

Analyse modale harmonique des roues de turbines  
hydroélectriques par l'étude des régimes permanents

par

Nicolas MORIN

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE  
AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M. Sc. A.

MONTRÉAL, LE 19 NOVEMBRE 2023

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

©Tous droits réservés, Nicolas Morin, 2023

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre média une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

**PRÉSENTATION DU JURY**

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Souheil-Antoine Tahan, directeur de mémoire  
Département de Génie Mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Jérôme Antoni, codirecteur  
Laboratoire Vibrations Acoustique à l'Institut national des sciences appliquées de Lyon

M. Olivier Doutres, président du jury  
Département de Génie Mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Jérémie Voix, membre du jury  
Département de Génie Mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 15 NOVEMBRE

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE





## REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à offrir mes plus sincères remerciements à Antoine Tahan, Professeur à l'École de technologie supérieure, qui a offert une permanente disponibilité ainsi qu'un soutien hors du commun du stade embryonnaire jusqu'à la toute fin du projet. Je le remercie chaleureusement pour sa gentillesse et pour les nombreux encouragements qu'il m'a portés.

Mes remerciements s'adressent également à Jérôme Antoni, Professeur à l'Institut national des sciences appliquées de Lyon. Merci pour son soutien technique de grande qualité et sa disponibilité malgré le décalage horaire. C'est à ses côtés que j'ai compris les fondements de l'approche bayésienne. C'est grâce à ses précieux conseils et sa rigueur que les objectifs techniques du projet ont été atteints.

Je tiens évidemment à remercier Quentin Dollon, chercheur à l'Institut de Recherche d'Hydro-Québec, pour ces nombreuses heures à m'appuyer dans la compréhension d'absolument toutes les facettes du projet. Le mentorat de Quentin fut crucial dans l'accomplissement des objectifs du projet. Son souci du détail et sa méticulosité m'ont permis de faire d'énormes progrès dans mes compétences en recherche.

Enfin, je tiens à remercier tout autant Christine Monette, Cheffe du département d'analyses mécaniques d'Andritz Hydro Canada Inc., pour sa précieuse aide à la compréhension de la modélisation et des requis de conception des turbines hydrauliques. Tout au long de notre collaboration, Christine a su m'inculquer discernement et ardeur tout en ayant du plaisir. Je la remercie du fond du cœur pour ses conseils, son soutien et sa convivialité durant tous ces mois.



# **Analyse modale harmonique des roues de turbines hydroélectriques par l'étude des régimes permanents**

Nicolas MORIN

## **RÉSUMÉ**

La nouvelle réalité d'utilisation des turbines hydroélectriques comme régulateur de réseau et les récents mouvements de valorisations de la donnée justifient les efforts actuels de développement de jumeaux numériques dans le domaine. L'exploitation des données d'opération des turbines est au cœur du mouvement. En effet, des outils de surveillance permettent de réaliser, en temps réel, le diagnostic sur l'état des groupes. Les deux principaux modes de défaillance des roues des turbines Francis sont la fatigue et la cavitation. Le calcul de leur durée de vie en fatigue est tributaire de l'état initial des micro-défauts sur la surface des aubes dans les zones du raccordement à la couronne et à la ceinture, et aussi de leur historique de chargement. De plus, les outils de conception par simulation numérique gagnent encore à être validés à l'aide de données expérimentales. La caractérisation des comportements dynamiques dans un groupe turbine-alternateur par l'analyse modale en opération est toujours d'actualité en recherche.

Les travaux de ce mémoire s'inscrivent sous la thématique de l'identification modale des roues de turbines hydroélectriques en régime stationnaire. Le projet est en collaboration avec l'IREQ (Hydro-Québec) et Andritz Hydro. Le mémoire présente une revue de littérature succincte sur le comportement dynamique des roues, les méthodes d'identification modale et leurs incertitudes. La méthodologie proposée repose sur l'analyse des harmoniques synchrones de la roue telles que mesurées par des jauges de déformation, en retenant l'hypothèse que chaque harmonique excite un groupe précis de modes vibratoires.

Trois grands volets techniques sont explorés: la modélisation de la réponse de la roue à une excitation périodique, l'identification de systèmes sous le formalisme bayésien et l'analyse modale opérationnelle. Des biais sur la méthode telle que l'omission des excitations stochastiques et de l'amortissement dans le modèle ont été identifiés. Des limites d'identifiabilité au niveau des différentes périodicités d'excitation et de la quantité de modes considérés ont également été identifiées. Des connaissances supplémentaires sont à acquérir, entre autres, sur la séparation des composantes stochastiques et périodiques de signal, sur l'amortissement des turbines et sur les outils de sélection de modèles.

**Mots-clés:** Analyse modale opérationnelle, inférence bayésienne, vibrations synchrones, turbines hydroélectriques, régime stationnaire



# Harmonic modal analysis of hydroelectric turbine runners in steady-state operations

Nicolas MORIN

## ABSTRACT

The emerging use of hydroelectric turbines as grid regulators and recent trends in data valuation justify current efforts to develop digital twins in the field. Indeed, monitoring tools enable real-time diagnosis of turbine conditions. For the runner, fatigue and cavitation are the two main failure modes. For a Francis runner, fatigue calculations depend on the initial state of micro defects on the blades in the connection areas between the crown and the belt, as well as the runner's loading history. Furthermore, the calibration of numerical simulation tools using experimental data is still relevant. Therefore, the characterization of the dynamic behaviour of a turbine-generator unit through modal analysis in operation remains a current research topic.

The presented research works focus on the modal identification of hydroelectric turbine runners in steady-state operation. The project is in collaboration with IREQ (Hydro-Québec) and Andritz Hydro. The master's thesis provides a concise literature review on the dynamic behaviour of turbine runners, modal identification methods and their associated uncertainties. The proposed methodology is based on the analysis of synchronous harmonics of the runner observed in strain gauge measurements, assuming that each harmonic excites a specific group of vibrational modes.

Three main technical aspects are explored: modelling of a runner's response to periodic excitations, system identification using Bayesian formalism, and operational modal analysis. Biases in the method, such as the omission of stochastic excitations and damping in the model have been identified. The method's sensitivity to different excitation periodicities and the number of considered modes have been assessed and applicability limits were also identified. Additional knowledge is required to enhance the proposed method, particularly regarding the separation of stochastic and periodic signal components, understanding turbine runners damping applied to the method, and model selection tools.

**Keywords:** Operational modal analysis, Bayesian inference, synchronous vibrations hydroelectric turbines, steady-state



## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Problématique .....	6
1.3 L'analyse modale opérationnelle .....	6
1.3.1 Acquisition.....	7
1.3.1.1 Fréquence d'échantillonnage et fenêtre temporelle .....	7
1.3.1.2 Quantité des capteurs et leur positionnement .....	8
1.3.1.3 Sources d'excitation.....	9
1.3.1.4 Prétraitement après acquisition .....	10
1.3.2 Traitement numérique des données .....	10
1.3.2.1 Corrélation vs bruit blanc.....	10
1.3.2.2 Le domaine fréquentiel et la densité spectrale.....	11
1.3.2.3 Théorème fondamental de l'OMA.....	12
1.3.2.4 Traitement du signal .....	13
1.3.3 L'identification .....	16
1.3.3.1 Algorithmes d'identification dans le domaine temporel.....	17
1.3.3.2 Algorithmes d'identification dans le domaine fréquentiel.....	17
1.3.4 Excitation harmonique.....	18
1.4 Foyers de vibration des turbines .....	19
1.4.1 Les turbines hydroélectriques .....	19
1.4.2 Interactions Rotor-Stator (RSI).....	22
1.4.3 Excitations hydrauliques haute fréquence .....	24
1.4.3.1 Vortex de Von-Kármán.....	24
1.4.3.2 Turbulence .....	26
1.4.4 Excitations hydrauliques basse fréquence .....	27
1.4.4.1 Torche de cavitation.....	27
1.4.4.2 Vortex interaubes .....	28
1.4.5 La cavitation.....	29
1.4.6 Conclusion foyers d'excitation .....	29
1.5 Modèle de réponse forcée avec excitation périodique par tour .....	29
1.5.1 Modèle de la roue.....	30
1.5.2 Modèle de la force périodique .....	32
1.5.3 Réponse forcée.....	34
1.5.4 Réponse forcée à de multiples excitations périodiques .....	37
1.6 Formalisme bayésien .....	38
1.6.1 Les modèles hiérarchiques.....	39
1.6.2 Chaînes de Markov Monte-Carlo.....	41
1.6.3 L'algorithme de Metropolis-Hastings.....	42
1.6.4 Metropolis-Hastings pour plusieurs paramètres .....	42

1.6.5	Les algorithmes d'identification modale bayésiens .....	44
1.7	Conclusion .....	46
CHAPITRE 2 MÉTHODOLOGIE PROPOSÉE .....		49
2.1	Description de la prise et de la validation de données .....	49
2.1.1	Mesures sur la partie tournante .....	50
2.1.2	Mesures sur la partie fixe .....	51
2.2	Analyse et traitement des données .....	51
2.2.1	Stationnarité .....	52
2.2.2	Périodicités d'excitation .....	53
2.2.3	Extraction des harmoniques synchrones .....	54
2.3	Validation de l'algorithme d'identification modale .....	57
CHAPITRE 3 MODÈLE DE RÉPONSE FORCÉE A UNE EXCITATION HARMONIQUE .....		59
3.1	Modèle matriciel .....	61
3.2	Modèle matriciel à 2 périodicités .....	62
CHAPITRE 4 ALGORITHME D'INFÉRENCE DU MODÈLE .....		65
4.1	Kernel d'échantillonnage de l'erreur .....	66
4.2	Kernel d'échantillonnage de l'excitation .....	66
4.3	Kernel d'échantillonnage de la déformée modale .....	69
4.4	Kernel d'échantillonnage de la fréquence naturelle .....	70
4.5	L'algorithme .....	72
4.6	Analyse de l'identifiabilité .....	73
CHAPITRE 5 IMPLÉMENTATION SUR MODÈLE .....		77
5.1	Évaluation de l'algorithme sur des données non-biaisées .....	78
5.1.1	Génération des données synthétiques .....	78
5.1.2	Inférence des paramètres .....	80
5.2	Analyse d'applicabilité expérimentale .....	88
5.2.1	Limites de quantité d'harmoniques et de périodicités d'excitation .....	88
5.2.2	Limites de quantité de modes .....	89
5.2.3	Analyse de la quantité $P$ d'harmoniques d'excitation .....	90
5.3	Analyse du biais provenant de l'excitation stochastique .....	91
5.3.1	Évaluation du niveau de stochasticité .....	92
5.3.2	Modélisation du bruit .....	92
5.3.3	Analyse de sensibilité de l'algorithme au bruit dans l'excitation .....	93
5.4	Implémentation de l'algorithme sur des données biaisées .....	95
5.4.1	Description du cas d'étude .....	95
5.4.2	Résultats de l'inférence .....	97
5.5	Discussion des résultats sur données analytiques .....	105
5.6	Conclusions de l'implémentation sur données analytiques .....	106
CHAPITRE 6 DÉPLOIEMENT SUR PROTOTYPE .....		107
6.1	Analyse et traitement des données d'opération .....	108



6.2	Résultats d'inférence.....	110
6.3	Discussion.....	117
6.3.1	Indétermination de l'excitation.....	117
6.3.2	Identification des fréquences naturelles.....	118
6.4	Conclusion de déploiement sur prototype.....	118
CHAPITRE 7 DISCUSSION ET CONCLUSION.....		121
7.1	Comparaison des résultats.....	121
7.1.1	Surestimation des harmoniques sur prototype.....	121
7.1.2	Comparaison des variances.....	122
7.1.3	Surestimation des fréquences naturelles.....	122
7.2	Perspectives pour travaux futurs.....	123
7.2.1	Modélisation du système.....	123
7.2.1.1	L'amortissement.....	123
7.2.1.2	Le résidu modal.....	124
7.2.1.3	Traitement de la stochasticité.....	124
7.2.2	Modèle statistique.....	125
7.2.2.1	Combiner les données de deux aubes.....	125
7.2.2.2	Exploiter les modes conjugués.....	125
7.2.2.3	Exploiter les résultats de simulation numérique.....	126
7.3	Conclusion.....	126
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		129



## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 5.1	Résumé de l'analyse de sensibilité de l'algorithme .....78
Tableau 5.2	Paramètres de la force d'excitation .....96
Tableau 5.3	Comparaison de l'inférence des fréquences naturelles des 1 <sup>ers</sup> modes pour 2 essais .....102
Tableau 5.4	Comparaison de l'inférence des fréquences naturelles des 2 <sup>e</sup> modes pour 2 essais .....102
Tableau 5.5	Taux d'acceptation des chaînes de Markov des fréquences naturelles ...103
Tableau 6.1	Résultats d'inférence des 1 <sup>res</sup> fréquences naturelles .....114
Tableau 6.2	Résultats d'inférence des 2 <sup>e</sup> fréquences naturelles .....115
Tableau 6.3	Taux d'acceptation des MCMC des fréquences naturelles $\omega\nu$ .....116



## LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1.1	Graphique de la décomposition en valeurs propres de 16 capteurs sur une plaque excitée par une source a) spatialement diversifiée et b) ponctuelle Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.166).....	9
Figure 1.2	Segmentation et fenêtrage d'un signal Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.203).....	13
Figure 1.3	Étapes de la technique du <i>Zero Padding</i> Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.224).....	14
Figure 1.4	Représentation de l'allure d'un filtre d'intégration jumelé à un filtre passe-haut Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.216).....	16
Figure 1.5	Principaux composants d'une turbine Francis Tirée de Dollon (2021, p.122).....	20
Figure 1.6	Sources d'excitation dans une turbine Francis Tirée de Dollon (2021, p.123).....	21
Figure 1.7	Modes vibratoires des diamètres nodaux 0,1 et 2 d'un disque Tirée de Dörfler et al. (2013).....	22
Figure 1.8	Simulation CFD de la formation du vortex selon différentes formes de bords de fuite a) brusque; b) queue d'aronde; c) Donaldson Tirée de Dörfler et al. (2013, p.120).....	25
Figure 1.9	Amplitude du vortex pour différents bords de fuite Tirée de Dörfler et al. (2013, p.114).....	26
Figure 1.10	a) Torche de surcharge; b) Écoulement sans torche au BEP; c) Torche cohérente en PL; d) Torche à faible charge; e) Pulsations fortes en SNL; f) Rejet de charge Tirée de Seidel et al. (2014).....	27
Figure 1.11	Génération de vortex interaubes .....	28
Figure 1.12	Décomposition de la matrice modale Tirée de Dollon (2021, p.127).....	31
Figure 1.13	Paramétrisation angulaire d'une roue Tirée de Dollon (2021, p.129).....	33
Figure 1.14	Fonction d'excitation escalier $\kappa\Omega t$ Tirée de Dollon (2021, p.131).....	34

Figure 1.15	Schéma d'une proposition de modèle hiérarchique pour l'équation $pyx, \theta, \varepsilon$ .....	40
Figure 1.16	Illustration de deux étapes de calcul d'un échantillonneur de Gibbs Tirée de Bolstad (2009, p.151) .....	43
Figure 1.17	Allure de la <i>posterior</i> en fonction de l' <i>identifiabilité</i> .....	45
Figure 2.1	Position des capteurs de pression ( <b>bleu</b> ) et de déformations ( <b>rouge</b> ) sur une aube .....	50
Figure 2.2	Logigramme de la méthode .....	51
Figure 2.3	Vitesse de rotation du groupe du segment temporel étudié .....	52
Figure 2.4	Ouverture des directrices dans le segment temporel étudié.....	53
Figure 2.5	Analyse fréquentielle de la pression sur les aubes.....	54
Figure 2.6	Mesure des déformations dans le segment temporel étudié.....	55
Figure 2.7	Amplitude des déformations sur 360° .....	55
Figure 2.8	Comparaison entre les harmoniques extraits par la moyenne synchrone et le signal fréquentiel.....	56
Figure 3.1	Transformation de la force d'excitation de la base physique à la base modale.....	60
Figure 5.1	Excitation et réponse modélisées pour le problème non-biaisé .....	79
Figure 5.2	MCMC de la variance $\sigma^2$ de l'erreur du modèle .....	80
Figure 5.3	MCMC des coefficients de l'excitation.....	81
Figure 5.4	Distributions <i>posterior</i> des paramètres $F$ pour le 3 <sup>e</sup> point d'observation du cas non-biaisé.....	82
Figure 5.5	MCMC des déformées modales.....	83
Figure 5.6	Distributions <i>posterior</i> des coordonnées modales du mode ND2 *-2 .....	84
Figure 5.7	MCMC des fréquences naturelles.....	85
Figure 5.8	Distributions des fréquences naturelles co-rotatives.....	86
Figure 5.9	Distributions des fréquences naturelles contra-rotatives .....	87

Figure 5.10	Effet du résidu modal sur le mode ND5-2 .....	90
Figure 5.11	Excitation angulaire $F\theta$ à deux niveaux de stochasticité.....	93
Figure 5.12	Évaluation de la sensibilité des parties imaginaires des coefficients de Fourier de l'excitation au HSR .....	94
Figure 5.13	Harmoniques de l'excitation (en <b>rouge</b> ) et de la réponse (en <b>noir</b> ).....	97
Figure 5.14	MCMC de la variance de l'erreur.....	98
Figure 5.15	Histogramme de la variance $\sigma^2$ de l'erreur.....	98
Figure 5.16	MCMC d'un coefficient d'excitation.....	99
Figure 5.17	Histogrammes des coordonnées modales du mode ND2*-1 .....	100
Figure 5.18	Reconstruction du signal d'un point d'observation pour l'essai 1.....	104
Figure 6.1	Points de mesure des déformations ( <b>rouge</b> ) et des pressions ( <b>bleu</b> ) .....	108
Figure 6.2	a) Mesure de pression intrados à 30 cm du bord d'attaque (amont) sur l'aube 2 b) Harmoniques extraits par la moyenne synchrone (vert) du signal de déformation ( <b>noir</b> ).....	109
Figure 6.3	Distribution de la variance $\sigma^2$ de l'erreur sur données prototype .....	110
Figure 6.4	MCMC de la partie réelle du 1 <sup>er</sup> harmonique de l'excitation associée au capteur #2.....	111
Figure 6.5	Distribution des coefficients de l'excitation pour le capteur 2.....	112
Figure 6.6	Distributions des cinq premiers points de la déformée modale $\psi_v$ du mode ND2-1 .....	113
Figure 6.7	Comparaison entre les harmoniques reconstruits et le signal (capteur 3).....	117





## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

<i>ARMA</i>	Auto-régressif à moyenne mobile <i>AutoRegressive with Moving Average</i>
<i>BEP</i>	Régime de rendement maximal <i>Best Efficiency Point</i>
<i>BFFTA</i>	Algorithme bayésien par transformées de fourier rapides <i>Bayesian Fast Fourier Transform Algorithm</i>
<i>BSDA</i>	Algorithme bayésien par densités spectrales <i>Bayesian Spectral Density Algorithm</i>
<i>CDA</i>	Convertisseur digital-analogique
<i>CFD</i>	Mécanique des fluides numérique <i>Computational Fluid Dynamics</i>
<i>DPL</i>	Régime de charge partielle profonde <i>Deep Part-Load</i>
<i>ERA</i>	Algorithme de "réalisation des valeurs propres" <i>Eigen-Realization Algorithm</i>
<i>FDD</i>	Décomposition du domaine fréquentiel <i>Frequency Domain Decomposition</i>
<i>FRF</i>	Fonction de réponse fréquentielle <i>Frequency Response Function</i>
<i>FSI</i>	Interactions fluide structure <i>Fluid Structure Interaction</i>
<i>IRF</i>	Fonction de réponse impulsionnelle <i>Impulse Response Function</i>
<i>ITD</i>	Méthode temporelle d'Ibrahim <i>Ibrahim Time Domain</i>
<i>LS</i>	Moindres carrés <i>Least-Squares</i>
<i>LSCE</i>	Moindres carrés sur exponentielles complexes <i>Least-Square Complex Exponential</i>
<i>LSCF</i>	Moindres carrés sur les fréquences complexes <i>Least-Square Complex Frequency</i>
<i>MCMC</i>	Chaînes de markov Monte-Carlo <i>Markov Chains Monte-Carlo</i>
<i>MLE</i>	Estimateur au maximum de vraisemblance <i>Maximum Likelihood Estimator</i>
<i>MPV</i>	Valeur la plus probable <i>Most Probable Value</i>
<i>NL</i>	Régime de charge à vide

	<i>No-Load</i>
<i>NLLF</i>	Fonction de log-vraisemblance négative <i>Negative Log-Likelihood Function</i>
<i>NTRCI</i>	Interactions turbine-distributeur non triviales <i>Non Trivial Runner Casing Interactions</i>
<i>OMA</i>	Analyse modale opérationnelle <i>Operational Modal Analysis</i>
<i>PEM</i>	modèle d'erreur de prédiction <i>Prediction Error Model</i>
<i>PL</i>	Régime de charge partielle <i>Part-Load</i>
<i>PSD</i>	Densité spectrale de puissance <i>Power Spectral Density</i>
<i>RSI</i>	Interactions rotor-stator <i>Rotor-Stator Interactions</i>
<i>SNR</i>	Rapport signal-bruit <i>Signal-to-Noise Ratio</i>
<i>SSI</i>	Identification de sous-espaces stochastiques <i>Stochastic Subspace identification</i>
<i>SVD</i>	Décomposition en valeurs singulières <i>Singular Value Decomposition</i>

## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

$A_1, A_2$	Matrice de Duncan de l'espace d'état continu
$A_{\nu,\lambda}$	Matrice résiduelle du mode $\lambda$ de diamètre nodal $\nu$
$B$	Matrice d'influence pour l'expression des forces
$C$	Matrice des vecteurs propres
$c_{q,\nu}$	Harmonique de répétition $q$ du diamètre nodal $\nu$ de l'excitation dans la base modale
$f$	Vecteur des forces d'excitation
$F(\theta)$	Déformations spatiales de l'excitation
$F^{1Z}$	Matrice des coefficients de Fourier d'une excitation une fois par tour (1Z)
$F_p$	Harmonique $p$ des $P$ harmoniques de l'excitation à un point observé sur une aube
$f$	Fréquence [Hz]
$G$	Matrice gyroscopique
$H$	Fonction de transfert ou matrice des FRF
Hz	Hertz
$h$	Fonction de transfert ou matrice des IRF
$K$	Matrice de rigidité
$M$	Matrice de masse
$M$	Nombre de degrés de liberté d'un modèle
$N$	Quantité de points observés sur une aube
$Ns$	Newtons secondes
$N_{\text{con}}$	Quantité de paramètres connus
$N_{\text{inc}}$	Quantité de paramètres inconnus
$N_{\text{ct}}$	Quantité de contraintes au problème d'identification
$P$	Quantité d'harmoniques de l'excitation
$P_\nu$	Matrice de transformation associée au diamètre nodal $\nu$
$p(\theta)$	Probabilité de réalisation de $\theta$
$p(y)$	Probabilité de réalisation de $y$

$p(y \theta)$	Fonction de vraisemblance des paramètres $\theta$
$p(\theta y)$	Densité de probabilité de la réalisation $\theta$ sachant la donnée $y$
$Q$	Quantité d'harmoniques observées par diamètre nodal
$\mathbf{q}$	Vecteur des coordonnées modales
$\mathbf{q}_\nu$	Vecteur des coordonnées modales sur le diamètre nodal $\nu$
$q(\theta)$	Kernel d'échantillonnage du paramètre $\theta$
$R_{xy}(\tau)$	Fonction de corrélation entre les signaux $x$ et $y$
$S_{xy}(\omega)$	Densité spectrale de puissance de signaux $x$ et $y$
$W_{\nu,\lambda}$	Matrice contenant les fréquences naturelles du mode $\lambda$ de diamètre nodal $\nu$
$x$	Variable d'état continue
$X_\nu$	Matrice des harmoniques de la réponse pour un diamètre nodal $\nu$
$X$	Matrice des vecteurs propres
$\mathbf{y}$	Vecteur de déplacement généralisé
$\hat{\mathbf{y}}$	Vecteur des données mesurées
$Y(\omega)$	Transformée de Fourier de $y$
$Z_G$	Nombre de directrices du distributeur de la turbine
$Z_R$	Nombre d'aubes de la roue de la turbine
$\alpha$	Angle inter-aube
$\delta$	Fonction impulsion (Dirac)
$\varepsilon_k$	Erreur sur le modèle
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Erreur du modèle de réponse forcée à une excitation périodique
$\boldsymbol{\theta}$	Vecteur des paramètres
$\theta$	Angle
$\kappa(\theta)$	Aube excitée à l'angle $\theta$
$\Lambda$	Quantité de modes d'un diamètre nodal $\nu$ sur une aube
$\lambda_n$	Valeur propre du mode $n$
$\mu S$	microdéformations
$\nu$	Diamètre nodal d'un mode de vibration
$\xi$	Taux d'amortissement
$\xi_n$	Taux d'amortissement du mode $n$

$\sigma^2$	Variance homoscédastique
$\Upsilon_v(\Omega t)$	Fonction d'excitation nodale
$\varphi_v$	Force généralisée du diamètre nodal $v$
$\phi_v$	Phase inter-aube du diamètre nodal $v$
$\Phi_v$	Matrice de transformation d'une excitation de la base physique à la base modale
$\psi$	Matrice des déformées modales
$\Psi_v$	Matrice des déformées modales du diamètre nodal $v$
$\Psi_v^+$	Matrice des déformées modales du diamètre nodal $v$ de phase $\phi_v$
$\Psi_v^-$	Matrice des déformées modales du diamètre nodal $v$ de phase $-\phi_v$
$\psi_v^{rf}$	Déformée modale contra-rotative du diamètre nodal $v$ de l'aube $r$ du mode $\lambda$
$\psi_v^{rb}$	Déformée modale co-rotative du diamètre nodal $v$ de l'aube $r$ du mode $\lambda$
$\psi_{v,\lambda}$	Déformée modale de diamètre nodal $v$ de répétition $\lambda$ d'une aube
$\psi_{+v,\lambda}$	Déformée modale de diamètre nodal co-rotatif $+v$ du mode $\lambda$ d'une aube
$\psi_{-v,\lambda}$	Déformée modale de diamètre nodal contra-rotatif $-v$ du mode $\lambda$ d'une aube
$\Omega$	Vitesse de rotation de la roue
$\Omega_v^{rf}$	Matrice des fréquences modales associées à $\psi_v^{rf}$
$\Omega_v^{rb}$	Matrice des fréquences modales associées à $\psi_v^{rb}$
$\Omega$	Vitesse de rotation de la roue [Hz]
$\omega_{v,\lambda}$	Fréquence naturelle de diamètre nodal $v$ de répétition $\lambda$
$\omega_{+v,\lambda}$	Fréquence naturelle de diamètre nodal co-rotatif $+v$ de répétition $\lambda$
$\omega_{-v,\lambda}$	Fréquence naturelle de diamètre nodal contra-rotatif $-v$ de répétition $\lambda$



# INTRODUCTION

## 0.1 Contexte

L'hydroélectricité joue un rôle important dans l'économie canadienne et québécoise. En effet, plus de 60% de l'électricité produite au Canada et 95,5% de l'électricité au Québec provient de ces centrales hydroélectriques (Waterpower Canada, 2022; Hydro-Québec, 2022). L'hydroélectricité est produite par des groupes turbines-alternateurs synchrones puisant leur énergie dans l'écoulement d'eau (barrages ou au fil de l'eau). La roue de la turbine transforme l'énergie cinétique et potentielle de l'écoulement en énergie mécanique qui fait tourner un alternateur synchrone pour produire de l'énergie électrique. Plusieurs types de turbines sont conçues en fonction de la configuration hydraulique (hauteur de chute et débit) de l'installation. Les turbines Kaplan sont utilisées notamment pour les hauts débits et les faibles hauteurs de chute tandis que les turbines Pelton sont davantage utilisées pour de grandes hauteurs de chute et de faibles débits. Les turbines Francis peuvent être utilisées dans une large plage de configuration hydraulique (Sangal et al., 2013). Ces turbines sont utilisées dans 60% du parc hydroélectrique mondial et elles se démarquent par leur haut rendement, jusqu'à 96%, en régime optimal (Liu et al., 2015).

Les groupes sont généralement exploités à leur limite d'efficacité pour maximiser les revenus de l'exploitant. À cause de leur capacité de production, les groupes arrêtés pour un bris représentent une grande perte financière (Liu et al., 2015). De plus, l'arrivée d'autres sources d'énergies renouvelables telles que l'éolien et le solaire provoque une intermittence de l'utilisation des groupes, augmentant ainsi le nombre de démarrages et d'arrêts, et élargit leur plage d'opération. Les efforts sur les roues provoqués par ces changements ont tendance à diminuer leur efficacité énergétique, mais aussi leur espérance de vie par l'accélération de leur endommagement en fatigue (Gagnon et al., 2010; Gagnon & Thibault, 2015; Monette et al., 2016; Savin et al., 2021).

Les outils actuels de calcul de la fatigue comme les analyses S-N cumulées, les modèles de tolérance au dommage et l'analyse basée sur le modèle de Kitagawa sont tributaires de leurs données d'entrées. Ces données consistent principalement en l'état initial des microdéfauts aux endroits critiques sur la surface des aubes et l'historique de chargement de la roue. De plus, les roues de turbines, conçues initialement pour une utilisation optimale en régime stationnaire, sont maintenant utilisées comme régulateur du réseau. Ce changement renforce l'actualité et le besoin de mieux comprendre la réponse dynamique des roues afin d'optimiser leur conception et d'améliorer les outils de prédiction de leur dégradation. En ce sens, la caractérisation du comportement dynamique dans un groupe turbine-alternateur est alors toujours d'actualité en recherche (Morissette et al., 2016; Louyot et al., 2020; Savin et al., 2021; Dollon, 2021).

Trois sources d'information complémentaires sont utilisées pour décrire le comportement dynamique des roues de turbines hydroélectriques : les essais sur modèles réduits, la simulation numérique et l'analyse empirique des données d'opération. Chacune des sources comporte ses limitations. Pour les essais sur modèles réduits, il faut un modèle de transposition permettant la mise à l'échelle des phénomènes fluidiques et mécaniques pour pouvoir exploiter pleinement les mesures expérimentales. La simulation numérique dépend de simplifications préalables, dont la considération de seulement la roue et son arbre, et peut être assez chronophage (Nennemann et al., 2016; Louyot et al., 2020; Salehi et al., 2021). Les données expérimentales disponibles sur différentes plages d'opération restent généralement limitées (de quelques secondes à quelques minutes seulement) à cause de l'environnement extrême dans lequel se trouve la roue (Ben Salah, 2014). Les données expérimentales sont également restreintes dans l'espace (peu de capteurs mesurant que quelques degrés de liberté) et dans le temps (la durée d'une campagne de mesure) (Dollon, 2021). Pour contourner cette problématique, on cherche à développer des outils de simulation pour extrapoler les signaux sur de plus longues périodes et sur des plages de fonctionnement qui n'ont pas été mesurées. Le but *in fine* est d'identifier les caractéristiques modales du système avec le peu de données accessibles pour permettre l'extrapolation de ces signaux de manière plus précise à l'aide des outils de simulation existants.



Le présent projet a pour but, à terme, l'identification modale des roues de turbines hydroélectriques sous plusieurs régimes permanents (à vide, charge partielle, charge complète). De nos jours, le développement de jumeaux numériques pour les groupes turbines-alternateurs reçoit beaucoup d'effort. Le but des jumeaux numérique est d'utiliser, en temps réel, les données des outils de surveillance afin de réaliser, entre autres, le diagnostic et le pronostic des groupes. Ce projet de caractérisation modale en régime de production est donc d'utilité pour cette finalité. L'analyse modale opérationnelle (OMA) *in situ* du système permet de développer ces outils de surveillance et de diagnostic des groupes turbine-alternateurs. En effet, la réponse de la roue à son chargement, l'intrant des outils de surveillance, s'exprime selon les paramètres dynamiques du système qui eux dépendent de l'entièreté l'environnement mécanique de la turbine, de son fonctionnement et de l'écoulement d'eau qui la traverse. Pour Hydro-Québec, exploitant et partenaire industriel du projet, la connaissance du comportement dynamique de la turbine permettra d'élaborer des plans de maintenance conditionnelle de manière plus précise, et d'optimiser les démarrages et les arrêts des groupes. Pour Andritz Hydro, concepteur et fabricant, l'amélioration de sa compréhension des interactions de type fluide-structure (FSI) du système permettra de perfectionner ses techniques de dimensionnement. En somme, le projet permettra d'obtenir des installations hydroélectriques plus fiables et rentables.

Les travaux de Dollon (2021) ont exploré l'OMA des roues en régime transitoire. En continuité à ces travaux, le présent mémoire aborde l'estimation de la réponse modale des roues en régime de production (régime stationnaire). La méthodologie repose sur l'analyse de l'interaction entre les harmoniques de la vitesse de rotation et les modes vibratoires du système. Le principal objectif du projet est de développer un outil d'identification du système basée sur le formalisme bayésien à partir du modèle de réponse forcée avancé dans les travaux de Dollon (2021). Le projet a été divisé en sous-objectifs spécifiques présentés à la section 0.2.

## 0.2 Objectifs

Le développement de l'outil d'identification modale de roues de turbines hydroélectriques à partir des données de régime permanent est séquencé en trois objectifs spécifiques :

- développer un algorithme d'identification des paramètres du modèle sous le formalisme bayésien;
- valider l'algorithme sur un cas d'étude;
- déployer l'outil sur un cas pratique de turbine hydroélectrique soumise à un débalancement synchrone;

L'atteinte de ces objectifs permet d'améliorer notre compréhension et, par conséquent, notre prédiction du comportement dynamique des turbines hydroélectriques.

## 0.3 Structure du mémoire

Le mémoire est structuré en sept (7) chapitres. Le CHAPITRE 1 est consacré à la revue de littérature qui permet de situer la recherche dans le domaine ainsi que d'énoncer les connaissances nécessaires à l'atteinte des objectifs. Le CHAPITRE 2 décrit la méthodologie proposée. Le CHAPITRE 3 décrit l'adaptation du modèle proposé par Dollon (2021) au cas d'étude. Le CHAPITRE 4 décrit le modèle probabiliste utilisé pour identifier le modèle. Le CHAPITRE 5 décrit la validation de l'algorithme sur un cas d'étude. Le CHAPITRE 6 décrit le déploiement de l'algorithme sur un cas pratique. Ce mémoire se conclut par une discussion des résultats au CHAPITRE 7.

# CHAPITRE 1

## REVUE DE LA LITTÉRATURE

### 1.1 Introduction

La fonction de transfert est une signature caractéristique d'une structure. Elle décrit les modes vibratoires à l'origine des résonances. La combinaison de ces modes permet d'approximer la dynamique de la structure. Ces mécanismes sont complexes à modéliser, surtout dans le cas de structures immergées dans un écoulement. Des approximations sont réalisables par la simulation numérique des fréquences naturelles et des déformées modales de structures ou encore par des méthodes acoustiques. Toutefois, la prédiction de l'amortissement reste un enjeu (Chamberland-Lauzon et al., 2019; Roig Bauzà et al., 2020). La caractérisation du système réel par l'analyse modale opérationnelle (OMA), en utilisant des données collectées *in situ*, reste un outil de choix pour caractériser ses modes vibratoires et calibrer les outils numériques (Valentin et al., 2018).

Les travaux de Dollon et al. (2020), démontrent la possibilité de réaliser l'OMA de roues de turbines hydroélectriques en régime transitoire. De plus, les travaux de Dollon (2021) ont mis en évidence un modèle de réponse harmonique forcée amenant la possibilité de réaliser l'OMA des roues de turbines hydroélectriques à l'aide des données en régime de production. Dans ce régime, l'excitation est dominée par les harmoniques de la vitesse de rotation de la roue. Le bruit blanc de l'excitation étant marginal, les modes de la structure ne sont pas excités selon les hypothèses de l'OMA traditionnelle. Les méthodes d'analyse modale usuelles ne sont donc pas applicables au système étudié. L'utilisation d'un modèle de réponse forcée à une excitation harmonique est alors plus représentative du régime et pourrait permettre de le caractériser. En effet, Dollon (2021) émet l'hypothèse qu'une roue soumise à un débalancement pourrait avoir un contenu harmonique assez riche pour réaliser son OMA. Les imperfections et les asymétries de la fabrication et de l'assemblage mécanique enrichissent le contenu harmonique d'une roue en régime permanent. Sans considération de ce débalancement, l'excitation stochastique est insuffisante pour générer la résonance nécessaire à la mise en évidence des modes propres de

la roue. Les travaux de Dollon (2021) amènent une opportunité de développement d'une innovante méthode d'analyse modale harmonique des roues de turbines hydroélectriques en régime stationnaire.

## **1.2 Problématique**

Chaque harmonique de la vitesse de rotation de la roue excite un mode de résonance précis (Dollon, 2021). On peut alors réaliser l'analyse de l'amplification des harmoniques de la vitesse de rotation de la roue en liant les données en régime de production au modèle de réponse harmonique forcée. Les données couplées au modèle permettront, à l'aide des amplitudes relatives de crêtes de contraintes, de localiser les modes du système dans le domaine fréquentiel, de déterminer et leur déformée modale. Dollon (2021) a démontré le potentiel du formalisme bayésien pour réaliser l'identification des paramètres d'un modèle à l'aide de données d'opération. Cette approche sera étudiée dans ce mémoire.

La résolution de la problématique fait appel à plusieurs domaines techniques. Les données tirées de l'opération des groupes turbine-alternateurs doivent d'abord être traitées afin d'exprimer les propriétés physiques recherchées du système. On cherche ensuite à identifier les paramètres du modèle. On fait alors appel au domaine de l'analyse modale opérationnelle présenté à la section 1.3. Une revue des foyers d'excitation et du modèle de réponse harmonique forcée d'une roue de turbine hydroélectrique est proposée dans les sections 1.4 et 1.5. Le modèle statistique ainsi que ses paramètres doivent être liés. Le formalisme bayésien et les techniques qui en découlent seront alors introduits à la section 1.6. Le présent chapitre se clôturera par une synthèse de la revue de littérature dans la présentation de la problématique sous son cadre technique dans la conclusion à la section 1.7.

## **1.3 L'analyse modale opérationnelle**

Le domaine de l'analyse modale opérationnelle (OMA) comprend toutes les étapes entre l'acquisition de données d'opération sur une machine et la modélisation des données menant à l'identification des modes vibratoires de structures ainsi que leurs incertitudes. L'OMA est un

problème inverse. En effet, au lieu de modéliser et simuler un système afin de prédire sa réponse, on mesure la réponse du système et on le décrit avec un modèle. Le modèle met en évidence les valeurs physiques représentatives du système, ses fréquences naturelles, leur amortissement et leur déformée modale. Le principe de l'OMA repose sur le fait qu'une structure soumise à une excitation blanche délivre une réponse dont la matrice des densités spectrales ou la matrice de corrélation coïncide avec la fonction de réponse fréquentielle (FRF) ou la fonction de réponse impulsionnelle (IRF). Cette section décrit les étapes nécessaires pour réaliser l'analyse modale opérationnelle d'un système et les fondements du domaine.

### **1.3.1 Acquisition**

L'OMA commence par l'acquisition des données du système en exploitation. Les données sont mesurées généralement par des capteurs piézoélectriques (forces ou accélération), des jauges de déformation (*déplacement*), des capteurs électromagnétiques (vitesse) (Brincker, 2015 p.168). Les capteurs renvoient un signal qui doit d'abord être filtré, discrétisé puis traduit en déplacement, en déformation, vitesse ou accélération. Un filtre anti-repliement (*Anti-aliasing*) est souvent appliqué sur la bande passante décrite par la fréquence d'échantillonnage. La discrétisation est réalisée par des convertisseurs analogiques-numériques (CDA) (Brincker & Ventura, 2015, p.183).

#### **1.3.1.1 Fréquence d'échantillonnage et fenêtre temporelle**

La fréquence d'échantillonnage doit être choisie en fonction de la bande passante souhaitée. La fréquence de Nyquist dicte les limites de la bande passante. En effet, la limite haute de la bande passante est égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Selon Brincker (2015, p.158), la fréquence d'échantillonnage devrait être au moins 2,4 fois plus grande que la limite haute de la bande passante d'intérêt afin d'éviter le phénomène de repliement. Si le convertisseur utilisé n'est pas sensible au suréchantillonnage, alors augmenter la fréquence d'échantillonnage permettra d'augmenter l'étendue de la bande passante d'analyse. Le cas échéant, selon le théorème de Parseval, la variance des mesures sera proportionnelle à la fréquence d'acquisition. Ce phénomène est à considérer avant de suréchantillonner le signal.

Selon Brincker (2015), on estime la fenêtre temporelle minimale (et par conséquent la résolution spectrale) en fonction de la plus basse fréquence étudiée  $f_{min}$  et de son amortissement  $\xi$ . L'étendue de la fenêtre temporelle minimale  $T_{tot}$  est estimée à environ vingt fois la mémoire de la fréquence d'intérêt. On peut alors décrire le temps  $T_{tot}$  selon l'équation (1.1) tirée de Brincker & Ventura (2015, p.159) :

$$T_{tot} > \frac{20}{2\xi f_{min}} = \frac{10}{\xi f_{min}} \quad (1.1)$$

Alors plus la fréquence d'intérêt et son amortissement sont petits, plus la taille de la fenêtre temporelle augmente.

### 1.3.1.2 Quantité des capteurs et leur positionnement

Pour conduire une OMA, un certain nombre de capteurs doivent être positionnés à des endroits stratégiques sur le système. Le nombre de canaux devrait être au moins le même que le rang de la matrice de densité spectrale du modèle étudié (Brincker & Ventura, 2015). Cela dépend alors de la quantité de modes étudiés et la quantité de sources de bruits. Selon Brincker (2015), le rang d'un problème pour l'OMA ne devrait jamais être estimé plus bas que quatre (4), en considérant les incertitudes sur le positionnement des capteurs, un minimum de cinq ou six capteurs devraient alors être utilisés pour réaliser une OMA.

Pour la localisation des capteurs, on cherche à les positionner sur les ventres de la déformée modale afin de mesurer le plus grand déplacement possible (sensibilité optimale). Dans le même ordre d'idée, un capteur positionné sur un noeud de la déformée modale n'envoie théoriquement aucune information. Avant de positionner les capteurs sur le système, il faut donc avoir une idée des coordonnées modales de la structure. On peut isoler les coordonnées modales dans un modèle ou les approximer par simulation numérique.

