

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE DE PRODUCTION AUTOMATISÉE  
M.Ing.

PAR  
CLAUDIU BENEÀ

MÉTHODE D'ANALYSE DES FORCES AÉRODYNAMIQUES  
POUR LES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES SUR LE F/A-18 SRA

MONTRÉAL, LE 6 JUIN 2005

(c) droits réservés de Claudiu Benea

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

**Mme Ruxandra Botez, directrice de mémoire  
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure**

**Mme Rita Noumeir, présidente du jury  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure**

**M. Moussa Abdoune, membre externe  
Bombardier Aéronautique, Département de sciences de vol**

**IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 25 MAI 2005  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

**MÉTHODE D'ANALYSE DES FORCES AÉRODYNAMIQUES  
POUR LES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES SUR LE F/A-18 SRA**

Benea Claudiu

RESUME

Un aspect important des études des interactions aéroservoélastiques est la conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace. Les forces aérodynamiques sont calculées en fonction des fréquences réduites et des nombres de Mach sur un avion à commande électrique F/A-18 à l'aide du logiciel STARS (Structural Analysis Routines). La méthode par des moindres carrés ou Least Squares *LS* est utilisée premierement pour leur conversion du domaine de fréquence au domaine de Laplace. Une nouvelle méthode à partir de la méthode *LS* est développée ensuite dans cette thèse.

Dans cette méthode, on écrit l'erreur sous une forme analytique similaire à la forme analytique des forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS*. Cette nouvelle méthode est beaucoup plus rapide et donne des meilleurs résultats que la méthode *LS*. Ce projet a été réalisé en collaboration avec les laboratoires de la NASA DFRC (Dryden Flight Research Center).

# MÉTHODE D'ANALYSE DES FORCES AÉRODYNAMIQUES POUR LES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES SUR LE F/A-18 SRA

Benea Claudiu

## SOMMAIRE

L'aéroservoélasticité concerne les études des interactions entre les forces aérodynamiques non - stationnaires, les systèmes de commande active et la structure flexible de l'avion modélisée par des éléments finis. Dans cette thèse, on étudie un des aspects du domaine multidisciplinaire des interactions aéroservoélastiques sur un avion à commande électrique F/A-18 SRA (System Research Aircraft). Cet aspect est lié surtout à l'aérodynamique non – stationnaire de l'avion, plus précisément aux méthodes de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace.

Les forces aérodynamiques sont calculées en aéroélasticité par les méthodes de doublets en régime subsonique ou par les méthodes des pressions constantes en régime supersonique en fonction des fréquences réduites et des nombres de Mach sur un avion à commande électrique F/A-18 SRA à l'aide du logiciel STARS (Structural Analysis Routines). Une méthode classique de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace pour les études des interactions aéroservoélastiques est la méthode par des moindres carrés ou Least Squares *LS*.

Dans cette thèse, on a développé une nouvelle méthode à partir de la méthode *LS*. Dans cette nouvelle méthode, on applique une nouvelle correction de l'erreur entre les résultats obtenus par la méthode *LS* et les données calculées par STARS. La nouvelle erreur est écrite sous une forme analytique similaire à la forme analytique des forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS*.

Une comparaison entre les données initiales de forces aérodynamiques dans le domaine de fréquence, les forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* et les forces aérodynamiques calculées par la nouvelle méthode est présentée dans cette thèse pour l'avion F/A-18 SRA et pour plusieurs conditions de vol. Nous avons trouvé que cette nouvelle méthode est beaucoup plus rapide et donne des meilleurs résultats que la méthode *LS*. Ce projet a été réalisé en collaboration avec les laboratoires de la NASA DFRC (Dryden Flight Research Center).

# **METHOD OF ANALYSIS OF AERODYNAMIC FORCES FOR INTERACTIONS AEROSERVOELASTIQUES ON F/A-18 SRA**

Benea Claudiu

## **ABSTRACT**

The aeroservoelasticity concerns the interactions studies between the aerodynamic unsteady forces, the active control systems and the flexible aircraft structure modeled by finite elements. In this thesis, one main aspect of the aeroservoelastic interactions multidisciplinary domain is studied on an F/A-18 SRA (System Research Aircraft) aircraft. These studies are related to the unsteady aerodynamics of the aircraft, more precisely is related to the methods of conversion of the aerodynamic forces from the frequency into Laplace domain.

The aerodynamic forces are calculated in aeroelasticity by the Doublet Lattice Methods in the subsonic regime or by the Constant Pressure Methods in the supersonic regime as function of reduced frequency and Mach number on an F/A-18 SRA aircraft by use of STARS (STructural Analysis Routines) software. One classical method of conversion of the aerodynamic forces from the frequency domain into Laplace domain for the aeroservoelastic interactions studies is the Least Squares *LS* method.

In this thesis, a new method was developed based on the *LS* method. In this new method, we apply a new correction of the errors between the results obtained with the *LS* method and the data given by STARS. The new error is written under an analytical form similar to the analytical form of the aerodynamic forces calculated by *LS* method.

A comparison between the initial data of the aerodynamic forces in the frequency domain, the aerodynamic forces calculated by the *LS* method and the aerodynamic forces calculated by the new method is presented in this thesis for the F/A-18 SRA and for different flight conditions. It has been found that this new method is much faster and gives better results than the *LS* method. This project is realized in collaboration with the NASA DFRC (Dryden Flight Research Center) laboratories.

## **REMERCIEMENTS**

Je souhaite remercier à Mme Ruxandra Botez professeure – chercheuse au département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure, pour m'avoir encouragé et aidé dans cette thèse. Je tiens à remercier aussi mon collègue M. Djallel Biskri pour ses conseils et son aide pendant mon projet. Ces travaux n'auraient jamais été terminés sans leur support et patience.

Je remercie aussi mes autres collègues Dr. Adrian Hiliuta, M. Emil Crisan et Mme Lidia Bunduc pour leurs soutiens pendant mes études de maîtrise.

Je remercie également M. Marty Brenner des laboratoires NASA DFRC (Dryden Flight Research Center) pour ses conseils.

Je voudrais associer à ces remerciements, ma famille qui m'a soutenu énormément.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES.....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	vi
LISTE DES FIGURES .....	xi
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES.....	xiv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1    Introduction et justification du projet .....	1
1.2    Recherche bibliographique .....	3
CHAPITRE 2 MÉTHODES D'ANALYSES AÉROÉLASTIQUES ET AÉROSERVOÉLASTIQUES .....	10
2.1    Méthode d'analyse aéroélastique <i>Pk</i> .....	10
2.1.1    Présentation générale de la méthode <i>Pk</i> .....	10
2.1.2    Solution de l'équation aéroélastique par la méthode <i>Pk</i> .....	12
2.2    Méthode d'approximation des forces aérodynamiques non- stationnaires du domaine de fréquences au domaine de Laplace .....	14
2.2.1    Présentation de la méthode classique par des moindres carrées <i>LS</i> (Least Square).....	14
2.2.2    Solution de l'équation du système aéroélastique par la méthode des moindres carrées <i>LS</i> .....	15
2.3    Introduction des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> dans la méthode <i>Pk</i> de battement.....	17
CHAPITRE 3 DESCRIPTION DE LA NOUVELLE MÉTHODE A PARTIR DE LA MÉTHODE <i>LS</i> .....	20
CHAPITRE 4 RÉSULTATS .....	26
4.1    Présentation générale des résultats obtenus pour un seul cas :	

	$M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques .....	26
4.2	Présentation générale des résultats obtenus pour tous les nombres de Mach, pour les modes élastiques et symétriques, sauf pour le cas présenté dans la section 4.1 (nombre de Mach = 0.85) .....	32
4.2.1	$M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques .....	33
4.2.2	$M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques .....	37
4.2.3	$M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques .....	40
4.2.4	$M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques .....	43
4.3	Présentation générale des résultats obtenus pour tous les nombres de Mach, pour les modes élastiques et anti-symétriques .....	49
4.3.1	$M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	49
4.3.2	$M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	53
4.3.3	$M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	57
4.3.4	$M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	60
4.3.5	$M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	63
<b>CHAPITRE 5 CONCLUSIONS .....</b>		<b>68</b>
5.1	Sommaire des résultats .....	68
5.2	Conclusions générales .....	75
<b>RÉFÉRENCES .....</b>		<b>77</b>

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques ...	27
Tableau II L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques.....	30
Tableau III L'erreur relative des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques.....	30
Tableau IV La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques( <i>Q_réel</i> , <i>Q_imag</i> et <i>Q_total</i> ) pour $M = 0.85$ modes élastiques et symétriques.....	31
Tableau V Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques .....	33
Tableau VI L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques.....	35
Tableau VII L'erreur relative des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques.....	35
Tableau VIII La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques( <i>Q_réel</i> ,	

Q <sub>imag</sub> et Q <sub>total</sub> ) pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques.....	36	
Tableau IX	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques .....	37
Tableau X	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques.....	39
Tableau XI	L'erreur relative des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques.....	39
Tableau XII	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques(Q <sub>réel</sub> , Q <sub>imag</sub> et Q <sub>total</sub> ) pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques.....	40
Tableau XIII	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques .....	41
Tableau XIV	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques.....	42
Tableau XV	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques(Q <sub>réel</sub> , Q <sub>imag</sub> et Q <sub>total</sub> ) pour $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques.....	43
Tableau XVI	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques .....	44
Tableau XVII	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la	

	méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques.....	45
Tableau XVIII	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques(Q_réel, Q_imag et Q_total) pour $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques.....	46
Tableau XIX	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	49
Tableau XX	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 0.85$ , modes élastiques et anti- symétriques .....	51
Tableau XXI	L'erreur relative des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	51
Tableau XXII	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques(Q_réel, Q_imag et Q_total) pour $M = 0.85$ modes élastiques et anti-symétriques .....	52
Tableau XXIII	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	53
Tableau XXIV	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti- symétriques .....	55
Tableau XXV	L'erreur relative des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la	

	méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques.....	55
Tableau XXVI	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques( <i>Q_réel</i> , <i>Q_imag</i> et <i>Q_total</i> ) pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	56
Tableau XXVII	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	57
Tableau XXVIII	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	58
Tableau XXIX	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques( <i>Q_réel</i> , <i>Q_imag</i> et <i>Q_total</i> ) pour $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	59
Tableau XXX	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	60
Tableau XXXI	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	61
Tableau XXXII	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques( <i>Q_réel</i> , <i>Q_imag</i> et <i>Q_total</i> ) pour $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	62
Tableau XXXIII	Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) pour $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	63
Tableau XXXIV	L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de	

	battement calculées par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ) par rapport à celles calculées par la méthode <i>pk</i> standard pour $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	64
Tableau XXXV	La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( <i>Q_réel</i> , <i>Q_imag</i> et <i>Q_total</i> ) pour $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	65
Tableau XXXVI	Le nombre optimal des termes de retard ( <i>lags</i> ) dans le calcul des vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> par rapport à la méthode <i>pk</i> standard, modes élastiques et symétriques .....	71
Tableau XXXVII	Le nombre optimal des termes de retard ( <i>lags</i> ) dans le calcul des forces aerodynamiques obtenues par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> par rapport à la méthode <i>pk</i> standard, modes élastiques et symétriques .....	72
Tableau XXXVIII	Le nombre optimal des termes de retard ( <i>lags</i> ) dans le calcul des vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> par rapport à la méthode <i>pk</i> standard, modes élastiques et anti-symétriques .....	73
Tableau XXXIX	Le nombre optimal des termes de retard ( <i>lags</i> ) dans le calcul des forces aerodynamiques obtenues par les méthodes <i>LS</i> et <i>CLS</i> par rapport à la méthode <i>pk</i> standard, modes élastiques et anti-symétriques .....	74

## LISTE DES FIGURES

	Page	
Figure 1	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques .....	28
Figure 2	Deuxièmes vitesses de obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> pour plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques .....	28
Figure 3	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques .....	31
Figure 4	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques .....	34
Figure 5	Deuxièmes vitesses de obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> pour plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques .....	34
Figure 6	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques .....	36
Figure 7	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques .....	38
Figure 8	Deuxièmes vitesses de obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> pour plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques .....	38

Figure 9	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques .....	40
Figure 10	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques .....	41
Figure 11	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques .....	43
Figure 12	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques .....	44
Figure 13	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques .....	46
Figure 14	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	50
Figure 15	Deuxièmes vitesses de obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> pour plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	50
Figure 16	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	52
Figure 17	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	54
Figure 18	Deuxièmes vitesses de obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> pour plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M=1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	54

Figure 19	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	56
Figure 20	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	58
Figure 21	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	59
Figure 22	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	61
Figure 23	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	62
Figure 24	Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes <i>pk</i> standard, <i>LS</i> et <i>CLS</i> avec plusieurs termes de retard ( <i>lags</i> ), pour $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	64
Figure 25	L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>CLS</i> par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode <i>LS</i> pour $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques .....	65

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$A_e$	Coefficients aérodynamiques pour un nombre de Mach donné
$A_j$	Coefficients de Padé
$b$	Demi- longueur de corde de l'aile
$b_j$	Retards aérodynamiques
$c$	Longueur de corde de l'aile
$D$	Matrice modale d'amortissement
$D_e$	Matrice modale d'amortissement structurel
$d_i$	Partie réelle d'une valeur propre, représentant l'amortissement
$I$	Matrice identité
$\tilde{j}$	Racine carrée de $-1$
$J$	Erreur quadratique
$K$	Matrice modale de rigidité
$K_e$	Matrice modale de rigidité structurelle
$k$	Fréquence réduite
$M$	Matrice modale d'inertie ou de masse
$M_e$	Matrice modale d'inertie ou de masse structurelle
$Mach$	Nombre de Mach
$n$	Nombre de modes indépendants ou coordonnées généralisées
$n_\beta$	Nombre de retards aérodynamiques
$P_e$	Perturbation externe
$Q$	Matrice modale des forces aérodynamiques généralisées
$Q_I$	Partie imaginaire de la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées
$Q_R$	Partie réelle de la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées
$q$	Vecteur déplacement des noeuds

$q_{dyn}$	Pression dynamique
$s$	Variable de Laplace
$\bar{s}$	Variable de Laplace normalisée
$V$	Vitesse vraie
$X_j$	Vecteurs d'état des modes aérodynamiques
$\eta$	Coordonnées généralisées
$\eta_e$	Coordonnées généralisées des modes élastiques
$\eta_r$	Coordonnées généralisées des modes rigides
$\eta_c$	Coordonnées généralisées des surfaces de commande
$\Phi$	Matrice de forme ou modale
$\Phi_e$	Coordonnées généralisées des modes élastiques
$\Phi_r$	Coordonnées généralisées des modes rigides
$\Phi_c$	Coordonnées généralisées des surfaces de commande
$\lambda_i$	Valeurs propres
$\nu$	Rapport de vitesse équivalente
$\rho$	Densité atmosphérique vraie
$\rho_0$	Densité atmosphérique de référence
$\sigma$	Rapport de densité atmosphérique
$\omega$	Pulsation naturelle
$\omega_0$	Pulsation de référence
$[.]^P$	Notation relative à une quantité soumise au changement de variable de la méthode $P$ - translation en fréquence de $\frac{1}{\omega_0}$

# **CHAPITRE 1**

## **INTRODUCTION**

### **1.1 Introduction et justification du projet**

L'aéroservoélasticité est une théorie multidisciplinaire consistant dans une combinaison de la théorie de l'aéroélasticité avec la théorie de servo - commande. L'aéroélasticité étudie les interactions de type fluides – structures entre les forces aérodynamiques et la structure élastique de l'avion modélisé par des éléments finis. L'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion rigide est étudiée dans la théorie de la servo - commande. Il faudrait mentionner que dans l'aéroélasticité, l'avion flexible est considéré d'avoir un nombre très grand de degrés de liberté pendant que dans la servo – commande, l'avion est considéré rigide avec six degrés de liberté.

L'aéroservoélasticité n'est pas étudié pour les avions classiques mécaniques, mais elle est étudié uniquement pour les avions à commande électrique (en anglais : Fly-by-Wire ) où il existe le besoin d'intégrer tous les disciplines liées à la conception de ces avions sur l'ordinateur. Ce domaine est sûrement étudié dans la conception des avions militaires ainsi que des avions les plus modernes civils tels que l'Airbus 380 ou Boeing 777. Les travaux ici - présentés sont utilisés dans les laboratoires de la NASA DFRC pour la conception de leurs avions militaires comme le F/A-18. L'étude des interactions aéroservoélastiques est alors importante dans la conception des avions modernes.

Dans le but d'étudier l'aéroservoélasticité, il faudra interagir les deux types d'aérodynamique étudiés dans le deux disciplines. Un des aspects principaux de cette interaction est la conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence dans le domaine de Laplace. Cette conversion est réalisée par plusieurs méthodes d'approximation classique : la méthode par des moindres carrés *LS* (en anglais : Least

Squares) et la méthode d'état minimum *MS* (en anglais : Minimum State). Ces méthodes et des modifications de ces méthodes ont été implantées dans les centres de recherche les plus connus en aéronautique aux États – Unis dans des logiciels spécialisés en aéroservoélasticité. Ces logiciels sont ISAC, ADAM, FAMUSS, STARS, ZAERO et ASTROS et ont leurs avantages et désavantages.

Parmi les six logiciels ci hauts mentionnés, le logiciel STARS a été choisi pour nos études pour les interactions aéroservoélastiques sur l'avion F/A-18 SRA (System Research Vehicle) surtout à cause du fait que ce logiciel a été conçu et il est encore utilisé dans les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research.

Les études structurelles et aérodynamiques de l'avion F/A-18 SRA (System Research Aircraft) ont été réalisées dans les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center. Dans les deux paragraphes suivants, on va décrire ces types d'études réalisés dans ces laboratoires.

La structure de l'avion F/A-18 SRA (System Research Aircraft) a été modélisée à l'aide des théories d'éléments finis en utilisant le logiciel STARS dans les laboratoires du Centre de Recherche de Vol de la NASA Dryden (en anglais : NASA Dryden Flight Research Center). La structure de l'avion a été modélisée des poutres et les équations de mouvement de l'avion ont été dérivées en fonction des déplacements de chaque point de la structure de l'avion. Ainsi, la masse, l'amortissement et la rigidité de l'avion ont été calculés dans chaque point de la structure de l'avion. Les modes de vibrations et leurs fréquences spécifiques pour les composantes de l'avion ont été d'abord déterminés.

