

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M.Eng.

PAR
LUTHER NKEUNGOUÉ JUIMO II

ÉTUDE DE COMMANDE OPTIMALE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION EN
PRÉSENCE DES MODES DÉGRADÉS

MONTREAL, LE 27 MAI 2005

(c) droits réservés de Luther Nkeungoué Juimo II

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Sylvie Nadeau, présidente du jury
Professeure au département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

Mr Jean-Pierre Kenné, directeur du mémoire
Professeur au département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

Mr Antoine Tahan, membre du jury
Professeur au département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE PRÉSENTATION DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 12 AVRIL 2005

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

ÉTUDE DE LA COMMANDE OPTIMALE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION EN PRÉSENCE DES MODES DÉGRADÉS

Luther Nkeungoué Juimo II

RÉSUMÉ

Ce mémoire traite le problème de la planification de production et de maintenance des systèmes de production. Tout industriel en investissant dans une technologie cherche à rentabiliser son investissement tout en satisfaisant ses clients. Atteindre cet objectif n'est toujours pas évident car les machines sont sujettes à des pannes et réparations aléatoires. Pour pouvoir satisfaire ses clients tout en rentabilisant son investissement, l'industriel doit mettre en place une bonne stratégie de production et une bonne gestion d'équipements par le biais de la maintenance. Cette problématique est complexe à cause du caractère aléatoire des machines. Le problème à résoudre consiste à trouver les stratégies de production et de maintenance qui minimisent le coût total d'opération incluant les coûts de stockage, de pénurie et de maintenance. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la théorie de commande stochastique en tenant compte dans notre modèle de la dégradation des machines, qui se traduit par un rejet des pièces non conformes aux normes établies.

ÉTUDE DE LA COMMANDE OPTIMALE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION EN PRÉSENCE DES MODES DÉGRADÉS

Luther Nkeungoué Juimo II

SOMMAIRE

Ce mémoire traite le problème de commande stochastique des systèmes manufacturiers en présence des modes dégradés. La nature stochastique de ces systèmes est due au fait que les machines sont sujettes à des pannes et à des réparations aléatoires. La dégradation est due au fait que la capacité et la disponibilité de la machine diminuent dans le temps en fonction de leurs utilisations.

Nous allons présenter dans un premier temps un modèle dont la dégradation est due au vieillissement de la machine (âge). Dans un second temps, la dégradation sera modélisée par un taux de rejet de pièces de mauvaise qualité.

Le problème à résoudre est celui de la détermination des politiques optimales de production et de maintenance qui minimisera le coût total encouru (c'est-à-dire les coûts de mise en inventaire, de rupture d'inventaire, réparation, maintenance préventive ou corrective).

Pour résoudre ce problème nous allons introduire le contrôle simultané de la maintenance préventive et corrective afin d'améliorer la disponibilité de la machine. Ceci réduit considérablement les coûts d'opérations, lorsque les politiques de production et de maintenance sont optimales. Les taux de production et de maintenances sont des variables de décision. Ils influencent respectivement le niveau de l'inventaire et la capacité du système.

Une approche de modélisation, basée sur la théorie de commande stochastique et un algorithme de résolution numérique des conditions d'optimum est présentée. Un exemple numérique est présenté pour chaque modèle pour illustrer la contribution du modèle.

La structure de la politique de commande est présentée et une extension est faite pour les systèmes de production manufacturiers plus larges, constitués de plusieurs machines.

STUDY OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF PRODUCTION SYSTEMS WITH DEGRADED MODES

Luther Nkeungoué Juimo II

ABSTRACT

This memory examines stochastic control of production when degraded modes are present in manufacturing systems. Such systems are stochastic because machines are subject to breakdowns and repairs. Degradation occurs because the quality of inventory goods produced by the considered machines declines over time depending on the rate at which they are used.

We will establish firstly, a model based on degradation that result from the aging of a machine (age); secondly, a degradation modelled is based on the rate at which parts are rejected owing to poor quality.

The goal of the study is to determine optimal policies in production and maintenance that minimize the total cost incurred (including inventory costs, backlog costs, and preventive and corrective maintenance costs).

We introduce simultaneous control of preventive and corrective maintenance to improve machine reliability. Optimal production and maintenance policies lead to substantial lower operating costs. Decisions variables are production and maintenance rates. Inventory levels and capacity of the system are ultimately affected.

We present a modeling approach based on the stochastic control theory and a numerical resolution algorithm used to solve the optimality conditions. We present a numerical example to illustrate the contribution made by each model.

The structure for optimal control policy is obtained and extension to more complex manufacturing system is presented.

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche Monsieur Jean-Pierre Kenné, professeur au département de génie mécanique, pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche et offert des conditions adéquates de travail. Ses critiques scientifiques et ses suggestions m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ce travail. Merci pour sa confiance investie. Je lui transmets toute ma reconnaissance pour sa participation à ce travail de recherche.

Je voudrais également remercier tous les membres du laboratoire d'intégration des technologies de production (LITP), pour leur soutien et leur collaboration. Mes remerciements vont aussi à mes parents, qui bien qu'éloignés, m'ont soutenu en toutes circonstances.

Enfin, je remercie tout ceux qui directement ou indirectement m'ont soutenu pendant toute la durée de cette recherche, en particulier Monsieur Victor Songmené, Monsieur Martin Viens et Monsieur Éric David professeurs à l'École de Technologie Supérieure de Montréal ainsi que mes amis d'Amérique, d'Afrique et d'Europe.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
SOMMAIRE	i
ABSTRACT	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLES DES MATIÈRES	iv
LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTES DE FIGURES	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Chaînes de Markov homogènes	6
1.3 Chaînes de Markov non homogènes	8
1.4 Machines en série.....	11
1.5 Machines en parallèle	13
1.6 Systèmes de larges dimensions.....	14
1.7 Systèmes avec modes dégradés	16
1.8 Problématique de recherche.....	18
1.9 Objectif de la recherche	20
1.10 Méthodologie de recherche proposée	21
CHAPITRE 2 STRATÉGIES DE PRODUCTION ET DE MAINTENANCE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION	23
2.1 Introduction.....	23
2.2 Structure du système de production.....	23
2.3 Modélisation de la dynamique du système	24
2.4 Critère de décision et conditions d'optimum.....	28
2.5 Conditions d'optimum approximées.....	32
2.6 Approche numérique.....	33
2.7 Exemple numérique	37
2.8 Interprétation des résultats et analyse de sensibilité	46
2.9 Conclusion	50

CHAPITRE 3 STRATÉGIES DE PRODUCTION ET DE MAINTENANCE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION EN PRÉSENCE D'UN MODE DÉGRADÉ.....	51
3.1 Introduction.....	51
3.2 Formulation du problème.....	53
3.3 Coût instantané	57
3.4 Approche numérique.....	61
3.4.1 Analyse des résultats.....	70
3.4.2 Analyse de sensibilité	71
3.5 Conclusion	73
CHAPITRE 4 STRATÉGIES DE PRODUCTION ET DE MAINTENANCE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION EN PRÉSENCE DES MODES DÉGRADÉS.....	74
4.1 Introduction.....	74
4.2 Formulation du problème.....	75
4.3 Commande optimale stochastique	77
4.4 Approche numérique.....	81
4.5 Analyse des résultats.....	96
4.6 Analyse de sensibilité	97
4.7 Conclusion	100
CHAPITRE 5 EXTENSION AUX SYSTÈMES DE LARGES DIMENSIONS.....	101
5.1 Introduction.....	101
5.2 Simulation.....	102
5.3 Dynamique du système, simulations discrètes et continues	103
5.4 Formulation du problème.....	108
5.5 Conclusion	111
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	112
ANNEXES :	
1 : Programme principal Matlab (cas d'une machine - un type de pièce avec maintenance préventive et corrective avec âge.....	114
2 : Programme principal Matlab (cas d'une machine traitant un seul type de pièces avec un mode dégradé).....	126
3 : Programme principal Matlab (cas de deux machines traitant un seul type de pièces sans maintenance préventive avec des modes dégradés)	136
4 : Programme principal Matlab (cas de deux machines avec modes dégradés traitant un seul type de pièces avec maintenance préventive)	149
RÉFÉRENCES	167

LISTE DES TABLEAUX

	Pages
Tableau I Paramètres de l'exemple numérique.....	41
Tableau II Variation du coût de la rupture de stock.....	47
Tableau III Variation du coût de la mise en inventaire	48
Tableau IV Variation du coût de la maintenance préventive.....	49
Tableau V Variation du coût de la maintenance corrective.....	50
Tableau VI Paramètres de l'exemple numérique.....	66
Tableau VII Variation du coût de rupture de stock.....	71
Tableau VIII Variation du taux de rejet.....	72
Tableau IX Variation du coût de mise en inventaire	72
Tableau X Processus stochastique décrivant la dynamique des machines.....	76
Tableau XI Paramètres de l'exemple numérique.....	86
Tableau XII Variation du coût de rupture d'inventaire (modèle sans maintenance préventive)	97
Tableau XIII Variation du coût de rupture de d'inventaire (modèle avec maintenance préventive).....	98
Tableau XIV Variation du taux de rejet (modèle sans maintenance préventive)	99
Tableau XV Variation du taux de rejet (modèle avec maintenance préventive).....	99
Tableau XVI Variation du coût de maintenance préventive (modèle avec maintenance préventive)	100

LISTES DES FIGURES

	Pages
Figure 1	Chaîne de production à trois machines en série..... 11
Figure 2	Planification de la production et de la maintenance en présence des modes dégradés..... 19
Figure 3	Structure du système de production..... 24
Figure 4	Diagramme de transitions d'états 26
Figure 5	Diagramme de flux monétaires..... 30
Figure 6	Taux de panne dépendant de l'âge de la machine 39
Figure 7	Temps moyen de réparation dépendant de l'âge de la machine 40
Figure 8	Âge de la machine dépendant des probabilités limites 41
Figure 9	Taux de production de la machine au mode 1 42
Figure 10	Seuil critique en fonction de l'âge de la machine au mode 1 42
Figure 11	Taux d'envoi en maintenance préventive de la machine au mode 3 ... 44
Figure 12	Taux de maintenance corrective de la machine au mode 2 45
Figure 13	Structure du système de production..... 52
Figure 14	Diagramme de transitions d'états 54
Figure 15	Taux de production au mode 1 66
Figure 16	Taux de production au mode 2 67
Figure 17	Taux d'envois en maintenance préventive..... 67
Figure 18	Fonction valeur au mode 1..... 68
Figure 19	Fonction valeur au mode 2..... 68
Figure 20	Fonction valeur au mode 3..... 69
Figure 21	Fonction valeur au mode 4..... 69
Figure 22	Structure du système de production..... 74
Figure 23	Taux de production de la machine 1 au mode 1 87
Figure 24	Taux de production de la machine 2 au mode 1 87

Figure 25	Taux de production de la machine 2 au mode 2	88
Figure 26	Taux de production de la machine 1 au mode 3	88
Figure 27	Taux de production de la machine 2 au mode 3	89
Figure 28	Taux de production de la machine 2 au mode 4	89
Figure 29	Taux de production de la machine 1 au mode 6	90
Figure 30	Taux de production de la machine 2 au mode 8	90
Figure 31	Taux d'envoi de la machine 1 en maintenance préventive mode 4.....	91
Figure 32	Taux d'envoi de la machine 1 en maintenance préventive mode 7.....	91
Figure 33	Fonction valeur au mode 1.....	92
Figure 34	Fonction valeur au mode 2.....	92
Figure 35	Fonction valeur au mode 3.....	93
Figure 36	Fonction valeur au mode 4.....	93
Figure 37	Fonction valeur au mode 5.....	94
Figure 38	Fonction valeur au mode 6.....	94
Figure 39	Fonction valeur au mode 7.....	95
Figure 40	Fonction valeur au mode 8.....	95
Figure 41	Structure de l'approche proposée	110

LISTE DES ABRÉVIATIONS

$x(t)$	Stock
$a(t)$	Âge de la machine
$u(t)$	Taux de production
u_{\max}	Taux de production maximal de la machine
d	Taux de la demande
$\xi(t)$	Processus stochastique décrivant la dynamique de la machine
$Q(.)$	Matrice des sauts
ω_p	Taux d'envoi en maintenance préventive
ω_r	Taux de la maintenance corrective
$\lambda_{\alpha\beta}$	Taux de transition du mode α au mode β
ω_p^{\min}	Taux minimal d'envoi en maintenance préventive
ω_p^{\max}	Taux maximal d'envoi en maintenance préventive
ω_r^{\min}	Taux minimal de la maintenance corrective
ω_r^{\max}	Taux maximal de la maintenance corrective
$q_{\alpha\beta}$	Taux de transition du mode α au mode β
$g(.)$	Coût instantané
c^+	Coût encouru par unité de pièce produite
c^-	Coût encouru par unité de pièce manquante

$\Gamma(.)$	Ensemble des commandes admissibles
$J(.)$	Coût total moyen
F	Valeur future ou capitalisée
P	Valeur présente ou actualisée
i	Taux d'intérêt effectif
N	Nombre de périodes
ρ	Taux d'actualisation du coût moyen
η	Taux de rejet
$\alpha(t)$	Mode de la machine
$\eta(\alpha)$	Taux de rejet en fonction du mode de la machine
$v(.)$	Fonction valeur
$P^\alpha(\beta)$	Probabilité de transition du mode α au mode β

INTRODUCTION

La dernière décennie fut marquante pour l'évolution des systèmes manufacturiers en terme de taille et de complexité. Avec un déploiement massif dans ce domaine, les problèmes rencontrés en production manufacturière, tels que les pannes et les bris, n'ont cessé d'augmenter en quantité et en difficulté. Constitués de plusieurs machines interconnectées entre elles, afin de répondre aux exigences des clients, les systèmes de production manufacturière, sollicités à leur capacité maximale, sont perturbés par des pannes, bris et requièrent de l'entretien. Ces perturbations de fonctionnement influencent directement leur capacité à répondre à la demande des consommateurs.

Afin de s'adapter aux demandes d'un marché en perpétuelle évolution, les entreprises manufacturières, placées dans un environnement industriel fortement concurrentiel, doivent faire preuve de flexibilité et de réactivité. L'exigence croissante de la qualité, les variations constantes et imprévisibles des besoins, l'intensification des échanges d'informations entre les services, ont conduit à concevoir des systèmes de production flexibles et intégrés, mais complexes et de coût élevé.

Il est donc nécessaire de maîtriser parfaitement toutes les phases de conception des produits et de l'outil de production. De plus, le but de tout industriel est de maximiser ses profits tout en minimisant ses coûts, et en satisfaisant ses clients. En effet, il ne peut investir dans une technologie qui ne s'avère pas rentable à long terme.

Lorsqu'un système de production est en panne, et que la période pour le rendre de nouveau opérationnel devient longue, il risque de ne plus être compétitif sur le marché et ainsi perdre sa clientèle. C'est pour cette raison qu'il faut mettre en place une bonne gestion des stocks (production) et une bonne gestion d'équipements (maintenance).

Certains systèmes de production appelés «systèmes flexibles» sont capables de rencontrer cette spécificité puisqu'ils tiennent compte des perturbations soumises à leur fonctionnement (comme celles énumérées précédemment) en utilisant des lois de commande adaptées. Toutefois, ce genre de commande nécessite des investissements considérables et, par conséquent, une planification efficace de production et de maintenance des machines, afin d'allier maximisation des profits et gestion optimale des ressources, tout en considérant les exigences des consommateurs. Afin de répondre à la demande de la clientèle dans des délais courts, tout en minimisant le coût total de production, les gestionnaires d'entreprises industrielles se trouvent souvent obligés de répondre à cinq questions clés :

- 1) Quel produit doivent-ils fabriquer?
- 2) Quand doivent-ils le fabriquer?
- 3) Combien doivent-ils en fabriquer?
- 4) À quel taux faut-il réparer les machines?
- 5) À quel rythme faut-il envoyer les machines en maintenance préventive ?

Pour résoudre ce problème, on adopte généralement une stratégie de production qui permet de déterminer les grandes lignes des décisions à prendre dans ce contexte : Parmi les stratégies généralement adoptées on peut citer :

- 1) La production par anticipation (Make to stock) qui consiste à construire un stock de produits finis à partir duquel les commandes des clients sont directement servies. Cette approche engendre généralement un délai quasiment nul, un bon taux de service, mais elle engendre, par contre, des coûts de stockage importants.

Traditionnellement, cette stratégie est recommandée pour la production en grande série des produits à forts volumes de demandes.

- 2) La production à la commande (Make to order) où l'on ne commence la fabrication qu'à la réception de la commande. Cette approche élimine les stocks de produits finis; par contre, elle augmente le temps de réponse de l'entreprise car on ne dispose pas d'un stock de produits finis en inventaire pour satisfaire immédiatement la demande. Cette stratégie est recommandée pour la production unitaire et de petite série des produits très personnalisés et à la demande intermittente.
- 3) L'assemblage à la commande (Assemble to order) : cette stratégie est une combinaison des deux précédentes. Elle consiste à fabriquer les composantes du produit par anticipation mais ne faire l'assemblage que sur commande; ce qui est très utile dans le cas des produits personnalisés et qui sont composés de pièces standard.

Nous constatons que les trois stratégies de production énumérées ci-dessus ne répondent pas aux questions suivantes :

- Quel niveau de stock doit-on avoir en inventaire en permanence?
- À quel taux faut-il réparer les machines?
- À quel rythme faut-il envoyer les machines en maintenance préventive ?

Dans les chapitres qui suivent, nous allons donner des éléments de réponse à ces trois questions afin de minimiser le coût total.

Le contenu de ce mémoire se présente comme suit :

- Le premier chapitre, présente la revue bibliographique.
- Le deuxième chapitre, présente les stratégies de production et de maintenance d'un système de production, en tenant compte de l'âge de la machine.
- Le troisième chapitre traite des stratégies de production et de maintenance d'un système de production en présence d'un mode dégradé.
- Le quatrième chapitre, développe les stratégies de production et de maintenance d'un système de production constitué de deux machines en présence de modes dégradés.
- Le cinquième chapitre, présente l'extension des stratégies de production et de maintenance en présence des modes dégradés aux systèmes de larges dimensions constitués de plusieurs machines.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la revue de la bibliographie sur la théorie de commande stochastique des systèmes de production manufacturiers modélisés par des chaînes de Markov homogènes ou non homogènes. Nous présenterons, par la suite, plusieurs types de configurations des machines fréquemment rencontrés dans les systèmes de production manufacturière: la configuration en série, la configuration en parallèle, les systèmes larges, et enfin les systèmes de production manufacturière en présence des modes dégradés.

L'intérêt pour l'application de la théorie de commande optimale stochastique dans la planification de la production des systèmes de production manufacturière a commencé en 1975, et s'est poursuivi jusqu'à nos jours. Dans la littérature, plusieurs auteurs considèrent, pour fin de simplicité, que le coût est lié au stockage des produits et au degré de satisfaction de la demande. Les méthodes proposées sont généralement basées sur des systèmes perturbés par des processus à sauts. Ces processus à sauts sont habituellement modélisés par des chaînes de Markov.

La méthodologie utilisée pour décrire l'évolution temporelle d'un système dynamique, consiste à définir un espace d'états dans lequel se promène aléatoirement le système. La théorie des processus stochastiques (en particulier, les processus de Markov) permet alors de calculer les probabilités d'états stationnaires (limites). Ces chaînes de Markov peuvent être homogènes ou non homogènes.

1.2 Chaînes de Markov homogènes

Dans les travaux pionniers d'Olsder et Suri (1980) et de Kimemia et Gershwin (1983), les perturbations des systèmes de production manufacturière sont modélisées par des chaînes de Markov homogènes en utilisant le formalisme de Rishel (1975). Akella et Kumar (1986), considèrent un système de production manufacturier constitué d'une machine traitant un seul type de pièces. Pour modéliser le système, ils prennent pour hypothèse, que le taux de la demande est constant, et que les temps successifs entre les pannes et les réparations sont décrits par une variable aléatoire de distribution exponentielle. Le but du système est de satisfaire la demande des produits finis. Le système est sujet à des pannes occasionnelles et possède deux états : un état fonctionnel et un état de panne. Le processus à sauts entre les deux états est modélisé par une chaîne de Markov homogène, avec un taux de transition de l'état fonctionnel à l'état panne et de l'état panne à l'état fonctionnel constants. Quand la machine se trouve à l'état panne, elle ne produit aucune pièce; lorsque la machine est fonctionnelle, elle peut produire les pièces jusqu'au taux de production maximal. Le système de production est tel que le taux de production maximal est supérieur au taux de la demande et que le taux de la demande est supérieur à zéro (positif).

L'objectif de la recherche est de déterminer la loi de commande qui minimisera le coût total sur un horizon infini. Le problème à résoudre est le suivant : quand la machine est fonctionnelle, quel doit être son taux de production optimale?

Le problème traité par Akella et Kumar (1986) a été introduit par les travaux de Kimenia et Gershwin (1983), les pionniers dans le domaine. Akella et Kumar (1986) ont obtenu une réponse complète à cette question de façon analytique. Ils ont obtenu une solution optimale. Cette solution optimale est la politique à seuil critique, qui détermine le niveau optimal du stock. Cette stratégie de commande consiste à bâtir et à maintenir constant un niveau optimal de stock des pièces finies à partir duquel les commandes des clients sont

directement servies. Cette approche engendre généralement un délai quasiment nul, un bon taux et un temps de réponse court. Elle permet aussi de répondre à la demande des clients durant les périodes d'états non opérationnels de la machine (panne). La stratégie de la politique à seuil critique s'énonce comme suit :

- 1) Produire au taux maximal de la machine si le niveau d'inventaire est inférieur au seuil critique.
- 2) Produire au taux de la demande si le niveau d'inventaire est égal au seuil critique.
- 3) Ne rien produire si le niveau d'inventaire est supérieur au seuil critique.

Le travail d'Akella et Kumar (1986) se limite au cas d'une machine traitant un type de pièce et ayant un seul état opérationnel.

Sharifnia (1988) a fait l'extension de la stratégie de commandes, de type seuil critique d'Akella et Kumar (1986), sur le cas d'un système constitué d'une machine ayant deux états opérationnels et a obtenu, une stratégie de commandes à multiples seuils critiques. Il a appliqué les résultats obtenus par Akella et Kumar (1986) à un système de production ayant trois états dont deux états opérationnels et un état panne. Il a résolu le problème de commande optimale et a trouvé deux valeurs de seuils critiques correspondant à chaque état opérationnel de la machine. Le seuil critique du premier état opérationnel est supérieur au seuil critique du deuxième état opérationnel; ce résultat est plausible car la probabilité que la machine tombe en panne quand elle est au premier état opérationnel est supérieure à celle du deuxième état opérationnel et le taux de réparation des deux états est identique.

Dans son travail, Sharifnia (1988) a considéré que les taux de pannes de la machine ne dépendaient pas du taux de production de la machine; ce qui n'est pas réaliste car le taux de panne d'une machine dépend aussi de son taux d'utilisation donc du taux de production de la machine.

Liberopoulos et Caramanis (1994) ont démontré que la politique à multiples seuils critiques de l'approche de Sharifnia (1988) s'applique quand les taux de pannes dépendent du taux de production de la machine.

Dans la plupart des travaux dans le domaine de la commande, les auteurs prennent comme hypothèse que le taux de la demande est constant, que la distribution de pannes et la réparation des machines sont exponentielles, et que la politique à seuil critique est optimale. Or dans la réalité nous ne pouvons pas avoir le contrôle sur la demande. En effet, la demande peut être aléatoire et les distributions de pannes et réparations peuvent être non exponentielles.

Kenné et Gharbi (2000) ont étendu le concept de politique à seuil critique à un système de production avec une demande aléatoire et une distribution de pannes et de réparations non exponentielles. Ils ont démontré que la structure de la politique à seuil critique peut être paramétrée par un facteur simple représentant la valeur du seuil critique.

1.3 Chaînes de Markov non homogènes

Le problème de recherche de la stratégie de commande optimale devient plus difficile lorsque la chaîne de Markov n'est plus homogène (c'est à dire que les taux de transition ne sont plus constants). Ce qui rend plus complexe l'étude des systèmes de production. La modélisation et la résolution des conditions d'optimum, deviennent des problèmes complexes dans le domaine de la commande des systèmes de production manufacturière.

En considérant le fait que la distribution des probabilités des pannes d'une machine dépend de son âge, Boukas et Haurie (1990) et Boukas (1995), considèrent l'âge de la machine dans la modélisation et la commande d'un FMS (Système de production flexible ou flexible manufacturing system). En combinant la commande du taux de production et celle des actions de maintenance préventive, l'approche proposée par Boukas et Haurie (1990) a établi, par l'utilisation d'une méthode numérique basée sur l'approximation de Kushner, que la solution aux problèmes de commande optimale stochastique des FMS considérés est non seulement de type seuil critique, mais dépend également de l'âge des machines.

À partir des résultats obtenus, Boukas et al. (1995) et Boukas et Yang (1996), ont apporté une modification sur le concept de la politique du seuil critique classique en démontrant qu'il existe un âge optimal de la machine à partir duquel on doit bâtir un stock de sécurité tel que dans Akella et Kumar (1986). Avant cet âge optimal, la machine est supposée neuve et la production au taux de la demande est considérée comme optimale. Nous constatons que dans le modèle de Boukas et Haurie (1990), les auteurs ne tiennent pas compte du contrôle de la maintenance corrective dans leur modèle, ce qui pourrait augmenter la capacité de la machine.

Kenné et Boukas (2002) étendent l'approche classique de perturbation singulière en considérant que le taux des pannes des machines dépend de leurs âges. Ils contrôlent simultanément le taux de production et de maintenance préventive des machines. Ils remplacent la commande stochastique optimale par une commande optimale déterministe (problème de commande limite) et à partir de la solution de ce problème limite, ils construisent la solution du problème stochastique initial.

Dans cette recherche, nous allons dans un premier temps étendre le modèle de Boukas et Haurie (1990) à un système de production manufacturier, constitué d'une machine traitant un seul type de pièce en contrôlant simultanément, les taux de production, de

maintenance préventive et corrective. Dans notre premier modèle, le taux de panne va dépendre de l'âge de la machine, donc les politiques de maintenance préventive et corrective sont liées à l'âge de la machine. Notre contribution en tenant compte de la présence des modes dégradés sera présentée ultérieurement.

Du fait de la non fiabilité des machines, la dernière décennie fut marquée par l'introduction du contrôle de la maintenance dans le modèle classique de la planification de la production. Parmi les contributions dans cet axe de recherche, nous pouvons citer les travaux effectués par Boukas et Haurie (1990), Boukas (1998), Boukas et Yang (1996), et Boukas et Liu (2001). Dans ces travaux, les auteurs ont contrôlé simultanément le taux de production et le taux de maintenance (préventive ou corrective). Ces deux modèles emploient la technique de programmation dynamique pour obtenir les équations d'HJB (Hamilton Jacobi Bellman), ce qui limite leur application aux systèmes de production de faibles dimensions car ils sont confrontés à la résolution des équations de type Hamilton Jacobi Bellman.

Pour un système de production constitué d'une machine traitant un seul type de pièce, Boukas et Communal (2002) ont proposé une loi de commande sous optimale, en faisant l'extension du modèle de Bielecki et de Kumar(1988), en introduisant le contrôle de la maintenance corrective dans leur modèle. Les résultats numériques obtenus démontrent que leurs résultats sont meilleurs comparés à ceux de Bielecki et Kumar (1988) principalement sur la valeur du seuil critique.

Kenné et al. (2003) ont étendu le concept de la politique à seuil critique aux systèmes de production manufacturière constitués de plusieurs machines, traitant plusieurs types de pièces. À tout instant, chaque machine ne peut traiter qu'un seul type de pièce, ils ont introduit la maintenance corrective dans leur modèle pour augmenter la disponibilité des machines; les variables de décision sont: les taux de production qui influencent les niveaux d'inventaires et les taux de réparation des machines. L'objectif de leur

recherche est de minimiser les coûts d'inventaire et de réparation. Les auteurs proposent un algorithme pour résoudre numériquement le problème de commande optimal posé. Dans le cas des lignes de production (ou machines en série), plusieurs travaux ont également été développés dans la littérature. Dans la section suivante nous les présenterons.

1.4 Machines en série

Les machines en série sont une configuration spéciale des systèmes de production manufacturière. C'est un réseau de postes de service ou machines séparées par des espaces tampons ou de stockage. Le produit circule de la machine M_1 vers l'espace tampon B_1 , puis à la machine M_2 au stock tampon B_2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière machine, puis de la dernière machine vers l'inventaire. Dans la littérature de commande, on peut rencontrer plusieurs termes pour désigner les machines en série. Ces termes sont : ligne de flux, ligne de production, ligne de transfert, chaîne de production pour ne citer que ceux là. La figure 1 ci-dessous représente une ligne de production constituée de trois machines et de deux espaces tampons.

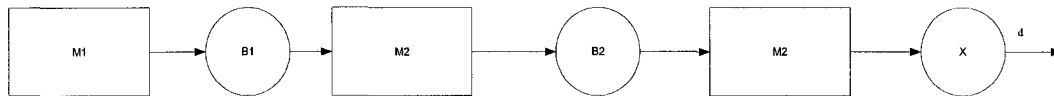


Figure 1 Chaîne de production à trois machines en série

où M_1 , M_2 , et M_3 représentent respectivement la machine 1, 2 et 3, B_1 et B_2 représentent respectivement l'espace tampon 1 et 2 et d représente la demande.

Si les machines ont un comportement régulier, alors les espaces tampons ne sont pas nécessaires; cependant, les machines peuvent tomber en panne de façon irrégulière, ce qui perturbe la chaîne. La performance du système est mesurée par le taux de production et le niveau de stock en phase de production. Si nous analysons un système traitant un

seul type de pièces des machines à deux états; alors, quand une panne survient ou que la machine prend beaucoup de temps à terminer une opération, le niveau de stock en amont a tendance à diminuer jusqu'à zéro. Si la perturbation persiste, la machine en aval est forcée d'arrêter à cause du manque de pièces et la machine en amont est dite bloquée puisqu'elle n'a plus d'espace pour stocker ses pièces (goulot d'étranglement). Cet effet se propage en avant et en arrière, mais cela peut être atténué par l'augmentation des espaces tampons.

Les chaînes de production sont fréquemment utilisées; c'est le cas par exemple de l'industrie automobile (assemblage d'une automobile), l'industrie du textile (fabrication de tapis) et en agro alimentaire (ligne de production alimentaire).

Dans la littérature, le problème de planification de la production est reconnu comme étant un problème complexe pour les systèmes constitués de plusieurs machines. Pour une ligne de production constituée de deux machines en série et traitant un type de pièces, Lou et al (1994) ont proposé un modèle qui tient compte des contraintes supplémentaires liées à l'existence d'un stock tampon entre les deux machines. Dans ce cas, le concept de la politique à seuil critique ne peut plus s'appliquer directement. Ils ont étudié les propriétés dynamiques du problème de commande optimale associé à ce système à partir d'une extension du modèle de Akella et Kumar (1986).

Van Ryzin et al (1993) ont généralisé les stratégies de commande optimale de ce même système en appliquant les méthodes numériques sur un exemple spécifique. En se basant sur les résultats obtenus, ils proposent une approximation d'une loi de commande sous optimale du problème considéré.

Dans le cas de plusieurs machines, les conditions d'optimum du problème de commande optimale sont présentées par Presman et al (1994). Kenné et Boukas (1997) ont étendu les résultats obtenus au cas où l'on contrôle simultanément le taux de production et le

taux de réparation des machines (maintenance corrective). Les approches proposées dans la littérature au sujet des machines en série sont difficilement applicables lorsque les chaînes de Markov sont non homogènes. Cela est dû non seulement à la contrainte imposée par les espaces tampons qui existent entre les machines, mais également à la dimension du problème de commande.

Pour les systèmes constitués de plusieurs machines en série traitant un seul type de pièces, Gershwin (1994) aborde le problème de planification de la production en utilisant une méthode basée sur la décomposition. Il traite le FMS (Flexible Manufacturing system) comme un agrégat de plusieurs systèmes à deux machines traitant un seul type de pièces pour lesquelles des lois de commande sous optimales sont disponibles. Il considère trois classes d'activités (production, réparations, blocage ou non alimentation des machines) dans le problème d'ordonnancement et du contrôle du niveau du stock de l'inventaire. La méthode heuristique proposée est basée sur l'approximation de la fonction valeur et sur un certain nombre d'hypothèses restrictives. Ces hypothèses limitent les applications d'une telle méthode.

1.5 Machines en parallèle

Généralement, lorsqu'on est en présence de plusieurs machines traitant plusieurs types de pièces, les conditions d'optimum obtenues sont difficiles à résoudre. Dans le cas à faible dimension (c'est-à-dire un maximum de deux machines traitant un seul type de pièces), l'approche numérique permet de résoudre les conditions d'optimum et d'approximer la loi de commande optimale du FMS tel que dans Boukas et Kenné (1997) en présence de la maintenance corrective.