### 1.3.1.3 Sources d'excitation

Un point très important pour réaliser l'OMA d'une structure est d'avoir une excitation diversifiée spatialement. En effet, si l'excitation utilisée ne provient que d'une seule source, le rang pratique du problème est d'un. Le problème n'a qu'une seule valeur singulière pratique. On peut aussi exprimer ce problème en termes de covariance. Les canaux de données seront dépendants entre eux, alors la fonction de corrélation entre les canaux ne représentera pas l'impulsion nécessaire à l'excitation de toute la bande de fréquence analysée. La figure 1.1 illustre la réponse d'un système avec une excitation spatialement diversifiée versus celle d'un système avec une excitation ponctuelle.

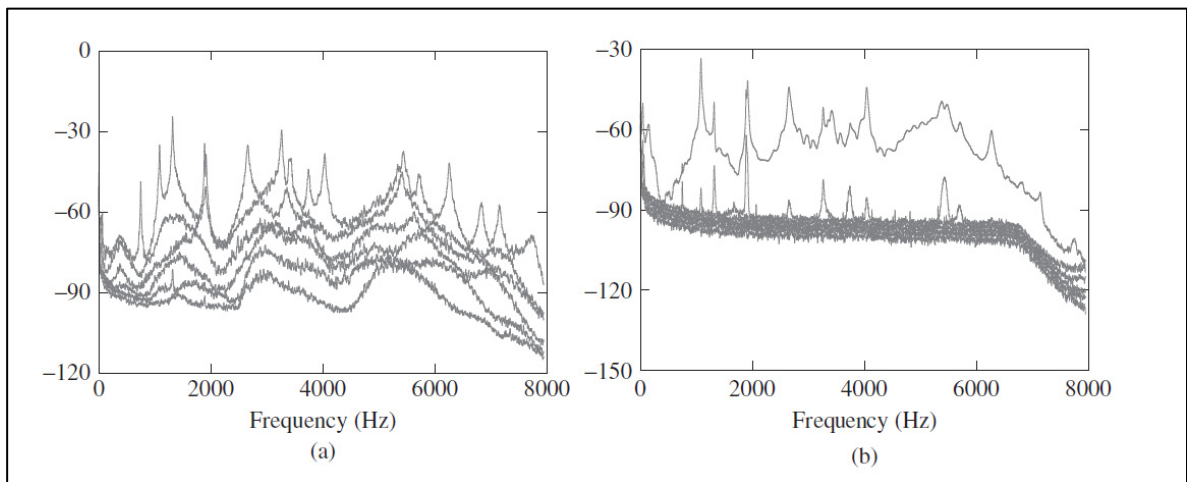


Figure 1.1 Graphique de la décomposition en valeurs propres de 16 capteurs sur une plaque excitée par une source a) spatialement diversifiée et b) ponctuelle  
Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.166)

Les bandes plates sur presque toute la bande passante de la plaque excitée par une source ponctuelle (en b) indiquent le manque d'information en sortie du système. Pour s'assurer d'avoir une excitation soit suffisamment diversifiée, Brincker (2015) avance qu'il faut confirmer que plusieurs sources indépendantes d'excitation soient présentes, i.e. il est nécessaire de travailler avec un système MIMO. La réponse b) pourrait toutefois caractériser celle d'un système SIMO (*Single Input Multiple Output*). Dans ce genre d'analyse, une

excitation diversifiée spatialement n'est pas requise. Dans le cas d'une roue de turbine hydroélectrique, les sources d'excitation présentes sont revues à la section 1.4.

#### **1.3.1.4 Prétraitement après acquisition**

Une fois les données acquises, il est important d'en valider la qualité au site avant de terminer l'expérimentation. Selon Brincker (2015, p.196), les saturations, le bruit excessif ou un faible rapport signal-bruit (SNR) et des valeurs aberrantes sont de bons indicateurs de signal de mauvaise qualité. On retrouve des saturations (*Clipping*) quand l'amplitude du signal sature le convertisseur. On peut valider la présence de saturations en analysant la moyenne et la variance mobiles du signal ou avec l'analyse crête à crête du signal. Le bruit excessif peut provenir de machines environnantes, de radiation électromagnétique ou du système d'acquisition. On peut valider l'ampleur du bruit en inspectant le SNR. Un faible SNR indique un bruit excessif. En pratique, le bruit des machines environnantes est davantage une source d'excitation sollicitant les modes du système étudié qu'un bruit seulement superposé au signal. Enfin, les valeurs aberrantes sont caractérisées par des points ou pics inattendus dans les données.

#### **1.3.2 Traitement numérique des données**

Une fois les données acquises et leur qualité confirmée, le traitement permet de dégager l'information recherchée à l'aide de filtres et de transformations. Cette section présentera la fonction de corrélation, le domaine fréquentiel, les filtres utiles.

##### **1.3.2.1 Corrélation vs bruit blanc**

Dans la section 1.3.1.3, on mentionne qu'en OMA, l'excitation est, par hypothèse, un bruit blanc gaussien. Dans ce cas, toutes les propriétés du signal sont comprises dans sa fonction de corrélation (Brincker & Ventura, 2015, p.28).



Un bruit blanc  $x(t)$ , par définition, ne possède aucune corrélation avec  $x(t + \tau)$  sauf au moment  $\tau = 0$ . La fonction de corrélation  $R_x(\tau)$  du signal  $x(t)$  peut alors être exprimé comme une fonction Dirac  $\delta(\tau)$ :

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = 2\pi G_{x0}\delta(\tau) \quad (1.2)$$

tirée de Brincker & Ventura (2015, p.130) où  $G_{x0}$  est une constante. Sachant que la transformée de Fourier d'une impulsion Dirac donne une constante dans le domaine fréquentiel, la densité spectrale résultante de l'équation (1.2) est égale à  $G_{x0}$  pour toutes les fréquences du domaine. Ce principe montre alors qu'un bruit blanc permet théoriquement d'exciter toutes les fréquences. Dans le domaine fréquentiel, on pourra ensuite y déterminer les pics de résonances entre l'excitation et les fréquences naturelles du système.

### 1.3.2.2 Le domaine fréquentiel et la densité spectrale

La fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  d'un signal peut être exprimée dans le domaine fréquentiel à l'aide la transformée de Fourier et donne la densité spectrale (*Théorème de Wiener Khintchine*) selon l'équation (1.3).

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) s'applique également pour la corrélation croisée  $R_{xy}(\tau)$  entre deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ . L'aire sous la courbe de la densité spectrale de puissance (PSD) représente la variance  $\sigma^2$  du signal auto corrélé ou la covariance dans le cas d'une corrélation croisée.

La densité spectrale de puissance permet de visualiser la distribution de l'énergie d'un signal en fonction de la fréquence. Dans ce domaine, il est plus facile de voir de quelle bande de fréquence provient l'énergie du signal et où se situent les zones de résonance. Le théorème

fondamental de l'OMA (voir section 1.3.2.3) peut être exprimé dans le domaine temporel ou fréquentiel.

### 1.3.2.3 Théorème fondamental de l'OMA

Le théorème fondamental de l'OMA permet de définir la liaison entre l'excitation  $\mathbf{x}(t)$  et la réponse  $\mathbf{y}(t)$  du système dynamique. Sachant qu'on peut exprimer la réponse d'un système par la convolution de l'excitation et de sa réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}(t)$  :

$$\mathbf{y}^T(t) = \mathbf{x}^T(t) * \mathbf{h}^T(t) \quad (1.4)$$

on manipule l'équation (1.4) pour obtenir le théorème fondamental général de l'OMA liant l'autocorrélation de la réponse  $\mathbf{R}_y(\tau)$  et celle de l'excitation  $\mathbf{R}_x(\tau)$  par sa convolution avec la réponse impulsionnelle  $\mathbf{H}(\tau)$  :

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \mathbf{H}(-\tau) * \mathbf{R}_x(\tau) * \mathbf{H}^T(\tau) \quad (1.5)$$

la transformée de Fourier et les propriétés de la convolution permettent d'exprimer la relation dans le domaine fréquentiel par la multiplication (1.6).

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_y(\omega) &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega) \mathbf{G}_x(\omega) \tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}(-i\omega) \mathbf{G}_x(\omega) \tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les équations (1.4) à (1.6) sont tirées de Brincker & Ventura (2015, p.129).

On obtient alors le théorème fondamental de l'OMA liant une excitation blanche à sa réponse dans le domaine fréquentiel.

### 1.3.2.4 Traitement du signal

Pour obtenir une estimation des fonctions de corrélation et des PSD permettant d'utiliser le théorème fondamental pour caractériser le système, les données prétraitées (voir section 1.3.1.4) doivent être analysées. Cette section fait état des manipulations principalement utilisées sur les données pour produire les fonctions de corrélation et les PSD contenant l'information sur le système étudié.

#### ***Detrending et Segmentation***

Brincker et Ventura (2015, p.203) mentionnent qu'en OMA on s'intéresse à la dynamique du système. C'est pourquoi on procède au *Detrending* du signal. Cette action consiste à retirer la moyenne mobile (*DC offset*) du signal afin de n'analyser que ses fluctuations. Pour contrer le phénomène de changement local de moyenne (*DC drift*), on segmente le signal afin de retirer le décalage par segments. Pour pouvoir ensuite reconstruire le signal sans discontinuités entre les segments, on applique un fenêtrage (*Tapering Window*) afin de forcer à zéro les extrémités du segment comme l'illustre la figure 1.2.

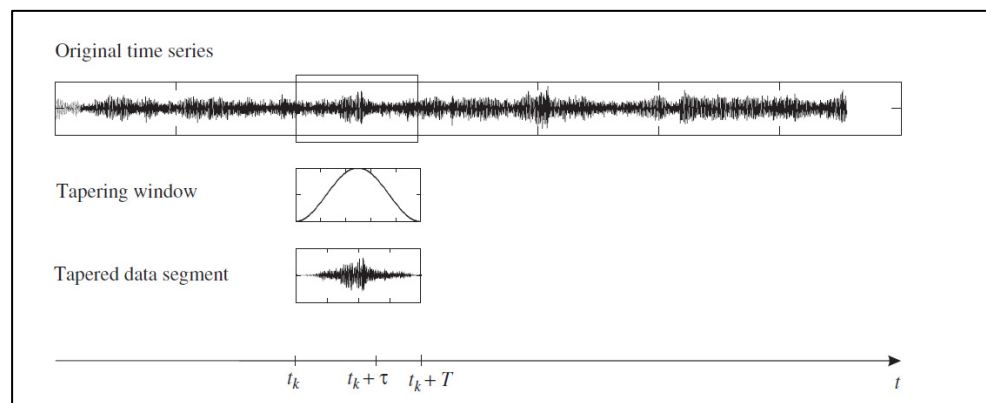


Figure 1.2 Segmentation et fenêtrage d'un signal  
Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.203)

Pour reconstruire le signal afin que la somme des segments soit la plus près possible du signal d'origine, une pratique courante est d'utiliser une fenêtre de Hanning en superposant les segments à 50% (Brincker & Ventura, 2015). Cette technique amène une estimation biaisée de

la fonction d'autocorrélation par une fuite spectrale. Une autre technique consiste à utiliser des fenêtres exponentielles. Ces fenêtres créent un biais de l'amortissement corrigible (Randall et al., 2016). Une autre alternative est le *Zero Padding*. La technique consiste à doubler la fenêtre analysée en y ajoutant des zéros, moyenner les segments dans le domaine fréquentiel, rejeter la partie oscillant autour de zéro de la fonction de corrélation et diviser les données par une fenêtre triangulaire telle qu'illustrée à la figure 1.3.

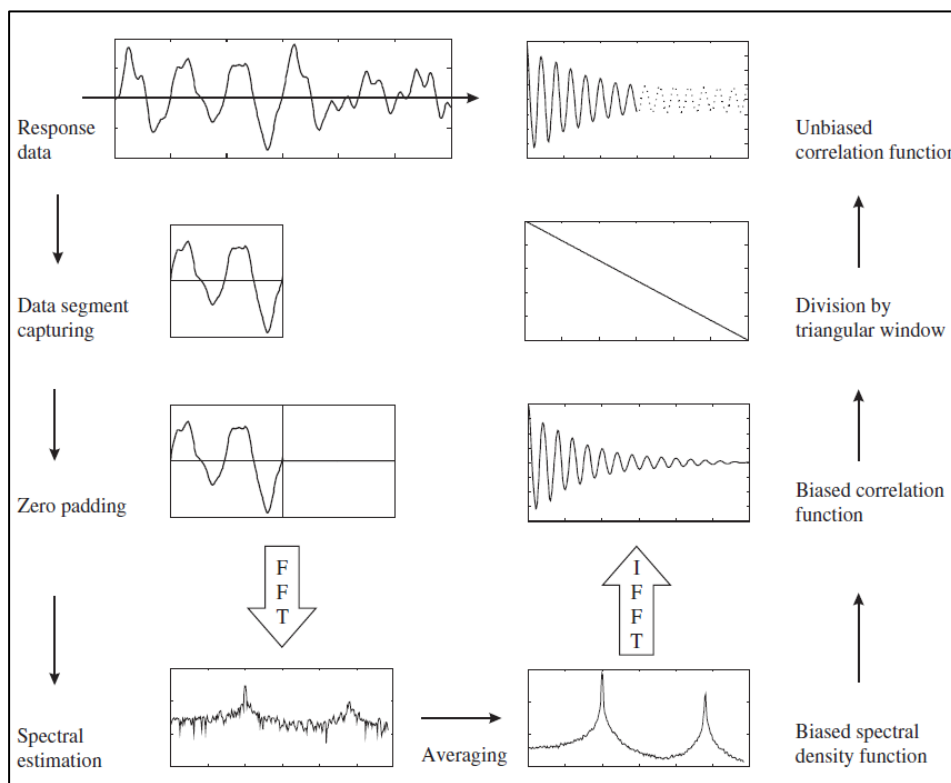


Figure 1.3 Étapes de la technique du *Zero Padding*  
Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.224)

Le fait d'ajouter un filtre dégressif à la fonction d'autocorrélation permet de diminuer le bruit généré à la queue de la fonction. Cela a pour effet de lisser la PSD résultante.

### Les filtres

Les filtres peuvent être utilisés pour isoler ou supprimer des fréquences et moyenner ou transformer un signal de l'analyse. En OMA les filtres utilisés sont presque tous digitaux. Le seul filtre analogique utilisé est généralement le filtre anti-repliement (*Anti-aliasing*) (Brincker & Ventura, 2015). Il est à noter que le principe primordial du filtrage est que tous les canaux analysés doivent subir le même filtrage afin de ne pas influencer les paramètres modaux (Ibrahim et al., 1995). En effet, le déphasage et la distorsion des signaux doivent en effet être les mêmes pour comparer les modes relatifs.

En OMA, le filtrage se voit très utile lors de la comparaison de données de différents capteurs. Ce genre de comparaison nécessite d'intégrer ou de dériver des données. Selon les propriétés de la transformée de Fourier, la dérivée  $\dot{y}(t)$  d'un signal  $y(t)$  est donnée par l'équation tirée de Brincker & Ventura (2015, p.215) :

$$\dot{y}(t) \leftrightarrow Y(\omega)i\omega \quad (1.7)$$

où  $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$  est une paire de transformée de Fourier. Pour l'intégration, on divise  $Y(\omega)$  par  $i\omega$ . Le filtre d'intégration amplifie le bruit à basse fréquence, il faut alors le jumeler à un filtre passe-haut (voir figure 1.4). Pour sa part, le filtre de dérivation amplifie les hautes fréquences, il faut alors le jumeler avec un filtre passe-bas. On perd alors de l'information en basse fréquence (haute fréquence pour la dérivation) lorsqu'on intègre des données.

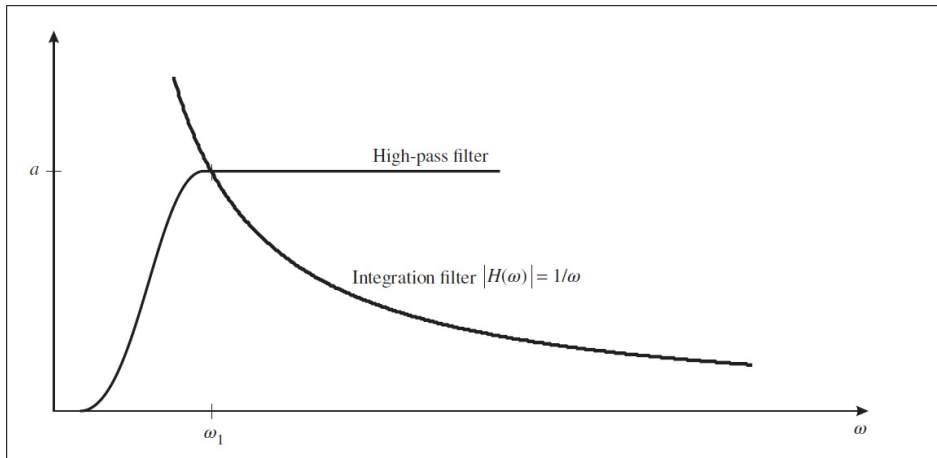


Figure 1.4 Représentation de l'allure d'un filtre d'intégration jumelé à un filtre passe-haut  
Tirée de Brincker & Ventura (2015, p.216)

### 1.3.3 L'identification

Pour décrire un système dynamique, on a besoin de ses valeurs propres  $\lambda_n$  et de ses déformées modales  $\psi_n$ . Les valeurs propres  $\lambda_n$  d'un système peuvent être décrites par leur fréquence naturelle  $\omega_n$  ainsi que de leur taux d'amortissement  $\xi_n$ . Ces valeurs représentent la base permettant d'exprimer l'ensemble des états du système. On cherche généralement à ce que des paramètres d'un modèle décomposé soient ses vecteurs propres. L'identification consiste à réaliser l'inférence des paramètres d'un modèle pour les données qu'on y associe (S. K. Au, 2017). On relie une donnée expérimentale  $y_k$  à une prédiction  $\hat{y}_k(\theta|M)$  générée par un modèle  $M$  de paramètre  $\theta$  et par une erreur  $\varepsilon_k$  :

$$y_k = \hat{y}_k(\theta|M) + \varepsilon_k \quad (1.8)$$

Trois classes de méthodes existent pour identifier les paramètres d'un modèle. Soit l'identification non paramétrique, les méthodes de l'erreur de prédiction (PEM) et les méthodes de sous-espace. Les méthodes non paramétriques identifient les paramètres modaux sans estimation préalable des paramètres d'un modèle. Les méthodes PEM estiment les paramètres minimisant l'erreur  $\varepsilon_k$  entre le modèle et les données. Les techniques de sous espaces ont pour

but d'estimer les matrices de l'espace d'état à partir de données. Les méthodes se traduisent par des algorithmes d'identification à partir du domaine temporel ou fréquentiel.

### 1.3.3.1 Algorithmes d'identification dans le domaine temporel

L'approche d'Ibrahim (*Ibrahim Time Domain ITD*), l'approche à l'aide des modèles ARMA, les approches SSI (Sous-espaces stochastiques) et ERA (*Eigen-Realization*) sont populaires en OMA dans le domaine temporel. L'approche ITD propose un modèle où le déplacement est exprimé par une combinaison linéaire de modes propres et d'exponentielles (Ibrahim et al., 1977). Les modèles ARMA (PEM), proposent un modèle ayant une partie autorégressive et une partie moyenne mobile (Bonnecase et al., 1994). Les méthodes SSI adaptées à l'analyse modale par Juang et Papa (1985) utilisent les espaces d'état pour décrire une réponse. La méthode ERA est une situation particulière de la méthode SSI où on décompose l'expression en ses valeurs propres.

### 1.3.3.2 Algorithmes d'identification dans le domaine fréquentiel

Le domaine fréquentiel est d'intérêt, car il permet de simplifier la formulation des systèmes dynamiques. La convolution et les différentiels du domaine temporel peuvent respectivement s'exprimer sous forme de multiplication et de formulations algébriques dans le domaine fréquentiel. Les approches spectrales ont d'abord apparu dans l'histoire sous forme d'analyse non paramétrique comme le *Pick-Picking* (ou *Basic Frequency Domain BFD*) consistant à déterminer les fréquences naturelles à partir des pics de la PSD. Ces méthodes sont difficiles d'application en présence de modes rapprochés et quand la quantité de données augmente (Brincker & Ventura, 2015, p.217). Une autre méthode est le *Frequency Domain Decomposition* (FDD) (Brincker et al., 2000) consistant à décomposer en valeur singulière (SVD) la PSD afin d'analyser les fréquences propres la déformée modale. En 2007, suite aux améliorations de Brincker et al., le *E-FDD* (*Enhanced FDD*) a vu le jour. Les algorithmes ARMA peuvent aussi être adaptés au domaine fréquentiel (Parloo, 2003; Peeters et al., 2004, 2007; Zhang et al., 1985). Une autre approche, celle d'Hermans et al. (1998) met de l'avant le maximum de vraisemblance à partir de la paramétrisation fractionnelle partielle de la PSD.

L'algorithme de Peeters et al (2004) nommé Polymax, ou p-LSCF, est une approche très répandue dans l'industrie. L'algorithme est une généralisation de polyréférence de l'algorithme LSCF (*Least-Squares Complex Frequency-domain*) formulé dans le domaine  $z$ . Il permet d'identifier les modes à l'aide de la paramétrisation fractionnelle rationnelle. L'algorithme identifie les modes de la FRF selon différents ordres de modèle de manière plus stable que ses prédécesseurs. Les modes non physiques  $y$  sont identifiés avec un amortissement négatif et sont exclus de la liste des pôles, ce qui rend l'analyse plus facile.

Enfin, il existe des approches par maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood*, ML) (Hermans et al., 1998) à partir de la paramétrisation fractionnelle partielle de la PSD positive. La résolution de ces fonctions se réalise plus facilement sous la forme logarithmique à l'aide de la fonction de vraisemblance logarithmique (*Negative Log-Likelihood Function*, NLLF). La fonction de maximum de vraisemblance est mathématiquement la même fonction de vraisemblance que celle du formalisme bayésien (S. K. Au, 2017). Des méthodes basées non sur l'approche fréquentiste, mais sur l'approche bayésienne existent également. Les méthodes bayésiennes sont avantageuses au niveau de la quantification des incertitudes et dans les situations où les données disponibles sont limitées (Dollon, 2021). Ces méthodes sont présentées à la section 1.6.5.

### 1.3.4 Excitation harmonique

La problématique de ce mémoire diffère de l'OMA traditionnelle par la source d'excitation. En effet, l'OMA traditionnelle vise la caractérisation modale de structure sous l'hypothèse d'une excitation blanche. Toutefois, comme démontré par Dollon (2021), l'excitation d'une roue de turbine hydroélectrique en régime stationnaire près du BEP est dominée par des harmoniques de la vitesse de rotation. Le bruit blanc est alors marginal dans l'excitation. Les harmoniques doivent être considérés dans la modélisation afin d'éviter des biais. Ces deux types d'excitation diffèrent sur leur processus de génération et leurs propriétés statistiques. Une excitation harmonique est caractérisée dans le domaine temporel par une variation



sinusoïdale déterministe tandis qu'un bruit blanc varie de manière aléatoire. Dans le domaine spectral, une excitation harmonique se traduit par des pics aux fréquences multiples de la vitesse de rotation tandis qu'un bruit blanc excite de manière constante toutes les fréquences.

En OMA traditionnelle, les harmoniques perçues dans la réponse d'une turbine sont généralement traitées selon deux méthodes. Les harmoniques sont soit identifiés comme des modes à amortissement nul ou ils sont identifiés puis retirés du spectre (Brincker et al., 2007; Gres et al., 2020). Les méthodes d'identification des harmoniques devront être utilisées pour identifier les harmoniques de la vitesse de rotation de la roue dans les données d'opération ou celles générées par le modèle.

## 1.4 Foyers de vibration des turbines

Les efforts sur les roues des turbines hydroélectriques proviennent de phénomènes multiphysiques agissant sur une large bande de fréquence. En effet, le couplage des interactions entre la roue, le fluide et les autres composants mécaniques de la turbine engendre une variété d'excitation mécanique et hydraulique. Le présent chapitre aborde les foyers vibratoires de la roue.

### 1.4.1 Les turbines hydroélectriques

Comme mentionné dans l'introduction, les trois principaux types de turbines utilisées dans le domaine de l'hydroélectricité sont les turbines Francis, Kaplan et Pelton. Leur conception les rend avantageuses dans différentes plages de configurations hydrauliques. Les sujets de ce projet de recherche sont des turbines radiales de type Francis. La turbine étudiée possède une vitesse de rotation nominale de 75 tr/min.

Une turbine Francis comporte un grand nombre de composants. Les principaux sont illustrés à la figure 1.5. En effet, la roue (*Runner*) de  $Z_R$  aubes se retrouve au centre d'un distributeur (*Distributor*) comprenant  $Z_G$  vannes. L'eau provenant de la conduite forcée (*Penstock*) est dirigée par la bêche spirale (*Spiral Case*) dans le distributeur puis agit sur la roue pour créer

son mouvement de rotation. L'eau est ensuite évacuée par le tube d'aspiration (*Draft Tube*). Ce passage de l'eau dans la turbine se réalise sous un régime d'opération donné.

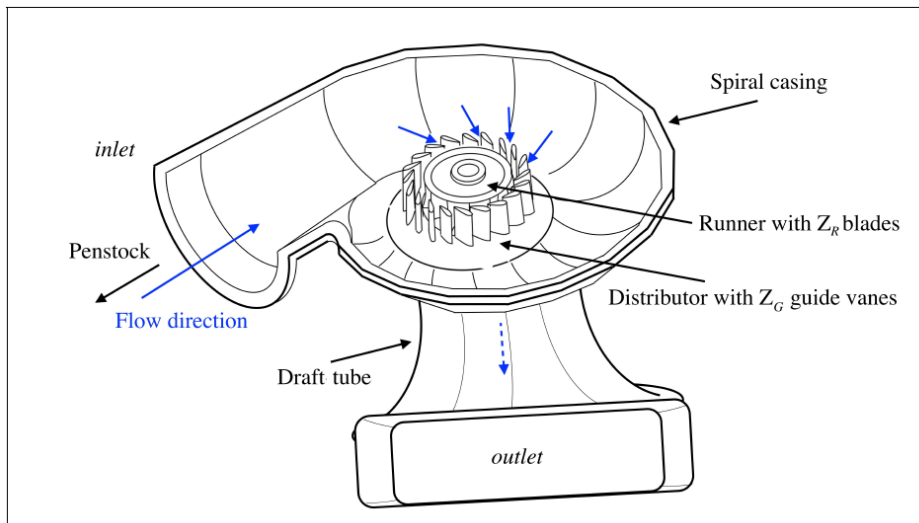


Figure 1.5 Principaux composants d'une turbine Francis  
Tirée de Dollon (2021, p.122)

Le rendement des turbines est maximal à leur point optimal de fonctionnement (*Best Efficiency Point*, BEP). Le BEP est caractérisé par le fonctionnement du groupe à son débit nominal et à vitesse synchrone (voir figure 1.6). Au-dessus du débit nominal, le groupe est en régime de surcharge (*Over-Load*, OL). Pendant le démarrage où l'arrêt, le groupe traverse trois régimes. Pour atteindre la vitesse synchrone et à la fin de la séquence d'arrêt, le groupe n'est pas synchronisé au réseau et est en régime de marche à vide (*No Load*). Le débit y est faible. D'environ 30% à 70% du débit nominal, le groupe est en en charge partielle profonde (*Deep Part Load*, DPL) et, de 70% au BEP, le groupe est en charge partielle (*Part Load*, PL). Les sources d'excitation de la turbine dépendent du régime d'opération. La figure 1.6 résume l'importance des foyers d'excitation en fonction des différents régimes.

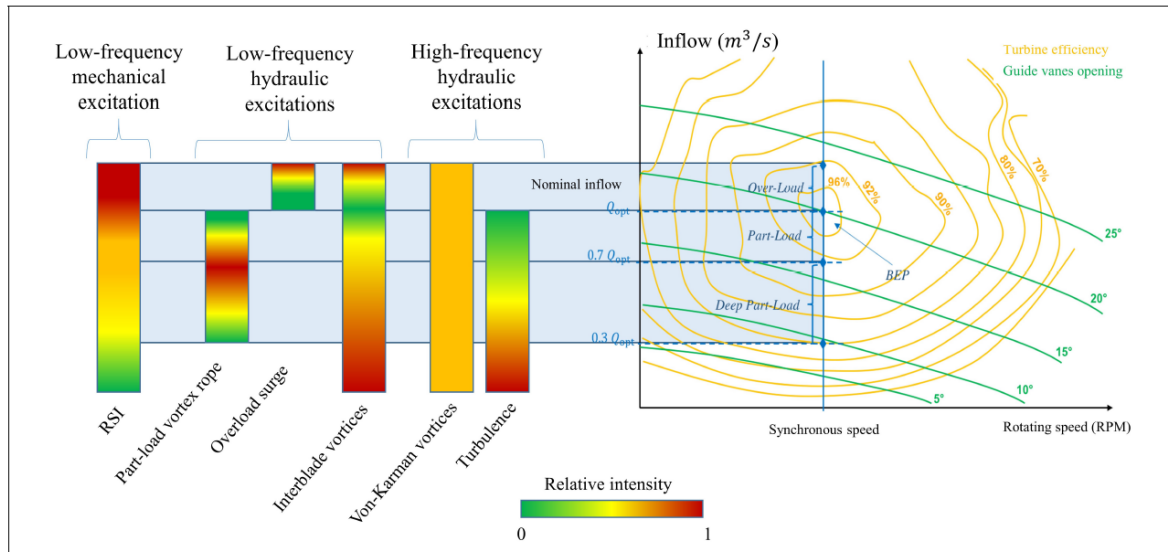


Figure 1.6 Sources d'excitation dans une turbine Francis  
Tirée de Dollon (2021, p.123)

Il y a trois grandes classes de vibration d'une roue de turbine hydroélectrique : l'excitation mécanique (basse fréquence) et les excitations hydrauliques (basse et haute fréquence). Comme illustré à la figure 1.6, chacune de ces classes abrite des phénomènes spécifiques dépendant du régime d'opération. Autour du BEP, l'excitation est majoritairement mécanique et dominée par les RSI (*Rotor-Stator Interactions*, RSI). Les vortex de Von-Kàrmàn sont également un phénomène à contrôler dans tous les régimes. Les phénomènes de torche sont critiques dans les régimes PL et OL (Dörfler et al., 2013). Les régimes DPL et NL sont dominés par des sollicitations stochastiques telles que les vortex hydrauliques et la turbulence.

Ce mémoire traite de l'analyse du régime stationnaire du groupe. Le groupe opérant autour du BEP, les RSI et les vortex de Von-Kàrmàn sont alors de plus grands intérêts par leur dominance du régime. Par l'étude des vibrations en régime stationnaire, Dollon (2021) a démontré la présence de *Non Trivial Rotor-Casing Interactions* (NTRCI). En plus des harmoniques de la fréquence de passage des vannes (RSI), l'auteur montre la présence, sur une large bande de fréquences, de ces harmoniques parfois d'intensité comparable aux RSI. Les asymétries d'excitation ou d'assemblage de la roue sont la source de ces NTRCI. Un modèle caractérisant ces harmoniques est présenté à la section (1.5).

Il est à noter que la turbine est un système couplé à l'alternateur par un arbre. Les vibrations mécaniques au sein de l'alternateur, de la ligne d'arbre et des autres composants du groupe sont transmises à la turbine par l'arbre. L'énergie de ces vibrations influence la réponse spectrale observée de la roue. Pour réaliser une analyse complète de l'identification, ces phénomènes devront être étudiés.

#### 1.4.2 Interactions Rotor-Stator (RSI)

Les interactions rotor-stator sont une classe d'excitations mécaniques basse fréquence dont l'importance relative se retrouve critique autour du BEP. Ces vibrations proviennent de l'interaction périodique entre les  $Z_R$  aubes de la roue et les  $Z_G$  directrices. Les RSI excitent des déformées modales précises de la roue. Ces déformées modales s'expriment en diamètres nodaux  $\nu$ , tel qu'illustré sur la Figure 1.7.

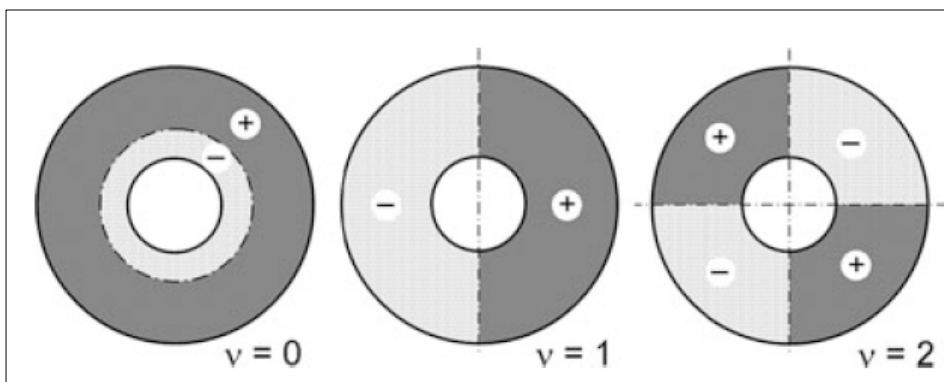


Figure 1.7 Modes vibratoires des diamètres nodaux 0,1 et 2 d'un disque  
Tirée de Dörfler et al. (2013)

L'échange entre les aubes  $Z_R$  et les directrices  $Z_G$  est périodique et sa variation peut s'exprimer sous la forme d'une fréquence fondamentale et des harmoniques de la vitesse de rotation  $\Omega$  (rotations par seconde) de la roue (Dörfler et al., 2013). Du point de vue des directrices, l'effet du passage de la roue se retrouve aux fréquences  $f_{q,G}$  tel que :

$$f_{q,G} = p\Omega Z_R \quad (1.9)$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  est l'ordre harmonique. Du point de vue de la roue, l'effet du passage des directrices sur chacune des aubes se retrouve aux fréquences  $f_{p,R}$  tel que :

$$f_{p,R} = q\Omega Z_G \quad (1.10)$$

où  $q \in \mathbb{N}^*$  est l'ordre harmonique et  $\Omega Z_G$  est la fréquence de passage des directrices sur les aubes de la roue. Lors d'un débalancement de l'excitation générant une force  $Z \in \mathbb{N}^*$  périodique par tour sur les aubes de la roue. Dollon (2021) a démontré que les harmoniques observées par la réponse forcée de l'excitation sont des multiples de la périodicité  $Z$  de l'excitation (voir section 1.5). Dans le cas des RSI, l'excitation est  $Z_G$  périodique par tour par aube.

Une directrice agit sur la roue à une phase donnée. La phase de l'excitation sur la circonférence de la roue varie en fonction des directrices. Comme illustré à la figure 1.7, sur la roue, chaque  $p$  harmonique de l'excitation porte un patron de pression agissant sur des sections de phases égales séparées par un diamètre nodal  $|v|$  (Dörfler et al., 2013). Pour les RSI, un diamètre nodal  $v$  est présent à un ordre harmonique  $p$  suivant l'équation (1.11) :

$$qZ_G + v = pZ_R \quad (1.11)$$

où le diamètre nodal  $v \in \mathbb{Z}$  est dans l'ensemble  $\left[\frac{-Z_R}{2}; \frac{Z_R}{2}\right]$  pour un nombre d'aubes  $Z_R$  paire et dans l'ensemble  $\left[\frac{1-Z_R}{2}; \frac{Z_R-1}{2}\right]$  pour un nombre d'aubes  $Z_R$  impaire. L'effet des directrices sur la roue n'est généralement qu'observé au premier harmonique ( $p=1$ ) lors de l'analyse expérimentale. L'amplitude de l'excitation harmonique a tendance à décroître avec la croissance de l'ordre harmonique (Dörfler et al., 2013). Dans l'exemple où un débalancement de l'excitation agit sur une aube une fois par tour (voir section 1.5), dans l'équation (1.10), la périodicité de l'excitation de la roue devient  $Z_R$ . Le diamètre nodal  $v$  de la roue à une harmonique  $p$  est alors déterminé selon :

$$qZ_R + v = pZ_R \quad (1.12)$$

Pour  $v > 0$ , la déformée modale se déplace selon le sens de rotation de la roue et l'inverse se produit pour  $v < 0$ . Quand  $v = 0$ , la déformée modale est en phase sur toute la circonférence de la roue. En résulte une oscillation du couple sur l'arbre de la roue à la fréquence  $p\Omega Z_R$  (Dörfler et al., 2013, p.77)

En somme, les RSI sont à prendre en compte dans la conception des turbines. Les combinaisons d'aubes  $Z_R$  et de distributrices  $Z_G$  mal choisies peuvent exciter des modes indésirables de la roue. On cherche à éviter que le patron d'excitation de la roue soit compatible avec une déformée modale lorsque les fréquences sont à proximités. Ces interactions peuvent causer la défaillance des aubes ainsi que des vibrations de l'assemblage de la turbine (Coutu et al., 2008).

### 1.4.3 Excitations hydrauliques haute fréquence

Les interactions entre les aubes et les directrices provoquent une excitation mécanique basse fréquence de la roue. Les interactions entre le fluide et la structure de la turbine génèrent une variété d'excitations hydrauliques.

#### 1.4.3.1 Vortex de Von-Kàrmàn

Les vortex ou tourbillons de Von-Kàrmàn sont une excitation hydraulique haute fréquence générée par l'interaction entre l'écoulement de fluide et une surface perpendiculaire à l'écoulement. Les avant-directrices, les directrices et les aubes de la roue possèdent des surfaces propices à générer des vortex de Von-Kàrmàn. La figure 1.8 illustre le phénomène.

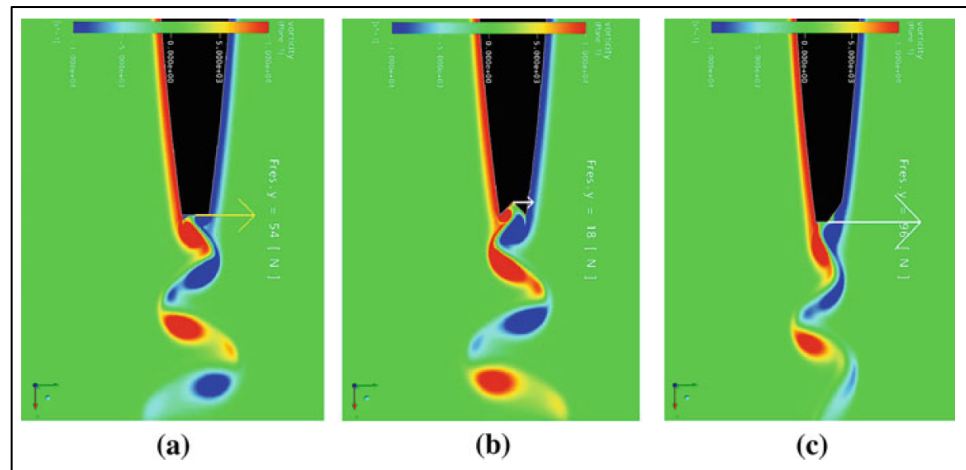


Figure 1.8 Simulation CFD de la formation du vortex selon différentes formes de bords de fuite a) brusque; b) queue d'aronde; c) Donaldson  
Tirée de Dörfler et al. (2013, p.120)

L'amplitude du vortex augmente avec la vitesse l'écoulement. Le phénomène se traduit généralement par un bruit indésirable en haute fréquence  $f$  tel que décrite par l'équation (1.13) tirée de Dörfler et al. (2013, p.112) :

$$f = \frac{St v}{L} \quad (1.13)$$

où  $L$  est la longueur caractéristique de la surface,  $v$  est la vitesse de l'écoulement par rapport au corps rencontré et  $St$  est le coefficient de Strouhal dépendant de la forme du corps et du nombre de Reynolds du fluide. L'apparition des tourbillons peut se produire dans tous les régimes de fonctionnement d'un groupe. En effet, le phénomène dépend du profil des surfaces qu'il rencontre. La figure 1.9 caractérise l'effet des différents bords de fuite de directrices sur l'importance des tourbillons du phénomène.

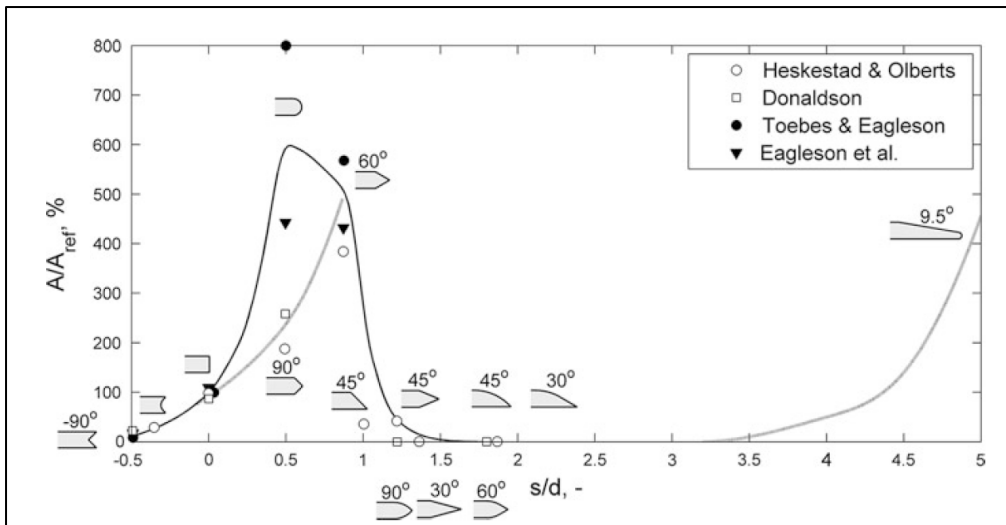


Figure 1.9 Amplitude du vortex pour différents bords de fuite  
Tirée de Dörfler et al. (2013, p.114)

Le choix de profil hydraulique et l'usinage adéquat des surfaces comme celles du distributeur et des aubes de la roue sont critiques afin d'éviter les vortex de Von-Kàrmàn. La coïncidence entre la fréquence des tourbillons et une des fréquences naturelles de la structure peut produire de la résonance. Ces vortex à haut cycles peuvent causer la défaillance d'un composant et du bruit excessif dans le groupe. Une grande rigidité ou un grand amortissement des composants peut permettre d'éviter la résonance causée par les tourbillons (Dörfler et al., 2013).

