inconvénient lié à l'utilisation de ces modules est leur aspect « boîte noire », c.à.d. qu'il est difficile de savoir précisément comment sont effectués les calculs tout au long du processus. C'est pourquoi il a été choisi, dans un premier temps, de développer nos propres analyses des FRF à l'aide de programmes Matlab pour, dans un deuxième temps, comparer nos résultats à ceux obtenus avec LMS.

Les méthodes utilisées pour la mesure des paramètres modaux  $\omega_r$  et  $\zeta_r$  sont expliquées dans la suite en prenant comme exemple une FRF mesurée. Il s'agit de la FRF<sub>19,4</sub> qui correspond à une excitation au DDL #4 et à une mesure de la réponse au DLL #19. Les Figure 3.4 et Figure 3.6 présentent l'ensemble du spectre utile de la FRF (de 0 à 1800 Hz); les Figure 3.5 et Figure 3.7 présentent un zoom (de 406 à 466 Hz) autour de la fréquence du 3<sup>ème</sup> mode.

#### 3.2.3.1 Mesure des fréquences de résonance

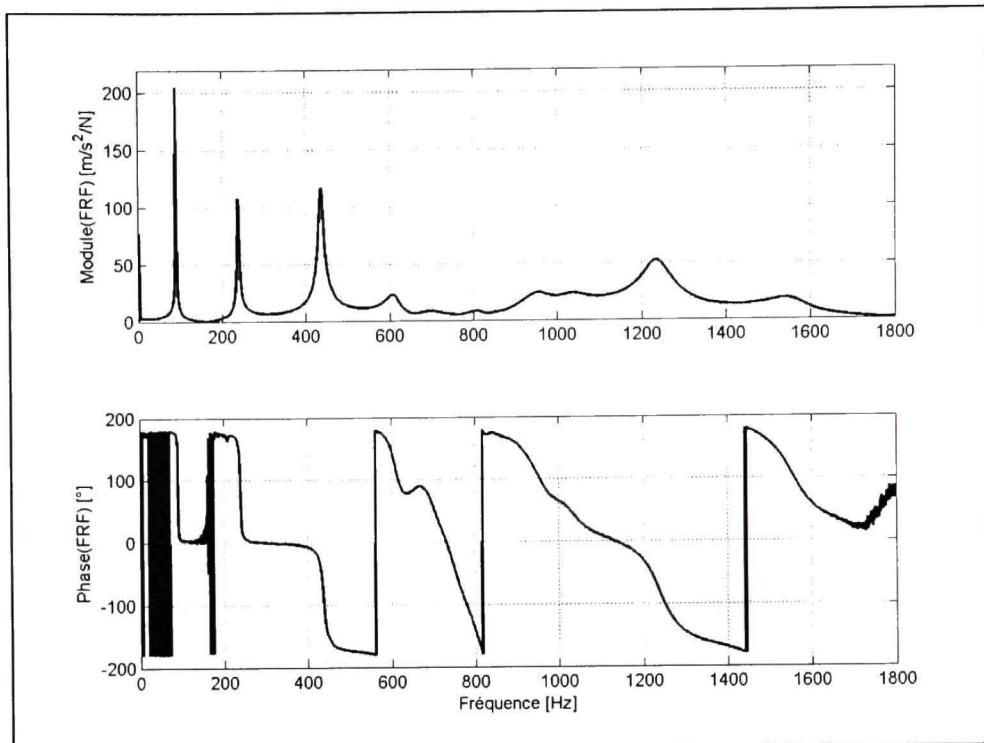
Les deux représentations les plus classiques d'une FRF sont :

- module et phase en fonction de la fréquence;
- partie réelle et partie imaginaire en fonction de la fréquence;

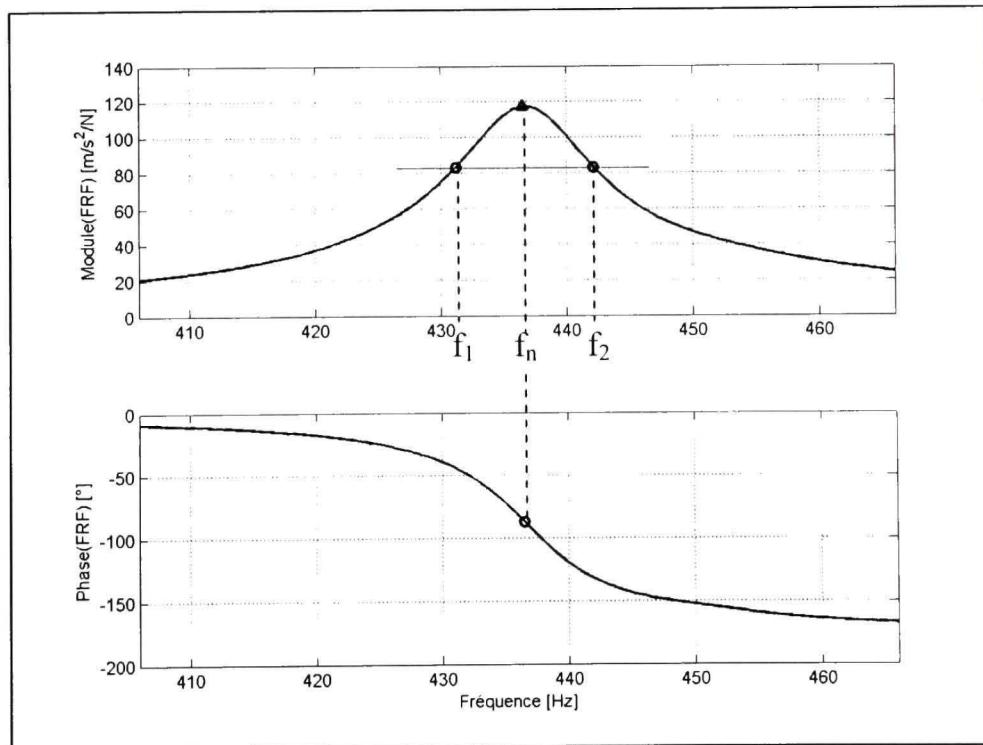
et chacune de ces représentations permet de mesurer les fréquences et les amortissements.

Dans la représentation module et phase (*Voir* Figure 3.4 et Figure 3.6), les fréquences de résonance  $f_n$  se caractérisent par :

- un maximum local du module : les fréquences de résonance correspondent aux fréquences des différents « pics » du module de la FRF;
- un changement de phase de 180° au passage de la résonance et une valeur de phase de ±90° (car la mesure est en accélération) à la fréquence de résonance.



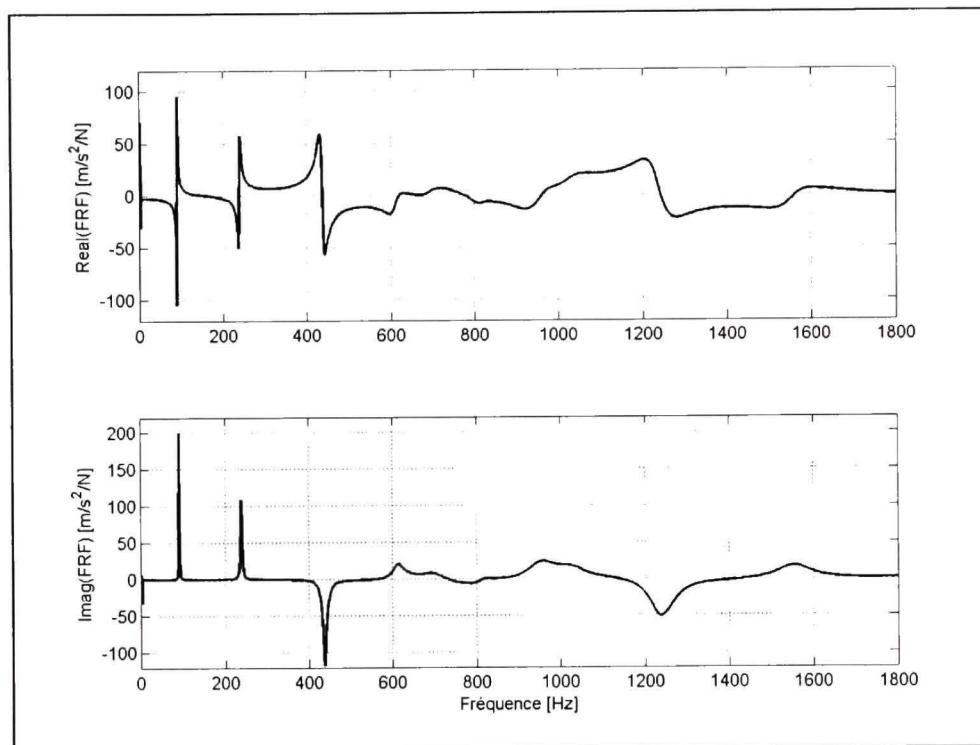
**Figure 3.4    Module et Phase de la FRF<sub>19,4</sub>.**



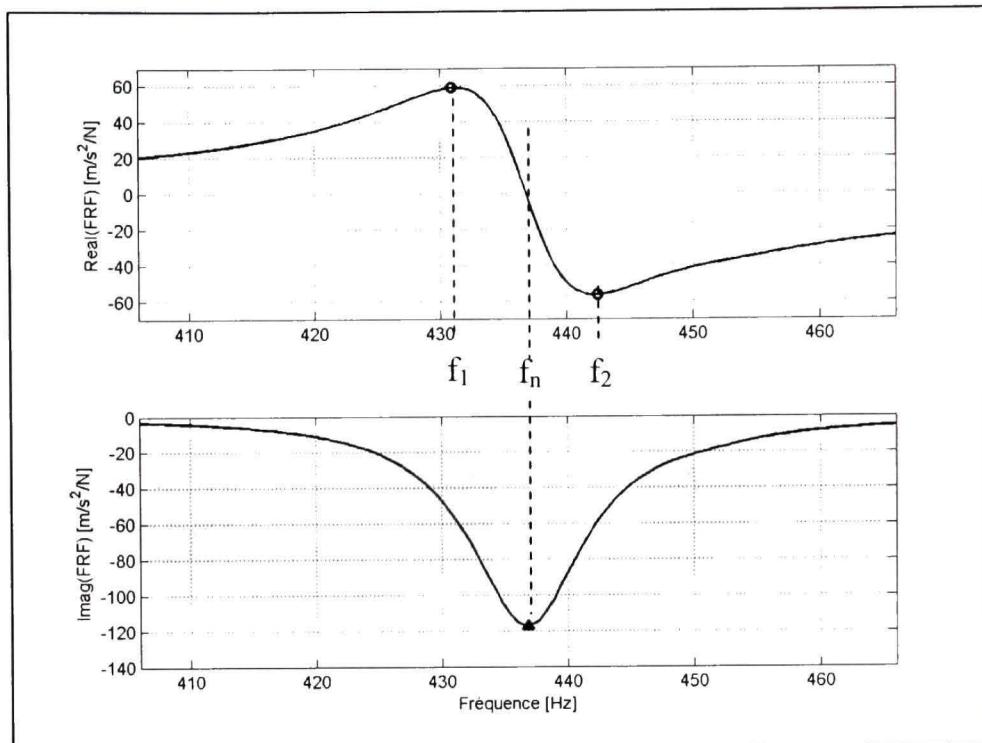
**Figure 3.5    Module et Phase de la FRF<sub>19,4</sub> – zoom 3<sup>ème</sup> mode.**

Dans la représentation parties réelle et imaginaire (*Voir* Figure 3.6 et Figure 3.7), les résonances se caractérisent par :

- un maximum local de la partie imaginaire : les fréquences de résonance correspondent aux fréquences des différents « pics » de la partie imaginaire de la FRF;
- une partie réelle nulle.



**Figure 3.6** Partie réelle et partie imaginaire de la  $\text{FRF}_{19.4}$ .



**Figure 3.7 Partie réelle et partie imaginaire de la  $\text{FRF}_{19,4}$  – zoom 3<sup>ème</sup> mode.**

### 3.2.3.2 Mesure des amortissements

Nous rappelons ci-dessous les deux méthodes les plus classiques de mesure de l'amortissement dans le domaine fréquentiel.

Dans la représentation module et phase (*Voir Figure 3.6*), l'amortissement se calcule avec :

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \quad (3.9)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation naturelle et  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont respectivement les fréquences inférieure et supérieure pour lesquelles le module de la FRF est égal au module maximal divisé par  $2^{1/2}$ .

Dans la représentation parties réelle et imaginaire (*Voir Figure 3.7*), l'amortissement se calcule aussi avec (3.9) mais  $\omega_1$  et  $\omega_2$  représentent le minimum et le maximum local de la partie réelle autour de la résonance (et vérifient  $\omega_1 < \omega_2$ ).

### 3.2.3.3 Mesure des modes

Les équations (3.1) à (3.7) ont été écrites dans le cas de FRF de compliance (Position/Force). Cependant, étant donné que nos mesures sont des FRF d'accélération (Accélération/Force), ces équations doivent être modifiées. La relation pour passer d'une FRF en compliance (Position/Force) à une FRF en accélération (Accélération/Force) est :

$$\frac{\ddot{X}_i}{F_j}(\omega) = -\omega^2 \frac{X_i}{F_j}(\omega) \quad (3.10)$$

et l'équation (3.7) devient :

$$FRF_{i,j}(\omega_{dr}) = \frac{\ddot{X}_i}{F_j}(\omega_{dr}) \approx -\omega_{dr} \frac{R_{jr}}{\zeta_r}, \quad (3.11)$$

En substituant l'expression du résidu (3.6) dans (3.11), on obtient finalement :

$$FRF_{i,j}(\omega_{dr}) = \frac{\ddot{X}_i}{F_j}(\omega_{dr}) \approx \frac{j}{2\zeta_r} \phi_{ir} \phi_{jr}. \quad (3.12)$$

On remarque qu'à la résonance, la FRF est un nombre imaginaire pur si bien que :

$$FRF_{i,j}(\omega_{dr}) = \text{Im}(FRF_{i,j}(\omega_{dr})). \quad (3.13)$$

En appliquant (3.12) et (3.13) en un point d'impédance, c.à.d. tel que  $i=j$ ,  $\phi_{ir}$  (la composante au point  $i$  du mode propre normalisé par rapport à une masse modale unitaire) peut se calculer à partir de :

$$\phi_{ir} = \sqrt{2\zeta_r \text{Im}\left(\frac{\ddot{X}_i}{F_i}(\omega = \omega_{dr})\right)}. \quad (3.14)$$

Pour un point d'impédance, la partie imaginaire des FRF d'accélération à une résonance est toujours positive car la force et l'accélération sont en phase. Sur le plan pratique, cette caractéristique peut être utilisée pour vérifier que les signes de la force et de l'accélération ont correctement été définis. Finalement, **la composante  $\phi_{ir}$  obtenue étant toujours positive, la masse modale correspondante est également positive** (Voir équation (2.12)).

Pour les autres points  $j$  mesurés ( $j \neq i$ ), la composante  $\phi_{jr}$  se calcule en utilisant (3.12) par :

$$\phi_{jr} = \frac{1}{\phi_{ir}} 2\zeta_r \operatorname{Im} \left( \frac{\ddot{X}_i}{F_j} (\omega = \omega_r) \right). \quad (3.15)$$

### 3.2.4 Résultats de l'AME

#### 3.2.4.1 Fréquences et amortissements modaux

En théorie, les fréquences modales et les amortissements modaux mesurés ne dépendent pas du point d'excitation choisi. Dans la pratique, il est souhaitable de considérer les points d'excitation correspondant à des « ventres » du mode de vibration considéré car ils permettent d'obtenir la plus grande réponse du mode (et au contraire, les points d'excitation qui correspondent à des « nœuds » du mode de vibration sont à éviter puisqu'une excitation en un nœud n'entraînera aucune réponse du mode).

Le Tableau 3.2 présente les positions de marteau choisies pour mesurer la fréquence et l'amortissement de chaque mode et les valeurs présentées dans le Tableau 3.3 et le Tableau 3.4 sont les valeurs moyennes correspondant à ces différentes positions choisies (les valeurs obtenues pour toutes les positions d'excitation sont présentées en ANNEXE IV sous forme de tableaux de taille  $19 \times 6$ ).

La méthode utilisée par LMS pour mesurer les fréquences et les amortissements est la méthode LSCE (pour « least squares complex exponential »). C'est une méthode temporelle de type méthode de Prony qui permet d'estimer plusieurs modes simultanément (méthode MDOF) à partir de la réponse impulsionnelle équivalente à la FRF.

Tableau 3.2 Positions d'excitation choisies (cases grisées)  
pour la mesure des fréquences et des amortissements

# DDL	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10
11	11	11	11	11	11	11
12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14
15	15	15	15	15	15	15
16	16	16	16	16	16	16
17	17	17	17	17	17	17
18	18	18	18	18	18	18
19	19	19	19	19	19	19

Le Tableau 3.3 présente les fréquences obtenues par nos analyses : la méthode 1 (Méth.1) correspond à la fréquence correspondant au maximum du module de la FRF (*Voir* Figure 3.5); la méthode 2 (Méth.2) correspond à la fréquence correspondant au maximum de la partie imaginaire de la FRF (*Voir* Figure 3.7). Ces valeurs sont comparées aux valeurs obtenues avec le logiciel LMS. Les écarts obtenus entre les différents résultats sont très faibles (moins de 1 %).

Tableau 3.3 Comparaison des fréquences modales  $f_r$ 

	Fréquences (Hz)			Écarts / à LMS (%)	
	LMS	Méth. 1	Méth. 2	Méth. 1	Méth. 2
<b>Mode 1</b>	90,11	90,00	90,00	-0,127	-0,127
<b>Mode 2</b>	238,74	238,75	238,75	0,004	0,004
<b>Mode 3</b>	436,76	436,41	436,64	-0,081	-0,027
<b>Mode 4</b>	609,88	607,81	611,72	-0,339	0,301
<b>Mode 5</b>	1235,98	1236,56	1238,13	0,047	0,174
<b>Mode 6</b>	1554,63	1543,44	1553,28	-0,720	-0,087

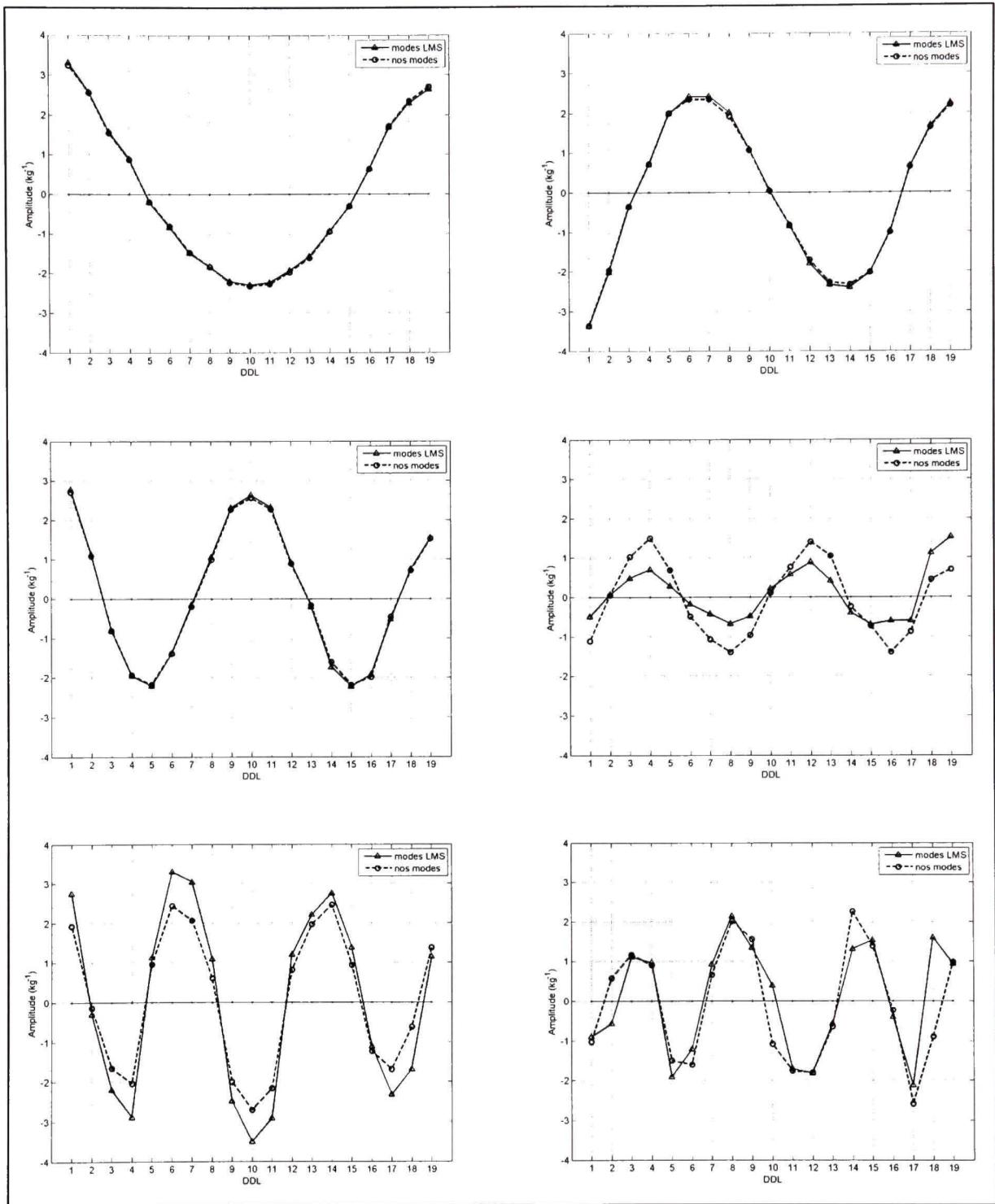
Le Tableau 3.4 présente les amortissements obtenus par nos analyses : la méthode 1 (Méth.1) correspond à l'amortissement mesuré à partir du module de la FRF (*Voir* Figure 3.5); la méthode 2 (Méth.2) correspond à l'amortissement mesuré à partir de la partie réelle de la FRF (*Voir* Figure 3.7). Ces valeurs sont comparées aux valeurs obtenues avec le logiciel LMS. Les écarts obtenus entre les différents résultats sont très variables suivant le mode considéré et sont particulièrement importants pour le mode 1 et le mode 6. **Les valeurs d'amortissement considérées dans la suite sont celles obtenues par LMS** car la méthode MDOF utilisée est plus performante que les approches SDOF de nos analyses.