Kenné et al. (2003) ont étendu le concept de la politique à seuil critique à la planification de la production et de la maintenance d'un système de production constitué de plusieurs machines identiques et traitant plusieurs types de pièces. Les machines sont sujettes à

des pannes et des réparations aléatoires. La dynamique des pannes de ces machines dépend de leur âge et leur disponibilité dépend des stratégies de maintenance adoptées. Dans ce contexte, le problème de planification de la production et de la maintenance de ces types de systèmes de production peut être formulé comme un problème d'optimisation stochastique de grande dimension. Cette dimension croît en fonction du nombre de machines et des types de pièces à traiter. Les problèmes d'optimisation stochastique associés à une telle dimension sont complexes et très difficiles à résoudre de nos jours. Ils ont déterminé une loi de commande sous optimale, constituée des taux de production et de maintenance, qui approxime la loi de commande du problème posé. Pour formuler le problème d'optimisation à résoudre, ils ont proposé une approche de commande hiérarchisée à deux niveaux. Cette approche consiste à utiliser les méthodes des perturbations singulières pour transformer le problème de commande stochastique initial en un problème de commande déterministe équivalent. Par la suite, ils ont appliqué l'approche de Kushner au problème déterministe pour obtenir un problème de décision markovien. En résolvant ce problème de faible dimension à l'aide des méthodes numériques, ils ont obtenu une loi de commande à partir de laquelle ils ont construit la loi de commande recherchée pour le problème d'optimisation stochastique initial. Une méthode heuristique est proposée pour une telle construction. Ils ont enfin utilisé des modèles de simulation pour valider l'approche de commande proposée, et leurs résultats ont été appliqués sur un exemple de système de production, constitué de deux machines identiques traitant deux types de pièces. Dans leur modèle, ils n'ont pas tenu compte du temps de mise-en-course (setup) et des coûts liés au setup.

1.6 Systèmes de larges dimensions

La plupart des systèmes de production manufacturière sont larges et complexes. Ils peuvent être constitués de plusieurs machines interconnectées qui produisent simultanément plusieurs types de pièces différentes. La dynamique de ces systèmes est perturbée par des pannes de machines (dans le cas de notre travail). Dans ce contexte, le

problème de la planification de la production et de la maintenance de ces types de systèmes de production peut être formulé comme un problème d'optimisation stochastique de grande dimension. Cette dimension croît de façon exponentielle avec la taille du système, c'est-à-dire avec le nombre de machines et de types de pièces considérées. Les problèmes d'optimisation stochastique, associés à de tels systèmes, sont complexes et difficiles à résoudre analytiquement de nos jours, du fait de la dimension des équations d'HJB. Une des méthodes pour faire face à cette complexité est l'application de l'approche hiérarchisée de commande. L'idée de cette approche, consiste à remplacer le problème initial de commandes stochastiques par des problèmes approximatifs ou sous problèmes, de les résoudre, et par la suite, de construire une solution au problème initial à partir de la solution des sous problèmes d'optimisation. Il y a différentes (et mutuellement exclusives) manières par lesquelles on peut réduire la complexité d'un problème d'optimisation.

Gershwin (1989) considère le problème de planification d'un système de production manufacturière, perturbé par des pannes de machines, les mises en course, la demande qui varie, etc. et propose une structure hiérarchique basée sur la fréquence d'apparitions des différents types d'événements. Pour plus d'informations, nous référons lecteur aux chapitres 9-12 de Gershwin (1994), Xie (1991) et aux travaux Lasserre (1992).

Gharbi et Kenné (2003) ont utilisé dans leur approche, une combinaison des méthodes analytique et de simulation, pour traiter le problème de la planification de la production d'un système de production, constitué de plusieurs machines sujettes aux pannes et à des réparations et traitant plusieurs types de pièces. Comme hypothèse, ils ont considéré que le temps de mise en course pour passer d'une pièce à une autre était négligeable. Ils ont considéré comme variables de commande le taux de production pour les différentes pièces sur les machines. Leur objectif était de réduire au minimum le coût total de production tout en maintenant un bon niveau d'inventaire, des pièces finies et de rupture de stock. Leur modèle est basé sur la structure de la politique à seuil critique. Le

formalisme analytique est combiné avec la simulation basée sur les outils statistiques, tels que les plans d'expériences et la méthodologie de surface de réponse. Le but d'une telle combinaison est de fournir une approximation de la politique de commande optimale. Dans l'approche proposée, les paramètres de la politique à seuil critique sont employés comme variables d'entrée pour le modèle de simulation. Pour chaque entrée se composant d'une combinaison de paramètres, le coût encouru est obtenu. Les effets significatifs des variables de commande sont déterminés par les plans d'expériences. Le rapport entre le coût et ces facteurs d'entrée est obtenu par un modèle de surface de réponse. Afin d'illustrer la validité de leur modèle, ils ont résolu deux exemples numériques : le premier système est constitué d'une machine produisant deux types de pièces, le second est constitué de deux machines produisant cinq types de pièces, ils ont obtenu les politiques sous optimales de production.

1.7 Systèmes avec modes dégradés

Dans la littérature de commande, beaucoup d'auteurs ne tiennent pas compte du contrôle de la qualité des pièces finies, lors de la modélisation des systèmes de production manufacturière. La plupart des systèmes sont modélisés avec un état fonctionnel et un état panne; ce qui n'est pas du tout réaliste, car lorsqu'une machine fonctionne, elle se dégrade et le degré de dégradation est en fonction du taux d'utilisation de la machine. La dégradation de la machine peut impliquer une production des pièces qui ne pourront pas passer le test de contrôle de la qualité, ce qui peut entraîner un rejet de certaines pièces déjà fabriquées et une augmentation des coûts de fabrication, car les pièces rejetées sont soit ré usinées ou perdues. Pour illustrer cette problématique, prenons l'exemple d'une unité d'usinage des pièces métalliques ; quand l'outil est usé, et que les dimensions des pièces usinées ne respectent pas l'intervalle de tolérance de l'ingénierie alors ces pièces ne seront plus de bonne qualité, il faudra les rejeter.

Boukas et Liu (2001) ont modélisé un système de production manufacturière traitant un seul type de pièces ayant quatre états, dont trois états de fonctionnement (bon, moyen, et mauvais) et un état de panne. Dans les trois états de fonctionnement, la machine produit des pièces, mais certaines de ces pièces sont de moins bonne qualité et sont rejetées à un taux défini selon l'état de la machine. En utilisant la technique de la programmation dynamique stochastique, ils ont développé les conditions d'optimum pour la planification de la production et de la maintenance du système considéré. Ils définissent les taux de production et de maintenance comme étant des lois de commande optimale. Le modèle développé se limite à une seule machine traitant un seul type de pièces. On note que dans leurs travaux, la machine a deux états dégradés, et dans ces deux états, on doit forcer la machine à aller en maintenance préventive.

Kenné (2004) a étendu la politique à plusieurs seuils critiques, à une unité de fabrication soumise à des pannes aléatoires et à l'usure des outils, menant à une augmentation importante du taux de rejet des pièces de moins bonne qualité. L'introduction d'un mode de fonctionnement considérant le taux de rejet et d'une politique de remplacement préventif d'outils, améliorent la disponibilité de la machine et réduisent considérablement les coûts d'opération, par rapport aux modèles classiques lorsque, les politiques de production et de remplacement sont optimales.

Dans ce travail de recherche, nous allons étendre la politique à plusieurs seuils critiques, à un système constitué d'une machine traitant un seul type de pièces en présence des modes dégradés. Le système de production manufacturière, considéré est constitué d'une machine ou de plusieurs machines traitant un seul type de pièces ayant un état de fonctionnement parfait, un état de fonctionnement dégradé, un état de maintenance préventive et un état de réparation. Une approche de modélisation basée sur la théorie de commande stochastique et un algorithme de résolution numérique des conditions d'optimum seront présentées.

- Dans un premier temps, le système de production sera constitué d'une machine traitant un seul type de pièces.
- Dans un second temps le système de production, sera constitué de deux machines traitant un seul type de pièces.
- Dans un troisième temps nous ferons une extension aux systèmes de larges dimensions constitués de plusieurs machines en parallèle traitant un seul type de pièces.

1.8 Problématique de recherche

Les systèmes manufacturiers sont des unités de production complexes, constituées de plusieurs machines interconnectées qui produisent simultanément plusieurs types de pièces. Ces systèmes sont conçus pour répondre aux exigences d'un marché caractérisé par une concurrence accrue. Leur émergence est freinée par un manque d'outils de détermination des politiques optimales de production et de maintenance. Les machines sont sujettes à des pannes et réparations aléatoires, et leur distribution de panne dépend de leur âge et de leur taux d'utilisation.

Dans ces conditions, la loi de commande à déterminer est constituée d'une cadence de production, d'une politique de maintenance des machines. Cette recherche a pour but de résoudre le problème de la planification de la production et de la maintenance des systèmes de production. Nous ne traiterons pas des aspects qualitatifs et des problèmes de mise en course dans le cadre de cette recherche.

Dans un premier temps, nous allons présenter et résoudre le problème des stratégies de production et de maintenance d'un système de production manufacturière, constitué d'une machine produisant un seul type de pièces.

Dans un second temps, nous allons présenter et résoudre le problème des stratégies de production et de maintenance d'un système de production manufacturière, en présence des modes dégradés selon le diagramme représenté par la figure 2 ci- dessous.

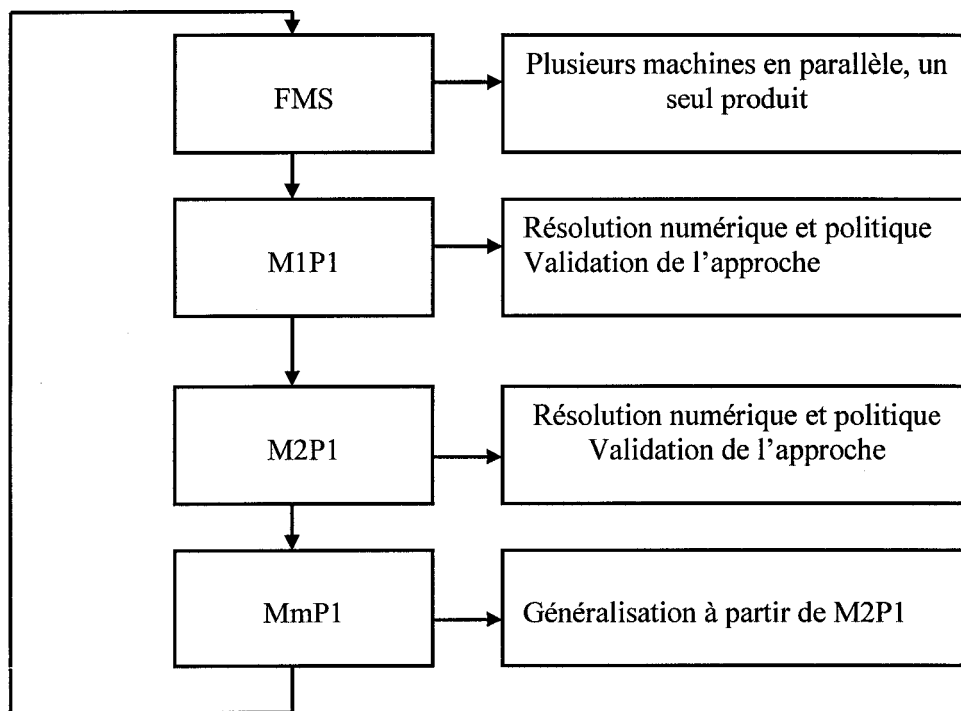


Figure 2 Planification de la production et de la maintenance en présence des modes dégradés

où FMS représente un système de production flexible, M1P1 représente un système de production constitué d'une machine traitant un seul type de pièces, M2P1 représente un système de production constitué de deux machines traitant un seul type de pièces, MmP1 représente un système de production constitué de plusieurs machines traitant un seul type de pièces.

De plus, les machines en produisant se dégradent; dans ce cas, les pièces finies produites ne sont pas toutes de bonne qualité et une partie de ces pièces sont rejetées, ce qui

entraîne une augmentation des coûts de fabrication et le non respect des délais de livraison.

Dans cette recherche, nous allons résoudre le problème de la planification de la production et de la maintenance de ce type de système tout en minimisant les coûts d'inventaire, de rupture de stock et d'opération sur les machines. La résolution de ce problème, nous amène à nous poser les questions suivantes :

- Combien de pièces faut-il avoir en inventaire?
- À quel taux faut-il produire?
- À quel taux réparer la machine?
- Quand et à quel taux faut-il envoyer la machine en maintenance préventive?

1.9 Objectif de la recherche

Le problème à résoudre est formulé comme un problème d'optimisation stochastique. Face à la complexité du problème, les politiques de mise en course et les règles d'ordonnancement et d'affectation des produits aux machines ne sont pas considérés dans cette recherche. La loi de commande recherchée est donc constituée des taux de production, de maintenance préventive et corrective des machines. Le contrôle consiste à minimiser le coût moyen engendré par le stock, la réparation et la maintenance, sur un horizon infini. Pour le cas de l'horizon fini, nous montrerons que la politique optimale de contrôle pour chaque période est caractérisée par un nombre positif que nous appelons seuil critique (ou stock de sécurité) des pièces finies. La politique optimale de contrôle consiste à conduire l'état du stock vers ce seuil critique (stock de sécurité).

Le problème d'optimisation consiste à :

- 1) Développer le modèle mathématique, qui décrit la dynamique du système de production ayant un état dégradé pour lequel, le système a une capacité limitée et produit de pièces de moins bonne qualité, ce qui entraîne un rejet de celles-ci.
- 2) Proposer des méthodes numériques, pour la résolution des conditions d'optimum de type HJB correspondantes.
- 3) Proposer des heuristiques, permettant de déterminer les stratégies de commande dans le cas des systèmes plus complexe (i.e. plusieurs machines et pièces).
- 4) Extension des résultats au cas des systèmes plus large (complexes).

1.10 Méthodologie de recherche proposée

Les principales étapes de la méthodologie proposée sont les suivantes :

- 1) Modélisation de la dynamique des systèmes de production manufacturière et extension aux cas des modes dégradés (développement du modèle mathématique de la planification optimale de la production et, de la maintenance du système considéré en tenant compte des modes dégradés).
- 2) Résolution du problème d'optimisation stochastique.
- 3) Développement des conditions optimum et élaboration d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations de type HJB obtenus. Une résolution numérique de ces équations permettra dans un premier temps, de déterminer la structure de la loi de commande optimale dans des cas simples. Les résultats

obtenus permettront par la suite de décrire une telle loi par des paramètres caractéristiques pour des systèmes plus larges. Ces paramètres seront obtenus expérimentalement à l'étape suivante.

4) Extension aux cas réalistes.

Proposer une extension des modèles aux systèmes plus complexes en combinant les méthodes analytiques et la simulation. Nous montrerons que les résultats obtenus s'adressent à tous les systèmes de production manufacturière (i.e. automobiles, agro-alimentaires, pharmaceutiques, etc.). Nous proposerons par la suite des plans de production en tenant compte de la gestion des stocks, de la maintenance (préventive ou corrective), en présence des modes dégradés.

CHAPITRE 2

STRATÉGIES DE PRODUCTION ET DE MAINTENANCE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons l'analyse du problème de commande optimale stochastique d'un système de production manufacturière constitué d'une machine traitant un seul type de pièces. La nature stochastique du système est due au fait que la machine est soumise à des pannes et réparations aléatoires. Le contrôle simultané des taux de production, de maintenance préventive et corrective, améliore la capacité du système et réduit considérablement les coûts d'opération par rapport au modèle classique où l'on contrôle seulement les taux de production et de maintenance préventive, lorsque les politiques de production et de maintenance sont optimales. Les taux de production et de maintenance préventive et corrective constituent les variables de décision qui influencent la décision à prendre. Dans le modèle que nous allons proposer, le taux de panne de la machine dépend de son âge; donc les politiques de maintenance préventive et corrective sont liées à l'âge de la machine.

2.2 Structure du système de production

Le système considéré est constitué d'une machine, d'un ou de plusieurs systèmes de transport qui permettent d'alimenter la machine en matière première et de récupérer les pièces finies à la fin de la chaîne de production pour les stocker et les livrer selon la demande. La figure 3 représente la structure du système de production en question où (MP)-représente la matière première, (M1)-la machine, (x)-le stock et (d)-la demande respectivement.

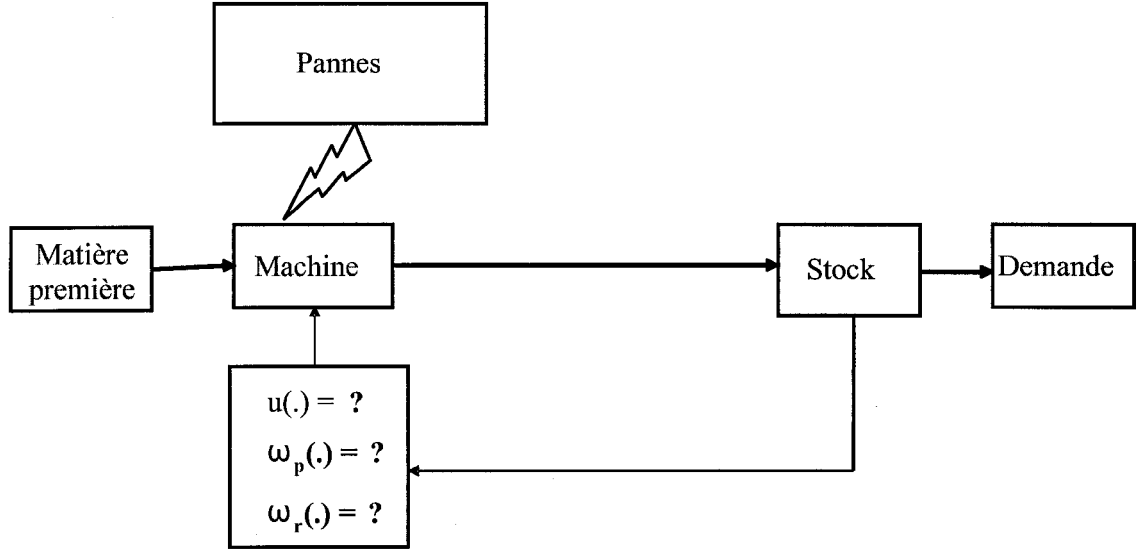


Figure 3 Structure du système de production

2.3 Modélisation de la dynamique du système

Dans cette section nous présentons les équations qui décrivent la dynamique du stock et celle des modes de la machine. Le modèle du système, constitué d'une machine traitant un type de pièces, est décrit par un état hybride constitué d'une partie continue (dynamique du stock et de l'âge) et d'une partie discrète (modes de la machine). La variable continue est composée d'un vecteur $x(t)$ traduisant le stock et d'un vecteur $a(t)$ représentant l'âge de la machine.

Soient $x(t)$ le stock, $d(t)$ le taux de la demande, $u(t)$ le taux de production de la machine et $a(t)$ l'âge de la machine. La dynamique continue décrivant le stock et l'âge de la machine est donnée par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x}(t) = u(t) - d(t), x(0) = x \quad (2.1)$$

$$\dot{a}(t) = f(u(.)), a(0) = a \quad (2.2)$$

Nous prenons pour hypothèse qu'après une action de maintenance préventive ou corrective sur la machine, elle redevient neuve. Ceci se traduit par :

$$a(T) = 0$$

où T représente le temps quand l'action de maintenance préventive ou corrective a été effectuée sur la machine.

La machine est sujette à des pannes et réparations aléatoires. Les modes de la machine sont classifiés comme étant opérationnel noté par 1, réparation noté par 2 et en maintenance préventive, noté par 3. La dynamique décrite par les équations (2.1) et (2.2) est perturbée par un processus de sauts $\{\zeta(t), t \geq 0\}$ correspondant à l'état discret du système. Le processus stochastique $\zeta(t)$ décrivant la dynamique de la machine est alors à trois modes avec ses valeurs dans $B = \{1, 2, 3\}$ qui est l'ensemble discret des modes du processus stochastique $\zeta(t)$. Nous illustrons la dynamique de ce processus (dynamique à sauts) par le diagramme des taux de transition présenté à la figure 4.

Ce processus stochastique est modélisé par une chaîne de Markov irréductible à temps continu et à états discrets avec une matrice $Q(\cdot)$ de dimension 3×3 qui est la matrice des taux de transition du processus stochastique $\zeta(t)$. Afin d'augmenter la disponibilité de la machine, nous contrôlons le taux de transition du mode 1 au mode 3 (maintenance préventive) et du mode 2 au mode 1 (maintenance corrective). Alors, la matrice $Q(\cdot)$ va dépendre de deux variables de contrôle ω_p et ω_r , définis comme étant les taux de maintenance préventive et corrective respectivement.

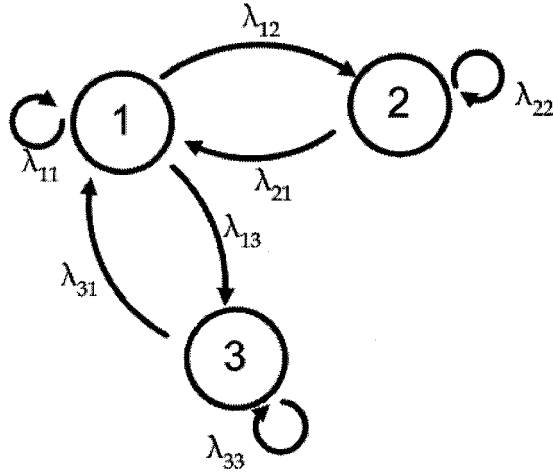


Figure 4 Diagramme de transitions d'état

La matrice de transition Q de dimension 3×3 , est définie comme suit :

$$Q(\omega_p, \omega_r) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

où $\lambda_{13} = \omega_p$ et $\lambda_{21} = \omega_r$.

La matrice (2.3) est irréductible car les états du système sont visités (les probabilités de transitions sont strictement positives) et les états sont apériodiques. Toute matrice irréductible, ayant les états apériodiques est dite ergodique, voir Ross (2002).

Les taux de transition de la matrice (2.3) vérifiant les conditions suivantes :

$$\lambda_{\alpha\beta}(\omega_p, \omega_r) \geq 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}(\omega_p, \omega_r) = -\sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{\alpha\beta}(\omega_p, \omega_r)$$

Les probabilités de transition du mode α au mode β sont décrites par les relations suivantes :

$$P[\xi(t + \delta t = \beta \mid \xi(t) = \alpha] = \begin{cases} \lambda_{\alpha\beta}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 + \lambda_{\alpha\alpha}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{si } \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.4)$$

avec $\alpha, \beta \in B$.

L'évolution des états de la machine dans l'intervalle de temps $(t, t + \delta t)$ est décrite par

l'équation (2.4), avec $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0$ pour tout $\alpha, \beta \in B$.

Soit $u(x, a, \alpha, t)$ le taux de production de la machine au mode α au temps t pour un stock x et un âge a donné. L'ensemble des commandes admissibles $\Gamma(\alpha)$ incluant $u(\cdot)$, $\omega_p(\cdot)$ et $\omega_r(\cdot)$ dépendant du processus stochastique $\zeta(t)$ est défini par l'expression (2.5) suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \left\{ (u(\cdot), \omega_p(\cdot), \omega_r(\cdot)) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq u(\cdot) \leq u_{\max}(\cdot), \omega_p^{\min} \leq \omega_p(\cdot) \leq \omega_p^{\max}, \omega_r^{\min} \leq \omega_r(\cdot) \leq \omega_r^{\max} \right\} \quad (2.5)$$

où $u(\cdot)$, $\omega_p(\cdot)$ et $\omega_r(\cdot)$ représentent les variables de commande. L'inverse de $\omega_p(\cdot)$ représente le temps moyen prévu entre l'appel du technicien et son arrivée sur le plancher de l'usine. Si on contrôle $\omega_r(\cdot)$ on agit sur le temps moyen de réparation et ceci implique une augmentation de la disponibilité de la machine. Pour illustrer l'évolution des états de la machine dans le temps dépendant des variables de contrôle, nous écrivons les équations (2.6) et (2.7) pour les modes 1 à 3 et 2 à 1.

$$\lambda_{13} = \omega_p(\cdot) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \left(P[\zeta(t + \delta t) = 3 \mid \zeta(t) = 1] \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\lambda_{21} = \omega_r(\cdot) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \left(P[\zeta(t + \delta t) = 1 | \zeta(t) = 2] \right) \right] \quad (2.7)$$

Afin de minimiser les coûts de la maintenance préventive et corrective, les taux de transition des modes 1 à 3 et de 2 à 1 sont contrôlés. Donc les processus de sauts des modes 1 à 3 et de 2 à 1 sont des chaînes de Markov non homogènes.

2.4 Critère de décision et conditions d'optimum

Le critère de décision que nous allons considérer dans cette recherche est une fonction coût qui va dépendre des variables de contrôle. Cette fonction exprime le coût de stockage du surplus de la production, le coût de pénurie encouru en cas de rupture de stock, les coûts encourus à chaque fois qu'une décision est prise pour envoyer la machine en entretien préventif (maintenance préventive) ou de réparer la machine (maintenance corrective). Avant d'exprimer la fonction coût total, nous allons formuler la fonction coût instantané encouru sur l'horizon de production. Pour pénaliser la mise en inventaire, la rupture de stock, la réparation et la maintenance préventive, nous considérons le coût instantané suivant :

$$g(\alpha, x, u) = c^+ x^+ + c^- x^- + c^\alpha, \quad \forall \alpha \in B \quad (2.8)$$

où c^+ et c^- sont respectivement les coûts encourus par unité de pièce produite pour un stock positif (inventaire) et un stock négatif (rupture de stock ou pénurie), $x^+ = \max(0, x_1)$, $x^- = \max(-x_1, 0)$ et c^α une constante définie comme suit :

$$c^\alpha = c_p \text{Ind}\{\xi(t) = 3\} + c_r \text{Ind}\{\xi(t) = 2\}$$

avec c_p et c_r correspondant aux coûts appliqués aux taux de maintenance préventive et corrective respectivement.

Le but du problème de commande optimale est de déterminer la loi de commande $(u(\cdot), \omega_p(\cdot), \omega_r(\cdot)) \in \Gamma(\alpha)$ qui minimisera le coût total moyen actualisé sur un horizon infini. Notre objectif est de contrôler les taux de production $u(\cdot)$, de maintenance préventive $\omega_p(\cdot)$, et corrective $\omega_r(\cdot)$ afin de minimiser le coût total moyen actualisé défini par l'équation (2.9).

$$J(\alpha, x, a, u) = E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho t} g(\alpha, x, u) dt \mid x(0) = x, a(0) = a, \xi(0) = \alpha \right\} \quad (2.9)$$

où $E = [A/B]$ correspond à l'espérance conditionnelle de A étant donné B et ρ désigne le taux d'actualisation qui est un scalaire compris entre 0 et 1 qui va nous permettre de prendre en considération la valeur de l'argent dans le temps. Il exprime que le coût payé présentement sera supérieur à celui payé dans le futur. Cet aspect est représenté dans l'expression du coût, par le terme $e^{-\rho t}$ dont voici la signification : considérons deux coûts (P et F) illustrés par la figure 3. Notons par i le taux d'intérêt effectif sur une période d'horizon d'une année par exemple et ρ le taux d'intérêt nominal sur une période inférieure (fraction de temps en mode continu par exemple). La relation qui lie les deux coûts P (qui représente un montant d'argent au temps choisi par l'analyste comme le temps présent (zéro)) et F (qui représente le montant d'argent à la fin de la période d'analyse, soit à la fin de la $N^{ième}$ période).

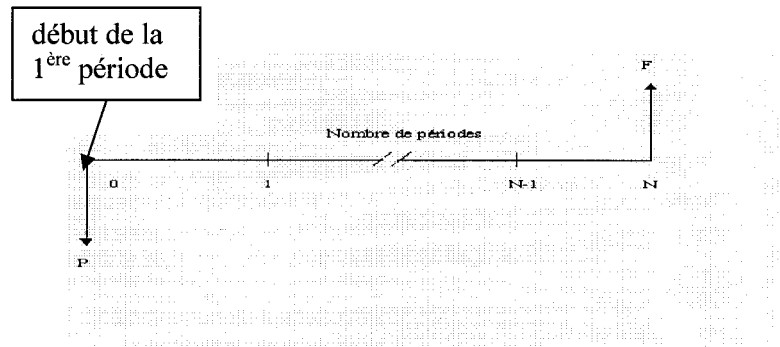


Figure 5 Diagramme de flux monétaires

Si on dépose un montant P aujourd'hui dans un compte affichant un taux d'intérêt i %, composé périodiquement, alors le solde du compte à la fin de la période s'exprime en tant que valeur future F et se détermine par l'équation suivante comme présentée dans Garceau et al. (1996).

$$F = P(1+i)^N \quad (2.10)$$

où i est le taux d'intérêt effectif qui s'exprime en fonction du taux nominal par : $i = e^{\rho} - 1$ et le N devient égal à t .

La relation (2.10) s'écrit comme suit :

$$F = Pe^{\rho t} \quad (2.11)$$

Si notre objectif était de calculer le coût total à l'instant présent, la relation (2.11) devient la suivante :

$$P = Fe^{-\rho t} \quad (2.12)$$

L'objectif du problème d'optimisation est de minimiser le coût total moyen actualisé, donné par l'équation (2.9) en considérant les contraintes (2.1) à (2.8). Le coût minimal associé, appelé fonction valeur, est défini comme suit :

$$v(\alpha, x, a) = \inf_{u(\cdot) \in \Gamma(\alpha)} J(\alpha, x, u) \quad \forall \alpha \in B \quad (2.13)$$

Si $v(\cdot)$ est la fonction valeur associée à la loi de commande admissible $(u(\cdot), \omega_p(\cdot), \omega_r(\cdot))$ et aux conditions initiales (α, x, a) , les conditions d'optimum de type Hamilton Jacobi Bellman sont données par :

$$\rho(\alpha, a, x) = \min_{(u, a_p, a_r) \in \Gamma(\alpha)} \left[g(\alpha, x, u) + (u-d)v_x(\cdot) + f(u)v_a(\cdot) + \sum_{\beta \in B} \lambda_{\beta}(\cdot) [v(\beta, \varphi(x, \beta)) - v(\alpha, a, x)] \right] \quad (2.14)$$

où $v_x(\cdot)$ et $v_a(\cdot)$ exprime le gradient suivant x et a respectivement de la fonction valeur $v(\cdot)$.

Pour plus d'informations sur les équations d'HJB nous referons le lecteur au chapitre 8 de Gershwint (1994). Ces conditions d'optimum se traduisent par un ensemble de systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles couplées. La loi de commande optimale $(u^*(\cdot), \omega_p^*(\cdot), \omega_r^*(\cdot))$ est celle qui minimise à travers $\Gamma(\alpha)$, le terme de droite de l'équation (2.14). Cette politique de commande correspond à la fonction valeur décrite par l'équation (2.13). Notons que lorsque la fonction valeur est disponible, une politique de commande peut être obtenue comme dans l'équation (2.14).

Toutefois, il est impossible d'obtenir une solution analytique de l'équation (2.14). La solution numérique de l'équation (2.14) est complexe qui a été considéré comme insurmontable par le passé Boukas et Haurie (1990) ont démontré qu'en appliquant les méthodes numériques basées sur l'approche de Kushner, on peut résoudre un tel

problème en présence d'un modèle de la planification de la production et de la maintenance préventive. Dans la section qui suit, nous allons construire une politique de commande en appliquant les méthodes numériques basées sur l'approche de Kushner pour un modèle de la planification de la production, de la maintenance préventive et corrective combinées.

2.5 Conditions d'optimum approximées

Il est important de noter que la fonction valeur représentant la politique de commande, obtenue en appliquant les méthodes numériques est une approximation. Ceci nous amène à poser la question suivante : si la fonction valeur que nous allons utiliser pour construire la politique de commande n'est qu'une approximation de la vraie fonction valeur, est ce que cette commande sera optimale?

Dans cette section, nous allons présenter les arguments pour répondre par l'affirmative à cette question, sous certaines conditions.

Si $v^\varepsilon(a, x, \alpha)$ représente une séquence de fonctions qui convergent vers $v(a, x, \alpha)$ quant $\varepsilon \rightarrow 0$, alors $(u^\varepsilon(x, a, \alpha), \omega_p^\varepsilon(x, a, \alpha), \omega_r^\varepsilon(x, a, \alpha))$ est une fonction qui minimise :

$$(u^\varepsilon - d)v_x^\varepsilon(\cdot) + f(u)v_a^\varepsilon(\cdot) + g(\alpha, x, u) + \sum_{\beta \in I} \lambda_{\alpha\beta}(\cdot) [v(\beta, \varphi(x, \beta)) - v(\alpha, a, x)] \quad (2.15)$$

Pour tout $(u, \omega_p, \omega_r) \in \Gamma(\alpha)$.

Théorème 2.1. La politique de commande $(u^\varepsilon, \omega_p^\varepsilon, \omega_r^\varepsilon)$ est asymptotiquement optimale i.e,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\alpha, x, a, u^\varepsilon, \omega_p^\varepsilon, \omega_r^\varepsilon) = v(\alpha, x, a)$$

avec, les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3) suivantes :

Hypothèse H.1. La fonction valeur $v^\varepsilon(x, a, \alpha)$ est continuellement différentiable étant donné C et $\kappa_g > 0$, nous avons les expressions suivantes :

$$0 \leq v(x, a, \alpha) \leq C(1 + |x|^{\kappa_g})$$

et

$$|v^\varepsilon(x, a, \alpha) - v^\varepsilon(x', a', \alpha)| \leq C(1 + |x|^{\kappa_g} + |x'|^{\kappa_g}) |x - x'|$$

Hypothèse H.2. Pour chaque (x, a, α) , la fonction valeur $v^\varepsilon(x, a, \alpha)$ vérifie les équations de HJB approximativement, dans le sens que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \min_{(u, \omega_p, \omega_r) \in \Gamma(\alpha)} \left[g(\alpha, x, u) + (u - d)v_x^\varepsilon(\cdot) + f(u)v_u^\varepsilon(\cdot) + \sum_{\beta \in I} \lambda_{\alpha\beta}(\cdot) [v^\varepsilon(\beta, \varphi(x, \beta)) - v^\varepsilon(\alpha, a, x)] \right] \right\} = 0$$

Uniformément avec $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

Hypothèse H.3.

Nous supposons que sous la commande $u^\varepsilon(x, \alpha, a), \omega_p^\varepsilon(x, \alpha, a), \omega_r^\varepsilon(x, \alpha, a)$, le système d'équation (2.1) a une solution unique étant donné une condition initiale.

