

Colonne elliptique en béton armé confinée à l'aide de
composites en PRF : Simulations par éléments finis et études
paramétriques

par

Hamza EL GHAYOUR

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
COMME EXIGENCE PARTIELLE POUR L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE DE LA CONSTRUCTION
M. Sc. A.

MONTREAL, LE 8 DÉCEMBRE 2025

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

©Tous droits réservés

Il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement demander l'autorisation à l'auteur.

PRÉSENTATION DU JURY
CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Amar Khaled, président du jury
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

M. Munzer Hassan, membre du jury
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

M. Omar Chaallal, directeur de mémoire
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 26 NOVEMBRE 2025

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et ma sincère gratitude à l'honorable Pr. Omar Chaallal, pour avoir accepté de me superviser, pour son encadrement très précieux, et son accompagnement éclairé tout au long de ce passionnant projet de recherche. Je le remercie également pour la clarté et la pertinence de ses cours, ouvrages et explications, qui ont grandement enrichi ma compréhension, et éveillé davantage mon sens critique et mon esprit curieux.

Je remercie ensuite spécialement mes parents, dont le soutien indéfectible et l'amour inconditionnel ont été une source inestimable de force et de motivation. Leurs encouragements constants ont nourri ma détermination, et renforcé ma volonté de réussir.

Je souhaite témoigner de mes sincères remerciements à l'École de Technologie Supérieure et au Ministère de l'Enseignement supérieur du Québec, pour leur soutien et l'attention bienveillante portée à mon parcours. Je salue également les efforts déployés pour mettre en place des ressources et des dispositifs adaptés afin d'accompagner et d'aider les étudiants tout au long de leur formation.

Je tiens enfin à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce beau projet de recherche.

Colonnes elliptiques en béton armé confinées à l'aide de composites en PRF : Simulations par éléments finis et études paramétriques

Hamza EL GHAYOUR

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente les travaux de recherche mettant en évidence les mécanismes de confinement des colonnes en béton renforcées par un chemisage en PRF et contribue à approfondir les connaissances relatives à cette technique performante de renforcement structural. Cette méthode fait aujourd'hui partie intégrante des codes de conceptions nord-américains et européens. Néanmoins, la complexité de ce système se traduit dans ces codes par des limitations parfois exigeantes, et d'autres fois moins conservatrices, voire peu sécuritaires.

Le principe général du confinement est similaire à celui en armature transversale tel qu'exposé dans le modèle unifié de Mander et al. (1988). Des modèles expérimentaux ou semi-théoriques comme ceux Teng et Lam (2002) et Chaallal et al. (2003), on déduit que le comportement de ces colonnes dépend des principaux paramètres suivant : (1) la forme géométrique de la colonne ayant un impact sur l'uniformité du confinement tel qu'explicité par les études de Hassan et Chaallal (2007) et de Liu et al. (2023), (2) le nombre de couches de PRF, sa rigidité et sa résistance à la traction qui dictent le niveau de confinement de la colonne et sa ductilité comme précisé par les études de Benzeguir et al. (2024) et de Gahmousse et al. (2021), et (3) le comportement élasto-plastique du béton et sa résistance à la compression.

Teng et Lam (2002) et Zeng et al. (2021) ont démontré que l'ovalisation est une solution efficace pour le renforcement de colonnes confinées sujettes à divers types de chargements. Ce système de colonnes elliptiques confinées en PRF fut méticuleusement formulé à l'aide de la Méthode des Éléments Finis de Galerkin pour une représentation fidèle de leur comportement face à un chargement en compression axiale. La formulation choisie suppose de faibles déformations et rotations et une non-linéarité provenant uniquement du matériau béton. La plasticité du béton a été définie à l'aide du critère de Drucker-Prager.

Les résultats obtenus des simulations numériques valident les constats expérimentaux des divers travaux dans la littérature et conduisent à l'élaboration d'un modèle analytique précis représentant fidèlement l'impact de ces paramètres à travers un modèle de bielles et tirants radiaux. Il en ressort que la variation de la courbure de la surface de contact béton-PRF, la résistance en compression du béton, ainsi que la rigidité pourvue par le confinement à travers les caractéristiques intrinsèques du PRF et nombre de plis font parties intégrantes des équations qui prédisent les contraintes de confinement et la capacité portante de la structure avec un écart relatif de moins de 10% par rapport aux résultats expérimentaux. Des pistes d'améliorations notamment relativement aux modèles des codes de conceptions ont aussi été proposées.

Mots-clés : colonne, béton, ellipse, PRF, simulation

Elliptical reinforced concrete columns confined using FRP composites: Finite element simulations and parametric study

Hamza EL GHAYOUR

ABSTRACT

This thesis presents research work that sheds light on the confinement mechanisms of concrete columns strengthened with FRP jackets and contributes to advancing the understanding of this efficient structural retrofitting technique. Today, this method has become an integral part of North American and European design codes. However, the complexity of such systems is reflected in these codes through limitations that are, at times, overly restrictive and, at other times, insufficiently conservative, potentially compromising structural safety.

The general principle of confinement is like that of transverse reinforcement, as described in the unified model of Mander et al. (1988). Based on experimental and semi-theoretical models such as those developed by Teng and Lam (2002) and Chaallal et al. (2003), it can be deduced that the behavior of such columns depends primarily on the following key parameters: (1) the geometric shape of the column, which influences the uniformity of confinement, as highlighted by the studies of Hassan and Chaallal (2007) and Liu et al. (2023); (2) the number of FRP layers, their stiffness, and their tensile strength, which govern the confinement level and ductility of the column, as noted in the works of Benzeguir et al. (2024) and Gahmousse et al. (2021); and (3) the elastoplastic behavior of concrete and its compressive strength.

Teng and Lam (2002) and Zeng et al. (2021) demonstrated that ovalization provides an effective solution for strengthening confined columns subjected to various types of loading. This system of FRP-confined elliptical columns was meticulously formulated using the Galerkin Finite Element Method for an accurate representation of their behavior under axial compression. The adopted formulation assumes small deformations and rotations, with nonlinearity arising solely from the concrete material. The plastic behavior of concrete was modeled using the Drucker–Prager yield criterion.

The results obtained from the numerical simulations validate the experimental findings reported in the literature and lead to the development of an accurate analytical model that faithfully represents the influence of these parameters through a radial strut-and-tie model. The study reveals that the variation in the curvature of the concrete–FRP interface, the compressive strength of concrete, and the stiffness provided by confinement – governed by the intrinsic properties of the FRP and the number of layers – are integral components of the equations predicting the confinement stress and the load-bearing capacity of the structure, with a relative deviation of less than 10% to experimental results. Furthermore, potential improvements, particularly concerning the existing design code models, have also been proposed.

Keywords : column, concrete, ellipse, FRP, simulation

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES CONTRÔLANT LE COMPORTEMENT DES COLONNES COURTES EN BÉTON CONFINÉES PAR UN CHEMISAGE EN PRF	
1.1 Cadre méthodologique de l'étude	5
1.2 Comportement des colonnes courtes en béton confinées en PRF	6
1.3 Paramètres de comportement des colonnes courtes confinées en PRF	8
1.3.1 Modèles de confinement en PRF pour les colonnes rectangulaires	8
1.3.2 Influence de la forme de la section transversale	9
1.3.3 Effet d'échelle de la colonne sur son confinement.....	11
1.3.4 L'influence de la résistance du béton relativement au ratio volumétrique ...	12
1.3.5 L'influence des propriétés du PRF de confinement	13
1.3.6 Le comportement sismique des colonnes confinés en PRF	14
1.4 Les colonnes elliptiques courtes en béton confinées en PRF	16
1.4.1 Les avantages d'une section transversale elliptique	16
1.4.2 Le comportement des colonnes elliptiques confinées en acier	16
1.4.3 Le comportement des colonnes elliptiques confinées en PRF	17
1.4.4 Modèle de Teng et Lam (2002) pour les sections elliptiques	19
1.4.5 Le comportement des colonnes rectangulaires ovalisées	20
1.5 Conclusions et perspectives	21
CHAPITRE 2 MODÉLISATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS DES COLONNES EN BÉTON CONFINÉES EN PRF	
2.1 Présentation générale.....	25
2.2 Loi de comportement du béton en compression	26
2.3 Loi de comportement du chemisage en PRF	29
2.4 Analyse linéaire élastique d'une colonne courte en béton	31
2.4.1 Discrétisation par éléments finis	31
2.4.2 Formulation variationnelle, forme faible du problème physique.....	36
2.4.3 Prise en compte du confinement de la colonne par un chemisage en PRF	41
2.5 Analyse non-linéaire d'une colonne courte en béton.....	51
2.5.1 Considérations générales	51
2.5.2 Principe des travaux virtuels	53
2.5.3 Formulation Lagrangienne Totale (FLT).....	55
2.5.4 Approximation par éléments finis dans la FLT.....	57
2.5.5 Formulation avec non-linéarité uniquement matérielle (NLM).....	61
2.5.6 Méthode de Newton-Raphson.....	62
2.5.7 Prise en compte du chemisage en PRF	63

2.6	Critère de plasticité du béton.....	64
2.6.1	Modèle de Drucker-Prager (DP).....	64
2.6.2	Évolution de la contrainte plastique effective dans le béton.....	66
2.6.3	Règle de fluage du béton.....	69
2.6.4	Algorithme de retour radial	72
2.6.5	Approximation des courbes de contrainte-déformation plastique.....	75
2.7	Méthode Riks-Crisfield de contrôle de longueur d'arc	77

CHAPITRE 3 ÉTUDE PARMÉTRIQUE DES COLONNES ELLIPTIQUES

	EN BÉTON CONFINÉES PAR UN CHEMISAGE EN PRF	81
3.1	Propriétés matérielles et géométriques contrôlant la réponse des colonnes elliptiques confinées	81
3.2	Programme expérimental numérique et validation du logiciel de la MEF	83
3.2.1	Modèle discrétisé de la colonne elliptique	83
3.2.2	Fonctions de formes et méthode d'intégration numérique.....	86
3.2.3	Programme expérimental numérique.....	90
3.2.4	Validation du logiciel de calcul par la MEF avec les échantillons témoins	92
3.2.5	Cas des colonnes confinées par un chemisage en PRF en considérant les phases de durcissement et d'adoucissement du béton	98
3.2.6	Courbes de contrainte-déformation du béton pour les colonnes confinées.....	101
3.3	Critère de Drucker-Prager modifié pour les colonnes elliptiques en béton confinées par un chemisage en PRF.....	103
3.3.1	Représentation du béton et de son confinement	103
3.3.2	Considérations relatives à la formulation du critère de DP modifié pour les colonnes elliptiques confinées.....	104
3.4	Analyse des résultats des simulations numériques par la MEF sur les colonnes elliptiques confinées en PRF	107
3.4.1	Distribution des contraintes sur la section transversale elliptique.....	107
3.4.2	Réponse en contraintes-déformations des colonnes elliptiques étudiées....	108
3.5	Étude analytique des colonnes elliptiques et circulaires confinées en PRF	115
3.5.1	Contrainte de confinement f_{IF}	115
3.5.2	Résistance à la compression f'_{cc}	118
3.5.3	Comparaison avec les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024)	120
3.5.4	Comparaison avec les exigences des codes canadiens CSA-S806-12 (2021) et CSA-S6-14 (2014)	122

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	125
--------------------------------------	-----

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	131
-----------------------------------	-----

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 2.1 Approximation linéaire par morceaux de la courbe-contrainte déformation du béton non confiné sous une compression axial concentrique	76
Tableau 3.1 Coordonnées de référence des éléments surfaciques de contour pour les conditions aux limites de type Neumann des charges appliquées, et de type Cauchy du PRF de confinement	85
Tableau 3.2 Coordonnées de référence des éléments volumiques de béton	86
Tableau 3.3 Base polynômiale des éléments finis employés dans le cadre de cette étude	87
Tableau 3.4 Programme expérimental numérique	89
Tableau 3.5 Propriétés des fibres de la matrice et du PRF de confinement	90
Tableau 3.6 Composantes de la matrice de rigidité locale du PRF correspondant à la sa loi de comportement linéaire en traction	90
Tableau 3.7 Convergence du logiciel et du modèle de DP quant à la contrainte et la déformation axiales au pic, pour un échantillon témoin B30-1,3-0C avec un maillage EColP8	92
Tableau 3.8 Approximation linéaire par morceaux de la courbe contrainte-déformation du béton non confiné pour une modélisation de colonnes avec un confinement en PRF	102
Tableau 3.9 Évaluation du modèle analytique par rapport aux résultats de Benzeguir et al. (2024) quant à la résistance à la compression des colonnes elliptiques confinées	120
Tableau 3.10 Comparaison du modèle de conception fournit par le code avec les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024) et ceux issus du modèle analytique	122

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Diagramme contrainte-déformation typique pour les colonnes courtes en béton confinées à l'aide d'un chemisage PRF soumises à une charge de compression axiale centrée 6
Figure 1.2	Zone de confinement effectif par PRF de la section transversale d'une colonne rectangulaire en béton 8
Figure 2.1	Courbes de contrainte-déformation typiques de béton ordinaires soumis à une compression axiale concentrique 26
Figure 2.2	Courbes contrainte-déformation typiques des fibres, de la matrice en époxy et du tissu en PRF soumis à une traction axiale longitudinale aux fibres 28
Figure 2.3	Mécanisme de confinement d'une colonne circulaire 41
Figure 2.4	La réaction $\{f_{s,c}\}$ au confinement, reprise par les contraintes internes du PRF 46
Figure 2.5	Courbes contraintes-déformations du modèle quadratique de la section 2.2 pour des bétons comprimés axialement – (a) contrainte axiale en fonction de la déformation verticale (b) contrainte plastique effective par rapport à la déformation plastique équivalente 66
Figure 2.6	Comparaison des courbes $\sigma_y - \varepsilon_{p,eq}$ du tableau 2.1 avec celles de l'équation 2.229 75
Figure 3.1	Coupe transversale au niveau des bases isométriques des éléments finis prismatique de béton pour un maillage typique EColP8 83
Figure 3.2	Coupe transversale au niveau des bases isométriques des éléments finis prismatique de béton pour un maillage typique EColP12 84
Figure 3.3	Courbe de la compression axiale $f_{s,z}$ d'une colonne B20-1,5-0C, de type EColP8 avec une densité plane de huit, au nœud 2343 à mi-hauteur à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et latérales 94

II

Figure 3.4	Courbe de chargement en compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons témoins B30 avec un maillage EColP8 au nœud à mi-hauteur et à l'extrémité positive du petit diamètre, en fonction de déformation latérale suivant x , avec une interpolation linéaire sur φ 95
Figure 3.5	Courbe de chargement en compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons témoins B30 avec un maillage EColP8 au nœud à mi-hauteur et à l'extrémité positive du petit diamètre, en fonction de déformation latérale suivant x , avec une interpolation linéaire sur φ 96
Figure 3.6	Courbe de contrainte-déformation de l'échantillon B40-1,3-3C au nœud à mi-hauteur et à l'extrémité positive du petit diamètre, avec interpolation linéaire sur φ 99
Figure 3.7	Approximations linéaires par morceaux du modèle quadratique de la section 2.2 de compression axiale du béton pour la modélisation numérique des colonnes confinées – (a) contrainte-déformation axiales (b) contrainte-déformation plastique équivalente 101
Figure 3.8	Distribution des contraintes σ_{xx} à mi-hauteur de l'échantillon B40-1.4-3C pour un chargement axial de compression de 37 MPa 106
Figure 3.9	Distribution des contraintes σ_{yy} à mi-hauteur de l'échantillon B40-1.4-3C pour un chargement axial de compression de 37 MPa 107
Figure 3.10	Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons témoins avec un béton 30MPa de type EColP8 avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à mi-hauteur à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles 108
Figure 3.11	Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons de type EColP8 avec un béton de 30MPa confiné avec un pli en PRF avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles 109
Figure 3.12	Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons de type EColP8 avec un béton de 30MPa confiné avec deux plis en PRF avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles 110

- Figure 3.13 Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons de type EColP8 avec un béton de 30MPa confiné avec trois plis en PRF avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles 111
- Figure 3.14 Équilibre des forces sur un élément infinitésimale de tissu en PRF d'épaisseur t_F aux l'extrémités du petit diamètre de la section elliptique .. 114

LISTE DES ABREVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ACI	American Concrete Institute
CSA	Canadian Standard Association
FIB	Fédération Internationale du Béton
FLA	Formulation Lagrangienne Actualisée
FLT	Formulation Lagrangienne Totale
ISIS	Réseau de recherche canadien en « Intelligent Sensing for Innovative Structures »
MEF	Méthode des Éléments Finis
NLM	Non-linéarité Matérielle
PRF	Polymères Renforcées de Fibres
PRFC	Polymères Renforcées de Fibres de Carbone

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE (SYSTÈME INTERNATIONAL)

UNITÉS GÉOMÉTRIQUES

Longueur

<i>m</i>	Mètre
<i>dm</i>	Décimètre
<i>cm</i>	Centimètre
<i>mm</i>	Millimètre

Aire

m^2	Mètre carré
mm^2	Millimètre carré

Volume

m^3	Mètre cube
dm^3	Décimètre cube
cm^3	Centimètre cube
mm^3	Millimètre cube
<i>L</i>	Litre (= dm^3)
<i>mL</i>	Millilitre

UNITÉS DE MASSE

Masse

<i>kg</i>	Kilogramme
<i>g</i>	Gramme

Masse volumique

kg/m^3	Kilogramme par mètre cube
g/cm^3	Gramme par centimètre cube

UNITÉS DE FORCE

Force

<i>N</i>	Newton (= $kg \cdot m/s^2$)
<i>kN</i>	Kilonewton
<i>MN</i>	Méganewton

Force linéaire

kN/m	Kilonewton par mètre
N/mm	Newton par millimètre
<i>n</i>	Newton par mètre

Pression

N/m^2	Newton par mètre carré
N/mm^2	Newton par millimètre carré
kN/m^2	Kilonewton par mètre carré
MN/m^2	Méganewton par mètre carré
<i>Pa</i>	Pascal (= N/m^2)
<i>kPa</i>	Kilopascal
<i>MPa</i>	Mégapascal (= N/mm^2)
<i>GPa</i>	Gigapascal

Force Volumique

N/m^3	Newton par mètre carré
kN/m^3	Kilonewton par mètre carré
MN/m^3	Méganewton par mètre carré

SYMBOLES
Variables

A	Aire totale du contour
A^e	Aire de l'élément fini surfacique de contour
B	Matrice assemblée des dérivées globales des fonctions de formes de l'élément
B_L	Matrice assemblée des dérivées globales des fonctions de formes de l'élément correspondant à la linéarité géométrique
B_{L0}	Partie de la matrice assemblée des dérivées globales des fonctions de formes correspondant à la linéarité géométrique ne contenant pas l'effet de déplacement initial
B_{L1}	Partie de la matrice assemblée des dérivées globales des fonctions de formes correspondant à la linéarité géométrique qui contient l'effet de déplacement initial
B_{NL}	Matrice assemblée des dérivées globales des fonctions de formes de l'élément correspondant à la non-linéarité géométrique
B_{xyz}	Dérivées globales des fonctions de formes de l'approximation des déplacements
$B_{\xi\eta\zeta}$	Dérivées locales des fonctions de formes de l'approximation des déplacements
$\bar{B}_{\xi\eta}$	Dérivées locales des fonctions de formes de la transformation géométrique au contour
$\bar{B}_{\xi\eta\zeta}$	Dérivées locales des fonctions de formes de la transformation géométrique
C	Matrice de rigidité tangente locale du béton, de la loi de comportement générale
D	Matrice de rigidité tangente locale du béton, de la loi de comportement élastique
D_F	Matrice de rigidité tangente locale du PRF, de la loi de comportement élastique du PRF
E_F	Module d'élasticité du PRF suivant la direction longitudinale aux fibres
E_c	Module d'Young, d'élasticité, du béton
E_f	Module d'élasticité des fibres
E_l	Module d'élasticité du PRF suivant la direction longitudinale aux fibres
E_m	Module d'élasticité de la matrice d'époxy du PRF
E_t	Module d'élasticité du PRF suivant la direction transversale aux fibres
F	Vecteur des forces nodales appliquées sur la structure
F_{DP}	Le gradient du critère de plasticité de Drucker-Prager
F_S	Vecteur des forces nodales appliquées sur le contour
F_v	Vecteur des forces nodales appliquées sur volume
G_f	Module de cisaillement des fibres
G_{lt}	Module de cisaillement du PRF
G_m	Module de cisaillement de la matrice d'époxy du PRF
G_p	Direction du flux plastique
H	Module plastique du béton
I	Première forme fondamentale pour le contour surfacique
I_1	Premier invariant du tenseur de contrainte, correspondant à la pression hydrostatique
$I_{1,t}$	Premier invariant du tenseur de contrainte d'essai
I_d	Matrice identité
II	Deuxième forme fondamentale pour le contour surfacique
J	Matrice jacobienne de la transformation géométrique
J_2	Deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes
$J_{2,t}$	Deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes
K	Matrice de rigidité tangente global
K_L	Matrice de rigidité tangente global correspondant à la linéarité géométrique
K_{NL}	Matrice de rigidité tangente global correspondant à la non-linéarité géométrique
N	Vecteur ou matrice des fonctions de forme de l'approximation par éléments finis
$\bar{N}$	Vecteur ou matrice des fonctions de forme de la transformation géométrique

N_i	Fonction de forme valant 1 au nœud i et s'annulant aux autres nœuds de l'élément fini
$\bar{N}_j$	Fonction de forme de la transformation, l'approximation, géométrique
$\bar{Q}_{\xi\eta}$	Matrice des dérivées secondes des fonctions de la transformation géométriques
R_S	Vecteur des forces nodales appliquées sur le contour
R_V	Vecteur des forces nodales appliquées sur le volume
R_{eq}	Rayon de la colonne circulaire équivalente confinée
R_{lt}	Matrice de passage du repère de Darboux du contour au repère global
Res	Résidu de la forme forte du problème physique
S	Second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff
S_{test}	Tenseur de contraintes élastiques d'essai
X	Tenseur de gradient
X_ξ	Vecteur uni-ligne de la matrice Jacobienne des dérivés sur la coordonnée local
U_{L0}	Matrice d'assemblage pour B_{L0}
U_{L1}	Matrice d'assemblage pour B_{L1}
V	Volume total de la colonne
V^e	Volume de l'élément fini de la colonne
W	Forme variationnelle, forme intégrale, forme faible du problème physique
W_C	Travail de contour dû à la condition aux limites de type Cauchy
W_{ext}	Travail des forces extérieurs
$W_{ext,s}$	Travail extérieur des forces appliquées sur le contour de la colonne
$W_{ext,v}$	Travail extérieur des forces appliquées sur le volume de la colonne
W_{int}	Travail des forces internes dans la colonne
a	Petit diamètre de la section transversale d'une colonne elliptique
b	Longueur de la section transversale d'une colonne rectangulaire
b	Grand diamètre de la section transversale d'une colonne elliptique
c	Coefficient de cohésion du béton
$d\Gamma$	Angle infinitésimal
${}_0e_{ij}$	Composante linéaire de l'incrément en déformation au vu de la configuration initiale
f	Fonction de débalancement correspondant au résidu du problème
f_{DP}	Fonction de plasticité de Drucker-Prager
$f_{DP,t}$	Fonction de plasticité de Drucker-Prager évaluée à la contrainte d'essai
f_{F0}	Contraintes initiales de confinement
f_S	Résultante des contraintes appliquées autour du point étudié du contour
$f_{S,i}$	Composante suivant i de la résultante des contraintes appliquées sur le contour
f_V	Résultante des densités volumiques d'efforts réparties autour du point étudié
$f_{V,i}$	Composante suivant i de la résultante des densités volumiques d'efforts réparties
f_c	Contrainte de compression dans le béton
f'_c	Résistance du béton non confiné en compression
f'_{cc}	Résistance à la compression de la colonne elliptique en béton confinée en PRF
$f'_{cc,\text{eq}}$	Résistance à la compression de la colonne circulaire équivalente en béton confinée
f_f	Résistance à la traction du PRF
f_l	Contrainte latérale de confinement
f_{lF}	Contrainte de confinement de la colonne elliptique en béton
$f_{lF,\text{eq}}$	Contrainte de confinement de la colonne circulaire équivalente
f'_l	Contrainte latérale effective de confinement
$f_{S,C}$	Contrainte appliquée par le béton sur le PRF
f_{vx}	Force par unité de masse sur le matériau suivant la direction x

g_p	Fonction de fluage non-associée avec une dilatance contrôlée
$h_{b,eq}$	Hauteur de la bielle radiale dans la colonne circulaire équivalente
h_c	Hauteur de la colonne
j_{lt}	Matrice de passage du repère local aux directions tangentes du repère de Darboux
k	Contrainte plastique équivalente dans la fonction de plasticité de Drucker-Prager
k_s	Facteur de forme par rapport à la distribution des contraintes de confinement
l	Direction longitudinale aux fibres du PRF dans le repère global
$l_{\xi\eta}$	Direction longitudinale aux fibres du PRF dans le repère local
n	Vecteur normal au contour du béton, ou au chemisage en PRF
n_x	Composante du vecteur normal au contour du béton suivant la direction x
${}_0n_{ij}$	Composante non-linéaire du tenseur de l'incrément en déformation par rapport à la configuration initiale
r	Rayon d'arrondi de la section transversale d'une colonne rectangulaire
s	Tenseur déviatorique des contraintes
t	Pseudo variable temps
t	Direction transversale aux fibres et tangente au tissu du PRF dans le repère global
$t_{\xi\eta}$	Direction transversale aux fibres et tangente au tissu du PRF dans le repère local
u	Solution recherchée du problème
$\hat{u}$	Vecteur stockant les déplacements nodaux suivant toutes les directions
u_i	Incrément de déplacement suivant la direction i
${}_0u_{i,j}$	Dérivée de l'incrément de déplacement suivant la direction i par rapport à la coordonnée j de la configuration initiale
tu_i	Déplacement à l'instant t suivant la direction i
${}_0{}^tu_{i,j}$	Dérivée du déplacement à l'instant t suivant la direction i par rapport à la coordonnée j de la configuration initiale
$\hat{u}_i$	Vecteur des déplacement nodales suivant la direction i
u_j^i	Déplacement suivant la direction j du nœud i de l'élément fini
v_f	Teneurs en volume des fibres du PRF
v_m	Teneurs en volume de la matrice d'époxy du PRF
x	Première direction du repère global
$\hat{x}$	Matrice des coordonnées nodales de l'élément pour l'approximation des déplacements
$\hat{\hat{x}}$	Matrice des coordonnées nodales de l'élément pour la transformation géométrique
tx_i	Coordonnée à l'instant t suivant la direction i
${}_0{}^tx_{i,j}$	Dérivée de la coordonnée suivant i de la configuration à l'instant t par rapport la coordonnée suivant j de la configuration initiale
y	Première direction du repère global
z	Troisième direction du repère global
α	Multiplicateur de pression dans la fonction de plasticité de Drucker-Prager
β	Angle de frottement effectif régissant l'écoulement plastique ou facteur d'échelle dans la méthode Riks-Crisfield
δ	Opérateur de fonction de test, opérateur de déplacement, ou de déformation, virtuel
ϵ	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
ϵ_{CG}	Tenseur des déformations de Cauchy-Green
ϵ_{cu}	Déformation ultime en compression du béton
${}_0\epsilon_{ij}$	Composante du l'incrément en déformation par rapport à la configuration initiale
ϵ_p	Tenseur des déformations plastiques
ϵ	Tenseur des déformations du béton
ϵ_F	Tenseur des déformations du PRF

ε'_c	Déformation du béton à sa contrainte maximale
ε_{cl}	Déformation correspondant à l'intersection de la courbe contrainte-déformation du béton sous compression axial avec la pente correspondant à son module d'élasticité
ε_{cf}	Déformation du béton sous une charge de compression
ε_{ii}	Composante normale du tenseur des déformations du béton
$\varepsilon_{p,eq}$	Déformation plastique équivalente du béton
θ_{cc}	Angle d'inclinaison du cône de rupture de la colonne elliptique confinée
$\theta_{cc,eq}$	Angle d'inclinaison du cône de rupture de la colonne circulaire équivalente confinée
ζ	Coordonnée de référence des fonctions de forme de l'élément fini
η	Coordonnée de référence des fonctions de forme de l'élément fini
κ	Courbure ou vecteur des courbures du contour au point étudié
κ_{eq}	Courbure de la section circulaire équivalente
κ_l	Courbure normale du PRF par rapport à la direction longitudinal aux fibres
κ_t	Courbure normale du PRF par rapport à la direction transversale aux fibres
γ_{ij}	Composantes de cisaillement du tenseur des déformations du béton
γ_{lt}	Composante de cisaillement du tenseur des déformations du PRF
λ	Facteur multiplicateur de charge dans la méthode Riks-Crisfield
λ_c	Densité volumique, ou masse volumique, du béton
ν	Coefficient de Poisson du béton
ν_f	Coefficient de Poisson des fibres
ν_{lt}	Coefficient de Poisson de contraction du PRF dans le sens transversal due à une traction dans le sens longitudinal
ν_m	Coefficient de Poisson de la matrice
ν_{tl}	Coefficient de Poisson de contraction du PRF dans le sens longitudinal due à une traction dans le sens transversal
φ	Angle de frottement interne
ξ	Coordonnées de référence des fonctions de forme de l'élément fini
ρ	Masse volumique du matériau ou courbure relative de la section elliptique au point étudié par rapport à la section circulaire équivalente
${}^t\rho$	Masse volumique du matériau à l'instant t
ρ_f	Ratio volumétrique de PRF par rapport au béton
σ	Tenseur de contrainte de Cauchy du béton
σ_F	Tenseur des contraintes de Cauchy du PRF
σ_c	Contrainte de compression dans le béton
σ_i	Composantes normales du tenseur de contraintes de Cauchy du béton
σ_{ij}	Composantes du tenseur de contraintes de Cauchy du béton
σ_l	Contraintes dans le tissu de PRF dans la direction longitudinale aux fibres
σ_t	Contraintes dans le tissu de PRF dans la direction transversale aux fibres
σ_y	Contrainte plastique du béton soumis à une compression axiale
$\Delta f'_{cc}$	Différence entre la résistance ultime à la compression de la colonne elliptique confinée f'_{cc} avec celle du béton non confiné f'_c
$\Delta f'_{cc,eq}$	Différence entre la résistance ultime à la compression de la colonne circulaire équivalente $f'_{cc,eq}$ avec celle du béton non confiné f'_c
Δl	Longueur infinitésimale suivant la direction longitudinale aux fibres l ou longueur d'arc dans la méthode Riks-Crisfield
Δt	Incrément de l'itération précédente à l'itération en cours sur la pseudo variable temps ou longueur infinitésimale suivant la direction tangentielle t aux fibres
$\Delta \lambda$	Multiplicateur plastique mesurant la quantité de déformation plastique accumulée

ϕ_F Facteur de sécurité sur le PRF de confinement

Opérateurs spéciaux

Δ Opérateur correspond à l'incrément de l'itération précédente à l'itération en cours

$\nabla_{\xi\eta}$ Opérateur de gradient dans le repère local

${}^t v$ Évaluation de la variable v à la configuration à l'instant t

$\langle \ \rangle$ Crochets pour un vecteur uni-ligne

$\{ \ \}$ Crochets pour un vecteur uni-colonne

$[\]$ Crochets pour une matrice

$[\]^T$ Crochets pour la transposée d'une matrice

${}^t [\]$ Matrice évaluée à l'instant t

${}^t_0 [\]$ Matrice évaluée à l'instant t par rapport aux à la configuration initiale

${}^{t+\Delta t} [\]^{(i)}$ Matrice évaluée à l'itération i ; la zéroième itération correspond à l'instant t

$\det(\)$ Fonction fournissant le déterminant d'une matrice

$\text{tr}(\)$ Fonction fournissant la trace d'une matrice

INTRODUCTION

Le modèle de renforcement transversal par confinement des colonnes en béton a été proposé au début du vingtième siècle et a démontré des gains significatifs en termes de capacité portante et de ductilité. Traditionnellement, l'acier – en raison de sa haute résistance en traction, de sa grande ductilité et de sa capacité significative de déformation avant rupture – est couramment employé sous forme d'armatures transversales, telles que des étriers ou des spirales. Il est ainsi déployé en conjonction avec le béton, un matériau fragile et peu résistant en traction, afin d'améliorer ses performances mécaniques.

Ce confinement transversal améliore le comportement des colonnes, principalement face aux sollicitations axiales de compression, et aux charges latérales sismiques, pour les structures neuves, comme pour les structures existantes. Cette technique est aujourd'hui bien établie, et intègre les normes de conception modernes. Néanmoins, la mise en œuvre de l'acier sur le chantier, pour le renforcement de colonnes existantes, peut s'avérer laborieuse et coûteuse.

Les développements technologiques des dernières décennies ont conduit à l'émergence de nouveaux matériaux avec des propriétés et des résistances particulièrement intéressantes. Les Polymères Renforcés de Fibres (PRF), sont des matériaux composites constitués d'une matrice polymère, appelée résine, renforcée à l'aide de fibres à haut module d'élasticité. En exploitant une résistance ultime très élevée de ces fibres, les PRF développent un comportement à la traction linéaire jusqu'à la rupture. La technique de confinement externe, à l'aide d'un chemisage en PRF, consiste à envelopper la colonne en béton avec des tissus dont les fibres sont généralement orientées transversalement. L'enveloppe en PRF peut couvrir toute la membrure ou une zone spécifique, selon l'objectif du confinement.

Autant d'un point de vue empirique que conceptuel, le confinement du béton par PRF s'est rapidement imposé comme une solution innovante et performante pour le renforcement des colonnes. De nombreuses études expérimentales et analytiques ont démontré son efficacité dans l'augmentation de la capacité portante des colonnes en béton, en raison de l'amélioration

significative de la résistance à la compression et de la ductilité qu'il procure. Par ailleurs, plusieurs recherches ont aussi mis en évidence l'impact positif de cette technique sur le comportement des structures soumises à des charges dynamiques, en retardant l'apparition des fissures et en réduisant la dégradation progressive du béton.

Cette technique de renforcement présente aussi d'autres avantages significatifs. Elle simplifie considérablement la mise en œuvre, entraîne une réduction importante des coûts correspondants, et limite l'interruption des autres activités sur le chantier. Le système composite a aussi une performance durable, contrairement à l'acier qui est susceptible à la corrosion (Teng & Lam, 2002, p. 1535) ; en particulier dans des environnements où l'usage de sels de déglacage est fréquent, comme c'est le cas au Canada.

Même si cette technique de confinement de béton par PRF est aujourd'hui reconnue par les codes de conception les plus réputés, et répandue dans diverses régions du globe, des projets de recherches visant à établir et à perfectionner les modèles conceptuels associés à cette technique sont encore en cours et demeurent indispensables.

La forme géométrique de la section transversale confinée des colonnes, généralement rectangulaires, ne permet pas une distribution homogène des contraintes. De plus, la présence d'armatures transversales entrave l'arrondissement des angles, limitant ainsi l'efficacité du confinement. Par ailleurs, la transformation de la section en une colonne circulaire constitue également une contrainte majeure ; en raison du poids élevé du béton supplémentaire, de sa fragilité, ainsi que de l'augmentation significative de la demande en tissu de PRF due à une plus grande section transversale. La performance est donc compromise, ainsi que la durabilité de la structure et le coût du renforcement.

L'adoption d'une section transversale elliptique ou ovalisée contourne efficacement les limitations inhérentes aux sections rectangulaires et circulaires, en optimisant la distribution des contraintes et l'efficacité du confinement par PRF. Toutefois, les modèles théoriques et les codes de conception actuels, en particulier pour les sections elliptiques et ovalisées, présentent

des limites notables ainsi que des divergences tant entre eux qu'avec les résultats expérimentaux. Une identification précise et une compréhension approfondie des paramètres influençant le comportement de ces structures composites sont essentielles. Cela requiert une analyse rigoureuse et méthodique, permettant de mieux cerner les mécanismes de confinement et d'améliorer la fiabilité des modèles prédictifs ainsi que leur intégration dans les normes de conception.

À travers une revue de la littérature approfondie, cette étude vise à identifier minutieusement les paramètres influençant le comportement mécanique des colonnes courtes elliptiques en béton confinées par un chemisage en PRF. Cette analyse permettra d'examiner les divers facteurs, ainsi que l'effet de la géométrie elliptique sur la distribution des contraintes et des déformations. Par ailleurs, une approche numérique avancée sera mise en place en s'appuyant sur la méthode des éléments finis, afin d'élaborer un modèle de calcul précis et fiable, capable de prédire avec justesse la réponse structurale des colonnes confinées sous des sollicitations axiales de compression. La calibration et la validation de ce modèle seront effectuées à partir de données expérimentales issues de la littérature. Enfin, une étude comparative approfondie sera menée, mettant en parallèle les résultats obtenus avec les modèles analytiques existants.

Cette analyse visera à évaluer la pertinence des formulations empiriques et modèles actuels, et à identifier les éventuelles lacunes nécessitant des ajustements, afin d'améliorer la prise en compte de la forme géométrique sur le confinement par PRF dans les normes de conception. L'ensemble de ces travaux contribuera ainsi à une meilleure compréhension du comportement des colonnes confinées, et ouvrira la voie à l'amélioration des modèles établis, des normes de dimensionnement et des détails relatifs à la mise en œuvre de ce type de renforcement.

CHAPITRE 1

IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES CONTRÔLANT LE COMPORTEMENT DES COLONNES COURTES EN BÉTON CONFINÉES PAR UN CHEMISAGE EN PRF

1.1 Cadre méthodologique de l'étude

La méthode de confinement des colonnes en béton est aujourd'hui bien établie et a fait l'objet de nombreuses études de recherches. Parmi les travaux fondateurs, ceux de Richart, Brandtæg et Brown (1928), et de Priestley et Park M. J. N. Priestley et Park (1987), et leurs résultats ont contribué à l'élaboration des normes de conception modernes et à un meilleur comportement des colonnes conçues, en particulier pour la déformation post-élastique et la ductilité face aux charges sismiques (Chaallal, 2018, p. 241).

Notamment, Mander, Priestley et Park (1988) ont proposé un modèle du comportement contrainte-déformation du béton confiné qui prédit avec précision la réponse du béton soumis à des charges de compression, en considérant divers types de renforcements transversaux, tels que les spirales ou les étriers rectangulaires. De plus, ce modèle est largement utilisé pour évaluer la ductilité et la capacité portante des structures en béton armé, notamment dans les zones sismiques.

Contrairement à l'acier, qui applique une pression de confinement constante après plastification, le PRF se déforme élastiquement jusqu'à des contraintes très élevées et par conséquent, exerce une action de confinement grandissante sur le béton jusqu'à ce que les fibres se rompent (FIB, 2019, p. 95). Aussi, les composites en PRF présentent d'autres avantages par rapport à l'acier, notamment leur ratio de résistance par poids élevé, ainsi que leur excellente résistance à la corrosion (Teng & Lam, 2002, p. 1535).

L'objectif de cette revue de littérature est d'analyser de manière approfondie l'état actuel des connaissances relatives au confinement des colonnes courtes en béton par un chemisage en

PRF, en mettant la lumière sur les modèles analytiques pertinents. Cette étude vise non seulement à recenser les approches théoriques et empiriques développées, afin d'évaluer l'efficacité du confinement en PRF, mais également, à identifier et à caractériser les paramètres influençant le comportement mécanique de la structure composite.

Une attention particulière sera aussi portée aux divergences observées entre les différentes formulations existantes et aux écarts constatés entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux. L'analyse des modèles servira aussi à révéler les aspects critiques sur lesquels il conviendra d'insister lors de la modélisation par éléments finis, afin d'améliorer la représentation et la précision de la simulation numérique.

1.2 Comportement des colonnes courtes en béton confinées en PRF

Les modèles de confinement en PRF sont, en règle générale, basés sur les modèles classiques de confinement par armature transversale en acier tels que les modèles de Richart et al. (1928) et de Mander et al. (1988). Le modèle de Lam et Teng (2002) est un modèle orienté conception pour les colonnes circulaires et rectangulaire avec un confinement à l'aide d'un chemisage en PRF suffisant. Ce modèle est une extension du modèle classique de confinement de Richart et al. (1928) (FIB, 2019).

Les essais aux laboratoires ont démontré que les colonnes en béton confinées par un chemisage en PRF soumis à un effort axial de compression centrée présentent une courbe contrainte-déformation typique bilinéaire et ascendante, lorsque le niveau de confinement pourvu est adéquat. Ce comportement est différent de celui relatif au confinement à l'aide de spires en acier où la courbe est non-linéaire et la résistance décroît après la plastification de l'acier transversal (Chaallal, 2018, pp. 244-245).

Initialement, le chemisage en PRF exerce une contrainte de confinement limitée. Avec l'augmentation de la charge de compression axiale appliquée, le taux d'expansion latérale de la colonne augmente, ce qui résulte en une réduction concomitante de la rigidité du béton. Lorsque le niveau de confinement pourvu est adéquat, dans cette phase de transition, le

confinement en PRF commence à s'activer avec l'apparition de microfissures dans le béton avec l'augmentation de la charge axiale.

Dès lors que le béton atteint des déformations, typiquement de 0,002, correspondantes à la résistance à la compression du béton, le matériau devient très fissuré et le confinement par chemisage en PRF s'active complètement. À ce stage, la courbe de contrainte déformation redevient approximativement linéaire avec une pente dépendant de la rigidité du PRF (FIB, 2019, p. 94). La figure 1.1 est une représentation typique du comportement, en contrainte-déformation axiale des colonnes confinées, lorsque soumises à un chargement de compression concentrique.

