ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU
DOCTORAT EN GÉNIE
Ph.D.

PAR
DORÉ, Vincent

PRÉTRAITEMENTS ADAPTATIFS DES RADIOGRAPHIES POUR LA SEGMENTATION DES PÉDICULES SUR LA VUE POSTERO-ANTÉRIEURE DE PATIENTS ATTEINTS DE SCOLIOSE IDIOPATHIQUE ADOLESCENTE

MONTRÉAL, LE 06 FÉVRIER 2009

© droits réservés de Vincent DORÉ, 2009

"Ille ipse perdit in cupiditate,
perdit minus quam eum qui perdit cupiditatem eius."
Saint Augustin.

"Celui qui se perd dans sa passion
a moins à perdre que celui qui perd sa passion."
Saint Augustin.

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Pr. Mohamed Cheriet, directeur de thèse
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

Pr. Pierre Dumouchel, président du jury
Département de génie logiciel et des technologies de l'information

Pr. Tien Bui, membre externe
Department of Computer Science and Software Engineering, Concordia University

Pr. Rita Noumeir, membre du jury
Département de génie de la production automatisée á l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 28 JANVIER 2009

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

PRÉTRAITEMENTS ADAPTATIFS DES RADIOGRAPHIES POUR LA SEGMENTATION DES PÉDICULES SUR LA VUE POSTERO-ANTÉRIEURE DE PATIENTS ATTEINTS DE SCOLIOSE IDIOPATHIQUE ADOLESCENTE

DORÉ, Vincent

RÉSUMÉ

Les images radiographiques sont utilisées depuis près d'un siècle pour aider les praticiens dans leur diagnostique. Depuis quelques décennies, l'utilisation d'ordinateurs a permis d'offrir de nouveaux outils de visualisation du corps humain, notamment avec l'imagerie 3D. A l'hôpital Sainte-Justine, les radiographies de patients atteints de scoliose idiopathique sont utilisées pour reconstruire leur colonne vertébrale en trois dimensions. Ceci permettant de mieux comprendre les déformations dues à cette pathologie mais aussi afin de poser un diagnostic plus précis pour chaque patient. Cependant, les radiographies sont des images fortement dégradées. Ces dégradations influencent la qualité de la reconstruction. Le but principal de cette thèse fut de développer des outils de prétraitements adaptés aux radiographies afin de réduire l'influence du bruit et du flou dus au modèle d'acquisition de ces images.

Nous nous sommes dans un premier temps intéressés aux caractéristiques du bruit afin de mieux le comprendre et de mieux le modéliser. Ainsi les radiographies sont des données hétéroscédastiques, c'est-à-dire que la variance du bruit en un pixel donné dépend de son niveau de gris. A partir de cette dernière caractéristique, nous avons étendu le filtre à moyennes non locales aux radiographies. Ce faisant, le paramètre de régularisation est ajusté en chaque pixel automatiquement en fonction des structures locales de l'image. Nous avons aussi introduit une régression robuste qui permet d'augmenter le pouvoir de débruitage du modèle. Le modèle de débruitage que nous avons développé est ainsi automatique et bien adapté aux images radiographiques.

Nous nous sommes ensuite intéressés au rehaussement des radiographies. Nous avons choisi d'utiliser une approche par EDP (Équation aux dérivées partielles). Ces dernières permettent de rehausser les contours d'une image. Les récentes EDPs utilisent un tenseur structurel linéaire afin d'estimer le gradient de l'image dans le bruit ; Nous avons proposés dans cette thèse un nouveau tenseur structurel, le TSMNL (le Tenseur Structurel á moyennes Non Locales) basé sur les caractéristiques non locales des dérivatives de l'image pour fournir une estimation robuste du gradient. Le TSMNL est aussi aisément étendu aux images hétéroscédastiques et donc aux images radiographiques. Nous nous sommes intéressés à deux EDPs de rehaussement, la diffusion anisotrope et le filtre de choc, nous présentons des résultats sur des images naturelles et sur des radiographies.

Afin d'évaluer l'impact du filtrage sur les traitements postérieurs des images, nous nous sommes intéressés à la segmentation des pédicules. Ces derniers objets sont deux structures tubulaires prolongeant la "marge" latérale postérieure du corps vertébral. Ceux-ci peuvent être identifiés sur deux vues radiographiques et être utilisés comme repères anatomiques pour la reconstruction 3D. Parce que les pédicules apparaissent sur des images fortement bruitées comme étant de petits objets faiblement contrastés, ils sont difficilement identifiables. Il est donc difficile de réaliser une segmentation directement sur ces images. Nous avons donc dans un premier temps, construit une table de probabilités sur laquelle il est plus aisé de le faire. Nous avons ensuite développé un modèle de segmentation multi-échelle ("grossier à fin") à partir d'un modèle simple de contour actif. La table permet d'avoir la même initialisation des paramètres du contour actif pour tous les pédicules. A la première échelle, une première forme grossière du pédicule est extraite. Cette forme est transmise à l'échelle suivante par l'intermédiaire d'une force contraignant le contour actif de rester proche de la forme grossière du pédicule. Pour valider la fiabilité de notre segmentation, nous avons validé notre algorithme de segmentation de pédicules sur 38 radiographies. Le taux de segmentation est de 81.1%. Les résultats ont été comparés avec grande satisfaction avec la segmentation manuelle d'un expert.

X-RAY PREPROCESSING FOR PEDICLE SEGMENTATION ON POSTEROANTERIOR VIEWS FROM PATIENTS AFFECTED BY ADOLESCENT IDIOPATHIC SCOLIOSIS.

DORÉ, Vincent

ABSTRACT

The radiographic images have been used for almost a century to help the practitioners in their diagnostic. For some decades, the use of computers allowed to offer new tools to visualize the human body, notably with the 3D imaging. At the Sainte-Justine hospital, X-rays of patients affected by idiopathic scoliosis are used to reconstructing their vertebral column in three dimensions. This allows not only to better understand the deformations due to this pathology but also to come up with a more precise diagnostic for every patient. Because X-rays are strongly degraded images, the quality of the reconstruction is typically low. The main purpose of this thesis is to develop preprocessing tools adapted to X-rays to reduce the impact of the noise and the blur, that are due to the acquisition model.

At first, we were interested in the characterization of the noise in order to understand and better model it. Hence, X-rays are heteroscedastic data, which means that the variance of the noise at a given pixel depends on its gray level. Based on this latter characteristic, we extend the nonlocal means filter to X-ray images. Consequently, the regularization parameter is pixelwise automatically adjusted as a function of the local structures of the image. We also introduced a robust regression which allows to increase the denoising power of the model. The denoising process that we developed is therefore automatic and well adapted to the radiographic images.

We were then interested in the X-rays deblurring process. We chose to use an PDE-based approach that enhances the image contours. The recent PDEs use a linear structural tensor to estimate the gradient of the image in the noise. In this thesis, we proposed a new structural tensor, the TSMNL (the Non local Structural Tensor) which is based on the non local characteristics of the image derivatives to provide a robust estimation of the gradient. The TSMNL could also be easily extended to heteroscedastic images and thus to X-ray images. We focused on two enhancing PDEs, the anisotropic diffusion and the shock filter, we present results on both natural and X-ray images.

To estimate the impact of the filtering on image post processing, we investigated the segmentation of pedicles. These last objects are two tubular structures prolonging the posterior lateral margin of the vertebral body. Pedicles can be identified on two radiographic views and can be used as anatomical marks for 3D reconstruction. Because they appear as small and weakly contrasted objects on highly degraded images, they are difficult to be recognized and directly segmented on X-rays image. To alleviate this issue, we started by

building a probability table which increased the contrast. We then developed a multi-scale model of segmentation ("coarse to fine") based on a simple active contour. Our probability table allows to have the same initialization parameters of the active contour for all pedicles at the same vertebral level. At the first scale, a coarse shape of the pedicle is extracted. Then, on the following scale, a force constrained the active contour to remain close to coarse shape of the pedicle. To validate the reliability of our segmentation, we tested our algorithm of segmentation on 38 X-rays. The segmentation rate is 81.1%. The segmentation results have been compared with big satisfaction with the manual segmentation of an expert.

REMERCIEMENT

En premier lieu, je tiens à remercier Mohamed Cheriet pour m'avoir fait confiance tout au long de ce doctorat. Son soutien moral et financier ont permis de réaliser ce doctorat dans de bonnes conditions. Je remercie aussi vivement Farida Cheriet pour m'avoir ouvert les portes de son laboratoire, et pour sa patience. J'aimerais souligner la gentillesse et la bonne humeur des Cheriet qui ont grandement aidé à rendre ce doctorat plus agréable.

D'autre part, je remercie Pr. Tien Bui, Pr Rita Noumeir et Pr Pierre Dumouchel pour avoir pris le soin d'évaluer ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Luc Duong et Rezza Moghaddam pour le temps qu'ils m'ont consacré. Leurs conseils avisés tout au long cette recherche ont permis de rendre cette thèse plus complète.

Un grand merci va également à l'ensemble des compagnons de galère du LIVIA et de Synchromedia avec qui j'ai partagé bien plus qu'un lieu de travail. Parmi eux, je tiens spécialement à remercier Yoyo, Luana, Melissa, Marcelo, Albert, Wael, Carlos, Dominic, Eric, Mathias, Cyril, Cabelão, John, Seb, Clem, Paolo, Paoliño, Luis, David, Safeya, Youssef, Jeff, Edouardo et Philippe. Mes remerciements vont aussi aux membres du LAVIANI ; Claudia, Fethia, Nancy et Carole.

Par ailleurs, un merci tout particulier va à mon ancien "colloc" Mouss et à Tati pour leur amitié, leur soutien et le plaisir que fut de les rencontrer à Montréal.

Quelques lignes ne sont pas suffissantes pour remercier ma famille à qui mes plus sincères remerciements vont. J'espère qu'ils me pardonneront de ne pas assez évoquer leur aide. Je remercie tout particulièrement mes parents, qui outre leur confiance et leur soutien, m'ont appris la persévérence et montrer le sens de l'effort ; deux qualités indispensables pour mener à bien un doctorat.

TABLE DES MATIÈRES

Page

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 ÉTAT DE L'ART SUR LE FILTRAGE DES IMAGES 13
1.1 Introduction 13
1.2 Les images radiographiques 13
1.2.1 Le modèle de formation des images radiographiques 13
1.2.2 Modélisation du bruit 15
1.2.3 Modèle simple du bruit présent dans une image naturelle 15
1.2.4 Le bruit des images radiographiques 15
1.2.5 Caractérisation du bruit présent dans les radiographies de notre base de données 17
1.2.6 Le flou présent dans les radiographies 19
1.3 Le débruitage des images 21
1.3.1 Les filtres linéaires 22
1.3.1.1 Le noyau optimal, la gaussienne 22
1.3.1.2 Le KCS et le SKCS 23
1.3.1.3 Limitation du filtrage linéaire 25
1.3.2 Le filtre de Wiener 26
1.3.3 Le seuillage des coefficients dans une base d'ondelettes 26
1.3.3.1 Les ondelettes orthogonales réelles 26
1.3.3.2 Les secondes générations d'ondelettes 29
1.3.3.3 La transoformée en ondellettes discrètes utilisant les arbres duaux 29
1.3.4 Les filtrages adaptatifs 30
1.4 Le filtrage par Équations aux Dérivées Partielles 33
1.4.1 L'équation de la chaleur 33
1.4.2 La diffusion anisotrope 34
1.4.3 Le filtre de Rudin 35
1.4.4 Le mouvement par courbure moyen 35
1.4.5 Le filtre de Osher et Rudin 36
1.4.6 Le filtre de restauration de Buades 37
1.4.7 Le filtre de Alvarez et Mazorra 37
1.4.8 Les filtres de choc du LIVIA 38
1.4.9 Le filtre complexe 39
1.5 Les tenseurs structurels 39
1.5.1 Le tenseur structurel et linéaire 39
1.5.2 Les EDPs avec tenseur structurel associé 40

1.5.2.1 La diffusion anisotrope 40
1.5.2.2 Le Filtre de choc cohérent 41
1.5.3 Le Tenseur structurel adaptatif 41
1.6 Conclusion 43

CHAPITRE 2 UN FILTRE DE DÉBRUITAGE 45
2.1 Introduction 45
2.2 État de l'art de l'estimation de la largeur de bande 47
2.2.1 Approche probabiliste du filtre MNL 47
2.2.2 Largeur de bande globale 49
2.2.3 Adaptation locale de la largeur de bande 50
2.2.4 D'autres modèles basés sur la comparaison de régressions 51
2.2.5 Largeur de bande locale dans des modèles de traitement de l'image .. 52
2.3 Détection automatique de la largeur de bande pour le filtre MNL 53
2.3.1 La statistique C_p de Mallows 53
2.3.2 La statistique C_p pour le filtre MNL 54
2.3.3 Minimisation de C_p 56
2.3.3.1 Pour augmenter la rapidité de l'algorithme 57
2.3.4 Segmentation robuste sur les échantillons 58
2.3.5 Quel coefficient pour I_i 61
2.3.6 Une mesure d'adéquation 63
2.4 Expériences sur des images avec un bruit additif 64
2.4.1 Comparaison du nouveau filtre avec le filtre MNL 64
2.4.2 Les différents choix des largeurs de bande en fonction de la variance du bruit 71
2.4.2.1 Différents poids du biais et de la variance 74
2.4.3 La mesure d'adéquation 76
2.4.4 Le seuillage robuste 77
2.4.5 Nombre maximal de pixel échantillons et temps de calcul 79
2.5 Extension du modèle aux images radiographiques 81
2.5.1 La statistique C_p pour les données hétéroscédastiques 81
2.5.2 Expérience sur des données synthétiques 81
2.5.3 Expériences sur les radiographies 84
2.6 Conclusion 87

CHAPITRE 3 MODÈLE DE DIFFUSION 89
3.1 Introduction 89
3.1.1 Extension du filtre MNL au tenseur 90
3.1.2 Bruit dans les canaux du tenseur 91
3.1.3 Choix du paramètre optimal de régularisation 93
3.1.4 Une régression robuste 94
3.2 Diffusion anisotrope 95

3.2.1 Discretisation de l'équation 95
3.2.2 Évolution du bruit suivant les itérations 97
3.2.3 La fonction de diffusion g 99
3.3 Filtre de choc 100
3.3.1 Discrétisation du filtre de choc 100
3.3.2 La variance du bruit suivant les itérations 101
3.4 Expérimentations 102
3.4.1 Robustesse de la régularisation 102
3.4.2 Comparaison de trois tenseurs 104
3.4.3 Détection des coins 105
3.4.4 Diffusion anisotrope 109
3.4.5 Filtre de choc 111
3.4.5.1 Degré de simplification de l'image 116
3.4.6 Extension aux images radiographiques 118
3.4.6.1 Diffusion anisotrope 120
3.4.6.2 Le filtre de choc 120
3.5 Conclusion 122

CHAPITRE 4 SEGMENTATION DES PÉDICULES 125
4.1 Introduction 125
4.2 Revue bibliographique 127
4.2.1 Le modèle de segmentation de Mumford-Shah 127
4.2.1.1 Le modèle constant par morceaux 128
4.2.1.2 Approche hiérarchique 129
4.2.2 Études des paramètres d'attache aux données et de régularité 130
4.2.3 Incorporation de connaissances sur les statistiques des formes dans la fonctionnelle de Mumford-Shah 131
4.2.3.1 Le modèle de Cremer 132
4.2.3.2 Le Modèle de Rousson et de Paragios 133
4.2.3.3 Construction de la forme représentative φ_M 134
4.2.3.4 La transformation $\mathcal{T}$ optimale 134
4.2.3.5 Analyse en composantes principales (ACP) 135
4.3 Un modèle de segmentation utilisant la forme des pédicules 136
4.3.1 Étude de la forme des pédicules 137
4.3.2 Un premier contour actif avec un modèle de forme a priori 138
4.3.3 Analyse en composantes principales 139
4.3.4 Séparation de la base de données en classes 141
4.4 La segmentation des pédicules 144
4.4.1 Table de probabilités 145
4.4.1.1 Motivation 145
4.4.1.2 Table de probabilités 146
4.4.1.3 Quelques problèmes dûs à la table de probabilités 148

4.5 Forme grossière de pédicule 150
4.5.1 Recherche d'une segmentation plus fine 154
4.5.2 Différence de segmentation entre les pédicules thoraciques et les pédicules lombaires 155
4.5.3 Paramètres 156
4.5.4 Pour augmenter le taux de segmentation 157
4.5.4.1 Les pédicules dont la couronne est fortement trouée 158
4.5.4.2 Lors d'une forte rotation 161
4.6 Double initialisation 164
4.7 Conclusion 164

CHAPITRE 5 EXPÉRIMENTATIONS ET RÉSULTATS 166
5.1 Introduction 166
5.2 Influence du prétraitement sur la segmentation des pédicules 166
5.2.1 Influence du prétraitement sur la table de probabilités 166
5.2.2 Influence du prétraitement sur le taux de segmentation de pédicules 168
5.2.3 Influence du débruitage sur la forme des pédicules segmentés 173
5.2.4 Influence des prétraitements sur d'autres types de segmentation 173
5.3 Segmentation de pédicules 176
5.3.1 Protocole expérimental 176
5.3.2 Résultats 178
5.3.2.1 Sur le taux de Segmentation 178
5.3.2.2 Invariance aux points d'initialisation 179
5.3.2.3 La comparaison avec l'expert 182
5.4 Conclusion 186

CONCLUSION 188

ANNEXES 195

ANNEXE I SUR L'APPRENTISSAGE DU PARAMÈTRE DE RÉGULARISATION DU FILTRE C_pMNL 195
ANNEXE II CALCUL DE LA VARIANCE DU BRUIT DANS LES CANAUX D'UN TENSEUR 202

BIBLIOGRAPHIE 204

LISTE DES TABLEAUX

Page

Tableau 4.1 Valeurs des trois paramètres pour les différents niveaux vertébraux 158

Tableau 5.1 Nombre de segmentations pour chacune des 16 vertèbres (de T1 à L4). La deuxième et la troisième colonnes correspondent aux pédicules qui n'ont pas été utilisés dans la segmentation car ils n'étaient pas visibles (seconde colonne) ou car une bille de calibration les dégradait (troisième colonne). Les colonnes 4 à 8 correspondent aux nombres de pédicules qui ont été bien segmentés pour les 5 méthodes : la méthode principale (M1), la méthode sans approche multi-échelle (M2), la méthode par sélection d'ellipse (M3), la méthode utilisant un post-traitement (M4) et la méthode à double initialisation (M5). Les colonnes 9 à 12 correspondent aux pédicules qui ont été mal segmentés par les 4 approches. Enfin la dernière colonne présente le taux de segmentation par vertèbre 180

Tableau 5.2 La première colonne donne la différence moyenne en millimètre entre le centre des pédicules et le centroïde de la forme extraite pour chaque vertèbre T1 à L4. La seconde colonne correspond à la variance de cette différence. La troisième colonne présente la différence des estimations de la rotation frontale pour chaque niveau vertébral. Cette différence est donnée en degré. La quatrième colonne présente la variance de la différence d'angles..... 186

LISTE DES FIGURES

Page

Figure 0.1 Les angles de Cobb sont des indices cliniques de la gravité d'une courbure scoliotique [51]. 2

Figure 0.2 A gauche, une radiographie PA d'une patiente atteinte de scoliose idiopathique. A droite, un zoom de la vertèbre T5, dont le contraste a été rehaussé. Les deux pédicules ont été entourés par une ellipse bleue. 8

Figure 1.1 Modèle de formation des images radiographiques. Après avoir été émis par la source les rayons X rencontrent l'objet O. Certains rayons X réussissent à le traverser sur une longueur ds et viennent frapper la plaque de détection. Les autres rayons sont absorbés par l'objet. 14

Figure 1.2 La variance du bruit en fonction du niveau de gris. 19

Figure 1.3 Une partie des rayons, en provenance de la première source, a été absorbée par l'objet. Ceux de la deuxième source n'ont pas été absorbés. La sommation des intensités lumineuses des deux sources crée du flou. 20

Figure 1.4 Cas d'une double source de rayons X avec deux objets présentant un sténopé. L'objet 1 est plus éloigné de la plaque de détection que l'objet 2. Sur la plaque, la taille du sténopé de l'objet 1 est plus grosse que celle de l'autre objet. Ainsi plus les objets sont éloignés ; plus le flou les dégradant est important. 21

Figure 1.5 Gaussienne tronquée avec un support égal au KCS ci-après et le log du module de sa réponse impulsionnelle. 24

Figure 1.6 KCS et le log du module de sa réponse impulsionnelle. 25

Figure 2.1 Estimation de la somme des biais carrés (SSB) avec différents voisinages échantillons. 56

Figure 2.2 La Figure (b) présente l'histogramme entre le voisinage du pixel central et les voisinages des autres pixels de (a). 59

Figure 2.3 Le SSB normalisé, la somme des variances estimées SV $= \sum_j \text{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))$, et la somme des deux SE, pour différentes largeurs de bande. Figures (b) et (d) montrent l'estimation du SSB normalisé et la statistique C_p. 62

Figure 2.4 Comparaison des performances en décibel (dB) du C_pMNL avec le MNL, le NML amélioré et l'Oracle, pour différentes variances. Le paramètre de régularisation a été, pour chaque variance, manuellement ajusté pour le MNL original et sa version ameliorée. Les niveaux de gris sont dans l'intervalle [0 255] . 65

Figure 2.5 Comparison du filtre MNL amélioré avec une largeur de bande globale optimisée manuellement et le filtre C_pMNL. (a) est l'image bruitée. (b) est un zoom de l'image réelle. (c) est le débruitage avec le MNL amélioré. (d) est le debruitage avec le C_pMNL. Les contours sont mieux débruités avec le C_pMNL. 66

Figure 2.6 Comparaison du filtre MNL avec le filtre C_pMNL sur une image dégradée avec un bruit gaussien de variance 20. Pour la Figure (d), la largeur de bande h_{Cp} est plus petite que h_{NL} dans les régions noirs alors qu'elle est plus grande dans les régions branches. L'image originale a été superposée pour des fins de visibilité. 68

Figure 2.7 Comparaison entre le filtre C_pMNL et le filtre MNL sur une image dégradée par un bruit blanc gaussien de variance 120. 69

Figure 2.8 Les PSNRs du DTDWT, du filtre MNL, et du filtre C_pMNL pour différents niveaux de bruit. La largeur de bande du filtre MNL a été globalement optimisée en maximisant le PSNR. 70

Figure 2.9 (a) et (c) sont les images bruitées. (b) et (d) sont deux agrandissement des images originales. (e) et (g) sont les sorties du filtre MNL alors que (f) et (h) sont les sorties du filtre C_pMNL. (i) et (k) sont les images différence entre les sorties des filtres MNL standard et C_pMNL. (j) et (l) sont les sorties de la méthode DTDWT. 71

Figure 2.10 (a) et (c) sont les images bruitées. (b) et (d) sont deux agrandissement des images originales. (e) et (g) sont les sorties du filtre MNL alors que (f) et (h) sont les sorties du filtre C_pMNL. (i) et (k) sont les images différence entre les

sorties des filtres MNL standard et C_pMNL. (j) et (l) sont les sorties de la méthode DTDWT. 72

Figure 2.11 Comparaison des logarithmes des largeurs de bande pour des images dégradées par un bruit blanc gaussien de variances 20 et 120. 73

Figure 2.12 $\frac{1}{\sigma^2}\text{SSB}(i)$ et la somme des variance de l'estimation $\text{SV}(i) = \sum_j \text{Var}(\check{I}_{i,h}(j))$ pour des pixels i appartenant à différents motifs. (a), (c) et (e) sont dégradées par un bruit de variance 20 et (b),(d) et (f) par une bruit de variance 120. 75

Figure 2.13 Les variations du PSNR en fonction de la variance du bruit, à chaque courbe correspond un coefficient de pondération α différent. 76

Figure 2.14 M_a, mesure d'adequation. 77

Figure 2.15 PSNR normalisé pour différents degrés de bruit en fonction de d. 78

Figure 2.16 Exemple du seuillage robuste. Sur la Figure (d), plus le pixel est clair et plus grand est le nombre de pixels échantillons utilisés pour son débruitage. La Figure (e) montre une partie de la Figure 2.16(b). Sur la Figure (f), les pixels blancs sont ceux utilisés pour débruiter i sur la Figure (e). 79

Figure 2.17 PSNR en fonction du bruit pour différents nombres maximaux de pixels échantillons. 80

Figure 2.18 Les erreurs des différents filtres : MNL, C_pMNL et $\tilde{C}_p$MNL) en fonction des niveaux de gris. 83

Figure 2.19 Comparaison des différents filtres sur l'image du cameraman dégradée par un bruit gaussien dont la variance suit la Figure 2.18(a) en fonction des niveaux de gris. 83

Figure 2.20 Une radiographie a) et sa version régularisée par $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL b). Les images différences pour les filtres $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL et $\tilde{C}_{p_{0.7}}$MNL. .. 85

Figure 2.21 L'image différence entre les deux versions regularisées de la Figure 2.20(a) par $\tilde{C}_{p_\alpha}$MNL pour $\alpha = 0.3$ et 0.7. 86

Figure 2.22 Les images différence avec le filtre MNL original où la largeur de bande a été choisie comme étant la largeur de bande médiane du filtre $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL. 87

Figure 2.23 Le voisinage d'un pédicule et sa version régularisée par le filtre $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL. 88

Figure 3.1 Struture en forme de ligne et deux pixels i et k et leurs voisinages X_i et X_k. 92

Figure 3.2 Les voisinages des trois canaux des tenseurs $J[I](i)$ et $J[I](k)$. 93

Figure 3.3 La robustesse du filtre $\tilde{C}_p$MNL sur le champ de tenseurs d'une image texturée. 103

Figure 3.4 Image test. 105

Figure 3.5 Le champ de vecteurs propres associé au tenseur de l'image bruitée 3.4 et des vecteurs associés au tenseur structurel linéaire. 106

Figure 3.6 Les champs de vecteurs propres associés aux tenseurs structurels non linéaire et non local de l'image bruitée 3.4. 107

Figure 3.7 Le premier motif représente un coin alors que le second représente un contour diagonal. 108

Figure 3.8 La détection des coins avec les tenseurs structurels linéaire et non local. 109

Figure 3.9 Le PSNR de l'image du cameraman diffusée en fonction des itérations avec le tenseur isotrope de Weickert et le tenseur structurel non local. 110

Figure 3.10 Les images diffusées ayant le PSNR le plus élevé en utilisant le tenseur structurel non local (a) et le tenseur isotrope de Weickert (b). 111

Figure 3.11 Diffusions anisotropes des images "aérienne" et "lune". Les Figures (b) et (f) présentent leurs versions dégradées avec un bruit de variance 60. Les Figures (c) et (g) sont les versions diffusées avec le tenseur linéaire alors que les Figures (d) et (h) sont celles utilisant le TSMNL. 112

Figure 3.12 Diffusions anisotropes des images "maison" et "arbre". Les Figures (b) et (f) présentent leur versions dégradées avec un bruit de variance 60. Les Figures (c) et (g) sont les versions diffusées avec le tenseur linéaire alors que les Figures (d) et (h) sont celles utilisant le TSMNL. 113

Figure 3.13 L'image test du cameraman et sa version dégradée qui a été utilisée pour les tests de la Figure 3.14..... 114

Figure 3.14 Les comparaisons de quatre filtres de choc sur l'image dégradée de la Figure 3.16(b)..... 115

Figure 3.15 Un zoom des images présentes sur la Figure 3.14..... 116

Figure 3.16 Comparaison de notre filtre de choc avec celui de Remaki et Cheriet sur différentes image de la base de données "USC-SIPI". Les sorties sont obtenues après 20 itérations de chacun des filtres..... 117

Figure 3.17 Comparaison de notre filtre de choc avec celui de Remaki et Cheriet sur différentes image de la base de données "USC-SIPI". Les sorties sont obtenues après 20 itérations de chacun des filtres..... 118

Figure 3.18 Une version dégradée de l'image texturée "barbara" et la sortie du filtre de choc utilisant le TSMNL. 10 itérations ont été réalisés. 119

Figure 3.19 Approche multi-échelle du filtre de choc. 119

Figure 3.20 Rehaussement de pédicules par la diffusion anisotrope utilisant le tenseur structurel non linéaire. 121

Figure 3.21 Débruitage et rehaussement de pédicules avec le filtre de choc utilisant le TSMNL..... 122

Figure 3.22 Comparaison des rehaussements avec la diffusion anisotrope et le filtre de choc sur des radiographies de pédicules.... 123

Figure 4.1 a) Radiographie d'une vertèbre L1, (b) La couronne est colorée en vert alors que l'intérieur du pédicule l'est en jaune. La radiographie a été rehaussée afin de mieux percevoir le pédicule. 126

Figure 4.2 Comparaison de φ_M (en rouge) avec $\varphi_{\mathcal{M}}$ (en vert). 138

Figure 4.3 Superposition des lignes de niveau $\varphi_{\mathcal{M}} = 0$ (bleu) et $\varphi_{\mathcal{M}} + 5\sqrt{\lambda_i}v_i = 0$ (rouge) pour $i = 1...6$..... 140

Figure 4.4 Histogramme des valeurs de $\varphi_i(x, y)$ pour des (x, y) différents et choisis aléatoirement..... 141

Figure 4.5 Superposition des fonctions d'angle des 23 formes de la base de données..... 142

Figure 4.6 Superposition pour chacune des 5 classes, de la forme moyenne (rouge) des formes de la base de données appartenant à chacune d'elles (vert)..... 143

Figure 4.7 Diagramme du système..... 145

Figure 4.8 Exemples de tables de probabilités pour différentes tailles a de voisinage. 149

Figure 4.9 Exemple de trou dans couronne de la table de probabilités d'un pédicule. 151

Figure 4.10 L'aire $\mathcal{A}(\varphi_t = 0)$ est supérieure à $\mathcal{A}_{\max}$, la probabilité p_1 descend donc jusqu'à $\frac{215}{255}$. 152

Figure 4.11 La ligne de niveau n'est pas assez régulière lors de la première itération, on réajuste le coefficient v pour obtenir une bonne convergence. Le contour est plus grossier après la deuxième itération..... 153

Figure 4.12 Représentation graphique du coefficient α utilisé pour les expériences. 155

Figure 4.13 La segmentation multi échelle et la superposition des segmentations aux différentes échelles sur l'image originale..... 157

Figure 4.14 Un exemple de pédicule dont le trou dans la couronne du pédicule sur la table de probabilités est grand. On remarque sur la radiographie a) la superposition d'un objet qui rend la partie gauche beaucoup plus foncée. C'est cette superposition qui crée le trou sur la table de probabilités. 159

Figure 4.15 Le contour extrait par l'algorithme de Chan-Vese est superposé à la table de probabilités sur (a). La Figure (b) présente la première partie du traitement postérieur.Les demi droites (en vert) partant du point d'initialisation intersectent le contour extrait en plusieurs points. Les points rouges correspondent à l'arc connexe des intersections les plus proches.... 160

Figure 4.16 Envelope convexe (en bleu) du contour C^* (les points rouges). Les points verts sont les points de forte concavité. 161

Figure 4.17 (a) Superposition de l'arc extrait avec la radiographie originale. En (b), la superposition de l'arc avec l'ellipse obtenue par la méthode des moindres carrés..... 162

Figure 4.18 Exemple d'un pédicule dont l'intérieur n'est pas visible. sur la Figure (b), la table de probabilités met en évidence une ellipse blanche. L'ellipse rouge est l'ellipse qui a été segmentée par l'algorithme de la section 4.5.4.2. 162

Figure 4.19 Exemple d'un pédicule intersecté par le plateau supérieur de la vertèbre. En rouge les formes segmentées grâce à une double initialisation et en bleu l'enveloppe convexe 164

Figure 5.1 Pour trouver la probabilité du pixel en rouge sur la Figure a), on utilise les pixels dans le carré bordé de rouge. La Figure b) présente l'histogramme des pixels appartenants à ce carré et à la couronne du pédicule. La Figure c) présente l'histogramme des autres pixels appartenants au carré. Enfin la Figure d) présente l'histogramme de l'ensemble des pixels dans le carré rouge. Les traits rouges représentent le seuil obtenu par Otsu..... 168

Figure 5.2 La table de l'image originale Figure 5.1(a)..... 169

Figure 5.3 Les deux histogrammes des pixels appartenant au carré rouge de la Figure 5.1(a) après avoir été prétraités. 169

Figure 5.4 Les tables probabilités de l'image de la Figure 5.1(a) après que celle-ci ait été prétraitée..... 170

Figure 5.5 Deux tables de probabilités de pédicules pour lesquelles l'algorithme de segmentation a convergé seulement lorsque les radiographies débruitées étaient utilisées..... 171

Figure 5.6 Deux tables de probabilités de pédicules pour lesquelles le filtre de choc a détruit la couronne du pédicule. 172

Figure 5.7 Deux exemples de pédicules pour lesquels le débruitage a permis une meilleure segmentation. 174

Figure 5.8 Détection de contour avec un filtre de Sobel. Le seuil permet de ne considérer que les contours qui lui sont supérieurs. 175

Figure 5.9 Exemple de deux pédicules qui ne sont pas utilisés dans nos expériences. 177

Figure 5.10 Interface graphique utilisée pour les expériences. 177

Figure 5.11 Histogramme des taux de réussite. 179

Figure 5.12 Haut de segmentation en fonction de l'âge des patients. 179

Figure 5.13 Exemple de segmentation avec des points d initialisation différents lorsque l'algorithme principal est utilisé. 181

Figure 5.14 R_x correspond à la rotation frontale. 183

Figure 5.15 Histogramme de la différence entre le centre des pédicules indiqué par l'expert et les centroïdes des formes extraites. 183

Figure 5.16 Quatre exemples pour lesquels la distance entre les centres des pédicules et les centroïdes des formes segmentées est supérieure 3.5mm. Pour les 4 images, nous avons affiché en bleu les sommets marqués par l'expert, en rouge le centre du pédicule associé et en vert le centroïde du pédicule segmenté. 184

Figure 5.17 Histogramme de la différence (en degré) entre l'estimation de la rotation frontale à partir des points de l'expert et l'estimation de la même rotation avec les centroïdes des formes extraites par notre algorithme de segmentation. Les angles sont exprimés en degrés. 185

Figure I.1 Image débruitée par le filtre C_pMNL. 200

Figure I.2 Image débruitée par le filtre MNL dont le paramètre d'apprentissage a été appris par le MLP. 200

Figure I.3 Image débruitée par le filtre MNL original et avec le paramètre de régularité optimal. 201

LISTE DES ABBRÉVIATIONS

ACP	**A**nalyse en **C**omposantes **P**rincipales
AIC	**C**ritère d'**I**nformation de **A**kaike
AMISE	Asymptote de l'erreur quadratique moyenne intégrée
DWT	Transformée en ondelettes discrètes
EDP	**E**quation aux dériées partielles
EQM	**E**rreur **Q**uadratique **M**oyenne
GCV	**V**alidation **C**roisée **G**énéralisée
KCS	Noyau à support compact
LAT	Vue **Lat**érale
LCV	Validation croisee appliquee à la vraisemblance
Li	Vertèbre **L**ombaire numero i
LIVIA	**L**aboratoire d'**I**magerie, **V**ision, et **I**ntelligence **A**rtificielle
MISE	Erreur quadratique moyenne intégrée
$MISE^+$	Borne supérieure de la MISE
MLP	Perceptron multicouche
MNL	Filtre à **M**oyennes **N**on **L**ocales
MSE	Erreur quadratique moyenne
PA	Vue **P**oster**A**nterieure
PSNR	Rapport signal sur bruit
SB	Biais au carré
SIA	**S**coliose **I**diopathique **A**dolescente
SKCS	Version séparable du KCS
SSB	Somme du Biais Quadratique

SURE	Estimation non-biaisée du risque de Stein
SV	**S**omme des **V**ariances
SVD	**D**écomposition en **V**aleurs **S**ingulières
Ti	Vertèbre **T**horacique numéro i
TSMNL	**T**enseur **S**tructurel à **M**oyennes **N**on **L**ocales
UINTA	**U**nsupervised **IN**formation-**T**heoritic **A**daptative filter

LISTE DES NOTATIONS

a,b	paramètres de translation et dilatation des ondelettes
$\mathcal{A}$	aire du pédicule, pouvant appartenir à $[\mathcal{A}_{\min}\mathcal{A}_{\max}]$
$\aleph_i$	moyenne de la classe i
α	poids utilisé pour la pondération d'énergie
$\mathcal{B} = \{g_m\}$	base d'ondelettes
B_n	B-splines quadratiques
$biais$	biais
β_k	poids des 8 voisins dans la diffusion anisotrope
C	caractéristique utilisée pour le filtrage
$\mathcal{C}$	contour des Ω_i
C^1	ensemble des fonctions continues et dérivables
$C_1(x)$ et $C_2(x)$	Classes des pixels appartenant au fond et à la couronne
C_{diff}	constante de diffusion
c_i	caractéristique de I_i
C_γ	constante de normalisation
C_p	statistique introduite par Mallows
$\tilde{C}_p(\hat{I}_h(i))$	statistique C_p pour données hétéroscédastiques
Cp_α	statistique C_p dans la pondération du biais et de la variance à été modifiée
C_pMNL	filtre à **M**oyennes **N**on **L**ocales utilisant la statistique C_p
$\tilde{C}_p$MNL	filtre à **M**oyennes **N**on **L**ocales utilisant la statistique $\tilde{C}_p$
cov_φ	matrice de covariance de la base de données
$Cste$	constante de normalisation

curv	courbure
χ	fonction indicatrice
D	matrice de diffusion
D^{MNL}	matrice de diffusion de $\hat{I}$
d_C	distance entre les caractéristiques de deux pixels
d_c	mesure la distance entre les voisinages de $J^l(i)$ et $J^l(k)$
d_k	distance aux k plus proches voisins
d_{ik}	distance entre T_i et T_k
D_{ij}	canal de la matrice de diffusion D
$d_J(J[I](i), J[I](k))$	distance entre les tenseurs échantillons $J[I](i)$ et $J[I](k)$
$D_\Theta(X)$	dérivée suivant le champ de diffusion
$diff_i$	valeurs différences utilisées pour les pédicules troués et les pédicules blancs
$digit$	fonction de digitalisation
div	opérateur de divergence
δ_ϵ	approximation par distribution de la fonction impultionnelle
Δ	opérateur laplacien
Δh	pas spatial
Δt	pas temporel
$\partial\Omega$	frontière de Ω
e	erreur
$\mathbb{E}$	espérence
$E(I)$	énergie dépendente de l'image I
$\mathcal{E}(ct, \theta, a, b)$	ellipse de centre ct, d'orientation θ, de longueur a et de largeur b

E_{balloon}	énergie ballon
E_d et E_r	énergies d'attache aux données et de régularité
$E_{\text{externe}}(I)$	énergie externe
E_f	énergie de forme
$E_{\text{interne}}(I)$	énergie interne
exp	exponentielle
ϵ_σ	bruit blanc de variance σ^2
η	direction du gradient
$\mathbf{F}_i$	forme de l'objet i
$\partial\mathbf{F}_i$	contour de la forme $\mathbf{F}_i$
F_x,F_y	filtre de dérivation
F_{MS}	fonctionnelle de Mumford-Shah
$\mathbb{F}$	noyau flouant
F	fonction quelconque
$f_n(X_1, X_2)$	estimation de Parzen-Rosenblatt de la distribution de probabilité jointe de deux motifs X_1 et X_2
f	distribution de probabilité des voisinages X_i
f_n	estimation de f avec n échantillons en utilisant des fenêtres de Parzen
$\mathcal{F}$	filtre
F	fonction de transfert de $\mathcal{F}$
g	fonction de diffusion
G	fonction continue et croissante
G_σ	gaussienne de variance σ^2
$GPI(x)$	orientation d'une partie de l'image centrée en x

γ, ς	paramètre du KCS
h	largeur de bande
H	C^1-difféomorphisme
$\mathcal{H}$	transformée de Hilbert
H	Hessien
h_{C_p}	largeur de bande optimisée par la C_p
h_{NL}	largeur de bande optiminisé manuellement
h_{opt}	largeur de bande optimal
h_t	largeur de bande à l'itération t de la méthode de Newton
$hist_a$	histogramme du voisinage V_a de x
i	pixel à débruiter
I	image observée
$I(.,t)$	famille multi-échelle d'images
I_b	image bruit
I_g	image régularisée par une gaussienne
I_i	portion d'image définie sur Ω_i
$\hat{I}_{\mathcal{N}(j),h}(i)$	version débruitée de I au pixel i en utilisant le filtre MNL de largeur de bande h et les pixels
$\hat{I}_h(i)$	écriture abusive de $\hat{I}_{\mathcal{N}(j),h}(i)$ lorsque $i = j$
I_p	intensité des rayons X enregistré sur la plaque
$I_X(x,y,z)$	intensité des rayons X aux coordonnées (x,y,z)
I_0	image observée à l'échelle au temps $t = 0$
$I_{\eta\eta}$	dérivée seconde de l'image suivant la direction η
I_ϑ	image I convoluée avec une gaussienne de variance ϑ échantillons appartenant à $\mathcal{N}(j)$

$iter$	nombre d'itérations
ι	poids de la simplification de l'image
$\int$	opérateur d'intégration
$\Im$	partie imaginaire
$J[I]$	tenseur (hessien) de I.
$J_{\mathrm{MNL}}^{\mathcal{N}(j),l}[I]$	tenseur structurel non local
J^l	canal l du tenseur J
$J_\varrho(\nabla I)$	tenseur structurel linéaire
$\jmath$	nombre complexe
k	pixel échantillon
K	densité symétrique en 0
k^*	seuil déterminant es deux classes fond et couronne du pédicule
κ	courbure de la forme
l	paramètre désignant le canal d'un tenseur
L	mesure permettant de caracteriser la distance entre deux voisinages d'image
L^p	norme L p
l_c	longueur du contour C
ln	logarithme néperien
λ	projection de $(\varphi - T(\varphi_M))^2$ sur les vecteurs v_i
Λ	opérateur laplacien
Λ	longueur d'arc
$\mathcal{L}$	mesure entre X_i et X_k
m	paramètre du tenseur non linéaire

M_a	mesure d'adéquation normalisée au nombre d'échantillons
m_i	moment d'ordre i de p
$Mask$	opérateur de masquage
MNL_0	filtre MNL dont les poids ont été calculés à partir de I_0
μ	fonction d'atténuation d'un corps
μ_i	valeurs propres de D
n	nombre d'échantillons
$n(i)$	nombre d'échantillons utilisés pour le débruitage du pixel i
$\mathcal{N}(j)$	voisinage du pixel j
$\mathcal{N}_{r,T_d}(i)$	ensemble des échantillons appartenant à $\mathcal{N}(i)$ n'ayant pas été seuillé par T_d
N_0	nombre moyen d'électrons émis pendant la radiographie
nbr	nombre de pixels
Neg	négatif de la radiographie.
ν	degré de liberté de la régression
∇	gradient
$\mathcal{O}$	grand O
ω	vecteur propre associé à la valeur propre la plus grande de $J_\varrho(\nabla I)$
Ω	ensemble inclu dans $\mathbb{R}^2$
$(\Omega_i)_i$	partition de Ω
p	fonction de répartition des niveaux de gris dans $V_a(x)$
P	densité de puissance
p^2	probabilité d'appartenir à l'intérieur du pédicule
p^1	probabilité d'appartenir à la couronne du pédicule

$p_{x,y}^{M}$	probabilité a posteriori (locale) pour une densité de formes données
p_{inv}	probabilité d'invasion d'un rayon X
P_k	probabilité d'émettre k électrons
$\vec{p}_n$	vecteur supportant les B-splines quadratiques
$\vec{p}_n^0$	moyenne de la distribution gaussienne approchant la distribution des formes
ϕ	fonction déchelle
ψ	ondelette
$Q(k)$	probabilité que k électrons s'accumulent sur la plaque
r	rayon
$\mathbb{R}^+$	ensemble des réelles positifs
R_x	rotation frontale
ρ	noyau du KCS
s	abscisse curviligne
$\mathbf{s}$	signal 1D
$S(i)$	sous-ensemble de pixels dont le niveau de gris de l'image régularisée est égale à i
$\mathcal{S}$ et $\mathcal{V}$	changement de l'échelle et translation
$\mathbb{S}$	ensemble de quatre transformations
sign	fonction signe
σ	écart type du bruit
$\Sigma(u)$	écart-type du bruit sur des données hétéroscédastiques
$\vec{\Sigma}^{-1}$	inverse de la matrice de covariance de la distribution gaussienne approchant la distribution des formes

σ_B^2	variance intra-classe
σ_I^2	variance interclasse
$\sigma_l^2(k)$	variance du bruit dans le canal l du tenseur J au pixel k
σ_M et φ_M	maximisent le logarithme de la vraisemblance des paramètres des densités locales des formes
$\hat{\sigma}_{\mathbf{s}}$	estimation de l'écart-type des coefficients d'ondelettes non bruités
σ_t	variance temporelle
σ_w	variance fréquencielle
$\hat{\sigma}_{Wf}$	estimation de l'écart-type des coefficients d'ondelettes bruités
t	variable temporelle, paramètre d'échelle
T	seuil
$\mathcal{T}$	transformation du plan permettant de comparer la forme du contour actif avec la base de données
$\mathbf{T}_a$	table de probabilités
T_d	seuil de la distance d_{ik}
T_i	motif composé des niveaux de gris réels de $\mathcal{V}(i)$
$Thresh$	fonction de seuillage
τ	paramètre permettant de modifier le pas de la méthode de Newton
θ	angle
$\Theta(X)$	champ de diffusion
u	image rélle
U et D	matrices orthogonale et diagonale décomposant la matrice de covariance
υ	poids de la régularité du contour
v	fonction vitesse

$V_a(x)$	le voisinage de x de taille a
$\mathcal{V}(i)$	voisinage du pixel i
v_i	vecteurs propres
var	écart type du bruit présent dans l'image après fitrage
$\varkappa$	réduction du bruit due à la diffusion anisotrope
φ	ligne de niveau
ϖ	paramètre de rehaussement de la diffusion anisotrope
φ_i	ligne de niveaux appartenant à la base de données
φ_G	fonction distance contruite à partir de la forme grossière segmentée à l'échelle la plus grossière
$\varphi_{\mathcal{M}}$	moyenne de la base des courbes de niveaux
$\varphi_{\mathcal{M}_i}$	fonctions lignes de niveaux des 5 classes de pédicules
ϱ	paramètre de régularisation du tenseur
ϑ	fonction d'angle de la courbe
$W\mathbf{s}$	coefficient d'ondelettes
$w_k^{\mathcal{N}(j),h}(i)$	poids utilisé pour obtenir $\hat{I}_{\mathcal{N}(j),h}(i)$
$w_k^h(i)$	écriture abusive de $w_k^{\mathcal{N}(j),h}(i)$
(x, y, z)	coordonnées spatiales
$x_i = I(\mathcal{V}(i))$	motif composé des niveaux de gris des pixels dans $\mathcal{V}(i)$
$X_k = I(\mathcal{V}(k))$	motifs échantillons composés des niveaux de gris des pixels dans $\mathcal{V}(k)$
X'_k	X_k privé de $I(k)$
X_i^l	motif composé des niveaux de gris des pixels dans $J^l\,[I(\mathcal{V}(i))]$
ξ	direction orthogonale au gradient
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs

ζ	direction du vecteur propre principal de $J_{\mathrm{MNL}}\left[\hat{I}\right]$
$\hat{.}$	estimation
$\langle .,. \rangle$	produit scalaire
$.^t$	variable évaluée au temps t
$\frac{\partial .}{\partial t}$	dérivée partielle suivant la variable t
$*$	opérateur de convolution
$\|\|.\|\|$	norme euclidienne

INTRODUCTION

Ce doctorat a été réalisé en collaboration avec le laboratoire LAVIANI (LAboratoire de VIsion Active Non Invasive) de l'hôpital Sainte-Justine de Montréal. Ce laboratoire étudie particulièrement la scoliose idiopathique adolescente (SIA). Cette dernière pathologie est une anomalie de la colonne vertébrale qui affecte généralement une population féminine durant la période de la puberté. La SIA est caractérisée par une déformation de la colonne vertébrale, provoquée généralement par la torsion d'une ou de plusieurs vertèbres sur elle(s)-même(s). Bien que cette déformation soit principalement latérale, elle comporte aussi une composante tridimensionnelle. Jusqu'à récemment aucun outil clinique ne permettait de visualiser en 3D ces déformations, c'est pourquoi, la SIA est encore mal appréhendée.