Preuve : Pour la preuve de ce théorème nous référons le lecteur à Yan et Zhang (1994).

2.6 Approche numérique

Dans cette section, nous développons les méthodes numériques de résolution des conditions d'optimum du problème à résoudre. Ces méthodes sont basées sur l'approche de Kushner comme dans Kenné et al. (2003), ou Kenné et Boukas (2003).

Le principe de cette approche consiste à utiliser une approximation pour le gradient de la fonction valeur $v(x, a, \alpha)$. Notons par h_x et h_a , le pas de discrétisation des variables d'état x et a respectivement. En utilisant h_x , la fonction valeur $v(x, a, \alpha)$ est approximée par $v^h(x, a, \alpha)$ et la dérivée partielle de la fonction valeur $v_x(x, a, \alpha)$ par l'expression suivante :

$$v_x(\alpha, x, a) = \frac{1}{h_x} (v(\alpha, x + h_x, a) - v(\alpha, x, a)) \times (u - d) \text{ si } u - d > 0 \quad (2.16)$$

$$v_x(\alpha, x, a) = \frac{1}{h_x} (v(\alpha, x, a) - v(\alpha, x - h_x, a)) \times (u - d) \text{ si } u - d \leq 0 \quad (2.17)$$

En utilisant h_a , la dérivée partielle de la fonction valeur $v_a(\alpha, x, a)$ est approximée par l'expression suivante :

$$v_a(\alpha, x, a) = \frac{1}{h_a} (v(\alpha, x, a + h_a) - v(\alpha, x, a)) \times f(u) \quad (2.18)$$

Nous pouvons déduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{u-d}{h_x} \times v_x(\cdot) &= \frac{u-d}{h_x} \times (v(\alpha, x + h_x, a) - v(\alpha, x, a)) \text{ si } \mathbf{Ind}\{u-d > 0\} \\ &+ \frac{u-d}{h_x} \times (v(\alpha, x - h_x, a) - v(\alpha, x, a)) \text{ si } \mathbf{Ind}\{u-d \leq 0\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{f(u)}{h_a} \times v_a(\cdot) = \frac{f(u)}{h_a} \times (v(\alpha, x, a + h_a) - v(\alpha, x, a)) \quad (2.20)$$

$$\text{où } \mathbf{Ind}\{P(\cdot)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } P(\cdot) \text{ est vraie} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour toute proposition $P(\cdot)$.

Avec les approximations données par (2.16), (2.17) et (2.18) en les remplaçant dans l'équation (2.14) et après quelques manipulations, les équations d'HJB peuvent se réécrire comme suit :

$$v^h(\alpha, x, a) = \min_{(u, \omega_p, \omega_r) \in \Gamma^h(\alpha)} \left\{ \frac{g(\alpha, x, a)}{\Omega_h^\alpha (1 + \rho / \Omega_h^\alpha)} + \frac{1}{(1 + \rho / \Omega_h^\alpha)} \left(\begin{aligned} & p_x^+(\alpha) v^h(\alpha, x \pm h_x, a) \\ & + p_a(\alpha) v^h(\alpha, x, a - h_a) \\ & + \sum_{\beta \neq \alpha} p^\beta(\alpha) v^h(\alpha, x, a) \end{aligned} \right) \right\} \quad (2.21)$$

où $\Gamma^h(\alpha)$ est l'espace discrétisé des commandes admissibles ou grille de commandes.

Les autres termes sont définis comme suit :

$$\Omega_h^\alpha = |\lambda_{\alpha\alpha}| + \frac{|u - d|}{h_x}$$

$$p_x^+(\alpha) = \frac{u - d}{h_x \Omega_h^\alpha} \quad \text{if } u - d > 0 \quad \text{et} \quad p_x^+(\alpha) = 0 \quad \text{Si } u - d \leq 0$$

$$p_x^-(\alpha) = \frac{d - u}{h_x \Omega_h^\alpha} \quad \text{if } u - d \leq 0 \quad \text{et} \quad p_x^-(\alpha) = 0 \quad \text{Si } u - d > 0$$

$$p_a(\alpha) = \frac{f(u)}{h_a \Omega_h^\alpha} \quad p^\beta(\alpha) = \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\Omega_h^\alpha}$$

Notons que $p_x^+(\alpha) + p_x^-(\alpha) + p_a(\alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} p^\beta(\alpha) = 1$.

Les termes $p_x^+(\alpha)$, $p_x^-(\alpha)$, $p_a(\alpha)$ et $p^\beta(\alpha)$ sont positifs pour tout $\alpha \neq \beta$. Ils peuvent être considérés comme étant les probabilités de transition de la chaîne de Markov dans un espace d'état discret ou grille G^h , qui représente la description de la grille d'opération numérique, qui va être considérée pour la résolution numérique des équations d'HJB. Notons également que le terme ci-dessous,

$$\frac{g(\alpha, x, a)}{\Omega_h^\alpha (1 + \rho / \Omega_h^\alpha)}$$

est positif, borné et que $1/(1 + \rho / \Omega_h^\alpha)$ représente un taux d'actualisation de valeur dans $(0,1)$. L'expression (2.21) peut donc être interprétée comme conditions d'optimum d'un problème de décision Markovien à états finis et à commandes finies. Pour résoudre le problème d'optimisation, on effectue une approximation de la fonction valeur du problème initial. La solution du problème de décision markovien, décrite par l'équation (2.21) peut être obtenue en utilisant un algorithme d'approximations successives associé à une technique d'amélioration de la politique (voir Kushner et Dupuis (1992) et Boukas et Haurie (1990)).

L'implantation de la technique d'approximations successives nécessite la spécification d'une grille finie. De ce fait, une définition des conditions aux limites de la grille est nécessaire. Cette nécessité s'impose davantage quand nous examinons attentivement les équations (2.24) à (2.26). En effet, il est clair que pour calculer la fonction valeur dans un point de la grille, on aura besoin de deux valeurs, une en amont et l'autre en aval de la fonction valeur; donc aux limites de la grille, un de ces deux points s'avère non défini et doit être fixé approximativement. Cette approximation est réaliste et n'a pas un effet perturbateur sur le résultat final, du moment où la fonction valeur est continue. De plus, on peut démontrer que la politique optimale change rarement quand $|x|$ est très grand (i.e dépasse les limites de la grille), pour plus informations à ce sujet nous référons le lecteur à Yan et Zhang (1995), donc la solution optimale ne sera jamais aux limites du domaine. Nous pouvons donc affirmer que l'optimum que nous cherchons n'est pas aux frontières de la grille quand celle-ci est bien choisie pour différentes valeurs de pénalités considérées. Au cours de l'implémentation numérique, nous allons utiliser les conditions aux limites comme détaillées dans Yan et Zhang (1995).

Pour un pas de discrétisation donné Yan et Zhang (1995) ont utilisé, l'algorithme de la technique d'approximations successives se présentant comme suit :

Étape 1 : Initialisation

Choisir $\delta \in R^+$; fixer $n = 1$, et $(v^\alpha(x))^n := 0, \forall \alpha \in I, \forall x \in G$

Étape 2 : Calculer

$$(v^\alpha(x))^{n-1} := (v^\alpha(x))^n, \forall \alpha \in I, \forall x \in G$$

Étape 3 : Calculer la fonction coût correspondante pour obtenir

$$(u(\cdot), \omega_p(\cdot), \omega_r(\cdot))$$

Étape 4 : Test de convergence

$$\bar{c} = \min_{x \in G} [(v^\alpha(x))^n - (v^\alpha(x))^{n-1}] \quad \underline{c} = \max_{x \in G} [(v^\alpha(x))^n - (v^\alpha(x))^{n-1}]$$

$$c_{\min} := \frac{\rho}{1-\rho} \bar{c} \quad c_{\max} := \frac{\rho}{1-\rho} \underline{c}$$

Si $|c_{\max} - c_{\min}| \leq \delta$ Alors arrêt, sinon $n := n+1$ et retour à l'étape 2.

Cet algorithme sera utilisé pour les chapitres 3 et 4 ultérieurement. L'algorithme a été programmé en Matlab Version 6.5. Les données de simulation ainsi qu'une analyse des résultats sont présentées à la section suivante.

2.7 Exemple numérique

Dans cette partie, nous présentons un exemple numérique du système de production manufacturier présenté dans la section 2.3. La dynamique du système est décrite par un processus de Markov à trois états avec $B = \{1, 2, 3\}$. Le coût instantané est celui décrit par l'équation (2.8) avec c^+ , c^- , c_p et c_r que nous avons défini antérieurement. La matrice $Q(\cdot)$ décrite par l'équation (2.3) est définie comme suit :

$$Q(\omega_p, \omega_r) = \begin{pmatrix} -(\lambda_{12}(a) + \omega_p) & \lambda_{12}(a) & \omega_p \\ \omega_r & -\omega_r & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & -\lambda_{31} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Le taux de panne de la machine en fonction de son âge est donné par l'expression suivante :

$$\lambda_{12}(a(t)) = K_0 + K_{12}^\infty \left[1 - e^{-(K_i \times a(t)^3)} \right] \quad (2.23)$$

Pour les constantes K_0, K_{12}^∞ et K_i données, le temps moyen entre les pannes (MTBF) dépendant de l'âge de la machine et est donné par :

$$\text{MTBF}(a) = \frac{1}{\lambda_{12}(a)} \quad \text{avec} \quad \text{MTBF}(0) = \frac{1}{K_0} \quad \text{et} \quad \text{MTBF}(\infty) = \frac{1}{K_0 + K_{12}^\infty}$$

L'équation dynamique discrète (2.21) donne le système des trois équations suivantes :

$$v^h(1, x, a) = \min_{(u, \omega_p, \omega_r \in \Gamma^h(1))} \left\{ \frac{c^+ x^+ + c^- x^-}{\Omega_h^1 (1 + \rho / \Omega_h^1)} + \frac{1}{(1 + \rho / \Omega_h^1)} \begin{pmatrix} p_x^+(1) v^h(1, x \pm h_x, a) \\ + p_a(1) v^h(1, x, a + h_a) \\ + p^2(1) v^h(2, x, a) \\ + p^3(1) v^h(3, x, a) \end{pmatrix} \right\} \quad (2.24)$$

$$v^h(2, x, 0) = \min_{\omega_r \in \Gamma^h(2)} \left\{ \frac{c^+ x^+ + c^- x^- + c_p \omega_p}{\Omega_h^2 (1 + \rho / \Omega_h^2)} + \frac{1}{(1 + \rho / \Omega_h^2)} \begin{pmatrix} p_x^-(2) v^h(2, x - h_x, 0) \\ + p_a(2) v^h(2, x, 0) \\ + p^1(2) v^h(1, x, a) \end{pmatrix} \right\} \quad (2.25)$$

$$v^h(3, x, 0) = \min_{\omega_p \in \Gamma^h(3)} \left\{ \frac{c^+ x^+ + c^- x^- + c_p \omega_p}{\Omega_h^3 (1 + \rho / \Omega_h^3)} + \frac{1}{(1 + \rho / \Omega_h^3)} \begin{pmatrix} p_x^-(3) v^h(3, x - h_x, 0) \\ + p_a(3) v^h(2, x, 0) \\ + p^1(3) v^h(1, x, a) \end{pmatrix} \right\} \quad (2.26)$$

Nous utilisons dans cet exemple le domaine D suivant pour la variation du stock et l'âge de la machine (c'est-à-dire pour le stock x et pour l'âge a).

$$D = \{(x, a) : -10 \leq x \leq 100; 0 \leq a \leq 100\}$$

avec un pas de discrétisation $h = (h_x = 5, h_a = 5)$. Le taux de panne de la machine dépendant de l'âge de la machine est décrit par l'équation (2.23). Ce taux de panne étant connu comme un taux de panne croissant, est utilisé ici pour faire le lien entre les probabilités de panne de la machine et l'âge de la machine. Les figures 6 et 7 représentent le taux de panne et le temps moyen entre les pannes de la machine pour chaque valeur de son âge avec :

$$K_0 = 10^{-4}, K_{12}^{\infty} = 0.01 \text{ and } K_t = 5 \times 10^{-6}$$

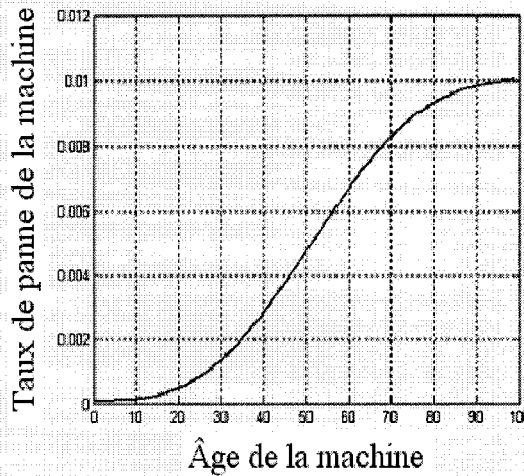


Figure 6 Taux de panne dépendant de l'âge de la machine

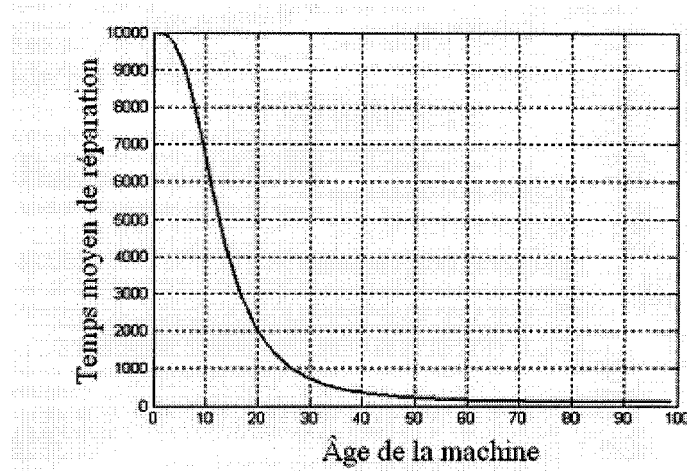


Figure 7 Temps moyen de réparation dépendant de l'âge de la machine

Les valeurs numériques qui caractérisent le système, doivent être choisies telles que la contrainte suivante soit satisfaite :

$$\eta_1 \cdot u_{\max} > d$$

où η_1, η_2, η_3 représentent les probabilités limites aux modes 1, 2 et 3 associés à la matrice des taux de transition et calculées comme suit :

$$\eta \cdot Q(\cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 \eta_i = 1$$

La figure 8 illustre les probabilités limites aux modes 1, 2 et 3 associés à la matrice des taux de transition.

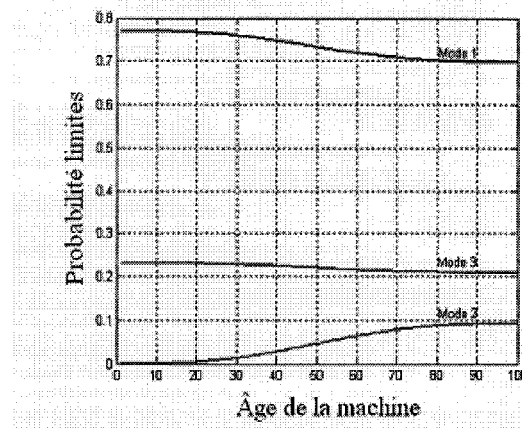


Figure 8 Âge de la machine dépendant des probabilités limites

Le tableau 1, donne le sommaire des autres paramètres utilisés dans cette recherche pour l'exemple numérique considéré.

La technique d'approximations successives programmé en langage Matlab (annexe 1) est utilisée pour résoudre le système d'équation (2.24) à (2.26). Les résultats obtenus pour les valeurs présentées au tableau 1 sont représentés par les figures 9 à 12.

Tableau I

Paramètres de l'exemple numérique

c^+	c^-	c_p	c_r	u_{\max}	d	ω^p_{\min}	ω^p_{\max}	ω^r_{\min}	ω^r_{\max}	λ_{31}	ρ
1	50	20	10000	1	0.9	10^{-5}	0.06	0.05	0.075	0.2	0.01

Analyse des résultats et graphiques

D'après l'exemple numérique présenté ci-dessus nous avons obtenu les résultats graphiques présentés aux figures 9 à 12.

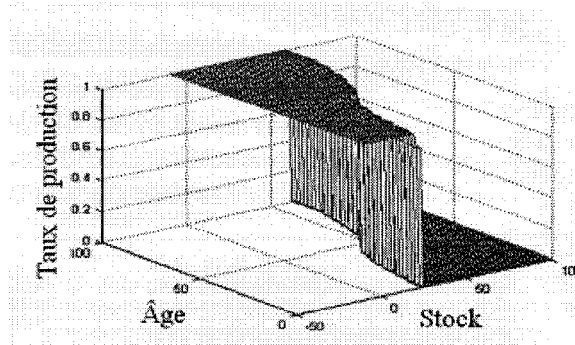


Figure 9 Taux de production de la machine au mode 1

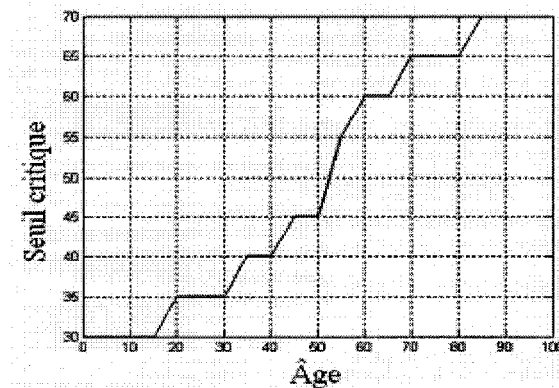


Figure 10 Seuil critique en fonction de l'âge de la machine au mode 1

La politique de la production au mode 1 (machine en production) est représentée par la figure 9. Cette figure montre qu'il n'est pas nécessaire de produire des pièces pour un niveau confortable de l'inventaire (donc il faut mettre le taux de production de la machine à zéro c'est-à-dire arrêté de produire). Il est intéressant de noter à la figure 9 que la zone où le taux de production est à zéro se restreint quand l'âge de la machine augmente. Ceci s'illustre par le fait que $u(1, 45, 10) = 0$ et $u(1, 45, 90) = u_{\max}$ (c'est-à-dire au mode 1, quand le niveau de stock est à 45 et l'âge de la machine est 10, le taux de production est mis à zéro et si le niveau de l'inventaire est à 45 et l'âge de la machine est à 90, le taux de production est à sa valeur maximale).

Rappelons qu'une machine avec une probabilité de pannes donnée par (2.23) est connue comme étant une machine à taux de pannes croissant (voir Kenné et Gharbi (1999)).

L'effet de grandes probabilités de panne pour des grandes valeurs de l'âge de machine est réduit au minimum en assignant de grandes valeurs au seuil critique (stock de sécurité) courant comme illustré par la figure 9. Le taux de production au mode 1 est alors donné par :

$$u(x, a, 1) = \begin{cases} u_{\max} & \text{Si } x(\cdot) < \psi(a) \\ d & \text{Si } x(\cdot) = \psi(a) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.27)$$

où $\psi(a)$ est une fonction dépendante de l'âge de la machine qui donne la valeur optimale du seuil critique pour chaque valeur de l'âge de la machine. Nous obtenons à partir des résultats numériques (voir figure 10) l'équation suivante :

$$\psi(a(t)) = \begin{cases} X^* & \text{Si } a(t) \geq A^* \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.28)$$

où A^* et X^* sont respectivement des valeurs optimale de l'âge et du stock.

La politique optimale de production est donnée par l'équation (2.27) et s'interprète comme suit :

- la machine produit à son taux de production maximale quand le niveau du stock est inférieur à la valeur du seuil critique qui dépend de l'âge;
- la machine produit au taux de la demande quand le niveau du stock est égal à la valeur du seuil critique qui dépend de l'âge;

- la machine ne produit pas quand le niveau du stock est supérieur à la valeur du seuil critique qui dépend de l'âge.

La politique de commande optimale de la production ainsi obtenue est une extension de la politique à seuil critique étant donné que les trois règles précédentes respectent la structure de la loi de commande optimale présentée dans Akella et Kumar (1986), pour la planification de la production sans maintenance. Le seuil critique dépend de l'âge de la machine. Il est illustré par la figure 10. Sur cette figure, on observe que la valeur du seuil critique croît avec le vieillissement de la machine (âge de la machine). Nous pouvons donc tirer la conclusion suivante de la figure 10, plus la machine vieillit (grandes valeurs de âges de la machine), la nécessité de stocker plus des pièces s'impose; ceci pour éviter les situations de rupture de stock.

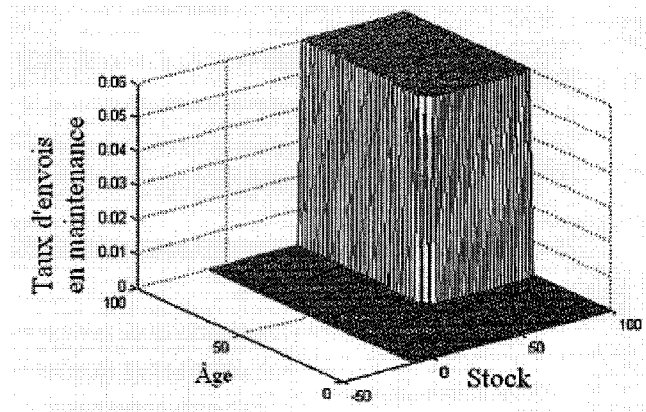


Figure 11 Taux d'envoi en maintenance préventive de la machine au mode 3

La politique de la maintenance préventive, représentée par la figure 11, divise la grille de calcul (x, a) en deux régions où le taux de la maintenance préventive est à sa valeur maximale ou à sa valeur minimale. Ce taux est à sa valeur minimale dans les situations de pénurie ou des niveaux de stock faibles (car on ne doit pas envisager la maintenance préventive dans cette situation). Pour des niveaux de stock significatifs, la zone dans le

domaine (x, a) , où la maintenance préventive est à sa valeur maximale augmente avec l'accroissement de l'âge de la machine. La politique de la maintenance préventive à structure de seuil critique qui dépend de l'âge de la machine pour un niveau de stock donné. Cette politique de la maintenance préventive est donnée par l'équation suivante :

$$\omega_p(x, a, 1) = \begin{cases} \omega_p^{\min} & \text{Si } x(\cdot) < Y^*(a) \\ \omega_p^{\max} & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.29)$$

où $Y^*(a)$ est une fonction dépendante de l'âge de la machine qui donne le niveau de stock optimal pour lequel il est nécessaire de commuter le taux de la maintenance préventive de ω_p^{\min} à ω_p^{\max} (du taux minimal au taux maximal) pour un âge donné de la machine.

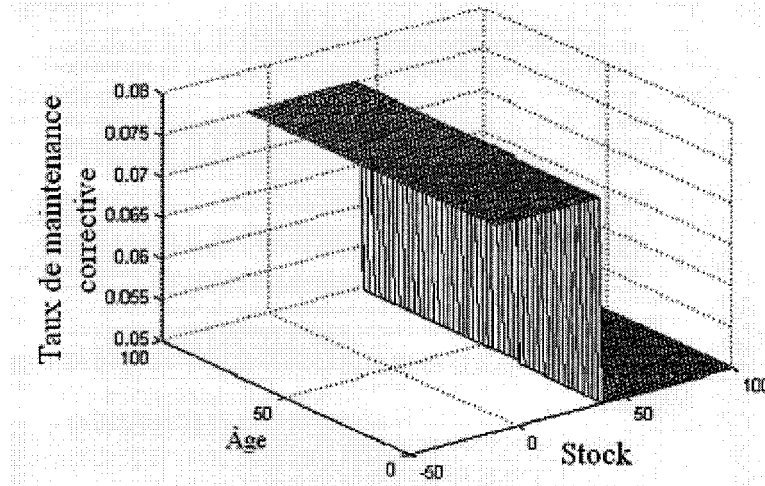


Figure 12 Taux de maintenance corrective de la machine au mode 2

La politique optimale de la maintenance corrective représentée par la figure 12, comme les politiques de la production et de la maintenance préventive, elle a une structure de type seuil critique est décrite par l'équation (2.30) suivante :

$$\omega_r(x, a, 2) = \begin{cases} \omega_{\max}^r & \text{Si } x(\cdot) < Z^*(a) \\ \omega_{\min}^r & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.30)$$

où $Z^*(a)$ est une fonction qui dépend de l'âge de la machine, elle nous donne le niveau de stock optimal à partir duquel il est nécessaire de commuter le taux de la maintenance corrective de ω_{\max}^r à ω_{\min}^r (du taux maximal au taux minimale).

En combinant les actions de maintenance préventive et corrective dans la planification de la production, le coût obtenu est 15213\$ comparés à 19462\$ ou à 26293\$ correspondant respectivement aux cas de la planification de la production et de la maintenance préventive sans maintenance corrective quand le taux de réparation de la machine est à sa valeur maximale ou minimale. Si l'on regarde en terme de pourcentage, cette différence illustre la contribution du modèle proposé vu sous l'angle coût. Nous confirmerons ce résultat à l'aide d'une analyse de sensibilité, ce qui nous amènera également à valider et illustrer le modèle présenté dans ce chapitre.

2.8 Interprétation des résultats et analyse de sensibilité

Pour fins d'illustration et de validation de notre modèle, nous avons effectué quelques simulations en utilisant l'exemple numérique présenté précédemment. Les résultats présentés dans les tableaux 2 à 5, nous illustrent quatre situations différentes d'analyse de sensibilité qui sont respectivement la variation du coût de la rupture de stock, la variation du coût de la mise en inventaire, la variation du coût de la maintenance préventive et enfin la variation du coût de la maintenance corrective.

Variation du coût de rupture de stock

D'après le tableau 2 nous observons que lorsque le coût de la rupture de stock croît, la valeur du seuil critique croît aussi pour un âge donné de la machine (c'est-à-dire, pour

$a = 90$ dans le tableau 2, $x^*(90) = 25, 35, 50$ et 65 pour $c^- = 5, 10, 20$ et 40 respectivement) et les coûts totaux augmentent également. La première ligne du tableau est considérée comme étant le cas de base pour les variations du coût de rupture de stock. Les autres paramètres de la politique de la commande ($u(\cdot), \omega_p(\cdot), \omega_r(\cdot)$) bougent comme prévu d'un point de vue pratique (c'est-à-dire si nous n'avons pas encore atteint un niveau confortable de stock, nous devons envoyer notre machine au taux minimal en maintenance préventive et réparer notre machine au taux maximal en cas de panne). Ce résultat a un sens logique car si la rupture de stock nous coûte cher, nous devons donc stocker plus tout en optimisant les paramètres de la politique de commande, afin d'éviter les situations de rupture de stock.

Tableau II

Variation du coût de la rupture de stock

C^+	C^-	C_p	C_r	$X^*(90)$	$Y^*(90)$	$Z^*(90)$	Coût
1	5	20	5000	25	15	10	7066
1	10	20	5000	35	25	20	8172
1	20	20	5000	50	40	30	9344
1	50	20	5000	65	55	50	11013

Variation du coût de mise en inventaire

Le tableau 3 correspond à la variation du coût de mise en inventaire pour des valeurs fixes des coûts de rupture de stock et de maintenance corrective et préventive. La première ligne du tableau est considérée comme étant le cas de base. La valeur du seuil critique diminue quand le coût de la mise en inventaire croît, et le coût augmente aussi

avec l'accroissement du coût de la mise en inventaire. La conclusion que nous pouvons tirer de cette analyse de sensibilité est la suivante: si le coût de la mise en inventaire augmente, nous devons diminuer notre stock en inventaire tout en optimisant les paramètres de la politique de la commande, car il n'est pas rentable pour nous de produire et de payer cher pour les stocker. Si on a un niveau confortable de stock en inventaire, on doit envoyer notre machine au taux maximal en maintenance préventive et la réparer au taux minimal.

Tableau III

Variation du coût de la mise en inventaire

C^+	C^-	C_p	C_r	$X^*(90)$	$Y^*(90)$	$Z^*(90)$	Coût
1	50	20	5000	65	55	50	11013
5	50	20	5000	30	45	25	22293
10	50	20	5000	15	45	20	29208
20	50	20	5000	5	40	20	34337

Variation du coût de maintenance préventive

La sensibilité de la politique de la commande avec la variation du coût de la maintenance préventive est bien illustrée par le tableau 4. Il est intéressant de noter que lorsque le coût de la maintenance préventive augmente, comparé au cas de base qui est la première ligne du tableau 4, le taux de maintenance préventive est à sa valeur minimale, (c'est-à-dire, aucune maintenance préventive n'est requise étant donné que le temps de la prochaine maintenance préventive est $\lambda_{13}^{-1} = 10^6$ dans une telle situation).

Tableau IV
Variation du coût de la maintenance préventive

C^+	C^-	C_p	C_r	$X^*(90)$	$Y^*(90)$	$Z^*(90)$	Coût
1	50	20	5000	65	55	50	11013
1	50	50	5000	55	55	0	11334
1	50	80	5000	55	55	0	11334
1	50	110	5000	55	55	0	11334

Variation du coût de maintenance corrective

Le tableau 5 ci-dessous montre que le niveau du seuil critique croît avec l'augmentation des coûts de maintenance corrective et les paramètres de maintenance préventive et corrective ($Y^*(.)$ et $Z^*(.)$) décroissent. Ceci est dû au fait que les actions de maintenance doivent être réduites si le coût associé croît. La conclusion que nous pouvons dégager de cette analyse est de réduire les actions de maintenance préventive et corrective, si cela nous coûte cher de les effectuer. En faisant croître le coût de la maintenance corrective on aura toujours la relation suivante :

$$Y^*(90) \leq X^*(90) \text{ et } Z^*(90) \leq X^*(90)$$

L'analyse de sensibilité effectuée dans cette recherche, (Voir tableau 2 à 5 et les résultats mentionnés) donne une validation de l'approche proposée et ressort la contribution du modèle proposé, étant donné que les politiques de commande sont bien définies par les équations et les paramètres obtenus de cette analyse.

Tableau V
Variation du coût de la maintenance corrective

C^+	C^-	C_p	C_r	$X^*(90)$	$Y^*(90)$	$Z^*(90)$	Coût
1	50	20	5000	65	55	50	11013
1	50	20	15000	70	40	40	19623
1	50	20	25000	75	35	30	28067
1	50	20	40000	80	25	25	40704

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de la planification de production et de maintenance (préventive et corrective) d'un système de production manufacturière a été proposé. Nous avons développé le modèle d'optimisation stochastique, du problème étudié avec trois variables de décision (taux de production, de maintenance préventive et de maintenance corrective) et deux variables d'état (l'âge de la machine et le stock). En contrôlant les taux de la production et de la maintenance (préventive et corrective), nous obtenons une approximation de la politique de la commande optimale du système à travers des techniques numériques. Cette approximation de la politique de la commande a été démontrée comme étant asymptotiquement optimale. Nous avons illustré et validé l'approche proposée en utilisant un exemple numérique et une analyse de sensibilité. Cette approche a donné de bons résultats et a étendu le concept de la politique à seuil critique à une machine dont le taux de panne dépend de l'âge et la politique est un contrôle simultané du taux de production, de maintenance, préventive et corrective. Il a été démontré qu'une telle politique avait une structure de type seuil critique et réduisant significativement le coût total encouru. Le chapitre suivant traite des stratégies de production et de maintenance d'un système de production en présence d'un mode dégradé.

CHAPITRE 3

STRATÉGIES DE PRODUCTION ET DE MAINTENANCE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION EN PRÉSENCE D'UN MODE DÉGRADÉ

3.1 Introduction

Les systèmes de production manufacturière représentent le succès principal de l'économie de chaque nation. C'est pourquoi, par le passé et aujourd'hui, ils continuent à attirer l'attention des communautés de recherches opérationnelles et de commande. Des contributions jusqu'en 1994 sont récapitulées dans Gershwin (1994).

Les systèmes de fabrication perturbés par des pannes sont habituellement de grande échelle et des systèmes complexes; ce qui fait de leur modélisation et contrôle un problème complexe.

En raison de la non fiabilité des systèmes de production manufacturière, leurs politiques de maintenance ont une grande importance. Différents modèles de commande sont développés dans Boukas et Haurie (1990), dans Boukas et Liu (2001), et dans les références incluses. Pour ces modèles, toutes les pièces produites sont supposées avoir la même qualité sur l'horizon de la planification. Une telle vision n'est pas réaliste, étant donné que les systèmes de production manufacturière, sont caractérisés par une dégradation des machines avec le temps (i.e. usure des outils, des opérations multiples sur les machines, etc.).

Par conséquent, dans la modélisation des systèmes de production manufacturière, beaucoup de chercheurs ne considèrent pas le fait qu'on peut contrôler la production en fonction de la qualité des pièces produites. Ils prennent toujours comme hypothèse que toutes les pièces produites sont de bonne qualité; ce qui n'est pas toujours réaliste.

Dans notre modèle, nous considérons le rejet des pièces produites de mauvaise qualité.

Dans ce chapitre, nous traitons les stratégies de la production et de la maintenance d'un système de production manufacturière, en présence d'un mode dégradé. À partir du modèle présenté dans Boukas et Haurie (1990), nous faisons une extension du problème de commande du taux de la production et de la maintenance préventive, quand la dynamique de la machine peut se déplacer dans différents modes: opérationnel parfait, opérationnel avec rejet, en réparation (panne), avec un mode additionnel appelé mode de maintenance préventive.

L'approche de programmation dynamique stochastique est employée pour développer les conditions d'optimum décrites par des équations d'Hamilton Jacobi Bellman. Pour illustrer l'utilité de l'approche proposée, nous présenterons un exemple numérique d'un système de production manufacturière, constitué d'une machine traitant un seul type de pièces. Une extension de l'approche à un système de production manufacturière, constitué de deux machines traitant un seul type de pièces sera présentée au chapitre 4.