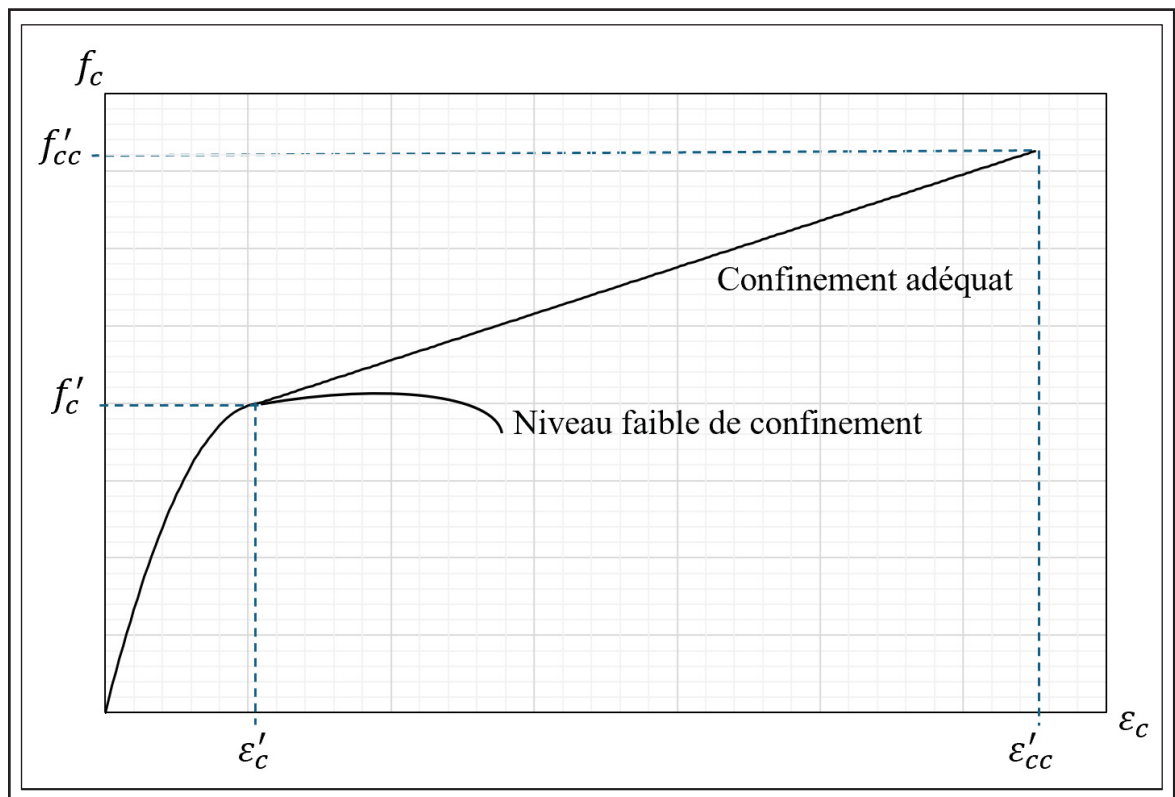


Figure 1.1 Diagramme contrainte-déformation typique pour les colonnes courtes en béton confinées à l'aide d'un chemisage PRF soumises à une charge de compression axiale centrée

1.3 Paramètres de comportement des colonnes courtes confinées en PRF

1.3.1 Modèles de confinement en PRF pour les colonnes rectangulaires

Pour les colonnes rectangulaires, Wang et Restrepo (2001) ont établi des expressions analytiques, basées sur le modèle de Mander et al. (1988), pour la résistance des colonnes en béton armé, soumises à des charges axiales de compression, confinées à l'aide d'armatures transversales internes en addition aux chemises composites en PRF. Deux équations pour calculer la résistance ultime du béton confiné ont été proposées par Shehata et al. (2002), une pour les colonnes carrées, et la deuxième pour les colonnes rectangulaires avec ratio de forme de deux. Campione et Miraglia (2003) ont construit un modèle de confinement pour les colonnes carrées, et Maalej et al. (2003) un modèle analytique pour prédire le comportement des colonnes confinées en PRF présentant un ratio de forme important. Un modèle de contrainte-déformation trilineaire a été proposé par Chaallal et al. (2003) basé sur l'expérimentation suivant les directions transversales et longitudinales.

Dans l'étude paramétrique de Hassan et Chaallal (2007), ces modèles ont été comparés, quant à l'estimation du gain en résistance par confinement à l'aide du chemisage en PRF, aux résultats expérimentaux issus d'essais aux laboratoires menées pour les colonnes rectangulaires, ainsi qu'aux codes de conception de l'Association Canadienne de Normalisation (CSA-S806-02), l'Institut Américain de Béton (ACI-440.2R), du réseau canadien des centres d'excellence en « Intelligent Sensing for Innovative Structures » (ISIS-M04), de la Fédération Internationale de Béton (FIB). Cette étude a démontré que le modèle le moins conservateur correspond à celui de Wang et Restrepo (2001), et le modèle le plus conservateur est celui de Chaallal et al. (2003). Les forces et faiblesses des modèles existants et des codes de conception pour le confinement en PRF des colonnes rectangulaires, ainsi que les paramètres ayant un impact sur leur réponse, ont été identifiés et analysés. Ces paramètres ainsi que leur influence sur les colonnes courtes confinées en PRF sont expliqués aux sections suivantes.

1.3.2 Influence de la forme de la section transversale

Les essais reportés dans la littérature ont révélé que les chemises en PRF sont moins efficaces pour les colonnes à section transversale rectangulaires que pour les colonnes circulaires. Comme le montre la figure 1.2 suivante, les colonnes rectangulaires subissent une grande pression de confinement sur leurs coins et une petite pression de confinement sur leur côté droit, et ce, contrairement aux colonnes à section transversale circulaire qui présentent un confinement uniforme sur toute la section (Chaallal, 2018, pp. 244-245).

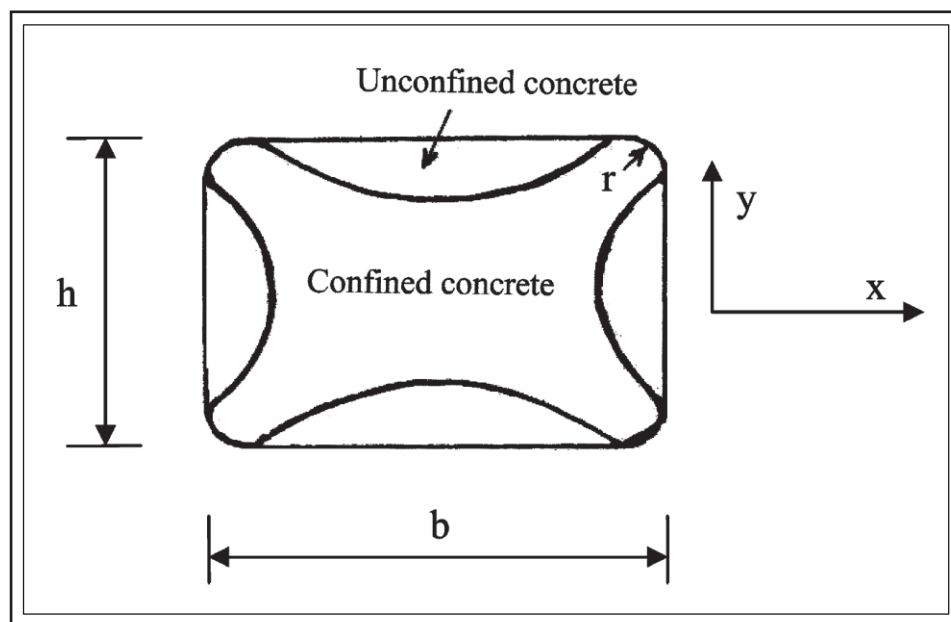


Figure 1.2 Zone de confinement effectif par PRF
de la section transversale d'une colonne rectangulaire en béton
Tirée de Hassan & Chaallal (2007, p. 694)

Le processus de confinement est significativement plus efficace avec les colonnes circulaires qu'avec les colonnes rectangulaires ou carrées, car, avec ces dernières, l'action de confinement est majoritairement concentrée aux coins alors que la demande en déformation locale des chemises en PRF augmente le risque de rupture locale prématurée aux coins (FIB, 2019). Un nombre plus grand de couches en PRF avec un haut module élastique doit être utilisé pour

obtenir une augmentation significative de la résistance pour les colonnes rectangulaires de taille réelle comparément aux colonnes circulaire (Hassan & Chaallal, 2007, p. 702).

Plus le ratio de forme de la section – le ratio de la plus grande dimension transversale b sur la plus petite dimension h – est important, plus le rapport de l'aire confinée effective sur l'aire la section transversale devient moindre, ce qui affecte négativement le gain en résistance dû au confinement. Afin d'assurer un confinement effectif, les codes de conception fixent un ratio de forme maximum. La norme CSA fixe ce ratio à 1,5, et le code d'ISIS se limite à des sections quasi-carrés avec un ratio de forme de 1.1. Le ratio de résistance, du béton confiné par rapport au béton non-confiné, change légèrement avec la variation du ratio de forme entre 1 et 1.5 ; autour de 5% selon les recommandations du FIB et de 8% pour le modèle de Wang (Hassan & Chaallal, 2007, p. 701).

L'arrondissement des coins des colonnes rectangulaires n'est pas toujours faisable en raison de l'existence d'armatures de renforcement longitudinales et transversales. En revanche, plus la section est arrondie plus le confinement est effectif. Ceci a pour effet de diminuer les concentrations de contraintes qui se localisent aux coins de la colonne en béton et de l'enveloppe en PRF. En pratique, le rayon des coins est généralement restreint par la présence d'armatures internes à des petites valeurs et l'effet de confinement est donc aussi limité (Teng & Lam, 2002, p. 1535).

La norme CSA impose alors un rayon de coin r supérieure ou égale à 20mm (CSA-S806-02, 2007, p. 47). Quant aux recommandations du code de l'ISIS, le rayon de coins doit être supérieure ou égale à la plus grande valeur entre $b/6$ et 35mm. En effet, Mukherjee et al. (2004) ont conclu à travers une investigation expérimentale et numérique que la concentration de contrainte est négligeable pour un rayon de coin supérieur à 15mm indépendamment des dimensions de la section transversale. De plus, Yang et al. (2004) ont montré que, pour des rayons de coins supérieurs à 25.4mm, la rupture du PRF se produit sur les côtés de la section, plutôt que sur les zones de coins pour des rayons inférieurs à 25,4mm. (Hassan & Chaallal, 2007, p. 701)

1.3.3 Effet d'échelle de la colonne sur son confinement

L'effet du ratio volumétrique du PRF de confinement par rapport au béton est aussi un paramètre important à considérer. En effet, les modèles de confinement sont généralement déterminés à partir de résultats issus de tests au laboratoire effectués sur des éprouvettes de petite taille, autour de 100 à 200mm de largeur de la section transversale. Le ratio volumétrique du PRF par rapport au béton augmente significativement avec la diminution de la taille des colonnes testées, ce qui mène à des gains importants en résistance par comparaison aux colonnes de taille réelle, et ce, avec l'application d'un faible nombre de couches de tissu en PRF pour le chemisage.

Les résultats issus d'essais aux laboratoires, quant au gain en résistance et en capacité portante de la colonne, ainsi que d'autres propriétés du béton confiné, tels que la ductilité, sont extrapolés par les différents modèles, pour prévoir le comportement de colonnes de taille réelle. Une attention particulière doit être exercée lors de l'interprétation de ces résultats, et des limites sont indirectement imposées dans les normes CSA et ISIS pour prévenir des éventuels écarts.

D'après Hassan et Chaallal (2007), les prédictions des codes de conceptions se sont révélées supérieures au modèle le plus conservateur, Chaallal et al. (2003), quant à la résistance des colonnes confinées de taille réelle. Cela est plus prononcée pour des bétons de faible résistance – inférieure ou égale à 20MPa – avec des ratios volumétriques élevés. À cet effet, Al-Sodani et al. (2018) ont mené des études expérimentales et numériques sur des colonnes courtes en béton armé à faible résistance, d'un mètre de hauteur. Les résultats de ces essais exposent une disparité entre le comportement réel de ces colonnes et les exigences sécuritaires des normes.

Ces études, détaillées à la section suivante, révèlent que les facteurs de réduction et d'extrapolation employés par les codes de conception doivent être exprimés en fonction du ratio volumétrique, et ce, en tenant en compte de son impact sur le comportement des colonnes confinées par rapport à la résistance du béton.

1.3.4 L'influence de la résistance du béton relativement au ratio volumétrique

Les modèles de confinement et les recommandations des codes de conception relient le gain en résistance du béton confiné au ratio volumétrique de la chemise en PRF par rapport au béton, et indirectement à la résistance du béton non confiné (Hassan & Chaallal, 2007, p. 699). En comparant les résultats des modèles et des codes de conception avec les valeurs expérimentales pour un béton d'une résistance de 25 MPa, Hassan et Chaallal (2007) ont montré que les codes de conception sont les plus conservateurs pour les petits échantillons de laboratoire. Néanmoins, les prédictions des codes quant à la résistance des échantillons de taille plus grande – ayant un rapport volumétrique de PRF par rapport au béton plus petit – sont supérieures à celle du modèle de Chaallal et al. (2003), spécialement pour les bétons avec une faible résistance à la compression, de l'ordre de 20MPa.

À travers une étude expérimentale et analytique sur les colonnes circulaires, Chaallal, Hassan et LeBlanc (2006) ont montré que la plupart des modèles surestiment la résistance des colonnes confinées en PRF pour le béton présentant une faible résistance à la compression, notamment entre 15 et 20MPa. Hassan et Chaallal (2007) ont donc suggéré qu'un travail de recherche soit mené spécifiquement sur les bétons à faible résistance confinés par PRF.

À cet effet, Al-Sodani et al. (2018) ont mené des études expérimentales et numériques sur des colonnes courtes en béton armé, renforcées par un confinement en tissus de Polymères renforcés de fibres de Carbone (PRFC), d'une taille d'un mètre de hauteur et de sections transversales uniformes rectangulaires, carrées et circulaires. Le béton des colonnes testées à une résistance moyenne à la compression de 10.3 MPa et les coins des sections rectangulaires et carrées ont été arrondis à 35mm de rayon. Une étude numérique par la méthode des éléments finis (MEF), avec le logiciel commercial ABAQUS, a été conduite pour les différentes géométries des colonnes testées expérimentalement.

Dans l'étude de Al-Sodani et al. (2018), l'effet du confinement à la fois du PRFC et des étriers a été pris en compte dans la MEF comme présenté dans le modèle de Mander et al. (1988). Les résultats de cette étude révèlent que les équations des codes de l'ACI (ACI-440.2R, 2002) et

de CSA (CSA-S806-02, 2007) surestiment les charges ultimes des colonnes non confinées en béton armé constituées de bétons à faible résistance. Ceci peut être attribué au fait que la relation du diagramme contrainte-déformation du béton à faible résistance est différente de celle du béton à résistance normale sur laquelle se base les équations des codes CSA.

Cependant, pour les spécimens confinés, on peut remarquer que la variation en pourcentage des résultats expérimentaux par rapport aux valeurs calculées des charges ultimes sont bien inférieurs à ceux des échantillons témoins. La variation entre les résultats calculés et expérimentaux des échantillons confinés pourrait être due au fait que ces équations ne tiennent pas compte de l'effet des étriers.

Les résultats issus de l'application de la MEF montrent une bonne convergence par rapport aux résultats expérimentaux, et la résistance ultime des colonnes circulaires et carrées a tendance à augmenter de manière significative avec l'augmentation du nombre de couches de CFRP. Cependant, une légère augmentation de la résistance ultime, pour une section rectangulaire, peut être observée avec l'augmentation du nombre de couches de CFRP par rapport aux colonnes circulaires. Ceci est dû à la concentration de contraintes aux bords des colonnes rectangulaires et à leur degré de confinement tel que décrit à la section 1.3.2.

L'étude montre aussi une bonne concordance des résultats jusqu'à la rupture entre la MEF et les travaux expérimentaux issus d'autres travaux de recherches avec une charge de compression excentrique. À l'issue de cette étude, on a recommandé que les facteurs de réduction soient exprimés en fonction de la résistance du béton dans les équations fournies par les codes de conception.

1.3.5 L'influence des propriétés du PRF de confinement

Généralement, les modèles de confinement et les codes de conception relient aussi la résistance du béton confiné au module d'élasticité du PRF. Plus ce module est important, plus élevée est l'augmentation de la résistance du béton confiné. Cette relation est assurée en limitant la déformation du PRF à 0,04 par le code CSA (CSA-S806-02, 2007), à 0,02 par le code d'ISIS

(ISIS-M04, 2001) et à une valeur moyenne expérimentale de 0,05 par le code FIB (FIB, 2019). Cette déformation du PRF fournit la contrainte latérale que peut exercer le confinement sur la colonne et celle-ci affecte la résistance ultime de conception du système composite sous un chargement de compression axiale.

À ce titre, pour une colonne carrée d'une dimension transversale de 0,5m et un rayon de coin de 83mm, Hassan et Chaallal (2007) ont montré que les prédictions des codes CSA et ISIS sont supérieures à celle du modèle Chaallal pour les PRF avec un module d'élasticité de 231GPa et inférieures au modèle Chaallal pour un module de 80GPa. Cette limitation de la déformation latérale ultime du PRF par les codes pénalise, en effet, les PRF avec une haute résistance et un faible module d'élasticité.

La déformation du PRF est impactée par la qualité de l'installation de la chemise en PRF, du ratio de forme de la section transversale, ainsi que du rayon de coins (Hassan & Chaallal, 2007, p. 700). Selon le modèle Chaallal et al. (2003), la déformation latérale ultime du PRF dépend de la résistance du béton non confiné et du niveau de confinement.

1.3.6 Le comportement sismique des colonnes confinés en PRF

Plusieurs recherches, tel que Paulay et Priestley (1992), ont été menées sur le renforcement de colonnes en béton avec armatures. Ces études ont montré que le confinement en PRF peut être aussi effectif que le chemisage en acier conventionnel pour améliorer leur réponse sismique. Le chemisage en acier a traditionnellement été utilisé, mais les composites en PRF ont été employés de manière plus globale pour remplacer l'acier (Teng & Lam, 2002, p. 1535).

La différence notable entre le béton confiné en PRF et le béton confiné en acier est essentiellement due au comportement des deux matériaux. Le matériau PRF retarde les phénomènes indésirables tels que l'écrasement du béton améliorant ainsi la déformabilité structurelle. Cependant, le niveau de confinement dans le béton est proportionnel à la charge axiale du système appliquée jusqu'à la rupture du PRF qui se produit de manière fragile (Gahmousse, Djebbar, & Djebbar, 2021).

Gahmousse et al. (2021) ont effectué une étude comparative à l'aide du logiciel SAP2000 afin d'identifier les effets des différents paramètres sur la réponse sismique de la colonne en béton confinée en PRF. Ils ont montré que l'ajout de couches de PRFC augmente la pression latérale exercée par le confinement, ce qui a pour effet d'augmenter considérablement la rigidité, la résistance et la ductilité en compression ainsi qu'en flexion des colonnes en béton armé.

Pour un chargement, ou un ratio de chargement, axial constant, on peut observer que le confinement en PRFC favorise le comportement flexionnel, éliminant ainsi le comportement fragile du béton armé induit par une compression excessive. Selon l'étude, les chemises en PRFC confèrent à la colonne un meilleur comportement plastique (Gahmousse et al., 2021).

Bien que l'augmentation de la résistance du béton à 28 jours a pour effet d'augmenter la rigidité de la colonne confinée et sa résistance, elle diminue sa ductilité (Gahmousse et al., 2021). L'effet de l'ajout du nombre de couches de PRFC qui permet d'augmenter la résistance de la colonne diminue avec l'augmentation de la résistance du béton à 28 jours, et le gain en courbure diminue légèrement. L'ajout d'acier longitudinal se traduit par une augmentation considérable de la résistance et cet effet est plus prononcé pour une colonne non confinée. On note aussi une diminution légère de la ductilité de la colonne.

Shin et Jeon (2022, p. 11) ont conclu que l'augmentation du rapport de confinement améliore les performances sismiques dans des scénarios de charges sismiques de niveaux modérés et élevés. Cependant, le ratio volumétrique a un effet marginal sur les performances sismiques dans des scénarios de charges sismiques de faible niveau. L'ajout d'une pression de confinement adéquate du système de chemisage confère aux colonnes une ductilité suffisante pour résister à la grande déformation induite par des charges sismiques modérées et élevées. Généralement, le chemisage en PRFC améliore le confinement latéral, favorisant alors le comportement en flexion et éliminant le comportement fragile du béton armé ordinaire. Ceci entraîne une augmentation de la ductilité, et donc de la capacité de dissipation d'énergie (Gahmousse et al., 2021).

1.4 Les colonnes elliptiques courtes en béton confinées en PRF

1.4.1 Les avantages d'une section transversale elliptique

Afin d'augmenter l'efficacité du confinement des colonnes rectangulaires en béton une pratique courante est de modifier la section transversale en ellipse ou une forme ovalisée. Cette ovalisation de sections rectangulaires, constitue une solution attractive pour le renforcement de colonnes sujettes à des charges statiques de compression axiale concentrique, ou une compression axiale combinée à la flexion de la colonne (Teng & Lam, 2002, p. 1535). Aussi, son efficacité à améliorer le comportement sismique a aussi été montré dans diverses études telle que celle de Priestley et al. (1994) pour les sections ovalisées confinées en acier, et Seible et al. (1997) et Zeng et al. (2021) pour celles confinées en PRF.

1.4.2 Le comportement des colonnes elliptiques confinées en acier

Le comportement des colonnes elliptiques tubulaires en acier inoxydable remplies de béton fut l'objet de l'étude de Lam et al. (2010). Celle-ci a montré que les profilés elliptiques creux en aciers vides ont un mode de rupture typique de flambement par voilement internes des faces de la colonne. En revanche lorsque ces profilés sont remplis de béton, la rupture se produit par un voilement externe et écrasement du béton (Lam et al., 2010). Ceci est dû à l'expansion du béton soumis à la charge de compression axiale, ce qui crée des contraintes latérales entre les deux matériaux.

En effet, dans ce cas, le profilé tubulaire en acier joue le rôle de confinement pour le béton en expansion et permet de maintenir sa résistance et sa ductilité (D. Lam et al., 2010). En résultat, la réponse à la compression des colonnes elliptiques remplies de béton s'est révélée sensible à l'épaisseur du profilé tubulaire en acier et à la résistance du béton. Plus l'épaisseur du profilé est importante, plus la résistance et la ductilité de la colonne composite sont élevées. En revanche, l'utilisation d'un béton plus résistant augmente la résistance de la colonne composite, mais diminue sa ductilité.

1.4.3 Le comportement des colonnes elliptiques confinées en PRF

Teng et Lam (2002) ont réalisé une étude expérimentale sur le comportement en compression des colonnes elliptiques en béton confinées en PRF. Ces essais ont été conduits sur un total de vingt éprouvettes courtes de béton non-armé confinées en PRFC, subdivisées en cinq séries, d'une éprouvette circulaire et de trois éprouvettes elliptiques de ratio nominal a/b de 5/4, 5/3 et 5/2, respectivement. Deux de ces cinq séries ont été testés sans confinement, les trois autres ont été confinées en PRFC.

Les résultats de ces études montrent que l'ajout de couches en PRFC augmentent considérablement la résistance à la compression des colonnes, néanmoins, celle-ci est significativement affectée par le ratio nominal a/b de l'ellipse. Pour toutes les colonnes confinées testées, la rupture s'est produite par rupture du PRFC et présente plus de dommage pour les éprouvettes avec des ratios a/b faibles, et la contrainte latérale maximale n'a pas atteint la résistance caractéristique du PRFC. Pour les éprouvettes elliptiques confinées en PRFC, les contraintes latérales aux sommets de l'axe majeur sont souvent moindres que celles aux sommets de l'axe mineur, mais la rupture du PRFC s'est généralement produite autour de ces premiers (Teng & Lam, 2002, p. 1540). L'étude a donc révélé que la résistance à la compression du béton confiné est proportionnelle à la rigidité du PRFC, mais inversement proportionnelle au ratio nominal a/b de l'ellipse.

Concernant les courbes contrainte-déformation des éprouvettes confinées en PRFC, l'étude de Teng et Lam (2002) a montré que la relation contrainte déformation est bilinéaire ascendante pour les éprouvettes circulaires et elliptiques avec un ratio nominal a/b inférieur à 5/3, ce qui n'est pas le cas pour les éprouvettes elliptiques avec des ratios a/b importants. Selon Teng et Lam (2002), pour les éprouvettes confinées en PRF montrant des courbes contrainte-déformation bilinéaires ascendantes, la contrainte axiale maximale est celle conduisant à la rupture du PRF à sa résistance maximale, contrairement aux éprouvettes avec des courbes de contrainte-déformation présentant une pente descendante. Pour ces premières, une augmentation du confinement effectif résulte en une augmentation de la déformation ultime (Teng & Lam, 2002, p. 1543).

Les résultats de l'étude ont révélé que la résistance à la compression du béton confiné est proportionnelle à la rigidité du PRFC, mais inversement proportionnelle au rapport d'aspect. De plus, ils ont également montré que l'efficacité du confinement diminue à mesure que le rapport d'aspect a/b augmente. Pour éviter le phénomène de diminution de la résistance à la compression avec l'augmentation du rapport d'aspect a/b , les auteurs ont suggéré de considérer une pression de confinement efficace, f_{lf} , en utilisant un facteur de réduction qui tient compte de l'effet du rapport d'aspect elliptique.

Une autre étude expérimentale clé sur le comportement en compression des colonnes elliptiques confinées en PRF a été réalisée par Benzeguir, Chaallal, Godat, et Hawileh (2024). Cette étude a été conduite sur 20 spécimens de colonnes d'une hauteur de 625mm avec un béton d'une résistance à la compression de 30MPa. Les spécimens ont été divisés en 4 séries de 5 sections d'un ratio d'aspect elliptique a/b de 1 à 1,6. La première série correspond à une série de contrôle avec des colonnes non confinées, et les séries suivantes ont été confinées avec, respectivement une, deux, et 3 couches en tissu de PRFC d'une épaisseur de 0,13mm. Des gauges ont été installées pour mesurer les déformations latérales du PRFC et verticales de la colonne et les spécimens ont été chargés jusqu'à la rupture.

Les résultats de l'étude de Benzeguir et al. (2024) ont validé les observations issues des tests de Teng et Lam (2002) et ont apporté plus de détails quant à la réponse des colonnes elliptiques en béton confinées en PRF. La réponse correspondant à la capacité de charge en fonction du déplacement axial a suivi une courbe bilinéaire ascendante ; avec une première phase gouvernée par le comportement élastique du béton, et une seconde phase linéaire élastique continue jusqu'à la rupture du PRFC et de l'écrasement du béton par compression.

Ces tests, conduits avec un béton d'une résistance à la compression autour de 30MPa, ont démontré que la réponse en déplacement des éprouvettes confinées était principalement régie par la rigidité du PRFC et le rapport d'aspect elliptique de l'éprouvette. En effet, le déplacement axial était pratiquement identique pour toutes les éprouvettes de contrôle, et celui-ci augmentait avec le nombre de couches de PRFC, et la diminution du rapport d'aspect.

Aussi, le confinement en PRFC a augmenté la capacité portante des colonnes jusqu'à plus de 130% par rapport aux colonnes de contrôle ; le gain en capacité portante augmentant avec la diminution du rapport d'aspect a/b , et avec l'augmentation du nombre de couches en PRFC. Un rapport d'aspect de 1,6 a été pénalisant avec une perte de résistance par rapport à la colonne circulaire de plus de 30%. (Benzeguir et al., 2024, p. 13) ont aussi mis en évidence que le rapport d'aspect a/b a un impact significatif sur l'efficacité du confinement en PRF, ce qui se contraste avec le modèle prédictif de la norme canadienne CSA-S806-21, qui établit des modèles de prévision appliquant un modèle uniforme aux sections elliptiques comme pour les sections circulaires.

1.4.4 Modèle de Teng et Lam (2002) pour les sections elliptiques

Comme dans le modèle Lam et Teng (Teng & Lam, 2002) pour les colonnes circulaires, la résistance à la compression estimée pour les colonnes elliptiques par Teng et Lam (Teng & Lam, 2002) a été exprimée par la relation présentée dans l'équation suivante. Cependant, afin de tenir compte du confinement non uniforme dû à la forme elliptique de la section, la contrainte de confinement f_{lF} a été remplacée par une contrainte de confinement effective f'_{lF} , dans l'équation (1.1), comme dans le modèle Mander et al. (1988).

$$\frac{f'_{cc}}{f'_c} = 1 + k_1 \frac{f'_{lF}}{f'_c} \quad (1.1)$$

Cette contrainte de confinement effective est définie comme suit, où k_s est le facteur de forme tenant en considération l'effet de la forme elliptique sur la distribution des contraintes de confinement sur la section transversale, et f_{lF} correspond à la contrainte de confinement d'une colonne circulaire équivalente. Le ratio volumétrique de PRF est désigné par ρ_F , et la contrainte de confinement de la section circulaire exercée par le PRF par f_{lF} . Ce ratio peut être exprimé en fonction de l'épaisseur t_F et des diamètres nominaux de l'ellipse.

$$f'_{lF} = k_s f_{lF} \quad (1.2)$$

$$f_{lF} = \frac{\rho_F f_{fF}}{2} \quad (1.3)$$

$$\rho_F = \frac{[1.5(a + b) - \sqrt{ab}]t_F}{ab} \quad (1.4)$$

À travers les résultats expérimentaux de leur étude, Teng et Lam (2002) ont proposé une première équation empirique (1.4) pour décrire la relation entre le coefficient de forme k_s et le ratio nominal de l'ellipse a/b . Cette relation a été simplifiée, pour utilisation pratique, dans l'équation (1.6) suivante qui fournit des résultats très proches aux résultats expérimentaux. L'équation (1.7) a donc été proposée par Teng et Lam (2002) pour la conception de colonnes en béton elliptique confiné par un chemisage en PRF.

$$k_s = 1.06 \left(\frac{a}{b}\right)^{-2.30} \quad (1.5)$$

$$k_s = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad (1.6)$$

$$\frac{f'_{cc}}{f'_c} = 1 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{f_{lF}}{f'_c} \quad (1.7)$$

1.4.5 Le comportement des colonnes rectangulaires ovalisées

Alors que de l'ovalisation des colonnes s'est révélée très effective pour améliorer l'efficacité du confinement en PRF, elle conduit à une augmentation importante de l'aire transversale de la colonne, et donc de son poids et de sa rigidité, ce qui peut dans certains cas être indésirable et préjudiciable à la performance sismique du système structural. À cet égard, l'étude de Zeng et al. (2021) a permis de mettre la lumière sur les phénomènes sous-jacents de cette ovalisation sur le comportement des colonnes en béton armé confinées en PRF. Comme pour les sections rectangulaires, toutes les colonnes légèrement ovalisées de cette étude ont rompu par rupture de la chemise en PRF autour des coins. Sur la base des résultats des essais réalisés et du modèle de contrainte-déformation fournie pour les colonnes ovalisées sur lequel s'est basée l'étude de Zeng et al. (2021), l'ovalisation a amélioré l'efficacité du confinement de la section rectangulaire et la pente du deuxième segment de la courbe bilinéaire contrainte-déformation.

En arrondissant la section rectangulaire, les gains en résistance ultime de la colonne confinée sont considérables par rapport à la section rectangulaire d'origine. Des gains de 73% pour un rapport montée-sur-portée de l'ordre d'un dixième sont notables (Zeng et al., 2021, p. 9). Les déformations locales du PRF au centre des coins de la colonne sont moindres que celles aux côtés, et l'ovalisation réduit ses disparités. Ainsi, Zeng et al. (2021, p. 9) recommandent un ratio d'épaisseur d'ovalisation sur la largeur du côté de 1/15 et un ratio de deux fois le rayon de coins sur la grande dimension de la section transversale de 0,2 comme valeurs optimales permettant une meilleure efficacité de confinement de la colonne rectangulaire sans augmenter considérablement son aire transversale.

1.5 Conclusions et perspectives

La méthode de confinement des colonnes par PRF est, depuis quelques décennies, jugée efficace pour le renforcement des colonnes en béton par divers travaux de recherche, et fait aujourd'hui partie intégrante des codes de conceptions nord-américains et européens. Le principe général du confinement en PRF est similaire à celui en armature transversale d'acier comme modélisé par Mander et al. (1988) dans leur modèle unifié. Plusieurs découvertes, quant au comportement de ce type de structures composites, ont alors été réalisées, et des modèles expérimentaux ou semi-théoriques basés sur le modèle de Mander et al. (1988) ont vu le jour ; comme ceux de Teng et Lam (2002) et Chaallal et al. (2003) à titre d'exemples.

Au vu des divers travaux de recherche présentés dans cette revue de littérature, il ressort que le comportement de ces colonnes est complexe et dépend d'une multitude de paramètres. L'utilisation d'un béton plus résistant augmente la résistance de la colonne mais diminue sa ductilité. Quant à l'ajout de couches de PRF, il augmente la résistance, la rigidité et la ductilité du système. La présence d'acier longitudinal a aussi un effet notable sur la résistance, la ductilité et la réponse sismique de la structure composite, comme explicité par l'étude de Gahmousse et al. (2021) qui ont aussi mis l'accent sur les effets combinés de tous ces paramètres.

Cette complexité et le besoin en recherche pour cette technique de confinement se traduit dans les codes de conception par certaines limitations parfois exigeantes, comme celle sur la déformation ultime du PRF qui limite l'utilisation de composites avec un faible module d'élasticité, et d'autres moins conservatrices, voir peu sécuritaires, comme c'est le cas des colonnes de taille réelle avec des bétons à faible résistance à la compression.

La forme de la section constitue aussi un paramètre primordial pour décrire le comportement la colonne confinée. On a vu que les sections circulaires sont les plus efficaces pour le confinement des colonnes car celles-ci permettent une distribution uniforme des contraintes. En revanche, les colonnes carrées et rectangulaires présentent une concentration de contrainte aux coins causant ainsi une rupture prématurée du PRF à ces endroits. Il a aussi été démontré dans l'étude de Hassan et Chaallal (2007) que l'arrondissement des coins réduit cet effet pour des rayons de coins supérieurs ou égale à 25.4mm. Les colonnes rectangulaires sont en effet les moins efficaces à cause de leur rapport de forme, et c'est d'autant plus que cette forme s'éloigne d'un aspect carré. Naturellement, les codes canadiens CSA et ISIS imposent des limites pour ce ratio de forme à 1,5 et 1,1 respectivement.

Ces études comparatives entre les colonnes circulaires et les colonnes rectangulaires ont mis la lumière sur l'intérêt employer la technique d'ovalisation des colonnes rectangulaires pour améliorer leur comportement, leur résistance et leur efficacité quant au confinement par chemisage en PRF. Les premières études, à la fin des années 1990, sur les colonnes elliptiques, telles que celles de Priestley et al. (1995) et de Sieble et al. (1997), ont montré l'apport intéressant de l'utilisation de cette forme géométrique pour le confinement, en termes de résistance aux charges statiques de compression, aux charges de compression combinées à la flexion, et aux charges sismiques.

En effet, l'étude de Teng et Lam (2002) a montré que les sections elliptiques sont bien plus efficaces pour le confinement que les sections rectangulaires ; et leur comportement en termes de résistance s'améliore d'autant plus que l'ellipse s'approche d'une forme circulaire. Cependant, les colonnes circulaires présentent un comportement plus fragile que les colonnes

elliptiques qui voient moins de dommages lors de la rupture. On note aussi, que les colonnes elliptiques perdent leur comportement bilinéaire lorsque leur forme s'allonge ; une limitation du ratio de forme est alors nécessaire pour assurer un confinement adéquat en compression.

En se basant sur le modèle de Mander et al. (1988) pour le confinement avec armatures transversales, Teng et Lam (2002) ont pu étendre leur modèle pour les sections circulaires en béton confinées en PRF, aux sections elliptiques, notamment, avec un coefficient de forme k_s décrivant l'efficacité du confinement de la section, et qui est déterminé à partir des résultats expérimentaux en fonction du rapport de forme de l'ellipse. Néanmoins, l'ovalisation de sections rectangulaires de taille réelle présente des défis importants à considérer. L'augmentation de l'aire transversale cause une augmentation du poids de la structure et peut provoquer un comportement préjudiciable de cette structure aux charges sismiques. À ce titre, Zeng et al. (2021) ont proposé des limitations optimales permettant un bon confinement sans augmentation excessive de l'aire transversale.

Au vu de l'état actuel des connaissances quant au confinement en PRF des colonnes en béton armé, plusieurs pistes d'étude sont possibles. Hassan et Chaallal (2007) ont montré que l'effet d'échelle sur le comportement des structures nécessite plus de clarifications. Cet aspect étant peu convainquant dans les codes de conceptions, un travail de recherche permettra une meilleure compréhension des phénomènes sous-jacents ainsi que de meilleures interpolations à partir des résultats d'essais de laboratoire sur des éprouvettes de petite taille, ce qui aura une incidence directe sur la qualité des modèles de conception du confinement. Aussi, l'étude de Zeng et al. (2021) constitue un premier travail de recherche mené sur des colonnes ovalisées de taille réelle. Les gains en résistance par ovalisation, grâce à une distribution plus uniforme des contraintes, se traduit par un gain en couches de PRF de confinement.

Cet intérêt relatif à l'utilisation des sections elliptiques, combiné à la demande en termes de rigueur vis-à-vis de la compréhension des phénomènes régissant le comportement des colonnes en béton confinées par un chemisage en PRF motivent la réalisation d'une analyse précise sur l'influence de ces paramètres sous-jacents pour ce type de structures composites. À cet égard,

l'objectif de ce mémoire consiste, à réaliser une étude paramétrique à travers l'utilisation de la méthode d'éléments finis du comportement des colonnes courtes en béton de forme elliptique confinées par un chemisage en PRF et soumises à une charge axiale de compression.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS DES COLONNES EN BÉTON CONFINÉES EN PRF

2.1 Présentation générale

La méthode des éléments finis (MEF) a été introduite au milieu du vingtième siècle. Elle se base sur une discrétisation du modèle réel en petits éléments de tailles finies afin de résoudre des problèmes avec équations aux dérivées partielles. Cette méthode constitue aujourd'hui un outil de base de résolution numérique des problèmes aux équations aux dérivées partielles dans divers domaines scientifiques et techniques. Elle a été conçue initialement pour les calculs en mécanique des structures, et a été ensuite généralisée et étendue à d'autres disciplines, tel que la mécanique des fluides, l'aéronautique et l'électromagnétisme ; et ce, grâce à sa formalisation en se basant sur une formulation variationnelle des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette formulation est généralement appliquée aux problèmes de dimension inférieure ou égale à trois et nécessite une introduction appropriée des conditions aux limites régissant les bords.

La relation d'équilibre, qui est exprimée en fonction de la solution recherchée, u , du problème correspond à la forme forte, et son opérateur mathématique, Res , est nommé résidu du problème. Ce résidu, $Res(u)$, s'annule donc lorsque u correspond à la solution exacte. La particularité de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser, non pas la forme forte, mais plutôt une forme affaiblie, W , de ces équations d'équilibre aux dérivées partielles, usuellement désignée comme forme faible, forme intégrale ou forme variationnelle. En effet, il s'agit d'une réduction du degré de continuité requis des dérivées de la forme forte du problème qui empêche l'utilisation d'outils classiques pour sa résolution. Par conséquent, la solution ainsi obtenue de la forme faible constitue une solution approchée du problème.

Cette méthode s'appuie sur la pondération du résidu par des fonctions tests, et son intégration sur le domaine en utilisant les formules d'intégration par partie. Ainsi, les conditions aux

limites du problème sont alors naturellement introduites. Pour que de telles intégrales soient finies, il suffit que les fonctions tests et les fonctions solutions approchées, u , ainsi que leurs premières dérivées respectives, soient de carré intégrable. Pour que la formulation variationnelle puisse mieux représenter le modèle réel du problème physique, et que la solution issue de cette forme faible puisse ainsi s'approcher de la solution exacte, un maillage approprié du modèle sous forme d'éléments finis est alors nécessaire. Cette discrétisation est représentée mathématiquement par l'approximation des fonctions tests et des fonctions solutions par des fonctions approximantes qui s'appuient sur les valeurs aux nœuds des éléments du maillage, que l'on nomme fonctions de forme (Fish & Belytschko, 2007, p. 41).

La méthode d'éléments finis classique, méthode de Galerkin, correspond à une méthode dont les fonctions tests et des fonctions solutions approchées sont approximées avec les mêmes fonctions de forme. Cette homogénéité de la méthode de Galerkin assure une meilleure stabilité du procédé de résolution, et a été donc choisie dans le cadre de cette étude.

2.2 Loi de comportement du béton en compression

Le béton est un matériau obtenu à partir d'un mélange de constituants, tels que le ciment, le sable, les granulats, l'eau et les adjuvants, à des proportions précises à fin d'obtenir, en plus d'une bonne ouvrabilité lors de la mise en œuvre et d'une bonne durabilité à l'environnement externe, des propriétés mécaniques après durcissement appropriées, quant à la résistance aux divers charges subies par la structure. Le matériau ainsi obtenu est supposé homogène et présente un comportement isotrope en compression.

Dans un essai unidirectionnel, « La courbe contrainte-déformation des bétons est pratiquement linéaire jusqu'à environ 50% de leur résistance. À ce stade, il y a formation de microfissures longitudinales invisibles à l'œil nu » (Paultre, 2011, p. 62). Le module d'élasticité sécant, E_c , utilisé dans le dimensionnement, est obtenu en remplaçant la courbe contrainte-déformation par une ligne passant à l'origine et sécante à une contrainte de $0,4f'_c$ (CSA-A23.1/A23.2,

2004). Ce module d'élasticité, pour un béton de densité λ_c comprise entre 1 500 et 2 500 kg/m³, peut être déterminé à partir de la relation (2.1) suivante en MPa.

$$E_c = (3300\sqrt{f'_c} + 6900) \left(\frac{\lambda_c}{2300} \right)^{1.5} \quad (2.1)$$

Le coefficient de Poisson, ν , correspond au rapport entre la déformation transversale et la déformation suivant la direction d'application de la charge unidirectionnelle. Pour le béton, celui-ci varie entre 0,15 et 0,3, et est fixé usuellement pour un béton durci à 0,2. Quant à la déformation ultime en compression ϵ_{cu} , elle varie généralement entre 0,003 et 0,004, et la norme limite sa valeur à 0,0035 aux fins de calcul (Chaallal, 2014, p. 6).

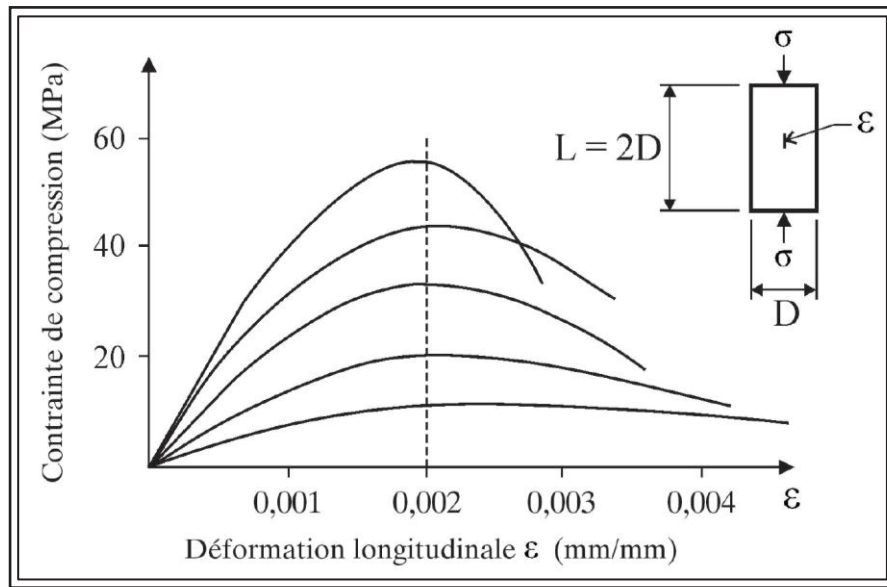


Figure 2.1 Courbes de contrainte-déformation typiques de béton ordinaires soumis à une compression axiale concentrique
Tirée de Chaallal (2014, p. 4)

Pour des bétons dont la résistance f'_c est inférieure ou égale à 40 MPa, la courbe parabolique f_c régie par l'équation (2.2) ci-dessous est en général suffisante pour décrire la relation contrainte-déformation, avec f_c s'annulant lorsque le paramètre déformation, ϵ_{cf} , de la courbe parabolique contrainte-déformation dépasse deux fois la valeur de la déformation à la contrainte maximale, ϵ'_c , donnée par l'équation (2.3) ci-après (Paultre, 2011, p. 66).

$$f_c = f'_c \left(2 \frac{\varepsilon_{cf}}{\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{cf}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon'_c = 0,5 \times 10^{-3} f'^{0,4}_c \quad (2.3)$$

Dans un cas plus général, tel que pour l'analyse par la MEF d'une colonne en béton, on suppose que chaque élément puisse subir des efforts tri-directionnels. Le tenseur de contraintes $[\sigma]$ de Cauchy comporte alors neuf composantes, et pour le cas de calcul de structures, celui-ci est symétrique ce qui réduit, dans l'équation 2.4, le nombre de composantes indépendantes du tenseur à six. Il en est de même pour le tenseur de déformation $[\varepsilon]$ à l'équation (2.5), dont les composantes sont explicitées aux équations (2.6) et (2.7). Ces deux tenseurs peuvent alors s'écrire sous la notation vectorielle de Voigt à l'équation (2.8), ce qui a pour avantage de réduire le rang du tenseur de la loi de comportement du matériau de quatre à deux, permettant ainsi de le noter sous forme matricielle comme illustré à la relation (2.9) suivante. Pour le cas d'un matériau homogène tel que le béton, le tenseur de rang deux, $[D]$, de la loi de comportement du matériau peut s'écrire suivant la formule (2.10) dans le domaine élastique ; E étant le module d'élasticité, ou module d'Young, du matériau béton.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.9)$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.3 Loi de comportement du chemisage en PRF

Les tissus composites en PRF sont considérés homogènes anisotropes avec des propriétés élevées suivant la direction des fibres et présentent un comportement linéaire en traction jusqu'à la rupture (Chaallal, 2018, p. 16). Dans le cadre de notre étude, on suppose un confinement optimal de toutes les fibres du PRF en les disposant perpendiculairement à l'axe de la colonne, les tissus en PRF étant collés continuellement en surface sur toute la hauteur.