La radiographie est le type d'imagerie employé pour mettre en évidence et caractériser la SIA. Si les nouvelles technologies permettent de réaliser des vues tridimensionnelles à partir de ces images, ces nouveaux systèmes d'acquisition sont, pour le moment, onéreux et encombrants. Ils n'équipent donc pas encore tous les hôpitaux. En outre, ils augmentent l'incidence du cancer dû à une exposition plus importante aux rayons X. Enfin, les hôpitaux utilisants ces technologies ont souvent des bases de données importantes d'images de patients scoliotiques obtenues avant l'apparition de ces récents systèmes. Ces bases d'images fournissent autant d'exemples possibles de déformations pour caractériser cette pathologie, afin de mieux la comprendre, et sont donc très importantes à conserver et à utiliser. Pour chaque cas, seules deux ou trois vues radiographiques en deux dimensions sont disponibles. Les projections orthogonales à partir de ces vues ne permettent de déterminer que partiellement les déformations scoliotiques. Ainsi, la méthode conventionnelle pour caractériser la déformation vertébrale consiste à évaluer l' " angle de Cobb " (Figure 0.1) formé par les points d'inflexion de la courbure sur la vue frontale et la vue sagittale. Cependant, la déformation maximale de la colonne ne se trouve souvent sur aucune

de ces vues. Donc la mesure de "l'angle de Cobb" ne permet ainsi de caractériser que partiellement la déformation.

Au LAVIANI, des reconstructions 3D de la colonne vertébrale à partir de plusieurs vues radiographiques sont réalisées manuellement. Celles-ci ont une double fonctionnalité. Elles permettent de mieux comprendre et de mieux caractériser la déformation scoliotique dans l'espace 3-D. Il en résulte un meilleur diagnostic de la déformation permettant un traitement approprié pour chaque patient.

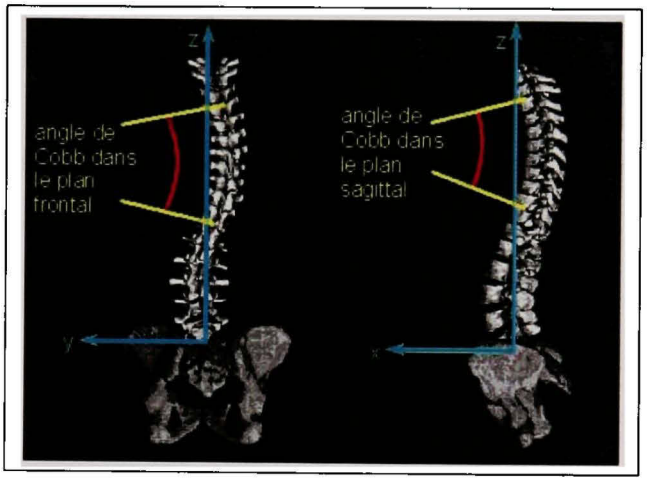


Figure 0.1 Les angles de Cobb sont des indices cliniques de la gravité d'une courbure scoliotique [51].

Problématique

Les vues radiographiques sont calibrées à partir de billes métalliques présentes sur chacune d'elles. Ce calibrage permet de mettre en relation un point sur une des vues radiographiques avec une droite sur une autre vue. Ainsi, les coordonnées tridimensionnelles d'un repère anatomique sont obtenues en l'identifiant sur deux vues différentes. Actuellement la reconstruction de la colonne vertébrale se fait en "cliquant" six repères pour chaque vertèbre sur la vue posteroantérieure (PA) et la vue sagittale (LAT). Ce travail est délicat et fastidieux. De plus, la variabilité de la reconstruction peut aussi dépendre de

l'appréciation de chaque praticien. En outre, ces reconstructions sont limitées à seulement quelques points.

Récemment, au LAVIANI, plusieurs outils ont été développés pour aider le praticien dans sa tâche, ou bien pour enrichir la reconstruction. Ces outils extraient des radiographies, des parties anatomiques telles que, par exemple, la colonne vertébrale [52] pour aider le praticien, ou bien encore les côtes pour l'enrichissement de la reconstruction. En imagerie, ces extractions d'information sont appelées "segmentations".

Pour réaliser de telles segmentations, les images radiographiques doivent être préalablement traitées. En effet du fait de leur acquisition, ces images ne sont pas de très bonne qualité. Elles sont souvent dégradées par du bruit et du flou. Des filtres de débruitage [130] ou de rehaussement [60] sont ainsi dans un premier temps appliqués aux images pour atténuer ces dégradations. Les filtres utilisés à cet effet ont, dans la plupart des cas, été développés pour les images naturelles [63]. Or de part leur modèle de formation, les radiographies sont très différentes des images naturelles ; par exemple, le phénomène d'occlusion n'existe pas, aussi le bruit et le flou ne sont pas homogènes sur toute l'image. En utilisant des filtres non adaptés, la qualité des prétraitements reste restreinte réduisant par voie de conséquence la précision de la segmentation. Aussi, un nombre plus ou moins important de paramètres doit être ajusté pour obtenir une qualité de filtrage suffisante. Afin d'éviter de le faire pour chaque image, ceux-ci sont estimés empiriquement sur plusieurs radiographies. Les paramètres retenus sont ceux qui globalement permettent le meilleur prétraitement. Or, en fonction de la physionomie des patients, les paramètres optimaux ne sont sans doute pas les mêmes d'un patient à un autre. Aussi, sur une même radiographie, des textures très différentes sont présentes. Les paramètres globaux peuvent être ainsi optimaux pour certaines parties de l'image et en même temps détruire des détails ou rehausser du bruit dans d'autres parties.

But de la recherche et contributions

Le premier but de cette recherche est de développer des filtres de pré-traitement pour les radiographies de la base de données de l'hôpital Sainte-Justine. D'une manière plus générale, il consiste à fournir des filtres de prétraitement utilisant l'information a priori sur le bruit dégradant ces images. Ces filtres peuvent donc s'adapter à tout type d'image dès lors que le bruit les dégradant est suffisamment connu. Dans la base d'images sur laquelle nous travaillons, les données peuvent être très hétérogènes (ceci est notamment dû à la densité des patients ou à leur croissance). Les filtres développés doivent donc pouvoir s'adapter aux données. Les paramètres de ces nouveaux filtres ne doivent donc influencer que légèrement la qualité du filtrage.

Trois types de filtre de prétraitement sont très utilisés avant de réaliser une quelconque segmentation : le filtre de débruitage [60], le filtre de diffusion anisotrope [98] et le filtre de choc [101]. Comme son nom l'indique le premier type de filtrage réduit le bruit présent dans les images. Le second filtre peut être utilisé pour effectuer la même tâche mais il est également usité pour réaliser une simplification multi-échelle de l'image. Le dernier type de filtres rehausse les contours des images. Ce filtrage est spécialement utilisé pour enlever le flou des images, lorsqu'aucune information concernant ce flou n'est, a priori connue, ou lorsqu'il n'est pas uniforme sur toute l'image. Ceci est le cas notamment des radiographies. Aussi, puisque ce dernier type de filtrage consiste à créer de vastes régions uniformes, séparées entre elles par les contours de l'image, il est souvent utilisé pour le prétraitement des images dont l'unique finalité est d'être segmentée. Dans le cadre de cette thèse, nous proposons un nouveau filtre pour chaque type de prétraitement pouvant s'adapter aux spécificités des images radiographiques. Ces filtres ont un nombre de paramètres restreint dont l'influence sur la qualité du filtrage n'est que très faible.

Beaucoup de modèles de débruitage ont été développés dans la littérature. Parmi ceux-ci, un filtre à Moyennes Non Locales (MNL) récemment développé par Buades [22], présente

de grandes qualités de débruitage. Ce filtre peut aussi être aisément amélioré (comme nous allons le voir dans la suite) et son utilisation étendue aux images radiographiques. Le MNL peut être classé parmi les filtres adaptatifs. Ce type de filtrage substitue chaque pixel bruité par une moyenne pondérée d'autres pixels de l'image. La pondération choisie est spécifique à chaque filtre. Pour le filtre MNL, celle-ci est non locale ; c'est-à-dire qu'elle n'est pas spatialement dépendante. Le poids d'un pixel dans le débruitage d'un autre dépend de la distance d'un de ses voisinages par rapport à celui du pixel à débruiter. Avant d'adapter ce filtre aux images radiographiques, nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l'ajustement automatique des deux paramètres influents de ce filtre.

Le premier concerne le degré de régularisation du filtrage. Un mauvais choix de ce paramètre peut détruire des détails importants de l'image (lorsqu'il est choisi trop grand) ou ne pas supprimer suffisamment de bruit (lorsqu'il est choisi trop petit). En nous basant sur l'approche statistique du filtre MNL nous proposons d'ajuster automatiquement et en chaque pixel ce paramètre. Ce dernier doit être fixé en tenant compte des structures de l'image présentes localement, afin de supprimer un maximum de bruit tout en empêchant la destruction des détails. A cet effet, nous avons choisi d'utiliser la statistique C_p. Cette dernière donne une estimation de l'erreur entre l'image débruitée et l'image non bruitée (si celle-ci existe). En chaque pixel, le paramètre de régularisation sélectionné est celui qui minimise cette statistique. Ce faisant, le paramètre choisi, minimise pour chaque pixel la distance entre l'image débruitée et l'image optimale. La décomposition de la statistique C_p entre biais et variance montre que le paramètre estimé est celui qui réduit au maximum le bruit, tout en empêchant l'introduction d'un flou trop important.

L'autre paramètre influent concerne le nombre de pixels utilisés dans le débruitage de chaque pixel. Lorsque la pondération est opérée à partir d'un trop petit nombre de pixels, le débruitage est de faible qualité. A l'opposé lorsque trop de pixels sont considérés, il se peut que certains d'entre eux appartiennent à des parties de l'image très différentes de celle à laquelle le pixel à débruiter appartient. Dans la pondération, ces pixels introduisent une

erreur qui limite la qualité du débruitage. Nous proposons donc pour chaque pixel de ne tenir compte que des pixels n'introduisant qu'une erreur limitée dans son débruitage. Ainsi l'influence du second paramètre est minimisée. Celui-ci est finalement souvent choisi en fonction du rapport entre le temps d'exécution de l'algorithme versus la qualité désirée du débruitage.

La statistique C_p peut aussi être étendue aux données dont la variance du bruit est non homogène, et dont les radiographies ne sont qu'un exemple. Ce dernier critère est celui que nous utilisons pour sélectionner le paramètre de régularisation des images radiographiques. Similairement, pour satisfaire à la non homogénéité du bruit, nous avons adapté le critère employé pour la sélection des pixels utilisés dans la pondération. Le filtre ainsi développé est robuste au bruit des radiographies et l'unique paramètre à ajuster n'a que très peu d'influence sur la qualité du débruitage. De manière plus générale, ce filtre peut s'adapter à tout type de bruit non homogène.

Nous nous sommes aussi intéressés aux filtres de diffusion par Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Nous avons principalement porté notre attention sur le filtre anisotrope et le filtre de choc. Comme leurs noms l'indiquent ces filtres font appel aux dérivées partielles de l'image. Or lorsque cette dernière est bruitée, le bruit est amplifié par l'opérateur de dérivation spatial. Les contours des images ainsi filtrées sont bruités et peu réguliers. Pour éviter de tels inconvénients, plusieurs stratégies ont été proposées. La première consiste à utiliser une version régularisée des dérivées des images en les convoluant avec un noyau moyenneur. Plus récemment, de meilleurs résultats ont été obtenus en utilisant une version régularisée d'un tenseur. Ce dernier outil correspond au Hessien de l'image régularisée. Cependant chacune de ces stratégies introduit un, voire deux paramètres (dans le cas du tenseur). Ceux-ci influent sur le degré de simplification de l'image et donc sur la qualité du filtrage. Aussi aucun de ces filtres ne prête attention aux caractéristiques du bruit. Nous proposons d'étendre aux tenseurs le filtre développé pour le débruitage et que nous avons présenté précédemment. Les tenseurs ainsi filtrés sont appelés tenseurs struc-

turels à moyennes non locales (TSMNL). Comme précédemment, le paramètre de ce filtre influe peu sur la qualité du débruitage. De plus, parce qu'elle utilise l'information a priori sur le bruit, l'estimation automatique des paramètres de régularisation peut s'adapter aux tenseurs provenant d'images radiographiques. Grâce au TSMNL, nous proposons deux filtres (anisotrope et de choc) spécialement adaptés pour les images radiographiques.

Les filtres précédemment présentés sont développés à des fins de segmentation d'images radiographiques pour aider à la reconstruction de la colonne vertébrale. Dans cette optique, un autre but de cette thèse, est de fournir une étude de faisabilité de la segmentation des pédicules à partir d'images radiographiques PA préalablement traitées par différents filtres de prétraitement. Les pédicules sont deux structures tubulaires prolongeant la "marge" latérale postérieure du corps vertébral. Ceux-ci peuvent être identifiés sur deux vues radiographiques et être utilisés comme repères anatomiques pour la reconstruction 3D. En plus de l'information donnée sur la rotation vertébrale, la segmentation des pédicules sur les deux vues permettrait une reconstruction 3D semi-automatique. En outre, en extrayant des objets plutôt que des points (actuellement, le praticien identifie sur le sommet supérieur et inférieur du pédicule), des primitives de haut niveau peuvent être utilisées pour améliorer la qualité du modèle 3D. Cette segmentation peut aussi être utilisée, lors des chirurgies, pour détecter les pédicules, des vis pédiculaires étant utilisées pour corriger la scoliose.

Les vues sagittales sont extrêmement bruitées par la superposition de plusieurs objets. Actuellement seulement les vertèbres cervicales et lombaires sont segmentées sur cette vue [9]. La segmentation des pédicules sur la vue sagittale doit donc être dirigée par l'information provenant de la segmentation de la vue PA ; la géométrie projective pourrait être utilisée à ce effet. La précision de la segmentation sur la vue LAT est donc dépendante de la qualité de la segmentation de la vue PA. C'est pourquoi dans ce manuscrit nous nous intéresserons seulement à la segmentation sur la vue PA.

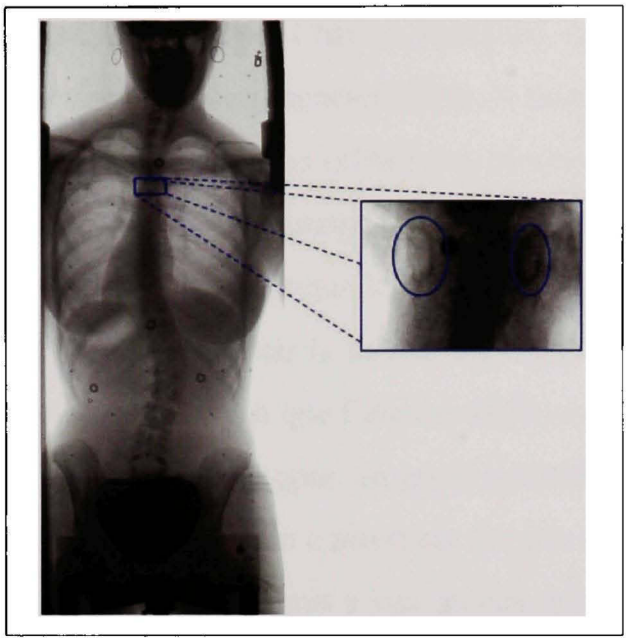


Figure 0.2 A gauche, une radiographie PA d'une patiente atteinte de scoliose idiopathique. A droite, un zoom de la vertèbre T5, dont le contraste a été rehaussé. Les deux pédicules ont été entourés par une ellipse bleue.

Motivation

Parce que les pédicules apparaissent sur des images fortement bruitées comme étant de petits objets faiblement contrastés, ils sont difficilement identifiables et d'autant plus pour des personnes non expertes (Figure 0.2). Il est donc difficile de réaliser une segmentation directement sur ces images. La première étape de ce type de segmentation consiste à caractériser les pixels appartenant à un même pédicule. En fait, les pédicules peuvent être identifiés (après entraînement) car certains de leurs pixels sont localement légèrement plus foncés que le fond. Ils forment également un anneau autour de pixels plus clairs, appartenant à l'intérieur du pédicule. Pour renforcer cette caractéristique, nous avons construit une table de probabilités qui, à chaque pixel, associe la probabilité d'appartenir à l'objet le plus foncé dans un certain voisinage. Sur cette table, l'anneau est difficilement identifiable et souvent confondu avec les contours de la vertèbre. Pour simplifier et sans

perte de généralité, seul l'intérieur du pédicule peut être détecté. A cet égard, nous avons développé un modèle de segmentation multi-échelle ("grossier à fin") à partir d'un modèle simple de contour actif, introduit par Chan et Vese [28]. Ce dernier modèle regroupe itérativement les pixels ayant une même caractéristique. A la convergence, le contour actif sépare les pixels ayant des caractéristiques différentes. Nous initialisons ce contour actif sur la table de probabilités, et non sur l'image originale. De cette façon, nous groupons tous les pixels ayant la même caractéristique locale : ils appartiennent à l'objet le plus clair. En outre, cette table permet d'avoir la même initialisation des paramètres du contour actif pour tous les pédicules. Parce que l'anneau pédiculaire peut contenir des trous par lesquels le contour actif peut s'échapper, un grand paramètre de régularité est choisi à l'initialisation. Grâce à de l'information a priori sur la taille du pédicule, les caractéristiques et le paramètre de régularité sont mis à jour automatiquement et dynamiquement. A la convergence de l'algorithme, la forme de l'intérieur du pédicule est grossièrement approximée par le contour actif. Pour pouvoir atteindre les sommets de la forme réelle, l'algorithme est initialisé une seconde fois avec un paramètre de régularité plus petit. Pour empêcher ce second contour actif de s'échapper par les trous de l'anneau, une force le contraint à rester proche de la forme grossière du pédicule.

Organisation de la thèse

Cette thèse est articulée autour de trois thèmes. Le premier est le débruitage d'images radiographiques. Le second concerne les filtres de diffusion appliqués au même type d'images. Enfin, le dernier thème se rapporte à la segmentation des pédicules.

Le premier chapitre est consacré au modèle de débruitage de radiographies. Nous nous intéressons dans un premier temps à la modélisation du bruit de nos données radiographiques. Pour ceci nous présentons la méthode de formation des images à partir de la source des rayons X, celle-ci étant la principale cause du bruit des images. Mais nous présentons aussi

l'influence d'un changement d'histogrammes sur le bruit, en effet ceux-ci sont souvent utilisés pour mettre en valeur certains détails. Puisque ces changements d'histogrammes ne sont généralement pas connus, les caractéristiques du bruit s'obtiennent en les estimant directement sur les images. Nous présentons ensuite une brève revue de littérature sur les méthodes de débruitage les plus utilisées (filtrage linéaire, ondelettes, filtres adaptatifs,...). Celle-ci se termine notamment par la présentation du filtre MNL. Dans ce chapitre de revue de littérature, nous rappelons aussi compendieusement les principales EDPs utilisées dans la littérature en nous concentrant singulièrement sur la diffusion anisotrope et les filtres de choc. Nous présentons aussi les tenseurs structurels et leurs utilisations dans les deux types de filtrage précédents.

Le second chapitre est consacré au débruitage automatique des images radiographiques. Nous avons porté notre attention sur le filtre MNL. Ce dernier modèle est, en fait, une régression localement constante. La littérature statistique est abondante sur l'estimation du meilleur paramètre de régularisation de cette méthode. Nous présentons donc rapidement quelques approches et nous nous intéressons plus longuement à la statistique C_p et à la méthode de Newton permettant de la minimiser en chaque pixel. Afin d'augmenter les performances du filtre MNL, nous proposons ensuite quelques modifications du filtre, notamment l'insertion d'une régression robuste pour seuiller les pixels échantillons. Cette dernière modification offre de nombreux avantages dont celui de réduire l'influence du second paramètre du MNL. Nous présentons ensuite les résultats du nouveau filtre et sa comparaison avec le MNL original sur des images dégradées par un bruit blanc additionnel. L'extension de la statistique C_p aux données hétéroscédastiques (dont la variance du bruit dépend de la valeur des données réelles), que nous présentons dans la partie suivante, permet de fournir un modèle de débruitage adapté aux radiographies. Des expériences sont menées sur des images synthétiques afin de quantifier le gain de notre méthode puis sur les images de la base de données de l'hôpital Sainte-Justine.

Dans le troisiéme chapitre de cette thèse, nous nous intéressons au filtrage par diffusion par EDP des images radiographiques. Nous y étendons aux tenseurs, le filtre de régularisation $\tilde{C}_p$NLM développé dans le deuxième chapitre. Ces nouveaux tenseurs structurels sont appellés TSMNL. Ainsi la régularisation, par moyennes non locales pour tenseur, n'utilise qu'un paramètre qui est peu influent sur la qualité du débruitage. Il permet un filtrage adaptatif des tenseurs qui visuellement paraît de meilleure qualité que le tenseur adaptatif développé par Brox [20]. Par la suite nous montrons comment intégrer les tenseurs TSMNL au filtre anisotrope et au filtre de choc. Des expériences et des comparaisons avec d'autres filtres de la littérature ont été réalisés. Enfin dans la dernière partie, nous nous intéressons plus spécialement au filtrage des images radiographiques.

Le quatrième chapitre de ce manuscrit est consacré à la segmentation des pédicules. Pour réaliser cette tâche, le modèle de base utilisé est un contour actif dont la forme est transmise d'une échelle à la suivante. Nous présentons donc, dans la première section, le modèle constant par morceaux de Chan et Vese [28]. Plusieurs modèles permettent d'introduire de l'information a priori sur la forme de l'objet à segmenter. Parmi eux, nous présentons les modèles de Cremer [40] et de Paragios [96]. Dans la deuxième section, nous avons utilisé plusieurs approches afin d'incorporer de l'information a priori sur la forme des pédicules. Toutefois, ces approches ne permettent pas de réaliser de bonnes segmentations des pédicules, à cause du faible contraste des images mais aussi et surtout à cause de la grande diversité des formes de pédicules. Le modèle finalement développé est présenté dans la section suivante. Nous y motivons la construction de la table de probabilités et la nécessité d'une approche multiéchelle. Nous introduisons l'algorithme permettant l'extraction de la forme grossière des pédicules, puis l'algorithme qui, à partir de cette forme grossière a priori, segmente la forme finale du pédicule.

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré aux expérimentations. Dans la première partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'influence du prétraitement des radiographies sur la segmentation des pédicules. Nous nous sommes ainsi intéressés au taux de

segmentation de pédicules, avec et sans prétraitement. Nous nous sommes aussi intéressés à la comparaison des formes extraites des radiographies en fonction du prétraitement utilisé. De cette première partie, nous concluons que le débruitage augmente la qualité de la segmentation des pédicules. Dans la seconde partie de ce chapitre, pour valider la fiabilité de notre segmentation, nous avons validé notre algorithme de segmentation de pédicules sur 38 radiographies debruitées par le filtre C_pMNL. Nous y discutons du taux et de la qualité des segmentations. Puis nous confrontons nos résultats avec les repères extraits par l'expert. Nous présentons aussi une comparaison entre l'orientation de chaque vertèbre (rotation frontale) estimée à partir des pédicules segmentés par notre méthode et celle obtenue manuellement par l'expert. De plus, l'évaluation de cette rotation, comme décrit dans [92], peut être utilisée comme bon indicateur de la sévérité de la courbure. Même si ces rotations ne sont pas très précises, elles sont encore utilisées par les cliniciens, par manque de reconstruction 3D. Ainsi, cette estimation est un résultat clinique utile.

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART SUR LE FILTRAGE DES IMAGES

1.1 Introduction

Les images radiographiques sont, de par leurs formations, des images particulières qui sont souvent différentes des images naturelles que nous avons l'habitude d'observer. Afin de mieux appréhender ces images, nous allons nous intéresser, dans la première partie de ce chapitre, à la modélisation et à l'estimation de leurs dégradations. en effet les radiographies sont sujettes à un bruit important qui gène la perception des détails. Dans la littérature, de nombreux modèles ont été proposés pour réduire cette dégradation. Nous présentons ensuite dans la deuxième partie les modèles de débruitage les plus usités. Nous partons du simple filtre passe-bas pour finir par les filtres adaptatifs. Nous nous intéressons aussi aux ondelettes et à leurs secondes générations.

Le flou représente l'autre dégradation majeure des images radiographiques. Il existe différents modèles pour restaurer les images possédant une telle altération. Dans le cadre de ce doctorat nous nous sommes intéressés aux équations aux dérivées partielles. Ces équations peuvent être utilisées comme outils de débruitage, de décomposition multi-échelle mais aussi de restauration. C'est en vue de cette dernière utilisation que nous allons présenter ces outils dans la dernière partie de ce chapitre.

1.2 Les images radiographiques

1.2.1 Le modèle de formation des images radiographiques

Les rayons X sont un rayonnement électromagnétique produit par le freinage d'électrons dans un tube en verre ou en quartz. Ils sont émis suivant une loi de Poisson en direction d'une plaque de détection (Figure 1.1). Avant d'y être enregistrés, les rayons X traversent

les différents tissus du corps à "imager". Certains rayons X sont absorbés en percutant des électrons de la matière traversée. La quantité d'absorption, pour un tissu donné, dépend de son épaisseur et de sa masse volumique. Plus celle-ci est importante et plus de rayons seront absorbés. Ainsi le coefficient d'absorption de l'os est plus important que celui des tissus mous (muscle, gras). C'est cette différence d'absorption et l'épaisseur des tissus qui créent le contraste des radiographies.

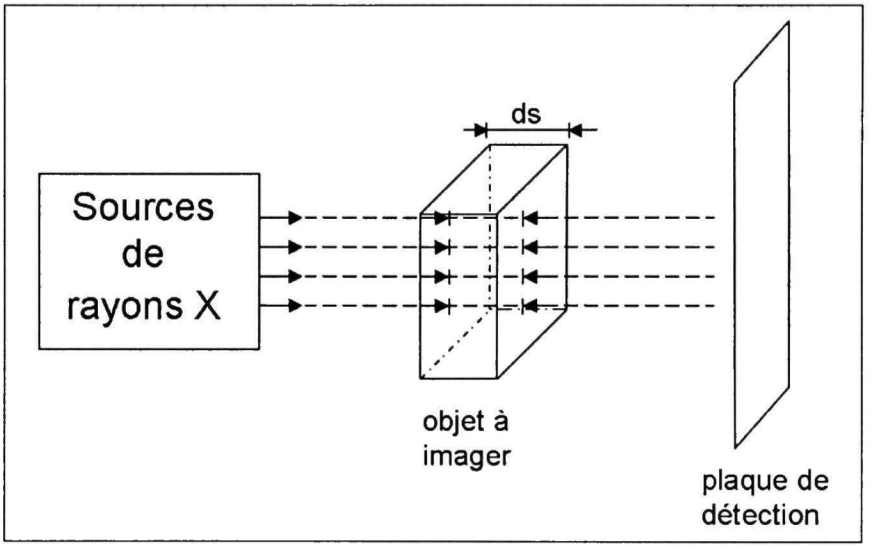


Figure 1.1 Modèle de formation des images radiographiques. Après avoir été émis par la source les rayons X rencontrent l'objet O. Certains rayons X réussissent à le traverser sur une longueur ds et viennent frapper la plaque de détection. Les autres rayons sont absorbés par l'objet.

Notons μ la fonction d'atténuation du corps. En un point donné de l'espace trois 3-D, cette fonction prend la valeur du coefficient d'atténuation du tissu se trouvant en ce point. Dans le cas d'une source de rayons X ponctuelle et mono-énergétique, l'image enregistrée sur la plaque de détection est donnée par l'équation suivante :

$$I_p(x,y) = I_x(x,y)exp\left[-\int \mu(x,y,z)dr\right] \tag{1.1}$$

où I_x est l'intensité des rayons X sur la plaque d'enregistrement en l'absence d'atténuation et μ est le coefficent d'atténuation. I_x dépend du nombre de rayons X émis et de leur

énergie. Cette formulation indique que l'intensité enregistrée en un point donné dépend de la somme des rayons X absorbés par les différents tissus traversés. L'image enregistrée est ainsi caractérisée par la superposition des tissus traversés.

Cette modélisation, quoique sommaire, reflète bien le modèle de formation des images radiographiques. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans [79]. Dû à ce modèle de formation, les images radiographiques sont des images hautement dégradées par le bruit et le flou comme nous allons le présenter dans la suite.

1.2.2 Modélisation du bruit

Avant de nous intéresser aux images radiographiques, nous présentons une modélisation simple du bruit. Cette modélisation sera utilisée dans la suite de cette thèse.

1.2.3 Modèle simple du bruit présent dans une image naturelle

Une image I observée d'une scène donnée est souvent une version dégradée de l'image réelle u de cette même scène. Ces dégradations peuvent être dues au système d'acquisition, au papier sur lequel l'image est imprimée, ou encore à une mauvaise transmission de l'image. L'image observée I peut être modélisée à partir de l'image originale u par :

$$I = u + \epsilon_\sigma \tag{1.2}$$

ϵ est un bruit blanc, de variance σ, et homogène sur tous les pixels. Ce type de modélisation considère que le bruit est additif. Cependant, pour certaines images, cette modélisation est trop simpliste et n'est que faiblement représentative de la complexité des dégradations des images. Ceci est le cas, par exemple des images radiographiques.

1.2.4 Le bruit des images radiographiques

Les images radiographiques sont constituées par l'accumulation de rayons X sur un détecteur. Plusieurs types de dégradations affectent ces images, comme le grain du négatif,

la quantification, la dispersion des rayons (cette dégradation dépend du système radiographique utilisé et peut être largement réduite). Cependant, le bruit provenant du système d'acquisition est largement prédominant. Les rayons X sont en effet émis à partir d'une source suivant une distribution de Poisson dont la distribution de probabilité est donnée par :

$$P_k = \frac{N_0^k e^{-N_0}}{k!} \tag{1.3}$$

où P_k est la probabilité d'émettre k rayons dans un intervalle de temps donné et N_0 est le nombre moyen de photons émis durant ce même intervalle. L'invasion des rayons X à travers le corps peut être représenté par une distribution binomiale, où p_{inv} est la probabilité d'invasion d'un rayon X. La probabilité $Q(k)$ que k rayons s'accumulent sur le scintillateur (plaque d'enregistrement) est la somme de toutes les invasions possibles de k rayons X :

$$Q(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} k+i \\ k \end{pmatrix} P_{k+i} p_{inv}^k (1 - p_{inv})^i \tag{1.4}$$

En insérant (1.3) dans (1.4), nous trouvons :

$$Q(k) = \frac{e^{-p_{inv}N_0}(p_{inv}N_0)^k}{k!}$$

Q est ainsi un processus de Poisson de moyenne $p_{inv}N_0$. Puisque la variance d'une telle distribution est égale à la moyenne, la variance du bruit est donc proportionnelle au nombre de rayons X absorbés. Plus petit est le nombre de rayons X absorbés (plus p_{inv} est grand) et plus l'image est bruitée, inversement plus le nombre de photons absorbés par le corps est grand, moins l'image est bruitée. Dans ce cas, l'image observée est mieux modélisée par l'équation suivante :

$$Neg = u + \Sigma(u)\epsilon \tag{1.5}$$

$\Sigma(u)$ est l'écart type du bruit et ϵ est un bruit de variance 1 ; celui-ci dépendant du niveau de gris u. De plus, pour des images numériques u, la fonction de digitalisation du négatif Neg est souvent inconnue. Dans le cas des images médicales, une transformation peut avoir été appliquée aux niveaux de gris pour rehausser ou accentuer quelques détails (une

lésion ou une tumeur par exemple). Les transformations les plus communes sont de type logarithmique ou bien de loi exponentielle[61], mais d'autres peuvent être utilisées. Nous notons donc par $digit$ la fonction caractérisant cette transformation. Ainsi le modèle global de formation des images numériques peut s'écrire :

$$I(i) = digit(Neg(x, y)) = digit(u + \Sigma(u)\epsilon) \tag{1.6}$$

Ce modèle ne prend pas en compte le processus de quantification, mais simplement celui de la transformation d'histogramme.

En supposant que Σ ne prend pas de grandes valeurs et en utilisant un développement de Taylor autour de $u(x)$, la variance du bruit dans l'image numérique bruitée peut s'approcher par $(\Sigma(u)digit'(u))^2$. Ainsi, comme nous le voyons mieux maintenant, la transformation $digit$ influence la variance du bruit dans l'image. Si celle-ci est inconnue, alors la variance du bruit doit être estimée à partir de l'image. Ce type de données est appelé hétéroscédastique. Ce terme est emprunté au domaine des statistiques lequel est, de plus en plus présent en traitement de l'image.

1.2.5 Caractérisation du bruit présent dans les radiographies de notre base de données

Avant de chercher à réduire le bruit dans une image, il vaut mieux le modéliser à partir de quelques-unes de ses caractéristiques, comme sa variance, sa moyenne et sa distribution.

Par exemple, un estimateur robuste de la variance d'un bruit ϵ est donné par l'équation suivante :

$$\hat{\sigma} = 1.4826 \text{ median } |\epsilon - \text{median } \epsilon| \tag{1.7}$$

Lorsque le bruit dégrade une image I, il doit donc en être extrait. Dans le cas d'un bruit homogène, une région uniforme et relativement grande de l'image est choisie pour réaliser l'estimation. De cette région est soustrait une de ses versions fortement régularisées. On

obtient ainsi une région bruitée ϵ, de laquelle une estimation de la variance σ peut être réalisée par l'équation (1.7).

Dans le cas de données hétéroscédastiques, cette estimation est plus compliquée puisqu'elle doit être effectuée pour chaque niveau de gris. Dans [62], les auteurs créent une image bruitée I_b en soustrayant de I une version régularisée I_g et en masquant les contours :

$$I_b = (1 - Mask(I)) \times (I - I_g) \tag{1.8}$$

où $Mask$ est un masque qui permet d'éliminer les pixels appartenant aux contours. I_g est une version régularisée de l'image en utilisant un filtre moyenneur de 5×5. La variance du bruit est estimée pour chaque niveau de gris i en estimant la variance de $I^{\circ}b$ sur chaque sous-ensemble $S(i) = \{j |\ I_g(j) = i\}$ en utilisant l'équation :

$$\hat{\Sigma}(i) = 1.4826 \text{ median } |I_b(S(i)) - \text{median } I_b(S(i))| \tag{1.9}$$

Pour masquer les contours, les auteurs de [62] utilisent un filtre de Sobel. Dans notre cas nous avons utilisé un détecteur de Canny avec un seuil faible afin de masquer tous les contours. Mieux vaut que certains pixels soient masqués, alors qu'ils n'appartiennent pas à un contour, plutôt que de laisser des pixels contours non masqués. De cette manière, seules les queues de la distribution du bruit sont négligées, et puisque l'équation (1.9) utilise une norme L^1, l'estimation de la variance n'y est que très peu sensible.

Dans [62], des simulations de Monte-Carlo ont permis d'estimer l'erreur de $\hat{\Sigma}(i)$ à $1.14\frac{\hat{\Sigma}(i)}{\sqrt{nbr(i)}}$, où $nbr(i)$ est le nombre de pixels utilisés pour l'estimation de la variance du bruit pour un niveau de gris i.

Nous avons estimé la variance du bruit à partir de dix radiographies de la base de données de l'hôpital Sainte-Justine. Toutes ces images ont été prises par le même système d'acquisition et dans les mêmes conditions. La Figure 1.2 présente l'estimation de l'écart-type en fonction des niveaux de gris. Pour les dix radiographies, l'estimation est sensiblement la même. Une bonne estimation de l'écart type, versus le niveau de gris, est obtenue par

régression de type exponentiel à partir de la moyenne des estimations sur ces dix radiographies. Ce graphique met en évidence qu'une transformation des niveaux de gris a été utilisée. En effet puisque le bruit principal suit une loi de Poisson, la variance du bruit devrait être petite pour les niveaux de gris foncé et croître linéairement en fonction des niveaux de gris. Ainsi à partir du graphique, on déduit que la fonction *digit* étend l'histogramme des radiographies dans les niveaux de gris foncé et la réduit dans les clairs. Il

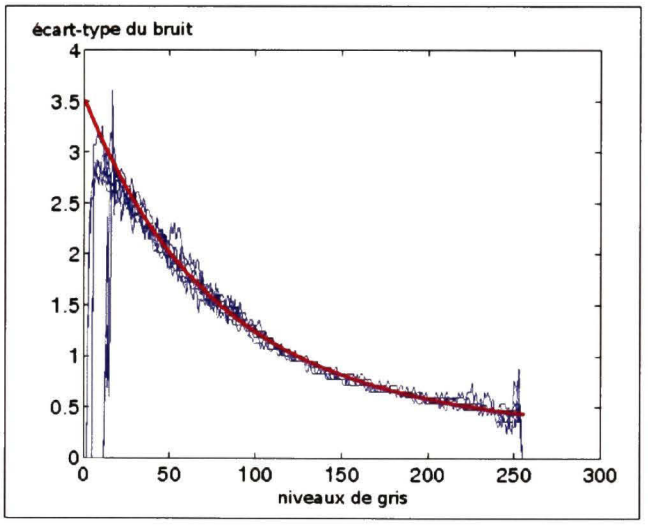


Figure 1.2 La variance du bruit en fonction du niveau de gris.

est important aussi de remarquer que la transformation de l'histogramme déforme la distribution du bruit. Celui-ci ne suit alors plus une loi de Poisson. Ne pouvant être modélisé, dans la suite lorsque nous en aurons besoin nous considérerons que la distribution de ce bruit en un pixel donné i est une gaussienne de variance $\hat{\Sigma}^2(i)$.

1.2.6 Le flou présent dans les radiographies

Le flou dans les images radiographiques est dû à deux causes principales : la résolution de la plaque d'enregistrement (cette dégradation est amplifiée dans notre cas puisque l'image enregistrée est ensuite scannée pour être numérisée), et l'utilisation d'un nombre fini de sources de rayons X.

L'utilisation d'une source ponctuelle se traduit par une distorsion de l'image enregistrée. Les tubes à rayons X sont donc très souvent composés de plusieurs sources. L'intensité totale enregistrée en un point donné (x, y) de la plaque de détection doit donc être intégrée sur l'ensemble de ces sources :

$$I_p(x, y) = \sum_i I_p(x, y, s_i) \tag{1.10}$$

où $I_p(., ., s_i)$ est l'intensité enregistrée à partir des rayons X émis par la source s_i. Elle est obtenue par l'équation (1.1). Pour arriver en un point donné du scintillateur, les rayons issus de sources différentes peuvent traverser différents tissus. L'intégration, sur l'ensemble des sources, introduit ainsi du flou (Figure 1.3).

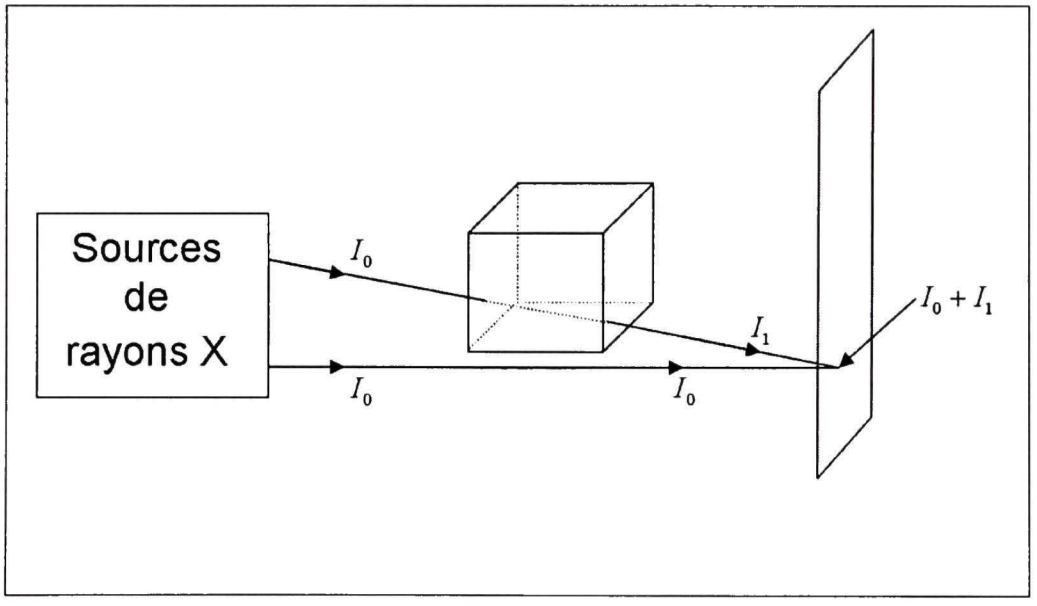


Figure 1.3 Une partie des rayons, en provenance de la première source, a été absorbée par l'objet. Ceux de la deuxième source n'ont pas été absorbés. La sommation des intensités lumineuses des deux sources crée du flou.

Il est difficile de modéliser le flou puisque, premièrement nous n'avons aucune connaissance du système utilisé et donc de son nombre de sources. Deuxièmement ; puisqu'il est la combinaison de plusieurs facteurs (nombre de sources et résolution,...). Il est aussi difficilement estimable à partir de l'image. En effet, le flou n'est pas homogène sur toute

l'image. Ainsi, comme le montre le schéma de la Figure 1.4, lorsque plusieurs sources sont utilisées, le flou d'un objet dépend de sa distance au scintillateur. Plus il est éloigné de la plaque d'enregistrement ; plus ses contours sont flous.