Les forces aérodynamiques ont été aussi calculées par la méthode des doublets (Doublet Lattice Method *DLM*) en utilisant le logiciel STARS en régime subsonique et par la méthode des pressions constantes (Constant Pressure Method *CPM*) sur l'avion F/A-18 SRA dans les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research pour plusieurs

fréquences réduites et plusieurs nombres de Mach. Pour appliquer la méthode *DLM* ou *CPM*, les surfaces ont été divisées dans des panneaux trapézoïdaux parallèles aux vitesses de l'air. Enfin, la distribution des pressions induites a été calculée, d'où les coefficients aérodynamiques d'influence et les forces aérodynamiques ont été calculés. Une fois que ces forces aérodynamiques ont été calculées, on calcule les vitesses de battement pour lesquelles l'avion F/A-18 SRA devient instable. L'enveloppe de vol (le nombre de Mach versus l'altitude) pour l'avion F/A-18 SRA a été réalisée et l'avion devrait rester à l'intérieur de l'enveloppe de vol.

Dans cette thèse, on a étudié un aspect important de l'aéroservoélasticité, surtout les méthodes de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence dans le domaine de Laplace. Une des méthodes les plus connues est la méthode des moindres carrés (en anglais : Least Squares *LS*) – et dans cette thèse nous présentons une nouvelle méthode basée sur la méthode *LS*, dans laquelle on minimise encore une fois l'erreur entre les résultats obtenus avec la méthode *LS* et les forces initiales dans le domaine de fréquence. L'erreur est écrite sous une forme analytique similaire à la forme analytique des forces écrites par l'approximation *LS*.

Nous avons comparé les résultats obtenus par les méthodes *LS* et la nouvelle méthode basée sur la méthode *LS*. Les premiers résultats sont représentés sous forme des approximations des forces aérodynamiques du domaine de fréquence dans le domaine de Laplace. Les deuxièmes types de résultats sont représentés sous forme des vitesses et fréquences de battement pour lesquelles l'avion devient instable. Ce projet est réalisé en collaboration avec les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center.

## 1.2 Recherche bibliographique

Parmi les premières études d'aéroservoélasticité dans le domaine temporel, l'utilisation des lois de commande multi - entrées et multi - sorties (*MIMO*) a été initialisée par

Edwards [1] avec la méthode des moindres carrés *LS*. Roger [2] a continué à travailler sur l'approche d'Edwards et a démontré la suppression active du battement durant des tests en vol.

Karpel [3, 10] a proposé plus tard une approche complètement différente pour résoudre ce type d'approximation. Son but était de trouver un système linéaire invariant dans le domaine du temps. Il a décidé d'intégrer cette information directement dans l'équation représentant les valeurs des forces aérodynamiques non – stationnaires en ajoutant un terme similaire à une fonction de transfert d'un système linéaire.

Karpel a écrit l'approximation sous la forme d'état minimum (en anglais : Minimum State *MS*) à cause qu'il ait trouvé un système linéaire de dimensions raisonnables. L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de Roger est qu'elle fournit une excellente approximation avec un nombre très réduit des états augmentés.

Plus tard, Buttrill et al. [4] et Mukhopadhyay [5] ont utilisé l'approximation de Roger pour démontrer des résultats dans le domaine du temps pour une aile flexible.

Les méthodes *LS* et *MS* ont été améliorées. Une telle amélioration a été réalisée par l'imposition de différentes conditions (restrictions) à ces approximations pour leur permettre de passer par deux points. Le premier point a été choisi pour représenter la fréquence de battement et le deuxième point a été choisi pour représenter la fréquence de rafale. Les méthodes améliorées ont été appelées : la méthode *ELS* (Extended Least-Squares) [7, 8] et la méthode *EMMP* (Extended Modified Matrix-Padé) [9].

Toutes les méthodes décrites ci-dessus permettent d'approcher les forces aérodynamiques non stationnaires pour un seul nombre de Mach. Afin d'avoir une approximation pour plusieurs nombres de Mach (ou pour un nombre de Mach en particulier) il faut refaire toute la démarche d'approximation ce qui peut être assez

coûteux en temps de calcul. La connaissance d'une approximation valide pour une plage de nombres de Mach peut s'avérer très utile pour les avions militaires à commande électrique pour lesquels le nombre de Mach varie rapidement durant les manœuvres faites à haute vitesse.

En utilisant la méthode *MS* et en considérant une dépendance régulière par rapport au nombre de Mach, Poirion [11,12] a construit une approximation qui permet de calculer les forces aérodynamiques non stationnaires pour des nombres de Mach compris dans un intervalle et pour une plage de fréquences. Il a utilisé plusieurs approximations *MS*, obtenues pour plusieurs nombres de Mach fixés et une interpolation du type spline pour la dépendance en Mach. Il obtient ainsi une formule qui permet de calculer les forces aérodynamiques pour tout couple  $(k, M)$  où  $k$  est une fréquence réduite et  $M$  est le de nombre de Mach, la formule d'approximation étant valide pour une gamme de nombres de Mach et des fréquences réduites.

Botez et Bigras [13] ont comparé les résultats obtenus par les méthodes d'approximation *LS*, *MP* et *MS* et ils ont trouvé que la méthode *MS* donne des meilleurs résultats par rapport aux résultats obtenus par les méthodes *LS* et *MP*. Les erreurs obtenues pour les 3 types d'approximations *LS*, *MP*, *MS* ont des valeurs proches mais l'approximation *MS* utilisait un nombre de 20 variables d'état pendant que les approximations *MP* et *LS* utilisaient 120 variables d'état. Cependant, il existe un problème avec l'approche *MS*: le système était mal conditionné quand le nombre des termes de retard de l'approximation était plus grand que le nombre des fréquences réduites. Ensuite, pour résoudre ce problème, ils ont choisi, à chaque itération, un compromis optimal entre les résultats obtenus à l'itération présente et la dernière itération.

Les méthodes d'approximation doivent remplir deux critères qui s'opposent : une très bonne (fidèle) approximation (qui s'obtient en augmentant le nombre de retards) et un système linéaire invariant dans le temps de dimension petite (un nombre de retards le

plus petit possible). Il n'existe pas à l'heure actuelle une méthode qui permet de satisfaire les deux critères. Cotoi et Botez [14] ont proposé une nouvelle approche qui est basée sur une approximation de Padé très précise où le troisième terme de la formulation *MS* est remplacé par une fonction de transfert d'un système linéaire et cette fonction sera réduite par plusieurs méthodes. Dans cet article, les méthodes de réduction en Matlab suivantes : la méthode de la réalisation minimale, la méthode de Schur et la méthode de *BST-REM* (Balance Stochastic Truncation – Relative Error Method) ont été utilisées. Une comparaison entre les résultats obtenus par cette nouvelle approche et la méthode de *MS* a été présentée. L'erreur de cette nouvelle approche est 12-40 fois plus petite que l'erreur de la méthode d'approximation *MS* pour le même nombre d'états augmentés et elle était dépendante du choix fait pour la méthode de réduction du modèle.

Luus a conçu la méthode de Luus-Jakola *LJ* [15] pour la réduction du système. Cette approche utilise la procédure dynamique itérative connue sous le nom de procédure d'optimisation de Luus-Jakola (*LJ*). La formule d'approximation choisie influence fortement l'ordre du modèle d'espace d'état. La dimension du modèle va influencer aussi l'efficience des analyses ultérieures, donc il est nécessaire d'obtenir un modèle le plus petit possible sans dégrader l'exactitude de l'approximation. Botez et al [16] ont présenté les résultats obtenus par l'approche de Luus sur le modèle de l'ATM (Aircraft Test Model). Cette procédure *LJ* demande un effort de calcul plus petit que pour la réduction de l'ordre du modèle, et elle était moins prédisposée aux erreurs numériques. Les techniques de réduction de la théorie du contrôle s'adressaient au système en entier et elles n'étaient pas très adéquates pour des grands systèmes.

Cotoi et al [17] a utilisé des polynômes de Chebyshev dans ces méthodes d'approximation des forces aérodynamiques. Cette méthode d'approximation a fourni des excellents résultats par rapport aux résultats obtenus en utilisant les polynômes de Padé.

À cause du fait que cette méthode soit appliquée sur les forces aérodynamiques agissant sur l'ATM (Aircraft Test Model) et que ces forces contiennent des grandes différences entre les valeurs des éléments contenus dans ces forces (de l'ordre 1e+10) des contraintes relatives à l'erreur d'approximation doivent être imposés. Pour des petits éléments une erreur de 1e-4 et pour des grandes éléments une erreur de 1e-2 ont été imposées. Sans ces contraintes, les polynômes de Chebyshev ne peuvent pas être générés.

En utilisant la méthode de Chebyshev sur l'ATM en boucle ouverte, les auteurs ont été capables de trouver des valeurs des vitesses de battement et les fréquences où le battement apparaît. Une des plus importants avantages de cette méthode était que le temps de calcul dans ce cas de la boucle ouverte qui est 3 fois plus bas que le temps de calcul dans la méthode Padé et 30 fois plus petit que dans le cas de la méthode Least Squares LS. Dans le cas de l'application de la méthode de Chebyshev sur l'ATM en boucle fermée, seulement un nombre de 2 termes de retard était assez pour obtenir d'excellents résultats pour l'approximation de ces forces aérodynamiques.

Dans un autre article, Hiliuta et Botez [18] ont constaté que le fonctionnement de la méthode LS dépend beaucoup de la sélection de la marge des fréquences choisie – dans ce cas – pour l'avion F/A-18 SRA (System Research Aircraft). À cause du fait que la méthode LS ne fonctionnait pas efficacement pour la marge des fréquences auxquelles les forces aérodynamiques étaient calculées, les auteurs ont décidé d'appliquer quatre méthodes d'interpolation existantes en Matlab : ‘nearest’ – Nearest neighbor interpolation, ‘linear’ – Linear interpolation, ‘spline’ – Cubic spline interpolation et ‘pchip’ – Piecewise cubic Hermite interpolation. Ils ont trouvé que chaque méthode aurait des avantages et des désavantages. La méthode ‘nearest’ était la plus rapide mais inconveniente en termes de continuité et la méthode linéaire a été difficile pour être appliquée pour que la dérivée change dans les points. La méthode ‘spline’ donnent des résultats inattendus quand les données d'entrée n'étaient pas uniformes, qui apparaissent

dans le cas présent. La méthode d'interpolation ‘pchip’ donnait les données et leurs dérivées continues. Pour cette raison, la méthode ‘pchip’ a été choisie premièrement dans cet article parmi les 4 méthodes d'interpolation en Matlab.

Dans le même article, deux types d'algorithmes utilisant la théorie fuzzy ont été explorés. Le premier algorithme a utilisé la génération d'une structure ANFIS à partir d'un ensemble des données, en utilisant la partition des données quand les données étaient divisées dans des partitions distribuées uniformément. A cause que la marge des fréquences était non uniforme, cette méthode n'était pas applicable. Le deuxième algorithme a utilisé la génération de *FIS* en utilisant la méthode de ‘fuzzy subtractive clustering’. Suite à une comparaison entre les résultats obtenus avec ces deux algorithmes, les auteurs ont trouvé que le deuxième algorithme donnait des meilleurs résultats que le premier. Les premières 10 dérivées des fonctions des forces aérodynamiques non stationnaires étaient continues – ce qui a démontré l'avantage de l'utilisation des fonctions de la théorie de fuzzy.

Finalement, les auteurs ont trouvé que la meilleure méthode consiste dans la meilleure combinaison des techniques ‘pchip’ avec ‘fuzzy clustering technique’ pour l'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires calculées pour une range de 10 fréquences réduites espacées non - uniformément  $k = 0.9e-4; 0.001; 0.01; 0.02; 0.1; 0.2; 1; 1.5$  2 et 4 où la méthode *LS* ne fonctionne pas bien. Dans le cas où la marge des fréquences était choisie uniformément, pour 20 fréquences réduites espacés uniformément :  $k = 9.09 e-5; 0.001; 0.01; 0.02; 0.1; 0.2; 0.30; 0.4; 0.5; 0.59; 0.63; 0.67; 0.71; 0.77; 0.83; 0.91; 1; 1.5; 2$  et 4. Des bons résultats ont été obtenus par la méthode *LS*, et dans ce cas-ci, ils n'ont pas eu le besoin d'utiliser les techniques fuzzy.

Jusqu'ici, nous avons présenté les méthodes actuelles dans la littérature. Dans cette thèse, nous avons choisi d'améliorer les résultats obtenus par la méthode classique par des moindres carrées (en anglais : Least Squares). Dans cette méthode classique, dans le

but d'obtenir les meilleures approximations des forces aérodynamiques du domaine de fréquence  $Q(k, M)$  au domaine de Laplace,  $Q_{LS}(s)$ , il est nécessaire d'augmenter le nombre de termes de retard  $b_i$ . Par contre, l'augmentation du nombre de termes de retard conduit à l'augmentation des dimensions des matrices utilisées pour la représentation de système sous la forme de l'espace d'état. L'augmentation de la dimension de matrices va réduire la vitesse de calcul et pourrait avoir une mauvaise influence sur le comportement final du système aéroservoélastique.

Pour cette raison, nous avons conçu une nouvelle méthode basée sur la méthode du moindre carrées *LS* et appelée méthode des moindres carrées corrigés *CLS*. Cette nouvelle méthode *CLS* réduit l'erreur entre les données des forces aérodynamiques dans le domaine de fréquence  $Q(k, M)$  et leurs approximations dans le domaine de Laplace par la méthode *LS* appelées  $Q_{LS}(s)$ . Cette erreur est écrite la même forme analytique que la méthode *LS*. Ce concept est, d'après nos connaissances, nouveau.

Nous avons trouvé des meilleures approximations des forces aérodynamiques par la nouvelle méthode *CLS* par rapport aux approximations de ces forces par la méthode *LS*, c'est-à-dire que les forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* sont plus proches des forces aérodynamiques calculées par la méthode *DLM* (en anglais : Doublet Lattice Method) que les forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS*.

Un nombre plus petit des termes de retard (en anglais : *lags*) sont utilisés dans la nouvelle méthode par rapport au nombre de termes de retard utilisés dans la méthode *LS*, et par conséquent, la nouvelle méthode *CLS* a une vitesse de convergence plus rapide que la méthode *LS*, ce qui constitue déjà un grand avantage par rapport à la méthode *LS*. Le système obtenu par cette nouvelle méthode aura un ordre réduit par rapport au système obtenu par la méthode *LS*.

## CHAPITRE 2

### MÉTHODES D'ANALYSES AÉROÉLASTIQUES ET AÉROSERVOÉLASTIQUES

#### 2.1 Méthode d'analyse aéroélastique *Pk*

##### 2.1.1 Présentation générale de la méthode *Pk*

Les équations d'interactions des forces aérodynamiques sur la structure flexible (élastique) de l'avion sont écrites en fonction du vecteur des déplacements des nœuds de la structure de l'avion  $q$  comme suite :

$$M_e \ddot{q} + D_e \dot{q} + K_e q + q_{dyn} A_e(k, Mach)q = P_e(t) \quad (2.1)$$

où  $M_e$  est la matrice d'inertie,  $D_e$  est la matrice d'amortissement,  $K_e$  est la matrice de rigidité,  $A_e(k, Mach)$  est la matrice des coefficients aérodynamiques pour un nombre de *Mach* donné et un ensemble des fréquences réduites  $k$ 's et  $q_{dyn}$  est la pression dynamique. La matrice  $P_e(t)$  peut représenter une entrée de la part du pilote sur une surface de commande ou une turbulence externe telle qu'une rafale ou une turbulence.

La méthode des doublets (Doublet Lattice Method DLM) a été utilisée pour le calcul des forces aérodynamiques sur un avion volant en régime subsonique. Cette méthode est implantée et utilisée dans des logiciels d'analyse aéroélastique tels que STARS [19] et Nastran [20]. Dans la théorie de la *DLM*, les ailes, les empennages horizontaux et verticaux sont modélisés par des surfaces portantes parallèles à l'écoulement, et divisées en panneaux. Les pressions agissant à 25% de la chorde de chaque panneau sont calculées et ensuite les forces aérodynamiques sont calculées par l'intégration de ces pressions sur les surfaces portantes. Les forces aérodynamiques sont calculées en régime supersonique par les méthodes des pressions constantes (Constant Pressure Method CPM) en utilisant les mêmes types de logiciels Nastran et STARS. Dans ce mémoire, on

a utilisé le logiciel STARS pour les calculs des forces aérodynamiques en régime subsonique et supersonique sur l'avion F/A-18 SRA (System Research Aircraft).

Dans le but d'écrire les équations de mouvement de l'avion sous l'influence des forces aérodynamiques en fonction des coordonnées généralisées, on applique la transformation suivante à l'équation (2.1) :

$$q = \Phi \eta \quad (2.2)$$

où  $\eta$  sont les coordonnées généralisées et  $\Phi$  est la matrice modale. Les deux côtés de l'équation (2.1) sont multipliés à gauche par  $\Phi^T$  et à droite par  $\Phi$  et l'équation suivante est obtenue :

$$M\ddot{\eta} + D\dot{\eta} + K\eta + q_{dyn}Q(k, Mach)\eta = P(t) \quad (2.3)$$

$$\text{où } M = \Phi^T M_e \Phi, \quad D = \Phi^T D_e \Phi, \quad K = \Phi^T K_e \Phi, \quad P = \Phi^T P_e \Phi,$$

$$Q(k, Mach) = \Phi^T A_e(k, Mach) \Phi, \quad (2.4)$$

$$\eta = [\eta_r \quad \eta_e \quad \eta_c]^T \text{ et } \Phi = [\Phi_r \quad \Phi_e \quad \Phi_c].$$

Les souscrits  $r$ ,  $e$  et  $c$  dans les expressions (2.4) des coordonnées généralisées  $\eta$  et de la matrice modale  $\Phi$  se réfèrent aux modes rigides ( $r$ ) de la structure de l'avion (3 rotations et 3 translations), élastiques ( $e$ ) de la structure de l'avion (torsion et flexion) et de commande ( $c$ ) des surfaces de commande tels que les ailerons, la gouverne de direction et les gouvernes de profondeur.

L'équation (2.3) peut avoir deux types de solutions : linéaires et non – linéaires. Dans le cas où les forces aérodynamiques seraient quasi-stationnaires (calculées pour un nombre de  $Mach$  et plusieurs fréquences réduites  $k$ ), la solution de l'équation (2.3) est linéaire et dépendante des paramètres suivants: la pression dynamique  $q_{dyn}$  et le nombre de  $Mach$ .

Dans le cas où les forces aérodynamiques seraient non-stationnaires, et en fonction de la fréquence réduite  $k$  et du nombre de *Mach*, l'équation (2.3) devient une équation non-linéaire de deuxième degré par rapport à la vitesse vraie  $V$ . Le mode de résolution de ces types d'équation est classique et a déjà été décrit [21]. On va décrire très sommairement ces modes de résolution de ces équations.