#### 1.4.3.2 Turbulence

Un autre phénomène hydraulique stochastique est la turbulence. Elle peut être décrite en termes de probabilités. La PSD de la turbulence couvre un large spectre de la bande passante d'intérêt d'une turbine et est relativement uniforme. Ces vibrations pourraient potentiellement exciter des modes des composants de la turbine. Le phénomène de turbulence est généralement observé en régime transitoire (NL, DPL) où on retrouve les variations de couples et de pression plus importantes dans le groupe.



## 1.4.4 Excitations hydrauliques basse fréquence

### 1.4.4.1 Torche de cavitation

Près du BEP, l'angle de l'écoulement coïncide avec l'angle des aubes de la roue. À l'extérieur du BEP (<80% du débit nominal), on retrouve un déséquilibre angulaire générant un cisaillement tangentiel qui provoque le phénomène de torche indésirable dans l'aspirateur critique en PL et en OL (Seidel et al., 2014; Duparchy et al., 2017). En OL, il est rare, mais possible, d'observer une torche de cavitation ellipsoïdale. L'auto-excitation de ce phénomène peut être dangereuse pour la roue (Flemming et al., 2009). La figure 1.10 illustre les différentes torches observées selon le régime.

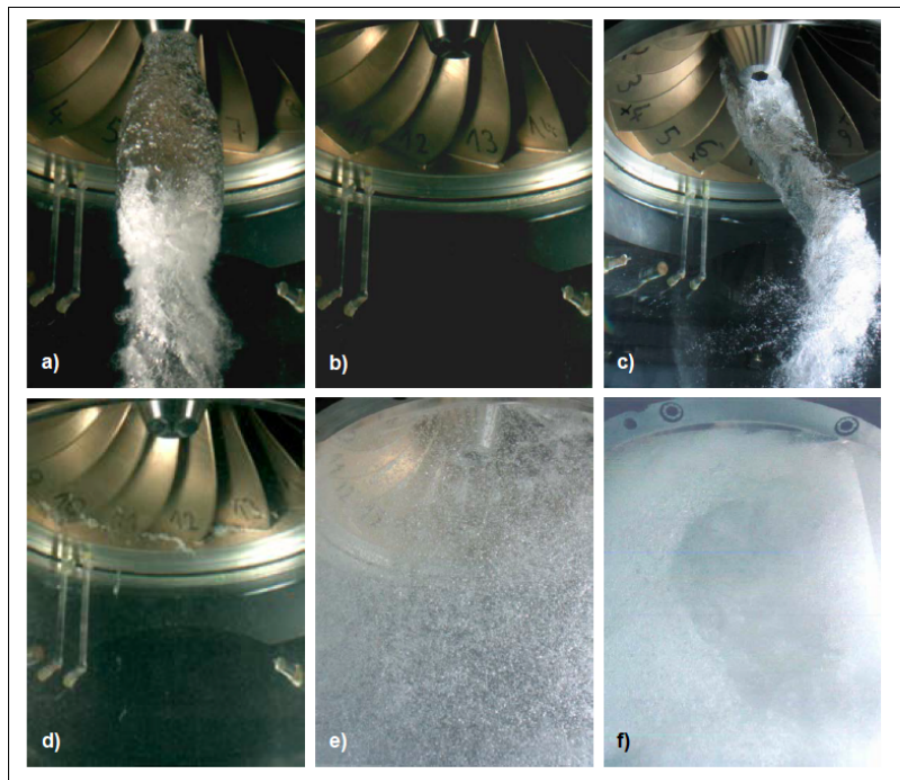


Figure 1.10 a) Torche de surcharge; b) Écoulement sans torche au BEP; c) Torche cohérente en PL; d) Torche à faible charge; e) Pulsations fortes en SNL; f) Rejet de charge  
Tirée de Seidel et al. (2014)

La torche de surcharge peut générer des fluctuations de puissances et de couple (Valentin et al., 2017).

#### 1.4.4.2 Vortex interaubes

Les vortex interaubes sont générés par un alignement non optimal des directrices et des avant-directrices (AVD) tel qu'illustré à la figure 1.11. L'alignement des directrices est optimal au BEP, les tourbillons interaubes se produisent à l'extérieur du BEP.

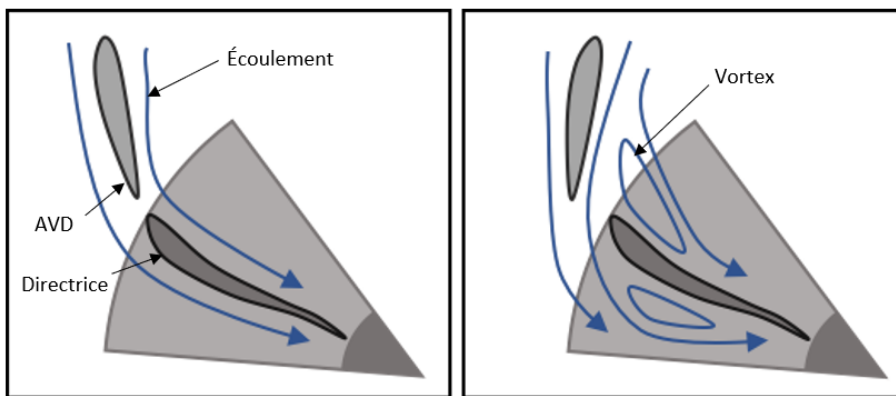


Figure 1.11 Génération de vortex interaubes

Ce phénomène stochastique agit sur une large bande de fréquence et peut exciter des modes propres des composants de la turbine. Les tourbillons peuvent générer de la cavitation et des dommages par érosion sur les aubes de la roue et le distributeur (Dörfler et al., 2013, p.58). Une turbine Francis avec une grande plage d'opération ne peut généralement pas éviter l'apparition de vortex interaubes dues à la nécessité de déplacement des directrices.

### 1.4.5 La cavitation

Le phénomène de cavitation se produit quand la pression statique du fluide diminue jusqu'à sa pression de vapeur. On retrouve alors de la cavitation dans les zones de basse pression et de grande vitesse locale de l'écoulement. Le côté de succion des aubes de la roue et les zones où il y a présence de vortex (interaubes, torche, Von-Kàrman) en sont des exemples. Par la variété de taille des bulles générées, la cavitation produit des vibrations sur une large bande de fréquence. En plus des vibrations, la cavitation engendre l'érosion des directrices, de la roue et de l'aspirateur. Pour une roue Francis, les endroits victimes de cavitation sont le bord de fuite et la liaison entre l'aube et la couronne. L'anneau de décharge (*Discharge Ring*) et le bout des aubes des roues Kaplan sont ciblés par la cavitation en raison de l'espace entre les distributrices et les aubes de la roue (Dörfler et al., 2013).

### 1.4.6 Conclusion sur les foyers d'excitation

En somme, les turbines Francis sont excitées par plusieurs phénomènes selon le régime de fonctionnement étudié. Lors de la modélisation de la réponse de la roue en régime stationnaire, l'omission de la variété d'excitations autre que les RSI et les NTRCI amènent un biais sur le modèle. L'erreur sur l'identification du modèle témoignera des sources d'excitation omises.

## 1.5 Modèle de réponse forcée avec excitation périodique par tour

La section 1.4.2 présente les interactions rotor-stator (RSI), l'excitation  $Z_G$  périodique que subit la roue. Dollon (2021) a démontré que la réponse vibratoire d'une roue peut comprendre un contenu harmonique, parfois comparable aux RSI, causé par des interactions avec d'autres périodicités. Les champs associés sont appelés NTRCI. Les NTRCI sont la conséquence d'une ou de plusieurs asymétries sur la circonférence de la roue. Les asymétries peuvent être causées par un mauvais dimensionnement de la bache spirale amenant un déséquilibre de l'écoulement dans le distributeur. Des effets comparables aux asymétries peuvent être produits par des phénomènes liés à l'écoulement dans la bache spirale tel que des écoulements secondaires provoqués par la roue. Les excitations générant les NTRCI sont  $Z \in \mathbb{N}$

périodiques. Le modèle présenté dans cette section traite d'une excitation de la roue une fois par aubes par tour produisant une excitation de la roue  $Z_R$  périodique.

### 1.5.1 Modèle de la roue

Le modèle avancé par Dollon (2021) découle de la vibration forcée d'une structure élastique sous amortie en rotation selon  $M$  degrés de liberté :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse de la structure en rotation,  $\mathbf{G}$  est une matrice antisymétrique décrivant l'effet gyroscopique,  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité et  $\mathbf{y}(t)$  est le déplacement selon  $m$  degrés de liberté. L'équation (1.14) peut s'exprimer sous la formulation d'espace d'état :

$$\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.15)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 1}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}, \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0}_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

En décomposant l'équation (1.15) en ses valeurs propres, on peut décrire sa solution non homogène selon une combinaison linéaire des modes naturels  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{q}(t)$  tel que :

$$\mathbf{C}^H \mathbf{A}_1 \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}^H \mathbf{A}_2 \mathbf{C} \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Psi}^H \mathbf{f}(t) \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{q}(t)$  est la matrice de coordonnées modales de la structure,  $\mathbf{C}$  est la matrice des vecteurs propres et  $\boldsymbol{\Psi} = (\{\boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_k^*\})_{k \in M}$  est la matrice modale telle qu'exprimée dans Dollon (2021, p.125). En considérant une turbine avec  $Z_R$  aubes, Dollon (2021) propose de décomposer la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_k$  du mode  $k$  sous la forme  $\boldsymbol{\psi}_k = (\boldsymbol{\psi}_k^1, \dots, \boldsymbol{\psi}_k^{Z_R})^T$ . Si la roue est une

répétition circulaire d'une aube, selon Dollon (2021, p.126), elle satisfait la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{\psi}_k^{r+1} = \boldsymbol{\psi}_k^r e^{\pm j\phi_v}, \quad \phi_v = v\alpha \quad (1.18)$$

où la déformée modale d'une aube  $\boldsymbol{\psi}_k^{r+1}$  est définie par celle d'une aube  $\boldsymbol{\psi}_k^r$  décalée par une phase  $\phi_v$ , de période angulaire  $\alpha = 2\pi/Z_R$ . La constante  $v$  est le diamètre nodal associé à la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_k$ . La relation de récurrence permet de calculer la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_k$  d'un mode  $k$  de la roue à partir de la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_k^r$  d'une aube  $r$  (Dollon, 2021, p.126).

La matrice modale  $\boldsymbol{\Psi}$  de la roue peut s'exprimer en fonction des matrices modales par diamètre nodal  $\boldsymbol{\Psi}_v$  où  $v \in [0, \frac{Z_R}{2}]$  tel que  $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\Psi}_0, \dots, \boldsymbol{\Psi}_{[Z_R/2]})$ . La matrice  $\boldsymbol{\Psi}_v$  contient les paires de conjugués de chacune des déformées modales. Les conjugués d'un diamètre nodal  $v$  sont séparés par une contrainte de phase  $\pm i\phi_v$ .

Dollon (2021), utilise la notation  $\boldsymbol{\Psi}_v = (\boldsymbol{\Psi}_v^+, \boldsymbol{\Psi}_v^-)$  pour séparer les deux conjugués. De plus, un diamètre nodal  $v$  d'un conjugué ( $\boldsymbol{\Psi}_v^+$  par exemple) contient une déformée co-rotative et contra-rotative (*forward* et *backward*) telle que  $\boldsymbol{\Psi}_v^+ = (\boldsymbol{\Psi}_v^f, \boldsymbol{\Psi}_v^b)$ . La figure 1.12, résume la notation pour une roue et pour un diamètre nodal donné d'une roue.

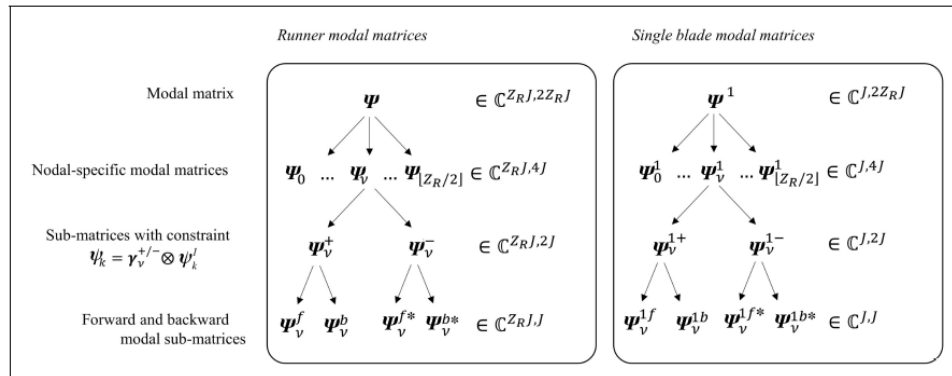


Figure 1.12 Décomposition de la matrice modale  
Tirée de Dollon (2021, p.127)

La matrice modale  $\Psi$  est alors paramétrée pour être décrite selon ces diamètres nodaux sous  $\Psi_v$ . La solution décrivant chaque sous-matrice modale avant et arrière se caractérise par les couples mode et fréquence naturelle :  $(\Psi_v^f, -j\Omega_v^f)$ ,  $(\Psi_v^b, -j\Omega_v^b)$ ,  $(\Psi_v^{f*}, -j\Omega_v^f)$ ,  $(\Psi_v^{b*}, -j\Omega_v^b)$  où  $\Omega_v^f$  et  $\Omega_v^b$  sont des matrices contenant les fréquences naturelles des modes Dollon (2021, p.127). L'équation (1.17) peut alors être réécrite par diamètre nodal tel que :

$$\mathbf{X}_v^H \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_v \dot{\mathbf{q}}_v(t) + \mathbf{X}_v^H \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_v \mathbf{q}_v(t) = \boldsymbol{\varphi}_v(t) \quad (1.19)$$

où  $\boldsymbol{\varphi}_v(t) = \Psi_v^H \mathbf{f}(t)$  est la force généralisée au diamètre nodal  $v$ . Les vecteurs et matrices  $\mathbf{C}_v$ ,  $\mathbf{q}_v(t)$ , et  $\Psi_v$  sont toujours la matrice des vecteurs propres, le vecteur de coordonnées modales et la matrice modale, mais pour un diamètre nodal  $v$  donnée. La différence principale entre  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}_v$  est que  $\mathbf{C}_v$  se décompose non seulement en ses conjugués, mais aussi en ses modes co-rotatifs et contra-rotatifs:

$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} \Psi_v \\ \Psi_v \Delta \end{bmatrix}, \quad \Delta = \text{diag}(-j\Omega_v^f, -j\Omega_v^f, j\Omega_v^b, -j\Omega_v^b) \quad (1.20)$$

Lors de l'identification modale, il est possible d'indiquer quel diamètre nodal  $v$  est en résonance et si la résonance est co-rotative ou contra-rotative. Pour obtenir la solution non homogène de l'équation (1.19), on doit connaître la force généralisée  $\boldsymbol{\varphi}_v(t)$ .

### 1.5.2 Modèle de la force périodique

La force d'excitation  $\mathbf{f}(t)$  agit sur une aube  $k$  une fois par tour. On peut alors adopter la paramétrisation  $\mathbf{f}(t) = (\mathbf{f}^1(t), \dots, \mathbf{f}^{Z_R}(t))$ . Une roue peut être paramétrée tel qu'illustré à la figure 1.13.

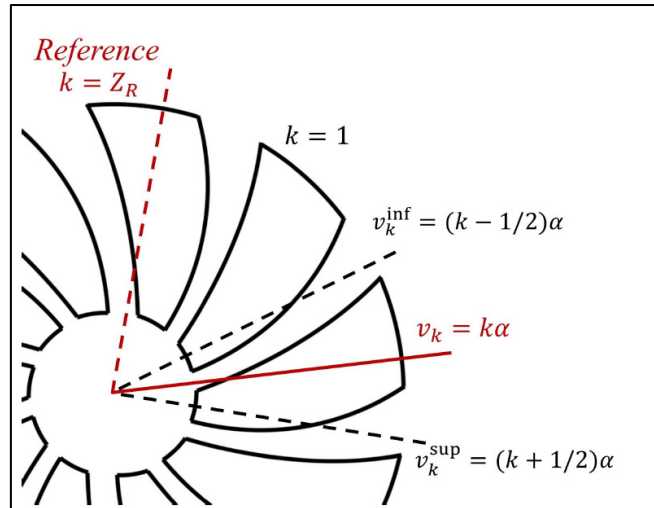


Figure 1.13 Paramétrisation angulaire d'une roue  
Tirée de Dollon (2021, p.129)

Selon Wildheim (1979, 1981a), pour une roue en rotation à une vitesse  $\Omega$ , on peut approximer une force stationnaire agissant sur la roue par une impulsion à l'angle  $-\Omega t$  :

$$\mathbf{f}(t, \theta) = \mathbf{F}(\theta)\delta(\theta + \Omega t) \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{F}(\theta)$  est la forme de la force agissant sur l'aube  $k$ , on calcule la force  $\mathbf{f}^k(t)$  sur une aube en intégrant l'équation (1.21) selon les bornes de l'aube définies à la figure 1.13. Pendant un tour, une aube  $k$  est excitée par la force  $\mathbf{f}^k(t)$  seulement au moment où sa face définit par l'intervalle  $v_k^{sup}$  à  $v_k^{inf}$  rencontre la force. L'équation (1.22) présente la solution de l'évaluation de  $\mathbf{f}^k(t)$  tirée de Dollon (2021, p.130) :

$$\mathbf{f}^k(t) = \mathbf{F}(-\Omega t) \text{ si } k = \kappa(\Omega t) \quad (1.22)$$

où  $\kappa(\Omega t) = \left[ \frac{Z_R \Omega t}{2\pi} + \frac{1}{2} \right]$  est une fonction escalier indiquant quelle pale est excitée selon l'angle  $\Omega t$  tel qu'illustré à la figure 1.14.

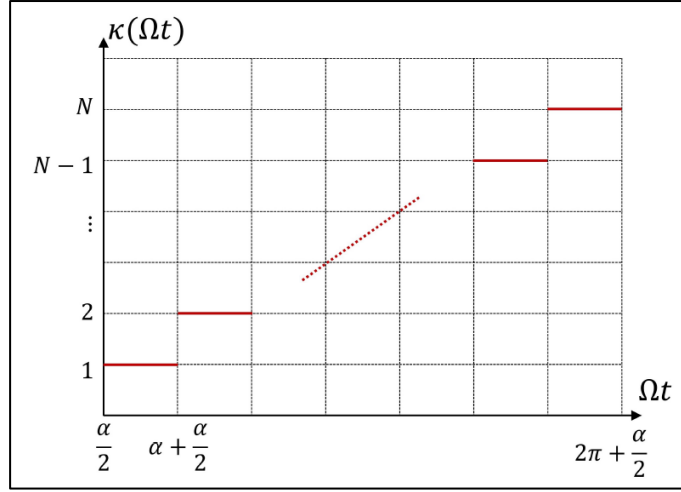


Figure 1.14 Fonction d'excitation escalier  $\kappa(\Omega t)$   
Tirée de Dollon (2021, p.131)

La force d'excitation par aube  $f^k(t)$  étant définie, la réponse forcée (équation (1.19)) est alors calculée à la section 1.5.3.

### 1.5.3 Réponse forcée

Dollon (2021) démontre que la force généralisée  $\varphi_v(t)$  de l'équation (1.19) se divise en quatre paires de contributions ( $\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}, \varphi_{v_1}^*, \varphi_{v_2}^*$ ) comprenant les paires de conjugués des modes par aube ( $\Psi_v^{1+}$  ou  $\Psi_v^{1-}$ ) ainsi que les paires contra-rotative ou co-rotative ( $\Psi_v^{1f}$  ou  $\Psi_v^{1b}$ ). À chacune de ses contributions, on multiplie une fonction d'excitation  $Y_v(\Omega t)$ , définie à l'équation (1.24), permettant d'exprimer la force généralisée.

$$\begin{aligned} \varphi_{v1} &= \Psi_v^{1fH} Y_v(\Omega t), & \varphi_{v2} &= \Psi_v^{1bH} Y_v(\Omega t) \\ \varphi_{v1}^* &= \Psi_v^{1fT} Y_v^*(\Omega t), & \varphi_{v2}^* &= \Psi_v^{1bT} Y_v^*(\Omega t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$Y_v(\Omega t) = F(-\Omega t) e^{j\kappa(\Omega t)\phi_v} \quad (1.24)$$

où le coefficient de Fourier  $F(-\Omega t)$  est la forme de l'excitation identifiée en  $-\Omega t$  et  $e^{j\kappa(\Omega t)\phi_v}$  un terme exprimant la position de la force autour de la roue. Les périodicités sur  $2\pi$  et  $2\pi/Z_R$



des fonctions  $Y_v(\Omega t)$  et  $F(-\Omega t)$  permettent de les exprimer dans le domaine fréquentiel par des décompositions de Fourier. Dollon (2021) obtient l'équation (1.25) comme décomposition de Fourier de l'excitation  $Y_v(\Omega t)$ .

$$Y_v(\Omega t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_m e^{j(pZ_R + v)\Omega t} \quad (1.25)$$

Où  $c_m$  sont des coefficients de Fourier dépendant de l'ordre harmonique  $p$  et des diamètres nodaux  $v$ . Le coefficient  $c_m$  est non nul seulement s'il existe un entier  $q$  tel que  $qZ_R + v = m$ . Dans cette situation on utilise la notation  $c_{q,v} = c_{qZ_R + v}$  et la solution formulée par Dollon (2021, p.129) s'exprime telle que présentée à l'équation (1.26).

$$c_{q,v} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} F_p^* \operatorname{sinc} \left[ (q-p)\pi + \frac{\pi v}{Z_R} \right] e^{i[(q-p)\pi + \frac{\pi v}{Z_R}]} \quad (1.26)$$

Il est simple de démontrer que pour  $v = 0$  et  $p = q$ , l'équation (1.26) s'exprime par  $c_{pZ_R,0} = F_p^*$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . La fonction d'excitation  $Y_v(\Omega t)$  se caractérise donc par des impulsions d'amplitude  $c_{q,v}$  aux harmoniques multiples de  $pZ_R$ , soit une excitation harmonique.

En partitionnant le vecteur des coordonnées modales  $q_v(t)$  en quatre contributions ( $q_{v1}, q_{v2}, q_{v1}^*, q_{v2}^*$ ) et en normalisant, Dollon (2021, p.132) formule l'équation (1.19) sous la forme d'une équation différentielle ordinaire (ODE) :

$$i\dot{q}_{v1}(t) - \Omega_v^f q_{v1}(t) = \Psi_v^{1fH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{q,v} e^{j(pZ_R + v)\Omega t} \quad (1.27)$$

$$i\dot{q}_{v2}(t) - \Omega_v^b q_{v2}(t) = \Psi_v^{1bH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{q,v} e^{j(pZ_R + v)\Omega t}$$

En manipulant, on obtient :

$$q_{v1}(t) = \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}^{1fH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{q,v} \frac{e^{j(pZ_R + v)\Omega t}}{-(pZ_R - v)\Omega - \omega_j^{fv}}, \quad 0 \leq \lambda \leq \Lambda \quad (1.28)$$

$$q_{v2}(t) = \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}^{1bH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{q,v} \frac{e^{j(pZ_R + v)\Omega t}}{-(pZ_R + v)\Omega + \omega_j^{bv}}, \quad 0 \leq \lambda \leq \Lambda$$

où  $\Lambda$  est la quantité de degrés de liberté (modes) de diamètre nodal  $v$  l'aube. On peut déterminer le déplacement  $\mathbf{y}_v^1(t)$  selon le diamètre nodal  $v$  de l'aube 1 en réalisant la décomposition modale :

$$\mathbf{y}_v^1(t) = \boldsymbol{\Psi}_v^1 \mathbf{q}_v = 2\Re(\boldsymbol{\Psi}_v^{1f} \mathbf{q}_{v1} + \boldsymbol{\Psi}_v^{1b} \mathbf{q}_{v2}) \quad (1.29)$$

Dollon (2021, p.132) stipule qu'il est raisonnable d'assumer que pour un mode donné  $\lambda$  (bande passante du mode isolée) on ne retrouve qu'un diamètre nodal  $v$  co-rotatif et contra-rotatif. Selon cette hypothèse et en négligeant l'influence des modes aux fréquences négatives sur ceux aux fréquences positives, on peut exprimer le déplacement  $\mathbf{y}_v^1(t)$  selon l'équation (1.30).

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_v^1(t) \approx 2 \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \Re \left[ \mathbf{A}^{bv} \mathbf{c}_{q,v} \frac{e^{j(pZ_R + v)\Omega t}}{\omega^{bv} - (pZ_R + v)\Omega} + \mathbf{A}^{fv} \mathbf{c}_{q,-v}^* \frac{e^{-j(pZ_R - v)\Omega t}}{(pZ_R - v)\Omega - \omega^{fv}} \right] \\ + 2\Re \left[ \mathbf{A}^{fv} \mathbf{c}_{0,v} \frac{e^{jv\Omega t}}{\omega^{fv} - v\Omega} \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

Avec  $\mathbf{A}^{fv} = \boldsymbol{\psi}_v^{1f} \boldsymbol{\psi}_v^{1fH}$ ,  $\mathbf{A}^{bv} = \boldsymbol{\psi}_v^{1b} \boldsymbol{\psi}_v^{1bH}$

Pour obtenir le déplacement d'une autre aube  $r$  de la roue, on multiplie l'intérieur des parenthèses de l'équation (1.30) par  $e^{i(r-1)v\alpha}$ . De l'équation (1.30), Dollon (2021, p.133), tire comme conclusion que « *First, the harmonic content of turbines is composed of vibrations developing along specific nodal diameters [v]. These nodal diameters [v] depend only on the*

*number of runner blades*  $[Z_R]$  and on the harmonic index  $[p]$ . » L'observation de l'équation (1.30), permet aussi de dire que pour  $\nu \in [0, \frac{Z_R}{2}]$ , la vibration au diamètre nodal :

- $\nu$  est co-rotatif (*forward*) à l'harmonique  $pZ_R + \nu$ ,  $p \in \mathbb{N}$
- $\nu$  est contra-rotatif (*backward*) à l'harmonique  $pZ_R - \nu$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$
- $\nu=0$  est en phase  $pZ_R + \nu$ ,  $p \in \mathbb{N}$

#### 1.5.4 Réponse forcée à de multiples excitations périodiques

L'excitation harmonique de la roue peut provenir de plusieurs sources de périodicités différentes. Par exemple, pour une périodicité  $Z = Z_G$ , l'équation (1.30) décrit la réponse forcée de la roue selon la théorie des RSI. Une asymétrie de la roue ( $Z = 1$ ) combinée au RSI ( $Z = Z_G$ ) résulte en deux excitations  $Z_R$  et  $Z_G$  périodiques sur la roue. Dollon (2021), démontre que, peu importe la périodicité de l'excitation, la structure de la réponse reste la même. Les harmoniques observées par la réponse forcée de l'excitation sont des multiples de la périodicité  $Z$  de l'excitation et le patron d'excitation  $\mathbf{Y}_\nu^{(Z)}(\Omega t)$  pour une périodicité  $Z$  quelconque peut s'écrire en fonction du patron d'excitation périodique une fois par tour tel que :

$$\mathbf{Y}_\nu^{(Z)}(\Omega t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{q,\nu} e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t} \delta_{qZ_R + \nu, p'Z}, \quad p' \in \mathbb{Z} \quad (1.31)$$

Pour un diamètre nodal donné, le patron d'excitation reste le même. Alors pour un même diamètre nodal  $\nu$ , les harmoniques  $pZ_R$  et  $p'Z$  correspondant subiront le même changement d'amplitude.

En couplant le modèle de réponse forcée (1.30) aux données d'opération. Il y a possibilité de réaliser « l'OMA » de la roue en régime stationnaire en comparant l'amplitude relative des crêtes des harmoniques de la réponse de la roue. Les différentes périodicités d'excitation devront être repérées dans les données. La sélection de modèles à l'aide du formalisme bayésien (S. K. Au, 2017) pourrait être utilisée à cette fin.

## 1.6 Formalisme bayésien

Le formalisme bayésien permet de relier un modèle statistique comme à l'équation (1.32) aux paramètres qui le définissent. L'approche se base sur le fait que les paramètres recherchés sont des variables aléatoires avec une densité de probabilité et non une valeur fixe avec une incertitude comme dans l'approche fréquentiste. Prenons l'exemple d'un modèle avec une entrée  $x$  liée à la sortie  $y$  par une fonction  $f_\theta$  de paramètre  $\theta$ , dépendante de  $x$  et d'une erreur  $\varepsilon$  présenté à l'équation (1.32).

$$y = f_\theta(x) + \varepsilon \quad (1.32)$$

En OMA, avec l'approche de Bayes, on cherche à identifier le paramètre  $\theta$  sachant la sortie  $y$ . Le paramètre  $\theta$  étant une variable aléatoire avec une densité de probabilité, on cherche alors la probabilité de  $\theta$  sachant  $y$  :  $p(\theta|y)$ . Cette distribution est le *posterior* du théorème de Bayes. Le *posterior* est déterminé selon le théorème de Bayes (1.33) :

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta) p(\theta)}{p(y)} \quad (1.33)$$

où  $p(\theta)$  est appelé le *prior*,  $p(y|\theta)$  la vraisemblance (*likelihood*) et  $p(y)$  la preuve des données (*evidence*) ou densité marginale des données. Le *prior* représente la connaissance de l'utilisateur avant de considérer les données. Le *prior* contient la distribution attendue du paramètre  $\theta$  à priori. La vraisemblance  $p(y|\theta)$  est la distribution des données sachant  $\theta$ . L'évidence  $p(y)$  est rarement connue. Elle est calculable selon l'équation (1.34) :

$$p(y) = \int p(y|\theta) p(\theta) d\theta \quad (1.34)$$

L'intégrale (1.34) devient difficile, voire impossible à résoudre quand plusieurs paramètres sont à identifier. L'évidence normalise le *posterior* pour obtenir sa densité de probabilité exacte. Dans la plupart des situations, le théorème de Bayes nous permet de connaître la forme

du *posterior*  $p(\theta|y)$  et non sa densité de probabilité exacte. Nous avons alors la relation de proportionnalité (1.35).

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta) p(\theta) \quad (1.35)$$

Pour obtenir une estimation de la densité de probabilité  $p(\theta|y)$ , on peut réaliser des tirages du *posterior* non normalisé à l'aide de chaînes de Markov Monte-Carlo (MCMC) (décrites à la section 1.6.2) ou à l'aide de méthodes directes et non Markoviennes comme la méthode acceptation/rejet. Les MCMC sont préférables aux méthodes d'acceptation/rejet quand la quantité de paramètres à identifier augmente (Bolstad, 2009). En OMA, on fait également face à une autre problématique. L'information que nous avons dépend de l'excitation  $x$ . On dispose alors de  $p(y|x, \theta, \varepsilon)$  et non directement la vraisemblance  $p(y|\theta)$ . Les modèles hiérarchiques permettent d'estimer la vraisemblance.

### 1.6.1 Les modèles hiérarchiques

En OMA, nos données expérimentales dépendent en effet des paramètres, mais aussi de l'excitation  $x$  et de l'erreur  $\varepsilon$ . Pour avoir la vraisemblance de l'équation (1.35) on marginalise :

$$p(y|\theta) = \int p(y|x, \theta, \varepsilon) dx \quad \forall X \quad (1.36)$$

L'intégration (1.36) devient difficile, voire impossible à résoudre quand plusieurs paramètres sont à identifier. Une solution est d'encadrer de statistique un modèle physique décrivant le système à étudier pour estimer les paramètres de la vraisemblance. Les données  $y$  dépendent d'une fonction  $f_\theta(x)$  et d'une erreur  $\varepsilon$  comme montré à l'équation (1.32). Toutefois, l'erreur et la fonction doivent être décrites à un niveau plus haut afin d'avoir un modèle statistique plus complet. En effet, l'erreur  $\varepsilon$  peut être décrite de forme gaussienne, de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  et l'excitation peut être décrite par un bruit blanc (voir section 1.3.2.1) de moyenne nulle et de variance  $C$ . Le paramètre  $\theta$  lui peut être défini par une variance  $\sigma_\theta^2$  et une valeur moyenne  $\mu_\theta$ . On obtient alors un modèle hiérarchique décrit par le schéma de la figure 1.15 :

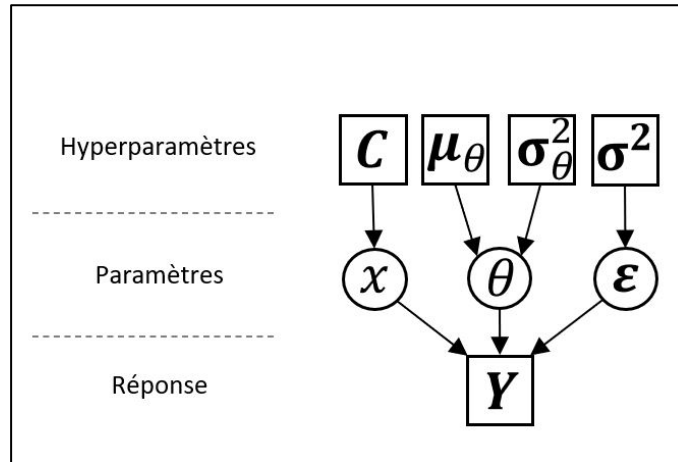


Figure 1.15 Schéma d'une proposition de modèle hiérarchique pour l'équation  $p(y|x, \theta, \varepsilon)$

Comme illustré à la figure 1.15, les paramètres de la vraisemblance  $p(y|x, \theta, \varepsilon)$  sont maintenant définis par des hyperparamètres ( $\sigma^2, C, \mu_\theta, \sigma_\theta^2$ ). La formulation  $p(y|x, \theta, \varepsilon)$  est substituée par  $p(y|\sigma^2, C, \mu_\theta, \sigma_\theta^2)$ . On peut maintenant déterminer le *posterior*  $p(\theta|y)$  à l'aide d'une version conditionnelle du théorème de Bayes en fonction de la hiérarchisation statistique telle que décrite par l'équation (1.37) tirée de Bolstad (2009, p256) où on calcul, à tour de rôle, un groupe paramètre  $\theta_j$  en fixant les autres groupes de paramètres  $\theta_k$ .

$$p(\theta_j|\theta_{-j}, y) \propto p(\theta_j|\text{parents of } \theta_j) \prod_{\theta_k \in \text{children of } \theta_j} f(\theta_k|\text{parents of } \theta_k) \quad (1.37)$$

On itère ensuite l'équation (1.37) jusqu'à la convergence des paramètres. Les parents sont ses hyperparamètres d'un groupe de paramètres et les enfants (*children*) sont les paramètres. Le tirage du *posterior* pour déterminer sa densité de probabilité peut se réaliser à l'aide de chaînes MCMC (voir section 1.6.2), mais sous l'hypothèse de plusieurs paramètres (Voir section 1.6.4).

### 1.6.2 Chaînes de Markov Monte-Carlo

Les chaînes de Markov Monte-Carlo (MCMC) représentent le tirage du *posterior* de l'équation de Bayes (1.35) pour déterminer sa densité de probabilité normalisée. La partie « Markov » des MCMC fait référence à une chaîne qui crée un état  $n + 1$  à partir de l'état présent  $n$ . La partie « Monte-Carlo » fait référence au tirage dans les kernels (probabilités conditionnelles) afin d'y soutirer la densité de probabilité recherchée.

Le but des MCMC est de trouver une chaîne de Markov ayant le *posterior* comme distribution stationnaire. Une chaîne de Markov doit être ergodique pour atteindre son état stationnaire. L'étape de stabilisation avant l'étape stationnaire s'appelle l'étape *Burn in*. Pour que la chaîne soit considérée en état stationnaire, la probabilité de transition  $P(\theta, A)$ , où  $A$  est tout l'espace d'état, doit satisfaire la condition de réversibilité :

$$\int p(\theta|y) P(\theta, A) d\theta = \int p(\theta|y) d\theta \quad \forall A \quad (1.38)$$

tirée de Bolstad (2009, p.127). Pour une distribution candidate  $q(\theta', \theta)$  générant un candidat  $\theta'$  selon  $\theta$ , on cherche alors à ce que pour tout  $\theta, \theta'$  la distribution  $q(\theta, \theta')$  respecte la condition de réversibilité (Bolstad, 2009) où la probabilité d'aller de  $\theta$  vers  $\theta'$  est la même que celle de  $\theta'$  vers  $\theta$  (Voir équation (1.39)).

$$p(\theta|y) q(\theta, \theta') = p(\theta'|y) q(\theta', \theta) \quad \forall \theta, \theta' \quad (1.39)$$

Toutefois, la majorité des probabilités de transition ne respectent pas la condition de réversibilité. Ce problème peut être résolu par l'algorithme de Metropolis-Hastings présenté à la section 1.6.3.

### 1.6.3 L'algorithme de Metropolis-Hastings

Pour balancer l'équation (1.36), afin qu'elle respecte la condition de réversibilité, Metropolis et al. (1953) proposent d'ajouter une probabilité  $\alpha(\theta, \theta')$  d'aller de  $\theta$  vers  $\theta'$  :

$$\alpha(\theta, \theta') = \min \left[ 1, \frac{p(\theta'|y)q(\theta', \theta)}{p(\theta|y)q(\theta, \theta')} \right] \quad (1.40)$$

La distribution du *posterior*  $p(\theta|y)$  est alors la distribution à long terme de la chaîne de Markov avec un noyau de probabilité, pour tout A :

$$P(\theta, A) = \int \alpha(\theta, \theta')q(\theta, \theta')d\theta' + r(\theta)\delta_A(\theta) \quad (1.41)$$

où  $r(\theta) = 1 - \int \alpha(\theta, \theta')q(\theta, \theta')d\theta'$  est la probabilité que la chaîne reste à  $\theta$  et  $\delta_A(\theta)$  est la fonction indicatrice de A, étant vraie (1) si  $\theta \in A$  et fausse (0) si  $\theta \in \bar{A}$ .

L'algorithme de Metropolis-Hastings, décrit par le Chapitre 6 de Bolstad (2009), peut fonctionner avec une probabilité candidate  $q(\theta', \theta)$  qui est dépendante du paramètre  $\theta$  à l'état  $n$  (*random walk*) (Metropolis et al., 1953) ou indépendante de  $\theta$  (*independent walk*) (Hastings, 1970). La moyenne et la variance de la loi candidate dépendante changent selon  $\theta$  tandis qu'elles restent constantes pour une loi candidate indépendante. En général, les chaînes *random walk* auront plus de candidats  $\theta'$  acceptés, mais feront de plus petits pas d'itération. Tandis que les chaînes avec des candidats  $\theta'$  indépendant accepteront moins de mouvements, mais réaliseront de plus large pas (Bolstad, 2009, p.136).

### 1.6.4 Metropolis-Hastings pour plusieurs paramètres

Lorsque plusieurs paramètres sont à identifier, une méthode efficace est d'utiliser l'algorithme de Métropolis-Hastings par blocs (*Blockwise Metropolis-Hastings*). Le principe de la méthode consiste à réaliser des tirages du *posterior* pour un paramètre à la fois en fixant tous les autres.



Dans la situation où la densité de probabilité du candidat proposé est la même que celle du *posterior*, l'algorithme correspond à un échantillonneur de Gibbs (Bolstad, 2009, p.150). Alors, pour un vecteur des paramètres  $\theta$  séparé en blocs tels que

$$\theta = \theta_1, \theta_2 \dots \theta_j \quad (1.42)$$

La fonction de probabilité de transition sous condition d'indépendance devient le produit tiré de Bolstad (2009, p.145) :

$$P(\theta, \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^J p_j(\theta_j, \mathbf{A}_j | \theta_{-j}) \quad (1.43)$$

Elle permet d'obtenir la densité de probabilité  $p(\theta|y)$  lorsque les MCMC sont en état stationnaire. La méthode de réalisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings en bloc est bien décrite à la page 145 de Bolstad (2009). La particularité de l'échantillonneur de Gibbs est que tous les candidats seront acceptés, car tous les candidats  $\theta'$  font partie du *posterior*. Deux étapes de l'échantillonneur de Gibbs selon la méthode en bloc sont illustrées à la Figure 1.16.

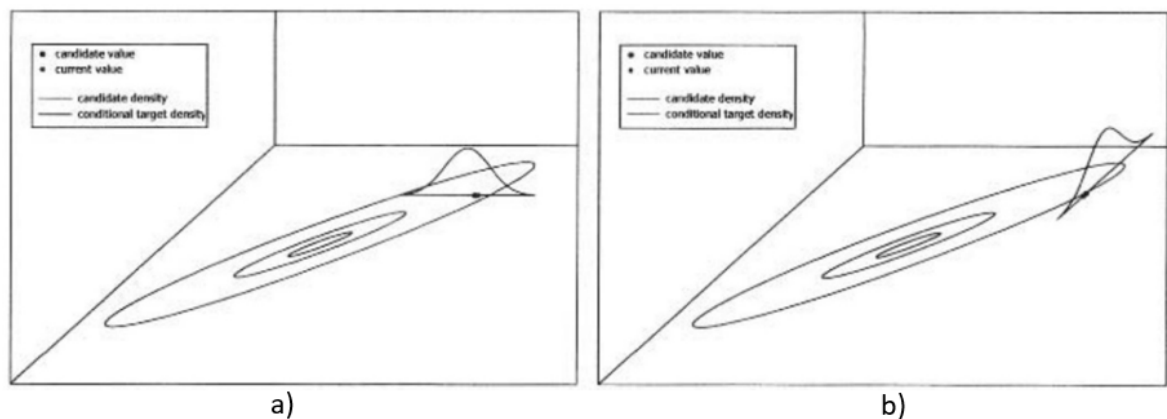


Figure 1.16 Illustration de deux étapes de calcul d'un échantillonneur de Gibbs  
Tirée de Bolstad (2009, p.151)

Dans la figure 1.16 a), l'échantillonneur de Gibbs réalise un tirage du *posterior* selon un  $\theta_1$  donné pour  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_J$  fixes. En b), l'échantillonneur de Gibbs réalise un tirage selon un  $\theta_2$  pour  $\theta_1', \theta_3, \dots, \theta_J$  fixes où  $\theta_1'$  est la valeur actualisée du premier tirage. L'échantillonneur répète la même procédure pour les  $J$  paramètres.