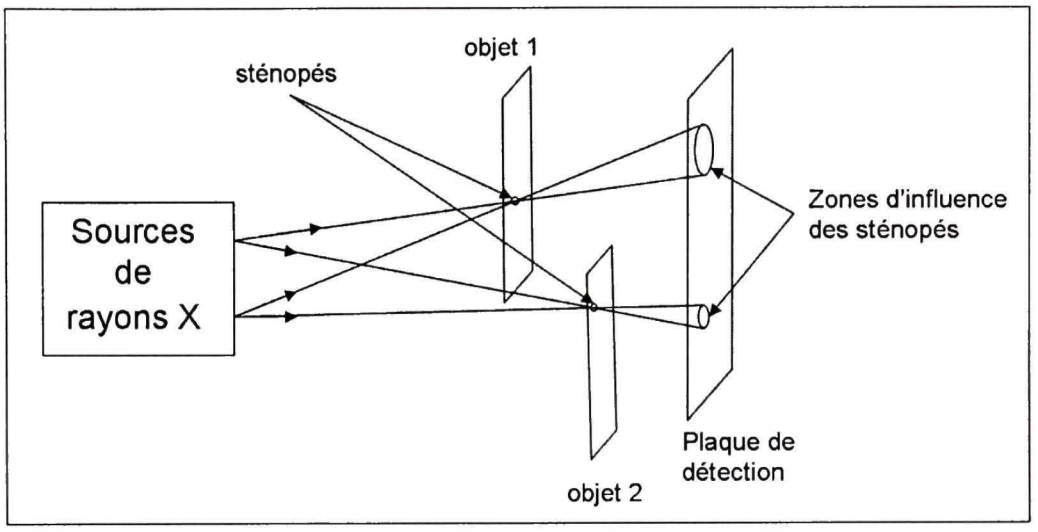


Figure 1.4 Cas d'une double source de rayons X avec deux objets présentant un sténopé. L'objet 1 est plus éloigné de la plaque de détection que l'objet 2. Sur la plaque, la taille du sténopé de l'objet 1 est plus grosse que celle de l'autre objet. Ainsi plus les objets sont éloignés ; plus le flou les dégradant est important.

1.3 Le débruitage des images

Les données radiographiques de l'hôpital Sainte-Justine sont principalement utilisées pour la reconstruction 3D des colonnes vertébrales. Des algorithmes de segmentation (pour extraire l'information), de recalage (pour mettre en correspondance les deux vues radiographiques) sont utilisés automatiquement ou bien plus souvent semi-automatiquement. Or, le bruit présent dans ces images peut perturber et détériorer les performances de ces algorithmes. Beaucoup de méthodes pour supprimer ou réduire l'influence du bruit ont été présentées dans la littérature, il serait exhaustif de toutes les présenter. Ainsi dans la

suite, nous ne détaillerons que les approches qui ont été ou sont très utilisées. Celles-ci s'intéressent surtout aux cas d'images dégradées par un bruit additif.

1.3.1 Les filtres linéaires

1.3.1.1 Le noyau optimal, la gaussienne

Le filtrage linéaire consiste à utiliser un filtre passe-bas pour éliminer les variations à très haute fréquence du signal. Meer et al. [88] ont suggéré que le filtre régularisant soit le plus proche possible d'un filtre passe-bas idéal. Pour cela ils ont proposé de sélectionner le filtre dont la transformée de Fourier est la plus proche de celle du passe bas idéal. Une alternative est d'utiliser un noyau positif et uni-modal (croissant puis décroissant) spatialement et dans le domaine des fréquences. Ainsi, toutes les fréquences du signal se voient allouer un poids inférieur à toutes les fréquences plus basses. Le noyau recherché doit être causal, isotrope (tous les points spatiaux doivent être traités de la même manière) et homogène (les dimensions spatiales et la dimension d'échelle doivent être traitées de la même manière). A partir de ces conditions, il a été montré que la représentation multi échelle d'un signal 2D satisfait l'équation de la chaleur, dont la solution est le signal convolué avec la gaussienne. Cette dernière possède deux autres propriétés très intéressantes :

- elle a une structure de semi-groupe ;
- elle minimise le critère d'incertitude de Heisenberg (tout atome temps-fréquence vérifie : $\sigma_t \sigma_w$ où σ_t est la variance temporelle et σ_w est la variance fréquentielle). La gaussienne est le noyau qui conserve le mieux l'énergie dans la résolution temps-fréquence.

D'un point de vue théorique, la gaussienne est l'unique noyau multi-échelle à proprement parler. Mais d'un point de vue pratique, le noyau gaussien possède plusieurs limites :

- la perte d'information due à la troncature du support de la gaussienne (qui est infini) ;
- le coût prohibitif de calcul causé par la largeur du noyau. En effet, il a été montré que la taille du support du noyau doit être d'environ onze fois l'écart type (11σ), pour éviter une perte d'information trop importante.

1.3.1.2 Le KCS et le SKCS

Pour contrer ces inconvénients, Remaki et Cheriet [100] ont développé un nouveau noyau à support compact (KCS). Le KCS dérive du noyau gaussien. Il est construit par une composition de la gaussienne et d'un C^1-difféomorphisme H qui transforme la boule unité ouverte en un demi-plan. Soit :

$$[0,1[\leftarrow \mathbb{R}^+ r \leftarrow \mathsf{H}(r) = \sqrt{\frac{1}{1-r^2} - 1}$$

On note :

$$\rho_\gamma(x,y) = G_{1/2*\gamma} * \mathsf{H}(\sqrt{x^2+y^2}) = \begin{cases} \frac{1}{C_\gamma} exp(\frac{\gamma}{x^2+y^2-1} + \gamma) & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.11}$$

où C_γ est la constante de normalisation. On définit la famille multi-échelle de KCS comme étant :

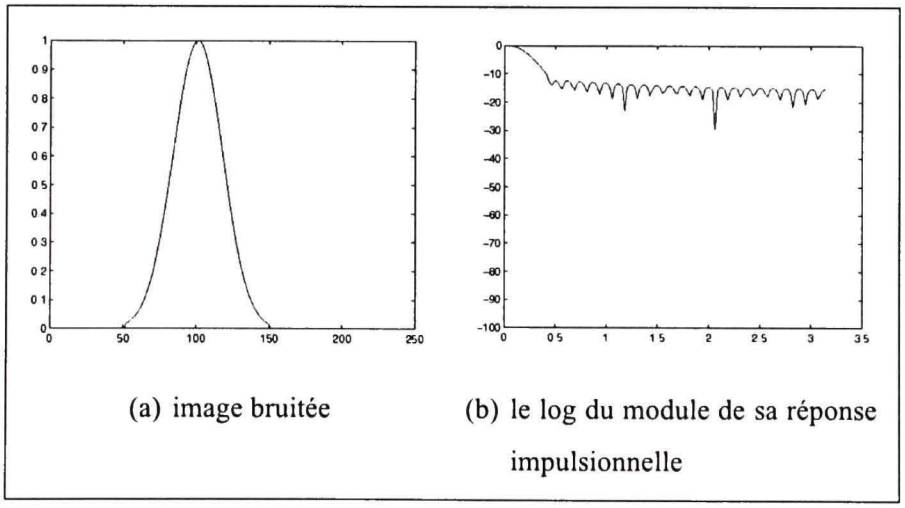
$$\rho_{\varsigma,\gamma}(x,y) = \rho_\gamma(\frac{x}{\varsigma}, \frac{y}{\varsigma}) = \begin{cases} \frac{1}{C_\gamma \varsigma^2} exp(\frac{\gamma\varsigma^2}{x^2+y^2-1} + \gamma) & \text{si } x^2+y^2 \leq \varsigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.12}$$

Contrairement à la gaussienne, le KCS possède deux paramètres d'échelle : ς contrôle la taille du support et γ contrôle la largeur de la cloche. Le support 2ς du noyau de 2ς est largement inférieur au support de 11ς nécessaire pour la gaussienne. On peut déjà mentionner que le paramètre γ contrôle la distance entre les zéros du KCS et l'origine des axes. Il n'affecte pas la nature des fonctions $\rho_{\varsigma,\gamma}$; elles demeurent des noyaux à support compact. De plus, si $\gamma \leq 2$, alors le filtre est causal (pas de création de nouvelle structure dans la descente du paramètre ς).

Les auteurs ont montré dans [109] que le noyau KCS garde les plus importantes propriétés du noyau Gaussien (relatives à la segmentation de l'image) mais pas toutes celles qui rendent manifestement le noyau Gaussien unique. Les propriétés d'un signal convolué avec le KCS sont respectivement :

- le recouvrement du signal initial quand le paramètre échelle tend vers zéro ; condition nécessaire pour construire l'espace d'échelles ;
- la continuité par rapport au paramètre échelle ;
- la forte régularisation ;
- la diminution du nombre de zéros suivant les échelles ;
- pour des valeurs de γ grande, le principe d'incertitude d'Heisenberg est minimisé. On remarque aussi qu'il ne dépend pas du paramètre d'échelle γ.

En comparant les modules des réponses du KCS (Figure 1.6) et celles de deux gaussiennes tronquées (Figure 1.5), on remarque que le KCS possède une atténuation du lobe secondaire forte en comparaison à la taille de son support temporel. Le lobe secondaire de la gaussienne tronquée est à 12dB, alors que celui du KCS est à 25dB. Le KCS est donc un meilleur filtre passe bas. On note que la largeur du lobe principal peut être ajustée grâce au paramètre γ.

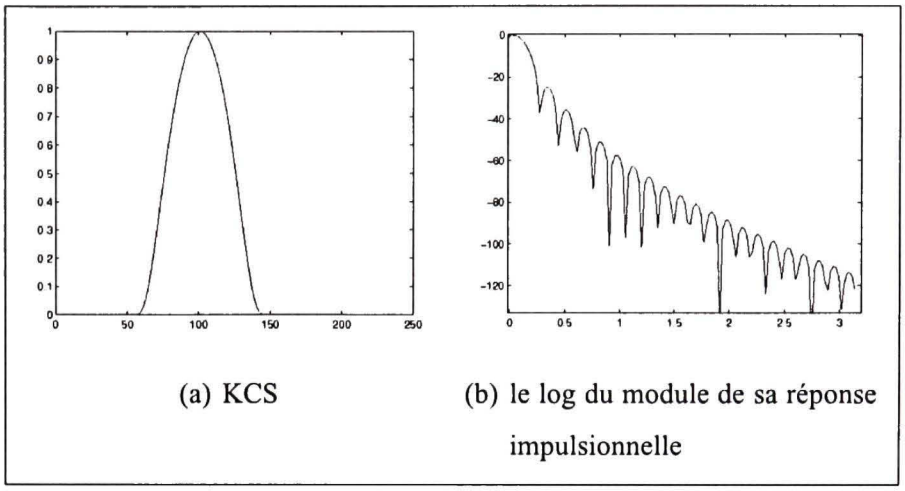


(a) image bruitée

(b) le log du module de sa réponse impulsionnelle

Figure 1.5 Gaussienne tronquée avec un support égal au KCS ci-après et le log du module de sa réponse impulsionnelle.

Cependant le KCS est un filtre non séparable. Pour des valeurs de ς grandes, le coût de calcul devient rapidement prohibitif. Nous avons donc avec Ben Braik et M. Cheriet [16] [15]



(a) KCS

(b) le log du module de sa réponse impulsionnelle

Figure 1.6 KCS et le log du module de sa réponse impulsionnelle.

développé une version séparable du KCS, appelé SKCS. Ce filtre est donné par l'équation :

$$SKCS_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y) = \rho(x)\rho(y) \tag{1.13}$$

Recemment S. Saryazdi [109] a montré qu'en utilisant la transformation du plan suivante :

$$[0,1[\leftarrow \mathbb{R}^+ r \leftarrow \mathsf{H}(r) = \sqrt{-\ln|1-r|^2}$$

et pour certaines valeurs des parametres, le nouveau noyau fournit une approximation de la solution de l'équation de la chaleur. Il satisfait aussi à quelques autres contraintes de la théorie de l'espace-échelle.

1.3.1.3 Limitation du filtrage linéaire

Pour pouvoir utiliser un tel filtre, le signal (c'est-à-dire l'image I) doit être stationnaire. Or les seules images stationnaires sont les images constantes dégradées par un bruit blanc quelconque. Appliqués aux images, ces filtres sont très médiocres, ils dégradent considérablement les contours et les rendent flous.

1.3.2 Le filtre de Wiener

L'approche de Weiner [80] consiste à chercher le filtre $\mathcal{F}$ qui minimise une fonction de coût. Pour les images, la fonction de coût devrait mesurer la dégradation visuelle, qui est souvent difficile à modéliser. La distance euclidienne ne modélise pas parfaitement les dégradations visuelles, mais elle est correcte mathématiquement. Une fonction de coût est donc prise égale au carré de la distance euclidienne. Le risque est calculé en moyenne :

$$risque = \mathbb{E}\{\|\mathcal{F} * I - I\|^2\} \tag{1.14}$$

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$\mathsf{F}(u,v) = \left[1 + \frac{P_\epsilon(u,v)}{P_I(u,v)}\right] - 1 \tag{1.15}$$

où $P_\epsilon(u,v)$ et $P_I(u,v)$ sont respectivement le spectre de densité de la puissance du bruit et de l'image. Cependant ces derniers sont difficilement estimables, ce qui rend aussi ce filtre médiocre.

1.3.3 Le seuillage des coefficients dans une base d'ondelettes

Une autre approche plus performante que les filtrages linéaires et que le filtre de Wiener consiste à utiliser un opérateur diagonal dans une base d'ondelettes [81] [49]. Pour pouvoir présenter cette approche, nous proposons dans la suite, une introduction succincte sur les bases d'ondelettes.

1.3.3.1 Les ondelettes orthogonales réelles

Une ondelette est une fonction $\phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ de norme un et de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0 \tag{1.16}$$

Celle-ci est d'autre part centrée en $t = 0$. Une famille d'atomes temps-fréquence s'obtient en dilatant ψ par 2^a et en la translatant de b :

$$\psi_{b,2^a}(t) = 2^{a/2}\psi(2^a - b), a, b \in \mathbb{Z} \tag{1.17}$$

Dans le temps, l'énergie de $\phi_{k,2^a}$ est concentrée autour de b sur une surface proportionnelle à 2^a, alors que dans l'espace fréquentiel, l'énergie de la transformée de Fourier de ϕ est concentrée autour d'une fréquence proportionnelle à 2^{-a} sur un étalement de $1/2^{-a}$. Ainsi chaque élément de la famille d'atomes est caractérisé par un temps et une fréquence.

La transformée en ondelettes de $\mathbf{s} \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ au temps b et à l'échelle 2^a est :

$$W\mathbf{s}(b, 2^a) = \langle s, \psi_{b,2^a} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{a/2} s(t) \psi(2^a t - b) dt \tag{1.18}$$

Les coefficients $W\mathbf{s}$ ne dépendent que du signal $\mathbf{s}$ et de sa transformée de Fourier $\hat{\mathbf{s}}$. Ils mesurent la variance de $\mathbf{s}$ dans un voisinage centré en b et de largeur 2^a. Lorsque $\mathbf{s}$ présente une discontinuité alors des coefficients $W\mathbf{s}$ de grandes valeurs seront créés, proches de celle-ci. Pour certains choix de ψ, l'ensemble $\psi_{b,2^a}$ est une base orthonormée de $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$. Ainsi toute fonction $\mathbf{s} \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ peut être décomposée sur cette base d'ondelettes :

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sum_{b \in \mathbb{Z}} \langle \mathbf{s}, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(t) \tag{1.19}$$

En pratique, les ondelettes $\psi_{b,2^a}$ ne sont calculées que pour des échelles $a > a_0$. Pour pouvoir reconstruire le signal $\mathbf{s}(t)$, une fonction d'échelle ϕ_{a_0} correspondant à l'agrégation des ondelettes dont l'échelle est inférieure à a_0 doit être construite. $\mathbf{s}$ se décompose alors par :

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{A \leq a} \sum_{b=0}^{2^{-a}} \langle \mathbf{s}, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(t) \; + \; \sum_{b=0}^{2^{-a}} \langle \mathbf{s}, \phi_{a,b} \rangle \phi_{A,b}(t) \tag{1.20}$$

A partir d'une ondelette ϕ engendrant une base orthogonale de $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$ et sa fonction échelle ϕ associée, trois ondelettes sont définies :

$$\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y), \psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y), \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y) \tag{1.21}$$

En posant :

$$\psi_{a,b} = 2^a \psi(2^a x - b_1, 2^a y - b_2) \tag{1.22}$$

Alors l'ensemble :

$$\{\psi^1_{a,b}, \psi^2_{a,b}, \psi^3_{a,b}\}_{(a,b) \in \mathbb{Z}^3} \tag{1.23}$$

est une base orthonormée de $\mathbf{L^2}(\mathbb{R}^2)$.

D'un point de vue pratique et pour des raisons de rapidité, un banc de filtres miroirs conjugués décompose l'image bruitée I sur une base d'ondelettes discrètes que nous noterons simplement $\mathcal{B} = \{g_m\}$. Une estimation de l'image réelle u est donnée en utilisant une fonction ρ_T estimant chaque projection de u sur la base $\mathcal{B}$ à partir des projections de I. On obtient ainsi :

$$\hat{I}(i) = \sum_m Thresh_T(\langle I(i), g_m \rangle) g_m \tag{1.24}$$

Donoho et Johnstone [48] ont montré qu'en utilisant une fonction de seuillage avec un seuil $T = \sigma\sqrt{2ln(N)}$ permettait d'approcher la borne inférieure de l'erreur entre l'image réelle et l'image filtrée. La fonction de seuillage est de type dur :

$$Thresh_T(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \tag{1.25}$$

Ou doux

$$Thresh_T(x) = \begin{cases} x - T & \text{si } x \geq T \\ x + T & \text{si } x \leq -T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} \tag{1.26}$$

De tels seuillages peuvent être affinés en utilisant une seuillage adaptatif suivant les échelles, tel que le seuillage SURE multi-échelle. Un seuillage adaptatif est proposé dans [112]. L'estimation du bruit $\hat{\sigma}$ se fait à l'échelle la plus fine des coefficients d'ondelettes $W\mathbf{s}$. Ensuite, l'estimation de l'écart-type des coefficients bruités d'ondelettes à l'échelle b est donné par :

$$\hat{\sigma}_w = \sqrt{2}\text{mean}(|W\mathbf{s}|)$$

À l'échelle b, l'estimation de l'écart-type des coefficients d'ondelettes est :

$$\hat{\sigma}_\mathbf{s} = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_w - \hat{\sigma}, 0)}$$

Le seuillage doux utilise le seuil :

$$T = \sqrt{2}\frac{\hat{\sigma}_\mathbf{s}}{\hat{\sigma}_w} \tag{1.27}$$

1.3.3.2 Les secondes générations d'ondelettes

Les ondelettes sur $\mathbb{R}^2$ sont séparables par construction. Ainsi, une ondelette 1D est utilisée pour chacun des axes. Cette construction limite les ondelettes dans la détection de l'information directionnelle decontours. Récemment de nouvelles générations d'ondelettes ont été construites dans l'intention de corriger cette limitation. Parmi les premiers travaux sur ce sujet, Candes et Donoho [26] ont construit à partir de la transformée de Radon, la transformée en ridgelette. Cette dernière se calcule en corrélant la transformée de Radon de l'image I avec une ondelette 1D. La transformée en curvelettes réduit les redondances des ridgelettes à travers les échelles. Do et Vetterli [47] ont aussi proposé un cadre par l'analyse multi-résolution et directionelle par l'introduction de la transformée en contourlettes. A la différence de la transformée en curvelettes, cette dernière transformée est construite dans le domaine discret pour permettre la mise en oeuvre d'algorithmes efficaces. Enfin, la transformée en bandelettes [82] utilise le flot géométrique pour déformer le plan. A l'inverse des deux méthodes précédentes, les bandelettes permettent d'obtenir une base orthonormée.

Cependant, quelle que soit la *lette utilisée pour décomposer l'image bruitée, le débruitage s'effectue en seuillant les coefficients de *lettes à l'aide d'une fonction telle que celles présentées plus haut, aux équations (1.25) et (1.26). Un seuillage adaptatif suivant les échelles peut aussi être utilisé [118][46].

1.3.3.3 La transoformée en ondellettes discrètes utilisant les arbres duaux

La transformée en ondelettes discrètes (DWT) [111] est un bon outil pour la compression d'image. Cependant pour d'autres problèmes d'analyse de signaux, elle souffre de deux désavantage majeurs. Le premier est le manque d'invariance par translation qui peut causer des variations majeures dans la distribution de l'énergie sur les coefficients d'ondelettes. Le second est sa pauvreté dans la description des traits diagonaux, comme nous l'avons déjà évoqué dans la section précédente.

Pour approximer l'invariance par transation, il suffit de doubler le taux d'échantillonnage à chaque échelle. Ceci est équivalent à utiliser deux arbres 1 et 2 décomposant chacun le signal. L'ondelette réelle associée au premier arbre doit être une approximation de la transformée de Hilbert de l'ondelette réelle associée à l'autre arbre : $\phi_1(t) \approx \mathcal{H}\phi_2(t)$. La transformée en ondelettes associée est donnée par $\phi(t) = \phi_1(t) + \jmath\phi_2(t)$.

Les ondelettes complexes peuvent fournir une sélection directionnelle. Ainsi, à partir de la composition d'ondelettes complexes 1D, six ondelettes complexes orientées (suivant $\pm 15°$,$\pm 45°$,$\pm 65°$) sont obtenues en 2D. Ces ondelettes directionnelles permettent de mieux capturer les différentes orientations. Pour le debruitage, le seuillage adpatation de l'équation (1.27) est souvent utilisé avec les ondelettes complexes.

1.3.4 Les filtrages adaptatifs

Une autre approche [137], des plus courantes consiste à substituer le niveau de gris $I(i)$ d'un pixel i par une somme pondérée des autres pixels de l'image. Alors l'image débruitée $\hat{I}$ est une moyenne pondérée de la forme :

$$\hat{I}(i) = \sum_k w_k^h(i) I(k) \tag{1.28}$$

Les coefficients de la pondération sont les poids w_k^h. Ils déterminent la qualité du débruitage. Cette approche correspond à une régression locale. En général, une caractéristique C est introduite afin de différencier les pixels entre eux. La distance d_C entre la caractéristique du pixel $I(i)$ et celle d'un pixel $I(k)$ permet d'évaluer leur dissimilarité. Ainsi, plus cette distance est petite et plus l'influence d'un des pixels est importante sur l'autre dans le processus de débruitage. Cette distance permet de ce fait de fixer la pondération. Les poids w correspondants peuvent dont être assignés ainsi :

$$w_{l,k}^h(i,j) = K\big(d_C(\frac{CI(i,j) - CI(k,l)}{h})\big) \tag{1.29}$$

Où K est une densité symétrique en 0 et de largeur de bande h. La pondération la plus connue est celle associée au filtre gaussien. La caractéristique C alors utilisée est la lo-

calisation spatiale des pixels $I(k)$ par rapport au pixel à débruiter $I(i)$. La pondération est donc donnée par :

$$w_k^h(i) = \frac{1}{4\pi h^2} e^{-\frac{(i-k)^2}{4h^2}} \tag{1.30}$$

où h est la largeur de bande qui doit être fixée pour contrôler le degré de régularité. Ce filtrage est dit isotrope car les coefficients w_k^h ne dépendent pas des niveaux de gris de l'image mais seulement de la distance spatiale entre les pixels $I(k)$ et $I(i)$. Comme nous l'avons vu précédemment, bien qu'un tel filtrage soit optimal pour des régions uniformes, il détruit les contours et les textures.

D'autres méthodes [137] utilisent, en tant que caractéristique C, la valeur du niveau de gris du pixel. Néanmoins le filtrage des régions régulières n'est pas aussi bon. Des approches plus développées font dépendre les coefficients de plusieurs caractéristiques. C'est le cas du filtre Bilatéral [124] et du filtre Susan [116] où les coefficients sont de la forme :

$$w_k^h(i) = \frac{1}{Cste(i)} e^{-\frac{(i-k)^2}{4h_1^2}} e^{-\frac{\|I(i)-I(k)\|^2}{4h_2^2}} \tag{1.31}$$

avec $Cste(i)$ un coefficient de normalisation.

Le coefficient du pixel $I(k)$ ainsi fixé dépend de sa distance spatiale au pixel i mais aussi de sa distance dans les niveaux de gris. Ainsi pour obtenir un coefficient élevé, le pixel k doit être spatialement proche et avoir un niveau de gris voisin de celui de $I(i)$.

Un modèle plus efficace a été proposé par Buades [22]. Dans ce dernier modèle appelé filtre à moyennes non locales (MNL), la caractéristique C d'un pixel $I(k)$ est un de ses voisinages, appelé $\mathcal{V}$. Dans [23], ce dernier est choisi comme étant $\mathcal{V}(i) = \{k \mid \|i-k\| < 4\}$. La pondération du MNL peut s'exprimer ainsi :

$$w_k^h(i) = \frac{1}{\sum_k w_k^h(i)} e^{-\frac{L(I(\mathcal{V}(i))-I(\mathcal{V}(k)))}{h^2}} \tag{1.32}$$

où L est une norme adéquate, c'est-à-dire permettant de caractériser la distance entre des voisinages d'images. Par ce filtre, le moyennage est réalisé entre les pixels ayant un voisinage proche, c'est-à-dire situés localement au même endroit sur une texture ou sur un objet

présent dans l'image. Il est important de noter que, même si la dépendance spatiale a été supprimée dans l'équation (1.32), pour des considérations computationelles, la pondération est réalisée dans un certain voisinage. Le filtre MNL est plus robuste que ceux présentés précédemment dans cette section, car le filtrage est principalement réalisé à partir des pixels appartenant aux mêmes structures. Ainsi le débruitage est accompli en respect avec les structures locales de l'image et empêche la création de structures artificielles. Cependant deux paramètres doivent être ajustés pour accroître la qualité de l'image filtrée : le degré de régularisation h et le nombre de pixels échantillons utilisés dans le débruitage de chaque pixel.

Au même moment que les auteurs de [23] publiaient leur article, Awate et Whitaker [8] proposèrent l'algorithme UINTA, qui est très similaire au filtre MNL. L'algorithme UINTA sélectionne automatiquement la largeur de bande en minimimsant l'entropie des motifs échantillons. La largeur de bande ainsi obtenue est constante sur toute l'image. L'entropie est principalement introduite par le bruit affectant l'image mais elle est aussi due aux structures de l'image (spécialement dans les régions texturées). Bien que la minimisation de l'entropie réduise le bruit, du flou est introduit. Une telle sélection de la largeur de bande ne permet donc ni de considérer le flou, ni d'ajuster la largeur de bande au pixel de façon optimale.

Depuis ces deux premiers modèles, les techniques de régressions locales connaissent un regain d'activité depuis quelques années [45], [21], [42].

Nous n'avons ici présenté que les principales approches de débruitage d'images. D'autres filtres ; par exemple, les filtres d'ordre [80], tel que le filtre médian [54], ou bien encore la diffusion anisotrope [98] (que nous présenterons dans la prochaine section), pour ne citer qu'eux, ont aussi été développés.

1.4 Le filtrage par Équations aux Dérivées Partielles

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux filtres de diffusion par EDP. Ces dernières sont très utilisées en traitement de l'image, notamment pour les prétraitements, le débruitage [98] [3] [59], la restauration [71][63], le rehaussement [64][60] ou bien encore la simplification d'image. Elles sont aussi utilisées pour le prétraitement des images médicales [133] et aussi des radiographiques [52].

Les EDPs font appel aux dérivées successives de l'image et surtout au gradient de l'image. En un pixel donné ce dernier correspond à l'information structurelle locale de l'image. Or en présence de bruit, l'estimation de cette information devient très délicate. En effet, en dérivant, la variance du bruit est amplifiée. Afin de réduire son influence, les dérivées (lorsqu'elles sont utilisées dans les EDPs), sont régularisées localement en les convoluant avec un filtre passe-bas (gaussienne ou KCS [100]). Cependant, ce type de filtrage pour le gradient peut entraîner localement son annulation. En effet, en considérant une structure fine (type ligne) dans une image, le gradient est positif sur un de ses contours et négatif sur l'autre. Si le support du noyau régularisateur est plus large que la structure, alors les gradients des deux contours s'annulent. Pour éviter cet inconvénient Weickert [130] propose de considérer à la place du gradient un produit tensoriel.

1.4.1 L'équation de la chaleur

Le noyau gaussien est un filtre passe-bas très utilisé pour éliminer les hautes fréquences des images. En le convoluant successivement avec une image I, une famille multi-échelle $I(.,t)$ est obtenue. t est le paramètre d'échelle, il correspond au nombre de convolutions réalisé. Suivant cette échelle, l'image est simplifiée, les détails disparaissent. Si du bruit est présent dans l'image originale, il est atténué. A chaque valeur t correspond ainsi une image avec un ensemble de structures. Cette décomposition multi-échelle est utilisée pour chercher les contours importants de l'image. Ceux-ci sont identifiés aux échelles grossières (t grand). En remontant dans les échelles plus fines, leurs localisations spatiales sont mieux

appréciées. Dans les années 60, Gabor a remarqué que la différence entre une image nette et une image convoluée avec la gaussienne était approximativement proportionnelle au laplacien de l'image nette. Une image I peut donc être filtrée itérativement en lui ajoutant à chaque itération son laplacien. L'équation associée à cette approche itérative est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I = \text{div}(\nabla I) \tag{1.33}$$

On remarque bien que les solutions de cette équation sur les images sont $I(.,t) = G_t * I$ lorsque $I \in L^2(\mathbb{R})$. Cette EDP est dite à diffusion isotrope : la chaleur est diffusée identiquement dans toutes les directions. En d'autres termes, un pixel i est filtré à l'aide de ses pixels voisins. L'influence de ces derniers dans son filtrage dépend uniquement de leur distance spatiale à i. Le désavantage d'une telle diffusion, est qu'elle ne conserve pas la structure globale des images. En effet, proches des contours, les pixels appartenant à des objets différents de l'image ont une incidence non négligeable sur leur filtrage respectif. Les contours deviennent donc flous.

1.4.2 La diffusion anisotrope

En 1987, Perona et Malik [98] introduirent la notion de diffusion anisotrope : la diffusion est privilégiée dans certaines directions dans la diffusion de la chaleur. L'idée de Perona et Malik est de lisser les zones homogènes de l'image sans faire évoluer l'image le long des contours. L'équation correspondante est :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(g(|\nabla I|)\nabla I) \tag{1.34}$$

où g est la fonction de diffusion. Plusieurs exemples de telles fonctions peuvent être trouvées dans [7]. Ce sont généralement des fonctions décroissantes. Pour nos expériences nous avons utilisé la fonction suivante :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{1.35}$$

Lorsque les variations de l'image sont faibles, le gradient de l'image ∇I est petit. Pour de telles valeurs, $g(\nabla I)$ est proche de un et l'équation (1.34) correspond à l'équation de

la chaleur (1.33). A l'opposé, en présence d'un contour, le gradient de l'image est élevé. Pour ces valeurs, $g(\nabla I)$ est presque nul, la diffusion est très faible et l'image est très peu débruitée.

1.4.3 Le filtre de Rudin

Lorsque la fonction de diffusion g prend la forme suivante :

$$g(x) = 1/|x| \tag{1.36}$$

Alors l'équation (1.34) s'écrit :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}) = \text{curv } I \tag{1.37}$$

où *curv* est la courbure de l'image. Cette dernière équation est utilisée par Rudin [107], il lui associe un terme d'attache à l'image originale I_0 :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}) \; + \; \alpha(I_0 - I) \tag{1.38}$$

Le second terme correspond à l'attache aux données. En effet schématiquement et grossièrement, cela revient à chaque itération t à substituer l'image $I(.,t)$ par la pondération $\alpha \; I_0 + (1 - \alpha) \; I)$. Ceci rend l'image $I(.,t)$ plus proche de l'image originale. Ainsi par cette équation, nous recherchons une image I dont les variations sont faibles tout en restant proche de l'image originale I_0.

1.4.4 Le mouvement par courbure moyen

Plusieurs caractéristiques sont souvent imposées au filtrage. Par exemple, deux images d'une même scène mais prises avec des angles différents (c'est-à-dire que ces deux images sont égales à une rotation près) devraient recevoir le même traitement. De la même manière, lorsque les images sont prises dans des conditions d'éclairement différentes ou encore à des distances distinctes de la scène, leur traitement devrait être le même. Ces différentes conditions sont représentées par des invariances. Plusieurs EDP ont été proposées

dans la littérature suivant qu'elles vérifient une ou plusieurs invariances [3]. Mais les plus utilisées sont du type mouvement par courbure. En effet, ce type de filtre permet l'invariance du filtrage par changement de contraste et par isométrie (rotation et translation). L'équation associée à ce filtrage est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| G(\text{curv} u, t) \tag{1.39}$$

où $G(x,t)$ est une fonction continue et croissante en x. Plus t est grand et plus l'image associée à cette échelle est simplifiée (moins de détails). A la différence de la diffusion anisotrope, la diffusion par ces filtres se fait principalement suivant la direction orthogonale à celle du gradient. Asymptotiquement, ces filtrages sont associés à des itérations d'un filtre médian [63].

Les filtres suivants sont utilisés pour renforcer les contours ou pour la restauration d'image. Ils sont principalement utilisés lorsque l'image est floue et que ce flou n'est pas connu.

1.4.5 Le filtre de Osher et Rudin

La restauration d'une image consiste à rendre plus saillant ses contours et ses détails. Cela revient, plus ou moins, à faire le processus inverse de la diffusion de la chaleur [24], qui elle, simplifie l'image itérativement. Une approche simpliste serait donc d'utiliser l'équation de la chaleur inverse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u \tag{1.40}$$

Cependant cette équation est hautement instable et amplifie fortement le bruit. Rudin [93] propose d'améliorer cette diffusion inverse en introduisant le filtre de choc suivant :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\text{sign}(\Delta I) |\nabla I| \tag{1.41}$$

Ce filtre réalise une dilatation dans les zones où l'image est maximale (où le laplacien est négatif) et une érosion dans les zones où l'image est minimale (où le laplacien est positif). L'algorithme de Kramer [73] peut aussi être interprété par une EDP [64] de la même forme

que (1.41) à la différence près que, le laplacien est remplacé par $u_{\eta\eta}$, la dérivée seconde suivant la direction η du gradient.

1.4.6 Le filtre de restauration de Buades

Dans [24], Buades propose une version non locale de l'équation de la chaleur inverse. Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\Delta I + \alpha\, MNL_0\, I \tag{1.42}$$

où MNL_0 est le filtre à moyennes non locales dont les poids sont calculés à partir de l'image dégradée I_0. α est le paramètre de Tikhonov qui régule l'énergie entre le terme de fidélité aux données et le terme de régularité. Cette équation est implémentée par un schéma alternant ; une itération de l'équation de la chaleur inverse est successivement alternée avec un filtrage non-local. Cependant, ce filtrage est fait sous l'hypothèse que l'image déflouée doit maintenir les mêmes similarités dans les voisinages. Cette hypothèse est particulièrement limitante puisqu'elle empêche la création de nouveaux contours.

1.4.7 Le filtre de Alvarez et Mazorra

Alvarez et al [4] ont amélioré les performances du filtre de Rudin en utilisant la dérivée seconde $(I_g)_{\eta\eta}$ de $I_g = G_\sigma * I$ suivant la direction η du gradient à la place du laplacien. I_g est une version régularisée de I afin de rendre le filtre plus robuste. En effet, le filtre précédent crée de nombreux chocs illégitimes dus à l'influence du bruit. Dans la logique de la théorie développée par Marr [87], Alvarez et Mazorra [4] ont introduit le filtre 2D suivant :

$$I_t = C_{diff}\, I_{\xi\xi} - F(G_\sigma I_{\eta\eta}, G_\sigma I_\eta) I_\eta \tag{1.43}$$

où $\eta = \eta(x)$ est la direction du gradient de I_g et ξ est la direction orthogonale à η. C_{diff} est une constante de diffusion et la fonction F est donnée par :

$$F(x, y) = \text{sign}(x) \times \text{sign}(y) \tag{1.44}$$

Par l'équation (1.43) l'image est diffusée en chaque pixel suivant la direction orthogonale au gradient ξ. Dans la direction du gradient, η soit le maximum, soit le minimum est diffusé, dépendamment des signes des versions régularisées des deux dérivées $I_{\eta\eta}$ et I_{η}, les contours sont ainsi rehaussés. En régularisant les dérivées, les contours des images rehaussées sont beaucoup plus réguliers.

1.4.8 Les filtres de choc du LIVIA

Remaki et Cheriet [101], [102] ont proposé un filtre de choc pour le rehaussement d'image dont l'équation hyperbolique, à coefficients discontinus, associée à ce modèle est donnée par :

$$\begin{cases} I_t + \mathrm{v}_1(x)F(I_{xx}, I_x)\partial_x \mathrm{v}_2(I(x)) &= 0 \\ I(x,0) &= I_g \end{cases} \tag{1.45}$$

où I_g est une image préalablement régularisée pour respecter les critères de stabilité de l'EDP. F correspond à la fonction de choc, elle contrôle la position où le modèle doit développer des chocs et ainsi rehausser les contours. En général celle-ci correspond à la fonction qui localise les points d'inflexion du signal. v_1 et v_2 sont les fonctions de vitesses : v_1 localise l'intensité de création des chocs spatialement alors que v_2 localise la même intensité dans les niveaux de gris. Le filtre 2D, utilisé pour les images, est le filtre 2D séparable composé du filtre 1D suivant les abscisses et du même filtre 1D suivant les ordonnées. Nous avions développé une extension non séparable de ce filtre [30].

$$I_t(X,t) + \mathrm{v}_1(X).D_{\Theta(X)}\mathrm{v}_2(I(X,t)) = 0 \tag{1.46}$$

où $D_{\Theta(X)}$ correspond à la dérivée suivant le champ de diffusion $\Theta(X)$. Ce dernier est défini comme suit :

$$\Theta(X_{i,j}) = \begin{cases} \theta^1_{i,j} & \text{si} \quad \mathrm{sign}(D_{\theta^1_{i,j}})\mathrm{sign}(D^2_{\theta^1_{i,j}}) > 0 \\ \mathrm{argmin}_{\theta\in[0\ 2\pi]}(|D_\theta I_{i,j}|) & \text{si} \quad \mathrm{sign}(D_{\theta^1_{i,j}+\pi})\mathrm{sign}(D^2_{\theta^1_{i,j}+\pi}) > 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

avec $\theta^1_{i,j} = \mathrm{argmax}_{\theta\in[0\ 2\pi]}(|D_\theta I_{i,j}|)$. Ce filtre a l'avantage de mieux estimer la direction du gradient. La segmentation est donc plus juste. De plus, contrairement aux filtres précé-

dents, la régularisation est faite avant le processus itératif, permettant ainsi une faible régularisation. L'inconvénient de cette EDP est le temps de calcul prohibitif puisqu'à chaque itération le champ de diffusion est calculé en chaque pixel à partir de 128 dérivées directionnelles. Cependant cette partie de l'algorithme est totalement automatique et peut se faire "off line".

1.4.9 Le filtre complexe

Pour éviter le temps de calcul prohibitif dû à la convolution avec la gaussienne (notamment dans notre cas, les images radiographiques sont de tailles conséquentes), Gilboa [60] introduit un filtre de choc à diffusion complexe :

$$I_t = \frac{2}{\pi}\arctan(a\Im(\frac{I}{\theta})|\nabla I| + \alpha I_{\eta\eta} + \tilde{\alpha} I_{\xi\xi}) \tag{1.48}$$

où $\alpha = re^{i\theta}$ est complexe et $\tilde{\alpha}$ est un nombre réel. Comme pour le filtre d'Alvarez-Mazorra, les chocs sont créés aux points d'inflexion de l'image, par contre leur pondération n'est plus uniforme. Ainsi, les points ayant une dérivée seconde importante près du passage au zéro, sont affectés plus rapidement que ceux présents dans des zones relativement régulières. La partie imaginaire de l'image rehaussée correspond à un détecteur de contour. Le premier désavantage de cette méthode est le nombre de paramètres, il y en a quatre. Ceci rend difficile l'optimisation de ce filtre. D'autant plus que a le paramètre d'échelle diffère du paramètre d'échelle du "scale-space" [134][75] et n'est pas très intuitif.

1.5 Les tenseurs structurels

1.5.1 Le tenseur structurel et linéaire

Jusqu'à présent, les structures de l'image sont représentées par l'amplitude du gradient convolué avec une gaussienne comme nous l'avons vu pour la plupart des EDPs présentées précédemment. Weickert propose un nouvel outil en utilisant la matrice semie-définie

positive suivante :

$$H(\nabla I_\vartheta) = \nabla I_\vartheta \nabla I_\vartheta^T \tag{1.49}$$

Cette matrice correspond au Hessien de I_ϑ. Elle est aussi appelée produit tensoriel ou simplement tenseur. Cette dernière étant l'image I convoluée avec la gaussienne G_ϑ^2. A partir de H le gradient de I_ϑ est obtenu en utilisant une décomposition en valeurs et vecteurs propres. Cependant, le Hessien possède l'avantage de pouvoir être régularisé sans tenir compte du signe du gradient. Par exemple, dans le cas d'une fine ligne, les gradients des deux contours ont la même direction mais sont de signes opposés. La régularisation du gradient entraînerait leur annulation mutuelle. Alors que la régularisation, via le tenseur (car il est quadratique, c'est à dire que $H(\nabla I) = H(-\nabla I)$), outre le fait d'éviter cette annulation, permet de glaner l'information sur la direction du gradient appartenant à l'autre contour. Ainsi, au lieu de régulariser directement le gradient, Weickert propose de régulariser le Hessien H puis d'en extraire les vecteurs propres. Cette opération est généralement réalisée par une convolution de chaque canal du Hessien avec le même noyau gaussien G de variation standard ϱ :

$$J_\varrho(\nabla I) = G_\varrho * (\nabla I_\vartheta \nabla I_\vartheta^T) \tag{1.50}$$

$J_\varrho(\nabla I)$ est appelé tenseur structurel. Il fut d'abord proposé simultanément par [11] et [56]. Depuis cet outil a prouvé son rôle important en traitement de l'image et est utilisé dans de nombreuses applications [126][72].

1.5.2 Les EDPs avec tenseur structurel associé

1.5.2.1 La diffusion anisotrope

Weickert a étendu la diffusion anisotrope d'équation (1.34) en y introduisant le tenseur structurel (1.50). Celle-ci prend maintenant la forme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathrm{Div}\big(D \nabla I\big) \tag{1.51}$$

avec pour matrice de diffusion :

$$D = (v_1\ v_2)^T g \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} (v_1\ v_2) \tag{1.52}$$

où v_i est μ_i sont respectivement les vecteurs et les valeurs propres du tenseur structurel (1.50). La valeur propre la plus grande (notée μ_1) correspond à l'amplitude du gradient suivant la direction du plus fort gradient v_1. μ_2 est l'amplitude du gradient suivant la direction v_2 orthogonale à v_1. Dépendamment de la valeur propre μ_i, la diffusion est pénalisée par la fonction de diffusion g (donnée par l'equation (1.35)) suivant les directions v_i.

1.5.2.2 Le Filtre de choc cohérent

Le tenseur structurel peut aussi être utilisé pour la restauration. Ainsi, dans le filtre de Kramer [64], Weickert [131] a remplacé la dérivée seconde $u_{\eta\eta}$ par $v_{\omega\omega}$ où ω est le vecteur propre associé à la valeur propre la plus grande du tenseur structurel $J_\varrho(v)$. Où $v = K_\rho * I$ est une version régularisée de l'image. Ce filtre prend donc la forme suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\text{sign}(v_{\omega\omega})|\nabla I| \tag{1.53}$$

Weickert utilise ce filtre pour le rehaussement cohérent. Ce type de filtrage est utilisé sur certains types d'images (empreintes digitales, peinture,...) notamment pour restaurer les contours manquants ou détruits.

1.5.3 Le Tenseur structurel adaptatif

Ce type de filtrage de la direction du gradient de l'image, quoique plus efficace qu'une simple régularisation par une gaussienne reste tout de même limité. En effet, la régularisation du Hessien, étant isotrope, est réalisée sans tenir compte de l'orientation du gradient. Ainsi aux jonctions en T et dans les coins, la direction du gradient est discontinue, c'est-à-dire que d'un pixel à son voisin la direction du gradient n'est pas forcément la même. En utilisant une régularisation isotrope sur le Hessien, ces discontinuités sont détruites

[20], alors que souvent celles-ci sont des vecteurs d'information très importants pour la compréhension de l'image. Aussi les structures locales de l'image sont détruites.

Quelques travaux utilisent des méthodes adaptatives pour régulariser les tenseurs structurels. Ainsi dans le cadre des statistiques robustes [126], les auteurs proposent de considérer l'erreur suivante :

$$e(x,y) = \|\nabla I(y) - (\nabla I(y)^T \nabla GPI(x))\nabla GPI(x)\| \tag{1.54}$$

où $GPI(x)$ est l'orientation d'une partie de l'image centrée en x. e mesure la distance entre le gradient de I en y et le gradient de la partie centrée en x. Ils cherchent ensuite x qui minimise l'erreur totale régularisée suivante :

$$e(GPI(x)) = \int_\Omega F(e(x,y),m)K_\rho(x-y)dy \tag{1.55}$$

où le noyau K_ρ donne un poids plus important aux pixels y proches de x et $F(.,m)$ est une fonction qui réduit le poids des pixels y dont le gradient est très différent de $GPI(x)$. Le tenseur structurel qui minimise l'erreur (1.55) est donné par :

$$J_\varrho^m(x) = \int_\Omega JF(J,m)^T - \nabla GPI(x)^T(J)\nabla GPI(x))K_\rho dy \tag{1.56}$$

où $J = H(\nabla I(y))$ est défini dans l'équation (1.50). Une schéma itératif du point fixe est utilisé pour trouver le vecteur propre de $J_\varrho^m(x)$. Ce filtrage donne de forts poids aux Hessiens proche du Hessien à régulariser. Ceci le rend local et empêche de glaner de l'information en dehors d'un certain voisinage. Ce filtre dépend aussi de deux paramètres ρ et m. De plus, la minimisation de e peut tomber dans un minimum local. Le choix initial pour $\nabla GPI(x)$ est donc important pour ne pas tomber dans un tel minimum.