### 2.1.2 Solution de l'équation aéroélastique par la méthode *Pk*

L'équation de mouvement aéroélastique (2.3) de l'avion peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K + q_{dyn}Q) & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

On obtient  $2n$  valeurs propres conjuguées  $\lambda_i$  de la matrice  $A$  et sont écrites sous la forme suivante :

$$\lambda_i = d_i \pm j\omega_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.6)$$

Le phénomène de battement apparaît sur un avion lorsque la partie réelle  $d_i$  d'une valeur propre du système  $\lambda_i$  devient positive pour une certaine vitesse (qu'on appelle vitesse de battement).

Il faudrait calculer d'abord les valeurs propres (donc des amortissements  $d_i$  et des fréquences  $\omega_i$ ) en fonction de la vitesse de battement lorsque le nombre de *Mach* est gardé fixe. De cette manière, on obtient les vitesses de battement de l'avion où l'amortissement devient positif (l'avion devient instable).

On va choisir l'algorithme de  $Pk$  par lequel on va augmenter et itérer par rapport aux vitesses et on va interpoler les forces aérodynamiques en fonction des fréquences réduites  $k$ 's. On va aussi obtenir les courbes de représentation du phénomène de battement (fréquences et amortissements calculés à partir des valeurs propres en fonction des vitesses obtenues par des itérations).

Dans l'équation (2.3), dans laquelle la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées  $Q$  est complexe, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme  $Q = Q_R + jQ_I$ . La partie réelle de  $Q$ , ou  $Q_R$  est appelée « rigidité aérodynamique » et vibre en phase avec la position, et la partie imaginaire de  $Q$  ou  $Q_I$  est appelée « amortissement aérodynamique » et vibre en phase avec le vecteur de la vitesse. Afin de respecter la dynamique mentionnée dans l'équation (2.3), alors  $Q_R$  s'associe au vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  et  $Q_I$  s'associe à  $\dot{\eta}$ .

Puisque la matrice  $Q$  est déjà facteur du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  on doit diviser  $Q_I$  par  $\omega$ , de telle sorte que  $Q_I$  peut être exprimée en facteur de la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées  $\dot{\eta}$ . Donc, l'équation aéroélastique (2.7) devient :

$$M\ddot{\eta} + \left( D + \frac{1}{\omega} q_{dyn} Q_I \right) \dot{\eta} + (K + q_{dyn} Q_R) \eta = 0 \quad (2.7)$$

On remplace  $\omega$  et  $q_{dyn}$  en fonction de la chorde  $c$ , la vitesse vraie  $V$  et la densité de l'air  $\rho$  dans l'équation (2.7), et on obtient l'équation suivante :

$$M\ddot{\eta} + \left( D + \frac{1}{4k} \rho_0 c \sqrt{\sigma} V_E Q_I \right) \dot{\eta} + \left( K + \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 Q_R \right) \eta = 0 \quad (2.8)$$

Afin de normaliser les vitesses, un changement de variables sera introduit pour calculer la vitesse de référence  $V_0$  à travers la fréquence de référence  $\omega_0$  comme suit:

$$\omega_0 = V_0 / c \quad (2.9)$$

On va définir  $\eta^P$  comme étant le nouveau vecteur de coordonnées généralisées correspondant à la méthode  $P$ . Le changement de variables dans le vecteur des coordonnées généralisées correspond à une normalisation en fréquence, d'où l'ancien vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  est associé à la fréquence  $\omega$ , alors que le nouveau vecteur de coordonnées généralisées  $\eta^P$  est associé à une nouvelle fréquence normalisée  $\omega^P$  ainsi définie :

$$n^P(\omega^P) = \eta(\omega) \quad \text{où} \quad \omega^P = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.10)$$

d'où :

$$\dot{\eta} = \omega_0 \dot{\eta}^P \quad \text{et} \quad \ddot{\eta} = \omega_0^2 \ddot{\eta}^P, \quad (2.11)$$

## 2.2 Méthode d'approximation des forces aérodynamiques non – stationnaires du domaine de fréquence au domaine de Laplace s

### 2.2.1 Présentation de la méthode classique par des moindres carrés LS (Least Square)

L'équation (2.3) écrite dans le domaine de fréquence peut être, par l'intermédiaire de la transformée de Laplace, convertie dans le domaine de Laplace, comme suite :

$$[Ms^2 + Ds + K + q_{dyn}Q(s)]\eta(s) = 0 \quad (2.12)$$

où  $s$  est la variable de Laplace. Les matrices structurelles  $M$ ,  $D$  et  $K$  restent inchangées car elles représentent les matrices de la structure flexible de l'avion et la seule matrice à laquelle on applique cette transformation de Laplace est la matrice aérodynamique  $Q(s)$ . Plusieurs méthodes sont connues pour ces types de transformations et ont été mentionnées dans le premier chapitre sur la recherche bibliographique. Dans cette

section, on va présenter les méthodes classiques par des moindres carrées (Least Squares LS) dans lesquelles la matrice  $Q(s)$  peut être représentée par des rapports des polynômes Padé en  $s$ . Dans ce mémoire, on a développé une méthode ayant à sa base la méthode LS. On a appelé cette nouvelle méthode CLS (Corrected Least Squares CLS) ou la méthode par des moindres carrés corrigés.

### 2.2.2 Solution de l'équation du système aéroélastique par la méthode des moindres carrés LS

Les forces aérodynamiques  $Q(k, M)$  agissant sur un avion sont calculées par la méthode des doublets *DLM* à l'aide du logiciel STARS sont complexes, donc elles ont une partie réelle  $Q_R$  et une partie imaginaire  $Q_I$  alors on peut les mettre sous la forme suivante :

$$Q(\vec{j}k) = Q_R + \vec{j}Q_I . \quad (2.13)$$

Les polynômes de Padé sont utilisés pour la conversion de ces forces du domaine de fréquence au domaine de Laplace :

$$\hat{Q}(s) = \hat{Q}(\vec{j}k) = \hat{Q}_R + \vec{j}\hat{Q}_I = A_0 + A_1\vec{j}k - A_2k^2 + \sum_n A_{(n+2)} \frac{\vec{j}k}{\vec{j}k + b_n}, \quad (2.14)$$

Dans les équations (2.14),  $A_i$  sont des coefficients calculés par l'algorithme des moindres carrés LS et on va montrer dans cette section la manière de calcul de ces coefficients et  $b_i$  sont les termes de retard aérodynamique qu'ils seront optimisés.

On peut écrire le terme incluant les termes de retard dans l'équation (2.14) en séparant la partie réelle et imaginaire comme suite :

$$\frac{1}{\vec{j}k + b_n} = \frac{b_n - \vec{j}k}{b_n^2 + k^2} . \quad (2.15)$$

On va remplacer l'éq. (2.15) dans l'éq. (2.14) et on va obtenir les expressions des parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques dans le domaine de Laplace :

$$\hat{Q}_R(\vec{j}k) = A_0 - A_2 k^2 + \sum_n A_{(n+2)} \frac{k^2}{k^2 + b_n^2} \text{ et } \hat{Q}_I(\vec{j}k) = A_1 k + \sum_n A_{(n+2)} \frac{b_n k}{k^2 + b_n^2}. \quad (2.16)$$

Les erreurs réelles  $J_{R,l}$  et imaginaires  $J_{I,l}$  sont ensuite calculées pour chaque fréquence réduite et élément  $Q_{ij}$  de la matrice  $Q(k_l)$  :

$$J_{R,l} = Q_{R,l} - \hat{Q}_{R,l} = Q_{R,l} - [B_{R,l}] \{A\} \text{ et } J_{I,l} = Q_{I,l} - \hat{Q}_{I,l} = Q_{I,l} - [B_{I,l}] \{A\} \quad (2.17)$$

où les matrices  $B_{R,l}$ ,  $B_{I,l}$  et  $A$  sont exprimées par les deux ensembles d'équations suivantes :

$$B_{R,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_l^2 & \frac{k_l^2}{k_l^2 + b_1^2} & \frac{k_l^2}{k_l^2 + b_2^2} & \dots \end{bmatrix}, \quad B_{I,l} = \begin{bmatrix} 0 & k_l & 0 & \frac{k_l b_1}{k_l^2 + b_1^2} & \frac{k_l b_2}{k_l^2 + b_2^2} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{et } \{A\} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \dots & A_{(n+2)} \end{bmatrix}^T. \quad (2.19)$$

La fonction de l'erreur complexe est ensuite définie :

$$J_l = W_{ijl}(J_{R,l} + \vec{j}J_{I,l}) \text{ et sa complexe conjuguée } \bar{J}_l = W_{ijl}(J_{R,l} - \vec{j}J_{I,l}), \quad (2.20)$$

où  $W_{ijl}$  est la matrice de pondération choisie de la manière suivante :

$$W_{ijl} = \frac{1}{\max(1, |Q_{ij}(\vec{j}k_l)|)} \quad (2.21)$$

On va ensuite minimiser l'erreur quadratique  $J_l$  :

$$J_l^2 = \sum_i \sum_j \sum_l W_{ijl}^2 |Q_{ij}(\vec{j}k_l) - \hat{Q}_{ij}(\vec{j}k_l)|^2, \quad (2.22)$$

pour l'ensemble des fréquences réduites  $k_l$  pour lesquelles les éléments de la matrice  $Q(k_l)$  sont calculés.

Finalement, la solution du problème de minimisation peut être représentée par l'équation suivante :

$$\{A\} = \begin{bmatrix} A_{0ij} \\ A_{1ij} \\ \vdots \end{bmatrix} = \left\{ \sum_l W_{ijl}^2 (B_{Rl}^T B_{Rl} + B_{Il}^T B_{Il}) \right\}^{-1} \left\{ \sum_l W_{ijl}^2 (B_{Rl}^T Q_{Rijl} + B_{Il}^T Q_{Iijl}) \right\} \quad (2.23)$$

où  $Q_{Rijl} = \text{Re}\{Q_{ij}(\vec{j}k_l)\}$  et  $Q_{Iijl} = \text{Im}\{Q_{ij}(\vec{j}k_l)\}$ .

Cette solution dépend de l'optimisation des termes de retards aérodynamiques  $b_i$  qu'on va remplacer dans la fonction objective donnée par l'éq. (2.22). Cette fonction objective qui est non - linéaire sera minimisée par des techniques de programmation non - linéaire.

### 2.3 Introduction des forces aérodynamiques calculées par la méthode LS dans la méthode Pk de battement

L'introduction des forces aérodynamiques calculées par la méthode LS dans la dynamique aéroélastique de l'avion donnée par la méthode Pk en boucle ouverte et fermée est démontrée dans ce chapitre. On remplace  $Q(k)$  donnée par l'équation (2.14) dans l'équation (2.3) de la dynamique aéroélastique :

$$M\ddot{\eta} + D\dot{\eta} + K\eta + q_{dyn} \left[ A_0 + \vec{j}kA_1 + (\vec{j}k)^2 A_2 + \sum_{i=1}^{i=n_p} \frac{\vec{j}k}{\vec{j}k + b_i} A_{2+i} \right] \eta = 0, \quad (2.24)$$

$$\text{où } s = j\omega \quad \text{et} \quad k = \frac{\omega b}{V} \quad \text{d'où} \quad \vec{j}k = \frac{b}{V}s = \frac{c}{2V}s. \quad (2.25)$$

On va remplacer l'équation (2.25) dans l'équation (2.24) et on va obtenir :

$$M\ddot{\eta} + D\dot{\eta} + K\eta + q_{dyn} \left[ A_0 + \frac{c}{2V}sA_1 + \left( \frac{c}{2V}s \right)^2 A_2 + \sum_{i=1}^{i=n_\beta} \frac{s}{s + \frac{2V}{c}b_i} A_{2+i} \right] \eta = 0. \quad (2.26)$$

On va introduire le vecteur d'état des modes aérodynamiques  $X_i$  :

$$X_i = \frac{s}{s + \frac{2V}{c}b_i} \eta, \quad (2.27)$$

A partir de l'équation (2.27) on va obtenir l'équation suivante :

$$\dot{X}_i + \frac{2V}{c}b_i X_i = \dot{\eta}. \quad (2.28)$$

On va introduire l'équation (2.28) dans l'équation (2.26), et on va obtenir l'équation suivante (en tenant compte que  $c = 2b$ ) :

$$\left[ M + q_{dyn} \left( \frac{c}{2V} \right)^2 A_2 \right] \ddot{\eta} + \left[ D + q_{dyn} \frac{c}{2V} A_1 \right] \dot{\eta} + \left[ K + q_{dyn} A_0 \right] \eta + q_{dyn} \left[ \sum_{i=1}^{i=n_\beta} A_{2+i} X_i \right] = 0 \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\tilde{M}\ddot{\eta} + \tilde{D}\dot{\eta} + \tilde{K}\eta + q_{dyn} \left[ \sum_{i=1}^{i=n_\beta} A_{2+i} X_i \right] = 0, \quad (2.30)$$

$$\text{où } \tilde{M} = M + q_{dyn} \left( \frac{c}{2V} \right)^2 A_2, \quad \tilde{D} = D + q_{dyn} \frac{c}{2V} A_1 \quad \text{et} \quad \tilde{K} = K + q_{dyn} A_0 \quad (2.31)$$

Finalement, l'équation de la dynamique d'un avion flexible peut être écrite sous la forme matricielle suivante (où le nombre de Mach est gardé fixe) :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{M} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{X}_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ -\tilde{K} & -\tilde{D} & -q_{dyn}A_3 & \cdots & -q_{dyn}A_{2+n_\beta} \\ 0 & I & -\frac{2V}{c}b_lI & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -\frac{2V}{c}b_{n_\beta}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n_\beta} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

## CHAPITRE 3

### DESCRIPTION DE LA NOUVELLE MÉTHODE À PARTIR DE LA MÉTHODE LS

Les forces aérodynamiques dans le domaine de fréquence pour un nombre de Mach  $M$  donné, sont calculées pour un ensemble de fréquences réduites  $Q(k)$  par la méthode des doublets (Doublet Lattice Method) implantée dans le logiciel d'analyse aéroservoélastique STARS.

La différence entre ces forces aérodynamiques  $Q(k)$  et leurs approximations dans le domaine de Laplace  $\bar{s}$  où  $\bar{s} = sb/V$  est la variable normalisée de Laplace, donne une matrice de l'erreur notée par  $e_1$ , et on doit préciser que cette matrice n'a pas une forme analytique.

Dans la nouvelle méthode *CLS*, nous avons introduit une matrice de l'erreur, qu'on écrira sous la forme d'une fonction analytique en  $\bar{s}$ , et sera notée par  $e(\bar{s})$ . Cette erreur sera obtenue à partir de  $e_1$ , et représente la différence entre les forces aérodynamiques obtenues par la nouvelle méthode *CLS* et les forces aérodynamiques obtenues par la méthode *LS*. La forme générale de l'approximation des forces aérodynamiques obtenues par la nouvelle méthode est :

$$Q_{CLS}(\bar{s}) = Q_{LS}(\bar{s}) + e(\bar{s}) \quad (3.1)$$

Premièrement, les forces aérodynamiques dans le domaine de fréquence  $Q_{data} = Q(k)$  sont converties dans le domaine de Laplace et notées par  $Q_{LS}(\bar{s})$  en utilisant l'algorithme standard de la méthode Least Squares *LS* présentée au chapitre 2. Suite à l'application de la méthode *LS*, nous avons obtenu les valeurs des matrices :  $A_0^{LS}$ ,  $A_1^{LS}$ ,

$A_2^{LS}, \dots, A_{i+2}^{LS}$  ainsi que les valeurs des termes de retards  $b_0^{LS}, b_1^{LS}, b_2^{LS} \dots b_n^{LS}$ .

$$Q_{LS}(\bar{s}) = A_0^{LS} + A_1^{LS}\bar{s} + A_2^{LS}\bar{s}^2 + \frac{A_3^{LS}}{\bar{s} + b_1^{LS}}\bar{s} + \frac{A_4^{LS}}{\bar{s} + b_2^{LS}}\bar{s} + \dots + \frac{A_{n+2}^{LS}}{\bar{s} + b_n^{LS}}\bar{s} \quad (3.2)$$

Deuxièmement, l'erreur entre les données aérodynamiques  $Q(k)$  et les valeurs de  $Q_{LS}(\bar{s})$ , et elle est notée par  $e_1$  :

$$e_1 = Q(k) - Q_{LS}(\bar{s}) \quad (3.3)$$

Ensuite, on va écrire l'erreur  $e(\bar{s})$  définie dans l'équation (3.1) sous la même forme analytique que la forme des forces aérodynamiques exprimées par la méthode  $LS$ , c'est-à-dire sous forme des polynômes de Padé, comme suite :

$$e(\bar{s}) = A_0^{err} + A_1^{err}\bar{s} + A_2^{err}\bar{s}^2 + \frac{A_3^{err}}{\bar{s} + b_1^{err}}\bar{s} + \frac{A_4^{err}}{\bar{s} + b_2^{err}}\bar{s} + \dots + \frac{A_{n+2}^{err}}{\bar{s} + b_n^{err}}\bar{s} \quad (3.4)$$

où  $err$  représente la forme analytique de l'erreur écrite sous la forme similaire à celle donnée par la méthode  $LS$  pour l'approximation des forces aérodynamiques sous la forme  $LS$ .