Tableau 3.4 Comparaison des amortissements modaux  $\zeta_r$ 

	Amortissements modaux $\zeta$ (%)			Écarts / à LMS (%)	
	LMS	Méth. 1	Méth. 2	Méth. 1	Méth. 2
<b>Mode 1</b>	0,590	0,347	0,590	-41,15	0,05
<b>Mode 2</b>	0,728	0,654	0,720	-10,10	-1,11
<b>Mode 3</b>	1,264	1,253	1,289	-0,86	1,97
<b>Mode 4</b>	2,581	2,789	2,661	8,07	3,09
<b>Mode 5</b>	2,722	2,881	2,976	5,84	9,33
<b>Mode 6</b>	2,573	3,234	3,092	25,70	20,19

### 3.2.4.2 Modes normalisés par rapport à une masse modale unitaire

Les modes normalisés par rapport à une masse modale unitaire sont obtenus dans nos analyses en utilisant les équations (3.14) et (3.15). Les résultats obtenus sont présentés à la Figure 3.8 et sont comparés aux modes obtenus avec LMS. Les résultats obtenus sont très similaires et permettent de valider les deux méthodes. Les valeurs numériques des modes sont présentées en ANNEXE V sous forme d'un tableau de taille  $19 \times 6$ . **Les valeurs des modes (normalisés par rapport à une masse modale unitaire) considérées dans la suite sont celles obtenues par LMS.**



**Figure 3.8 Modes normalisés par rapport à une masse unitaire.  
Modes 1 à 6 (de gauche à droite et de bas en haut).**

### 3.3 Validation de la méthode

#### 3.3.1 Validation de l'hypothèse de linéarité

Pour valider expérimentalement l'hypothèse de linéarité entre force, vibrations et rayonnement acoustique, cette section présente des comparaisons entre les réductions des spectres de force permises par l'ajout de la couche d'élastomère et les réductions des spectres de bruit.

Le calcul des transformées de Fourier est effectué dans MATLAB (commande « `fft` ») sur la première demi-seconde des signaux (la fréquence d'échantillonnage étant de 65536 Hz, le nombre de points de la FFT est égal à  $2^{15} = 32768$  points). Avant de calculer la FFT, les signaux sont fenêtrés avec une fenêtre exponentielle  $\exp(-30 \times t)$  pour limiter leur amplitude à la fin de la demi-seconde considérée.

Les niveaux de force sont calculés par :

$$L_F = 10 \log_{10} \left( \| \text{fft}(F) \|^2 \right) \quad (3.16)$$

où  $\| \text{fft}(F) \|^2$  représente le module de la FFT du signal de force.

Les niveaux de pression acoustique sont calculés par :

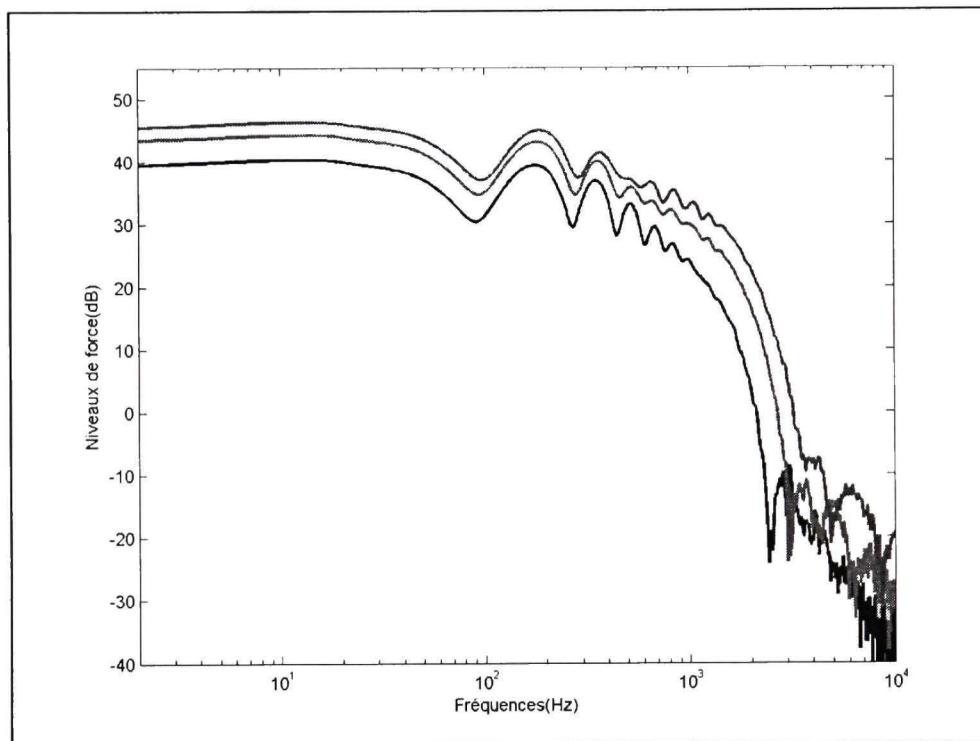
$$L_p = 10 \log_{10} \left( \frac{\| \text{fft}(P) \|^2}{P_0^2} \right) \quad (3.17)$$

avec  $P_0 = 2 \times 10^{-5}$  Pa qui est la pression de référence.

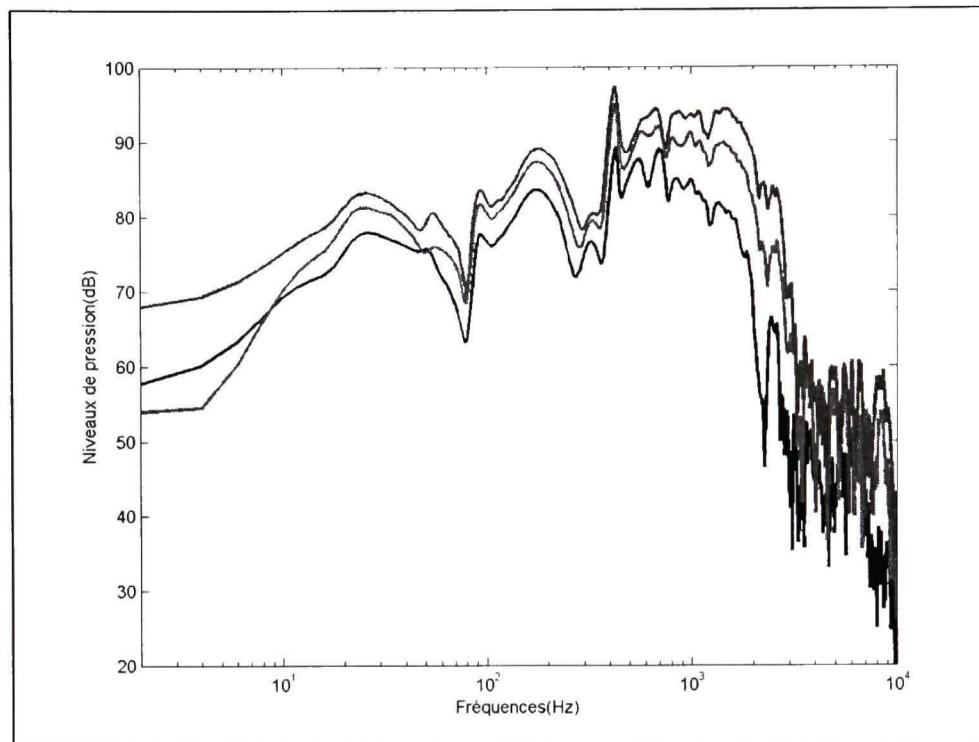
##### 3.3.1.1 Spectres SANS couche d'élastomère

Les spectres mesurés de force et de pression SANS élastomère sont présentés respectivement en Figure 3.9 et Figure 3.10 pour les trois vitesses testées (pour chaque vitesse testée, les

spectres présentés correspondent à la moyenne des trois spectres individuels obtenus pour les trois essais à cette vitesse). Les oscillations des spectres de force pour des fréquences inférieures à 1000 Hz sont dues au second impact. Les spectres de pression se caractérisent par des zones de bruit plutôt large bande et par deux pics distincts autour de 90 Hz et de 430 Hz qui correspondent respectivement au mode #1 et au mode #3 de la structure.



**Figure 3.9 Spectres de force SANS élastomère pour trois vitesses initiales (de bas en haut) :**  
 $V_1=1,93 \text{ m/s}; V_2=2,98 \text{ m/s}; V_3=3,78 \text{ m/s}.$



**Figure 3.10 Spectres de pression SANS élastomère pour trois vitesses initiales (de bas en haut) :**  
 $V_1=1,93 \text{ m/s}; V_2=2,98 \text{ m/s}; V_3=3,78 \text{ m/s.}$

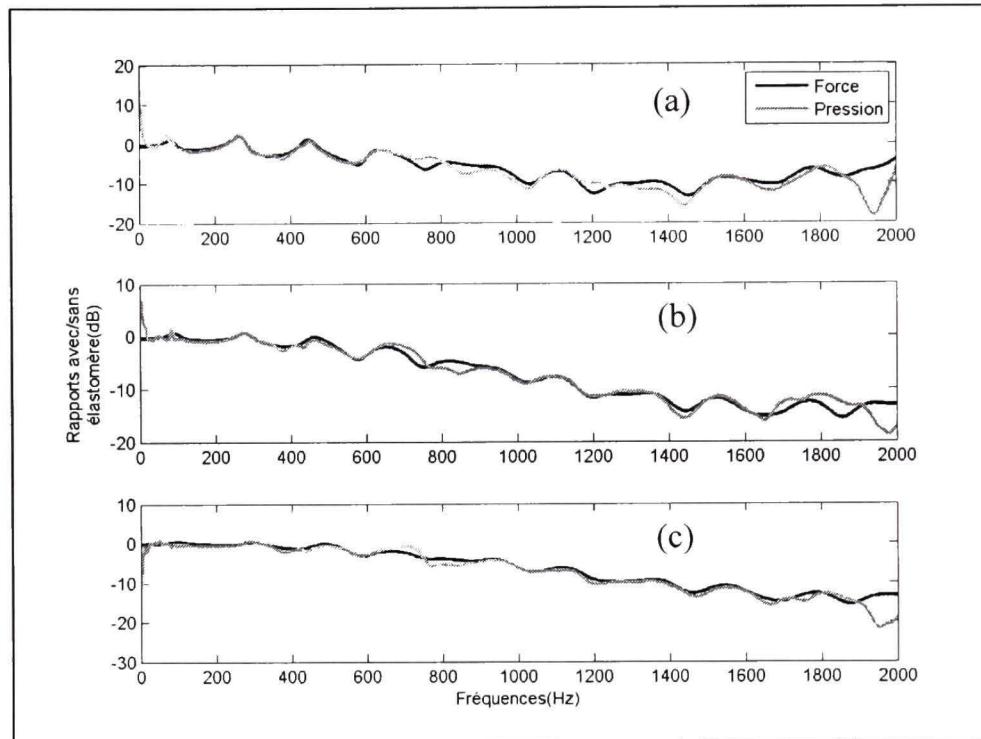
Les énergies des spectres de force et de pression étant concentrées sur une bande de fréquences allant de 0 à 2000 Hz, les prochains spectres sont présentés seulement sur cette bande.

### 3.3.1.2 Comparaisons des réductions des spectres de force et de pression AVEC couche d'élastomère

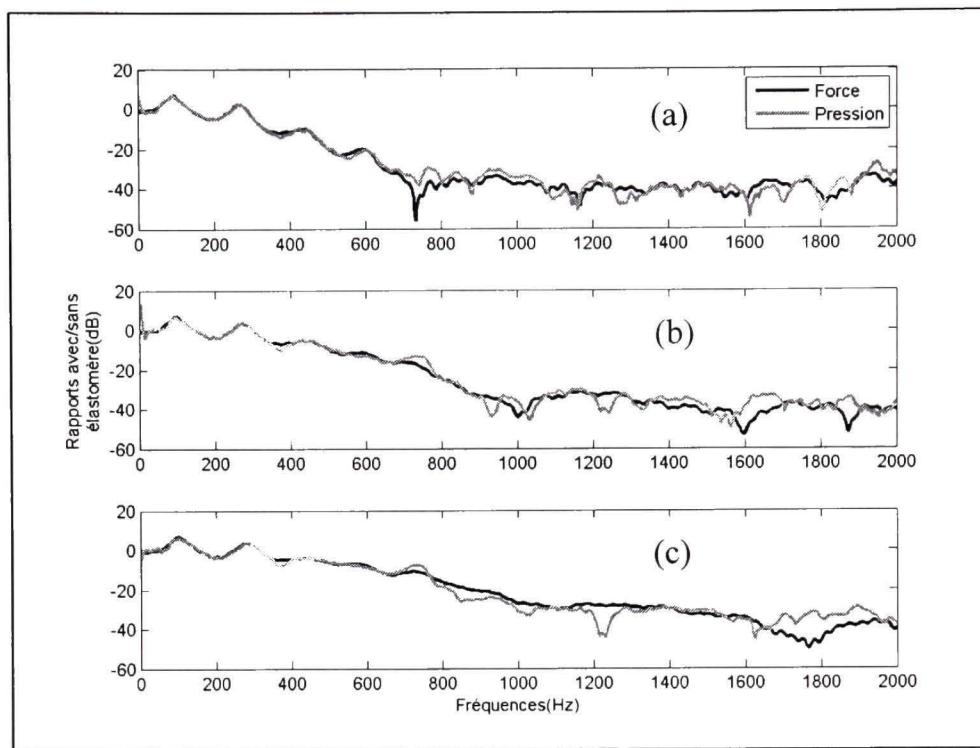
Afin de vérifier si les réductions des spectres de bruit permises par l'ajout de la couche d'élastomère sont égales aux réductions des spectres de force, les différences de niveaux avec et sans élastomère sont calculées en faisant le rapport entre les spectres AVEC élastomère et les spectres SANS élastomère.

Les Figure 3.11 à Figure 3.14 présentent, pour chaque couche testée, les résultats pour les trois vitesses d'impact testées. Les réductions des spectres de pression sont très similaires aux

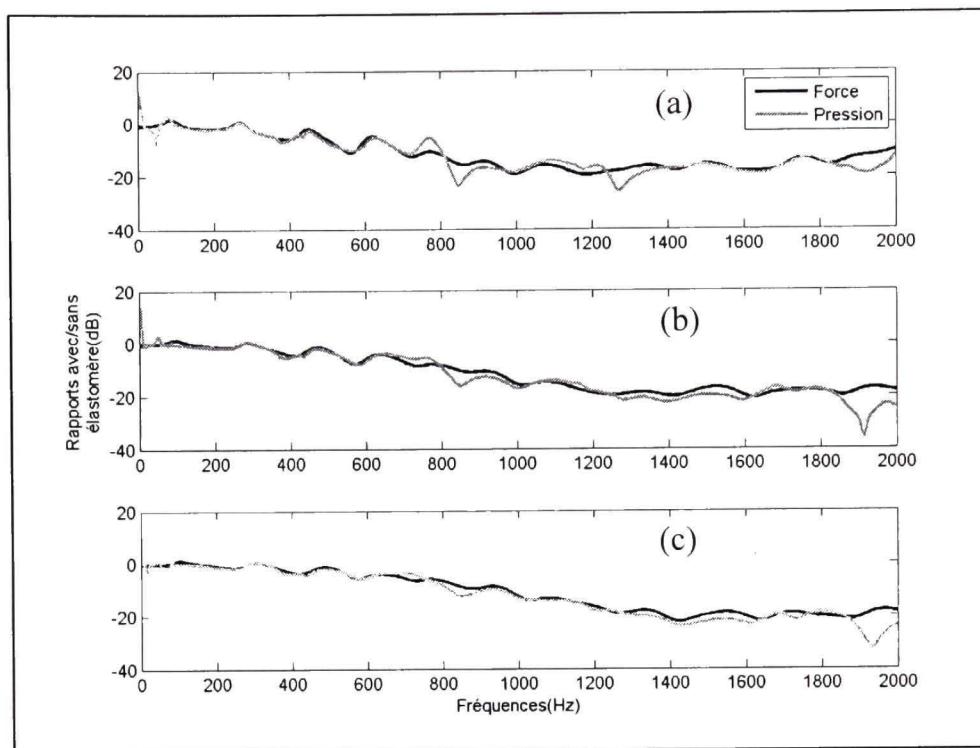
réductions des spectres de force, ce qui valide l'hypothèse de linéarité entre force, vibrations et rayonnement acoustique. Par conséquent, la validation de la méthode présentée dans la section suivante est effectuée à partir des signaux de force.



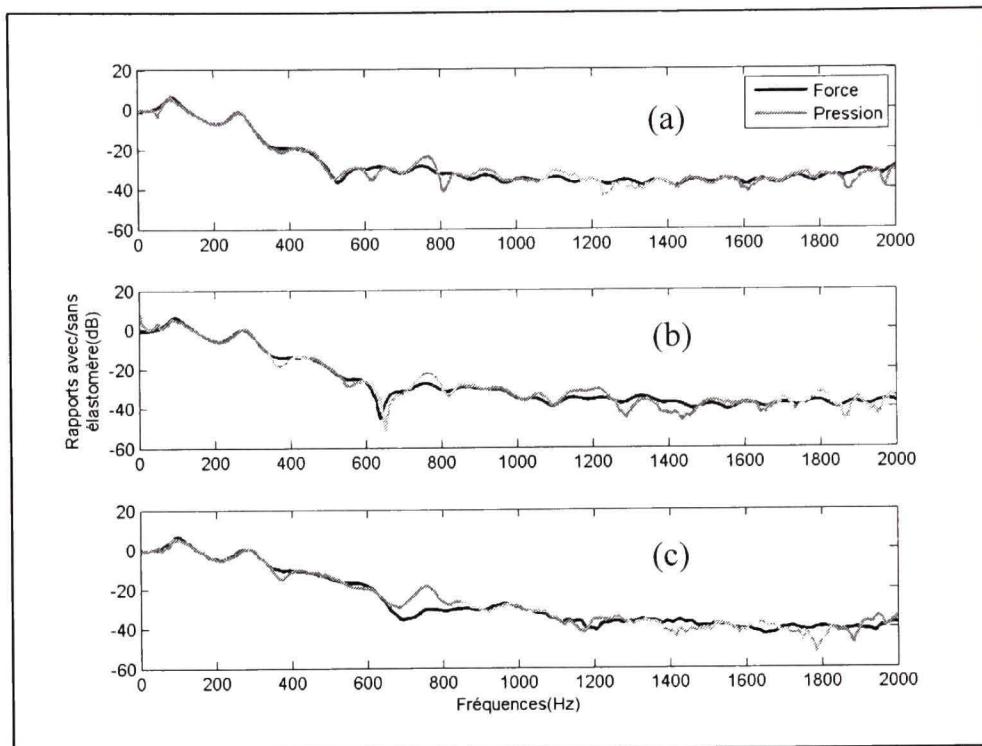
**Figure 3.11 Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #3 pour trois vitesses d'impact :**  
**(a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ .**



**Figure 3.12 Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #4 pour trois vitesses d'impact :**  
(a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ .



**Figure 3.13 Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #7 pour trois vitesses d'impact :**  
(a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ .



**Figure 3.14 Comparaisons des réductions des spectres expérimentaux de force et de pression – Couche #8 pour trois vitesses d'impact :**  
**(a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ .**

### 3.3.2 Comparaisons simulation–expérience de la force d'impact AVEC couche d'élastomère dans le domaine temporel

Cette section présente des comparaisons temporelles entre les signaux de force simulés et les signaux mesurés.

Les valeurs des paramètres d'entrée pour les simulations sont les suivants :

- pour caractériser l'impacteur, les deux paramètres d'entrée sont sa masse (0,1 kg) et sa vitesse initiale d'impact : les mêmes vitesses de référence que celles testées au Chapitre 1 pour la caractérisation des élastomères sont utilisées (1,93 m/s ; 2,98 m/s et 3,78 m/s);

- pour caractériser la couche d'élastomère, les valeurs des trois paramètres d'entrée ( $\alpha$ ,  $k$ ,  $\mu$ ) sont celles qui ont été déterminées au Chapitre 1 par la méthode de caractérisation (ces valeurs sont présentées dans le Tableau 1.3);
- pour caractériser la barre de chenille, les paramètres d'entrée sont sa masse (0,354 kg) et les paramètres modaux des six premiers modes de flexion qui ont été déterminés grâce à la méthode MDOF de LMS lors de l'analyse modale expérimentale (*Voir* section 3.2). Pour simuler un impact au centre de la barre (DDL#10), les valeurs des masses modales sont prises égales à l'inverse de la dixième ligne de la matrice des modes normalisés par rapport à une masse modale unitaire. Il faut également s'assurer que les masses modales sont positives car la position d'impact modélisée correspond à un point d'impédance (*Voir* équations (3.14) et (2.12)) ; si ce n'est pas le cas il suffit de prendre l'opposé du mode. Les valeurs des paramètres d'entrée qui décrivent la structure sont rassemblées dans le Tableau 3.5.

Tableau 3.5 Valeurs des paramètres d'entrée de la structure

	Fréquences (Hz)	Amortissements (%)	Masses (kg)
<b>Mode 1</b>	90,11	0,590	0,4312
<b>Mode 2</b>	238,74	0,728	23,4773
<b>Mode 3</b>	436,76	1,264	0,3906
<b>Mode 4</b>	609,88	2,581	9,3716
<b>Mode 5</b>	1235,98	2,722	0,3691
<b>Mode 6</b>	1554,63	2,573	0,9271

Les Figure 3.15 à Figure 3.21 présentent, pour chaque couche testée et pour les trois vitesses d'impact testées, les comparaisons simulation-expérience des signaux temporels de force. De manière générale, **l'impact se caractérise par une perte et une reprise de contact** : les signaux de force sont composés d'un premier pic de force, d'une phase où la force est nulle,

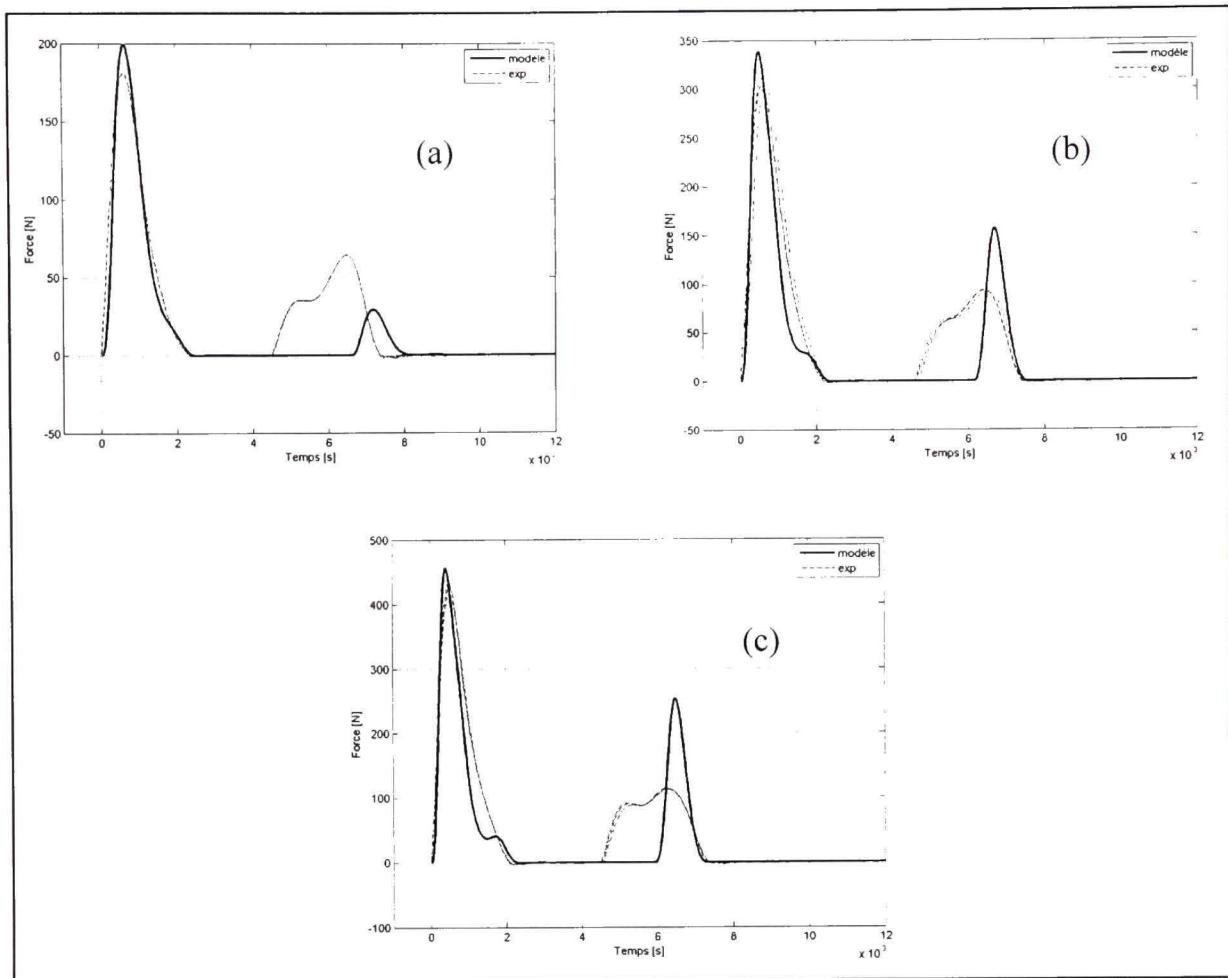
puis d'un second pic de plus faible amplitude dû à la réaction de la structure mise en vibration par le premier pic de force.

Les amplitudes et les durées du premier pic de force sont plutôt bien reproduites en général. Pour la couche #4, les écarts importants en amplitude et en durée du premier pic de force (en particulier pour les deux premières vitesses initiales testées) s'expliquent par les écarts importants déjà observés pour les signaux temporels de force dans la méthode de caractérisation (*Voir* section 1.5.3).

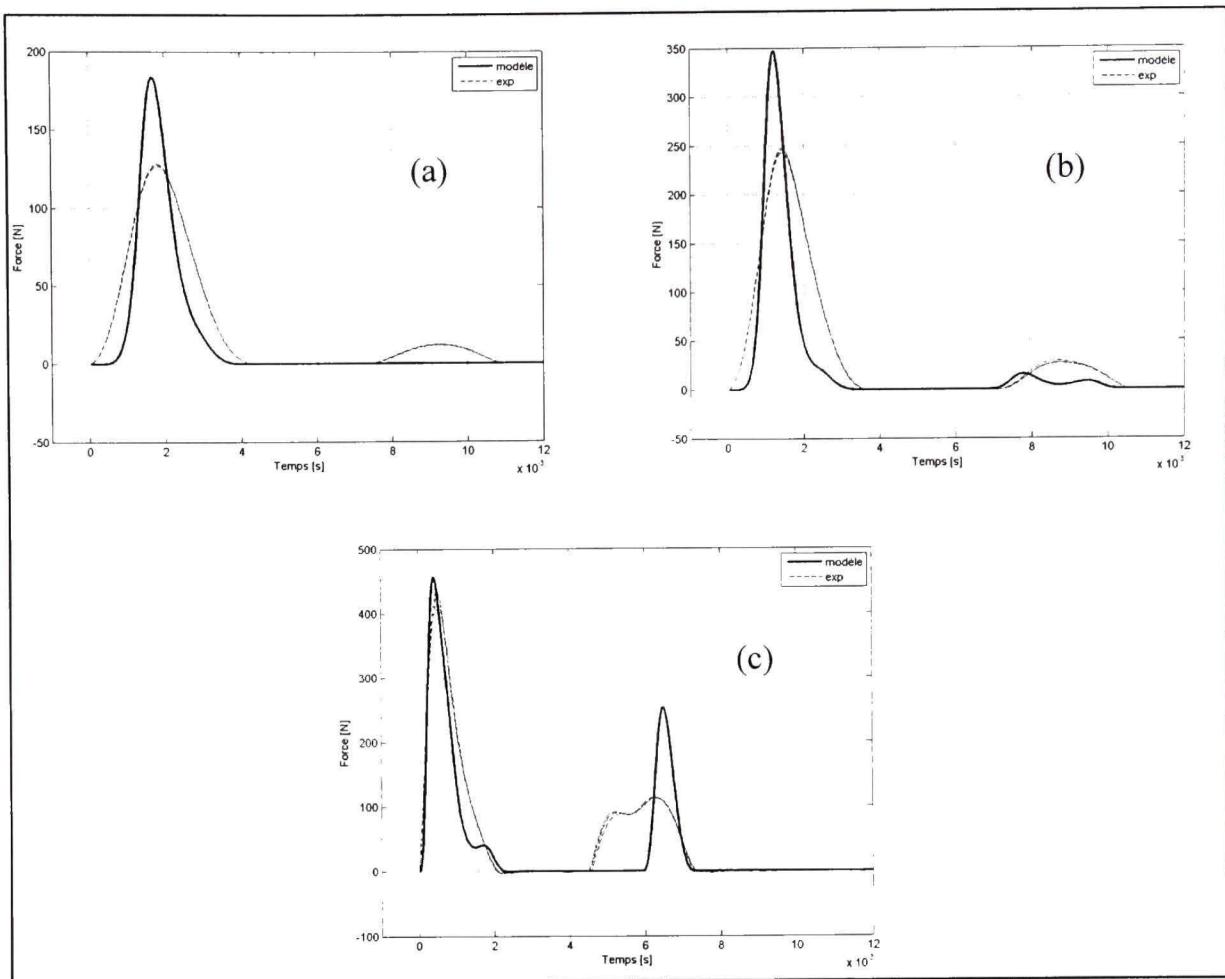
Pour le deuxième pic de force, les écarts en amplitude et en durée sont en général importants (en particulier pour la couche #8, le deuxième pic de force n'est pas du tout reproduit). Ces écarts sont très variables suivant la couche considérée et la vitesse testée.

Deux causes principales peuvent expliquer ces écarts non négligeables :

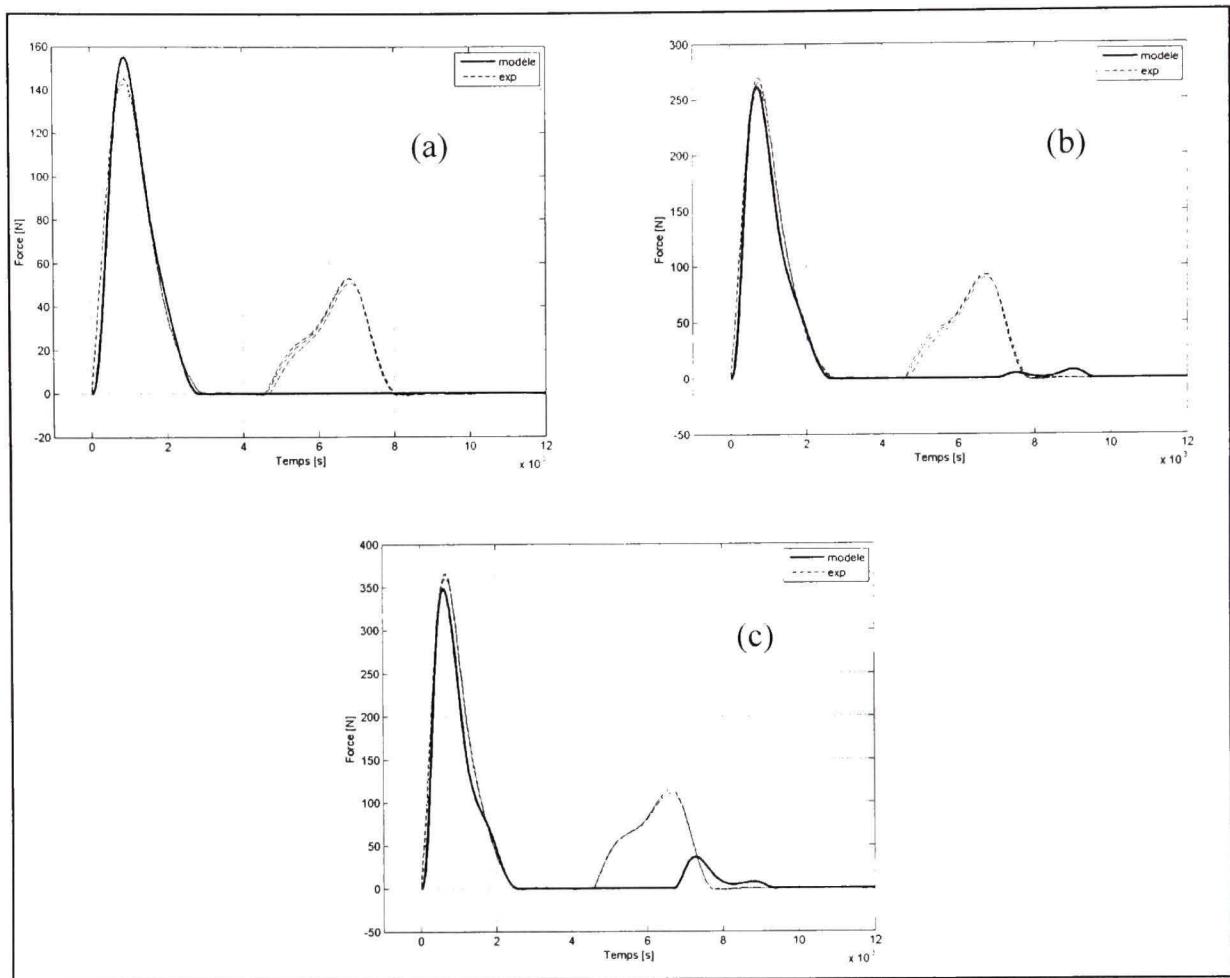
- la première cause est l'incertitude sur les valeurs des paramètres d'entrée de masse. En effet, il a été remarqué lors de tests préliminaires que de faibles variations des valeurs de masses (masses modales et masse physique de la barre ; masse physique de l'impacteur) génèrent des variations importantes sur les signaux de force simulés;
- la deuxième cause est que le mouvement d'ensemble de la barre est certainement plus compliqué qu'une simple translation horizontale. En effet, tel qu'observé au cours des mesures, il semble que le mouvement de la barre fasse intervenir un mode d'ensemble (à une fréquence de quelques Hertz) dû à sa rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire du marteau.



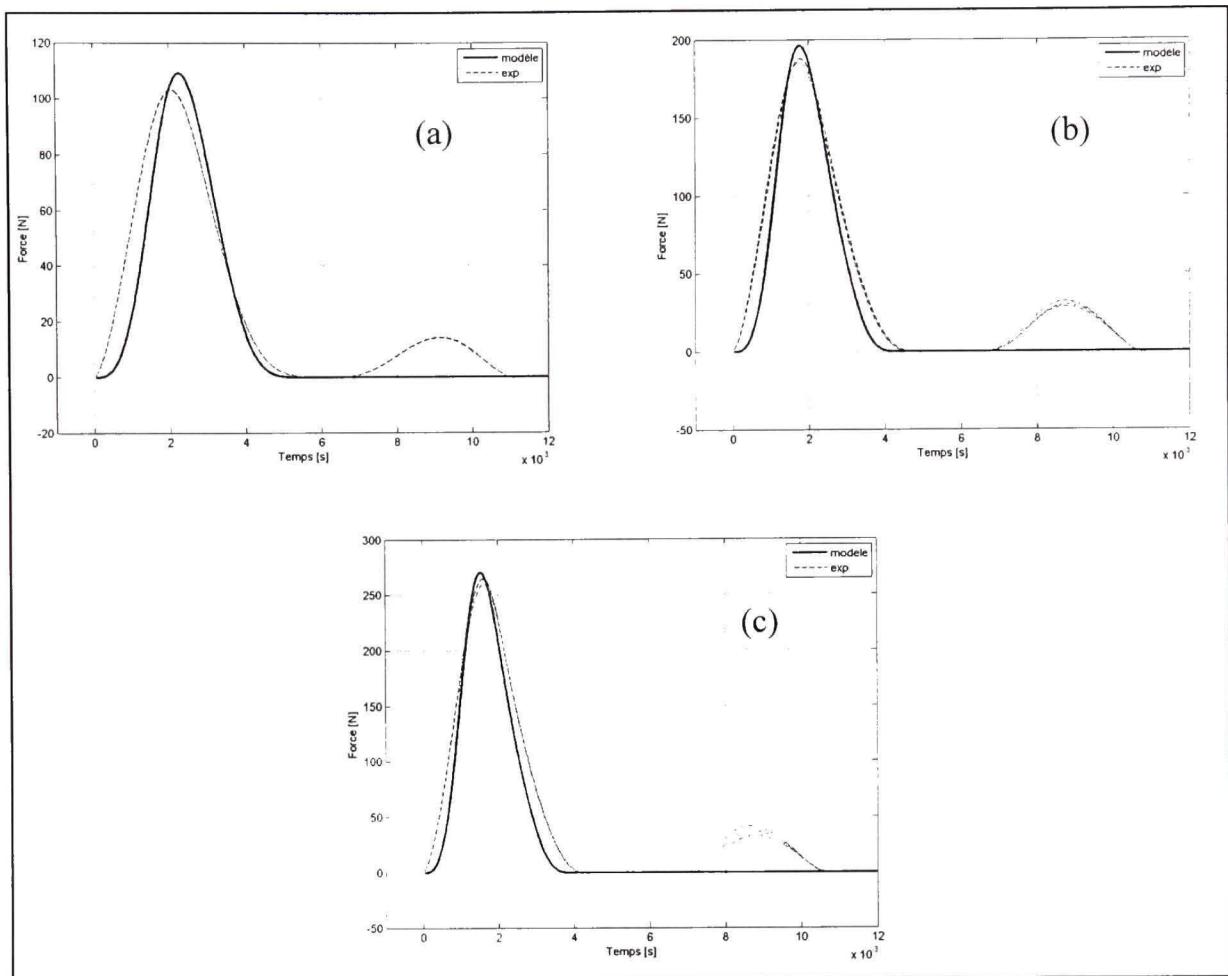
**Figure 3.15. Comparaisons simulation-expérience de  $F(t)$  avec couche #3 pour trois vitesses d'impact : (a)  $V_1=1,93$  m/s; (b)  $V_2=2,98$  m/s; (c)  $V_3=3,78$  m/s; — : simulation; --- : expérience.**



**Figure 3.16. Comparaisons simulation-expérience de  $F(t)$  avec couche #4 pour trois vitesses d'impact : (a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ ;  
— : simulation; --- : expérience.**