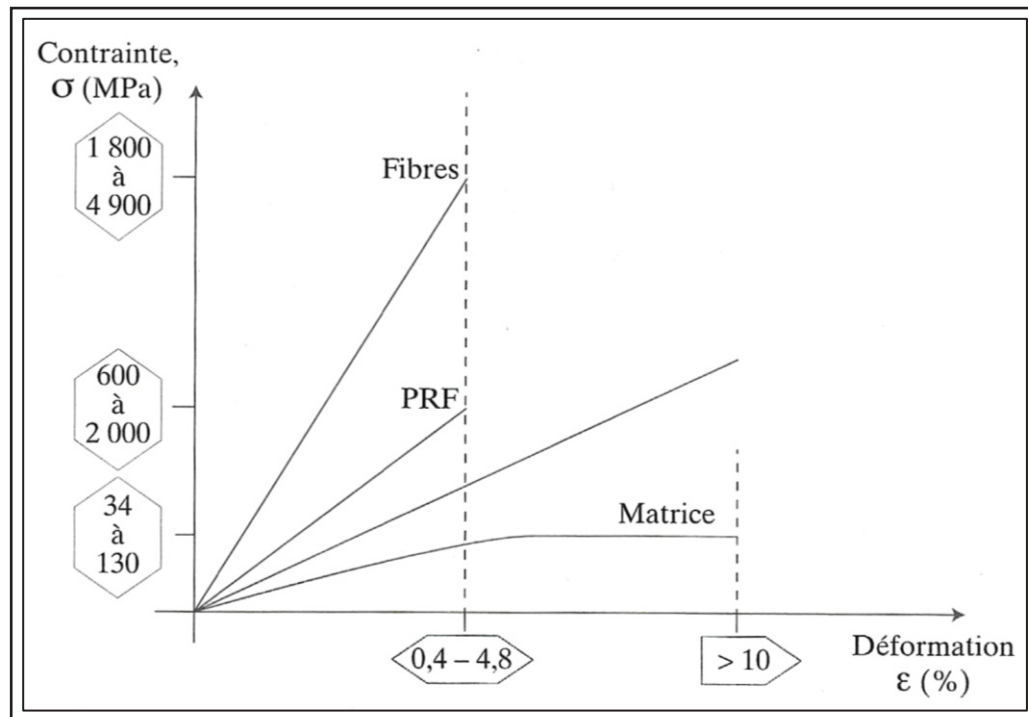


Figure 2.2 : Courbes contrainte-déformation typiques des fibres, de la matrice en époxy et du tissu en PRF soumis à une traction axiale longitudinale aux fibres

Tirée de Chaallal (2018, p. 22)

La règle dite de mélange des fibres avec la matrice est l'approche la plus couramment utilisée pour déterminer les valeurs estimatives des propriétés élastiques et mécaniques des composites en PRF. Ces propriétés unidirectionnelles anisotropes $(E_l, E_t, G_{lt}, \nu_{lt})$ sont exprimées en fonction des propriétés isotropes des fibres (E_f, G_f, ν_f) et de la matrice (E_m, ν_m) . Ces relations sont illustrées dans les équations (2.11) à (2.17) ci-dessous (Chaallal, 2018, p. 19 à 21).

$$E_l = E_F = \nu_f E_f + \nu_m E_m \quad (2.11)$$

$$\nu_{lt} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \quad (2.12)$$

$$E_t = E_m \left[\frac{1}{(1 - \nu_f) + \frac{E_m}{E_f} \times \nu_f} \right] \quad (2.13)$$

$$\nu_{tl} = \nu_{lt} \left(\frac{E_t}{E_l} \right) \quad (2.14)$$

$$G_{lt} = G_m \left[\frac{1}{(1 - \nu_f) + \frac{G_m}{G_f} \times \nu_f} \right] \quad (2.15)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (2.16)$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} \quad (2.17)$$

Les coefficients ν_f et ν_m représentent les teneurs en volume des fibres et de la matrice d'époxy du PRF, respectivement. Les modules d'élasticité du PRF, des fibres et de la matrice dans le sens longitudinal sont symbolisés par $E_F = E_l$, E_f et E_m , respectivement, et le module d'élasticité dans le sens transversal par E_t . Les symboles G_{lt} , G_f et G_m représentent les modules de cisaillement du PRF, des fibres, et de la matrice, respectivement. Les coefficients de Poisson ν_f et ν_m correspondent à ceux des fibres, et de la matrice, respectivement. Et les coefficients de Poisson du PRF, symbolisés par ν_{lt} et ν_{tl} , représentent sa contraction dans le sens transversal due à une traction dans le sens longitudinal, et sa contraction dans le sens longitudinal due à une traction dans le sens transversal, respectivement.

La loi de comportement élastique linéaire du PRF est explicitée à travers la relation matricielle (2.18) suivante de contraintes-déformations ; où $\{\sigma_F\}$ et $\{\varepsilon_F\}$ représentent, respectivement, le tenseur des contraintes de Cauchy, et le tenseur des déformations, du PRF ; représentés sous notation vectorielle de Voigt en deux dimensions. Les directions l et t sont, respectivement, la direction longitudinale des fibres, et sa direction transversale tangente à la chemise en PRF.

$$\{\sigma_F\} = [D_F]\{\varepsilon_F\} \quad (2.18)$$

$$\{\sigma_F\} = \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \sigma_{lt} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon_F\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_l = \frac{\partial u_l}{\partial l}; \quad \varepsilon_t = \frac{\partial u_t}{\partial t}; \quad \gamma_{lt} = \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial l} \quad (2.19)$$

$$[D_F] = \begin{bmatrix} \frac{E_l}{1 - \nu_{lt}\nu_{tl}} & \frac{\nu_{tl}E_l}{1 - \nu_{lt}\nu_{tl}} & 0 \\ \frac{\nu_{lt}E_t}{1 - \nu_{lt}\nu_{tl}} & \frac{E_t}{1 - \nu_{lt}\nu_{tl}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.4 Analyse linéaire élastique d'une colonne courte en béton

2.4.1 Discrétisation par éléments finis

Les phénomènes d'instabilité des colonnes sous un chargement en compression, tels que le flambement, causent un comportement non symétrique de la structure, nécessitant une analyse tri-dimensionnelle. Dans le cas de colonnes courtes symétriques, ses instabilités sont réduites et souvent négligées. Pour des fins de rigueur, des intérêts académiques, et dû à la complexité des interactions relatives au confinement, tel qu'explicité au chapitre 1, la structure numérique représentant le problème physique sera étudiée dans le domaine tri-directionnel. Dans ce mémoire, on se limitera à l'analyse statiques de colonnes courtes en béton sans et avec chemisage en PRF par la méthode des éléments finis.

Une approximation au sens des éléments finis en déplacements u_x , u_y et u_z , suivant les directions x , y , et z respectivement, peut s'écrire à travers une approximation polynômiale à partir des valeurs nodales u_x^i , u_y^i et u_z^i déterminées aux nœuds i de l'élément. Ces fonctions de formes polynômiales, notées $N_i(x, y, z)$, ou plus simplement N_i , prennent la valeur un au nœud

i de l'élément, de coordonnées (x_i, y_i, z_i) , et zéro aux autres nœuds de l'élément. Les fonctions de forme ainsi choisies vérifient alors les expressions (2.21) à (2.26) ci-dessous.

$$u_x(x, y, z) = \langle N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \dots \rangle \begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_x^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle N_i(x, y, z) \rangle \{u_x^i\} \quad (2.21)$$

$$u_y(x, y, z) = \langle N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \dots \rangle \begin{Bmatrix} u_y^1 \\ u_y^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle N_i(x, y, z) \rangle \{u_y^i\} \quad (2.22)$$

$$u_z(x, y, z) = \langle N_1(x, y, z), N_2(x, y, z), \dots \rangle \begin{Bmatrix} u_z^1 \\ u_z^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle N_i(x, y, z) \rangle \{u_z^i\} \quad (2.23)$$

$$u_x(x, y, z) = \langle N_i \rangle \{u_x^i\} = \langle N \rangle \{\hat{u}_x\} \quad (2.24)$$

$$u_y(x, y, z) = \langle N_i \rangle \{u_y^i\} = \langle N \rangle \{\hat{u}_y\} \quad (2.25)$$

$$u_z(x, y, z) = \langle N_i \rangle \{u_z^i\} = \langle N \rangle \{\hat{u}_z\} \quad (2.26)$$

Généralement, on utilise des éléments de forme simples et similaires agencés ensembles, pour former la structure totale ou des parties de la structure. Ces fonctions de forme peuvent s'écrire alors universellement moyennant un changement de variables, des coordonnées globales (x, y, z) aux coordonnées de référence (ξ, η, ζ) choisies universellement pour la forme de référence utilisée. La méthodologie de détermination de ces fonctions de forme universelles est détaillée au chapitre 3 du présent document.

$$\langle N \rangle = \langle N_i \rangle = \langle N_i(x, y, z) \rangle = \langle N_i(\xi, \eta, \zeta) \rangle \quad (2.27)$$

Au point étudié de coordonnées (x, y, z) correspondant aux coordonnées (ξ, η, ζ) dans l'élément de référence, le vecteur déplacement $\{u\}^e$ de l'élément réel, e , s'écrit plus simplement à l'aide des vecteurs de déplacements aux nœuds $\{\hat{u}\}^e$, et des fonctions de forme $N_i(\xi, \eta, \zeta)$. Ces dernières sont agencées dans la matrice $[N]$ conformément à l'expression (2.30) afin d'accommoder l'écriture du vecteur des déplacements nœaux de la structure.

$$\{u\}^e = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = [N] \{\hat{u}\}^e \quad (2.28)$$

$$\{\hat{u}\}^e = \begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_z^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ u_z^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 & N_2(\xi, \dots) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La transformation géométrique de l'élément, des coordonnées de références (ξ, η, ζ) aux coordonnées réelles (x, y, z) , peut aussi s'écrire sous forme polynomiale avec des fonctions de formes, notées $\bar{N}_j(\xi, \eta, \zeta)$. Ces fonctions de forme approximent les coordonnées réelles (x, y, z) à l'intérieur de l'élément en fonction des coordonnées de référence, en utilisant les positions (x^j, y^j, z^j) des nœuds j dans l'élément réel. Ces coordonnées nodales sont notées sous forme vectorielle uni-ligne $\langle x, y, z \rangle^j$. On les superpose en une matrice de coordonnées nodale $[\hat{x}]$, en vérifiant les égalités (2.31) à (2.35).

$$\langle \bar{N}_j \rangle = \langle \bar{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta), \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta), \dots \rangle \quad (2.31)$$

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta), \bar{N}_2, \dots \rangle \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle \bar{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{x^j\} = \langle \bar{N}_j \rangle \{x^j\} \quad (2.32)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta), \bar{N}_2, \dots \rangle \begin{Bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle \bar{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{y^j\} = \langle \bar{N}_j \rangle \{y^j\} \quad (2.33)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta), \bar{N}_2, \dots \rangle \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle \bar{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{z^j\} = \langle \bar{N}_j \rangle \{z^j\} \quad (2.34)$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle \bar{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{ \langle x, y, z \rangle^j \} = \langle \bar{N} \rangle \{ \langle x, y, z \rangle^j \} = \langle \bar{N} \rangle [\hat{x}] \quad (2.35)$$

À titre d'exemple, pour les éléments se situant sur le contour cylindrique de la colonne elliptique en béton, le choix d'un élément de référence de type prisme ayant des arêtes horizontales sur le contour extérieur du béton à 3 nœuds fournira une approximation géométrique qui épousera avec une grande précision la forme elliptique de la colonne. Aussi,

chaque arrête vertical de l'élément comportera uniquement deux nœuds, étant donné le caractère symétrique de la géométrie de la colonne elliptique par rapport à l'axe vertical z , ainsi que du chargement concentrique de compression auquel elle est soumise.

Lorsque les nœuds, avec la notation indicielle i , de coordonnées nodales $[\hat{x}]$ de l'approximation numérique en déplacements, sont confondus avec les nœuds, de la notation indicielle j , de coordonnées nodales $[\hat{x}]$ de la transformation géométrique, les fonctions de formes polynômiales $\langle N \rangle$ et $\langle \bar{N} \rangle$ ont alors la même expression. L'élément fini ainsi obtenu est appelé un élément iso-paramétrique. Ce type d'éléments est très couramment utilisé avec la MEF pour des fins d'économie en mémoire de la machine et de stabilité du processus de résolution. C'est le cas dans notre étude, où tous les éléments sélectionnés seront de type iso-paramétrique.

Pour des fins de rigueur vis-à-vis de l'écriture des équations, on gardera ci-après les notations barrées tels que $\langle \bar{N} \rangle$ et $[\hat{x}]$. Cette notation désignera, tout au long de ce mémoire, les variables relatives à la transformation géométrique, de l'élément de référence à l'élément réel. On les distingue alors, par leur écriture, des variables relatives à l'approximation en déplacement de la structure. Les dérivées partielles de ces fonctions de forme par rapport aux coordonnées de l'élément de référence (ξ, η, ζ) s'écrivent aussi universellement.

$$[\bar{B}_{\xi\eta\zeta}] = \{\nabla_{\xi\eta\zeta} \langle \bar{N}_j \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \eta} & \dots \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \zeta} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$[B_{\xi\eta\zeta}] = \{\nabla_{\xi\eta\zeta} \langle N_i \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Les dérivées partielles des fonctions de forme par rapport aux coordonnées (x, y, z) de l'élément réel s'en déduisent par l'intermédiaire de la matrice Jacobienne $[J]$ de la transformation géométrique au voisinage du point défini à l'équation (2.38). Cette matrice représente l'approximation linéaire de la transformation géométrique entre systèmes de coordonnées au voisinage du point étudié.

$$[J] = [\bar{B}_{\xi\eta\zeta}][\hat{x}] \quad (2.38)$$

$$[B_{xyz}] = \{\nabla_{xyz}\langle N_i \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots \end{bmatrix} = [J]^{-1}[B_{\xi\eta\zeta}] \quad (2.39)$$

Le tenseur de déformations peut être exprimé sous la notation vectorielle de Voigt, dans l'équation (2.40), en fonction des déplacements nodales $\{u_i\}^e$ de l'élément moyennant une matrice de déformations $[B]$. Celle-ci correspond à un réarrangement des termes de la matrice $[B_{xyz}]$, à l'équation (2.42), pour accommoder cette notation de Voigt, ainsi que la disposition des termes du vecteur des déplacements nodaux. Les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy s'en déduisent à travers l'utilisation des relations (2.9) et (2.10), relatant la loi de comportement du béton dans le domaine élastique.

$$\{\varepsilon\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_z^1 \\ u_x^2 \\ u_y^2 \\ u_z^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = [B]\{\hat{u}\}^e \quad (2.40)$$

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e = [D][B]\{\hat{u}\}^e \quad (2.41)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

2.4.2 Formulation variationnelle, forme faible du problème physique

La forme variationnelle, ou forme faible du problème aux dérivées partielles, correspond à sa reformulation pour déterminer une solution approximative précise. Cette approche s'inscrit dans un espace fonctionnel plus étendu, par opposition à l'espace restreint des fonctions classiques. Elle a ainsi permis le développement de la résolution numérique de problèmes complexes aux dérivées partielles à travers la méthode des éléments finis.

Les relations de l'équilibre physique aux équations (2.43) à (2.45) constituent l'application de seconde loi de Newton en trois dimensions pour un élément infinitésimal de la structure. Pour le cas d'une étude statique, on néglige les termes d'accélération comme illustré à l'équation (2.46). En effet, le principe des travaux virtuels est obtenu par l'application de déplacements virtuels arbitraires, δu_x , δu_y et δu_z , sur la structure respectivement suivant les directions x , y et z . La contribution de ces travaux virtuels infinitésimaux est sommée sur le domaine entier.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_{vx} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_{vy} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_{vz} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} W = & \iiint_V \left\{ \delta u_x \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_{vx} \right] \right. \\ & + \delta u_y \left[\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_{vy} \right] \\ & + \delta u_z \left[\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_{vz} \right] \Big\} dV \\ & = 0 \quad \forall \delta u_x, \delta u_y, \delta u_z \end{aligned} \quad (2.47)$$

Les déplacements virtuels représentent, pour le cas d'une étude par éléments finis dans le domaine des structures, des fonctions tests, moyennant l'imposition des conditions d'admissibilité décrits à la section 2.1. L'objectif ici consiste à réduire l'ordre maximum des dérivées sur les déplacements, et ce, à travers l'application de la méthode d'intégration par partie sur le principe des travaux virtuels (2.47). Concrètement, les termes du tenseur de contraintes de Cauchy sont, comme explicité aux équations (2.6) à (2.10), des combinaisons linéaires des fonctions de déplacements dans le domaine élastique.

$$\iiint_V \delta u_x \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} \sigma_{xx} dV + \iint_A \delta u_x \sigma_{xx} n_x dA \quad (2.48)$$

$$\iiint_V \delta u_x \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} \sigma_{xy} dV + \iint_A \delta u_x \sigma_{xy} n_y dA \quad (2.49)$$

$$\iiint_V \delta u_x \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_x}{\partial z} \sigma_{xz} dV + \iint_A \delta u_x \sigma_{xz} n_z dA \quad (2.50)$$

$$\iiint_V \delta u_y \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \sigma_{xy} dV + \iint_A \delta u_y \sigma_{xy} n_x dA \quad (2.51)$$

$$\iiint_V \delta u_y \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_y}{\partial y} \sigma_{yy} dV + \iint_A \delta u_y \sigma_{yy} n_y dA \quad (2.52)$$

$$\iiint_V \delta u_y \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_y}{\partial z} \sigma_{yz} dV + \iint_A \delta u_y \sigma_{yz} n_z dA \quad (2.53)$$

$$\iiint_V \delta u_z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} \sigma_{xz} dV + \iint_A \delta u_z \sigma_{xz} n_x dA \quad (2.54)$$

$$\iiint_V \delta u_z \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \sigma_{yz} dV + \iint_A \delta u_z \sigma_{yz} n_y dA \quad (2.55)$$

$$\iiint_V \delta u_z \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dV = - \iiint_V \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} \sigma_{zz} dV + \iint_A \delta u_z \sigma_{zz} n_z dA \quad (2.56)$$

Les termes d'intégrales surfaciques, résultants dans les équations (2.48) à (2.56), correspondent à des termes de contour, et dépendent des conditions aux limites du problème. Ces conditions peuvent être de type Dirichlet, Neumann ou Cauchy, respectivement, pour des déplacements fixes, des contraintes fixes, ou des contraintes dépendant de la déformation au contour. Le vecteur $\{n\}$, normal au contour et dirigé vers l'extérieur, a pour composantes n_x , n_y et n_z respectivement suivant les directions x , y et z . Dans la suite de cette section 2.4.2, on ne considère pas la présence de condition aux limites de type Cauchy, comme c'est le cas d'une colonne en béton non confinée. La condition de type Cauchy correspondant au confinement de la colonne par chemisage en PRF sera traitée à la section suivante 2.4.3.

La réduction de l'ordre maximum des dérivées relaxe les conditions de continuité sur les fonctions de déplacement. L'équivalence entre les formulations forte et faible du problème n'étant plus garantie, la solution de la forme faible correspond donc à une solution approchée. La sommation des termes du travail des forces volumiques, ainsi que celles des termes issus de l'intégration par partie de contour, et de l'intégration à l'intérieur du domaine, peuvent être écrite sous forme de produits scalaires entre vecteurs, aux équation (2.58), (2.60) et (2.62).

$$\begin{aligned} W_{ext,s} = & \iint_A \delta u_x (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dA \\ & + \iint_A \delta u_y (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z) dA \\ & + \iint_A \delta u_z (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z) dA \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$W_{ext,s} = \iint_A \langle \delta u_x, \delta u_x, \delta u_x \rangle \left(\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \right) dA \quad (2.58)$$

$$W_{ext,v} = \iiint_V (\delta u_x \rho f_{vx} + \delta u_x \rho f_{vx} + \delta u_x \rho f_{vx}) dV \quad (2.59)$$

$$W_{ext,v} = \iiint_V \langle \delta u_x, \delta u_y, \delta u_z \rangle \left(\rho \begin{Bmatrix} f_{vx} \\ f_{vy} \\ f_{vz} \end{Bmatrix} \right) dV \quad (2.60)$$

$$W_{int} = \iiint_V \left\{ \frac{\partial \delta u_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \delta u_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left(\frac{\partial \delta u_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \right\} dV \quad (2.61)$$

$$W_{int\acute{e}rieur} = \iiint_V \left\langle \frac{\partial \delta u_x}{\partial x}, \frac{\partial \delta u_y}{\partial y}, \frac{\partial \delta u_z}{\partial z}, \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x}, \frac{\partial \delta u_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}, \frac{\partial \delta u_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \right\rangle \\ + \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{matrix} \right\} dV \quad (2.62)$$

Conséquemment, avec l'application des équations (2.6) et (2.7), la forme variationnelle du problème peut être mise sous l'écriture compacte (2.63). Le vecteur $\{f_V\}$, présenté à l'équation (2.65) et issu de l'équation (2.58), correspond à la résultante des densités volumiques d'efforts réparties appliquée à l'élément volumique infinitésimal autour du point d'intégration. Le vecteur $\{f_S\}$, à l'équation (2.66), désigne la résultante des contraintes réparties sur l'élément surfacique infinitésimal du contour, comme explicité à l'équation (2.60).

$$W = W_{ext\acute{e}rieur} - W_{int\acute{e}rieur} = 0 \quad (2.63)$$

$$W_{ext\acute{e}rieur} = W_{volume} + W_{contour} \quad (2.64)$$

$$W_{volume} = \iiint_V \langle \delta u \rangle \{f_V\} dV \quad (2.65)$$

$$W_{contour} = \iint_A \langle \delta u \rangle \{f_S\} dA \quad (2.66)$$

$$W_{int\acute{e}rieur} = \iiint_V \langle \delta \varepsilon \rangle \{\sigma\} dV \quad (2.67)$$

La contribution de chaque élément fini à l'équilibre des travaux virtuels s'effectue au moyen de la discrétisation de la colonne tel que présenté à la section 2.4.1. La subdivisions des

intégrales par éléments finis à l'équation (2.68) permet l'utilisation des approximations des variables déplacements, contraintes et déformations obtenues aux équations (2.30), (2.40) et (2.42), autant pour les fonctions tests de déplacement virtuel que pour les fonctions dépendant du déplacement réel recherché. Résoudre la forme variationnelle obtenue revient alors à déterminer une solution approchée qui minimise le travail total des forces appliquées sur la colonne, et ce, quel que soit les déplacements virtuels imposés à la structure vérifiant les conditions de continuité, d'intégrabilité, et d'approximation par la MEF de Galerkin.

$$\begin{aligned}
 W = & - \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \iiint_{V^e} \langle \delta \varepsilon \rangle^e \{ \sigma \}^e dV + \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \iiint_{V^e} \langle \delta u \rangle^e \{ f_V \} dV \\
 & + \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de contour}}} \iint_A \langle \delta u \rangle^e [\sigma]^e \{ n \} dA
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
 W = & - \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \iiint_{V^e} \langle \delta \hat{u} \rangle^e [B]^T [D] [B] \{ \hat{u} \}^e dV \\
 & + \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \iiint_{V^e} \langle \delta \hat{u} \rangle^e [N]^T \{ f_V \} dV \\
 & + \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de contour}}} \iint_A \langle \delta \hat{u} \rangle^e [N]^T \{ f_S \} dA
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
 W = & - \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \langle \delta \hat{u} \rangle^e \left(\iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{ \hat{u} \}^e \\
 & + \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \langle \delta \hat{u} \rangle^e \iiint_{V^e} [N]^T \{ f_V \} dV \\
 & + \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de contour}}} \langle \delta \hat{u} \rangle^e \iint_A [N]^T \{ f_S \} dA
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

L'obtention d'une solution approchée du problème, moyennant les fonctions de forme choisies, dépend exclusivement de la détermination des valeurs nodales des déplacements $\{ u_i \}^e$, tel qu'explicité aux équations (2.69) et (2.70). Les déplacements de tous les nœuds de la structure

peuvent être assemblés en un seul vecteur $\{\hat{u}\}$. Ceci a pour intérêt de transformer la forme variationnelle en une équation matricielle simple de la forme (2.71), à travers l'assemblage des termes de rigidité dans la matrice $[K]$ à l'équation (2.72), et des termes indépendants des déplacements dans le vecteur de forces, noté $\{F\}$ aux équations (2.73) à (2.75).

$$W = \langle \delta \hat{u} \rangle ([K] \{\hat{u}\} - \{F\}) \quad (2.71)$$

$$[K] = \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \left(\iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right) \quad (2.72)$$

$$\{F\} = \{F_V\} + \{F_S\} \quad (2.73)$$

$$\{F_S\} = \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de contour}}} \left(\iint_A [N]^T \{f_S\} dA \right) \quad (2.74)$$

$$\{F_V\} = \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{intérieurs}}} \left(\iiint_{V^e} [N]^T \{f_V\} dV \right) \quad (2.75)$$

Les déplacements virtuels nodaux $\langle \delta \hat{u} \rangle$ définissent donc, moyennant les fonctions de forme de l'approximation en déplacement, des fonctions de test arbitraires vérifiant les conditions de continuité, d'intégrabilité, et d'approximation par la MEF de Galerkin. En résolvant le système d'équations linéaires écrit sous la forme matricielle (2.76), les déplacements nodaux correspondant à la solution approchée de la forme variationnelle du problème sont obtenus. La solution approchée du déplacement recherché en tout point de la structure est déterminée grâce aux fonctions de forme élémentaires correspondantes, comme explicité à l'équation (2.28), à travers ces valeurs nodales $\{u_i\}$ solutions du problème variationnel (Fish & Belytschko, 2007, p. 226).

$$[K] \{\hat{u}\} = \{F\} \quad (2.76)$$

2.4.3 Prise en compte du confinement de la colonne par un chemisage en PRF

Le confinement d'une colonne a pour but de restreindre l'expansion latérale du béton, soumis à une charge axiale de compression, en appliquant une pression latérale autour de la membrure (Chaallal, 2018, p. 242). Dans les relations d'équilibre du problème, ce confinement peut être

représenté par une condition aux limites de type Cauchy, sur les éléments de contour correspondant au contact béton-PRF. Dans cette section, on étudie la contribution du confinement de la colonne avec l'introduction de cette condition aux limites à la forme variationnelle, explicitée à la section 2.4.2, du problème physique.

L'effort de compression axiale sur la colonne cause une expansion du béton, et donc un agrandissement du périmètre de sa section transversale. Cela induit un effort de traction sur le tissu en PRF suivant cette direction latérale, comme illustré à la figure 2.3. Conceptuellement, on peut soit supposer que le chemisage en PRF est parfaitement collé à la surface de la colonne en béton, ou permettre un glissement potentiel du chemisage sur cette surface de contact. Dans le premier cas, cela revient à prendre en compte la variation de la contrainte de traction sur le chemisage en fonction de l'expansion relative du béton au voisinage du point étudié. On considère cette première configuration dans notre étude, afin de mieux représenter le confinement au niveau local de la section transversale de la colonne.

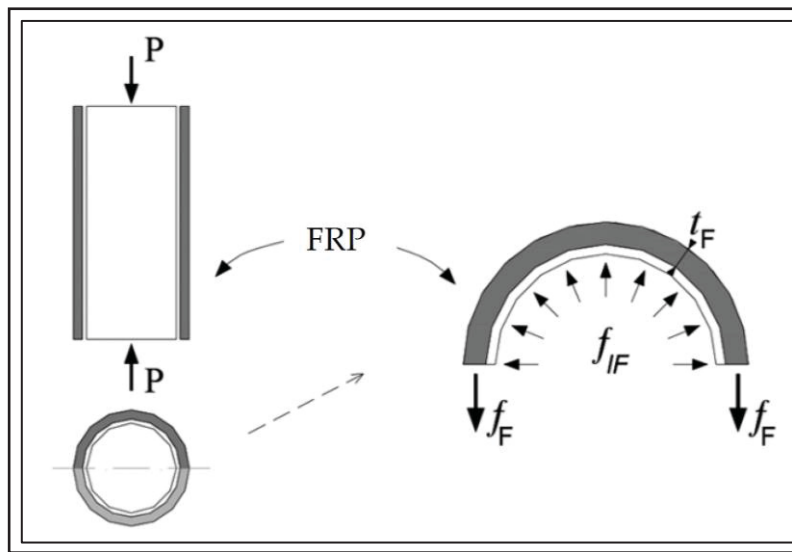


Figure 2.3 Mécanisme de confinement d'une colonne circulaire
Tirée de Chaallal (2018, p. 244)

En effet, cette variation locale de la contrainte de traction due à la forme elliptique de la colonne peut être évaluée avec précision en enrichissant les fonctions de formes avec un ajout d'un nœud supplémentaire aux éléments correspond à la condition aux limites de type Cauchy. Dans

notre cas, le choix d'un élément quadratique Q6 avec trois nœuds par arête horizontale et deux nœuds par arête verticale donne une approximation précise du rayon de courbure local du chemisage en PRF. Ce choix est aussi justifié par le chargement concentrique ne causant pas de flexion de la colonne ou de courbure suivant sa direction longitudinale. Même si on aurait à considérer une colonne élancée, l'effet de la courbure de flexion suivant cette direction secondaire peut être négligé localement. Cependant, un élément quadratique Q8 ou Q9, à 8 ou 9 nœuds respectivement, équilibrera la contribution des deux directions relativement au comportement général en flexion de la colonne.

En choisissant 3 nœuds par arête horizontale externe des éléments prismatiques – à trois dimensions – représentant le béton, on approxime, non seulement, avec précision la forme externe de la colonne, par les fonctions de formes de la transformation géométrique, comme mentionné à la section 2.4.1, mais aussi, on assure la compatibilité entre les éléments prismatiques de béton et les éléments à deux dimensions correspondant au PRF. Ainsi, les courbures de la surface de PRF sont naturellement incluses, et les réactions mutuelles entre le béton et le chemisage sont précisément capturées par le modèle.

Afin d'étudier les propriétés géométriques d'une surface en un point donné, on se place dans un repère de Darboux, défini par les vecteurs unitaires orthonormaux $\{l\}$, $\{t\}$ et $\{n\}$. Le vecteur $\{n\}$ correspond au vecteur normal à la surface au point considéré, et les vecteurs $\{l\}$ et $\{t\}$ se situent sur le plan tangent, respectivement suivant les directions longitudinales et transversales aux fibres, tel que défini à la section 2.3. On suppose que le PRF est infiniment souple suivant la direction normale $\{n\}$. Pour des fins de simplification, on se limite à une forme quadrilatère des éléments de contour pour les conditions aux limites de type Cauchy ; de sorte que toute coordonnée de référence η , fixe, de la transformation géométrique, représente une courbe parallèle à la direction $\{l\}$ des fibres du PRF. Les éléments finis prismatiques de béton en contact avec le chemisage sont choisis avec des bases isométriques initiales horizontales.

Dans le domaine d'étude des surfaces de l'espace euclidien, la première forme fondamentale, notée $[I]$, correspond à la restriction du produit scalaire euclidien standard sur le plan tangent

à la surface au voisinage d'un point. Pour un élément surfacique de contour de type Cauchy, elle s'écrit, comme explicité aux équations (2.77) à (2.79), en utilisant les dérivées $[\bar{B}_{\xi\eta}]$, des fonctions de formes de la transformation géométrique de la surface par rapport aux coordonnées ξ et η , et les coordonnées nodales $[\hat{x}]$ de l'élément de référence correspondant du PRF. Le vecteur normal $\{n\}$ est obtenu en normalisant le produit vectoriel des deux vecteur uni-lignes $\langle X_\xi \rangle$ et $\langle X_\eta \rangle$ formant la matrice jacobienne $[J]$, définie par l'équation (2.78), de la transformation des coordonnées de références ξ et η , aux coordonnées globales x , y et z .

$$[\bar{B}_{\xi\eta}] = \{\nabla_{\xi\eta} \langle \bar{N}_j \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \xi} & \cdots \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \eta} & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$[J] = \begin{Bmatrix} \langle X_\xi \rangle \\ \langle X_\eta \rangle \end{Bmatrix} = [\bar{B}_{\xi\eta}][\hat{x}] \quad (2.78)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{ll} & I_{lt} \\ I_{lt} & I_{tt} \end{bmatrix} = [J][J]^T \quad (2.79)$$

Dans le cadre de la géométrie riemannienne, les courbures normales sont déterminées à partir de la seconde forme fondamentale, notée $[II]$, en un point de la surface courbée. Dans notre cas, la direction $\{l\}$ des fibres coïncide avec la direction $\{\xi\}$ de l'élément de référence. Ce vecteur unitaire $\{l\}$ s'obtient donc en normalisant le vecteur $\langle X_\xi \rangle$, correspondant aux dérivées par rapport à la variable ξ ; vecteur uni-ligne de la matrice jacobienne $[J]$ de l'équation (2.78). Le vecteur $\{t\}$ est obtenu en multipliant vectoriellement le vecteur normal $\{n\}$ par le vecteur $\{l\}$. Grâce à ce choix de configuration, la seconde forme fondamentale peut être exprimée, à l'équation (2.81), à partir des dérivées secondes des fonctions de forme de la transformation géométrique, $[\bar{Q}_{\xi\eta}]$, par rapport aux coordonnées de référence ξ et η , comme défini à l'équation (2.80).

$$[II] = \begin{bmatrix} II_{ll} & II_{lt} \\ II_{lt} & II_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\{II\} = \begin{Bmatrix} II_{ll} \\ II_{tt} \\ II_{lt} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_{\xi\eta}][\hat{x}]\{n\} \quad (2.81)$$

$$[\bar{Q}_{\xi\eta}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \bar{N}_2}{\partial \xi^2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 \bar{N}_2}{\partial \eta^2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \bar{N}_1}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 \bar{N}_2}{\partial \xi \partial \eta} & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

La matrice de rotation $[R]$, du repère local de Darboux au repère global, est donnée à l'équation (2.85), à partir des coordonnées vecteurs $\{l\}$, $\{t\}$ et $\{n\}$. La matrice jacobienne $[j_{lt}]$ définit la transformation géométrique locale des coordonnées locales aux coordonnées de référence, portées par les directions tangentes du repère de Darboux $\langle X_\xi \rangle$ et $\langle X_\eta \rangle$. Elle se calcule à l'équation (2.88) ; en déterminant les coordonnées $\{l_{\xi\eta}\}$ et $\{t_{\xi\eta}\}$ des vecteurs respectifs $\{l\}$ et $\{t\}$, aux équations (2.86) et (2.87), dans la base formée par les deux vecteurs uni-lignes $\langle X_\xi \rangle$ et $\langle X_\eta \rangle$ de la matrice jacobienne $[J]$. Les courbures $\{\kappa\}$ s'en déduisent aux équations (2.89) à (2.91) avec la seconde forme fondamentale. On néglige ici la courbure de torsion τ_{lt} autour de la normale $\{n\}$ ainsi que le poids propre du chemisage en PRF.

$$\{l\} = \begin{Bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{Bmatrix} = [J]^T \{l_{\xi\eta}\} \quad (2.83)$$

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = [J]^T \{t_{\xi\eta}\} \quad (2.84)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} l_x & t_x & n_x \\ l_y & t_y & n_y \\ l_z & t_z & n_z \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\{l_{\xi\eta}\} = \begin{Bmatrix} l_\xi \\ l_\eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/\|\langle X_\xi \rangle\| \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\{t_{\xi\eta}\} = \begin{Bmatrix} t_\xi \\ t_\eta \end{Bmatrix} = [I]^{-1}[J]\{t\} \quad (2.87)$$

$$[j_{lt}] = \begin{bmatrix} l_\xi & t_\xi \\ l_\eta & t_\eta \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$\kappa_l = \langle l_{\xi\eta} \rangle [II] \{l_{\xi\eta}\} \quad (2.89)$$

$$\kappa_t = \langle t_{\xi\eta} \rangle [II] \{t_{\xi\eta}\} \quad (2.90)$$

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_l \\ \kappa_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \kappa_l \\ \kappa_t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

Comme à la section 2.4.2 pour un élément infinitésimal de béton, l'équilibre du tissu bidimensionnel en PRF, d'une épaisseur constante t_F , est établi à partir de la seconde loi de Newton, au voisinage du point étudié dans le repère local de Darboux porté par les vecteurs $\{l\}$, $\{t\}$ et $\{n\}$. Le principe des travaux virtuels lui est ensuite appliqué avec les mêmes fonctions tests, de déplacement virtuel que sur le béton, exprimées dans le repère global. Moyennant les rotations nécessaires entre repères, détaillées plus loin dans cette section, la méthode d'intégration par parties fournit l'expression générale, (2.92) à (2.94), de la forme faible pour le chemisage en PRF en réduisant ainsi l'ordre des dérivées sur le déplacement. Les contraintes sont, en effet, des combinaisons linéaires de dérivées de déplacement, les tissus en PRF tendus travaillant uniquement dans le domaine élastique jusqu'à la rupture.

$$W_{F,intérieure} + W_{F0} = W_{C,c} \quad (2.92)$$

$$W_{F,intérieure} = \iiint_V \langle \delta \varepsilon_F \rangle \{ \sigma_F \} dV \quad (2.93)$$

$$W_{F0} = \iiint_V \langle \delta \varepsilon_F \rangle \{ f_{F0} \} dV \quad (2.94)$$

Le vecteur $\{f_{F0}\}$ correspond aux contraintes internes initiales dans le PRF, qui peuvent représenter un confinement initial de la colonne ; et $\{\sigma_F\}$ celles induites par l'expansion latérale du béton par compression axiale concentrique. À partir de l'équation (2.58), on établit le travail $W_{C,F}$ de la force externe $\{f_{s,F}\}$ de confinement appliquée par le PRF sur le béton, qui complètera la forme variationnelle de l'équilibre de la colonne en béton confinée, par rapport à la colonne non confinée. Cette action de confinement est directement opposée à la réaction $\{f_{s,c}\}$ du béton sur le PRF de confinement ; ayant $W_{C,c}$ comme travail correspondant comme explicité à l'équation (2.95) suivante. En effet, cette réaction du béton induit, à son tour, une condition aux limites de type Cauchy affectant l'équilibre de l'élément de PRF.

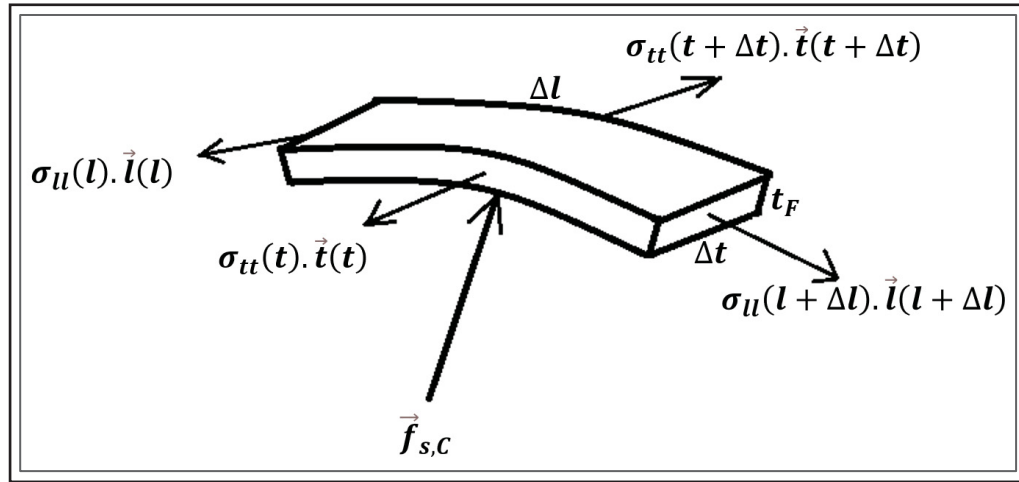


Figure 2.4 La réaction $\{f_{s,c}\}$ au confinement, reprise par les contraintes internes du PRF

$$W_{C,F} = \iint_A \langle \delta u \rangle \{f_{s,F}\} dA = - \iint_A \langle \delta u \rangle \{f_{s,C}\} dA = -W_{C,c} \quad (2.95)$$

La loi de comportement élastique de contrainte-déformation du PRF est donnée à la section 2.2 par l'équation (2.19). L'expression de la déformation dans cette équation est en général suffisante pour l'analyse d'un élément de tissu en PRF supposé géométriquement linéaire suivant les directions $\{l\}$ et $\{t\}$ au voisinage du point étudié. Théoriquement, cette hypothèse est plausible pour un confinement en PRF d'une colonne elliptique en béton, moyennant un maillage assez raffiné des éléments du chemisage.

En revanche, en présence de courbures importantes, il est plus judicieux d'introduire leur effet sur la déformation locale, comme présenté à l'équation (2.97) ci-dessous. En effet, un déplacement suivant la direction $\{n\}$ cause des déformations supplémentaires suivant les directions tangentielles $\{l\}$ et $\{t\}$ proportionnellement aux courbures correspondantes. Ceci provient de l'application de règles trigonométriques simples ; notamment, relativement à l'égalité entre les angles, formées, d'un côté, par la longueur Δl et Δt de l'élément par rapport aux rayons de courbures locales correspondantes, et par les incréments en déplacement tangentiels par rapport au déplacement normal u_n . Il en est de même pour la déformation de cisaillement qui est affecté par les déplacements tangentiels.