Nous choisissons le même nombre de termes de retard  $n$  dans le cas de l'application de la méthode  $LS$  ainsi que de la nouvelle méthode  $CLS$ . On peut écrire ce choix sous la forme suivante :

$$b_1^{err} = b_1^{LS}, b_2^{err} = b_2^{LS}, \dots, b_n^{err} = b_n^{LS} \quad (3.5)$$

Pour chaque élément  $e^{r,c}$  de la matrice de l'erreur  $e$ , un critère de minimisation  $J^{r,c}$  est défini comme suit :

$$J^{r,c} = \sum_1^l \left[ e^{r,c} - \left( A_0^{err}(r,c) + A_1^{err}(r,c)\bar{s} + A_2^{err}(r,c)\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}(r,c)}{\bar{s} + b_i} \right) \right]^2 \quad (3.6)$$

où  $r$  indique l'indice de la ligne,  $c$  indique l'indice de la colonne et  $l$  est le nombre des fréquences réduites. Pour simplifier les notations,  $(r, c)$  sera négligé dans les équations suivantes. La notation commune des termes de retard  $b_{1,2,3,\dots}$  est utilisé à la place de  $b_{1,2,3,\dots}^{err}$  ou  $b_{1,2,3,\dots}^{LS}$  comme dans les équations. (3.5). Dans le but de minimiser le critère d'optimisation  $J^{r,c}$ , nous mettons à zéro les dérivées partielles de  $J^{r,c}$  par rapport à chaque facteur inconnu  $A_{0,1,2,\dots}^{err}(r,c)$ . Le système d'équations est écrit :

$$\frac{\partial J}{\partial A_{0,1,2,\dots}^{err}} = 0 \quad (3.7)$$

Nous allons écrire ensuite ces équations en détail :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial A_0^{err}} = (-2) * \sum_1^l \left[ e - \left( A_0^{err} + A_1^{err}\bar{s} + A_2^{err}\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial A_1^{err}} = (-2) * \sum_1^l \bar{s} \left[ e - \left( A_0^{err} + A_1^{err}\bar{s} + A_2^{err}\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial A_2^{err}} = (-2) * \sum_1^l \bar{s}^2 \left[ e - \left( A_0^{err} + A_1^{err}\bar{s} + A_2^{err}\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial A_3^{err}} = (-2) * \sum_1^l \left( \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} \right) \left[ e - \left( A_0^{err} + A_1^{err}\bar{s} + A_2^{err}\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \right) \right] = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial J}{\partial A_{n+2}^{err}} = (-2) * \sum_1^l \left( \frac{s}{s + b_n} \right) \left[ e - \left( A_0^{err} + A_1^{err}\bar{s} + A_2^{err}\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \right) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

équivalent au système suivant d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^l e = \sum_1^l \left( A_0^{err} + A_1^{err} \bar{s} + A_2^{err} \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \bar{s} \right) \\ \sum_1^l \bar{s} * e = \sum_1^l \bar{s} \left( A_0^{err} + A_1^{err} \bar{s} + A_2^{err} \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \bar{s} \right) \\ \sum_1^l \bar{s}^2 * e = \sum_1^l \bar{s}^2 \left( A_0^{err} + A_1^{err} \bar{s} + A_2^{err} \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \bar{s} \right) \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} e = \sum_1^l \left( \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} \right) \left( A_0^{err} + A_1^{err} \bar{s} + A_2^{err} \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \bar{s} \right) \\ \dots \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} e = \sum_1^l \left( \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} \right) \left( A_0^{err} + A_1^{err} \bar{s} + A_2^{err} \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}^{err}}{\bar{s} + b_i} \bar{s} \right) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

et équivalent au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^l e = A_0^{err} \sum_1^l 1 + A_1^{err} \sum_1^l \bar{s} + A_2^{err} \sum_1^l \bar{s}^2 + \sum_1^n \left[ A_{n+2}^{err} \left( \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_i} \right) \right] \\ \sum_1^l \bar{s} * e = A_0^{err} \sum_1^l \bar{s} + A_1^{err} \sum_1^l \bar{s}^2 + A_2^{err} \sum_1^l \bar{s}^3 + \sum_1^n \left[ A_{n+2}^{err} \left( \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_n} \right) \right] \\ \sum_1^l \bar{s}^2 * e = A_0^{err} \sum_1^l \bar{s}^2 + A_1^{err} \sum_1^l \bar{s}^3 + A_2^{err} \sum_1^l \bar{s}^4 + \sum_1^n \left[ A_{n+2}^{err} \left( \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_n} \right) \right] \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} e = A_0^{err} \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} + A_1^{err} \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_1} + A_2^{err} \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_1} + \sum_1^n \left[ A_{n+2}^{err} \left( \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_n)(\bar{s} + b_1)} \right) \right] \\ \dots \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} e = A_0^{err} \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} + A_1^{err} \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_n} + A_2^{err} \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_n} + \sum_1^n \left[ A_{n+2}^{err} \left( \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_n)(\bar{s} + b_n)} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Le système d'équations (3.10) est équivalent au système d'équations suivant :

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (3.11)$$

où

$$\mathbf{b} = \left[ \sum_1^l e \quad \sum_1^l \bar{s}e \quad \sum_1^l \bar{s}^2 e \quad \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} e \quad \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_2} e \quad \dots \quad \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} e \right]^T \quad (3.12)$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_1^l 1 & \sum_1^l \bar{s} & \sum_1^l \bar{s}^2 & \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} & \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_2} & \dots & \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} \\ \sum_1^l \bar{s} & \sum_1^l \bar{s}^2 & \sum_1^l \bar{s}^3 & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_1} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_2} & \dots & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_n} \\ \sum_1^l \bar{s}^2 & \sum_1^l \bar{s}^3 & \sum_1^l \bar{s}^4 & \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_1} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_2} & \dots & \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_n} \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_1} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_1} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_1} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_1)(\bar{s} + b_1)} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_2)(\bar{s} + b_1)} & \dots & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_n)(\bar{s} + b_1)} \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_2} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_2} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_2} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_1)(\bar{s} + b_2)} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_2)(\bar{s} + b_2)} & \dots & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_n)(\bar{s} + b_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_1^l \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_n} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{\bar{s} + b_n} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^3}{\bar{s} + b_n} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_1)(\bar{s} + b_n)} & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_2)(\bar{s} + b_n)} & \dots & \sum_1^l \frac{\bar{s}^2}{(\bar{s} + b_n)(\bar{s} + b_n)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

et la solution de système  $\mathbf{x}$  est obtenue à partir de l'équation (3.11) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \left[ A_0^{err} \quad A_1^{err} \quad A_2^{err} \quad A_3^{err} \quad A_4^{err} \quad \dots \quad A_{n+2}^{err} \right]^T \quad (3.14)$$

On remplace  $Q_{LS}(\bar{s})$  et  $e(\bar{s})$  données par les équations (3.2) and (3.4) dans l'équation (3.1) et on obtient  $Q_{CLS}(\bar{s})$  :

$$Q_{CLS}(\bar{s}) = (A_0^{LS} + A_0^{err}) + (A_1^{LS} + A_1^{err})\bar{s} + (A_2^{LS} + A_2^{err})\bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{s}}{\bar{s} + b_i^{LS}} (A_{i+2}^{LS} + A_{i+2}^{err}) \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) peut s'écrire comme suite :

$$Q_{CLS}(\bar{s}) = A_0 + A_1 \bar{s} + A_2 \bar{s}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{A_{i+2}}{\bar{s} + b_i^{LS}} \bar{s} \quad (3.16)$$

où  $A_0 = A_0^{LS} + A_0^{err}$ ,  $A_1 = A_1^{LS} + A_1^{err}$ ,  $A_2 = A_2^{LS} + A_2^{err}$ , ...,  $A_{n+2} = A_{n+2}^{LS} + A_{n+2}^{err}$ .

## **CHAPITRE 4**

### **RÉSULTATS**

Les résultats seront présentés dans 3 sections : 4.1, 4.2 et 4.3. Dans la section 4.1 on présente les résultats obtenus pour le cas :  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques. Dans la section 4.2, on présente les résultats obtenus pour les modes élastiques et symétriques – pour quatre nombres de Mach  $M = 1.1, 1.3, 1.4$  et  $1.6$  et dans la section 4.3 on présente les résultats obtenus pour les modes élastiques et anti-symétriques – pour cinq nombres de Mach  $M = 0.85, 1.1, 1.3, 1.4$  et  $1.6$ .

#### **4.1 Présentation générale des résultats obtenus pour un seul cas : $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques**

Dans le Tableau I, on présente une comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, Least Squares *LS* et la nouvelle méthode *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques. Dans la première colonne on présente le type de méthode (*pk* standard, *LS* et *CLS*), dans la deuxième colonne du tableau on présente les résultats obtenus pour le premier battement et dans la troisième colonne du tableau on présente les résultats obtenus pour le deuxième battement. Ces résultats sont exprimés sous la forme des vitesses et fréquences.

Les valeurs numériques des vitesses de battement présentées au tableau I pour chaque méthode (*pk*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard) sont utilisées pour tracer graphiquement les mêmes types de résultats dans les deux figures 1 (pour la première vitesse de battement) et 2 (pour la deuxième vitesse de battement).

Tableau I

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes  
*pk* standard, *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) pour  
 $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>		<b>Battement #2</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	947.18	7.94	1496.88	12.08
<b><i>LS_1</i> lag</b>	966.58	7.80	1512.03	11.59
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	956.24	7.83	1510.31	12.09
<b><i>LS_2</i> lags</b>	971.46	7.76	1506.49	12.23
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	944.61	7.86	1505.92	11.99
<b><i>LS_3</i> lags</b>	959.29	7.76	1472.94	12.08
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	940.78	7.94	1497.52	12.06
<b><i>LS_4</i> lags</b>	959.29	7.76	1472.94	12.08
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	944.55	7.96	1496.92	12.07
<b><i>LS_5</i> lags</b>	972.40	7.75	1519.43	12.17
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	945.96	7.96	1497.06	12.08
<b><i>LS_6</i> lags</b>	952.92	7.98	1472.12	12.39
<b><i>CLS_6</i> lags</b>	946.24	7.96	1496.71	12.08
<b><i>LS_7</i> lags</b>	938.22	7.90	1519.41	12.03
<b><i>CLS_7</i> lags</b>	947.17	7.96	1496.68	12.08

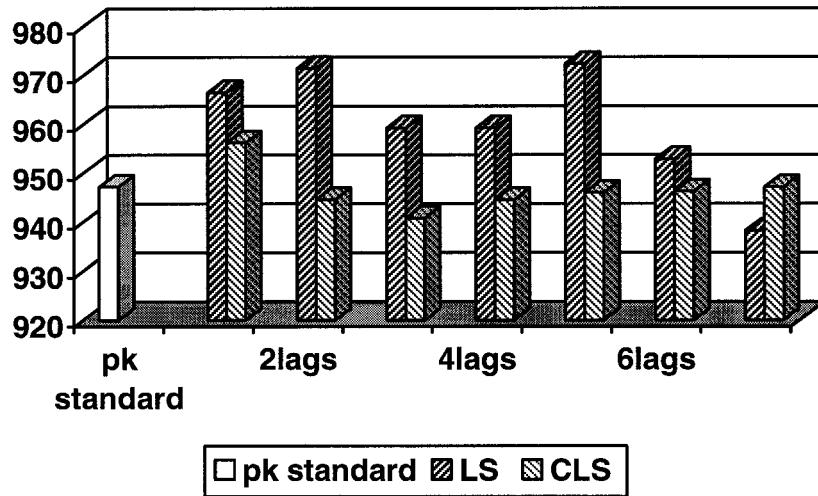


Figure 1 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

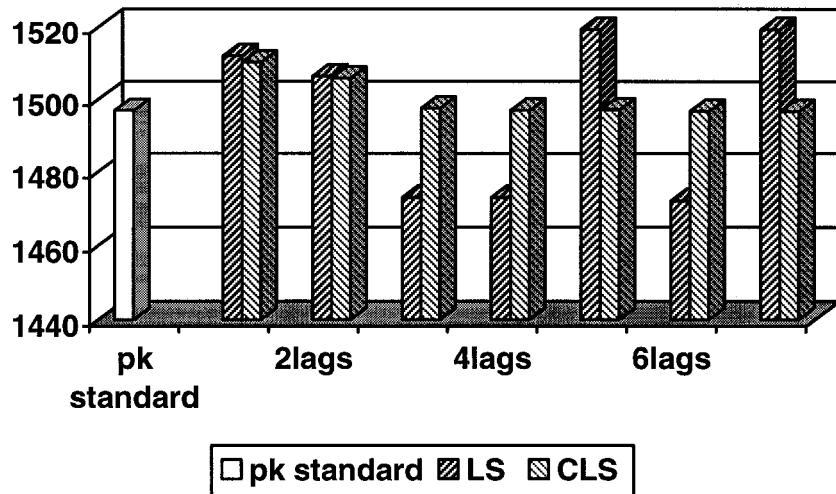


Figure 2 Deuxièmes vitesses de obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

Les erreurs relatives des vitesses et fréquences obtenues par la méthode *CLS* par rapport à celles obtenues par la méthode *pk* standard sont exprimées par les équations (4.1) :

$$\frac{V_{CLS} - V_{pk}}{V_{CLS}} * 100\% \quad (4.1)$$

$$\frac{f_{CLS} - f_{pk}}{f_{CLS}} * 100\%$$

où  $V_{CLS}$  et  $f_{CLS}$  sont les vitesses et fréquences obtenus par la méthode *CLS* et  $V_{pk}$  et  $f_{pk}$  sont les vitesses et fréquences obtenus par la méthode *pk* standard. Les mêmes types d'équations que les équations (4.1) sont appliqués dans le calcul de l'erreur relative des vitesses et fréquences obtenues par la méthode *LS* par rapport à celles obtenues par la méthode *pk* standard, et les équations (4.2) sont obtenues :

$$\frac{V_{LS} - V_{pk}}{V_{LS}} * 100\% \quad (4.2)$$

$$\frac{f_{LS} - f_{pk}}{f_{LS}} * 100\%$$

où  $V_{LS}$  et  $f_{LS}$  sont les vitesses et fréquences obtenus par la méthode *LS*. Dans les équations (4.1) et (4.2), les vitesses et les fréquences correspondent au premier ainsi qu'au deuxième phénomène de battement. Les erreurs relatives des premières et deuxièmes vitesses et fréquences de battement par rapport à celles calculées par la méthode de battement classique *pk* standard sont représentées numériquement dans les tableaux II et III.

Dans la première colonne du tableau II, on présente le nombre des termes de retards correspondant aux méthodes *CLS* et *LS*. Dans les deuxièmes et troisièmes colonnes des tableaux II et III, on présente les erreurs relatives des vitesses et fréquences obtenues par

les méthodes *CLS* et *LS* par rapport aux vitesses et fréquences obtenues par la méthode *pk*. Les résultats obtenus pour les premières vitesses et fréquences sont représentés dans le tableau II, pendant que les résultats obtenus pour les deuxièmes vitesses et fréquences se trouvent dans le tableau III.

Tableau II

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

<b>Nombre de termes de retards (lags)</b>	<b><i>CLS</i></b>		<b><i>LS</i></b>	
	<b>Veas 1 (%)</b>	<b>Fréquence 1 (%)</b>	<b>Veas 1 (%)</b>	<b>Fréquence 1 (%)</b>
1	0.96%	-1.44%	2.05%	-1.81%
2	-0.27%	-1.07%	2.56%	-2.26%
3	-0.68%	-0.07%	1.28%	-2.26%
4	-0.28%	0.23%	1.28%	-2.26%
5	-0.13%	0.19%	2.66%	-2.40%
6	-0.10%	0.27%	0.61%	0.48%
7	0.00%	0.25%	-0.95%	-0.57%

Tableau III

L'erreur relative des deuxièmes vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

<b>Nombre de termes de retards (lags)</b>	<b><i>CLS</i></b>		<b><i>LS</i></b>	
	<b>Veas 2 (%)</b>	<b>Fréquence 2 (%)</b>	<b>Veas 2 (%)</b>	<b>Fréquence 2 (%)</b>
1	0.90%	0.12%	1.01%	-4.04%
2	0.60%	-0.72%	0.64%	1.25%
3	0.04%	-0.15%	-1.60%	-0.01%
4	0.00%	-0.04%	-1.60%	-0.01%
5	0.01%	-0.01%	1.51%	0.80%
6	-0.01%	0.01%	-1.65%	2.61%
7	-0.01%	0.01%	1.51%	-0.37%

Dans le but de comparer les résultats obtenus pour les forces aérodynamiques (réelles  $Q_{\text{réel}}$ , imaginaires  $Q_{\text{imag}}$  et totales  $Q_{\text{total}}$ ) par la nouvelle méthode *CLS* avec les résultats obtenus par la méthode *LS*, la réduction de l'erreur = $100 * \text{abs}(Q_{\text{LS}} - Q_{\text{CLS}}) / Q_{\text{LS}}$  est définie où  $\text{abs}$  est la valeur absolue,  $Q_{\text{LS}}$  sont les forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* et  $Q_{\text{CLS}}$  sont les forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS*.

Tableau IV

La réduction de l'erreur pour les forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i></b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{réel}}</math> (%)</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{imag}}</math> (%)</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{total}}</math> (%)</b>
nr retards			
1	59.63%	51.67%	56.21%
2	46.85%	70.45%	63.64%
3	78.75%	70.01%	73.07%
4	65.31%	64.67%	65.20%
5	83.00%	76.67%	79.98%
6	79.25%	69.15%	72.50%
7	85.53%	55.11%	64.87%

Les résultats présentés numériquement au Tableau IV seront représentés graphiquement dans la Figure 3 :

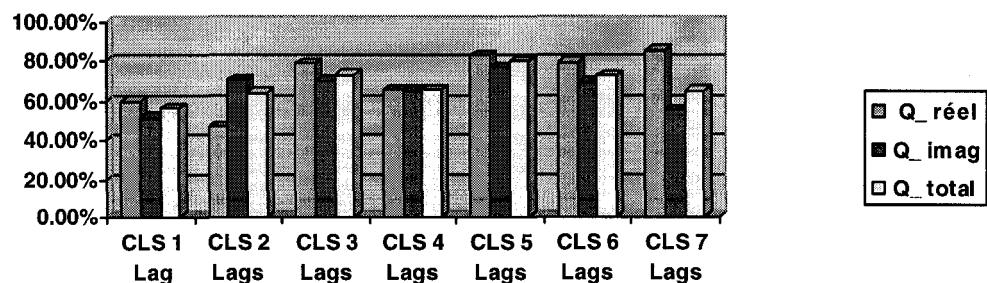


Figure 3 La réduction de l'erreur pour les forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et symétriques

#### **4.2 Présentation générale des résultats obtenus pour tous les nombres de Mach, pour les modes élastiques et symétriques, sauf pour le cas présenté dans la section 6.1 (nombre de Mach = 0.85)**

Les mêmes types des résultats présentés jusqu'ici pour le nombre de Mach  $M = 0.85$  et pour les modes élastiques et symétriques sont présentés dans ce chapitre. Pour le nombre de Mach = 1.1, les résultats sont présentés dans les tableaux V à VIII et dans les figures 4, 5 et 6. Pour le nombre de Mach = 1.3, les résultats sont présentés dans les tableaux IX à XII et dans les figures 7, 8 et 9. Pour le nombre de Mach = 1.4, les résultats sont présentés dans les tableaux XIII à XV et dans les figures 10 et 11. Pour le nombre de Mach = 1.6, les résultats sont présentés dans les tableaux XVI à XVIII et les figures 12 et 13.