**Figure 3.17. Comparaisons simulation-expérience de  $F(t)$  avec couche #7 pour trois vitesses d'impact : (a)  $V_1=1,93$  m/s; (b)  $V_2=2,98$  m/s; (c)  $V_3=3,78$  m/s; — : simulation; --- : expérience.**

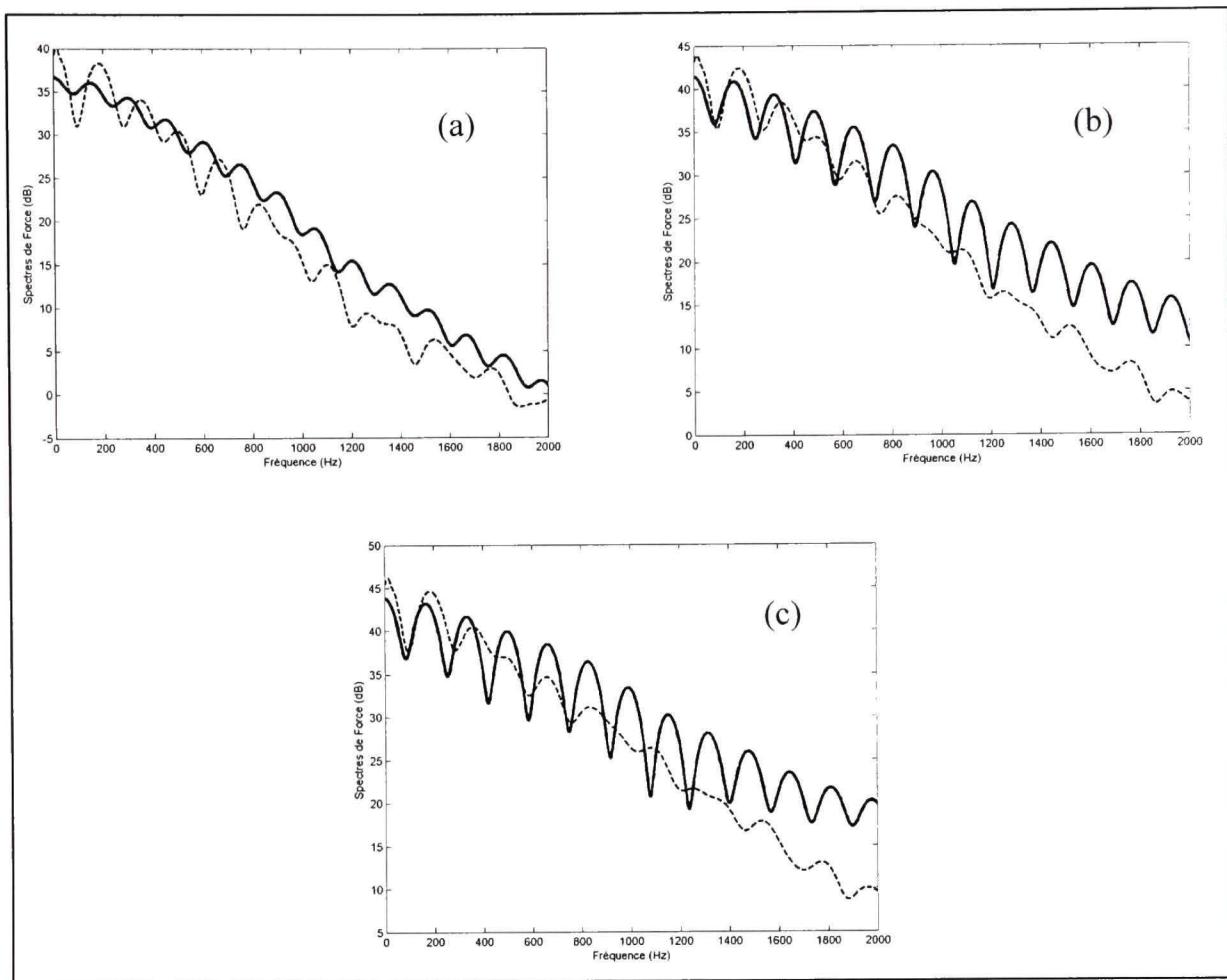


**Figure 3.18. Comparaisons simulation-expérience de  $F(t)$  avec couche #8 pour trois vitesses d'impact : (a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ ;**  
**— : simulation; --- : expérience.**

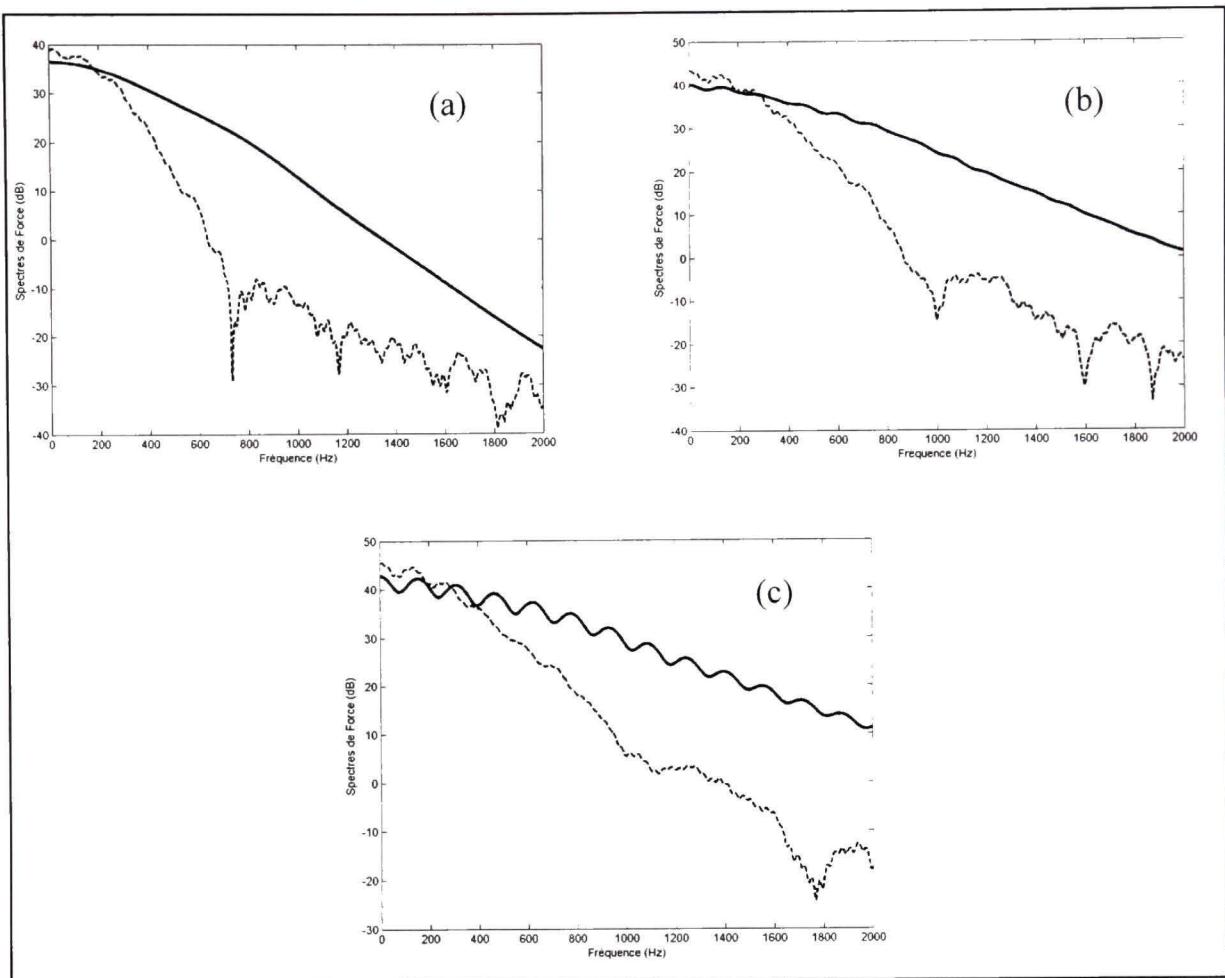
### 3.3.3 Comparaisons simulation-expérience de la force d'impact AVEC couche d'élastomère dans le domaine fréquentiel

Les Figure 3.19 à Figure 3.22 présentent, pour chaque couche testée et pour les trois vitesses d'impact testées, les comparaisons simulation-expérience des spectres fréquentiels de force.

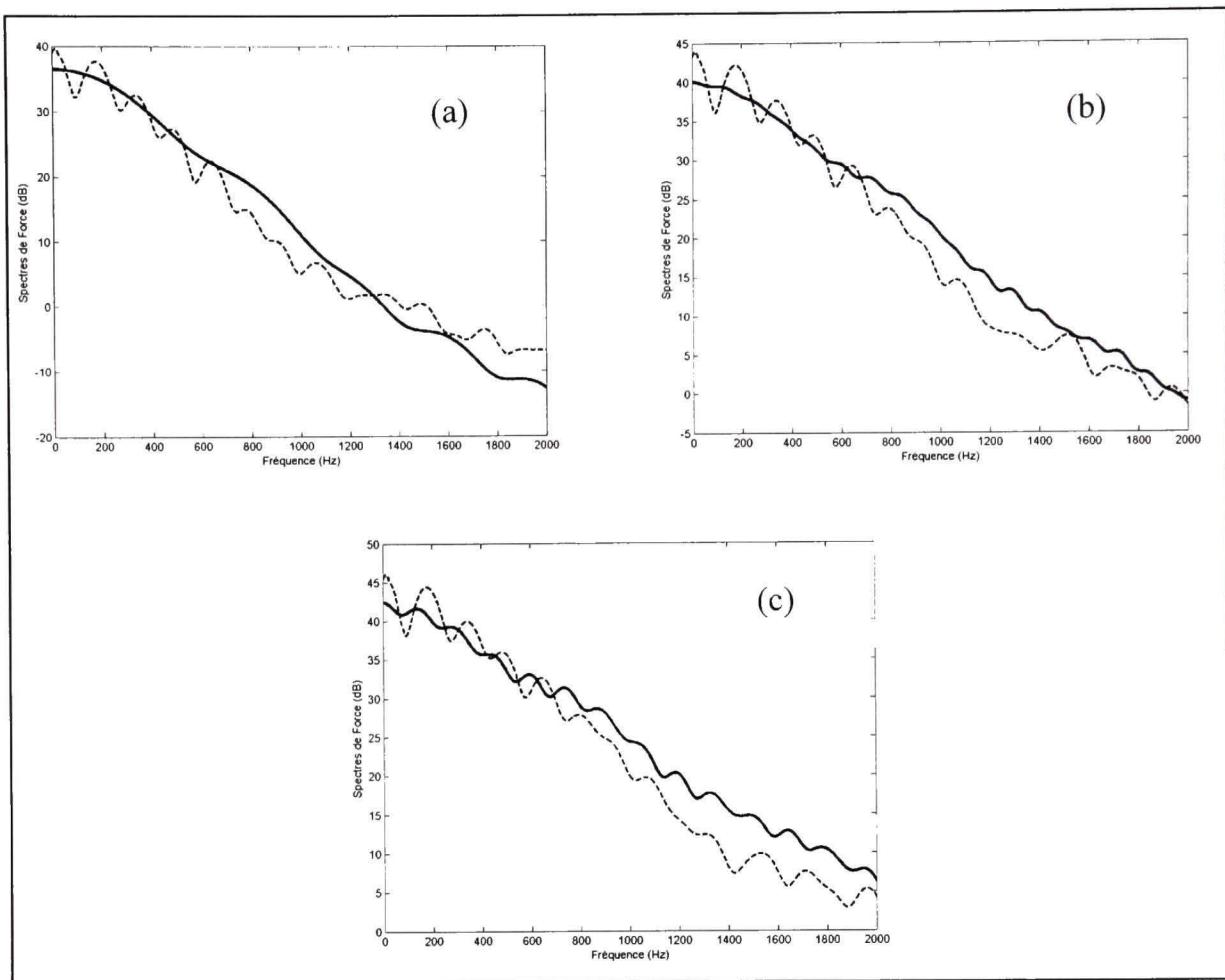
Pour les couches #3 et #7, l'allure générale des spectres expérimentaux est raisonnablement reproduite par les spectres simulés. Par contre, pour les couches #4 et #8, les écarts observés sont importants. Pour la couche #4, ces écarts sont dus à la mauvaise prédiction en temporel des amplitudes et des durées du premier et du deuxième pic de force. Pour la couche #8, les écarts sont dus essentiellement au fait que le deuxième pic de force n'est pas prédit du tout (le premier pic de force étant convenablement reproduit en amplitude et durée).



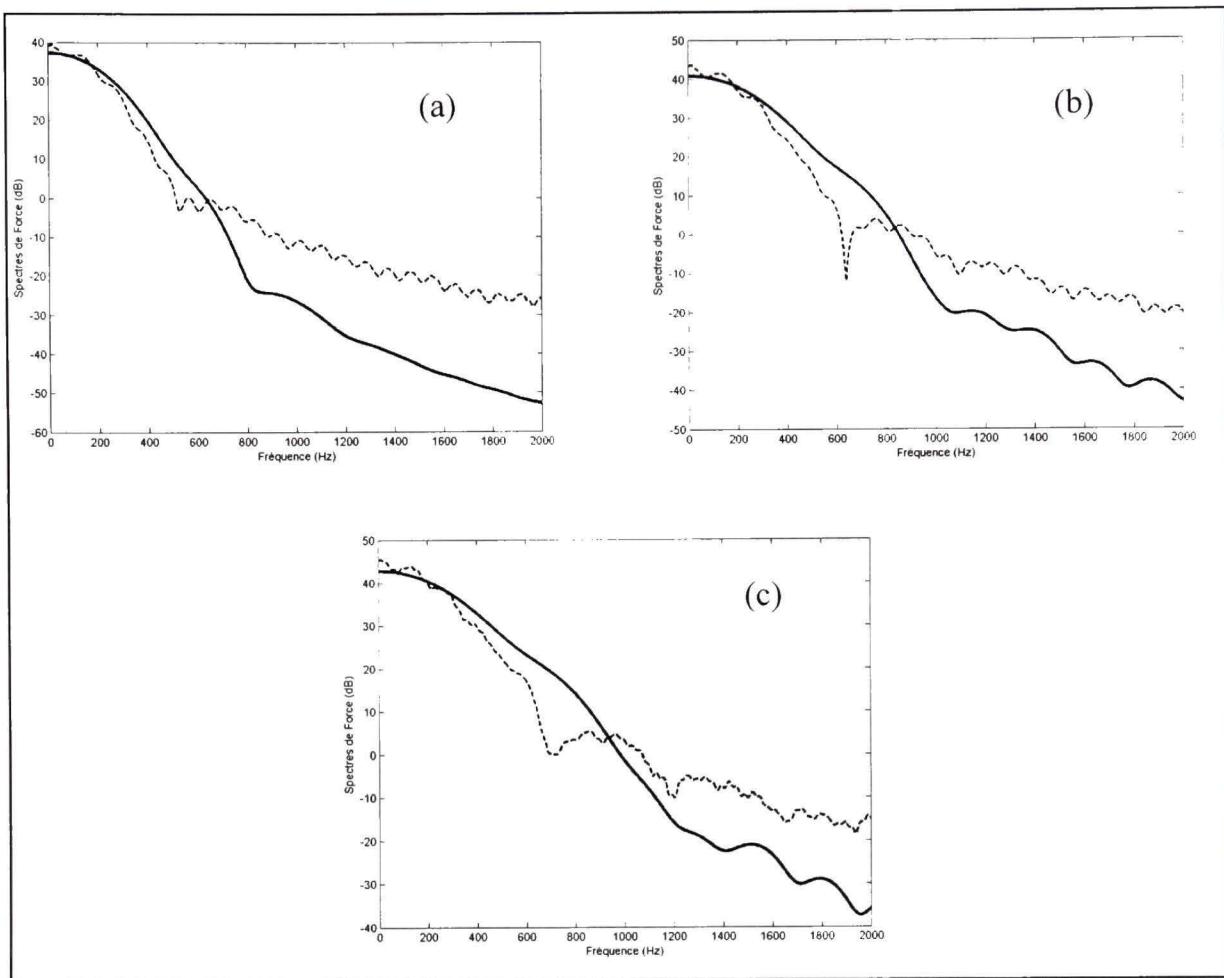
**Figure 3.19. Comparisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#3 pour trois vitesses d'impact :**  
 (a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ ;  
 — : simulation; --- : expérience.



**Figure 3.20. Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#4 pour trois vitesses d'impact :**  
 (a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ ;  
 — : simulation; --- : expérience.



**Figure 3.21. Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#7 pour trois vitesses d'impact :**  
 (a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ ;  
 — : simulation; --- : expérience.



**Figure 3.22. Comparaisons simulation-expérience des spectres de force avec couche#8 pour trois vitesses d'impact :**  
 (a)  $V_1=1,93 \text{ m/s}$ ; (b)  $V_2=2,98 \text{ m/s}$ ; (c)  $V_3=3,78 \text{ m/s}$ ;  
 — : simulation; --- : expérience.

## CONCLUSION

L'objectif général de cette thèse était de développer une méthode de réduction du bruit d'impact par ajout d'une couche mince d'élastomère entre l'objet impactant et la structure impactée. Pour atteindre cet objectif général, trois objectifs spécifiques avaient été fixés.

### **Méthode de caractérisation sous impact de couches minces d'élastomère**

Le premier objectif spécifique fixé était de caractériser le comportement sous impact de différentes couches d'élastomère.

La première étape pour atteindre cet objectif a été de développer une méthode spécifique de caractérisation des élastomères soumis à des impacts. Dans le dispositif expérimental développé, les couches d'élastomère sont placées sur une surface immobile et indéformable et soumises à l'impact généré par la chute d'un marteau d'impact monté dans un bras en rotation. Ce dispositif permet d'obtenir une bonne reproductibilité de la vitesse initiale d'impact et d'atteindre des vitesses importantes (la plus grande vitesse testée est de 3,78 m/s). La méthode utilisée pour mesurer la position du marteau pendant l'impact consiste à filmer sa trajectoire pendant l'impact avec une caméra haute vitesse (30000 images par seconde) puis à détecter sa position par traitement d'image. Les trois principaux avantages de cette méthode sont que :

- la quantité mesurée est directement la position (pas d'intégration(s) temporelle(s) comme dans le cas de signaux de vitesse ou d'accélération);
- la mesure est réalisée sans contact (et ni l'impacteur ni la couche ne nécessitent d'équipement additionnel qui pourrait modifier leur comportement);
- la vitesse initiale d'impact peut être mesurée à partir des images qui précèdent le début du contact.

Les limites de la méthode sont ses résolutions temporelle et spatiale. La résolution temporelle de la méthode pourra être améliorée dans le futur en utilisant des caméras haute-vitesse

permettant d'enregistrer un plus grand nombre d'images par seconde. Quant à la résolution spatiale, elle peut être améliorée en utilisant un objectif de plus grande distance focale. En utilisant cette méthode, huit couches en élastomère (quatre matériaux et deux épaisseurs) ont été testées pour trois vitesses initiales de référence : 1,93 m/s; 2,98 m/s et 3,78 m/s. Les diagrammes expérimentaux force-pénétration obtenus montrent en particulier que l'hystéresis est important et que les lois force-pénétration sont non linéaires.

La deuxième étape a été de choisir un modèle du comportement sous impact des couches d'élastomère testées. Les caractéristiques expérimentales des signaux de force et de pénétration sont bien reproduites dans l'ensemble en utilisant un modèle temporel de simulation dans lequel :

- le marteau est considéré comme une masse pure en translation;
- l'interaction entre le marteau et l'élastomère est décrite par la loi de contact de Hunt-Crossley : cette loi exprime la force de contact à partir de la pénétration et de la vitesse de pénétration par  $F(x, \dot{x}) = kx^\alpha(1 + \mu\dot{x})$ .

La principale limite du modèle est qu'il ne prend pas en compte la déformation résiduelle du matériau (alors que les résultats expérimentaux montrent que la déformation résiduelle est importante, en particulier pour la plus grande vitesse d'impact testée). Le système d'équations continues modélisant l'impact est discrétisé en temps avec des schémas classiques de différences finies qui aboutissent à une résolution explicite : à chaque pas de temps, les nouvelles valeurs de force, de pénétration et de vitesse de pénétration peuvent se calculer en fonction des valeurs aux instants précédents. Le modèle ne nécessite que cinq paramètres au total : deux pour l'impacteur (sa masse et sa vitesse initiale) et les trois paramètres ( $\alpha$ ,  $k$ ,  $\mu$ ) de la loi de contact de Hunt-Crossley pour décrire la couche d'élastomère.