Brox [132] propose de considérer une approche non-linéaire. En effet, la régularisation par une gaussienne correspond à une diffusion isotrope d'équation (1.33). Aussi comme nous l'avons évoqué précédemment, les Hessiens sont diffusés isotropiquement sans tenir compte des valeurs de leurs canaux. Brox propose d'utiliser une diffusion non-linéaire,

celle de Perona et Malik donnée par l'équation (1.34). Appliquée aux Hessiens, l'équation (1.34) est étendue par :

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = \text{div}(g(\sum_i |\nabla J_i|^2)\nabla J_i) \tag{1.57}$$

où les J_i correspondent aux canaux de du tenseur (1.50). Le modèle est aussi étendu par une diffusion non-linéaire anisotrope (pour plus de détails voir [20]). L'inconvénient d'un tel modèle est que, pour régulariser les dérivatives, des EDPs faisant appel aux dérivées du Hessien sont utilisées. Ces dernières sont très bruitées, puisqu'elles correspondent aux dérivées secondes de l'image bruitée.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous présentons la revue de littérature sur le filtrage d'images nécessaire pour notre recherche. Dans la première partie de ce chapitre nous nous sommes intéressés au modèle de formation des images radiographiques et aux différentes dégradations auxquelles elles sont exposées. Certaines caractéristiques de ces dégradations peuvent être évaluées. Cette information a priori sera, dans le chapitre suivant, utilisée afin de construire un modèle de débruitage.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux principales approches de débruitage d'images. Les filtres linéaires ont été les premiers filtres utilisés, mais ils dégradent considérablement les contours de l'image. Des méthodes plus récentes préconisent de décomposer l'image bruitée dans une certaine base, telles que les bases d'ondelettes. Les coefficients de projection sont ensuite seuillés pour réduire l'influence du bruit. Enfin nous présentons les modèles adaptatifs basés sur des régressions locales. Parmi ces derniers modèles, le filtre à moyennes non locales offre de fort taux de débruitage par rapport aux autres modèles cités dans cette revue de littérature. Cependant, deux paramètres doivent être ajustés afin d'obtenir la meilleure qualité de débruitage. En comparaison, le seuil des coefficients d'ondelettes est ajusté automatiquement. Ainsi, même si la performance des seuillages par décomposition dans une base d'ondelettes est

moins bonne, les ondelettes sont souvent plus pratiques et plus usitées car cette approche peut être automatique. Dans le prochain chapitre nous proposons d'ajuster automatiquement le premier paramètre du filtre MNL et de réduire considérablement l'influence du second. Nous proposons aussi d'introduire l'information a priori sur les caractéristiques du bruit pour adapter ce filtre au débruitage des images radiographiques.

Dans la dernière partie de cette revue de littérature, nous nous intéressons au filtre de diffusion par EDP. Ces derniers modèles sont très utilisés en traitement de l'image, que ce soit pour le débruitage, la restauration ou bien encore la simplification. Nous n'avons présenté ici que les principales EDP notamment celles utilisées pour rehausser les images. Les tenseurs structurels permettent une meilleure estimation de la direction du gradient de l'image. Imbriqués dans une EDP, ils permettent une meilleure diffusion de l'image. Cependant plusieurs paramètres sont utilisés pour construire un tenseur structurel et ceux-ci sont fixés de manière globale sur l'image. Aussi les tenseurs structurels sont calculés à partir de l'information locale sur le gradient. Or pour des zones texturées, cette information peut-être répétée de manière non-locale et de tels tenseurs structurels n'en tiennent ainsi pas compte. Dans le quatrième chapitre, nous proposerons donc un tenseur structurel automatique basé sur les propriétés non locales de l'image.

CHAPITRE 2

UN FILTRE DE DÉBRUITAGE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons au filtre MNL présenté à la fin de partie sur le débruitage dans le chapitre précédent. Notre choix, s'est porté sur ce modèle pour sa robustesse et pour ses qualités de débruitage par rapport à la plupart des autres méthodes de la revue de littérature. De plus ce filtre peut être aisément amélioré pour accroître ses performances. Il peut aussi être facilement adapté aux images non naturelles, dont les radiographies font partie. Cependant, comme la plupart des techniques basées sur des régressions locales, un paramètre correspondant à la largeur de bande h est nécessaire. Intuitivement, on constate que, plus h augmente et plus l'image est régularisée. Ce paramètre permet donc de contrôler le degré de régularisation du filtre. Pour le filtre MNL, le réglage de ce paramètre est laissé à la discrétion de l'utilisateur. Il est généralement choisi en fonction de la variance du bruit présent dans l'image. Puisqu'un de nos buts principaux est l'automatisation du débruitage, nous allons donc nous concentrer à développer une approche permettant d'ajuster automatiquement ce paramètre. Dans un premier temps, afin de faciliter la compréhension du modèle, nous allons nous intéresser simplement aux images dégradées par un bruit blanc, de distribution gaussienne et homogène sur l'image. Enfin nous verrons qu'il est relativement simple d'étendre le modèle aux images radiographiques.

Le but de tout modèle de débruitage est de réduire la différence entre l'image débruitée $\hat{I}$ et l'image originale $u(i)$, c'est-à-dire dans le cas des modèles à régressions locales, présentés dans la revue de litttérature, de trouver la régression qui minimise la relation suivante : $u(i) - \sum_k w_k^h(i)u(k) - \sum_k w_k(i)\epsilon(k)$. La pondération qui est associée a cette régression locale au pixel i, doit donc minimiser le facteur $var(i) = \sum_k w_k(k)\epsilon(k)$ tout

en gardant $\hat{u}(i) = \sum_k w_k(i)u(k)$ proche de la valeur du pixel original $u(i)$. Le carré de v correspond à la variance du bruit encore présent dans l'image, celui-ci ayant été atténué d'un facteur $\sum_k w_k^2(i)$. Le carré de la différence entre $\hat{u}$ et u correspond à la racine carrée du biais SB. Ce dernier est difficilement estimable puisqu'il nécessite pour le calculer la connaissance de l'image originale u. Néanmoins le biais se traduit visuellement par le flou introduit lors du filtrage. Un bon débruitage consiste donc en un bon compromis entre biais et variance, c'est-à-dire à réduire au maximum le bruit tout en introduisant un minimum de flou. Plusieurs paramètres permettent d'influencer la qualité du débruitage, parmi ceux-ci le bon choix de la caractéristique C ou bien la largeur de bande du noyau sont les plus importants. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons particulièrement à ce dernier paramètre. Intuitivement on constate que plus h augmente et plus la variance var diminue, mais aussi, plus le $biais$ augmente. Le phénomène inverse se produit lorsque h diminue. Dans ce chapitre, nous proposons d'ajuster automatiquement et localement h en fonction de la structure locale de l'image. L'approche proposée estime en chaque pixel le meilleur compromis entre la réduction de la variance du bruit et l'introduction de biais. Le critère utilisé pour réaliser cette estimation est la statistique C_p, introduite par Mallows [83]. Celle-ci estime l'erreur locale entre l'image débruitée $\hat{I}_h$ pour un h donné et l'image réelle u. La méthode de Newton permet de rechercher le paramètre h qui minimise C_p. Cette dernière statistique est souvent utilisée en statistiques en tant que "mesure d'adéquation". Ainsi notre approche permet de mesurer en chaque pixel la qualité du débruitage.

Le biais est principalement introduit par les voisinages échantillons $I(\mathcal{V}(k))$ qui sont très différents du voisinage $I(\mathcal{V}(i))$ du pixel i à débruiter. Nous introduisons aussi dans ce chapitre une régression robuste pour ne pas considérer dans la pondération les voisinages échantillons dont la seule contribution serait l'introduction d'un fort biais. Ces échantillons sont considérés comme des pixels déviants ("outliers" [104]). La robustesse de la régression est obtenue en seuillant la distance L entre les voisinages. Nous obtenons

expérimentalement un intervalle dans lequel le seuil peut être choisi. Cet intervalle est indépendant du bruit.

Dans la suite, nous présentons l'état de l'art sur l'estimation automatique de la largeur de bande dans le domaine des statistiques. Puis nous présentons comment utiliser la statistique C_p pour fixer automatiquement la largeur de bande du filtre MNL pour chaque pixel. Nous suggérons ensuite quelques modifications au modèle afin de le rendre plus robuste aux échantillons très éloignés. La quatrième partie présente les expériences réalisées avec ce nouvel algorithme. Enfin dans la cinquième partie, nous nous intéressons aux images hétéroscédastiques, notamment les radiographies et nous adaptons le filtre MNL pour ce type d'images.

2.2 État de l'art de l'estimation de la largeur de bande

Avant d'aborder la revue de littérature sur l'estimation de la largeur de bande, il est nécessaire de s'intéresser à l'aspect statistique du filtre MNL, afin de mieux comprendre l'influence de h.

2.2.1 Approche probabiliste du filtre MNL

Par souci de clarté nous allons dans la suite utiliser les notations suivantes :

- i est le pixel à debruiter ;
- $\mathcal{N}(j)$ est le voisinage du pixel j. Les niveaux de gris des pixels k dans $\mathcal{N}(j)$ sont utilisés pour débruiter le niveau de gris de i. Ces pixels sont appelés pixels échantillons. Le nombre d'échantillons dans $\mathcal{N}(i)$ est fixé à n ;
- $x_i = I(\mathcal{V}(i))$ est le motif composé des niveaux de gris des pixels dans $\mathcal{V}(i)$;
- $X_k = I(\mathcal{V}(k))$ sont les motifs échantillons composés des niveaux de gris des pixels dans $\mathcal{V}(k)$.

Considérons la densité gaussienne K_h de variance h. Nous notons par $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(i)$ le poids assigné au pixel $k \in \mathcal{N}(i)$ pour débruiter i en utilisant le filtre MNL avec un paramètre h. La sortie de ce filtre peut s'écrire :

$$\hat{I}_{\mathcal{N}(j),h}(i) = \sum_{k \in \mathcal{N}(j)} w_k^{\mathcal{N}(j),h}(i) I(k) = \frac{\sum_{k \in \mathcal{N}(j)} K_h(x_i - X_k) I(k)}{\sum_{k \in \mathcal{N}(j)} K_h(x_i - X_k)} \tag{2.1}$$

Pour le filtre MNL original, i et j sont les mêmes. Cependant, nous aurons besoin de faire cette distinction dans les prochaines sections. Les notations de l'équation (2.1) étant lourdes, nous utiliserons dans la suite $\hat{I}_h(i)$ à la place de $\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(i)$ et $w_k^h(i)$ pour $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(i)$. En utilisant un estimateur de Parzen-Rosenblatt, l'équation (2.1) peut se réécrire :

$$\hat{I}_h(i) = \frac{\sum_k f_n(x_i, X_k) I(k)}{\sum_k f_n(X_k)} \tag{2.2}$$

où $f_n(X_1, X_2)$ est une estimation de Parzen-Rosenblatt de la distribution de probabilité jointe de deux motifs X_1 et X_2 donnée par :

$$f_n(X_1, X_2) = \frac{1}{n^2 h} K\left(\frac{L(X_1 - X_2)}{h}\right) \tag{2.3}$$

et l'estimation de la distribution de probabilité f des voisinages est $f_n(x_i) = \sum_k f_n(x_i, X_k)$. Ainsi d'un point de vue probabiliste, le filtre MNL est un estimateur de Nadaraya-Watson [90], qui correspond à une régression locale constante. Cette dernière converge vers $\mathbb{E}[u(i)|x_i$. Ainsi le filtre MNL estime l'espérance du niveau de gris $I(i)$ sachant le voisinage bruité x_i par rapport aux observations des échantillons X_k dans $\mathcal{N}(i)$. La qualité de l'estimation de cette espérance dépend de la précision de la densité estimée f_n. Deux paramètres influencent la qualité de cette distribution. Le premier est le nombre d'échantillons n, plus celui-ci est élevé meilleure est l'estimation. Mais en contre partie, plus le temps de calcul augmente. L'autre paramètre h contrôle le degré de régularisation. En effet, pour un nombre donné d'échantillons n :

- lorsque h est petit, l'estimation f_n de f varie rapidement et est très attachée aux données d'observation $I(X_k)$. Si celles-ci sont bruitées et que h est sous-estimé, alors f_n est une estimation bruitée de f. Néanmoins, le biais entre f_n et f est négligeable ;

– à l'opposé lorsque h est grand, l'estimation f_n varie doucement et sera beaucoup moins attachée aux données d'observation. Si les observations sont bruitées, alors le bruit n'affectera que faiblement f_n, néanmoins le biais entre f et f_n sera relativement important. Surtout au niveau des pics de la distribution.

La largeur de bande optimale h offre le meilleur compromis entre le biais et la variance de l'estimateur de densité par noyau.

2.2.2 Largeur de bande globale

Le choix de la largeur de bande a été largement traité dans la littérature statistique [128]. Parmi les méthodes les plus connues, les approches par "insertion" ("plug-in") [65] sont très utilisées. Cette approche consiste à estimer $f(x)$ la densité de probabilité des échantillons observés en approximant le biais par un développement de Taylor. Cette estimation $\hat{f}_n$ est ensuite injectée dans une mesure de "qualité de l'ajustement" correspondant à une distance entre la densité estimée $\hat{f}_n(x)$ et la densité originale $f(x)$. La mesure la plus classique est l'intégrale de l'erreur moyenne carrée (MISE). Celle-ci peut se décomposer en la somme de la variance et du biais au carré :

$$MISE = \int \mathbb{E}((f - \hat{f}_n)^2)dx = \int Biais(\hat{f}_n)^2 dx + \int Var(\hat{f}_n)dx \tag{2.4}$$

D'après le MISE, la largeur de bande optimale h minimise l'égalité précédente. En utilisant un développement de Taylor de f, on obtient [43] :

$$h_{\text{opt}} = \left(\frac{Cste}{n \times \int f''(x)^2 dx} \right)^{1/5} \tag{2.5}$$

où $Cste$ est une constante dépendant du noyau K. $f''(x)$ est estimée en utilisant la dérivée seconde du noyau K et une largeur de bande pilote . Néanmoins cette approche souffre de plusieurs défauts. Le premier est que les méthodes par "insertion" déplacent le problème de sélection d'une bonne largeur de bande h à celui d'une bonne estimation des largeurs pilotes nécessaires à l'estimation initiale de $f''(x)$. Ainsi si elle est sous-estimée, alors

f ne sera pas assez régularisée et donc f'' sera surestimée. Il en résultera que h sera à nouveau sous-estimée. Une bonne estimation de h est donc grandement dépendante du choix du paramètre pilote. Ce résultat est inversement identique pour un paramètre pilote sur-estimé.

2.2.3 Adaptation locale de la largeur de bande

Le paramètre h peut aussi être adapté localement pour permettre une meilleure estimation de la densité f. La méthode du noyau variable permet d'utiliser une largeur de bande variable pour mieux estimer la fonction de densité. Ainsi, en permettant différents degrés de régularisation, le biais peut être réduit dans les régions présentant des pics et la variance du bruit dans les régions uniformes. Ainsi les variations de la largeur de bande doivent dépendre des caractéristiques de la densité. La méthode du plus proche voisin harmonise h avec la distance au $k$ième plus proche échantillon. Loftsgaarden et Quese [78] proposent d'utiliser $h_x = hd_k(x, X_i)$ alors que Breiman, Meisel et Purcell [17] introduisent $h_j = hd_k(X_j, X_i)$. Le premier estimateur est souvent appelé estimateur ballon. Alors que celui-ci est asymptoticallement le meilleur (d'un point de vue MISE) l'autre est un estimateur de densité "bona fide". Cependant ces estimateurs sont bruités et dépendent trop des données. Plus tard, Abramson [1] proposa une autre adaptation locale de la largeur de bande de la forme : $h_i = h/\sqrt{f(x_i)}$, où f est estimée avec la méthode des noyaux avec une largeur de bande h_{opt} optimale sur l'ensemble de la distribution. L'argument en faveur d'un tel estimateur est le $\mathcal{O}(h^4)$ du biais local qui est largement inférieur au $\mathcal{O}(h^2)$ pour une largeur de bande fixe. Toutefois, Terrell et Scott [123] ont montré que dans certains cas, cet estimateur performait moins bien qu'en utilisant une largeur de bande globale.

Pour une description plus complète des méthodes d'estimation par noyaux variables, nous incitons le lecteur à se référer au livre [128]. La littérature statistique est très riche sur ce point et encore très active [10] [99][18]. Mais, toutes ces méthodes bien qu'aussi utilisées

dans le cadre de régression [55][108], le sont surtout pour l'estimation de densités de probabilités [85][128].

2.2.4 D'autres modèles basés sur la comparaison de régressions

Comme nous l'avons vu précédemment, la littérature statistique est fournie en méthodes pour ajuster automatiquement la largeur de bande. Mais, dans le même temps, aucune d'elles ne semble satisfaisante. Toutes tentent de fournir une meilleure estimation de la fonction de densité f mais aucune ne s'intéresse à l'estimation de régressions locales. Aussi, certaines sont déjà connues comme étant trop bruitées.

Néanmoins la même décomposition entre biais et variance du MSE (erreur moyenne carrée) permet d'estimer le paramètre h_{opt} pour une régression I. Le paramètre h_{opt} satisfait :

$$h_{opt} = \left(\frac{\sigma^2 Cste}{nf(x)I''(x)^2} \right)^{1/5} \tag{2.6}$$

où $Cste$ est une constante. Ce critère est souvent utilisé dans une approche par insertion [65], où I et f sont d'abord estimées avec une largeur de bande pilote, puis ensuite introduites dans l'équation (2.6). Or, comme nous l'avons vu, avec l'approche par insertion, le problème d'estimation de h est décalé au problème d'estimation de la largeur pilote.

D'autres modèles [32][77] permettant de comparer des régressions entre elles, ont été développées tels que la GCV (validation croisée généralisée) [38], la LCV (validation croisée sur la vraisemblance), l'AIC (critère d'information de Akaike) [2], ou encore la statistique C_p [81]. Ces derniers modèles permettent de comparer des régressions avec des degrés et des largeurs de bande différents. Dans la suite nous nous intéresserons à la statistique Cp. En effet cette dernière statistique nécessite la connaissance a priori de la variance σ^2 du bruit. Or celle-ci peut être obtenue de façon "relativement robuste" suivant les niveaux de gris (voir section estimation du bruit). Enfin la C_p peut être facilement étendue aux données hétéroscédastiques[77] et multivariées (par exemple les tenseurs).

2.2.5 Largeur de bande locale dans des modèles de traitement de l'image

Bien que les régressions sont très utilisées en statistique et dans ses diverses applications ([97] [121]), elles commencent seulement à être utilisées en imagerie, pour la segmentation [36],[115], pour la simplification d'images [45] ou bien aussi pour le débruitage [68] et la reconstruction [122]. Certaines utilisent des largeurs de bande adaptatives. Dans [37], les auteurs utilisent le modèle d'Abrahamson (présenté plus haut) à des fins de segmentation. Le désavantage de cette méthode est qu'il est nécessaire d'utiliser une largeur de bande pilote pour obtenir une première estimation de f. Ainsi [115] utilise alors comme première estimation de f, celle qui minimise la borne supérieure de $AMISE$. Dans [122] les auteurs suivent [114] et sélectionnent donc h à partir de la fonction de densité f par une approche par insertion. Dans [58], les auteurs utilisent une validation croisée, cependant un tel critère est très coûteux et est généralement considéré comme trop bruité [77]. Finalement, dans [68], la largeur de bande au pixel i correspond à $\frac{Cste}{\text{var}(\hat{I}_h(i))}$. Où $Cste$ est une constante déterminée automatiquement et $\text{var}(\hat{I}_h(i))$ est la variance d'une première estimation au pixel i. Pour cette approche, une borne supérieure du biais, proportionnelle à la variance de l'estimateur, est utilisée pour obtenir une borne supérieure $MISE^+$ de $MISE$ [14]. La largeur de bande sélectionnée minimise cette borne supérieure. De ce fait, cette approche sélectionne la plus grande largeur de bande dans l'ensemble de celles qui introduisent un biais en dessous d'un certain risque. D'après [32], cette largeur de bande permet, d'une façon simple, d'améliorer l'estimation $\hat{I}_h$ de I, mais elle n'est pas optimale et surtout, elle dépend de la qualité de la première estimation faite avec h. Aussi, ce n'est pas un choix optimal pour h. En utilisant la loi de Lepski, le nombre d'échantillons n est optimisé conjointement. Toutefois cette approche est basée sur différentes hypothèses, telle que l'indépendance entre les estimations avec des nombres différents d'échantillons et la compacité du support du noyau. De plus, bien que cette approche originale donne des résultats satisfaisants, elle n'est conçue que pour une régression constante locale. Enfin, en utilisant une régression robuste, l'optimisation de n, le nombre d'échantillons, n'est plus

nécessaire, puisqu'une augmentation de ce paramètre n'impliquera pas d'augmentation du biais.

2.3 Détection automatique de la largeur de bande pour le filtre MNL

2.3.1 La statistique C_p de Mallows

Comme nous l'avons vu précédemment la littérature statistique est fournie en méthodes pour ajuster automatiquement la largeur de bande. Parmi elles, nous avons choisi la statistique C_p pour plusieurs raisons. Premièrement, cet outil est bien adapté pour les régressions. Deuxièmement, il utilise la connaissance de la variance du bruit, qui peut être estimée robustement en imagerie. Enfin, parce qu'un de nos buts principaux est de généraliser la méthode aux images dégradées par un bruit multiplication (images hétéroscédastiques) la statistique C_p pouvant être aisément modifiée pour opérer avec cette spécificité des images. Aussi, la statistique C_p ne se limite pas seulement aux régressions constantes localement et pourrait être étendue à des degrés supérieurs de régression [77].

Mallows recommande une mesure d'"erreur carrée totale", mieux connue sous le nom de statistique C_p. Cette statistique est habituellement utilisée pour comparer entre elles des régressions de degrés et de largeurs de bandes différentes. Nous l'utilisons ici seulement pour déterminer la meilleure largeur de bande pour une régression constante localement.

En chaque pixel i, C_p donne une estimation de l'erreur totale entre le motif original $u(\mathcal{N}(i))$ et sa version débruitée $\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(i)$. Cette erreur peut être décomposée entre le biais carré SB et la variance de l'estimateur :

$$C_p(\hat{I}_h(i)) = \frac{1}{\sigma^2}\big(S\hat{S}B(i) + \sum_j \mathrm{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))\big) \tag{2.7}$$

La somme sur $\mathcal{N}(i)$ des biais carrés est donnée par :

$$SSB(i) = \sum_{j\in\mathcal{N}(i)} \big(u(j) - \mathbb{E}\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)\big)^2 \tag{2.8}$$

Il vient aisément que :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2 = SSB(i) + \sum \text{var}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)) \tag{2.9}$$

Lorsque le voisinage $\mathcal{V}$ est choisi adéquatement (voir [77] pour plus de détails) :

$$SSB(i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2 - \sigma^2\big(n - \sum_{j}(2w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j) + \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2)\big) \tag{2.10}$$

Mallows utilise l'approximation du biais suivante :

$$\hat{SSB}(i) = \sum_{j=1}^{n}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2 - \sigma^2\big(n - \sum_{j}(2w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j) + \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2)\big) \tag{2.11}$$

En remarquant que $\text{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i)h}(j)) = \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2$, la forme finale de C_p est donnée par [77] :

$$C_p(\hat{I}_h(i)) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2 - n + 2 \times \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j) \tag{2.12}$$

$\nu = \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2$ correspond à la généralisation du degré de liberté, c'est-à-dire au nombre de paramètres p de la régression. Cette formulation de C_p est simple et attractive, seulement dans la prochaine section, nous montrons que cette équation ne peut être utilisée avec le filtre MNL originale. Nous proposons alors d'utiliser des voisinages échantillons différents pour obtenir une meilleure estimation de la somme des biais carrés.

2.3.2 La statistique C_p pour le filtre MNL

Dans le filtre MNL, chaque voisinage échantillon X_k utilise son pixel central $I(k)$. Ainsi, en utilisant l'équation (1.32), ce dernier pixel est utilisé pour calculer le poids $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)$. $I(k)$ et $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)$ sont alors dépendants. De plus, si comme dans [22], la norme utilisée L favorise le pixel central de chaque motif X_k, alors la dépendance entre $I(k)$ et $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)$ est d'autant plus forte. Cependant dans le calcul de $\mathbb{E}\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)$, le poids $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)$ et le pixel I_k sont supposés être indépendants. En effet dans (2.10), cette espérance est calculée

comme suit :

$$\mathbb{E}\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j) = \mathbb{E}\sum_k w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)I(k) = \sum_k w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)\mathbb{E}I(k) = \sum_k w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)u(k) \tag{2.13}$$

Ainsi en utilisant les voisinages échantillons du MNL, l'estimation de $\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)$ est souvent différente de $\mathbb{E}\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)$. De la même manière, le terme $(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2$ est un mauvais choix pour estimer $\mathbb{E}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2$, ainsi dans l'équation (2.10), $S\hat{S}B$ est une mauvaise estimation du bais carré réel SSB.

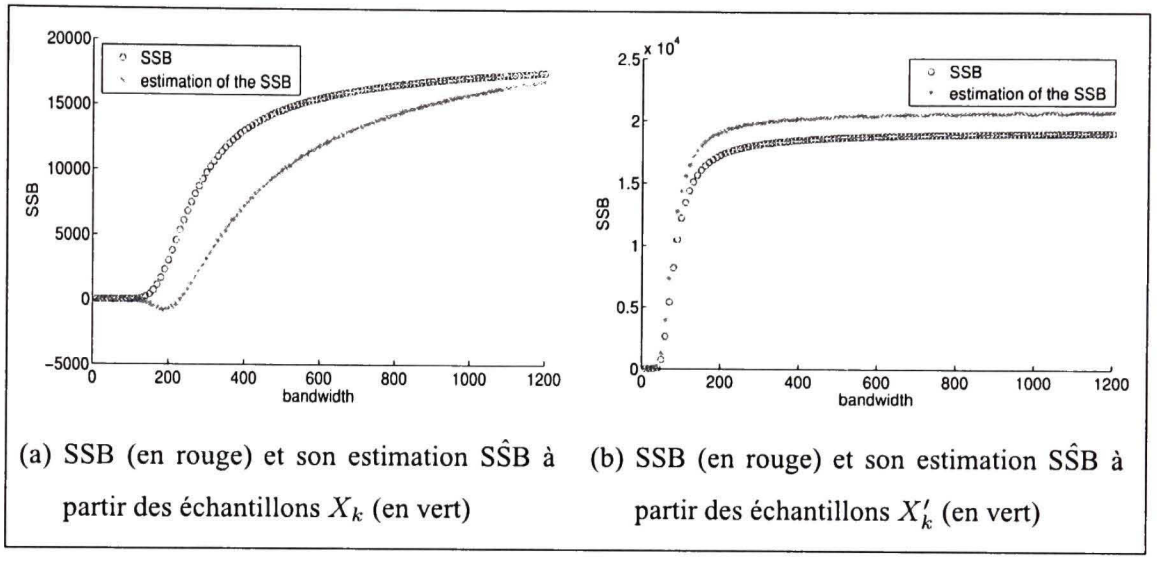
Pour calculer la statistique C_p, nous proposons d'utiliser des voisinages échantillons différents de ceux utilisés par le filtre MNL dans [22]. Nous considérons donc le voisinage suivant :

$$X'_k = X_k \backslash I(k) \tag{2.14}$$

Ces derniers voisinages caractérisent moins bien les pixels originaux $u(k)$ que les voisinages X_k. Mais, ils ont l'avantage de rendre les poids $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)$ indépendants de $I(k)$. La Figure 2.1 montre que, avec les nouveaux échantillons X'_k, le SSB (la somme des biais carrés) est mieux estimé. Puisque dans le suite nous allons chercher le minimum de C_p, il est important que le SSB et son estimation aient la même la forme. avec les nouveaux échantillons, la forme de l'estimation du SSB est beaucoup plus proche de celle du SSB.

Nous utilisons le voisinage échantillon X'_k pour calculer la statistique C_p et pour obtenir une bonne estimation h^* de la largeur de bande optimale. Toutefois, comme l'information la plus importante sur le niveau de gris de $u(k)$ est évidemment contenue par $I(k)$, ce dernier doit être utilisé dans le débruitage. Ainsi, nous utilisons X'_k seulement pour obtenir l'estimation h^*. Puis dans l'étape de débruitage, nous calculons les poids $w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)$ sur les voisinages X_k avec la largeur de bande h^*. En statistiques, C_p est utilisée en tant qu'outil graphique pour déterminer quelle régression s'ajuste le mieux aux données [41][77]. Les statistiques C_p des régressions qui admettent peu de biais tendent à s'agglomérer autour de $CP(\hat{I}_h(i)) = \sum_j \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2$. Sur cette considération, la meilleure régression est celle

qui vérifie $CP(\hat{I}_h(i)) \approx \sum_j \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2$ avec le plus petit degré de liberté $\|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2$. Toutefois, ce choix est visuellement subjectif et difficilement automatisable. De plus, il semble meilleur d'accepter un peu de biais pour obtenir une erreur plus petite du fait de la décroissance de la variance de la régression.



(a) SSB (en rouge) et son estimation $\hat{\text{SSB}}$ à partir des échantillons X_k (en vert)

(b) SSB (en rouge) et son estimation $\hat{\text{SSB}}$ à partir des échantillons X'_k (en vert)

Figure 2.1 Estimation de la somme des biais carrés (SSB) avec différents voisinages échantillons.

2.3.3 Minimisation de C_p

Dans la suite, pour un pixel donné i, nous noterons $C_p(h)$ pour $C_p(\hat{I}_h(i))$.

Nous avons opté pour la méthode de Newton plutôt qu'une autre méthode d'optimisation (par exemple la descente de gradient le plus fort, la méthode de Levenberg-Marquardt [86]) pour sa vitesse de convergence qui est quadratique. Elle converge rapidement vers le minimum, particulièrement lorsque le point d'initialisation en est proche. La largeur de bande h est ainsi mise à jour à chaque itération à partir de l'équation suivante :

$$h_{t+1} = h_n - \gamma \frac{\partial C_p(h_t)}{\partial h} \times \left| \frac{\partial^2 C_p(h_t)}{\partial h^2} \right|^{-1} \tag{2.15}$$

Où | . | correspondant à la valeur absolue, est utilisée pour forcer la convergence vers un minimum et non seulement vers un extremum. τ est un coefficient permettant de modifier le pas, il est initialement fixé à un.

Les dérivées de C_p sont obtenues en i par :

$$\frac{\partial C_p(h)}{\partial h} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_j -(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))\frac{\partial \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h} + 2 \times \sum_j \frac{\partial w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2 C_p(h)}{\partial h^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_j \left((\frac{\partial \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h})^2 - (I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))\frac{\partial^2 \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h^2} \right) + 2 \times \sum_j \frac{\partial^2 w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h^2} \tag{2.17}$$

Avec :

$$\frac{\partial \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h} = \sum_k \frac{\partial w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h} \times I(k) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h^2} = \sum_k \frac{\partial^2 w_k^{\mathcal{N}(i),h}(j)}{\partial h^2} \times I(k) \tag{2.18}$$

Le comportement du C_p en fonction de h dépend des données et est difficilement prévisible. Cependant, sur un grand nombre de données, il a présenté à chaque fois une forme régulière et avec un unique minimum. Pour assurer la convergence de la méthode de Newton, qui n'est pas toujours stable, nous avons utilisé la condition d'Armijo [91].

2.3.3.1 Pour augmenter la rapidité de l'algorithme

Le nombre d'itérations de la méthode de Newton est le principal facteur de consommation du temps de calcul de l'algorithme. Nous avons constaté une moyenne de 7 itérations par pixel. Pour réduire le temps de calcul, on peut, par exemple essayer d'initialiser la méthode de Newton avec un h le plus proche possible de la solution finale. Premièrement, à l'initialisation, nous avons fixé $h = 0.8\sigma^2$. Tout simplement parce que nous avons remarque que la largeur de bande globale et optimale pour les images se trouvait souvent entre $0.5\sigma^2$ et σ^2. Deuxièmement, puisque entre deux pixels adjacents, seuls quelques pixels échantillons sont différents. Les largeurs de bande optimales pour ces pixels doivent être proches. Ainsi pour tous les pixels, excepté le premier, l'algorithme est initialisé avec la largeur de bande optimale du pixel précèdent.

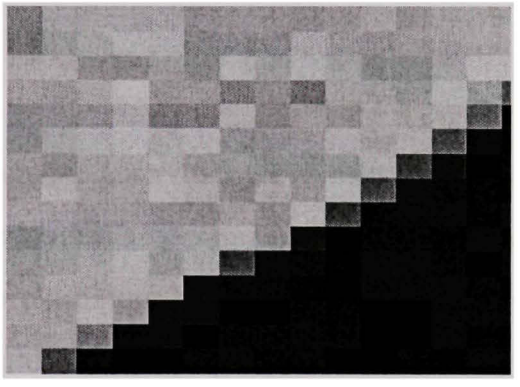
Une image comporte souvent des régions uniformes (niveaux de gris constants). Pour ces zones, la meilleure pondération est la pondération moyenne, c'est-à-dire le même coefficient $\frac{1}{n}$ pour chaque échantillon. Néanmoins cette pondération n'est atteinte que lorsque $h \to \infty$. Ces pixels consomment beaucoup de temps de calcul, de plus il se peut que Newton ne converge pas pour eux. Il semble donc intéressant d'identifier les pixels appartenant à ces régions avant d'utiliser la méthode de Newton et leur appliquer un filtre moyenneur, ceci correspond à utiliser le filtre MNL avec $h = \infty$. Pour ce faire, pour chaque pixel i, la densité des pixels dans le voisinage de $\mathcal{N}(i)$ est comparée à la densité du bruit (lorsque celle-ci n'est pas connue, on la considère comme gaussienne). Cette comparaison peut être réalisée par le test de Kolmogorov-Smirnov [53].

2.3.4 Segmentation robuste sur les échantillons

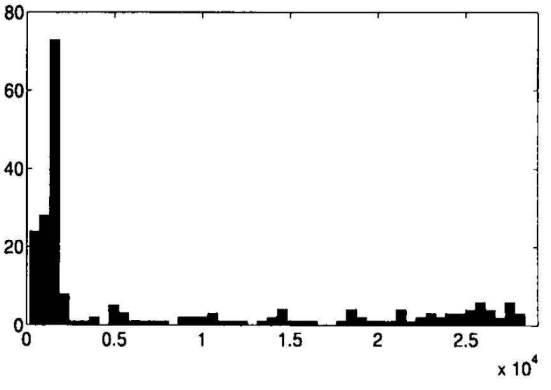
Dans l'ensemble des voisinages échantillons X_k utilisés pour débruiter le niveau de gris $I(i)$, certains sont souvent très différents du voisinage x_i du pixel i à débruiter. Ils décrivent des motifs qui sont différents de celui dans le voisinage de i, ils apportent donc peu d'information sur le pixel original $u(i)$. Ils sont considérés comme des échantillons déviants (outlier) [104]. Avec le filtre MNL, leur distance $L(X_k, x_i)$ à x_i est donc grande et leur coefficient de pondération petit ; ils n'influencent que très faiblement le débruitage du pixel. Cependant, il se peut que le nombre de ces voisinages devienne important et qu'ils forment la majorité des échantillons. La somme totale de leurs influences n'est plus négligeable et peut influencer le débruitage. En effet, parce qu'ils représentent des motifs très différents, ils introduisent un biais important et contribuent grandement à l'erreur de l'estimation. Mais aussi, par l'introduction de ce biais, ils influencent le choix de la largeur de bande. Souvent une petite largeur de bande est choisie lorsque le nombre d'échantillons déviants est grand. Dans ces cas, la force de débruitage est médiocre au mieux.

Par exemple, la Figure 2.2(b) présente l'histogramme des distances $L(x_i, X_k)$ entre le voisinage échantillon x_i du pixel central de la Figure 2.2(a) et les voisinages échantillons

X_k des autres pixels de la partie de l'image Figure 2.2(a). Les pixels intéressants, pour le débruitage du pixel central, sont ceux dont la distance L est relativement petite (dans notre exemple inférieure à 300). Or ils représentent une minorité des pixels. On remarque ensuite deux lobes principaux, l'un à 800 et l'autre à 1800, correspondant à la distance avec les pixels dont le voisinage est uniquement gris clair et ceux dont le voisinage est uniquement gris très foncé. Ces deux lobes représentent la grande majorité des distances L. Ces échantillons ne sont pas désirés dans le débruitage, puisque leur voisinage est trop différent de celui du pixel à débruiter et qu'ils introduisent un biais. En considérant seulement les bons pixels, ce biais et donc le flou associé sont réduits. Un seuil convenable sur la distance L permet de différencier les pixels convenables des autres.



(a) Un voisinage bruité



(b) L'histogramme de la distance du pixel central aux autres pixels échantillons

Figure 2.2 La Figure (b) présente l'histogramme entre le voisinage du pixel central et les voisinages des autres pixels de (a).

Pour trouver un tel seuil, nous proposons d'étudier dans un premier temps les statistiques de la mesure L entre deux voisinages échantillons. Dans [22], L est défini par :

$$L(X_i, X_k) = G * (X_i - X_k)^2 \tag{2.19}$$

Où G est une fenêtre gaussienne de la même taille que les voisinages. Chaque voisinage X_I peut être décomposé entre sa partie réelle T_i et le bruit $\sigma\epsilon_i$. L'espérance suivante est

facile à mettre en évidence :

$$\mathbb{E}L(X_i, X_k) = G * (T_i - T_k)^2 + 2\sigma^2 \times \sum_j G^2(j) \tag{2.20}$$

et la variance de la distance vient de :

$$\text{var}L(X_i, X_k) = \mathbb{E}\text{var}L(X_i, X_k|\epsilon_i) + \text{var}\mathbb{E}L(X_i, X_k|\epsilon_i) \tag{2.21}$$

Où :

$$\mathbb{E}\text{ Var } L(X_i, X_k|\epsilon_i) = 6\sigma^4 \times \sum_j G^2(j) + 4\sigma^2 \sum_j G^2(j) * (T_i(j) - T_k(j))^2$$

Et :

$$\text{Var } \mathbb{E}\ L(X_i, X_k|\epsilon_i) = 4\sum G^2(j) * (T_i(j) - T_k(j))^2 + 2\sigma^4 \times \sum_j G^2(j)$$

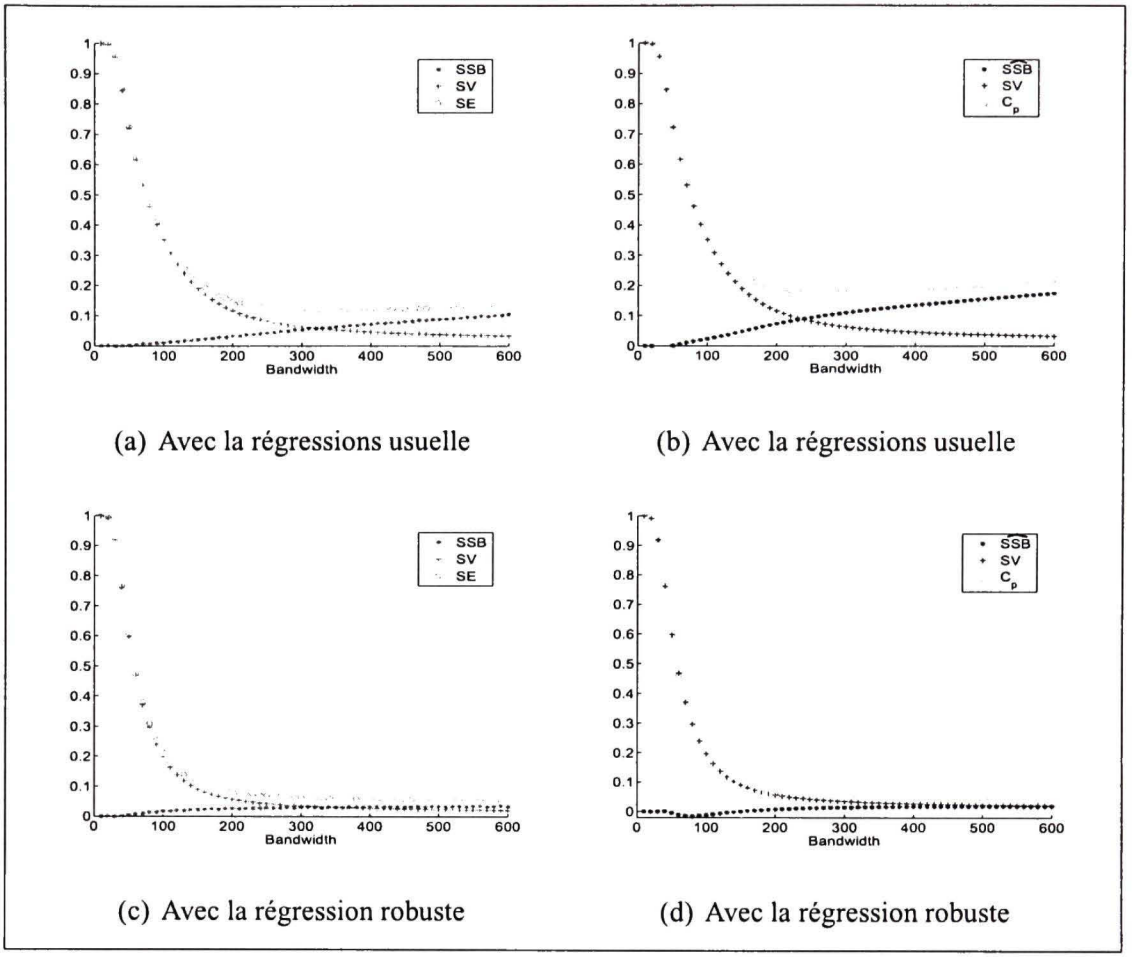
La densité de la distance L est donc dépendante de la variance du bruit et de la distance entre les vrais voisinages T_i et T_k. Afin d'obtenir une formule simplifiée, nous utilisons l'approximation $(T_i(j) - T_k(j)) = \text{mean}_k(T_i(j) - T_k(j)) = d_{ik}$. Alors une meilleure façon d'écrire $L(X_i, X_k)$ est $\mathcal{L}(d_{ik}, \sigma)$. Pour seuiller $\mathcal{L}$ nous devons choisir une valeur raisonnable T_d. Si d_{ik} est supérieure à cette valeur alors le pixel j ne doit pas influencer le débruitage de i. Dans la section des expériences, nous avons obtenu un bon intervalle dans lequel choisir T_d. Finalement le seuil $Thresh$ de L doit être robuste au bruit, puisque $\mathcal{L}$ dépend de σ. La probabilité que $\mathcal{L}(T_d, \sigma)$ soit supérieure à $Thresh(T_d) = \mathbb{E}L + 2\sqrt{\text{var}L}$ est petite. Nous prenons cette dernière valeur pour seuil robuste. Elle permet de supprimer les pixels qui ne contribueraient pas beaucoup dans le débruitage. La statistique C_p est donc calculée sur $\mathcal{N}_{r,T_d}(i) = \{j \in \mathcal{N}(i)|L(X_k, x_i) < Thresh(T_d)\}$.

La Figure 2.3 montre l'influence de la régression robuste sur le biais et sur la statistique C_p. Pour différentes largeurs de bande, nous avons débruité le pixel central $I(i)$ de la Figure 2.2(a) avec la régression usuelle (Voir Figure 2.3(a) et Figure 2.3(b)) et avec la régression robuste où la valeur de T_d a été choisie à 40.0 (Voir Figure 2.3(c) et Figure 2.3(d)). Pour

chaque largeur de bande, nous calculons le SSB, la somme de la variance $\mathrm{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))$ de l'estimateur et la somme des deux quantités (SE). Nous avons aussi estime le SSB et calcule la statistique C_p. Nous avons normalisé les differentes quantités pour pouvoir comparer les deux régressions. Nous pouvons aussi voir qu'en utilisant la régression robuste, nous réduisons grandement le SSB. Les formes du C_p et du SE sont modifiées. Le minimum de SE survient pour une grande largeur de bande, sa valeur est aussi plus petite. La qualité du débruitage est alors meilleure lorsque la régression robuste est utilisée. Sur la Figure 2.3(d), l'estimation du SSB produit un petite oscillation pour les premières largeurs de bande. Celle-ci est due à la différence entre la variance du bruit sur toute l'image et la variance du bruit dans le voisinage $\mathcal{N}(i)$. Mais cette petite oscillation n'affecte jamais la forme de C_p. Enfin la régression robuste permet de minimiser l'influence du paramètre n correspondant au nombre d'échantillons utilisés pour la régularisation de chaque pixel. En effet, sans régression robuste, un nombre n élevé introduit beaucoup de pixels éloignés du pixel à débruiter et réduit ainsi la qualité du débruitage. Alors qu'avec une régression robuste, seul les pixels ayant un voisinage proche de celui à débruiter sont considérés. Ainsi lorsque n augmente, seul le nombre d'échantillons bons pour le débruitage croît, ce qui affine la qualité de l'image débruitée. Cependant en augmentant n, le temps de calcul augmente (en fonction de n^2). Ce paramètre doit donc être ajusté en fonction de la qualité versus, le temps de calcul désiré.

2.3.5 Quel coefficient pour I_i

Le pixel I_i est le plus représentatif du pixel original u_i, il doit donc est absolument considéré dans la pondération (2.1). Mais quel poids lui attribuer ? En effet, sa distance à lui-même est nulle et donc en suivant la définition (1.32), son poids serait de $\frac{1}{\|K\|}$. Malheureusement, un tel poids écraserait celui des autres échantillons (puisque leur somme est normalisée à 1), d'autant plus lorsque la largeur de bande est petite. Un tel débruitage serait alors de piètre qualité.