#### 4.2.1 $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

Tableau V

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) pour  
 $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

Méthode	Battement #1		Battement #2	
	Veas (ft/s)	Freq (Hz)	Veas (ft/s)	Freq (Hz)
<i>pk</i> standard	1199.78	27.43	1263.42	12.46
<i>LS_1 lag</i>	1099.43	27.12	1258.41	12.74
<i>CLS_1 lag</i>	1205.13	27.38	1252.53	12.52
<i>LS_2 lags</i>	1128.25	27.20	1272.36	12.45
<i>CLS_2 lags</i>	1173.78	27.32	1261.87	12.45
<i>LS_3 lags</i>	1029.90	26.74	1258.56	13.01
<i>CLS_3 lags</i>	1185.27	27.38	1264.95	12.46
<i>LS_4 lags</i>	1029.90	26.74	1258.56	13.01
<i>CLS_4 lags</i>	1199.14	27.41	1266.28	12.42
<i>LS_5 lags</i>	1203.21	27.42	1250.54	12.40
<i>CLS_5 lags</i>	1203.77	27.43	1264.17	12.42
<i>LS_6 lags</i>	1185.28	27.36	1266.63	12.42
<i>CLS_6 lags</i>	1205.02	27.44	1264.36	12.42
<i>LS_7 lags</i>	1197.38	27.40	1267.13	12.41
<i>CLS_7 lags</i>	1247.28	27.51	1267.89	12.37
<i>LS_8 lags</i>	1202.53	27.33	1248.01	12.64
<i>CLS_8 lags</i>	1206.00	27.44	1264.13	12.42
<i>LS_9 lags</i>	1207.93	27.44	1264.55	12.35
<i>CLS_9 lags</i>	1214.89	27.44	1262.41	12.42
<i>LS_10 lags</i>	1189.88	27.38	1263.93	12.46
<i>CLS_10 lags</i>	1211.27	27.45	1264.79	12.43

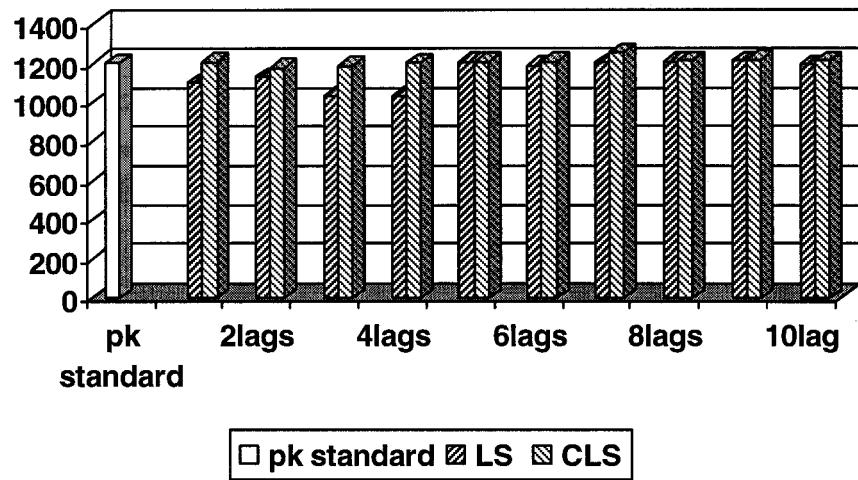


Figure 4 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

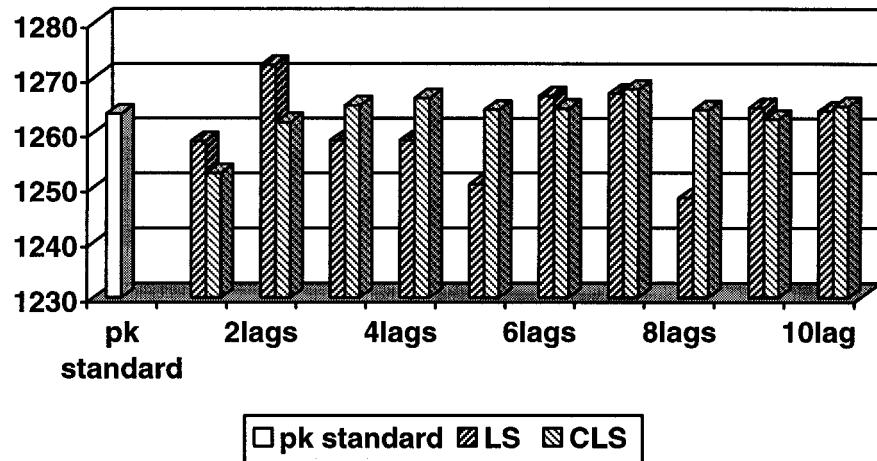


Figure 5 Deuxièmes vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

Tableau VI

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	0.45%	-0.18%	-8.36%	-1.15%
2	-2.17%	-0.40%	-5.96%	-0.84%
3	-1.21%	-0.20%	-14.16%	-2.51%
4	-0.05%	-0.06%	-14.16%	-2.51%
5	0.33%	0.01%	0.29%	-0.04%
6	0.44%	0.03%	-1.21%	-0.26%
7	3.96%	0.29%	-0.20%	-0.10%
8	0.52%	0.03%	0.23%	-0.36%
9	1.26%	0.02%	0.68%	0.02%
10	0.96%	0.08%	-0.83%	-0.17%

Tableau VII

L'erreur relative des deuxième vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 2 (%)	Fréquence 2 (%)	Veas 2 (%)	Fréquence 2 (%)
1	-0.86%	0.51%	-0.40%	2.24%
2	-0.12%	-0.06%	0.71%	-0.07%
3	0.12%	0.04%	-0.38%	4.46%
4	0.23%	-0.33%	-0.38%	4.46%
5	0.06%	-0.34%	-1.02%	-0.51%
6	0.07%	-0.35%	0.25%	-0.30%
7	0.35%	-0.70%	0.29%	-0.37%
8	0.06%	-0.32%	-1.22%	1.42%
9	-0.08%	-0.33%	0.09%	-0.88%
10	0.11%	-0.27%	0.04%	0.00%

Tableau VIII

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i> nr retards</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{réel}}</math> (%)</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{imag}}</math> (%)</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{total}}</math> (%)</b>
1	48.66%	46.94%	48.86%
2	17.61%	24.32%	21.28%
3	9.62%	0.88%	5.18%
4	29.88%	34.73%	31.59%
5	59.70%	63.50%	61.91%
6	37.37%	37.15%	37.71%
7	20.75%	25.67%	23.71%
8	39.95%	47.85%	44.38%
9	49.47%	43.44%	46.93%
10	55.97%	45.89%	51.18%

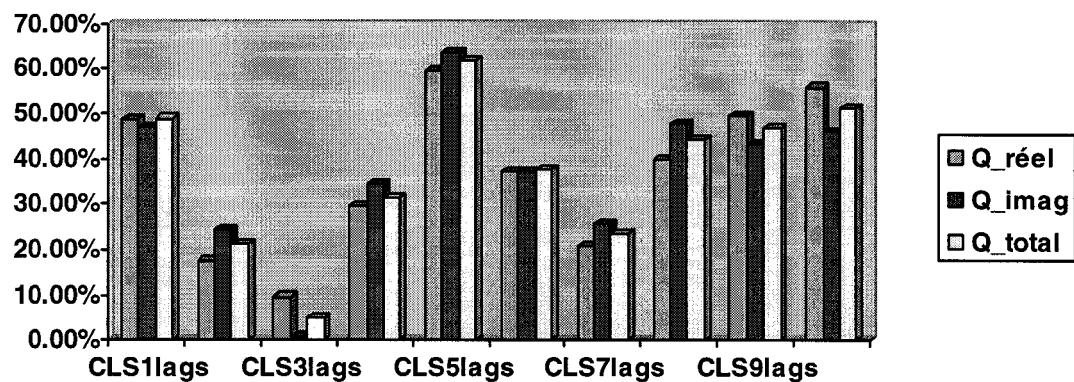


Figure 6 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et symétriques

#### 4.2.2 $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

Tableau IX

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>		<b>Battement #2</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	940.22	27.41	1576.51	14.00
<b><i>LS_1 lag</i></b>	948.07	27.49	1552.89	14.03
<b><i>CLS_1 lag</i></b>	940.24	27.42	1598.05	14.01
<b><i>LS_2 lags</i></b>	943.17	27.42	1601.08	13.96
<b><i>CLS_2 lags</i></b>	939.85	27.41	1576.15	13.98
<b><i>LS_3 lags</i></b>	942.42	27.44	1569.11	14.01
<b><i>CLS_3 lags</i></b>	939.86	27.41	1562.07	13.99
<b><i>LS_4 lags</i></b>	942.42	27.44	1569.11	14.01
<b><i>CLS_4 lags</i></b>	940.08	27.41	1571.99	14.00
<b><i>LS_5 lags</i></b>	939.57	27.41	1594.66	14.00
<b><i>CLS_5 lags</i></b>	940.14	27.41	1575.78	14.00

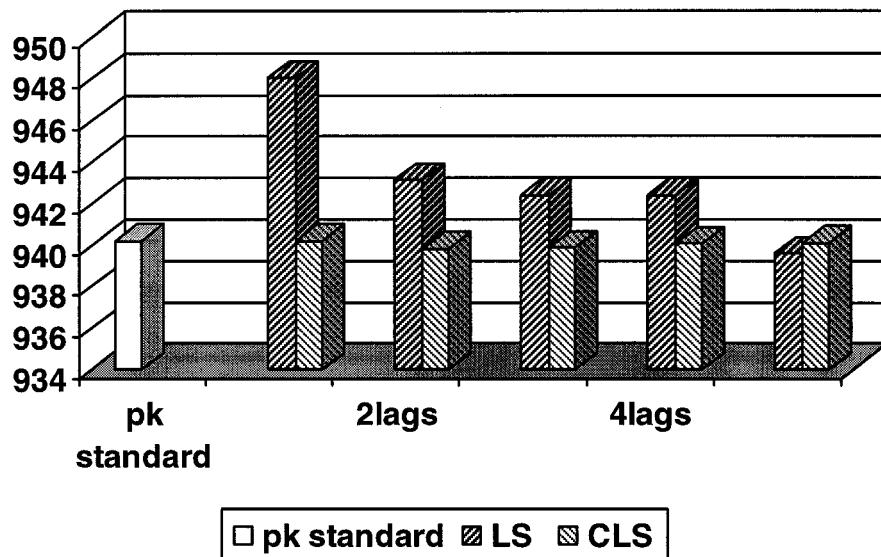


Figure 7 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

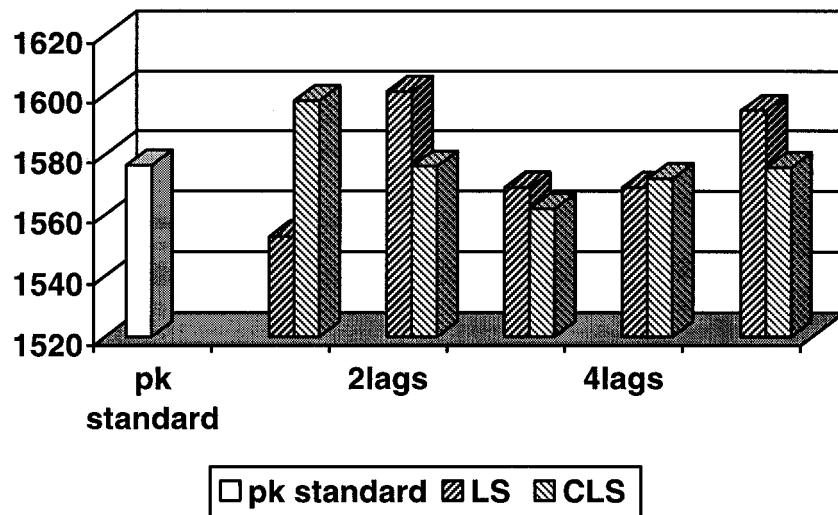


Figure 8 Deuxièmes vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

Tableau X

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	0.00%	0.02%	0.84%	0.28%
2	-0.04%	-0.01%	0.31%	0.04%
3	-0.04%	-0.01%	0.23%	0.11%
4	-0.01%	0.00%	0.23%	0.11%
5	-0.01%	0.00%	-0.07%	-0.03%

Tableau XI

L'erreur relative des deuxième vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 2 (%)	Fréquence 2 (%)	Veas 2 (%)	Fréquence 2 (%)
1	1.37%	0.11%	-1.50%	0.25%
2	-0.02%	-0.12%	1.56%	-0.26%
3	-0.92%	-0.06%	-0.47%	0.09%
4	-0.29%	0.03%	-0.47%	0.09%
5	-0.05%	0.02%	1.15%	-0.01%

Tableau XII

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode</b> <i>CLS vs LS</i> nr retards	<b>Réduction de l'erreur</b>		
	<b>pour <math>Q_{\text{réel}}</math> (%)</b>	<b>pour <math>Q_{\text{imag}}</math> (%)</b>	<b>pour <math>Q_{\text{total}}</math> (%)</b>
1	49.50%	60.81%	57.11%
2	68.98%	57.98%	64.85%
3	60.96%	53.85%	57.20%
4	73.12%	69.49%	71.37%
5	83.00%	81.69%	82.33%

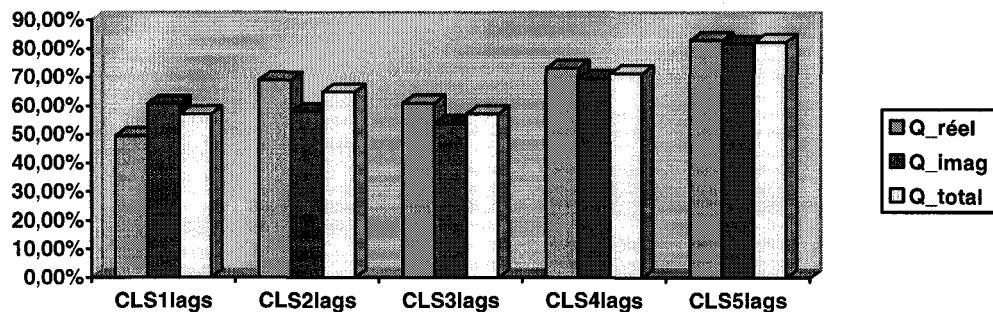


Figure 9 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et symétriques

#### 4.2.3 $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques

Tableau XIII

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* avec plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk standard</i></b>	1011.06	28.05

Tableau XXIII (suite)

<b><i>LS_1 lag</i></b>	1016.84	28.11
<b><i>CLS_1 lag</i></b>	1011.96	28.06
<b><i>LS_2 lags</i></b>	1014.52	28.11
<b><i>CLS_2 lags</i></b>	1011.53	28.06
<b><i>LS_3 lags</i></b>	1014.52	28.11
<b><i>CLS_3 lags</i></b>	1011.33	28.05
<b><i>LS_4 lags</i></b>	1014.52	28.11
<b><i>CLS_4 lags</i></b>	1011.19	28.05
<b><i>LS_5 lags</i></b>	1011.14	28.05
<b><i>CLS_5 lags</i></b>	1011.18	28.05
<b><i>LS_6 lags</i></b>	1011.00	28.05
<b><i>CLS_6 lags</i></b>	1011.17	28.05
<b><i>LS_7 lags</i></b>	1011.19	28.05
<b><i>CLS_7 lags</i></b>	1011.25	28.05

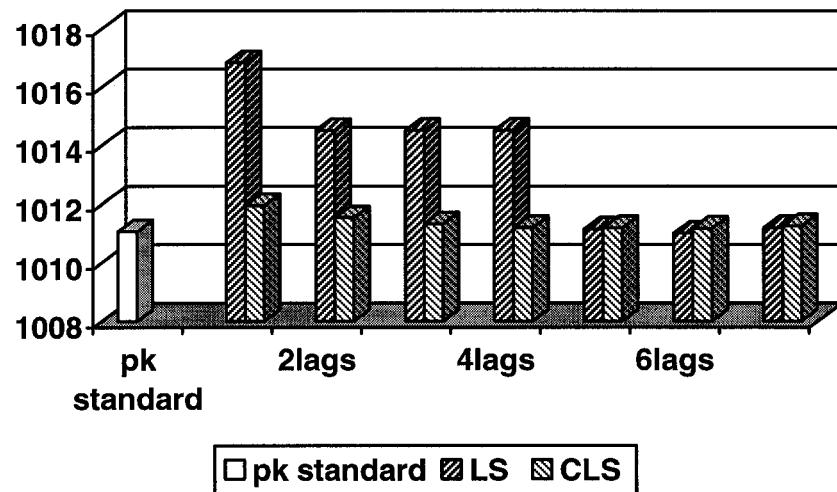


Figure 10 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques

Tableau XIV

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques

<b>Nombre de retards (lags)</b>	<b><i>CLS</i></b>		<b><i>LS</i></b>	
	<b>Veas 1 (%)</b>	<b>Fréquence 1 (%)</b>	<b>Veas 1 (%)</b>	<b>Fréquence 1 (%)</b>
1	0.09%	0.03%	0.57%	0.21%
2	0.05%	0.02%	0.34%	0.20%
3	0.03%	0.00%	0.34%	0.20%
4	0.01%	0.00%	0.34%	0.20%
5	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%
6	0.01%	0.00%	-0.01%	0.00%
7	0.02%	0.00%	0.01%	0.02%

Tableau XV

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode</b> <b><i>CLS</i> vs <i>LS</i></b>	<b>Réduction de l'erreur</b> <b>pour <math>Q_{\text{réel}} (%)</math></b>	<b>Réduction de l'erreur</b> <b>pour <math>Q_{\text{imag}} (%)</math></b>	<b>Réduction de l'erreur</b> <b>pour <math>Q_{\text{total}} (%)</math></b>
<b>nr retards</b>	<b>Réduction de l'erreur</b> <b>pour <math>Q_{\text{réel}} (%)</math></b>	<b>Réduction de l'erreur</b> <b>pour <math>Q_{\text{imag}} (%)</math></b>	<b>Réduction de l'erreur</b> <b>pour <math>Q_{\text{total}} (%)</math></b>
1	53.91%	61.47%	59.16%
2	71.91%	62.93%	68.82%
3	67.64%	58.61%	63.51%
4	86.10%	85.71%	85.91%
5	78.09%	78.99%	78.47%
6	73.82%	79.81%	76.65%
7	40.16%	47.59%	44.70%