La troisième étape a été d'estimer pour chaque couche testée les trois paramètres ( $\alpha$ ,  $k$ ,  $\mu$ ) à partir des signaux expérimentaux. L'estimation de ces trois paramètres est relativement simple car elle peut se limiter à l'estimation deux paramètres indépendants ( $\alpha$  et  $\mu$ ) et que leurs rôles sont bien définis et distincts. En comparant les valeurs des paramètres ( $\alpha$ ,  $k$ ,  $\mu$ )

obtenues pour chacune des trois vitesses initiales d'impact testées, il est apparu finalement que chaque couche peut être raisonnablement bien caractérisée sur toute la plage des vitesses testées par un unique jeu de paramètres. La comparaison des paramètres ainsi obtenus pour chaque couche (présentés dans le Tableau 1.3) montrent que les trois élastomères ayant une dureté Shore égale à 60 sont caractérisés par des valeurs différentes de  $\alpha$  et de  $k$ , si bien que la méthode développée permet une caractérisation plus précise qu'une mesure statique de dureté. Le quatrième matériau testé, de dureté Shore égale à 40, est caractérisé par des valeurs de  $\alpha$  plus élevées et des valeurs de  $\mu$  plus faibles. De plus, le doublement d'épaisseur de la couche pour un matériau donné se caractérise toujours par une diminution des valeurs de  $\alpha$  et de  $\mu$ . Le paramètre  $\alpha$  reste cependant toujours supérieur à la valeur limite (3/2) de la loi de Hertz et l'on s'attend à se rapprocher de cette valeur limite dans le cas de couches de grande épaisseur qui vérifient l'hypothèse de « demi-espace infini ».

### **Modélisation de l'impact sur une structure vibrante**

Le deuxième objectif spécifique fixé était de prédire la nouvelle force d'impact générée dans le cas où une couche mince d'élastomère est ajoutée sur une structure complexe vibrante impactée. Le modèle modal utilisé pour simuler les vibrations de la structure au point d'impact est issu du projet SOb (Rocchesso et Fontana, 2003). Par analogie avec la théorie générale de l'analyse modale, le programme initial `impact_modal.m` a été modifié pour :

- prendre en compte le déplacement physique de la structure au point d'impact (au lieu du déplacement modal);
- prendre en compte la translation d'ensemble d'une structure sous des conditions limites libres (car la structure envisagée pour l'application est en conditions libres).

### **Validation de la méthode par application à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige**

Le troisième objectif spécifique fixé était de valider l'ensemble de la méthode de prédiction en l'appliquant à la réduction du bruit d'impact d'une barre de chenille de motoneige.

La première étape a consisté à mesurer la force et la pression acoustique rayonnée par la barre dans deux configurations d'impact : AVEC et SANS couche d'élastomère dans la zone de contact.

La deuxième étape a consisté à modéliser la configuration AVEC élastomère en appliquant le modèle d'impact d'une masse sur une structure vibrante (présenté au Chapitre 2). Pour déterminer la valeur des paramètres d'entrée du modèle qui décrivent la barre, les paramètres modaux de la barre ont été mesurés en effectuant une analyse modale expérimentale. Cette technique a été choisie car elle est facile à mettre en œuvre et qu'elle est applicable à des structures de géométrie et de composition complexes. De plus, l'estimation des modes propres permet la prise en compte de la position de l'impact sur la structure : pour un impact au  $k$ -ième DDL de la structure, il suffit de prendre comme valeurs de masses modales l'inverse de la  $k$ -ième ligne de la matrice  $\phi$  (matrice des modes propres normalisés par rapport à une masse modale unitaire).

Enfin, la validation de la méthode a consisté dans un premier temps à vérifier expérimentalement l'hypothèse de linéarité en comparant les réductions des spectres de force permises par l'ajout de la couche d'élastomère aux réductions des spectres de bruit. Dans un deuxième temps, la méthode a été validée dans les domaines temporel et fréquentiel par des comparaisons entre les signaux de force simulés et les signaux de force mesurés.

Les données expérimentales obtenues montrent que l'impact se caractérise par une perte et une reprise de contact : les signaux de force sont composés d'un premier pic de force, d'une phase où la force est nulle, puis d'un second pic de plus faible amplitude dû à la réaction de la structure mise en vibration par le premier pic de force. Les comparaisons simulation-expérience des signaux de force montrent que le modèle permet de reproduire assez bien l'amplitude et la durée du premier pic de force mais que ce n'est pas le cas pour le deuxième pic de force qui est plus difficilement prédictible car il dépend de tout ce qui s'est passé avant. Les écarts observés peuvent notamment s'expliquer par l'incertitude sur les valeurs

des paramètres de masse (masses modales et masse physique de la barre ; masse physique de l'impacteur) ainsi que par un mouvement d'ensemble de la barre plus compliqué qu'une simple translation.

## RECOMMANDATIONS

Plusieurs perspectives et applications sont envisageables pour donner suite aux travaux présentés dans cette thèse. Les recommandations formulées ci-dessous sont présentées en quatre sous-sections distinctes :

- la première sous-section présente des applications envisageables de la méthode de caractérisation sous impact de couches d'élastomère;
- la deuxième section présente des recommandations spécifiques à la réduction du bruit d'impact de la barre de chenille, sur le plan expérimental;
- la troisième section présente des recommandations générales sur le plan des modélisations;
- la quatrième section présente des applications rendues possibles par les propriétés du modèle SOb.

### **Applications de la méthode de caractérisation sous impact de couches d'élastomère**

Des applications de la méthode expérimentale développée spécifiquement pour caractériser le comportement sous impact de couches minces d'élastomère sont envisageables dans plusieurs domaines.

Dans le domaine de la réduction du bruit d'impact par ajout d'une couche d'élastomère, il serait intéressant de tester d'autres épaisseurs de couches dans le but de caractériser l'influence de l'épaisseur sur l'évolution des paramètres qui décrivent le matériau. La caractérisation de couches d'élastomère plus faibles serait notamment nécessaire dans des mécanismes (tel que le système d'entraînement par chenille de la motoneige) où les contraintes d'encombrement minimal et de masse minimale sont importantes. La caractérisation de couches d'élastomère plus épaisses serait notamment nécessaire dans les systèmes mécaniques mettant en jeu des efforts importants dans le but d'obtenir de plus grandes réductions d'amplitude de la force d'impact.

Toujours dans le domaine de la réduction du bruit d'impact par ajout d'une couche d'élastomère, la méthode de caractérisation pourrait être utilisée pour caractériser des couches dont la composition est plus complexe. En particulier pour l'application à la réduction de bruit des chenilles de motoneige, il serait possible de tester des couches d'élastomère hétérogènes renforcées par de fines couches de renforts en fibre de verre (telles que la couche de la face intérieure de la chenille).

Ces développements réalisés dans un contexte de réduction à la source du bruit d'impact pourraient être appliqués à d'autres domaines. La méthode pourrait notamment être appliquée à la caractérisation sous impact de semelles orthopédiques dans le but de mieux quantifier les paramètres permettant d'améliorer le confort dans des conditions transitoires de chargement correspondant à la marche ou à la course. Dans le domaine de l'acoustique musicale, la méthode expérimentale pourrait être appliquée pour caractériser le comportement des têtes de maillet en caoutchouc utilisées pour frapper des barres de xylophones ou de marimba. Une autre application en acoustique musicale est celle de la caractérisation du comportement sous impact des couches de feutre des marteaux de piano.

### **Recommandations sur le plan expérimental**

Pour l'application à la réduction du bruit d'impact de la barre de chenille, d'autres configurations expérimentales pourraient être étudiées dans le but de se rapprocher des conditions réelles de fonctionnement des barres de la chenille. Trois types de modifications sont envisageables pour les nouvelles configurations étudiées : (1) modification des conditions aux limites; (2) modification des positions d'impact et (3) modification de l'impacteur. Étant donné que les impacts générés sur la chenille en conditions réelles de fonctionnement sont dus aux chocs de divers éléments (roues et rails en particulier) et que les conditions aux limites de la barre et les positions d'impact sont variables au cours du fonctionnement de la chenille, plusieurs choix sont possibles pour chacune des trois modifications envisagées.

Pour le premier type de modifications concernant les conditions aux limites, les nouvelles conditions étudiées pourraient être des conditions d'appuis simples au niveau des agrafes (qui correspondent à la position du passage des rails) ou au niveau des extrémités de la barre (qui correspondent à la position de la plupart des roues de guidage).

De la même manière, pour le deuxième type de modifications concernant les positions d'impact sur la barre, il serait intéressant d'étudier des positions d'impact qui correspondent à des positions de passage des différents éléments du système de guidage (roues et rails) et d'entraînement (disques de barbotins, dents d'entraînement) de la chenille.

Pour le troisième type de modifications concernant l'impacteur, d'autres matériaux et d'autres géométries plus proches de ceux rencontrés en conditions réelles de fonctionnement seraient à considérer. Sur le plan expérimental, la caractérisation des couches d'élastomère pourrait être effectuée en remplaçant l'embout (bille en acier) du marteau par un embout dont la géométrie et le matériau correspondent à ceux d'une roue de guidage ou d'un rail.

Pour l'application plus générale à la réduction du bruit d'impact, la méthode demanderait à être validée expérimentalement sur d'autres types de structures vibrantes afin d'augmenter la représentativité de la méthode. En particulier, des structures de type plaque (différentes géométries, différents matériaux), dont l'utilisation dans les systèmes mécaniques est très courante, seraient à envisager.

### **Recommandations sur le plan des modélisations**

Sur le plan des modélisations, deux recommandations principales sont énoncées ci-dessous. D'une part, ces recommandations sont applicables de manière spécifique au cas de la réduction du bruit d'impact de la barre de chenille dans le but d'expliquer les différences simulation-expérience observées. D'autre part, ces recommandations sont applicables de

manière plus générale à la réduction du bruit d'impact de structures vibrantes dans le but d'augmenter la portée de la méthode.

La première recommandation est une analyse approfondie de la sensibilité des paramètres du modèle, en particulier pour les paramètres de masse. En effet, des études préliminaires des paramètres de masse (masses physiques des structures et masses modales de la structure vibrante) ont montré que de faibles variations de ces paramètres aboutissent à de grandes modifications des signaux de force obtenus.

La seconde recommandation est l'utilisation d'un modèle analytique ou numérique de la structure de manière à étudier la sensibilité du résultat aux différents paramètres qui décrivent la structure.

### **Applications rendues possibles par les propriétés du modèle SOb**

Les propriétés du modèle SOb, qui a été développé dans le domaine de la simulation sonore par modèles physiques, permettent des applications plus générales qui dépassent le domaine initial de la réduction du bruit d'impact.

L'approche classique utilisée dans SOb pour la simulation sonore des bruits d'impact est d'écouter les signaux de vibrations (position ou vitesse) de la structure au point d'impact. Au lieu d'écouter la vibration, le rayonnement acoustique pourrait être modélisé. La méthode consisterait, dans un premier temps, à calculer les déplacements de chaque point de la structure à partir des déplacements modaux au point d'impact et des modes propres obtenus par l'AME. Dans un deuxième temps, l'intégrale de Rayleigh serait utilisée pour calculer la pression acoustique à partir des vibrations de l'ensemble de la structure.

Le modèle SOb avait fait l'objet de deux implémentations : une implémentation sous forme de programmes MATLAB (permettant de modéliser l'impact d'une masse sur une structure vibrante) et une implémentation plus complète sous forme de modules Pure Data (Pd). Les

deux paragraphes suivants présentent des applications rendues possibles par l'utilisation de chacune de ces implémentations.

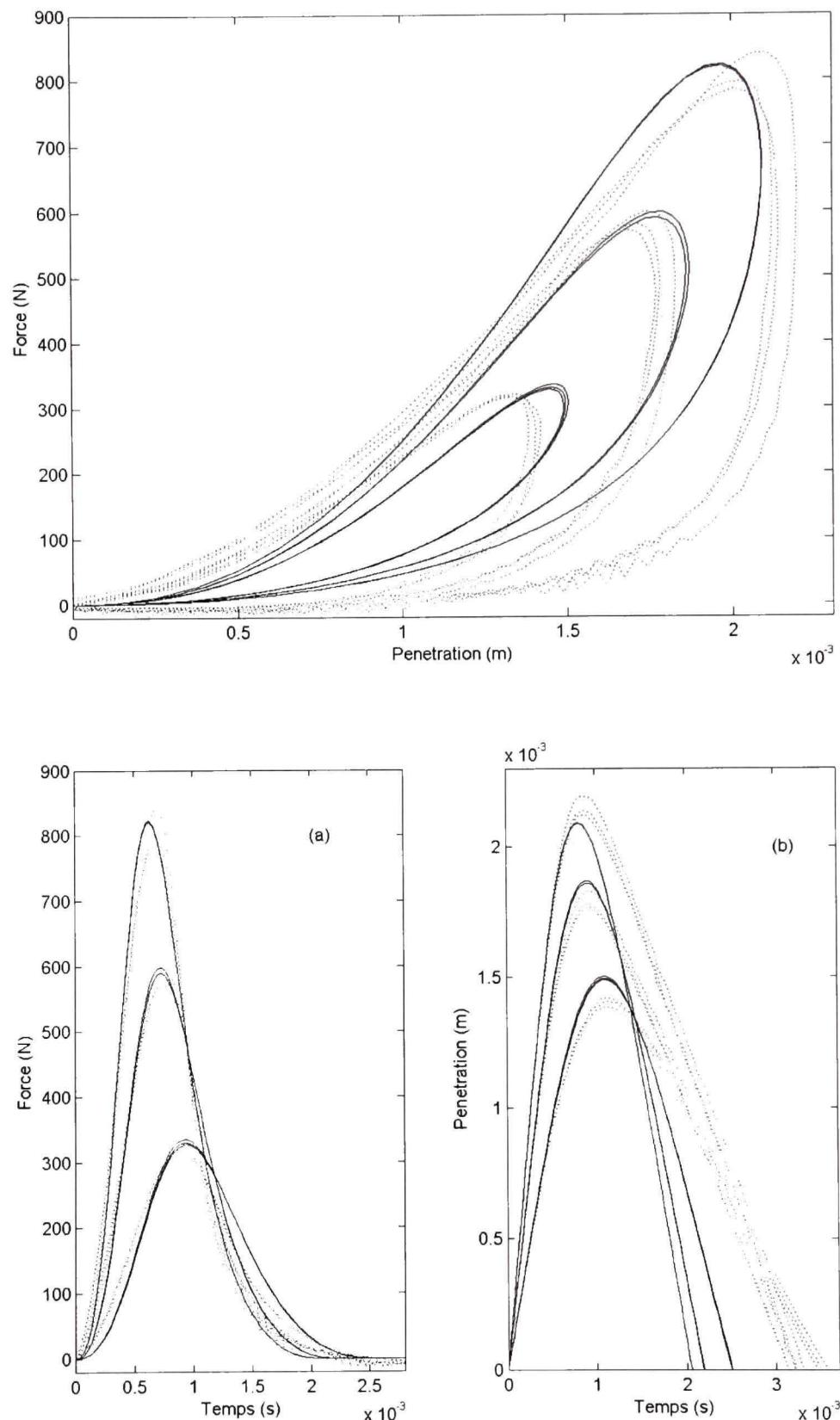
En utilisant l'implémentation sous MATLAB (impact d'une masse sur une structure vibrante), étant donné que le modèle permet de simuler le cas de l'impact sur une structure qui vibre déjà, il pourrait sans difficulté majeure être étendu au cas d'impacts répétés.

En utilisant l'implémentation sous forme de modules Pd, le cas plus général de l'impact (ou d'impacts répétés) entre **deux structures vibrantes** pourrait être modélisé. De plus, les temps de calcul étant limités (car le nombre d'itérations requises à chaque pas de temps pour la résolution numérique reste faible), l'utilisation de cette implémentation permettrait des études en temps réel. Bien que l'aspect temps réel n'ait pas été notre priorité, il est certain que la possibilité d'écouter, en temps réel, l'effet de la modification d'un paramètre physique sur le bruit d'impact généré est intéressante car elle permet d'intégrer l'acoustique dès les premiers stades de conception (ou de « re-conception ») d'un mécanisme.