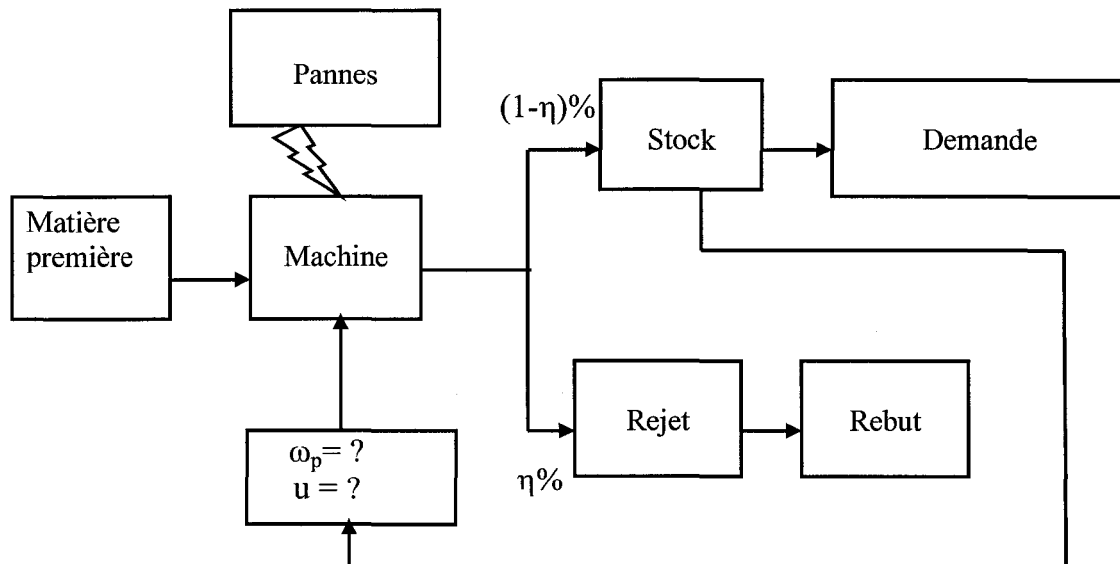


Figure 13 Structure du système de production

3.2 Formulation du problème

Nous considérons dans cette étude un système de production manufacturière, constitué d'une machine traitant un seul type de pièces. Nous choisissons un tel système pour des fins d'illustration et de validation de l'approche proposée. La machine considérée est sujette à des pannes et des réparations aléatoires. Lorsque la machine est opérationnelle, elle peut être soit en mode production parfaite ou en mode production avec rejet (dégradation). L'état de la machine peut être classifié comme étant en opération parfaite noté 1, en opération avec rejet noté 2, en réparation noté 3, en maintenance préventive noté 4. Les états de la machine sont décrits par une chaîne de Markov de quatre états. Soit $\{\alpha(t), t \geq 0\}$, le processus à quatre modes décrivant la dynamique de la machine avec ses valeurs dans $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ce processus est modélisé par une chaîne de Markov irréductible à temps continu et à état discret avec une matrice des taux de transition $Q(\omega_p)$ de dimension 4×4 . Pour caractériser la qualité de la production dans les différents modes, le taux de rejet $\eta(\alpha)$ est inclus dans notre modèle (dans les modes $\alpha = 1, 2$). Notons que $\eta(1) = 0$ (car la machine est en mode opérationnel parfait) et $\eta(2) \neq 0$ (car la machine est en mode opérationnel avec rejet). Il n'y a pas rejet aux modes 3 et 4 car la machine n'est pas en opération. Il n'y a donc pas production ($\eta(3) = \eta(4) = 0$).

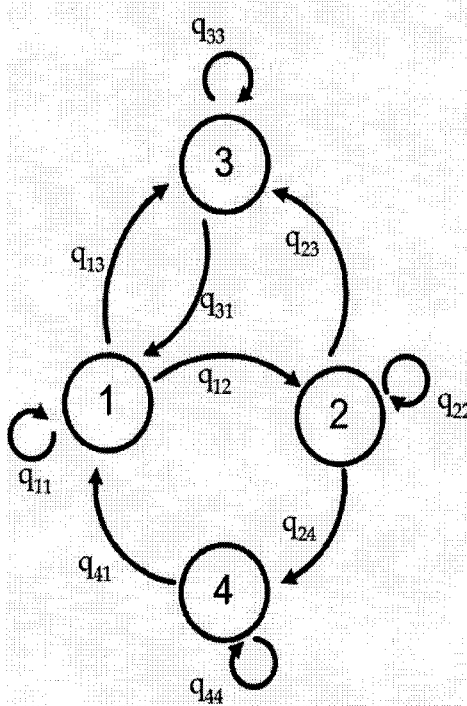


Figure 14 Diagramme de transitions d'états

Afin d'augmenter la capacité du système et diminuer le nombre de pièces rejetées, nous supposons que le taux de transition du mode opérationnel avec rejet au mode maintenance préventive est une variable de décision appelée ω_p . Nous faisons dépendre Q de ω_p (\cdot) défini comme étant le taux d'envoi de la machine en maintenance préventive.

Soit $u(t) \in \mathbb{R}$ le taux de production de la machine au temps $t \geq 0$. Le niveau du stock $x(t) \in \mathbb{R}$ du système considéré est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = u(t) - \eta(\alpha) - d, \quad x(0) = 0 \quad (3.1)$$

où $\eta(\alpha)$, d et x sont respectivement le taux de rejet au mode α , la demande et le niveau de stock initial.

La dépendance de $\alpha(t)$ du taux d'envoi en maintenance préventive est donnée par le générateur d'une chaîne de Markov contrôlé $Q(\omega_p) = q_{\alpha\beta}(\omega_p)$ défini tel que les probabilités de transition entre les différents modes sont données par :

$$P[\alpha(t + \delta t) | \alpha(t) = \alpha] = \begin{cases} q_{\alpha\beta}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 + q_{\alpha\alpha}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{si } \alpha = \beta \end{cases} \quad (3.2)$$

où $q_{\alpha\beta}$ représente le taux de transition du mode α au mode β , avec $q_{\alpha\beta} \geq 0$, $\alpha \neq \beta$,

$$q_{\alpha\alpha} = -\sum_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in B \quad \text{et} \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0.$$

Pour que le système soit faisable, les commandes choisies doivent être telles que (3.4) soit vérifié avec $\eta(\cdot)$ donné. Cette faisabilité est déterminée en fonction des probabilités limites données par l'expression suivante :

$$v \times Q(\cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^4 v_i = 1 \quad (3.3)$$

où $v(\cdot) = (v_1, v_2, v_3, v_4)'$ désigne le vecteur des probabilités limites aux modes 1 à 4. Le système est faisable si l'équation ci-dessous est satisfaite :

$$u_{\max} v_1 + (u_{\max} - \eta(2)) v_2 - d \geq 0 \quad (3.4)$$

où u_{\max} et $\eta(2)$ désignent respectivement le taux de production maximal de la machine et le taux de rejets au mode 2.

L'ensemble des décisions admissibles au mode $\alpha \in B$ peut être décrit comme suit :

$$\Gamma(\alpha) = \left\{ (U, \omega_p) = \left((u^1, \omega_p^1), \dots, (u^4, \omega_p^4) \right) \mid u^k \leq u_{\max}; \omega_p^{\min} \leq \omega_p^k \leq \omega_p^{\max} \right\} \quad (3.5)$$

où (u^k, ω_p^k) désigne la loi de commande au mode $k \in B$; ω_p^{\min} et ω_p^{\max} sont respectivement les taux d'envoi minimal et maximal de la machine en maintenance préventive. Les variables de décision du problème de commande optimale à résoudre sont les taux de production et d'envoi de la machine en maintenance préventive. En contrôlant $\omega_p(\cdot)$, on agit sur le temps moyen d'envoi au mode maintenance préventive; ce qui se traduit par une amélioration de la disponibilité de la machine et une diminution du nombre de pièces rejetées.

Définition 3.1 Une loi de commande $(u(\cdot), \omega_p(\cdot)) = \{u(t) \in IR, \omega_p(\cdot) \in IR : t \geq 0\}$ est dite admissible par rapport à l'état initial α si :

- (i) $(u(\cdot), \omega_p(\cdot))$ est adapté à la σ -algèbre générée par une variable aléatoire $\alpha(\cdot)$ et notée $\sigma\{\alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}$.
- (ii) $(u(\cdot), \omega_p(\cdot)) \in \Gamma(\alpha(t))$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.2 Une fonction mesurable $\psi(x, \alpha) = (u(x, \alpha), \omega_p(x, \alpha))$ est dite commande admissible avec rétroaction si :

- (i) Pour toute valeur initiale x , l'équation suivante a une solution unique désignée $x(\cdot)$:
$$\dot{x}(t) = u(x(t), \alpha(t)) - d, \quad x(0) = x_0$$
- (ii) $(u(\cdot), \omega_p(\cdot)) \in \Gamma(\alpha)$

3.3 Coût instantané

Soit $g(\alpha, x, u)$ la fonction coût instantané qui permet de pénaliser l'inventaire, la pénurie et les opérations sur la machine dans chaque mode α du système. Cette fonction est définie comme suit :

$$g(\alpha, x, u) = c^+ x^+ + c^- x^- + c(\omega_p, \alpha(t)) \quad \alpha(t)=3,4 \quad (3.6)$$

où c^+ , c^- sont respectivement les coûts encourus par unité de pièce produite pour un inventaire et une pénurie, $x^+ = \max(0, x_1)$, $x^- = \max(-x_1, 0)$ et c une constante définie comme suit :

$$c(\omega_p, \alpha(t)) = \omega_p c_p \text{Ind}\{\alpha(t) = 4\} + c_r \text{Ind}\{\alpha(t) = 3\}$$

$$\text{avec } \text{Ind}\{P(.)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } P(.) \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les activités de maintenance préventive ($\alpha(t) = 4$) et de réparation ($\alpha(t) = 3$) sont pénalisées par c_p et c_r .

Le problème de commande optimale considéré dans cette recherche consiste à déterminer une stratégie de production et de maintenance préventive de la machine qui minimisera le coût moyen total actualisé défini par l'équation (3.7). Ceci en contrôlant les taux de production $u(.)$, et de la maintenance préventive $\omega_p(.)$.

$$J(x, \alpha, u) = E \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} g(x, \alpha, u) dt \mid x(0) = x, \zeta(0) = \alpha \right] \quad (3.7)$$

où ρ désigne le taux d'actualisation et $E = [A/B]$ correspond à l'espérance conditionnelle de A étant donné B. Le problème de planification de la production et de la maintenance préventive consiste à déterminer la loi de commande optimale $\{u^*(.), \omega_p^*(.)\} \in \Gamma(\alpha)$, $\alpha \in B$, minimisant le coût total encouru défini par l'équation (3.7).

Pour la suite de ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes sur le coût instantané nous posons $h(x(t), \alpha(t)) = c^+ x^+(t) + c^- x^-(t)$, et formulons les hypothèses suivantes sur les fonctions $h(\cdot)$ et $c^\alpha(\cdot)$ et sur le générateur $Q(\cdot)$ du processus stochastique $\alpha(t)$.

Hypothèse 1 $h(x)$ est une fonction convexe non négative avec $h(0) = 0$: il existe des constantes positives C_{1h} , C_{2h} , C_{3h} , et k_{2h} , $k_{1h} \geq 0$ telles que :

$$C_{1h} |x|^{k_{1h}} - C_{2h} \leq h(x) \leq C_{3h} (1 + |x|^{k_{2h}}).$$

Hypothèse 2 $c(\omega_p, \alpha)$ est une fonction non négative, $c(0, \alpha) = c$, $Ind\{\alpha(t) = 3\}$ est différentiable deux fois. De plus $c(\omega_p, \alpha)$ est soit strictement convexe ou linéaire.

Hypothèse 3 $Q(\omega_p)$ est une fonction continue sur ω_p .

La fonction valeur associée à ce problème d'optimisation est donnée par l'expression suivante :

$$v(\alpha, x) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(\alpha)} J(\alpha, x, u, \omega_p) \quad \forall \alpha \in B \quad (3.8)$$

Nous étudierons les propriétés élémentaires de la fonction valeur donnée par (3.8). Nous montrerons que cette fonction est strictement convexe en x si les fonctions $h(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont convexes. De plus, nous montrerons que la fonction valeur est continue, différentiable et satisfait les équations d'HJB. Posons $g(x, U) = h(x(t)) + c(\omega_p(t))$ avec $U = (u, \omega_p)$. Le **théorème 1** est présenter dans Kenné (2004), nous allons le reproduire intégralement dans cette section pour fin de suivit de la lecture.

Théorème 1. Si $g(x, U)$ est conjointement convexe, alors $v(x, \alpha)$ est convexe pour tout $\alpha \in B$.

Preuve : Il est à noter que la convexité de $v(x, \alpha)$ est équivalente à celle de $J(x, \alpha, U)$.

Nous pouvons dès à présent montrer que $J(x, \alpha, U)$ est convexe. Pour toutes les valeurs initiales x et x' du stock et toute commandes admissibles U et U' , considérons $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{x}'(t)$, $t \geq 0$, qui désigne les trajectoires correspondant à (x, U) et (x', U') .

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda J(x, \alpha, U) + (1 - \lambda) J(x', \alpha, U') &= \mathbf{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} [\lambda g(x(t), U(t)) + (1 - \lambda) g(x'(t), U'(t))] \\ &\geq \mathbf{E} \int_0^\infty e^{-\rho t} g(\underline{x}(t), \underline{U}(t)) dt \end{aligned}$$

où $\underline{U}(t) = \lambda U(t) + (1 - \lambda) U'(t)$ et $\underline{x}(t)$, $t \geq 0$, est la trajectoire associée à la valeur initiale $\lambda x + (1 - \lambda) x'$ et à la commande $\underline{U}(t)$.

Alors $\lambda J(x, \alpha, U(.)) + (1 - \lambda) J(x', \alpha, U'(.)) \geq J(\lambda x + (1 - \lambda) x', \alpha, \lambda U(.) + (1 - \lambda) U'(.))$

Ce qui nous permet d'affirmer que $J(., \alpha, .)$ est conjointement convexe et que $v(x, \alpha)$ est par conséquent convexe.

Avec le théorème 1 et les hypothèses 1 à 3, la propriété de Lipschitz et par la suite la continuité de la fonction valeur $v(x, \alpha)$ peuvent être déduites du théorème 2.5.1 présenté dans Clark (1983) qui montre que toute fonction convexe est localement Lipschitz et est par conséquent continue.

Si $v(\alpha, x)$ est la fonction valeur associée à la loi de commande admissible $u(.)$ et $\omega_p(.)$ de condition initiale x et α , l'équation de la programmation dynamique associée au problème de commande optimale est donnée par l'expression suivante :

$$\rho v(\alpha, x) = \min_{(u(.), \omega_p(.)) \in \Gamma(\alpha)} \left[g(\alpha, x, u) + \dot{x}(t) v_x(.) + \sum_{\beta \in B} q_{\alpha\beta}(.) [v(x, \beta) - v(x, \alpha)] \right] \quad (3.9)$$

où $v_x(.)$ est la dérivée partielle (ou gradient).

Pour plus de détails sur l'équation (3.9), nous renvoyons le lecteur à Gershwin (1994). L'équation (3.9) est de type Hamilton Jacobi Bellman (HJB), les conditions d'optimum se traduisent par un ensemble de systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles couplées. La loi de commande optimale ($u^*(.)$ et $\omega_p^*(.)$) est celle qui minimise à travers $\Gamma(\alpha)$ le terme de droite de l'équation (3.9), lorsque la fonction valeur est disponible, une politique de commande optimale est obtenue d'après (3.9). Résoudre analytiquement l'équation (3.9) pour obtenir la solution de la fonction valeur et la loi de commande optimale associée est difficile. Mais une solution analytique de cette équation existe pour le cas d'une machine traitant un seul type de pièces et avec une dynamique des pannes de la machine décrite par une chaîne de Markov homogène voir Akella et Kumar (1986).

Dans le cas de la planification de la production et de la maintenance préventive d'une machine produisant un seul type de pièces en tenant compte du contrôle de la production, en utilisant le processus à quatre modes, l'équation (3.9) donne l'ensemble des quatre équations aux dérivées partielles couplées (3.10) à (3.13). Les détails développés dans Sethi et Zhang (1994), permettent de conclure que la fonction valeur $v(\alpha, x)$ est localement Lipschitz et est l'unique solution visqueuse des équations d'HJB suivantes :

$$\rho v(x, 1) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(1)} \left\{ \begin{aligned} &g(1, \cdot) + v_x(x, 1) \dot{x}(t) \\ &+ q_{12} [v(x, 2) + v(x, 1)] \\ &+ q_{13} [v(x, 3) + v(x, 1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\rho v(x, 2) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(2)} \left\{ \begin{aligned} &g(2, \cdot) + v_x(x, 2) \dot{x}(t) \\ &+ q_{23} [v(x, 3) + v(x, 2)] \\ &+ q_{24} [v(x, 4) + v(x, 2)] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$$\rho v(x, 3) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(3)} \left\{ \begin{aligned} &g(3, \cdot) + v_x(x, 3) \dot{x}(t) \\ &+ q_{31} [v(x, 1) + v(x, 3)] \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\rho v(x, 4) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(4)} \left\{ g(4, \cdot) + v_x(x, 4) \dot{x}(t) + q_{41} [v(x, 1) + v(x, 4)] \right\} \quad (3.13)$$

Pour obtenir une approximation de la solution des équations (3.10) à (3.13), nous allons utiliser les méthodes numériques. Dans la section suivante, nous présenterons l'approche numérique et l'analyse des résultats obtenus.

3.4 Approche numérique

Dans cette section, nous développons les méthodes numériques pour résoudre les conditions d'optimum présentées dans la section précédente. Cette méthode est basée sur l'approche de Kushner et Dupuis (1992). L'idée principale de cette approche consiste à utiliser une approximation. L'approximation que nous allons utiliser ici pour le gradient de la fonction valeur $v(x, \alpha)$ pour tout $\alpha \in B$ doit dépendre du signe de $(u - \eta(\alpha) - d)$. Soit h le pas de discrétisation de la variable d'état x , en utilisant h , la fonction valeur $v(x, \alpha)$ est approximée par $v^h(x, \alpha)$, et en remplaçant la dérivée partielle de la fonction valeur par l'expression suivante dans l'équation :

$$v_x(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{1}{h} (v^h(x+h, \alpha) - v^h(x, \alpha)) & \text{si } u - \eta(\alpha) - d \geq 0 \\ \frac{1}{h} (v^h(x, \alpha) - v^h(x-h, \alpha)) & \text{si } u - \eta(\alpha) - d < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Nous avons alors :

$$(u - \eta(\alpha) - d) v_x(x, \alpha) = \frac{|u - \eta(\alpha) - d|}{h} v^h(x+h, \alpha) \mathbf{Ind}\{u - \eta(\alpha) - d \geq 0\} + \frac{|u - \eta(\alpha) - d|}{h} v^h(x-h, \alpha) \mathbf{Ind}\{u - \eta(\alpha) - d < 0\} - \frac{|u - \eta(\alpha) - d|}{h} v^h(x, \alpha) \quad (3.15)$$

Pour fins de simplification, nous posons $\bar{u} = u - \eta(\alpha)$. En utilisant ces approximations, nous pouvons exprimer l'équations d'HJB (3.9) en terme de $v^h(x, \alpha)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
v^h(x, \alpha) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(\alpha)} & \left\{ \left(\rho + |q_{\alpha\alpha}| + \frac{|\bar{u}(\alpha) - d|}{h} \right)^{-1} \right. \\
& \left\{ \frac{|\bar{u}(\alpha) - d|}{h} (v^h(x+h, \alpha) \mathbf{Ind} \{ \bar{u}(\alpha) - d \geq 0 \} + \right. \\
& \left. v^h(x-h, \alpha) \mathbf{Ind} \{ \bar{u}(\alpha) - d < 0 \}) + g(x, \omega_p) + \sum_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha\beta} \times v^h(x, \beta) \right\} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Soit :

$$Q_h^\alpha = |q_{\alpha\alpha}| + \frac{|\bar{u}(\alpha) - d|}{h}$$

$$p_x^\alpha(1) = \begin{cases} \frac{|\bar{u}(\alpha) - d|}{h Q_h^\alpha} & \text{si } \bar{u}(\alpha) - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_x^\alpha(2) = \begin{cases} \frac{d - \bar{u}(\alpha)}{h Q_h^\alpha} & \text{si } \bar{u}(\alpha) - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^\alpha(\beta) = \frac{q_{\alpha\beta}}{Q_h^\alpha}$$

Avec ces termes, l'équation (3.16) devient :

$$\begin{aligned}
v^h(x, \alpha) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(\alpha)} & \left\{ \frac{g(x, \omega_p)}{Q_h^\alpha \{1 + \rho / Q_h^\alpha\}} + \frac{1}{\{1 + \rho / Q_h^\alpha\}} (p_x^\alpha(1) v^h(x+h, \alpha) \right. \\
& \left. + p_x^\alpha(2) v^h(x-h, \alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} p^\alpha(\beta) v^h(x, \beta) \right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où $\Gamma^h(\alpha)$ est l'espace discrétisé des commandes admissibles ou grille de commande.

Notons que pour tout $\alpha \in B$, $p_x^\alpha(1) + p_x^\alpha(2) + \sum_{\beta \neq \alpha} p^\alpha(\beta) = 1$. Une analyse de l'équation (3.17) montre alors que les coefficients de la fonction valeur $v^h(x, \alpha)$ sont semblables aux probabilités de transition entre les points de l'espace d'états discrets ou grille G_x^h . Notons également que les termes :

$$r^\alpha(.) = \frac{g(x, \omega_p)}{Q_h^\alpha \left\{ 1 + \frac{\rho}{Q_h^\alpha} \right\}}$$

$$\delta(\alpha, x, .) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho}{Q_h^\alpha} \right)}$$

où le terme $r^\alpha(.)$ est positif, borné et $\delta(\alpha, x, .)$ représente le taux d'actualisation de valeur comprise entre (0 et 1). L'expression (3.17) peut donc être interprétée comme des conditions d'optimum d'un problème de décision Markovien à états finis et à commandes finies. Cette approximation du problème d'optimisation est utilisée pour approximer la fonction valeur du problème initial. Le théorème 3.1 présenté ci-dessous, montre que $v^h(\alpha, x)$ est bien une approximation de la fonction valeur $v(x, \alpha)$ quand le pas de discrétisation h tend vers zéro. Soit $h = (h_x, h_a)$.

Théorème 3.1 Soit $v^h(x, \alpha)$ la solution de l'équation (3.17). Supposons qu'il existe des constantes C_g et k_g telles que :

$$0 \leq v^h(x, \alpha) \leq C_g (1 + |x|_g^k)$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} v^h(x, \alpha) = v(x, \alpha)$$

Preuve : Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons le lecteur à Yan et Zhang (1997).

La solution du problème de décision markovien, décrit par l'équation (3.17) peut être obtenue en utilisant un algorithme d'approximations successives associé à une technique d'amélioration de la politique voir Boukas et Haurie (1990), Kushner et Dupuis (1992). Pour valider l'approche proposée, nous considérons, un exemple numérique d'un système de production constitué d'une machine traitant un seul type de pièces.

Pour cet exemple l'équation de programmation dynamique discrète (3.17) donne le système de quatre équations suivantes :

$$v^h(x, 1) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(1)} \left\{ r^1(x) + \delta(1, x, \cdot) \left[\begin{array}{l} P_x^1(1)v^h(x+h, 1) \\ + P_x^1(2)v^h(x-h, 1) \\ + P^1(2)v^h(x, 2) \\ + P^1(3)v^h(x, 3) \end{array} \right] \right\} \quad (3.18)$$

$$v^h(x, 2) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(2)} \left\{ r^2(x) + \delta(2, x, \cdot) \left[\begin{array}{l} P_x^2(1)v^h(x+h, 2) \\ + P_x^2(2)v^h(x-h, 2) \\ + P^2(3)v^h(x, 3) \\ + P^2(4)v^h(x, 4) \end{array} \right] \right\} \quad (3.19)$$

$$v^h(x, 3) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(3)} \left\{ r^3(x) + \delta(3, x, \cdot) \left[\begin{array}{l} P_x^3(2)v^h(x-h, 3) \\ + P^3(1)v^h(x, 1) \end{array} \right] \right\} \quad (3.20)$$

$$v^h(x, 4) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(4)} \left\{ r^4(x) + \delta(4, x, \cdot) \left[\begin{array}{l} P_x^4(2)v^h(x-h, 4) \\ + P^4(1)v^h(x, 1) \end{array} \right] \right\} \quad (3.21)$$

avec :

$$Q_h^1 = q_{12} + q_{13} + \frac{|u - d|}{h}$$

$$Q_h^2 = q_{23} + q_{24}(\omega_p) + \frac{|u - \eta(2) - d|}{h}$$

$$Q_h^3 = q_{31} + \frac{d}{h}$$

$$Q_h^4 = q_{41} + \frac{d}{h}$$

$$P_x^1(1) = \begin{cases} \frac{u-d}{hQ_h^1} & \text{si } u-d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_x^1(2) = \begin{cases} \frac{d-u}{hQ_h^1} & \text{si } u-d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_x^2(1) = \begin{cases} \frac{u-\eta(2)-d}{hQ_h^2} & \text{si } u-\eta(2)-d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_x^2(2) = \begin{cases} \frac{d-u+\eta(2)}{hQ_h^2} & \text{si } u-\eta(2)-d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_x^3(2) = \frac{d}{hQ_h^3}$$

$$P_x^4(2) = \frac{d}{hQ_h^4}$$

$$P^1(2) = \frac{q_{12}}{Q_h^1}$$

$$P^2(3) = \frac{q_{23}}{Q_h^2}$$

$$P^2(4) = \frac{q_{24}(\omega_p)}{Q_h^2}$$

$$P^3(1) = \frac{q_{31}}{Q_h^3}$$

$$P^4(1) = \frac{q_{41}}{Q_h^4}$$

Nous utilisons pour cet exemple le domaine suivant pour la variation du stock :

$$D = \{-10 \leq x \leq 20\}$$

avec $h = 0.2$, $\rho = 0.0001$, et le taux de la demande $d = 0.16$.

Les paramètres de l'exemple numérique considéré sont présentés dans le tableau 1. La technique d'approximations successives programmée en langage Matlab (annexe 2) est utilisée pour résoudre le système d'équation (3.18) à (3.21). Les données du tableau 6 assurent la faisabilité du système pour une valeur spécifique du taux de rejet.

Tableau VI

Paramètres de l'exemple numérique

u_{\max}	q_{12}	q_{13}	q_{23}	q_{31}	q_{41}	ω_p^{\min}	ω_p^{\max}	c^+	c^-	c_r	c_p
0.22	0.001	0.025	0.02	0.2	0.2	0.015	0.15	1	10	30	15

Pour $\eta(2) = 95\%$, la résolution de l'équation (3.3) donne $v_1(.) = 0,8804$, $v_2(.) = 0,0052$, $v_3(.) = 0,1106$, $v_4(.) = 0,0039$ et l'application de l'équation (3.4) montre que le système est faisable, cette faisabilité est égale à 0,0299.

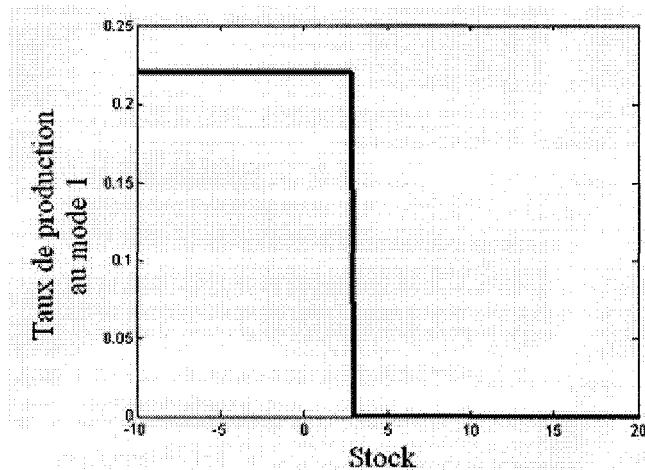


Figure 15 Taux de production au mode 1

La figure 15 représente, le taux de production de la machine au mode 1, production parfaite, en fonction du stock en inventaire.

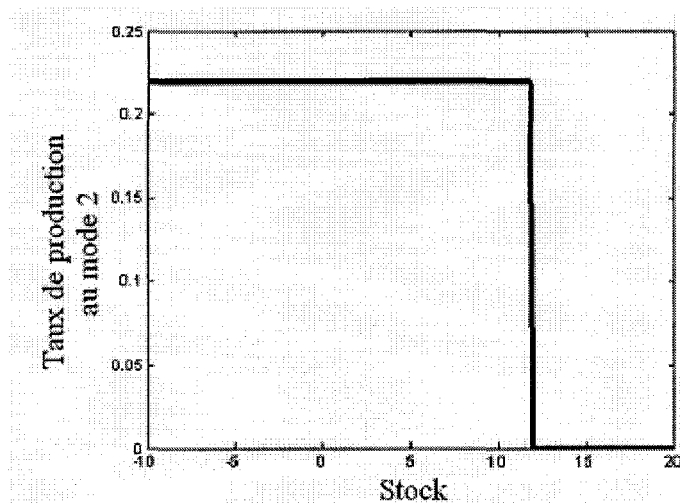


Figure 16 Taux de production au mode 2

La figure 16 représente le taux de production de la machine au mode 2, en production avec rejet, en fonction du stock en inventaire.

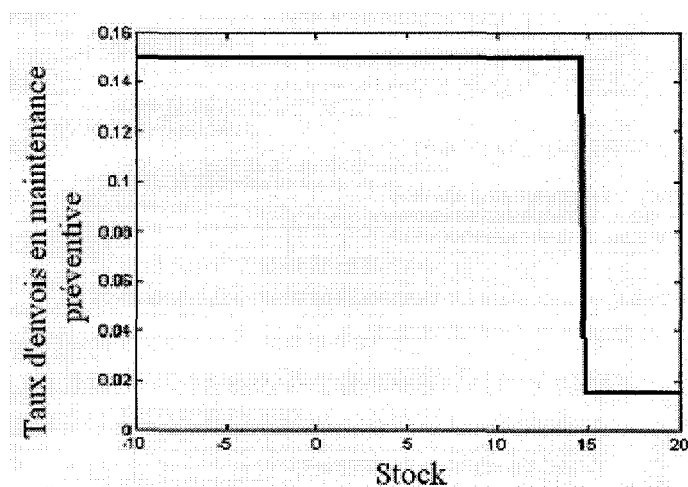


Figure 17 Taux d'envois en maintenance préventive

La figure 17 représente le taux d'envois de la machine en maintenance préventive, en fonction du stock en inventaire.

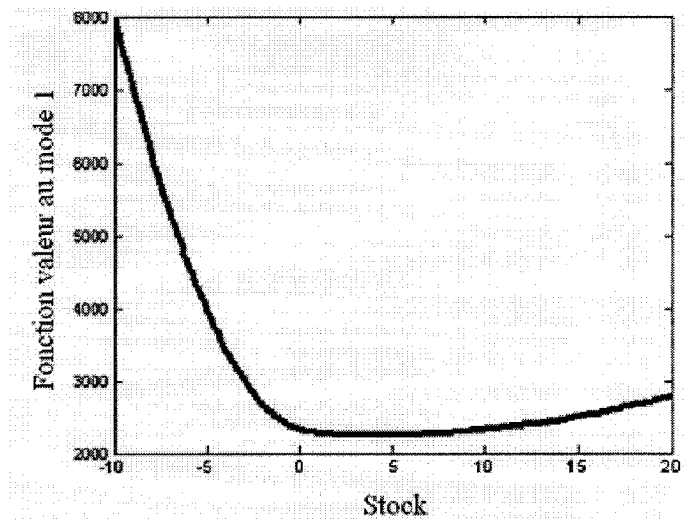


Figure 18 Fonction valeur au mode 1

La figure 18 représente la fonction valeur au mode 1, production parfaite.

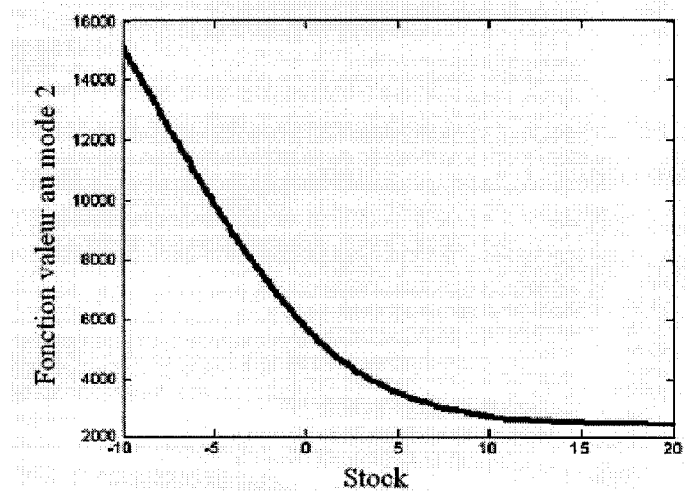


Figure 19 Fonction valeur au mode 2

La figure 19 représente la fonction valeur au mode 2, production avec rejet.