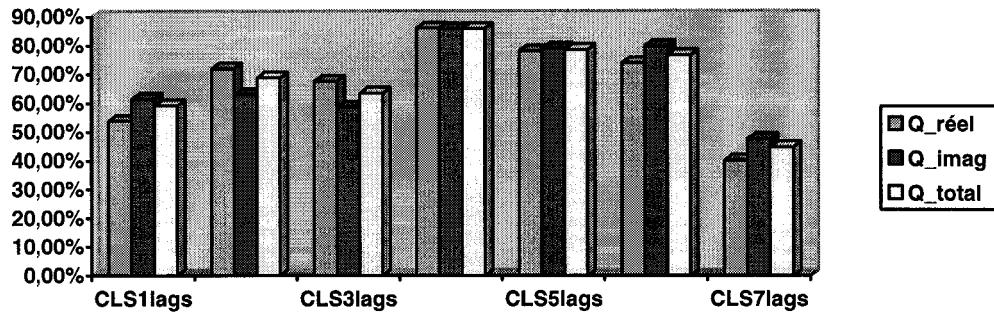


Figure 11 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et symétriques

#### 4.2.4 $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques

Tableau XVI

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* avec 1 à 10 termes de retard (*lags*) pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>	
	<b>V<sub>eas</sub> (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	1127.46	28.89
<b><i>LS_1</i> lag</b>	1130.66	28.89
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	1127.47	28.89
<b><i>LS_2</i> lags</b>	1128.31	28.89
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	1127.22	28.89
<b><i>LS_3</i> lags</b>	1131.88	28.93
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	1127.26	28.89
<b><i>LS_4</i> lags</b>	1131.88	28.93
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	1127.32	28.89
<b><i>LS_5</i> lags</b>	1128.09	28.89
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	1127.33	28.89

Tableau XVI (suite)

<b><i>LS_6 lags</i></b>	1127.23	28.89
<b><i>CLS_6 lags</i></b>	1127.32	28.89
<b><i>LS_7 lags</i></b>	1128.07	28.89
<b><i>CLS_7 lags</i></b>	1127.27	28.89
<b><i>LS_8 lags</i></b>	1127.25	28.89
<b><i>CLS_8 lags</i></b>	1127.29	28.89
<b><i>LS_9 lags</i></b>	1127.24	28.89
<b><i>CLS_9 lags</i></b>	1127.38	28.89
<b><i>LS_10 lags</i></b>	1127.09	28.89
<b><i>CLS_10 lags</i></b>	1127.39	28.89

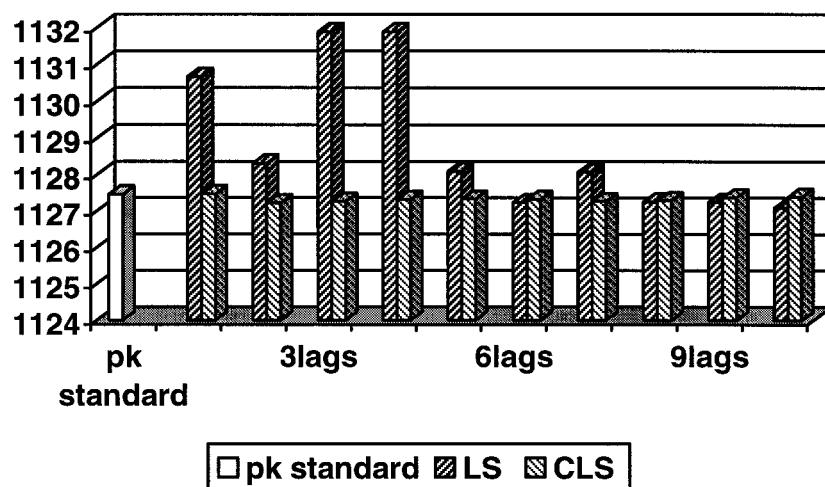


Figure 12 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques

Tableau XVII

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour 1 à 10 termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	0.00%	-0.02%	0.28%	0.01%
2	-0.02%	-0.01%	0.08%	0.01%
3	-0.02%	0.00%	0.39%	0.14%
4	-0.01%	0.00%	0.39%	0.14%
5	-0.01%	0.00%	0.06%	0.00%
6	-0.01%	0.00%	-0.02%	0.00%
7	-0.02%	0.00%	0.05%	0.00%
8	-0.02%	0.00%	-0.02%	0.00%
9	-0.01%	0.00%	-0.02%	0.00%
10	-0.01%	0.00%	-0.03%	-0.01%

Tableau XVIII

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.6$  modes élastiques et symétriques

Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i>	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{réel}} (%)$	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{imag}} (%)$	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{total}} (%)$
nr retards			
1	66.30%	67.98%	67.58%
2	78.65%	74.57%	77.04%
3	75.00%	69.37%	73.08%
4	76.90%	81.25%	79.33%
5	86.30%	82.85%	85.21%
6	66.87%	73.15%	71.05%
7	73.28%	75.75%	75.02%
8	63.13%	70.61%	67.29%
9	45.58%	54.70%	52.34%
10	34.25%	8.86%	18.53%

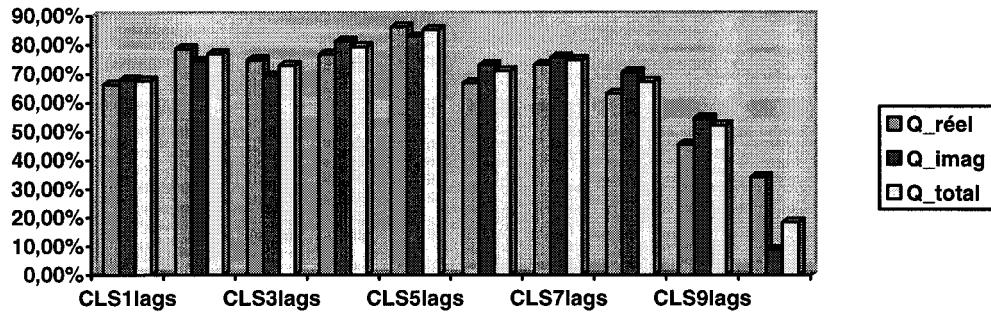


Figure 13 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.6$  modes élastiques et symétriques

Dans ce chapitre, nous avons choisi premièrement de déterminer le pourcentage minimum (qui reflète la différence minimale) pour les valeurs de vitesses de battement par rapport à la vitesse de battement  $pk$  standard et le nombre de retard correspondant à ce pourcentage de vitesses de battement (première et deuxième). Nous avons choisi deuxièmement de trouver la réduction maximale de l'erreur pour les parties réelles, imaginaires et totales des forces aérodynamiques.

Pour  $M = 0.85$ , dans le Tableau II, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 7 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.61 % pour 6 termes de retard. Dans le Tableau III, le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 4 termes de retard et le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.61 % pour 2 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la première ligne du Tableau XXXVII. Dans le tableau IV, cette réduction maximale a été trouvée pour 7 termes de retard pour les parties réelles de forces aérodynamiques et pour 5 termes de retard pour les autres parties de forces aérodynamiques (imaginaires et totales). Cette deuxième série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la première ligne du Tableau XXXVI.

Pour  $M = 1.1$ , dans le Tableau VI, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.05 % pour 4 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.20 % pour 7 termes de retard. Dans le Tableau VII, le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.06 % pour 5 termes de retard et le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.04 % pour 10 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la deuxième ligne du Tableau XXXVII. Dans le tableau VIII, la réduction maximale de l'erreur de forces aérodynamiques a été trouvée pour 5 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la deuxième ligne du Tableau XXXVI.

Pour  $M = 1.3$ , dans le Tableau X, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 1 terme de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.07 % pour 5 termes de retard. Dans le Tableau XI, le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.02 % pour 2 termes de retard et le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.47 % pour 3 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la troisième ligne du Tableau XXXVII. Dans le tableau XII, la réduction maximale de l'erreur de forces aérodynamiques a été trouvée pour 5 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la troisième ligne du Tableau XXXVI.

Pour  $M = 1.4$ , dans le Tableau XIV, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.01 % pour 4 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.01 % pour 5 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la quatrième ligne du Tableau XXXVII. Dans le tableau XV, la réduction maximale de l'erreur de forces aérodynamiques a été trouvée pour 4 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la quatrième ligne du Tableau XXXVI.

Pour  $M = 1.6$ , dans le Tableau XVII, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 1 terme de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.02 % pour 6 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la cinquième ligne du Tableau XXXVII. Dans le tableau XVIII, la réduction maximale de l'erreur de forces aérodynamiques a été trouvée pour 5 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la cinquième ligne du Tableau XXXVI.

### 4.3 Présentation générale des résultats obtenus pour tous les nombres de Mach, pour les modes élastiques et anti-symétriques

On va présenter les résultats pour les modes élastiques anti-symétriques pour le nombre de Mach  $M = 0.85$ , dans les tableaux XIX à XXII et dans les figures 14 à 16, pour le nombre de Mach  $M = 1.1$ , dans les tableaux XXIII à XXVI et les figures 17 à 19, pour le nombre de Mach  $M = 1.3$ , dans les tableaux XXVII à XXIX et les figures 20 et 21, le nombre de Mach  $M = 1.4$ , dans les tableaux XXX à XXXII et les figures 22 et 23, le nombre de Mach  $M = 1.6$ , dans les tableaux XXXIII à XXXV et les figures 24 à 25.

#### 4.3.1 $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XIX

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>		<b>Battement #2</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	964.78	9.33	1704.162	14.06
<b><i>LS_1</i> lag</b>	978.72	9.18	1763.37	14.17
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	945.52	9.35	1708.28	14.05
<b><i>LS_2</i> lags</b>	978.72	9.18	1763.37	14.17
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	950.79	9.37	1705.43	14.04
<b><i>LS_3</i> lags</b>	978.72	9.18	1763.37	14.17
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	963.65	9.35	1704.63	14.05
<b><i>LS_4</i> lags</b>	978.72	9.18	1763.37	14.17
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	964.57	9.34	1704.83	14.06
<b><i>LS_5</i> lags</b>	955.19	9.36	1693.79	14.23
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	965.17	9.33	1705.83	14.05
<b><i>LS_6</i> lags</b>	956.87	9.35	1694.32	14.23
<b><i>CLS_6</i> lags</b>	964.20	9.34	1701.51	14.08

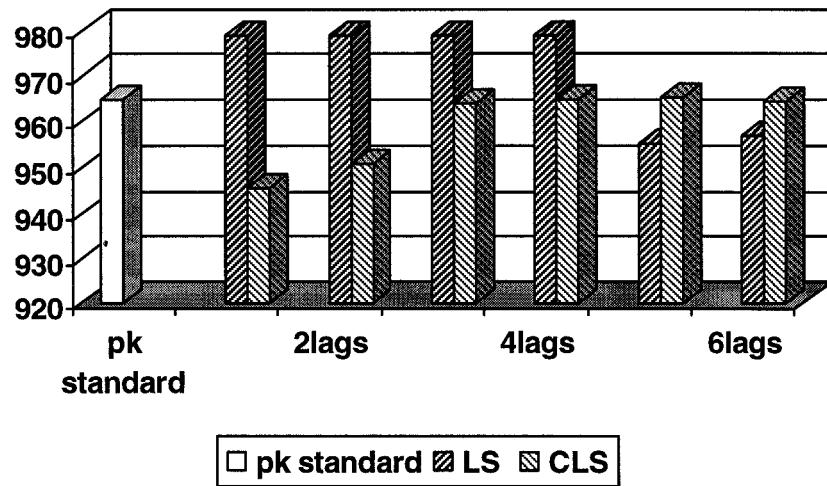


Figure 14 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et anti – symétriques

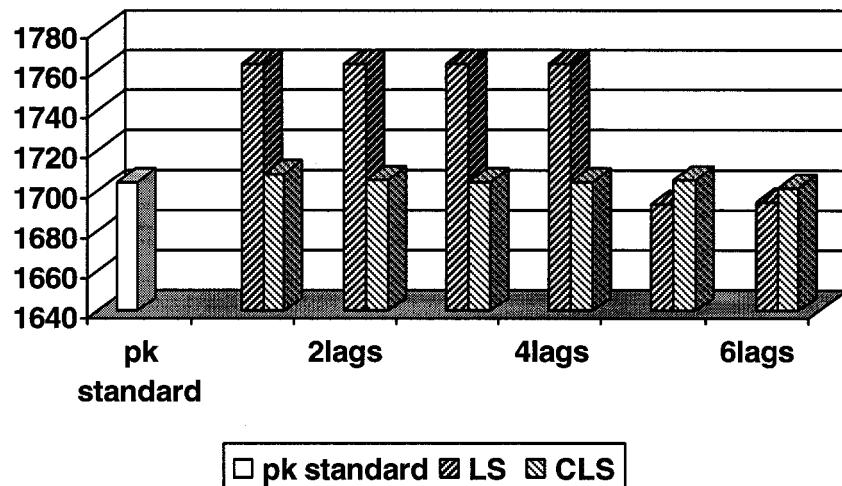


Figure 15 Deuxièmes vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lag*), pour  $M= 0.85$ , modes élastiques et anti - symétriques

Tableau XX

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Nombre de retards (lags)</b>	<b><i>CLS</i></b>		<b><i>LS</i></b>	
	<b>Veas 1 (%)</b>	<b>Fréquence 1 (%)</b>	<b>Veas 1 (%)</b>	<b>Fréquence 1 (%)</b>
1	-2.00%	0.26%	1.44%	-1.62%
2	-1.45%	0.48%	1.44%	-1.62%
3	-0.12%	0.21%	1.44%	-1.62%
4	-0.02%	0.12%	1.44%	-1.62%
5	0.04%	0.08%	-0.99%	0.31%
6	-0.06%	0.12%	-0.82%	0.25%

Tableau XXI

L'erreur relative des deuxième vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Nombre de retards (lags)</b>	<b><i>CLS</i></b>		<b><i>LS</i></b>	
	<b>Veas 2 (%)</b>	<b>Fréquence 2 (%)</b>	<b>Veas 2 (%)</b>	<b>Fréquence 2 (%)</b>
1	0.24%	-0.02%	3.47%	0.79%
2	4.06%	-3.04%	3.47%	0.79%
3	3.10%	-3.22%	3.47%	0.79%
4	-0.20%	0.02%	3.47%	0.79%
5	0.02%	0.06%	-0.61%	1.21%
6	-0.18%	0.16%	-0.58%	1.26%

Tableau XXII

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode</b> <i>CLS vs LS</i>	<b>Réduction de l'erreur</b> pour $Q_{\text{réel}} (\%)$	<b>Réduction de l'erreur</b> pour $Q_{\text{imag}} (\%)$	<b>Réduction de l'erreur</b> pour $Q_{\text{total}} (\%)$
nr retards			
1	60.41%	55.58%	58.35%
2	63.61%	54.43%	59.24%
3	69.69%	67.70%	68.55%
4	80.20%	76.00%	78.00%
5	81.10%	80.49%	80.93%
6	14.62%	46.82%	32.15%

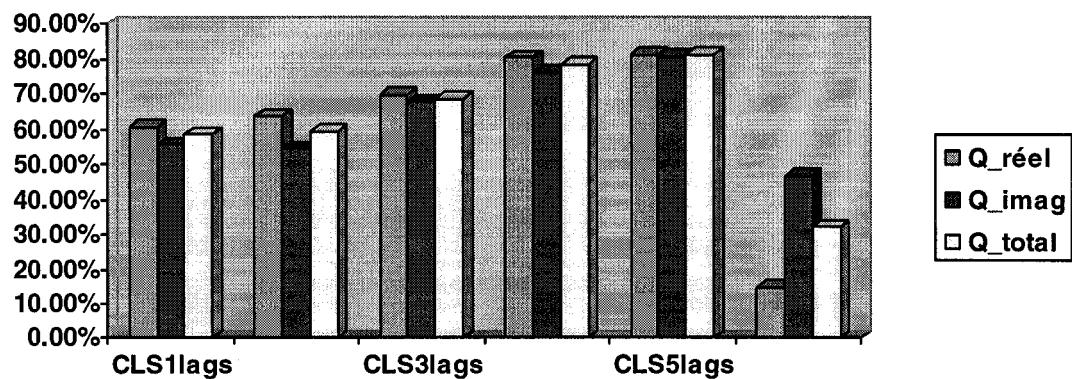


Figure 16 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 0.85$ , modes élastiques et anti-symétriques

### 4.3.2 $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXIII

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>		<b>Battement #2</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	1472.29	13.90	1057.94	27.44
<b><i>LS_1</i> lag</b>	1476.83	13.97	1010.36	27.23
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	1469.05	13.87	1045.52	27.34
<b><i>LS_2</i> lags</b>	1464.04	13.93	1047.33	27.37
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	1469.67	13.85	1051.74	27.40
<b><i>LS_3</i> lags</b>	1464.80	14.28	974.75	27.00
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	1469.20	13.86	1058.16	27.44
<b><i>LS_4</i> lags</b>	1464.80	14.28	974.75	27.00
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	1472.25	13.87	1058.56	27.44
<b><i>LS_5</i> lags</b>	1466.50	13.93	1044.63	27.34
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	1472.00	13.86	1058.93	27.45
<b><i>LS_6</i> lags</b>	1463.12	13.99	1059.17	27.38
<b><i>CLS_6</i> lags</b>	1472.24	13.86	1059.33	27.45

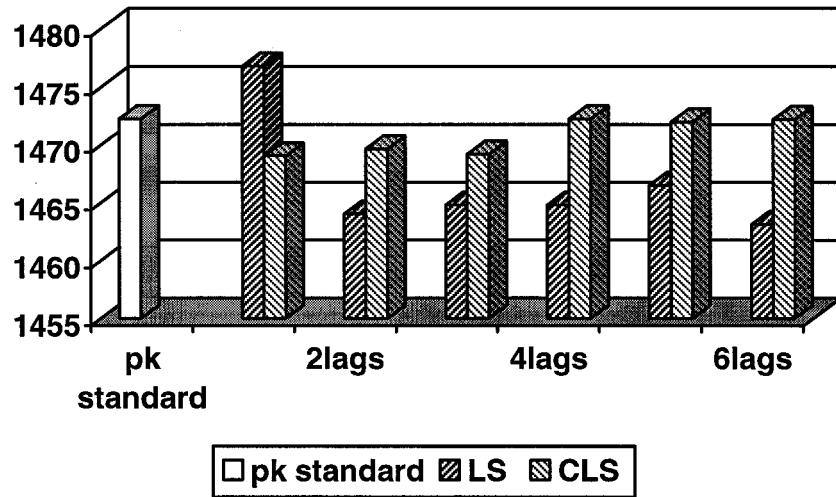


Figure 17 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti- symétriques

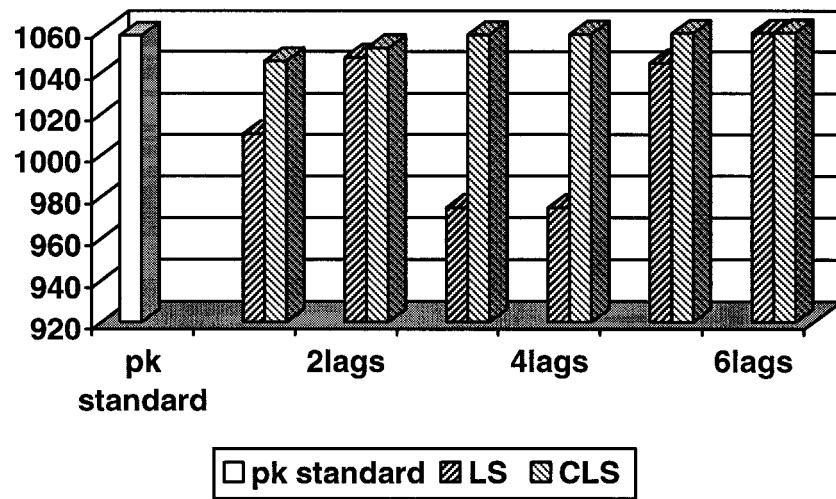


Figure 18 Deuxièmes vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk standard*, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti- symétriques