(a) Avec la régressions usuelle

(b) Avec la régressions usuelle

(c) Avec la régression robuste

(d) Avec la régression robuste

Figure 2.3 Le SSB normalisé, la somme des variances estimées SV $= \sum_j \mathbf{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))$, et la somme des deux SE, pour différentes largeurs de bande. Figures (b) et (d) montrent l'estimation du SSB normalisé et la statistique C_p.

Étant donné que le voisinage échantillon $\mathcal{N}(i)$ est le plus important, on doit lui attribuer le poids le plus important. Buades [22] propose de lui attribuer la valeur maximale des autres poids : $\max_j w_j$ et de renormaliser la pondération en tenant compte du nouveau coefficient. Cependant, dans certain cas, notamment les coins, les voisinages échantillons X_k peuvent être tous éloignés de x_i. En utilisant, la pondération précédente, on attribue donc à $I(i)$ le poids d'un échantillon éloigné (son influence est donc réduite dans la pondération), pire en renormalisant on augmente ainsi l'influence des échantillons éloignés. Par exemple, celui avec la valeur maximum sera considéré comme un échantillon proche. Ainsi lors du débruitage l'image est flouée dans les coins.

Notre approche consiste à considérer le voisinage échantillon X_i comme étant différent du voisinage x_i de i. Si X_i et x_i sont supposés être deux versions bruitées du même motif original, alors l'équation (2.20) permet de dire que $\mathbb{E}L(X_i, x_i) = 2\sigma^2$. Nous attribuons donc à I_i le poids $\max\left(\frac{e^{-\sigma^2/h}}{2\pi}, max_j w_j\right)$. Ainsi, nous lui attribuons le poids maximal tout en nous assurant qu'il est suffisamment élevé pour ne pas être pris pour un échantillon trop éloigné.

La combinaison de cette réévaluation de la pondération ainsi que la robustesse de la régression utilisée permettent de réduire nettement le biais dans certaines zones de l'image.

2.3.6 Une mesure d'adéquation

En statistique, l'adéquation ("goodness of fit") représente le degré d'ajustement du modèle sur les observations. La statistique C_p est souvent considérée comme une bonne mesure d'adéquation. En effet, puisque $\mathbb{E}S\hat{S}B = SSB$, on obtient que $\mathbb{E}C_p = \frac{1}{\sigma^2}\big(SSB(i) + \sum_j \mathrm{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))\big) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_j (u(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2$. Lorsque le biais est nul, $\mathbb{E}C_p = \nu$. Ainsi en minimisant la statistique C_p nous cherchons le modèle d'image qui s'ajuste le mieux à l'image originale u. Cette mesure est fiable dès lors qu'elle consiste en une estimation de la qualité du débruitage en chaque pixel. Comme le débruitage est souvent utilisé en pré-traitement, les pixels considérés comme bien débruités (par la C_p) peuvent avoir une contribution plus importante dans les processus ultérieurs. En utilisant une régression robuste sur les échantillons tel que précédemment, la mesure d'adéquation n'est plus homogène sur toute l'image puisque d'un pixel à un autre le nombre d'échantillons est différent. Effectivement, la C_p consiste en une somme sur tous les échantillons $j \in \mathcal{N}_{r,d}(i)$, et est donc dépendante du cardinal de $\mathcal{N}_{r,d}(i)$. Nous proposons donc pour une telle régression, le mesure d'adéquation suivante :

$$M_a = \frac{C_p(\hat{I}_h(i))}{n(i)} \tag{2.22}$$

où $n(i)$ est le nombre d'échantillons utilisés pour le débruitage du pixel i. Cette nouvelle mesure permet de comparer tous les pixels de l'image avec la même mesure d'adéquation.

2.4 Expériences sur des images avec un bruit additif

Pour toutes les expériences, les niveaux de gris des images sont dans l'intervalle [0 255]. La taille des motifs X_k est fixée à 7×7 et la taille du voisinage $\mathcal{N}$, lorsqu'elle n'est pas specifiée, est de 15×15.

2.4.1 Comparaison du nouveau filtre avec le filtre MNL

La Figure 2.4 présente la comparaison entre notre méthode (que l'on appellera dans la suite C_pMNL) et le filtre MNL dont le paramètre h a été optimisé afin d'obtenir la meilleure performance (au sens du PSNR). L'étude a été réalisée sur l'image du cameraman bruitée par un bruit gaussien donc la variance variait de 20 à 300. Le critère de comparaison choisi est le PSNR. Ce dernier mesure la distorsion entre l'image originale u et l'image débruitée $\hat{I}$ suivant l'équation :

$$PSNR(u, \hat{I}) = 10 * \log_{10}(\frac{255^2}{\text{EQM}}) \tag{2.23}$$

où EQM est l'erreur quadratique moyenne :

$$\text{EQM} = \frac{1}{m} \sum_i (u(i) - \hat{I}(i))^2 \tag{2.24}$$

où m est le nombre total de pixels dans l'image.

Pour les différentes variances, le PSNR de notre méthode est à chaque fois supérieur à celui du filtre MNL. Notre algorithme est donc à chaque fois plus performant. D'autant plus que le paramètre h du MNL nécessite d'être optimisé. La différence est beaucoup plus importante pour les petites variances, atteignant même jusqu'à 3.5dB pour la variance 20. La différence est nettement plus faible pour de grandes variances, par exemple 0.5 dB pour $\sigma^2 = 300$.

La Figure 2.4 montre que les améliorations faites à la section 2.3.4 augmentent grandement les performances du filtre MNL original pour de petites variances. Plus la variance

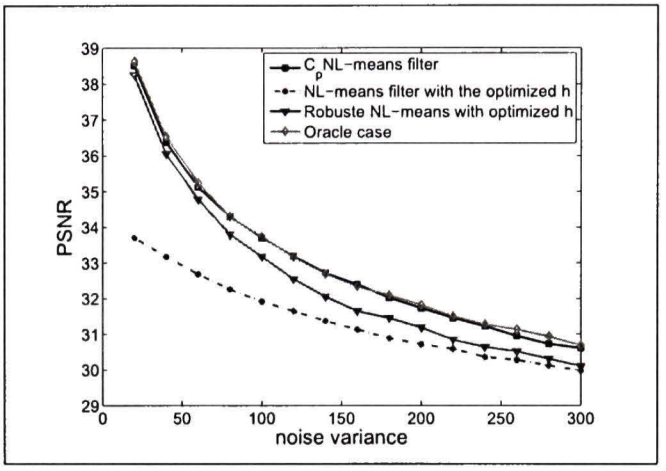


Figure 2.4 Comparaison des performances en décibel (dB) du C_pMNL avec le MNL, le NML amélioré et l'Oracle, pour différentes variances. Le paramètre de régularisation a été, pour chaque variance, manuellement ajusté pour le MNL original et sa version ameliorée. Les niveaux de gris sont dans l'intervalle $[0\ 255]$

du bruit est élevée plus l'influence des modifications est faible. Inversement, pour de petites variances de bruit, l'optimisation de h au pixel ne permet que d'augmenter faiblement les performances du filtre (0.3dB). Pour un faible bruit, le seuil de la robustesse est très sélectif. La distribution de la distance d est presque la même pour tous les pixels de l'image. Le paramètre h est ainsi presque uniforme sur toute l'image. Cependant, étant donné que le seuillage est très restrictif, pour certains pixels, seuls quelques pixels échantillons sont utilisés pour les débruiter. Le pouvoir de débruitage pour ces pixels est donc réduit en comparaison des autres pixels (pour une largeur de bande identique). L'optimisation au pixel de la largeur de bande permet ainsi d'accroître le pouvoir de débruitage en fonction du biais introduit. L'influence du débruitage de ces pixels sur le PSNR est faible puiqu'ils sont peu nombreux. Néanmoins, ceux-ci appartiennent principalement aux contours et aux textures ; Ils sont vecteurs d'informations importantes quant à la compréhension de l'image. Leur débruitage est donc d'une grande importance. L'optimisation de la largeur de bande est visuellement perceptible sur la Figure 2.5. Pour des variances de bruit élevées,

le seuil de la robustesse est moins restrictif et l'optimisation de la largeur de bande permet une augmentation plus importante de la performance.

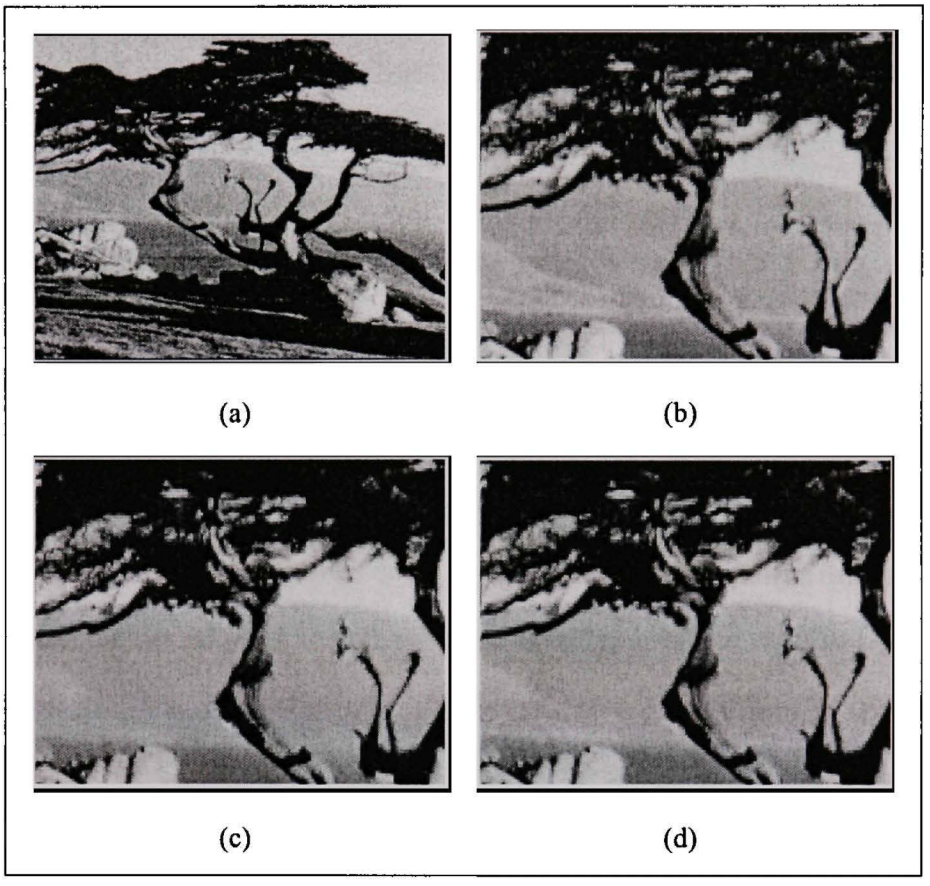


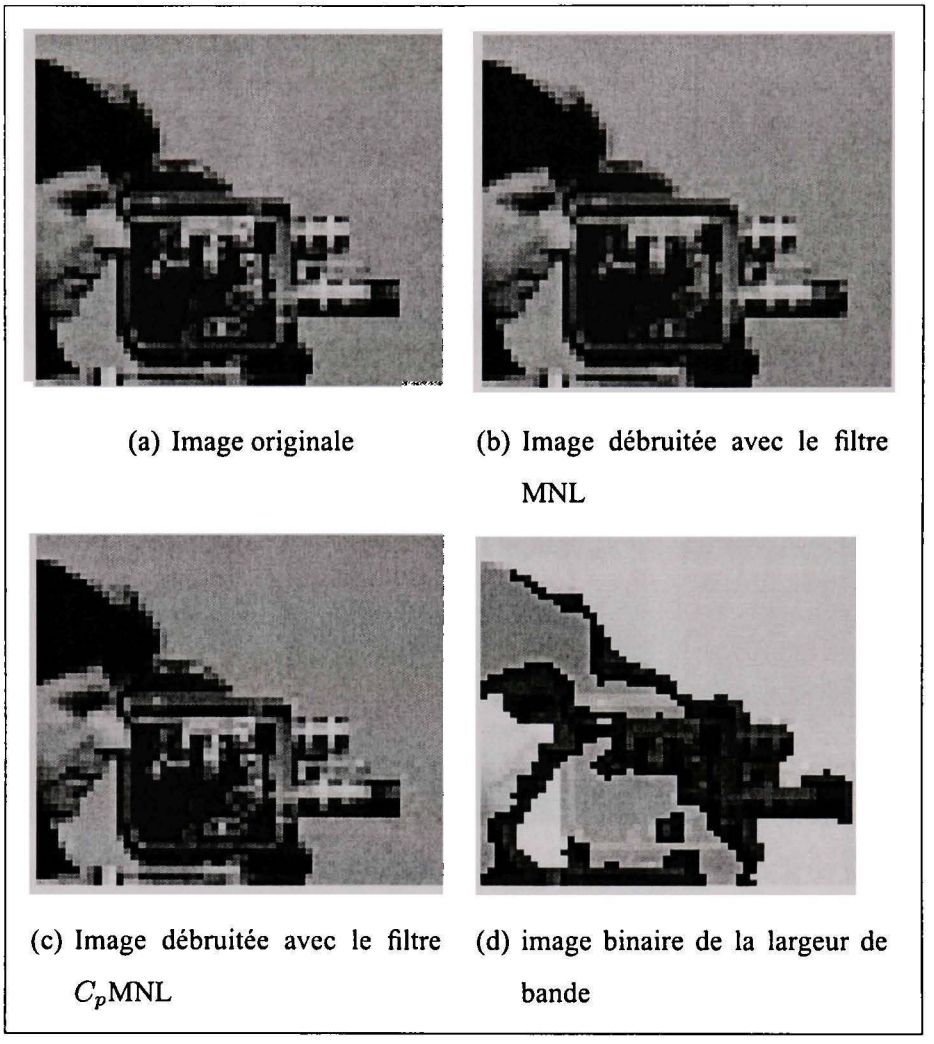
Figure 2.5 Comparison du filtre MNL amélioré avec une largeur de bande globale optimisée manuellement et le filtre C_pMNL. (a) est l'image bruitée. (b) est un zoom de l'image réelle. (c) est le débruitage avec le MNL amélioré. (d) est le debruitage avec le C_pMNL. Les contours sont mieux débruités avec le C_pMNL.

La Figure 2.4 montre aussi le cas Oracle où la largeur de bande sélectionnée minimise en chaque pixel l'erreur entre $\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}$ et l'image réelle u. Le filtre C_pMNL affiche des performances très proches de celles du cas Oracle. La statistique C_p est donc une bonne estimation de cette erreur.

Sur la Figure 2.6 sont présentées les images débruitées par C_pMNL (Figure 2.6(c) et le filtre MNL (Figure 2.6(d). La Figure 2.6(d) présente en violet les zones où le h_{C_p} est

inférieur à h_{NL} et inversement en vert. Les régions uniformes coïncident souvent avec un h_{C_p} supérieur à h_{NL}, c'est-à-dire que le débruitage est normalement plus important dans ces régions pour un même nombre d'échantillons. Autour des contours non linéaires et des textures, h_{C_p} est plus petit pour éviter l'introduction d'un fort biais ; Par exemple, les coins de la caméra ont été arrondis avec le filtre MNL, ceci est dû à l'introduction d'un fort biais ; alors que grâce à la régression robuste, le biais étant réduit, les coins sont mieux restitués par notre modèle. Cependant, il semble moins bien débruiter ces zones. Ainsi certains pixels, proches des contours et tels que h_{C_p} est grand, ne sont pas très bien débruités. Pour ces pixels un grand nombre d'échantillons a été exclu de la régression par le seuillage. Le nombre d'échantillons est donc petit et la réduction de la variance limitée. La Figure 2.7 présente deux parties de l'image du cameraman débruitée par les deux méthodes avec une variance de bruit plus importante ($\sigma = 120$). Les mêmes commentaires que précédemment peuvent être faits. Mais, de plus, le ciel est presque constant avec le filtre C_pMNL car une bonne partie des pixels le composant ont satisfait le test de Kolmogorov-Smirnov. Pour la deuxième partie (Voir Figure 2.7 (d) et (f)), l'herbe a été moins régularisée en utilisant le C_pMNL et sa texture réelle parait plus importante. Enfin, moins de détails du pied de la caméra ont disparu, ceci est principalement dû à la robustesse de la régression.

La Figure 2.8 montre la comparaison avec la DTDWT. Cette dernière méthode est quasi invariante par translation et sélective sur les directions ce qui la rend particulièrement efficace pour la réduction du bruit [111][112]. Pour comparaison nous avons utilisé sept images de la base de données USC-SIPI et l'image "barbara". La Figure 2.8 présente les PSNRs en fonction de différentes variances de bruit pour la méthode DTDWT, le filtre C_pMNL et le filtre MNL standard pour lequel, la largeur de bande globale utilisée est celle qui maximise le PSNR. Pour toutes ces images, il y a une grande différence entre les filtres C_pMNL et MNL pour les petites variances de bruit. Cette différence est d'autant plus grande pour des images texturées ou avec beaucoup de contours telles que les images "aérienne" et "mandrill". Alors que pour les images avec des grandes régions uniformes



(a) Image originale

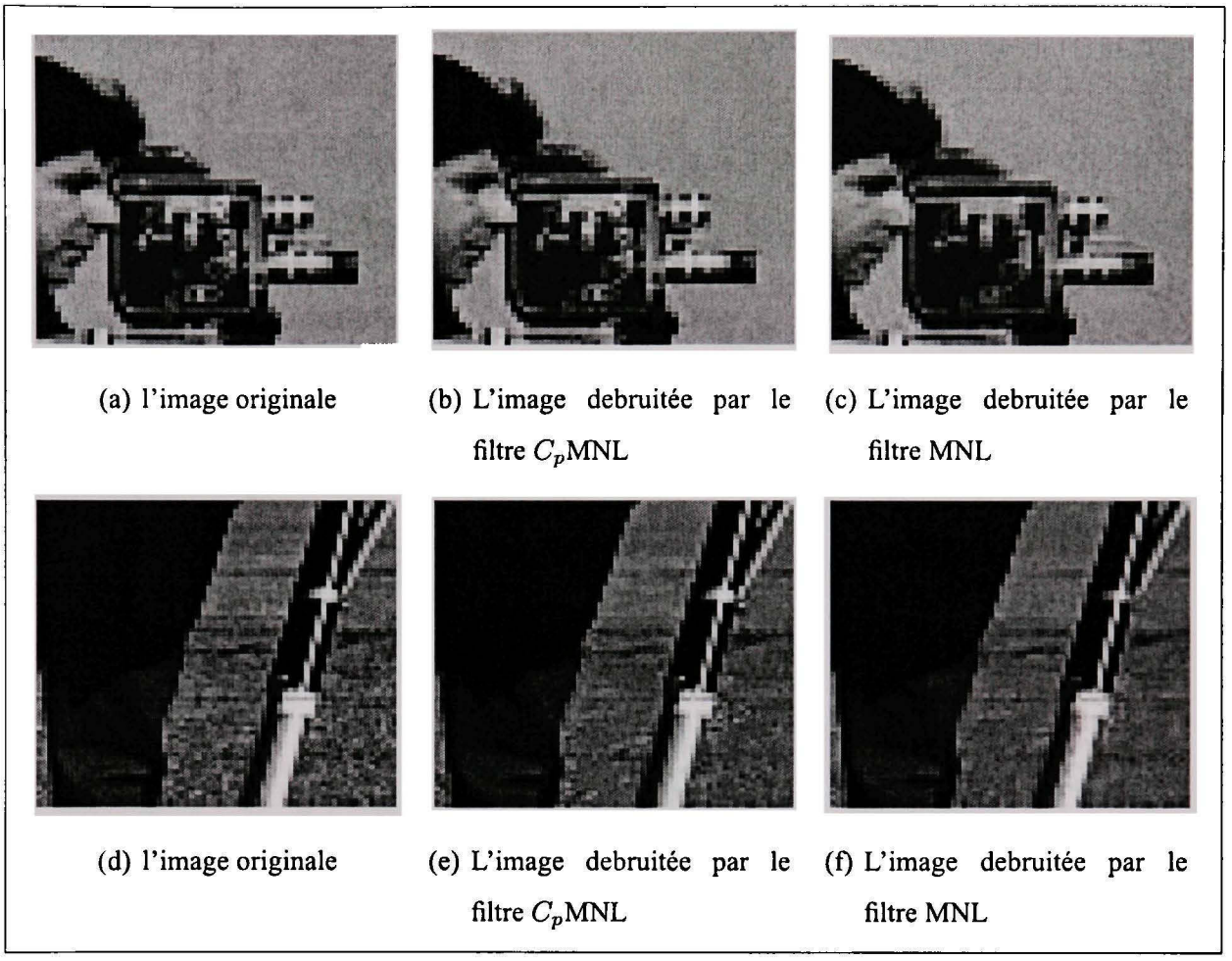
(b) Image débruitée avec le filtre MNL

(c) Image débruitée avec le filtre C_pMNL

(d) image binaire de la largeur de bande

Figure 2.6 Comparaison du filtre MNL avec le filtre C_pMNL sur une image dégradée avec un bruit gaussien de variance 20. Pour la Figure (d), la largeur de bande h_{Cp} est plus petite que h_{NL} dans les régions noirs alors qu'elle est plus grande dans les régions branches. L'image originale a été superposée pour des fins de visibilité.

("poivrons" et "barbara"), cette différence est plus petite. Pour de grandes variances de bruit, la différence entre les performances des filtres MNL et C_pMNL est presque nulle pour quelques images ("barbara", "bateau" et "poivrons"); Ceci s'explique par le fait que la largeur de bande optimale est quasi uniforme sur toutes ces images. Pour les images "aérienne", "bateau" et "F-16", le filtre C_pMNL et la méthode DTDWT ont presque les mêmes performances suivant les variances de bruit. Ceci est dû à l'adaptation du seuil



(a) l'image originale (b) L'image debruitée par le filtre C_pMNL (c) L'image debruitée par le filtre MNL

(d) l'image originale (e) L'image debruitée par le filtre C_pMNL (f) L'image debruitée par le filtre MNL

Figure 2.7 Comparaison entre le filtre C_pMNL et le filtre MNL sur une image dégradée par un bruit blanc gaussien de variance 120.

des coefficients des ondelettes à l'estimation de la variance de l'image, tel qu'est le filtre C_pMNL.

Cependant la Figure 2.9 montre que les images sorties sont assez différentes. Les images débruitées avec la méthode DTDWT souffrent d'"oscillations" (spécialement dans les régions uniformes) que les filtres à base de moyennes non locales ne partagent pas. Pour l'image du "mandrill", DTDWT surclasse le filtre C_pMNL. Ce dernier filtre ne réussi pas bien à débruiter les yeux du "mandrill" car plusieurs pixels appartiennent à des motifs rares. Pour l'"arbre", le "poivrons" et le "pentagone", le filtre C_pMNL offre de meilleures performances que le DTDWT.

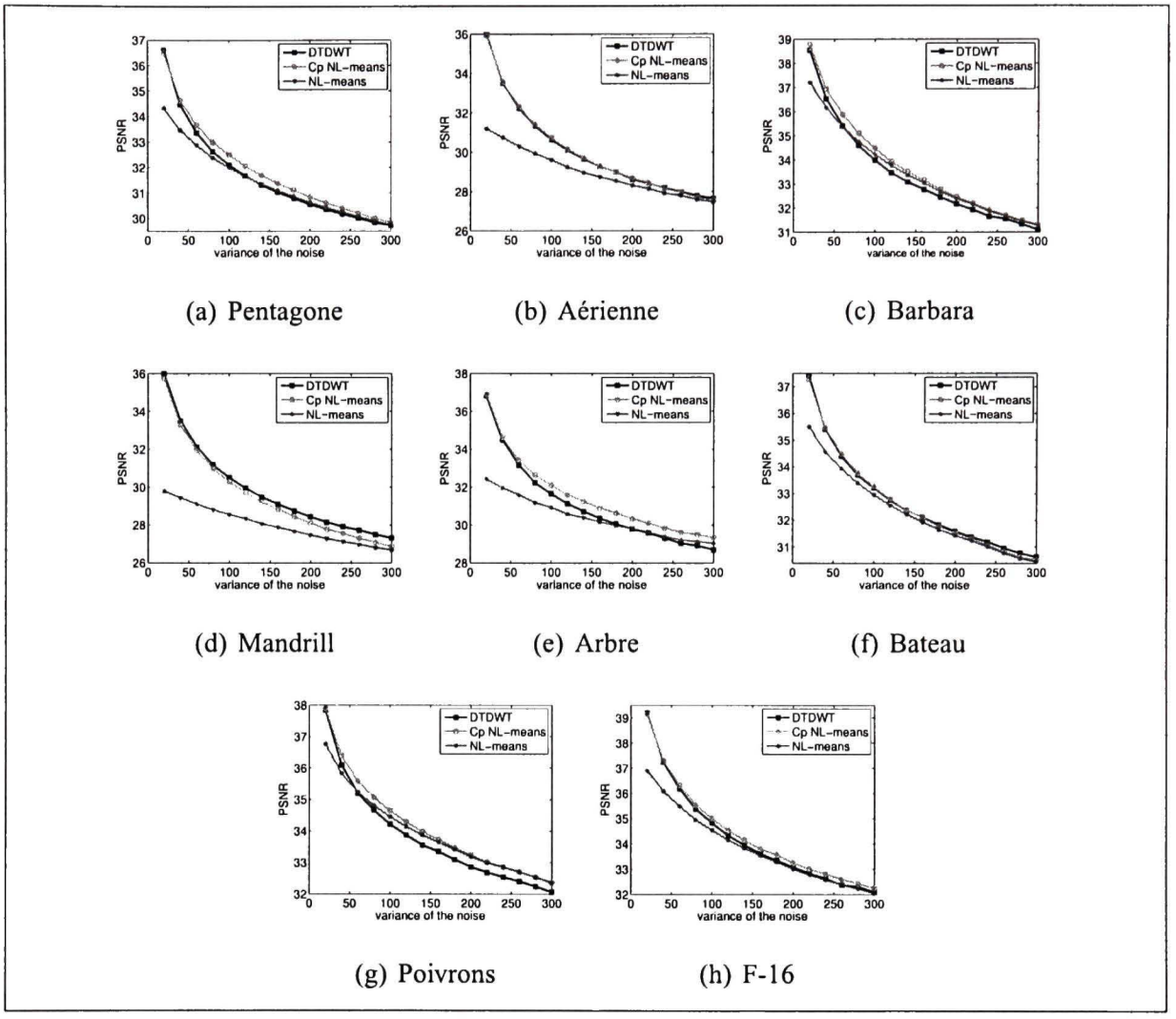


Figure 2.8 Les PSNRs du DTDWT, du filtre MNL, et du filtre C_pMNL pour différents niveaux de bruit. La largeur de bande du filtre MNL a été globalement optimisée en maximisant le PSNR.

Les Figures 2.9 et 2.10 montrent les différences entre les trois méthodes sur quatre images. Comme nous le disions précédemment la méthode DTDWT crée des "oscillations" sur les images qui semblent moins regulières. Même si la différence en PSNR est respectable entre les filtres MNL et C_pMNL, il est, des fois, difficile de l'appréhender visuellement. Ceci parce que les principales différences sont situées sur les détails et sur l'"abrutivité" des contours. Nous avons donc affiché l'image différence entre les filtres C_pMNL et MNL standard pour les mettre en évidence. Sur ces images différences apparaissent des détails,

des textures qui ont été supprimés par le filtre MNL et des contours qui ont été régularisés par le filtre standard.

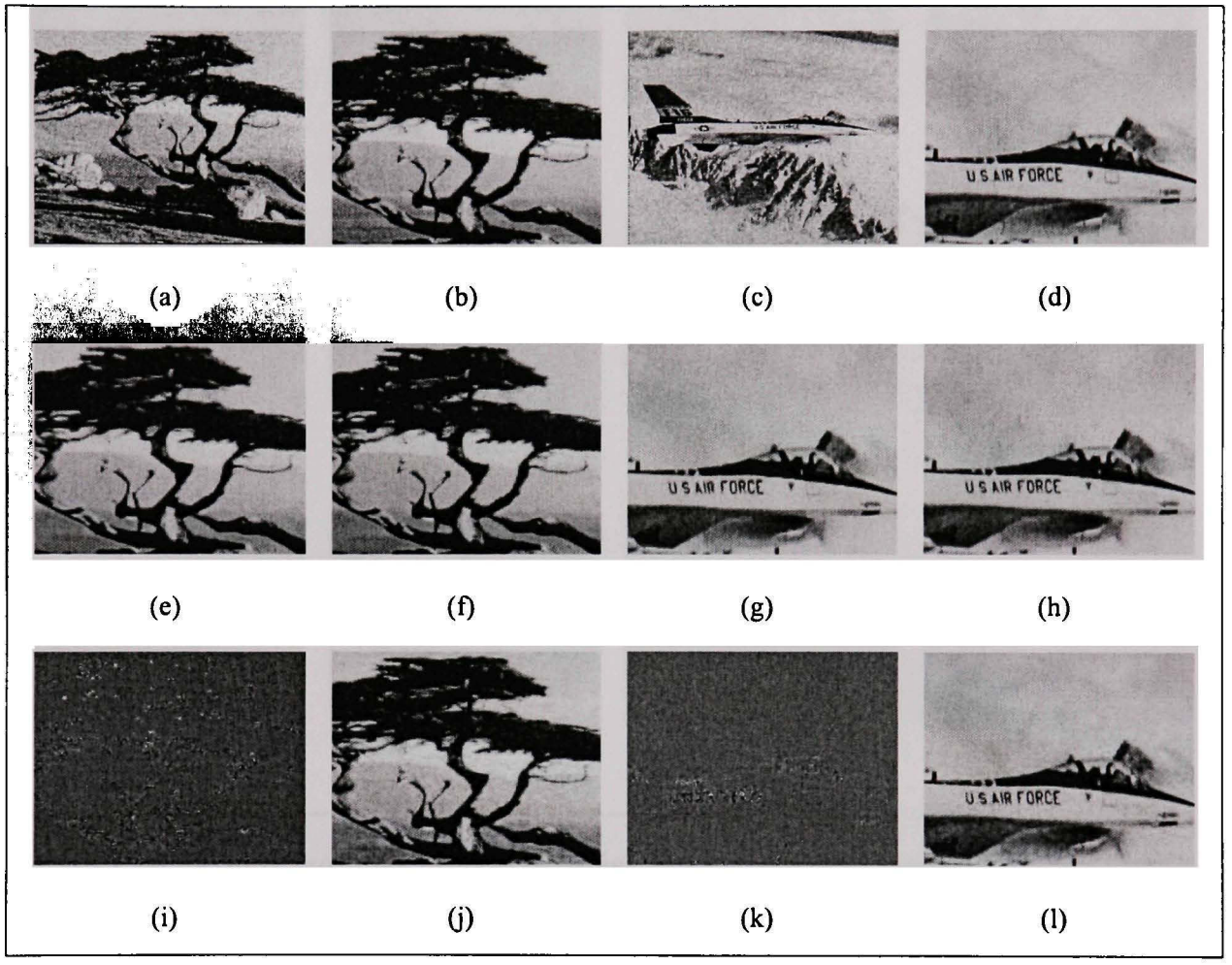


Figure 2.9 (a) et (c) sont les images bruitées. (b) et (d) sont deux agrandissement des images originales. (e) et (g) sont les sorties du filtre MNL alors que (f) et (h) sont les sorties du filtre C_pMNL. (i) et (k) sont les images différence entre les sorties des filtres MNL standard et C_pMNL. (j) et (l) sont les sorties de la méthode DTDWT.

2.4.2 Les différents choix des largeurs de bande en fonction de la variance du bruit

La Figure 2.11 présente le logarithme des largeurs de bande trouvées par l'algorithme de débruitage. Tout d'abord, les pixels blancs sont en très grande majorité ceux qui ont subi une accélération du processus et donc ceux auxquels nous avons appliqué un filtre moyen.

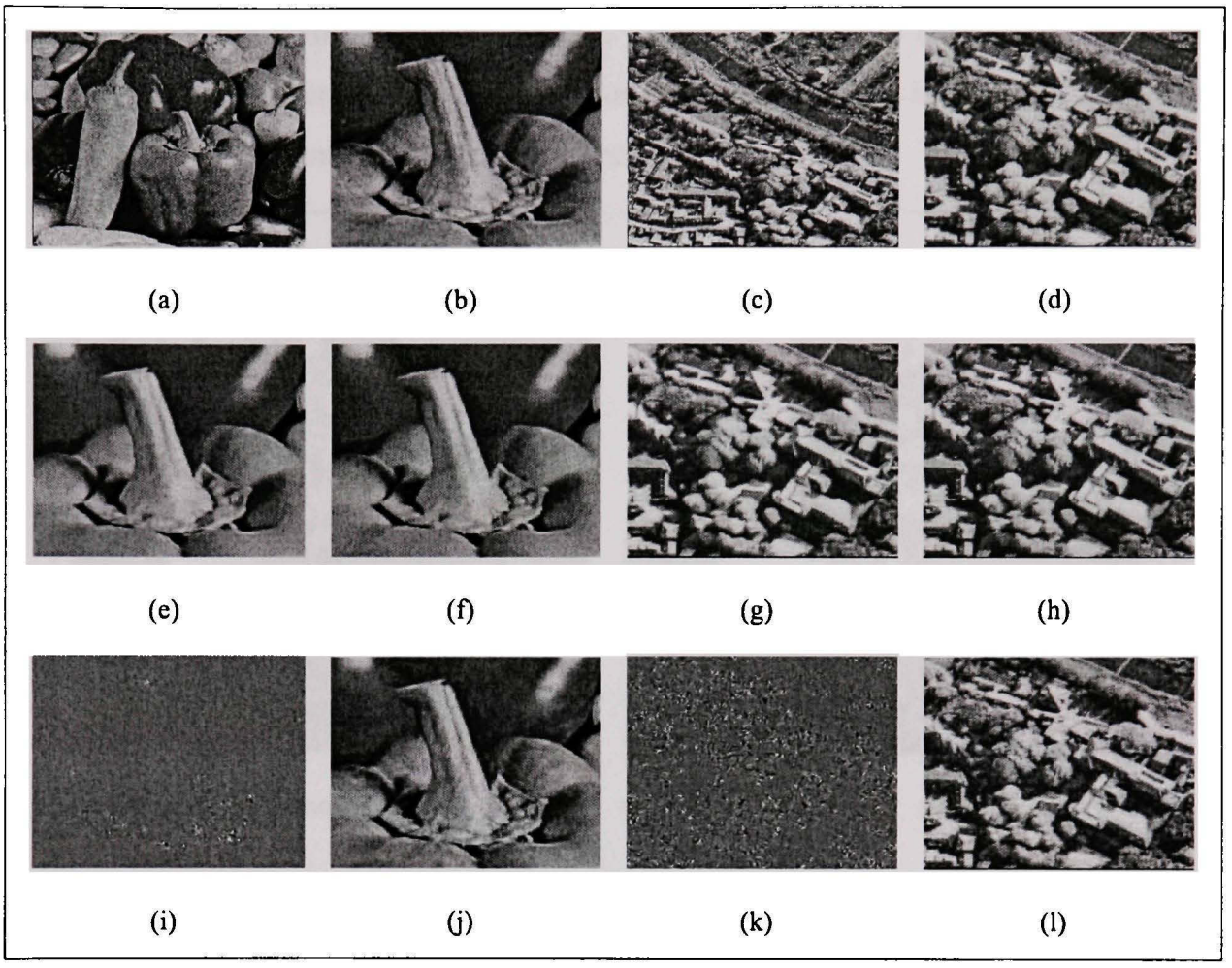
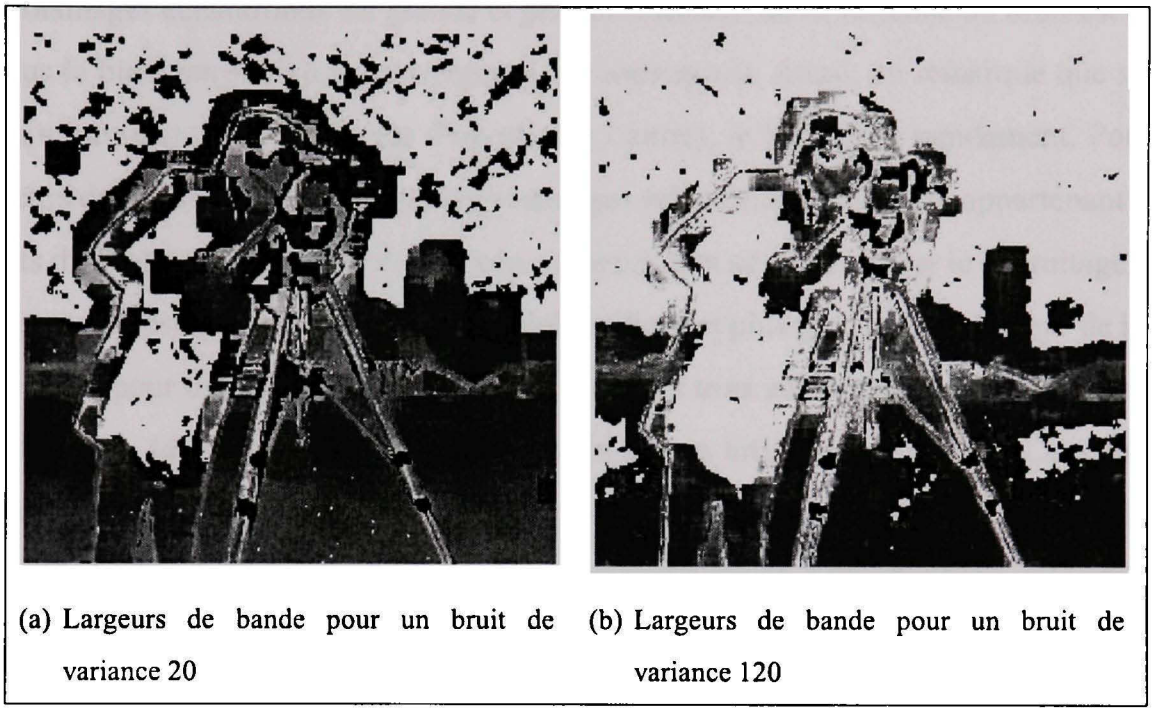


Figure 2.10 (a) et (c) sont les images bruitées. (b) et (d) sont deux agrandissement des images originales. (e) et (g) sont les sorties du filtre MNL alors que (f) et (h) sont les sorties du filtre C_pMNL. (i) et (k) sont les images différence entre les sorties des filtres MNL standard et C_pMNL. (j) et (l) sont les sorties de la méthode DTDWT.

La plus grande partie des régions uniformes est concernée, c'est le cas d'une grande partie du ciel ainsi que d'une partie du manteau. Sur cette image, plus le pixel est sombre et plus la largeur de bande utilisée est petite. L'image est en grande partie régulière, ceci est dû au fait que d'un pixel à ses voisins, seuls quelques échantillons changent, et donc le biais et la variance sont plus ou moins les mêmes.

Néanmoins, on constate des transitions fortes, surtout au voisinage des contours. On remarque notamment que sur les contours (par exemple les jambes du cameraman) les

largeurs de bandes sont plus larges. En fait, les échantillons trop éloignés du motif autour du pixel à débruiter, ont été seuillés, réduisant ainsi le biais de façon conséquente. La largeur de bande est donc beaucoup plus importante.



(a) Largeurs de bande pour un bruit de variance 20

(b) Largeurs de bande pour un bruit de variance 120

Figure 2.11 Comparaison des logarithmes des largeurs de bande pour des images dégradées par un bruit blanc gaussien de variances 20 et 120.

La Figure 2.12 présente le SSB et la variance en fonction de la largeur de bande pour des pixels dans des voisinages différents. Le premier type de pixels étudiés (Voir Figure 2.12(a)) provient du ciel et n'a pas passé le test de Kolmogorov-Smirnov. Lorsque la largeur de bande augmente, la variance du bruit diminue rapidement. Le biais augmente beaucoup pour de petites largeurs de bande puis rapidement converge vers une petite valeur. Dans le ciel, les pixels ont des niveaux de gris homogènes, les distances entre les voisinages échantillons sont donc petites. Alors, même avec une largeur de bande petite, la plupart des pixels reçoit un poids fort et influence beaucoup le débruitage. La variance du bruit est fortement réduite. Mais, dans le même temps, puisque le niveau de gris du ciel n'est pas constant, la pondération introduit un biais, même si celui-ci est faible.

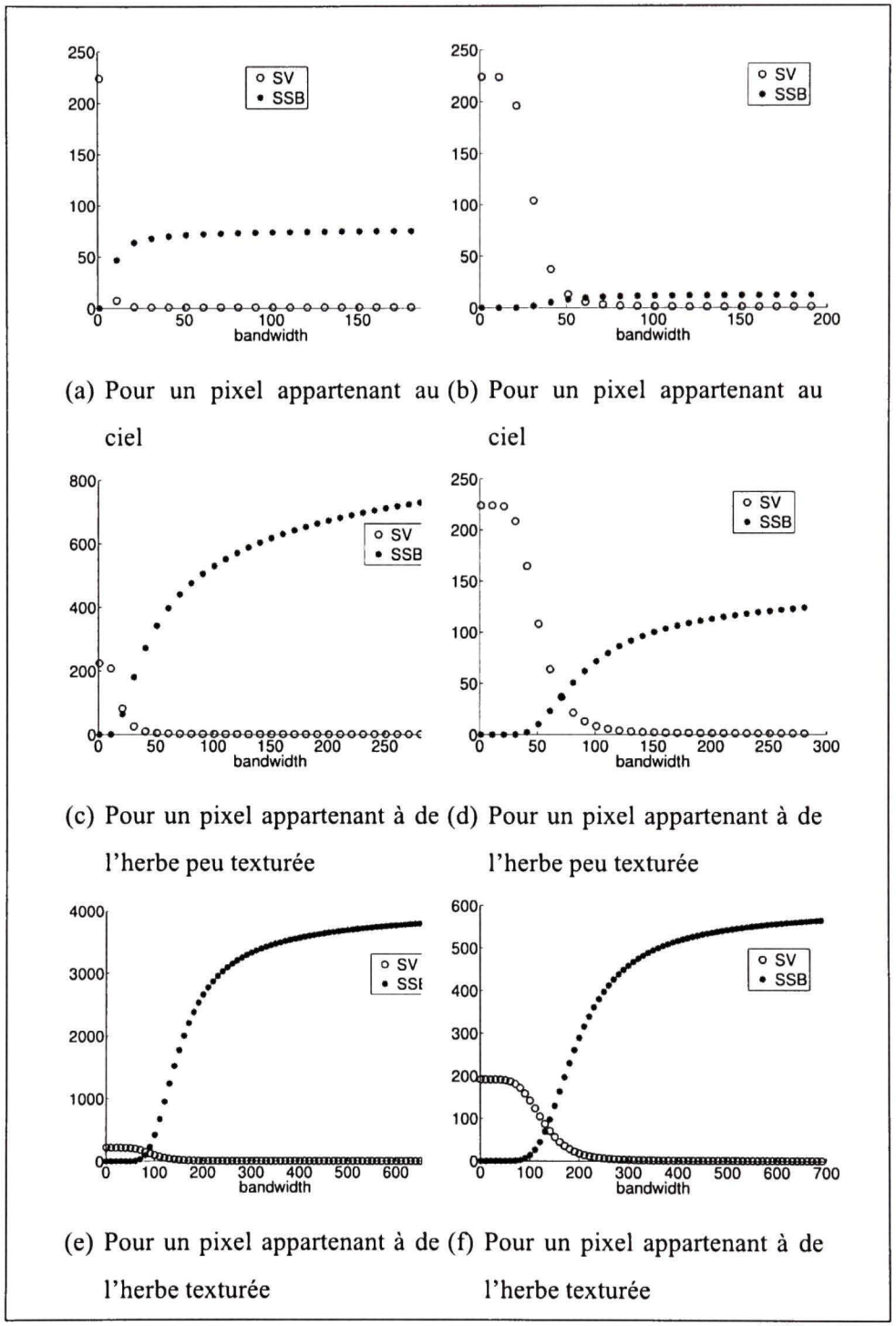
Sur la Figure 2.12(c) et (e), des pixels de l'herbe sont étudiés. La première constatation est que plus la valeur de convergence du SSB est grande et plus la largeur de bande nécessaire pour obtenir la même réduction de bruit est grande. En effet, plus la distance entre les voisinages échantillons est grande et plus la réduction de la variance du bruit est faible et plus le biais introduit à la convergence est conséquent. Aussi, on remarque que sur un certain intervalle de h (différent d'un pixel à l'autre), le SSB croît rapidement. Pour les largeurs de bande de cet intervalle les voisinages échantillons des pixels appartenant à des objets différents commencent à avoir une influence non négligeable sur le débruitage. Plus la distance L est grande par rapport à ces échantillons et plus grande est la largeur de bande nécessaire pour obtenir cette augmentation. Pour les trois autres graphiques (Voir les Figures 2.12(b), (d) et (f)) l'image a été dégradée par un bruit plus important. La réduction de la variance dans ces cas est réalisée avec une largeur de bande plus grande, alors que le SSB est plus petit. Toutes les largeurs de bande sont donc plus grandes lorsque la variance augmente.