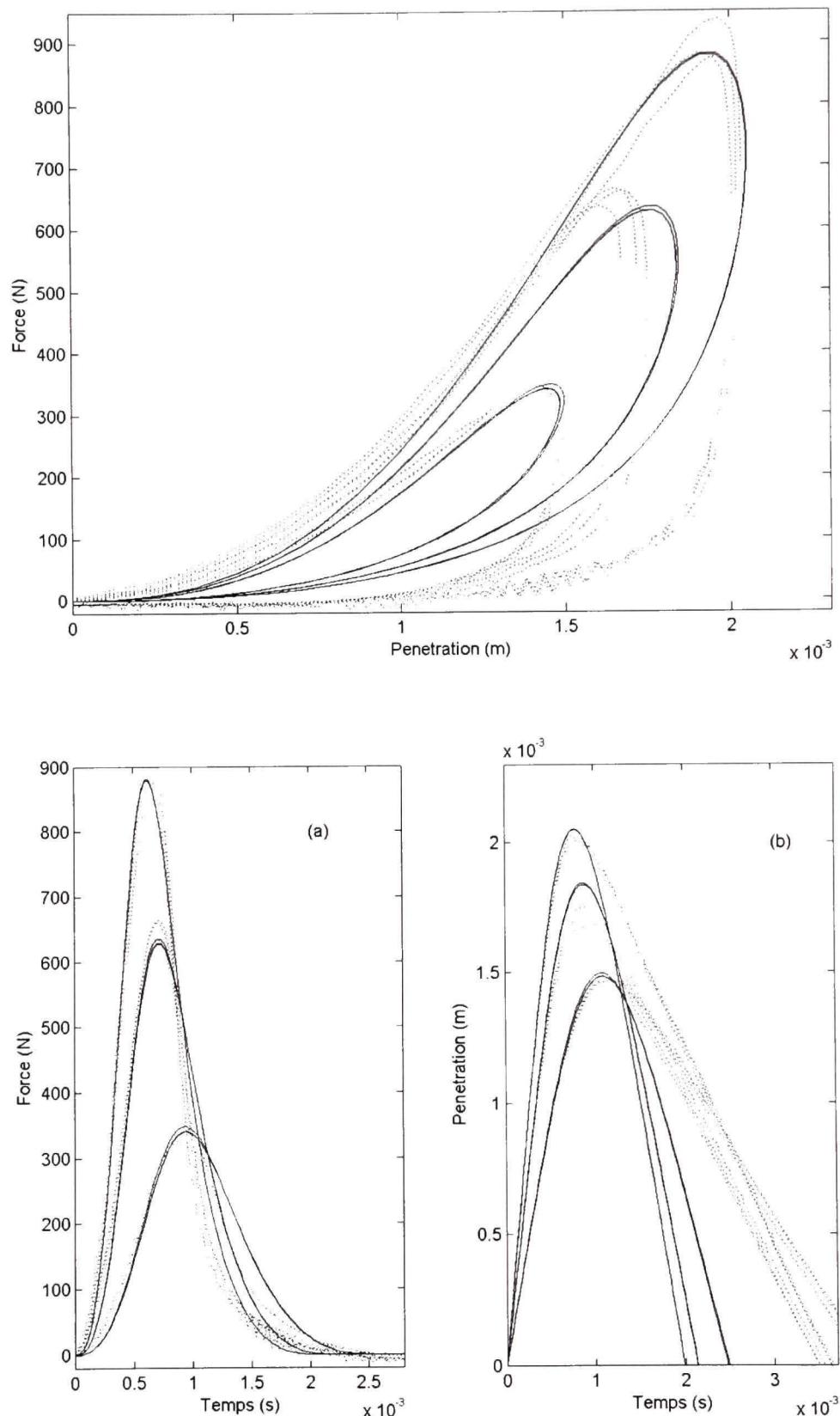
## ANNEXE I

### CARACTÉRISATION DE COUCHES MINCES D'ÉLASTOMÈRE : COMPARAISONS SIMULATION-EXPÉRIENCE

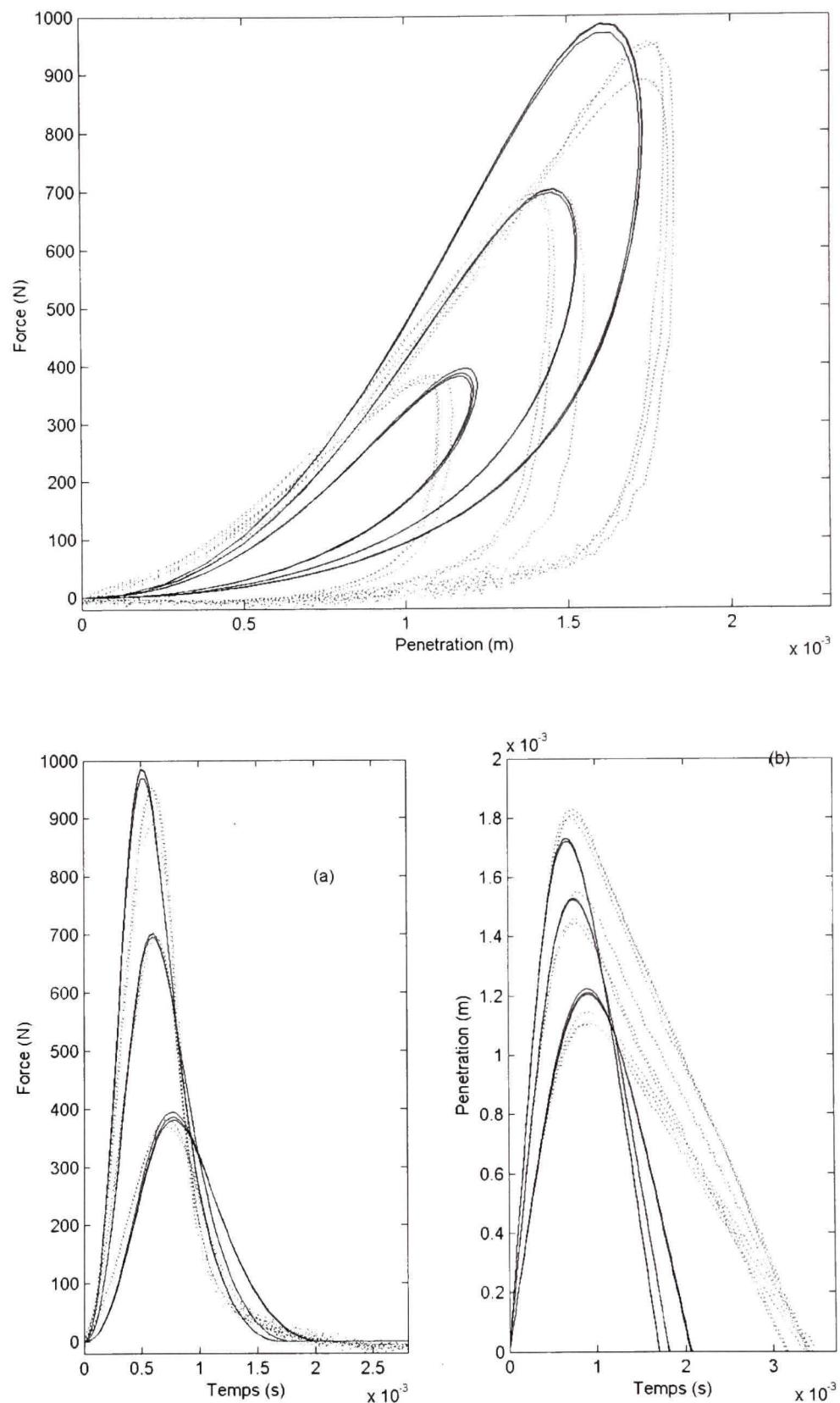
Cette annexe présente, pour chacune des huit couches testées, les comparaisons entre signaux mesurés et signaux simulés pour les trois vitesses d'impact testées. Chaque figure comprend trois fenêtres : la fenêtre en haut présente les diagrammes force-compression; les fenêtres en bas présentent les signaux temporels de force (à gauche) et de pénétration (à droite). Chaque fenêtre présente un total de dix-huit courbes : neuf courbes mesurées (en pointillés) et les neuf courbes simulées correspondantes (en traits pleins).



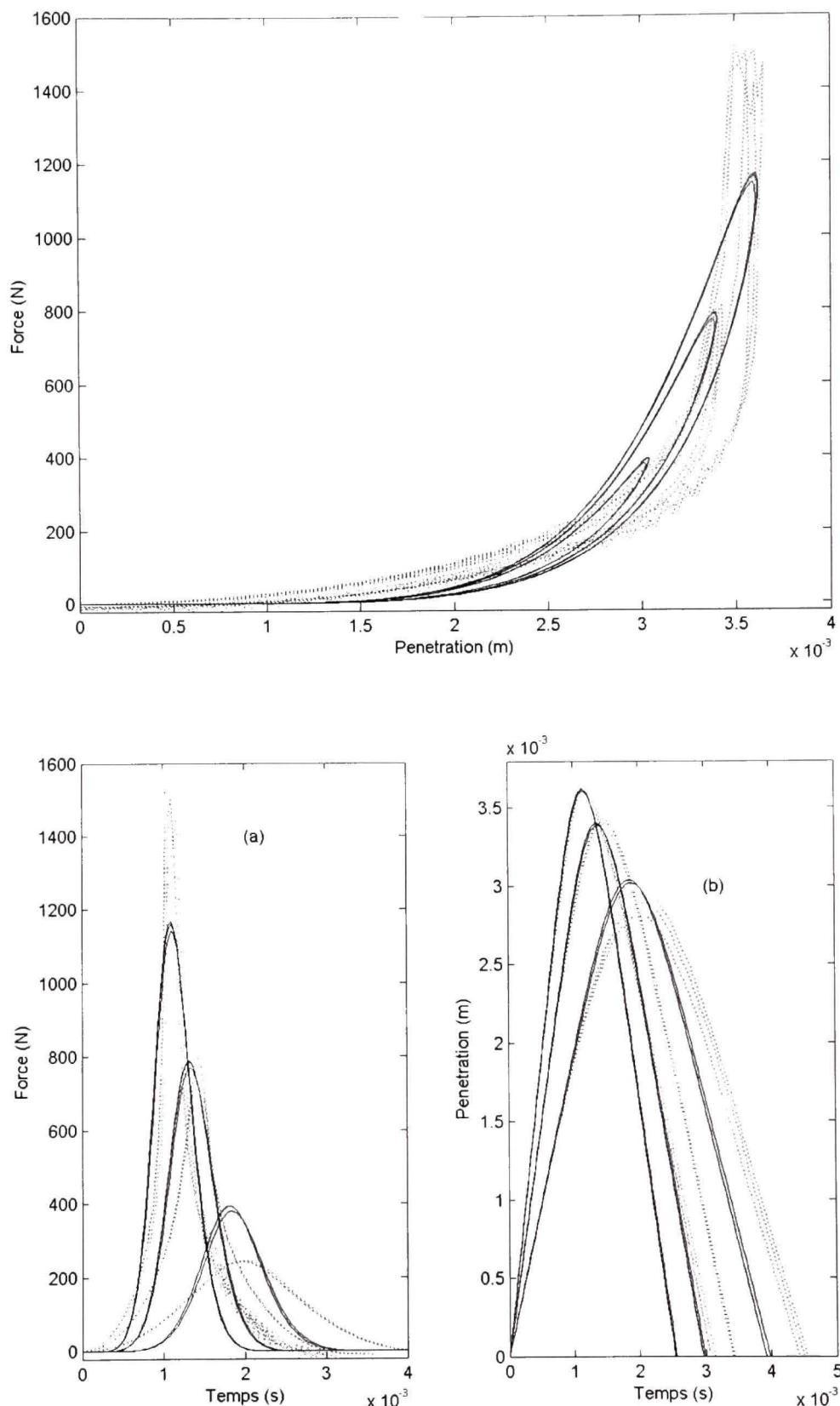
**Figure-A I-1 Comparaisons simulation(—)-expérience(---). Couche #1.**



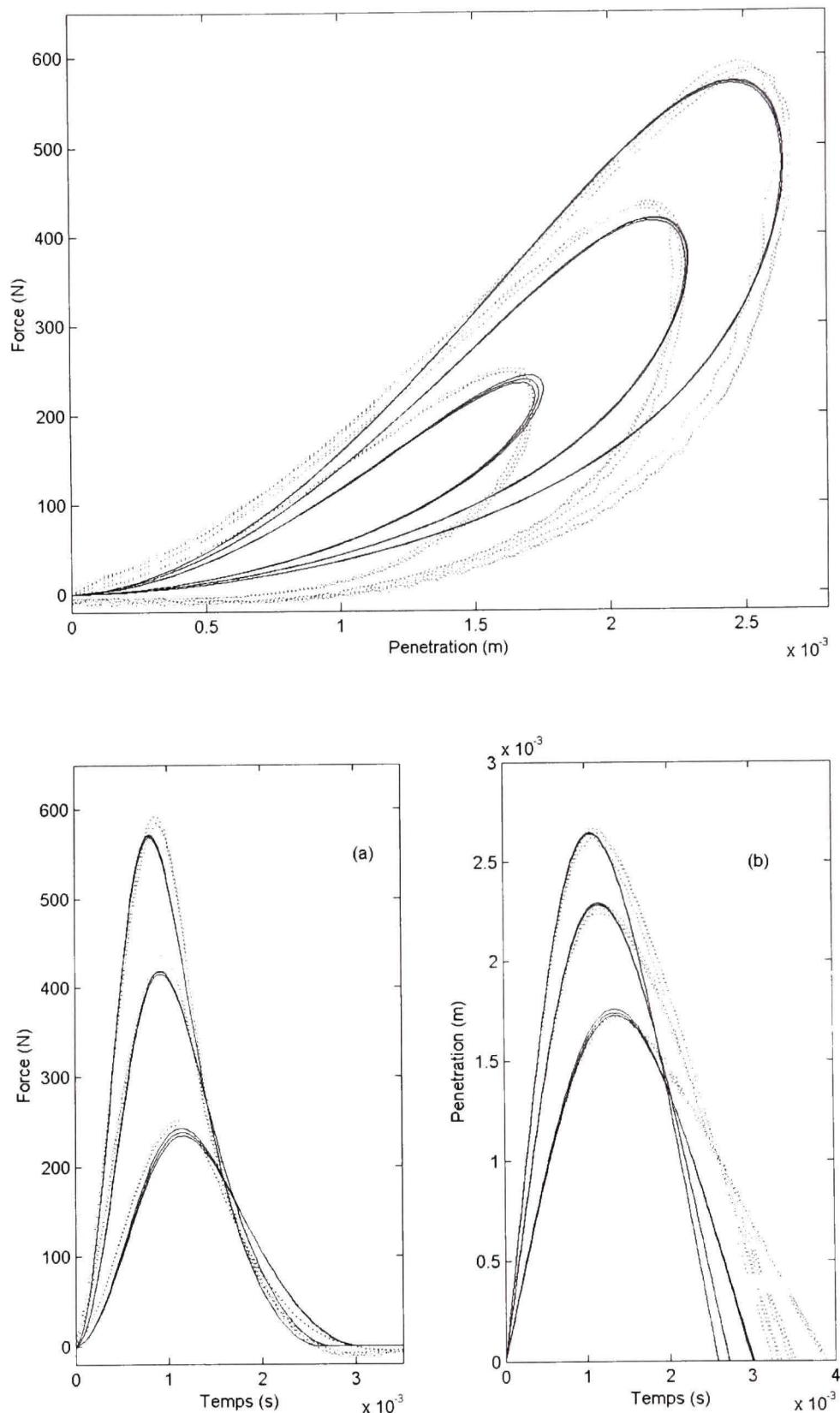
**Figure-A I-2 Comparisons simulation(—)-expérience(---). Couche #2.**



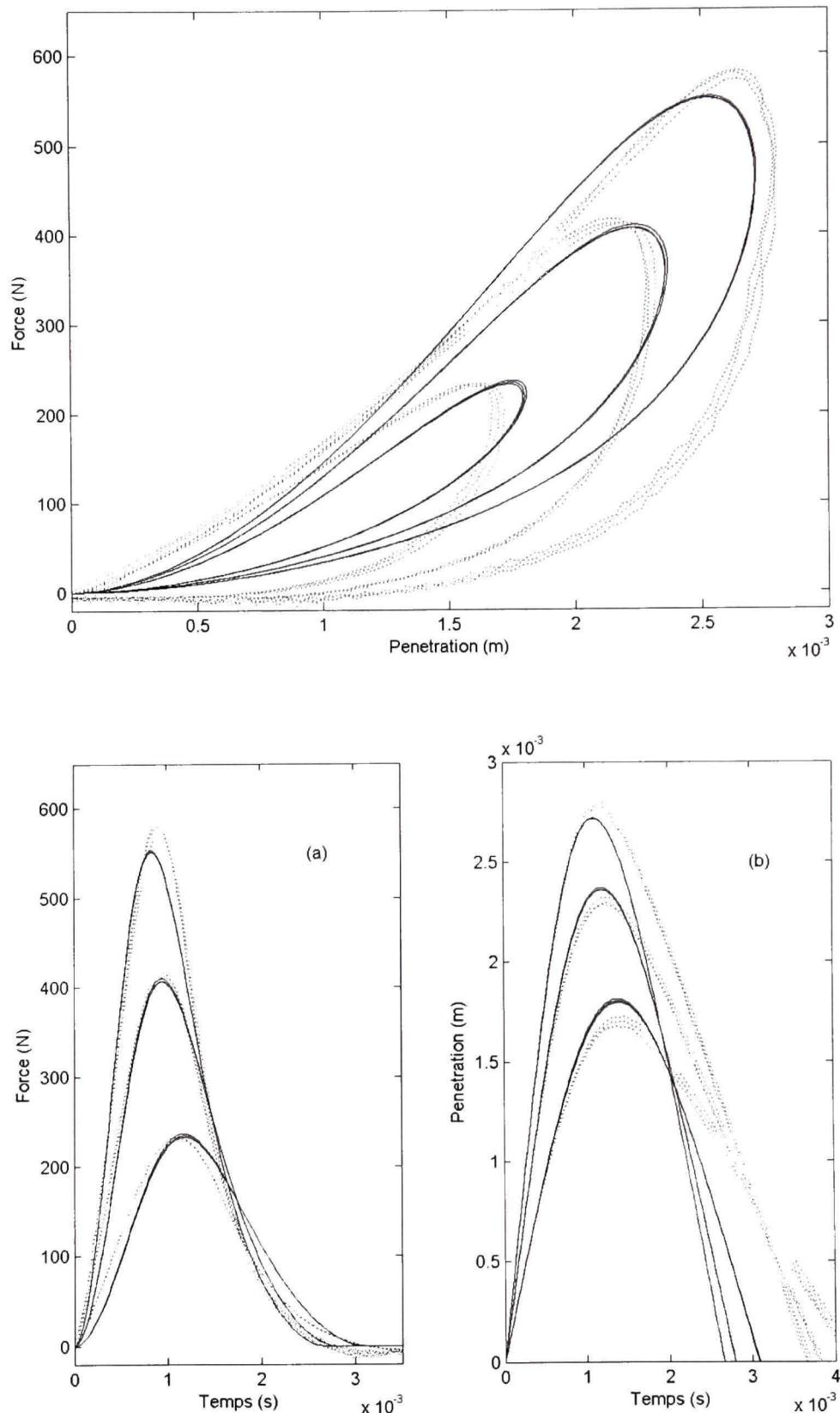
**Figure-A I-3 Comparaisons simulation(—)-expérience(---). Couche #3.**



**Figure-A I-4 Comparisons simulation(—)-expérience(---). Couche #4.**



**Figure-A I-5 Comparaisons simulation(—)-expérience(---). Couche #5.**



**Figure-A I-6 Comparaisons simulation(—)-expérience(---). Couche #6.**

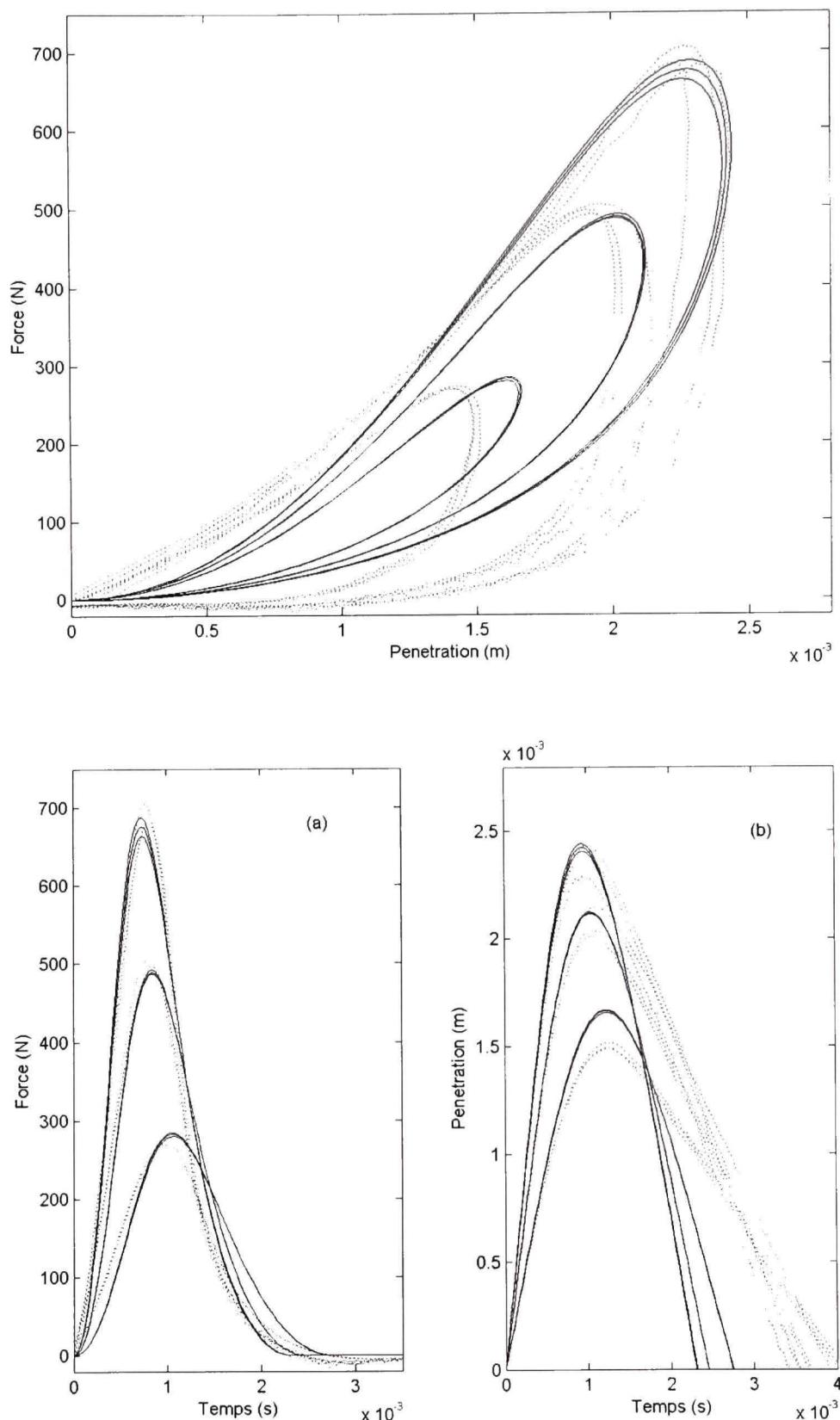
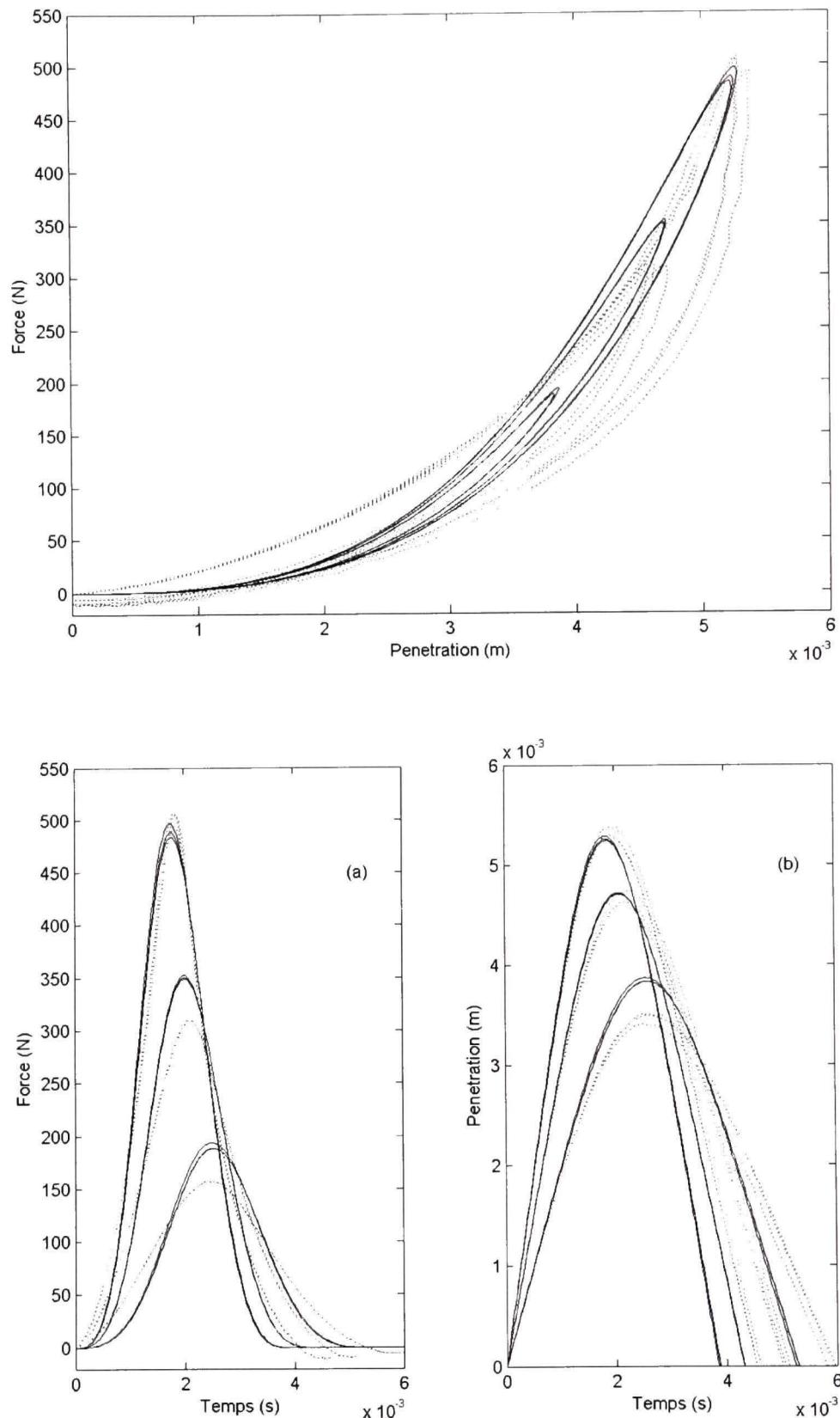


Figure-A I-7 Comparaisons simulation(—)-expérience(---). Couche #7.