Tableau XXIV

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	-0.22%	-0.20%	0.31%	0.50%
2	-0.18%	-0.38%	-0.56%	0.21%
3	-0.21%	-0.30%	-0.51%	2.75%
4	0.00%	-0.24%	-0.51%	2.75%
5	-0.02%	-0.29%	-0.39%	0.23%
6	0.00%	-0.31%	-0.62%	0.68%

Tableau XXV

L'erreur relative des deuxième vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 2 (%)	Fréquence 2 (%)	Veas 2 (%)	Fréquence 2 (%)
1	-1.17%	-0.36%	-4.50%	-0.78%
2	-0.59%	-0.15%	-1.00%	-0.28%
3	0.02%	0.00%	-7.86%	-1.63%
4	0.06%	0.00%	-7.86%	-1.63%
5	0.09%	0.01%	-1.26%	-0.36%
6	0.13%	0.02%	0.12%	-0.25%

Tableau XXVI

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i> nr retards	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{réel}}$ (%)	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{imag}}$ (%)	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{total}}$ (%)
1	47.85%	60.12%	55.81%
2	53.87%	43.87%	50.18%
3	32.01%	30.65%	31.75%
4	1.80%	9.14%	5.83%
5	43.54%	38.76%	42.25%
6	7.83%	11.69%	9.87%

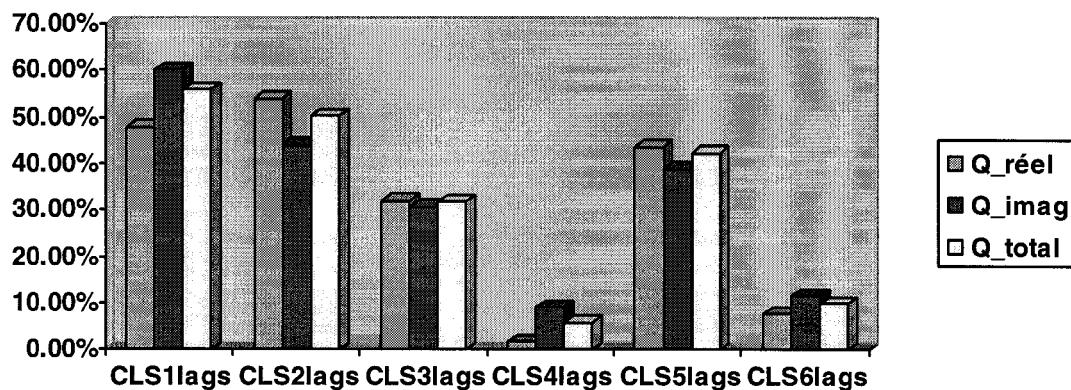


Figure 19 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.1$ , modes élastiques et anti-symétriques

### 4.3.3 $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXVII

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	955.19	27.85
<b><i>LS_1</i> lag</b>	963.46	27.92
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	957.34	27.88
<b><i>LS_2</i> lags</b>	958.34	27.89
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	956.53	27.87
<b><i>LS_3</i> lags</b>	960.53	27.91
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	955.46	27.86
<b><i>LS_4</i> lags</b>	960.53	27.91
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	955.23	27.85
<b><i>LS_5</i> lags</b>	958.36	27.89
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	954.99	27.85
<b><i>LS_6</i> lags</b>	958.15	27.88
<b><i>CLS_6</i> lags</b>	955.01	27.85
<b><i>LS_7</i> lags</b>	958.34	27.89
<b><i>CLS_7</i> lags</b>	954.99	27.85
<b><i>LS_8</i> lags</b>	958.34	27.89
<b><i>CLS_8</i> lags</b>	955.04	27.85
<b><i>LS_9</i> lags</b>	955.53	27.85
<b><i>CLS_9</i> lags</b>	954.99	27.85

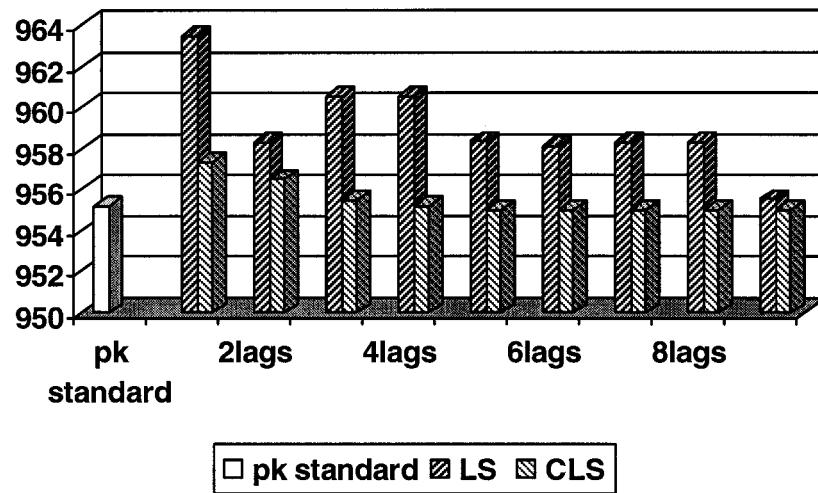


Figure 20 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXVIII

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de retards (lags)	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	0.22%	0.09%	0.87%	0.25%
2	0.14%	0.06%	0.33%	0.13%
3	0.03%	0.02%	0.56%	0.21%
4	0.00%	0.01%	0.56%	0.21%
5	-0.02%	0.00%	0.33%	0.13%
6	-0.02%	0.00%	0.31%	0.12%
7	-0.02%	0.00%	0.33%	0.13%
8	-0.02%	0.00%	0.33%	0.13%
9	-0.02%	0.00%	0.04%	0.02%

Tableau XXIX

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques

Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i> nr retards	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{réel}}$ (%)	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{imag}}$ (%)	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{total}}$ (%)
1	68.44%	77.84%	74.37%
2	78.08%	65.63%	73.19%
3	72.20%	71.82%	71.98%
4	72.59%	78.77%	76.28%
5	92.10%	88.85%	91.04%
6	76.81%	75.34%	76.21%
7	75.93%	74.12%	75.36%
8	43.63%	35.91%	42.13%
9	77.17%	72.70%	76.42%

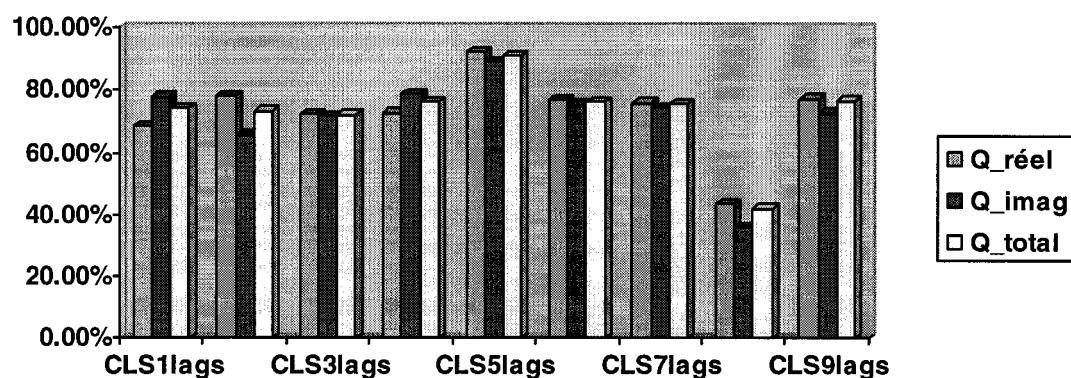


Figure 21 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.3$ , modes élastiques et anti-symétriques

#### 4.3.4 $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXX

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	1045.86	29.14
<b><i>LS_1</i> lag</b>	1049.71	29.05
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	1046.51	29.12
<b><i>LS_2</i> lags</b>	1048.11	29.04
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	1046.16	29.12
<b><i>LS_3</i> lags</b>	1046.11	29.04
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	1045.73	29.13
<b><i>LS_4</i> lags</b>	1046.11	29.04
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	1045.56	29.13
<b><i>LS_5</i> lags</b>	1047.03	29.14
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	1045.86	29.14
<b><i>LS_6</i> lags</b>	1045.59	29.14
<b><i>CLS_6</i> lags</b>	1045.81	29.14
<b><i>LS_7</i> lags</b>	1045.68	29.14
<b><i>CLS_7</i> lags</b>	1045.82	29.14
<b><i>LS_8</i> lags</b>	1045.92	29.13
<b><i>CLS_8</i> lags</b>	1045.79	29.14
<b><i>LS_9</i> lags</b>	1045.66	29.14
<b><i>CLS_9</i> lags</b>	1045.82	29.14

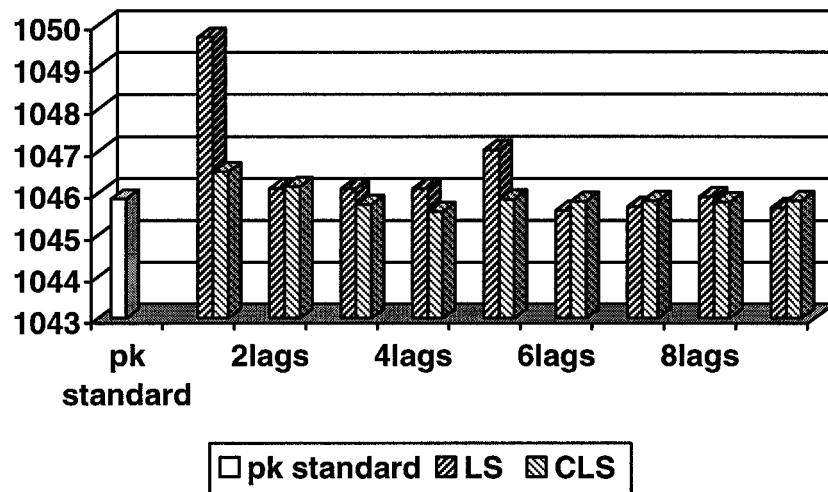


Figure 22 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXXI

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	0.06%	-0.06%	0.37%	-0.30%
2	0.03%	-0.05%	0.02%	-0.32%
3	-0.01%	-0.01%	0.02%	-0.32%
4	-0.03%	-0.02%	0.02%	-0.32%
5	0.00%	0.00%	0.11%	-0.01%
6	0.00%	0.00%	-0.03%	-0.01%
7	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.01%
8	-0.01%	0.00%	0.01%	-0.01%
9	0.00%	0.00%	-0.02%	0.00%

Tableau XXXII

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques

Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i> nr retards	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{réel}}$ (%)	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{imag}}$ (%)	Réduction de l'erreur pour $Q_{\text{total}}$ (%)
1	67.06%	69.32%	68.71%
2	71.90%	66.43%	69.55%
3	78.85%	82.66%	80.67%
4	82.85%	84.81%	84.08%
5	91.89%	90.08%	91.37%
6	91.37%	92.45%	92.05%
7	79.49%	74.38%	77.10%
8	65.46%	66.30%	66.71%
9	74.26%	90.31%	82.25%

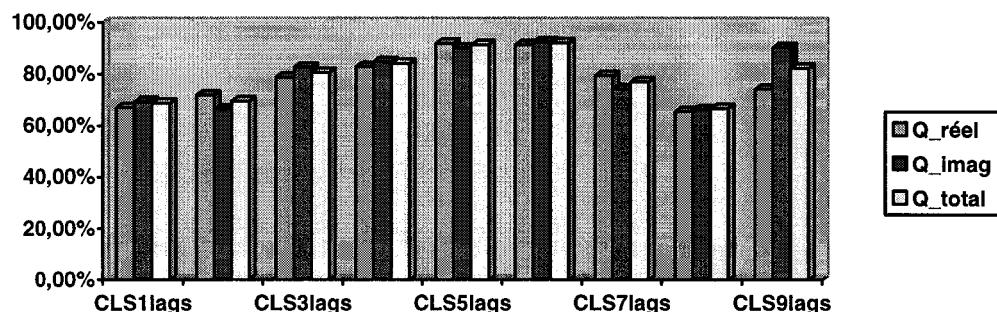


Figure 23 L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.4$ , modes élastiques et anti-symétriques

#### 4.3.5 M = 1.6, modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXXIII

Comparaison des vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) pour  
*M* = 1.6, modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode</b>	<b>Battement #1</b>	
	<b>Veas (ft/s)</b>	<b>Freq (Hz)</b>
<b><i>pk</i> standard</b>	1229.74	30.55
<b><i>LS_1</i> lag</b>	1194.67	30.29
<b><i>CLS_1</i> lag</b>	1221.97	30.54
<b><i>LS_2</i> lags</b>	1221.76	30.51
<b><i>CLS_2</i> lags</b>	1227.98	30.55
<b><i>LS_3</i> lags</b>	1189.06	30.33
<b><i>CLS_3</i> lags</b>	1230.33	30.56
<b><i>LS_4</i> lags</b>	1189.06	30.33
<b><i>CLS_4</i> lags</b>	1229.96	30.55
<b><i>LS_5</i> lags</b>	1221.86	30.51
<b><i>CLS_5</i> lags</b>	1229.74	30.55
<b><i>LS_6</i> lags</b>	1228.56	30.55
<b><i>CLS_6</i> lags</b>	1230.09	30.55
<b><i>LS_7</i> lags</b>	1227.56	30.55
<b><i>CLS_7</i> lags</b>	1230.10	30.55
<b><i>LS_8</i> lags</b>	1228.21	30.55
<b><i>CLS_8</i> lags</b>	1230.23	30.55
<b><i>LS_9</i> lags</b>	1228.36	30.55
<b><i>CLS_9</i> lags</b>	1229.76	30.55

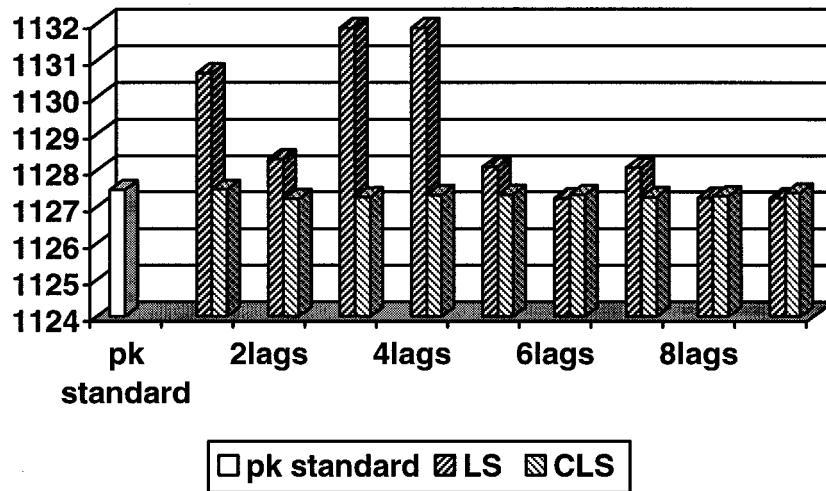


Figure 24 Premières vitesses de battement obtenues par les méthodes *pk* standard, *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*), pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques

Tableau XXXIV

L'erreur relative des premières vitesses et fréquences de battement calculées par les méthodes *LS* et *CLS* pour plusieurs termes de retard (*lags*) par rapport à celles calculées par la méthode *pk* standard, pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de retards ( <i>lags</i> )	<i>CLS</i>		<i>LS</i>	
	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)	Veas 1 (%)	Fréquence 1 (%)
1	-0.63%	-0.02%	-2.85%	-0.85%
2	-0.14%	0.01%	-0.65%	-0.12%
3	0.05%	0.03%	-3.31%	-0.72%
4	0.02%	0.01%	-3.31%	-0.72%
5	0.00%	0.01%	-0.64%	-0.12%
6	0.03%	0.01%	-0.10%	0.02%
7	0.03%	0.01%	-0.18%	0.01%
8	0.04%	0.01%	-0.12%	0.02%
9	0.00%	0.00%	-0.11%	0.02%

Tableau XXXV

La réduction de l'erreur des forces aérodynamiques ( $Q_{\text{réel}}$ ,  $Q_{\text{imag}}$  et  $Q_{\text{total}}$ ) par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* pour plusieurs termes de retard, pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques

<b>Méthode <i>CLS</i> vs <i>LS</i></b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{réel}}</math> (%)</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{imag}}</math> (%)</b>	<b>Réduction de l'erreur pour <math>Q_{\text{total}}</math> (%)</b>
nr retards			
1	72.65%	74.83%	73.93%
2	82.80%	76.28%	80.07%
3	83.01%	80.41%	81.69%
4	89.91%	88.34%	89.24%
5	89.27%	88.48%	88.90%
6	95.98%	92.83%	94.66%
7	88.37%	83.37%	85.32%
8	20.43%	54.26%	38.51%
9	24.51%	15.28%	18.85%

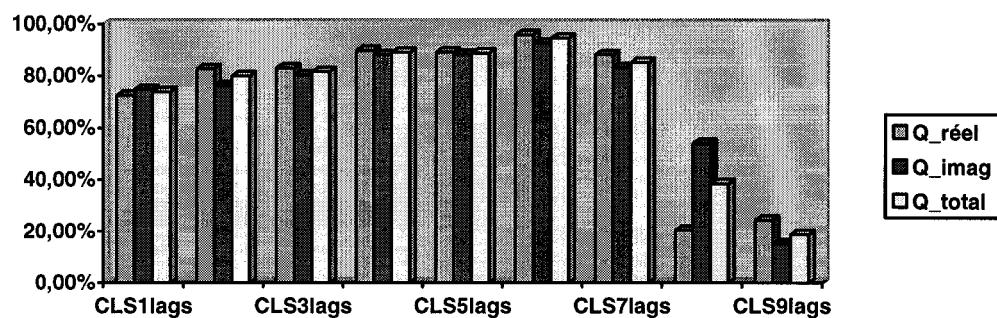


Figure 25

L'erreur relative en pourcentage (%) des forces aérodynamiques calculées par la méthode *CLS* par rapport aux forces aérodynamiques calculées par la méthode *LS* pour  $M = 1.6$ , modes élastiques et anti-symétriques

Pour  $M = 0.85$ , dans le Tableau XX, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.02 % pour 4 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.82 % pour 6 termes de retard. Dans le Tableau XXI, le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.02 % pour 5 termes de retard et le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.58 % pour 6 termes de retard. Cette série de résultats se trouve dans la première ligne du Tableau XXXIX au chapitre 5. Dans le tableau XXII, la réduction maximale des forces aérodynamiques a été trouvée pour 5 termes de retard. Ces résultats se trouvent dans la première ligne du Tableau XXXVIII au chapitre 5.