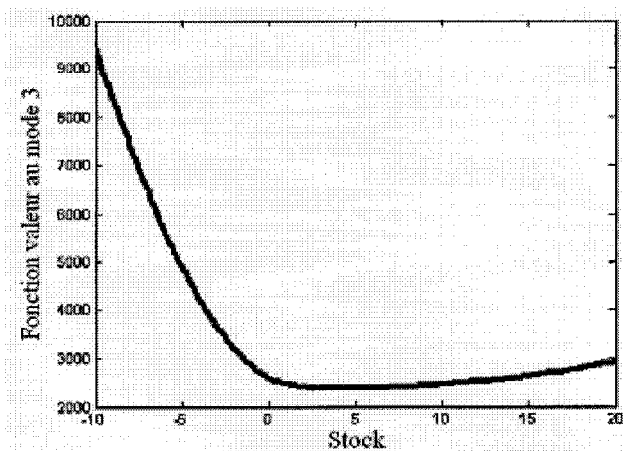


Figure 20 Fonction valeur au mode 3

La figure 20 représente la fonction valeur au mode 3, réparation de la machine.

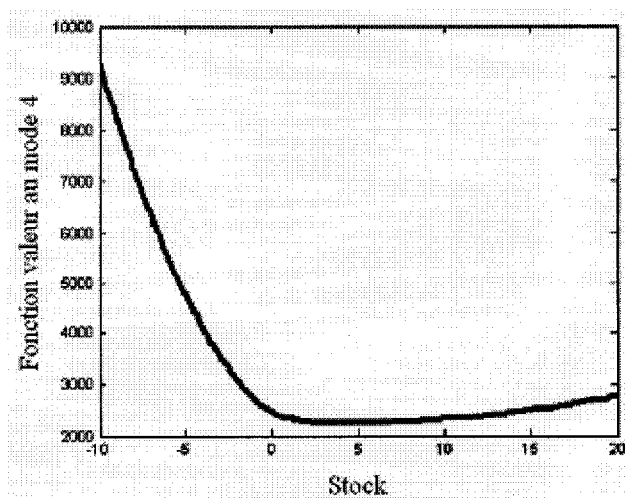


Figure 21 Fonction valeur au mode 4

La figure 21 représente la fonction valeur au mode 4, maintenance préventive de la machine.

3.4.1 Analyse des résultats

Les figures 13 et 14 montrent que la structure de la politique de production est de type seuil critique (hedging Point Policy) décrite par l'équation suivante :

$$u^*(x, \alpha) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } x(t) < x^*(\alpha) \\ d & \text{si } x(t) = x^*(\alpha) \\ 0 & \text{si } x(t) > x^*(\alpha) \end{cases} \quad (3.22)$$

Cette structure peut être décrite comme suit :

- Si la valeur du niveau d'inventaire est inférieure à la valeur du seuil critique $x^*(\alpha)$, on doit produire au taux maximal de la machine.
- Si la valeur du niveau d'inventaire est égale à la valeur du seuil critique $x^*(\alpha)$, on doit produire au taux de la demande.
- Si la valeur du niveau d'inventaire est supérieure à la valeur du seuil critique $x^*(\alpha)$, ne pas produire.

Par conséquent, le taux de production devrait toujours être mis à jour afin de maintenir un niveau d'inventaire $x^*(\alpha)$ confortable, et une fois le niveau d'inventaire confortable atteint, nous devons le maintenir. Pour cette raison, nous appellerons $x^*(\alpha)$ le niveau optimal du stock en inventaire. La figure 15, nous montre que la politique de maintenance préventive a la structure suivante :

$$\omega_p^*(x, 2) = \begin{cases} \omega_p^{\max} & \text{si } x(t) < Z^*(2) \\ \omega_p^{\min} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.23)$$

où $Z^*(2)$ représente la valeur du stock optimal au mode 2 production avec rejets, à partir de laquelle le taux d'envoi au mode 4 (maintenance préventive passe de la valeur maximale ω_p^{\max} à la valeur ω_p^{\min}). Cette politique est de type seuil critique caractérisé par $Z^*(2)$.

Les politiques de production et de maintenance préventive données respectivement par les équations (3.22) et (3.23) dépendent uniquement des seuils critiques $x^*(\alpha)$ et $Z^*(2)$ pour $\alpha = 1, 2$. La connaissance des trois paramètres $x^*(1)$, $x^*(2)$ et $Z^*(2)$ est équivalente à la connaissance de la politique optimale du contrôle de la qualité et de la planification de la production et de la maintenance préventive, d'un système de production manufacturier perturbé par des pannes.

3.4.2 Analyse de sensibilité

Dans cette section, nous présentons l'analyse de sensibilité pour valider la robustesse de notre modèle.

Tableau VII

Variation du coût de rupture de stock

c^-	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$z^*(2)$	coût
5	1.6	1.8	5	997
10	2.4	2.6	5.8	1308
20	3.2	3.4	6.6	1664
25	3.6	3.6	7	1909

Les résultats présentés au tableau 7, montrent que les seuils critiques du stock et le coût total augmentent avec l'augmentation du coût de rupture de stock. Ce résultat est réaliste, car si nous augmentons le coût de la rupture de stock, nous devons stocker plus

tout en optimisant le stock, ceci pour éviter les situations de rupture de stock et payer des pénalités élevées pour la non satisfaction de notre client.

Tableau VIII

Variation du taux de rejet

$\eta(2)$	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$z^*(2)$	coût
0.25	2.4	3.6	6.6	1348
0.4	2.6	6.2	8.8	1592
0.65	2.8	8.6	11.2	1812
0.95	3	12	14.8	2272

Les résultats présentés au tableau 8 montrent que les valeurs de seuils critiques et le coût total augmentent avec l'augmentation du taux de rejet. Nous constatons qu'au mode 1, production parfaite, le seuil critique augmente aussi avec l'augmentation du taux de rejet, ceci est tout à fait normal même si nous sommes en mode production sans rejet, car étant au mode 1, nous devons prévoir l'effet du rejet au mode 2.

Tableau IX

Variation du coût de mise en inventaire

c^+	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$z^*(2)$	coût
1	3.2	3.4	6.6	1664
5	1.2	2	4	2355
10	0.6	1.6	3.4	2636

Les résultats présentés dans le tableau 9 montrent que les valeurs du seuil critique, diminuent et le coût total augmente avec l'augmentation du coût de stockage. Les résultats obtenus sont proches de la réalité étant donné que cela nous coûte cher de

stocker, nous devons par conséquent diminuer le stock en inventaire tout en optimisant le stock.

3.5 Conclusion

Le problème de la planification de la production et de la maintenance d'un système de production manufacturier, en présence d'un mode dégradé traduit par un taux de rejet, a été formulé et résolu dans le cas d'un système de production manufacturier, constitué d'une machine traitant un seul type de pièces. Nous avons décrit la procédure de construction du problème d'optimisation stochastique, et l'approche de résolution des conditions d'optimum obtenues. À l'aide des méthodes numériques, nous avons obtenu une loi de commande sous optimale et montré qu'une telle politique est asymptotiquement optimale. Nous avons illustré l'approche et validé le concept de la commande simultanée de la production et de la maintenance préventive par un exemple. Les résultats obtenus montrent que les politiques optimales recherchées sont de type seuil critique. Le chapitre suivant traite des stratégies de production et de maintenance d'un système de production en présence des modes dégradés.

CHAPITRE 4

STRATÉGIES DE PRODUCTION ET DE MAINTENANCE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION EN PRÉSENCE DES MODES DÉGRADÉS

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter un exemple numérique des stratégies de production et de maintenance d'un système de production manufacturière, en présence des modes dégradés constitués de deux machines en parallèle traitant un seul type de pièces. Pour définir les conditions d'optimum décrites par les équations d'Hamilton Jacobi Bellman, nous allons utiliser les mêmes approches, que celles présentées dans le chapitre 3 précédant. Le reste du chapitre est organisé comme suit: dans la section 4.2 nous formulons le problème à traiter. Dans la section 4.3 nous présentons le problème de commande optimale stochastique. Dans la section 4.4, nous présentons l'approche numérique et l'analyse des résultats, nous concluons finalement le chapitre dans la section 4.5.

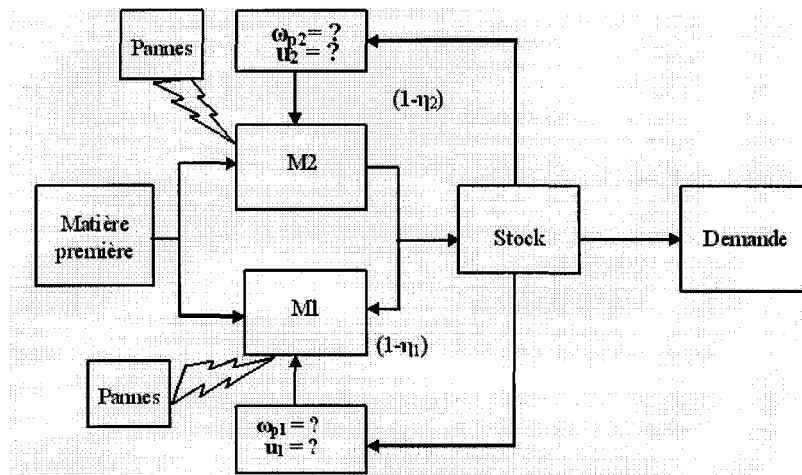


Figure 22 Structure du système de production

4.2 Formulation du problème

Soit le système illustré à la figure 20, constitué de deux machines en parallèle qui traitent un seul type de pièces. Les machines considérées sont sujettes à des pannes et réparations aléatoires. Chaque machine peut être soit en mode opérationnel parfait ou en mode opérationnel avec rejet (dégradé). Le processus de sauts $\alpha(t)$ est un vecteur dont les éléments sont des variables aléatoires $\alpha_i(t)$ prenant ses valeurs dans $B_i (i=1,2)$, dans le cas de cet exemple $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ tel que :

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} 1 - \text{opérationnel parfait} \\ 2 - \text{en réparation} \\ 3 - \text{opérationnel avec rejet} \\ 4 - \text{en maintenance préventive} \end{cases}$$

Les taux de transition $q_{\alpha\beta}(\cdot)$ du processus $\alpha(t)$ se déduisent aisément de ceux des processus $\alpha_i(t), i=1,2$, en établissant le lien entre les modes $\alpha(t)$ et ceux de $\alpha_i(t), i=1,2$, et en se référant au tableau 1 on déduit $q_{\alpha\beta}(\cdot)$, $(\alpha, \beta \in B)$ à partir de la connaissance de $q_{\alpha\beta}^i(\cdot), (\alpha', \beta' \in B_i)$ ou $q_{\alpha\beta}^i(\cdot)$ est le taux de transition du mode α' au mode β' correspondant au processus stochastique $\alpha_i(t)$. D'après le tableau 10 on peut noter que $q_{12} = q_{12}^1$, $q_{13} = q_{13}^1$, $q_{14} = q_{14}^1$, etc.

Soit $\tilde{u}(u', \omega_p')$ le vecteur de commande, où $\omega_p' = (\omega_p^1, \omega_p^2)$ le vecteur d'envois des machines M_1 et M_2 en maintenance préventive. Nous supposons que l'arrivée du technicien appelé pour la machine M_i correspond à l'arrêt de cette machine. Les ω_i , $i=1,2$ sont considérés comme étant les variables de commande et correspondent aux taux de transitions du mode opérationnel avec rejet au mode de maintenance préventive

pour chaque machine M_i . La dépendance de $\alpha(t)$ du taux d'envois en maintenance préventive est donnée par le générateur d'une chaîne de Markov contrôlé $Q(\omega_p) = q_{\alpha\beta}(\omega_p)$.

Pour que le système soit faisable, les commandes choisies doivent être telles que l'équation (4.2) soit vérifiée avec $\eta_1(\alpha)$ et $\eta_2(\alpha)$ donnés. Cette faisabilité est déterminée en fonction des probabilités limites données par l'expression suivante :

$$\pi \times \mathbf{Q}(\cdot) = 0 \text{ et } \sum_1^8 \pi_i = 1 \quad (4.1)$$

où $\pi(\cdot) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8)'$ désigne le vecteur des probabilités limites aux modes 1 à 8.

Le système est faisable si l'équation ci-dessous est satisfaite :

$$\begin{aligned} &\pi_1 \cdot (u_1 + u_2) + \pi_2 \cdot u_2 + \pi_3 \cdot (u_1 - \eta_1(3) + u_2) + \pi_4 \cdot u_1 \\ &+ \pi_5 \cdot (u_1 - \eta_1(3)) + \pi_6 \cdot (u_1 - \eta_1(3)) - d \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tableau X

Processus stochastique décrivant la dynamique des machines

α_1	1	2	3	4	2	3	4	4
α_2	1	1	1	1	2	2	2	3
α	1	2	3	4	5	6	7	8

où α_1 , α_2 , α désignent respectivement le processus stochastique, de la machine 1, de la machine 2, et du système.

4.3 Commande optimale stochastique

Nous présentons dans cette section l'ensemble des décisions admissibles, la forme du coût instantané et l'expression du critère de performance. Nous posons par la suite, le problème de commande optimale stochastique, associé au problème de la planification de la production de la maintenance du système de production manufacturier, considéré en présence des modes dégradés.

Rappelons ici que, pour un système constitué de deux machines en parallèle, qui traite un seul type de pièces, nous avons :

$$u(t) \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}, \alpha(t) \in B, \text{ notons que } u(t) = u_1(t) + u_2(t).$$

La dynamique de $x(t)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = u_1 - \eta_1(\alpha) + u_2 - \eta_2(\alpha) - d, \quad x(0) = x \quad (4.3)$$

où u_1 , $\eta_1(\alpha)$, u_2 , $\eta_2(\alpha)$, d , x sont respectivement le taux de production de la machine 1, le taux de rejet de la machine 1, le taux de production de la machine 2, le taux de rejet de la machine 2, la demande et le niveau de stock.

Soit $Q(.) = [q_{\alpha\beta}(.)]$ une matrice 8×8 définie telle que les probabilités de transition entre les différents modes sont données par :

$$P[\alpha(t + \delta t) | \alpha(t) = \alpha] = \begin{cases} q_{\alpha\beta}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 + q_{\alpha\alpha}(\cdot)\delta t + o(\delta t) & \text{si } \alpha = \beta \end{cases} \quad (4.4)$$

où $q_{\alpha\beta}$ représente le taux de transition du mode α au mode β , avec $q_{\alpha\beta} \geq 0$, $\alpha \neq \beta$,

$$q_{\alpha\alpha} = -\sum_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in B \text{ et } \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{0\delta t}{\delta t} = 0.$$

L'ensemble des décisions admissibles au mode $\alpha \in B$ peut être décrit comme suit :

$$\Gamma(\alpha) = \left\{ (U, \omega_p) = \left((u^1, \omega_p^1), \dots, (u^8, \omega_p^8) \right) \mid u^k \leq u_{\max}; \omega_p^{\min} \leq \omega_p^k \leq \omega_p^{\max} \right\} \quad (4.5)$$

où (u^k, ω_p^k) désigne la loi de commande au mode $k \in B$; ω_p^{\min} et ω_p^{\max} sont respectivement le taux d'envoi minimal et maximal de la machine en maintenance préventive. Les variables de décision du problème de commande optimale, à résoudre sont les taux de production et d'envoi de la machine en maintenance préventive. En contrôlant $\omega_p(\cdot)$, on agit sur le temps moyen d'envoi au mode maintenance préventive, ce qui se traduit par une amélioration de la disponibilité de la machine et une diminution du nombre de pièces rejetées. Pour les définitions nous référons le lecteur aux définitions 3.1 et 3.2 du chapitre 3.

Soit $g(\alpha, x, u)$ la fonction coût instantané qui permet de pénaliser l'inventaire, la pénurie et les opérations sur les machines dans chaque mode α du système : Cette fonction est définie comme suit :

$$g(\alpha, x, u) = c^+ x^+ + c^- x^- + c(\omega_p, \alpha(t)) \quad \alpha(t) = 3, 4 \quad (4.6)$$

où c^+ , c^- sont respectivement les coûts encourus par unité de pièce produite pour un inventaire et une pénurie, $x^+ = \max(0, x_1)$, $x^- = \max(-x_1, 0)$ et c une constante définie comme suit :

$$c(\omega_p, \alpha(t)) = \omega_p c_p \text{Ind}\{\alpha(t) = 4\} + c_r \text{Ind}\{\alpha(t) = 2\}$$

$$\text{avec } \text{Ind}\{P(\cdot)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } P(\cdot) \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les activités de maintenance préventive ($\alpha(t)=4$) et de réparation ($\alpha(t)=2$) sont pénalisées par c_p et c_r .

Le problème de commande optimale considéré dans cette recherche, consiste à déterminer une stratégie de production et de maintenance préventive des machines, qui minimisera le coût moyen total actualisé défini par l'équation(4.7). Ceci en contrôlant les taux de production $u(\cdot)$, et de maintenance préventive $\omega_p(\cdot)$.

$$J(x, \alpha, u) = E \left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x, \alpha, u) dt \mid x(0) = x, \alpha(0) = \alpha \right] \quad (4.7)$$

Le problème de planification de la production et de la maintenance préventive consiste à déterminer la loi de commande optimale $\{u^*(\cdot), \omega_p^*(\cdot)\} \in \Gamma(\alpha)$, $\alpha \in B$, minimisant le coût total encouru défini par l'équation (4.7).

La fonction valeur associée à ce problème d'optimisation est donnée par l'expression suivante :

$$v(x, \alpha) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(\alpha)} J(x, \alpha, u, \omega_p) \quad \forall \alpha \in B \quad (4.8)$$

Si la fonction valeur $v(x, \alpha)$ est différentiable par rapport à x , elle doit satisfaire un certain nombre de relations à l'optimum dites conditions d'optimum du problème d'optimisation stochastique posé. Nous présenterons ses relations à la section suivante en terme de propriétés de la fonction valeur.

Si $v(\alpha, x)$ est la fonction valeur associée à la loi de commande admissible $u(\cdot)$ et $\omega_p(\cdot)$ de condition initiale x et α , l'équation de la programmation dynamique associée au problème de commande optimale est donnée par l'expression suivante :

$$\rho v(\alpha, x) = \min_{(u(\cdot), \omega_p(\cdot)) \in \Gamma(\alpha)} \left[g(\alpha, x, u) + \dot{x}(t) v_x(\cdot) + \sum_{\beta \in B} q_{\alpha\beta}(\cdot) [\nu(x, \beta) - \nu(x, \alpha)] \right] \quad (4.9)$$

La loi de commande optimale ($u^*(\cdot)$ et $\omega_p^*(\cdot)$) est celle qui minimise à travers $\Gamma(\alpha)$ le terme de droite de l'équation (4.9). Lorsque la fonction valeur est disponible, une politique de commande optimale est obtenue d'après (4.9). Dans le cas de la planification de la production et de la maintenance préventive, d'un système de production manufacturier, constitué de deux machines traitant un seul type de pièces, en tenant compte du contrôle de la production, l'équation (4.9) nous donne un ensemble de huit équations aux dérivées partielles couplées suivantes :

$$\rho v(x, 1) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(1)} \left\{ \begin{aligned} &g(1, \cdot) + v_x(x, 1) \dot{x}(t) \\ &+ q_{12} [\nu(x, 2) + \nu(x, 1)] \\ &+ q_{13} [\nu(x, 3) + \nu(x, 1)] \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$\rho v(x, 2) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(2)} \left\{ \begin{aligned} &g(2, \cdot) + v_x(x, 2) \dot{x}(t) \\ &+ q_{21} [\nu(x, 1) + \nu(x, 2)] \\ &+ q_{25} [\nu(x, 5) + \nu(x, 2)] \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

$$\rho v(x, 3) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(3)} \left\{ \begin{aligned} &g(3, \cdot) + v_x(x, 3) \dot{x}(t) \\ &+ q_{32} [\nu(x, 2) + \nu(x, 3)] \\ &+ q_{34} [\nu(x, 4) + \nu(x, 3)] \\ &+ q_{36} [\nu(x, 6) + \nu(x, 3)] \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$\rho v(x, 4) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(4)} \left\{ \begin{aligned} &g(4, \cdot) + v_x(x, 4) \dot{x}(t) \\ &+ q_{41} [\nu(x, 1) + \nu(x, 4)] \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\rho v(x, 5) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(5)} \left\{ \begin{aligned} &g(5, \cdot) + v_x(x, 5) \dot{x}(t) \\ &+ q_{52} [\nu(x, 5) + \nu(x, 2)] \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\rho v(x, 6) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(6)} \left\{ \begin{array}{l} g(6, \cdot) + v_x(x, 6) \dot{x}(t) \\ + q_{63} [v(x, 3) + v(x, 6)] \\ + q_{65} [v(x, 5) + v(x, 6)] \\ + q_{67} [v(x, 7) + v(x, 6)] \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

$$\rho v(x, 7) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(7)} \left\{ \begin{array}{l} g(7, \cdot) + v_x(x, 7) \dot{x}(t) \\ + q_{74} [v(x, 4) + v(x, 7)] \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

$$\rho v(x, 8) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma(8)} \left\{ \begin{array}{l} g(8, \cdot) + v_x(x, 8) \dot{x}(t) \\ + q_{87} [v(x, 7) + v(x, 8)] \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

Pour les conditions d'optimum approximées nous référons le lecteur à la section 3 : 3 du chapitre 3 précédent.

4.4 Approche numérique

Dans cette section, nous développons les méthodes numériques pour résoudre les conditions d'optimum. Nous utilisons la même approche qu'au chapitre 3. Dans ce chapitre, nous ne reviendrons pas sur les détails. Pour plus de détails, nous referons le lecteur au chapitre 3.

Les équations de programmation dynamique discrète donnent le système de huit équations suivantes :

$$v^h(x, 1) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(1)} \left\{ r^1(x, \cdot) + \delta(1, x, \cdot) \left[\begin{array}{l} P_x^1(1) v^h(x+h, 1) \\ + P_x^1(2) v^h(x-h, 1) \\ + P^1(2) v^h(x, 2) \\ + P^1(3) v^h(x, 3) \end{array} \right] \right\} \quad (4.18)$$

$$v^h(x, 2) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(2)} \left\{ r^2(x) + \delta(2, x, \cdot) \begin{bmatrix} P_x^2(1)v^h(x+h, 2) \\ +P_x^2(2)v^h(x-h, 2) \\ +P^2(1)v^h(x, 1) \\ +P^2(5)v^h(x, 5) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.19)$$

$$v^h(x, 3) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(3)} \left\{ r^3(x) + \delta(3, x, \cdot) \begin{bmatrix} P_x^3(1)v^h(x+h, 3) \\ +P_x^3(2)v^h(x-h, 3) \\ +P^3(2)v^h(x, 2) \\ +P^3(4)v^h(x, 4) \\ +P^3(6)v^h(x, 6) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.20)$$

$$v^h(x, 4) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(4)} \left\{ r^4(x) + \delta(4, x, \cdot) \begin{bmatrix} P_x^4(1)v^h(x+h, 4) \\ +P_x^4(2)v^h(x-h, 4) \\ +P^4(1)v^h(x, 1) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.21)$$

$$v^h(x, 5) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(5)} \left\{ r^4(x) + \delta(5, x, \cdot) \begin{bmatrix} P_x^5(2)v^h(x-h, 5) \\ +P^5(2)v^h(x, 2) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.22)$$

$$v^h(x, 6) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(6)} \left\{ r^6(x) + \delta(6, x, \cdot) \begin{bmatrix} P_x^6(1)v^h(x+h, 6) \\ +P_x^6(2)v^h(x-h, 6) \\ +P^6(3)v^h(x, 3) \\ +P^6(5)v^h(x, 5) \\ +P^6(7)v^h(x, 7) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.23)$$

$$v^h(x, 7) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(7)} \left\{ r^7(x) + \delta(7, x, \cdot) \begin{bmatrix} P_x^7(2)v^h(x-h, 7) \\ +P^7(4)v^h(x, 4) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.24)$$

$$v^h(x, 8) = \min_{(u, \omega_p) \in \Gamma^h(8)} \left\{ r^8(x.) + \delta(8, x, .) \begin{bmatrix} P_x^8(1)v^h(x+h, 8) \\ + P_x^8(2)v^h(x-h, 8) \\ + P^8(7)v^h(x, 7) \end{bmatrix} \right\} \quad (4.25)$$

Avec :

$$Q_h^1 = q_{12} + q_{13} + \frac{|u_1 + u_2 - d|}{h}$$

$$Q_h^2 = q_{21} + q_{25} + \frac{|u_2 - d|}{h}$$

$$Q_h^3 = q_{32} + q_{34}(\omega_p) + q_{36} + \frac{|u_1 + u_2 - \eta(2) - d|}{h}$$

$$Q_h^4 = q_{41} + \frac{d}{h}$$

$$Q_h^5 = q_{52} + \frac{d}{h}$$

$$Q_h^6 = q_{63} + q_{35} + q_{37}(\omega_p) + \frac{|u_1 - \eta(1) - d|}{h}$$

$$Q_h^7 = q_{74} + \frac{d}{h}$$

$$Q_h^8 = q_{87} + \frac{|u_2 - \eta(2) - d|}{h}$$

$$p_1^1(1) = \begin{cases} \frac{u_1 + u_2 - d}{hQ^1(x, u)} & \text{si } u_1 + u_2 - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_1^1(2) = \begin{cases} \frac{d - u_1 - u_2}{hQ^1(x, u)} & \text{si } u_1 + u_2 - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^1(2) = \frac{q_{12}(x, u)}{Q^1(x, u)}$$

$$p^1(3) = \frac{q_{13}(x, u)}{Q^1(x, u)}$$

$$p_2^2(1) = \begin{cases} \frac{u_2 - d}{hQ^2(x, u)} & \text{si } u_2 - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_2^2(2) = \begin{cases} \frac{d - u_2}{hQ^2(x, u)} & \text{si } u_2 - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^2(1) = \frac{q_{21}(x, u)}{Q^2(x, u)}$$

$$p^2(5) = \frac{q_{25}(x, u)}{Q^2(x, u)}$$

$$p_3^3(1) = \begin{cases} \frac{u_1 - \eta(3) + u_2 - d}{hQ^3(x, u)} & \text{si } u_1 - \eta(3) + u_2 - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_3^3(2) = \begin{cases} \frac{d - u_2 - u_1 + \eta(3)}{hQ^3(x, u)} & \text{si } u_1 - \eta(3) + u_2 - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^3(2) = \frac{q_{32}(x, u)}{Q^3(x, u)}$$

$$p^3(4) = \frac{q_{34}(x, u)}{Q^3(x, u)}$$

$$p^3(6) = \frac{q_{36}(x, u)}{Q^3(x, u)}$$

$$p_4^4(1) = \begin{cases} \frac{u_2 - d}{hQ^4(x, u)} & \text{si } u_2 - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_4^4(2) = \begin{cases} \frac{d - u_2}{hQ^4(x, u)} & \text{si } u_2 - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^4(1) = \frac{q_{41}(x, u)}{Q^4(x, u)}$$

$$P_x^5(2) = \frac{d}{hQ_h^5}$$

$$p^5(2) = \frac{q_{52}(x, u)}{Q^5(x, u)}$$

$$p_6^6(1) = \begin{cases} \frac{u_1 - \eta(3) - d}{hQ^6(x, u)} & \text{si } u_1 - \eta(3) - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_6^6(2) = \begin{cases} \frac{d - u_1 - \eta(3)}{hQ^6(x, u)} & \text{si } u_1 - \eta(3) - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^6(3) = \frac{q_{63}(x, u)}{Q^6(x, u)}$$

$$p^6(5) = \frac{q_{65}(x, u)}{Q^6(x, u)}$$

$$p^6(7) = \frac{q_{67}(x, u)}{Q^6(x, u)}$$

$$P_x^7(2) = \frac{d}{hQ_h^7}$$

$$p^7(4) = \frac{q_{74}(x, u)}{Q^7(x, u)}$$

$$p_8^8(1) = \begin{cases} \frac{u_2 - \eta(3) - d}{hQ^8(x, u)} & \text{si } u_2 - \eta(3) - d \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_8^8(2) = \begin{cases} \frac{d - u_2 - \eta(3)}{hQ^8(x, u)} & \text{si } u_2 - \eta(3) - d < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p^8(7) = \frac{q_{87}(x, u)}{Q^8(x, u)}$$

Nous utilisons pour cet exemple le domaine suivant pour la variation du stock :

$$D = \{-10 \leq x \leq 100\}$$

avec $h = 0,5$, $\rho = 0,001$ (le système est choisi tel que le coût s'actualise avec un grand taux comparé à celui du chapitre 3).

Les paramètres de l'exemple numérique considéré sont présentés dans le tableau 11. La technique d'approximations successives programmée en langage Matlab (annexe 4) est utilisée pour résoudre le système d'équation (4.18) à (4.25).

Tableau XI
Paramètres de l'exemple numérique

q_{12}	q_{21}	q_{13}	q_{32}	ω_p^{\min}	ω_p^{\max}	q_{41}	d	$u_{\max 1}$	$u_{\max 2}$
0.015	0.9	0.025	0.025	0.01	0.04	0.5	1	0.64	0.64

Les données du tableau 11 assurent la faisabilité du système.

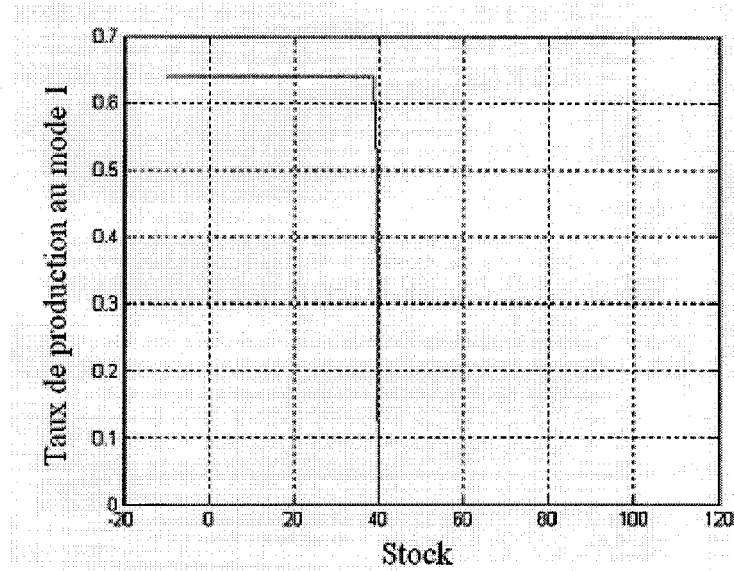


Figure 23 Taux de production de la machine 1 au mode 1

La figure 23 représente, le taux de production de la machine 1 (production parfaite) au mode 1, quand les deux machines sont en production parfaite.

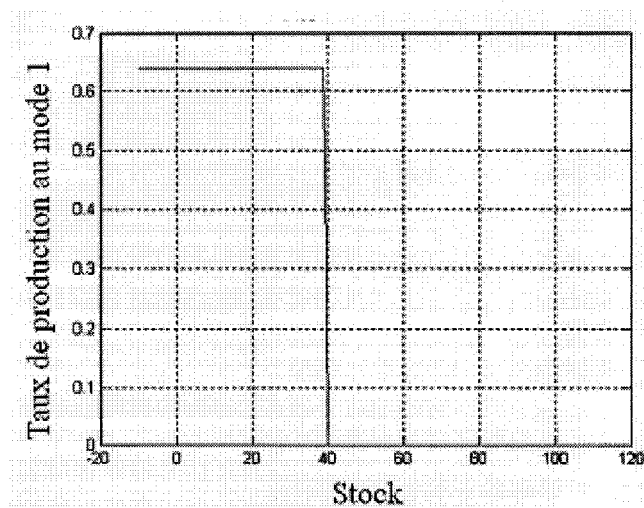


Figure 24 Taux de production de la machine 2 au mode 1

La figure 24 représente, le taux de production de la machine 2 (production parfaite) au mode 1, quand une machine est en réparation et que l'autre est en production parfaite.

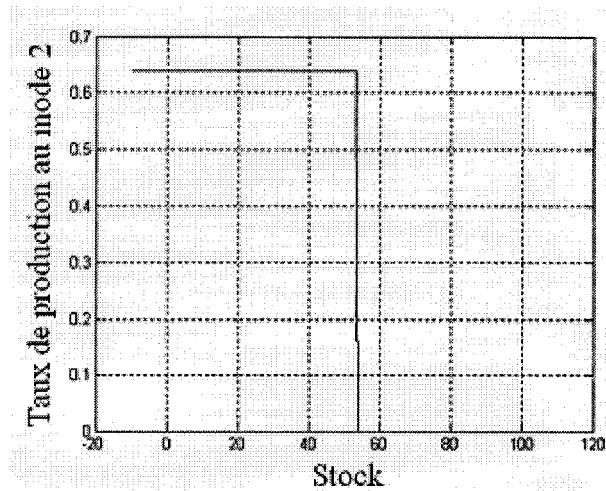


Figure 25 Taux de production de la machine 2 au mode 2

La figure 25 représente, le taux de production de la machine 2 (production parfaite) au mode 2, quand une machine est en réparation et que l'autre est en production parfaite.

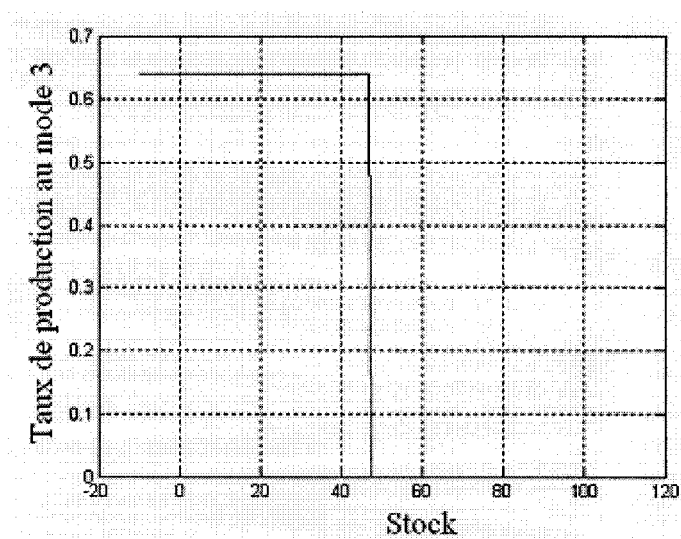


Figure 26 Taux de production de la machine 1 au mode 3

La figure 26 représente, le taux de production de la machine 1 (production avec rejet) au mode 3, quand une machine est en production parfaite et l'autre en production avec rejet.