Cette écriture, plus précise, des déformations locales a pour avantage de fournir une convergence plus rapide du processus de calcul par éléments finis vers la solution de la forme forte du problème. On suppose un comportement uniforme du PRF sur son épaisseur t_F .

$$\{\sigma_F\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \sigma_{lt} \end{Bmatrix}^e = [D_F]\{\varepsilon_F\}^e \quad (2.96)$$

$$\{\varepsilon_F\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_l}{\partial l} - \kappa_l u_n \\ \frac{\partial u_t}{\partial t} - \kappa_t u_n \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial l} - 2\kappa_l u_l - 2\kappa_t u_t \end{Bmatrix}^e \quad (2.97)$$

$$\{u\}_{ltn}^e = \begin{Bmatrix} u_l \\ u_t \\ u_n \end{Bmatrix}^e = [R]^T \{u\}_{xyz}^e = [R]^T \{u\}^e \quad (2.98)$$

$$\langle \delta u \rangle_{ltn}^e = \langle \delta u \rangle^e [R] \quad (2.99)$$

$$W_{F,intérieur} = t_F \iint_A \langle \delta \varepsilon_F \rangle [C_F] \{\varepsilon_F\}^e dA \quad (2.100)$$

$$\{f_{F0}\} = \begin{Bmatrix} f_{Fl0} \\ f_{Ft0} \\ f_{Flt0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{Fl0} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

$$W_{F0} = t_F \iint_A \langle \delta \varepsilon_F \rangle \{f_{F0}\} dA \quad (2.102)$$

On obtient alors l'expression du travail de confinement correspondant à la condition aux limites de type Cauchy, à l'équation (2.104) suivante ; A correspondant ici à l'aire de contact entre le béton et le PRF.

$$W_{C,F} = -W_{F,intérieur} - W_{F0} \quad (2.103)$$

$$W_{C,F} = -t_F \iint_A \langle \delta \varepsilon_F \rangle [C_F] \{\varepsilon_F\}^e dA - t_F \iint_A \langle \delta \varepsilon_F \rangle \{f_{F0}\} dA \quad (2.104)$$

Les fonctions de forme des éléments de type Cauchy approximent les variables déplacements, contraintes et déformations autant pour les fonctions de la solution recherchée que pour les fonctions tests de déplacements virtuels, et ce, grâce au choix d'éléments iso-paramétrique de

la méthode de Galerkin. L'application de ces approximations s'effectue par subdivision des intégrales des travaux à travers la discrétisation du PRF par éléments finis comme suit. Et la matrice $[B_F]$, des dérivées des fonctions de forme, est écrite de telle sorte à intégrer les effets des courbures locales sur les déformations locales du PRF.

$$W_{C,F} = -t_F \sum_{\text{élément}} \iint_A \langle \delta \varepsilon_F \rangle [C_F] \{ \varepsilon_F \}^e dA - t_F \sum_{\text{élément}} \iint_A \langle \delta \varepsilon_F \rangle \{ f_{F0} \} dA \quad (2.105)$$

$$\{\hat{u}\}_{ltn}^e = \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_l^i \\ u_t^i \\ u_n^i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

$$[B_{\xi\eta}] = \{ \nabla_{\xi\eta} \langle N_i \rangle \} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$[B_{lt}] = \{ \nabla_{lt} \langle N_i \rangle \} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial l} & \frac{\partial N_2}{\partial l} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \dots \end{bmatrix} = [j_{lt}] [B_{\xi\eta}] \quad (2.108)$$

$$[B_F] = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial N_i}{\partial l} & 0 & -\kappa_l N_i & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial t} & -\kappa_t N_i & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial t} - 2\kappa_t N_i & \frac{\partial N_i}{\partial l} - 2\kappa_l N_i & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

$$[R_g] = \begin{bmatrix} [R]^T & 0 & 0 & \dots \\ 0 & [R]^T & 0 & \dots \\ 0 & 0 & [R]^T & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\{ \varepsilon_F \}^e = [B_F] \{\hat{u}\}_{ltn}^e = [B_F] [R_g] \{\hat{u}\}^e = [B_{Fg}] \{\hat{u}\}^e \quad (2.111)$$

$$W_{F,\text{intérieure}} = t_F \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de PRF}}} \langle \delta \hat{u} \rangle^e \iint_A ([B_{Fg}]^T [D_F] [B_{Fg}] dA) \{\hat{u}\}^e \quad (2.112)$$

$$W_{F0} = t_F \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de PRF}}} \langle \delta \hat{u} \rangle^e \iint_A [B_{Fg}] \{ f_{F0} \} dA \quad (2.113)$$

Les déplacements de tous les nœuds des éléments de contact béton-PRF peuvent être assemblés grâce au vecteur $\{u_i\}$, ce qui a pour intérêt de transformer la forme variationnelle en une équation matricielle simple de la forme (2.114). Ceci est effectué à travers l'assemblage des termes de rigidité du confinement en PRF dans la matrice $[K_F]$, à l'équation (2.115), et des termes indépendants des déplacements dans le vecteur de forces noté $\{F\}$, à l'équation (2.116).

$$W_{C,F} = -\langle \delta \hat{u} \rangle ([K_F] \{ \hat{u} \} + \{ F_{F0} \}) \quad (2.114)$$

$$[K_F] = t_F \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de PRF}}} \iint_A [B_{Fg}]^T [D_F] [B_{Fg}] dA \quad (2.115)$$

$$\{ F_{F0} \} = t_F \sum_{\substack{\text{éléments} \\ \text{de PRF}}} \iint_A [B_{Fg}]^T \{ f_{F0} \} dA \quad (2.116)$$

En combinant la colonne en béton avec son chemisage en PRF on obtient, la forme variationnelle de l'équation d'équilibre global du système donnée par l'équation (2.117). Les travaux virtuels ont tous été exprimés avec les mêmes fonctions test de déplacement virtuels dans le repère global de la colonne. Les déplacements virtuels nodaux $\langle \delta \hat{u} \rangle$ définissent des fonctions de test arbitraires vérifiant les conditions de continuité, d'intégrabilité, et d'approximation par la MEF de Galerkin, moyennant les fonctions de forme de l'approximation en déplacement. La solution correspondant à la forme variationnelle du problème est obtenue par résolution du système linéaire (2.118) aux nœuds du maillage, et à travers les fonctions de forme à chaque élément fini.

$$W_{\text{extérieure}} = W_{\text{volume}} + W_{\text{contour}} = W_V + W_S + W_{C,F} \quad (2.117)$$

$$([K] + [K_F]) \{ \hat{u} \} = \{ F_S \} + \{ F_V \} - \{ F_{F0} \} \quad (2.118)$$

Malgré le comportement bilinéaire prévu d'une colonne elliptique en béton soumise à une charge concentrique, avec un confinement initial adéquat, une analyse linéaire élastique est limitée à la zone élastique de béton. En effet, on ne peut capturer, avec ce type d'analyse, les variations des paramètres relatives au systèmes composite, tels que l'état de contrainte dans le béton confiné, celui du chemisage en PRF, ainsi que l'inclinaison de la pente. L'évaluation rigoureuse de ces phénomènes étant complexe, une analyse non linéaire est donc requise.

2.5 Analyse non-linéaire d'une colonne courte en béton

2.5.1 Considérations générales

Dans le cas d'une analyse non-linéaire, en plus de la non-linéarité potentielle des matériaux, les déplacements, les rotations et les déformations peuvent être assez importantes. On classe les analyses non-linéaires par la MEF sous quatre catégories. Une première catégorie correspond à une analyse avec une non-linéarité uniquement matérielle (NLM), où les déplacements, rotations et déformations sont infinitésimaux et la relation contraintes-déformations est non-linéaire. Dans le cas d'une colonne courte en béton, une analyse par la MEF avec une NLM est suffisante, et ce, due aux faibles déplacements, rotations et déformations du béton, ainsi que la présence potentielle d'un confinement par chemisage en PRF qui s'oppose à son expansion latérale, et ainsi à sa déformation axiale.

La deuxième catégorie correspond à une analyse non linéaire avec une formulation Lagrangienne totale (FLT), où les déplacements et rotations peuvent être importants, les déformations sont petites et la relation contraintes-déformation peut être linéaire ou non linéaire. Dans la troisième catégorie, on utilise une formulation Lagrangienne actualisée (FLA), les déplacements, rotations et déformations sont supposés grands, et la relation contraintes-déformation peut être linéaire, ou généralement non-linéaire, à cause des grandes déformations que subit la structure. En effet, la deuxième et la troisième catégories prennent en compte les non-linéarités géométriques du problème. Quant à la quatrième, on considère, en plus, une non-linéarité due aux effets de contact.

Généralement, une analyse non-linéaire par la MEF s'effectue par incrémentations aux charges appliquées jusqu'à l'atteinte de la charge maximale que peut reprendre le système, ou jusqu'à sa rupture. Pour le cas d'une analyse non linéaire-statique, la fréquence de chargement est considérée suffisamment faible par rapport à la fréquence naturelle de la structure, le paramètre temps est considéré comme une pseudo-variable. À chaque incrémentation, les trois conditions, d'équilibre, de compatibilité, et de la loi de comportement du matériau, doivent être satisfaites par le modèle discrétisé d'éléments finis avec l'utilisation du principe des

travaux virtuels. Cette section 2.5, relative à l'analyse non-linéaire de structure, a été principalement inspirée du livre du professeur Klaus-Jürgen Bathe sur les procédures par éléments finis pour les structures et solides (Bathe, 1996, p. 485).

Conceptuellement, en déterminant une solution à un instant t , on en déduit celle correspondante à l'instant $(t + \Delta t)$ par un processus itératif par pas de chargement. Cette procédure d'incrémentation est conduite jusqu'à l'atteinte de l'état final souhaité de chargement de la structure, et repose sur le choix d'une incrémentation des charges suffisamment petite afin de pouvoir supposer un comportement quasi-linéaire de la structure. En revanche, le choix d'un très petit pas de chargement peut causer un ralentissement important du processus de calcul, ainsi que l'accumulation d'erreurs numériques de la machine. Les équations (2.119) à (2.121) suivantes sont obtenues par cette linéarisation du problème à chaque pas de chargement, et résument le principe général de calcul, par itération i , d'une analyse non-linéaire par la MEF.

$${}^t[K]\{\Delta\hat{u}\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)} \quad (2.119)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(i-1)} + \{\Delta\hat{u}\}^{(i)} \quad (2.120)$$

$${}^{t+\Delta t}\{F\}^{(0)} = {}^t\{F\} \ ; \quad {}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(0)} = {}^t\{\hat{u}\} \quad (2.121)$$

La matrice ${}^t[K]$ correspond à la matrice de rigidité de la structure à l'instant t calculée à partir de l'application du principe des travaux virtuels, le vecteur ${}^{t+\Delta t}\{R\}$ aux efforts extérieurs appliqués à la structure à l'instant $(t + \Delta t)$, et le vecteur ${}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)}$ est le vecteur de forces nodales correspondant aux contraintes internes de l'élément à l'itération précédente. Les vecteurs ${}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(i-1)}$ et $\{\Delta\hat{u}\}^{(i)}$ correspondent respectivement aux déplacements nodaux de la structures à l'itération précédente et à la solution en incrémentation aux déplacements nodaux de l'itération i . Comme pour le cas d'une analyse linéaire, le système linéaire d'équations à résoudre à chaque itération est obtenu par application du principe des travaux virtuels et la méthode d'intégration par partie. Dans la présente section 2.5, on explicite les calculs relatifs à la transformation de la forme variationnelle du problème, au système linéaire (2.119), d'équations à résoudre à chaque itération.

2.5.2 Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels pour une analyse non-linéaire par la MEF s'écrit avec la notation d'Einstein comme suit, aux équations (2.128) et (2.130). On utilise une description Lagrangienne du mouvement de la structure, les axes cartésiens mesurant le mouvement de la structure sont stationnaires. Les équations (2.122) à (2.127) illustrent le principe de notations et des indices ; ${}^t x_i$ et ${}^t u_i$ correspondant, respectivement, à la coordonnée et au déplacement suivant la direction i à l'instant t ; $\delta_{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$ à la déformation virtuelle dans la direction i par rapport aux coordonnées dans direction j à l'instant $(t + \Delta t)$; ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$ à la composante correspondante à l'instant $(t + \Delta t)$ du tenseur de contraintes de Cauchy ; et ${}^{t+\Delta t} f_{V,i}$ et ${}^{t+\Delta t} f_{S,i}$ aux composantes à l'instant $(t + \Delta t)$ dans la direction i des efforts par unité de volume sur l'élément fini volumique et des contraintes sur l'élément de contour, respectivement.

$${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^t u_i \quad (2.122)$$

$${}^{t+\Delta t} x_i = {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i \quad (2.123)$$

$$u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i \quad (2.124)$$

$${}^0 x_{i,j} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (2.125)$$

$${}^0 u_{i,j} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (2.126)$$

$$\delta_{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t} x_i} \right) \quad (2.127)$$

$${}^{t+\Delta t} W_{int} = \iiint_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta_{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} {}^{t+\Delta t} dV \quad (2.128)$$

$${}^{t+\Delta t} W_{ext} = \iiint_{{}^{t+\Delta t} V} {}^{t+\Delta t} f_{V,i} \delta u_i {}^{t+\Delta t} dV + \iint_{{}^{t+\Delta t} A} {}^{t+\Delta t} f_{S,i} \delta u_i {}^{t+\Delta t} dA \quad (2.129)$$

$${}^{t+\Delta t} W_{int} = {}^{t+\Delta t} W_{ext} \quad (2.130)$$

Ne pouvant ni appliquer directement des incréments sur le tenseur de contraintes de Cauchy ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$ qui dépend de la configuration à l'instant $(t + \Delta t)$, ni intégrer sur un volume inconnu ${}^{t+\Delta t} V$, on introduit alors le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff, ${}^t_0[S]$, aux

équations (2.135) et (2.136), et le tenseur de déformation de Green-Lagrange ${}^t_0[\epsilon]$ aux équations (2.137) et (2.138). Ils sont exprimés en fonction du tenseur de gradient ${}^t_0[X]$ explicité aux équations (2.131) à (2.133), et du tenseur de déformation de Cauchy-Green ${}^t_0[\epsilon_{CG}]$ à l'équation (2.134) qui est invariant sous un mouvement de rotation rigide ; $[I_d]$ étant la matrice identité. Ces deux tenseurs sont symétriques, et celui de Piola-Kirchhoff ${}^t_0[S]$ est invariant sous un mouvement de corps rigide.

$${}^t_0X_{ij} = {}^t_0x_{i,j} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (2.131)$$

$${}^t_0[X] = \begin{bmatrix} {}^t_0x_{1,1} & {}^t_0x_{2,1} & {}^t_0x_{3,1} \\ {}^t_0x_{1,2} & {}^t_0x_{2,2} & {}^t_0x_{3,2} \\ {}^t_0x_{1,3} & {}^t_0x_{2,3} & {}^t_0x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_1} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_1} \\ \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_2} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_2} \\ \frac{\partial {}^t x_1}{\partial {}^0 x_3} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial {}^0 x_3} & \frac{\partial {}^t x_3}{\partial {}^0 x_3} \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

$${}^0_t[X] = {}^t_0[X]^{-1} \quad (2.133)$$

$${}^t_0[\epsilon_{CG}] = {}^t_0[X] {}^t_0[X]^T \quad (2.134)$$

$${}^t_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{t\rho} {}^t_0x_{i,m} {}^t\sigma_{nm} {}^t_0x_{j,n} \quad (2.135)$$

$${}^t_0[S] = \frac{{}^0\rho}{t\rho} {}^0_t[X]^T {}^t[\sigma] {}^0_t[X] \quad (2.136)$$

$${}^t_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t_0u_{i,j} + {}^t_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}) \quad (2.137)$$

$${}^t_0[\epsilon] = \frac{1}{2} ({}^t_0[\epsilon_{CG}] - [I_d]) \quad (2.138)$$

$${}^0\rho = t\rho \det({}^t_0[X]) \quad (2.139)$$

$${}^{t+\Delta t}_0S_{ij} = {}^t_0S_{ij} + {}^0S_{ij} \quad (2.140)$$

$${}^{t+\Delta t}_0\epsilon_{ij} = {}^t_0\epsilon_{ij} + {}^0\epsilon_{ij} \quad (2.141)$$

L'introduction de ces tenseurs dans l'expression du travail interne de la structure à l'équation (2.142) transforment l'écriture du travail et l'intégration sur le domaine par rapport aux

coordonnées de la configuration initiale. Les deux formules du travail interne ${}^tW_{int}$, d'un côté comme de l'autre de l'égalité (2.142), sont équivalentes pour tout instant t .

$${}^tW_{int} = \iiint_{t_V} {}^t\sigma_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} {}^t dV = \iiint_{0_V} {}^tS_{ij} \delta {}^t_0\varepsilon_{ij} {}^0 dV \quad (2.142)$$

2.5.3 Formulation Lagrangienne Totale (FLT)

Connaissant les déplacements dans la structure à l'instant t , la formulation Lagrangienne totale (FLT) se base sur la configuration de référence initiale, afin de calculer la solution en déplacement correspondant à la configuration à l'instant $(t + \Delta t)$. Avec cette formulation, le principe des travaux virtuels peut s'écrire comme suit aux équations (2.143) et (2.144). La configuration de la structure à l'instant t étant connue, on obtient alors l'égalité (2.145). À partir des équations (2.137) et (2.146), on détermine les incréments en déformation ${}_0\varepsilon_{ij}$, aux l'équation (2.147) à (2.149). On note que ceux-ci comportent une composante linéaire ${}_0e_{ij}$ et une composante non linéaire ${}_0n_{ij}$ par rapport aux dérivées d'incrément en déplacement ${}_0u_{i,j}$.

$${}^{t+\Delta t}W_{int} = \iiint_{0_V} {}^{t+\Delta t}_0S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t}W_{ext} \quad (2.143)$$

$${}^{t+\Delta t}W_{ext} = \iiint_{0_V} {}^{t+\Delta t}_0f_{V,i} \delta u_i {}^0 dV + \iint_{0_A} {}^{t+\Delta t}_0f_{S,i} \delta u_i {}^0 dA \quad (2.144)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_{ij} = \delta {}_0\varepsilon_{ij} \quad (2.145)$$

$${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}_0u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}_0u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}_0u_{k,i} {}^{t+\Delta t}_0u_{k,j}) \quad (2.146)$$

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0n_{ij} \quad (2.147)$$

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} + {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j}) \quad (2.148)$$

$${}_0n_{ij} = \frac{1}{2} {}^t_0u_{k,i} {}^t_0u_{k,j} \quad (2.149)$$

$$\delta {}_0\varepsilon_{ij} = \delta {}_0e_{ij} + \delta {}_0n_{ij} \quad (2.150)$$

On suppose dans ce qui suit que les efforts extérieurs appliqués sont indépendants des déplacements de la structure. On obtient donc l'expression du principe des travaux virtuels à

l'équation (2.151), dans laquelle uniquement la partie gauche de l'égalité dépend des incréments en déplacement pour une variation δu_i donnée.

$$\iiint_{0V} {}_0S_{ij} \delta {}_0\epsilon_{ij} {}^0dV + \iiint_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0n_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}W_{ext} - \iiint_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV \quad (2.151)$$

Linéariser le problème revient alors à linéariser le premier terme contenant ${}_0S_{ij} \delta {}_0\epsilon_{ij}$ de l'égalité (2.151), comme explicité à l'équation (2.152), et ce, grâce à la linéarisation (2.153) de l'écriture de ${}_0S_{ij}$ sous forme de série de Taylor par rapport à ${}_0\epsilon_{ij}$. On note que le tenseur ${}_0C_{ijrs}$ aux équations (2.153) et (2.154) correspond à loi de comportement appropriée du matériau, relative à la mesure ${}^tS_{ij}$ des contraintes. Il en résulte l'expression (2.156) de la linéarisation du terme ${}_0S_{ij} \delta {}_0\epsilon_{ij}$. À travers l'équation (2.157) obtenue à partir des relations (2.145) et (2.150), on remarque que, au début du processus itératif, le dernier terme de l'égalité (2.151), et de sa linéarisation (2.158), n'est autre que le travail externe ${}^tW_{ext}$. La partie de gauche de l'égalité est, en effet, nommée un terme de déséquilibre, et le processus itératif vise à le minimiser à chaque itération, d'où l'intérêt de le calculer avec précision.

$$\delta {}_0n_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} \delta {}_0u_{k,j} + \frac{1}{2} \delta {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \quad (2.152)$$

$${}_0S_{ij} = \left. \frac{\partial {}^tS_{ij}}{\partial {}_0\epsilon_{rs}} \right|_t {}_0e_{rs} \quad (2.153)$$

$${}_0C_{ijrs} = \left. \frac{\partial {}^tS_{ij}}{\partial {}_0\epsilon_{rs}} \right|_t \quad (2.154)$$

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \quad (2.155)$$

$${}_0S_{ij} \delta {}_0\epsilon_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} \quad (2.156)$$

$$\delta {}_0e_{ij} \big|_{u_i=0} = \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij} \big|_{u_i=0} - \delta {}_0n_{ij} \big|_{u_i=0} = \delta {}^t{}_0\epsilon_{ij} \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV + \iiint_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0n_{ij} {}^0dV \\ = {}^{t+\Delta t}W_{ext} - \iiint_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}_0e_{ij} {}^0dV \end{aligned} \quad (2.158)$$

Ce processus de calcul, entre les configurations t et $(t + \Delta t)$, est résumé avec l'écriture itérative aux expressions (2.159) et (2.160) où k est l'indice d'itération, et les relations (2.161) représentant les conditions initiales.

$$\iiint_{0V} {}_0C_{ijrs} \Delta_0 e_{rs}^{(k)} \delta_0 e_{ij} {}^0 dV + \iiint_{0V} {}^tS_{ij} \delta \Delta_0 n_{ij}^{(k)} {}^0 dV \quad (2.159)$$

$$= {}^{t+\Delta t}W_{ext} - \iiint_{0V} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}^{(k-1)} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij}^{(k-1)} {}^0 dV$$

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u_i^{(k-1)} + \Delta u_i^{(k)} \quad (2.160)$$

$${}^{t+\Delta t}u_i^{(0)} = {}^t u_i \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}^{(0)} = {}^t{}_0S_{ij} \quad ; \quad {}^{t+\Delta t}{}_0\epsilon_{ij}^{(0)} = {}^t{}_0\epsilon_{ij} \quad (2.161)$$

2.5.4 Approximation par éléments finis dans la FLT

Similairement aux sections 2.4.1 et 2.4.3, les approximations des déplacements par éléments finis par les fonctions de forme sont reportées aux équations équivalentes (2.162) et (2.163), u_i^k correspondant au déplacement du nœuds k suivant la direction i . Le travail externe pour un élément fini volumique s'écrit donc sous l'équation (2.164), et celui pour un élément fini surfacique de contour sous l'équation (2.165). La discrétisation par éléments finis des autres intégrales de travail de l'équation (2.158) peut être exprimée suivant les expressions (2.166) à (2.171), ${}_0\{S\}$ correspondant aux composantes du second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff écrits sous la notation de Voigt. On note que pour le cas d'un matériau ayant un comportement linéaire, la matrice ${}_0[C]$ à l'équation (2.169) correspond à la matrice $[D]$ de l'équation (2.10).

$${}^t u_i = \sum_k N_k {}^t u_i^k \quad (2.162)$$

$${}^t\{u\}^e = \begin{Bmatrix} {}^t u_1({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \\ {}^t u_2({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \\ {}^t u_3({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \end{Bmatrix} = [N] {}^t\{\hat{u}\}^e \quad (2.163)$$

$${}^{t+\Delta t}W_{ext,V} = \langle \delta \hat{u} \rangle^e \iiint_{0V^e} [N] {}^{t+\Delta t}{}_0\{f_V\} {}^0 dV = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^{t+\Delta t}[R_V] \quad (2.164)$$

$${}^{t+\Delta t}W_{ext,S} = \langle \delta \hat{u} \rangle^e \iint_{0A^e} [N] {}^{t+\Delta t}{}_0\{f_S\} {}^0 dA = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^{t+\Delta t}[R_S] \quad (2.165)$$

$$\sum_{i,j,r,s} \iiint_{0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{rs} \delta {}^0e_{ij} dV = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^t_0[K_L] \{\hat{u}\}^e \quad (2.166)$$

$$\sum_{i,j} \iiint_{0V} {}^t_0S_{ij} \delta {}^0n_{ij} dV = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^t_0[K_{NL}] \{\hat{u}\}^e \quad (2.167)$$

$$\sum_{i,j} \iiint_{0V} {}^t_0S_{ij} \delta {}^0e_{ij} dV = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^t_0\{F\} \quad (2.168)$$

$${}^t_0[K_L] = \iiint_{0Ve} {}^t_0[B_L]^T {}^t_0[C] {}^t_0[B_L] dV \quad (2.169)$$

$${}^t_0[K_{NL}] = \iiint_{0Ve} {}^t_0[B_{NL}]^T {}^t_0[S] {}^t_0[B_{NL}] dV \quad (2.170)$$

$${}^t_0\{F\} = \iiint_{0Ve} -{}^t_0[B_L]^T {}^t_0\{S\} dV \quad (2.171)$$

Les approximations pour les transformations géométriques, les dérivées des déplacements et des incréments, ainsi que les matrices correspondantes, sont reportées aux équations (2.172) à (2.179) suivantes. Dans notre cas, on discrétise les colonnes courtes en béton en éléments finis iso-paramétriques ; les équations ci-dessous sont, néanmoins, écrites pour le cas général où l'iso-paramétrie des éléments finis n'est pas considérée, pour des fins de rigueur. L'assemblage des matrices est conduit de manière similaire au cas d'analyse linéaire par la MEF.

$${}^0x_i = {}^0x_i(\xi_1, \xi_2, \dots) = \langle \bar{N}_1(\xi_1, \xi_2, \dots) \quad \bar{N}_2 \quad \dots \rangle \begin{Bmatrix} {}^0x_i^1 \\ {}^0x_i^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \langle \bar{N}_j \rangle^0 \{x^j\} \quad (2.172)$$

$${}^0\langle x \rangle = \langle {}^0x_1 \quad {}^0x_2 \quad {}^0x_3 \rangle = \langle \bar{N} \rangle \begin{bmatrix} {}^0x_1^1 & {}^0x_2^1 & \dots \\ {}^0x_1^2 & {}^0x_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \langle \bar{N} \rangle^0 [\hat{x}] \quad (2.173)$$

$${}^t_0u_{i,j} = \sum_k \left(\frac{\partial N_k}{\partial {}^0x_j} \right) {}^t_0u_i^k \quad (2.174)$$

$${}^0u_{i,j} = \sum_k \left(\frac{\partial N_k}{\partial {}^0x_j} \right) u_i^k \quad (2.175)$$

$$[\bar{B}_{\xi\eta\zeta}] = \{\nabla_{\xi\eta\zeta} \langle \bar{N}_j \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \xi_1} & \cdots \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \xi_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

$$[B_{\xi\eta\zeta}] = \{\nabla_{\xi\eta\zeta} \langle N_i \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_1} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

$${}^0[J] = [\bar{B}_{\xi\eta\zeta}]^0[\hat{x}] \quad (2.178)$$

$${}_0[B_x] = \{\nabla_{xyz} \langle N_i \rangle\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial^0 x_1} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial^0 x_2} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial^0 x_3} & \cdots \end{bmatrix} = {}^0[J]^{-1} [B_{\xi\eta\zeta}] \quad (2.179)$$

À partir des équations (2.147) à (2.149), on détermine les expressions des matrices ${}^t_0[B_L]$, ${}^t_0[B_{NL}]^T$, ${}^t_0[S]$, et ${}^t_0\{S\}$ dans les équations (2.180) à (2.189). Celles-ci sont écrites pour les éléments finis de béton, afin de déterminer les matrices de rigidité et les vecteurs de forces élémentaires, qui sont ensuite assemblés dans les matrices et vecteurs globaux de l'équilibre de la structure, comme pour le cas d'analyse linéaire élastique.

$${}_0N_{k,i} = \frac{\partial N_k}{\partial^0 x_i} \quad (2.180)$$

$${}_0[B] = \begin{bmatrix} \cdots & {}_0N_{k,1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & {}_0N_{k,2} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & {}_0N_{k,3} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & {}_0N_{k,1} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & {}_0N_{k,2} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & {}_0N_{k,3} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & {}_0N_{k,1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & {}_0N_{k,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & {}_0N_{k,3} & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

$${}^t_0[B_L] = {}^t_0[B_{L0}] + {}^t_0[B_{L1}] \quad (2.182)$$

$${}^t_0[B_{L0}] = {}^t_0[U_{L0}]_0[B] = \begin{bmatrix} \dots & {}_0N_{k,1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & {}_0N_{k,2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & {}_0N_{k,3} & \dots \\ \dots & {}_0N_{k,2} & {}_0N_{k,1} & 0 & \dots \\ \dots & {}_0N_{k,3} & 0 & {}_0N_{k,1} & \dots \\ \dots & 0 & {}_0N_{k,3} & {}_0N_{k,2} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.183)$$

$${}^t_0[U_{L0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.184)$$

$${}^t_0[U_{L1}] = \begin{bmatrix} {}^tu_{11} & 0 & 0 & {}^tu_{21} & 0 & 0 & {}^tu_{31} & 0 & 0 \\ 0 & {}^tu_{12} & 0 & 0 & {}^tu_{22} & 0 & 0 & {}^tu_{32} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tu_{13} & 0 & 0 & {}^tu_{23} & 0 & 0 & {}^tu_{33} \\ {}^tu_{12} & {}^tu_{11} & 0 & {}^tu_{22} & {}^tu_{21} & 0 & {}^tu_{32} & {}^tu_{31} & 0 \\ {}^tu_{13} & 0 & {}^tu_{11} & {}^tu_{23} & 0 & {}^tu_{21} & {}^tu_{33} & 0 & {}^tu_{31} \\ 0 & {}^tu_{13} & {}^tu_{12} & 0 & {}^tu_{23} & {}^tu_{22} & 0 & {}^tu_{33} & {}^tu_{32} \end{bmatrix} \quad (2.185)$$

$${}^t_0[B_{L1}] = {}^t_0[U_{L1}]_0[B] \quad (2.186)$$

$${}^t_0[B_{NL}] = {}_0[B] \quad (2.187)$$

$${}^t_0[S] = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & {}^t_0S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & {}^t_0S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t_0S_{31} & {}^t_0S_{32} & {}^t_0S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & {}^t_0S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & {}^t_0S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{31} & {}^t_0S_{32} & {}^t_0S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & {}^t_0S_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & {}^t_0S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0S_{31} & {}^t_0S_{32} & {}^t_0S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

$${}^t_0\{S\} = \left\{ \begin{matrix} {}^t_0S_{11} \\ {}^t_0S_{22} \\ {}^t_0S_{33} \\ {}^t_0S_{12} \\ {}^t_0S_{13} \\ {}^t_0S_{23} \end{matrix} \right\} \quad (2.189)$$

2.5.5 Formulation avec non-linéarité uniquement matérielle (NLM)

Étant donnée l'hypothèse de déplacements, de rotations et de contraintes infinitésimaux, pour le cas de la NLM, le principe des travaux virtuels s'écrit plus simplement, dans l'équation (2.191), en négligeant les non-linéarités géométriques dans l'équation (2.159). Avec cette hypothèse, les dérivées et les intégrations peuvent être réalisées sur toute configuration de manière équivalente. Dans ce cas, le tenseur de contraintes de Cauchy et le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff sont équivalents, comme explicité à l'équation (2.190).

Dans le cas de NLM, la discrétisation par éléments finis de la forme variationnelle du problème est détaillée aux équations (2.192) à (2.195). Le vecteur ${}^t\{\sigma\}$ correspond aux composantes du tenseur de contraintes de Cauchy à l'instant t sous la notation de Voigt, et l'expression (2.196) de la matrice $[B_L]$ est déterminée à partir des équations (2.182) à (2.186) en négligeant les non-linéarités géométriques.

$${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} \equiv {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \quad (2.190)$$

$$\iiint_V C_{ijrs} \Delta \varepsilon_{rs}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} W_{ext} - \iiint_V {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}^{(k-1)} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2.191)$$

$$\sum_{i,j,r,s} \iiint_V C_{ijrs} \varepsilon_{rs} \delta \varepsilon_{ij} dV = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^t [K] \{ \hat{u} \}^e \quad (2.192)$$

$$\sum_{i,j,r,s} \iiint_V {}^t \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \langle \delta \hat{u} \rangle^e {}^t \{ F \} \quad (2.193)$$

$${}^t [K] = \iiint_{V^e} [B_L]^T [C] [B_L] dV \quad (2.194)$$

$${}^t \{ F \} = \iiint_{V^e} [B_L]^T {}^t \{ \sigma \} dV \quad (2.195)$$

$$[B_L] = [B_{L0}] = \begin{bmatrix} \dots & {}_0 N_{k,1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & {}_0 N_{k,2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & {}_0 N_{k,3} & \dots \\ \dots & {}_0 N_{k,2} & {}_0 N_{k,1} & 0 & \dots \\ \dots & {}_0 N_{k,3} & 0 & {}_0 N_{k,1} & \dots \\ \dots & 0 & {}_0 N_{k,3} & {}_0 N_{k,2} & \dots \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

2.5.6 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton Raphson est un algorithme itératif ayant pour objectif de déterminer une approximation de la racine d'une fonction, généralement non-linéaire, au voisinage d'un point. Dans une analyse non-linéaire avec la MEF, il s'agit en effet de résoudre l'équation (2.198). Au voisinage du point de départ considéré, autour duquel se localise la solution recherchée, on linéarise le développement, en série de Taylor de la fonction, au premier ordre, à l'équation (2.199).

$${}^{t+\Delta t}\{R\} = {}^{t+\Delta t}\{R_V\} + {}^{t+\Delta t}\{R_S\} \quad (2.197)$$

$$f(\{\hat{u}\}) = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\} = 0 \quad (2.198)$$

$$0 = f({}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(k)}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \{\hat{u}\}} \right|_{t+\Delta t\{\hat{u}\}^{(k-1)}} ({}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(k-1)}) \quad (2.199)$$

$$f({}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(k)}) = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(k-1)} \quad (2.200)$$

Dans le cas où les charges appliquées ne dépendent pas du déplacement recherché, tel que pour les colonnes en béton non confinées, on obtient alors le résultats (2.201) avec ${}^{t+\Delta t}[K]^{(k-1)}$ correspondant à la matrice de rigidité tangente. Dans ce cas de chargement non-dépendant des déformations, avec la méthode de Galerkin, cette matrice de rigidité tangente est symétrique, ouvrant ainsi la possibilité de résoudre le système (2.202), linéaire en incréments de déplacements $\Delta\{\hat{u}\}^{(k)}$, avec des algorithmes moins couteux en mémoire de la machine et en temps de calcul.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \{\hat{u}\}} \right|_{t+\Delta t\{\hat{u}\}^{(k-1)}} = 0 - \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}[F]^{(k-1)}}{\partial \{\hat{u}\}} \right|_{t+\Delta t\{\hat{u}\}^{(k-1)}} = -{}^{t+\Delta t}[K]^{(k-1)} \quad (2.201)$$

$${}^{t+\Delta t}[K]^{(k-1)} \Delta\{\hat{u}\}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}[F]^{(k-1)} \quad (2.202)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(k)} = \{\Delta\hat{u}\}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\{\hat{u}\}^{(k-1)} \quad (2.203)$$

Ce processus itératif est nommé, la méthode complète de Newton-Raphson, et il présente une convergence quadratique lorsque les exigences pour sa convergence sont remplies. Cependant, ce processus peut être couteux en mémoire et temps de calcul, dû au calcul de la matrice de rigidité globale à chaque itération. La méthode modifiée de Newton-Raphson consiste à

réutiliser, durant le processus itératif, la même matrice de rigidité ${}^t[K]$, recalculée uniquement à des pas de chargement particuliers, réduisant ainsi la fréquence de son calcul. En revanche, la convergence du processus itératif avec cette méthode modifiée est impactée, n'étant plus quadratique, requérant ainsi plus d'itérations pour la même précision, et ayant moins de chance d'aboutir.

$${}^t[K]\{\Delta\hat{u}\}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}[F]^{(k-1)} \quad (2.204)$$

Généralement, cette matrice de rigidité est actualisée à chaque incrémentation de charges. La méthode modifiée de Newton-Raphson est préférée pour ces avantages par rapport à la méthode complète. Dans un cas de non-convergence, la méthode complète est alors privilégiée pour sa précision. On note aussi l'existence d'autres algorithmes itératifs de résolution de tels problèmes d'approximation pour un système non-linéaire ; ceux-ci reposent sur un principe similaire à la méthode de Newton-Raphson, qu'on nomme communément des méthodes quasi-Newton. Parmi ces méthodes, le schéma de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) paraît être la plus effective. Au lieu de la reconstruire ou d'inverser la matrice de rigidité tangente complète, la méthode approxime son inverse efficacement. En revanche, cette méthode converge moins rapidement que la méthode de Newton-Raphson. (Bathe, 1996, p. 760)

2.5.7 Prise en compte du chemisage en PRF

Dans un cas plus général où les charges appliquées dépendent des déformations de la structure, on rajoute un travail externe de contour, correspondant à cette condition aux limites de type Cauchy, à l'expression (2.143) de l'équilibre de la structure par application du principe des travaux virtuels. Pour tenir compte de ce type de travail lors du processus itératif, deux approches sont possibles. Une première approche consiste à actualiser le vecteur de force ${}^{t+\Delta t}[R]$ en considérant la configuration déterminée à l'itération précédente quant au calcul de la contribution de ces éléments de contour de type Cauchy, tel qu'explicité à l'équation (2.205).

$${}^{t+\Delta t}[K]^{(k-1)}\Delta\{\hat{u}\}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\{R\}^{(k-1)} - {}^{t+\Delta t}[F]^{(k-1)} \quad (2.205)$$

La deuxième approche vise à étudier l'équilibre de ce type d'éléments à la configuration correspondante à la solution recherchée, à l'aide de l'expression (2.165), et d'assembler cet apport, par discrétisation en éléments finis, avec la matrice de rigidité globale ${}^{t+\Delta t}[K]^{(k-1)}$, similairement à la section 2.4.3. Dans ce cas, la symétrie de cette matrice de rigidité n'est, généralement, plus garantie.

Pour le cas de confinement d'une colonne en béton, les tissus en PRF du chemisage travaillent élastiquement jusqu'à la rupture. Pour ce cas, la formulation à considérer pour ces éléments de contour, représentant les conditions aux limites de type Cauchy, correspond aux calculs à l'état élastique présentés à la section 2.4.3. L'apport en travail externe dans la formulation variationnelle est explicité à l'équation (2.114), et dépendamment de l'approche choisie, les matrices correspondantes, aux équations (2.115) et (2.116), sont ensuite assemblés avec les matrices globales pour satisfaire l'équilibre du système à chaque itération.

2.6 Critère de plasticité du béton

2.6.1 Modèle de Drucker-Prager (DP)

Le modèle de Drucker-Prager (DP) est une extension du critère de plasticité de von Mises pour des matériaux comme le béton, le sol et les roches, présentant un comportement plastique qui dépend de la contrainte subie par l'élément infinitésimal de la structure. Tout comme le modèle de von Mises, comparativement au critère de Tresca, il s'agit d'une approximation douce du critère de plasticité de Mohr-Coulomb. Ce modèle de DP est largement utilisé en ingénierie des structures, principalement, pour le matériau béton qui présente un meilleur comportement à la compression par rapport à la traction.

On définit le critère de plasticité de DP par sa fonction f_{DP} , présentée à l'équation (2.206). Ce critère est formulé dans l'espace des contraintes principales. Il délimite le comportement élastique du matériau par une surface conique, centrée par rapport la contrainte moyenne, et orientée avec un angle d'inclinaison α . Cette fonction encadre la zone d'élasticité permmissible du matériau, dépendant ainsi de l'amplitude des contraintes appliquées, à travers les invariants

I_1 et J_2 , présentés aux équations (2.207) et (2.208). En effet, ces invariants représentent les amplitudes de la pression hydrostatique, et de la contrainte effective de cisaillement.

$$f_{DP} = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (2.206)$$

$$I_1 = I_1(\{S\}) = S_{11} + S_{22} + S_{33} \quad (2.207)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}((S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + (S_{33} - S_{11})^2) + S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2 \quad (2.208)$$

Définis à travers les relations (2.209) et (2.210), respectivement, les coefficients α et k dépendent de l'angle de frottement interne φ – nommé aussi angle de friction – et de la cohésion c du matériau. Ces deux paramètres, de frottement interne et de cohésion, s'expriment généralement en fonction de la résistance à la compression du béton en MPa. En pratique, ils sont déterminés par des essais au laboratoire, ou estimés à l'aide de formules empiriques ; les équations (2.211) et (2.212) représente des exemples pour des bétons ordinaires d'une résistance inférieure ou égale à 40MPa. L'angle de frottement interne reflète la pente de la surface de plasticité dans l'espace des contraintes principales. Dans le cas d'une colonne en béton sous une compression axial, il varie généralement entre 20° et 40°. Quant à la cohésion, elle dépend de la contrainte appliquée f_c , et peut être estimée à l'aide du critère de Mohr-Coulomb. (Chen & Han, 1988, p. 95)

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (2.209)$$

$$k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (2.210)$$

$$\varphi \approx 30^\circ + 0.15f'_c \text{ ou } \varphi \approx \tan^{-1}(0.35f'^{0.2}_c) \quad (2.211)$$

$$c = \frac{f_c}{2} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \quad (2.212)$$

En un point matériel donné, représentant un élément infinitésimal, si l'évaluation de l'état de contrainte avec la fonction de plasticité de DP fournit une valeur négative, on considère que le matériau se comporte élastiquement. Dans l'espace des contraintes principales, l'état de contrainte se situerait à l'intérieur de la zone conique délimitées par le critère. En revanche, si son évaluation fournit une valeur positive, le matériau se déforme alors plastiquement et des

déformations résiduelles sont alors accumulées. La direction de l'écoulement plastique est définie par le flux plastique ; le gradient de la fonction du critère. Il est exprimé par l'équation (2.214), et son expression sous la notation de Voigt, par l'équation (2.215). La matrice s représente le tenseur déviatorique des contraintes ; et matrice S , le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff qui correspond au tenseur de Cauchy dans le cas de la NLM.

$$[s] = [S] - \frac{\text{tr}([S])}{3} [I_d] = [S] - \frac{I_1}{3} [I_d] \quad (2.213)$$

$$[F_{DP}] = [F_{DP}(\{S\})] = \left[\frac{\partial f_{DP}}{\partial S_{ij}} \right] = \alpha [I_d] + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [s] \quad (2.214)$$

$$\{F_{DP}\} = \{F_{DP}([S])\} = \begin{Bmatrix} \alpha + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(S_{11} - \frac{I_1}{3} \right) \\ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(S_{22} - \frac{I_1}{3} \right) \\ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(S_{33} - \frac{I_1}{3} \right) \\ \frac{S_{12}}{\sqrt{J_2}} \\ \frac{S_{13}}{\sqrt{J_2}} \\ \frac{S_{23}}{\sqrt{J_2}} \end{Bmatrix} \quad (2.215)$$

2.6.2 Évolution de la contrainte plastique effective dans le béton

Le modèle proposé à la section 2.2, avec l'équation (2.2), est une approximation quadratique qui épouse suffisamment bien les courbes empiriques de béton ordinaire soumis un chargement de compression axiale (Paultre, 2011, p. 66). Pour des bétons d'une résistance à la compression de 20, 30 et 40MPa, la figure 2.5-a illustre ces courbes de contraintes-déformations. Le matériau commence à plastifier à des déformations proches de l'intersection, ε_{cl} , de sa courbe avec la pente correspondant à son module d'élasticité E_c . Cette déformation est formulée par l'équation (2.216). Le béton développe alors une fissuration progressive, puis une phase de perte de résistance après que le pic de la résistance maximale du béton f'_c est atteint.

$$\varepsilon_{cl} = \left(2 - \frac{E_c \varepsilon'_c}{f'_c} \right) \quad (2.216)$$

Lorsque le béton dépasse sa limite d'élasticité, dans un essai de compression axiale, son énergie interne est dissipée principalement par microfissuration de la matrice cimentaire. Ces fissures se propagent dans les interfaces entre les granulats et la pâte de ciment, et absorbent de l'énergie en créant de nouvelles surfaces internes. Les particules de granulats et la pâte de ciment subissent ainsi des déplacements relatifs, et peuvent générer des frottements internes qui, en partie, convertissent l'énergie mécanique en chaleur.