Pour  $M = 1.1$ , dans le Tableau XXIV, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 4 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.31 % pour 1 terme de retard. Dans le Tableau XXV, le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0.02 % pour 3 termes de retard et le pourcentage minimum de la deuxième vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.12 % pour 6 termes de retard. Cette série de résultats se trouve dans la deuxième ligne du Tableau XXXIX au chapitre 5. Dans le tableau XXVI, la réduction maximale de l'erreur pour les parties réelles de forces aérodynamiques a été trouvée pour 2 termes de retard tandis que la réduction maximale de l'erreur pour les parties imaginaires et totales de forces aérodynamiques a été trouvée pour 1 terme de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la deuxième ligne du Tableau XXXVIII.

Pour  $M = 1.3$ , dans le Tableau XXVIII, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 4 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.04 % pour 9 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la troisième ligne du Tableau XXXIX. Dans le tableau XXIX, la réduction maximale de

l'erreur de forces aérodynamiques a été trouvée pour 5 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la troisième ligne du Tableau XXXIX.

Pour  $M = 1.4$ , dans le Tableau XXXI, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 5 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.01 % pour 8 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la quatrième ligne du Tableau XXXIX. Dans le tableau XXXII, la réduction maximale de l'erreur de parties réelles de forces aérodynamiques a été trouvée pour 5 termes de retard et la réduction maximale de l'erreur de parties imaginaires et totales de forces aérodynamiques a été trouvée pour 6 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la quatrième ligne du Tableau XXXIX.

Pour  $M = 1.6$ , dans le Tableau XXXIV, le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *CLS* est 0 % pour 5 termes de retard et le pourcentage minimum de la première vitesse de battement calculée par la méthode *LS* est 0.10 % pour 6 termes de retard. Cette série de résultats se trouve au chapitre 5, dans la cinquième ligne du Tableau XXXIX. Dans le tableau XXXV, la réduction maximale de l'erreur de forces aérodynamiques a été trouvée pour 6 termes de retard. Ces résultats se trouvent au chapitre 5, dans la cinquième ligne du Tableau XXXIX.

## **CHAPITRE 5**

### **CONCLUSIONS**

#### **5.1 Sommaire des résultats**

Dans cette section, nous présentons le sommaire des résultats obtenus au chapitre 4. Les résultats sont obtenus pour les 5 nombres de Mach : 0.85, 1.1, 1.3, 1.4, 1.6 et pour les deux cas des modes élastiques de l'avion F/A-18 SRA : les modes symétriques (les tableaux XXXVI et XXXVII) et les modes anti-symétriques (les tableaux XXXVIII et XXXIX).

Dans les tableaux XXXVI et XXXVIII on présente le sommaire des résultats pour les calculs des approximations des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace pour les cinq nombres de Mach et pour les deux cas des modes élastiques de l'avion F/A-18 SRA : symétriques (le tableau XXXVI) et anti-symétriques (le tableau XXXVII).

Dans ces tableaux, dans la première colonne, on a présenté la valeur du nombre de Mach, dans la deuxième colonne, la réduction maximale de l'erreur pour la partie réelle des forces aérodynamiques est présentée, dans la troisième colonne, on présente la réduction maximale de l'erreur pour la partie imaginaire des forces aérodynamiques et dans la dernière colonne, la réduction maximale de l'erreur pour les forces aérodynamiques totales est présentée.

Dans les deux autres tableaux XXXVII et XXXIX, le sommaire des résultats pour les calculs des vitesses de battement, est présenté, pour tous les cinq nombres de Mach et pour les deux cas des modes élastiques de l'avion F/A-18 SRA : symétriques (le tableau XXXVII) et anti-symétriques (le tableau XXXIX).

A partir des tableaux des résultats présentés dans le chapitre 4, on a comparé les vitesses du premier battement (notées par Veas 1) et du deuxième battement 2 (notées par Veas 2) obtenues par les méthodes *CLS* et *LS* et incorporées dans la méthode de battement *pk* pour la résolution des équations d'analyse aéroservoélastique pour l'avion F/A-18 SRA (System Research Vehicle). Ces vitesses ont été comparées aux vitesses obtenues uniquement par la méthode de battement *pk* (par laquelle une analyse aéroélastique de l'avion F/A-18 SRA est réalisée). Ces types de résultats sont présentés dans les tableaux XXXVII et XXXIX.

Dans ces tableaux, dans la première colonne, la valeur du nombre de Mach est indiquée. Dans la deuxième colonne des tableaux, pour chaque nombre de Mach, nous indiquons, ligne par ligne les caractéristiques suivantes des vitesses de battement :

1. type de la méthode utilisée (*CLS* ou *LS*),
2. nombre optimal de termes de retard,
3. pourcentage des vitesses calculées par les méthodes *CLS* et *LS* par rapport aux vitesses calculées par la méthode de battement *pk* et
4. numéro de tableaux.

Dans la troisième colonne de ces tableaux, on indique les caractéristiques des vitesses correspondantes au premier battement et dans la quatrième colonne de ces tableaux, les caractéristiques des vitesses correspondantes au deuxième battement sont données.

Dans le tableau XXXVI, à l'exception du cas correspondant au nombre de Mach  $M = 0.85$ , dans tous les autres cas correspondants aux autres nombres de Mach, le même nombre de termes de retard a été trouvé pour la réduction maximale de l'erreur pour les forces aérodynamiques réelles, imaginaires et totales.

Dans le tableau XXXVII, on a trouvé qu'à l'exception du cas correspondant au nombre de Mach  $M = 0.85$ , dans tous les autres cas (pour les autres nombres de Mach), on a

obtenu un nombre optimal de termes de retard plus petit dans le cas de l'utilisation de la méthode *CLS* par rapport au nombre optimal de termes de retard obtenu par la méthode *LS*. On peut voir alors la consistance dans le sommaire des résultats décrit dans les tableaux XXXVI et XXXVII pour tous les nombres de Mach et pour les modes élastiques et symétriques.

Dans le tableau XXXVIII, à l'exception des cas correspondants aux deux nombres de Mach  $M = 1.1$  et  $1.4$ , dans tous les autres cas correspondants aux trois autres nombres de Mach, le même nombre de termes de retard a été trouvé pour la réduction maximale de l'erreur pour les forces aérodynamiques réelles, imaginaires et totales.

Dans le tableau XXXIX, dans tous les cas (pour tous les nombres de Mach), on a obtenu un nombre optimal de termes de retard plus petit dans le cas de l'utilisation de la méthode *CLS* par rapport au nombre optimal de termes de retard obtenu par la méthode *LS*.

Nous avons conclu dans cette section, que le nombre de termes de retard est toujours plus petit dans l'utilisation de la méthode *CLS* que dans le nombre de termes de retard dans la méthode *LS*.

Tableau XXXVI

La réduction maximale de l'erreur et le nombre de termes de retard (*lags*) dans le calcul des forces aérodynamiques par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* dans le cas des modes élastiques et symétriques

<b>Nr de Mach / Nr de tableau</b>	<b>Réduction max de l'erreur pour Q_ réel</b>		<b>Réduction max de l'erreur pour Q_ imag</b>		<b>Réduction max de l'erreur pour Q_ total</b>	
	<b>%</b>	<b>Nr lags</b>	<b>%</b>	<b>Nr lags</b>	<b>%</b>	<b>Nr lags</b>
0.85 Tableau IV	85.53	7	76.67	5	79.98	5
1.1 Tableau VIII	59.70	5	63.50	5	61.91	5
1.3 Tableau XII	83.00	5	81.69	5	82.33	5
1.4 Tableau XV	86.10	4	85.71	4	85.91	4
1.6 Tableau XVIII	86.30	5	82.85	5	85.21	5

Tableau XXXVII

Le nombre optimal des termes de retard (*lags*) et le pourcentage dans le calcul des vitesses de battement obtenues par les méthodes *LS* et *CLS* par rapport à la méthode *pk* dans le cas des modes élastiques et symétriques

Nombre de Mach	Veas (1 ou 2)	Veas 1		Veas 2	
		CLS	LS	CLS	LS
0.85	Nr de termes de retard	7	6	4	2
	%	0.00	0.61	0.00	0.64
	Nr de tableaux	II		III	
1.1	Nr de termes de retard	4	7	5	10
	%	-0.05	-0.20	0.06	0.04
	Nr de tableaux	VI		VII	
1.3	Nr de termes de retard	1	5	2	3
	%	0.00	-0.07	-0.02	-0.47
	Nr de tableaux	X		XI	
1.4	Nr de termes de retard	4	5		
	%	0.01	0.01		
	Nr de tableaux	XIV			
1.6	Nr de termes de retard	1	6		
	%	0.00	-0.02		
	Nr de tableaux	XVII			

Tableau XXXVIII

La réduction maximale de l'erreur et le nombre de termes de retard (*lags*) dans le calcul des forces aérodynamiques par la méthode *CLS* par rapport à la méthode *LS* dans le cas des modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de Mach / Nombre de tableau	Réduction max de l'erreur pour $\mathbf{Q}_{\text{réel}}$ (%)		Réduction max de l'erreur pour $\mathbf{Q}_{\text{imag}}$ (%)		Réduction max de l'erreur pour $\mathbf{Q}_{\text{total}}$ (%)	
	%	Nr lags	%	Nr lags	%	Nr lags
0.85 Tableau XXII	81.10	5	80.49	5	80.93	5
1.1 Tableau XXVI	53.87	2	60.12	1	55.81	1
1.3 Tableau XXIX	92.10	5	88.85	5	91.04	5
1.4 Tableau XXXII	91.89	5	92.45	6	92.05	6
1.6 Tableau XXXV	95.98	6	92.83	6	94.66	6

Tableau XXXIX

Le nombre optimal des termes de retard (*lags*) et le pourcentage dans le calcul des vitesses de battement obtenues par les méthodes *LS* et *CLS* par rapport à la méthode *pk* dans le cas des modes élastiques et anti-symétriques

Nombre de Mach	Veas (1 ou 2)	Veas 1		Veas 2	
		CLS	LS	CLS	LS
0.85	Nr de termes de retard	4	6	5	6
	%	-0.02	-0.82	0.02	-0.58
	Nr de tableaux	XX		XXI	
1.1	Nr de termes de retard	4	1	3	6
	%	-0.00	-0.31	0.02	0.12
	Nr de tableaux	XXIV		XXV	
1.3	Nr de termes de retard	4	9		
	%	0.00	0.04		
	Nr de tableaux	XXVIII			
1.4	Nr de termes de retard	5	8		
	%	0.00	0.01		
	Nr de tableaux	XXXI			
1.6	Nr de termes de retard	5	6		
	%	0.00	-0.10		
	Nr de tableaux	XXXIV			

## 5.2 Conclusions générales

La réduction maximale de l'erreur (voir les tableaux XXXVI et XXXVIII) a des valeurs entre 60% et 98%. Ces valeurs signifient la différence en pourcentage entre les résultats obtenus par la méthode *CLS* par rapport aux résultats obtenus par la méthode *LS*, ce qui vaut dire que la méthode *CLS* donne des meilleures approximations des forces aérodynamiques que la méthode *LS*.

Cette différence s'explique elle-même par la définition de l'équation de l'erreur entre la nouvelle méthode et la méthode classique *LS*, donc s'explique par la différence entre la nouvelle méthode et la méthode classique. Nous avons trouvé la valeur de cette différence très impressionnante, en étant plus grande que 50%, et pour cette raison, nous avons conclu que les résultats obtenus par cette méthode sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode classique *LS*.

Dans la plupart des cas considérés, on a trouvé que la méthode *CLS* a besoin d'un nombre plus petit des termes de retard que la méthode *LS*, ce qui est équivalent au fait que la méthode *CLS* demande un temps d'exécution plus petit que la méthode *LS*.

Le premier avantage de la nouvelle méthode *CLS* consiste dans le fait que la forme finale des approximations des forces aérodynamiques réalisées par cette méthode est similaire à la forme de ces approximations des forces par la méthode *LS*, ce qui vaut dire que l'introduction de la méthode *CLS* dans les équations aéroservoélastiques est similaire à l'introduction de la méthode *LS* dans le même type des équations.

D'où, les utilisateurs de la méthode classique *LS* ont trouvé que l'intégration de la méthode *CLS* dans les équations aéroservoélastiques est facile en sachant la manière d'intégration de la méthode *LS*. Du point de vue de la programmation par ordinateur, des petites modifications sont nécessaires à l'algorithme *LS* pour le transformer dans

l'algorithme *CLS*. Il suffit alors d'ajouter la partie corrective représentée par  $e(\bar{s})$  au programme par ordinateur de l'algorithme *LS* pour le transformer dans le programme par ordinateur de l'algorithme *CLS*.

Le deuxième avantage de cette méthode est que l'erreur d'approximation est évaluée et ajoutée à la forme de l'erreur finale. Cet avantage se voit sur les graphiques des forces aérodynamiques sur lesquels une meilleure qualité d'approximation pour un petit nombre des termes de retard est observée. Suite à l'analyse de ces graphiques ainsi que de tableaux des valeurs de battement, nous voyons une plus grande réduction de l'erreur d'estimation des forces aérodynamiques  $Q(\bar{s})$  calculée la méthode *CLS* par rapport à l'erreur calculée par la méthode classique *LS*.

Le troisième avantage concerne la vitesse d'exécution des programmes. La méthode *CLS* considère un nombre de termes de retard plus petit que le nombre de termes de retard considéré dans la méthode *LS* - pour l'obtention des mêmes types de résultats. L'ordre du système obtenu par la méthode *CLS* est plus petit que l'ordre du système obtenu par la méthode *LS*. À cause de ces faits, le temps d'exécution est plus rapide dans le cas de l'application de la nouvelle méthode *CLS*.

L'utilisation de cette nouvelle méthode reste souhaitable dans l'analyse des interactions aéroservoélastiques en boucle ouverte sur l'avion F/A-18 SRA, car ce type des interactions aéroservoélastiques a été étudié dans cette thèse. Dans l'avenir proche, il faudra appliquer cette méthode dans les études des interactions aéroservoélastiques en boucle fermée.

## RÉFÉRENCES

- [1] Edwards, J.W., 1977, *Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control*, Ph.D Dissertation, Stanford University.
- [2] Roger, K.L., 1977, *Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design*, AGARD-CP-228.
- [3] Karpel, M., 1990, *Design for Active Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State Space Aeroelastic Modeling*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 13(1), pp. 30-37.
- [4] Buttrill, E., Bacon, B., Heeg, J., Houck, J. and Wood, D., 1992, *Simulation and Model Reduction for the AFW Program*, AIAA Paper 92-2081-CP, AIAA Dynamics Specialists Conference, Dallas, Texas.
- [5] Mukhopadhyay, V., 1995, *Flutter Suppression Control Law Design and Testing for the Active Flexible Wing*, Journal of Aircraft, Vol. 32(1), pp. 45-51.
- [6] Poirion, F., 1995, Modélisation temporelle des systèmes aéroservoélastiques. Application à l'étude des effets des retards, La Recherche Aérospatiale, No. 2, pp. 103-114.
- [7] Tiffany, SH and Adams, WM., 1988, Nonlinear programming extensions to rational function approximation of unsteady aerodynamics. NASA TP-2776.
- [8] Tiffany, SH, Adams, WM Jr., 1984, Fitting aerodynamic forces in the Laplace domain: an application of a nonlinear non-gradient technique to multilevel constrained optimization. NASA TM 86317.
- [9] Dunn, HJ., 1980, An analytical technique for approximating unsteady aerodynamics in the time domain. NASA TP-1738.
- [10] Karpel, M., 1992, Multidisciplinary optimization of aeroservoelastic systems using reduced size models. Journal of Aircraft, Vol 29, No. 5, pp 939-946.

- [11] Poirion, F., 1995, Modélisation temporelle des systèmes aéroservoélastiques. *Application à l'étude des effets des retards*, La Recherche Aérospatiale, No. 2, pp. 103-114.
- [12] Poirion, F., 1996, *Multi-Mach rational approximation to generalized Aerodynamic Forces*, Journal of Aircraft, Vol. 33, No. 6, pp. 1199-1201.
- [13] Botez, R.M., Bigras, P., 1999, *Aerodynamic approximation of the unsteady forces for the aeroservoelasticity study*, 46<sup>th</sup> CASI Canadian Aeronautics and Space Institute Annual Conference, Montréal, Canada, 2-5 May, pp. 155-161.
- [14] Cotoi, I., Botez, R.M., 2002, *Method of unsteady aerodynamic forces approximation for aeroservoelastic interactions*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 25, No. 5, pp. 985-987.
- [15] Luus, R., 2000, *Iterative dynamic programming*, Ed. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton London New York, pp. 44-54.
- [16] Botez, R.M., Cotoi, I., Dinu, A.D., 2002, *The Luus-Jakola model reduction procedure applied to aeroservoelastic systems*, 27<sup>th</sup> Annual Congress of the American-Romanian Academy of Arts and Science, Oradea, Roumanie.
- [17] Cotoi, I., Dinu, A. D., Botez, R.M., 2004, *Model order reduction for aeroservoelasticity studies by use of LRSRM and LRSM algorithms*, The 24<sup>th</sup> International Congress of Aeronautical Sciences ICAS 2004, Yokohama, Japan, 30/08-03/09/2004.
- [18] Hiliuta, A., Botez, R.M., Brenner, M., 2005, *Approximation of unsteady aerodynamic forces by use of fuzzy techniques*, 46<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Austin, Texas, 18-21 avril.
- [19] Gupta, K.K., (1991), *An integrated general purpose finite element structural, aeroelastic, and aeroservoelastic analysis computer program*, NASA Technical Memorandum 101709.
- [20] Rodden, W. P., Johnson, E. H., 1994, *MSC Nastran - Aeroelastic Analysis, User's Guide V68*.

- [21] Price, S.J., (1999), *Unsteady Aerodynamics, Aeroelasticity*, McGill University, Montreal, QC, pp. 187-225.