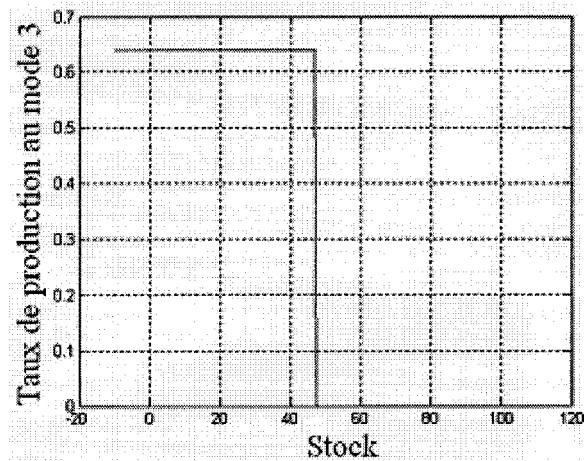


Figure 27 Taux de production de la machine 2 au mode 3

La figure 27 représente, le taux de production de la machine 2 (production parfaite) au mode 3, quand une machine est en production parfaite et l'autre en production avec rejet.

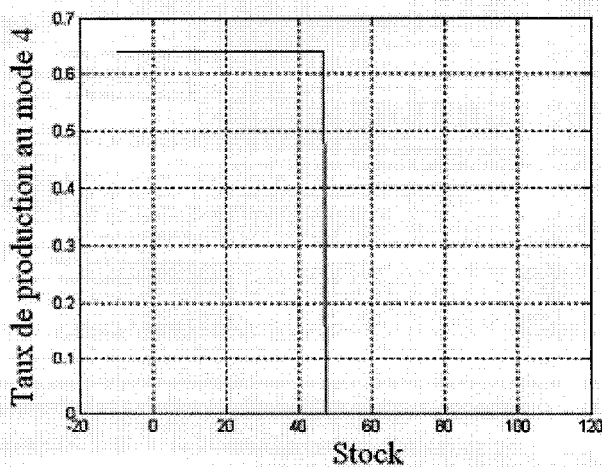


Figure 28 Taux de production de la machine 2 au mode 4

La figure 28 représente, le taux de production de la machine 2 (production parfaite) au mode 4, quand une machine est en production parfaite et l'autre en maintenance préventive.

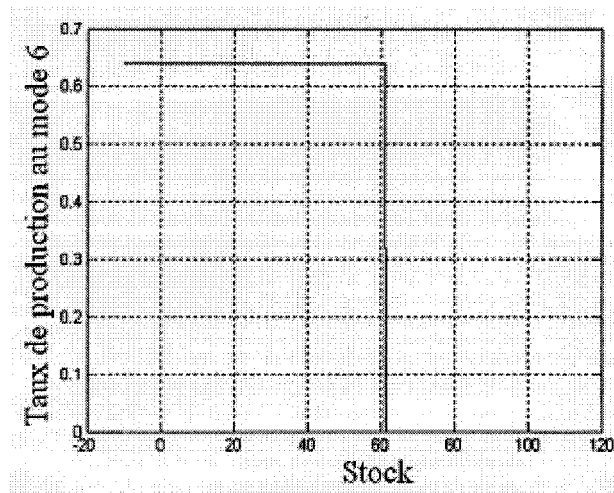


Figure 29 Taux de production de la machine 1 au mode 6

La figure 29 représente, le taux de production de la machine 1 (production avec rejet) au mode 6, quand une machine est en production rejet et l'autre en réparation.

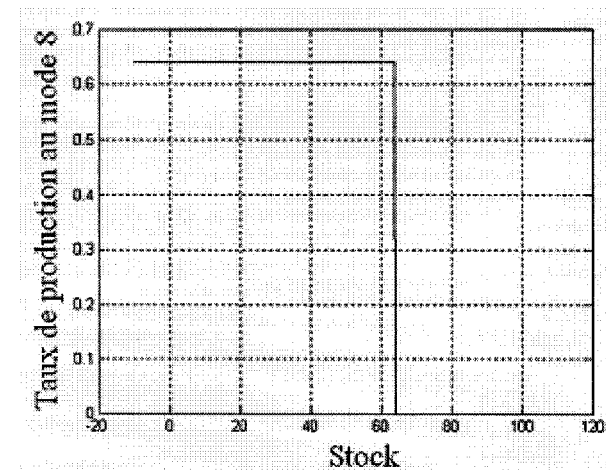


Figure 30 aux de production de la machine 2 au mode 8

La figure 30 représente, le taux de production de la machine 2 (production avec rejet) au mode 8, quand une machine est en maintenance préventive et l'autre en production avec rejet.

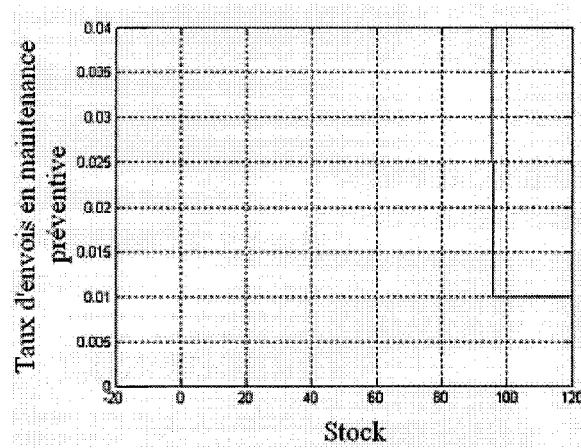


Figure 31 Taux d'envoi de la machine 1 en maintenance préventive mode 4

La figure 31 représente, le taux d'envois de la machine 1 (production avec rejet) au mode 4 maintenance préventive, quand une machine en en production avec rejet et l'autre en production parfaite.

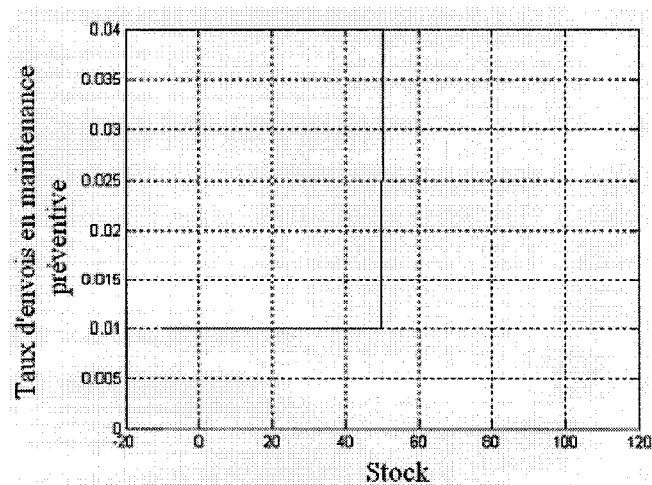


Figure 32 Taux d'envoi de la machine 1 en maintenance préventive mode 7

La figure 32 représente, le taux d'envois de la machine 1 (production avec rejet) au mode 7 maintenance préventive, quand une machine est en production avec rejet et l'autre en réparation.

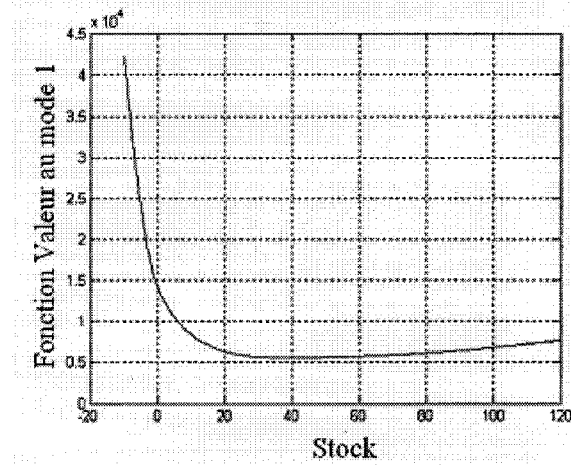


Figure 33 Fonction valeur au mode 1

La figure 33 représente, la fonction valeur au mode 1, quand les deux machines sont en production parfaite.

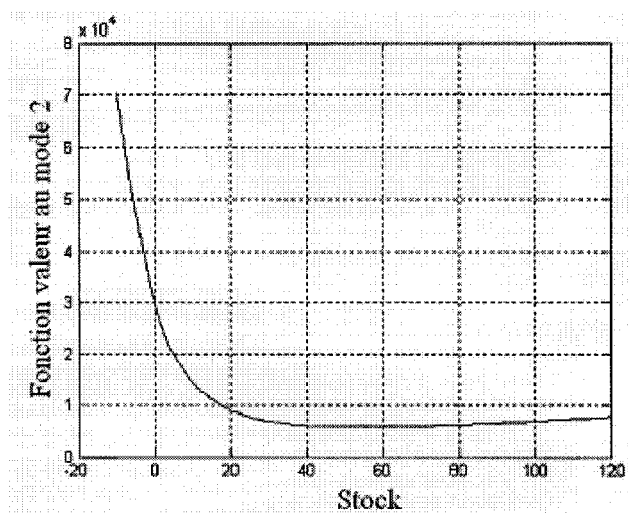


Figure 34 Fonction valeur au mode 2

La figure 34 représente, la fonction valeur au mode 2, quand une machine est en réparation et l'autre en production parfaite.

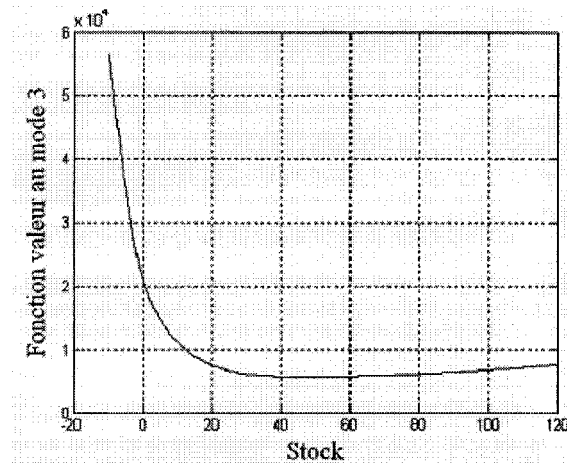


Figure 35 Fonction valeur au mode 3

La figure 35 représente, la fonction valeur au mode 3, quand une machine est en production parfaite et que l'autre machine est en production avec rejet.

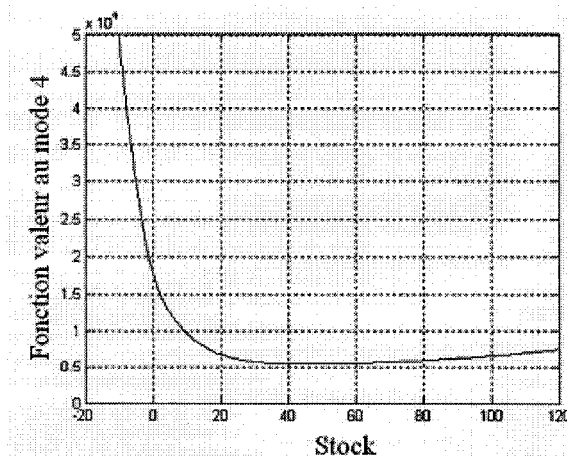


Figure 36 Fonction valeur au mode 4

La figure 36 représente, la fonction valeur au mode 4, quand une machine est en production parfaite et l'autre en maintenance préventive.

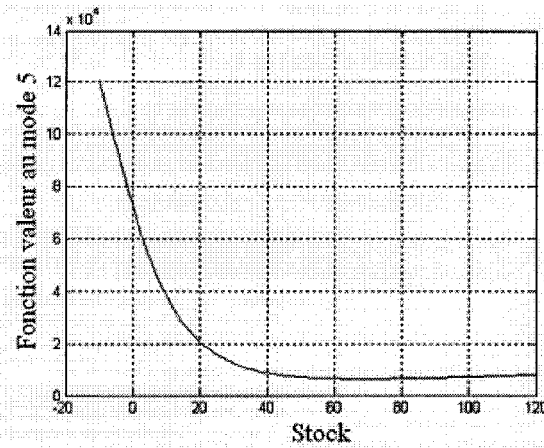


Figure 37 Fonction valeur au mode 5

La figure 37 représente la fonction valeur au mode 5, quand les deux machines sont en réparation.

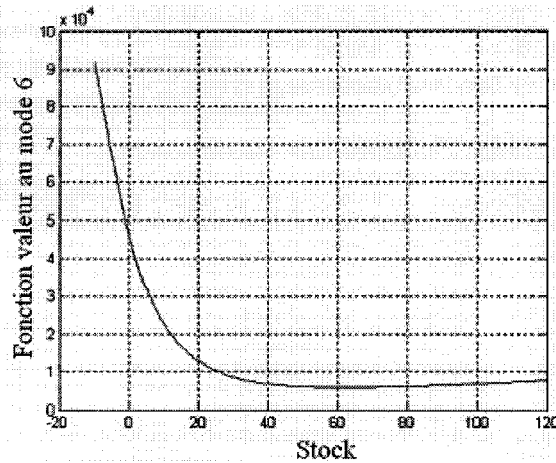


Figure 38 Fonction valeur au mode 6

La figure 38 représente, la fonction valeur au mode 6, quand une machine est en production avec rejet et l'autre en réparation.

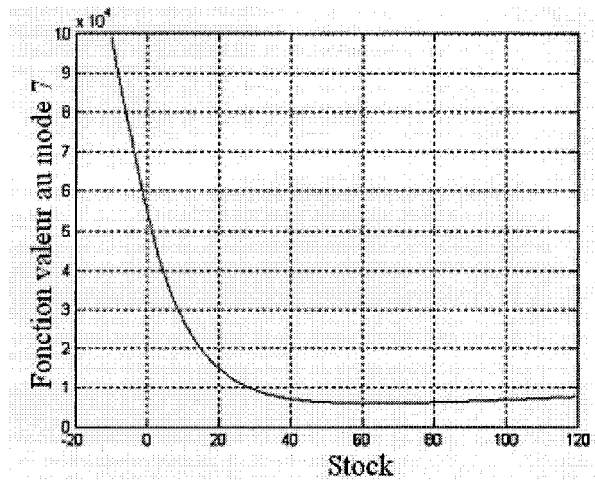


Figure 39 Fonction valeur au mode 7

La figure 39 représente, la fonction valeur au mode 7, quand une machine est en réparation et l'autre en maintenance préventive.

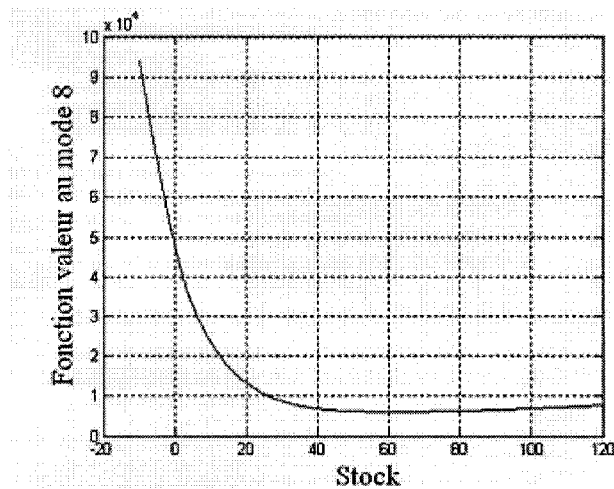


Figure 40 Fonction valeur au mode 8

La figure 40 représente, la fonction valeur au mode 8, quand une machine est en production avec rejet et l'autre en maintenance préventive.

4.5 Analyse des résultats

Les figures 23 à 30 représentent les politiques de production des machines aux différents modes de production. On remarque que les politiques obtenues à partir des méthodes numériques ont la structure suivante :

$$u_i^*(x, \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) > x^*(\alpha) \\ d & \text{si } x(t) = x^*(\alpha) \\ u_{\max} & \text{si } x(t) < x^*(\alpha) \end{cases} \quad (4.26)$$

où $x^*(\alpha)$ représente la valeur du seuil critique au mode production correspondant.

Les figures 31 et 32 représentent, les politiques de maintenance préventive des machines. La structure de cette politique est la même que celle obtenue, à l'exemple numérique d'un système de production constitué d'une machine traitant un seul type de pièces.

Nous obtenons pour la politique de maintenance préventive la structure suivante :

$$\omega_p(x, 3) = \begin{cases} \omega_p^{\max} & \text{si } x(t) < Z^*(3) \\ \omega_p^{\min} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\omega_p(x, 6) = \begin{cases} \omega_p^{\min} & \text{si } x(t) < Z^*(6) \\ \omega_p^{\max} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.28)$$

où $Z^*(3)$ et $Z^*(6)$ représentent respectivement la valeur du seuil critique au mode 3 et 6.

Nous remarquons que la politique obtenue est aussi de type seuil critique.

4.6 Analyse de sensibilité

Pour valider notre modèle nous allons faire une analyse de sensibilité. À partir des tableaux 12 et 13, nous observons que les valeurs du seuil critique et du coût total croissent dans le même sens que celles des coûts de rupture d'inventaire. La conclusion que nous pouvons tirer de cette analyse de sensibilité est la suivante: quand le coût de rupture d'inventaire augmente, il faut maintenir un niveau de stock élevé en inventaire pour éviter les situations de rupture d'inventaire. Remarquons aussi qu'en incluant la maintenance préventive dans le modèle, le coût total de production diminue considérablement par rapport au modèle sans maintenance préventive.

Tableau XII

Variation du coût de rupture d'inventaire (modèle sans maintenance préventive)

C^-	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$x^*(3)$	$x^*(5)$	Coût
10	12	25	17.5	29.5	3544
15	16,5	30.5	22.5	34.5	4060
20	20	34	26.5	38.5	4443
25	23	37	29.5	41.5	4746
30	25.5	40	32	44	4996
50	32.5	47	39	51	5707
65	36	50.5	43	55	6076
80	39	53.5	45.5	58	6369

Tableau XIII

Variation du coût de rupture de d'inventaire (modèle avec maintenance préventive)

C^-	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$x^*(3)$	$x^*(4)$	$x^*(6)$	$x^*(8)$	$Y^*(3)$	$Y^*(6)$	Coût
10	12.5	25.5	19.5	20	33.5	36	66.5	24.5	2831
15	17.5	30.5	25	25	38.5	41.5	73.5	30	3357
20	22	35	30	30	44	46	79	34	3804
25	24	37.5	31.5	31.5	45.5	48	86	35	4032
30	27	41	35	35	49	52	86	40	4367
50	35	48	42	42	56	59	91	45	5089
65	37	51	44.5	44.5	58.5	62	93.5	47.5	5365
80	40	54	47.5	47.5	61.5	64.5	96	50	5657

À partir des tableaux 14 et 15, nous observons que les valeurs du seuil critique et le coût total augmentent dans le même sens que le taux de rejet. La conclusion que nous pouvons en tirer est la suivante : quand le taux de rejet augmente, il faut produire plus car une partie des pièces produites seront rejetées, parce que n'étant pas de bonne qualité.

Il est aussi intéressant de noter que lorsque les machines sont en opération sans rejet avec l'augmentation du taux de rejet, les valeurs du seuil critique augmentent aussi. Ceci s'explique par le fait que même étant en opération sans rejet, il faut prévoir le rejet. On remarque également que le coût total du modèle sans maintenance préventive, est plus élevé par rapport au modèle avec maintenance préventive.

Tableau XIV

Variation du taux de rejet (modèle sans maintenance préventive)

$\eta(3)$	C^-	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$x^*(3)$	$x^*(5)$	Coût
0.1	65	36	50.5	43	55	6076
0.15	65	38	52	44.5	56.5	6376
0.2	65	40	53	46	58	6483

Tableau XV

Variation du taux de rejet (modèle avec maintenance préventive)

$\eta(3)$	C^-	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$x^*(3)$	$x^*(4)$	$x^*(6)$	$x^*(8)$	$Y^*(3)$	$Y^*(6)$	Coût
0.1	65	37	51	44.5	44.5	58.5	62	93.5	47	5365
0.15	65	38.5	51.5	46	46	60	63	87	47.5	5471
0.2	65	40	52.5	47.5	47.5	61.5	64	84	47.5	5592

À partir du tableau 16, nous observons que l'augmentation du coût de maintenance préventive affecte moins les valeurs du seuil critique quand les machines fonctionnent en mode production; elle influence la valeur du seuil critique pour l'envoi des machines en maintenance préventive au mode 3. La conclusion qu'on peut tirer est la suivante: quand le coût de maintenance préventive augmente, il faut envoyer les machines en maintenance préventive au taux minimal. Ce résultat est plausible car s'il nous coûte cher de faire la maintenance, la politique optimale nous demande de la faire au taux minimal.

Tableau XVI

Variation du coût de maintenance préventive (modèle avec maintenance préventive)

$\eta(3)$	C^-	C_p	$x^*(1)$	$x^*(2)$	$x^*(3)$	$x^*(4)$	$x^*(6)$	$x^*(8)$	$Y^*(3)$	$Y^*(6)$	Coût
0.1	50	1000	33.5	47.5	40	41	54	68.5	14	∞	5397
0.1	50	10000	34	47.5	41	41	54	∞	∞	∞	8272
0.1	50	20000	34	47.5	41	41	54.5	∞	∞	∞	1143

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé le problème des stratégies de production et de maintenance, d'un système de production manufacturier, constitué de deux machines traitant un seul type de pièces, en présence des modes dégradés.

Nous avons décrit la procédure de construction du problème d'optimisation stochastique et l'approche de résolution des conditions d'optimum obtenues. À l'aide des méthodes numériques, nous avons obtenu la loi de commande optimale. Nous avons illustré l'approche proposée et validé le concept de contrôle de la qualité et de la planification de la production à l'aide de deux exemples numériques. Les résultats obtenus montrent que les politiques optimales recherchées sont des extensions de la politique à seuil critique.

Le modèle avec le contrôle de la maintenance préventive à une politique de production meilleur par rapport au modèle sans maintenance préventive. Vu la non fiabilité des machines, le modèle avec maintenance préventive augmente la disponibilité des machines, tout en diminuant le taux de rejet.

CHAPITRE 5

EXTENSION AUX SYSTÈMES DE LARGES DIMENSIONS

5.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, la simulation a connu un regain d'intérêt grâce, à la performance des ordinateurs, au développement de langages de simulation plus flexibles et à des progiciels offrant des interfaces conviviales autant pour la modélisation, la visualisation que pour l'analyse des résultats de la simulation. Des efforts importants ont également été déployés pour raffiner les plans d'expérience en vue de réduire l'écart entre une stratégie optimale et celle obtenue par des méthodes basés sur la simulation. Il est à noter que la maîtrise d'un langage de simulation permet de contourner certaines limitations des logiciels commerciaux de simulation notamment au niveau de la modélisation.

Dans la mesure où l'on simplifie suffisamment le fonctionnement du système considéré et sous certaines hypothèses, on peut avoir des équations permettant d'obtenir les performances désirées. Si l'on ne peut pas élaborer ces équations ou si l'on ne peut pas les résoudre à cause de la complexité du modèle, il ne reste plus alors qu'à recourir à la simulation (Leroudier (1980)). Ceci implique qu'il ne faudrait opter pour la simulation qu'en dernier recours. Cette approche nous permet de traiter les systèmes complexes qui ne peuvent être résolus de manière analytique (trop de simplifications), approche purement théorique, et donc, tout à fait à l'opposé de l'approche de simulation. De toute façon, il est souvent très coûteux, dangereux et souvent impossible de faire des expériences avec des systèmes réels, et ce, particulièrement dans l'industrie manufacturière (Harsham (2002)). L'approche de simulation donne plus de flexibilité, et convient mieux à ce genre de problèmes complexes. Les premiers simulateurs ont été inventés pour la formation des pilotes d'avion, à moindre risque et à moindre coût. Ce concept a progressivement séduit d'autres secteurs, l'industrie pétrolière faisant figure

de pionnier dans ce domaine (Nikiforov (1999)). On retrouve aussi la simulation pour l'analyse de modèles économiques afin de prévoir par exemple le cours du blé, la modélisation des (collisions) sur les voitures, ou encore la simulation CAO/Robotique pour calculer la trajectoire des robots (Riat (1992)).

Dans le présent chapitre, nous nous intéresserons plutôt à la simulation des systèmes de production de larges dimensions (complexes).

5.2 Simulation

Simuler vient du mot latin (simular) qui veut dire faire paraître comme réelle une chose qui ne l'est pas.

La simulation consiste en une construction artificielle de l'état du système, de son comportement, et une analyse des résultats. L'utilisation de la simulation réclame l'exécution de certaines étapes (Mouise (1984)).

Dans un premier temps, il s'agit de transformer un système concret en une abstraction, à travers un langage et des scénarios donnés. Transformer, par la suite, cette représentation abstraite en une maquette (un modèle réduit) par le biais de règles de codification. Utiliser des scénarios pour lesquels on observe le fonctionnement de la maquette et on le compare, soit au fonctionnement observé dans le système réel, soit à celui que l'on souhaite obtenir. Procéder à une animation informatique de ce modèle, selon le plan d'expérience déjà codé par l'utilisateur. Finalement, critiquer le système.

La démarche de la simulation nous permet de répondre mieux à certains besoins fondamentaux de l'industrie : la conception de stratégies de commande, la conception des unités nouvelles, la formation et l'entraînement des opérateurs, etc. (Nikiforov (1999)). Cependant, il y a divers types de simulation (discrète, continue, hybride) qui ont chacun ses propres caractéristiques, et qui sont, donc, utilisées pour des objectifs bien particuliers.

5.3 Dynamique du système, simulations discrètes et continues

Pour Analyser les systèmes de production manufacturière complexe on fait recours à la simulation. Une approche qui avait vu le jour, il y a environ 50 ans, puis développée dans les années 60, a été destinée à cet effet. A son apparition, la cybernétique a été utilisée de façon régulière dans toutes les sciences de l'ingénieur, elle facilite, en fait l'analyse des systèmes bouclés. À partir de cette science, (J. Forrester (1961)) a développé une démarche permettant d'analyser le changement et l'évolution des systèmes complexes : la dynamique des systèmes complexes. La complexité d'un système ne réside pas dans le nombre de variables qui le caractérisent, mais plutôt, dans les interconnexions qui existent entre elles, et par la suite, des influences mutuelles. Ces influences peuvent être représentées par des boucles de rétroaction : les variables interconnectées jouent le rôle à la fois de cause et d'effet. Mais, si en plus de cette complexité spatiale vient s'ajouter le temps, on devra alors tenir compte de l'évolution du système, c'est-à-dire de sa dynamique. Toutefois, si nous avons l'intention de bien analyser le système et de ne rien laisser au hasard, bref de nous rapprocher le plus possible de la réalité afin de pouvoir le maîtriser, nous devons faire attention au comportement temporel incertain (systèmes chaotiques, bifurcations), quasiment imprévisible. Afin d'analyser ce genre de systèmes, l'analyse mathématique est déconseillée (elle est trop difficile), par contre nous pouvons nous référer à la dynamique des systèmes qui nous fournit une démarche s'appuyant sur la science des systèmes asservis et la simulation sur ordinateurs. Ces outils nous permettent non seulement d'analyser l'effet des boucles de rétroaction, mais aussi de prévoir les comportements dynamiques des systèmes en question et de suggérer des modifications possibles sans pour autant être obligé de faire des expérimentations souvent difficiles à réaliser ou nécessitant un temps d'exécution assez long (Karsky (2002)). La dynamique des systèmes complexes est la science du changement et de l'évolution, ceci implique le fait que l'avancement du système dans le temps s'effectue suivant de petits pas : nous désirons analyser et comprendre l'état du système à chaque instant, c'est pourquoi nous

adoptons une approche continue, ce qui implique l'utilisation de techniques de simulation continue.

Cette approche nous permet de traiter le système d'une manière globale et agrégée. Nous n'entrons pas dans les détails du système. On considère, en fait, une vue macroscopique du système qui est suffisamment complexe même à cette échelle pour en rajouter les détails. Ce qui n'est pas le cas de l'approche discrète qui se situe, alors, tout à fait à l'opposé.

La simulation discrète, ou encore simulation à événements discrets, permet de visualiser le système en tant qu'unités discrètes (exemple, pièces à traiter dans un atelier) qui se déplacent d'un point à un autre du système tout en se concurrençant pour l'utilisation des ressources rares. L'état d'un modèle change seulement en un ensemble de points discrets du temps (Brunner (2001)), c'est-à-dire que les changements d'état interviennent de manière ponctuelle dans le temps. Chaque changement d'état représente un événement, qui consiste en un changement dans le temps des variables d'entrée et de sortie nécessaires à la description du système. Ces variables sont discrètes et souvent stochastiques (Leroudier (1980)). A chaque fois qu'on avance dans le temps, la simulation met en évidence les différents événements. On distingue, alors deux sortes d'événements: les événements exogènes imposés par l'extérieur (par exemple, l'arrivée des travaux), et les événements endogènes (conséquences des changements d'état du système) (Bel (2001)). Entre deux événements successifs, l'état du système reste constant. L'instant auquel l'événement se produit, est appelé date d'occurrence de l'événement. Par ailleurs, les actions qui durent dans le temps, et qui sont délimitées par des événements, sont dites activités. Le moteur de recherche le plus classique dans ce domaine consiste à faire avancer le temps par sauts d'événement en événement, c'est-à-dire que les seuls temps accessibles lors de la simulation sont les dates d'événements, et l'incréméntation du temps se fait d'une date à l'autre. Une simulation discrète ayant cette manière de gérer le temps, est appelée simulation « dirigée par événements »

(Leroudier (1980)). À chaque instant, on maintient une liste linéaire d'évènements prévus avec leur date d'occurrence correspondante. Ce calendrier d'évènements est appelé « échéancier ». Elle est soumise à une relation d'ordre qui est l'occurrence chronologique. La tête de la liste est constituée par l'événement en cours de déroulement, et la fin de la liste par l'événement le plus éloigné dans le temps.

Chaque phase de résolution consiste à chercher dans l'échéancier, l'événement qui a la plus petite date prévisionnelle d'occurrence. On sait qu'il n'y aura pas de changements d'état entre la date courante et cette date. Il s'agit, donc, de rechercher cette date, et d'avancer le temps de la simulation jusqu'à celle-ci. Ceci va entraîner la modification de l'état du système, et engendrer, éventuellement, la prévision de la date d'occurrence de certains évènements. A chaque opération, l'échéancier est remis à jour. Lorsqu'on a fini de traiter un événement, on cherche à nouveau dans l'échéancier, l'événement qui a la plus petite date d'occurrence, et on fait avancer le temps courant de la simulation à cette date là (Bel (2001)). Il faut remarquer qu'à part l'événement courant, tous les évènements qui lui succèdent sont potentiels, car leur apparition et leur rang, si jamais ils vont être exécutés, dépendent des traitements des évènements antérieurs (Leroudier (1980)). La fin de la simulation correspond soit au fait d'atteindre une date limite que l'on s'est déjà fixée, soit au fait que l'échéancier soit vide.

Un second type de moteur de simulation consiste à faire avancer le temps par petits incréments, et, à chaque incrément, à explorer la liste des évènements pour voir si l'un d'eux apparaît à cette date, pour cela, il s'agit plus exactement de vérifier, à chaque fois, si les conditions sont remplies pour qu'un événement ait lieu. Ce type de simulation est dit « dirigé par une horloge ». L'unité de temps choisie doit être appropriée au problème, ceci nous oblige des fois à utiliser un incrément de temps de très faible valeur, ce qui s'avère négatif vu que le taux d'échec de recherche d'évènements sera élevé, et ceci aura des retombées sur le temps du calcul, surtout qu'à chaque incrémentation, le moteur de simulation doit tester si les conditions de déclenchement de chaque événement sont

remplies. Le problème de la détermination des dates des différents événements, est ainsi résolu de façon séquentielle. On connaît, donc, les dates de changements d'état compte tenu des logiques de changements d'état qu'on a associés aux différents événements, et notamment des éventuelles règles de priorité qui ont été utilisées pour faire le choix entre les travaux en attente (Bel (2001)).

Cette présentation de la simulation discrète, nous permet de tirer certaines remarques quant au fait des applications auxquelles elle est destinée : cette approche fournit une analyse détaillée qui convient plus aux sous-systèmes. En effet, c'est à une échelle microscopique du système qu'on se réfère lorsqu'on a recours à cette approche, étant donné que la simulation discrète nécessite un temps d'exécution assez important (heures ou même des jours par exemple pour les grands réseaux avec des trafics importants), et que pour bien analyser un système, il nous faut élaborer plusieurs scénarios. Il vaut mieux, alors, éviter cette approche pour l'analyse de grands systèmes (système de production manufacturière), et adopter plutôt une approche continue qui comme on l'a déjà expliqué, permet d'avoir une vue globale, générique du système. Ceci nous permet de dire que la simulation continue convient à l'analyse stratégique.

Par conséquent, suivant l'intérêt du modélisateur, et donc de l'application qu'il doit traiter, il peut emprunter l'une des deux approches. Toutefois, ces deux outils peuvent s'avérer complémentaires puisque si on regarde un système « d'en haut » (vue générique), on arrive à identifier grâce à la simulation continue, les secteurs qui ont besoin d'analyse plus détaillée. À ce moment, on a recours à la simulation à événements discrets pour analyser les centres d'intérêts spécifiques (Harsham (2002)).