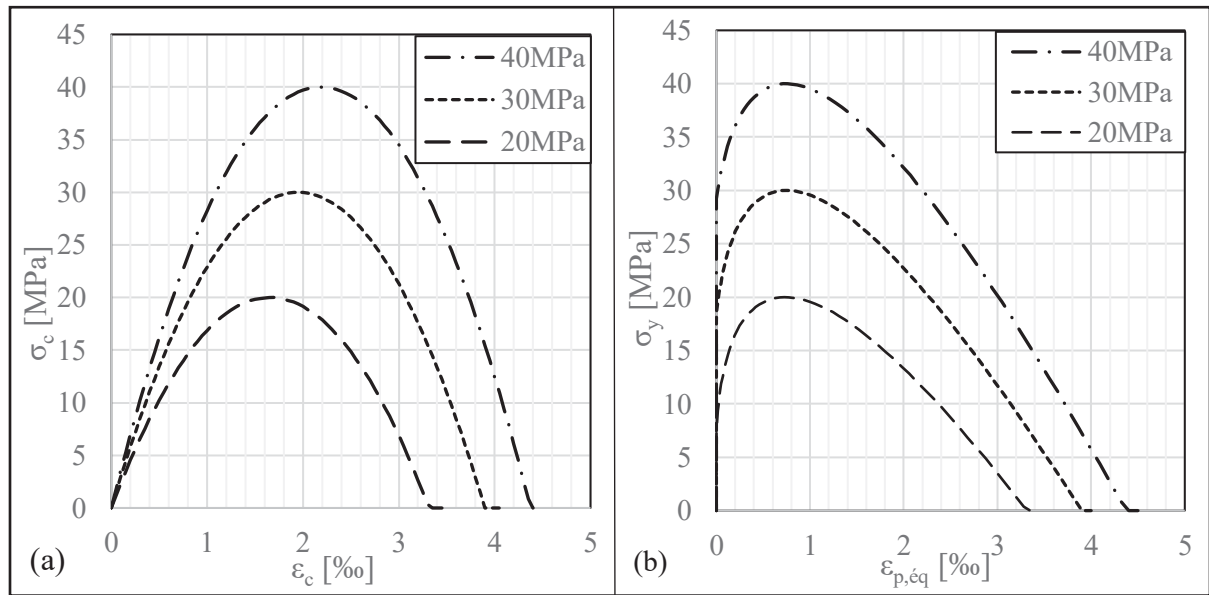


Figure 2.5 Courbes contraintes-déformations du modèle quadratique de la section 2.2 pour des bétons comprimés axialement – (a) contrainte axiale en fonction de la déformation verticale (b) contrainte plastique effective par rapport à la déformation plastique équivalente

Cette réorganisation de la microstructure du béton, se manifeste dans la macrostructure par des déformations irréversibles, $\varepsilon_{p,eq}$, qu'on nomme usuellement déformations plastiques équivalente du matériau. Celui-ci garde alors une mémoire quant à son comportement relatif aux charges externes, et présente une nouvelle limite d'élasticité, σ_y , la contrainte plastique effective du béton.

La mesure algébrique de l'évolution de la contrainte plastique effective par rapport à la déformation plastique équivalente correspond au module plastique H , défini à l'équation (2.217). La courbe représentative de cette évolution est généralement obtenue à partir d'essais expérimentaux, ou de modèles préétablis. La déformation plastique est obtenue en retranchant la déformation élastique équivalente à un comportement linéaire à la déformation totale, comme présenté aux relations (2.218) à (2.220). En effet, un module plastique positif caractérise un durcissement du matériau. Et un module plastique négatif exprime son adoucissement. Un module nul correspond alors à une plasticité parfaite, où le matériau se déforme sans augmentation de contrainte.

$$H = \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_{p,eq}} \quad (2.217)$$

$$\varepsilon_c = \ln(1 + \varepsilon_c^{essai}) \quad (2.218)$$

$$f_c = f_c^{essai} (1 + \varepsilon_c^{essai}) \quad (2.219)$$

$$\varepsilon_{p,eq} = \varepsilon_c - \frac{f_c}{E_c} \quad (2.220)$$

La figure 2.5-b est obtenue en appliquant la relation (2.220) au modèle quadratique. Elle illustre les courbes de l'évolution de la contrainte plastique effective par rapport à la déformation plastique équivalente pour des bétons ordinaires. Généralement, on remarque un durcissement du béton jusqu'à sa contrainte ultime f'_c , correspondant à la déformation totale ε'_c , puis un adoucissement menant à sa rupture. Pour des fins de rigueur quant à la modélisation numérique du comportement d'une colonne comprimée, on détermine, à partir de l'équation (2.2), l'expression de la contrainte plastique effective σ_y , ainsi que celle du module plastique H , en fonction de la déformation plastique équivalente, aux équations (2.221) à (2.225).

$$\sigma_y = f'_c \left(\frac{2}{\varepsilon'_c} \left(\frac{\sigma_y}{E_c} + \varepsilon_{p,eq} \right) - \frac{1}{(\varepsilon'_c)^2} \left(\frac{\sigma_y}{E_c} + \varepsilon_{p,eq} \right)^2 \right) \quad (2.221)$$

$$\sigma_Q = E_c \varepsilon'_c \left(1 - \frac{E_c \varepsilon'_c}{2f'_c} \right) \quad (2.222)$$

$$Q = \frac{E_c}{f'_c} (E_c \varepsilon'_c)^2 \quad (2.223)$$

$$\sigma_y = -E_c \varepsilon_{p,eq} + \sigma_Q + \sqrt{Q \varepsilon_{p,eq} + \sigma_Q^2} \quad (2.224)$$

$$H = \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon_{p,eq}} = -E_c + \frac{Q}{2\sqrt{Q \varepsilon_{p,eq} + \sigma_Q^2}} \quad (2.225)$$

La formulation du critère de plasticité de DP, f_{DP} , peut être ainsi adaptée aux résultats expérimentaux, en fixant la cohésion, c , du matériau pour correspondre à son comportement réel. Ceci revient à remplacer le coefficient k par la contrainte plastique équivalente évoluant en fonction de la charge appliquée, comme explicité aux équations (2.226) et (2.229) pour le cas d'une colonne non-confinée soumise à une compression axiale. Dans le modèle numérique, cet ajustement fournit un comportement plastique, de la colonne non confinée, fidèle à l'expérimentation.

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (2.226)$$

$$-\alpha \sigma_y + \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{3}} - k = 0 \quad (2.227)$$

$$k = \sigma_y \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha \right) \quad (2.228)$$

$$f_{DP} = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} + \sigma_y \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.229)$$

2.6.3 Règle de fluage du béton

Lors d'une étude de plasticité avec le critère de DP, le choix entre une règle de fluage associée ou non-associée peut être d'intérêt, pour obtenir des résultats réalistes quant à la plasticité du matériau. Ce choix non seulement fournit un outil mathématique supplémentaire pour contrôler sa réponse dans le modèle numérique, mais aussi, il représente un comportement physique qui peut être prononcé, pour des matériaux comme le béton, dans des configurations de chargement différentes.

Dans une règle de fluage associée, le vecteur de plasticité représentant la loi d'écoulement plastique du matériau, est aligné avec le gradient de la surface de la charge. Dans ce cas, la

déformation plastique suit exactement la direction du critère de DP. Dans une règle de fluage non-associée, la loi d'écoulement plastique est définie par une fonction distincte du critère de charge. En pratique, on choisit généralement une fonction de plasticité, g_p , plus adaptée au matériau, qui peut avoir une forme similaire au critère de plasticité, comme présenté à l'équation (2.230).

$$g_p(I_1, J_2) = \beta I_1 + \sqrt{J_2} \quad (2.230)$$

$$\beta = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)} \quad (2.231)$$

L'angle de dilatance ψ décrit la tendance d'un matériau à se dilater ou à se contracter en volume lorsqu'il est cisailé. Cet angle est, en pratique, obtenu à partir d'essais au laboratoire ou de formule empirique, et est souvent ajusté dans la MEF pour correspondre au comportement réel du matériau. Pour le cas d'un béton ordinaire soumis à un chargement en compression axiale, l'angle de dilatance dépend de sa formule et de ses constituants, et est généralement exprimé en fonction de sa résistance.

Le coefficient de frottement plastique effectif, β , conditionne l'écoulement plastique en contrôlant la manière dont le matériau se dilate ou se contracte sous chargement. Ayant une expression similaire au coefficient de frottement α du critère de DP, il est régi par la dilatance sous l'équation (2.231). Il en est de même pour la direction du flux plastique, G_p , correspondant au gradient de la fonction de la règle de fluage. Celle-ci est exprimée, par les équations (2.233) et (2.232) suivantes, respectivement, en fonction du tenseur de contraintes S et de son tenseur déviatorique s .

$$[G_p] = \left[\frac{\partial g_p}{\partial S_{ij}} \right] = [G_p(\{S\})] = \beta [I_d] + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [s] \quad (2.232)$$

$$\{G_p\} = \{G_p([S])\} = \begin{Bmatrix} \beta + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(S_{11} - \frac{I_1}{3} \right) \\ \beta + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(S_{22} - \frac{I_1}{3} \right) \\ \beta + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \left(S_{33} - \frac{I_1}{3} \right) \\ \frac{S_{12}}{\sqrt{J_2}} \\ \frac{S_{13}}{\sqrt{J_2}} \\ \frac{S_{23}}{\sqrt{J_2}} \end{Bmatrix} \quad (2.233)$$

Pour des colonnes non confinées en béton, le modèle de Drucker-Prager, avec une règle de fluage non associée, se distingue par sa robustesse entre l'intersection et le pic. Toutefois, il ne prend pas naturellement en compte l'adoucissement post-pic car repose sur une loi de durcissement ne permettant pas directement la dégradation de la résistance après le pic. Un critère de plasticité plus adapté aux particularités du béton permettrait de mieux capturer cet effet, à l'instar de ceux proposés par Mazars et Pijaudier-Cabot (1989, p. 350) et par Menétrey et Willam (1995). D'autres critères de plasticité avancés existent dans la littérature, notamment les modèles de plasticité couplés à l'endommagement, qui offrent une représentation plus réaliste du comportement post-pic du béton non-confiné. Ils sont implémentés dans les logiciels commerciaux établis tels qu'ABAQUS et ANSYS.

Pour le béton sous compression, une règle de fluage non-associée avec un angle de dilatance réduit est souvent préférable quant à la précision des prédictions de déformation, en évitant une surestimation potentielle de l'expansion latérale. Néanmoins, cela cause une asymétrie dans la matrice de rigidité, ce qui peut être préjudiciable quant à la stabilité du processus de calcul par la MEF et sa convergence, explicitée à l'équation (2.253). La détermination de la matrice de rigidité exacte n'étant pas toujours nécessaire, comme c'est le cas de la méthode modifiée de Newton Raphson, les codes établis, dans le domaine de calcul numérique par la

MEF, tels que ANSYS, construisent ingénieusement la matrice de rigidité locale, en employant les propriétés de dilatance du matériau, tout en préservant la symétrie des matrices.

2.6.4 Algorithme de retour radial

La relation constitutive décrivant la loi de comportement en contrainte-déformation du matériau s'exprime sous la relation (2.234). Dû à la non-linéarité du comportement du matériau, le tenseur de contrainte est sauvegardé en tout point d'intégration, et mis à jour à chaque itération. Une contrainte élastique d'essai ${}^{t+\Delta t}_0\{S_{test}\}^{(k)}$ est d'abord supposée afin de vérifier si le matériau a dépassé sa limite d'élasticité. Elle est calculée en considérant que le matériau reste élastique tout au long du pas d'itération k , avec l'expression (2.235). La matrice de rigidité locale $[D]$ représente un comportement élastique linéaire du matériau ; elle est donnée par l'équation (2.10) pour un matériau isotrope.

$$\{S\} = [C]\{\epsilon\} \quad (2.234)$$

$${}^{t+\Delta t}_0\{S_{test}\}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}_0\{S\}^{(k-1)} + [D] {}_0\{\Delta\epsilon\}^{(k)} \quad (2.235)$$

$$f_{DP}({}^{t+\Delta t}_0\{S_{test}\}^{(k)}) = \alpha I_{1,t} + \sqrt{J_{2,t}} - k \leq 0 \quad (2.236)$$

Le critère de plasticité de DP est d'abord évalué avec ce tenseur des contraintes d'essai à travers les invariants I_1 et J_2 . Si cette évaluation fournit une valeur négative, le comportement du matériau est considéré comme linéaire élastique ; le tenseur des contraintes élastiques d'essai est alors retenu pour l'itération suivante. Cependant, lorsque cette contrainte d'essai dépasse les limites d'élasticité définies par le critère de plasticité, à l'équation (2.236), le matériau a engagé un comportement plastique autour du point étudié, et une correction plastique est alors nécessaire.

Cette correction plastique est généralement appliquée à l'aide d'un algorithme itératif de retour radial par la méthode de Newton-Raphson. Ce processus est mené jusqu'à l'atteinte d'une convergence vers la limite élastique du matériau, qui est définie par la frontière où la fonction de plasticité de DP s'annule. Une correction plastique suffisante sur la matrice de rigidité locale C régissant la loi de comportement du matériau peut être obtenue en une seule itération.

Néanmoins, la convergence de la MEF vers la solution exacte en déplacement, dépend considérablement de la précision du calcul du résidu du problème, issu de l'application du principe des travaux virtuels, et donc de l'exactitude des valeurs des contraintes retenues à chaque itération.

L'algorithme de retour radial est donc engagé en chaque itération k pour tout point d'intégration ayant dépassé sa limite élastique définie par le critère de DP, dû à l'effet de l'ajout des nouveaux incréments en déplacement issus de la résolution de la forme faible du problème sur l'état des contraintes. En cas de plastification du matériau en un point d'intégration donné, les contraintes sont initiées par l'algorithme de retour radial au tenseur des contraintes d'essai, S_{test} , puis des corrections plastiques successives lui sont appliquées itérativement jusqu'à l'atteinte de la zone élastique permmissible avec une tolérance de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-8} sur la fonction de plasticité de DP, comme illustré aux équations (2.237) à (2.242).

$${}^{t+\Delta t}_0\{S\}^{(k)(p=0)} = {}^{t+\Delta t}_0\{S_{test}\}^{(k)} \quad (2.237)$$

$${}^{t+\Delta t}_0\{S\}^{(k)(p+1)} = {}^{t+\Delta t}_0\{S_{test}\}^{(k)} - \sum_{m=0}^p [D]\{\Delta\epsilon_p\}^{(m)} \quad (2.238)$$

$$\{\epsilon_p\}^{(k)(p+1)} = \{\epsilon_p\}^{(k)(p)} + \{\Delta\epsilon_p\}^{(p)} \quad (2.239)$$

$$\epsilon_{p,eq}^{(k)(p+1)} = \epsilon_{p,eq}^{(k)(p)} + \Delta\gamma^{(p)} \quad (2.240)$$

$$\{\Delta\epsilon_p\}^{(p)} = \Delta\gamma^{(p)}\{G_p\}^{(p)} \quad (2.241)$$

$${}^{t+\Delta t}_0\{S\}^{(k)(p+1)} = {}^{t+\Delta t}_0\{S\}^{(k)(p)} - \Delta\gamma^{(p)}[D]\{G_p\}^{(p)} \quad (2.242)$$

$$T(\Delta\gamma)^{(p)} = f_{DP}^{(p)} = \alpha I_1(S)^{(p)} + \sqrt{J_2(S)^{(p)} - \kappa(\epsilon_{p,eq})^{(p)}} \quad (2.243)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta\gamma} = \frac{\partial f_{DP}}{\partial \{S\}} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}_0\{S\}^{(k)}}{\partial \Delta\gamma} + \frac{\partial f_{DP}}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon_{p,eq}} \frac{\partial \epsilon_{p,eq}}{\partial \Delta\gamma} \quad (2.244)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta\gamma} = -\{F_{DP}\}^T [D]\{G_p\} + \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) H \quad (2.245)$$

$$\Delta\gamma^{(p)} = \frac{f_{DP}^{(p)}}{\langle F_{DP} \rangle^{(p)} [D]\{G_p\}^{(p)} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha\right) H^{(p)}} \quad (2.246)$$

Le multiplicateur plastique $\Delta\gamma$ correspond à un incrément en déformation plastique équivalente appliqué à chaque itération p sur le retour radial. Il est dérivé à l'aide de la condition de cohérence garantissant que l'état de contrainte, mis à jour, reste sur la surface d'élasticité (Humbert, Dubouchet, Fezens, & Remaud, 2003, p. 17). Son calcul est mené par la projection des contraintes sur la surface du critère, en préservant les conditions d'équilibre des efforts internes. Ceci est démontré pour le cas d'un chargement axial en compression en dérivant le résidu T de la fonction du critère par rapport au multiplicateur plastique. On suppose un α constant, étant donné qu'il varie peu autour de 35° pour un béton ordinaire. En exploitant ces relations d'équilibres, tels que (2.225), (2.229) et (2.242), son expression est déterminée aux équations (2.243) à (2.246), et est appliquée itérativement jusqu'à l'atteinte de la convergence.

À travers les corrections successives apportées avec l'équation (2.238), le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff est donc adéquatement l'actualisé. Le tenseur des déformations plastiques et la déformation plastique équivalente, ainsi que la matrice de rigidité local sont aussi sauvegardés à la fin du processus itérative de retour radial en tout point d'intégration. À cette étape, la matrice de rigidité tangente locale C est déterminée à travers les équations (2.247) à (2.253), à partir des équations (2.240), (2.242) ; et ce, pour le dernier état de contrainte obtenu à la fin du processus de retour radial. Cette matrice de rigidité local sera ensuite couplée avec l'équation (2.169), pour déterminer la matrice de rigidité tangente globale K_L par l'intégration sur le volume élémentaire.

$$df_{DP} = \frac{\partial f_{DP}}{\partial \{S\}} d(t+\Delta t_0\{S\}) + \frac{\partial f_{DP}}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{p,eq}} d\varepsilon_{p,eq} = 0 \quad (2.247)$$

$$\{F_{DP}\}^T d(t+\Delta t_0\{S\}) + \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) H d(\Delta\gamma) = 0 \quad (2.248)$$

$$d(t+\Delta t_0\{S\}) = [D] d(t+\Delta t_0\{\epsilon\}) - [D] \frac{\partial g_p}{\partial \{S\}} d(\Delta\gamma) + o\left(\left(\frac{\partial g_p}{\partial \{S\}}\right)^2\right) \quad (2.249)$$

$$\{F_{DP}\}^T \left([D] d(t+\Delta t_0\{\epsilon\}) - [D]\{G_p\} d(\Delta\gamma)\right) + \left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) H d(\Delta\gamma) = 0 \quad (2.250)$$

$$d(\Delta\gamma) = \frac{\{F_{DP}\}^T [D] d({}^{t+\Delta t}_0\{\epsilon\})}{\{F_{DP}\}^T [D] \{G_p\}^{(p)} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha\right) H} \quad (2.251)$$

$$d({}^{t+\Delta t}_0\{S\}) = \left([D] - \frac{[D] \{G_p\} \{F_{DP}\}^T [D]}{\{F_{DP}\}^T [D] \{G_p\}^{(p)} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha\right) H} \right) d({}^{t+\Delta t}_0\{\epsilon\}) \quad (2.252)$$

$${}_0[C]^{(k)} = [D] - \frac{[D] \{G_p\} ([D] \{F_{DP}\})^T}{\{F_{DP}\}^T [D] \{G_p\}^{(p)} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha\right) H} \quad (2.253)$$

2.6.5 Approximation des courbes de contrainte-déformation plastique

L'implémentation de la courbe riche – quadratique – de contrainte-déformation du béton, telle que définie à la section 2.6.2, avec le modèle de Drucker-Prager donne des résultats, relatifs à la compression de la colonne, confinée ou non confinée, fidèles à cette courbe de comportement du matériau. Les écarts des résultats, par rapport à la courbe exacte fournie au logiciel de calcul par la MEF, restent inférieurs à 5% quel que soit la taille du maillage, tel qu'explicité au chapitre 3 du mémoire. En revanche, le modèle diverge au pic de contraintes où le béton atteint sa résistance ultime f'_c du béton non-confiné.

Cette instabilité est due au module plastique H qui s'annule, en cet état de contraintes, et qui cause le processus itératif de retour radial, se basant sur la méthode de Newton-Raphson, de diverger vers des valeurs de déformations plastiques équivalentes très éloignées de la solution recherchée. Aussi, la matrice de rigidité tangentielle perd de son amplitude et devient presque singulière. La résolution du système linéaire en déplacements, par la méthode de Newton-Raphson, entre dans une phase d'instabilité, pour le béton non confiné comme pour le béton confiné avec une faible niveau de confinement, typiquement autour $0.1f'_c$, et cause la divergence du processus de calcul.

Pour contourner ce problème, une approche plus stable et efficace pour la convergence consiste à approcher le module plastique en se basant sur la pente moyenne post-élastique avec un

facteur r , comme le propose l'Eurocode 2 (FEBELCEM, 2017, p. 57). On découpe alors la courbe, de la contrainte plastique effective en fonction de la déformation plastique équivalente, en des approximations linéaires par morceaux, en adoptant quatre valeurs distinctes du module plastique H par courbe. Ces approximations sont résumées au tableau suivant, et fournissent une représentation très proche de l'expérimentation pour des bétons d'une résistance à la compression exprimée en MPa entre 20 et 40.

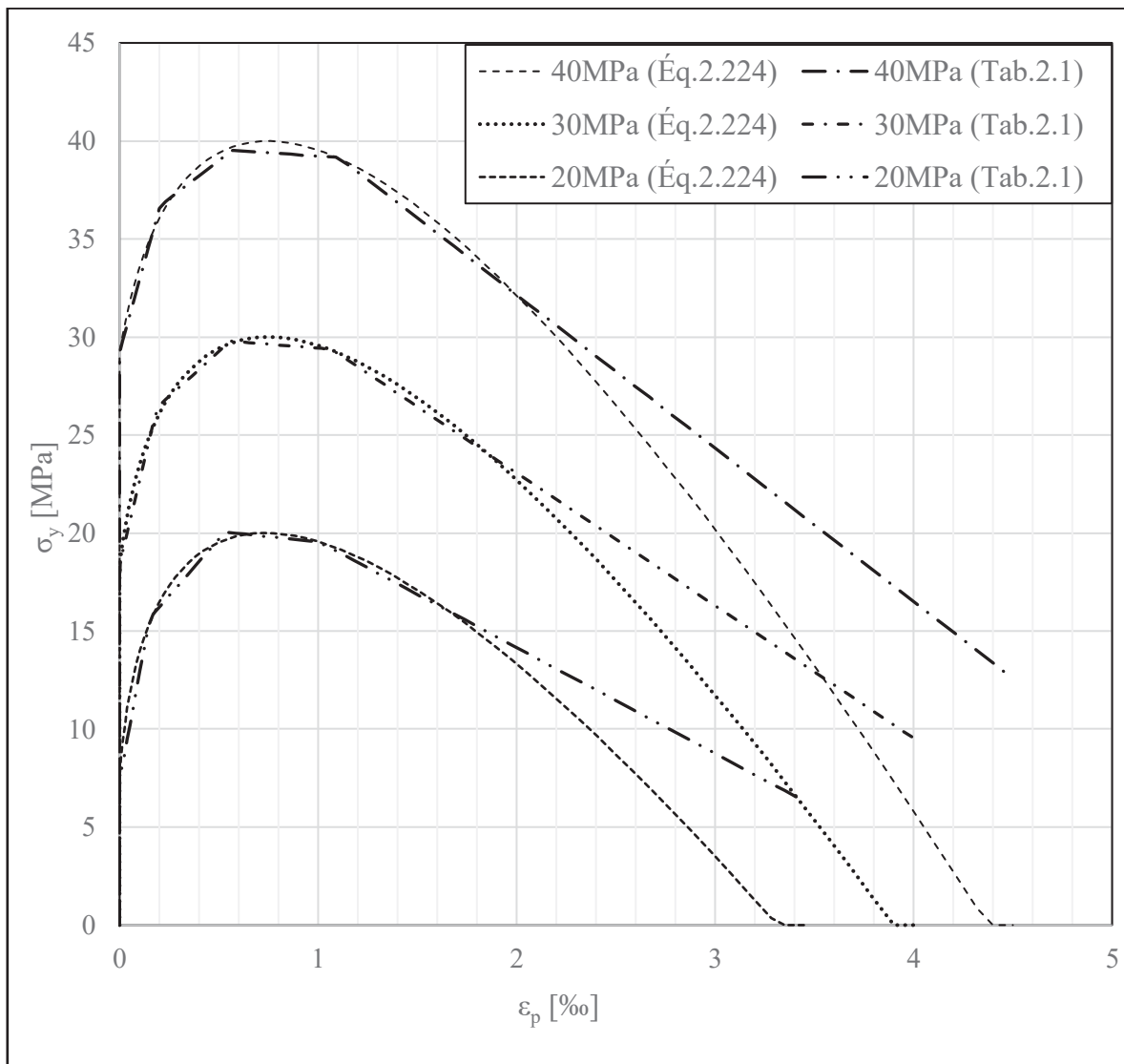


Figure 2.6 Comparaison des courbes $\sigma_y-\epsilon_{p,\acute{e}q}$ du tableau 2.1 avec celles de l'équation 2.229

Tableau 2.1 Approximation linéaire par morceaux de la courbe-contrainte déformation du béton non confiné sous une compression axial concentrique

Début de la zone	ε_c	H
Initiation de la plastification	$\varepsilon_{cl} = \varepsilon'_c \left(2 - \frac{E_c \varepsilon'_c}{f'_c} \right)$	$\frac{54.6 E_c}{f'_c + 1.842}$
Durcissement du matériau	$\frac{3\varepsilon_{cl} + 2\varepsilon'_c}{5}$	$\frac{11.7 E_c}{f'_c + 1.842}$
Juste avant le pic de contrainte à f'_c	$\frac{\varepsilon_{cl} + 5\varepsilon'_c}{6}$	$\frac{-1.04 E_c}{f'_c + 1.842}$
Durant la phase d'adoucissement	$1.15\varepsilon'_c$	$\left(-0.317 + \frac{1.46}{f'_c + 1.842} \right) E_c$

2.7 Méthode Riks-Crisfield de contrôle de longueur d'arc

La méthode de contrôle de longueur d'arc – ou méthode de Riks-Crisfield – est une approche numérique, aujourd'hui, largement utilisée dans les logiciels de calculs par la MEF, pour le suivi des chemins d'équilibre dans une analyse non-linéaire. Elle est particulièrement intéressante en présence d'instabilités postcritiques ou de phénomène d'adoucissement de la réponse mécanique de la structure. Cette méthode où la charge appliquée devient une variable additionnelle a été développée par Riks (1979), et a été ensuite adaptée par Crisfield (1981) pour une mise en œuvre plus limpide avec la MEF. On présente dans cette section une variante améliorée de cette approche.

Contrairement aux méthodes incrémentales classiques, qui imposent un contrôle direct sur la charge appliquée ou le déplacement, cette approche ajoute à ces paramètres une contrainte supplémentaire sur la distance parcourue sur la courbe correspondante. En effet, dans un problème non-linéaire, la relation entre la charge appliquée et le déplacement ne suit pas nécessairement une évolution monotone. Dans le cas d'une colonne non-confinée, ou présentant un confinement insuffisant, soumise à une charge de compression concentrique élevée, « la deuxième phase de la courbe contrainte-déformation est non linéaire est

descendante » (Chaallal, 2018, p. 245), et celle-ci ne peut être capturée en contrôlant uniquement le niveau de charge appliquée dans un code classique de calcul par la MEF.

Le critère de longueur d'arc de Riks-Crisfield évite ce problème imposant que chaque incrément de charge ou de déplacement suive une trajectoire de longueur définie dans l'espace des solutions, et ce, en traçant un arc ou une sphère qui vient intersecter la courbe de l'évolution de la réponse de la structure. On peut aussi imaginer que la courbe charge-déplacement, ou contrainte-déformation, suit un chemin courbé ; au lieu de se focaliser sur un axe particulier. On délimite, alors, l'incrément imposé à la structure par une longueur d'arc, Δl , correspondante définie par l'équation (2.254) suivante (Crisfield, 1981, p. 56). La charge appliquée à la structure devient alors un paramètre, à travers l'incrément sur le multiplicateur de charge $\Delta \lambda$, à déterminer, avec l'incrément sur les déplacements nodaux $\Delta \hat{u}$. Ce critère garantit ainsi une progression régulière de la solution sans directement imposer une charge ou des déplacements définis.

$$(\Delta \lambda)^2 + \frac{\langle \Delta \hat{u} \rangle \{ \Delta \hat{u} \}}{\beta} = (\Delta l)^2 \quad (2.254)$$

Le critère est juxtaposé à la méthode de Newton-Raphson de résolution de systèmes non linéaires, qui est appliquée sur l'équilibre physique global du système issu de l'application du principe des travaux virtuels. Au vu des problèmes de convergence que peut présenter la méthode de Newton-Raphson, plus particulièrement, au points critiques où la matrice de rigidité devient singulière, ou presque, ainsi que la nature non linéaire des matériaux utilisés et de la réponse de la structure, il y aura donc à tout moment un rayon de convergence fini avec cette approche de longueur d'arc (Dassault, 2004). Les paramètres β et Δl sont choisis de telle sorte à accommoder le comportement prévu de la structure par rapport à la stabilité numérique du processus de résolution.

Ainsi, le pas d'avancement Δl , est augmenté lorsque le système est stable, notamment aux zones où la structure se comporte élastiquement ou presque, et diminué en présence de non-linéarité importante, ou à l'approche d'autres points critiques de bifurcation, d'inflexion,

de minimums ou de maximums, locaux ou globaux de la réponse de la structure. Le paramètre β constitue un facteur d'échelle qui contrôle l'importance de l'incrément en multiplicateur de charges $\Delta\lambda$ par rapport aux déplacements nodaux, ou vice versa. En effet, un facteur d'échelle β trop grand néglige l'influence des déplacements ; la méthode se rapproche ainsi d'un contrôle de charge imposée. Des risques d'instabilité peuvent notamment se présenter en cas de pente négative. Quant à un facteur d'échelle trop petit, la variation de l'incrément $\Delta\lambda$ – du multiplicateur λ sur la charge externe de référence – devient alors faible et la convergence du processus de calcul risque d'être lente, ou même de se bloquer dans certaines configurations.

Dans notre cas, on choisit une longueur d'arc Δl autour de 5% et un facteur d'échelle β de l'ordre de 1 000 durant la phase élastique du béton ; les déplacements et les charges étant exprimées sous les conventions du système international. Ces deux paramètres seront ensuite diminués à des valeurs autour de 1% et de cinq, respectivement. On notera que la valeur de la longueur d'arc est ajustée dynamiquement et automatiquement avec la fluidité de la convergence vers les solutions d'incréments afin d'assurer une évolution cohérente et bien conditionnée du processus de résolution. Aussi, l'équation quadratique (2.254), de la contrainte sur les incréments, présentant deux solutions possibles, on choisira alors automatiquement celle qui représente le cheminement le plus logique vis-à-vis de l'évolution de la réponse de la structure ; un $\Delta\lambda$ positif représentant une augmentation de charge, et une valeur négative, sa diminution, comme c'est le cas lors de l'adoucissement du béton par fissuration.

$$[K]^{(i)}\{\Delta\hat{u}\}^{(i)} = (\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)})\{F_{ext}\} - \{F_{int}\}^{(i-1)} \quad (2.255)$$

$$\lambda^{(i)} = \lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)} \quad (2.256)$$

$$\{\hat{u}\}^{(i)} = \{\hat{u}\}^{(i-1)} + \{\Delta\hat{u}\}^{(i)} \quad (2.257)$$

$$[K]^{(i)}\{\overline{\Delta\hat{u}}\} = \{F_{ext}\} \quad (2.258)$$

$$[K]^{(i)}\{\overline{\Delta\hat{u}}\}^{(i)} = \lambda^{(i-1)}\{F_{ext}\} - \{F_{int}\}^{(i-1)} \quad (2.259)$$

$$\{\Delta\hat{u}\} = \{\overline{\Delta\hat{u}}\} + \Delta\lambda^{(i)}\{\overline{\Delta\hat{u}}\} \quad (2.260)$$

L'équation (2.255) présente la forme usuelle de l'équilibre global du système dans un cas d'étude non-linéaire ; F_{ext} étant une valeur de charge de référence, fixée pour la simulation, et λ son multiplicateur, qui est incrémenté à l'aide du critère de longueur d'arc. On subdivise les incréments en déplacements nodaux $\Delta \hat{u}$ en deux parties, et on détermine les vecteurs $\overline{\Delta \hat{u}}$ et $\overline{\overline{\Delta \hat{u}}}$ correspondants. On note que la matrice de rigidité globale K peut être triangularisée une seule fois par itération – avec une décomposition matricielle de Cholesky ou LU par exemple – pour la résolution des deux vecteurs $\overline{\Delta \hat{u}}$ et $\overline{\overline{\Delta \hat{u}}}$; et dans le cas où on utilise la méthode modifiée de Newton-Raphson $\overline{\overline{\Delta \hat{u}}}$ est déterminé une seule fois par incrémentation. La décomposition de $\Delta \hat{u}$ est ensuite introduite dans l'équation 2.254 pour déterminer l'incrément sur le facteur de charge $\Delta \lambda$ en résolvant l'équation quadratique, et pour ainsi obtenir la valeur de l'incrément de déplacement $\Delta \hat{u}$, prédite par la contrainte de longueur d'arc.

Ces valeurs $\Delta \lambda$ et de $\Delta \hat{u}$ sont ensuite vérifiées relativement à l'équilibre global du système avec l'équation (2.255) en mettant à jour la réaction interne de la structure via la matrice de rigidité K et les forces internes F_{int} en effectuant un retour radial sur l'état des contraintes en tout point d'intégration des éléments finis de la structure. La convergence du système est vérifiée à travers des critères de tolérance relatives ; et ce, sur les normes euclidiennes du résidu par rapport aux forces externes appliquées à l'itération, et des incréments de déplacement par rapport aux déplacements totaux – de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} – respectivement. Des corrections sont apportées à ces valeurs de $\Delta \lambda$ et de $\Delta \hat{u}$ en utilisant le schéma itératif de Newton-Raphson en appliquant à la fois la forme variationnelle reflétant l'équilibre global du système et le critère de longueur d'arc.

CHAPITRE 3

ÉTUDE PARMÉTRIQUE DES COLONNES ELLIPTIQUES EN BÉTON CONFINÉES PAR UN CHEMISAGE EN PRF

3.1 Propriétés matérielles et géométriques contrôlant la réponse des colonnes elliptiques confinées

Au premier chapitre, la revue de littérature a mis en évidence les principaux paramètres exerçant une influence sur la réponse de la colonne courte elliptique confinée par un chemisage en PRF et soumise à une charge de compression axiale. Ces paramètres ont été identifiés à partir des essais expérimentaux rapportés dans la littérature sur le confinement du béton par PRF, ainsi que des modèles développés dans le cadre de divers projets de recherche, tels que ceux de Teng et Lam (2002), Chaallal et al. (2003), et Spoelstra et Monti (1999). Parmi ces facteurs, l'aspect géométrique de la section elliptique, caractérisé par le ratio A/B , le rapport volumétrique du PRF par rapport au béton, ainsi que la résistance à la compression du béton, influençant son comportement plastique, jouent un rôle déterminant dans la réponse structurelle de la colonne confinée.

La Méthode des Éléments Finis est un outil numérique puissant qui approxime avec précision les solutions de problèmes complexes impliquant des équations aux dérivées partielles, en particulier pour modéliser les phénomènes physiques gouvernant le comportement des structures et des matériaux. En établissant l'équilibre de la colonne composite, l'influence de ces paramètres a été mise en évidence. L'application du principe fondamental de la statique, du principe des travaux virtuels, ainsi que la représentation et la discrétisation de la colonne et de son chemisage par la MEF, nécessitent l'introduction de variables spécifiques liées à ces facteurs. Ces dernières s'avèrent indispensables pour l'étude de ce type de structures.

Le ratio de forme peut être représenté par la courbure κ du contour cylindrique elliptique de la colonne. En effet, la normale au contour de la section transversale de la colonne ne se dirige pratiquement pas vers son centre, excepté aux sommets des axes principaux de l'ellipse, et

l'amplitude de cette excentricité est d'autant plus importante que le ratio A/B . D'autre part, grâce à la symétrie de la colonne elliptique par rapport à ces axes x et y , portant respectivement le grand diamètre A et le petit diamètre B , la colonne ne subit pas d'effet de torsion indésirable lors de son chargement par compression concentrique. Son confinement est donc symétrique par rapport aux axes principaux. En revanche, les contraintes de confinement sont non uniformes à cause de la variabilité de la courbure tout au long du pourtour de la section.

Le ratio volumétrique influence le comportement de la colonne à travers l'épaisseur t_F des couches de confinement en PRF. Cette épaisseur est en effet proportionnelle aux niveaux de confinement qu'exerce le chemisage en PRF sur le béton soumis à la compression axiale, comme l'illustre l'équation (2.104). Un nombre de couches suffisant assure donc le niveau de confinement nécessaire pour atteindre son objectif correspondant à l'augmentation significative de la capacité portante de la structure. Aussi, ce confinement s'avère proportionnel à la loi de comportement du matériau composite en PRF qui est linéaire élastique, et ce, à travers la matrice de rigidité local C_F . Dans le cas d'une colonne courte soumise à un chargement en compression concentrique, le confinement est principalement contrôlé par son module élastique E_F longitudinal à la direction des fibres.

La résistance du béton est liée à sa microstructure interne. Elle dépend des liens entre les particules de ciments, de sable et des granulats qui forment le matériau. La solidité de ces liens et le comportement interne de cette matrice se manifestent, à la macrostructure, par les caractéristiques qu'on confère au matériau béton ; relativement au frottement interne, à la cohésion et à sa fissuration progressive lors de son chargement. Ces interactions complexes sont souvent représentées par des critères de plasticité qui définissent le comportement du béton soumis à des charges de compression importantes. Plusieurs modèles ont été proposés à cette fin, et parmi les plus réputés et adéquats pour le béton, on note les modèles de Drucker-Prager (1952) et de Mohr-Coulomb (1776) qui représentent fidèlement les comportements en durcissement du matériau. Quant à son endommagement post-pic par fissuration, d'autres modèles ont été établis, tel que celui de Mazars et Pijaudier-Cabot (1989).

Par sa grande résistance à la traction et sa ductilité élevée, le confinement en PRF sert de support au béton au niveau des zones les plus vulnérables de la colonne comprimée ; notamment sur l'interface où la contrainte de traction due à l'expansion latérale du béton par l'effet de Poisson est la plus importante, limitant ainsi sa fissuration. En pratique, les déformations globales et locales des deux matériaux sont supposées compatibles à leur interface de contact. En effet, la formulation variationnelle du problème par éléments finis, établie à partir des lois d'équilibre physique aux équations (2.111), (2.115) et (2.118), met en évidence une contribution du confinement en PRF à la rigidité globale du système proportionnelle à la déformation latérale de la colonne. Cette déformation équilibre, d'une part, l'énergie libérée à travers l'expansion latérale du béton due à sa compression axiale, et d'autre part, l'énergie emmagasinée par le PRF, qui résiste à sa traction et limite cette expansion.

Dans ce chapitre on étudie rigoureusement et quantitativement l'effet de ces paramètres avec la MEF ; l'objectif étant de mettre en évidence leur degré d'influence sur le comportement d'une colonne elliptique en béton confinée par un chemisage en PRF et soumise à un chargement en compression axiale. Dans un premier temps, on valide l'outil de calcul employé quant à l'évaluation du comportement de ce type de structure. Dans un second temps, les différents résultats obtenus sont présentés et comparés aux études expérimentales. Et dans un troisième temps, un modèle analytique de conception et de calcul à la rupture des colonnes elliptiques confinées est proposé.

3.2 Programme expérimental numérique et validation du logiciel de la MEF

3.2.1 Modèle discrétisé de la colonne elliptique

Dans le cadre de ce projet, un code de calcul par la MEF, spécifiquement conçu pour les colonnes en béton confinées par un chemisage en PRF, a été entièrement développé. Les calculs par la MEF dans ce code reposent directement sur les équations établies au chapitre 2. Une gestion rigoureuse et optimisée de la structure creuse des matrices de rigidité, des vecteurs de forces, et de déplacement, est mise en place et exploitée. Un maillage automatique de la

colonne est générée en spécifiant deux paramètres ; relatifs à la densité du maillage dans le plan transversal (x, y) , et à sa densité suivant la direction longitudinale à la colonne et verticale z .

Deux types de maillage tridimensionnels pour les colonnes elliptiques sont étudiés. Les deux configurations sont constituées d'éléments finis de béton prismatiques, étagés selon la densité spécifiée suivant la direction z . Les bases isométriques, de ces éléments prismatiques, sont triangulaires et horizontales, agencées comme présenté aux figures 3.1 et 3.2 suivantes.

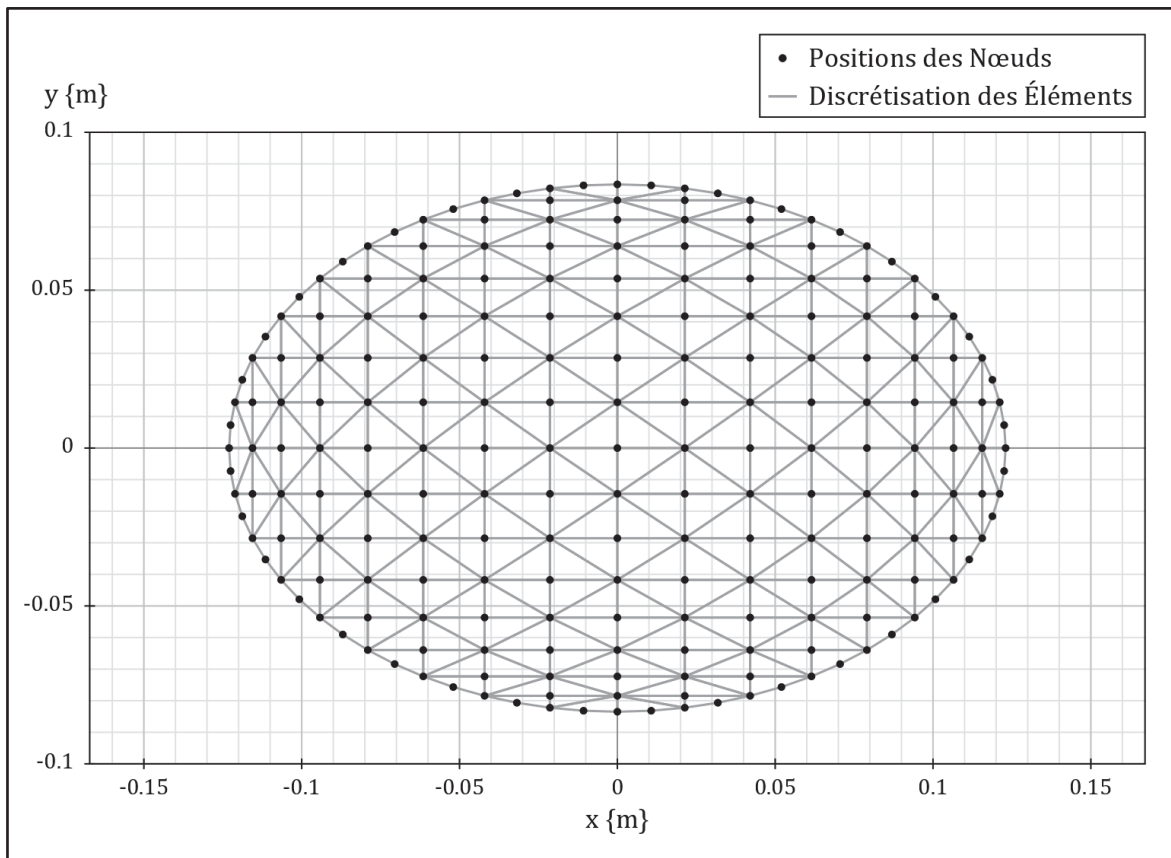


Figure 3.1 Coupe transversale au niveau des bases isométriques des éléments finis prismatique de béton pour un maillage typique EColP8

Dans la première configuration, le béton interne est modélisé à l'aide d'éléments prismatiques P6, chacun défini par six nœuds. Leurs bases isométriques horizontales sont des triangles T3, tandis que leurs facettes verticales sont des quadrilatères Q4. Au contact du PRF, un quatrième nœud est ajouté à chaque base triangulaire isométrique, transformant ces éléments en triangles

T4 pour la zone externe du béton, comme illustré à la figure 3.1. Par conséquent, les facettes verticales externes sont des quadrilatères Q6, avec trois nœuds par arête horizontale, et deux nœuds par arête verticale. Ces éléments définissent ainsi le confinement externe en PRF, servant de condition aux limites de type Cauchy.