2.4.2.1 Différents poids du biais et de la variance

On peut aussi construire une C_p avec des poids différents entre les biais et la variance :

$$CP_\alpha(\hat{I}_h(i)) = \frac{1}{\sigma^2}\left(S\hat{S}B(i) + \alpha \sum_j \mathrm{Var}(\check{I}_{i,h}(j))\right) \tag{2.25}$$

Ce paramètre peut être utilisé pour améliorer les performances du filtre. Il est vrai qu'en regardant la Figure 2.13, on constate qu'un paramètre de 0.9 est préférable dans du bruit de petite variance, alors que 0.5 est meilleur pour un bruit moyen et 0.3 pour un bruit fort. Ce paramètre est difficile à ajuster c'est pourquoi ce modèle est souvent critiqué par les statisticiens [77]. Cependant la Figure 2.13 révèle que pour des paramètres pris entre 0.2 et 0.9, les performances sont comprises dans un écart de 0.25dB. L'augmentation de la performance est donc négligeable, d'autant qu'en prenant un paramètre moyen de 0.7 le débruitage est presqu'à chaque fois optimal. Cependant, même si entre 0.2 et 0.9



(a) Pour un pixel appartenant au ciel

(b) Pour un pixel appartenant au ciel

(c) Pour un pixel appartenant à de l'herbe peu texturée

(d) Pour un pixel appartenant à de l'herbe peu texturée

(e) Pour un pixel appartenant à de l'herbe texturée

(f) Pour un pixel appartenant à de l'herbe texturée

Figure 2.12 $\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{SSB}(i)$ **et la somme des variance de l'estimation** $\mathbf{SV}(i) = \sum_j \mathbf{Var}(\check{I}_{i,h}(j))$ **pour des pixels** i **appartenant à différents motifs. (a), (c) et (e) sont dégradées par un bruit de variance 20 et (b),(d) et (f) par une bruit de variance 120.**

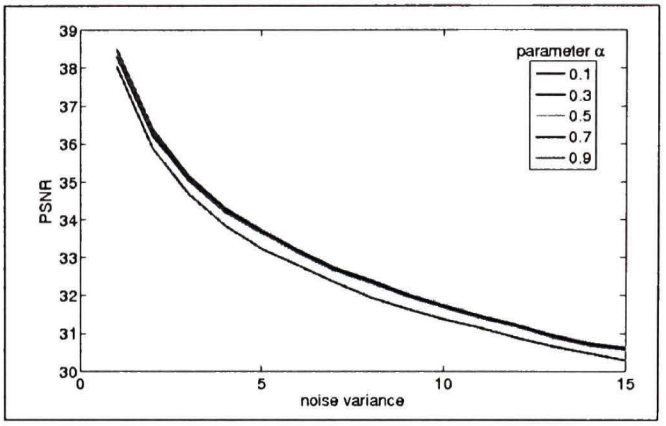


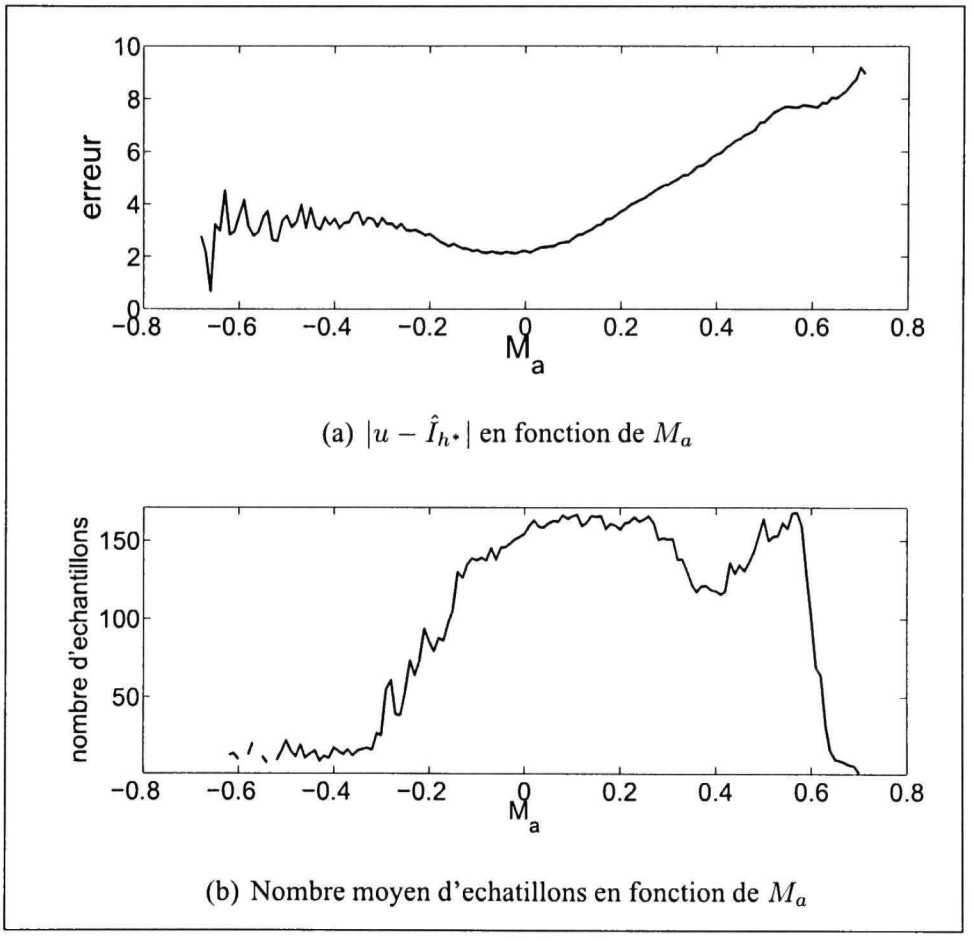
Figure 2.13 Les variations du PSNR en fonction de la variance du bruit, à chaque courbe correspond un coefficient de pondération α différent.

les erreurs sont proches, les images sont différentes puisque, pour certaines, l'erreur est principalement due à la variance alors que pour d'autres, elle est aussi due au biais. Enfin on remarque que pour un paramètre α de 0 ou 0.1, les performances sont très médiocres. En effet la pondération de la variance étant très faible voire nulle, la régression reste très attachée aux données et donc le débruitage est faible.

2.4.3 La mesure d'adéquation

La courbe Figure 2.14(a) présente l'erreur moyenne des pixels ayant la même mesure M_a ; c'est-à-dire que l'erreur est tracée en fonction de M_a. La courbe est presque linéaire entre des valeurs de M_a allant de 0 à 0.5, et croissante jusqu'à 0.7. C'est donc une bonne mesure d'adéquation pour ces valeurs. Il semble surprenant de trouver des valeurs de M_a négatives, en effet C_p ; de même signe que M_a ; est par définition une estimation d une somme de carrés. Néanmoins, le biais n'étant pas connu, il est remplacé par une différence de deux termes (voir équation (2.10)). Rien n'empêche donc cette différence d'être négative. Dans ce cas particulier, le biais est mal estimé. Alors, sans doute la largeur de bande trouvée en minimisant C_p n'est pas optimale. L'erreur moyenne est donc plus élevée dans les négatifs. Aussi, la courbe est plus bruitée dans les négatifs, parce que peu de pixels ont

une mesure M_a négative. La Figure 2.14(b) nous apprend aussi qu'en moyenne très peu d'échantillons ont été utilisés pour débruiter ces pixels. Sans doute, ces pixels devraient être traités différemment. Question encore ouverte !



(a) $|u - \hat{I}_{h^\star}|$ en fonction de M_a

(b) Nombre moyen d'echatillons en fonction de M_a

Figure 2.14 M_a**, mesure d'adequation.**

2.4.4 Le seuillage robuste

Sur une image dégradée par un bruit blanc gaussien de variance σ^2, nous avons appliqué le filtre C_pMNL avec différentes valeurs de T_d dans le seuil $Thresh(d)$. La Figure 2.15 présente le PSNR des différentes sorties. Chaque courbe correspond à un différent degré de bruit (pour des variances allant de 10 à 300). Pour tous les PSNR, nous avons soustrait la valeur maximale afin d'obtenir une meilleure lisibilité.

La performance maximale apparaît pratiquement pour le même seuil $T_d \approx 40$. Ceci montre que cette approche est robuste au bruit. En choisissant ce seuil, les performances augmentent de 0.4 dB pour un bruit fort à 1dB pour un faible bruit. Ce seuil optimal n'a malheureusement été obtenu que sur une unique image, et ainsi n'est peut être pas optimal pour d'autres images. Cependant, un seuil entre 30 et 70 peut être pris pour augmenter les performances sans trop de risque. Un seuil plus petit n'est pas souhaitable, car le nombre d'échantillons pourrait être grandement réduit. Les performances de l'algorithme seraient médiocres à cause de son faible pouvoir de débruitage. Lorsque la distance entre deux voisinages échantillons est supérieure à 70, alors les pixels échantillons doivent appartenir à des objets différents, il n'est donc pas conseillé de considérer ceux-ci dans la pondération. La Figure 2.16(b) est une version bruitée de la Figure 2.16(a). Nous avons utilisé le

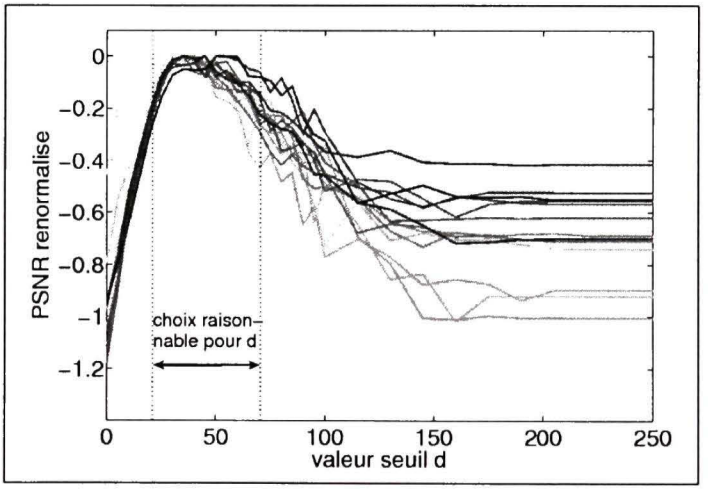
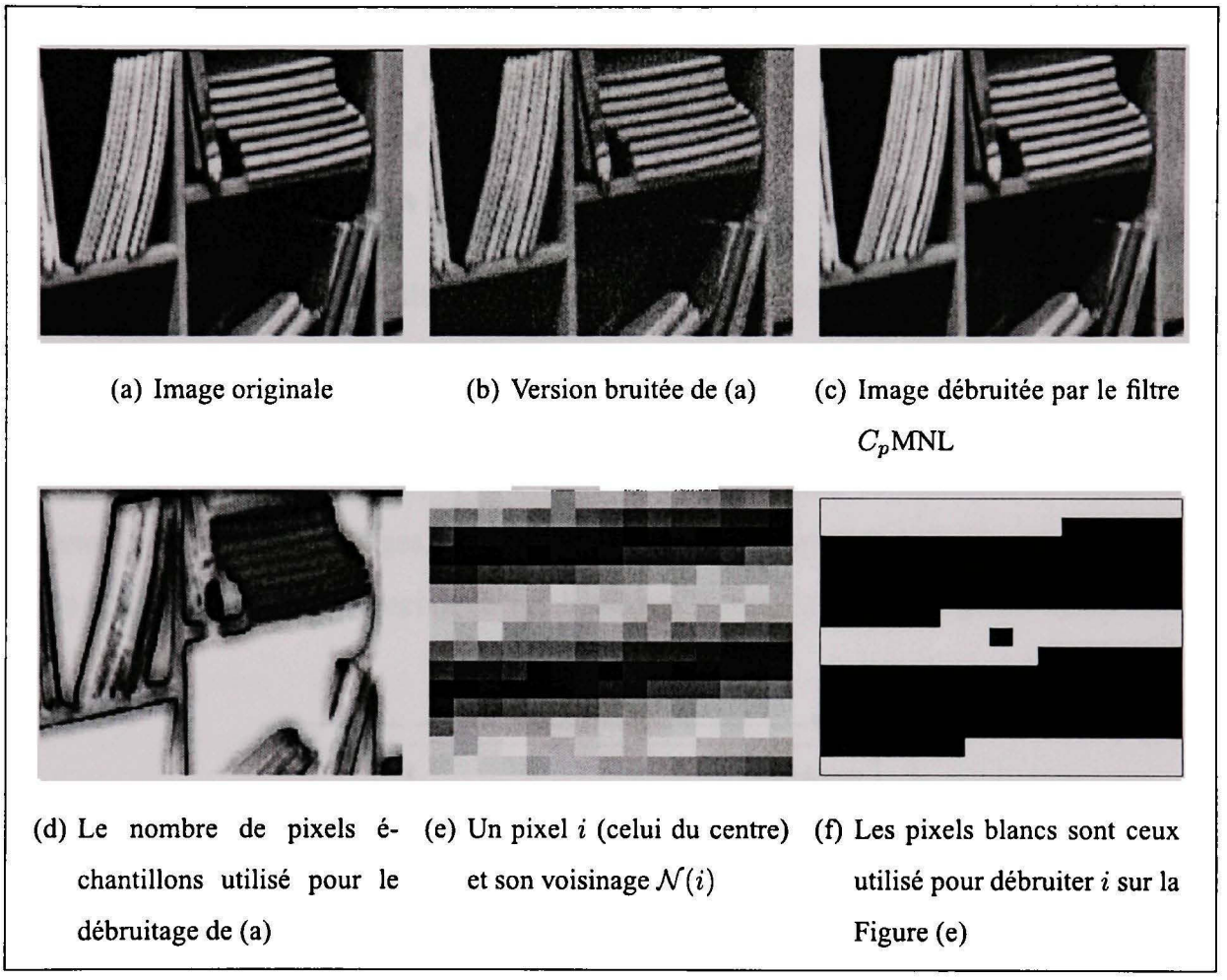


Figure 2.15 PSNR normalisé pour différents degrés de bruit en fonction de d.

filtre C_pNLM sur l'image bruitée, la sortie est donnée sur la Figure 2.16(c). Sur la Figure 2.16(d), le niveau de gris d'un pixel correspondent au nombre de pixels échantillons utilisés pour son débruitage. Ce nombre est souvent plus petit proche des contours et maximal dans les régions uniformes. Par exemple, la Figure 2.16(e) montre un pixel i appartenant à la Figure 2.16(b) et son voisinage $\mathcal{N}(i)$. Dans ce dernier voisinage, les pixels échantillons qui sont utilisés dans le débruitage reçoivent une couleur blanche sur Figure2.16(f) alors

que les autres reçoivent une couleur noire. Les pixels blancs ont un voisinage $\mathcal{V}$ proche de celui du pixel i. Il est à noter que, en utilisant une régression robuste, les pixels échantillons contribuant au débruitage ne sont pas nécessairement dans le même ensemble connexe.



(a) Image originale

(b) Version bruitée de (a)

(c) Image débruitée par le filtre C_pMNL

(d) Le nombre de pixels échantillons utilisé pour le débruitage de (a)

(e) Un pixel i (celui du centre) et son voisinage $\mathcal{N}(i)$

(f) Les pixels blancs sont ceux utilisé pour débruiter i sur la Figure (e)

Figure 2.16 Exemple du seuillage robuste. Sur la Figure (d), plus le pixel est clair et plus grand est le nombre de pixels échantillons utilisés pour son débruitage. La Figure (e) montre une partie de la Figure 2.16(b). Sur la Figure (f), les pixels blancs sont ceux utilisés pour débruiter i sur la Figure (e).

2.4.5 Nombre maximal de pixel échantillons et temps de calcul

La Figure 2.17 montre le PSNR du filtre C_pMNL pour différents nombres maximaux d'échantillons. Quand ce nombre est supérieur à 121, la performance est plus ou moins la

même. La performance maximale est atteinte quand le nombre maximal de pixels échantillons est de 225, ce nombre est celui que nous avons choisi pour les autres expériences. Cependant, ce choix dépend principalement du compromis entre performance et temps de calcul disponible. En effet, plus le nombre d échantillons est grand et plus le processus est gourmand en temps de calcul. Pour une iteration, le calcul de d nécessite au maximum un nombre d'opération équivalent à $\mathcal{O}(N \times n^3)$ avec N le nombre total de pixels de l'image et n^2 le nombre de pixels dans le voisinage $\mathcal{N}$.

Nous avons implémenté le filtre C_pMNL en Matlab. Pour augmenter sa rapidité, nous avons codé la méthode de Newton en mex-file. Avec une nombre maximal d'échantillons de 225, il faut quelques minutes (7 sur un opteron 2.6GHz) pour débruiter l'image du "cameraman". Néanmoins, il y a une forte redoncance dans le calcul et la copie de la distance d entre les voisinages. Améliorer le schéma computationel réduirait sans aucun doute le temps de calcul, et ceci de façon drastique. Enfin, l'algorithme peut être facilement parallélisable.

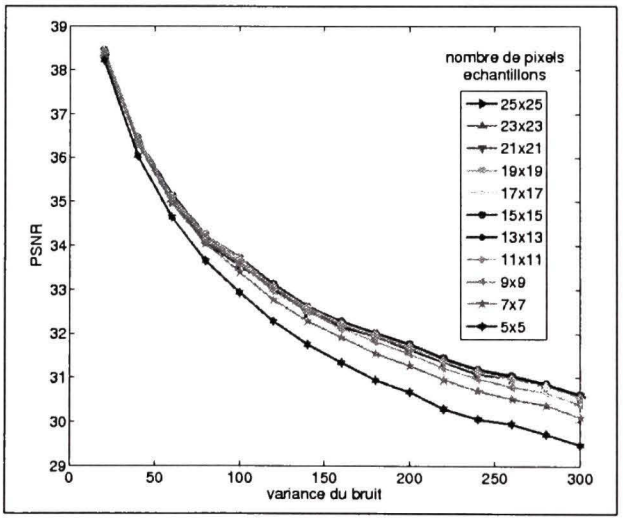


Figure 2.17 PSNR en fonction du bruit pour différents nombres maximaux de pixels échantillons.

2.5 Extension du modèle aux images radiographiques

2.5.1 La statistique C_p pour les données hétéroscédastiques

Dans le contexte des images radiographiques, puisque la variance du bruit est dépendante du niveau de gris, la statistique C_p sous la forme (2.7) ne peut être utilisée telle quelle. Une meilleure statistique est la suivante [77] :

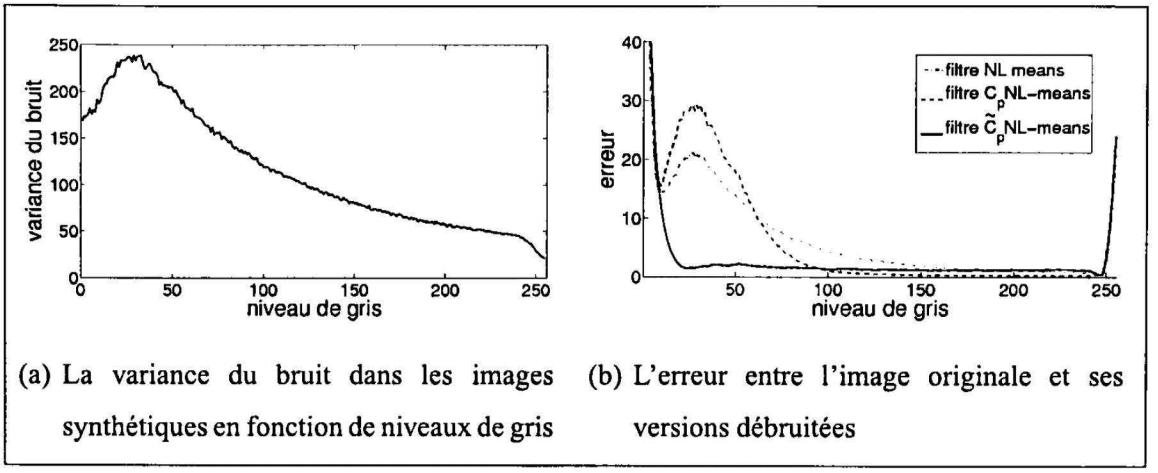
$$\tilde{C}_p(\hat{I}_h(i)) = \sum_j \frac{1}{(\hat{\Sigma}(G * I(\mathcal{N}(i))))^2}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2 - n + 2 \times \sum_j w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j) \quad (2.26)$$

Ici, le terme $(\hat{\Sigma}(G * I(\mathcal{N}(i))))^2$ a été substitué à σ^2. $\hat{\Sigma}$ est la régression obtenue à partir de l'estimation (1.9). L'image étant bruitée, l'entrée de $\hat{\Sigma}$ est filtrée par une gaussienne G pour obtenir une estimation plus robuste du niveau de gris. Dans l'équation (2.26), tous les résidus $(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2$ sont normalisés en les divisant par la variance locale $(\hat{\Sigma}(G * I(\mathcal{N}(i))))^2$. Ainsi renormalisés, les résidus ont tous une variance de 1 et peuvent de ce fait être comparés entre eux. Définie de cette sorte, la statistique $\tilde{C}_p$ s'adapte bien aux données hétéroscédastiques.

2.5.2 Expérience sur des données synthétiques

Pour les images radiographiques, nous ne possédons pas de versions non bruitées. Il est donc difficile pour ces images de quantifier les performances du modèle autrement que visuellement. Afin de comparer les qualités de débruitage des différents modèles, nous avons utilisé des images synthétiques et naturelles (type cameraman) auxquelles nous avons imposé un bruit modélisant celui des images radiographiques. Le bruit est modélisé en chaque niveau de gris i par une gaussienne centrée et de variance $\hat{\Sigma}(i)$. Dans un premier temps nous nous intéressons seulement à des images synthétiques afin de mettre en évidence l'adaptation aux données hétéroscédastiques de la statistique $\tilde{C}_p$ par rapport aux deux autres filtres MNL et C_pMNL. En effet, en utilisant des images naturelles, les résultats dépendraient aussi de la robustesses de la régression. Ici nous nous intéressons

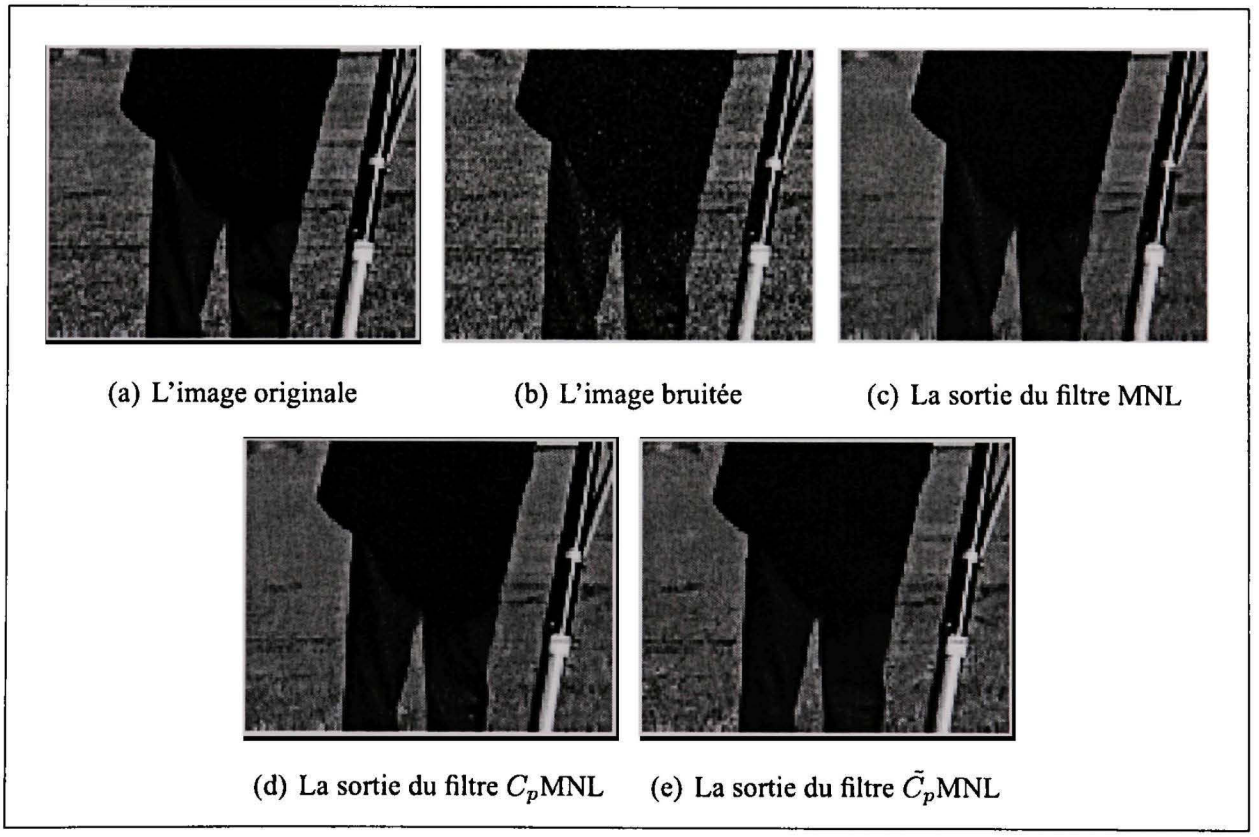
donc aux images de la forme $I(i) = i,\ i \in [0\ 255]$. La variance du bruit utilisé a été amplifiée par rapport aux images radiographiques (Figure 2.18(a)). Les erreurs des trois modèles sont présentées sur le Figure 2.18(b). La courbe verte représente l'erreur (la différence quadratique moyenne sur chaque niveau de gris entre l'image originale et l'image débruitée) du filtre MNL en fonction des niveaux de gris. Le paramètre de régularisation h a été optimisé afin d'obtenir l'erreur moyenne (sur toute l'image) la plus petite possible. Exceptés les bords (c'est-à-dire proche des niveaux de gris 0 et 255), cette erreur a exactement la même forme que celle introduite dans l'image originale. La réduction du bruit est donc uniforme sur tous les niveaux de gris. La courbe rouge correspond à l'erreur du C_pMNL en fonction des niveaux de gris. Le paramètre σ a été estimé sur toute l'image. On remarque que cette erreur est plus grande pour les pixels dont les niveaux de gris sont parmi les soixante plus sombres. Elle est plus petite pour les pixels dont le niveau de gris est plus clair. Dans le calcul de la C_p, le biais est obtenu en soustrayant la réduction du bruit $\text{var}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))$ de la différence $(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2$. Mais la réduction du bruit est sous évaluée lorsque $\sigma < \Sigma(i)$ est surévaluée lorsque $\sigma > \Sigma(i)$. Dans le premier cas, le C_pMNL ne débruite pas assez l'image et du bruit important est encore présent après le filtrage. Dans l'autre cas, le pouvoir de débruitage est trop fort. Même si l'erreur pour ce type d'image est inférieure à celle du filtre MNL, dans le cas d'images naturelles, un biais important serait introduit rendant l'erreur plus importante. Pour ce type d'image, le filtre C_pMNL semble être moins bon que le filtre MNL. La courbe noire est obtenue en introduisant de l'information a priori sur la dépendance de la variance du bruit en fonction des niveaux de gris (2.26). L'erreur est uniforme sur les niveaux de gris et elle a été grandement réduite dans les niveaux de gris foncés. Pour les niveaux de gris supérieurs à 180, l'erreur du $\tilde{C}_p$MNL est au-dessus de celle du filtre MNL, le débruitage y est plus doux. Cependant sur des images naturelles, le biais serait plus important pour le filtre MNL que pour le $\tilde{C}_p$MNL et l'erreur pourrait donc être plus importante. L'augmentation de l'erreur pour les valeurs de niveaux de gris extrêmes est due à la façon dont le bruit est généré. En effet, nous avons restreint les images bruitées dans l'intervalle [0 255].



(a) La variance du bruit dans les images synthétiques en fonction de niveaux de gris

(b) L'erreur entre l'image originale et ses versions débruitées

Figure 2.18 Les erreurs des différents filtres : MNL, C_pMNL et $\tilde{C}_p$MNL) en fonction des niveaux de gris.



(a) L'image originale (b) L'image bruitée (c) La sortie du filtre MNL

(d) La sortie du filtre C_pMNL (e) La sortie du filtre $\tilde{C}_p$MNL

Figure 2.19 Comparaison des différents filtres sur l'image du cameraman dégradée par un bruit gaussien dont la variance suit la Figure 2.18(a) en fonction des niveaux de gris.

La Figure 2.19 nous montre un zoom de l'image du cameraman dégradée par un bruit dont la variance est donnée par la Figure 1.2. Les sorties des trois filtres (MNL, C_pMNL et $\tilde{C}_p$MNL) sont présentées respectivement sur les Figures 2.19(b),(c) et (d). Premièrement le MNL et le C_pMNL débruite moins bien le manteau et le pantalon du cameraman que le $\tilde{C}_p$MNL. Les détails du trépied sont mieux restitués par les deux nouveaux filtres grâce à l'utilisation de la régression robuste. L'herbe est beaucoup moins régularisée avec le $\tilde{C}_p$MNL qu'avec les deux autres filtres, permettant de mieux restituer la texture.

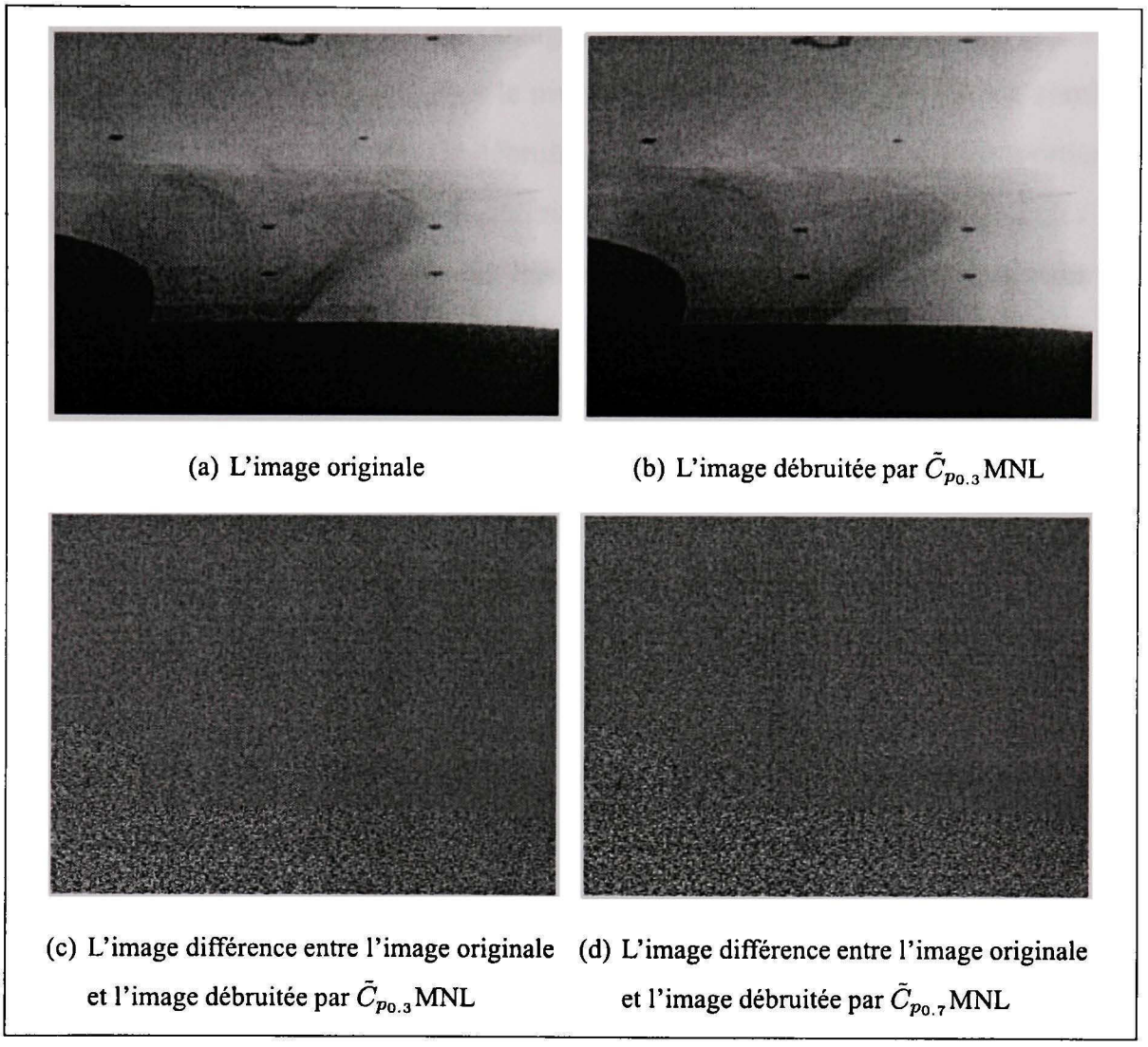
2.5.3 Expériences sur les radiographies

Pour terminer nous montrons quelques exemples de l'utilisation du filtre $\tilde{C}_p$MNL sur les radiographies de la base de données de l'hôpital Sainte-Justine (Voir Figure 0.2(a)). Le débruitage des images radiographiques est très délicat. En effet ces images présentent beaucoup de détails faiblement contrastés qu'il ne faut surtout pas détruire. Souvent les praticiens préfèrent travailler avec les images originales plutôt qu'avec les images débruitées, car des détails peuvent avoir été effacés. Ainsi le meilleur débruitage n'est pas forcément celui qui minimise l'estimation de l'erreur, $\tilde{C}_p$ en l'occurrence. Pour ces images, l'erreur associée au flou, est bien plus importante que l'erreur due au bruit. Nous avons donc choisi d'utiliser la statistique permettant de balancer le biais et la variance :

$$\tilde{C}_{p_\alpha}(\hat{I}_h(i)) = \sum_j \frac{1}{(\hat{\Sigma}(G * I(\mathcal{N}(i))))^2}(I(j) - \hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2 \; - \; n \\ + \; 2 \times \sum_j w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j) \; + \; (1-\alpha) \times \|w^{\mathcal{N}(i),h}(j)\|^2 \qquad (2.27)$$

Nous avons réalisé différents débruitages avec différentes valeurs de α, sur une portion de radiographie (Voir Figure 2.20) composée de tout le panel de niveaux de gris possible. Pour donner plus d'importance au biais, α doit être inférieure à 1.

Pour pouvoir observer le biais introduit dans la radiographie, nous avons choisi d'utiliser une approche visuelle. Elle consiste à observer l'image bruitée à laquelle l'image filtrée a



(a) L'image originale

(b) L'image débruitée par $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL

(c) L'image différence entre l'image originale et l'image débruitée par $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL

(d) L'image différence entre l'image originale et l'image débruitée par $\tilde{C}_{p_{0.7}}$MNL

Figure 2.20 Une radiographie a) et sa version régularisée par $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL b). Les images différences pour les filtres $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL et $\tilde{C}_{p_{0.7}}$MNL.

été retranchée, cette image s'appelle "l'image différence". Lorsque cette dernière image est une image de bruit, alors le biais introduit est faible et non perceptible. Mais lorsqu'une structure y apparaît, la même structure a été atténuée sur l'image débruitée ; du biais a été introduit. Parmi les différentes valeurs du paramètre α, 0.3 nous semble être la valeur offrant le meilleur débruitage pour ce type d'image. L'image filtrée avec ce paramètre est montrée sur la Figure 2.20(b) et l'image différence sur la Figure 2.20(c). Pour comparaison nous avons choisi la valeur α presque optimale pour toutes les variances de bruit homogène, c'est-à-dire égale à 0.7. L'image différence de ce débruitage est présentée sur la

Figure 2.20(d). En comparant les deux images différence (Voir Figures 2.20(c) et 2.20(d)), la première constatation est que, plus le niveau de gris de l'image bruitée est sombre et plus le débruitage est important. Le débruitage avec α égal à 0.7 est plus important que lorsque ce paramètre est fixé à 0.3. Toutefois, plus de structures sont aussi présentes. Pour mieux s'en rendre compte l'image différence entre les débruitages avec des paramètres de 0.7 et de 0.3, est présentée sur la Figure 2.21. Sur cette dernière image, les structures importantes de l'image bruitée sont présentes et le bruit y est modéré. La principale différence entre ces deux débruitages est le biais. Il est donc nettement préférable d'utiliser α égale à 0.3.

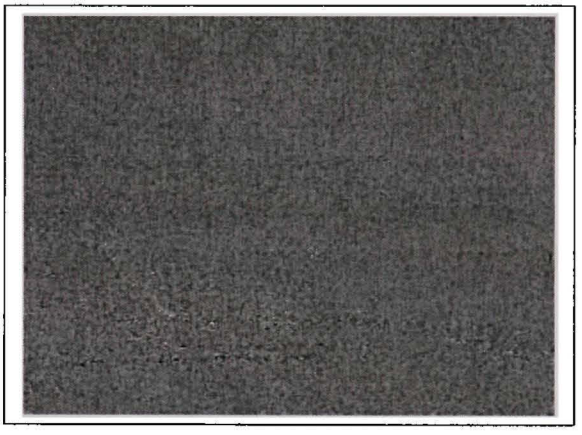
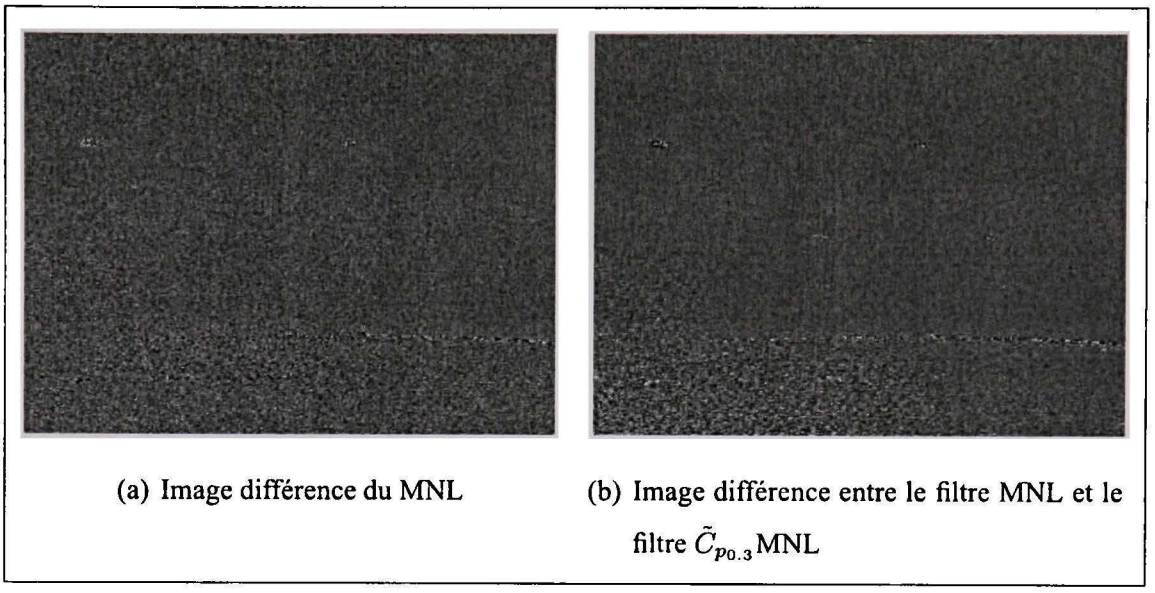


Figure 2.21 L'image différence entre les deux versions regularisées de la Figure 2.20(a) par $\tilde{C}_{p_\alpha}$MNL pour $\alpha = 0.3$ et 0.7.

Il est difficile de comparer notre modèle avec celui du filtre MNL original. En effet pour le filtre original il est difficile de trouver la valeur optimale de la largeur de bande puisque l'image non bruitée est inconnue. Pour pouvoir réaliser une comparaison pragmatique, nous avons utilisé la largeur de bande médiane du $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL comme largeur de bande du filtre MNL. L'image différence entre l'image bruitée et l'image filtrée par le MNL avec cette largeur de bande est présentée sur la Figure 2.22(a). Les billes de calibration et le contour du cache sexe sont les marques les plus prononcées. L'image différence entre notre débruitage et celui du MNL (Voir Figure 2.22(b)) montre que notre débruitage introduit

moins d'erreur au niveau des billes de calibration et débruite plus fortement les régions sombres.



(a) Image différence du MNL

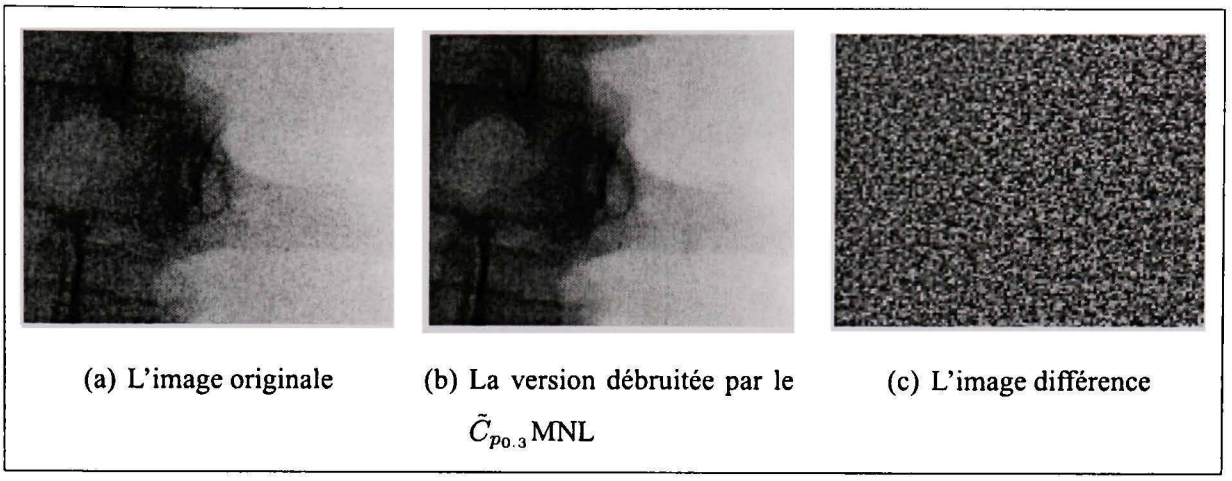
(b) Image différence entre le filtre MNL et le filtre $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL

Figure 2.22 Les images différence avec le filtre MNL original où la largeur de bande a été choisie comme étant la largeur de bande médiane du filtre $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL.

Finalement puisque dans la dernière partie de cette thèse nous nous intéressons à la segmentation des pédicules, nous présentons sur la Figure 2.23, le débruitage du voisinage d'un pédicule par le filtre $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes concentrés sur le paramètre de régularisation du filtre à moyennes non-locales. Parmi les différents outils proposés dans la littérature, nous avons choisi la statistique C_p ; Premièrement parce qu'elle est une mesure d'adéquation fiable, deuxièmement car elle peut être aisément étendue aux données hétéroscédastiques. Nous avons utilisé la méthode de Newton pour chercher le minimum de cette statistique. Nous avons aussi contribué à plusieurs améliorations du filtre MNL. Nous avons ainsi introduit une régression robuste pour réduire le biais introduit. Les expériences montrent que la sélection automatique et au pixel de la largeur de bande augmente considérablement les



(a) L'image originale (b) La version débruitée par le $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL (c) L'image différence

Figure 2.23 Le voisinage d'un pédicule et sa version régularisée par le filtre $\tilde{C}_{p_{0.3}}$MNL.

performances du filtre. Aussi, la statistique C_p nous fournit une mesure d'adéquation. Cette dernière mesure la qualité au pixel du débruitage. Finalement, nous avons adapté ce filtre aux images hétéroscédastiques, fournissant ainsi un modèle de débruitage approprié pour les radiographies. Ce dernier modèle ne nécessite pas l'ajustement de paramètres.

Dans le chapitre suivant, nous présentons comment étendre ce modèle de régularisation aux Hessiens. Ainsi nous développons deux nouveaux filtres avec un nombre de paramètres réduits et bien adaptés au type d'imagerie qui nous intéresse dans cette thèse.

CHAPITRE 3

MODÈLE DE DIFFUSION

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre nous avons vu que le flou était une des dégradations majeures des radiographies. Comme le bruit, cette dégradation réduit la qualité des segmentations lorsqu'aucun prétraitement n'est réalisé pour la supprimer ou l'atténuer. Nous avons choisi d'utiliser les EDP pour réaliser cette tâche. Nous souhaitons développer un modèle avec un nombre de paramètres réduit et qui s'adapte correctement à la spécificité des radiographies.

Dans la revue de littérature, nous avons présenté chronologiquement les principales EDPs reliées au filtrage que nous souhaitons réaliser. Cette revue de littérature s'est achevée sur deux modèles de tenseurs structurels adaptatifs. Outre les inconvénients que nous avons présentés dans cette première partie, ceux-ci ne permettent que des régularisations locales. Ainsi, il se peut, dans le cas d'une texture, que des motifs se répètent non localement ; cette information non locale permettrait d'obtenir une meilleure estimation du tenseur structurel, mais elle n'est pas prise en compte dans les deux modèles précédents. Enfin, certains paramètres doivent être ajustés pour optimiser l'algorithme ; le paramètre ρ de régularisation pour le premier modèle et le nombre d'itérations pour la diffusion non-linéaire. Nous proposons dans ce chapitre, un tenseur structurel adaptatif, basé sur les moyennes non locales du Hessien de l'image. Ce tenseur est ensuite utilisé dans deux différentes EDPs : la diffusion anisotrope et le filtre de choc. En utilisant l'information sur la variance du bruit extraite des radiographies comme nous l'avons présenté dans le premier chapitre, ces deux filtres peuvent être utilisés sur des radiographies.