**Figure-A I-8 Comparaisons simulation(—)-expérience(---). Couche #8.**

## ANNEXE II

### PROGRAMME IMPACT\_MODAL\_JPA1.M

Cette annexe présente comment le programme impact\_modal.m du projet SOb a été modifié pour prendre en compte le déplacement **physique** de la structure au point d'impact (au lieu du déplacement modal). Les lignes créées ou modifiées sont suivies de % modification JPA.

```
% file impact_modal:  
% this is the implementation of a multi-mass resonator  
% excited by a non-linear damped hammer  
% main author: Federico Avanzini for the SOb european project.  
%  
% Copyright 2002 Federico Avanzini (avanzini@dei.unipd.it)  
%  
% The Matlab script contained herein is the result of a joint effort from  
% several authors in the context of the IST-FET Disappearing Computer  
proactive  
% project SOb-the Sounding Object (IST-2000-25287,  
http://www.soundobject.org)  
% at the University of Verona, Italy (http://www.univr.it).  
%  
% The main author of the scripts is Federico Avanzini  
(avanzini@dei.unipd.it).  
% Other authors (either writers or designers) are:  
%  
% Matthias Rath (rath@sci.univr.it)  
% Davide Rocchesso (rocchesso@sci.univr.it)  
% Gianpaolo Borin (gianpaolo.borin@tin.it)  
%  
% This file is part of the SOb Matlab scripts.  
%  
% The SOb Matlab scripts are free software; you can redistribute them  
and/or  
% modify them under the terms of the GNU General Public License as  
% published by the Free Software Foundation; either version 2 of  
% the License, or (at your option) any later version.  
%  
% The SOb Matlab scripts are distributed in the hope that they will be  
useful,  
% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of  
MERCHANTABILITY  
% or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License  
for  
% more details.
```

```

%
% You should have received a copy of the GNU General Public License along
% with the SOb MAtlab scripts; if not, write to the Free Software
Foundation,
% Inc., 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
%
%%%%%
clc; clear all; close all

global Fs;
%gravity=9.8;           % external acceleration on hammer
gravity=0; %Modification JPA

Fs=44100;               % sampling rate
alfar = 2*Fs;           % bilinear transform constant for resonator
alfah = 2*Fs;           % bilinear transform constant for hammer

%%%%% the Resonator %%%%%%
SPRING=6;   % no. of partials
%Modes_propres_norm_m_unit: Matrice des modes propres normalisés par
rapport à une masse unitaire
% taille 19ptsx6modes : %Modification JPA
Modes_propres_norm_m_unit= [3.245442780757678, -
3.360533959976935, 2.70191226799021, -1.111487040204464, 1.921303725329905, -
1.02537800897377; ...
2.569515751981102, -
1.969850826520449, 1.094028303821255, 0.058370934634798, -
0.143714884250977, 0.578107916884384; ...
1.54744841717686, -0.354187175669443, -
0.802924779882353, 1.025630545591856, -1.661696836587151, 1.170037972212595;
...
0.870550992611561, 0.71777995093947, -
1.93574413301336, 1.49612404968624, -2.038137342389224, 0.90115556254046; ...
-0.192257668018694, 2.000031751888686, -
2.177275997569129, 0.68755964724667, 0.955090011075402, -1.500340036962948;
...
-0.812065738364846, 2.344201830059877, -1.38195881132012, -
0.493654652064202, 2.4385514601714, -1.601295661149978; ...
-1.470487613342798, 2.341410237488552, -0.197156610848559, -
1.071366590877824, 2.068081654345271, 0.664847318968113; ...
-1.836720367973459, 1.926280138553465, 0.996070735531866, -
1.398989572520783, 0.607427619411522, 2.015620051829931; ...
-2.232717908976188, 1.071273324188765, 2.269346606318808, -
0.962426476776979, -2.000512424438774, 1.559511519070934; ...
-
2.319291656033029, 0.042594391201232, 2.560466167046947, 0.106705825325232, -
2.709278559321088, -1.078582377777592; ...
-2.272886568824196, -
0.820387555860823, 2.269660862592734, 0.764263821825118, -2.159442095907616, -
1.760782701787411; ...
-1.971990378909826, -
1.699993410680532, 0.894284748284755, 1.403514586775408, 0.823293746140069, -
1.797956731251867; ...

```

```

-1.612031653942679, -2.272118411074451, -
0.166695782614411, 1.050581471312434, 1.96344246917702, -0.646271065948302;
...
-0.952627846105859, -2.324184798091756, -1.604664133263368, -
0.245297524243489, 2.454337238021349, 2.260399300462209; ...
-0.307715794805997, -2.023785643218702, -2.180599986610868, -
0.73243899201332, 0.935997354155255, 1.39147916631164; ...
0.633972686849712, -1.008199194875772, -1.981202760926767, -
1.397560658538054, -1.234881242083271, -0.232815811661673; ...
1.712749848995274, 0.647456457489638, -0.454215489128391, -
0.875575141295791, -1.687605056261768, -2.590822306361634; ...

2.343594280640559, 1.635245886100052, 0.715111047742218, 0.44711056851848, -
0.627078731792532, -0.890196039599643; ...

2.709063879446182, 2.19705226579251, 1.530960021859226, 0.703463279910458, 1.3
76129724673078, 0.985091794770721];

%NB: condition masses modales>0 au point d'impact. Si signe <0, on prend
%l'opposé du mode %Modification JPA
modes_propres_milieu=Modes_propres_norm_m_unit(10,:);
for ii=1:6
    if modes_propres_milieu(ii)<0
        Modes_propres_norm_m_unit(:,ii)=-Modes_propres_norm_m_unit(:,ii);
    end
end

m=1./Modes_propres_norm_m_unit(10,:); %10=pos. milieu.
partials=[90.114, 238.74, 436.76, 609.883, 1236, 1554.6;]';
%fréquences des 6 modes
k = m.* (2*pi*partials).^2 % oscillator elastic constants
ksi_6modes=[0.0059, 0.00728, 0.01264, 0.02581, 0.02722, 0.02573;]';
%amortissements des 6 modes
r =m.* (2*ksi_6modes*2*pi.*partials); %type r=m*2*ksi*wn % oscillator
damping coefficients

%%%% the Contact Force (be with you) %%%%%%
mh=.1; % le-3; % hammer mass
%exemple pour specimen #3: n=2.2; kh=9.143e8; mu=.3; %Modification JPA
kh=9.143e8; % el. constant
mu=.3; lambda=mu*kh; % damping weight (see Eq. (12) in Marhefka
and Orin)
n=2.2; % exponent of non-linearity
V=2; % initial hammer velocity
H= -V/Fs; % initial hammer position

%%%% sample duration %%%%%%
%te=2*m(1)/r(1); % 1/e decay time
smplength=5000; %round(6*te*Fs); % sound length in samples

%%%% initializations %%%%%%
x_ol=zeros(1,SPRING); % initial osc. positions
dotx_ol=zeros(1,SPRING); % initial osc. velocities

```



```

xmodes=zeros(SPRING,smplength);%JPA
%=zeros(1,smplength);      %
%=zeros(1,smplength);      %

%%%%%%%%% a counter%%%%%%%%%
percent = 0;
m1 = 0;
m2 = 0;
N100 = round(smplength/100);
N10 = round(smplength/10);
fprintf(1, '\n percentage computed.... \n 0');
%%%%%%%%%%%%%%

for i = 1:smplength

    past_o=[x_o1;dotx_o1;fh1*ones(1,SPRING)]; % matrix of past values
    (oscillator dynamics)
    for io=1:SPRING
        x_os(io)=a_o(io,:)*past_o(:,io);           % computable part of
        dotx_os(io)=b_o(io,:)*past_o(:,io);           % resonator dynamics
    end

    past_h=[x_h1;dotx_h1;f_tot_ham1];    % vector of past values (hammer
    dynamics)
    x_hs=a_h*past_h;                  % computable part of
    dotx_hs=b_h*past_h;                % hammer dynamics

    %%% nonlinear felt %%%%%%
    %[fh,err,count] = nlsheared(x_hs-sum(x_os),dotx_hs-
    sum(dotx_os),fh1,lambda,kh,n,K);
    [fh,err,count] = nlsheared(x_hs-sum(1./m' .*x_os),
    dotx_hs-sum(1./m' .*dotx_os), fh1, lambda, kh, n, K); % modification JPA

    f_tot_ham= fh -mh*gravity;

    %%%% positions and velocities %%%%
    x_o=x_os+ den_o'*fh;
    dotx_o=dotx_os+ alfar*den_o'*fh;
    x_h=x_hs -den_h*(f_tot_ham);
    dotx_h=dotx_hs -alfah*den_h*(f_tot_ham);

    %%%% state update %%%%%%
    fh1 = fh;  f_tot_ham1=f_tot_ham;
    x_o1=x_o;  dotx_o1=dotx_o;
    x_h1=x_h;  dotx_h1=dotx_h;

    %%%% output signals %%%%%%
    f(i) = fh;
    xht(i) = x_h;
    xsumt(i) = sum(x_o);

```

```

xmodes(:,i)=x_o; %modification JPA
X_phys_impact_point(i)=sum(1./m'.*x_o); %PHYSICAL position
of the structure at impact point (modification JPA )

%%%%% a counter %%%%%%
m1 = m1+1;
m2 = m2+1;
if (m1>N100 & m2<N10)
    m1=0;
    fprintf(1, '.');
end
if m2>N10
    m1=0;
    m2=0;
    percent = percent+10;
    fprintf(1, '\n %d', percent);
end
%%%%%
end

%%%%% write wav file %%%%%%
wavname='object.wav';
wavwrite(xsumt/(1.001*max(abs(xsumt))),Fs,wavname); % MATLAB

%%%%%
%final plots

win1 = 1:smplength; % windows for the two plots
win2 = 1:200;

figure (1);
clf
ax(1)=subplot(2,1,1)
%plot(time(win1),xsumt(win1),'r');hold all
plot(time(win1),X_phys_impact_point(win1),'r'); %Modification
JPA
hold on;
plot(time(win1),xht(win1),'b');
grid on;
xlabel('time [s]')
ylabel('position [m]')
axis([0, time(length(win1)), -max(xht), 1.2*max(xht)]);
legend('resonator displacement', 'hammer position')
hold off;

ax(2)=subplot(2,1,2)
plot(time(win2),f(win2),'b');
grid on;
xlabel('time [s]')
ylabel('force [N]')
legend('contact force')

```

```
hold off
linkaxes(ax, 'x'); zoom on

figure(2)
plot(xht(win2)-X_phys_impact_point(win2),f(win2),'r');hold on;
grid on; %Modification JPA
xlabel('deformation [m]')
ylabel('force [N]')
axis([0 1e-3 -5 max(f)+10])
```

## ANNEXE III

### PROGRAMME IMPACT\_MODAL\_JPA2.M

Cette annexe présente comment le programme impact\_modal.m du projet SOb a été modifié pour prendre en compte :

- le déplacement **physique** de la structure au point d'impact (au lieu du déplacement modal), comme dans l'ANNEXE II;
- le **mouvement d'ensemble** (translation) de la structure dû aux conditions aux limites libres. Ce mouvement d'ensemble est modélisé par la prise en compte d'une masse pure additionnelle (un mode ayant une fréquence nulle et un amortissement nul).

Les lignes créées ou modifiées sont suivies de % modification JPA.

```
% file impact_modal:
% this is the implementation of a multi-mass resonator
% excited by a non-linear damped hammer
% main author: Federico Avanzini for the SOb european project.
%
% Copyright 2002 Federico Avanzini (avanzini@dei.unipd.it)
%
% The Matlab script contained herein is the result of a joint effort from
% several authors in the context of the IST-FET Disappearing Computer
proactive
% project SOb-the Sounding Object (IST-2000-25287,
http://www.soundobject.org)
% at the University of Verona, Italy (http://www.univr.it) .
%
% The main author of the scripts is Federico Avanzini
(avanzini@dei.unipd.it).
% Other authors (either writers or designers) are:
%
% Matthias Rath (rath@sci.univr.it)
% Davide Rocchesso (rocchesso@sci.univr.it)
% Gianpaolo Borin (gianpaolo.borin@tin.it)
%
% This file is part of the SOb Matlab scripts.
%
% The SOb Matlab scripts are free software; you can redistribute them
and/or
% modify them under the terms of the GNU General Public License as
% published by the Free Software Foundation; either version 2 of
% the License, or (at your option) any later version.
%
```

```

% The SOb Matlab scripts are distributed in the hope that they will be
useful,
% but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
MERCHANTABILITY
% or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
for
% more details.
%
% You should have received a copy of the GNU General Public License along
% with the SOb MAtlab scripts; if not, write to the Free Software
Foundation,
% Inc., 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
%
%%%%%%%%%%%%%
%%%%
clc; clear all; close all

global Fs;
%gravity=9.8;           % external acceleration on hammer
gravity=0; %Modification JPA

Fs=44100;               % sampling rate
alfar = 2*Fs;           % bilinear transform constant for resonator
alfah = 2*Fs;           % bilinear transform constant for hammer

%%%%% the Resonator %%%%%%
SPRING=6;   % no. of partials
%Modes_propres_norm_m_unit: Matrice des modes propres normalisés par
rapport à une masse unitaire
                                % taille 19ptsx6modes : %Modification JPA
Modes_propres_norm_m_unit= [3.245442780757678, -
3.360533959976935, 2.70191226799021, -1.111487040204464, 1.921303725329905, -
1.02537800897377; ...
2.569515751981102, -
1.969850826520449, 1.094028303821255, 0.058370934634798, -
0.143714884250977, 0.578107916884384; ...
1.54744841717686, -0.354187175669443, -
0.802924779882353, 1.025630545591856, -1.661696836587151, 1.170037972212595;
...
0.870550992611561, 0.71777995093947, -
1.93574413301336, 1.49612404968624, -2.038137342389224, 0.90115556254046; ...
-0.192257668018694, 2.000031751888686, -
2.177275997569129, 0.68755964724667, 0.955090011075402, -1.500340036962948;
...
-0.812065738364846, 2.344201830059877, -1.38195881132012, -
0.493654652064202, 2.4385514601714, -1.601295661149978; ...
-1.470487613342798, 2.341410237488552, -0.197156610848559, -
1.071366590877824, 2.068081654345271, 0.664847318968113; ...
-1.836720367973459, 1.926280138553465, 0.996070735531866, -
1.398989572520783, 0.607427619411522, 2.015620051829931; ...
-2.232717908976188, 1.071273324188765, 2.269346606318808, -
0.962426476776979, -2.000512424438774, 1.559511519070934; ...
-
2.319291656033029, 0.042594391201232, 2.560466167046947, 0.106705825325232, -
2.709278559321088, -1.07858237777592; ...