Par ailleurs, la sensibilité d'analyse des deux types de simulation n'est pas le seul point de différences, le second est la nature des paramètres du système. Dans le cas de la simulation à événements discrets, les variables, comme on l'avait déjà précisé dans un précédent paragraphe, sont souvent aléatoires puisque les variables d'entrée prennent en

compte l'environnement, alors que dans l'approche dynamique des systèmes, on emploie plutôt des variables déterministes, vu qu'on a déjà à faire avec des systèmes bouclés, non linéaires, par la suite, l'adjonction d'aléas rendrait le problème très difficile à traiter et incompréhensible (Harsham (2002)).

La dynamique des systèmes complexes nous permet d'éviter des actions inutiles ou contre-productives. Toutefois, sans la simulation, ce concept de rétroactions ne sert pas à grande chose, le problème reste toujours aussi complexe.

Dans la réalité, les relations d'influence comportent presque toujours des délais qui représentent la non instantanéité des relations de cause à effet. Il y a toujours un temps de réaction, correspondant en général à un délai de prise en compte des réalités et des informations correspondantes (Karsky (2002)). Les rétroactions ne sont donc jamais instantanées, et rarement rapides. Alors qu'en est-il d'un système complexe comportant plusieurs boucles imbriquées ? Il est clair que les résultats ne seront palpables qu'après un processus décisionnel plus ou moins long. La combinaison des retards (non simultanéité d'événements) dans une structure complexe n'est pas évidente à comprendre, seule une simulation permet effectivement de s'en rendre compte.

La dynamique des systèmes comporte deux parties principales : la première consiste en la mise en évidence des variables qui paraissent à première vue importantes. Ces variables, seront par la suite, reliées entre elles par un ensemble de relations d'influence. La seconde partie traite de la modélisation quantitative. A cette étape, on définit les équations différentielles qui peuvent représenter la dynamique d'un système. Ensuite, on introduit la notion du temps afin de pouvoir tester le modèle, et enfin analyser son comportement par simulation (Karsky (2002)). L'outil de la simulation peut être considéré comme étant une aide à la formulation des relations du modèle, permettant de tester rapidement la validité de telle ou telle formulation dès le début de la phase de modélisation. Cette validation sera souvent beaucoup plus facile et rapide qu'une vérification théorique et abstraite des formulations mathématiques proposées.

5.4 Formulation du problème

Vu la complexité des équations d'HJB, l'objectif de ce chapitre n'est pas de résoudre analytiquement ces équations mais de déterminer expérimentalement les paramètres des seuils critiques qui nous donneront une bonne approximation de la fonction valeur. Pour le système étudié précédemment en ce qui concerne une machine traitant un seul type de pièces, la loi de commande est décrite par les équations (3.21) et (3.24) qui dépendent des deux paramètres reliés au produit (i.e $x^*(1)$, $x^*(2)$) et d'un paramètre relié à la machine (i.e $z^*(2)$). Pour les systèmes de production manufacturière plus complexe composé de m machines traitant un type de pièces, la loi de commande est décrite par 9 paramètres (7 pour le produit et 2 pour les machines). Pour des tels systèmes, la résolution numérique des équations d'HJB devient très difficile étant donné que la taille du problème d'optimisation croît de façon importante avec le nombre de machines considérées. En mettant plusieurs machines en parallèle le but est d'augmenter la capacité de production du système. Nous prenons pour hypothèse que nous aurons toujours $m-1$ machines en opération parfaite et en opération dégradée et on ne pourra forcer une machine à aller en maintenance préventive si et seulement si nous avons au moins $m-1$ machines qui resteront en opération. Pour les systèmes plus larges constitués de plusieurs machines traitant un seul type de pièces, la loi de commande se décrit comme suit :

- Pour $m \geq 3$, la loi de commande est décrite comme suit :

$$\begin{cases} 7 & \text{facteurs en } X^*(.) \text{ pour la stratégie de production} \\ 2 & \text{facteurs en } Y^*(.) \text{ pour la stratégie de maintenance préventive} \end{cases}$$

Dans ces conditions une approche combinée utilisant la théorie de commande, la simulation, les plans d'expériences et la méthodologie de surface de réponse peut être utilisée. Nous référons le lecteur aux travaux de (Kenné et Gharbi (1999)) et de (Gharbi et Kenne (2000)). Les principales étapes d'une telle approche sont présentées dans schéma bloc de la figure 39.

Ces étapes se définissent comme suit :

- le problème de commande optimale stochastique à résoudre est décrit par le bloc (Machine ($u^*(.), \omega_p^*(.) = .$)) dont l'objectif global est de trouver les paramètres optimaux des politiques décrites par les équations (3.23) et (3.24); et (4.26, 4.27, 4.28);
- dans le bloc « formulation du problème » de l'approche présentée dans le schéma bloc de la figure 39, la théorie de commande est utilisée pour formuler le problème de commande optimale stochastique à résoudre;
- dans le bloc « Approche analytique » en utilisant une approche analytique basée sur les processus de sauts Markoviens, on montre que les conditions d'optimum sont décrites par les équations d'HJB. Une résolution de ces équations permet de montrer que les politiques de production et de maintenance sont de type seuil critique caractérisées par les paramètres $x^*(1)$, $x^*(2)$ et $z^*(2)$ pour les pièces et pour chaque machine. Ces paramètres constituent les variables d'entrée du simulateur;
- le but du bloc modèle de simulation est de simuler la dynamique du système pour la loi de commande correspondant à chaque combinaison des paramètres d'entrée et d'évaluer le coût total encouru (qui est la sortie du simulateur ou réponse) pour plus de détails, voir Kenne et al. (1999) et Pristsker et al. (1997);
- le bloc « Plans d'expériences » détermine, à partir des valeurs des paramètres d'entrées et des valeurs associées du coût encouru, les paramètres d'entrée et leur interactions ayant un effet significatif sur la sortie. Pour plus de détails sur les plans d'expérience, nous referons le lecteur aux travaux de Kenne et al. (2003);

- les facteurs ou interactions significatifs sont par la suite considérés comme entrée du bloc « Analyse de régression » qui est utilisé, avec la méthodologie de surface réponse (voir bloc « surface de réponse ») pour définir la relation entre le coût encouru et les paramètres ou facteurs d'entrée. Les valeurs optimales des facteurs d'entrée, désignées par: $x^*(1)$, $x^*(2)$, $z^*(2)$, sont déterminées à partir de la relation établie entre le coût et les facteurs d'entrée. Les politiques à seuil critique suivantes : $u(x^*(1))$, $u(x^*(2))$, $\omega_p(z^*(2))$, constituent une approximation de la politique optimale de commande.

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(x, \alpha) = (u^*(x, \alpha), \omega_p^*(x, \alpha)).$$

L'application de l'approche présentée à la figure 1 permet de déterminer une telle approximation pour des systèmes de production plus larges, constitués de plusieurs machines traitant plusieurs types de pièces.

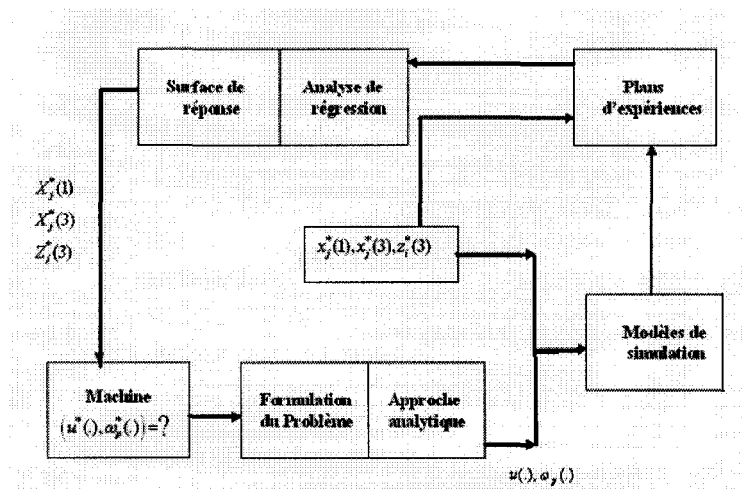


Figure 41 Structure de l'approche proposée

Pour ces types de systèmes (large), nous référons le lecteur aux travaux de Kenne et al. (2003) qui présentent la démarche à suivre dans ces conditions.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté deux types de simulations, discrète et continue, et nous avons essayé par la même occasion de les comparer afin de bien mettre en évidence que chacune de ces simulations recouvre un champ d'application bien spécifique. Nous avons présenté les plans d'expériences. Pour les systèmes de production manufacturiers plus larges, il sera intéressant d'utiliser l'approche de commande combinée intégrant la théorie de commande, la simulation, les plans d'expériences et la méthodologie des surfaces de réponse.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons dans ce mémoire travaillé sur la commande optimale stochastique des systèmes de production manufacturière. La nature stochastique du système découle du fait que les machines sont sujettes à des pannes et à des réparations aléatoires.

Nous avons traité un problème de commande optimale stochastique d'un système de production constitué d'une machine traitant un seul type de pièce. L'introduction du contrôle simultané de la maintenance préventive et corrective améliore la disponibilité de la machine et réduit considérablement les coûts d'opérations par rapport aux modèles avec maintenance préventive (sans contrôle de la maintenance corrective) lorsque les politiques de production et de maintenance sont optimales. Une approche de modélisation basée sur la théorie de commande stochastique et un algorithme de résolution numérique des conditions d'optimum obtenus a été présenté. Un exemple numérique et une analyse de sensibilité ont été présentés afin d'illustrer la validité de l'approche proposée.

Nous avons par la suite présentée l'analyse du problème de commande optimale stochastique d'un système de production soumis à des pannes aléatoires et à la dégradation de la machine. Le système est constitué d'une machine traitant un seul type de pièces. L'introduction d'un mode opérationnel avec rejet (dégradation de la machine) et d'une politique de maintenance préventive, améliore la disponibilité de la machine et réduit considérablement le nombre des pièces rejetées et les coûts d'opérations, par rapport au modèle (classique sans maintenance préventive) lorsque les politiques de production et de maintenance sont optimales. L'objectif de l'étude dans ce cas est de déterminer les politiques optimales de production et de maintenance qui minimisent le coût total: incluant les coûts de mise en inventaire, de rupture d'inventaire, de réparation et de maintenance préventive. Une approche de modélisation basée sur la théorie de commande stochastique et un algorithme de résolution numérique des conditions

d'optimum ont été également présentés. La contribution de l'étude a été également illustrée par un exemple numérique.

Nous avons présenté une extension du modèle proposé précédemment à travers un exemple numérique d'un système de production constitué de deux machines traitant un seul type de pièces en présence des modes dégradés. Une extension aux systèmes de larges dimensions constitués de plusieurs machines traitant seul type de pièces a été finalement présentée.

Les résultats des travaux effectués dans le cadre de ce mémoire ont fait l'objet de deux articles de conférences (Nkeungoue et Kenne (2004), Nkeungoué et Kenné (2005)) et d'un article de revue (Kenne et Nkeungoue (2004)).

A la suite de ces travaux, nous suggérons, pour les systèmes plus larges constitués de plusieurs machines traitant plusieurs types de pièces en présence des modes dégradés l'utilisation de la méthode expérimentale pour déterminer les paramètres de la loi de commande. La détermination des paramètres de la loi de commande expérimentalement, en utilisant les plans d'expérience et la simulation ouvrira de nouveaux axes de recherche pour l'avenir.

ANNEXE I

**Programme principal Matlab (cas d'une machine - un type de pièce avec
maintenance préventive et corrective avec âge**

```

Ku=1;

Kt=.000005;

Ko=0.01;      % pente de la fonction de vieillissement de la machine

K=0.0001;

cp= 1;        % penalise le stock positif

cm=50;        % penalise le stock negatif

cmp= 20;      % penalise la maintenance préventive

crr= 10000;   % penalise la maintenance corrective

Um= 1;        % taux de production max

d= .9;        % taux de demande

q21_min = 0.05; % taux de reparation des pannes minimale

q21_max = 0.075;% taux de reparation des pannes minimale

q13_min = 0.00001 ;% taux de maintenance préventive minimale

q13_max = 0.06 ; % taux de maintenance préventive maximale

q31 = 0.2 ;    % taux de retour en maintenance preventive, réparation

rho = 0.0105;  % taux d'actualisation

hx1=2;        % pas sur l'age

hx2=2;        % pas sur le stock

x1sup= 100;   % maximum sur l'age
x1inf= 0;     % minimum sur l'age
x2sup=100;    % maximum sur le stock

x2inf= -10;   % minimum sur le stock

Nx1=1+(x1sup-x1inf)/hx1; % nombre de points sur la grille de l'age

```



```

Nx2=1+(x2sup-x2inf)/hx2;    % nombre de points sur la grille du stock

Vp1=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise les valeurs présentes, pour tout x2 et x1 E

Mode 1

Vp2=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise les valeurs présentes, pour tout x2 et x1 E G
Mode 2

Vp3=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise les valeurs présentes, pour tout x2 et x1 E G,

Mode 3

Va1=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise la matrice des valeurs actuelle, pour tout x2 et
x1 E G, Mode 1

Va2=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise la matrice des valeurs actuelle, pour tout x2 et
x1 E G, Mode 2

Va3=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise la matrice des valeurs actuelle, pour tout x2 et
x1 E G, Mode 3

u11=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise la matrice des taux de production

ur11=zeros(Nx2,Nx1);

u22=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise la matrice des taux de reparation

ur22=zeros(Nx2,Nx1);

u33=zeros(Nx2,Nx1);        % initialise la matrice des taux de maintenance
préventives
ur33=zeros(Nx2,Nx1);

X2_op=0;
UU1(1)=0;

UU1(2)=d;

UU1(3)=Um;

```

```

UU2(1)=q21_min;
UU2(2)=q21_min;
UU3(1)=q13_min;
UU3(2)=q13_max;
Z1_op=[];
Z2_op=[];
xx2=[];
xx1=[];
it=0;
Err=10e+10;
it_max=100;
precis=0.0001;
while (Err > precis)
it=it+1;
tic
C1MIN=5e+5;
C1MAX=0;
for j=1:Nx1
    x1=x1inf+(j-1)*hx1;

    xx1(j)=x1;

for i=1:Nx2
    x2=x2inf+(i-1)*hx2;

    xx2(i)=x2;

    fu=Ku*u11(i,j);

```

$q12=(K+Ko*(1-\exp(-Kt*xx1(j)^3)));$

[Vx1 Vx2
Vx3]=cout222(Nx2,Nx1,i,j,x2,x1,Vp1,Vp2,Vp3,u11(i,j),u33(i,j),cmp,cm,cp,cr,d,q12,u2
2(i,j),q31,hx2,hx1,rho,fu);

Va1(i,j)=Vx1;

Va2(i,j)=Vx2;

Va3(i,j)=Vx3;

if (abs(Va1(i,j) - Vp1(i,j)) > C1MAX)

C1MAX=abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j));

end

if (abs(Va1(i,j)-Vp1(i,j)) < C1MIN)

C1MIN=abs(Va1(i,j) - Vp1(i,j));

end

if (abs(Va2(i,j) - Vp2(i,j)) > C1MAX)

C1MAX=abs(Va2(i,j) - Vp2(i,j));

end

if (abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j)) < C1MIN)

C1MIN=abs(Va2(i,j)-Vp2(i,j));

end

if (abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j)) > C1MAX)

C1MAX=abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j));

end

if (abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j)) < C1MIN)

C1MIN=abs(Va3(i,j)-Vp3(i,j));

end

```

        end % for j

    end % for i

    Vmin = (rho/(1-rho))*C1MIN;

    Vmax = (rho/(1-rho))*C1MAX;

    Err = abs(Vmin-Vmax)

    Vp1=Va1;

    Vp2=Va2;

    Vp3=Va3;

    % policy improvement

    V1_op = 5e+10;

    V2_op = 5e+10;

    for j=1:Nx1 % age
        x1=x1inf+(j-1)*hx1;
        xx1(j)=x1;

    for i=1:Nx2 % stock

        x2=x2inf+(i-1)*hx2;
        xx2(i)=x2;

        q12= (K+ Ko*(1-exp(-Kt*xx1(j)^3)));

        VPM1=5e+10;

        VPM2=5e+10;

        VPM3=5e+10;
        for c1=1:3

            ur11(i,j)=UU1(c1);

            fu=Ku*ur11(i,j);

```

```

        for c2=1:2          % /*selection d'un taux de production*/

            ur22(i,j)=UU2(c2);

        for c3=1:2          % /*selection d'un taux de envois en maintenance preventive*/

            ur33(i,j)=UU3(c3);

[Vy1 Vy2
Vy3]=cout222(Nx2,Nx1,i,j,x2,x1,Vp1,Vp2,Vp3,ur11(i,j),ur33(i,j),cmp,cm,cp,corr,d,q12,
ur22(i,j),q31,hx2,hx1,rho,fu);

        Va1(i,j)=Vy1;

        Va2(i,j)=Vy2;

        Va3(i,j)=Vy3;

        if (Va1(i,j) < VPM1)

            VPM1=Vy1;
            u11(i,j)=ur11(i,j);

            u33(i,j)=ur33(i,j);

            if i > 1

                if u11(i,j)==u11(i-1,j)

                    xx=i;

                else

                    X1_op = x2;

                end

            end

        end

        if (Va2(i,j) < VPM2)

            VPM2=Vy2;

```

```

u22(i,j)=ur22(i,j);

if i > 1

if u22(i,j)==u22(i-1,j)

    xx=i;

    else

        X2_op = x2;

    end

end

end

end

if (Va3(i,j) < VPM3)
    VPM3=Vy3;

end

if (Vy1< V1_op)

    V1_op = Vy1;

    I_op = i;

    J_op = j;

    X22_op = x2;

    X1_op = x1;
end
if (Vy2< V2_op)

    V2_op = Vy2;
    I_op = i;

    J_op = j;

    X2_op = x2;

```

```

        X1_op = x1;
    end

        end    % /*end de c3*/
    end        % /*end de c2 */

        end    % /*end de c1*/

    Va1(i,j)=VPM1;
    Va2(i,j)=VPM2;
    Va3(i,j)=VPM3;

    Z2_op(j)=X2_op;
    end    % /* end de i

    Z1_op(j)=X1_op;

    Z2_op(j)=X2_op;

end    % /*end de j*/

    end    % /*iteration*/

toc
    Hedging_Point1 = X1_op

    Hedging_Point2 = X2_op

    Va1_op = V1_op

    Va2_op=V2_op

    Z1_op(90)

    Z2_op(90)

figure(1)

mesh(xx2,xx1,u11')
```

```
Xlabel('Stock')  
  
Ylabel('Age')  
  
Zlabel('Production rate')  
  
grid on  
  
print c:\figure1 -deps  
  
figure(2)  
  
mesh(xx2,xx1,u22')  
  
Xlabel('Stock')  
  
Ylabel('Age')  
  
Zlabel('Maintenance corrective rate')  
  
grid on  
  
figure(3)  
  
mesh(xx2,xx1,u33')  
  
Xlabel('Stock')  
  
Ylabel('Age')  
  
Zlabel('Maintenance preventive rate')  
  
grid on  
  
figure(4)  
  
plot(xx1,Z1_op')  
  
Xlabel('Age')  
  
Ylabel('Threshold')  
  
grid on
```



```

print c:\figure2-deps

figure(5)

plot( xx1,Z2_op')

Xlabel('Age')

Ylabel('Threshold')

grid on

print c:\figure2 -deps

figure(4)
    surf(xx2,xx1,Vp1')

Xlabel('Stock')

Ylabel('Age (x1)')

title('Fonction Valeur (mode 1)')

    grid on

    figure(5)

        surf(xx2,xx1,Vp2')

Xlabel('Stock')

Ylabel('Age (x1)')

Zlabel('v2(a,x)')

title('Fonction Valeur (mode 2)')

    grid on
    figure(6)

        surf(xx2,xx1,Vp3')

Xlabel('Stock')

```

```
Ylabel('Age (x1)')  
Zlabel('v3(x1,x)')  
title('Fonction valeur (mode 3)')
```

ANNEXE II

**Programme principal Matlab (cas d'une machine traitant un seul type de pièces
avec un mode dégradé)**

%faisabilite%

Q=[];

BB=[];

QT=[];

NU=[];

Um=.22;

d=.16;

rho2= 0.95;

q12=0.001;

q13=0.025;

q23=.02;

q24=0.15;

q31=0.2;

q41=0.2;

q14=0;

q21=0;

q32=0;

q14=0;

q34=0;

q42=0;

q43=0;

Q(1,2)=q12; Q(1,3)=q13;Q(1,4)=q14;

Q(1,1)=-(Q(1,2)+Q(1,3)+Q(1,4));

Q(2,1)=0; Q(2,3)=q23;Q(2,4)=q24;

Q(2,2)=-(Q(2,1)+Q(2,3)+Q(2,4));

Q(3,1)=q31; Q(3,2)=0; Q(3,4)=0;

Q(3,3)=-(Q(3,1)+Q(3,2)+Q(3,4));

Q(4,1)=q41; Q(4,2)=0; Q(4,3)=0;

Q(4,4)=-(Q(4,1)+Q(4,2)+Q(4,3));

```

QT=Q';
QT(1,1)=1; QT(1,2)=1; QT(1,3)=1;QT(1,4)=1;
BB=[1 0 0 0]';
NU=QT\BB
faisab=((NU(1)*Um + NU(2)*(Um-rho2))-d)
pause
hx=.2;
rho=.0000001;
c1p=1;      % penalise le stock positif
c1m=10;     % penelise le stock negatif
cr=30;      % penalise la reparation de la machine 10
cu2=20;
cp=15;
q24_max=0.15;
q24_min=0.015;
x1inf=-10;  % borne inf. du stock - 2
x1sup=20;   % borne sup. du stock  8
Nx1=1+(x1sup-x1inf)/hx;
cont1=[];
cont2=[];
cont3=[];
VV=[];
UU1=[];
UU2=[];
UU3=[];
VP1M=[];
VP2M=[];
VP3M=[];
VP4M=[];

```

```

xx1=[];
UU1(1)=0;
UU1(2)=d;
UU1(3)=Um;
UU2(1)=0;
UU2(2)=d;
UU2(3)=Um;
UU3(1)=q24_max;
UU3(2)=q24_min;
Vp1=[];
Va1=[];
Vp2=[];
Va2=[];
Vp3=[];
Va3=[];
Vp4=[];
Va4=[];
it=0;  precis=0.000001;
Err=100000000;  % pour while Err > precis
for i=1:Nx1
    cont1(i)=0;
    cont2(i)=0;
    cont3(i)=0;
    Va1(i)=0;
    Va2(i)=0;
    Va3(i)=0;
    Va4(i)=0;
    Vp1(i)=0;
    Vp2(i)=0;

```

```

Vp3(i)=0;
Vp4(i)=0;
end
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
while Err > precis % boucle d'iteration
Err=0;
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
it=it+1;
% Police evaluation
for i=1:Nx1
x1=x1inf+(i-1)*hx;
xx1(i)=x1;
u1=cont1(i);
u2=cont2(i);
u3=cont3(i);
[Va11 Va21 Va31
Va41]=cost2(i,x1,hx,u1,u2,u3,q12,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,d,Nx1,rho,q13,q23,q31,q41,c1p,c
1m,cr,rho2,cp,cu2);
Va1(i)=Va11;
Va2(i)=Va21;
Va3(i)=Va31;
Va4(i)=Va41;
if abs(Va1(i)-Vp1(i)) > C1MAX
C1MAX=abs(Va1(i)-Vp1(i));
end
if abs(Va1(i)-Vp1(i)) < C1MIN
C1MIN=abs(Va1(i)-Vp1(i));
end
if abs(Va2(i)-Vp2(i)) > C1MAX

```

```

    C1MAX=abs(Va2(i)-Vp2(i));
end
if abs(Va2(i)-Vp2(i)) < C1MIN
    C1MIN=abs(Va2(i)-Vp2(i));
end
if abs(Va3(i)-Vp3(i)) > C1MAX
    C1MAX=abs(Va3(i)-Vp3(i));
end
if abs(Va3(i)-Vp3(i)) < C1MIN
    C1MIN=abs(Va3(i)-Vp3(i));
end
if abs(Va4(i)-Vp4(i)) > C1MAX
    C1MAX=abs(Va4(i)-Vp4(i));
end
if abs(Va4(i)-Vp4(i)) < C1MIN
    C1MIN=abs(Va4(i)-Vp4(i));
end
end % end de for i=1: policy evaluation
vmin=(rho/(1-rho))*C1MIN;
vmax=(rho/(1-rho))*C1MAX;
Err=abs(vmin-vmax)
Vp1=Va1;
Vp2=Va2;
Vp3=Va3;
Vp4=Va4;
% policy improvement
V1_op =5e+20;
V2_op=5e+20;
V3_op=5e+20;

```



```

V4_op=5e+20;
for i=1:Nx1          % stock x1
    VP1M=100000000000;
    VP2M=100000000000;
    VP3M=100000000000;
    VP4M=100000000000;
    x1=x1inf+(i-1)*hx;
    for c1=1:3
        u1=UU1(c1);
        for c2=1:3
            u2=UU2(c2);
            for c3=1:2
                u3=UU3(c3);
                [Va11 Va21 Va31
Va41]=cost2(i,x1,hx,u1,u2,u3,q12,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,d,Nx1,rho,q13,q23,q31,q41,c1p,c
1m,cr,rho2,cp,cu2);
                if Va11 < VP1M
                    VP1M=Va11;
                    cont1(i)=u1;
                    if i > 1
                        if cont1(i)==cont1(i-1)
                            xx=i;

                        else
                            X1_op = x1;
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
    if Va21 < VP2M

```

```

VP2M=Va21;

cont2(i)=u2 ;
cont3(i)=u3 ;
if i > 1
    if cont2(i)==cont2(i-1)
        yy=i;
    else
        X2_op = x1;
    end
end
end
if Va31 < VP3M
    VP3M=Va31;
end
if Va41 < VP4M
    VP4M=Va41;
end
if Va11 < V1_op
    V1_op=Va11;
end
if Va21 < V2_op
    V2_op=Va21;
end
if Va31 < V3_op
    V3_op=Va31;
end
if Va41 < V4_op
    V4_op=Va41;

```

```

        X3_op = x1;
    end
end % for c3
end % for c2
end % for c1
Va1(i)=VP1M;
Va2(i)=VP2M;
Va3(i)=VP3M;
Va4(i)=VP4M;
end % for i=1:Nx1  policy improv.
end % iteration
Va1_op=V1_op
Va2_op=V2_op
Va3_op=V3_op
Va4_op=V4_op
Hedging_point1=X1_op
Hedging_point2=X2_op
Hedging_point3=X3_op

Cout_Moyen = NU(1)*Va1_op + NU(2)*Va2_op + NU(3)*Va3_op + NU(4)*Va4_op
figure(1)
plot(xx1,Va1)
xlabel('x')
ylabel('V(x,1)')
title('Fonction valeur : mode 1')
grid
figure(3)
plot(xx1,Va2)
xlabel('x')

```

```
ylabel('V(x,2)')
title('Fonction valeur : mode 2')
grid
figure(4)
plot(xx1,Va3)
xlabel('x')
ylabel('V(x,3)')
title('Fonction valeur : mode 3')
grid
figure(5)
plot(xx1,Va4)
xlabel('x')
ylabel('V(x,4)')
title('Fonction valeur : mode 4')
grid
figure(6)
plot(xx1,cont1)
xlabel('x')
ylabel('u(x,1)')
title('Production Rate at Mode 1')
grid
figure(7)
plot(xx1,cont2)
xlabel('x')
ylabel('u(x,2)')
title('Production Rate at Mode 2')
grid
```

ANNEXE III

**Programme principal Matlab (cas de deux machines traitant un seul type de pièces
sans maintenance préventive avec des modes dégradés)**

```

    cp= 1;      % penalise le stock positif
cm= 10;      % penalise le stock negatif
cr= 20;
cr1= 20;      % penalise la maintenance corrective de la machine 1
cr2= 20;      % penalise la maintenance corrective de la machine 2
U1m= .75;     % taux de production max. de la machine 1
U2m= .75;     % taux de production max. de la machine 2
d=1;         % taux de demande
rho1=0.25;
lambda121= 0.015;      % taux de panne de la machine 2
lambda131= 0.025;
lambda211= 0.09;       % taux de reparation de la machine 2
lambda242= 0.015 ;     % taux de panne de la machine 1
lambda321= 0.025;      % taux de reparation de la machine 1
lambda352= 0.015;
lambda422= 0.09;
lambda532= 0.09;
lambda541= 0.025;
q12= lambda121;
q13= lambda131;
q14=0;
q15=0;
q21=lambda211;
q23=0;
q24=lambda242;
q25=0;
q31=0;
q32=lambda321;
q34=0;

```

```

q35=lambda352;
q41=0;
q42=lambda422;
q43=0;
q45=0;
q51=0;
q52=0;
q53=lambda532;
q54=lambda541;
rho= 0.1;      % taux d'actualisation
hx=1;          % pas sur le stock
x1inf=- 5;     % minimum sur le stock
x1sup=30;      % maximum sur le stock
Nx1=1+(x1sup-x1inf)/hx; % nombre de points sur la grille du stock
Q=[];
BB=[];
QT=[];
NU=[];
Q(1,2)=q12; Q(1,3)=q13; Q(1,4)=0;Q(1,5)=0;
Q(1,1)=-(Q(1,2) + Q(1,3));
Q(2,1)=q21; Q(2,3)=q23; Q(2,4)=q24; Q(2,5)=q25;
Q(2,2)=-(Q(2,1)+Q(2,4));
Q(3,1)=q31; Q(3,2)=q32; Q(3,4)=q34; Q(3,5)=q35;
Q(3,3)=-(Q(3,2)+Q(3,5));
Q(4,1)=q41; Q(4,2)=q42; Q(4,3)=q43; Q(4,5)=q45;
Q(4,4)=-(Q(4,2));
Q(5,1)=q51; Q(5,2)=q52; Q(5,3)=q53; Q(5,4)=q54;
Q(5,5)=-(Q(5,3)+Q(5,4));
QT=Q';

```

```

QT(1,1)=1; QT(1,2)=1; QT(1,3)=1; QT(1,4)=1; QT(1,5)=1;
BB=[1 0 0 0 0]';
NU=QT\BB
faisab=((NU(1)*(U1m+U2m)))+(NU(2)*U2m)+(NU(3)*(U1m-
rho1+U2m)))+(NU(5)*(U1m-rho1)) - d)
pause
cont11=[]; % taux de production de la machine M1 au mode 1
cont12=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 1
cont22=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 2
cont31=[]; % taux de production de la machine M1 au mode 3
cont32=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 3
cont51=[]; % taux de production de la machine M1 au mode 5
VV=[]; UU1=[]; UU2=[];
Va1=[];
VPM1=[];VPM2=[];VPM3=[];VPM4=[];VPM5=[];xx1=[];
UU1(1)=0;UU1(2)=d/2;UU1(3)=U1m; % Production machine M1
UU2(1)=0;UU2(2)=d/2;UU2(3)=U2m; % Production machine M2
Vp1=zeros(Nx1); Va1=zeros(Nx1);
Vp2=zeros(Nx1); Va2=zeros(Nx1);
Vp3=zeros(Nx1); Va3=zeros(Nx1);
Vp4=zeros(Nx1); Va4=zeros(Nx1);
Vp5=zeros(Nx1); Va5=zeros(Nx1);
cont11=zeros(Nx1);cont12=zeros(Nx1);
cont22=zeros(Nx1);cont31=zeros(Nx1);
cont32=zeros(Nx1);cont51=zeros(Nx1);
it=0;  precis=0.001;
Err=100000;  % pour while Err > precis
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
while Err > precis    % boucle d'iteration

```



```

Err=0;
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
for i=1:Nx1
    x1=x1inf+(i-1)*hx;
    xx1(i)=x1;
    u11=cont11(i); %Taux de production de la machine M1 au mode 1
    u12=cont12(i); %Taux de production de la machine M2 au mode 1
    u22=cont22(i); %Taux de production de la machine M2 au mode 2
    u31=cont31(i); %Taux de production de la machine M1 au mode 3
    u32=cont32(i); %Taux de production de la machine M2 au mode 3
    u51=cont51(i); %Taux de production de la machine M1 au mode 5
    [Vax1 Vax2 Vax3 Vax4
    Vax5]=cost3(Nx1,i,x1,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,Vp5,u11,u12,u22,u31,u32,u51,cm,cp,cr,cr1,cr
    2,d,q12,q13,q21,q24,q32,q35,q42,q53,q54,hx,rho,rho1);
    Va1(i)=Vax1; Va2(i)=Vax2; Va3(i)=Vax3;Va4(i)=Vax4; Va5(i)=Vax4;
    if (abs(Va1(i)-Vp1(i))>C1MAX)
        C1MAX=abs(Va1(i)-Vp1(i));
    end
    if (abs(Va1(i)-Vp1(i))<C1MIN)
        C1MIN=abs(Va1(i)-Vp1(i));
    end
    if (abs(Va2(i)-Vp2(i))>C1MAX)
        C1MAX=abs(Va2(i)-Vp2(i));
    end
    if (abs(Va2(i)-Vp2(i))<C1MIN)
        C1MIN = abs(Va2(i)-Vp2(i));
    end
    if (abs(Va3(i)-Vp3(i))>C1MAX)
        C1MAX = abs(Va3(i)-Vp3(i));

```

```

end
if (abs(Va3(i)-Vp3(i))<C1MIN)
    C1MIN = abs(Va3(i)-Vp3(i));
end
if (abs(Va4(i)-Vp4(i))>C1MAX)
    C1MAX = abs(Va4(i)-Vp4(i));
end
if (abs(Va4(i)-Vp4(i))<C1MIN)
    C1MIN = abs(Va4(i)-Vp4(i));
end
if (abs(Va5(i)-Vp5(i))>C1MAX)
    C1MAX = abs(Va5(i)-Vp5(i));
end
if (abs(Va5(i)-Vp5(i))<C1MIN)
    C1MIN = abs(Va5(i)-Vp5(i));
end
end % for i
Vmin = (rho/(1-rho))*C1MIN;
Vmax = (rho/(1-rho))*C1MAX;
Err=abs(Vmin-Vmax)
Vp1=Va1;
Vp2=Va2;
Vp3=Va3;
Vp4=Va4;
Vp5=Va5;
% policy improvement
V1_op = 5e+10;
V2_op = 5e+10;
V3_op = 5e+10;