D'un autre point de vue, la théorie de la gestalt suppose qu'il existe des lois de groupement dans la "vision perceptible". Ces lois s'appliquent à un ensemble de points que l'on

peut identifier ici aux pixels [44]. Certaines d'entre elles s'appliquent aux gradients des pixels de l'image, et donc de même aux tenseurs. Ainsi parmi les lois élémentaires listées par Kaniza[66], se trouvent la "bonne continuation" (des contours), la "symétrie", et la "similarité" (des motifs). Ces différentes lois interviennent sur le gradient des pixels. Or, un modèle local de régularisation du gradient ne permet pas de tenir compte pleinement de ces trois lois. Par exemple le gradient d'un pixel ne doit pas être régularisé seulement avec les gradients des pixels voisins (même si ceux-ci appartiennent au même contour), mais avec les gradients partageant la même caractéristique (amplitude, direction, voisinage,..). Pour cette raison, nous pensons qu'un modèle non local est beaucoup plus approprié pour la régularisation de ce type de données. Nous proposons donc de régulariser les tenseurs avec un filtre plus élaboré, basé sur des moyennes non-locales, et qui semble plus approprié dans le cadre de la théorie de la perception.

3.1.1 Extension du filtre MNL au tenseur

Pour rappel, le filtre MNL appliqué aux images consiste à substituer le pixel bruité par un somme pondérée des autres pixels de l'image. L'extension au tenseur est un peu plus délicate puisque chaque tenseur J (Hessien) d'une image I comporte quatre canaux :

$$J[I] = \begin{pmatrix} I_x^2 & I_x I_y \\ I_x I_y & I_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^1 & J^2 \\ J^2 & J^3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Le filtre MNL est appliqué à chaque canal l du tenseur :

$$J_{\text{MNL}}^{\mathcal{N}(j),l}[I](i) = \sum_k w_i^{\mathcal{N}(j),h}(k) J^l[I](k) \tag{3.2}$$

Lorsque $i = j$, $J_{NL}^{\mathcal{N}(j),l}[I](i)$ est abusivement noté $J_{\text{MNL}}^l[I](i)$. Il est à noter que le même poids est utilisé pour les différents canaux l d'un même tenseur $J[I](k)$ afin de conserver la semi-positivité du tenseur débruité. Le noyau utilisé pour calculer les poids w_i est le même que celui de l'équation (1.32). Cependant, la distance $d_J(J[I](i), J[I](k))$ entre les deux tenseurs $J[I](i)$ et $J[I](k)$ doit refléter la distance entre chacun des canaux. Ainsi on

utilise la distance suivante :

$$d_J(J[I](i), J[I](k)) = d_c(J^1(i), J^1(k)) + d_c(J^2(i), J^2(k)) + d_c(J^3(i), J^3(k)) \quad (3.3)$$

Comme pour le filtre MNL, d_c mesure la distance entre les voisinages de $J^l(i)$ et $J^l(k)$. Néanmoins, cette distance est un petit peu plus complexe pour les tenseurs. En effet, si l'on considère la Figure 3.1, on remarque que le pixel k est sur le contour opposé de celui auquel appartient i. $J[I](k)$ doit dont participer activement à la régularisation de $J[I](i)$. On note X_i^l le voisinage de $J^l[I](i)$. Or, la Figure 3.2 montre que pour chaque canal l, les voisinages X_i^l et X_k^l des deux pixels i et k sont très différents. En utilisant la distance (2.19), le pixel k n'aura qu'une faible incidence sur la régularisation du tenseur en i.

On peut cependant remarquer que dans notre exemple, pour chaque canal l, les motifs des voisinages X_i^l et X_k^l sont inversés suivant une ou deux symétries (d'axe horizontal et vertical passant par le centre du motif). Ceci est toujours vrai lorsque les contours sont opposés. La distance d_c choisie est donc de la forme :

$$d_c(J^l(i), J^l(k)) = \min_{S \in \mathbb{S}} \left(d(X_i^l, SX_k^l) \right) \quad (3.4)$$

où d est la distance de l'equation (2.19) et $\mathbb{S}$ est un ensemble de quatre transformations ; les symétries horizontale, verticale, leur combinaison et la transformation identité. Une telle distance permet de tenir compte des voisinages appartenant au même contour et à celui qui lui est opposé s'il existe.

3.1.2 Bruit dans les canaux du tenseur

Dans cette section, pour simplifier les choses nous considérons que l'image I sur laquelle le tenseur est calculé, est une version dégradée par un bruit de variance homogène σ^2. Nous verrons dans la suite comment adapter le modèle pour un bruit de variance non homogène. En calculant la variance du bruit en chaque pixel et pour chaque canal, on obtient que dans

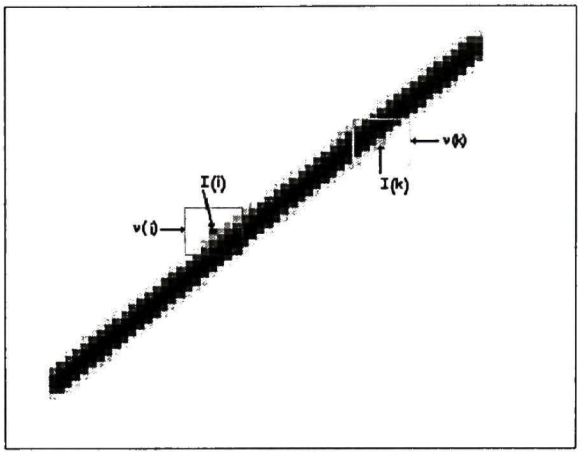
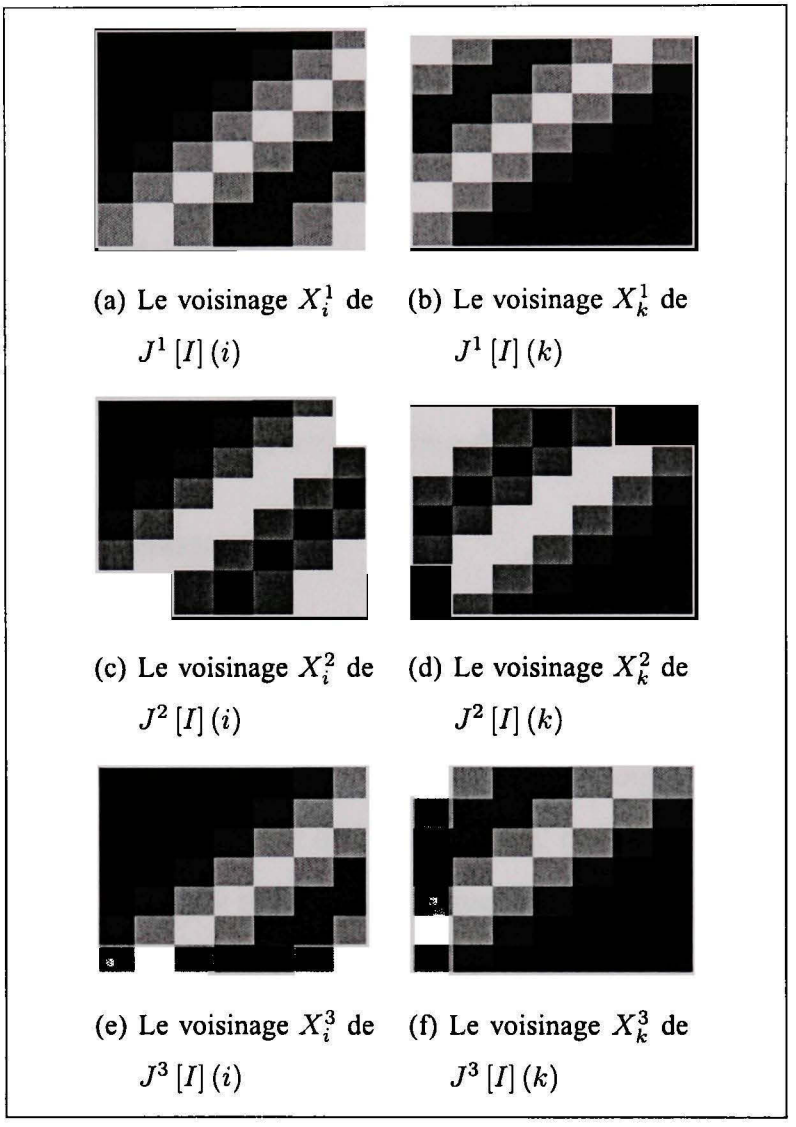


Figure 3.1 Struture en forme de ligne et deux pixels i et k et leurs voisinages X_i et X_k.

le cas d'un bruit gaussien :

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2(k) &= \text{Var } J^1(k) = \text{Var } I_x^2(k) = 4u_x^2(k)\sigma^2 + 3\sigma^4 \\
\sigma_2^2(k) &= \text{Var } J^2(k) = \text{Var } I_y^2(k) = 4u_y^2(k)\sigma^2 + 3\sigma^4 \\
\sigma_3^2(k) &= \text{Var } J^3(k) = \text{Var } I_y(k).I_x(k) = (u_y^2(k) + u_x^2(k) + \sigma^2)\sigma^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Les indices x et y correspondent aux dérivées sur l'image et pour les coefficients ν, ils correspondent aux convolutions par $F_x = [1 \ -1]$ et $F_y = [1 \ -1]^T$. Pour un bruit non gaussien, le kurtosis doit être connu afin de calculer les trois variances précédentes. Le bruit dans le tenseur n'est donc plus homogène, il dépend de la valeur non bruitée du tenseur. On remarque que la variance du bruit pour chaque canal et chaque pixel dépend de la valeur non bruitée que le tenseur doit prendre. Plus le tenseur prend des valeurs importantes et plus le bruit est important (pour une même réduction ν). Cependant, les valeurs u_x et u_y sont inconnues puisqu'elles dépendent de l image non bruitée u, pour obtenir une estimation des σ_l^2, on remplace dans l'équation (3.5) les dérivées de u par les dérivées de I régularisées.



(a) Le voisinage X_i^1 de $J^1[I](i)$

(b) Le voisinage X_k^1 de $J^1[I](k)$

(c) Le voisinage X_i^2 de $J^2[I](i)$

(d) Le voisinage X_k^2 de $J^2[I](k)$

(e) Le voisinage X_i^3 de $J^3[I](i)$

(f) Le voisinage X_k^3 de $J^3[I](k)$

Figure 3.2 Les voisinages des trois canaux des tenseurs $J[I](i)$ et $J[I](k)$.

3.1.3 Choix du paramètre optimal de régularisation

Pour ce type de données, il faut utiliser une régularisation adaptative, on souhaite ainsi régulariser plus fortement les canaux du tenseur lorsque le bruit est important et plus faiblement lorsque la variance du bruit est petite. Pour ce faire, la variance du bruit n'étant pas homogène dans chaque canal du tenseur, nous utilisons $\tilde{C}_p$ la statistique C_p étendue aux données hétéroscédastiques définies par l'équation (2.27). Pour un tenseur $J_{\text{MNL}}[I](i)$

dont chaque canal a été débruité par (3.2), celle-ci s'écrit :

$$\tilde{C}_P(J_{\text{MNL}}[I](i)) = \sum_{j,l} \frac{(J^l(j) - J_{\text{MNL}}^{\mathcal{N}(i),l}(j))^2}{3\sigma_l^2(j)} - n + 2 \times \sum_j w_j^{\mathcal{N}(i),h}(j) \tag{3.6}$$

$(J^l(j) - J_{\text{MNL}}^{\mathcal{N}(i),l}(j))^2$ représente les résidus de la régression. L'amplitude de ceux-ci est proportionnelle à la variance du bruit $\sigma_l^2(j)$. Afin de pouvoir comparer tous ces résidus, ils sont tous centrés et réduits. Le paramètre optimal h^* est calculé en chaque pixel en minimisant $\tilde{C}_p$ par la méthode de Newton comme dans le premier chapitre.

3.1.4 Une régression robuste

Comme pour le filtre $\tilde{C}_p$MNL, une régression robuste est aussi recommandée pour la régularisation des tenseurs, d'autant plus que sur les dérivatives, les voisinages sont souvent très différents. Or la régression se fait par seuillage de la distance d_c (voir paragraphe 2.3.4) et le seuil dépend de la variance du bruit. Le seuil doit donc être adapté en fonction de la variance du bruit en chaque pixel. Pour chaque canal et en chaque pixel i, les canaux des tenseurs échantillons sont seuillés en utilisant le seuil adaptatif suivant :

$$Thresh(d_c^l) = \mathbb{E}L_c^l + 2 * \sqrt{\text{var}L_c^l} \tag{3.7}$$

où l'espérance $\mathbb{E}L_c^l$ et la variance $\text{Var}L_c^l$ sont calculées en considérant que la variance du bruit est uniforme pour chaque canal l sur $\mathcal{N}(i)$ et de valeur σ_l^2. Lorsque pour un canal l, la distance d'un échantillon $J^l(k)$ a $J^l(i)$ est supérieure au seuil, alors le tenseur de ce pixel k n'est pas utilisé pour cette régularisation.

Dans cette partie nous avons étendu le filtre MNL aux tenseurs. Les tenseurs ainsi régularisés sont appelés tenseurs structurels à moyennes non locales (TSMNL). Dans la suite, nous montrons comment intégrer ces nouveaux tenseurs dans le filtre anisotrope et dans le filtre de choc. La principale difficulté consiste à chaque itération à connaître la variance du bruit en chaque pixel.

3.2 Diffusion anisotrope

Dans cette sous section nous nous intéressons à nouveau au filtre de diffusion anisotrope. Pour rappel, cette dernière diffusion est guidée par l'équation (1.51), dont la matrice de diffusion est donnée par (1.52). Dans cette partie, nous modifions cette matrice de diffusion. Celle-ci n'est plus calculée à partir du tenseur structurel de Weickert (1.50), mais à partir du TSMNL de l'image débruitée $\hat{I}$ par le filtre $\tilde{C}_p$MNL :

$$J_{\text{MNL}}[\hat{I}] = \tilde{C}_p\text{MNL}\left(\nabla\hat{I}\nabla\hat{I}^T\right) \tag{3.8}$$

L'équation associée au filtre MNL est donnée par l'équation (3.2). Les vecteurs propres v_i^{MNL} et valeurs propres μ_i^{MNL} de $J^{\text{MNL}}[\hat{I}]$ permettent de calculer la matrice de diffusion D^{MNL} :

$$D^{MNL} = (v_1^{MNL}\ v_2^{MNL})^T g \begin{pmatrix} \mu_1^{MNL} & 0 \\ 0 & \mu_2^{MNL} \end{pmatrix} (v_1^{MNL}\ v_2^{MNL}) = \begin{pmatrix} D_{11}^{MNL} & D_{12}^{MNL} \\ D_{21}^{MNL} & D_{22}^{MNL} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

où la fonction de diffusion g est discutée dans la section 3.2.3.

3.2.1 Discretisation de l'équation

Afin de discrétiser l'équation (1.51), nous utilisons un schéma par différences finies. On utilise un pas spatial Δh (correspondant au pixel) et un pas temporel Δt. Jusqu'à présent, nous avons défini les images avec un seul indice, ceci afin de rendre les équations plus lisibles. Cependant, dans cette partie, les dérivées partielles spatiales ne nous permettent pas une telle liberté. Nous considérerons donc deux indices spatiaux, i et j. On note ainsi $I^t(i,j) = I(i \times \Delta h, y \times \Delta h, \Delta t \times n)$ l'approximation de $I(x,y,t)$. L'image bruitée I correspond à l'image au temps $t = 0$. Cependant, la divergence est un peu plus délicate à discrétiser. Dans un premier temps celle-ci peut être réécrite différemment pour mettre en évidence les dérivées spatiales de l'image :

$$\text{Div}(D^{MNL}\nabla I) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{11}^{MNL}\frac{\partial I}{\partial x} + D_{12}^{MNL}\frac{\partial I}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{21}^{MNL}\frac{\partial I}{\partial x} + D_{22}^{MNL}\frac{\partial I}{\partial y}\right) \tag{3.10}$$

Mais, même ainsi reformulée, l'équation (1.51) est toujours définie dans le domaine continu. Plusieurs approximations existent pour approcher la divergence (3.10), telle que l'approximation par différences finies centrées, ou bien en combinant les différences finies avant et arrière. Néanmoins aucune d'elles n'est vraiment robuste au bruit. La solution proposée dans [7] consiste à utiliser les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial I}{\partial x} \approx I_x(i,j) = \frac{1}{\Delta h}(I(i+\frac{1}{2},j) - I(i,j)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial I}{\partial y} \approx I_y(i,j) = \frac{1}{\Delta h}(I(i,j+\frac{1}{2}) - I(i,j)) \tag{3.11}$$

Ces dérivées sont obtenues par interpolation bilinéaire de l'image. Lorsque celles-ci sont utilisées, une approximation de la divergence donnée par :

$$\begin{aligned}
\text{Div}(D^{MNL}\nabla I) \approx\ & D_{11}^{MNL}(i+\frac{1}{2},j)I(i+1,j) - D_{11}^{MNL}(i-\frac{1}{2},j)I(i,j) \\
-\ & D_{11}^{MNL}(i+\frac{1}{2},j)I(i,j) + D_{11}^{MNL}(i-\frac{1}{2},j)I(i-1,j) \\
+\ & D_{21}^{MNL}(i+\frac{1}{2},j)I(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) - D_{21}^{MNL}(i-\frac{1}{2},j)I(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) \\
-\ & D_{21}^{MNL}(i+\frac{1}{2},j)I(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}) + D_{21}^{MNL}(i-\frac{1}{2},j)I(i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}) \\
+\ & D_{12}^{MNL}(i,j+\frac{1}{2})I(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) - D_{12}^{MNL}(i,j-\frac{1}{2})I(i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}) \\
-\ & D_{12}^{MNL}(i,j+\frac{1}{2})I(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}) + D_{12}^{MNL}(i,j-\frac{1}{2})I(i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}) \\
+\ & D_{22}^{MNL}(i,j+\frac{1}{2})I(i,j+1) - D_{22}^{MNL}(i,j-\frac{1}{2})I(i,j) \\
-\ & D_{22}^{MNL}(i,j+\frac{1}{2})I(i,j) + D_{22}^{MNL}(i,j-\frac{1}{2})I(i,j-1)
\end{aligned}$$

On note cette approximation $\text{Div}(D^{MNL}(i,j)\nabla I(i,j))$. L'équation (1.51) est finalement discrétisée par :

$$I^{t+1}(i,j) = I^t(i,j) + \frac{\Delta h}{\Delta t}\text{Div}(D^{MNL}(i,j,t)\nabla I^t(i,j)) \tag{3.12}$$

Dans cette dernière équation intervient la discrétisation $D^{MNL}(i,j,t)$ de la matrice de diffusion D^{MNL}. Celle-ci est obtenue à partir de la discrétisation du tenseur $J_{\text{MNL}}[\hat{I}]$:

$$J_{\text{MNL}}[\hat{I}^t](i,j) = \tilde{C}_p\text{MNL}\begin{pmatrix} (\hat{I}_x^t(i,j))^2 & \hat{I}_x^t(i,j) \times \hat{I}_y^t(i,j) \\ \hat{I}_x^t(i,j) \times \hat{I}_y^t(i,j) & (\hat{I}_y^t(i,j))^2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Afin de pouvoir utiliser le filtre $\tilde{C}_pMNL$ sur les tenseurs et sur les images, il faut connaître à chaque itération t et en chaque pixel (i,j) la variance du bruit de l'image et de chaque canal du tenseur. Dans la prochaine sous-section, nous nous intéressons à l'évolution du bruit suivant les itérations.

3.2.2 Évolution du bruit suivant les itérations

Le processus est initialisé au temps $t = 0$ par l'image bruitée I et par σ^2 la variance du bruit. L'image est dans un premier temps débruitée en utilisant le filtre C_pMNL. En chaque pixel (i,j), la variance du bruit est donc atténuée par un facteur $\nu^0(i,j)$ (voir section 2.3.1). Ce facteur est différent d'un pixel à l'autre. La variance du bruit présent dans $\hat{I}$ n'est donc plus constante. Et la variance du bruit dans les canaux du tenseur n'est donc plus donnée par l'équation (3.5). Pour généraliser, on considère l'image $\hat{I}^t$ et sa variance au pixel $(\sigma^t)^2$. A partir de cette image et de sa variance, l'annexe II précise le calcul des variances du bruit présent dans chaque canal du Hessien de $\hat{I}^t$. Le résultat final pour chaque canal et en chaque pixel est donné par :

$$\begin{aligned}
(\sigma_1^t)^2 &= \mathrm{Var}(\hat{I}_x^t)^2 = 4(\nu_x^t I_x^t \sigma^t)^2 + 3(\nu_x^t \sigma^t)^4 \\
(\sigma_2^t)^2 &= \mathrm{Var}(\hat{I}_y^t)^2 = 4(\nu_y^t I_y^t \sigma^t)^2 + 3(\nu_y^t \sigma^t)^4 \\
(\sigma_3^t)^2 &= \mathrm{Var}(\hat{I}_y^t.\hat{I}_x^t) = ((\nu_x^t I_y^t)^2 + (\nu_y^t I_x^t)^2 + (\nu_x^t \nu_y^t \sigma^t)^2)(\sigma^t)^2
\end{aligned}$$

Ces trois variances sont utilisées pour réduire et centrer les résidus des canaux des tenseurs utilisés dans la statistique $\tilde{C}_p$ donnée par l'équation (2.27).

Il y a aussi réduction de la variance du bruit présent dans l'image lorsqu'une itération de la diffusion anisotrope est réalisée. En effet, l'équation (3.12) se réécrit de manière simple :

$$I^{t+1}(i) = (1 - \sum_k \beta_k) I^t(i) + \sum_k \beta_k I^t(i + / - k) \tag{3.14}$$

où l'indice k correspond aux 8 voisins du pixel i (dépendamment de la discrétisation utilisée) et les β_k aux poids qui leur sont associés. Ces derniers poids sont calculés à

partir de la matrice de diffusion $D^{MNL}(i,j,t)$, des pas spatial et temporel (voir annexe II). On trouve ainsi qu'une itération du schéma (3.14) réduit la variance du bruit de $(\varkappa^{t+1})^2 = (1 - \sum_k \beta_k)^2 + \sum_k \beta_k^2$. La variance du bruit restant en chaque pixel de l'image I^{t+1} est mise à jour par $\sigma^{t+1} = \varkappa^{t+1}\sigma^t$. Une fois I^{t+1} et σ^{t+1} connus on réalise une nouvelle itération du processus et ce, jusqu'au nombre d'itérations souhaité.

Afin d'accélérer le processus, après les deux premières itérations de la diffusion anisotrope, on utilise les largeurs de bande de l'itération précédente $t-1$ pour initialiser la méthode de Newton. On effectue seulement une itération de cette dernière méthode. En effet d'une itération à la suivante, la méthode de Newton converge pour des largeurs de bande proches, en une seule itération on est proche de la largeur de bande optimale pour ce temps t.

Entrée: Image originale I_0

Sortie : L'image filtrée

1.1 estimation de la variance σ_0^2 du bruit présent dans I_0;

1.2 $t = 0$;

1.3 **repeat**

1.4 I^t est débruitée en utilisant le filtre MNL. On obtient $\hat{I}^t$ l'image filtrée et ν^t la coefficient de réduction du bruit;

1.5 Calcul du tenseur $J_{\text{MNL}}[\hat{I}^t]$ et des variances $(\sigma_l^t)^2$ du bruit pour chaque canal l;

1.6 Calcul des valeurs propres de $J_{\text{MNL}}[\hat{I}^t]$, leur filtrage par la fonction g et calcul de $D^{MNL}(.,t)$;

1.7 Diffusion anisotrope de I^t, On obtient I^{t+1}, et le coefficient de réduction $\varkappa^{t+1}$ de la variance du bruit;

1.8 Calcul de la variance $(\sigma^{t+1})^2 = (\varkappa^{t+1})^2(\sigma^t)^2$ du bruit dans I^{t+1};

1.9 $t = t + 1$;

1.10 **until** $t < iter$, *iter est le nombre maximal d itérations* ;

Algorithm 1: Diffusion anisotrope

3.2.3 La fonction de diffusion g

La fonction de diffusion (1.35) ne dépend que de l'amplitude du gradient pour quantifier la diffusion. Si une diffusion anisotrope utilisant une telle fonction permet d'obtenir des résultats satisfaisants lorsque le tenseur est régularisé par une gaussienne, ce n'est plus forcément le cas lorsque la régularisation est non-linéaire ou non locale. Pour s'en rendre compte plus facilement, considérons un coin non-bruité (voir Figure 3.7(a)). Le tenseur $J[I](i)$ au pixel i du coin prend les valeurs $Cste\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $J(i)$ sont $\mu_1 = 2 * Cste$ et $\mu_2 = 0$. Les vecteurs vert et rouge donnent respectivement la direction de v_1 et de v_2. Il semble évident, pour ne pas détruire le coin, de ne pas diffuser suivant v_2. Cependant, μ_2 étant nulle, la diffusion suivant cette direction serait maximale. Par contre, les tenseurs de pixels voisins de i sont très différents. En utilisant une gaussienne pour régulariser J, les tenseurs des pixels voisins obtiennent un poids important dans la régularisation, cela se traduit numériquement par une augmentation de μ_2 et une diminution de μ_1. L'information sur le contour horizontal et le contour vertical est propagée jusqu au coin. La régularisation isotrope du tenseur permet ainsi de mettre en évidence les coins et une certaine discontinuité des contours de l'image. Lorsqu'une régularisation anisotrope ou non locale est utilisée, le tenseur est régularisé seulement avec les tenseurs de même structure (c'est-à-dire μ_1 grand et μ_2 très petit). Ainsi l'information, sur les contours horizontal et vertical, n'est plus diffuse jusqu'au coin. Ainsi, bien que le tenseur structurel donne une meilleure estimation du gradient de l'image non bruitée, en l'utilisant dans la diffusion anisotrope (1.51), on risque fortement de diffuser les coins et toutes les discontinuités des contours de l'image.

Visuellement, on remarque que le champ des vecteurs propres principaux v_1 du J_{MNL} présente des discontinuités. Ces dernières traduisent un changement brutal de la direction du gradient. Ainsi, le gradient suivant la direction v_2 est aussi important. En régularisant suivant cette direction, une part importante de l'information est détruite. Nous

proposons dans cette partie d'utiliser ces discontinuités dans la fonction de diffusion g. Une manière de mesurer la discontinuité du champ consiste à calculer le produit scalaire entre les vecteurs $v_1(i+v_2)$ et $v_1(i-v_2)$. Lorsque ces deux vecteurs sont linéaires, alors la direction du gradient est localement régulière, on peut donc diffuser suivant $v_2(i)$. Plus le produit scalaire est petit et moins la direction du gradient est régulière, et plus la diffusion suivant v_2 est risquée. Nous proposons donc d'utiliser la fonction de diffusion suivante :

$$g\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mu_1) & 0 \\ 0 & \max(g(\mu_2), g((1-s)\mu_1)) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

où s est le produit scalaire :

$$s =< v_1(i+v_2), v_1(i-v_2) > \tag{3.16}$$

Ainsi lorsque μ_2 est grand ou lorsque il y a une discontinuité du champ proche d'un fort gradient (μ_1 grand) la diffusion est très faible suivant le vecteur v_2.

3.3 Filtre de choc

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au filtre de choc (1.53) présenté par Weickert. Pour cela, nous avons remplacé $v_{\omega\omega}$ par $\hat{I}_{\zeta\zeta}$. Où $\hat{I}$ est l'image débruitée par le filtre MN et ζ est la direction du vecteur propre principal de $J_{\text{MNL}}(\hat{I})$. La nouvelle équation a donc la forme suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\text{sign}(\hat{I}_{\zeta\zeta})|\nabla I| \tag{3.17}$$

3.3.1 Discrétisation du filtre de choc

Dans cette section aussi nous faisons dépendre l'image de deux indices afin d'utiliser les dérivées spatiales.

La discrétisation du filtre de choc (3.17) en utilisant les différences finies donne :

$$I^{t+1}(i,j) = \begin{cases} I^t(i,j) + \sqrt{F_1^t(i,j)} & \text{si } \hat{I}^t_{\zeta\zeta}(i,j) > 0 \\ I^t(i,j) + \sqrt{F_2^t(i,j)} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.18}$$

où :

$$\begin{aligned} F_1^t(i,j) = &\ \max(0,\hat{I}_x^t(i,j))^2 + \min(0,\hat{I}_x^t(i-1,j))^2 \\ + &\ \max(0,\hat{I}_y^t(i,j))^2 + \min(0,\hat{I}_y^t(i,j-1))^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

et

$$\begin{aligned} F_2^t(i,j) = &\ \min(0,\hat{I}_x^t(i,j))^2 + \max(0,\hat{I}_x^t(i-1,j))^2 \\ + &\ \min(0,\hat{I}_y^t(i,j))^2 + \max(0,\hat{I}_y^t(i,j-1))^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

La dérivée seconde $\hat{I}_{\zeta\zeta}^t$ est obtenue par :

$$\hat{I}_{\zeta\zeta}^t(i,j) = v_{11}^2(i,j)\hat{I}_{xx}^t(i,j) + 2v_{11}v_{12}(i,j)\hat{I}_{xy}^t(i,j) + v_{12}^2(i,j)\hat{I}_{yy}^t(i,j) \tag{3.21}$$

où $v_1 = (v_1(i,j)\ v_2(i,j))$ est le vecteur propre le plus grand du tenseur $J_{\text{MNL}}[\hat{I}^t](i,j)$. Et les indices xx,xy,yy représentent les dérivées spatiales secondes obtenues avec des masques de différences finies standards.

3.3.2 La variance du bruit suivant les itérations

Pour débruiter l'image I^t et le tenseur associé à chaque itération t, on a besoin de connaître la variance du bruit en chaque pixel de I^t. Malheureusement, la diffusion (3.17) ne permet pas de la calculer analytiquement. Nous utilisons donc l'estimateur non biaisé de la variance du bruit qui suit :

$$(\hat{\sigma^t})^2(i) = \frac{\sum_j (I^t(j) - \hat{I}^t_{\mathcal{N}(i),h}(j))^2}{n - 2\sum_j w_j^{\mathcal{N}(i)} + \sum_j (w_j^{\mathcal{N}(i)})^2} \tag{3.22}$$

La largeur de bande h doit être suffisamment grande pour obtenir une bonne estimation de la variance du bruit et suffisamment petite pour que l'estimation de $(\sigma^t(i))^2$ ne soit pas biaisée. Pour cela on prend à l'itération t, $h^t = h^{*,t-1}/2$ avec $h^{*,t-1}$ comme paramètre optimal pour le débruitage de I^{t-1}. Afin d'accélérer le processus, nous utilisons ici aussi une seule itération de la méthode de Newton après deux itérations du filtre de choc.

Entrée: Image originale I

Sortie : L'image filtrée

débruitage de I, on note I_0 l'image filtrée;

estimation de la variance σ_0^2 du bruit présent dans $\hat{I}_0$;

$t = 0$;

repeat

  I^t est débruitée en utilisant le filtre MNL. On obtient $\hat{I}^t$ l'image filtrée et ν^t le coefficient de réduction du bruit. $h^{*,t}$ est le pas optimal;

  Calcul du tenseur $J_{\text{MNL}}(\hat{I}^t)$ et des variances $(\sigma_l^t)^2$ du bruit pour chaque canal l;

  Calcul de la dérivée seconde $\hat{I}^t_{\zeta\zeta}$;

  Diffusion de I^t par le filtre (3.17). On obtient I^{t+1};

  Estimation de la variance σ^{t+1} du bruit dans I^{t+1} en utilisant (3.22) et le pas optimal $h^{*,t}$;

  $t = t + 1$;

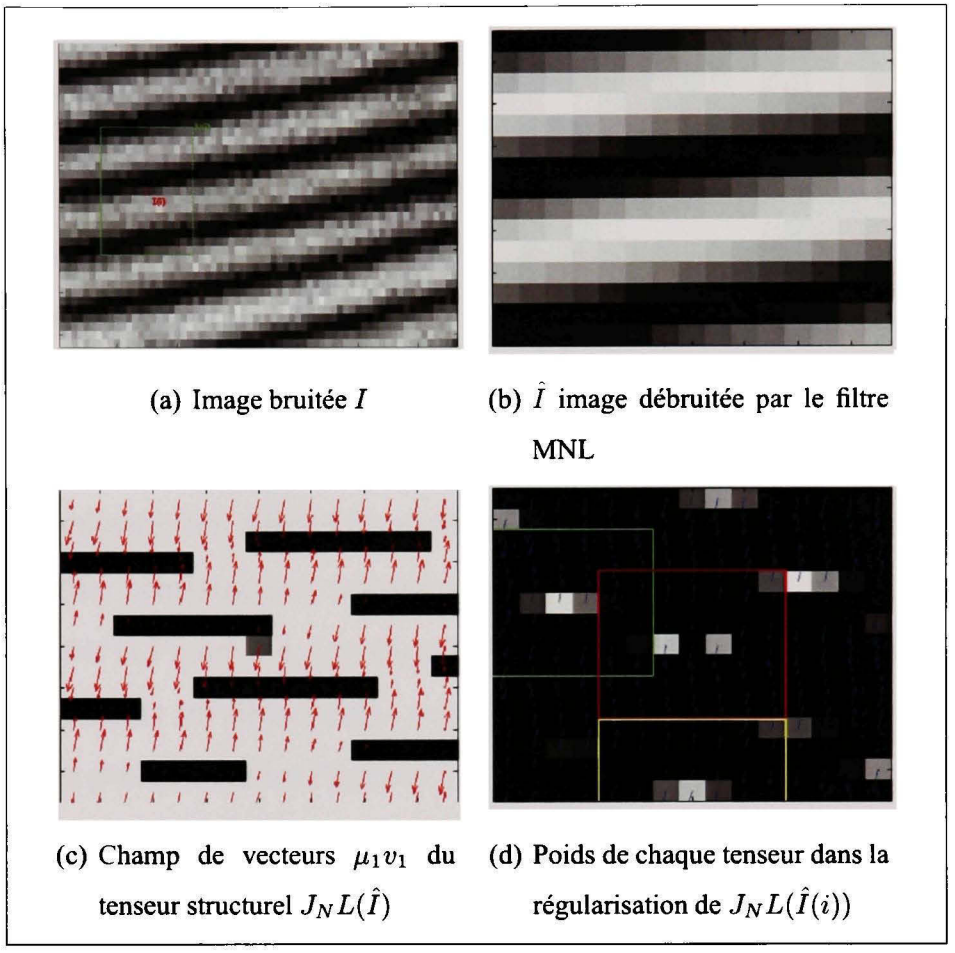
until *Jusqu'à convergence ou jusqu a un nombre maximal d itérations* ;

Algorithm 2: Filtre de choc

3.4 Expérimentations

3.4.1 Robustesse de la régularisation

La Figure 3.3(a) présente une image texturée et bruitée par un bruit gaussien. Nous nous intéressons à la régularisation du tenseur structurel au pixel $I(i)$. L'image est d'abord régularisée en utilisant le filtre MNL. Les pixels échantillons utilisés pour la régularisation de $I(i)$ sont ceux contenus dans le voisinage X_i (contenus dans le carré vert). La Figure 3.3(b) correspond au voisinage X_i de l'image débruitée $\hat{I}$. La Figure 3.3(c) présente en rouge le champ de vecteur $\mu_1 v_1$ où μ_1 est la valeur propre du tenseur la plus importante du tenseur $J_{\text{MNL}}[\hat{I}](i)$ et v_1 son vecteur propre associé. Le fond est composé de trois niveaux de gris. Le pixel i est en gris clair. Les tenseurs échantillons ont une couleur blanche alors



(a) Image bruitée I

(b) $\hat{I}$ image débruitée par le filtre MNL

(c) Champ de vecteurs $\mu_1 v_1$ du tenseur structurel $J_N L(\hat{I})$

(d) Poids de chaque tenseur dans la régularisation de $J_N L(\hat{I}(i))$

Figure 3.3 La robustesse du filtre $\tilde{C}_p$MNL sur le champ de tenseurs d'une image texturée.

que les tenseurs déviants "outliers" sont en noir. On remarque que les tenseurs déviants sont ceux dont l'amplitude du vecteur $\mu_1 v_1$ est faible. Plus généralement ce sont ceux qui ont un voisinage tensoriel très différent de celui du tenseur à régulariser. Certains déviants sont adjacents au tenseur $J[\hat{I}(i)]$, une régularisation spatiale (comme celle de Weickert) n'est donc vraiment pas appropriée pour ce type d'images. La Figure 3.3(d) présente les poids des tenseurs échantillons. Plus le niveau de gris est clair et plus le poids utilisé est élevé. On constate que quelques échantillons reçoivent des poids beaucoup plus élevés que les autres. Pour ceux-ci, la distance entre leur voisinage $\mathcal{V}$ et celui de $J[\hat{I}(i)]$ est petite. Ainsi en comparant la partie supérieure du voisinage jaune, on remarque qu'il est très proche de celui en rouge. Aussi le voisinage en vert est proche de celui en rouge

à une rotation près. On remarque que les tenseurs ayant reçu un poids important (donc ceux influents pour la régularisation) ne sont pas adjacents à $J[\hat{I}(i)]$, il y a même des tenseurs déviants qui les séparent. Une régularisation par diffusion (telle celle de Brox) ne permettrait pas de leur donner autant d'influence. En superposant 3.3(b) et (d), les tenseurs ayant eu un poids fort sont ceux correspondant aux pixels ayant la même localisation dans la texture, ou bien sur un motif opposé.

3.4.2 Comparaison de trois tenseurs

Pour pouvoir comparer les différents tenseurs structurels nous nous sommes intéressés à une image simple, constante par morceaux, dégradée par un bruit gaussien de variance 0.02 présentée sur la Figure 3.4. Les Figures du tableau 3.5 montrent les comportements des différents tenseurs sur deux parties de la Figure 3.4 encadrées en rouge. Le gradient de ces parties est présenté sur les Figures3.5(a) et (b). Les contours réels sont perceptibles, mais nettement bruités, notamment pour la Figure (a). Les Figures 3.5(c) et (d) correspondent au champ de vecteurs $\mu_1 v_1$, où μ_1 est la valeur propre la plus grande du tenseur $J_\varrho(I_\varsigma)$ de Weickert et v_1 le vecteur propre associé. Nous avons pris $\varrho = 3$ et $\varsigma = 0.5$. Ce champ de vecteurs est comparable au gradient de l'image. On remarque que sur les zones homogènes de l'image 3.5, l'amplitude des vecteurs est pratiquement nulle, elles ont été bien régularisées. Le long des contours, l'amplitude des vecteurs est beaucoup plus importante et ceux-ci sont perpendiculaires aux contours. Cependant, les contours influent sur le champ de vecteurs sur une largeur de bande assez importante, on remarque que le champ de vecteurs est arrondi dans les coins de l'image, les discontinuités du gradient ne sont ainsi par respectées. Les Figures 3.6(e) et (f) présentent les champs de vecteurs $\mu_1 v_1$ du tenseur non linéaire isotrope de Brox. Ce tenseur est obtenu après 125 itérations de la diffusion non linéaire isotrope 1.57 avec pour pas spatio-temporel $\Delta t/\Delta h = 0.2$. Comme pour le tenseur de Weickert, l'amplitude des vecteurs est presque nulle pour les zones homogènes. Le long des contours, l'amplitude des vecteurs est plus élevée. Les contours influent seulement sur les vecteurs des pixels adjacents à ceux-ci. Les discontinuités

sont beaucoup mieux respectées. Enfin pour les deux dernières Figures, nous présentons le champ de vecteurs $\mu_1 v_1$ associé au tenseur $J[\hat{I}(i)]$. Ce champ est obtenu automatiquement. Il possède les mêmes caractéristiques que celui de Brox. On remarque néanmoins que le long des contours la direction et l'amplitude des vecteurs semblent beaucoup plus uniformes que pour celui régularisé par le tenseur de Brox. Un nombre d'itérations plus important aurait permis de mieux uniformiser le tenseur de Brox, mais les discontinuités du champ en auraient souffert.

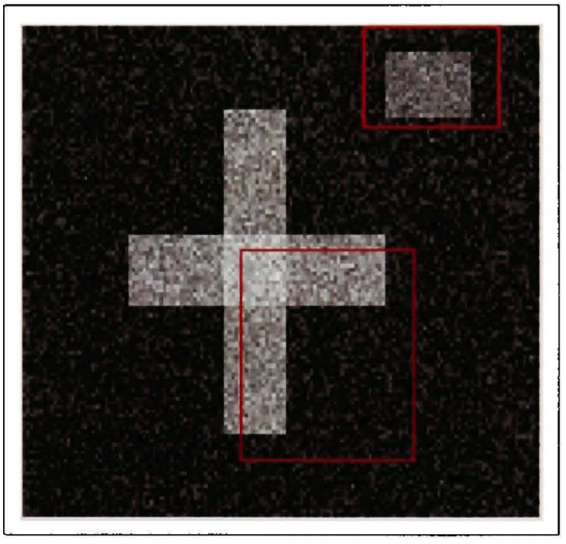
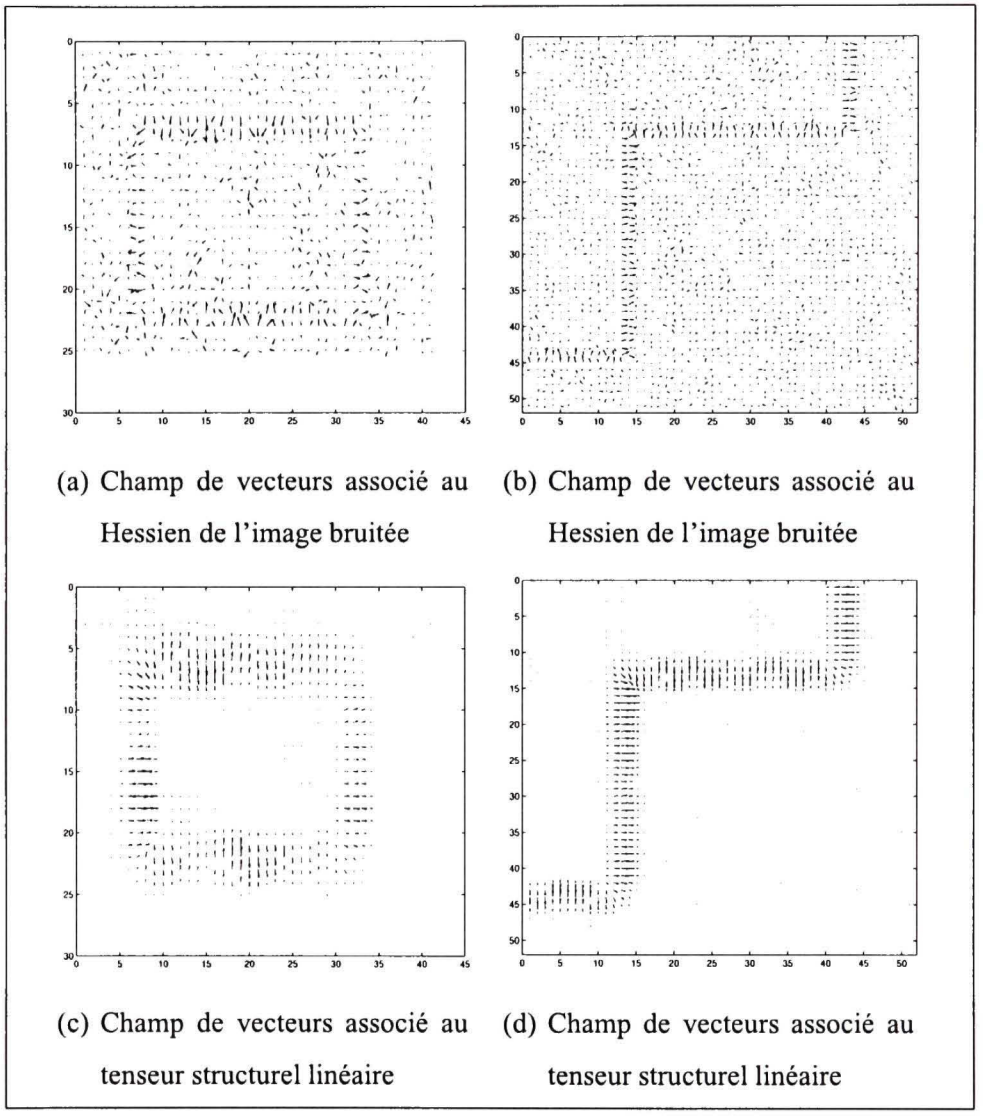


Figure 3.4 Image test.

3.4.3 Détection des coins

Les coins sont vecteurs d'informations importantes, car ils représentent des discontinuités auxquelles l'oeil est sensible. Ils correspondent surtout aux arêtes en T qui mettent en évidence le principe d'occlusion. Weickert puis Brox proposent de les détecter en utilisant les valeurs propres du tenseur de diffusion. En effet, lorsque :

- $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$, alors il n'y a pas de contours ;
- $\mu_1 \gg \mu_2 \approx 0$, alors il y a un contour suivant le vecteur v_1 ;
- $\mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$ alors, on est en présence d'un coin.