### 1.6.5 Les algorithmes d'identification modale bayésiens

L'approche bayésienne offre plusieurs avantages par rapport à l'approche fréquentiste. D'abord, l'approche bayésienne quantifie les incertitudes de son résultat. Le résultat est en effet une densité de probabilité d'observer les données en modifiant les paramètres. L'approche bayésienne est avantageuse lorsque les incertitudes à quantifier sont grandes (S. K. Au, 2017). En générant un modèle hiérarchique, les incertitudes peuvent être quantifiées à plusieurs niveaux. De plus, la méthode permet également de quantifier la fidélité d'un modèle (erreur de modélisation) alors que sa concurrente fréquentiste ne quantifie que les incertitudes de données. Ensuite, le formalisme bayésien permet d'intégrer des connaissances à priori (le *prior*) lors des calculs. Enfin, l'inférence bayésienne reste fiable, même avec peu de données, mais pas nécessairement précise.

Pour résoudre un problème à l'aide de l'inférence bayésienne, celui-ci doit être identifiable. Valider l'*identifiabilité* d'un problème revient à examiner la forme du *posterior*. Trois cas de figure témoignent de l'*identifiabilité* d'un problème. Un problème est identifiable si le paramètre ne peut prendre qu'une seule valeur, localement identifiable si le paramètre peut prendre plusieurs valeurs distinctes ou non identifiable si le paramètre peut prendre un continuum de valeurs. La figure 1.17, tirée de Dollon (2021, p.85) illustre l'allure du *posterior* selon l'*identifiabilité* d'un problème.

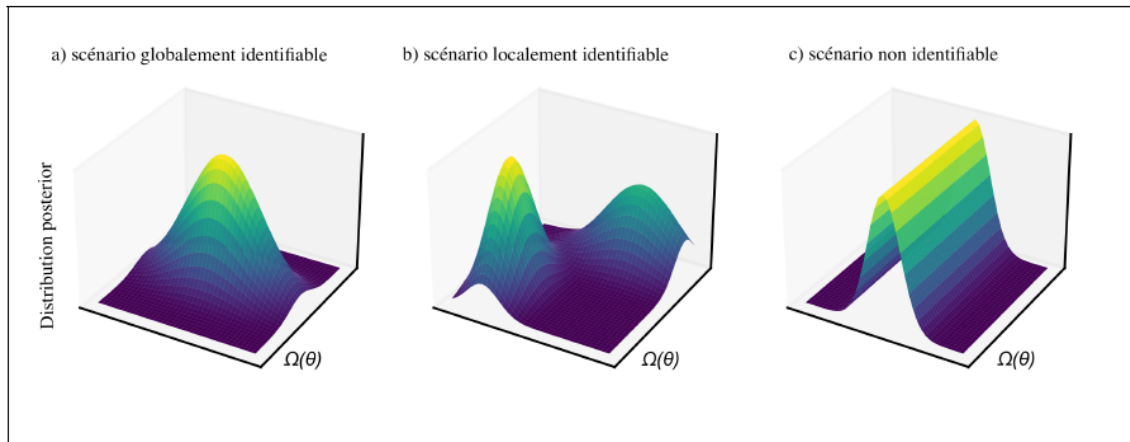


Figure 1.17 Allure de la *posterior* en fonction de l'*identifiabilité*

Les méthodes d'identification bayésienne sont utilisées dans le domaine fréquentiel et dans le domaine spectral (voir section 1.3.2.2). Dans le domaine fréquentiel, l'algorithme BFFTA (*Bayesian Fast Fourier Transform Algorithm*) original de Yuen & Katafygiotis (2003), adapté par Au (2011), permet de calculer les valeurs les plus probables (*Most probable value*, MPV) par la minimisation de la NLLF selon la covariance de la distribution des coefficients de Fourier des observations. Des modifications à l'algorithme original pour diminuer le temps de calcul et faciliter l'approximation de la NLLF ont généré l'algorithme *Fast-BFFTA* (S.-K. Au, 2012a, 2012b). Plusieurs développements supplémentaires, explicités dans Dollon (2021) ont eu lieu à la suite des travaux d'Au.

Dans le domaine spectral, Katafygiotis & Yuen (2001) ont développé une approche utilisant une PSD moyennée sur un nombre donné d'instantanés (*snapshots*), le BSDA (*Bayesian Spectral Density Approach*). Inspirés du *Fast-BFFTA*, Yan & Katafygiotis (2015a, 2015b) ont développé la méthode *Fast-BSDA* se réalisant sur deux étapes. La première étape, nommée *FBSTA* (*Fast-Bayesian Spectral Trace Approach*), permet de déterminer les paramètres spectraux. La deuxième étape, nommée *FBSDA* (*Fast-Bayesian Spectral Density Approach*) identifie la déformée modale. L'algorithme *Fast-BSDA* est fondé sur l'analyse de la trace de la PSD moyennée et ainsi s'affranchit du calcul de matrices inverses et de déterminants de matrices de grandes dimensions (Dollon, 2021). Les méthodes utilisant la PSD sont critiquées

par Au (2016). Selon S.-K. Au (2016), les biais et problèmes du prétraitement nécessaire aux méthodes spectrales sont évités par son algorithme fréquentiel.

## 1.7 Conclusion

En conclusion, la revue de littérature montre que les méthodes traditionnelles d'analyse modale des systèmes réels à l'aide de mesures ne sont pas applicables à une roue de turbine en régime stationnaire. En effet, les méthodes existantes nécessitent soit une excitation purement stochastique ou une mesure de cette dernière. Dans le cas d'une roue de turbine en opération, les mesures des déformations donnent une réponse à une excitation périodique dominante. Pour réaliser l'analyse modale d'une roue de turbine en régime de production, il est alors nécessaire de développer une nouvelle méthode. L'inférence du modèle proposé par Dollon (2021) des données d'opération de la roue d'une turbine représente une opportunité de recherche. La méthodologie proposée à cette fin repose sur le développement d'un algorithme d'inférence sous le formalisme bayésien.

La réalisation des objectifs du mémoire comporte trois grands volets techniques : la modélisation de la dynamique des roues, l'identification de systèmes sous le formalisme bayésien et l'OMA. D'abord, le modèle présenté à l'équation (1.30) doit être simulé puis entouré d'un cadre statistique afin de déterminer, à partir des données, la forme du *posterior* des paramètres à l'aide du formalisme bayésien. Ensuite, un échantillonneur de Gibbs permettra de normaliser la distribution obtenue afin d'obtenir la fonction de densité de probabilité (le *posterior*) de chacun des paramètres sachant les données. L'algorithme d'identification devra d'abord être validé sur des données générées par le modèle et ensuite utilisé sur des données d'opération. Avant de déployer l'algorithme sur les données d'opération, ces dernières doivent subir un traitement préalable afin d'obtenir la fonction de corrélation et la PSD des signaux. L'excitation du système génère des harmoniques dans la PSD du signal. On cherche à identifier les paramètres du modèle par l'analyse des crêtes de ces harmoniques.

Certains biais sont à considérer. Le modèle utilisé considère que les modes de la roue ne sont excités que par les harmoniques de la vitesse de rotation. Le biais amené par l'omission de la contribution d'autres excitations contribuera à l'incertitude de l'identification. Une analyse harmonique-stochastique de la réponse pourrait s'avérer nécessaire. De plus, le modèle de l'équation (1.30) ne prend pas en compte l'amortissement des modes vibratoires causé par l'écoulement d'eau au travers de la structure. La modélisation de l'amortissement pourrait également s'avérer nécessaire à la réalisation d'une identification adéquate.

Des problèmes dans la réalisation d'OMA avec le modèle de réponse forcée proposé sont à surmonter. Entre autres, la validation de l'*identifiabilité* du problème par la multitude de paramètres à identifier, les différentes périodicités d'excitation impliquées dans la réponse, le phénomène de modulation de la vitesse de rotation, et les fuites spectrales, modifiant l'amplitude des pics étudiés et la connaissance de la réponse naturelle même de la roue sont des problèmes à traiter. (Dollon, 2021)

Des connaissances supplémentaires sont à acquérir afin d'obtenir et d'analyser l'identification du modèle. Entre autres, les harmoniques devront être identifiés puis extraits de la réponse. Les méthodes existantes de traitement des harmoniques devront être davantage étudiées afin de les utiliser. Également, la roue étant dans un système couplé, l'influence des composants couplés à la turbine sur la réponse observée sera à étudier. Enfin, les outils de sélection de modèles sont à étudier afin d'adapter le modèle aux différentes périodicités d'excitation.

En somme, les problèmes et biais connus sont à adresser. Les connaissances acquises et à acquérir rendent envisageable l'analyse modale harmonique des roues de turbines en régime stationnaire. En effet, on peut croire à la caractérisation modale et de l'excitation du système par l'analyse de l'interaction entre les modes vibratoires de la roue et ces harmoniques synchrones à l'aide d'un modèle de réponse forcée.



## CHAPITRE 2

### MÉTHODOLOGIE PROPOSÉE

Le but *in fine* du projet est de proposer et valider un algorithme d'identification du comportement dynamique des roues de turbines hydroélectriques à l'aide des données de déformation des aubes en régimes stationnaires près du point de meilleur rendement (*Best Efficiency Point*, BEP). La centrale étudiée (désignée par : Centrale 1) est du type au fil de l'eau. La vitesse nominale de la turbine Francis est de 75 tr/min. La roue comporte 13 aubes et est entourée de 24 directrices.

Les données proviennent de capteurs de déformation installés sur deux aubes de la roue. L'instrumentation de la turbine et la collecte de données sont décrites à la section 2.1. Avant que les données puissent être utilisées par l'algorithme d'identification, elles doivent subir un traitement, ce dernier est décrit à la section 2.2. Les méthodes d'analyse des résultats de l'algorithme sont discutées à la section 2.3.

#### 2.1 Description de la prise et de la validation de données

Les données utilisées dans ce mémoire proviennent d'une campagne de mesures réalisée et validé par une équipe d'experts sur deux groupes de la Centrale 1. Une analyse de la validité des mesures a été réalisée la même équipe. Tous les capteurs ont été préalablement calibrés. La détection d'anomalie a été réalisée en post-traitement par un processus statistique. Les signaux sont classés selon leur qualité à l'aide de leurs quatre premiers moments statistiques (la moyenne, l'écart-type, le coefficient d'asymétrie (*Skewness*) et le Kurtosis) et de leur quantité d'anomalies observées (ex. : saturation du signal). Les signaux analysés dans ce mémoire sont assumés de qualité satisfaisante.

### 2.1.1 Mesures sur la partie tournante

Les mesures réalisées sur la partie tournante et utilisées dans l'analyse sont : les mesures de déformations des aubes et les mesures de pression sur les aubes. Les capteurs sont installés à des localisations définies selon le plan technique de l'équipe d'essais. La Figure 2.1 illustre la position des capteurs de déformation (**rouge**) et de pression (**bleu**) sur une aube.

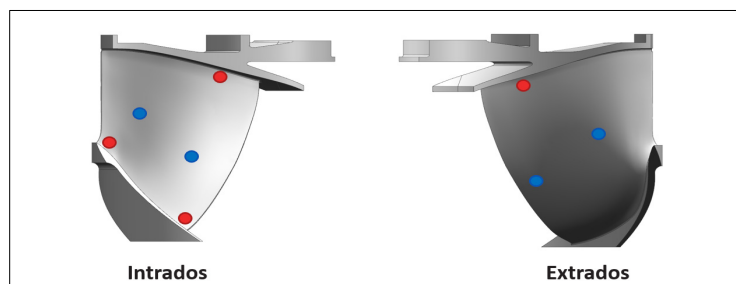


Figure 2.1 Position des capteurs de pression (**bleu**) et de déformations (**rouge**) sur une aube

Le câblage des capteurs passe par l'intérieur de l'arbre jusqu'à un boîtier d'acquisition sur la partie tournante qui transmet les données à un autre boîtier d'acquisition sur la partie fixe par branchement en mode maître-esclave.

Les jauges de déformation sont des rosettes rectangles et des jauges uniaxiales de 2 mm de longueur. Les jauges installées sur la roue par l'équipe d'instrumentation sont recouvertes d'une couche en époxy pour les protéger de l'environnement d'opération. Avant d'installer les capteurs, la surface où le capteur se situera est nettoyée par jet abrasif. Les rosettes rectangles et les jauges uniaxiales sur les aubes renvoient, à une fréquence d'échantillonnage de 2 500 Hz, une tension électrique de  $\pm 10$  V. Cette mesure est traduite en microdéformations d'environ  $\pm 2\,500 \mu S$  (*microstrains*). Les capteurs de pression analysés ont un gain de 250/100 psi/mV et une fréquence d'échantillonnage de 1 000 Hz.



### 2.1.2 Mesures sur la partie fixe

Sur la partie fixe, afin d'évaluer l'état du groupe, les mesures d'ouverture des directrices et de la vitesse de rotation sont aussi analysées. L'ouverture des directrices, échantillonnée à 500 Hz, est une mesure (en pourcentage) de la puissance du groupe, 0% à 100%. La vitesse de rotation du groupe est échantillonnée à 500 Hz. La combinaison de la vitesse de rotation et de l'ouverture des directrices (qui contrôle le débit) permet d'évaluer si l'opération du groupe est en régime stationnaire près du BEP.

## 2.2 Analyse et traitement des données

À partir des données temporelles, on extrait les harmoniques synchrones du signal dans le but de les utiliser dans l'algorithme d'identification. L'analyse des signaux doit permettre de confirmer la stationnarité du fonctionnement de la turbine et la (ou les) périodicité(s) d'excitation que subit la roue. La Figure 2.2 présente le logigramme de la méthode qui démarre avec les données d'opération dans le domaine temporel (en **vert**), jusqu'aux paramètres identifiés du modèle (en **rouge**).

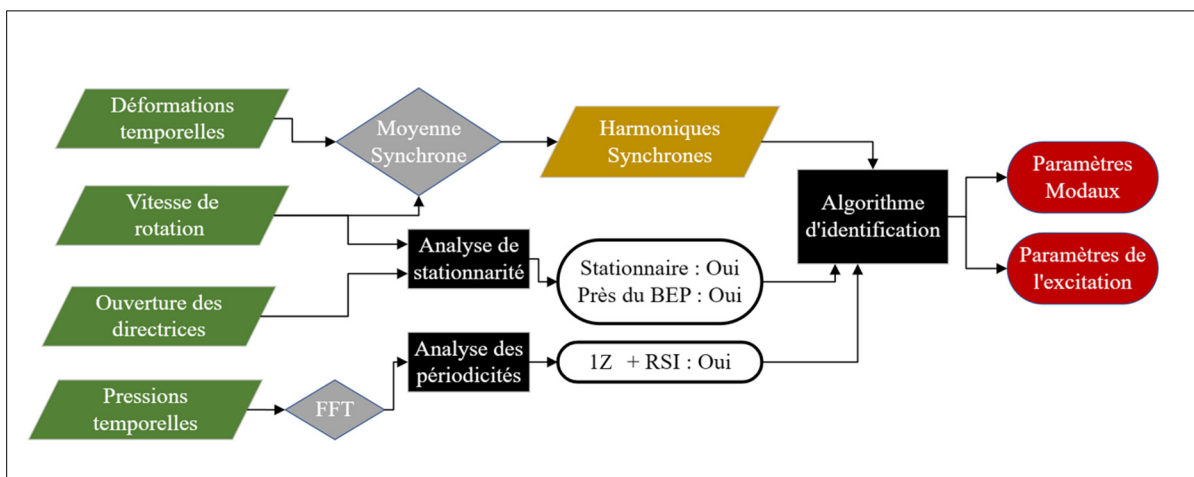


Figure 2.2 Logigramme de la méthode

L'algorithme proposé pour l'identification fonctionne pour un signal mesuré sur une roue en régime stationnaire (Stationnaire : oui) près du BEP (près du BEP : oui) et soumise à une excitation périodique une fois par tour (1Z) (voir section 5.2.1) considérant le ou les

harmoniques RSI (1Z+RSI : oui). L'analyse d'applicabilité de l'algorithme est présentée à la section 5.2)

### 2.2.1 Stationnarité

Le segment d'opération analysé est dit en régime stationnaire près du BEP si et seulement si, la vitesse de rotation du groupe (synchrone) et l'ouverture des directrices (débit) sont jugées constantes. De plus, il est considéré qu'un pourcentage d'ouverture des directrices se situant entre 70% et 95% caractérise une opération près du BEP. À la Figure 2.3, on confirme que la vitesse de rotation du groupe dans le segment analysé est quasi constante à environ  $\pm 0,14\%$  autour de la vitesse moyenne de 75,0 tr/min. À la Figure 2.4, on confirme que la variation d'ouverture des directrices est de l'ordre de 0,5% autour de sa valeur moyenne de 80,08%. Le segment d'opération analysé est alors considéré en régime stationnaire près du BEP.

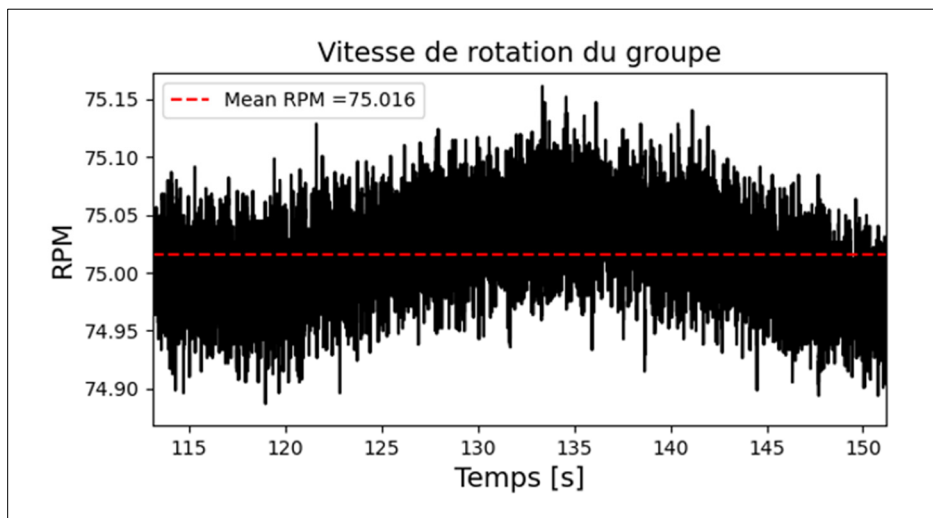


Figure 2.3 Vitesse de rotation du groupe du segment temporel étudié

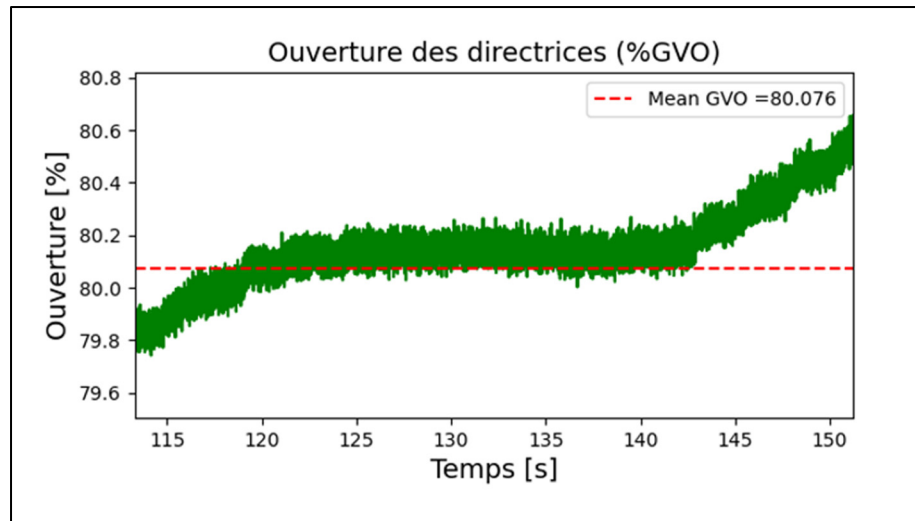


Figure 2.4 Ouverture des directrices dans le segment temporel étudié

### 2.2.2 Périodicités d'excitation

Par hypothèse, on pose qu'une excitation périodique de la roue se traduit par une variation de pression de même périodicité au niveau de l'aube. Les capteurs de pression sur les aubes devraient alors capturer cet effet. En analysant le spectre de chacun des quatre (4) capteurs de pression installés sur l'aube 1 (voir Figure 2.5), on remarque que deux harmoniques (au 1<sup>er</sup> et 24<sup>e</sup> ordre) dominent le spectre. Selon l'hypothèse posée, les deux excitations périodiques dominantes de la roue sont de périodicités  $1Z$  et  $24Z=Z_GZ$ . La périodicité  $Z_GZ$  provenant de l'excitation RSI (*Roto-Stator Interactions*, RSI).

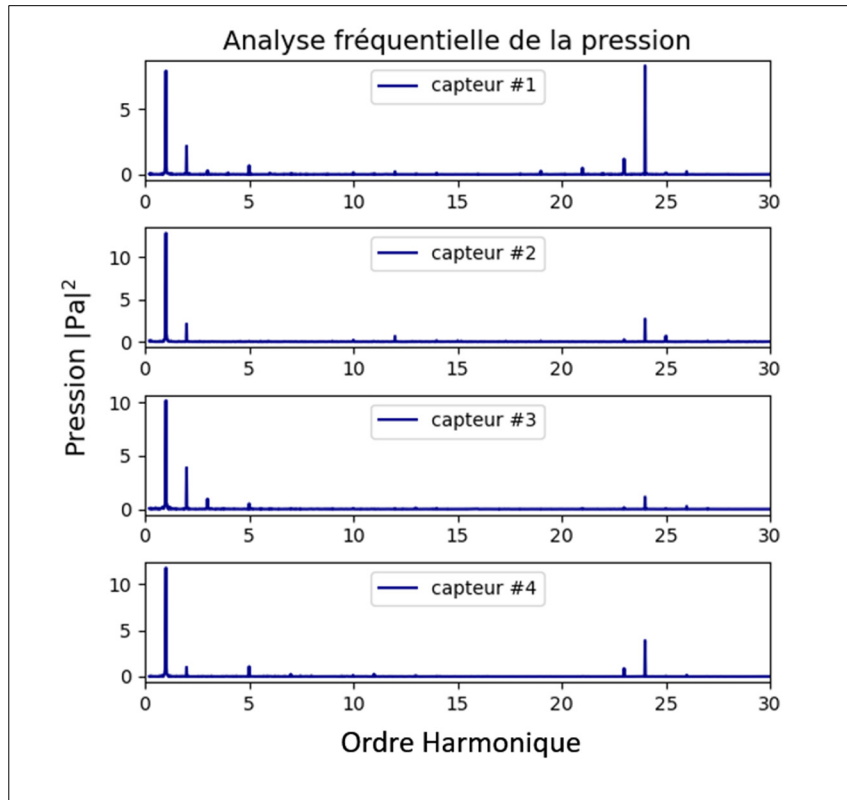


Figure 2.5 Analyse fréquentielle de la pression sur les aubes

### 2.2.3 Extraction des harmoniques synchrones

Le régime d'opération étant stationnaire sous une excitation périodique, il est considéré que la réponse en déformation des aubes de la roue respecte les hypothèses du modèle périodique proposé. La Figure 2.6 illustre une mesure de la déformation temporelle d'un capteur au bord d'attaque de la roue côté intrados.

Pour extraire le contenu synchrone des mesures de déformations, un rééchantillonnage angulaire des mesures de contrainte est réalisé en utilisant la mesure de vitesse de rotation du groupe. Le signal est tronqué au plus grand nombre entier de rotations. On effectue la moyenne synchrone des mesures de déformation (Gagnon & Nicolle, 2019; Leclere & Hamzaoui, 2014). La moyenne synchrone permet d'obtenir un signal représentant l'amplitude angulaire moyenne des déformations par rotation de  $360^\circ$  de la roue (voir Figure 2.7).

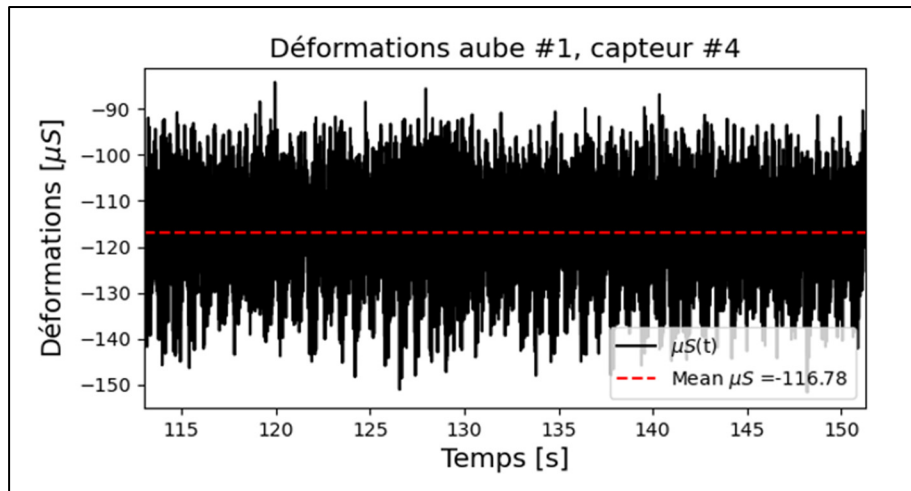


Figure 2.6 Mesure des déformations dans le segment temporel étudié

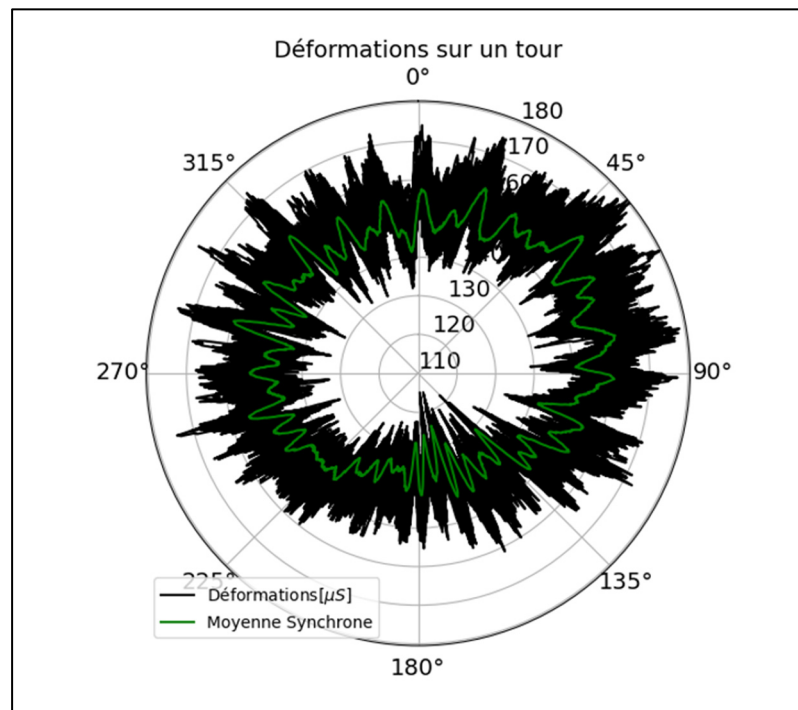


Figure 2.7 Amplitude des déformations sur 360°

Le signal représentant la moyenne synchrone (en **vert**) peut être représenté par la somme des harmoniques synchrones de la réponse. On confirme l'extraction des harmoniques synchrones en comparant l'amplitude des harmoniques extraits (en **vert**) au spectre du signal d'origine (en **noir**).

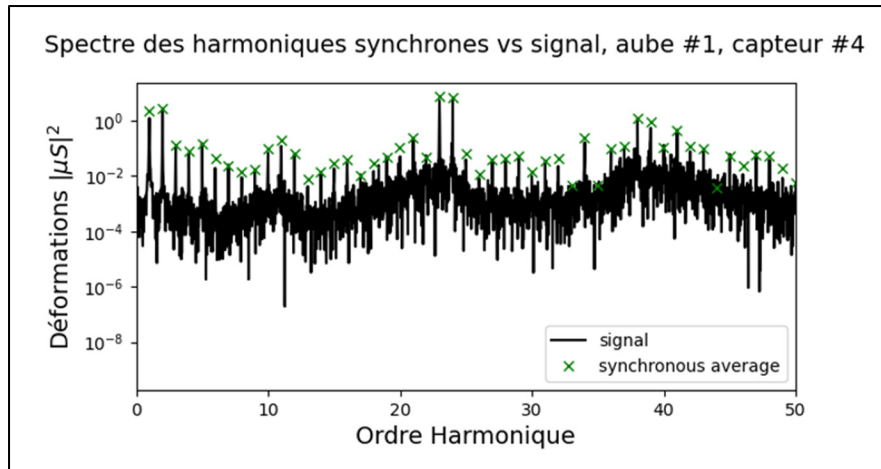


Figure 2.8 Comparaison entre les harmoniques extraits par la moyenne synchrone et le signal fréquentiel

Dans ce cas spécifique, afin d'obtenir l'extraction présentée à la Figure 2.8, une correction de -5% a été ajoutée à la mesure de vitesse de rotation. La Figure 2.8 permet de confirmer que les amplitudes des harmoniques synchrones extraits sont représentatives de la composante synchrone du signal. Les harmoniques extraits peuvent être utilisés par l'algorithme d'identification.

### 2.3 Validation de l'algorithme d'identification modale

Une fois que la cohérence des données est confirmée et que le prétraitement nécessaire à l'extraction des harmoniques du signal a été réalisé, les données peuvent être utilisées par l'algorithme d'identification présenté au CHAPITRE 4. L'algorithme proposé a pour but d'identifier les paramètres modaux et de l'excitation de la roue.

L'identification à l'aide d'un algorithme utilisant le formalisme bayésien consiste à **actualiser les paramètres à l'aide d'itérations**. Les itérations des paramètres génèrent des chaînes de Markov Monte-Carlo (MCMC). L'atteinte de l'état stationnaire, c'est-à-dire lorsque la moyenne est quasi-constante, de chacune des MCMC indique la stabilisation des paramètres et leur convergence vers une solution. La solution obtenue pour un paramètre donné est une distribution descriptible par un diagramme de densité (PDF) ou encore des moments statistiques. Pour les PDF ayant une forme prédéterminée par la densité de probabilité conditionnelle du paramètre associé, la forme est confirmée visuellement. Il est à noter que les chaînes de Markov générées par l'algorithme peuvent atteindre l'état stationnaire sans toutefois donner la solution au problème.

Pour évaluer la capacité de l'algorithme à inférer les paramètres d'un modèle de réponse à une excitation périodique par tour, la méthode proposée est implémentée sur des données synthétiques dont les paramètres sont connus. La convergence des MCMC vers une distribution englobant la valeur cible indique le succès de l'identification. Cette approche permet d'évaluer la sensibilité de l'algorithme à différents biais et hyperparamètres. Les résultats de l'implémentation sur un ensemble de données synthétiques sont présentés au CHAPITRE 5.

Une fois l'algorithme validé sur un ensemble de données produit par un modèle ayant des paramètres connus, il peut être déployé sur les harmoniques synchrones extraits de mesures de déformations du prototype. Lors de l'analyse des données captées *in situ*, les paramètres à inférer ne sont pas connus. La validation du niveau d'exactitude de l'inférence est alors réalisée

à l'aide de comparaisons. Les valeurs les plus probables (mode statistique) des distributions obtenues par l'algorithme pour les fréquences naturelles sont comparées aux valeurs obtenues par simulation numérique par l'entreprise partenaire en phase de conception. L'analyse modale fournie comprend la roue, sans arbre, dans un volume de fluide au repos. L'omission de l'arbre dans l'analyse a pour effet d'augmenter la fréquence naturelle des modes ND0 et ND1. Les fréquences attribuées à ces modes ne seront alors pas comparées. De plus, la roue n'étant pas en rotation, les résultats de simulation ne donnent pas d'information sur l'effet gyroscopique. Les résultats du déploiement de l'algorithme sur les données mesurées en opération sont présentés au CHAPITRE 6.



## CHAPITRE 3

### MODÈLE DE RÉPONSE FORCÉE A UNE EXCITATION HARMONIQUE

Dollon et al. (2023) ont proposé un modèle pour estimer la réponse forcée d'une roue Francis sous une excitation périodique. Le modèle établi que, dans la base modale et pour une bande passante donnée, l'excitation de la roue génère  $Q$  harmoniques par diamètre nodal  $\nu$  observés dans la réponse. Le modèle proposé considère l'effet gyroscopique, la rotation de la roue à la fréquence  $\Omega$  cause la séparation des modes vibratoires en modes conjugués co-rotatifs, de fréquences naturelles  $\omega_{+\nu,\lambda}$  et de déformées modales  $\boldsymbol{\psi}_{+\nu,\lambda}$ , et contra-rotatifs ( $\omega_{-\nu,\lambda}$  et  $\boldsymbol{\psi}_{-\nu,\lambda}$ ) (Dollon et al., 2023; Louyot et al., 2020). Les diamètres nodaux sont alors des nombres entiers  $\nu \in \left] \frac{-Z_R}{2}, \frac{Z_R}{2} \right[$  si la quantité d'aubes de la roue  $Z_R$  est impaire ou  $\nu \in \left[ \frac{-Z_R}{2}, \frac{Z_R}{2} \right]$  si  $Z_R$  est un nombre pair. La vibration stationnaire de diamètre nodal  $\nu = 0$  est considérée comme un mode contra-rotatif par le modèle.

Comme mentionné à la section 1.5.2, la forme  $F(\theta)$  de l'excitation périodique varie selon la position angulaire  $\theta$  d'un point observé  $n$  sur une aube de la roue. Le patron d'excitation  $F(\theta)$  étant périodique, il peut être approximé dans la base physique par une somme de  $2P + 1$  coefficients de Fourier  $\{F_p, -P \leq p \leq P\}$ , où  $P$  est un entier. L'expression de l'excitation dans la base modale génère un ensemble de coefficients  $\mathbf{c}_{q,\nu}$  tel qu'exprimé à l'équation (3.1) et illustré à la Figure 3.1.

$$\mathbf{c}_{q,\nu} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} F_p^* \operatorname{sinc} \left[ (q-p)\pi + \frac{\pi\nu}{Z_R} \right] e^{i \left[ (q-p)\pi + \frac{\pi\nu}{Z_R} \right]} \approx \mathbf{F}^{1Z} \boldsymbol{\Phi}_{q,\nu}^{1Z}, \quad (3.1)$$

$$q \in [1, Q]$$

Dans l'équation (3.1), où  $q \in [1, Q]$ ,  $\mathbf{c}_{q,\nu} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  représente le coefficient de Fourier de l'excitation dans la base modale à l'ordre harmonique  $(qZ_R + \nu)$  pour les  $N$  points observés,

$\mathbf{F}^{1Z} \in \mathbb{C}^{N \times (2P+1)}$  contient les  $2P + 1$  coefficients de Fourier de la force de périodicité  $1Z$  dans la base physique et  $\Phi_{q,v}^{1Z} \in \mathbb{C}^{(2P+1) \times 1}$  est la matrice de transformation associée.

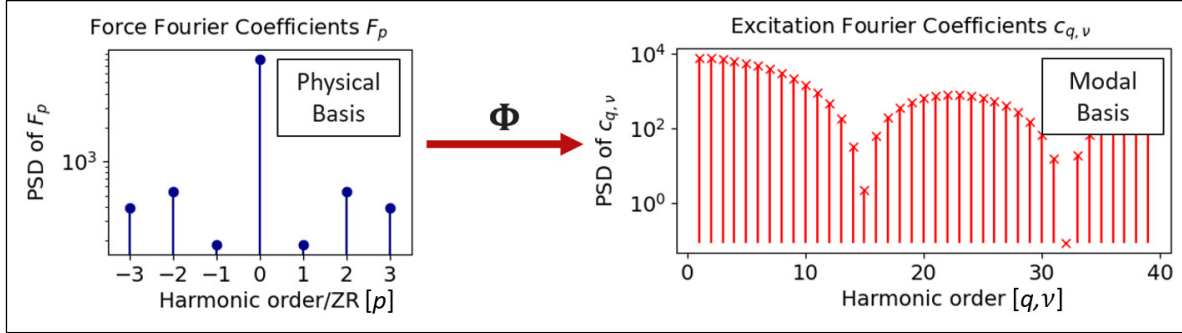


Figure 3.1 Transformation de la force d'excitation de la base physique à la base modale

L'amplitude des harmoniques observées dans la réponse en déformation de la roue dépend de la proximité des harmoniques de l'excitation  $\mathbf{c}_{q,v}$  de leurs fréquences naturelles associées  $\omega_{v,\lambda}$ , de mode  $\lambda \in [1, \Lambda]$ , ayant une déformée modale normalisée  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ . Le modèle de Dollon et al. (2023) considère un seul mode par diamètre nodal. Aux équations (3.2), le modèle est adapté à une contribution multimodale  $\lambda$  et exprimé dans le domaine fréquentiel pour les harmoniques co-rotatifs  $\mathbf{x}_{q,+v}$  et contra-rotatifs  $\mathbf{x}_{q,-v}$  de la réponse.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{q,+v} &= \sum_{\lambda} \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega_{+v,\lambda} - (qZ_R + v)\Omega} \mathbf{A}_{+v,\lambda} \mathbf{c}_{q,+v} \delta[f - (qZ_R + v)\Omega] \\ \mathbf{x}_{q,-v} &= \sum_{\lambda} \frac{\sqrt{2\pi}}{-\omega_{-v,\lambda} - (qZ_R + v)\Omega} \mathbf{A}_{-v,\lambda} \mathbf{c}_{q,-v}^* \delta[f - (qZ_R + v)\Omega] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans les équations (3.2),  $\mathbf{x}_{q,v} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  contient les harmoniques de la réponse en déformation à l'ordre harmonique  $(qZ_R + v)$  pour les  $N$  points observés,  $\mathbf{A}_{+v,\lambda}$  et  $\mathbf{A}_{-v,\lambda} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  sont les matrices résiduelles co-rotatives et contra-rotatives du  $\lambda^{\text{ième}}$  mode conjugué de diamètre nodal  $v$ . Les matrices résiduelles sont définies par la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$  tel que  $\mathbf{A}_{v,\lambda} = \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda} \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}^H$ .

### 3.1 Modèle matriciel

Pour développer l'algorithme d'inférence, le modèle présenté aux équations (3.1) et (3.2), est exprimé sous forme matricielle afin de considérer les  $N \times Q$  harmoniques associés à un diamètre nodal  $\nu$ . D'abord la matrice de force d'excitation  $\mathbf{F}$  est définie selon l'équation (3.3).

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} F_{0,1} & F_{-1,1} & \dots & F_{-P,1} & F_{1,1} & \dots & F_{P,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{0,N} & F_{-1,N} & \dots & F_{-P,N} & F_{1,N} & \dots & F_{P,N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}^* \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{N \times (2P+1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans la matrice (3.3), la fondamentale de l'excitation  $\mathbf{F}_0$  est séparée des harmoniques de l'excitation parce que sa partie imaginaire est nulle,  $\mathbf{F}_0$  est donc égale à son conjugué  $\mathbf{F}_0^*$ . De la définition de la matrice des coefficients de la force d'excitation dans la base physique, la matrice de transformation  $\Phi_\nu$  est formulée selon l'équation (3.4).

$$\Phi_\nu = \begin{bmatrix} \phi_{0,q,\nu} & \phi_{-p,q,\nu} & \dots & \phi_{-1,q,\nu} & \phi_{1,q,\nu} & \dots & \phi_{p,q,\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{0,Q,\nu} & \phi_{-p,Q,\nu} & \dots & \phi_{-1,Q,\nu} & \phi_{1,Q,\nu} & \dots & \phi_{p,Q,\nu} \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$

avec

$$\phi_{p,q,\nu} = \text{sinc} \left[ (q-p)\pi + \frac{\pi\nu}{Z_R} \right] e^{i \left[ (q-p)\pi + \frac{\pi\nu}{Z_R} \right]}$$

Les termes de l'équation (3.2) comprenant les fréquences naturelles co-rotatives ou contra-rotatives sont regroupés dans la matrice  $\mathbf{W}_\nu$  selon les équations (3.5).

$$\mathbf{W}_{-\nu,\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2\pi}}{-\omega_{-\nu,\lambda} - (qZ_R - \nu)\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2\pi}}{-\omega_{-\nu,\lambda} - (QZ_R - \nu)\Omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Q \times Q} \quad (3.5)$$

En utilisant les équations (3.1) à (3.5), le modèle peut alors être exprimé considérant les  $N \times Q$  harmoniques d'un diamètre nodal  $\nu$  co-rotatif ou contra-rotatif selon l'équation (3.6):

$$\mathbf{X}_\nu = \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\nu,\lambda} \mathbf{F} \Phi_\nu \mathbf{W}_{\nu,\lambda} \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{X}_\nu \in \mathbb{C}^{N \times Q}$  contient les harmoniques de la réponse en déformation d'une aube selon un diamètre nodal  $\nu$ .

### 3.2 Modèle matriciel à 2 périodicités

Le modèle de Dollon et al. (2023) propose la réponse forcée à une excitation de périodicité d'une fois par tour (1Z). Les turbines Francis subissent entre autres une excitation provenant des interactions rotor-stator (*Rotor-Stator interactions*, RSI) qui sont de périodicité du nombre de directrices ( $Z_G Z$ ). Pour obtenir une excitation tenant compte des RSI, sous l'hypothèse que l'excitation RSI est décrite par autant d'harmoniques que l'excitation 1Z, une excitation de périodicité  $Z_G Z$  est ajoutée au modèle formulé à l'équation (3.6).

$$\mathbf{X}_\nu^{1,Z_G} = \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\nu,\lambda} \mathbf{F}^{1,Z_G} \Phi_\nu^{1,Z_G} \mathbf{W}_{\nu,\lambda}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{1,Z_G} &= [\mathbf{F}^1 \quad \mathbf{F}^{Z_G}] \in \mathbb{C}^{N \times 2(2P+1)}, \\ \Phi_\nu^{1,Z_G} &= [\Phi_\nu^1 \quad \Phi_\nu^{Z_G}]^T \in \mathbb{C}^{2(2P+1) \times Q} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Où  $\mathbf{X}_v^{1,ZG} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$  contient les harmoniques de la réponse combinée,  $\mathbf{F}^{1,ZG}$  et  $\Phi_v^{1,ZG}$  sont respectivement la matrice des coefficients de la force et la matrice de transformation pour l'excitation combinant les périodicités 1Z et RSI. Pour réaliser l'inférence des coefficients de l'excitation  $\mathbf{F}$  des déformées modales  $\psi_{v,\lambda}$  et des fréquences naturelles  $\omega_{\lambda}^v$ , la contribution d'une excitation spécifique est isolée tel que  $\mathbf{X}_v = \mathbf{X}_v^{1,ZG} - \mathbf{X}_v^{\bar{Z}}$ .