Les éléments externes en béton sont alors des prismes à huit nœuds, d'où l'appellation EColP8 attribuée au maillage. En effet, les nœuds de la colonne elliptique confinée sont placés aux zones où il est d'intérêt d'évaluer son comportement ; avec un maillage plus raffiné au contour. Ce choix permet (1) une représentation fidèle de la géométrie elliptique de la colonne, (2) l'introduction d'une approximation quadratique de la solution en déplacement au contact avec le PRF, et (3) une précision adéquate quant à l'évaluation de la courbure du PRF.

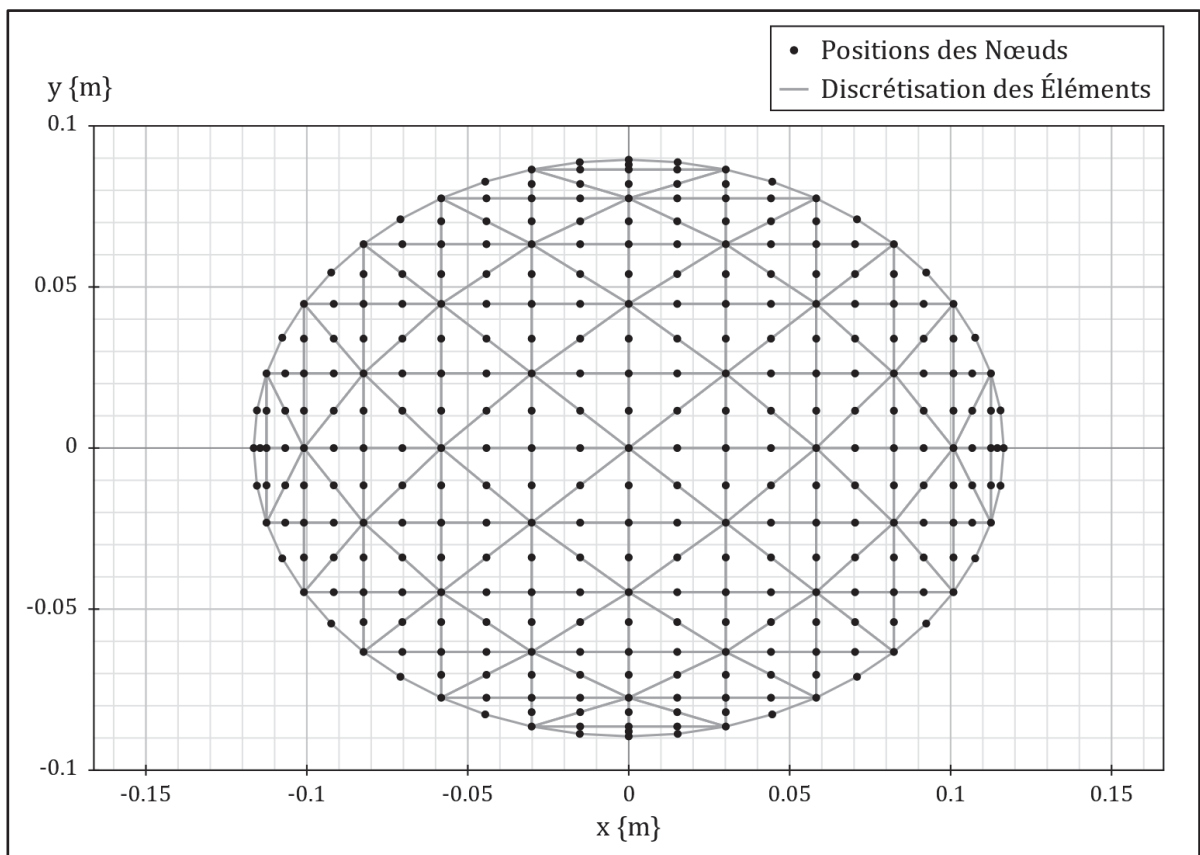


Figure 3.2 Coupe transversale au niveau des bases isométriques des éléments finis prismatique de béton pour un maillage typique EColP12

Dans la seconde configuration, le maillage du béton est exclusivement composé d'éléments prismatiques P12, à douze nœuds. Les faces isométriques de ces éléments sont des triangles quadratiques T6, tandis que leurs facettes verticales sont des quadrilatères Q6. Ce maillage, désigné sous l'appellation EColP12, présente l'avantage d'une uniformité structurelle, garantissant ainsi une meilleure stabilité numérique du processus du calcul. Les éléments sont quadratiques selon les directions x et y , et linéaires longitudinalement ; en supposant une uniformité du comportement de la colonne confinée le long de son axe de chargement. Comme dans la première configuration, le PRF, dont l'action de confinement est non-uniforme transversalement, est modélisé par des éléments de contour Q6 surfaciques.

3.2.2 Fonctions de formes et méthode d'intégration numérique

Comme détaillé au chapitre 2, les fonctions de formes sont déterminées dans le repère de référence (ξ, η, ζ) de l'élément. Ces coordonnées varient entre -1 et 1 pour les éléments quadrilatère, et entre 0 et 1 pour les éléments triangulaires. Les coordonnées de référence des nœuds successifs des éléments finis, employés dans le cadre de ce projet, sont tabulées dans le logiciel qui détermine automatiquement les fonctions de forme correspondantes. Ces coordonnées sont illustrées aux tableaux 3.1 et 3.2 suivants. On note aussi l'emploi de la méthode de Galerkin et l'utilisation exclusive d'éléments iso-paramétriques dans cette étude.

Tableau 3.1 Coordonnées de référence des éléments surfaciques de contour pour les conditions aux limites de type Neumann des charges appliquées, et de type Cauchy du PRF de confinement

Nœuds successifs	T3		T4		T6		Q6	
	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η
1	0	0	1	0	0	0	-1	-1
2	1	0	0.5	0.5	0.5	0	0	-1
3	0	1	0	1	1	0	1	-1
4	—	—	0	0	0.5	0.5	1	1
5	—	—	—	—	0	1	0	1
6	—	—	—	—	0	0.5	-1	1

Tableau 3.2 Coordonnées de référence des éléments volumiques de béton

Nœuds successifs	P6			P8			P12		
	ξ	η	ζ	ξ	η	ζ	ξ	η	ζ
1	0	0	-1	1	0	-1	0	0	-1
2	1	0	-1	0.5	0.5	-1	0.5	0	-1
3	0	1	-1	0	1	-1	1	0	-1
4	0	0	1	0	0	-1	0.5	0.5	-1
5	1	0	1	1	0	1	0	1	-1
6	0	1	1	0.5	0.5	1	0	0.5	-1
7	—	—	—	0	1	1	0	0	1
8	—	—	—	0	0	1	0.5	0	1
9	—	—	—	—	—	—	1	0	1
10	—	—	—	—	—	—	0.5	0.5	1
11	—	—	—	—	—	—	0	1	1
12	—	—	—	—	—	—	0	0.5	1

Les fonctions de forme choisies pour ces éléments sont des polynômes qui approximent les degrés de liberté ou la quantité étudiée, tels que les coordonnées globales ou locales de l'élément, ou encore le déplacement de la structure en tout point donné, en fonction de la position relative par rapport au nœud correspondant. Chaque fonction de forme prend la valeur unitaire au nœud associé et s'annule aux autres nœuds de l'élément. Ces fonctions sont universellement exprimées en fonction des coordonnées de référence.

$$\langle N_i \rangle = \langle N_i(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \langle P_j(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{bmatrix} \vdots \\ \langle P_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \rangle \\ \vdots \end{bmatrix}^{-1} = \langle P_j \rangle [\hat{P}]^{-1} \quad (3.1)$$

À cette fin, une base polynomiale $\{P_j\}$ est définie pour chaque type d'élément, comme présenté dans le tableau 3.3 suivant ; j étant l'indice correspondant à la position du monôme dans la base polynomiale, à différencier de l'indice i du nœud de l'élément dans l'équation 3.1. En évaluant les monômes de la base en chaque nœud, on obtient une matrice $[\hat{P}]$ dont l'inversion fournit les coefficients associés à chaque monôme. La matrice inverse, et la base polynomiale, sont sauvegardées et définissent ainsi les fonctions de formes de l'élément correspondant.

Tableau 3.3 Base polynômiale des éléments finis employés dans le cadre de cette étude

T3	T4	T6	Q6	P6	P8	P12
1	1	1	1	1	1	1
ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ
η	η	η	η	η	η	η
—	$\xi\eta$	$\xi\eta$	$\xi\eta$	ζ	ζ	ζ
—	—	ξ^2	ξ^2	$\xi\zeta$	$\xi\eta$	$\xi\eta$
—	—	η^2	$\xi^2\eta$	$\eta\zeta$	$\xi\zeta$	$\xi\zeta$
—	—	—	—	—	$\eta\zeta$	$\eta\zeta$
—	—	—	—	—	$\xi\eta\zeta$	ξ^2
—	—	—	—	—	—	η^2
—	—	—	—	—	—	$\xi\eta\zeta$
—	—	—	—	—	—	$\eta^2\zeta$
—	—	—	—	—	—	$\xi^2\zeta$

La détermination des matrices de rigidité et des vecteurs des forces internes et externes est effectué par intégration avec la quadrature de Gauss-Legendre. Cette méthode s'appuie sur l'évaluation d'une fonction f continue étudiée en des points particuliers de coordonnée x_i de son domaine d'étude avec des poids correspondants w_i afin d'intégrer avec précision la fonction sur ce domaine, tel qu'explicité à l'équation 3.2. Ces points sont communément nommés des points d'intégration de Gauss. Dans le cas de fonctions à une variable, avec un nombre p de points de Gauss, la méthode intègre exactement tout polynôme d'ordre inférieur ou égale à $(2p - 1)$. Une méthode d'intégration numérique avec une telle précision est indispensable et constitue une composante essentielle de tout code établi de calculs par la MEF.

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^p w_i f(x_i) \quad (3.2)$$

Cette méthode de quadrature de Gauss-Legendre en une dimension, peut être utilisée pour les quadrangles et les éléments hexaédriques, en disposant systématiquement, dans chaque directions les coordonnées de Gauss. Ces coordonnées définissent alors les nouveaux points de Gauss à considérer pour l'élément multidimensionnel. Dans ce cas, les poids correspondants aux points de Gauss s'obtiennent en multipliant les poids de chaque coordonnée du point

considéré. D'autres variantes de cette méthode existent, notamment pour différents types de fonction et d'éléments multidimensionnels, telles que la quadrature de Hammer pour les éléments triangulaires (Fortin & Garon, 2006, p. 293), la quadrature de Dunavant (1985) qui est une optimisation de la quadrature de Hammer, la quadrature de Stroud et Secrest (1966) pour les éléments tétraédriques, et celle de Felippa (2004), une optimisation pour les éléments polygonaux non standards.

Les fonctions de formes étant usuellement polynômiales, on effectue un changement de variables des coordonnées réelles de l'élément vers les coordonnées de référence (ξ, η, ζ) variant dans le cube unitaire. Cette procédure évite l'introduction d'erreurs numériques et de singularités artificielles dans les matrices étudiées dues aux ordres élevés potentiels des monômes de la base utilisée. Tout comme les fonctions de formes, les poids et les coordonnées des points de Gauss sont écrites universellement pour différentes géométries d'éléments finis dans le domaine de référence. Ils sont tabulés et disponibles dans diverses sources littéraires tels que Stroud et Secrest (1966), et Fortin et Garon (2006, pp. 295-299). Les valeurs tabulées dans le code du présent projet sont précises à la quinzième décimale près.

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\xi, \eta, \zeta) \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (3.3)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \approx \sum_{i=1}^p w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \det[J(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] \quad (3.4)$$

Pour les éléments bidimensionnels correspondants aux conditions aux limites de type Cauchy et Neumann, on utilise trois points d'intégrations pour les éléments T3, et sept points d'intégration pour chacun des éléments T4, T6 et Q6. Pour les éléments de béton, les intégrations sur les prismes P6 s'effectuent à l'aide de 18 points, et pour les éléments prismatiques P8 et P12, chacun avec 35 points. Ce nombre de points d'intégrations tient compte (1) de l'ordre approximatif des fonctions, matrices et vecteurs à intégrer, dépendants des fonctions de formes, et (2) du comportement non-linéaire de la structure.

3.2.3 Programme expérimental numérique

L'étude est réalisée avec un programme expérimental numérique comprenant une cinquantaine de simulations menées sur des sections elliptiques et circulaires. Ces tests sont répartis de manière à analyser l'impact des paramètres influençant le comportement des colonnes elliptiques soumises à des charges de compression concentriques. Ces paramètres incluent (1) l'effet de la courbure κ induit par le ratio de forme elliptique A/B , (2) l'influence de l'épaisseur t_F du chemisage qui régit la rigidité du PRF et, par conséquent, le niveau de confinement, et (3) la résistance du béton.

Tableau 3.4 Programme expérimental numérique

Échantillon	f'_c (MPa)	A/B	t_F (mm)				A (mm)	B (mm)	h_c (mm)
			témoin	1 pli	2 plis	3 plis			
B20-1,0	20	1,0	0	0,38	0,76	1,14	212	212	625
B20-1,3	20	1,3	0	0,38	0,76	1,14	233	179	625
B20-1,4	20	1,4	0	0,38	0,76	1,14	240	173	625
B20-1,5	20	1,5	0	0,38	0,76	1,14	246	167	625
B20-1,6	20	1,6	0	0,38	0,76	1,14	251	157	625
B30-1,0	30	1,0	0	0,38	0,76	1,14	212	212	625
B30-1,3	30	1,3	0	0,38	0,76	1,14	233	179	625
B30-1,4	30	1,4	0	0,38	0,76	1,14	240	173	625
B30-1,5	30	1,5	0	0,38	0,76	1,14	246	167	625
B30-1,6	30	1,6	0	0,38	0,76	1,14	251	157	625
B40-1,0	40	1,0	0	0,38	0,76	1,14	212	212	625
B40-1,3	40	1,3	0	0,38	0,76	1,14	233	179	625
B40-1,4	40	1,4	0	0,38	0,76	1,14	240	173	625
B40-1,5	40	1,5	0	0,38	0,76	1,14	246	167	625
B40-1,6	40	1,6	0	0,38	0,76	1,14	251	157	625

Le tableau 3.4 présente le programme mené au cours de cette étude paramétrique. Les colonnes elliptiques sont désignées en références aux paramètres influençant leur réponse structurelle. Un suffixe indiquant le nombre de couches de confinement est ajouté à l'identifiant de l'échantillon afin de le distinguer des autres échantillons. À titre d'exemple, l'appellation B40-1,4-2C désigne une colonne de béton de résistance à la compression de 40 MPa avec un rapport

de forme A/B de 1,4, confiné par deux plis de PRF. Cependant, une colonne B30-1,3-0C correspond à un échantillon témoin, non confiné, avec une résistance à la compression de 30 MPa et un ratio d'aspect de 1,3. On note aussi que la matrice de rigidité D du béton, à la section 2.2, a été calculée avec un coefficient de Poisson de 0,2 et une masse volumique de 2300 kg/m^3 , et que les poids propres de la colonne et de son chemisage ont été négligés dans la simulation numérique, au vu des charges importantes auxquelles la colonne est soumise.

Tableau 3.5 Propriétés des fibres de la matrice et du PRF de confinement

Fibres	Époxy	PRF
$E_f = 230 \text{ GPa}$	$E_m = 4,5 \text{ GPa}$	$E_F = 78,7 \text{ GPa}$
$\varepsilon_{fu} = 0,015$	$\varepsilon_{mu} = 0,02$	$E_t = 6,77 \text{ GPa}$
$f_{fu} = 3450 \text{ MPa}$	$f_{mu} = 30 \text{ MPa}$	$v_{lt} = 0,366$
$t_f = 0,13 \text{ mm}$	$t_m = 0,25 \text{ mm}$	$t_F/\text{pli} = 0,38 \text{ mm}$
$v_f = 0,342$	$v_m = 0,658$	$v_F = 1$
$v_f = 0,30$	$v_m = 0,40$	$v_{tl} = 0,031$
$G_f = 88,5 \text{ GPa}$	$G_m = 1,61 \text{ GPa}$	$G_{lt} = 2,42 \text{ GPa}$

Les propriétés physiques du PRF sont illustrées au tableau 3.5. Elles sont déterminées en appliquant la règle du mélange des fibres avec la matrice, présentée à la section 2.3 et tirée du livre du professeur Chaallal (2018, p. 19). On en déduit la matrice de rigidité locale de la loi de comportement élastique linéaire du PRF, au tableau 3.6.

Tableau 3.6 Composantes de la matrice de rigidité locale du PRF correspondant à la sa loi de comportement linéaire en traction

D_F : Rigidité locale		
$D_{f,11} =$	79,6	GPa
$D_{f,12} =$	2,51	GPa
$D_{f,21} =$	2,51	GPa
$D_{f,22} =$	6,85	GPa
$D_{f,33} =$	2,42	GPa

3.2.4 Validation du logiciel de calcul par la MEF avec les échantillons témoins

Les échantillons témoins ont été testés avec les deux types de maillages, EColP8 et EColP12. La méthode de Riks-Crisfield est employée afin de déterminer le comportement de la colonne durant ses phases de durcissement, ainsi que d'adoucissement. La charge de référence utilisé dans chacun des tests correspondant à la résistance en compression du béton f'_c . Ainsi, le facteur multiplicateur de charge λ correspond au pourcentage du niveau de chargement axial atteint par rapport à la résistance du béton. On débute la simulation avec une longueur d'arc Δl de 0,1 et un facteur d'échelle β de 1 000, et on diminue ce dernier à 80 durant le durcissement du béton par plastification, puis à l'unité au pic de résistance du béton à la compression et durant la phase d'adoucissement. La longueur d'arc Δl est automatiquement ajustée par le code en fonction de la fluidité du processus de convergence.

L'analyse non linéaire de la colonne non confinée est conduite à travers l'emploi de la formulation NLM qui suppose exclusivement une non-linéarité matérielle. En effet, dans le cas d'étude de colonnes en béton soumise à une compression axiale, on travaille généralement avec des petits déplacements, rotations, ainsi que déformations. En négligeant les termes associés à la non-linéarité géométrique, on assure une meilleure stabilité et fluidité du processus en introduisant moins de calculs par itération et donc moins d'erreurs numériques accumulées, ainsi qu'une meilleure gestion de la mémoire. Aussi, on travaille, dans ce cas, directement avec les tenseurs de déformation et contraintes de Cauchy.

La règle associée de fluage du béton est préférée pour des fins de stabilité du processus de calcul. Cela assure une symétrie de la matrice de rigidité du béton et un meilleur contrôle sur ses paramètres de plastification, avec notamment, un angle de frottement interne φ supposé constant de 35°. Le facteur k ainsi que le module plastique H du critère de Drucker -Prager est déterminé automatiquement, selon la courbe de contrainte-déformation choisie pour le béton. Deux options ont été testées ; (1) la courbe quadratique de la section 2.2 pour laquelle les deux variables k et H ont été déterminées à la section 2.6.2, et (2) la courbe approximative linéaire par morceaux détaillée à la section 2.6.5.

Quant aux conditions aux limites de type Dirichlet, on empêche le déplacement vertical des nœuds à la base de la colonne et les déplacements horizontaux du nœud se situant à son centre. Ce choix est pris pour des fins de comparaison avec les résultats de tests expérimentaux, qui, généralement, n'imposent pas d'encastrement à la base, et assure aussi une uniformité du comportement de la colonne sur toute sa hauteur ou presque. On évalue ainsi la qualité de la représentation du système étudié par le logiciel de calculs par la MEF.

Plusieurs densités de maillages ont été testées, afin d'évaluer la convergence du processus de calcul vers la solution longitudinale prévue, correspondante à la courbe de contrainte-déformation utilisée pour établir le critère de DP dans l'algorithme de retour radial. Cette évaluation, présentée dans le tableau (3.7) pour un béton ordinaire de 30 MPa, montre que le logiciel, ainsi que la modélisation du béton à travers le critère de DP, offrent une grande précision ; avec notamment, des erreurs relatives sur la résistance à la compression du béton de l'ordre du millième, et des erreurs relatives sur la déformation au pic inférieures à 5%, et ce, pour toutes les densités de maillages étudiées.

Tableau 3.7 Convergence du logiciel et du modèle de DP quant à la contrainte et la déformation axiales au pic, pour un échantillon témoin B30-1,3-0C avec un maillage EColP8

Densité suivant l'axe z	Densité plane (x, y)	Prismes en béton	Nœuds totaux	Degrés de libertés	f'_c (MPa) =	29,79	ϵ'_c (‰) =	1,747
					Contrainte pic (MPa)	Erreur relative	Déformation au pic (‰)	Erreur relative
10	4	560	583	1749	-29,78222	0,03%	-1,8278	4,6%
12	5	1104	1101	3303	-29,78156	0,03%	-1,8275	4,6%
15	6	2040	1680	5040	-29,78053	0,04%	-1,8272	4,6%
20	7	3760	2877	8631	-29,70268	0,30%	-1,7973	2,9%
21	7	3948	3014	9042	-29,70257	0,30%	-1,7972	2,9%
25	8	6200	4498	13494	-29,70135	0,30%	-1,7969	2,9%
30	9	9480	6603	19809	-29,77346	0,06%	-1,8248	4,5%
40	10	15680	10537	31611	-29,78980	0,01%	-1,8339	5,0%
60	11	28560	18605	55815	-29,78707	0,01%	-1,8333	5,0%

Ces écarts sur les déformations peuvent être dus à l'angle de frottement interne φ , pris constant à 35° . Cet angle affecte le coefficient de frottement interne α de la fonction de DP, et alors les déformation plastique cumulée au processus de retour radial. Les simulations réalisées avec un angle de frottement variable, allant de 35° à 20° au pic, ont permis d'obtenir des résultats encore plus précis. Cette variation de l'angle a été adoptée et appliquée aux simulations suivantes afin d'améliorer la modélisation du comportement des colonnes.

Aussi, la précision sur la contrainte axiale maximale peut être affectée par la taille des incréments, avec la méthode de Riks-Crisfield lors du changement de pente au pic, et par les tolérances considérées sur le résidu de la forme faible, et sur le déplacement ; tel est le cas des maillages avec des densités transversales de sept et huit, au tableau 3.7. Des tolérances plus strictes fourniraient des résultats plus précis. Néanmoins, le coût relatif à une telle restriction serait une convergence plus lente, et cela peut même causer la stagnation du processus au pic. Les tolérances sélectionnées, détaillées dans la section 2.7, permettent d'obtenir une précision de la résistance aux trois millièmes près, ce qui est jugé suffisant pour le cadre de cette étude.

Tous les échantillons témoins avec des bétons d'une même résistance à la compression ont démontrés des résultats similaires quant à la courbe de contrainte-déformation axiales, et ce, quel que soit le ratio de forme A/B , le type de maillage, et la densité de la discrétisation par éléments finis choisis. Les contraintes longitudinales dans le béton sont uniformes sur toute sa hauteur, et égaux à la contrainte de chargement. Ce résultat est attendu, compte tenu de l'uniformité et de la concentricité du chargement axial appliqué à la colonne non confinée.

On note que la courbe quadratique, présentée dans la section 2.6.2, lorsqu'utilisée avec le modèle de DP pour le retour radial, engendre des difficultés de convergence lors des calculs par la MEF. La pente importante de la courbe de contrainte plastique effective en fonction de la déformation plastique équivalente, illustrée à la figure 2.5-b, au début de la plasticité du béton, ainsi que la pente nulle au pic de la résistance à la compression, provoquent des oscillations numériques et une divergence du retour radial. Par conséquent, on se limite aux interpolations linéaires par morceaux. Celles-ci sont spécifiées à la section 2.6.6.

Comme illustré à la figure 3.3, on remarque que la phase ascendante de la courbe de durcissement du béton est décrite avec précision par le modèle de DP, avec notamment un durcissement plastique progressif et des pentes adoucis. En revanche, la pente de la courbe durant la phase adoucissement est très légère, comparé au comportement réel du béton. Sa capacité portante est surestimée lors de cette phase descendante et son comportement est quasi-linéaire, ce qui ne représente pas fidèlement son endommagement après pic.

L'angle de frottement interne en est partiellement la cause ; en effet, celui-ci diminue de manière significative au cours de cette phase. Cependant, cet écart est principalement dû à la nature du modèle de DP qui n'est pas adapté pour décrire le comportement du béton durant son endommagement, comme décrit à la section 2.6.3. Néanmoins, la phase d'adoucissement de la colonne est capturée grâce à l'utilisation de la méthode de longueur d'arc.

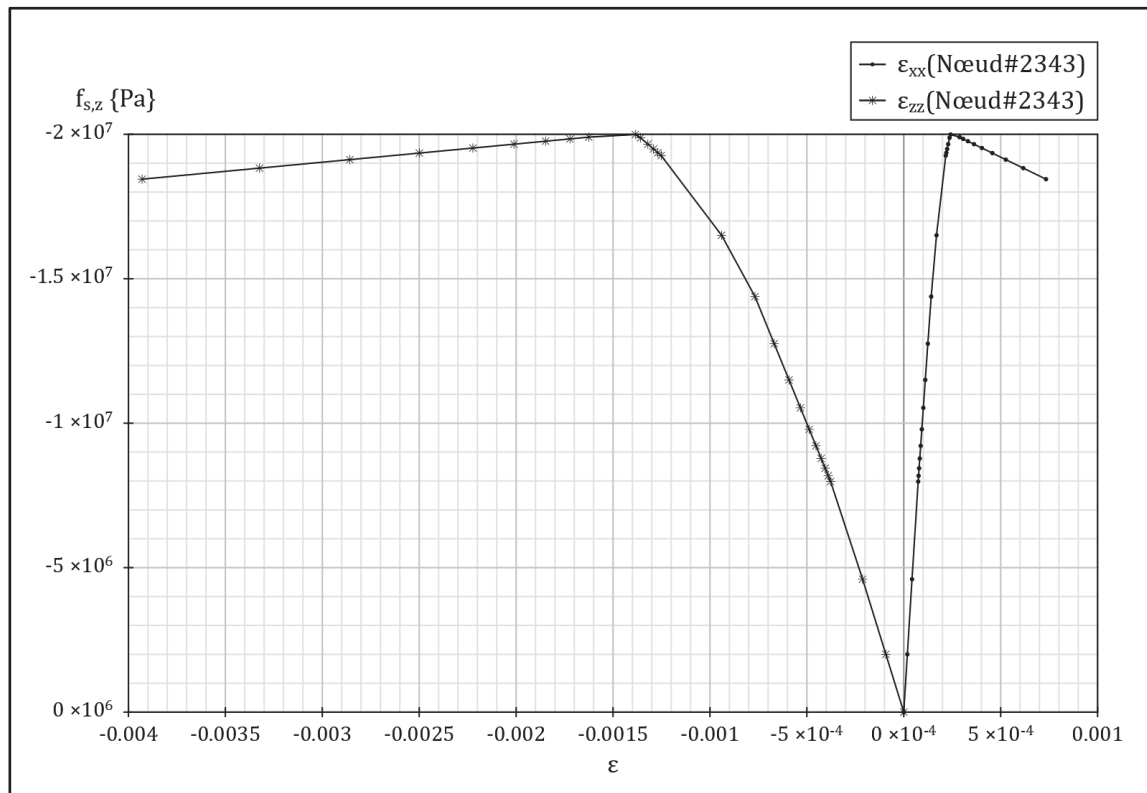


Figure 3.3 Courbe de la compression axiale $f_{s,z}$ d'une colonne B20-1,5-0C, de type EColP8 avec une densité plane de huit, au nœud 2343 à mi-hauteur à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et latérales

La déformation latérale due à l'expansion du béton par l'effet de Poisson est également similaire pour tous les ratios de formes, ainsi que pour toutes les densités et types de maillage. Les courbes obtenues à partir de l'analyse non linéaire sont parfaitement superposées. Cela s'explique par la symétrie de la section transversale par rapport aux axes x et y , et la concentricité du chargement. Il convient de noter que, dans ce cas, les positions des incréments déterminées automatiquement à l'aide de la méthode de longueur d'arc sont aussi identiques.

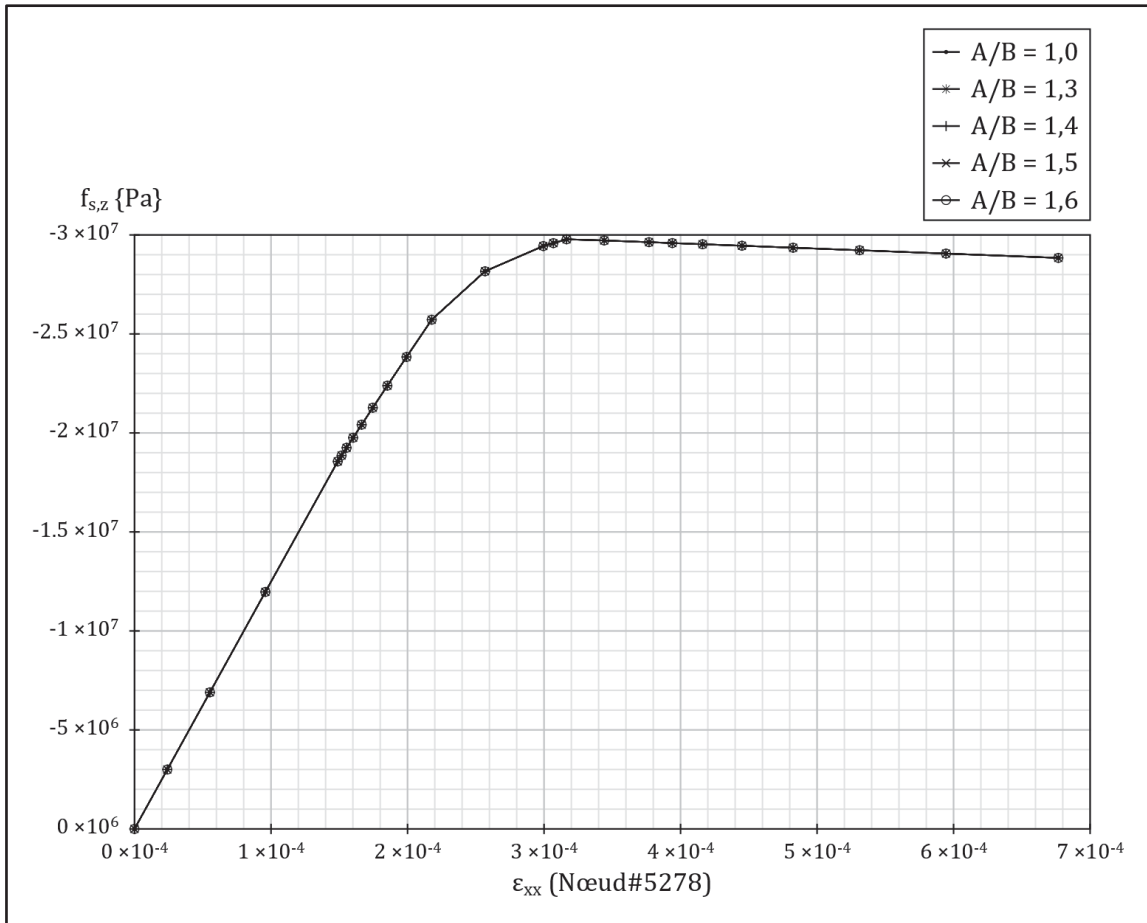


Figure 3.4 Courbe de chargement en compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons témoins B30 avec un maillage EColP8 au nœud à mi-hauteur et à l'extrémité positive du petit diamètre, en fonction de déformation latérale suivant x , avec une interpolation linéaire sur φ

L'expansion latérale du béton due à l'effet Poisson aux extrémités du grand diamètre A , illustrée à la figure 3.5 pour un échantillon témoin B30-1,6-0C, est similaire à celle observée aux extrémités du petit diamètre B , comme explicité à la figure 3.4. Tous les échantillons

témoins présentent un comportement uniforme sur l'ensemble de leur hauteur, ainsi que sur toute section transversale de la colonne.

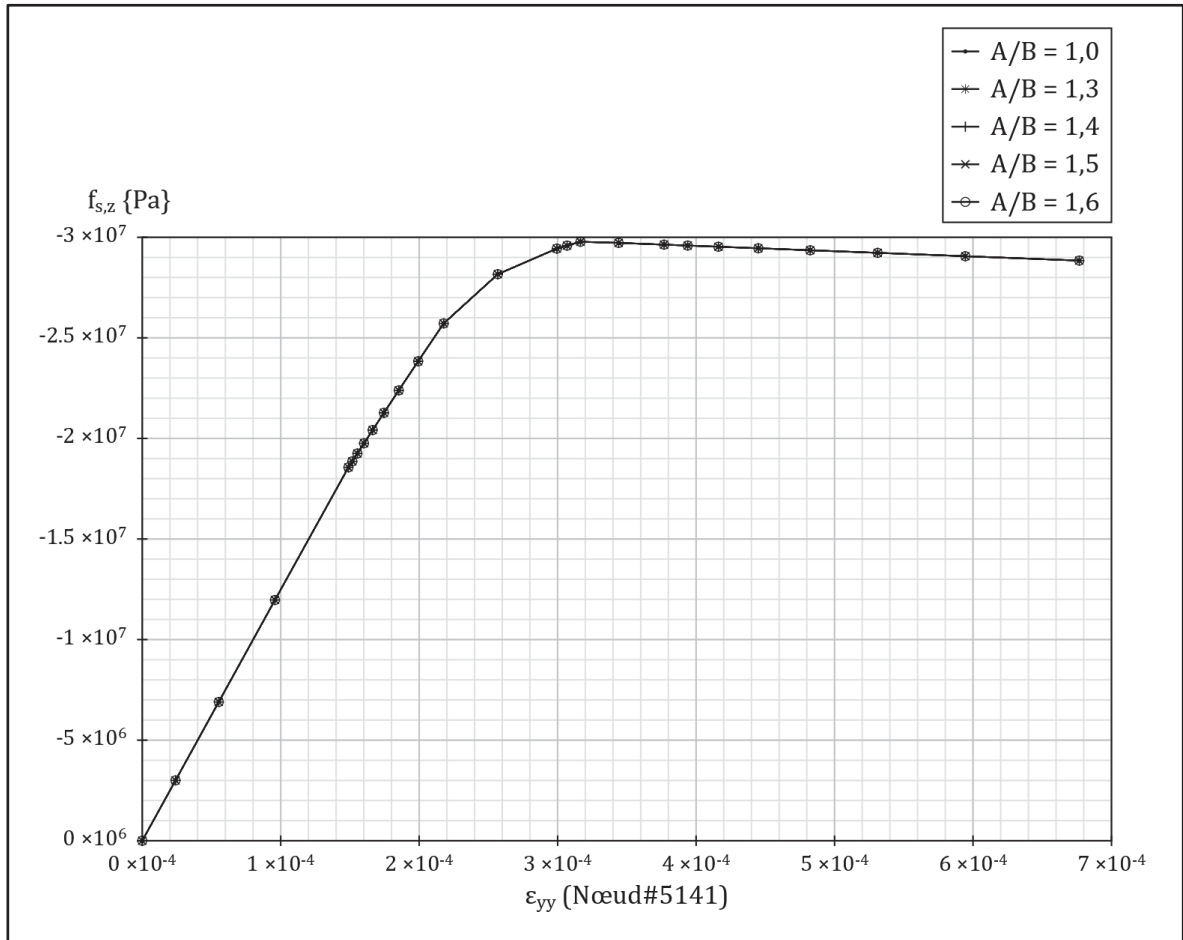


Figure 3.5 Courbe de chargement en compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons témoins B30 avec un maillage EColP8 au nœud à mi-hauteur et à l'extrémité positive du petit diamètre, en fonction de déformation latérale suivant x , avec une interpolation linéaire sur φ

On note aussi que le maillage EColP12 présente des résultats similaires au maillage EColP8 pour le même nombre de nœud. Transversalement, ce premier, entièrement quadratique, requiert plus de points d'intégration par éléments et des fonctions de forme plus riches à l'intérieur de la colonne. Avec cette configuration, la matrice de rigidité est plus dense, et la décomposition triangulaire pour la résolution de système peut requérir un coût significatif en termes de temps de calculs et de mémoire de la machine. Étant donné l'efficacité du maillage

EColP8 quant à la description du comportement de la colonne, du ciblage des zones d'étude importante, ainsi que pour sa stabilité pourvue comparable au maillage quadratique EColP12, ce dernier n'est donc employé qu'à titre comparatif et de validation durant le cadre de ce projet.

Comme prévu, le comportement des colonnes en béton non confinées est identique pour tous les échantillons témoins. Le critère de DP représente fidèlement le comportement des colonnes en béton non confinées soumises à un chargement de compression concentrique durant la phase de durcissement du béton. Quant au logiciel de la MEF, une convergence et une précision satisfaisante pour l'étude de tels structures est notable. Aussi, La méthode de longueur d'arc en conjonction avec l'interpolation linéaire par morceaux de la courbe contrainte-déformation ouvre l'accès à la phase d'adoucissement de la structure étudiée.

3.2.5 Cas des colonnes confinées par un chemisage en PRF en considérant les phases de durcissement et d'adoucissement du béton

Tout comme les échantillons témoins, les colonnes confinées ont été testés avec les deux types de maillage, EColP8 et EColP12. Les simulations par la MEF ont également été menées en utilisant la méthode complète de Newton-Raphson, combinée à la méthode de Riks-Crisfield, tout en conservant les mêmes choix pour les longueurs d'arc Δl et les coefficients d'échelle β au cours des différentes phases.

La charge de référence pour le processus incrémental correspond aussi à la résistance en compression f'_c du béton. De ce fait, le facteur multiplicateur de charge λ représente le rapport f_c/f'_c , et fournit une indication directe sur l'augmentation de la capacité portante de la colonne après le dépassement de la résistance en compression du béton non confiné. Comme indiqué au chapitre 2, les poids propres du béton et du PRF sont négligés par rapport aux charges importantes appliquées.

L'analyse non linéaire de la colonne confinée repose sur l'emploi de la formulation avec NLM, en intégrant la composante relative au travail dû au confinement en PRF dans la formulation variationnelle générale, qui est représentée par la condition aux limites de type Cauchy

présentée à la section 2.4.3. Les formulations des déformations du PRF, avec ou sans prise en compte de l'effet de second ordre des courbures locales, ont été évaluées. Naturellement, on considère les mêmes dispositions relatives aux conditions aux limites de type Neumann, pour le chargement, et de type Dirichlet, relatifs aux déplacements à la base de la colonne.

De manière similaire au cas du béton non confiné, une règle de fluage associée est utilisée pour le béton dans le cas des colonnes confinées ; et ce, afin d'assurer la stabilité du processus de calcul à chaque itération, en partie grâce à la symétrie de la matrice de rigidité résultante à chaque étape du calcul. L'angle de frottement interne a été testé avec une valeur constante, mais aussi, avec une variation linéaire, pour le béton, entre l'initiation de la plastification et l'atteinte de la résistance f'_c , comme décrite à la section précédente. La courbe considérée pour la détermination du facteur de cohésion k correspond à l'approximation linéaire par morceaux, présentée à la section 2.6.5.

Dans ce cas de colonnes confinées, avant d'atteindre le pic de résistance à la compression du béton, on observe un comportement similaire en contrainte-déformation axiale à celui des échantillons témoins, le confinement n'ayant pas d'incidence significative sur le comportement axial de la colonne. Cependant, le processus de calcul stagne au niveau du pic de résistance à la compression du béton non confiné f'_c , et ce, pour tous les échantillons et toutes les densités de maillage considérées. Des oscillations persistantes du processus de calcul à cet état de chargement nécessitent l'importation des données validées de l'incrément précédente, et une réduction progressive de la longueur d'arc à chaque tentative, jusqu'à l'arrêt de la simulation en raison de la stagnation du processus.

L'application d'une régularisation sur la matrice de rigidité globale, par l'introduction d'un amortissement proportionnel à la matrice identité, ne permet pas de résoudre la difficulté de convergence au pic de résistance. Cette approche, bien que couramment utilisée pour stabiliser certains types de simulations, ne parvient pas à surmonter les problèmes de divergence rencontrés au niveau du pic à la résistance f'_c du béton. Il est important de noter que le choix de l'angle de frottement interne n'affecte pas cette problématique de convergence, car celui-ci

influence principalement le comportement plastique en déformation, mais n'intervient pas de manière significative dans les oscillations liées à la convergence. De plus, les matrices dérivées de la formulation variationnelle du travail des forces de confinement ont été rédigées avec une grande rigueur, garantissant ainsi leur exactitude quant à la représentation des phénomènes physiques régissant l'interaction entre les deux matériaux.

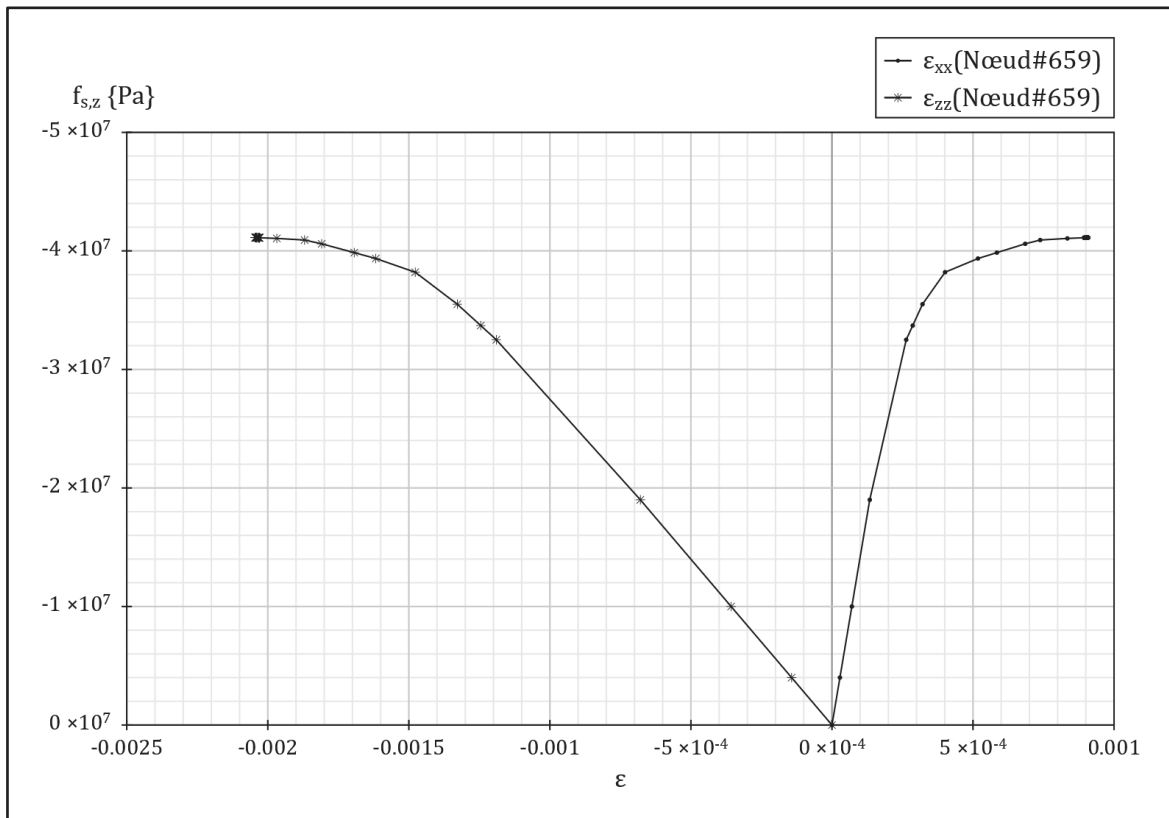


Figure 3.6 Courbe de contrainte-déformation de l'échantillon B40-1,3-3C au nœud à mi-hauteur et à l'extrémité positive du petit diamètre, avec interpolation linéaire sur φ

La méthode de longueur d'arc, utilisée pour mieux gérer l'incrémentation en chargement et déformations, est censée permettre de simuler une éventuelle phase d'adoucissement du béton confiné, si un tel phénomène se produit dans le cadre de l'étude numérique. Toutefois, cette méthode rencontre des difficultés de convergence lorsqu'il s'agit de modéliser la phase de plasticité complète.