```

```

V4_op = 5e+10;
V5_op = 5e+10;
for i=1:Nx1 % stock
    x1=x1inf+(i-1)*hx;
    xx1(i)=x1;
    VPM1=5e+10;
    VPM2=5e+10;
    VPM3=5e+10;
    VPM4=5e+10;
    VPM5=5e+10;
    for c1=1:3
        u11=UU1(c1);
        for c2=1:3
            u12=UU2(c2);
            for c3=1:3
                u22=UU2(c3);
                for c4=1:3
                    u31=UU1(c4);
                    for c5=1:3
                        u32=UU2(c5);
                        for c6=1:3
                            u51=UU1(c6);
[Vax1 Vax2 Vax3 Vax4
Vax5]=cost3(Nx1,i,x1,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,Vp5,u11,u12,u22,u31,u32,u51,cm,cp,cr,cr1,cr
2,d,q12,q13,q21,q24,q32,q35,q42,q53,q54,hx,rho,rho1);
Va1(i)=Vax1; Va2(i)=Vax2; Va3(i)=Vax3;Va4(i)=Vax4; Va5(i)=Vax4;
    if Vax1 < VPM1
        VPM1=Vax1;
        cont11(i)=u11;

```

```

cont12(i)=u12;
if i> 1
    if cont11(i)==cont11(i-1)
        xxx=i;
    else
        HP_z_mode_1_M1=x1;
    end
end
if i> 1
    if cont12(i)==cont12(i-1)
        xxxxz=i;
    else
        HP_z_mode_1_M2=x1;
    end
end
end
if Vax2 < VPM2
    VPM2=Vax2;
cont22(i)=u22;
if i> 1
    if cont22(i)==cont22(i-1)
        yyyy=i;
    else
        HP_z_mode_2_M2=x1;
    end
end
end
if Vax3 < VPM3
    VPM3=Vax3;

```

```

cont31(i)=u31;
cont32(i)=u32;
if i> 1
    if cont31(i)==cont31(i-1)
        xxxx1=i;
    else
        HP_z_mode_3_M1=x1;
    end
end
if i> 1
    if cont32(i)==cont32(i-1)
        xxxxz1=i;
    else
        HP_z_mode_3_M2=x1;
    end
end
end
if Vax4 < VPM4
    VPM4=Vax4;
end
if Vax5 < VPM5
    VPM5=Vax5;
cont51(i)=u51;
if i> 1
    if cont51(i)==cont51(i-1)
        zyxxxx=i;
    else
        HP_z_mode_5_M1=x1;
    end
end

```

```

        end
    end
    if Vax1 < V1_op
        V1_op = Vax1;
    end
    if Vax2 < V2_op
        V2_op = Vax2;
    end
    if Vax3 < V3_op
        V3_op = Vax3;
    end
    if Vax4 < V4_op
        V4_op = Vax4;
    end
    if Vax5 < V5_op
        V5_op = Vax5;
    end
end
end % /* end de c6 */
end % /* end de c5 */
end % /* end de c4 */
end % /* end de c3 */
end % /* end de c2 */
    end % /* end de c1*/
Va1(i)=VPM1;
Va2(i)=VPM2;
Va3(i)=VPM3;
Va4(i)=VPM4;
Va5(i)=VPM5;

```

```

end    % end de i
    end    % iteration*/
X1_op_Mode1_M1 = HP_z_mode_1_M1
X2_op_Mode1_M2 = HP_z_mode_1_M2
X3_op_Mode2_M2 = HP_z_mode_2_M2
X4_op_Mode3_M1 = HP_z_mode_3_M1
X5_op_Mode3_M2 = HP_z_mode_3_M2
X6_op_Mode5_M1 = HP_z_mode_5_M1
Va1_op = V1_op
Va2_op = V2_op
Va3_op = V3_op
Va4_op = V4_op
Va5_op = V5_op
figure(1)
plot(xx1,cont11)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u1(1,x1)')
title(' Production rate mode 1')
grid on
figure(2)
plot(xx1,cont12)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(1,x1)')
title(' Production rate mode 1')
grid on
figure(3)
plot(xx1,cont22)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(2,x1)')

```

```

title(' Production rate mode 2')
    grid on
figure(4)
    plot(xx1,cont31)
    xlabel('Surplus(x1)')
    ylabel('u1(3,x1)')
title(' Production rate mode 3')
    grid on
figure(5)
    plot(xx1,cont32)
    xlabel('Surplus(x1)')
    ylabel('u2(3,x1)')
title(' Production rate mode 3')
    grid on
figure(6)
    plot(xx1,cont51)
    xlabel('Surplus(x1)')
    ylabel('u1(5,x1)')
title(' Production rate mode 5')
    grid on
figure(7)
    plot(xx1,Va1)
    xlabel('Stock')
    ylabel('v1(1,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 1)')
    grid on
figure(8)
    plot(xx1,Va2)
    xlabel('Stock')

```



```
ylabel('v2(2,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 2)')
grid on
figure(9)
plot(xx1,Va3)
xlabel('Stock')
ylabel('v3(3,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 3)')
grid on
figure(10)
plot(xx1,Va4)
xlabel('Stock')
ylabel('v4(4,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 4)')
grid on
figure(11)
plot(xx1,Va5)
xlabel('Stock')
ylabel('v5(5,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 5)')
grid on
```

ANNEXE IV

**Programme principal Matlab (cas de deux machines avec modes dégradés traitant
un seul type de pièces avec maintenance préventive)**

```

cp= 1;      % penalise le stock positif
cm= 50;     % penalise le stock negatif
cr1= 20;    % penalise la maintenance corrective de la machine 1
cr2= 20;    % penalise la maintenance corrective de la machine 2
cmp=1000;   % penalise la maintenance preventive
U1m= .64;   % taux de production max. de la machine 1
U2m= .64;   % taux de production max. de la machine 2
d=1;        % taux de demande
rho1=0.1;
lambda121= 0.015; % taux de panne de la machine 2
lambda131= 0.025;
lambda211= 0.09;  % taux de reparation de la machine 2
lambda122= 0.015 ; % taux de panne de la machine 1
lambda321= 0.025; % taux de reparation de la machine 1
lambda341= 0.04;  % taux denvoi en maintenance preventive max
lambda122= 0.015;
lambda411= 0.5;
lambda122= 0.015;
lambda132= 0.025;
lambda212= 0.09;
lambda212= 0.015;
lambda132= 0.025;
lambda212= 0.09;
lambda212= 0.09;
lambda321= 0.025;
lambda341= 0.04;
lambda212= 0.09;
lambda322= 0.025;
q34_max=0.04;

```

```

q34_min=0.01;
q12= lambda121;
q13= lambda131;
q21=lambda211;
q25=lambda122;
q32=lambda321;
q34=lambda341;
q36=lambda122;
q41=lambda411;
q47=lambda122;
q48=lambda132;
q52=lambda212;
q63=lambda212;
q65=lambda321;
q67=lambda341;
q74=lambda212;
q87=lambda322;
rho= 0.01;                % taux d'actualisation
hx=.5;                    % pas sur le stock
x1inf= -10;               % minimum sur le stock
x1sup=100;                % maximum sur le stock
Nx1=1+(x1sup-x1inf)/hx;   % nombre de points sur la grille du stock
Q=[];
BB=[];
QT=[];
NU=[];
q14=0;q15=0;q16=0;q17=0;q18=0;q23=0;q24=0;q26=0;q27=0;q28=0;q31=0;q35=0;q37
=0;q38=0;q42=0;q43=0;q45=0;q46=0;q51=0;q53=0;
q54=0;q56=0;q57=0;q58=0;q61=0;q62=0;q64=0;q68=0;q71=0;q72=0;q73=0;q75=0;q76
=0;q78=0;q81=0;q82=0;q83=0;q84=0;q85=0;q86=0;

```

$Q(1,2)=q_{12}$; $Q(1,3)=q_{13}$; $Q(1,4)=q_{14}$; $Q(1,5)=q_{15}$; $Q(1,6)=q_{16}$; $Q(1,7)=q_{17}$; $Q(1,8)=q_{18}$;
 $Q(1,1)=-(Q(1,2) + Q(1,3)+ Q(1,4))$;
 $Q(2,1)=q_{21}$; $Q(2,3)=q_{23}$; $Q(2,4)=q_{24}$;
 $Q(2,5)=q_{25}$; $Q(2,6)=q_{26}$; $Q(2,7)=q_{27}$; $Q(2,8)=q_{28}$;
 $Q(2,2)=-(Q(2,1)+Q(2,5))$;
 $Q(3,1)=q_{31}$; $Q(3,2)=q_{32}$; $Q(3,4)=q_{34}$;
 $Q(3,5)=q_{35}$; $Q(3,6)=q_{36}$; $Q(3,7)=q_{37}$; $Q(3,8)=q_{38}$;
 $Q(3,3)=-(Q(3,2)+Q(3,4)+Q(3,6))$;
 $Q(4,1)=q_{41}$; $Q(4,2)=q_{42}$; $Q(4,3)=q_{43}$; $Q(4,5)=q_{45}$; $Q(4,6)=q_{46}$; $Q(4,7)=q_{47}$; $Q(4,8)=q_{48}$;
 $Q(4,4)=-(Q(4,1)+Q(4,7)+Q(4,8))$;
 $Q(5,1)=q_{51}$; $Q(5,2)=q_{52}$; $Q(5,3)=q_{53}$; $Q(5,4)=q_{54}$; $Q(5,6)=q_{56}$; $Q(5,7)=q_{57}$; $Q(5,8)=q_{58}$;
 $Q(5,5)=-(Q(5,2))$;
 $Q(6,1)=q_{61}$; $Q(6,2)=q_{62}$; $Q(6,3)=q_{63}$; $Q(6,4)=q_{64}$; $Q(6,5)=q_{65}$; $Q(6,7)=q_{67}$; $Q(6,8)=q_{68}$;
 $Q(6,6)=-(Q(6,3)+Q(6,5)+Q(6,7))$;
 $Q(7,1)=q_{71}$; $Q(7,2)=q_{72}$; $Q(7,3)=q_{73}$; $Q(7,4)=q_{74}$; $Q(7,5)=q_{75}$; $Q(7,6)=q_{76}$; $Q(7,8)=q_{78}$;
 $Q(7,7)=-(Q(7,4))$;
 $Q(8,1)=q_{81}$; $Q(8,2)=q_{82}$; $Q(8,3)=q_{83}$; $Q(8,4)=q_{84}$; $Q(8,5)=q_{85}$; $Q(8,6)=q_{86}$; $Q(8,7)=q_{87}$;
 $Q(8,8)=-(Q(8,7))$;

$QT=Q'$;

$QT(1,1)=1$; $QT(1,2)=1$; $QT(1,3)=1$; $QT(1,4)=1$;

$QT(1,5)=1$; $QT(1,6)=1$; $QT(1,7)=1$; $QT(1,8)=1$;

$BB=[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]'$;

$NU=QT\backslash BB$

$faisab=((NU(1)*(U1m+U2m))+(NU(2)*U2m)+(NU(3)*(U1m-$
 $\rho1+U2m))+(NU(4)*U2m)+(NU(6)*(U1m-\rho1))+(NU(8)*(U2m-\rho1))- d)$

pause

cont11=[]; % taux de production de la machine M1 au mode 1

cont12=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 1

```

cont22=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 2
cont31=[]; % taux de production de la machine M1 au mode 3
cont32=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 3
cont42=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 4
cont61=[]; % taux de production de la machine M1 au mode 6
cont82=[]; % taux de production de la machine M2 au mode 8
cont1=[]; % taux d'envoi en maintenance preventive de la machine M1 au mode 3
cont2=[]; % taux d'envoi en maintenance preventive de la machine M1 au mode 7
VV=[]; UU1=[]; UU2=[]; UU3=[];
Va1=[];
VPM1=[];VPM2=[];VPM3=[];VPM4=[];VPM5=[];VPM6=[];VPM7=[];VPM8=[];xx1=
[];
UU1(1)=0;UU1(2)=d/2;UU1(3)=U1m; % Production machine M1
UU2(1)=0;UU2(2)=d/2;UU2(3)=U2m; % Production machine M2
UU3(1)=q34_min;UU3(2)=q34_max; % Taux d'envoi en maintenance preventive
Vp1=zeros(Nx1); Va1=zeros(Nx1);Vp2=zeros(Nx1);
Va2=zeros(Nx1);Vp3=zeros(Nx1); Va3=zeros(Nx1);Vp4=zeros(Nx1); Va4=zeros(Nx1);
Vp5=zeros(Nx1); Va5=zeros(Nx1);Vp6=zeros(Nx1);
Va6=zeros(Nx1);Vp7=zeros(Nx1); Va7=zeros(Nx1);Vp8=zeros(Nx1); Va8=zeros(Nx1);
cont11=zeros(Nx1);cont12=zeros(Nx1);cont22=zeros(Nx1);cont31=zeros(Nx1);cont32=
zeros(Nx1);cont42=zeros(Nx1);cont61=zeros(Nx1);cont82=zeros(Nx1);
cont1=zeros(Nx1);cont2=zeros(Nx1);
it=0; precis=0.0001;
Err=100000; % pour while Err > precis
C1MAX=0; C1MIN=5e+10;
while Err > precis % boucle d'iteration
    tic
    Err=0;
    C1MAX=0; C1MIN=5e+10;

```

```

it=it+1;
for i=1:Nx1
x1=x1inf+(i-1)*hx;
xx1(i)=x1;
u11=cont11(i); % Taux de production de la machine M1 au mode 1
u12=cont12(i); % Taux de production de la machine M2 au mode 1
u22=cont22(i); % Taux de production de la machine M2 au mode 2
u31=cont31(i); % Taux de production de la machine M1 au mode 3
u32=cont32(i); % Taux de production de la machine M2 au mode 3
u42=cont42(i); % Taux de production de la machine M2 au mode 4
u61=cont61(i); % Taux de production de la machine M1 au mode 6
u82=cont82(i); % Taux de production de la machine M2 au mode 8
u1=cont1(i); % Taux d'envoi en maintenance preventive M1 au mode 3
u2=cont1(i); % Taux d'envoi en maintenance preventive M1 au mode 6

[Vax1 Vax2 Vax3 Vax4 Vax5 Vax6 Vax7
Vax8]=cost4(Nx1,i,x1,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,Vp5,Vp6,Vp7,Vp8,u11,u12,u22,u31,u32,u42,
u61,u82,u1,u2,cm,cp,cr1,cr2,cmp,d,q12,q13,q21,q25,q32,q36,q41,q47,q48,q52,q63,q65,
q67,q74,q87,hx,rho,rho1);
Va1(i)=Vax1;Va2(i)=Vax2;Va3(i)=Vax3;Va4(i)=Vax4;Va5(i)=Vax5;Va6(i)=Vax6;
Va7(i)=Vax7; Va8(i)=Vax8;
if (abs(Va1(i)-Vp1(i))>C1MAX)
    C1MAX=abs(Va1(i)-Vp1(i));
end
if (abs(Va1(i)-Vp1(i))<C1MIN)
    C1MIN=abs(Va1(i)-Vp1(i));
end
if (abs(Va2(i)-Vp2(i))>C1MAX)
    C1MAX=abs(Va2(i)-Vp2(i));

```

```

end
if (abs(Va2(i)-Vp2(i))<C1MIN)
    C1MIN=abs(Va2(i)-Vp2(i));
end
if (abs(Va3(i)-Vp3(i))>C1MAX)
    C1MAX=abs(Va3(i)-Vp3(i));
end
if (abs(Va3(i)-Vp3(i))<C1MIN)
    C1MIN=abs(Va3(i)-Vp3(i));
end
if (abs(Va4(i)-Vp4(i))>C1MAX)
    C1MAX=abs(Va4(i)-Vp4(i));
end
if (abs(Va4(i)-Vp4(i))<C1MIN)
    C1MIN=abs(Va4(i)-Vp4(i));
end
if (abs(Va5(i)-Vp5(i))>C1MAX)
    C1MAX=abs(Va5(i)-Vp5(i));
end
if (abs(Va5(i)-Vp5(i))<C1MIN)
    C1MIN=abs(Va5(i)-Vp5(i));
end
if (abs(Va6(i)-Vp6(i))>C1MAX)
    C1MAX=abs(Va6(i)-Vp6(i));
end
if (abs(Va6(i)-Vp6(i))<C1MIN)
    C1MIN=abs(Va6(i)-Vp6(i));
end
if (abs(Va7(i)-Vp7(i))>C1MAX)

```



```

        C1MAX=abs(Va7(i)-Vp7(i));
    end
    if (abs(Va7(i)-Vp7(i))<C1MIN)
        C1MIN=abs(Va7(i)-Vp7(i));
    end
    if (abs(Va8(i)-Vp8(i))>C1MAX)
        C1MAX=abs(Va8(i)-Vp8(i));
    end
    if (abs(Va8(i)-Vp8(i))<C1MIN)
        C1MIN=abs(Va8(i)-Vp8(i));
    end
end % for i
Vmin=(rho/(1-rho))*C1MIN;
Vmax=(rho/(1-rho))*C1MAX;
Err=abs(Vmin-Vmax)
Vp1=Va1;Vp2=Va2;Vp3=Va3;Vp4=Va4;Vp5=Va5;Vp6=Va6;Vp7=Va7;Vp8=Va8;
% policy improvement
V1_op = 5e+10;V2_op = 5e+10;V3_op = 5e+10;V4_op = 5e+10;V5_op = 5e+10;V6_op
= 5e+10; V7_op = 5e+10;V8_op = 5e+10;
for i=1:Nx1 % stock
    x1=x1inf+(i-1)*hx;
    xx1(i)=x1;
VPM1=5e+10;VPM2=5e+10;VPM3=5e+10;VPM4=5e+10;VPM5=5e+10;VPM6=5e+1
0;VPM7=5e+10;VPM8=5e+10;
for c1=1:3
    u11=UU1(c1);
    u12=UU2(c1);
    for c2=1:3
        u22=UU2(c2);

```

```

for c3=1:3
    u31=UU1(c3);
    u32=UU2(c3);
    for c4=1:3
        u42=UU2(c4);
        for c5=1:3
            u61=UU1(c5);
            u82=UU2(c5);
            for c6=1:2
                u1=UU3(c6);
                u2=UU3(c6);
[Vax1 Vax2 Vax3 Vax4 Vax5 Vax6 Vax7
Vax8]=cost4(Nx1,i,x1,Vp1,Vp2,Vp3,Vp4,Vp5,Vp6,Vp7,Vp8,u11,u12,u22,u31,u32,u42,
u61,u82,u1,u2,cm,cp,cr1,cr2,cmp,d,q12,q13,q21,q25,q32,q36,q41,q47,q48,q52,q63,q65,
q67,q74,q87,hx,rho,rho1);
    Va1(i)=Vax1; Va2(i)=Vax2; Va3(i)=Vax3; Va4(i)=Vax4; Va5(i)=Vax5; Va6(i)=Vax6;
    Va7(i)=Vax7; Va8(i)=Vax8;
    if Vax1 < VPM1
        VPM1=Vax1;
        cont11(i)=u11;
    cont12(i)=u12;
    if i> 1
        if cont11(i)==cont11(i-1)
            xxxxx=i;
        else
            HP_z_mode_1_M1=x1;
        end
    end
    if i> 1

```

```

    if cont12(i)==cont12(i-1)
        xxxxz=i;
    else
        HP_z_mode_1_M2=x1;
    end
end
end
if Vax2 < VPM2
    VPM2=Vax2;
    cont22(i)=u22;
    if i> 1
        if cont22(i)==cont22(i-1)
            yyyy=i;
        else
            HP_z_mode_2_M2=x1;
        end
    end
end
if Vax3 < VPM3
    VPM3=Vax3;
    cont31(i)=u31;
    cont32(i)=u32;
    cont1(i)=u1;
    if i> 1
        if cont31(i)==cont31(i-1)
            xxxx1=i;
        else
            HP_z_mode_3_M1=x1;
        end
    end
end

```

```

end
if i> 1
    if cont32(i)==cont32(i-1)
        xxxxz1=i;
    else
        HP_z_mode_3_M2=x1;
    end
end
end
if i> 1
    if cont1(i)==cont1(i-1)
        zxxzxxx=i;
    else
        HP_z_mode_34_M1=x1;
    end
end
end
end
    if Vax4 < VPM4
        VPM4=Vax4;
cont42(i)=u42;
    if i> 1
        if cont42(i)==cont42(i-1)
            xxzzxx1=i;
        else
            HP_z_mode_4_M2=x1;
        end
    end
end
end
if Vax5 < VPM5
    VPM5=Vax5;

```

```

end
if Vax6 < VPM6
    VPM6=Vax6;
    cont61(i)=u61;
    cont2(i)=u2;
    if i> 1
        if cont61(i)==cont61(i-1)
            zzyxxxx=i;
        else
            HP_z_mode_6_M1=x1;
        end
    end
end
if i> 1
    if cont2(i)==cont2(i-1)
        yxxxxyyy=i;
    else
        HP_z_mode_64_M1=x1;
    end
end
end
if Vax7 < VPM7
    VPM7=Vax7;
end
if Vax8 < VPM8
    VPM8=Vax8;
    cont82(i)=u82;
    if i> 1
        if cont82(i)==cont82(i-1)
            zyxyxx=i;

```

```
        else
            HP_z_mode_8_M2=x1;
        end
    end
end
if Vax1 < V1_op
    V1_op = Vax1;
end

if Vax2 < V2_op
    V2_op = Vax2;
end
if Vax3 < V3_op
    V3_op = Vax3;
end
if Vax4 < V4_op
    V4_op = Vax4;
end
if Vax5 < V5_op
    V5_op = Vax5;
end
if Vax6 < V6_op
    V6_op = Vax6;
end
if Vax7 < V7_op
    V7_op = Vax7;
end
if Vax8 < V8_op
    V8_op = Vax8;
```

```

end
end
end %/* end de c6 */
end %/* end de c5 */
end %/* end de c4 */
end %/* end de c3 */
end %/* end de c2 */
end %/* end de c1 */

Va1(i)=VPM1;Va2(i)=VPM2;Va3(i)=VPM3;Va4(i)=VPM4;Va5(i)=VPM5;Va6(i)=VP
M6;Va7(i)=VPM7;Va8(i)=VPM8;
end % end for i
end % iteration
toc

X1_op_Mode1_M1 = HP_z_mode_1_M1
X2_op_Mode1_M2 = HP_z_mode_1_M2
X3_op_Mode2_M2 = HP_z_mode_2_M2
X4_op_Mode3_M1 = HP_z_mode_3_M1
X5_op_Mode3_M2 = HP_z_mode_3_M2
X6_op_Mode4_M2 = HP_z_mode_4_M2
X7_op_Mode6_M1 = HP_z_mode_6_M1
X8_op_Mode8_M2 = HP_z_mode_8_M2
X9_op_Mode3_M1 = HP_z_mode_34_M1
X10_op_Mode6_M1= HP_z_mode_64_M1
Va1_op = V1_op
Va2_op = V2_op
Va3_op = V3_op
Va4_op = V4_op
Va5_op = V5_op
Va6_op = V6_op

```

```

Va7_op = V7_op
Va8_op = V8_op
Cout_Moyen =( NU(1)*Va1_op + NU(2)*Va2_op + NU(3)*Va3_op +
NU(4)*Va4_op + NU(5)*Va5_op + NU(6)*Va6_op + NU(7)*Va7_op +
NU(8)*Va8_op)
figure(1)
plot(xx1,cont11)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u1(1,x1)')
title(' Production rate mode 1')
grid on
figure(2)
plot(xx1,cont12)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(1,x1)')
title(' Production rate mode 1')
grid on
figure(3)
plot(xx1,cont22)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(2,x1)')
title(' Production rate mode 2')
grid on
figure(4)
plot(xx1,cont31)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u1(3,x1)')
title(' Production rate mode 3')
grid on

```



```
figure(5)
plot(xx1,cont32)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(3,x1)')
title(' Production rate mode 3')
grid on
figure(6)
plot(xx1,cont42)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(4,x1)')
title(' Production rate mode 4')
grid on
figure(7)
plot(xx1,cont61)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u1(6,x1)')
title(' Production rate mode 6')
grid on
figure(8)
plot(xx1,cont82)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(8,x1)')
title(' Production rate mode 8')
grid on
figure(9)
plot(xx1,cont1)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u1(3,x1)')
title(' Taux envoi maintenance preventive M1 Mode 3')
```

```
grid on
figure(10)
plot(xx1,cont2)
xlabel('Surplus(x1)')
ylabel('u2(6,x1)')
title(' Taux envoi maintenance preventive M1 Mode 6')
grid on
figure(11)
plot(xx1,Va1)
xlabel('Surplus')
ylabel('v1(1,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 1)')
grid on
figure(12)
plot(xx1,Va2)
xlabel('Surplus')
ylabel('v2(2,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 2)')
grid on
figure(13)
plot(xx1,Va3)
xlabel('Surplus')
ylabel('v3(3,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 3)')
grid on
figure(14)
plot(xx1,Va4)
xlabel('Surplus')
ylabel('v4(4,x1)')
```

```
title('Fonction Valeur (mode 4)')
    grid on
figure(15)
    plot(xx1,Va5)
    xlabel('Surplus')
    ylabel('v5(5,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 5)')
    grid on
figure(16)
    plot(xx1,Va6)
    xlabel('Surplus')
    ylabel('v6(6,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 6)')
    grid on
figure(17)
    plot(xx1,Va7)
    xlabel('Surplus')
    ylabel('v7(7,x1)')
title('Fonction Valeur (mode 7)')
    grid on
```

RÉFÉRENCES

Akella R. et Kumar P. R., *Optimal Control of the Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System*, IEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31, n 2, p.116-126,1986.

Andreu D., Champagnat R, et Esteban P., *Fonctionnement et architecture de systèmes de commande hybrides*, in : *Concepts et outils pour les systèmes de production*, coordination Hennet J.C., LAAS – CNRS, Cépadues Editions 1997.

Bel G., Cavaillé J. B., *Approche simulatoire*, in : *ordonnancement de la production*, sous la direction de Lopez P. et Roubellat F., Editions Hermès Science 2001.

Boukas, E. K. and Haurie A., *Manufacturing Flow Control and Preventive Maintenance : A Stochastic Control Approach*, IEEE Transactions on Control, vol.33, n 9, p. 1024-1031, 1990.

Boukas, E. K., Kenne, J. P et Zhu, Q, *Age dependent hedging point policies in manufacturing systems*, Proceedings of the American Control Conference, v 3, 1995, p 2178-2179.

Boukas, E. K, et Yang, H., *Optimal control of manufacturing flow and preventive maintenance*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v 41, n 6, Jun, 1996, p 881-885.

Boukas, E. K., *Hedging Point Policy Improvement*, Journal of Optimization Theory and Control, Vol.97, 47 – 70, 1998.

Boukas, E. K. et Liu, Z. K., *Production and maintenance control for manufacturing system*, Proceedings of the 38th IEEE Conference on ,Volume: 1 , 7-10 Dec. 1999 Pages : 51 - 56 vol.1.

Boukas, E. K., et Communal, A., *Production and corrective maintenance planning control problem for failure-prone manufacturing systems*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, v 3, 2002, p 3561-3566.

Boukas, E. K, et Liu, Z. K., *Production and maintenance control for manufacturing systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v 46, n 9, September, 2001, p 1455-1460.

Bielecki, T et Kumar, P. R., *Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems*, Operations Research, v 36, n 4, Jul-Aug, 1988, p 532-541.

Brunner D. T. et Schriber T. J., *inside discrete-event simulation software: how it works and why it matters*, in: Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference, Peters B. A., Smith J. S., Medeiros D. J. and Rohrer M. W. eds., pp. 882-887.

Caramanis M. et Sharifnia A., *Near Optimal Manufacturing Flow Controller Design*, International Journal of Flexible Manufacturing Systems, vol. 3 p. 321–336, 1991.

Clarke, F., *Optimization and Non Smooth Analysis*, Wiley – Inter science, New York, NY, 1983.

Gershwin, S.B., *Manufacturing Systems Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.

Gharbi A. et Kenne J. P., *Production and Preventive Maintenance Rates Control for a Manufacturing System : An Experimental Design Approach*, International Journal of Production Economics, vol. 65, n 3, p. 275–287, 2000.

Gharbi A. et Kenne J. P., *Optimal Production Control Problem in Stochastic Multiple Product Multiple – Machine Manufacturing Systems*, IIE transactions, vol.35, p.941-952, 2003.

J. Forrester., *"Industrial Dynamics,"* MIT Press, 464 pages. 1961.

Kenne, J. P., Gharbi, A., et Boukas, E. K., *Control Policy Simulation based on machine Age in a failure Prone One-Machine, One product Manufacturing System*, International Journal of Production Research, vol. 35, n 5 , p.1431–1445, 1997.

Kenne, J. P, et Gharbi, A., *Experimental Design in Production and Maintenance Control of a Single Machine, Single Product Manufacturing System*, International Journal of Production Research, vol. 37, n 3, p.621-637, 1999.

Kenne, J. P. et Gharbi, A., *Production Planning Problem in Manufacturing Systems with General Failure and Repair Time distributions*, Production Planning and Control, vol. 11, p.581-588, 2000.

Kenne, J. P. et Boukas, E. K., *Hierarchical Control of Production and Maintenance Rates in Manufacturing Systems*, Journal of Quality and Maintenance Engineering, vol. 9, n 1, p. 66 – 82, 2003.

Kenne, J. P., Boukas, E. K., et Gharbi, A., *Control of Production and Corrective Maintenance Rates in a Multiple-Machine, Multiple-product Manufacturing System*, Mathematical and Computer Modelling, vol. 38, p.351-365, 2003.

Kenne J.P., «*Commande optimale appliqué à la gestion d'une unité de fabrication*», Journal européen des systemes automatisés, Vol.38, N 3-4, p. 269-290, 2004.

Kenné J.P et Nkeungoué, L.J., «*Simultaneous Control of Production, Preventive and Corrective Maintenance Rates of a Failure Prone Manufacturing Systems* », Journal of Applied Numerical Methods, soumis en janvier 2004.

Kushner, H. J., and Depuis, P. G., *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer – Verlag, New York, 1992.

Liberopoulos, G., et Caramanis, M., *Production Control of Manufacturing Systems with Production Rates Dependent Failure Rate*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol.39, p. 889- 895, 1994.

L.J Nkeungoue et J.P Kenne., «*Corrective and Preventive Maintenance Rates Control in Production Planning of a FMS* », The 23rd IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control (MIC- 2004), Grindelwald, Switzerland February 23-25, 2004.

L.J Nkeungoué et J.P Kenné., «*Quality Control and Production Planning Problem of Failure Prone Manufacturing Systems* », The 24th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control (MIC- 2005), Innsbruck, Austria February 16-18, 2005.

Montgomery D. C., *Design and Analysis of Experiments*, Third edition, John Willey & Sons, 1991.

Pritsker A. A. B, O'Reilly J. J. et Laval D. K., *Simulation with Visual Slam and Awesim*, John Wiley & Sons, 1997.

Presman, E., Sethi, S.P., et Zhang., Q. *Optimal feedback production planning in a stochastic N- machine flowshop*, Working paper, University of Toronto, Canada, 1994.

Rishel R., *Control of Systems With Jump Markov Disturbances*, IEEE Transactions on Automatic Control, p. 241–244, 1975.

Sethi, S.P., et Zhang, Q., *Hierarchical Decision Making in stochastic Manufacturing Systems*, Birkhäuser, Boston, 1994.

Sharifnia A., *Production Control of Manufacturing system with Multiple Machine State*, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 33, n 7, 1988.

Yan, H., et Zhang Q., *A Numerical Method in Optimal Production and Setup Scheduling to Stochastic Manufacturing Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, n 10, p. 1452 – 1455, 1997.

Yan, H et Zhang, Q., *A numerical method in optimal production and setup scheduling of stochastic manufacturing systems*: Summary of resultat, proceedings of the 34th, conference on decision and control new Orleans, 1995.

Harsham H., *System simulation: the shortest route to applications*, university of Baltimore, Maryland, USA, 2002.

Nikiforov I., *Simulation des systèmes continus*, Printemps 1999.

Riat, J. C., *Validation par simulation d'architecture de commande d'atelier dans l'industrie de production manufacturière : Application aux systèmes automatisés de production d'un grand constructeur automobile*, 287 p, Th. : Productique, Automatique et Informatique industrielle : Lille : 1992.

Lasserre, J.B *An integrated model for job-shop planning and scheduling*, Management Science, 38, 8, 1201-1211, 1992.

Leroudier J., *Simulation à évènements discrets*, Éditions Hommes et Techniques 1980.

Lou, S.X.C., Sethi, S.P., et Zhang, Q., *Optimal feedback production planning in a stochastic two machine flowshop*. *European Journal of Operational research* – Special Issue on Stochastic Control Theory and Operational Research, 73, 331-345, 1994.

Karsky M., *La dynamique des systèmes complexes*, cours ECP, 2002.

Sheldon M. Ross., *Introduction to probability Models* eighth edition, Academic press, 2003.

Van Ryzin, G., Lou, S.X.C., et Gerhwin, S.B., (1993). *Production control for a tandem two – machine system*, IIE Transactions, 25, 5, 5-20.

Xie, X.L., *Hierarchical production control of a flexible manufacturing system*, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 7, 4, 343-360, 1991.