Dans ce chapitre, le modèle de Dollon et al. (2023) a été adapté à une contribution multimodale et l'excitation provenant de l'interaction rotor-stator (RSI) est maintenant prise en compte par le modèle. Le CHAPITRE 4, présente l'algorithme d'inférence des paramètres du modèle.



## CHAPITRE 4

### ALGORITHME D'INFÉRENCE DU MODÈLE

L'inférence des coefficients de l'excitation  $\mathbf{F}$ , des déformées modales  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$ , des fréquences naturelles  $\omega_{v,\lambda}$  et de la variance de l'erreur  $\sigma^2$  est basée sur la Méthode de prédiction d'erreur (*Prediction Error Method*, PEM) (Ljung, 1987) (voir équation. (4.1)). L'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  entre les harmoniques mesurés  $\hat{\mathbf{X}}_v$  et modélisées  $\mathbf{X}_v$  est proposée gaussienne  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_{2NQZR})$ .

$$\hat{\mathbf{X}}_v = \mathbf{X}_v + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1)$$

En utilisant le Théorème de Bayes (Bolstad, 2009) (voir section 1.6) et un *prior* uniforme, la *posterior* du modèle  $\mathbf{X}_v$ , sachant les données  $\hat{\mathbf{X}}_v$ ,  $\mathcal{P}(\mathbf{X}_v, \sigma^2 | \hat{\mathbf{X}}_v)$ , est exprimée proportionnelle à la vraisemblance  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{X}}_v | \mathbf{X}_v, \sigma^2)$  (équation (4.2)) des données sachant le modèle tel que  $\mathcal{P}(\mathbf{X}_v, \sigma^2 | \hat{\mathbf{X}}_v) \propto \mathcal{L}(\hat{\mathbf{X}}_v | \mathbf{X}_v, \sigma^2)$ .

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{X}}_v | \mathbf{X}_v, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^{2NQ}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \text{tr}[(\hat{\mathbf{X}}_v - \mathbf{X}_v)^H (\hat{\mathbf{X}}_v - \mathbf{X}_v)]} \quad (4.2)$$

De la vraisemblance du problème (équation (4.2)), aux sections (4.1 à 4.3), une densité de probabilité conditionnelle est dérivée pour l'excitation  $\mathbf{F}$ , l'erreur  $\sigma^2$  et la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$  menant à un échantillonneur de Gibbs pour ces groupes de paramètres (Bolstad, 2009). La forme de la densité de probabilité conditionnelle des fréquences naturelles  $\omega_{v,\lambda}$  étant inconnue, à la section 4.4, une étape Metropolis-Hastings est implémentée pour ce groupe de paramètres menant à un algorithme Metropolis-Within-Gibbs (Gilks et al., 1995).

#### 4.1 Kernel d'échantillonnage de l'erreur

L'erreur proposée pour le modèle dépend de toutes les harmoniques de la réponse. Pour dériver la probabilité conditionnelle de la variance  $\sigma^2$  ( $p(\sigma^2|\text{rest})$ ), où *rest* signifie tous les autres paramètres du modèle, on pose  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{X}}_v | \mathbf{X}_v, \sigma^2) \propto p(\sigma^2|\text{rest})$ . On ne considère alors que les termes dépendants de  $\sigma^2$ . On déduit de la vraisemblance que la variance  $\sigma^2$  est a-priori distribuée selon une distribution inverse gamma  $\mathcal{G}^{-1}$  selon l'équation (4.3).

$$p(\sigma^2) \sim \mathcal{G}^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{(\sigma^2)^{\alpha+1}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\beta\right] \quad (4.3)$$

La vraisemblance (voir e.q. (4.2)) peut être exprimée selon l'équation (4.4).

$$p(\sigma^2|\text{rest}) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\sum_v NQ}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_v \|\hat{\mathbf{X}}_v - \mathbf{X}_v\|^2\right] \quad (4.4)$$

En analysant les équations (4.3) et (4.4), on reconnaît  $\alpha = \sum_v NQ - 1$  et  $\beta = \sum_v \|\hat{\mathbf{X}}_v - \mathbf{X}_v\|^2$ . La densité de probabilité conditionnelle  $p(\sigma^2|\text{rest})$  de l'erreur du problème pourrait être alors décrite selon l'équation (4.5).

$$p(\sigma^2|\text{rest}) \propto \mathcal{G}^{-1}\left(\sum_v NQ - 1, \sum_v \|\hat{\mathbf{X}}_v - \mathbf{X}_v\|^2\right) \quad (4.5)$$

#### 4.2 Kernel d'échantillonnage de l'excitation

Une reformulation du modèle (3.6) est nécessaire afin de mettre en évidence les paramètres de l'excitation  $\mathbf{F}$  et formuler leur densité de probabilité conditionnelle. Le modèle est d'abord vectorisé selon l'équation (4.6). On exprime donc la matrice de réponse  $\mathbf{X}_v \in \mathbb{C}^{N \times Q}$  comme un vecteur  $\text{vec}\mathbf{X}_v \in \mathbb{C}^{NQ \times 1}$ .



$$\text{vec}X_v = \text{vec} \left( \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{v,\lambda} \mathbf{F} \Phi_v \mathbf{W}_{v,\lambda} \right) \in \mathbb{C}^{NQ \times 1} \quad (4.6)$$

De l'équation (4.6), on utilise le produit de Kronecker  $\otimes$  pour linéariser le modèle par rapport à l'excitation  $\text{vec}(\mathbf{F})$  selon l'équation (4.7) :

$$\text{vec}X_v = \mathbf{P}_v \mathbf{f} \quad (4.7)$$

Avec

$$\mathbf{P}_v = \sum_{\lambda} \mathbf{W}_{v,\lambda}^T \Phi_v^T \otimes \mathbf{A}_{v,\lambda}, \quad \text{vec}\mathbf{F} = \mathbf{f} \quad (4.8)$$

Où  $\mathbf{P}_v \in \mathbb{C}^{NQ \times N(2P+1)}$  est une matrice de transformation et  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N(2P+1)}$  contient les coefficients de Fourier de l'excitation. La structure du vecteur d'excitation  $\mathbf{f}$  résultant de la vectorisation est présentée à l'équation (4.9) :

$$\mathbf{f} = [f_{0,1} \quad \mathbf{f}_{p,1}^* \quad \mathbf{f}_{p,1} \mid \dots \mid f_{0,N} \quad \mathbf{f}_{p,N}^* \quad \mathbf{f}_{p,N}]^T \in \mathbb{C}^{N(2P+1)} \quad (4.9)$$

où  $f_{0,n}$  contient la fondamentale de l'excitation au point observé  $n$ ,  $\mathbf{f}_{p,n} \in \mathbb{C}^P$  contient les  $P$  harmoniques de l'excitation au point  $n$  et  $\mathbf{f}_{p,n}^*$  contient les harmoniques conjugués de  $\mathbf{f}_{p,n}$ .

La structure de  $\mathbf{P}_v$  est présentée aux équations (4.10) :

$$\mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} w_{11} \Phi_{10} \mathbf{A}_{v,\lambda} & \cdots & w_{11} \Phi_{1(2P+1)} \mathbf{A}_{v,\lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{QQ} \Phi_{Q0} \mathbf{A}_{v,\lambda} & \cdots & w_{QQ} \Phi_{Q(2P+1)} \mathbf{A}_{v,\lambda} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{P}_v = [\mathbf{P}_0 \mid \mathbf{P}_{-p,n} \mid \mathbf{P}_{p,n}] \in \mathbb{C}^{NQ \times N(2P+1)}$$

Où  $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{C}^{NQ \times N}$  est une sous-matrice attribuée aux fondamentales de l'excitation,  $\mathbf{P}_p \in \mathbb{C}^{NQ \times NP}$  et  $\mathbf{P}_{-p} \in \mathbb{C}^{NQ \times NP}$  sont attribuée aux  $P$  harmoniques conjugués de l'excitation.

La vectorisation permet d'isoler les paramètres d'excitation  $\mathbf{F}$  du modèle (3.6). Toutefois, afin d'utiliser des distributions applicables à des valeurs réelles pour construire l'algorithme d'inférence, les parties réelles et imaginaires des paramètres de la réponse  $\mathbf{x}_v$  sont séparées tel que :

$$\mathbf{x}_v = \begin{bmatrix} \text{Re}(\text{vec}\mathbf{X}_v) \\ \text{Im}(\text{vec}\mathbf{X}_v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2NQ} \quad (4.11)$$

Le modèle (4.7), s'exprime alors sur un support réel selon l'équation (4.12)

$$\mathbf{x}_v = \tilde{\mathbf{P}}_v \tilde{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{2NQ} \quad (4.12)$$

Avec

$$\tilde{\mathbf{P}}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,nr} & \mathbf{P}_{-p,nr} + \mathbf{P}_{p,nr} & \mathbf{P}_{-p,ni} - \mathbf{P}_{p,ni} \\ \mathbf{P}_{0,ni} & \mathbf{P}_{-p,ni} + \mathbf{P}_{p,ni} & \mathbf{P}_{p,nr} - \mathbf{P}_{-p,nr} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2NQ \times N(2P+1)} \quad (4.13)$$

Et

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_{0,n} \\ \mathbf{f}_{p,nr} \\ \mathbf{f}_{p,ni} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N(2P+1)} \quad (4.14)$$

Où  $\tilde{\mathbf{P}}_v$  est la matrice de transformation augmentée,  $f_{0,n} \in \mathbb{R}^N$  est la valeur de la fondamentale de l'excitation au point observé  $n$ ,  $\mathbf{f}_{p,r} \in \mathbb{R}^{NP}$  et  $\mathbf{f}_{p,i} \in \mathbb{R}^{NP}$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires des coefficients de Fourier de l'excitation dans la base physique. L'expression de manière explicite (équation (4.14)) des parties réelles et imaginaires du modèle vectorisé (équation (4.7)) permet l'utilisation de distributions à support réel pour le kernel d'échantillonnage de l'excitation.

Pour le kernel d'échantillonnage, les paramètres de l'excitation  $\tilde{\mathbf{f}}$  sont posés proportionnels à la vraisemblance du problème,  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{X}}_v | \mathbf{X}_v, \sigma^2) \propto p(\tilde{\mathbf{f}}|\text{rest})$ , menant à l'équation (4.15).

$$p(\tilde{\mathbf{f}}|\text{rest}) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\text{tr}[\Sigma_v(\hat{\mathbf{x}}_v - \tilde{\mathbf{P}}_v\tilde{\mathbf{f}})^T(\hat{\mathbf{x}}_v - \tilde{\mathbf{P}}_v\tilde{\mathbf{f}})]} \quad (4.15)$$

On déduit de la vraisemblance que les paramètres de l'excitation  $\tilde{\mathbf{f}}$  sont distribués de manière gaussienne  $p(\tilde{\mathbf{f}}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Delta})$  selon l'équation (4.16).

$$p(\tilde{\mathbf{f}}) \propto \frac{1}{|\boldsymbol{\Delta}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}[(\tilde{\mathbf{f}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\tilde{\mathbf{f}} - \boldsymbol{\mu})]} \quad (4.16)$$

Des équations (4.15) et (4.16), on reconnaît  $\boldsymbol{\mu} = \sum_v (\tilde{\mathbf{P}}_v^T \tilde{\mathbf{P}}_v)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_v^T \boldsymbol{\chi}_v$  et  $\boldsymbol{\Delta} = \sigma^2 \sum_v (\tilde{\mathbf{P}}_v^T \tilde{\mathbf{P}}_v)^{-1}$ . La probabilité conditionnelle de l'excitation,  $p(\tilde{\mathbf{f}}|\text{rest})$ , s'exprime alors selon l'équation (4.17).

$$p(\tilde{\mathbf{f}}|\text{rest}) \propto \mathcal{N}\left(\sum_v (\tilde{\mathbf{P}}_v^T \tilde{\mathbf{P}}_v)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_v^T \hat{\boldsymbol{\chi}}_v, \sigma^2 \sum_v (\tilde{\mathbf{P}}_v^T \tilde{\mathbf{P}}_v)^{-1}\right) \quad (4.17)$$

### 4.3 Kernel d'échantillonnage de la déformée modale

Les déformées modales  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$  sont des vecteurs complexes unitaires. Chaque mode  $\lambda$  d'un diamètre nodal  $v$  à sa déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$  associée. La probabilité conditionnelle pour une déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$  est évaluée selon les harmoniques observées  $\hat{\mathbf{X}}_{v,\lambda}$  attribuées au mode d'intérêt, considérant l'effet des autres modes, tel que décrit à l'équation (4.18).

$$\hat{\mathbf{X}}_{v,\lambda} = \hat{\mathbf{X}}_v - \sum_{\zeta \neq \lambda} \mathbf{A}_{v,\zeta} \mathbf{F} \boldsymbol{\Phi}_v \mathbf{W}_{v,\zeta} \quad (4.18)$$

De la vraisemblance (équation (4.2)) et en utilisant la définition de la matrice résiduelle  $\mathbf{A}_{v,\lambda} = \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda} \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}^H$ , la déformée modale est mise en évidence en utilisant la propriété de permutation circulaire de la trace comme montrée à l'équation (4.19).

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_{v,\lambda} | \mathbf{X}_{v,\lambda}, \sigma^2) \\ \propto & e^{\text{tr}[\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}^H \left( \frac{-1}{\sigma^2} [\mathbf{F} \boldsymbol{\Phi}_{v,\lambda} \mathbf{W}_{v,\lambda} \mathbf{W}_{v,\lambda}^T \boldsymbol{\Phi}_{v,\lambda}^H \mathbf{F}^H - \widehat{\mathbf{X}}_{v,\lambda} \mathbf{W}_{v,\lambda}^H \boldsymbol{\Phi}_{v,\lambda}^H \mathbf{F}_p^H - \mathbf{F} \boldsymbol{\Phi}_{v,\lambda} \mathbf{W}_{v,\lambda} \widehat{\mathbf{X}}_{v,\lambda}^H] \right) \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}]} \end{aligned} \quad (4.19)$$

En se référant aux développements de Dollon et al. (2022), l'équation (4.19) s'identifie à une distribution Bingham vectorielle pour la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$ . En effet, l'équation (4.19) est de la forme  $\text{tr}[\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}^H \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}]$  avec la matrice symétrique hermitienne  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ . Le tirage de la déformée modale est réalisé selon l'algorithme proposé par Dollon et al. (2022). Une contrainte de phase, forçant la partie imaginaire de la première coordonnée de la déformée modale  $\boldsymbol{\psi}_{v,\lambda}$ , à zéro, est ajoutée à l'algorithme pour palier à l'indétermination de phase de la distribution Bingham.

#### 4.4 Kernel d'échantillonnage de la fréquence naturelle

La fréquence naturelle  $\omega_{v,\lambda}$  associée au mode  $\lambda$  d'un diamètre nodal  $v$  est comprise dans les éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{W}_{v,\lambda}$ . Tel que montré à l'équation (4.20), la distribution de la fréquence naturelle  $\omega_{v,\lambda}$  est de forme inconnue.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_{v,\lambda} | \mathbf{X}_{v,\lambda}, \sigma^2) \\ \propto & e^{\frac{-1}{2\sigma^2} \text{tr}[-\mathbf{W}_{v,\lambda} (\widehat{\mathbf{X}}_{v,\lambda}^H \mathbf{A}_{v,\lambda} \mathbf{F} \boldsymbol{\Phi}_v + \boldsymbol{\Phi}_v^H \mathbf{F}^H \mathbf{A}_{v,\lambda}^H \widehat{\mathbf{X}}_{v,\lambda}) + \mathbf{W}_{v,\lambda}^2 \boldsymbol{\Phi}_v^H \mathbf{F}^H \mathbf{A}_{v,\lambda}^H \mathbf{A}_{v,\lambda} \mathbf{F} \boldsymbol{\Phi}_v]} \end{aligned} \quad (4.20)$$

L'échantillonnage de la fréquence naturelle est alors réalisé sous une étape Métropolis-Hastings à pas aléatoire. Le candidat  $\omega_{v,\lambda_i}$  à l'itération  $i$  est échantillonné dans une distribution gaussienne  $\mathcal{N}(\omega_{v,\lambda_{i-1}}, \sigma_{v,\lambda}^2)$  avec une variance  $\sigma_{v,\lambda}^2$  définie par l'utilisateur. Pour maximiser le taux d'acceptation des candidats d'un mode donné, la variance  $\sigma_{v,\lambda}^2$  peut être définie de

manière spécifique à chacun des modes en considérant le ratio signal-bruit (SNR) des harmoniques près du mode.

Les modes contra-rotatifs sont excités par des harmoniques à plus haute fréquence ayant un SNR plus faible que les harmoniques associés aux modes co-rotatifs. En ce sens, les modes contra-rotatifs sont plus sensibles au biais d'excitation stochastique. Pour minimiser cet effet, une hypothèse est posée sur la séparation des modes. La séparation des modes ayant été observée de l'ordre de 1 Hz sur un cas d'étude similaire à celui de ce mémoire (Dollon et al., 2023), on juge raisonnable de poser que la différence fréquentielle entre deux modes conjugués est dans une plage de 0 Hz à 10 Hz. La probabilité conditionnelle d'une fréquence naturelle contra-rotative,  $p(\omega_{-v,\lambda}|\text{rest})$  se voit alors affectée un *prior* gaussien  $p(\omega_{-v,\lambda}|\omega_{+v,\lambda}, k^2) = \mathcal{N}(\omega_{+v,\lambda}, k^2)$  selon la valeur de la fréquence naturelle co-rotatives de même diamètre nodal  $\omega_{+v,\lambda}$  et une variance  $k^2$  définie par l'utilisateur. La densité de probabilité conditionnelle d'une fréquence naturelle devient l'équation (4.21).

$$p(\omega_{-v,\lambda}|\text{rest}) \propto \mathcal{L}(\hat{\mathbf{X}}_{v,\lambda}|\mathbf{X}_{v,\lambda}, \sigma^2) p(\omega_{-v,\lambda}|\omega_{+v,\lambda}, k^2) \quad (4.21)$$

Dans l'étape Metropolis-Hastings de l'algorithme, les variances  $\sigma_{v,\lambda}^2$  et  $k^2$  définies par l'utilisateur sont ajustées selon le niveau de bruit et la quantité de points d'observation  $N$  pour maximiser le taux d'acceptation des fréquences naturelles de chacun des modes. L'Algorithme 4.1 présente l'étape Metropolis-Hastings.

Algorithme 4.1 Pseudo-code pour l'étape Métropolis-Hastings

<b>Intrants</b>	Paramètres de l'excitation, vecteurs modaux et erreur
<b>Extrants</b>	Nouveaux candidats de fréquences naturelles de mode $\lambda$
1:	<b>pour</b> chaque mode $\nu$ dans $(1, Z_R)$
2:	tirer le candidat $\omega_{\nu, \lambda_i}$ dans $\mathcal{N}(\omega_{\nu, \lambda_{i-1}}, \sigma_{\nu, \lambda}^2)$
3:	<b>si</b> $\omega_{\nu, \lambda} < \omega_{\nu, \lambda-1}$ <b>alors</b>
4:	$\omega_{\nu, \lambda} = \omega_{\nu, \lambda-1}$
5:	Isoler le mode selon l'équation (4.18)
6:	évaluer le ratio :
	$\alpha = \frac{p(\omega_{\nu, \lambda_i}   \text{rest})}{p(\omega_{\nu, \lambda_{i-1}}   \text{rest})}$
7:	tirer $u$ dans $\mathcal{U}(0, 1)$
8:	<b>si</b> $\min(\alpha, 1) > u$ <b>alors</b>
	$\omega_{\nu, \lambda+1} = \omega_{\nu, \lambda}$
9:	<b>sinon</b>
10:	$\omega_{\nu, \lambda+1} = \omega_{\nu, \lambda}$

#### 4.5 L'algorithme

À l'aide des densités de probabilités conditionnelles de la variance de l'erreur  $\sigma^2$ , l'excitation  $F$ , des déformées modales  $\psi_{\nu, \lambda}$  et de l'étape Metropolis-Hastings des fréquences naturelles  $\omega_{\nu, \lambda}$ , on formule l'Algorithme 4.2.

Algorithme 4.2: Pseudo-code pour l'échantillonneur Metropolis-Within-Gibbs

<b>Intrants</b>	Paramètres modaux et erreur de départ
<b>Extrants</b>	MCMC des paramètres de l'excitation, modaux et de l'erreur
1:	Définir $\sigma_{v,\lambda}^2, k^2$
2:	Initialiser $\omega_{v,\lambda_{i-1}}, \sigma^2_i, \psi_{v,\lambda_i}$
3:	<b>pour</b> $i$ dans $(1, K)$
4:	Tirer $F$ dans l'éq. (4.17)
5:	Tirer $\sigma^2$ dans l'éq. (4.5)
6:	<b>pour</b> $\lambda$ dans $(1, \Lambda)$
7:	Isoler le mode selon l'équation (4.18)
8:	Tirer $\omega_{v,\lambda_{i+1}}$ selon l'Algorithme 4.1
9:	Tirer $\psi_{v,\lambda_{i+1}}$ selon Dollon et al. (2022) et l'éq. (4.19)
10:	Enregistrer les valeurs échantillonnées dans un vecteur
11:	Remplacer les intrants par les nouveaux candidats

#### 4.6 Analyse de l'identifiabilité

Pour évaluer, dans un premier temps, si le problème posé peut être identifiable selon les données et le modèle proposé, une analyse de condition nécessaire est proposée. L'*identifiabilité* du problème dépend de la condition nécessaire liant le nombre d'inconnues  $N_{inc}$ , le nombre de données disponibles  $N_{con}$ , et le nombre de contraintes  $N_{ct}$  appliquées au problème tel que présenté à l'équation (4.22).

$$N_{con} \geq N_{inc} - N_{ct} \quad (4.22)$$

Par soucis de simplicité, on suppose un nombre de contraintes  $N_{ct}=0$ . Il est nécessaire que la quantité de connues  $N_{con}$  soit égale ou plus grande que la quantité d'inconnues  $N_{inc}$  pour que le problème soit identifiable. Pour l'identification d'une périodicité d'excitation donnée, les valeurs de l'équation (4.22) dépendent de la quantité : d'aubes de la roue  $Z_R$ , de la quantité de modes  $\Lambda$  considérés par diamètre nodal  $v$ , du nombre de points observés  $N$ , de la quantité d'harmoniques de la réponse par diamètre nodal  $Q$  et de la quantité d'harmoniques de l'excitation  $P$ . La quantité d'inconnues  $N_{inc}$  du problème est définie selon l'équation (4.23):

$$N_{\text{inc}} = Z_R \Lambda + 2Z_R N \Lambda + N(2P + 1) \quad (4.23)$$

où  $Z_R \Lambda$  est la quantité de fréquences naturelles,  $2Z_R N \Lambda$  est la quantité de coordonnées des vecteurs modaux et  $N(2P + 1)$  est la quantité de paramètres de l'excitation. Le nombre de connus  $N_{\text{con}}$  présente la quantité totale de valeurs décrivant les harmoniques complexes de la réponse définie par l'équation (4.24).

$$N_{\text{con}} = 2NQZ_R \quad (4.24)$$

En combinant les équations (4.22). (4.23) et (4.24), on obtient la condition nécessaire (équation (4.25)) à respecter pour identifier le problème sans contraintes.

$$\underbrace{2NQZ_R}_{\text{Harmoniques de la réponse}} \geq \underbrace{Z_R \Lambda}_{\text{Fréquences naturelles}} + \underbrace{2Z_R N \Lambda}_{\text{Déformées modales}} + \underbrace{N(2P + 1)}_{\text{Excitation}} \quad (4.25)$$

De l'équation (4.25), une variable donnée peut être isolée afin de déterminer la condition nécessaire à respecter pour chacun des paramètres du problème. Les conditions nécessaires pour la quantité de modes  $\Lambda$ , le nombre d'harmoniques de l'excitation  $P$ , le nombre de points observés  $N$  et la quantité d'harmoniques de la réponse  $Q$  sont présentés aux équations (4.26) à (4.29).

$$\Lambda \leq \frac{N(2QZ_R - 2P - 1)}{Z_R(1 + 2N)} \quad (4.26)$$

$$P \leq \frac{1}{2} \left( \frac{Z_R[2NQ - \Lambda - 2N\Lambda]}{N} - 1 \right) \quad (4.27)$$

$$N \geq \frac{Z_R \Lambda}{2QZ_R - 2Z_R \Lambda - 2P + 1} \quad (4.28)$$



$$Q \geq \frac{Z_R \Lambda + 2Z_R N \Lambda + N(2P + 1)}{2NZ_R} \quad (4.29)$$

Les conditions (4.26) à (4.29) sont nécessaires à l'*identifiabilité* du problème. Elles doivent être respectées lors de l'application de l'algorithme, mais ne sont pas nécessairement suffisantes à la convergence de ce dernier. La suffisance de l'algorithme à l'inférence des paramètres du modèle à l'aide des données est évaluée expérimentalement au CHAPITRE 5.



## CHAPITRE 5

### IMPLÉMENTATION SUR DONNÉES SYNTHÉTIQUES

*In fine*, l'algorithme proposé au CHAPITRE 4 doit être déployé sur des mesures expérimentales *in situ* des déformations élastiques d'une roue Francis en régime stationnaire et près du point de fonctionnement BEP. Pour tester la cohérence et la robustesse de l'approche proposée, l'algorithme est d'abord évalué sur des données générées à partir d'un modèle analytique qui est le modèle de réponse forcée à une excitation périodique (présenté au CHAPITRE 3). La connaissance *a priori* des paramètres utilisés pour générer les données permet d'évaluer si l'algorithme les infère adéquatement. Le présent chapitre aborde d'abord l'évaluation des performances de l'algorithme sur le modèle défini à la section 5.1. À la section 5.2 est discutée l'applicabilité de l'algorithme par rapport à la quantité de paramètres du système. La section 5.3 présente une analyse critique des divergences constatées entre le modèle et la dynamique d'une roue Francis. La section 5.4 présente l'évaluation de l'algorithme sur un modèle volontairement biaisé et plus représentatif de la réalité. Les sections 5.5 et 5.6 présentent, respectivement, une discussion et les conclusions tirées de l'implémentation de l'algorithme sur le modèle analytique. L'analyse de sensibilité de l'algorithme aux différents biais est résumée au tableau Tableau 5.1.

Tableau 5.1 Résumé de l'analyse de sensibilité de l'algorithme

<b>Analyse de l'algorithme</b>	<b>Conclusion</b>	<b>Section</b>
Évaluation sur des données non-biaisées	Converge vers les paramètres cibles	Section 5.1
Limites d'applicabilité expérimentale	Limitation à une excitation 1Z et deux modes par diamètre nodal	Section 5.2
Analyse de sensibilité au SNR d'excitation	Influence non critique du SNR près du BEP	Section 5.3
Évaluation sur des données biaisées	Converge près des paramètres cibles avec une erreur raisonnable	Section 5.4

## 5.1 Évaluation de l'algorithme sur des données non-biaisées

Il est important de mentionner que la performance des algorithmes probabilistes augmente avec la taille de l'ensemble de données disponibles pour un même modèle. Il est d'intérêt d'exploiter la plus large bande passante exploitable de la réponse pour considérer le plus d'harmoniques synchrones observables. Plus l'ordre harmonique maximal qui sera considéré est élevé, plus la bande passante analysée contient de modes vibratoires. Par conséquent, plus on considère un ordre élevé d'harmoniques synchrones, plus il y a de données pour réaliser l'inférence, toutefois plus le problème d'inférence se complexifie d'un point de vue numérique. Les harmoniques synchrones de l'ensemble de données étudié sont observés jusqu'au 40<sup>e</sup>, et même 50<sup>e</sup>, ordre harmonique de la réponse (voir Figure 6.2). Dans cette bande passante pour le cas spécifique de la turbine Francis étudiée, de deux (2) à cinq (5) modes  $\lambda$  par diamètre nodal  $\nu$  sont attendues. L'algorithme est alors évalué et jugé sur des données générées par un modèle représentatif de la quantité d'harmoniques et de modes expérimentalement escomptés.

### 5.1.1 Génération des données synthétiques

À l'aide du modèle présenté à l'équation (3.6), une réponse synthétique est générée pour  $n=3$  points d'observation sur une aube de roue de  $Z_R=13$  aubes tournant à  $\Omega=1,25$  Hz

(voir Figure 5.1). On considère une excitation périodique une fois par tour (1Z) composée d'une fondamentale et  $P=3$  harmoniques. L'excitation génère une réponse de  $Z_R Q=39$  harmoniques pour chacun des points d'observation. Elle excite un total de 26 modes, soit deux modes par diamètre nodal  $\nu$ .

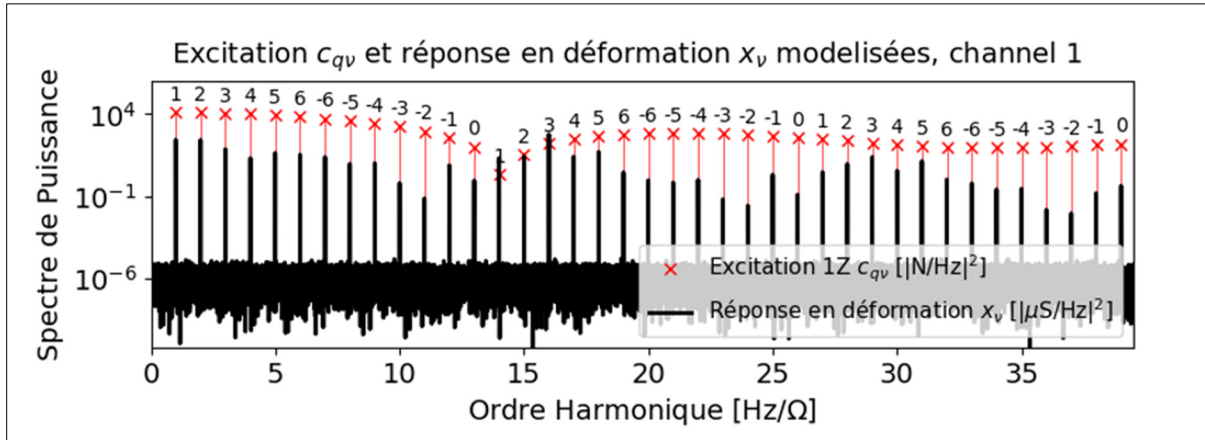


Figure 5.1 Excitation et réponse modélisées pour le problème non-biaisé. La réponse forcée du système est illustrée en **noir**, et l'amplitude des coefficients d'excitation associés dans la base modale est présentée en **rouge**. La différence entre ces deux courbes traduit l'influence des modes du système.

Pour le problème posé et selon les équations (4.22) à (4.29), les conditions nécessaires  $\Lambda \leq 3$ ,  $Q \geq 3$  et  $P \leq 21$  sont respectées. Un bruit gaussien est ajouté au patron d'excitation  $F(\theta)$  pour simuler un effet stochastique induit par la turbulence de l'écoulement. Le SNR de l'excitation résultante est d'environ 52 dB. À la Figure 5.1, à des fins de visualisation, un plancher de bruit équivalent au spectre du bruit gaussien sur l'excitation est ajouté entre les harmoniques. On remarque que, pour ce cas d'analyse, la stochasticité ajoutée est d'ordre de grandeur négligeable par rapport aux harmoniques synchrones considérées par l'algorithme d'inférence. La modélisation et l'analyse de la stochasticité d'excitation sont présentées à la section 5.3. Les harmoniques modélisées et bruitées sont alors utilisées par l'Algorithme 4.2 pour réaliser l'inférence des  $N(2P + 1)=21$  valeurs des coefficients de Fourier complexe de l'excitation  $\mathbf{F}$ , des  $2Z_R N=78$  points de coordonnées modales des vecteurs modaux  $\boldsymbol{\psi}_{\nu,\lambda}$  et les 26 fréquences naturelles  $\omega_{\nu,\lambda}$ . Au final, l'inférence des 125 paramètres du modèle est réalisée avec les  $2NQZ_R=234$  points décrivant les harmoniques la réponse. L'algorithme proposé infère donc

le même nombre de paramètres que ceux de la réponse synthétique, et le problème ne présente pas de biais de modèle.

### 5.1.2 Inférence des paramètres

L'inférence du problème non-biaisé produit des chaînes de Markov qui ont une tendance globale vers la convergence (telle que décrite à la section 2.3). Pour les 50 000 itérations réalisées, la chaîne de Markov de la variance  $\sigma^2$  produit un comportement convergent, mais n'atteint pas un état stationnaire tel qu'illustré à la Figure 5.2. La stochasticité ajoutée au signal n'est donc pas assez importante pour que les étapes de l'échantillonneur de Gibbs atteignent la stationnarité complète dans le nombre d'itérations imposé. L'utilisation d'une erreur plus grande, ou de plus d'itérations, comme pour le cas présenté à la Figure 5.15, amène la chaîne de Markov de la variance  $\sigma^2$  à se stabiliser. Toutefois, dans la présente section, l'analyse des MCMC montre une tendance de convergence générale vers la valeur cible utilisée pour produire la donnée.

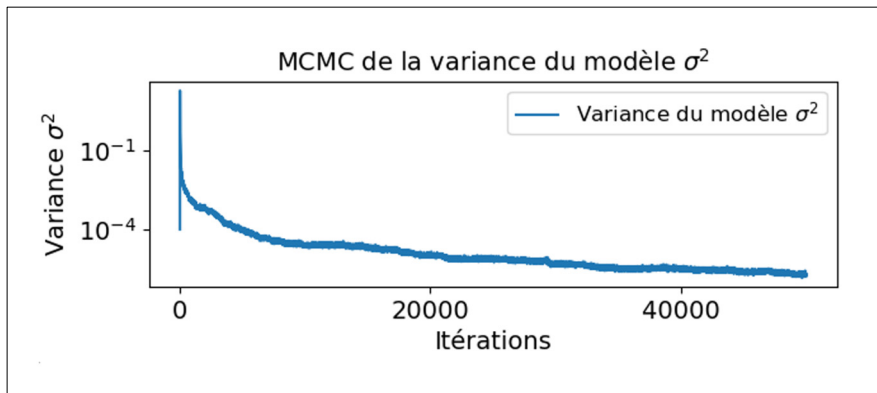


Figure 5.2 MCMC de la variance  $\sigma^2$  de l'erreur du modèle

Pour l'excitation, les chaînes de Markov des parties réelles et imaginaires des coefficients de Fourier semblent se stabiliser en moins de 500 itérations (voir Figure 5.3). Toutefois, comme pour la variance  $\sigma^2$ , les chaînes n'atteignent pas l'état stationnaire dans le nombre d'itérations imposé, phénomène expliqué par la faible contribution de la stochasticité ajoutée au modèle.

Toutefois, les distributions obtenues indiquent la tendance globale des paramètres à bien converger vers leur valeur cible (voir Figure 5.4).

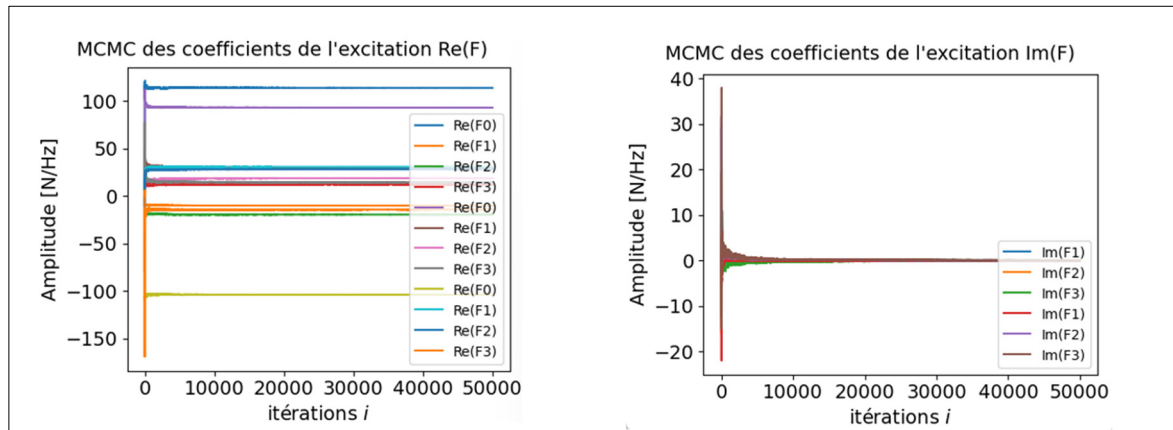


Figure 5.3 MCMC des coefficients de l'excitation.

La Figure 5.4 illustre la comparaison entre les distributions inférées pour les coefficients d'excitation par rapport à leur valeur cible (en **rouge**). La forme des distributions montre la tendance de rapprochement vers les valeurs cibles des chaînes de Markov. Dans le cas étudié, l'excitation étant définie avec une phase nulle, la partie imaginaire des coefficients de Fourier de l'excitation tend vers zéro. L'impact relatif du biais provenant de l'ajout de stochasticité sur l'excitation est alors plus élevé sur ces paramètres. L'erreur entre la distribution inférée et la valeur cible pour la partie imaginaire de chacun des 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> ( $Im(F_2)$  et  $Im(F_3)$ ) harmoniques de l'excitation témoignent de cet effet. Toutefois, parce que le modèle est non représentatif (biais de sous-paramétrisation) du système dynamique réel, l'effet, ou le biais, de la stochasticité de l'excitation peut être considéré d'une importance négligeable lors du déploiement sur prototype, comme discuté à la section 5.3.

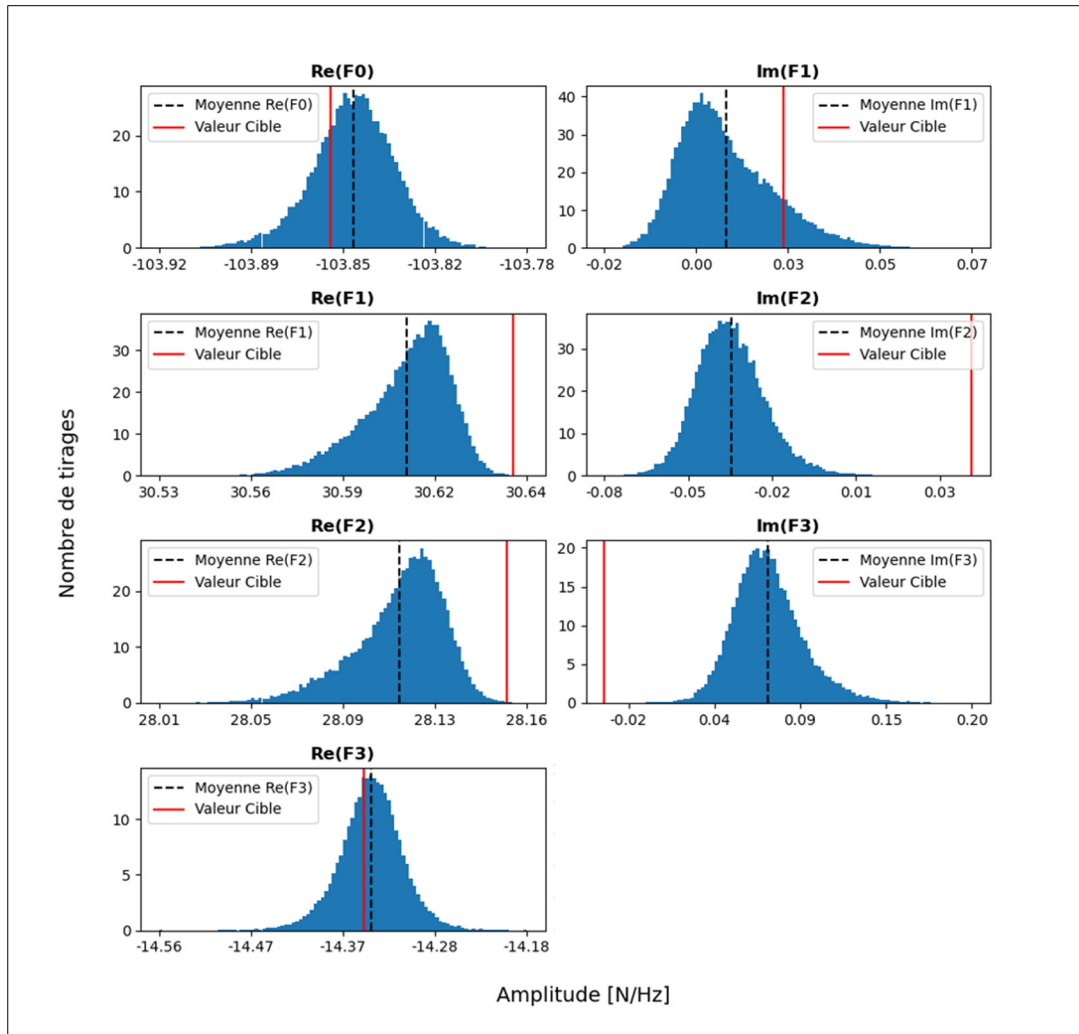


Figure 5.4 Distributions *posterior* des paramètres  $\mathbf{F}$  pour le 3<sup>e</sup> point d'observation du cas non-biaisé. On compare les distributions inférées pour les coefficients d'excitation par rapport à leur valeur cible (en **rouge**). La forme des distributions montre la tendance de rapprochement vers les valeurs cibles des chaînes de Markov. Dans le cas étudié, l'excitation étant définie avec une phase nulle, la partie imaginaire des coefficients de Fourier de l'excitation tend vers zéro. L'impact relatif du biais provenant de l'ajout de stochasticité sur l'excitation est alors plus élevé sur ces paramètres.