```

```

-2.272886568824196, -
0.820387555860823, 2.269660862592734, 0.764263821825118, -2.159442095907616, -
1.760782701787411; ...
-1.971990378909826, -
1.699993410680532, 0.894284748284755, 1.403514586775408, 0.823293746140069, -
1.797956731251867; ...
-1.612031653942679, -2.272118411074451, -
0.166695782614411, 1.050581471312434, 1.96344246917702, -0.646271065948302;
...
-0.952627846105859, -2.324184798091756, -1.604664133263368, -
0.245297524243489, 2.454337238021349, 2.260399300462209; ...
-0.307715794805997, -2.023785643218702, -2.180599986610868, -
0.73243899201332, 0.935997354155255, 1.39147916631164; ...
0.633972686849712, -1.008199194875772, -1.981202760926767, -
1.397560658538054, -1.234881242083271, -0.232815811661673; ...
1.712749848995274, 0.647456457489638, -0.454215489128391, -
0.875575141295791, -1.687605056261768, -2.590822306361634; ...
2.343594280640559, 1.635245886100052, 0.715111047742218, 0.44711056851848, -
0.627078731792532, -0.890196039599643; ...
2.709063879446182, 2.19705226579251, 1.530960021859226, 0.703463279910458, 1.3
76129724673078, 0.985091794770721];

```

%NB: condition masses modales>0 au point d'impact. Si signe <0, on prend %l'opposé du mode %Modification JPA

```

modes_propres_milieu=Modes_propres_norm_m_unit(10,:);
for ii=1:6
    if modes_propres_milieu(ii)<0
        Modes_propres_norm_m_unit(:,ii)=-Modes_propres_norm_m_unit(:,ii);
    end
end

m=1./Modes_propres_norm_m_unit(10,:); %10=pos. milieu.
partials=[90.114, 238.74, 436.76, 609.883, 1236, 1554.6;]';
%fréquences des 6 modes
k = m.* (2*pi.*partials).^2 % oscillator elastic constants
ksi_6modes=[0.0059, 0.00728, 0.01264, 0.02581, 0.02722, 0.02573;]';
%amortissements des 6 modes
r =m.* (2*ksi_6modes*2*pi.*partials); %type r=m*2*ksi*wn % oscillator damping coefficients

SPRING=6+1; % no. of partials %NB: on ajoute une masse pure
%Modification JPA
m(2:7)=m(1:6); %Modification JPA
m(1)= .354; %Masse pure = masse physique de la barre=354g
%Modification JPA

k(2:7)=k(1:6); %Modification JPA
k(1)= 0; %w^2=0 pour Masse pure %Modification JPA
r(2:7)=r(1:6); %Modification JPA
r(1)= 0; %amort=0 pour Masse pure %Modification JPA

```

```

%%%% the Contact Force (be with you) %%%%%%
mh =.1; % 1e-3; % hammer mass
%exemple pour specimen #3: n=2.2; kh=9.143e8; mu=.3; %Modification JPA
kh=9.143e8; % el. constant
mu=.3; lambda=mu*kh; % damping weight (see Eq. (12) in Marhefka
and Orin) % exponent of non-linearity
n=2.2;
V=2; % initial hammer velocity
H= -V/Fs; % initial hammer position

%%%% sample duration %%%
%te=2*m(1)/r(1); % 1/e decay time
smplength=5000; %round(6*te*Fs); % sound length in samples

%%%% initializations %%%%%%
x_ol=zeros(1,SPRING); % initial osc. positions
dotx_ol=zeros(1,SPRING); % initial osc. velocities
x_os=zeros(1,SPRING); % initial osc. positions (history)
dotx_os=zeros(1,SPRING); % initial osc. velocities (history)

x_h1=H; % initial hammer position
dotx_h1 =V; % initial hammer velocity
fhl=0; % initial collision force
f_tot_ham1=0; % initial total force on hammer

%%%% resonator dynamics %%%
% m \ddot{x} + r \dot{x} + k x = fh; <--- differential eq. for each mass of
the res.
% state variable (matrix) representation
% / m \dot(\dot{x}) + r dotx + k x = fh; <--- for each mass of the res.
% \ \dot(x) = dotx;
% Replacing \dot with alfar\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}:
% x(n) = a_o [x(n-1), dotx(n-1), fh(n-1)]^T + den_o fh(n);
% dotx(n) = b_o [x(n-1), dotx(n-1), fh(n-1)]^T + alfar den_o fh(n);
%%%%%%%
den_o = 1./(alfar^2*m + alfar*r + k);
a_o=diag(den_o)*[(1./den_o-2*k), 2*alfar*m,ones(SPRING,1)];
b_o=diag(den_o)*alfar*[-2*k,(2*alfar*m-1./(alfar*den_o)),ones(SPRING,1)];

%%%% hammer dynamics %%%
% f_tot_ham= fh - mh*gravity; <--- total force acting on hammer
% m \ddot{x} = - f_tot_ham; <--- differential eq.
% state variable representation:
% m \dot(\dot{x}) = - f_tot_ham;
% \dot(x) = dotx;
% Replacing \dot with alfar\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}:
% x(n) = a_h [x(n-1), dotx(n-1), f_tot_ham(n-1)]^T - den_h f_tot_ham(n);
% dotx(n) = b_h [x(n-1), dotx(n-1), f_tot_ham(n-1)]^T - alfar den_h
f_tot_ham(n);
%%%%%%%
den_h=1/(alfar^2*mh);
a_h=[1,2/alfar,-den_h];

```

```

b_h=[0,1,-alfah*den_h] ;

%%%%% nonlinear felt (see nlsheared.m) %%%%%%%%
%K=[(-den_h-sum(den_o)), (-alfah*den_h-alfar*sum(den_o))]; % K matrix
K=[(-den_h-(den_o(1) + sum(1./m(2:end).*den_o(2:end))), ...
     (-alfah*den_h-alfar*(den_o(1) +
sum(1./m(2:end).*den_o(2:end))))]; % %Modification JPA
                                %NB: le déplacement de la masse pure x_os(1) est
déjà physique
                                %=> pas de pondération 1/m(1) pour den_o(1)

%%%%% some signals %%%%%%
time=(1:smplength)/Fs;
xsumt=zeros(1,smplength);           % oscill displacement
xht=zeros(1,smplength);            % hammer displacement
f=zeros(1,smplength);              % contact force

xmodes=zeros(SPRING,smplength); %JPA
%=zeros(1,smplength);          %
%=zeros(1,smplength);          %

%%%%% a counter%%%%%
percent = 0;
m1 = 0;
m2 = 0;
N100 = round(smplength/100);
N10 = round(smplength/10);
fprintf(1,' \n percentage computed.... \n 0');

for i = 1:smplength

    past_o=[x_o1;dotx_o1;fh1*ones(1,SPRING)]; % matrix of past values
(oscillator dynamics)
    for io=1:SPRING
        x_os(io)=a_o(io,:)*past_o(:,io);           % computable part of
        dotx_os(io)=b_o(io,:)*past_o(:,io);           % resonator dynamics
    end

    past_h=[x_h1;dotx_h1;f_tot_ham1]; % vector of past values (hammer
dynamics)
    x_hs=a_h*past_h;                % computable part of
    dotx_hs=b_h*past_h;              % hammer dynamics

    %% nonlinear felt %%%%%%
    % [fh,err,count] = nlsheared(x_hs-sum(x_os),dotx_hs-
    sum(dotx_os),fh1,lambda,kh,n,K);

```



```
%%%%%%%%%%%%%
%final plots

win1 = 1:smplength;    % windows for the two plots
win2 = 1:200;

figure (1);
clf
ax(1)=subplot(2,1,1)
%plot(time(win1),xsumt(win1),'r');hold all
plot(time(win1),X_phys_impact_point(win1),'r'); %Modification JPA
hold on;
plot(time(win1),xht(win1),'b');
grid on;
xlabel('time [s]')
ylabel('position [m]')
axis([0, time(length(win1)), -max(xht), 1.2*max(xht)]);
legend('resonator displacement','hammer position')
hold off;

ax(2)=subplot(2,1,2)
plot(time(win2),f(win2),'b');
grid on;
xlabel('time [s]')
ylabel('force [N]')
legend('contact force')
hold off
linkaxes(ax,'x'); zoom on

figure(2)
plot(xht(win2)-X_phys_impact_point(win2),f(win2),'r');hold on; grid on;
%Modification JPA
xlabel('deformation [m]')
ylabel('force [N]')
axis([0 1e-3 -5 max(f)+10 ])
```

## ANNEXE IV

### FRÉQUENCES ET AMORTISSEMENTS MODAUX POUR LES 19 POSITIONS D'IMPACT

Cette annexe présente, pour chacun des six modes considérés, les valeurs des fréquences modales et des amortissements modaux mesurées pour les dix-neuf positions d'impact (les matrices sont donc de taille  $19 \times 6$ ).

Tableau-A IV-1 Fréquences modales – Méthode 1 (maximum du module)

# DDL	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
<b>1</b>	90	238,75	436,5625	607,1875	1233,125	1539,688
<b>2</b>	90	238,4375	435,9375	578,4375	1241,25	1544,688
<b>3</b>	90	238,75	436,5625	608,4375	1231,875	1550,625
<b>4</b>	90	238,75	436,5625	607,5	1235	1540,938
<b>5</b>	90	238,75	436,25	604,6875	1242,813	1546,25
<b>6</b>	90	238,4375	435	610,9375	1236,563	1550,625
<b>7</b>	90	238,4375	434,0625	608,75	1232,188	1563,125
<b>8</b>	90	238,4375	435,9375	605,625	1164,063	1558,438
<b>9</b>	90	238,4375	436,5625	602,5	1246,25	1541,25
<b>10</b>	90	235,3125	435,9375	578,125	1238,125	1646,563
<b>11</b>	90	238,75	435,9375	611,5625	1224,063	1541,25
<b>12</b>	90	238,4375	434,0625	605,3125	1246,875	1555,313
<b>13</b>	90	238,4375	440,3125	605,3125	1248,75	1488,438
<b>14</b>	90	238,4375	435,9375	585,3125	1220,938	1569,688
<b>15</b>	90	238,75	436,5625	614,6875	1220	1540,625
<b>16</b>	90	238,75	436,25	608,125	1245,938	1444,688
<b>17</b>	90	238,75	432,8125	600,9375	1228,438	1557,5
<b>18</b>	90	238,75	438,125	578,4375	1198,75	1524,688
<b>19</b>	90	238,75	437,5	578,125	1247,813	1576,25

Tableau-A IV-2 Fréquences modales – Méthode 2 (maximum de la partie imaginaire)

# DDL	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
1	90	238,75	436,875	613,125	1243,75	1569,375
2	90	238,4375	436,25	646,5625	1202,5	1544,688
3	90	238,75	436,25	613,75	1242,188	1580,625
4	90	238,75	436,875	611,875	1238,125	1554,375
5	90	238,75	436,5625	612,8125	1237,5	1552,5
6	90	238,4375	435,9375	610,9375	1236,563	1557,188
7	90	238,4375	436,25	613,4375	1243,125	1552,5
8	90	238,4375	436,5625	612,5	1230,313	1558,438
9	90	238,4375	436,5625	612,8125	1235,625	1559,688
10	90	237,8125	436,25	646,25	1238,125	1570
11	90	238,4375	436,25	613,125	1234,375	1555
12	90	238,4375	434,6875	612,8125	1238,125	1555,313
13	90	238,4375	436,875	612,5	1233,125	1554,063
14	90	238,4375	435,9375	647,8125	1232,5	1564,688
15	90	238,75	436,5625	612,8125	1237,813	1554,063
16	90	238,75	436,5625	611,5625	1239,063	1557,188
17	90	238,75	435,3125	611,875	1245,313	1557,5
18	90	238,4375	436,5625	647,5	1237,813	1547,188
19	90	238,4375	436,25	647,5	1231,25	1560,313

Tableau-A IV-3 Amortissements modaux – Méthode 1 (demi-puissance du module)

# DDL	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
<b>1</b>	0,00347222	0,0065445	0,01252684	0,03190942	0,02787633	0,03511263
<b>2</b>	0,00347222	0,00720839	0,01326165	0,02836305	0,02870091	0,03216669
<b>3</b>	0,00347222	0,0065445	0,01252684	0,02799178	0,029807	0,03708182
<b>4</b>	0,00347222	0,0065445	0,01252684	0,02983539	0,02973158	0,04532531
<b>5</b>	0,00520833	0,0065445	0,01253582	0,03359173	0,03394517	0,0329426
<b>6</b>	0,00347222	0,00655308	0,01329023	0,02685422	0,02944169	0,0235792
<b>7</b>	0,00347222	0,00655308	0,01115911	0,02720739	0,03119451	0,03808461
<b>8</b>	0,00347222	0,00720839	0,01326165	0,03044376	0,0448322	0,03318611
<b>9</b>	0,00347222	0,00655308	0,01288475	0,03345436	0,02908726	0,04663423
<b>10</b>	0,00347222	0,00730412	0,01290323	0,02027027	0,02788975	0,02941734
<b>11</b>	0,00347222	0,00719895	0,01290323	0,02401635	0,0330608	0,04136253
<b>12</b>	0,00347222	0,00720839	0,01151908	0,02942695	0,04198015	0,04370117
<b>13</b>	0,00347222	0,00655308	0,00887154	0,03278265	0,02802803	0,07379783
<b>14</b>	0,00347222	0,00720839	0,01326165	0,02536038	0,02828235	0,02578124
<b>15</b>	0,00347222	0,0065445	0,01252684	0,02669039	0,04520984	0,03174458
<b>16</b>	0,00347222	0,0065445	0,01253582	0,02595067	0,03009781	0,0759247
<b>17</b>	0,00347222	0,00719895	0,00974729	0,02964119	0,04121087	0,04022889
<b>18</b>	0,00347222	0,0065445	0,01034237	0,02539168	0,07416601	0,06948143
<b>19</b>	0,00347222	0,0065445	0,01178571	0,03621622	0,08001519	0,0696866

Tableau-A IV-4 Amortissements modaux – Méthode 2 (min-max de la partie réelle)

# DDL	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
1	0,00520833	0,00719895	0,01324266	0,02959341	0,02965028	0,04099857
2	0,00694444	0,0078637	0,01362007	0,26958401	0,0822006	0,04693504
3	0,00520833	0,0078534	0,01288475	0,03107345	0,03297818	0,0325472
4	0,00694444	0,00719895	0,01324266	0,02983539	0,03188259	0,03407016
5	0,00694444	0,00719895	0,01253582	0,24315245	0,03092782	0,0329426
6	0,00694444	0,00720839	0,01400862	0,02838875	0,03929723	0,02529206
7	0,00868056	0,0078637	0,01115911	0,02823409	0,03119451	0,03688509
8	0,00694444	0,0078637	0,01362007	0,03070175	0,12080532	0,03699634
9	0,00694444	0,0078637	0,01324266	0,2435166	0,03034102	0,03862514
10	0,00694444	0,00929615	0,01326165	0,26972973	0,02763776	0,05219205
11	0,00520833	0,0078534	0,01362007	0,02401635	0,03893305	0,03294793
12	0,00520833	0,0078637	0,01187905	0,24006195	0,06541353	0,0431987
13	0,00520833	0,0078637	0,33960256	0,24161074	0,00950951	0,0313876
14	0,00520833	0,0078637	0,01362007	0,26054458	0,03621683	0,01214413
15	0,00694444	0,00719895	0,01324266	0,00076258	0,09887295	0,02890483
16	0,00520833	0,00719895	0,01253582	0,02338129	0,00526712	0,1078302
17	0,00694444	0,0078534	0,01299639	0,24596984	0,0234037	0,02969502
18	0,00520833	0,00719895	0,01319544	0,26958401	0,10284171	0,08710799
19	0,00520833	0,0078534	0,01285714	0,27	0,07475599	0,04589596

## ANNEXE V

### MODES PROPRES NORMALISÉS PAR RAPPORT À UNE MASSE MODALE UNITAIRE

Tableau-A V-1 Modes propres normalisés par rapport à une masse modale unitaire

# DDL	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
<b>1</b>	3,245	-3,361	2,702	-1,111	1,921	-1,025
<b>2</b>	2,570	-1,970	1,094	0,058	-0,144	0,578
<b>3</b>	1,547	-0,354	-0,803	1,026	-1,662	1,170
<b>4</b>	0,871	0,718	-1,936	1,496	-2,038	0,901
<b>5</b>	-0,192	2,000	-2,177	0,688	0,955	-1,500
<b>6</b>	-0,812	2,344	-1,382	-0,494	2,439	-1,601
<b>7</b>	-1,470	2,341	-0,197	-1,071	2,068	0,665
<b>8</b>	-1,837	1,926	0,996	-1,399	0,607	2,016
<b>9</b>	-2,233	1,071	2,269	-0,962	-2,001	1,560
<b>10</b>	<b>-2,319</b>	<b>0,043</b>	<b>2,560</b>	<b>0,107</b>	<b>-2,709</b>	<b>-1,079</b>
<b>11</b>	-2,273	-0,820	2,270	0,764	-2,159	-1,761
<b>12</b>	-1,972	-1,700	0,894	1,404	0,823	-1,798
<b>13</b>	-1,612	-2,272	-0,167	1,051	1,963	-0,646
<b>14</b>	-0,953	-2,324	-1,605	-0,245	2,454	2,260
<b>15</b>	-0,308	-2,024	-2,181	-0,732	0,936	1,391
<b>16</b>	0,634	-1,008	-1,981	-1,398	-1,235	-0,233
<b>17</b>	1,713	0,647	-0,454	-0,876	-1,688	-2,591
<b>18</b>	2,344	1,635	0,715	0,447	-0,627	-0,890
<b>19</b>	2,709	2,197	1,531	0,703	1,376	0,985

## LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Akay, Adnan. 1978. « A review of impact noise ». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 64, n° 4, p. 977-987.

Akay, Adnan, et Michael Latcha. 1983. « Sound radiation from an impact-excited clamped plate in an infinite baffle ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 74, n° 2, p. 640-648.

Arz, Jean-Pierre, et Frédéric Laville. 2009. « Experimental characterization of small thickness elastomeric layers submitted to impact loading ». *Journal of Sound and Vibration*, vol. 326, p. 302-313.

Avanzini, Federico, Matthias Rath, Davide Roccheso et Gianpaolo Borin. 2002. *impact\_modal.m*. Programme MATLAB. <<http://www.soundobject.org>>. Consulté le 10 janvier 2008.

Avanzini, Federico, et Davide Roccheso. 2001a. « Controlling Material Properties in Physical Models of Sounding Objects ». In *International Computer Music Conference 2001* (17-22 September 2001). p. 91-94. La Habana, Cuba.

Avanzini, Federico, et Davide Roccheso. 2001b. « Modeling Collision Sounds: Non-Linear Contact Force ». In *COST G-6 Conference on Digital Audio Effects (DAFx-01)* (December 6-8 2001). Limerick, Ireland.

Bensa, Julien, Stefan Bilbao, Richard Kronland-Martinet et Julius O. Smith III. 2003. « The simulation of piano string vibration: From physical models to finite difference schemes and digital waveguides ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114, n° 2, p. 1095-1107.

Bensa, Julien, Olivier Gipouloux et Richard Kronland-Martinet. 2005. « Parameter fitting for piano sound synthesis by physical modeling ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 118, n° 1 (19 April 2005), p. 10.

Borin, G., G. De Poli et Davide Roccheso. 2000. « Elimination of Delay-free Loops in Discrete-Time Models of Nonlinear Acoustic Systems ». *IEEE Trans. Speech Audio Process*, vol. 8, n° 5, p. 597-606.

Chaigne, Antoine, et Anders Askenfelt. 1994. « Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite element methods ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 92, n° 2, p. 1112-1118.

Chaigne, Antoine, et Vincent Doutaut. 1997. « Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars ». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 101, n° 1, p. 539-557.

Chaigne, Antoine, et Christophe Lambourg. 2001. « Time domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments ». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 109, n° 4, p. 1422-1432.

Ewins, D.J. 2000. *Modal testing theory, practice and application*, second edition. Coll. « engineering dynamics series ». Baldock, Hertfordshire, England: Research studies press ltd., 562 p.

Giordano, N., et J. P. Winans II. 2000. « Piano hammers and their force compression characteristics: Does a power law make sense? ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 107, n° 4, p. 2248-2255.

Goldsmith, W. 1960. *Impact : the theory and physical behaviour of colliding solids*. London: Edward Arnold.

Humbert, Eric. 2002. *Etude expérimentale et simulation numérique de l'interaction marteau-corde du piano en vue de la synthèse en temps réel*. Mémoire de stage de DEA. Paris: École Centrale Paris.

Hunt, K.H., et F.R.E. Crossley. 1975. « Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact ». *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, n° 2, p. 440-445.

ISO 48. 1994. *Physical testing of rubber, methods for the determination of hardness*.

ISO 7619. 1997. *Rubber-determination of indentation hardness by means of pocket hardness meters*.

Lambourg, C. 1997. « Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes. Application à la synthèse sonore ». Le Mans, Université du Maine, 295 p.

Lambourg, Christophe, Antoine Chaigne et Denis Matignon. 2001. « Time domain simulation of damped impacted plates. II. Numerical model and results ». *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 109, n° 4, p. 1433-1447.

Marhefka, Duane W., et David E. Orin. 1999. « A Compliant Contact Model with Nonlinear Damping for Simulation of Robotic Systems ». *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics-Part A: systems and humans*, vol. 29, n° 6 (november 1999), p. 566-572.

McMillan, A. 1992. « A Theoretical Investigation of the Role of Vibration in Elastic Impact ». Staffordshire Polytechnic.

Musiol, C., et D. Harty. 1991. *The use of numerical integration for the estimation of displacement from an accelerometer signal*. Coll. « Application note 12, nCode International Ltd. ».

Rocchesso, Davide, et Federico Fontana (éd.). 2003. *The sounding object*. Firenze: Mondo estremo, 399 p.

Ross, Annie. 2000. « Visualisation et optimisation des effets des Vac Damps sur le champ vectoriel d'intensité acoustique d'une structure soumise à des impacts répétés ». Montréal, École Polytechnique de Montréal, 306 p.

Smith III, Julius O. 2008. *Physical audio signal processing for virtual musical instruments and digital audio effects*, December 2008 (Beta). W3K Publishing, 730 p.

Stulov, Anatoli. 1994. « Hysteretic model of the grand piano hammer felt ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 97, n° 4, p. 2577-2585.

Thomas, Marc, et Frédéric Laville. 2005. *Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink et Ansys*. École de technologie supérieure, 702 p.

Trocaz, Philippe, Roland Woodcock et Frédéric Laville. 2000. « Acoustic radiation due to the inelastic impact of a sphere on a rectangular plate ». *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 108 (5), n° Pt. 1 (Nov 2000), p. 2197-2202.

Van Zeebroeck, M., E. Tijskens, P. Van Liedekerke, V. Deli, J. De Baerdemaeker et H. Ramon. 2003. « Determination of the dynamical behaviour of biological materials during impact using a pendulum device ». *Journal of Sound and Vibration*, vol. 266, n° 3, p. 465-480.

Vriend, Nathalie M., et Alexander P. Kren. 2004. « Determination of the viscoelastic properties of elastomeric materials by the dynamic indentation method ». *Polymer Testing*, vol. 23, n° 4, p. 369-375.