Un aspect crucial de l'analyse a permis de mettre en évidence une caractéristique fondamentale du confinement du béton. Après avoir atteint sa résistance à la compression f'_c , le béton confiné entre dans un état proche de la plastification totale, presque parfaite. Cela signifie que les déformations plastiques du béton deviennent prédominantes, rendant sa capacité à supporter une augmentation supplémentaire de la contrainte de compression axiale significativement réduite, indépendamment de la présence du confinement.

Bien que le béton soit confiné, le processus de retour radial, basé sur l'algorithme itératif de Newton-Raphson, rencontre des problèmes de convergence, malgré l'utilisation d'une courbe d'interpolation linéaire par morceaux associée au critère de DP. Des oscillations persistantes maintiennent le matériau béton entre les phases de durcissement et d'adoucissement, même après la réduction de la longueur d'arc et du coefficient d'échelle β . Concrètement, le processus de calcul empêche le matériau béton d'atteindre la phase d'adoucissement, étant donné l'état de contrainte nécessaire pour activer le confinement.

Au dépassement du pic, le béton ne restera en équilibre que grâce à l'effet stabilisateur du confinement. À ce stade, le chemisage en PRF s'active alors pleinement, tandis que le béton, ayant atteint sa limite de résistance, se retrouve comprimé entre son confinement et la charge externe de compression appliquée. Si le PRF est capable de résister aux charges excédentaires transmises par le béton, il limite l'expansion plastique excessive et assure l'équilibre global du système. En revanche, lorsque le PRF atteint sa limite d'élasticité f_F , l'ensemble du système composite atteint sa limite de rupture (Benzeguir et al., 2024, p. 9).

3.2.6 Courbes de contrainte-déformation du béton pour les colonnes confinées

Durant les phases d'élasticité et de durcissement du béton, l'impact du PRF de confinement sur la rigidité du système est négligeable. Ceci est dû à la rigidité axiale du béton qui est bien plus importante que celle pourvue par le PRF. Similairement, à l'atteinte de la résistance maximale du béton, sa rigidité axiale devient négligeable devant celle pourvue par le PRF au système composite.

Cela peut être représenté par une courbe de contrainte-déformation du matériau béton, avec un palier plastique ; ou pratiquement et plus précisément, une très faible rigidité du béton relativement au PRF après son activation complète. Ce choix assure une bonne convergence du processus de calcul avec la méthode de Newton-Raphson en évitant l'utilisation d'une pente nulle de contrainte-déformation au pic. En effet, caractériser le béton par une pente faible est plus judicieux et représentatif du comportement réel du béton de la structure composite. La phase d'adoucissement globale ne peut être initiée qu'après la rupture du PRF de confinement.

À cet égard, la convergence de l'algorithme de retour radial avec le critère de DP est assurée, et la réponse structurale du système peut donc être obtenue. Les courbes de contrainte-déformation considérées pour des béton d'une résistance f'_c en MPa entre 20 et 40, sont présentées au tableau 3.8, et illustrées à la figure 3.7. Dans notre cas d'étude, ces courbes sont utilisées pour un béton confiné ; la phase d'adoucissement n'étant pas d'intérêt, car (1) le critère de plastification de DP ne représente pas fidèlement une telle phase, et (2) celle-ci intervient après l'atteinte de la rupture totale du système composite ; la finalité du processus.

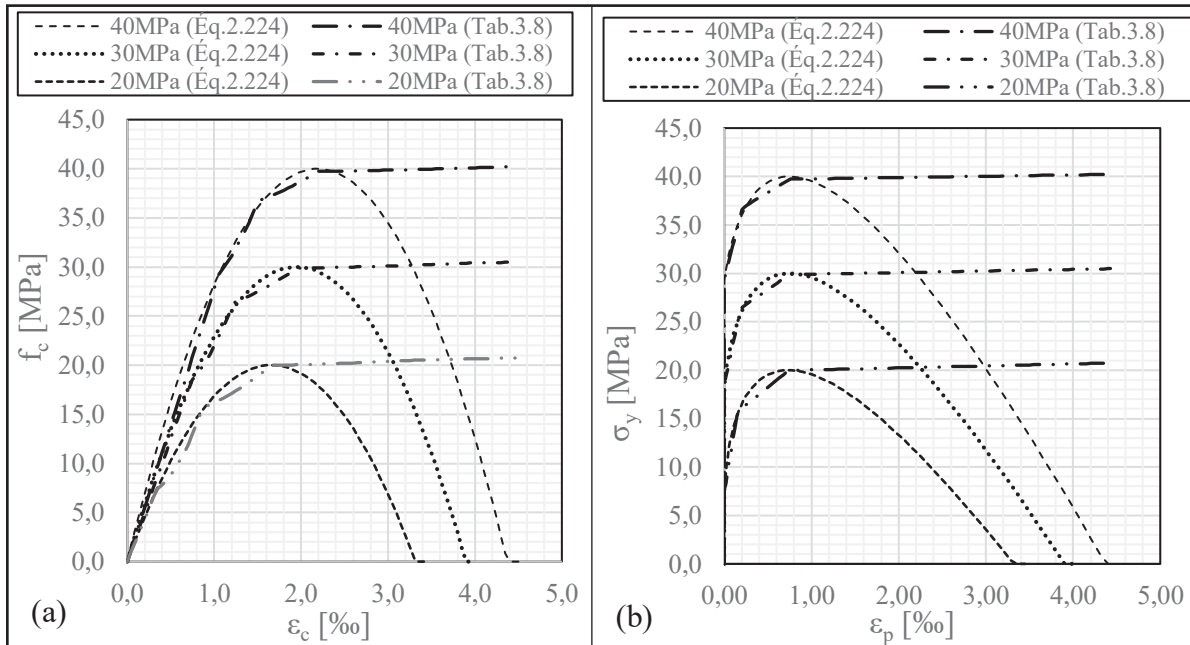


Figure 3.7 Approximations linéaires par morceaux du modèle quadratique de la section 2.2 de compression axiale du béton pour la modélisation numérique des colonnes confinées
– (a) contrainte-déformation axiales (b) contrainte-déformation plastique équivalente

Tableau 3.8 Approximation linéaire par morceaux de la courbe contrainte-déformation du béton non confiné pour une modélisation de colonnes avec un confinement en PRF

Début de la zone	ε_c	H (MPa)
Initiation de la plastification	$\varepsilon_{cl} = \varepsilon'_c \left(2 - \frac{E_c \varepsilon'_c}{f'_c} \right)$	$\frac{54,6 E_c}{f'_c + 1,84}$
Durcissement du matériau	$\frac{3\varepsilon_{cl} + 2\varepsilon'_c}{5}$	$\left(0,0458 + \frac{6,45}{f'_c + 1,84} \right) E_c$
Pic de contrainte à f'_c	ε'_c	$0,001 E_c$

Les résultats des simulations numériques des colonnes elliptiques confinées en PRF et soumises à un chargement en compression axial issues de l'utilisation de ces courbes ajustées ainsi que leur analyse sont présentés à la section 3.4. Toutes les autres considérations employées et validées aux sections 3.2.4 et 3.2.5 relativement au paramétrage du processus de calcul par la MEF sont conservées pour obtenir ces résultats.

3.3 Critère de Drucker-Prager modifié pour les colonnes elliptiques en béton confinées par un chemisage en PRF

3.3.1 Représentation du béton et de son confinement

Le critère de DP représente fidèlement le durcissement du béton, tel qu'explicité à la section 3.2.4. Durant cette phase, le matériau présente un comportement élasto-plastique. Avec l'augmentation de la charge appliquée sur la colonne, les contraintes et les déformations du béton augmentent, et le modèle prend efficacement en compte l'effet de la microfissuration progressive sur la résistance en compression du béton.

En revanche, le critère de DP ne permet pas de modéliser correctement l'adoucissement du matériau, car il ne prend pas en compte l'évolution de son endommagement. En effet, un autre critère, tenant en compte des propriétés relatives à la fissuration du béton et à son endommagement, comme le modèle de Mazars et Pijaudier-Cabot (1989), serait plus adéquat pour représenter cette phase descendante de la courbe contrainte-déformation. Pour le cas du

béton confiné, on se limite à l'étude du durcissement du matériau quant à l'évaluation de la capacité portante de la structure et des déformations subies lors de cette phase.

Le béton confiné en PRF présente une loi bilinéaire ascendante de contrainte-déformation, lorsque son niveau de confinement est élevé comme cela est souvent le cas en pratique (Chaallal, 2018, p. 245). Lam et Teng (2003) recommandent que le rapport f_{lF}/f'_c soit supérieure à 0,08 sur la base d'essai expérimentaux en laboratoire, et la norme canadienne S6-14 exige un rapport supérieur à 0,1 (CSA-S6-14, 2014). Similairement à la section 2.6.2 correspondant au béton non-confiné, le modèle de Drucker-Prager peut aussi être appliqué au béton confiné, et ce, en interpolant les résultats expérimentaux pour le type de colonne étudié afin de représenter fidèlement son comportement réel.

Avec ce modèle modifié, le béton confiné en PRF devient alors un matériau unique soumis au critère de plasticité de Drucker-Prager. Les propriétés qui lui sont conférées se déterminent à travers la compréhension des phénomènes qui régissent son comportement. Ces propriétés sont incluses dans la formulation du critère. Les facteurs correspondants au frottement interne et à la cohésion sont évalués à travers une interpolation sur ces paramètres qui régissent le comportement du matériau composite. Ces facteurs peuvent aussi être déterminées à travers l'utilisation de modèles préétablis capturant le comportement réel de la structure.

3.3.2 Considérations relatives à la formulation du critère de DP modifié pour les colonnes elliptiques confinées

L'analyse par la MEF des colonnes elliptiques en béton confinées par un chemisage en PRF peut être menée en dissociant l'apport respectif du béton et du PRF à la rigidité structurale de la colonne. Une approche alternative consiste à appliquer le critère de plasticité de DP directement au béton confiné, en intégrant l'effet combiné des deux matériaux sur le comportement global du système composite.

Cette approche permet une modélisation plus représentative de la réponse réelle de la structure, en s'appuyant sur les résultats expérimentaux obtenus pour les colonnes elliptiques confinées.

Toutefois, sa validité est conditionnée par la géométrie spécifique de la colonne, par la disponibilité et la précision des données expérimentales, ainsi que l'évaluation adéquate des paramètres régissant le critère, la règle de durcissement et d'adoucissement ainsi que la règle de fluage et d'écoulement plastique (Jiang & Wu, 2012, p. 445).

La formulation du modèle de plasticité modifié de DP repose sur la fonction du critère définie à l'équations (2.206) en tenant en compte du confinement en PRF du béton. L'état de contrainte triaxial en tout point de la section transversale à mi-hauteur est déterminé à partir de la contrainte de compression concentrique appliquée sur la colonne ainsi que des contraintes normales de confinement.

Dans le cas d'une colonne circulaire, le confinement est isotrope. Les contraintes normales dans le plan de la section transversale sont uniformes et identiques dans toutes les directions ; ce qui simplifie grandement leur étude. Malgré cela, un modèle de calcul complexe reposant sur le critère modifié de DP a été proposé par Rousakis, Karabinis, Kiouisis, et Tepfers (2008). Par une étude analytique minutieuse, Jiang et Wu (2012) ont mis la lumière sur l'influence des déformations plastiques sur les paramètres de frottement interne et de dilatance, et ont développés à partir d'études analytiques et expérimentales des modèles explicites relatifs à ces paramètres pour le cadre des colonnes circulaires étudiées.

En revanche, pour une colonne elliptique, la distribution des contraintes de confinement est anisotrope : les contraintes normales varient selon l'orientation ; étant généralement plus élevées dans la direction du grand diamètre et plus faibles dans celle du petit diamètre, comme explicité à la section suivante. Cette hétérogénéité influence directement le comportement mécanique de la colonne confinée, et doit être systématiquement et rigoureusement prise en compte dans la formulation du modèle.

Une attention particulière doit être accordée à l'interpolation des résultats expérimentaux, car ceux-ci peuvent présenter des écarts significatifs malgré des configurations similaires en termes de résistance en compression du béton, de ratio de forme et de nombre de couches en

PRF. Il est également possible de constater des valeurs atypiques dans ces résultats expérimentaux, tels que Teng et Lam (2002) et Benzeguir et al. (2024), comme dans quelques cas d'échantillons fabriqués avec un béton d'une plus faible résistance, mais présentant une capacité portante supérieure, et ce, avec un plus grand ratio de forme A/B , et un même nombre de plis en PRF !

Ces variations, constatées dans les différentes études expérimentales sur les colonnes confinées, illustrent la complexité des interactions entre la géométrie de la section, les propriétés du béton et l'effet du confinement, rendant ainsi l'interprétation des résultats particulièrement délicate. Il convient également de noter que ces écarts deviennent plus prononcés lorsque le nombre de couches de PRF est très limité, généralement avec une seule couche. Cette sensibilité accrue compromet la fiabilité de la représentation globale du confinement et de son influence sur le comportement réel de ces structures.

L'utilisation du modèle modifié requiert donc un nombre important de résultats expérimentaux qui comportent, de plus, les données nécessaires pour représenter précisément la non-uniformité des contraintes et des déformations dans la section transversale de la colonne. Étant donné le nombre très limité d'essais expérimentaux sur les colonnes elliptiques disponibles dans la littérature ainsi que la complexité d'une telle représentation, on se limite alors à l'utilisation du critère classique de DP pour l'étude du comportement des colonnes confinées en PRF. Dans notre étude paramétrique, l'analyse des colonnes est menée à l'aide de la MEF, en considérant exclusivement la non-linéarité matérielle. Le PRF est modélisé comme une condition aux limites de type Cauchy, conformément aux équations présentées au chapitre 2. L'interaction entre le béton et son confinement par le PRF est rigoureusement prise en compte afin de garantir une représentation fidèle du comportement du système.

3.4 Analyse des résultats des simulations numériques par la MEF sur les colonnes elliptiques confinées en PRF

3.4.1 Distribution des contraintes sur la section transversale elliptique

Les résultats numériques démontrent un confinement uniforme suivant les directions x et y pour le cas des colonnes circulaires. En revanche, pour le cas des colonnes elliptiques, on remarque une distribution non-uniforme des contraintes de confinement, notable à partir de la plastification du béton due au chargement en compression axial que subit la colonne. Ce caractère non-uniforme de la distribution des contraintes normales et des déformations normales est plus prononcé avec l'augmentation du ratio A/B . La distribution des contraintes normales suivant le grand axe x de l'ellipse, à la figure 3.8, mets en évidence un confinement plus efficace dans les zones où la courbure de la section est plus importante. En effet, les contraintes normales de compression suivant le grand axe x sont moindres aux extrémités du petit diamètre B .

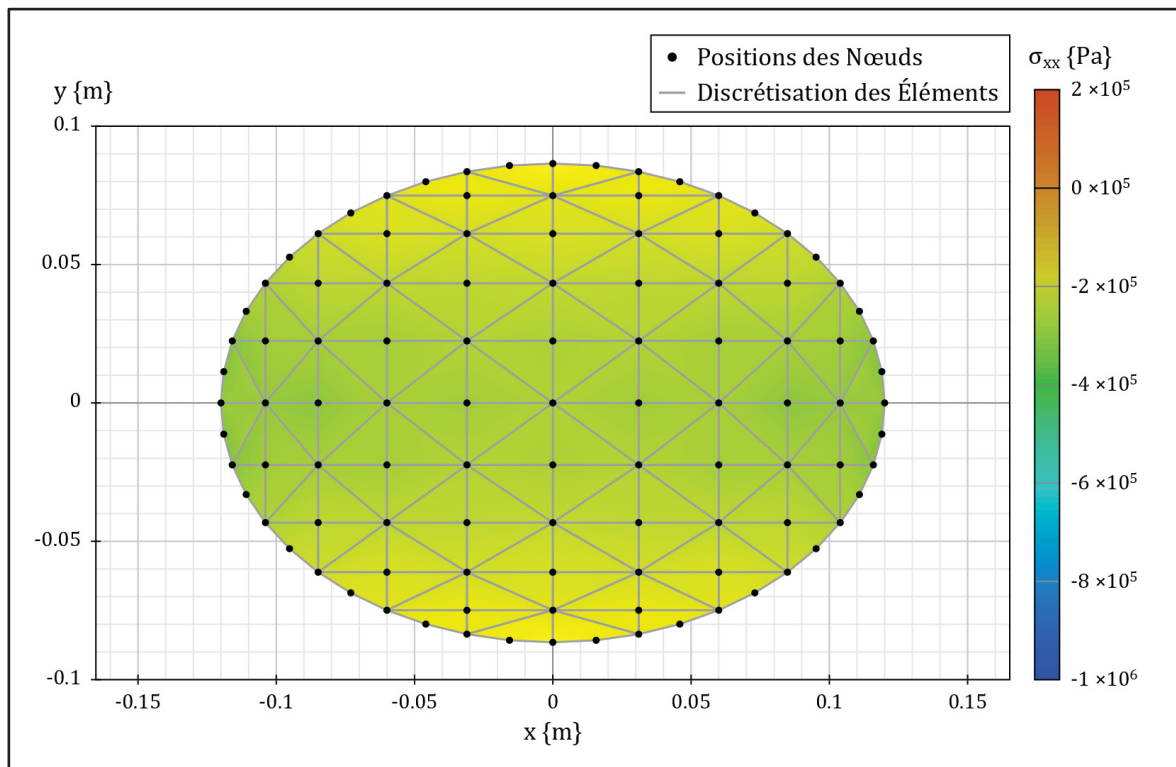


Figure 3.8 Distribution des contraintes σ_{xx} à mi-hauteur de l'échantillon B40-1.4-3C pour un chargement axial de compression de 37 MPa

À la figure 3.9, la distribution des contraintes normales suivant le petit axe y de l'ellipse révèle un confinement moins important sur cette direction par rapport aux contraintes suivant l'axe x , excepté aux abouts de la section suivant axe principal portant le grand diamètre A . On peut en conclure que la forme géométrique de l'ellipse favorise une expansion latérale du béton confiné suivant le petit axe y de la section transversale de la colonne. Ces constats sont en concordance avec les résultats expérimentaux de Teng et Lam (2002) et de Benzeguir et al. (2024) qui dénotent une déformation circonférentielle par l'expansion latérale du béton plus importante aux sommets du petit axe de la section elliptique.

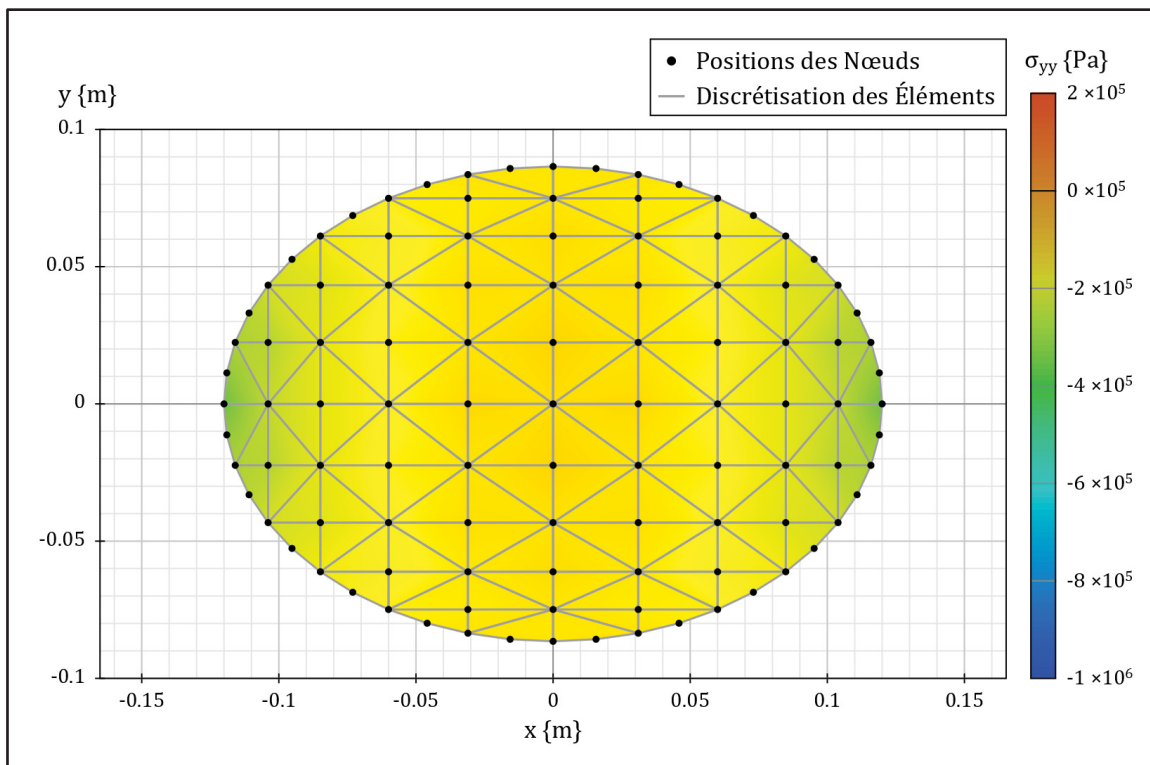


Figure 3.9 Distribution des contraintes σ_{yy} à mi-hauteur de l'échantillon B40-1.4-3C pour un chargement axial de compression de 37 MPa

3.4.2 Réponse en contraintes-déformations des colonnes elliptiques étudiées

Les courbes contrainte-déformation aux extrémités du petit axe principale de la section elliptique issues des résultats de la simulation numérique pour un béton d'une résistance à la compression de 30MPa sont présentées aux figures suivantes.

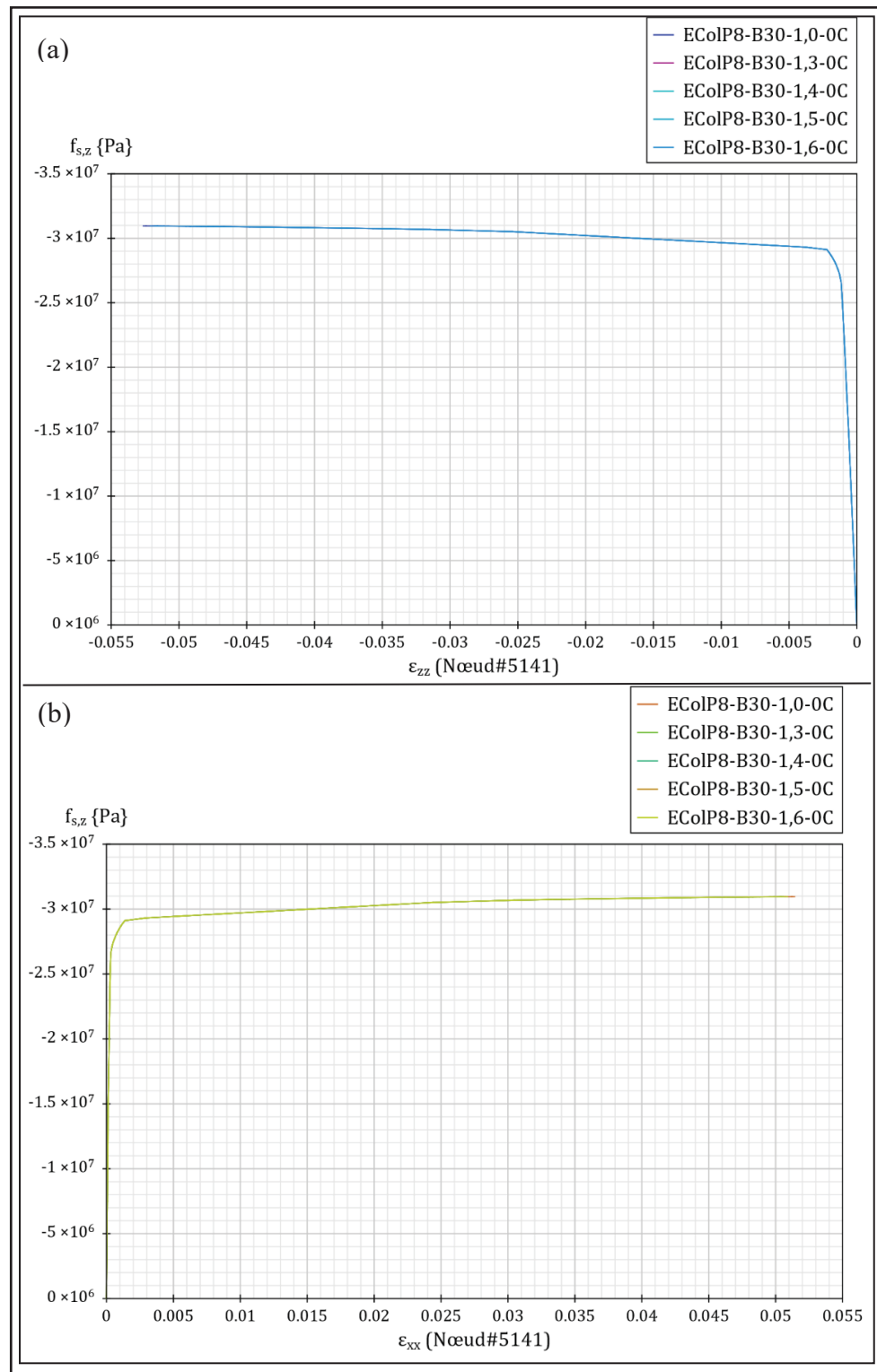


Figure 3.10 Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons témoins avec un béton 30MPa de type EColP8 avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à mi-hauteur à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles.

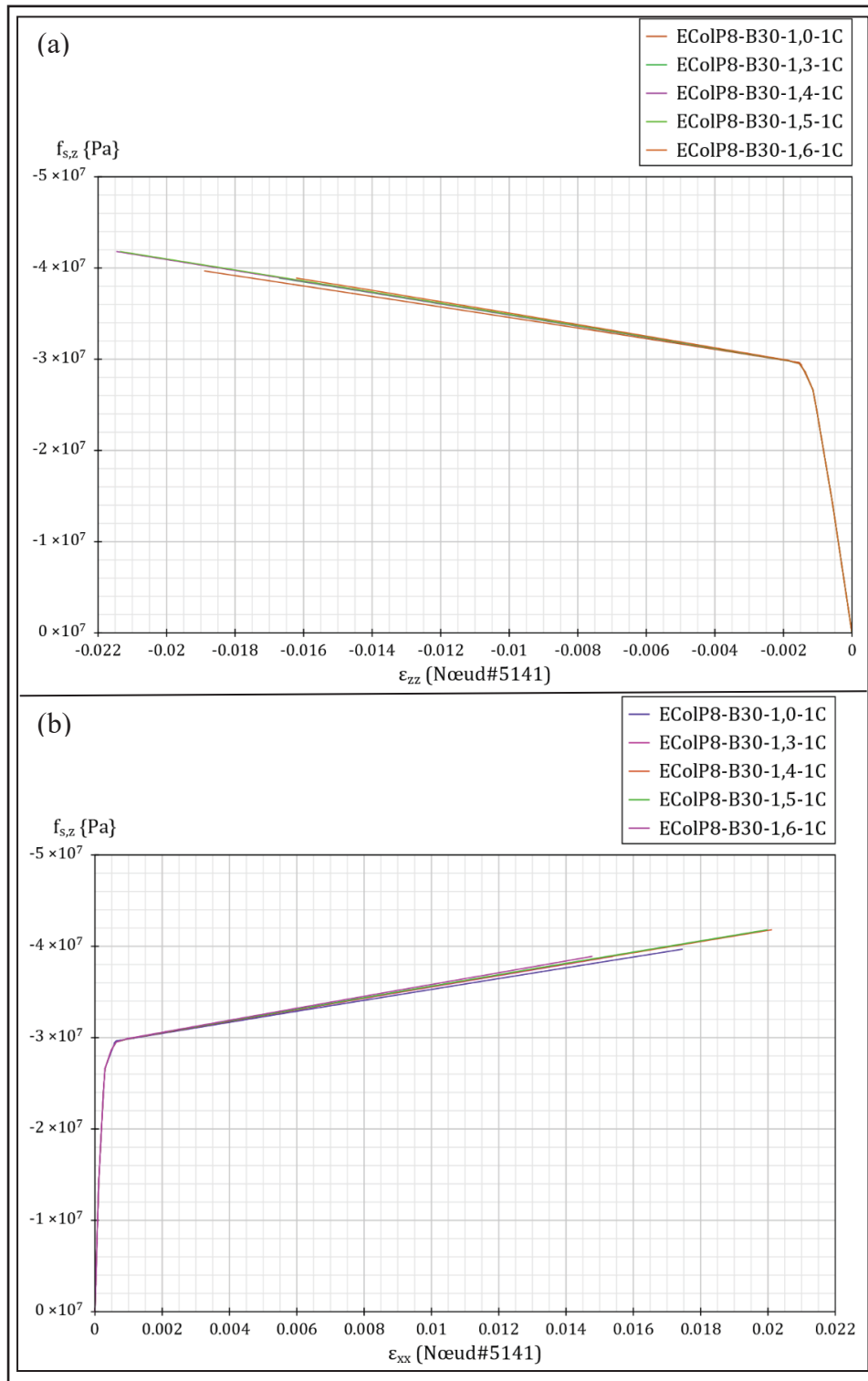


Figure 3.11 Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons de type EColP8 avec un béton de 30MPa confiné avec un pli en PRF avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles

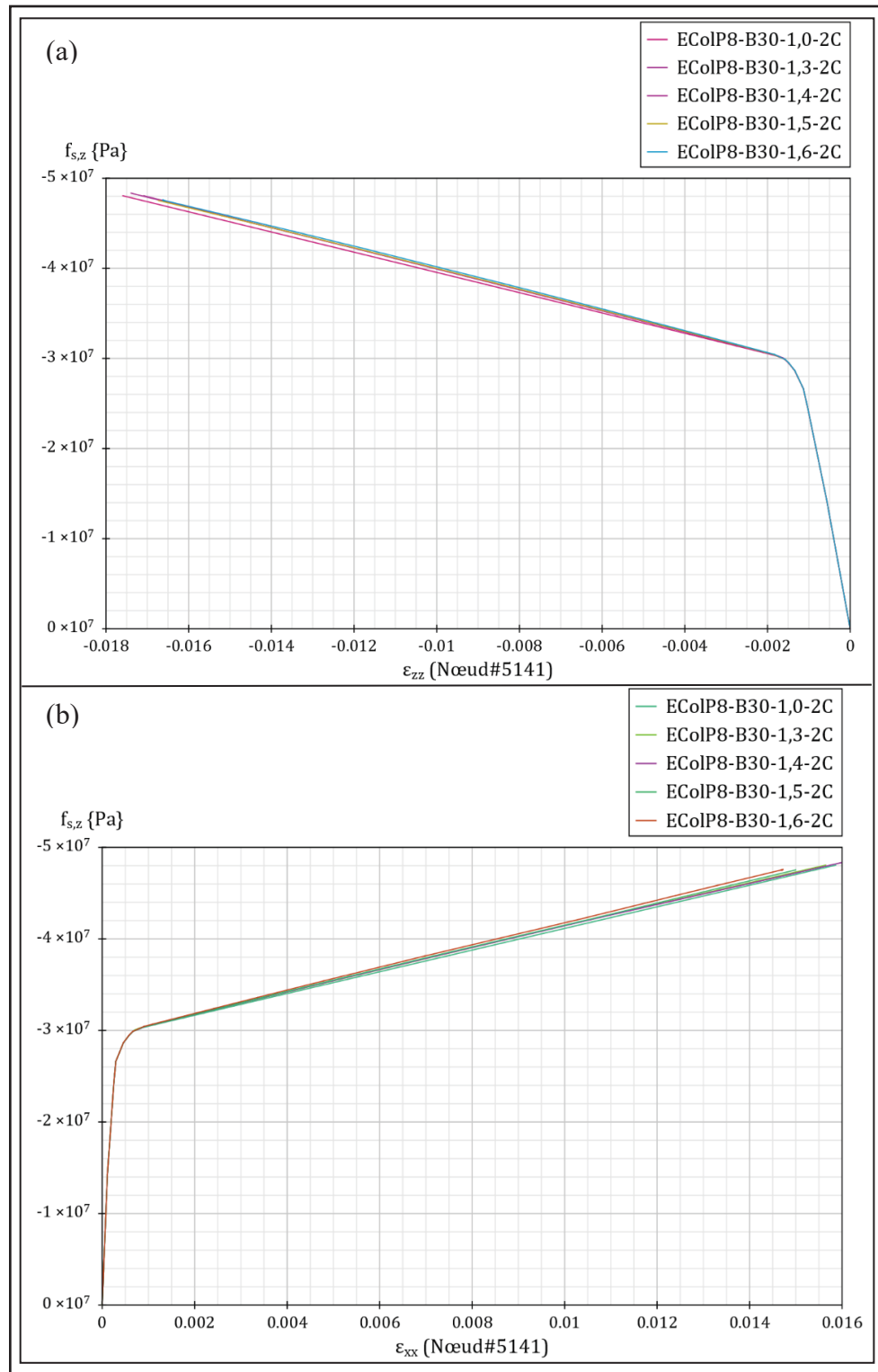


Figure 3.12 Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons de type EColP8 avec un béton de 30MPa confiné avec deux plis en PRF avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles

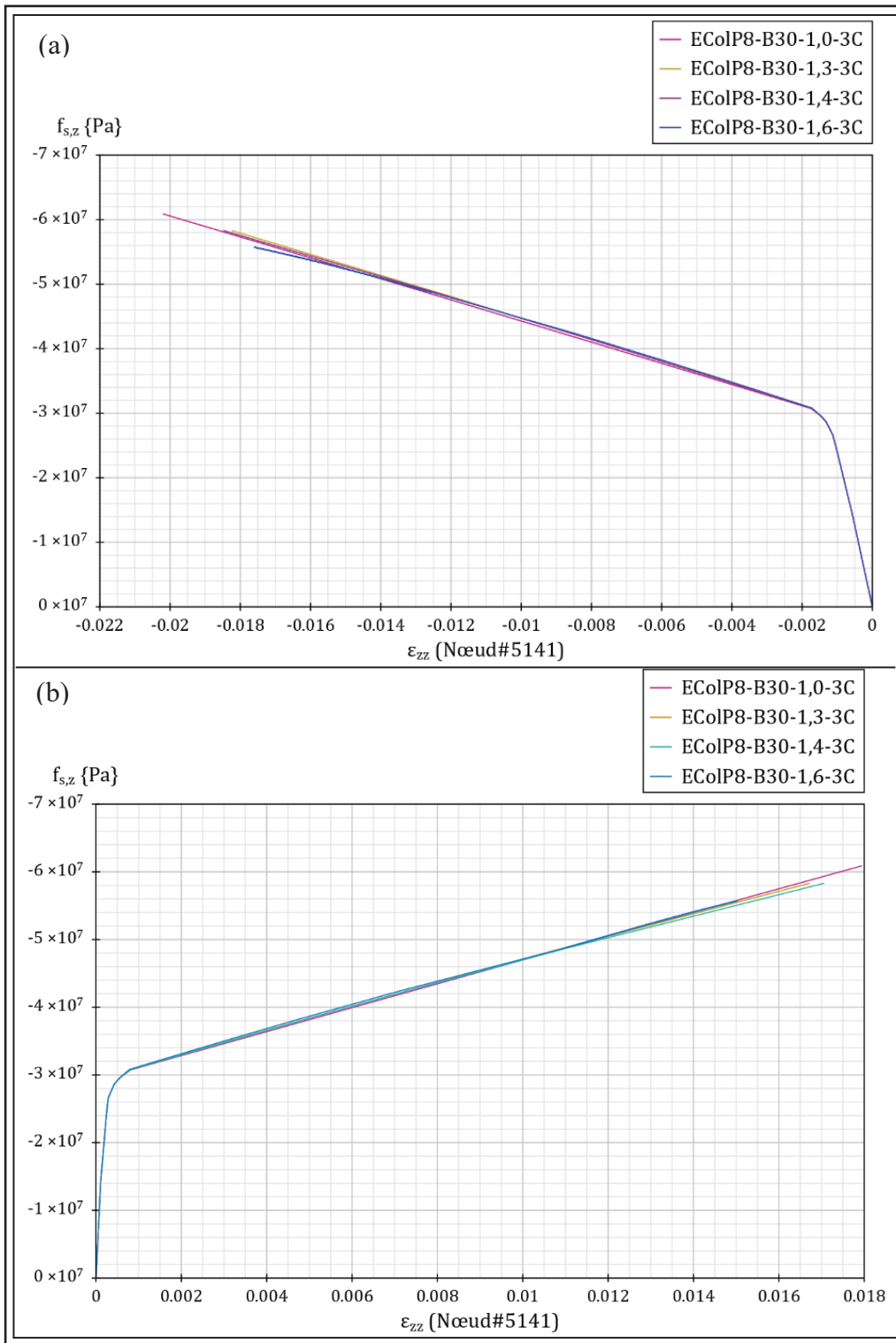


Figure 3.13 Courbes de la compression axiale $f_{s,z}$ des échantillons de type EColP8 avec un béton de 30MPa confiné avec trois plis en PRF avec une densité plane de dix, au nœud 5141 à l'extrémité petit diamètre, en fonction des déformations axiales et circonférentielles

Les résultats en contrainte-déformation pour le cas des échantillons témoins à la figure 3.10 illustrent un comportement fidèle à la courbe de contrainte-déformation présentée à la figure 3.7-a et décrivant le comportement en compression axiale du matériau béton pour le cas d'une modélisation numérique des colonnes confinées en PRF. Comme prévu, la variation du ratio A/B ne présente pas d'impact sur le comportement en compression axiale des colonnes non confinées. Le palier plastique artificiel représentant l'état du béton dans une colonne confinée en PRF lors l'atteinte de la compression maximale du béton f'_c est représenté fidèlement dans les courbes résultats de la simulation numérique des échantillons témoins de la figure 3.10.

Pour le cas des échantillons confinées en PRF, en comparant les figures 3.11, 3.12 et 3.13, on remarque une augmentation significative de la résistance en compression des colonnes confinées ainsi que leur rigidité avec l'augmentation du nombre de couches en PRF. Ce constat est consistant avec les résultats des recherches de la littérature comme explicité par Benzeguir et al. (2024, p. 10) et Liu, Jiang, Yu, et Teng (2023). En effet, l'augmentation de la rigidité du confinement en PRFC due à l'ajout de nombre de couches résulte en l'accroissement de la force de traction pourvue par les fibres en Carbone, et donc de pression de confinement qui s'oppose à l'expansion du béton due à la charge de compression axiale que subi la colonne.

En revanche, les résultats aux figures 3.11, 3.12 et 3.13 de la simulation numérique pour le cas des colonnes confinées en PRF ne démontrent aucun impact de la variation du ratio A/B sur le comportement en compression de la colonne confinée. Ce constat n'est pas fidèle aux résultats des études expérimentales de la littérature telles que celles de Benzeguir et al. (2024) et Teng et Lam (2002). Ceci peut être attribué au modèle de compression du béton choisi pour décrire son comportement en compression qui, dans le cadre de cette simulation, est uniaxial. En effet, la variation de la courbure tout au long de l'enveloppe elliptique en PRF induit une variation locale de la force de traction que reprend le PRF due à l'expansion du béton comprimé, et par conséquent, une variation locale de la contrainte de confinement subie par le béton.

Pour le cas des colonnes confinées, la rupture de la colonne elliptique est estimée à l'atteinte de la déformation en traction admissible des fibres du PRF ε_{fu} , fournie au tableau 3.5, par la

déformation circonférentielle au point de rupture ε_{xx} dans les courbes contrainte-déformation des figures 3.11, 3.12 et 3.13. On remarque que ces courbes représentent un comportement bilinéaire. On note aussi que le choix du critère de DP pour le béton ainsi que l'ajustement des courbes du comportement du matériau sous compression axial à la section 3.2.6 ne permettent pas une représentation fidèle du comportement de la colonne après l'atteinte de la résistance maximale du béton non confiné dans le cas d'un éventuel faible niveau de confinement. Tel que présenté à la section 1.2 et à la figure 1.1, les recherches de la littérature ont démontré un comportement non linéaire dans ce cas.

En comparant les résultats de la simulation numérique avec ceux de Benzeguir et al. (2024, p. 15), on constate que les courbes obtenues correspondent au comportement d'une colonne circulaire équivalente, avec notamment une résistance en compression des colonnes f'_{cc} de 38MPa, 47,5MPa et 56MPa pour un béton d'une résistance à la compression de 30MPa confiné respectivement par une, deux et trois pli de PRFC. Cela correspond à une augmentation de la résistance en compression du béton confiné de 27%, 58% et 87%, et une capacité portante des colonnes confinées de 1300MPa, 1650MPa et 1950MPa, respectivement. On note que les capacités portantes des colonnes testées expérimentalement par Benzeguir et al. (2024, p. 15) sont légèrement supérieures aux résultats numérique du fait de l'emploi d'un béton d'une résistance à la compression entre 32MPa et 36MPa, et des spécifications techniques relatives à la résistance à la traction des tissus en PRF généralement conservatrices.

Un modèle de compression triaxial représenterait plus fidèlement le comportement du béton dans le cas d'une colonne elliptique confinée en PRF. Malgré une formulation variationnelle par éléments finis à la section 2.4.3 tenant compte de la variation de la contrainte de confinement dans la section transversale, un modèle uniaxial en compression du béton avec le critère de DP s'avère insuffisant pour représenter fidèlement le comportement en compression des colonnes elliptique confinées. À cet effet, une étude analytique, déterminant la capacité portante de la colonne elliptique en béton confinée à l'aide de composites PRF en fonction des caractéristiques des matériaux ainsi que de la forme géométrique de la colonne, est élaborée à la section 3.5.