Pour le paramètre des vecteurs modaux  $\psi_{\nu}$ , le tirage dans la distribution Bingham converge. La Figure 5.5 illustre les chaînes de Markov pour toutes les coordonnées modales des modes co-rotatifs  $\psi_{+\nu}$  et contra-rotatifs  $\psi_{-\nu}$ . On remarque que les modes contra-rotatifs  $\psi_{-\nu}$  (environ



25 000 itérations) se stabilisent plus lentement que les modes co-rotatifs  $\psi_{+\nu}$  (moins de 10 000 itérations) et avec une variance plus élevée.

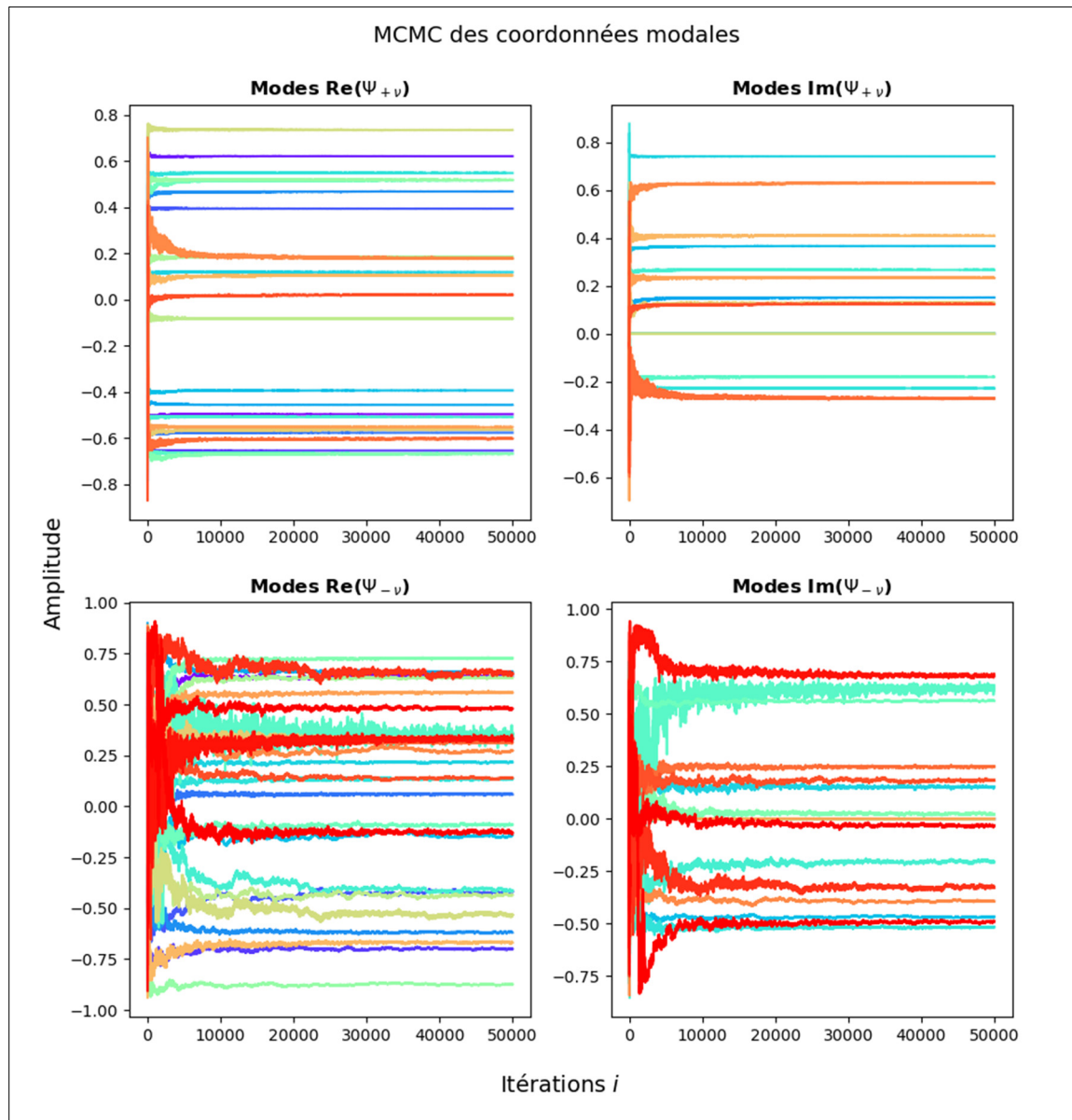


Figure 5.5 MCMC des déformées modales

La Figure 5.6 illustre les distributions obtenues pour chacune des coordonnées du vecteur modal du mode de plus haute fréquence de diamètre nodal  $\nu = -2$  (ND2\*-2). Même si l'état

stationnaire des chaînes n'est pas complètement atteint, la distribution résultante de l'inférence englobe la valeur cible de la coordonnée modale.

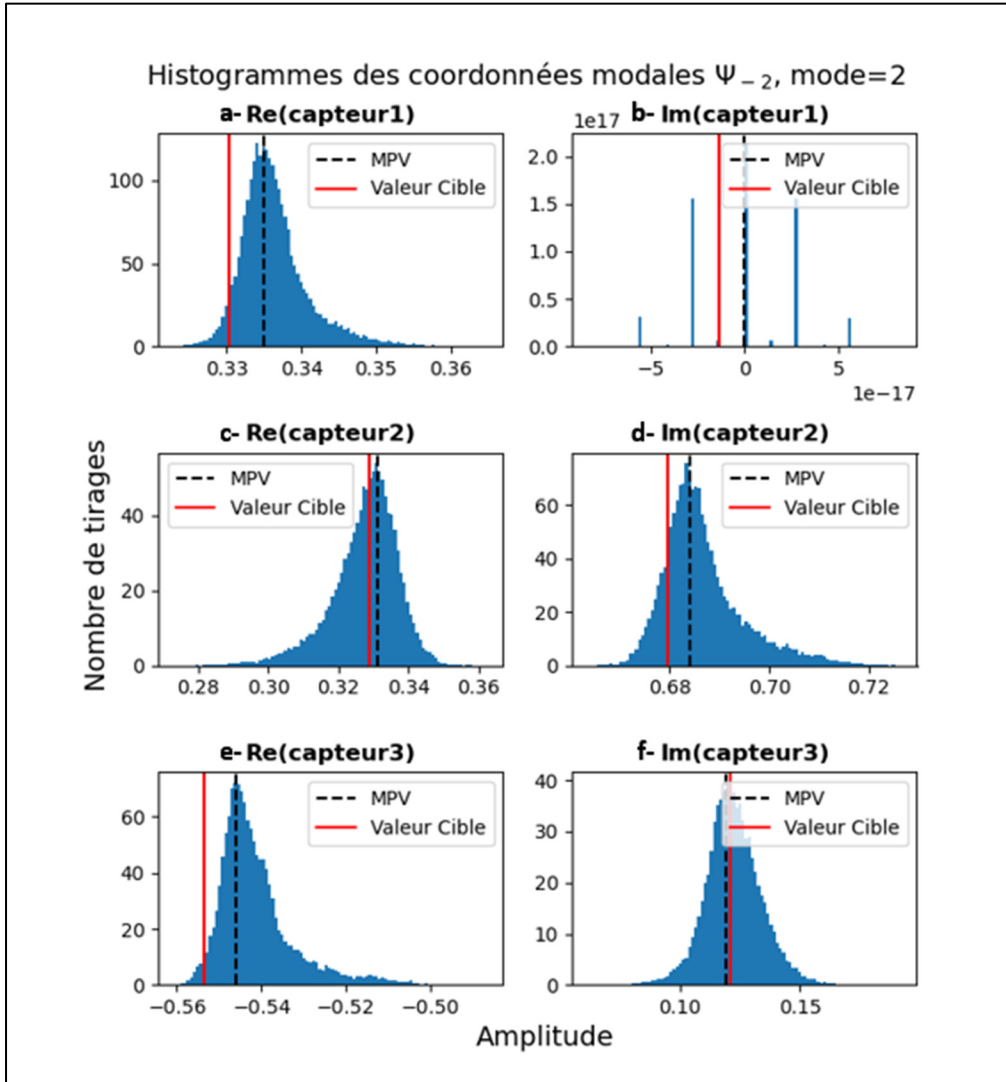


Figure 5.6 Distributions *posterior* des coordonnées modales du mode ND2\*-2. La correction de l'indétermination de phase de la distribution Bingham force la partie imaginaire de la première coordonnée de chaque vecteur propre à zéro. On observe des variations de l'ordre de l'erreur numérique.

La Figure 5.7 illustre que, comme pour le cas des vecteurs modaux, les chaînes de Markov des fréquences naturelles contra-rotatives  $\omega_{-v}$ , attribuées à des harmoniques de la réponse à plus faible SNR, convergent plus lentement et avec une variance plus grande que les chaînes des

fréquences naturelles co-rotatives  $\omega_{+v}$ . À la Figure 5.7, on remarque que le mode ND3\*-2 produit une chaîne qui ne se stabilise pas entièrement dans les 50 000 itérations réalisées. L'étape Metropolis-Hastings est donc jugée comme la moins robuste de l'algorithme.

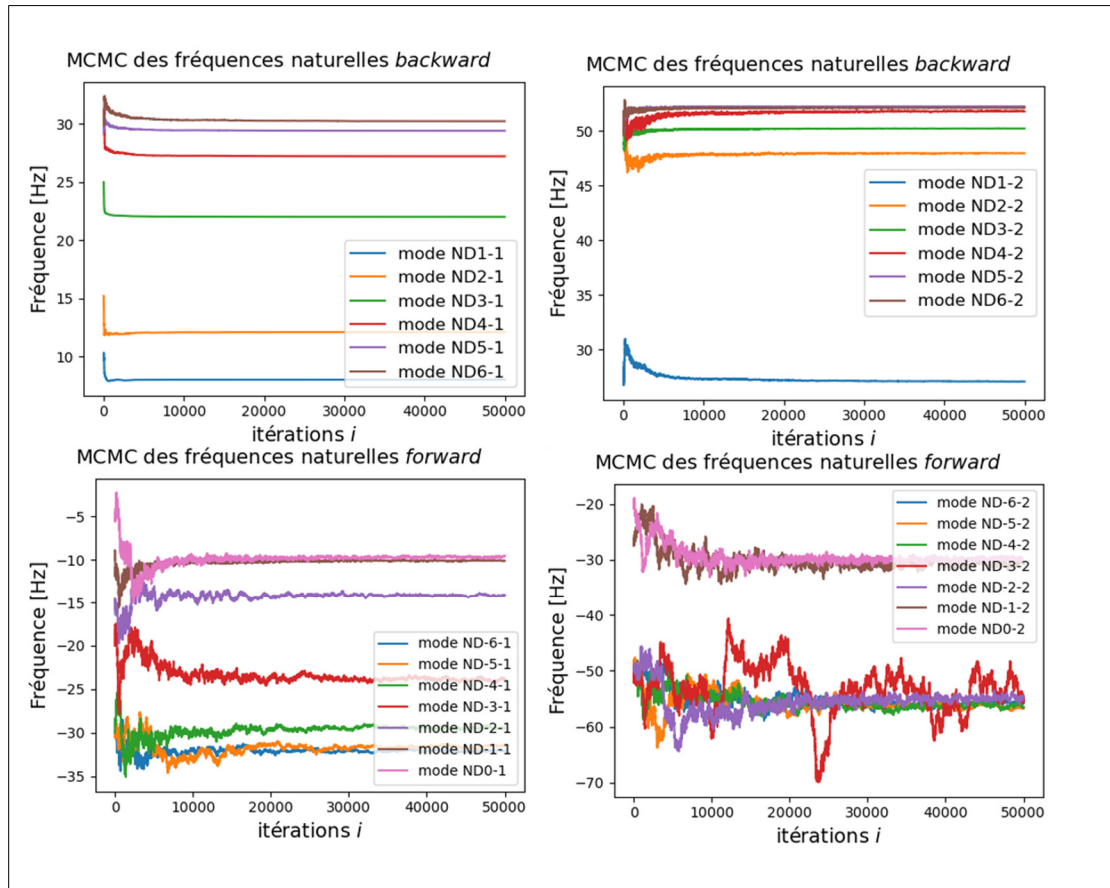


Figure 5.7 MCMC des fréquences naturelles

En effet, les taux d'acceptation de l'étape Metropolis-Hastings pour les fréquences naturelles co-rotatives sont de l'ordre de 0% à 1% pour les modes à basse fréquence d'un diamètre nodal donné (appelés 1<sup>ers</sup> modes) et de l'ordre de 1% à 6% pour les 2<sup>es</sup> modes (modes à plus haute fréquence). Pour les fréquences naturelles contra-rotatives, les taux d'acceptation sont de l'ordre de 13% à 36% pour les 1<sup>ers</sup> modes et de 25% à 56% pour les 2<sup>es</sup> modes.

La Figure 5.8 et la Figure 5.9 illustrent les distributions obtenues pour les fréquences naturelles co-rotatives et contra-rotatives. À la Figure 5.8 on remarque que le bas taux d'acceptation des

1<sup>ers</sup> modes co-rotatifs engendre des distributions contenant un faible nombre d'échantillons distincts. La variance des distributions obtenues pour les modes contra-rotatifs est plus élevée que celle obtenue pour les modes co-rotatifs et de même pour les 2<sup>e</sup> modes par rapport aux 1<sup>ers</sup> modes.

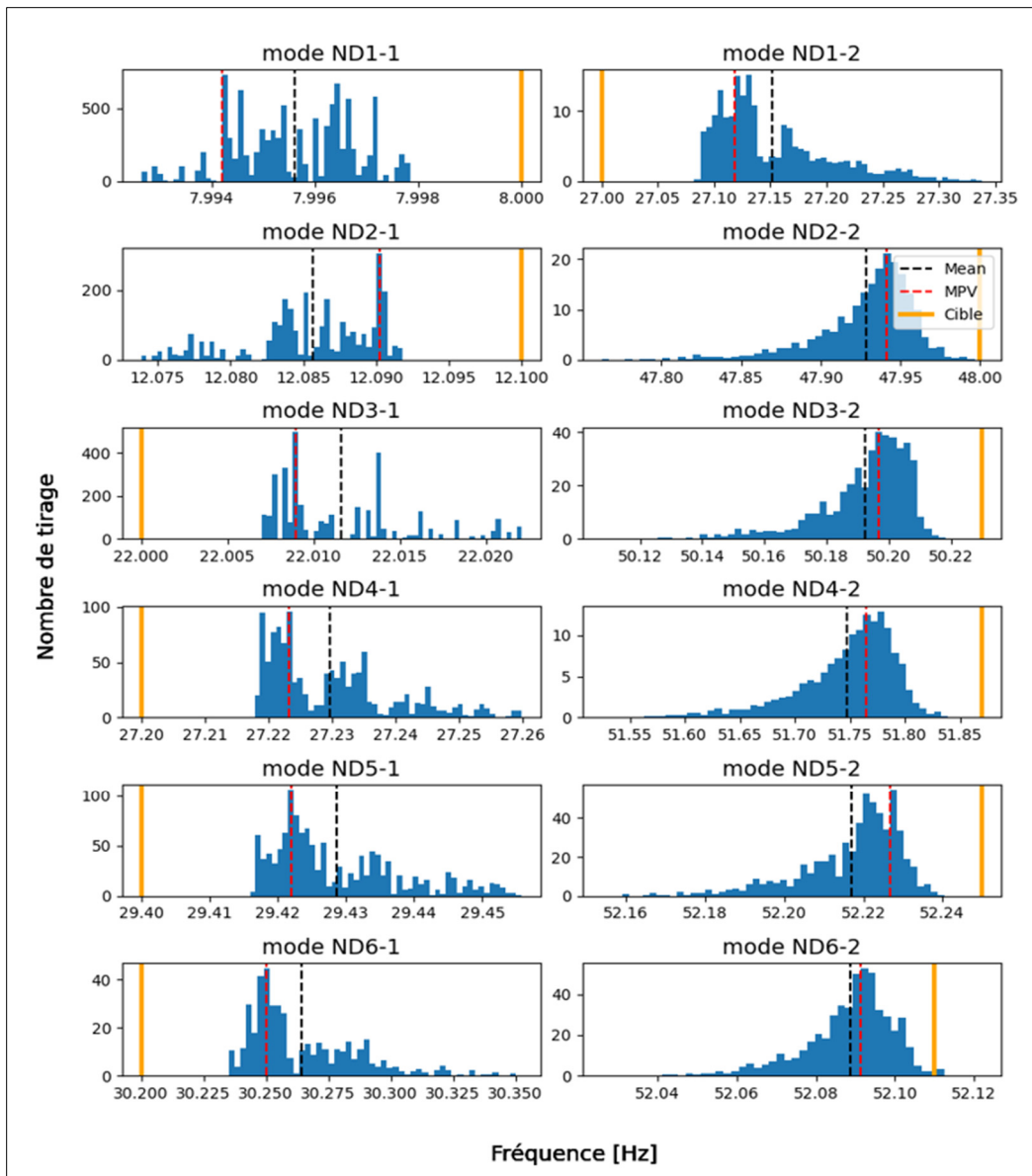


Figure 5.8 Distributions des fréquences naturelles co-rotatives. La valeur cible (en **jaune**) n'est pas comprise à l'intérieur de la distribution des paramètres parce que la stochasticité ajoutée au signal n'est pas assez importante pour que les chaînes de Markov atteignent la stationnarité complète dans les 500 000 itérations imposées.

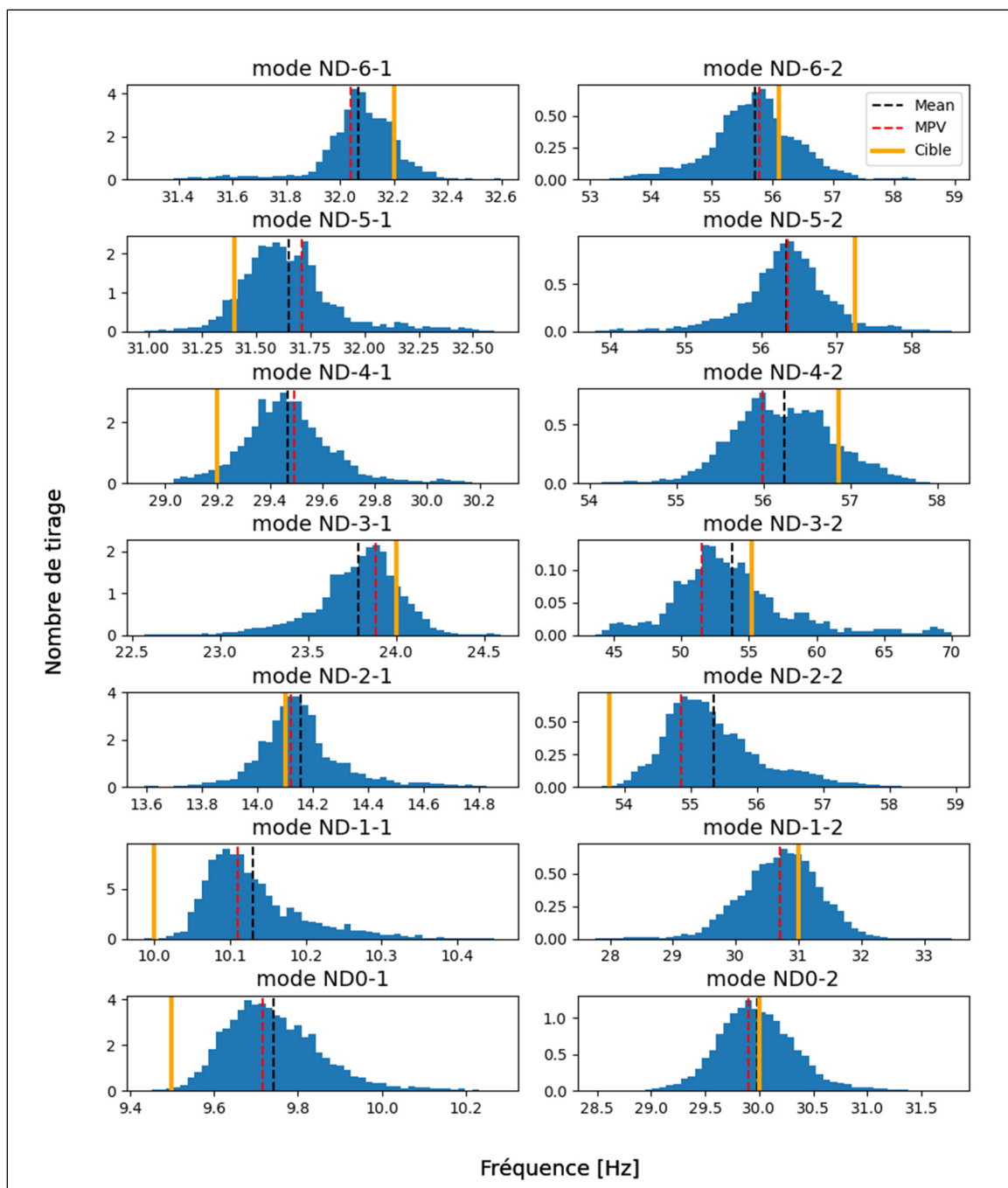


Figure 5.9 Distributions des fréquences naturelles contra-rotatives

En somme, pour le cas d'analyse non-biaisé, il y a une convergence de l'algorithme vers les valeurs cibles démontrant sa capacité à inférer adéquatement les paramètres du modèle forcé par une excitation périodique  $1Z$ . En effet, les chaînes de Markov de tous les paramètres ont

affiché une tendance de convergence vers les paramètres cibles de la réponse analytique. Pour circonscrire l'applicabilité de la méthode proposée, les limites de l'algorithme sont évaluées de manière expérimentale à la section 5.2.

## 5.2 Analyse d'applicabilité expérimentale

Quatre (4) facteurs sont susceptibles de nuire à l'applicabilité de l'algorithme : la quantité  $NQZ_R$  d'harmoniques disponibles dans la réponse, les différentes périodicités d'excitation  $\{1Z, 2Z, \dots, Z_GZ\}$ , la quantité de modes  $\Lambda$  influençant les  $QZ_R$  harmoniques de la bande passante analysée et la quantité  $P$  d'harmoniques définissant l'excitation.

### 5.2.1 Limites de quantité d'harmoniques et de périodicités d'excitation

Considérons un système avec deux modes ( $\Lambda = 2$ ) par diamètre nodal  $\nu$  et excité par une force périodique  $1Z$  composée d'une fondamentale et de  $P = 3$  harmoniques. Ce système est inféré en utilisant  $N = 5$  points de mesure sur une aube d'une roue à  $Z_R=13$  aubes. Selon les résultats expérimentaux, la quantité minimale d'harmoniques nécessaire à la convergence des Chaînes de Markov Monte-Carlo (MCMC) est de  $ZZ_RQ=39$  harmoniques par points d'observation  $n$ , donc  $Q = 3$  harmoniques par diamètre nodal contra-rotatif  $-\nu$  ou co-rotatifs  $+\nu$ . En effet, on peut confirmer que cette condition est nécessaire à l'inférence. En incorporant ces valeurs dans l'équation (4.29), on remarque qu'il est nécessaire que  $Q \geq 3$ .

Pour une excitation de périodicité plus élevée (par exemple 2 fois par tour ( $2Z$ )), la quantité minimale d'harmoniques nécessaire à l'inférence de l'excitation est de  $ZZ_RQ=78$  harmoniques. Les harmoniques de la réponse étant observables jusqu'au 50<sup>e</sup> ordre harmonique, l'inférence d'une excitation de périodicité de plus d'une fois par tour ( $1Z$ ) (par exemple  $2Z$  jusqu'à  $Z_GZ$ ) est donc inatteignable. Toutefois, le ou les quelques harmoniques RSI observables dans la bande passante analysée peuvent être considérés par l'équation (4.17) à l'aide d'une fonction pseudo-inverse pour inférer l'amplitude résiduelle des harmoniques impactées. Le nombre insuffisant d'harmoniques RSI disponibles pour identifier l'excitation RSI ( $Z_GZ$ ) amène donc

une indétermination sur la phase et l'amplitude de cette excitation. Toutefois, par l'extraction d'une amplitude résiduelle (attribuée à l'excitation RSI), le contenu 1Z des harmoniques ayant une contribution des excitations 1Z et  $Z_G Z$  comporte moins de biais. La section 5.4 présente l'identification d'un modèle en considérant l'harmonique RSI.

### 5.2.2 Limites de quantité de modes

Quand l'algorithme est testé sur un système considérant plus de  $\Lambda=2$  modes par diamètre nodal  $\nu$ , il y a divergence dans l'échantillonnage de l'excitation. Selon l'équation (4.26), la condition nécessaire de l'algorithme en termes de quantité de modes  $\Lambda$  varie entre  $\Lambda \leq 2$  à  $\Lambda \leq 3$  pour inférer tous les paramètres d'un modèle avec une excitation à  $P=3$  harmoniques et un nombre d'harmoniques  $Q$  entre 3 et 4 pour 5 à 10 points observés  $N$ . Même si la condition nécessaire peut être respectée en utilisant 10 points observés, et considérant  $Q=4$  harmoniques par diamètre nodal  $\nu$ , la condition n'est pas suffisante.

Un test a été réalisé pour tenter d'inférer un modèle ayant  $\Lambda=2$  modes par diamètre nodal. Ce test a été produit à l'aide de  $\Lambda=4$  modes par diamètre nodal. Pour un diamètre nodal  $\nu$  donné, le résidu modal induit par les modes à plus haute fréquence (3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> modes) introduit une erreur dans l'inférence des 1<sup>ers</sup> et 2<sup>e</sup> modes. La fréquence naturelle la plus basse pour un diamètre nodal donné (appelée 1<sup>er</sup> mode) est moins altérée par le résidu modal, laissant croire que le 2<sup>e</sup> mode capture davantage l'effet du résidu modal. La Figure 5.10 illustre le biais obtenu pour le mode ND5-2. Le 2<sup>e</sup> mode inféré pour le cinquième diamètre nodal ( $\nu=5$ ) se stabilise à une fréquence plus élevée que la fréquence définie pour ce mode. Le mode inféré comprend la contribution des 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> modes aux harmoniques considérées.

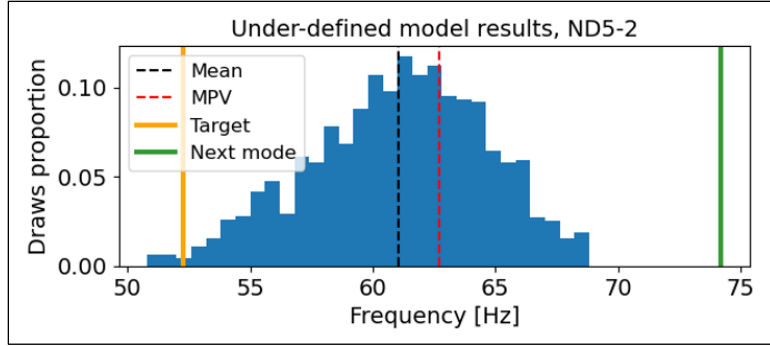


Figure 5.10 Effet du résidu modal sur le mode ND5-2

À la Figure 5.10, on remarque une coupure de la distribution en fréquence à environ 68 Hz. Cette coupure est imposée à l'échantillonnage des fréquences naturelles. Sans cette coupure, certaines chaînes de Markov des fréquences naturelles dérivent vers les hautes fréquences formant une distribution multimodale.

Pour minimiser l'effet du résidu modal, en plus de la contrainte de fréquence maximale, les fréquences naturelles (modes ND2-2 à ND6-2) sont échantillonnées selon la méthode Metropolis-Hastings à loi candidate indépendante. La distribution candidate est gaussienne  $\mathcal{N}(\omega_{v,2IW}, \sigma_\lambda^2)$  avec une fréquence naturelle moyenne  $\omega_{v,2IW}$  choisie près de la valeur estimée du 2<sup>e</sup> mode et une variance  $\sigma_\lambda^2$ . Un *prior* gaussien  $g(\omega_{v,\lambda} | \omega_{v,\lambda}^*)$ , sachant le mode conjugué  $\omega_{v,\lambda}^*$ , comme défini pour les modes contra-rotatifs (voir section (4.21)), est ajouté à tous les 2<sup>e</sup> modes sauf les modes ND1-1 et ND1-2. Les deux contraintes ajoutées permettent de minimiser l'effet du résidu modal et la variabilité du plancher de bruit observée dans la réponse (voir section Figure 6.2-b).

### 5.2.3 Analyse de la quantité $P$ d'harmoniques d'excitation

À l'équation (3.1), il est proposé d'approximer l'excitation périodique par une quantité  $P$  d'harmoniques décrites par des coefficients de Fourier  $\{F_p, -P \leq p \leq P\}$ . En réalité, une infinité d'harmoniques définissent l'excitation périodique. Plus la quantité  $P$  d'harmoniques considérées par le modèle est grande, mieux l'excitation est représentée par le modèle. Il est



alors d'intérêt d'évaluer la quantité maximale  $P$  d'harmoniques d'excitation que l'algorithme peut inférer en considérant deux modes par diamètre nodal  $\nu$  et les 40 à 50 harmoniques observables de la réponse ( $Q=3$  et  $Q=4$ ). La condition nécessaire formulée à l'équation (4.27) indique que, pour cette situation, la quantité d'harmoniques est de  $P \leq 8$  à  $P \leq 11$  pour 5 à 10 points observés sur une aube. Toutefois, cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Du point de vue expérimental, selon ces conditions, l'algorithme ne converge avec des incertitudes satisfaisantes que jusqu'à  $P=3$  harmoniques de l'excitation.

En somme, l'analyse d'applicabilité expérimentale montre que la méthode proposée peut inférer les paramètres d'un modèle de réponse forcée à une excitation périodique des 40 à 50 harmoniques observables pour 10 points observés et pour:

- un maximum de  $\Lambda=2$  modes par diamètre nodal  $\nu$
- un système soumis à une excitation périodique une fois par tour (1Z) contenant une fondamentale et un maximum de  $P=3$  harmoniques

En ce sens, pour déployer l'algorithme sur un prototype en opération, le système doit respecter ces limites.

### **5.3 Analyse du biais provenant de l'excitation stochastique**

Dans les signaux de déformations sur les aubes d'une turbine hydraulique, le bruit observé provient de deux sources indépendantes, soit le bruit de mesure et la stochasticité de l'écoulement. Cette dernière source provient de la turbulence et des tourbillons. Elle domine en amplitude le bruit de mesure. Pour réaliser une analyse représentative d'une vraie turbine, le bruit ajouté aux données modélisées devrait être sur l'excitation et non sur la réponse. L'ajout de stochasticité sur l'excitation n'a pas le même effet que l'ajout de bruit sur la réponse. En effet, l'ajout d'un bruit sur la réponse se fait de manière additive, tandis que le bruit sur la force d'excitation biaise les coefficients de Fourier et devient hautement non-linéaire une fois filtré par la fonction de transfert du système. Par conséquent, pour le modèle périodique proposé, la contribution des effets stochastiques est une source de biais sur l'excitation.

### 5.3.1 Évaluation du niveau de stochasticité

Pour quantifier le niveau de contribution stochastique à la réponse mesurée d'une roue, le plancher de bruit de mesures sur un prototype en opération en régime permanent a été analysé à 70 %, 50 % et 20 % d'ouverture des directrices (*Guide Vanes Opening*, GVO). Pour l'analyse, la contribution de la partie asynchrone du signal est normalisée en utilisant le ratio de la puissance du plancher de bruit  $|2\gamma|^2$  (où  $\gamma$  est l'écart-type du bruit près du premier harmonique synchrone) et de la puissance du premier harmonique de la réponse  $|A_1|^2$  à l'aide d'une métrique tel que  $\log[|2\gamma|^2/|A_1|^2]$  (similaire à l'échelle dB). Pour la suite du mémoire, cette métrique est nommée HSR (*Harmonic to Stochastic Ratio*).

Pour la turbine analysée, les HSR à 20% , 50 % et 70% de GVO sont respectivement de -7,3, -8,8 et -9,1. La contribution de l'excitation stochastique est minimale à 70% de GVO, soit plus près du BEP. Ces niveaux normalisés de bruit sont une référence pour la modélisation de la stochasticité d'excitation ajoutée lors de la production d'une réponse analytique réaliste.

### 5.3.2 Modélisation du bruit

Pour le modèle périodique proposé, la stochasticité de l'excitation agit comme un biais sur les harmoniques de l'excitation périodique. Pour considérer l'effet du biais d'excitation stochastique, un bruit gaussien  $\varepsilon_e \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ , où  $\sigma_e^2$  est la variance du bruit, est ajouté à la fonction d'excitation angulaire  $F(\theta)$ . La Figure 5.11 illustre l'excitation angulaire soumise à deux niveaux différents de stochasticité.

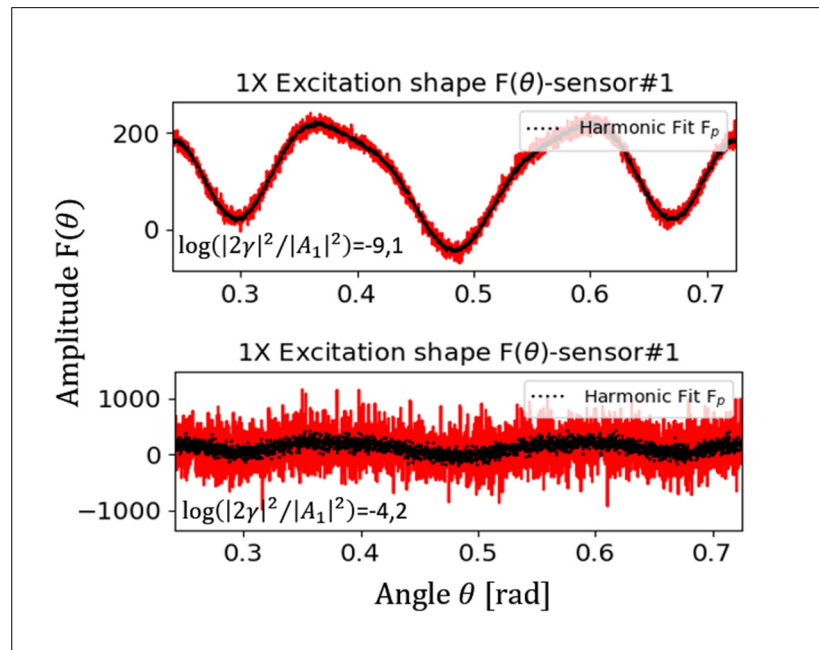


Figure 5.11 Excitation angulaire  $F(\theta)$  à deux niveaux de stochasticité

La contribution stochastique  $\varepsilon_e$  se traduit par un plancher de bruit dans le spectre de la fonction d'excitation  $F(\theta)$  biaisant ainsi l'amplitude des coefficients de Fourier de l'excitation  $F$  de périodicité  $Z_R$ . Pour les harmoniques de l'excitation périodique ayant une amplitude du même ordre de grandeur, ou plus petit, que l'amplitude de la contribution stochastique, le biais peut donc être non négligeable.

### 5.3.3 Analyse de sensibilité de l'algorithme au bruit dans l'excitation

La sensibilité de l'algorithme au biais de l'excitation stochastique est évaluée à cinq (5) niveaux de bruit sur l'excitation. Les résultats d'inférence des paramètres d'un modèle à  $N=3$  points observés, soumis à une excitation 1Z et considérant  $\Lambda=2$  deux modes par diamètre nodal  $\nu$  sont analysés.

À la Figure 5.12, les valeurs moyennes de la partie imaginaire des coefficients de Fourier  $\{F_p\}$  des harmoniques de l'excitation inférés sont représentés par des points rouges à chacun des

cinq (5) niveaux de stochasticité analysés. Les différents harmoniques de l'excitation étant en phase, la composante imaginaire des coefficients de Fourier de l'excitation tend vers zéro. Cette composante est alors plus sensible au biais d'excitation stochastique.

Des barres d'incertitudes illustrent l'intervalle de crédibilité à 95% (IC-95) des valeurs des distributions. Pour les deux essais à des niveaux des bruits au-dessus de 70% de GVO, deux des trois valeurs cibles sont comprises dans les IC-95. De par la stochasticité négligeable imposée à cet essai, tel qu'observé lors du déploiement de l'algorithme sur un problème non-biaisé (voir section 5.1), les MCMC ont tendance à converger vers les valeurs cibles, mais n'atteignent pas l'état stationnaire dans le nombre d'itérations imposé. Pour des HSR de l'excitation équivalent à des ouvertures entre 70% de GVO et 50% de GVO, les deux coefficients d'amplitude  $\sim 10^{-2}$  N/Hz sont peu affectés par le bruit. Près de 20% de GVO, le bruit mène à la surestimation de ces deux coefficients. Sous 20% de GVO, donc à des HSR plus élevés, tous les paramètres des parties imaginaires des coefficients de Fourier de l'excitation sont fortement biaisés par l'excitation stochastique.

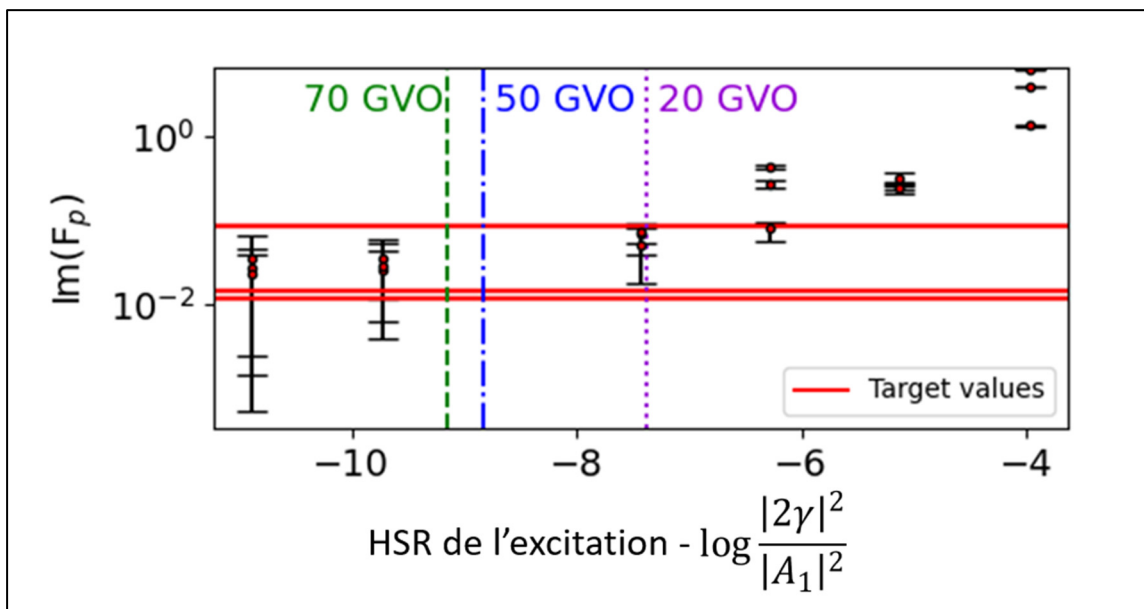


Figure 5.12 Évaluation de la sensibilité des parties imaginaires des coefficients de Fourier de l'excitation au HSR. Des barres d'incertitudes illustrent l'intervalle de crédibilité à 95% (IC-95) des valeurs des distributions (point rouge). Pour une contribution stochastique près du BEP (HSR  $\approx -9$ ) le biais sur l'excitation harmonique est marginal.

En somme, pour des niveaux de contribution stochastique en régime stationnaire près du BEP, donc  $HSR \approx -9$ , l'effet de la contribution stochastique à l'excitation est marginal. Pour un tel niveau de HSR, le biais sur l'excitation a un effet non critique sur la capacité de l'algorithme à inférer les paramètres d'une excitation  $1Z$ . La modélisation ou la considération de cet effet dans le traitement du signal pourrait toutefois permettre d'obtenir une meilleure précision au niveau de l'inférence de l'excitation.

## 5.4 Implémentation de l'algorithme sur des données biaisées

À la section 5.1, l'algorithme est d'abord évalué sur des données sans biais de modèle, c'est-à-dire que le processus de génération des données a exactement la même structure que le modèle à identifier. En conditions réelles, le modèle utilisé pour l'identification n'est pas parfaitement représentatif des données étudiées. En réalité, une infinité de modes et d'harmoniques de l'excitation influence les harmoniques de la réponse. Il existe donc un biais systématique sur le modèle, issu des contraintes d'identifiabilité qui obligent à tronquer le nombre de modes et d'harmoniques décrivant le patron d'excitation. L'essentiel de la méthode est d'évaluer si l'algorithme, avec un nombre fini de paramètres compatible avec l'identifiabilité, est en mesure d'inférer les paramètres dominants du système avec une incertitude raisonnable. L'idée est de bâtir un compromis entre la quantité de paramètres à inférer et la représentativité du modèle, tout en conservant un algorithme convergent et suffisamment précis. Un grand nombre d'essais de validation a été réalisé sous différentes combinaisons de paramètres. Par souci de concision du présent mémoire, un seul cas d'étude est présenté. Le cas d'étude comprend une sous-définition du nombre de modes et de la quantité d'harmoniques. L'algorithme est évalué pour  $N=10$  points observés, 10 étant la quantité maximale de capteurs installés sur une aube, et pour 60 000 itérations.

### 5.4.1 Description du cas d'étude

L'algorithme est évalué sur un cas d'étude en utilisant les  $QZ_R = 39$  premières harmoniques par point  $n$  observé et produites par un modèle comprenant  $\Lambda=4$  modes par diamètre nodal  $\nu$  sous une excitation combinée  $1Z$  et RSI ( $Z_G Z$ ). Les paramètres de la turbine sont :  $Z_G=24$

directrices, une roue de  $Z_R=13$  aubes et une fréquence de rotation  $\Omega=1,25$  Hz. Les forces dans la base physique sont définies par une fondamentale  $F_0$  et  $P=5$  harmoniques  $F_p$  générés aléatoirement (loi uniforme  $\mathcal{U}$ ) à chaque essai dans les intervalles présentés au Tableau 5.2.

Tableau 5.2 Paramètres de la force d'excitation

Harmoniques de l'excitation	Valeur [N/Hz]	Harmoniques de l'excitation	Valeur [N/Hz]
$F_{0,1Z}$	$\pm\mathcal{U}[75,115]$	$F_{0,24Z}$	$\pm\mathcal{U}[975,1015]$
$F_{p,1Z}$	$\mathcal{U}[-85,85]\cos(pZ_R\theta)$	$F_{1,24Z}$	$\mathcal{U}[-715,715]\cos(pZ_GZ_R\theta)$

Pour simuler une ouverture des directrices près de 70% ( $HSR \sim -9$ ) niveau de stochasticité ajouté à l'excitation donne un plancher de bruit de  $\log[|2\gamma|^2/|A_1|^2] = -8.13$ . Les déformées modales unitaires sont générées de manière aléatoire à chaque essai et les fréquences naturelles sont choisies pour être distribuées selon les résultats de simulation numérique par élément finis de la roue étudiée dans un volume d'eau au repos. La Figure 5.13 illustre, en **rouge**, l'amplitude  $|\mathbf{c}_{q,v}|^2$  des harmoniques de l'excitation dans la base modale. L'amplitude de chacune de ces harmoniques est modulée selon leur proximité aux modes spatialement compatibles, et donne la réponse forcée  $\mathbf{X}_v$  illustrée en **noir**. À la Figure 5.13, chacune des harmoniques est numérotée selon son diamètre nodal spécifique. Les harmoniques attribuées à un mode contra-rotatif sont précédés d'un signe négatif. Pour les impératifs de visualisation, le plancher de bruit équivalent au niveau d'excitation stochastique est illustré entre les harmoniques de la réponse.

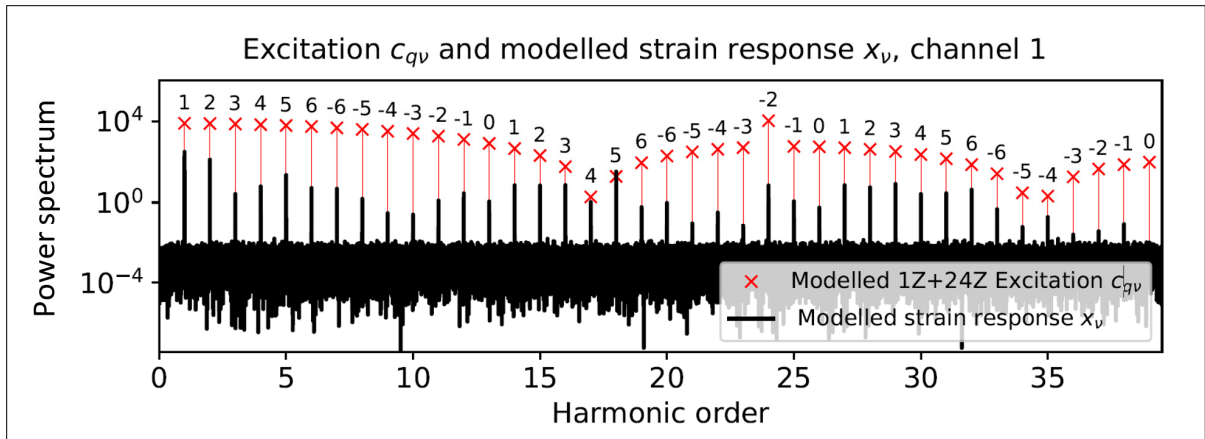


Figure 5.13 L'amplitude  $|c_{q,v}|^2$  des harmoniques de l'excitation dans la base modale (en **rouge**). L'amplitude de chacune de ces harmoniques est modulée selon leur proximité aux modes spatialement compatibles, et donne la réponse forcée  $X_v$  illustrée (en **noir**). Chacune des harmoniques est numérotée selon son diamètre nodal spécifique. Les harmoniques attribuées à un mode contra-rotatif sont précédés d'un signe négatif. Pour les impératifs de visualisation, le plancher de bruit équivalent au niveau d'excitation stochastique est illustré entre les harmoniques de la réponse.

Le modèle d'inférence est paramétré pour modéliser les  $\Lambda=2$  premiers modes par diamètre nodal (parmi les  $\Lambda=4$  modes utilisés pour générer les données), la fondamentale et les  $P=3$  des  $P=5$  premiers harmoniques de l'excitation 1Z  $F$ . Le tout en discriminant l'amplitude résiduelle de la contribution de l'excitation RSI sur la 24<sup>e</sup> harmonique de la réponse à l'aide d'une fonction pseudo-inverse (voir section 5.2.1).

#### 5.4.2 Résultats de l'inférence

L'inférence des paramètres du modèle de réponse forcée à une excitation périodique combinée 1Z et RSI, pour 10 points observés et  $\Lambda=2$  modes par diamètre nodal  $v$  est réalisée en itérant 60 000 réalisations des chaînes de Markov. Le calcul est réalisé en 90 min à 120 min (CPU AMD Ryzen 7 4800H) à l'aide de l'algorithme actuel. À la Figure 5.15, on remarque que la variance  $\sigma^2$  de l'erreur se stabilise en moins de 200 itérations. En analysant la distribution des tirages pour la variance  $\sigma^2$ , on retrouve la distribution présentée à la Figure 5.15.

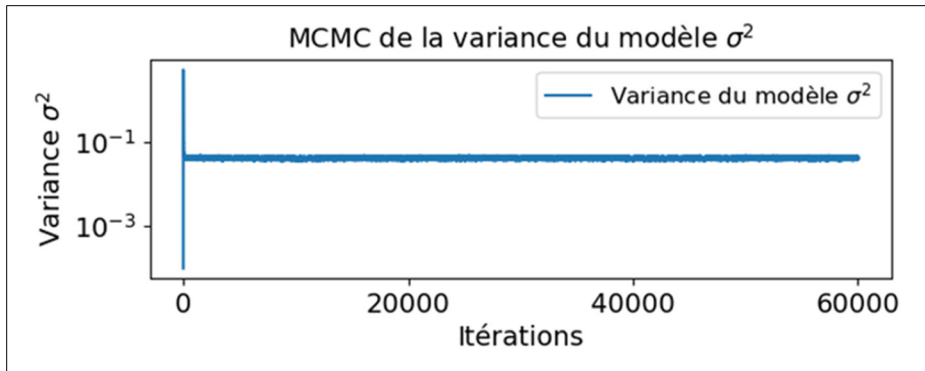
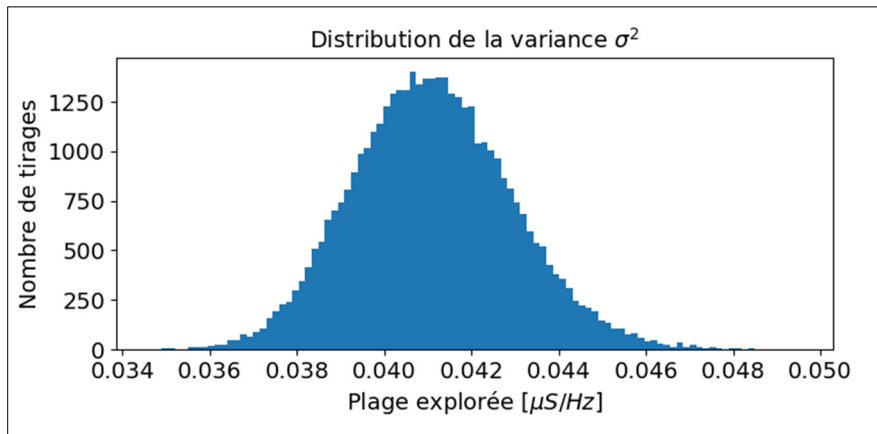


Figure 5.14 MCMC de la variance de l'erreur

Figure 5.15 Histogramme de la variance  $\sigma^2$  de l'erreur

Les distributions posterior marginales des coefficients de l'excitation possèdent une variance plus grande que pour l'essai sur des données non-biaisées. Toutefois, l'intervalle de crédibilité (IC-95) pour chacun des paramètres d'excitation comprend la valeur cible. Par exemple, pour le paramètre  $Re(F_1)$  du point d'observation #2 (présentée à la Figure 5.16) la valeur cible est d'une amplitude de -14,6 N/Hz et les tirages s'étendent d'environ -20 N/Hz à 30 N/Hz. La distribution des valeurs est de forme gaussienne.



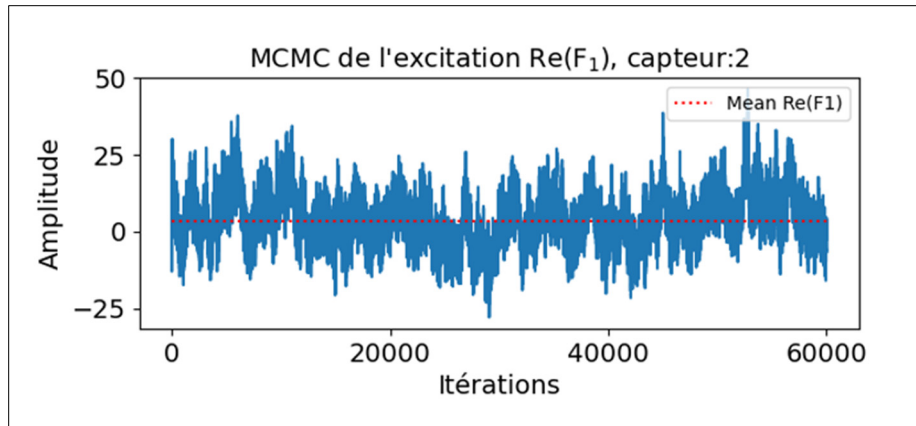


Figure 5.16 MCMC d'un coefficient d'excitation

Les résultats pour les déformées modales illustrent le même phénomène que pour l'inférence des coefficients de l'excitation. En effet, les distributions obtenues ont une variance beaucoup plus large que celles obtenues avec les données non-biaisées. La Figure 5.17 illustre les distributions obtenues pour les cinq premières coordonnées modales du mode ND2\*-1. On remarque que toutes les distributions contiennent la valeur cible. L'effet de la contrainte de phase pour la distribution Bingham est également observable pour la partie imaginaire de la première coordonnée de la déformée modale.

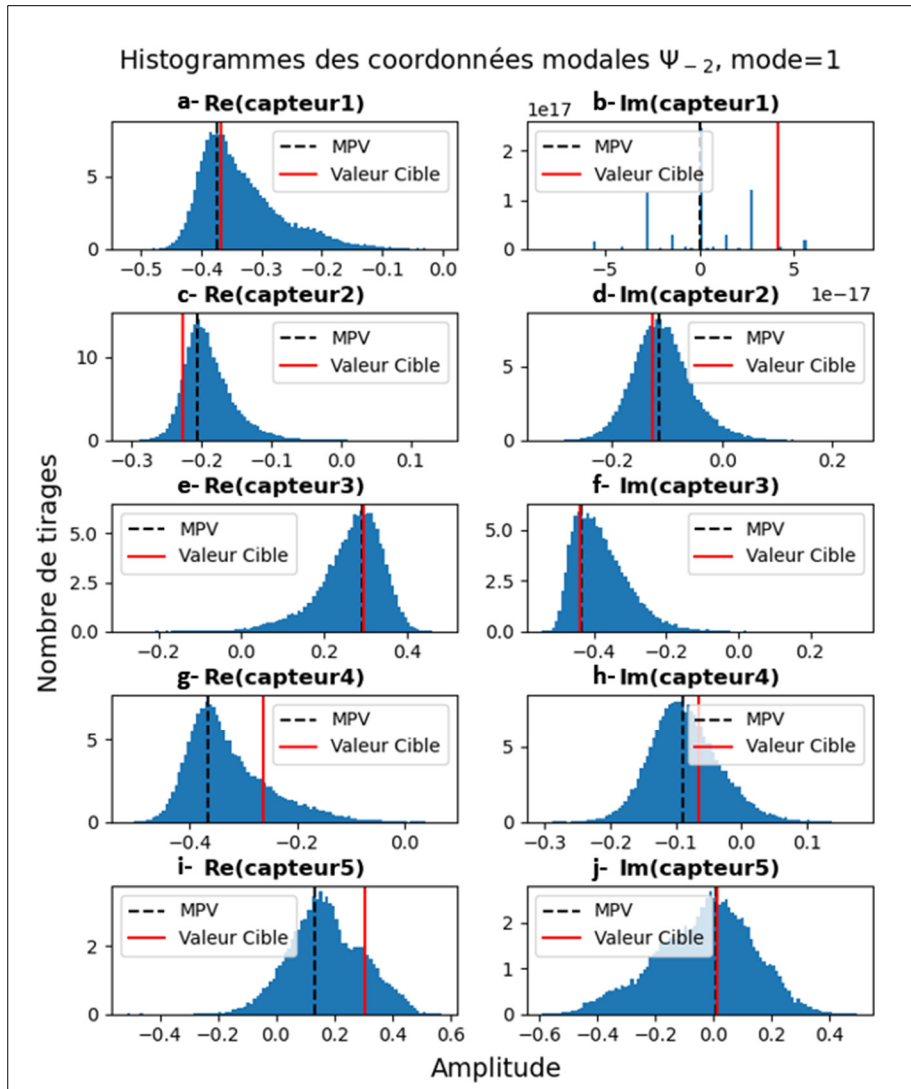


Figure 5.17 Histogrammes des coordonnées modales du mode ND2\*-1

L'analyse des résultats montre que plus le mode est complexe (plus de diamètres nodaux et généralement une fréquence propre plus élevée), plus les variances sont grandes. Les modes contra-rotatifs ont également des distributions montrant des variances plus élevées que les modes co-rotatifs. Toutefois, pour tous les modes, les valeurs cibles de coordonnées modales sont comprises dans les distributions résultantes des MCMC.

Pour les fréquences naturelles, les résultats de deux essais à  $N=10$  points observés sont comparés dans le Tableau 5.3. La valeur retenue pour l'analyse est la valeur la plus probable

(*Most Probable Value*, MPV) de la distribution résultante de chacune des fréquences naturelles. Pour les 1<sup>ers</sup> modes (modes de fréquence la plus basse d'un diamètre nodal donné), hormis pour les modes ND1\*-1, ND4-1 et ND0-1, l'erreur entre le MPV et la valeur cible est sous 10%. La différence entre les deux essais (Diff.) est de l'ordre de 0,3 à 3,0 Hz. Toutefois, les intervalles de crédibilité à 95% (IC-95) sont constants à environ  $\pm 5$  Hz d'un essai à l'autre. La forme des distributions obtenues pour les fréquences naturelles est inconnue et les modes de la distribution peuvent varier selon le cheminement des tirages à chaque essai. Cette variation des modes de la distribution explique en partie la différence entre les MPV obtenues pour le nombre d'itérations donné des deux essais. La largeur des IC-95 obtenus varie de 1,5 Hz jusqu'à 26,9 Hz selon le mode. Les modes co-rotatifs ont des IC-95 de 10 Hz à 20 Hz, plus restreints que celui des modes contra-rotatifs.

Dans le Tableau 5.3, Les MCMC du mode stationnaire ND0 ne montrent aucune stabilisation témoignant du faible SNR des harmoniques associées. Aucune convergence n'est alors attendue pour ce mode lors du déploiement sur prototype. L'erreur obtenue pour le mode ND1\*-1 s'explique par la grande variance et surtout par la petite valeur relative de la valeur cible.

Pour le mode ND4-1, l'écart de 3 Hz à 5 Hz est retrouvé dans les deux essais. À cause de l'influence du résidu modal, la forme de la distribution obtenue est multimodale avec un premier mode (MPV-1) près de 23 Hz et un deuxième mode (MPV-2) près de 27 Hz, ce qui explique la grande erreur entre la valeur cible et le MPV de la distribution. Toutefois, la valeur cible est comprise dans l'IC-95 de l'inférence. Ce phénomène pourrait être retrouvé sur d'autres modes. Nous concluons que l'analyse de la forme de la distribution d'un paramètre, en plus de ses modes, peut se montrer nécessaire dans ces cas. L'utilisation de la valeur moyenne lorsque qu'une distribution est multimodale pourrait s'avérer plus judicieux à des fins d'analyse.

Tableau 5.3 Comparaison de l'inférence des fréquences naturelles des 1<sup>ers</sup> modes pour 2 essais

Modes	Cible [Hz]	MPV Essais 1 [Hz]	Erreur %	Intervalle 95%	MPV Essais 2 [Hz]	Erreur %	Intervalle 95%	Diff. [Hz]
ND1-1	8,0	8,7	8,8	6,9-11,0	7,5	6,3	6,8-8,2	1,2
ND1*-1	10,0	7,5	25,0	1,5-23,2	8,6	14,0	1,7-21,7	1,1
ND2-1	12,1	12,8	5,8	10,8-14,8	13,3	9,9	10,2-15,3	0,5
ND2*-1	14,1	13,7	2,8	3,4-27,4	15,1	7,1	4,2-27,7	1,4
ND3-1	22,0	23,3	5,9	22,2-23,7	22,1	0,5	21,5-24,7	1,2
ND3*-1	24,0	25,8	7,5	14,8-36,9	26,3	9,6	10,3-37,2	0,5
ND4-1	27,2	23,3	14,3	22,3-28,5	22,1	18,8	21,9-29,4	8,3
ND4*-1	29,2	26,5	9,2	14,2-37,1	27,7	5,1	16,6-38,5	1,2
ND5-1	29,4	30,5	3,7	28,8-33,6	31,3	6,5	28,5-33,6	0,8
ND5*-1	31,4	30,7	2,2	20,2-39,4	33,4	6,4	22,0-39,5	2,7
ND6-1	30,2	32,1	6,3	26,8-36,8	31,7	5,0	27,5-36,9	0,4
ND6*-1	32,2	31,6	1,9	22,8-39,2	31,9	0,9	22,9-39,3	0,3
ND0-1	9,5	22,9	141,1	3,9-38,5	21,8	129,5	3,9-38,5	1,1

Pour les 2<sup>e</sup> modes, c'est-à-dire les modes à plus haute fréquence pour un diamètre nodal donné, l'erreur entre le MPV et la valeur cible est de l'ordre de 1,2% à 16,4%. Comme pour les 1<sup>ers</sup> modes, les modes ND0 ne présentent aucune convergence. La différence (Diff.) entre les 2 essais est de l'ordre de 0,1 Hz à 5,6 Hz. Les intervalles de confiance (IC-95) obtenus varient de l'ordre de 7,0 Hz à 24,6 Hz. Le pourcentage d'erreur obtenue est du même ordre de grandeur que les erreurs observées pour les 1<sup>ers</sup> modes. L'inférence des deuxièmes modes comprend les valeurs cibles dans son IC-95 et une erreur raisonnable sachant la non-exhaustivité du modèle. Toutefois, il faut tenir en compte que l'inférence réalisée est tributaire de la valeur moyenne et de la variance imposée à l'étape Metropolis-Hastings à candidat indépendant pour les modes ND2-2 à ND6\*-2. En effet, la moyenne imposée autour de 50 Hz et la variance  $\sigma_\lambda^2=100$  sont favorables à l'inférence de ces fréquences pour le système étudié.

Tableau 5.4 Comparaison de l'inférence des fréquences naturelles des 2e modes pour 2 essais

Modes	Cible [Hz]	MPV Essais 1 [Hz]	Erreur %	Intervalle 95%	MPV Essais 2 [Hz]	Erreur %	Intervalle 95%	Diff. [Hz]
ND1-2	27,0	25,6	5,2	20,3-29,5	29,2	8,1	26,4-32,4	3,6
ND1*-2	31,0	28,3	8,7	16,3-40,9	32,5	4,8	22,1-44,0	4,2
ND2-2	48,0	46,3	3,5	41,0-53,3	45,4	5,4	41,3-50,4	0,9
ND2*-2	53,8	47,9	10,9	37,0-59,0	49,7	7,6	38,3-59,6	1,8
ND3-2	50,2	53,9	7,3	45,3-62,1	48,3	3,8	44,5-65,8	5,6
ND3*-2	55,2	57,2	3,6	45,5-67,1	54,4	1,5	43,2-67,3	2,8
ND4-2	51,9	52,9	2,0	48,8-64,8	48,0	7,5	45,3-64,6	4,9
ND4*-2	56,9	56,2	1,2	45,5-67,1	54,6	4,0	42,5-66,8	1,6
ND5-2	52,3	58,2	11,4	52,2-65,8	60,8	16,4	53,7-67,5	2,6
ND5*-2	57,3	58,2	1,7	48,5-67,8	63,2	10,4	49,8-69,2	5,0
ND6-2	52,1	57,3	10,0	51,0-63,3	55,7	6,9	48,9-67,7	1,6
ND6*-2	56,1	57,6	2,7	47,9-67,6	57,5	2,5	46,0-69,3	0,1
ND0-2	30,0	51,0	70,0	29,8-69,3	53,2	77,3	28,1-69,4	2,2

Tableau 5.5 Taux d'acceptation des chaînes de Markov des fréquences naturelles

Modes	Taux acc. 1 [%]	Taux acc. 2 [%]	Modes	Taux acc. 1 [%]	Taux acc. 2 [%]
ND1-1	40	27	ND1-2	35	37
ND1*-1	93	95	ND1*-2	97	96
ND2-1	50	45	ND2-2	5	5
ND2*-1	89	97	ND2*-2	30	47
ND3-1	9	13	ND3-2	8	9
ND3*-1	97	96	ND3*-2	53	43
ND4-1	39	30	ND4-2	12	7
ND4*-1	97	97	ND4*-2	55	51
ND5-1	40	41	ND5-2	11	9
ND5*-1	95	95	ND5*-2	38	46
ND6-1	63	66	ND6-2	9	12
ND6*-1	92	94	ND6*-2	43	39
ND0-1	97	97	ND0-2	99	99

On constate que le taux d'acceptation (Taux acc.  $x$ ) pour les chaînes de Markov des fréquences naturelles varie selon le mode. Comme présenté au Tableau 5.5, les 1<sup>ers</sup> modes contra-rotatifs ont un taux d'acceptation variant de 89% à 97%. Ces modes étant contraints d'un *prior*, le haut taux d'acceptation des tirages témoigne du faible SNR des harmoniques qui sont dépendants des modes contra-rotatifs et de la petite variance d'échantillonnage (de 1,2 Hz<sup>2</sup>). Un plus faible taux d'acceptation est observé pour les 2<sup>e</sup> modes.

Pour chacune des itérations des MCMC (après *burn in*) les harmoniques de la réponse 1Z sont reconstruits à l'aide des paramètres du modèle générant une plage de prédiction. Les IC-95 des harmoniques résultants de l'inférence, en gris à la Figure 5.18, sont comparés au signal en noir.

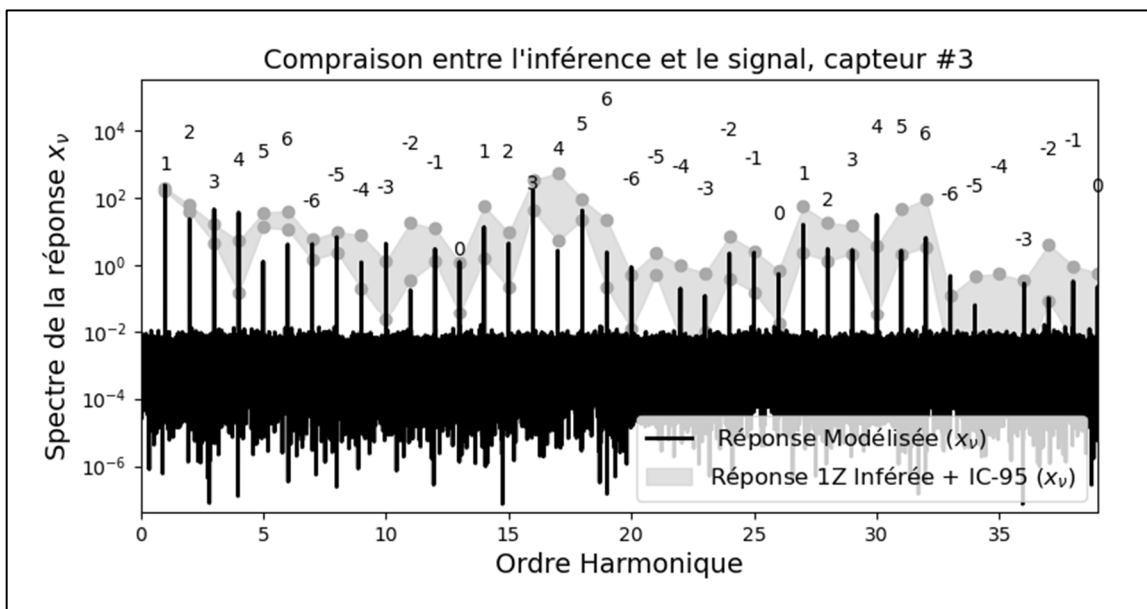


Figure 5.18 Reconstruction du signal d'un point d'observation pour l'essai 1

La divergence entre les harmoniques reconstruits et ceux du signal d'origine est explicable par la combinaison des écarts entre les modes des paramètres inférées et les valeurs cibles, ainsi que par la non-représentativité (biais de sous-paramétrisation) du modèle inféré par rapport au modèle utilisé pour générer la réponse analytique.

## 5.5 Discussion des résultats sur données synthétiques

L'algorithme proposé est en mesure d'inférer les paramètres d'un modèle de réponse forcée à une excitation périodique une fois par tour (1Z). L'algorithme est évalué dans une situation plus réaliste, où le modèle d'inférence est sous-paramétré par rapport au modèle de génération des données. Malgré la non-représentativité du modèle et les biais induits par la stochasticité de l'excitation, l'algorithme est en mesure d'inférer les principaux paramètres du système. Pour chacun des paramètres, la distribution obtenue comprend la valeur cible. Les IC-95 observés pour l'inférence du modèle biaisé sont plus grands que pour le problème non-biaisé. En effet, même si 10 points d'observation sont considérés (au lieu de 3 points pour le problème non-biaisé), l'IC-95 de l'excitation pour le paramètre  $Re(F_1)$  du capteur #2 (à titre d'exemple) est 10 fois plus large que pour le problème non-biaisé. En somme, l'inférence des paramètres du modèle biaisé génère de plus grandes incertitudes, et erreurs, sur l'identification. En ce sens, l'utilisation d'un maximum de points d'observation  $N$  est envisageable pour minimiser l'influence des biais de sous-paramétrisation du vrai système. De plus, lors du déploiement de l'algorithme sur prototype, l'influence de biais supplémentaires tels que l'effet de l'amortissement, les périodicités et la stochasticité d'excitation seront également à considérer dans l'analyse des résultats.

## 5.6 Conclusions de l'implémentation sur données synthétiques

Le présent chapitre a démontré la capacité de l'algorithme proposé à inférer les paramètres d'un modèle de réponse forcée à une excitation périodique à partir de mesures de l'amplitude des harmoniques synchrones d'une réponse synthétique, générée à partir d'un modèle analytique connu *a priori*. La méthode permet d'identifier les coefficients de Fourier de l'excitation  $\mathbf{F}$ , la variance  $\sigma^2$  de l'erreur, les déformées modales  $\psi_\nu$  et les fréquences naturelles  $\omega_\nu$  d'un système proposé équivalent à la réponse synchrone d'une roue de turbine hydroélectrique de type Francis en régime stationnaire.

Les limites de l'algorithme ont été évaluées et comparées aux requis indispensables à l'identification du système réel. En effet, l'algorithme proposé est en mesure d'inférer un système soumis à une excitation périodique ( $1Z$ ) produisant  $QZ_R=3Z_R$  harmoniques par point d'observation  $n$  influencées par  $\Lambda=2$  modes par diamètre nodal  $\nu$ .

Dans ce chapitre, il est démontré que l'algorithme est en mesure d'inférer les principaux paramètres du système même si ce dernier est sous-paramétré tel qu'appréhendé lors du déploiement sur prototype.

La tolérance de l'algorithme au biais d'excitation stochastique est également évaluée. L'influence d'une contribution stochastique dans l'excitation en régime stationnaire près du BEP est démontrée comme non-critique à l'identification. Toutefois, le modèle proposé est non seulement non représentatif de la réalité par les limites de quantité de paramètres de l'algorithme, mais également par l'omission de considérer des paramètres tels que l'amortissement, la partie stochastique de l'excitation et le résidu modal. Ces effets induiront des biais supplémentaires à évaluer lors du déploiement sur prototype.



## CHAPITRE 6

### DÉPLOIEMENT SUR PROTOTYPE

Au CHAPITRE 5, il est démontré que l'algorithme proposé infère, avec une incertitude satisfaisante, les paramètres d'un modèle dans une situation de sous-définition à partir d'une réponse périodique modélisée. L'algorithme est alors évalué sur des mesures de déformation élastiques prises sur une roue Francis *in situ*.

Les données modélisées et les mesures sur prototype diffèrent entre autres par la nature de la stochasticité d'excitation et les effets d'amortissement. En premier lieu, l'excitation stochastique induit un biais sur le modèle périodique. Son impact est évalué en la considérant comme un bruit blanc sur le patron d'excitation  $F(\theta)$ . Toutefois, en opération, la stochasticité observée dans le signal provient non seulement de l'effet de la turbulence de l'écoulement, mais également des tourbillons. Ces tourbillons induisent un bruit coloré dans une bande de fréquences donnée. Conjointement à la résonance entre la turbulence (bruit blanc stochastique) et les modes, les tourbillons mènent à l'observation d'un plancher de bruit irrégulier. Ce dernier influence les harmoniques de la réponse. En effet, ce plancher de bruit à amplitude variable ajoute un biais de plus au modèle purement périodique.

La variation fréquentielle de la contribution de la stochasticité aux harmoniques synchrones, telle qu'observée à la Figure 6.2, augmente les risques de surestimation ou d'indétermination de l'excitation. Aussi, l'effet de l'amortissement des modes n'est pas considéré par le modèle. Toutefois, il est bien présent sur le prototype (Coutu et al., 2012, 2007; Nennemann et al., 2016; Valentín et al., 2019). L'omission de l'amortissement peut mener à des biais de phase des déformées modales et de l'excitation inférées par rapport à la réalité, ainsi qu'une surestimation de l'amplitude des harmoniques synchrones générées pour une fréquence naturelle donnée. Le déploiement de l'algorithme sur des données d'opération permet d'avoir un premier regard sur l'impact de ces paramètres sur l'inférence.

## 6.1 Analyse et traitement des données d'opération

La roue étudiée est une roue de type Francis avec  $Z_R=13$  aubes,  $Z_G=24$  directrices et une vitesse de rotation de 1,25 Hz. Les points de mesure des déformations, en **rouge**, et de pression, en **bleu**, sont illustrés à la Figure 6.1. Plusieurs directions de déformations peuvent être mesurées en une position donnée.

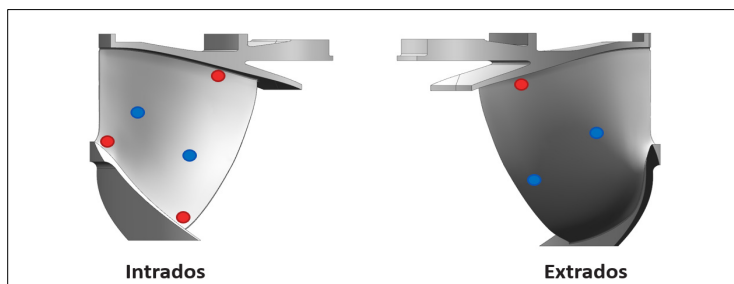


Figure 6.1 Points de mesure des déformations (**rouge**) et des pressions (**bleu**)

Au CHAPITRE 5, nous avons démontré que l'algorithme est applicable à une roue soumise à une excitation de périodicité un par tour ( $1Z$ ). Les mesures de variation de pression sont utilisées afin d'évaluer les périodicités d'excitation. Il est estimé qu'une excitation  $1Z$  produit par une variation de pression dominante au premier ordre harmonique de la vitesse de rotation. Tel qu'illustré à la Figure 6.2, l'analyse fréquentielle de la mesure de pression intrados amont d'une aube permet de remarquer une harmonique dominante au premier ordre harmonique. La combinaison de cette observation et de l'hypothèse précédente permet de poser l'hypothèse que la roue étudiée est soumise à une excitation périodique  $1Z$  dominante.

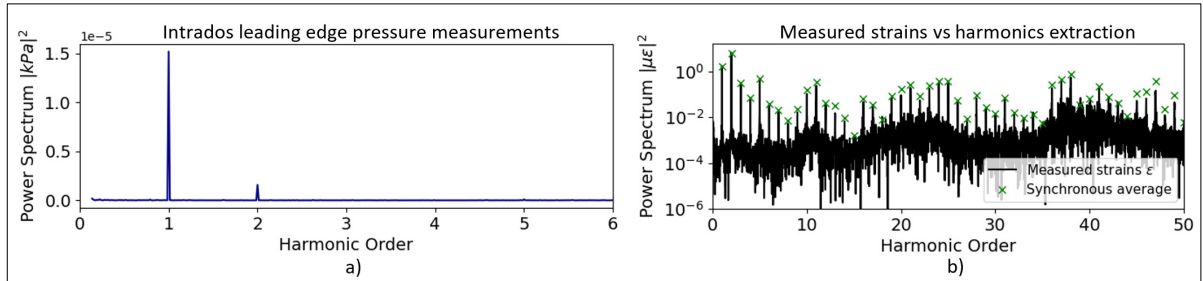


Figure 6.2 a) Mesure de pression intrados à 30 cm du bord d'attaque (amont) sur l'aube 2  
 b) Harmoniques extraits par la moyenne synchrone (vert) du signal de déformation (noir)

Un autre point de divergence entre le modèle et la réalité est l'oscillation de la vitesse de rotation, même en régime stationnaire. La vitesse de rotation des groupes turbine-alternateur hydroélectriques répond aux variations du réseau ou oscille autour d'une commande de vitesse. Pour répondre à cette problématique, les vibrations synchrones de la roue sont extraites du signal de déformation à l'aide de la méthode de la moyenne synchrone (Gagnon & Nicolle, 2019; Leclere & Hamzaoui, 2014) en utilisant les mesures de la vitesse de rotation de la roue pour réaliser un ré-échantillonnage angulaire par tour des mesures de déformations. Cette méthode permet de moyennner le contenu périodique du signal en régime stationnaire. La Figure 6.2-(b) illustre, en **vert**, les harmoniques extraits du signal par rapport à ce dernier. Les harmoniques extraits sont utilisés pour l'inférence des paramètres du modèle de réponse forcée à une excitation périodique par tour.

## 6.2 Résultats d'inférence

Pour réaliser l'inférence des paramètres du modèle (modèle de réponse forcée à une excitation périodique une fois par tour (1Z) considérant l'harmonique RSI), l'algorithme est déployé sur des mesures provenant de  $N=10$  capteurs de déformation, ou points d'observation, placés sur une aube de la roue. Sur les  $Z_R=13$  aubes de la roue, deux sont instrumentés de capteurs. L'inférence des fréquences naturelles est réalisée sur chacune des deux (2) aubes. Les résultats sont comparés aux fréquences naturelles calculées par simulation numérique dans un fluide au repos pour la même roue, sans arbre et en phase de conception. L'inférence est réalisée pour un modèle à  $\Lambda=2$  modes par diamètre nodal  $\nu$ , soit 26 modes, et une excitation comprenant une fondamentale et  $P=3$  harmoniques, sur 200 000 itérations. La phase de *Burn In* est considérée comme les premiers 30% des chaînes de Markov. La chaîne de Markov de la variance  $\sigma^2$  de l'erreur se stabilise en moins de 1000 itérations. La distribution résultante pour ce paramètre, tirée dans une distribution inverse gamma  $\mathcal{G}^{-1}$ , est illustrée à la Figure 6.3.

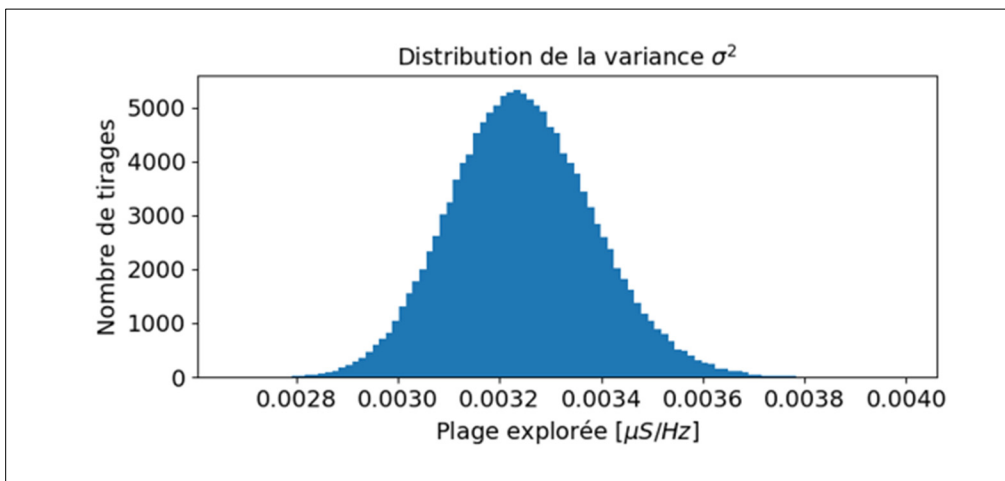


Figure 6.3 Distribution de la variance  $\sigma^2$  de l'erreur sur données prototype

Les chaînes de Markov obtenues pour l'excitation montrent une stabilisation partielle (voir Figure 6.4). La distribution résultante des chaînes de Markov pour l'excitation montre des valeurs très étendues. (voir Figure 6.5)

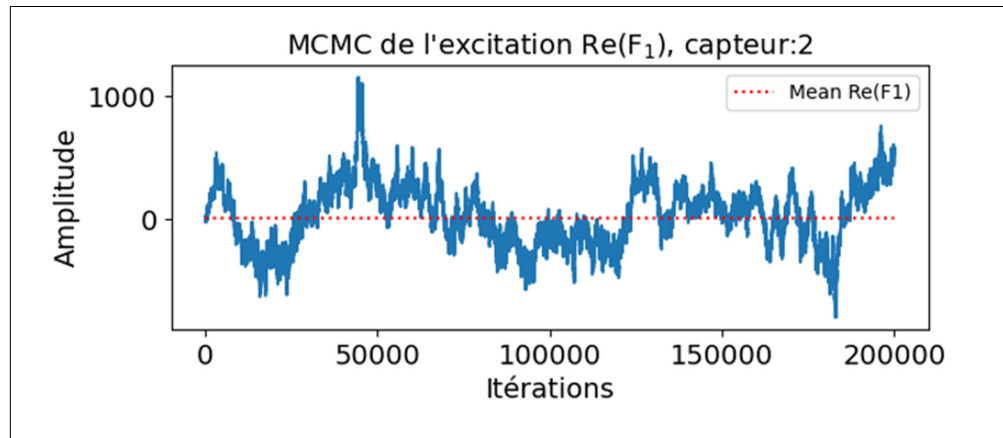


Figure 6.4 MCMC de la partie réelle du 1<sup>er</sup> harmonique de l'excitation associée au capteur #2

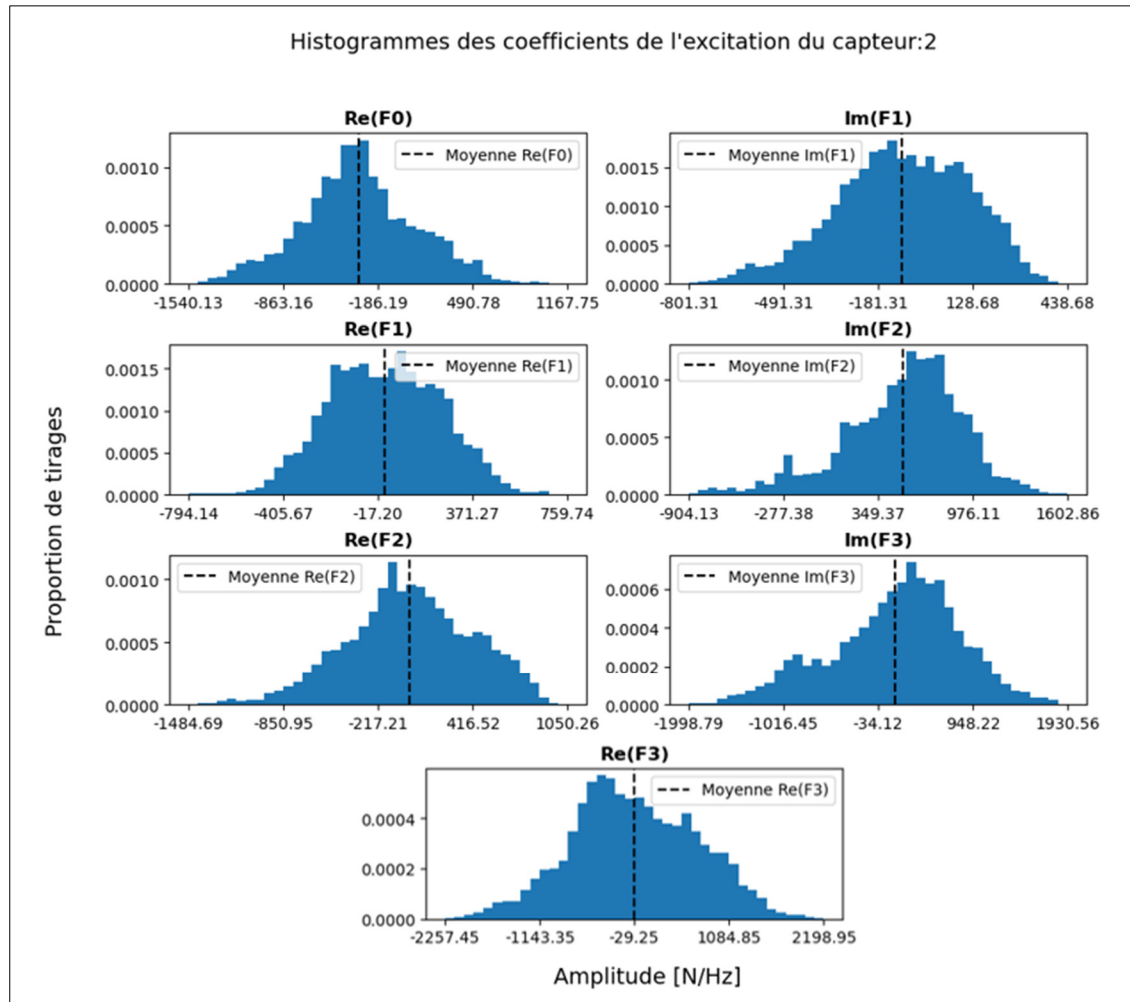


Figure 6.5 Distribution des coefficients de l'excitation pour le capteur 2

La Figure 6.6 illustre les distributions obtenues pour les cinq premières coordonnées modales du mode ND2-1. Comme pour l'excitation, les distributions résultantes sont de forme non gaussienne, toutefois avec un mode distinct.