3.5 Étude analytique des colonnes elliptiques et circulaires confinées en PRF

3.5.1 Contrainte de confinement f_{IF}

La contrainte de confinement, correspondante à la pression latérale exercée par l'enveloppe en PRF sur le béton, joue un rôle fondamental dans l'amélioration des performances de la colonne. À l'atteinte de la résistance en compression du béton non-confiné f'_c , cette contrainte de confinement retarde l'apparition des fissures et constitue le moyen par lequel le chemisage en PRF reprend la charge excédentaire que subit la colonne par rapport aux capacités du béton. Grâce à cet effet, la colonne en béton bénéficie d'une augmentation de sa résistance en compression et d'une ductilité importante, favorisant une dissipation plus efficace de l'énergie sous chargement.

La déformation circonférentielle aux sommets principaux de l'ellipse est systématiquement inférieure à celle aux sommets secondaires (Teng & Lam, 2002, p. 1540). Sous l'effet de la charge concentrique, la section elliptique subit une expansion latérale plus prononcée le long de son petit axe y , portant le diamètre B , en raison d'un confinement plus efficace dans cette direction. Cette réponse mécanique résulte de la combinaison entre la flexibilité accrue de la section elliptique suivant cet axe et la manière dont le chemisage en PRF absorbe les déformations circonférentielles.

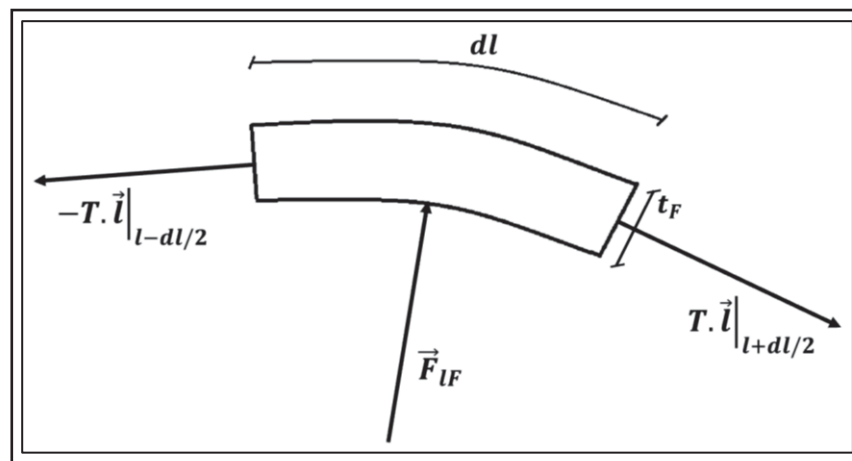


Figure 3.14 Équilibre des forces sur un élément infinitésimale de tissu en PRF d'épaisseur t_F aux l'extrémités du petit diamètre de la section elliptique

L'épaisseur t_F du PRF supposée constante, on considère donc que la contrainte de traction maximale se situe aux extrémités du petit diamètre de la section transversale. Sur un élément infinitésimal de l'enveloppe de confinement en ces points, on peut établir l'équilibre des forces à la rupture, comme illustré à la figure 3.14.

En expansion latérale, le béton exerce une contrainte égale et opposée à la contrainte de confinement sur l'élément infinitésimale de tissu. Celle-ci est représentée par la force résultante, $\vec{F}_{lF}$, sur la surface de contact de dimensions dl et dt du béton avec l'élément du tissu. Cette force est portée par le vecteur normal $\vec{n}$ et s'exprime comme suit.

$$\vec{F}_{lF} = f_{lF} dl dt \vec{n} \quad (3.5)$$

L'équilibre de l'élément infinitésimal est assurée grâce à une force de traction circonférentielle portée par le vecteur unitaire $\vec{l}$ longitudinal à la direction des fibres et tangent au contour de la section elliptique. L'intensité T de cette force est identique de part et d'autre, au vu de la symétrie de l'élément, de la section transversale, et du chargement. Le mode de rupture de tous les échantillons confinés, quel que soit le rapport d'aspect A/B est due à la rupture du PRF accompagnée d'un écrasement du béton, et cette rupture est semblable au mécanisme décrit par Teng et Lam (2002) et Benzeguir et al. (2024). En cet état de chargement, la force de traction subie par l'élément de PRF est donné par la relation (3.6) ; f_{Fu} et ε_F correspondent, respectivement, à la résistance ultime et à la déformation ultime du PRF en traction.

$$T = f_{Fu} t_F dt \quad (3.6)$$

L'équilibre de l'élément infinitésimal de PRF, présenté à l'équation (3.7), établit le lien entre la force de confinement du béton et la traction subie par le PRF à la rupture. La variation du vecteur unitaire longitudinal aux fibres du PRF, peut être défini par courbure κ – considéré ici positive – du chemisage porté par le vecteur normal unitaire se dirigeant vers l'intérieur de la section transversale. On en déduit alors l'expression (3.9) de la contrainte de confinement du béton à la rupture de la colonne elliptique en béton confinée par un chemisage en PRF.

$$\vec{F}_{lF} + T \cdot \vec{l} \Big|_{l+dl/2} - T \cdot \vec{l} \Big|_{l-dl/2} = \vec{0} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\vec{l}}{dl} = \frac{\vec{l}|_{l+dl/2} - \vec{l}|_{l-\frac{dl}{2}}}{dl} = -\kappa \vec{n} \quad (3.8)$$

$$f_{lF} = \kappa E_F \varepsilon_F t_F \quad (3.9)$$

À titre comparatif, on peut définir, à l'équation (3.10), la contrainte de confinement, $f_{lF, \acute{e}q}$, d'une colonne circulaire ayant la même aire de section transversale ; et ce, en fonction du rayon équivalent $R_{\acute{e}q}$ de la section circulaire, ou de sa courbure uniforme $\kappa_{\acute{e}q}$ (Chaallal, 2018, p. 244). On définit alors la courbure relative ρ à l'équation (3.11) comme le rapport entre la courbure κ aux extrémités du petit diamètre de la section transversale elliptique, et la courbure $\kappa_{\acute{e}q}$ de la section circulaire équivalente.

$$f_{lF, \acute{e}q} = \frac{E_F \varepsilon_F t_F}{R_{\acute{e}q}} = \kappa_{\acute{e}q} E_F \varepsilon_F t_F \quad (3.10)$$

$$\rho = \frac{\kappa}{\kappa_{\acute{e}q}} \quad (3.11)$$

$$f_{lF} = \rho \kappa_{\acute{e}q} E_F \varepsilon_F t_F \quad (3.12)$$

$$f_{lF} = \rho f_{lF, \acute{e}q} \quad (3.13)$$

Cette écriture permet d'apprécier l'impact de la courbure de la section elliptique comparativement à la section circulaire. Elle est d'une grande importance au vu des simplifications quelle procure, et du sens physique quelle exprime quant à l'uniformité du confinement de la section transversale, comme présenté aux l'équation (3.12) et (3.13). La contrainte de confinement de la section elliptique peut donc être déterminée à partir de celle d'une section circulaire équivalente moyennant la courbure relative ρ .

En tout point de coordonnées (x, y) du contour de la section transversale, la courbure peut être formulée, à l'équation (3.14), à partir de l'équation paramétrique de l'ellipse. On déduit alors la courbure κ aux extrémités du petit diamètre B de l'ellipse, à l'équation (3.15), ainsi que la courbure relative ρ à l'équation (3.17).

$$\kappa(x, y) = \frac{2AB}{\left(\left(\frac{A}{B}y\right)^2 + \left(\frac{B}{A}x\right)^2\right)^{3/2}} \quad (3.14)$$

$$\kappa = \kappa(0, B) = \kappa(0, -B) = \frac{2B}{A^2} \quad (3.15)$$

$$\kappa_{\acute{e}q} = 2/\sqrt{AB} \quad (3.16)$$

$$\rho = \frac{\kappa}{\kappa_{\acute{e}q}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{3/2} \quad (3.17)$$

Avec l'augmentation du ratio de forme A/B , la courbure relative diminue d'un ordre de 1,5. La contrainte de confinement d'une section elliptique diminue linéairement avec la diminution de la courbure relative, et donc diminue d'un ordre de 1,5 proportionnellement à toute augmentation du ratio de forme A/B .

3.5.2 Résistance à la compression f'_{cc}

La réduction significative de la rigidité axiale du béton, conjuguée à son état de plasticité lorsqu'il atteint sa résistance ultime f'_c , explique le comportement bilinéaire observé de la structure composite lors des essais en laboratoire rapportés dans la littérature. Le béton, ayant atteint sa limite à la compression f'_c et épuisé sa rigidité aux charges axiales, n'apporte, en effet, aucune résistance significative aux charges axiales excédentaires. Il convient donc de définir le comportement de la colonne confinée à partir de cet état de chargement, afin d'évaluer la résistance ultime à la compression f'_{cc} de la colonne composite. Le gain en capacité portante $\Delta f'_{cc}$ peut être défini comme la différence entre la résistance ultime à la compression du béton confiné f'_{cc} avec celle du béton non confiné f'_c .

$$\Delta f'_{cc} = f'_{cc} - f'_c \quad (3.19)$$

Les études expérimentales menées sur les colonnes circulaire et elliptiques confinées en PRF, comme ceux de Teng et Lam (2002) et de Benzeguir et al. (2024), ont mis en évidence l'apparition d'un cône de rupture du béton, incliné d'un angle θ_{cc} – généralement entre 35° et 45° – par rapport à l'axe longitudinal de la colonne, une fois la résistance maximale du PRF de

confinement atteinte. Cela illustre précisément le mécanisme de transfert de la charge de compression axiale vers le chemisage de confinement.

Dans le cas d'une colonne circulaire, le confinement du béton est uniforme en raison de la symétrie de la section par rapport à tout axe transversale de la colonne. Le transfert de charge du béton vers le PRF peut être interprété à l'aide d'un modèle de bielles et tirants radiaux : le béton subit une compression triaxiale générée par la pression latérale uniforme, et le PRF joue le rôle de tirant circonférentiel en traction, équilibrant les contraintes de confinement. Lorsque la contrainte reprise par le PRF de confinement s'approche de sa résistance à la traction, l'angle d'inclinaison des bielles comprimées est directement influencé par la formation du cône de rupture. Celui-ci délimite la zone de béton contribuant au transfert de charge, et détermine la distribution des contraintes internes après l'atteinte de la résistance maximale du béton.

En négligeant la contribution du confinement à la rigidité axiale du système avant d'atteindre la résistance maximale en compression du béton non confiné, l'équilibre à la rupture d'une bielle – d'un angle $d\Gamma$ sur la section transversale et inclinée d'un angle $\theta_{cc,eq}$ par rapport à l'axe longitudinal de la colonne – peut être établi à l'équation (3.20) en projetant les forces dues aux confinement et chargement axial sur la surface du cône de rupture. La charge de compression axiale étant uniforme sur la section, la hauteur des bielles $h_{b,eq}$ peut-être exprimée en fonction du rayon R_{eq} et de l'angle $\theta_{cc,eq}$ comme présenté à l'équation (3.21). Il en résulte alors l'expression (3.22) du gain en capacité portante $\Delta f'_{cc,eq}$ de la colonne circulaire confinée en fonction de la contrainte radiale de confinement $f_{lF,eq}$.

$$\tan(\theta_{cc,eq}) = \frac{h_{b,eq} R_{eq} d\Gamma f_{lF,eq}}{\pi (R_{eq})^2 \frac{d\Gamma}{2\pi} \Delta f'_{cc,eq}} \quad (3.20)$$

$$h_{b,eq} = R_{eq} / \tan(\theta_{cc,eq}) \quad (3.21)$$

$$\Delta f'_{cc,eq} = \frac{2}{\tan^2(\theta_{cc,eq})} f_{lF,eq} \quad (3.22)$$

Pour une colonne elliptique, on applique le même raisonnement pour une bielle portée par le petit rayon de l'ellipse, comme explicité à l'équation (3.23). En effet, en étudiant l'équilibre

par rapport au petit diamètre qui définit la condition de rupture du PRF par traction, et en considérant un angle infinitésimal $d\Gamma$, on peut approximer le contour elliptique au sommet du petit axe par un cercle de rayon $B/2$.

$$\tan(\theta_{cc}) = \frac{\frac{B}{\tan(\theta_{cc})} B d\Gamma f_{lF, \acute{e}q}}{\pi B^2 \frac{d\Gamma}{2\pi} \Delta f'_{cc, \acute{e}q}} \quad (3.23)$$

$$\Delta f'_{cc} = \frac{2}{\tan^2(\theta_{cc})} f_{lF} \quad (3.24)$$

$$f'_{cc} = f'_c + \frac{2}{\tan^2(\theta_{cc})} f_{lF} \quad (3.25)$$

En comparant les gains en résistance à la compression des deux types de colonnes, à partir des équation (3.13), (3.22) et (3.24), on constate qu'en plus de la courbure relative, les angles des cônes de rupture interviennent. Cependant, pour des bétons ordinaires et des colonnes présentant une courbure relative ρ supérieure ou égale à 0,5, cet angle varie très peu et peut être considéré comme constant, relativement à celui d'une colonne circulaire équivalente, pour un niveau de confinement adéquat. Dans ce cas, on obtient les équations simplifiées (3.28) et (3.29). Ces constats sont validés par l'étude expérimentale de Benzeguir et al. (2024).

$$\Delta f'_{cc} = \rho \left(\frac{\tan(\theta_{cc, \acute{e}q})}{\tan(\theta_{cc})} \right)^2 \Delta f'_{cc, \acute{e}q} \quad (3.26)$$

$$f'_{cc} = f'_c + \rho \left(\frac{\tan(\theta_{cc, \acute{e}q})}{\tan(\theta_{cc})} \right)^2 (f'_{cc, \acute{e}q} - f'_c) \quad (3.27)$$

$$\Delta f'_{cc} \approx \rho \Delta f'_{cc, \acute{e}q} \quad (3.28)$$

$$f'_{cc} \approx \rho f'_{cc, \acute{e}q} + (1 - \rho) f'_c \quad (3.29)$$

3.5.3 Comparaison avec les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024)

Les résultats expérimentaux de l'étude de Benzeguir et al. (2024) ont validé les observations issus des test de Teng et Lam (2002) et ont apporté plus détails quant à la réponse des colonnes elliptiques en béton confinées en PRF. Dans le cadre de cette étude expérimentale, les échantillons testés ont des spécifications techniques, quant à leur forme géométrique et aux

résistances des matériaux similaires à ceux de la simulation numérique du présent projet de recherche détaillées dans les tableaux 3.4 et 3.5, et ce, excepté pour la résistance à la compression du béton. Les spécifications des échantillons elliptiques confinés en PRFC testés, incluant la résistance à la compression de leurs bétons, ainsi que les résultats expérimentaux correspondant à la résistance à la compression f'_{cc} du système composite sont illustrés au tableau 3.9.

Tableau 3.9 Évaluation du modèle analytique par rapport aux résultats de Benzeguir et al. (2024) quant à la résistance à la compression des colonnes elliptiques confinées

Échantillons				Modèle analytique			Benzeguir et al.		Écart sur f'_{cc}
f'_c (MPa)	A/B	ρ	plis	f_{IF} (MPa)	f_{IF}/f'_c	f'_{cc} (MPa)	f'_{cc} (MPa)	$\Delta f'_{cc}/f_{IF}$	
30,1	1,0	1,00	1	4,23	0,14	43,38	40,7	2,51	6,6%
31,1	1,3	0,67	1	2,96	0,10	40,38	38,3	2,43	5,4%
31,9	1,4	0,61	1	2,69	0,08	40,36	35,3	1,26	14,3%
31,6	1,5	0,56	1	2,48	0,08	39,37	32,8	0,48	20,0%
26,5	1,6	0,49	1	2,24	0,08	33,52	35,5	4,03	5,6%
30,1	1,0	1,00	2	8,46	0,28	56,66	56,8	3,16	0,2%
31,1	1,3	0,67	2	5,92	0,19	49,66	51,9	3,52	4,3%
31,9	1,4	0,61	2	5,39	0,17	48,81	51,6	3,66	5,4%
31,6	1,5	0,56	2	4,95	0,16	47,14	48	3,31	1,8%
26,5	1,6	0,49	2	4,47	0,17	40,53	43,3	3,76	6,4%
30,1	1,0	1,00	3	12,69	0,42	69,94	71,4	3,25	2,0%
31,1	1,3	0,67	3	8,87	0,29	58,95	60,4	3,30	2,4%
31,9	1,4	0,61	3	8,08	0,25	57,27	56,2	3,01	1,9%
31,6	1,5	0,56	3	7,43	0,24	54,91	51,4	2,67	6,8%
26,5	1,6	0,49	3	6,71	0,25	47,55	51,1	3,67	7,0%

En déterminant la contrainte de confinement f_{IF} à partir des équations (3.12), (3.16) et (3.17), on remarque un rapport $\Delta f'_{cc}/f_{IF}$ relativement constant pour les échantillons testés, et ce, quel que soit les ratios de forme et épaisseurs d'enveloppes en PRF tant que le niveau de confinement pourvu f_{IF}/f'_c supérieur à 0,1. On en déduit alors l'angle approximatif d'inclinaison du cône de rupture du béton θ_{cc} considéré constant et évalué dans ce cas à 38,6° à partir de l'équation (3.25) afin de déterminer la résistance à la compression des échantillons

confinées. Cette résistance à la compression est donnée par le modèle analytique proposé à travers l'équation (3.27).

On remarque donc un écart relatif sur la résistance à la compression des échantillons elliptiques confinés en PRF inférieur à 10%, et ce, pour tout échantillon ayant un niveau de confinement pourvu f_{lF}/f'_c supérieur ou égal à 0,1. Il s'agit en effet des échantillons ayant comportement en contraintes déformations prévu bilinéaire. Cette étude comparative démontre alors la pertinence du modèle proposé et souligne l'importance des paramètres identifiés de confinement dans l'évaluation de la performance des colonnes elliptiques en béton renforcées en PRF.

3.5.4 Comparaison avec les exigences des codes canadiens CSA-S806-12 (2021) et CSA-S6-14 (2014)

Comme précisé par Chaallal (2018, p. 258) et Benzeguir et al. (2024, p. 11), le code canadien CSA-S806-12 (2021) ne fait pas de distinction entre les section circulaire et les sections elliptiques quant au calcul de la résistance à la compression f'_{cc} de la colonne en béton confinée en PRF à partir de la contrainte f_{lF} de confinement. Cela peut avoir un effet préjudiciable sur la capacité des colonnes confinées. L'équation issue des exigences du code canadien CSA-S806-12 (2021) pour le cas des colonnes en béton circulaires et ovales peut s'écrire comme suit aux équations (3.30) et (3.31) ; avec un facteur de sécurité ϕ_F pris égal à 0,65 pour le cas d'un chemisage de confinement en PRFC. Pour des fins de comparaison, on applique sur l'équation (3.31) correspondante à la contrainte de confinement donnée par le code un facteur d'échelle correspondant à l'inverse du facteur de sécurité ϕ_F , résultant en l'équation (3.32).

$$f'_{cc} = 0,85f'_c + 6,7f_{lF}^{0,83} \quad (3.30)$$

$$f_{lF} = \min(0,006 ; \phi_F \varepsilon_F) \kappa t_F E_F \quad (3.31)$$

$$f_{lF} = \min(0,006 ; \phi_F \varepsilon_F) \kappa t_F E_F / \phi_F \quad (3.32)$$

À cet effet on compare les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024, p. 11) et les résultats théoriques issues du modèle analytique proposé avec les résultats empiriques issue de

l'équation (3.32) et représentant l'approche proposée par le code canadien CSA-S806-12 (2021). Les différents résultats sont présentés aux tableau 3.10 dans lequel sont illustrés en dernière colonne les écarts relatifs des résultats empiriques du code CSA-S806-12 (2021) par rapport aux résultats expérimentaux.

Tableau 3.10 Comparaison du modèle de conception fournit par le code avec les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024) et ceux issus du modèle analytique

Échantillon				Exp.	Modèle analytique			CSA-S806-12			
f'_c (MPa)	A/B	plis	κ (m ⁻¹)	f'_{cc} (MPa)	f_{IF} (MPa)	f_{IF}/f'_c	f'_{cc} (MPa)	f_{IF} (MPa)	f_{IF}/f'_c	f'_{cc} (MPa)	Écart sur exp.
30,1	1,0	1	9,43	40,7	4,23	0,14	43,38	2,60	0,09	40,41	1%
31,1	1,3	1	6,59	38,3	2,96	0,10	40,38	1,82	0,06	37,45	2%
31,9	1,4	1	6,01	35,3	2,69	0,08	40,36	1,66	0,05	37,31	6%
31,6	1,5	1	5,52	32,8	2,48	0,08	39,37	1,52	0,05	36,36	11%
26,5	1,6	1	4,98	35,5	2,24	0,08	33,52	1,38	0,05	31,26	12%
30,1	1,0	2	9,43	56,8	8,46	0,28	56,66	5,21	0,17	51,94	9%
31,1	1,3	2	6,59	51,9	5,92	0,19	49,66	3,64	0,12	46,01	11%
31,9	1,4	2	6,01	51,6	5,39	0,17	48,81	3,32	0,10	45,24	12%
31,6	1,5	2	5,52	48	4,95	0,16	47,14	3,05	0,10	43,75	9%
26,5	1,6	2	4,98	43,3	4,47	0,17	40,53	2,75	0,10	38,04	12%
30,1	1,0	3	9,43	71,4	12,69	0,42	69,94	7,81	0,26	62,49	12%
31,1	1,3	3	6,59	60,4	8,87	0,29	58,95	5,46	0,18	53,85	11%
31,9	1,4	3	6,01	56,2	8,08	0,25	57,27	4,97	0,16	52,49	7%
31,6	1,5	3	5,52	51,4	7,43	0,24	54,91	4,57	0,14	50,51	2%
26,5	1,6	3	4,98	51,1	6,71	0,25	47,55	4,13	0,16	44,25	13%

On remarque que les valeurs issues du code CSA-S806-12 (2021) s'éloignent notablement des résultats de l'étude de Benzeguir et al. (2024) avec des écarts relatifs supérieurs à 10% pour la plupart des échantillons. On notera aussi qu'au cas où le facteur d'échelle appliqué à l'équation (3.32) par rapport à l'équation (3.31) n'est pas considéré, les valeurs issues de l'application des équations du code canadien CSA-S806-12 (2021) s'écarterait encore plus des valeurs expérimentales autant pour les échantillons de section transversale circulaire que ceux de section elliptique.

En effet, les équations (3.22) et (3.26) illustrent une relation entre la capacité portante de la colonne confinée et de la contrainte de confinement qui dépend de la forme géométrique de la colonne à travers la courbure relative ρ ainsi que l'angle d'inclinaison du cône de rupture θ_{cc} de la colonne confinée. À partir des comparaisons conduites à la section 3.5.3 avec les résultats de Benzeguir et al. (2024), on déduit que le modèle analytique proposé fournit des résultats plus précis que le modèle empirique donné par le code canadien CSA-S806-12 (2021).

Le modèle de calcul de la résistance à la compression d'une colonne en béton confinée en PRF du code CSA-S6-14 (2014) est exprimé par les équations (3.33) et (3.34), ϕ_F étant dans ce cas un facteur de sécurité sur le PRF ayant une valeur positive est inférieure à l'unité.

$$f'_{cc} = f'_c + 2f_{lF} \quad (3.33)$$

$$f_{lF} = \phi_F \kappa \varepsilon_F t_F E_F \quad (3.34)$$

En comparant ces équations à celle du modèle analytique, notamment (3.9) et (3.24), on conclut que l'approche du code CSA-S6-14 (2014) est très conservatrice, sachant que la valeur de l'angle du cône de rupture de la colonne elliptique confinée se situe généralement entre 35° et 45°. Il en est de même pour le code CSA-S806-12 (2021) comme illustré au tableau 3.10. On note aussi que, pour le cas d'un faible niveau de confinement, la variation de l'angle d'inclinaison du cône de rupture doit être prise en compte à l'équation (3.27) avec le modèle analytique proposé afin de représenter fidèlement le comportement des colonnes elliptiques en béton confinées à l'aide de composites en PRF.

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

L'étude paramétrique menée dans le présent mémoire a permis de mieux comprendre les mécanismes du confinement par PRF des colonnes elliptiques et d'explorer ses implications dans le renforcement des structures en béton armé afin de contribuer au développement de solutions plus sûres et durables pour la construction et la réhabilitation des ouvrages. En conduisant une revue de littérature approfondie sur le confinement des colonnes en béton ainsi que des études numériques par la MEF et analytiques minutieuses en tenant compte des résultats expérimentaux issus des travaux de recherches de la littérature, on a mis en évidence les mécanismes de confinement et leur influence sur la capacité portante des colonnes elliptiques en béton confinées par un chemisage en PRF.

Au premier chapitre, les principaux paramètres exerçant une influence sur la réponse des colonnes courtes elliptiques confinées par un chemisage en PRF, et soumises à un chargement en compression axiale, ont été identifiés à partir des essais expérimentaux rapportés dans la littérature sur le confinement du béton, ainsi que des modèles développés dans le cadre de divers projets de recherche, tels que ceux de Teng et Lam (2002), Chaallal et al. (2003), et Spoelstra et Monti (1999). Ces paramètres correspondent à (1) le rapport volumétrique du PRF par rapport au béton qui est lié au nombre de couches de PRF et qui a une incidence directe sur la rigidité et le niveau de confinement, (2) l'aspect géométrique de la section elliptique caractérisé par le ratio A/B , et (3) la résistance à la compression du matériau béton qui présente un comportement élasto-plastique.

La revue de littérature a révélé un comportement en contrainte-déformation bilinéaire des colonnes courtes en béton confinées en PRF et soumises à un chargement axial en compression, sauf au cas où le niveau de confinement est faible. Typiquement, un niveau de contrainte faible représente une contrainte de confinement f_{lF} inférieure à $0,1f'_c$, et dans ce cas, le comportement est non linéaire après l'atteinte de la résistance maximale du béton non-confiné. La résistance, la rigidité et la ductilité de la colonne composite sont significativement accrues en augmentant le nombre de couches. Aussi, les caractéristiques intrinsèques du béton, telles que son

comportement élasto-plastique et sa résistance maximale à la compression, ont un effet complexe et non négligeable sur le comportement de la colonne confinée.

La forme géométrique de la section transversale de la colonne exprime le degré d'uniformité du confinement. Plus la forme géométrique s'approche de la forme circulaire à travers un ratio de forme exprimant une meilleure symétrie de la section, l'ovalisation de la section, ou l'arrondissement des coins, meilleure est l'uniformité du confinement ainsi que l'économie en couches de PRF pour un même niveau de capacité portante de la colonne, tel qu'explicité par l'étude de Teng et Lam (2002). Aussi, une limitation du ratio de forme est nécessaire afin d'assurer un confinement adéquat en compression des colonnes elliptiques. Cependant, les colonnes circulaires présentent un comportement plus fragile que les colonnes elliptiques qui voient moins de dommages lors de la rupture. Aussi, l'augmentation de l'aire transversale par ovalisation cause une augmentation du poids de la structure et peut provoquer un comportement préjudiciable de celle-ci face aux charges sismiques.

Le besoin en recherche et la complexité des phénomènes régissant cette technique de confinement se traduisent dans les codes de conception par certaines limitations parfois exigeantes, comme celle sur la déformation ultime du PRF qui limite l'utilisation de composites avec un faible module d'élasticité, et d'autres moins conservatrices, voir peu sécuritaires, comme c'est le cas des colonnes de taille réelle avec des bétons à faible résistance à la compression. Hassan et Chaallal (2007) ont montré que l'effet d'échelle sur le comportement des structures est un aspect peu convainquant dans les codes de conceptions, et qu'un travail de recherche plus approfondi est nécessaire pour de meilleures interpolations à partir des résultats d'essais de laboratoire sur des éprouvettes de petite taille et une meilleure compréhension des phénomènes sous-jacents.

L'intérêt relatif à l'utilisation des sections elliptiques, combiné à la demande en termes de rigueur vis-à-vis de la compréhension des phénomènes régissant le comportement des colonnes en béton confinées par un chemisage en PRF ont motivé l'emploi de la MEF afin d'étudier minutieusement l'influence des paramètres correspondant.

Au second chapitre, la MEF classique, méthode de Galerkin, a été employée pour décrire précisément le comportement des colonnes elliptiques tout en assurant une stabilité adéquate du procédé de résolution. Cette formulation variationnelle a mis en évidence plus explicitement l'impact de ces paramètres sous-jacents sur le comportement des colonnes en béton confinées par chemisage en PRF et soumises à un chargement axial en compression dans le modèle théorique approximatif établi. Une formulation NLM a été préférée ainsi que le critère de plasticité de DP avec un algorithme de retour radial basé sur la méthode de Newton-Raphson afin de représenter la non-linéarité du comportement du béton et donc du système composite. À cet effet, la méthode Riks-Crisfield de contrôle de longueur d'arc fût employée pour obtenir les résultats numériques correspondant à la phase de fissuration et d'adoucissement du béton.

Au troisième chapitre, une étude paramétrique rigoureuse du comportement des colonnes courtes en béton de forme elliptique confinées par un chemisage en PRF et soumises à un chargement axial de compression a été effectuée à travers l'emploi du processus de calcul par la MEF établi et détaillé au second chapitre. À cet effet, un code de calcul a été entièrement développé et validé pour ce type de structures et un maillage et des fonctions de formes adéquats ont été choisis. Les différents résultats obtenus ont mis en évidence le degré d'influence de ces paramètres sur le comportement de la colonne elliptique confinée.

En effet, un ajustement minutieux du modèle numérique pour obtenir des résultats fidèles au comportement réel des colonnes elliptiques en béton et confinées en PRF a permis de dévoiler des caractéristiques sous-jacentes des phénomènes régissant leur comportement. À l'atteinte de sa résistance maximale, le béton dans la colonne confinée en PRF se trouve dans un état de plasticité parfaite ou presque, et la phase d'adoucissement du béton n'est alors enclenchée qu'après l'atteinte de la rupture du PRF de confinement et donc de la structure. Aussi, la non-uniformité du confinement en PRF dans une colonne elliptique nécessite une meilleure représentation du comportement du béton à travers l'emploi d'un modèle de compression triaxial du matériau.

Les résultats de la simulation numérique par la MEF ont démontré un accroissement significatif de leurs capacités portantes avec l'augmentation du nombre de couches de confinement en PRF, et un accroissement de la non-uniformité des contraintes de confinement dans la section transversale avec l'augmentation du ratio A/B des colonnes elliptiques en béton. Ces constats sont en concordance avec les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024, p. 10) et Liu et al. (2023). En effet, une augmentation maximale de plus de 80 % de la résistance ultime des colonnes elliptiques confinée avec trois plis de PRFC est notable.

Les enseignements tirés des résultats et constats obtenus couplés à la formulation minutieuse par la MEF des équations d'équilibre régissant le comportement de ce type de structure a conduit à l'établissement d'un modèle analytique déterminant avec grande précision la capacité portante des colonnes elliptiques en béton confinées en PRF dépendamment de ces paramètres principaux. En comparant les résultats expérimentaux de Benzeguir et al. (2024) avec ceux correspondant au modèle analytique proposé en considérant un angle d'inclinaison du cône de rupture constant, on note un écart relatif sur la résistance à la compression des échantillons elliptiques confinés en PRF inférieur à 10%, et ce, pour tout échantillon ayant un niveau de confinement pourvu f_{lF}/f'_c supérieur ou égal à 0,1. Un faible niveau de confinement aura une incidence directe sur le cheminement que prend le transfert de charges entre les efforts repris par la colonne et l'enveloppe de confinement, et donc sur l'angle de cône de rupture, et par conséquent, sur la capacité portante de la colonne.

Les approches préconisées par les codes canadiens CSA-S806-12 (2021) et CSA-S6-14 (2014) s'avère empiriques et très conservatrices pour le cas des colonnes elliptiques en béton, et ce avec un niveau de confinement pourvu f_{lF}/f'_c supérieur ou égal à 0,1. Ces résultats, confrontés aux observations expérimentales, ont démontré la pertinence du modèle analytique proposé dans le cadre du présent travail de recherche et soulignent l'importance des paramètres identifiés de confinement dans l'évaluation de la performance des colonnes en béton renforcées en PRF.

De plus, on propose dans le présent mémoire des pistes d'amélioration quant au modèle analytique proposé ainsi que du modèle numérique reposant sur la MEF de Galerkin. Notamment, une étude plus poussée sur les paramètres influant l'angle d'inclinaison du cône de rupture permettrait de mettre la lumière sur les paramètres causant sa variation, dont les effets dus au niveau de confinement et aux caractéristiques intrinsèques du béton. Le modèle numérique peut être amélioré en remplaçant le modèle de compression uniaxial reposant sur l'application du critère de DP par un modèle triaxial de plasticité du béton plus précis.

Aussi, des données expérimentales plus abondantes couplées à une intégration méticuleuse du critère de Drucker-Prager modifié pour les colonnes elliptiques en béton confinées en PRF constitue une deuxième approche permettant d'établir un modèle numérique adjacent avec la MEF de Galerkin et de représenter fidèlement le comportement de ce type de structures.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ACI-440.2R. (2002). *Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures*. Farmington Hills, MI, États-Unis: ACI Committee 440, American Concrete Institute.
- Al-Sodani, K. A. A., Kalimur Rahman, M., Al-Osta, M. A., & Al-Amoudi, O. S. B. (2018). Finite Element Modeling and Analytical Validation of CFRP Strengthened Reinforced Columns with Inferior Concrete Mix.
- Bathe, K.-J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
- Benzeguir, Z. E. A., Chaallal, O., Godat, A., & Hawileh, R. A. (2024). Experimental Investigation on the Effectiveness of EB-CFRP Confinement of Elliptical Concrete Columns. *Symmetry*, 16(12), 22. doi: 10.3390/sym16121595
- Campione, G., & Miraglia, N. (2003). Strength and strain capacities of concrete compression members reinforced with FRP. *Cement and Concrete Composites*, 25(1), 31-41. doi: [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(01\)00048-8](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(01)00048-8). Repéré à <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946501000488>
- Chaallal, O. (2014). *Structures en béton armé - 2e édition actualisée*. Montréal (Québec): Les Presses de l'Université du Québec.
- Chaallal, O. (2018). *Matériaux composites en PRF - Renforcement des structures existantes en béton armé*. Montréal (Québec): Les Presses de l'Université du Québec.
- Chaallal, O., Hassan, M., & LeBlanc, M. (2006). Circular Columns Confined with FRP: Experimental versus Predictions of Models and Guidelines. *Journal of Composites for Construction*, 10(1), 4-12. doi: 10.1061/(ASCE)1090-0268(2006)10:1(4). Repéré à [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2006\)10:1\(4\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2006)10:1(4))
- Chaallal, O., Hassan, M., & Shahawy, M. (2003). Confinement Model for Axially Loaded Short Rectangular Columns Strengthened with Fiber-Reinforced Polymer Wrapping. *ACI Structural Journal*, 100(2), 215-221. doi: 10.14359/12485
- Chen, W.-F., & Han, D.-J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*. New York, NY: Springer-Verlag.
- Coulomb, C. A. (1776). Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mémoires de la Mathématique et de la Physique*, 7, 343-382.

- Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers & Structures*, 13(1), 55-62. doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5). Repéré à <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794981901085>
- CSA-A23.1/A23.2. (2004). *Concrete Materials and Methods of Concrete Construction/Methods of Test and Standard Practices for Concrete*. Toronto, Ontario, Canada: Canadian Standard Association
- CSA-S6-14. (2014). *Code canadien sur le calcul des ponts routiers*. Mississauga, Ontario, Canada: Association canadienne de normalisation.
- CSA-S806-02. (2007). *Design and Construction of Building Components with Fibre-Reinforced Polymers*. Toronto, Ontario, Canada: Association canadienne de normalisation.
- CSA-S806-12. (2021). *Design and Construction of Building Components with Fibre-Reinforced Polymers*. Toronto, Ontario, Canada: Association canadienne de normalisation.
- Dassault, S. (2004). ABAQUS Standard User’s Manual, Version 6.5. Repéré à <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.5/books/stm/default.htm?startat=ch07s01atr01.html#stm-ref-crisfield-1981>
- Drucker, D. C., & Prager, W. (1952). Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10(2), 157-165. Repéré à <http://www.jstor.org/stable/43633942>
- Dunavant, D. A. (1985). High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 1129-1148.
- Felippa, C. (2004). A compendium of FEM integration formulas for symbolic work. *Engineering Computations*, 21, 867-890. doi: 10.1108/02644400410554362
- FIB. (2019). *Externally applied FRP reinforcement for concrete structures*. Fédération internationale du béton.
- Fish, J., & Belytschko, T. (2007). *A First Course in Finite Elements*. Chippenham, Wiltshire (Great Britain): John Wiley & Sons.
- Fortin, A., & Garon, A. (2006). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Montréal, Canada: Presses Internationales Polytechnique. Repéré à <https://dms.umontreal.ca/~owens/MAT6450/elfind.pdf>

- Gahmousse, Z., Djebbar, M., & Djebbar, N. (2021). Seismic performance of RC columns retrofitted by CFRP wrapping ‘Study of the influencing parameters’. *Asian Journal of Civil Engineering*, 22. doi: 10.1007/s42107-021-00354-3
- Hassan, M., & Chaallal, O. (2007). Fiber-reinforced polymer confined rectangular columns: Assessment of models and design guidelines. *ACI Structural Journal*, 104(6), 693-702. doi: 10.14359/18951
- Humbert, P., Dubouchet, A., Fezans, G., & Remaud, D. (2003). *Manuel des matériaux de CESAR-LCPC*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Repéré à <https://www.cesar-lcpc.com/fr/download-documentation.php>
- ISIS-M04. (2001). *Externally Bonded FRP for Strengthening Reinforced Concrete Structures*. Winnipeg, MB, Canada: The Canadian Network of Centers of Excellence on Intelligent Sensing for Innovative Structures.
- Jiang, J.-F., & Wu, Y.-F. (2012). Identification of material parameters for Drucker–Prager plasticity model for FRP confined circular concrete columns. *International Journal of Solids and Structures*, 49(3), 445-456. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.002>. Repéré à <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768311003325>
- Lam, D., Gardner, L., & Burdett, M. (2010). Behaviour of axially loaded concrete filled stainless steel elliptical stub columns. *Advances in Structural Engineering*, 13(3), 493-500.
- Lam, L., & Teng, J. G. (2003). Design-oriented stress–strain model for FRP-confined concrete. *Construction and Building Materials*, 17(6), 471-489. doi: [https://doi.org/10.1016/S0950-0618\(03\)00045-X](https://doi.org/10.1016/S0950-0618(03)00045-X). Repéré à <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095006180300045X>
- Liu, K., Jiang, C., Yu, T., & Teng, J. (2023). Compressive behaviour of elliptical FRP tube-confined concrete columns. *Composite Structures*, 303, 116301.
- Maalej, M., Tanwongsva, S., & Paramasivam, P. (2003). Modelling of rectangular RC columns strengthened with FRP. *Cement and Concrete Composites*, 25(2), 263-276. doi: [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(02\)00017-3](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(02)00017-3). Repéré à <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946502000173>
- Mander, J. B., Priestley, M. J., & Park, R. (1988). Theoretical stress-strain model for confined concrete. *Journal of structural engineering*, 114(8), 1804-1826.
- Mazars, J., & Pijaudier-Cabot, G. (1989). Continuum Damage Theory—Application to Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(2), 345-365. doi:

- 10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345). Repéré à
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1989\)115:2\(345\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345))
- Menétrey, P., & Willam, K. J. (1995). Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*, 92(3), 311-318. doi: 10.14359/1307. Repéré à
<https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal/m/details/id/1307>
- Mukherjee, A., Boothby, T. E., Bakis, C. E., Joshi, M. V., & Maitra, S. R. (2004). Mechanical Behavior of Fiber-Reinforced Polymer-Wrapped Concrete Columns—Complicating Effects. *Journal of Composites for Construction*, 8(2), 97-103. doi: 10.1061/(ASCE)1090-0268(2004)8:2(97). Repéré à
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2004\)8:2\(97\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2004)8:2(97))
- Paulay, T., & Priestley, M. J. N. (1992). *Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*. John Wiley & Sons. doi: 10.1002/9780470172841
- Paultre, P. (2011). *Structures en béton armé : analyse et dimensionnement*. Montréal (Québec): Presses internationales Polytechnique.
- Priestley, M. J. N., & Park, R. (1987). Strength and Ductility of Concrete Bridge Columns Under Seismic Loading. *ACI Structural Journal*, 84(1), 61-76. doi: 10.14359/2800
- Priestley, M. J. N., Seible, F., Xiao, Y., & Verma, R. (1994). Steel jacket retrofitting of reinforced concrete bridge columns for enhanced shear strength - Part 1: Theoretical consideration and test design. *ACI Structural Journal*, 91(4), 394-405.
- Priestley, M. J. N., Seible, F., Xiao, Y., & Verma, R. (1995). Steel jacket retrofitting of reinforced concrete bridge columns for enhanced shear strength - Part 2: Test results and comparison with theory. *ACI Structural Journal*, 91(5), 537-551.
- Richart, F. E., Brandtæg, A., & Brown, R. L. (1928). *A Study of the Failure of Concrete Under Combined Compressive Stresses*. Illinois, États-Unis: University of Illinois Engineering Experimental Station Urbana-Champaign.
- Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15, 529-551.
- Rousakis, T. C., Karabinis, A. I., Kioussis, P. D., & Tepfers, R. (2008). Analytical modelling of plastic behaviour of uniformly FRP confined concrete members. *Composites Part B: Engineering*, 39(7), 1104-1113. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2008.05.001>. Repéré à
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836808000711>

- Seible, F., Priestley, M. J. N., Hegemier Gilbert, A., & Innamorato, D. (1997). Seismic Retrofit of RC Columns with Continuous Carbon Fiber Jackets. *Journal of Composites for Construction*, 1(2), 52-62. doi: 10.1061/(ASCE)1090-0268(1997)1:2(52). Repéré à [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(1997\)1:2\(52\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(1997)1:2(52))
- Shehata, I. A. E. M., Carneiro, L. A. V., & Shehata, L. C. D. (2002). Strength of short concrete columns confined with CFRP sheets. *Materials and Structures*, 35(1), 50-58. doi: 10.1007/BF02482090. Repéré à <https://doi.org/10.1007/BF02482090>
- Shin, J., & Jeon, J.-S. (2022). Seismic damage mitigation strategy using an FRP column jacketing system in gravity-designed reinforced concrete building frames. *Composite Structures*, 279, 114700. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114700>. Repéré à <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822321011557>
- Stroud, A. H., & Secrest, D. (1966). *Gaussian Quadrature Formulas*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Teng, J. G., & Lam, L. (2002). Compressive Behavior of Carbon Fiber Reinforced Polymer-Confined Concrete in Elliptical Columns. *Journal of structural engineering*, 128(12), 1535-1543. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:12(1535). Repéré à [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2002\)128:12\(1535\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:12(1535))
- Wang, Y. C., & Restrepo, J. I. (2001). Investigation of Concentrically Loaded Reinforced Concrete Columns Confined with Glass Fiber-Reinforced Polymer Jackets. *ACI Structural Journal*, 98(3), 377-385. doi: 10.14359/10226
- Yang, X., Wei, J., Nanni, A., & Dharani Lokeswarappa, R. (2004). Shape Effect on the Performance of Carbon Fiber Reinforced Polymer Wraps. *Journal of Composites for Construction*, 8(5), 444-451. doi: 10.1061/(ASCE)1090-0268(2004)8:5(444). Repéré à [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2004\)8:5\(444\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2004)8:5(444))
- Zeng, J. J., Teng, J. G., Lin, G., & Li, L. J. (2021). Large-Scale FRP-Confined Rectangular RC Columns with Section Curvilinearization under Axial Compression. *Journal of Composites for Construction*, 25(3), 13. doi: 10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0001129. Repéré à [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CC.1943-5614.0001129](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0001129)