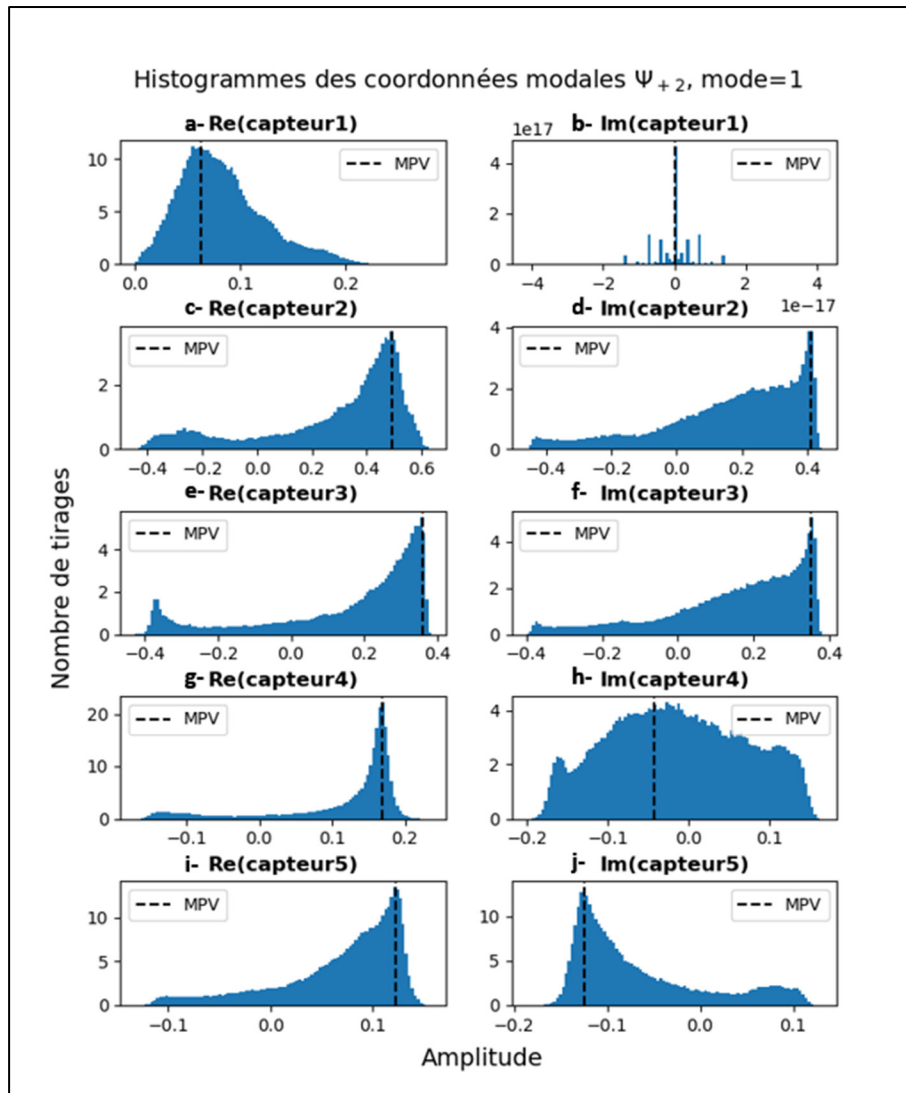


Figure 6.6 Distributions des cinq premiers points de la déformée modale  $\psi_v$  du mode ND2-1

Les résultats d'inférence des fréquences naturelles  $\omega_v$  sont présentés au Tableau 6.1 et au Tableau 6.2, on y compare la valeur la plus probable (MPV) de la distribution résultante des MCMC pour une fréquence naturelle donnée à la valeur de fréquence naturelle (FEA) calculée par simulation numérique, sans arbre et en eau au repos.

Tableau 6.1 Résultats d'inférence des 1<sup>res</sup> fréquences naturelles

Modes	FEA [Hz]	MPV Aube 1 [Hz]	Écart %	Intervalle 95%	MPV Aube 2 [Hz]	Écart %	Intervalle 95%	Diff. [Hz]
ND1-1	-	3,85	-	3,3-14.1	6,8	-	6,2-14,2	3,0
ND1*-1	-	9,6	-	0,8-21.1	11,8	-	1,3-21,8	2,2
ND2-1	12,1	7,18	40,7	5,1-13.1	14,7	-21,5	9,2-17,8	7,5
ND2*-1	12,1	7,37	39,1	0,9-18.6	13,9	-14,9	3,1-26,1	6,5
ND3-1	22,1	27,9	-26,2	22,3-34.4	26,5	-19,9	22,6-34,0	1,4
ND3*-1	22,1	28,8	-30,3	14,9-38.0	27,2	-23,1	13,6-37,5	1,6
ND4-1	27,2	30,8	-13,2	23,3-35,6	28,3	-4,0	23,9-39,9	2,5
ND4*-1	27,2	30,5	-12,1	17,6-39,2	35,4	-30,1	18,9-39,6	4,9
ND5-1	29,4	31,8	-8,2	24,4-36,6	28,8	2,0	24,4-35,3	3,0
ND5*-1	29,4	32,3	-9,9	16,8-39,3	30,0	-2,0	18,8-39,2	2,3
ND6-1	30,2	31,0	-2,6	25,7-38,3	32,6	-7,9	26,4-37,8	1,6
ND6*-1	30,2	31,9	-5,6	18,5-39,5	34,2	-13,2	21,0-39,5	2,3

Au Tableau 6.1, on remarque que tous les intervalles de 95% comprennent la valeur FEA, si applicable, sauf pour le mode ND3-1. En effet, la valeur FEA (22,1 Hz) du mode ND3-1 se trouve sous les limites basses (22,3 Hz et 22,6 Hz) de l'IC-95. Toutefois, la valeur FEA reste comprise dans l'intervalle 99%. La différence de résultat (Diff.) entre le MPV des 1<sup>ers</sup> modes inférés (à l'aide de l'aube 1 et 2) est de l'ordre de 1,4 Hz à 7,5 Hz. Les différences d'IC-95 de l'aube 1 par rapport à l'aube 2 sont constantes à environ  $\pm 4$  Hz, sauf pour les modes ND2-1 et ND2\*-1. En effet, pour ces modes, l'inférence réalisée pour l'aube 2 évalue le MPV de la fréquence naturelle  $\omega_v$  de 6,0 Hz à 7,5 Hz plus élevée par rapport à l'aube 1. L'IC-95 des résultats pour l'aube 2 sont également de 5,0 Hz à 7,0 Hz plus élevé pour ces modes de diamètre nodal  $v=\pm 2$ .

Pour la fréquence naturelle de diamètre nodal  $v=\pm 1$ , l'inférence à l'aide de l'aube 2 surestime le MPV de la fréquence de 2,2 Hz à 3,5 Hz par rapport aux résultats de l'aube 1. Au Tableau 6.1, pour les modes ND3 à ND6, l'inférence à l'aide de la méthode proposée surestime les fréquences naturelles calculées par simulation numérique. Ce phénomène est également observé en analysant les résultats d'inférence pour les 2<sup>e</sup> modes au Tableau 6.2.



Tableau 6.2 Résultats d'inférence des 2<sup>e</sup> fréquences naturelles

Modes	FEA [Hz]	MPV Aube1 [Hz]	Écart %	Intervalle 95%	MPV Aube2 [Hz]	Écart %	Intervalle 95%	Diff. [Hz]
ND1-2	-	25,6	-	19,1-32,1	26,2	-	20,6-31,8	0,6
ND1*-2	-	27,4	-	16,8-40,3	25,2	-	20,6-39,6	2,2
ND2-2	48,8	55,7	-14,1	42,9-67,7	55,2	-13,1	46,9-64,2	0,5
ND2*-2	48,8	53,6	-9,8	40,6-65,6	55,4	-13,5	43,3-63,8	1,8
ND3-2	50,2	55,1	-9,8	44,8-67,5	54,6	-8,8	45,4-64,1	0,5
ND3*-2	50,2	54,1	-7,8	41,8-66,3	54,9	-9,4	42,2-63,4	0,8
ND4-2	51,9	56,8	-9,4	46,1-67,8	56,2	-8,3	46,2-64,2	0,6
ND4*-2	51,9	56,3	-8,5	43,2-67,7	55,7	-7,3	43,3-64,0	0,6
ND5-2	52,3	58,2	-11,3	48,6-67,9	55,8	-6,7	50,3-64,2	2,4
ND5*-2	52,3	57,3	-9,6	44,9-68,2	56,5	-8,0	44,8-64,0	0,8
ND6-2	52,1	57,4	-10,8	47,1-68,4	56,8	-9,0	47,0-64,2	0,6
ND6*-2	52,1	56,8	-9,0	44,3-67,9	56,3	-8,1	43,8-64,0	0,5

Pour les 2<sup>e</sup> modes, l' écart observée au Tableau 6.2 est du même ordre de grandeur que celle observée lors de l'implémentation sur le modèle analytique. Les IC-95 obtenus pour l'inférence par les capteurs de l'aube 1 sont de 3 Hz à 5 Hz plus larges que pour l'aube 2.

Le Tableau 6.3 présente les taux d'acceptation des chaînes de Markov des fréquences naturelles  $\omega_v$ . Comme observé lors de l'implémentation sur des données synthétiques, les taux d'acceptation des modes contra-rotatifs sont généralement plus élevés que ceux des modes co-rotatifs. Par leur échantillonnage utilisant la méthode Metropolis-Hastings à candidat indépendant, les modes ND2-2 à ND6-2 ont un taux d'acceptation plus faible. Les taux d'acceptation de l'aube 2 sont généralement plus bas que ceux de l'aube 1

Tableau 6.3 Taux d'acceptation des MCMC  
des fréquences naturelles  $\omega_v$

Modes	Taux acc. 1 [%]	Taux acc. 2 [%]	Modes	Taux acc.1 [%]	Taux acc. 2 [%]
ND1-1	29	4	ND1-2	58	20
ND1*-1	89	84	ND1*-2	94	89
ND2-1	19	2	ND2-2	11	9
ND2*-1	64	32	ND2*-2	12	12
ND3-1	88	17	ND3-2	23	12
ND3*-1	86	52	ND3*-2	19	18
ND4-1	91	24	ND4-2	20	13
ND4*-1	97	71	ND4*-2	39	22
ND5-1	85	19	ND5-2	12	16
ND5*-1	96	75	ND5*-2	35	27
ND6-1	84	34	ND6-2	13	13
ND6*-1	96	73	ND6*-2	33	26

La Figure 6.7 illustre la comparaison entre les IC-95 des harmoniques résultants de l'inférence, en **gris**, au signal, en **noir**, et aux harmoniques extraits par la moyenne synchrone, en **vert**. On remarque une grande incertitude et une surestimation des harmoniques de la réponse mesurée par les harmoniques reconstruits à l'aide des paramètres inférés. La convergence partielle de l'excitation pourrait être à la source de ce problème.

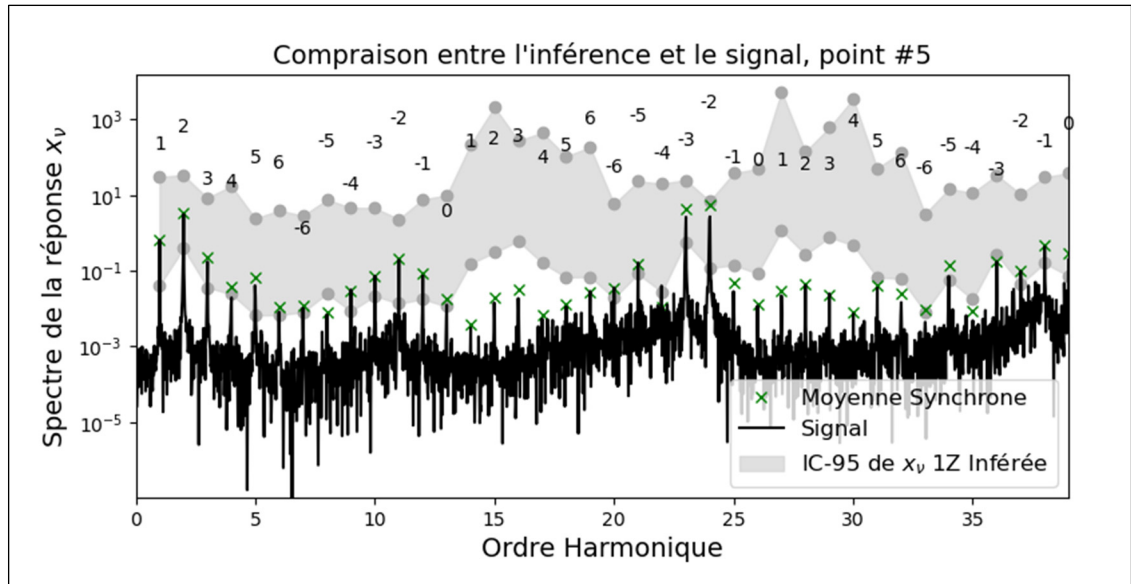


Figure 6.7 Comparaison entre les harmoniques reconstruits et le signal (capteur 3)

### 6.3 Discussion

Dans le présent chapitre, l'Algorithme 4.2 est évalué sur des mesures de déformations d'une aube de turbine hydroélectrique de type Francis en régime stationnaire près du BEP. Les chaînes de Markov de l'excitation montrent une convergence partielle et une variance jugée comme trop étendue.

#### 6.3.1 Indétermination de l'excitation

Le modèle proposé pour l'inférence ne concorde pas avec le système réel. La non-véracité des hypothèses du modèle pourrait être en cause de la non-convergence de l'algorithme entre autres au niveau de l'excitation. D'abord, l'hypothèse d'amortissement nul pourrait induire une indétermination au niveau de la phase des harmoniques de l'excitation. Ensuite, l'hypothèse d'une excitation une fois par tour (1Z) postulée à l'aide de l'analyse des capteurs de pression sur l'aube pourrait être invalide. La contribution d'autres types et périodicités d'excitation pourrait être non négligeable. Mais encore, la non-convergence de l'excitation n'empêche pas nécessairement l'inférence des déformées modales et des fréquences naturelles. Les

composantes associées à l'excitation, même si elles sont erronées, pourraient être considérées comme un paramètre non spécifié (*nuisance parameter*). Toutefois, l'effet de l'indétermination de l'excitation semble se transposer aux déformées modales. Les formes des distributions obtenues pour les déformées modales, quoique montrant un mode distinct, sont non gaussiennes et parfois multimodales. Pour les fréquences naturelles, les solutions obtenues comprennent toutes les valeurs de fréquence naturelle calculées par la simulation numérique. L'analyse du déploiement de l'algorithme sur des mesures de 2 aubes différentes montre des résultats qui ont généralement le même intervalle de crédibilité (IC-95) pour un mode donné. Cette répétabilité d'une aube à l'autre laisse croire que pour le modèle sous-paramétré proposé, les paramètres d'excitation  $F$  pourrait être interprétés, en partie, comme un paramètre non spécifié.

### 6.3.2 Identification des fréquences naturelles

L'inférence des fréquences naturelles montre des résultats similaires pour les deux aubes, mais surtout une tendance à la surestimation par rapport aux valeurs calculées par simulation numérique. Cette surestimation des fréquences naturelles, par rapport à la simulation numérique, pourrait être due à l'absence de considération d'un résidu modal amenant ainsi une translation des fréquences naturelles vers les hautes fréquences en compensation.

La surestimation des modes ND1-1 et ND2-1 de l'aube 2 par rapport à l'aube 1 (voir le Tableau 6.2) pourrait être causée par la possible différence de masse locale des aubes associée aux quantités d'acier gardées à la ceinture lors de l'usinage de la roue. Ces différences pourraient aussi être provoquées par l'indétermination de l'excitation.

## 6.4 Conclusion de déploiement sur prototype

En somme, le déploiement de l'algorithme sur prototype montre que le modèle proposé est non représentatif du système étudié. Du point de vue des paramètres modaux du système, l'inférence informe sur les modes ND1 (ND1-1, ND1\*-1, ND1-2 et ND1\*-2) qui ne peuvent être évalués par les résultats de simulation numérique. La simulation analysée ne contient pas

d'arbre, surestimant ainsi le mode ND1. Les modes ND1 inférés par la méthode proposée pourraient être un avantage de la méthode d'analyse modale harmonique par rapport à la simulation numérique. Du point de vue de l'excitation, le déploiement ne permet pas d'obtenir concrètement de l'information sur sa nature par le manque de stabilisation des chaînes de Markov attribuées à ses paramètres. Ce manque de stabilité lors du déploiement sur prototype renchérit la nécessité de considérer l'amortissement et la variabilité du plancher de bruit dans le modèle proposé. La considération de ces effets pourrait permettre la convergence de l'excitation. Le modèle proposé étant démontré non représentatif pour le cas d'étude, les paramètres modaux inférés pourraient ne pas être statiquement concluants.



## CHAPITRE 7

### DISCUSSION ET CONCLUSION

À des fins de synthèse, les divergences entre les résultats obtenus lors du déploiement de l'algorithme sur prototype et sur données biaisés sont comparées dans ce dernier chapitre. La démarche permet de mettre en évidence les lacunes du modèle et de la méthode proposés et de proposer des perspectives pour de futurs travaux de recherche.

#### 7.1 Comparaison des résultats

Trois observations sommaires découlent de la comparaison entre les résultats obtenus sur les cas synthétiques et ceux obtenus sur le cas prototype. L'évaluation de l'algorithme sur prototype montre : *(i)* une surestimation des harmoniques de la réponse, *(ii)* des variances plus grandes des paramètres estimés par rapport à celles obtenues sur le modèle et, *(iii)* une surestimation des fréquences naturelles.

##### 7.1.1 Surestimation des harmoniques sur prototype

À la Figure 6.7, on remarque que le modèle reconstruit avec les paramètres inférés surestime les harmoniques de la réponse prototype. Ce qui n'est pas le cas tel qu'observé lors de l'implémentation sur le modèle (voir Figure 5.18). Toutefois, les fréquences naturelles inférées (MPV) demeurent du même ordre de grandeur que celles obtenues par simulation (FEA). On y conclut que la surestimation des harmoniques provient des autres paramètres. En effet, l'indétermination de l'excitation induit une large étendue des distributions de coefficients de Fourier et des coordonnées modales et, par conséquent, est la source de cette surestimation.

À noter que le fait de considérer l'amortissement dans le modèle pourrait faciliter la convergence de l'excitation, ce qui aurait pour effet de limiter la surestimation des harmoniques de la réponse ainsi que les incertitudes d'estimation des paramètres.

### 7.1.2 Comparaison des variances

La variance inférée sur le prototype ( $\sigma^2$ ) est environ dix (10) fois plus petite que celle sur obtenue sur le modèle pour des HSR d'excitation d'excitation considérés comme quasi équivalents. En effet, les chaînes de Markov de la variance  $\sigma^2$  sur le modèle et sur le prototype se stabilisent dans des intervalles de  $0,036 \mu S^2$  à  $0,045 \mu S^2$  et de  $0,0029 \mu S^2$  à  $0,0037 \mu S^2$  respectivement. Toutefois, sur le cas spécifique du prototype, les variances au niveau de l'excitation sont de 10 à 100 fois plus élevées que sur le modèle. En effet, sur le modèle, la variance des paramètres d'excitation est de l'ordre de 10 N/Hz (voir Figure 5.16), tandis que l'ordre de grandeur prototype est de 100 N/Hz à 1000 N/Hz (voir Figure 6.5). Donc, même si la variance de l'erreur est plus petite sur le cas prototype, l'incertitude relative de l'inférence est moindre.

De plus, les fréquences naturelles inférées sur le cas prototype ont des incertitudes d'environ 5 Hz à 7 Hz plus grandes que celles observées sur le modèle. En effet, les résultats de l'inférence des fréquences naturelles dans le cas du modèle affichent des IC-95 allant de 1,4 Hz jusqu'à 9,4 Hz pour les 1<sup>ers</sup> modes co-rotatifs et d'environ 16,5 Hz à 26,9 Hz pour les 1<sup>ers</sup> modes contra-rotatifs. Dans le cas du prototype, ces intervalles sont d'environ 8,0 Hz à 16,0 Hz et de 17,7 Hz à 23,9 Hz pour les 1<sup>ers</sup> modes co-rotatifs et contra-rotatifs respectivement. Pour les 2<sup>e</sup> modes, les IC-95 vont de 7,0 Hz à 24,6 Hz dans le cas du modèle et de 13,0 Hz à 24,9 Hz dans le cas du prototype. La plus grande incertitude observée dans le cas du prototype (par rapport à celle du cas modèle) peut provenir d'un effet combiné de l'indétermination de l'excitation, des biais induits par l'absence d'amortissement et de la variabilité du plancher de bruit.

### 7.1.3 Surestimation des fréquences naturelles

L'analyse des valeurs les plus probables (MPV) (voir Tableau 6.1 et Tableau 6.2) inférées pour les fréquences naturelles dans le cas du prototype affiche une surestimation (par rapport aux fréquences FEA) de tous les modes de ND3-1 à ND6-1 et de ND2-2 à ND6-2. Les 1<sup>ers</sup> et 2<sup>e</sup> modes sont surestimés de 0,8 Hz à 8,2 Hz. Dans le cas de l'application sur le modèle (voir



Tableau 5.3 et Tableau 5.4), l'impact du résidu modal se caractérise par un biais menant autant à la surestimation qu'à la sous-estimation des modes. L'inférence des fréquences naturelles dans le cas du prototype semble, en plus du résidu modal, être impactée par l'amortissement des modes. En effet, l'effet de l'amortissement des modes pourrait induire une atténuation des harmoniques de la réponse, ce qui se traduit par une surestimation des fréquences naturelles. Une autre explication pourrait être que la hausse des valeurs des fréquences naturelles telle qu'observée est une sorte de compensation à la surestimation des harmoniques de l'excitation.

## **7.2 Perspectives pour travaux futurs**

L'algorithme d'identification modale proposé présente des résultats concluants sur le cas modèle et partiellement concluants sur le cas prototype. Les contraintes logistiques et temporelles nous obligent à mettre un terme à notre étude et produire un rapport. Par conséquent, et dans le but d'améliorer l'applicabilité et la précision de la méthode proposée, quelques pistes pour de futurs travaux nous semblent intéressantes et à investiguer.

### **7.2.1 Modélisation du système**

Pour un modèle de réponse forcée à une excitation périodique plus représentatif de la réalité et des limites de l'algorithme, tenir en compte l'amortissement, le résidu modal et la composante stochastique du signal devrait être étudié.

#### **7.2.1.1 L'amortissement**

L'amortissement modal devrait être considéré par la méthode. Comme proposé à la section 6.3.1, l'absence de l'amortissement pourrait expliquer l'indétermination de l'excitation lors de l'étude sur le cas prototype. En effet, un mode amorti excite une bande de fréquence plus étendue, mais l'amplification à la résonance diminue avec l'augmentation de l'amortissement (Coutu et al., 2012). De plus, il y a une différence de phase entre une réponse amortie et son excitation, qui n'est pas prise en compte par le modèle proposé. Et encore, l'amortissement varie d'un mode à l'autre. Les modes à plus haute fréquence peuvent être très amortis. Cet

amortissement influence la forme des déformées modales et diminue légèrement les fréquences naturelles du système (Valentín et al., 2019). Par conséquent, le biais d'omission de l'amortissement peut être considérable sur l'inférence des modes rapprochés à haute fréquences. Le patron d'harmoniques de la réponse est donc indescriptible par le simple modèle d'excitation probablement à cause de ces effets.

L'amortissement pourrait être intégré au modèle proposé sous forme de paramètres à inférer ou sous forme de constantes imposées *a priori* dans le modèle. La sélection de modèles telle que proposée par (S. K. Au, 2017) pourrait être exploitée afin d'évaluer, de manière itérative, quelles constantes d'amortissement sont les plus probables pour le système étudié.

#### 7.2.1.2 Le résidu modal

Un paramètre additionnel permettant de quantifier le résidu modal (ou *Residual Term*) associé à un diamètre nodal  $\nu$  spécifique devrait être ajouté au modèle. Ce paramètre permettrait de circonscrire le biais de coupure de quantité de fréquences naturelles  $\Lambda$ . L'ajout de termes résiduels quantifiant l'impact des modes hors de la bande de fréquence analysée tel que proposé par El-Kafafy et al. (2014) dans leur estimateur modal ML-MM (*Maximum Likelihood Modal Model-based*) pourrait être exploitée à cette fin. Dans le même ordre d'idée, l'implémentation d'une erreur hétéroscédastique (dépendante du diamètre nodal) pourrait également ajouter cette flexibilité à la méthode (Lyngdoh et al., 2019). Ce type d'erreur pourrait, en plus, contrer les effets de la variabilité du plancher de bruit. L'ajout de paramètres à inférer amène toutefois un enjeu d'*identifiabilité*. Cela dit, la considération du résidu modal reste une piste à explorer.

#### 7.2.1.3 Traitement de la stochasticité

À La Figure 6.2-b, on observe que le plancher de bruit du signal varie selon la fréquence. Les variations d'amplitudes sont du même ordre de grandeur que certains harmoniques synchrones. Cette variation fréquentielle du HSR de l'excitation induit un biais sur les harmoniques synchrones de la réponse. La séparation en amont des composantes, périodique et stochastique, devrait être réalisée dans le traitement du signal afin de n'y extraire que sa composante

périodique. La méthode DRS (*Discrete Random Separation*) (Antoni & Randall, 2004) serait une méthode intéressante à exploiter à cet effet. Ce traitement du signal pourrait réduire le biais d'excitation stochastique sans ajout de paramètre au modèle.

## 7.2.2 Modèle statistique

Pour contraindre l'inférence des paramètres modaux du système, des connaissances actuelles de ce dernier peuvent être introduites au modèle statistique de l'algorithme. Il serait judicieux dans de futurs travaux d'explorer la combinaison des données des deux aubes instrumentées, l'exploitation des modes conjugués et des résultats de simulation numérique.

### 7.2.2.1 Combiner les données de deux aubes

La roue étant axisymétrique, les données provenant des deux aubes instrumentées pourraient être combinées dans la fonction de vraisemblance du problème. En doublant le nombre de données pour une même quantité de paramètres, l'algorithme, plus contraint, pourrait converger plus rapidement vers une solution.

### 7.2.2.2 Exploiter les modes conjugués

Pour un diamètre nodal donné  $\nu$ , le modèle proposé considère la séparation des modes conjugués. Toutefois, les déformées modales  $\psi_{+\nu}$  et  $\psi_{-\nu}$  (*forward* et *backward*) sont conjuguées et cette connaissance n'est pas exploitée dans l'échantillonnage des vecteurs modaux. De la vraisemblance du problème, une probabilité conditionnelle combinant les déformées modales  $\psi_{+\nu}$  et  $\psi_{-\nu}$  pourrait être développée. Par conséquent, on tirerait une déformée modale (et sa conjuguée) plus contrainte à l'aide de tous les harmoniques d'un diamètre nodal  $\nu$ .

### 7.2.2.3 Exploiter les résultats de simulation numérique

Un atout des algorithmes bayésiens est leur capacité d'incorporation des connaissances acquises à priori. Les fréquences naturelles et déformées modales calculées par simulation numérique peuvent être incorporées à l'algorithme sous forme de *prior*. De plus, le niveau de certitude attribué aux *priors* peut être contrôlé par des hyperparamètres définis par l'utilisateur. L'utilisation de ces connaissances par l'algorithme permettrait d'améliorer sa précision et, probablement, de réduire le temps de calcul.

## 7.3 Conclusion

En conclusion, ce mémoire présente une méthode innovante d'analyse modale des roues de turbines hydroélectriques en régime stationnaire près du point de meilleur rendement à l'aide de mesures de déformation. Le régime étudié est dominé par les vibrations synchrones et comporte un contenu stochastique marginal rendant les méthodes d'analyse modale opérationnelle usuelles inefficaces.

Pour inférer les fréquences naturelles, les déformées modales et l'excitation périodique du système, la méthode d'analyse modale harmonique proposée utilise conjointement les harmoniques des vibrations synchrones mesurés sur une aube de la roue et un modèle de réponse forcée dans un algorithme probabiliste. Au CHAPITRE 3, le modèle proposé par Dollon et al. (2023) est adapté pour représenter une turbine hydroélectrique de type Francis. Du modèle physique proposé, un algorithme probabiliste d'identification du système est développé au CHAPITRE 4. Au CHAPITRE 5, l'algorithme est implémenté sur un modèle analytique de roue sous une excitation périodique une fois par tour tout en considérant les interactions rotor-stator (RSI). Puis, la méthode est évaluée sur des mesures de déformation d'une roue de turbines *in situ* au CHAPITRE 6. Le déploiement de la méthode sur ce prototype montre une indétermination de l'excitation périodique et une estimation des 26 premières fréquences naturelles d'une roue de 13 aubes avec un écart de l'ordre de 1 Hz à 7 Hz par rapport à la simulation numérique et des intervalles de confiance de l'ordre de 8 Hz à 25 Hz.

La méthode d'identification modale proposée se démarque par son applicabilité en régime stationnaire et sa capacité, à terme, de décrire l'excitation périodique de la roue *in situ*. L'algorithme permet d'obtenir de l'information sur, entre autres, deux modes conjugués par diamètre nodal de la roue en considérant l'effet gyroscopique. La méthode se démarque de la simulation numérique par sa capacité à inférer les modes de 1<sup>er</sup> diamètre nodal influencés par l'arbre de la turbine, étant souvent exclu des simulations. De plus, cette méthode probabiliste permet aisément l'incorporation de connaissances à priori du système.

Des travaux futurs en lien avec l'ajout de l'amortissement au modèle et de la séparation des composantes périodique et stochastique du signal sont envisageables. Également, la considération, sous forme de *prior*, des modes vibratoires simulés par la méthode des éléments finis permettrait d'améliorer les performances de l'algorithme. À terme, la méthode proposée pourrait non seulement être appliquée sur des turbines prototype *in situ*, mais aussi être utilisée en phase de conception sur des essais modèles. L'approche sur essais modèle, en créant une excitation contrôlée de périodicité une fois par tour, se veut une opportunité d'acquérir de la connaissance sur la dynamique et le chargement des roues de turbines hydroélectriques sous plusieurs régimes d'opération.



## LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Antoni, J., & Randall, R. B. (2004). Unsupervised noise cancellation for vibration signals : Part II—a novel frequency-domain algorithm. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(1), 103-117. [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00013-X](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00013-X)
- Au, S. K. (2017). *Operational Modal Analysis*. DOI: 10.1007/978-981-10-4118-1
- Au, S.-K. (2011). Fast Bayesian FFT Method for Ambient Modal Identification with Separated Modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 137(3), 214-226. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000213](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000213)
- Au, S.-K. (2012a). Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, Part I: Posterior most probable value. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26, 60-75. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2011.06.017>
- Au, S.-K. (2012b). Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, Part II: Posterior uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26, 76-90. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2011.06.019>
- Au, S.-K. (2016). Insights on the Bayesian spectral density method for operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66-67, 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.04.023>
- Ben Salah, F. (2014). *MODÉLISATION DE LA PROPAGATION DES INCERTITUDES DES MESURES SUR L'AUBE D'UNE TURBINE HYDRAULIQUE PAR KRIGEAGE ET SIMULATIONS STOCHASTIQUES* [Mémoire]. École de technologie Supérieure.
- Bolstad, W. M. (2009). *Understanding Computational Bayesian Statistics : Bolstad/Understanding*. <https://doi.org/10.1002/9780470567371>
- Bonnecase, D., Prevosto, M., & Benveniste, A. (1994). Application of a multidimensional ARMA model to modal analysis under natural excitation. *In Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, p.382-388.
- Brincker, R., Andersen, P., Andersen, P., & Jacobsen, N.-J. (2007). *Automated Frequency Domain Decomposition for Operational Modal Analysis*.
- Brincker, R., & Ventura, C. E. (2015). *Introduction to Operational Modal Analysis : Brincker/Introduction to Operational Modal Analysis*. <https://doi.org/10.1002/9781118535141>
- Brincker, R., Zhang, L., Andersen, P. L., & Andersen, P. (2000). *Modal Identification of Output-Only Systems using Frequency Domain Decomposition*. 273-282. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/3/303>

- Chamberland-Lauzon, J., Monette, C., Nennemann, B., Melot, M., Birk, S., & Ruchonnet, N. (2019). Francis design and prediction technology for flexible operation. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 240, 022042. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/240/2/022042>
- Coutu, A., Monette, C., & Velagandula, O. (2007). *Francis Runner Dynamic Stress Calculations*. Hydro 2007, Granada, Spain.
- Coutu, A., Roy, M. D., Monette, C., & Nennemann, B. (2008, octobre). *Experience with rotor-stator interactions in high head Francis runner*. 24th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems (pp. 1-10). IARH.
- Coutu, A., Seeley, C., Monette, C., Nennemann, B., & Marmont, H. (2012). Damping measurements in flowing water. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 15(6), 062060. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/15/6/062060>
- Dollon, Q. (2021). *Analyse modale opérationnelle des roues de turbines hydroélectriques par l'étude de régimes transitoires*. École de technologie Supérieure.
- Dollon, Q., Antoni, J., Tahan, A., Gagnon, M., & Monette, C. (2022). A fast collapsed Gibbs sampler for frequency domain operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 173, 108985. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.108985>
- Dollon, Q., Jérôme Antoni, Antoni, J., Tahan, A., Gagnon, M., C. Monette, & Monette, C. (2020). Operational Modal Analysis of hydroelectric turbines using an order based likelihood approach. *Renewable Energy*, 165, 799-811. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.11.086>
- Dollon, Q., Tahan, A., Antoni, J., Gagnon, M., & Monette, C. (2023). Toward a better understanding of synchronous vibrations in hydroelectric turbines. *Journal of Sound and Vibration*, 544, 117372. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117372>
- Dörfler, P., Coutu, A., & Sick, M. (2013). *Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery: Engineer's Guidebook for Planning, Design and Troubleshooting*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4252-2>
- Duparchy, F., Brammer, J., Thibaud, M., Arthur Tristan Favrel, Favrel, A. T., Lowys, P. Y., & Avellan, F. (2017). *Mechanical impact of dynamic phenomena in Francis turbines at off design conditions*. 813(1), 012035. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/813/1/012035>
- El-Kafafy, M., De Troyer, T., & Guillaume, P. (2014). Fast maximum-likelihood identification of modal parameters with uncertainty intervals: A modal model formulation with enhanced residual term. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 48(1), 49-66. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.02.011>



- Flemming, F., Foust, J., Koutnik, J., & Fisher, R. K. (2009). Overload Surge Investigation Using CFD Data. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 2(4), 315-323. <https://doi.org/10.5293/ijfms.2009.2.4.315>
- Gagnon, M., & Nicolle, J. (2019). On variations in turbine runner dynamic behaviours observed within a given facility. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 405(1), 012005. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/405/1/012005>
- Gagnon, M., Tahan, S. A., Bocher, P., & Thibault, D. (2010). Impact of startup scheme on Francis runner life expectancy. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 12, 012107. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/12/1/012107>
- Gagnon, M., & Thibault, D. (2015). Response Spectra and Expected Fatigue Reliability : A Look at Hydroelectric Turbines Behavior. *Procedia Engineering*, 133, 613-621. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.638>
- Gilks, W. R., Best, N. G., & Tan, K. K. C. (1995). Adaptive Rejection Metropolis Sampling Within Gibbs Sampling. *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics*, 44(4), 455-472. <https://doi.org/10.2307/2986138>
- Gres, S., Döhler, M., Andersen, P., & Mevel, L. (2020). Kalman filter-based subspace identification for operational modal analysis under unmeasured periodic excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 146. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106996>
- Hermans, L., Van der Auweraer, H., Van Der Auweraer, H., & Guillaume, P. (1998). *A frequency-domain maximum likelihood approach for the extraction of modal parameters from output-only data*. 963-972.
- Hydro-Québec. (2022). *Hydro-Québec | L'hydroélectricité québécoise : Propre, renouvelable et faible en GES*. <https://www.hydroquebec.com/a-propos/notre-energie.html>
- Ibrahim, S. R., Asmussen, J. C., & Brincker, R. (1995). *Modal Parameter Identification from Responses of General Unknown Random Inputs*. 446-452.
- Ibrahim, S. R., S. R. Ibrahim, & Mikulcik, E. C. (1977). *A method for the direct identification of vibration parameters from the free response*. 47(4), 183-198.
- Juang, J.-N., & Papa, R. (1985). An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*.
- Katafygiotis, L. S., & Yuen, K.-V. (2001). Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(8), 1103-1123. <https://doi.org/10.1002/eqe.53>

- Leclere, Q., & Hamzaoui, N. (2014). Using the moving synchronous average to analyze fuzzy cyclostationary signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *44*, 149-159. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.01.005>
- Liu, X., Luo, Y., Karney, B. W., & Wang, W. (2015). A selected literature review of efficiency improvements in hydraulic turbines. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, *51*, 18-28. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.06.023>
- Ljung, L. (1987). *System Identification : Theory for the User*.
- Louyot, M., Nennemann, B., Monette, C., & Gosselin, F. (2020). Modal analysis of a spinning disk in a dense fluid as a model for high head hydraulic turbines. *Journal of Fluids and Structures*, *94*, 102965. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.102965>
- Lyngdoh, G. A., Rahman, M. A., & Mishra, S. K. (2019). Bayesian Updating of Structural Model with a Conditionally Heteroscedastic Error Distribution. *Journal of Engineering Mechanics*, *145*(12), 04019091. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001668](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001668)
- Monette, C., Marmont, H., Chamberland-Lauzon, J., Skagerstrand, A., Coutu, A., & Carlevi, J. (2016). Cost of enlarged operating zone for an existing Francis runner. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, *49*, 072018. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/49/7/072018>
- Morissette, J., Chamberland-Lauzon, J., Nennemann, B., Monette, C., Giroux, A., Coutu, A., & Nicolle, J. (2016, juillet 4). Stress predictions in a Francis turbine at no-load operating regime. *28th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*. IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Grenoble, France.
- Nennemann, B., Monette, C., & Chamberland-Lauzon, J. (2016). Hydrodynamic damping and stiffness prediction in Francis turbine runners using CFD. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, *49*, 072006. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/49/7/072006>
- Parloo, E. (2003). *Application of frequency-domain system identification techniques in the field of operational modal analysis*. Vrije Universiteit Brussels.
- Peeters, B., Herman Van der Auweraer, Herman Van der Auweraer, Van der Auweraer, H., Guillaume, P., & Leuridan, J. (2004). The PolyMAX Frequency-Domain Method : A New Standard for Modal Parameter Estimation? *Shock and Vibration*, *11*, 395-409. <https://doi.org/10.1155/2004/523692>
- Peeters, B., Herman Van der Auweraer, Herman Van der Auweraer, Van der Auweraer, H., Vanhollebeke, F., & Guillaume, P. (2007). Operational modal analysis for estimating the dynamic properties of a stadium structure during a football game. *Shock and Vibration*, *14*(4), 283-303. <https://doi.org/10.1155/2007/531739>

- Randall, R. B., Coats, M. D., & Smith, W. A. (2016). Repressing the effects of variable speed harmonic orders in operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 79, 3-15. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.02.042>
- Roig Bauzà, R., Torre Rodríguez, Ó. de la, Jou Santacreu, E., & Escaler Puigoriol, F. X. (2020). *Numerical modal analysis of a Kaplan turbine runner*. 144-145. <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/335438>
- Salehi, S., Nilsson, H., Lillberg, E., & Edh, N. (2021). Numerical Simulation of Hydraulic Turbine During Transient Operation Using OpenFOAM. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 774(1), 012060. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/774/1/012060>
- Sangal, S., Garg, A., & Kumar, D. (2013). *Review of Optimal Selection of Turbines for Hydroelectric Projects*.
- Savin, O., Baroth, J., Badina, C., Charbonnier, S., & Bérenguer, C. (2021). Damage due to start-stop cycles of turbine runners under high-cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 153, 106458. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106458>
- Seidel, U., Seidel, U., Mende, C., Hübner, B., Weber, W., & Otto, A. (2014). *Dynamic loads in Francis runners and their impact on fatigue life*. 22(3), 032054. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/22/3/032054>
- Valentin, D., Presas, A., Bossio, M., Egusquiza Montagut, M., Egusquiza, E., & Valero, C. (2018). Feasibility of Detecting Natural Frequencies of Hydraulic Turbines While in Operation, Using Strain Gauges. *Sensors*, 18, 174. <https://doi.org/10.3390/s18010174>
- Valentin, D., Presas, A., Egusquiza, E., Valero, C., Egusquiza, M., & Bossio, M. (2017). Power swing generated in Francis turbines by part load and overload instabilities. *Energies*, 10(12), 2124. <https://doi.org/10.3390/en10122124>
- Valentín, D., Presas, A., Valero, C., Egusquiza, M., Jou, E., & Egusquiza, E. (2019). Influence of the hydrodynamic damping on the dynamic response of Francis turbine runners. *Journal of Fluids and Structures*, 90, 71-89. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.06.011>
- Waterpower Canada. (2022). Learn. *Waterpower Canada*. <https://waterpowercanada.ca/learn/>
- Wildheim, J. (1981). Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 75(3), 397-416. [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(81\)90386-2](https://doi.org/10.1016/0022-460x(81)90386-2)
- Wildheim, S. J. (1979). Excitation of Rotationally Periodic Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4), 878-882. <https://doi.org/10.1115/1.3424671>
- Yan, W.-J., & Katafygiotis, L. S. (2015a). A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part I: Posterior most probable value and uncertainty.

*Mechanical Systems and Signal Processing*, 54-55, 139-155.  
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.07.027>

Yan, W.-J., & Katafygiotis, L. S. (2015b). A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part II: Mode shape assembly and case studies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54-55, 156-171.  
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.08.016>

Yuen, K.-V., & Katafygiotis, L. (2003). Bayesian Fast Fourier Transform Approach for Modal Updating Using Ambient Data. *Advances in Structural Engineering - ADV STRUCT ENG*, 6, 81-95. <https://doi.org/10.1260/136943303769013183>

Zhang, L., Kanda, H., & Brown, D. L. (1985). Polyreference frequency method for modal parameter identification. *American Society of Mechanical Engineers*. ASME Design Engineering Technical Conference.