(a) Champ de vecteurs associé au Hessien de l'image bruitée

(b) Champ de vecteurs associé au Hessien de l'image bruitée

(c) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel linéaire

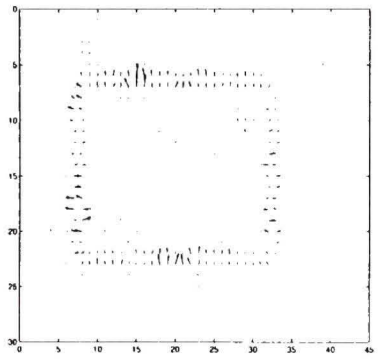
(d) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel linéaire

Figure 3.5 Le champ de vecteurs propres associé au tenseur de l'image bruitée 3.4 et des vecteurs associés au tenseur structurel linéaire.

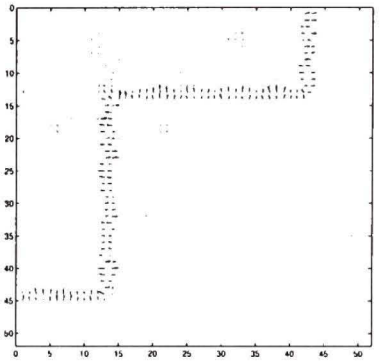
En seuillant la valeur propre μ_2, il est possible de détecter les coins. Cependant, il est facile de trouver un contre exemple. Considérons le motif de la Figure 3.7(a) où les pixels noirs ont une valeur de 0 et les blancs une valeur de 10. On trouve alors que le tenseur du pixel central est :

$$J = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

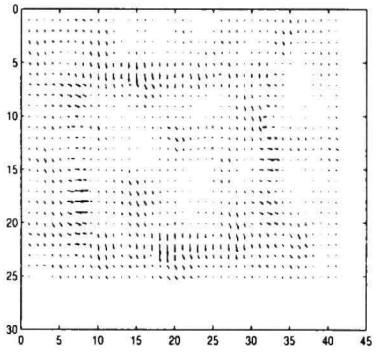
On en déduit les valeurs propres $\mu_1 = 200$ et $\mu_2 = 0$. On est ici en présence d'un coin avec une valeur propre seconde nulle, ce coin ne sera donc pas détecté par la méthode



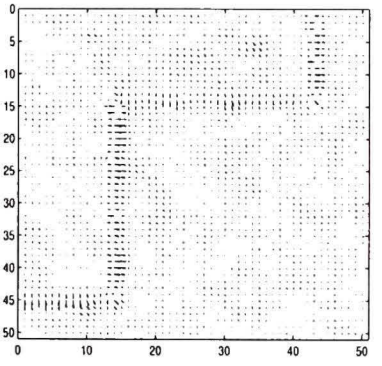
(a) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel non linéaire de Brox



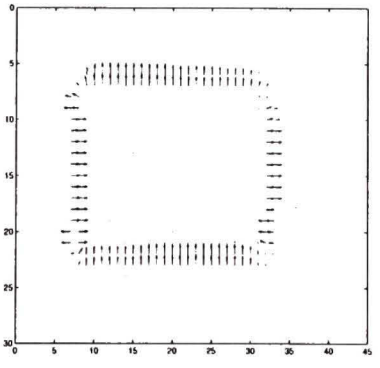
(b) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel non linéaire de Brox



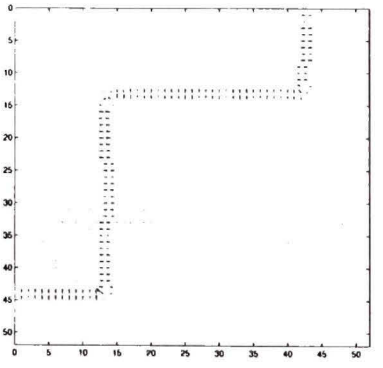
(c) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel non linéaire de van der Boomgaard



(d) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel non linéaire de van der Boomgaard

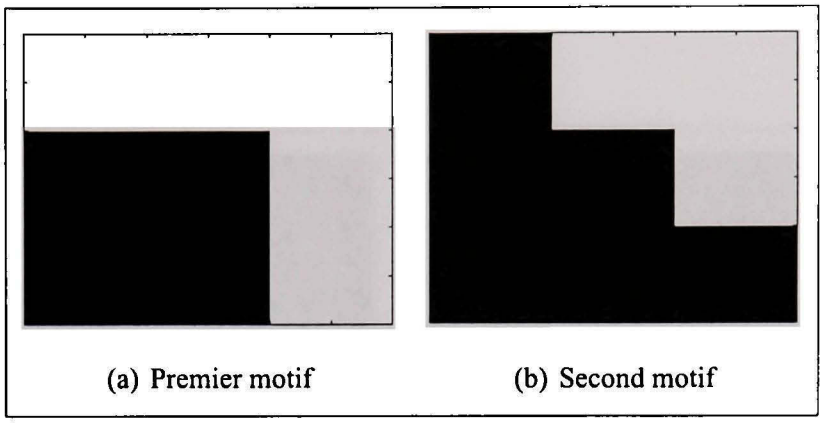


(e) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel non-local et automatique



(f) Champ de vecteurs associé au tenseur structurel non-local et automatique

Figure 3.6 Les champs de vecteurs propres associés aux tenseurs structurels non linéaire et non local de l'image bruitée 3.4.



(a) Premier motif (b) Second motif

Figure 3.7 Le premier motif représente un coin alors que le second représente un contour diagonal.

de Weickert. Aussi on remarque que le tenseur J est égal au tenseur du pixel central de Figure 3.7(b). On comprend ainsi mieux pourquoi, le coin n'est pas détecté. Nous proposons de redéfinir les coins comme étant des discontinuités dans le champ du vecteur propre principal v_1 et pour lesquelles la valeur propre principale μ_1 est grande. En effet, on remarque sur la Figure 3.8(e) qu'en présence d'un coin en i, les vecteurs $v_1(i)$ (en vert), $v_1(i + v_2)$ et $v_1(i - v_2)$ (en rouge) ont des directions différentes. Aux coins, donc aux discontinuités du champ, le produit scalaire entre $v_1(i+v_2)$ et $v_1(i-v_2)$ sera presque nul. On définit donc un coin comme :

- $\mu_1 \gg 0$;
- $< v_1(i + v_2), v_1(i - v_2) > \approx 0$.

Ainsi la Figure 3.8(a) présente une image synthétique avec des coins et des jonctions en X. Pour cette image la valeur propre μ_2 du tenseur est nulle pour tous les pixels, les coins ne peuvent être détectés. Par contre en utilisant la définition précédente, nous détectons tous les coins (voir Figure 3.8(b)). Enfin pour la même image mais bruitée, la Figure 3.8(c) affiche l'amplitude de la valeur propre μ_2. Certains coins, notamment ceux du carré sont très peu visibles et donc difficilement détectables. La Figure 3.8(d) présente le produit scalaire $< v_1(i + v_2), v_1(i - v_2) > \approx 0$ pour $\mu_1 > 1$. On remarque que toutes les régions où se trouvent les discontinuités du champs sont bien détectées.

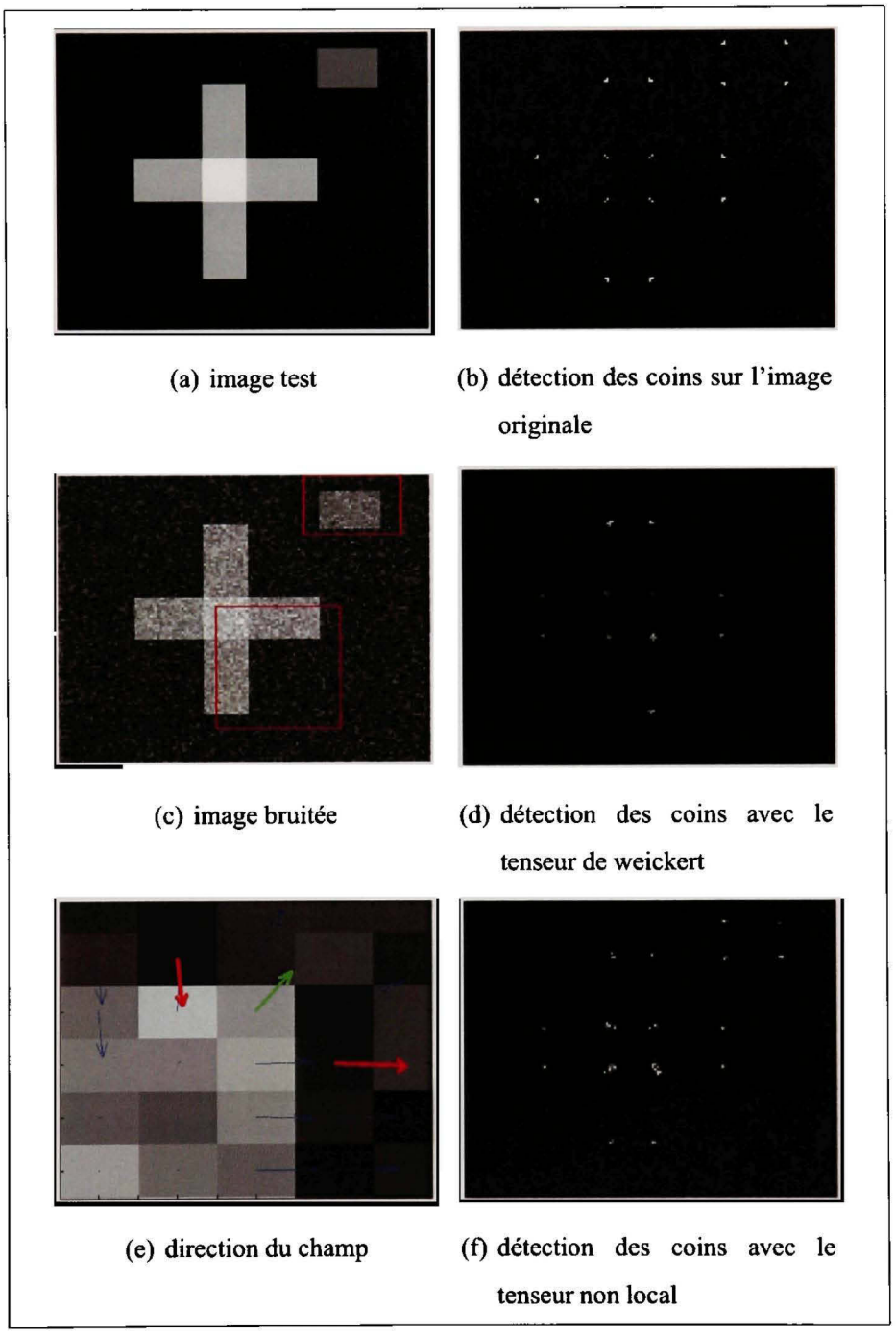


Figure 3.8 La détection des coins avec les tenseurs structurels linéaire et non local.

3.4.4 Diffusion anisotrope

Dans cette partie, nous comparons la diffusion anisotrope introduite par Weickert avec la diffusion anisotrope utilisant le tenseur structurel non local. La Figure 3.9 compare les

PSNRs des deux diffusions suivant les itérations. Pour le tenseur de Weickert, nous avons pris $\varsigma = 0.5$, et $\varrho = 4$ comme préconisé dans [130]. On remarque que le PSNR maximal est obtenu par le tenseur structurel non local. La Figure 3.10 présente les deux images ayant obtenu le PSNR maximal pour leur diffusion. On remarque qu'avec le tenseur isotrope, les contours ne sont pas très bien débruités, beaucoup de bruit est encore présent le long des contours. Certains détails ont déjà disparu, sur le pied de la caméra. L'herbe commence à être fortement régularisée. Avec le tenseur structurel non local, les contours sont beaucoup mieux débruités, cependant l'herbe est peu diffusée dans les zones fortement texturées. Sans doute que la fonction de diffusion pour la second valeur propre n'est pas optimale.

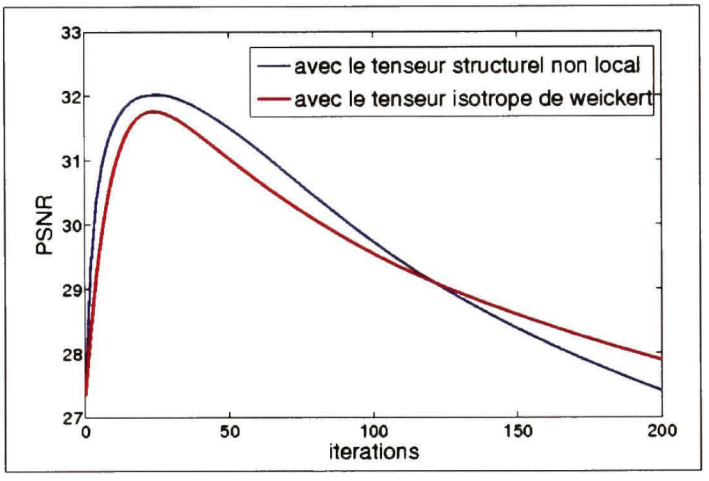
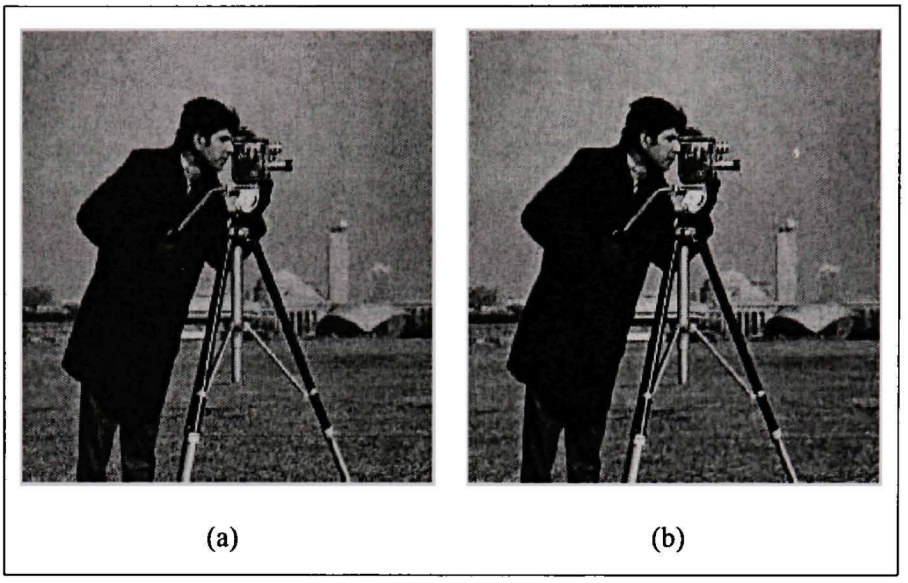


Figure 3.9 Le PSNR de l'image du cameraman diffusée en fonction des itérations avec le tenseur isotrope de Weickert et le tenseur structurel non local.

Les Figures 3.11 et 3.12 présentent une comparaison entre les deux diffusions anisotropes sur quatre images de la base d'images "USC-SIPI". La diffusion anisotrope utilisant le tenseur linéaire semble moins bien débruiter les images sur une bande entourant les contours principaux. C'est le cas d'un cratére de l'image "lune", ainsi que du tronc et des branches de l'image "arbre" et aussi de la petite cheminée noire de l'image "maison". Enfin, les bords de l'image "maison" présente un effet de *barbouillage*. Cet effet est aussi



(a) (b)

Figure 3.10 Les images diffusées ayant le PSNR le plus élevé en utilisant le tenseur structurel non local (a) et le tenseur isotrope de Weickert (b).

perceptible dans le ciel de l'image "arbre". Sur l'image "lune" le TSMNL permet de mieux réduire le bruit et sur l'image "aérienne", il permet de mieux conserver la texture des arbres. Avec le TSMNL, La diffusion de l'image "maison" semble moins régulière, la texture du toit et du batiment reste un peu apparente, le contour du toit au premier plan est resté non linéaire. Cependant, les gouttières semblent moins bien débruitées. Sur l'image "arbre", l'utilisation du TSMNL permet de mieux débruiter les contours du tronc et des branches, aussi plus de texture est conservée sur le sol.

3.4.5 Filtre de choc

Rappelons ici que le but du filtre de choc n'est pas de retrouver l'image originale (bien que cela puisse être argumenté [63]), mais de renforcer les contours d'une image sans en amplifier le bruit. Ce filtre est souvent utilisé en pré-traitement avant une segmentation lorsque l'image est floue et bruitée. D'autres algorithmes utilisant la connaissance du noyau $\mathbb{F}$ sont souvent plus performants [107]. Cependant, cette connaissance n'est pas toujours disponible, elle n'est même peut-être pas uniforme sur toute l'image. Ainsi, par

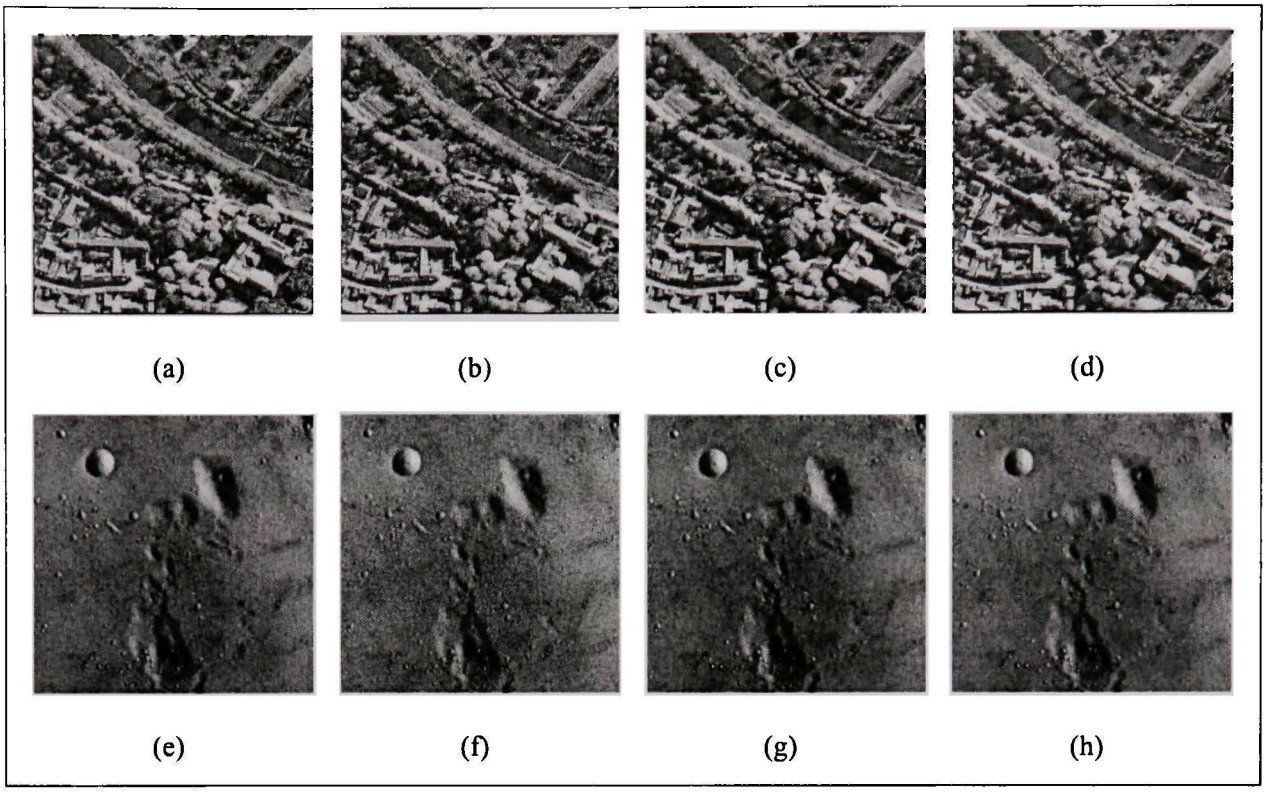


Figure 3.11 Diffusions anisotropes des images "aérienne" et "lune". Les Figures (b) et (f) présentent leurs versions dégradées avec un bruit de variance 60. Les Figures (c) et (g) sont les versions diffusées avec le tenseur linéaire alors que les Figures (d) et (h) sont celles utilisant le TSMNL.

exemple pour les radiographies, le flou d'un objet dépend de sa distance au film d'enregistrement. Dans ces différents cas, le filtre de choc est une très bonne alternative. Afin de nous rapprocher des conditions réelles de dégradation pour lesquelles le filtre de choc est utilisé, nous imposons deux dégradations à une image test. Un flou, représenté par un noyau $\mathbb{F}$ et un bruit blanc ϵ de variance σ^2. L'image dégradée prend donc la forme suivante :

$$I = \mathbb{F} * u + \epsilon \tag{3.24}$$

La Figure 3.13 présente une image et sa version dégradée 3.24. Sur cette image dégradée, nous comparons notre modèle à trois autres filtres de choc. Le premier est le filtre de Alvarez et Mazorra [4]. Trois paramètres doivent être ajustés : le nombre d'itérations $iter$, la quantité de diffusion dans la direction de la ligne de niveau c, et la variance σ^2 du noyau

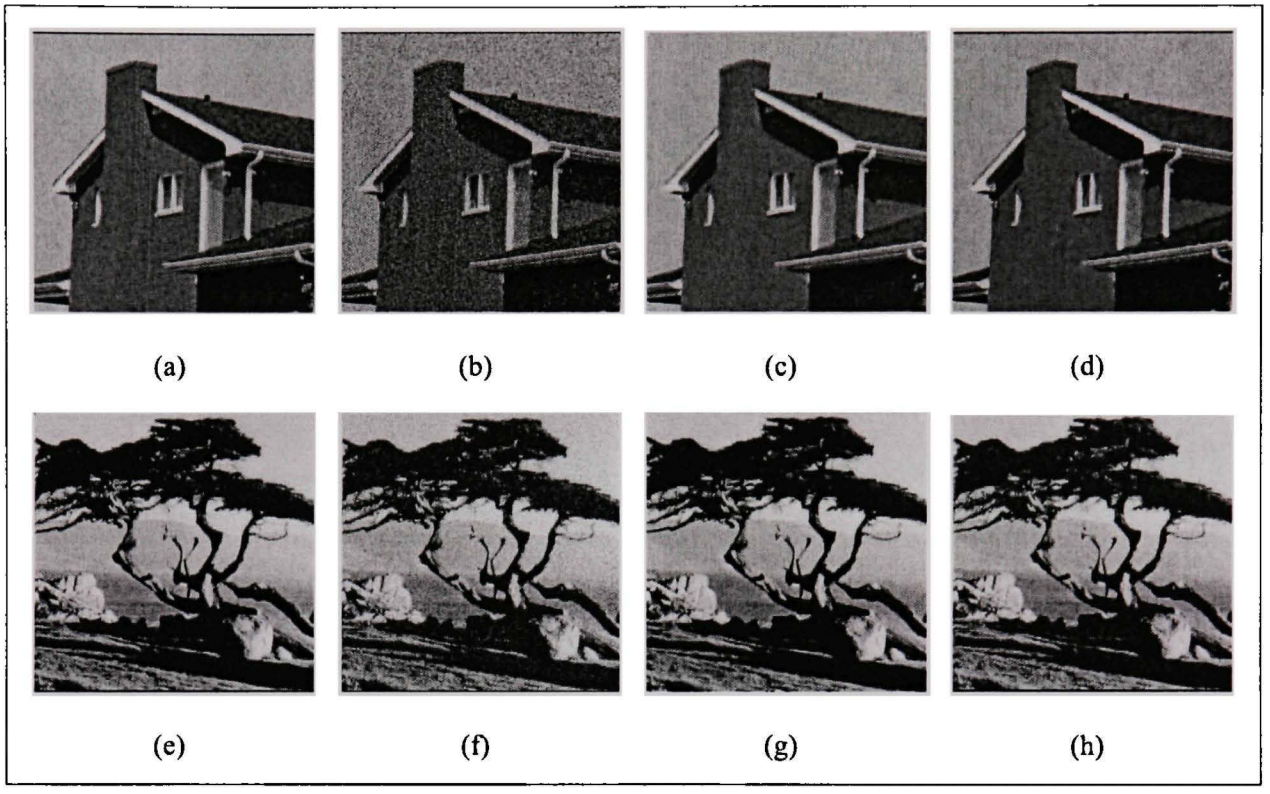
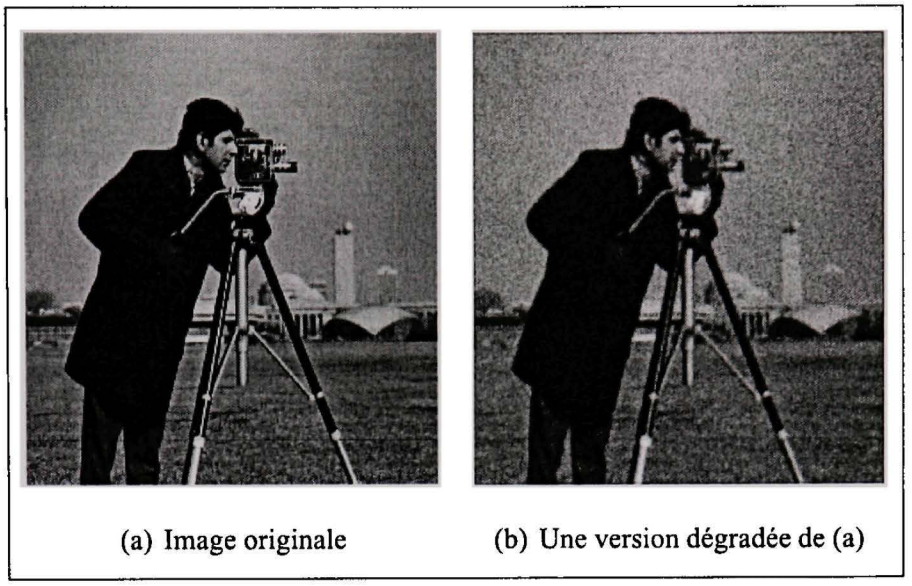


Figure 3.12 Diffusions anisotropes des images "maison" et "arbre". Les Figures (b) et (f) présentent leur versions dégradées avec un bruit de variance 60. Les Figures (c) et (g) sont les versions diffusées avec le tenseur linéaire alors que les Figures (d) et (h) sont celles utilisant le TSMNL.

régularisant le gradient. Le second filtre a été développé par Remaki et Cheriet [101][102] et utilise deux paramètres $iter$ le nombre d'itérations et ρ la variance du noyau régularisant le gradient. Enfin le troisième filtre est le filtre de choc complexe [60]. Cinq paramètres doivent être ajustés pour ce dernier filtre : le nombre d'itérations $iter$, la quantité de diffusion complexe λ dans la direction du gradient, la quantité de diffusion dans la direction de la ligne de niveau $\tilde{\lambda}$, et aussi deux autres nouveaux paramètres. L'un, a, empêche l'image filtrée d'être trop différente de l'image bruitée, l'autre est l'angle de phase de la partie complexe, il peut être fixé à $\pi/1000$. Les sorties de chacun des filtres sont présentées dans la Figure 3.14. Les paramètres ont été ajustés au mieux afin d'obtenir les meilleurs résultats visuels.



(a) Image originale (b) Une version dégradée de (a)

Figure 3.13 L'image test du cameraman et sa version dégradée qui a été utilisée pour les tests de la Figure 3.14.

Il est difficile de donner une mesure de la qualité d'un filtre de choc. Le PSNR n'est pas vraiment souhaitable puisque ce filtre n'est généralement pas utilisé pour retrouver l'image originale. Cependant, à la convergence, l'image filtrée doit être constante par morceaux, dans ce cas une meilleure mesure serait $\sum |\nabla I|$. La norme L^1 est préférable à la norme L^2 pour ne pas favoriser les petites amplitudes du gradient car ce sont celles-ci que l'on souhaite réduire. Néanmoins, cette norme ne reflète pas entièrement la qualité du filtrage ; l'appréciation visuelle semble la meilleure mesure. On remarque ainsi que le filtre d'Alvarez semble le moins bien filtrer l'image, le bruit est notamment diffusé, dans le ciel par exemple. Beaucoup de détails ont disparu. Les filtres complexe et de Remaki et Cheriet semblent donner des résultats similaires, avec peut-être plus de détails pour le filtre complexe. Le filtre de choc non local semble régulariser plus fortement l'image, les contours sont plus francs et non-bruités. Aussi moins de détails semblent avoir disparu. Cependant une certaine texture non existante apparaît dans l'herbe. Les caractéristiques de ces différents filtres peuvent être mieux vues par un zoom (voir Figure 3.15).

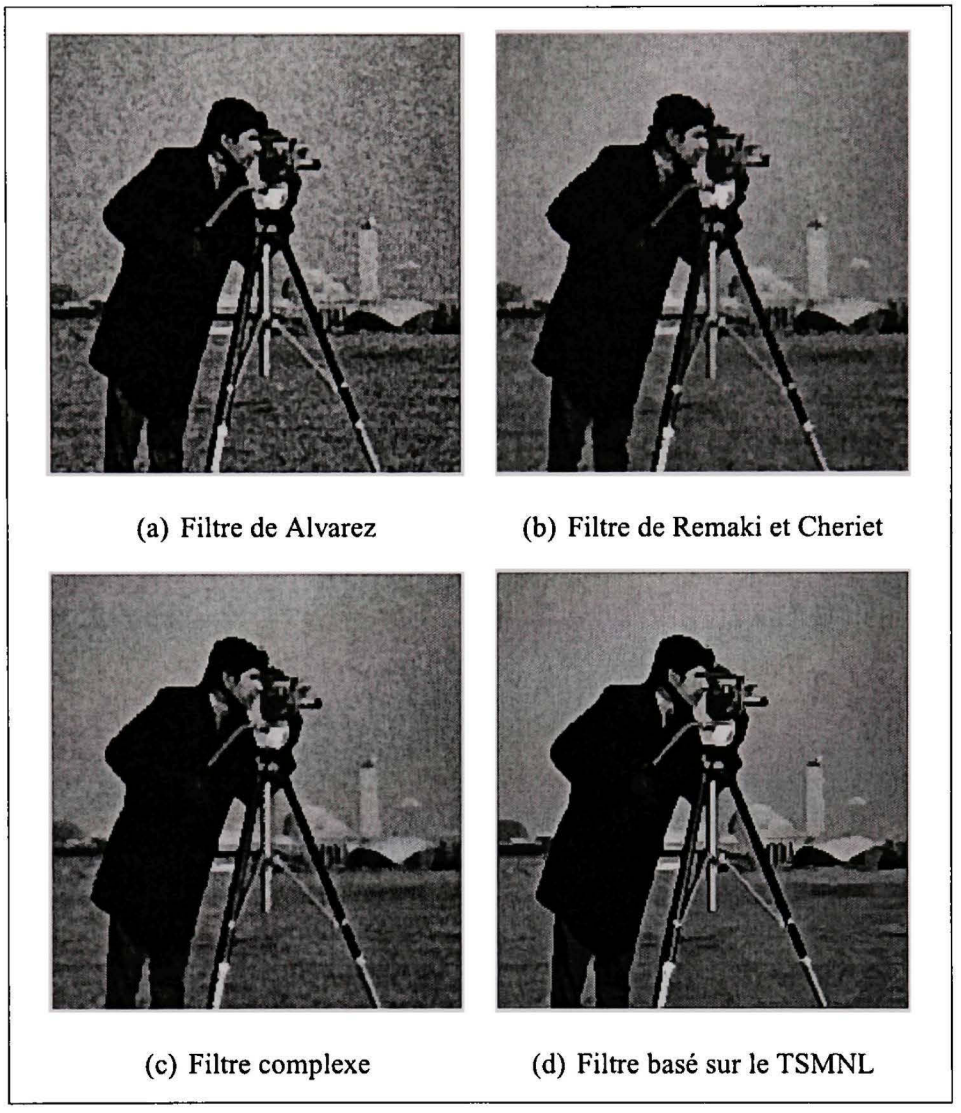
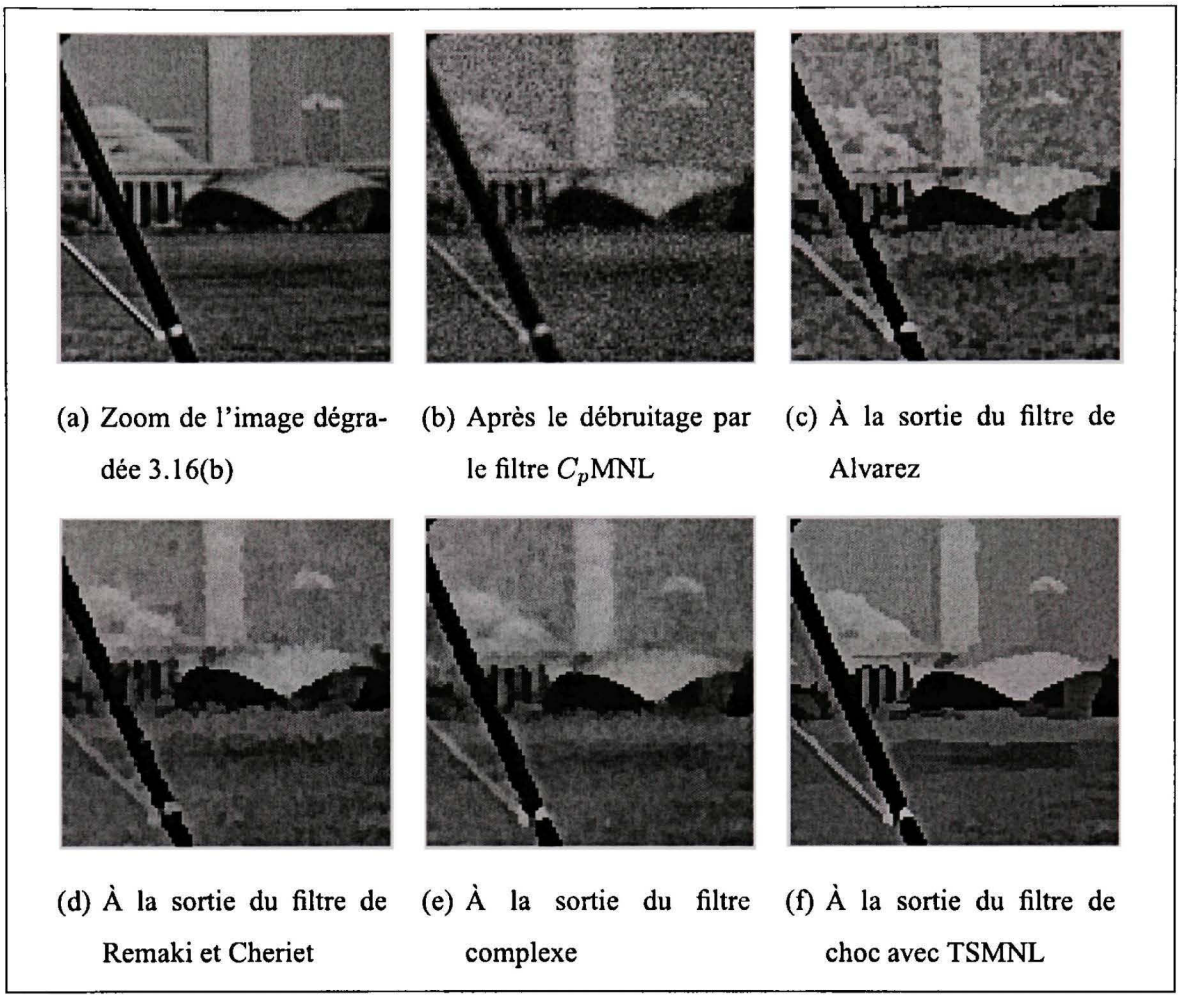


Figure 3.14 Les comparaisons de quatre filtres de choc sur l'image dégradée de la Figure 3.16(b).

Les Figures 3.16 et 3.17 présentent quelques résultats obtenus sur plusieurs images de la base de données "USC-SIPI". Ces dernères images ont été dégradées avec différents noyaux de flou et différents degrés de bruit. Le filtre de choc utilisant le TSMNL permet ainsi de mieux restituer les contours principaux des images que le filtre de Remaki et Cheriet. C'est le cas des contours de la rivière sur l'image "aérienne", le nez et les yeux du "mandrill" et du batiment du "pentagone". Le TSMNL permet aussi de mieux restaurer les détails telsque les gouttières de l'image "maison". Finalement les régions uniformes tellesque la maison et la neige de l'image "F-16" sont mieux reconstruites. La Figure 3.18



(a) Zoom de l'image dégradée 3.16(b)

(b) Après le débruitage par le filtre C_pMNL

(c) À la sortie du filtre de Alvarez

(d) À la sortie du filtre de Remaki et Cheriet

(e) À la sortie du filtre complexe

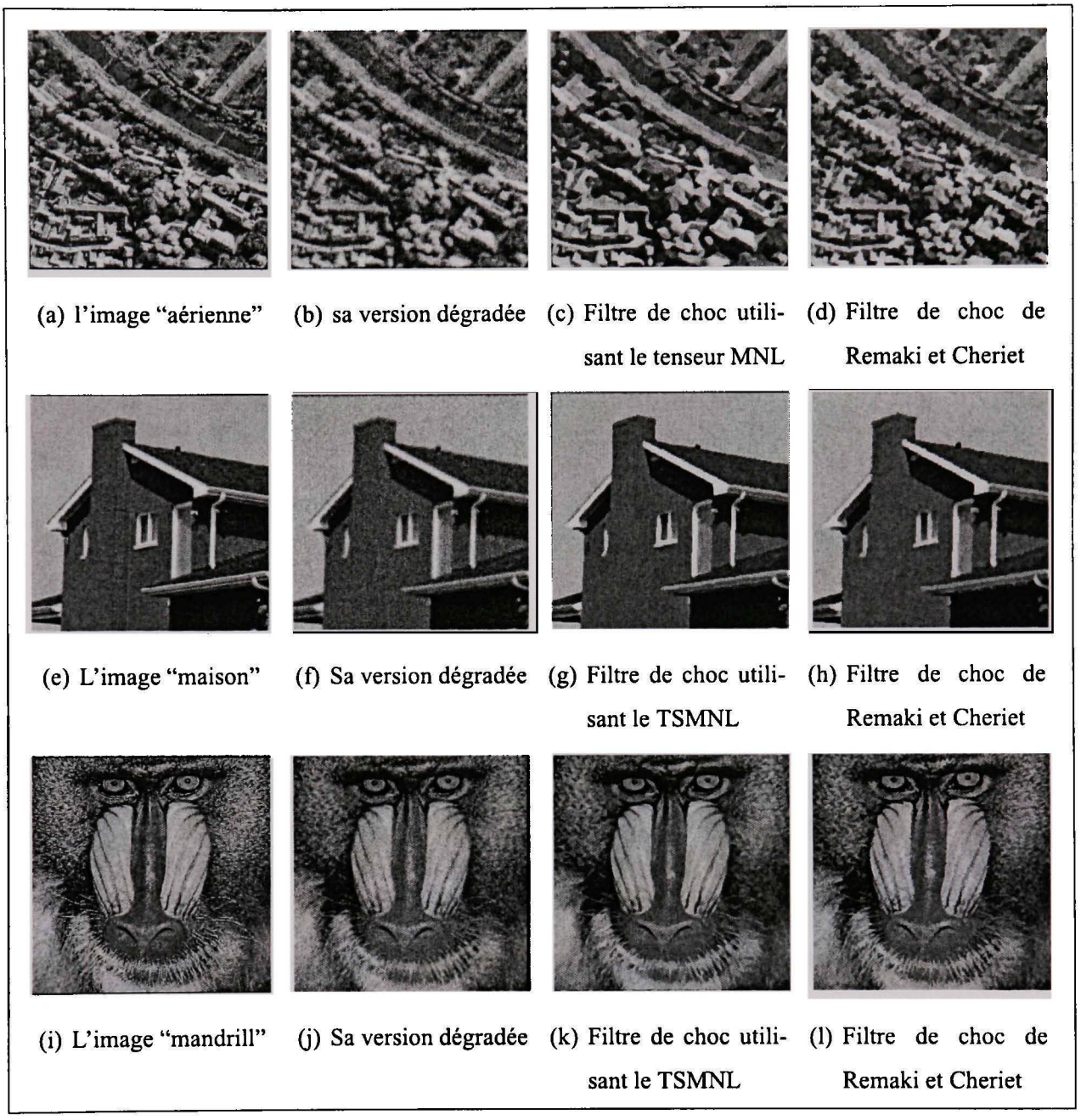
(f) À la sortie du filtre de choc avec TSMNL

Figure 3.15 Un zoom des images présentes sur la Figure 3.14.

montre une version dégradée de l'image "barbara" ainsi que la sortie de notre filtre de choc. La Figure 3.18(b) montre que les textures ont bien été rehaussées.

3.4.5.1 Degré de simplification de l'image

Le filtre de choc développé est, contrairement aux autres filtres, sans paramètre (à part celui du nombre d'itérations). Cependant certains peuvent argumenter qu'un de ces paramètres, celui de régularisation permet à l'utilisateur d'ajuster à sa convenance le degré de simplification de l'image. Ce paramètre peut donc être utile dépendamment de l'application pour laquelle ce filtre est utilisé. Un tel paramètre peut être aussi introduit dans notre filtre de choc. En effet, l'image est simplifiée lorsque du biais est introduit dans le



(a) l'image "aérienne" (b) sa version dégradée (c) Filtre de choc utilisant le tenseur MNL (d) Filtre de choc de Remaki et Cheriet

(e) L'image "maison" (f) Sa version dégradée (g) Filtre de choc utilisant le TSMNL (h) Filtre de choc de Remaki et Cheriet

(i) L'image "mandrill" (j) Sa version dégradée (k) Filtre de choc utilisant le TSMNL (l) Filtre de choc de Remaki et Cheriet

Figure 3.16 Comparaison de notre filtre de choc avec celui de Remaki et Cheriet sur différentes image de la base de données "USC-SIPI". Les sorties sont obtenues après 20 itérations de chacun des filtres.

débruitage de la direction de la dérivée seconde. Pour cela nous modifions le rapport entre biais et variance dans la statistique C_p. Celle-ci devient :

$$C_p(\hat{I}_h(i), \alpha) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_j \left(\hat{SB}(i,j) + \alpha \text{Var}(\hat{I}_{\mathcal{N}(i),h}(j)) \right) \tag{3.25}$$

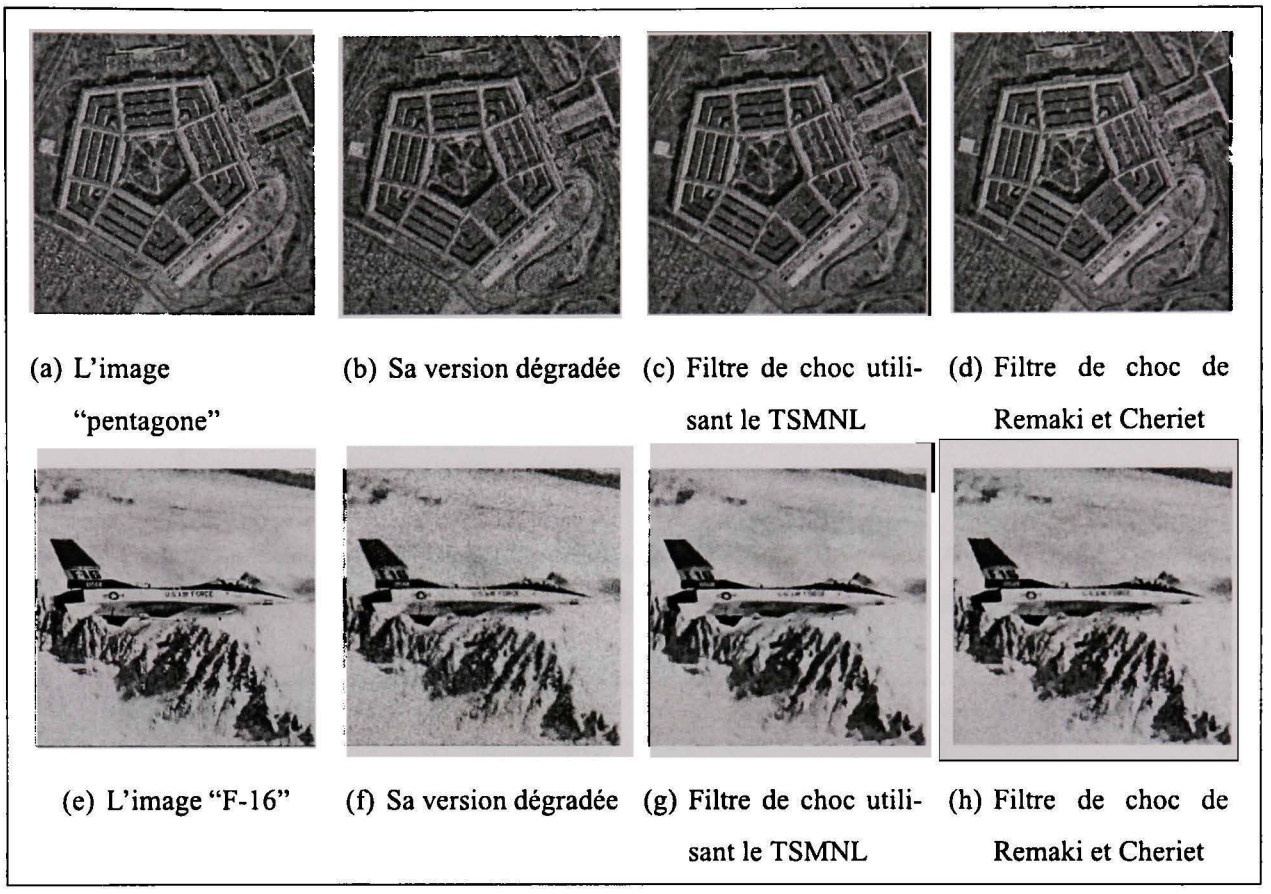
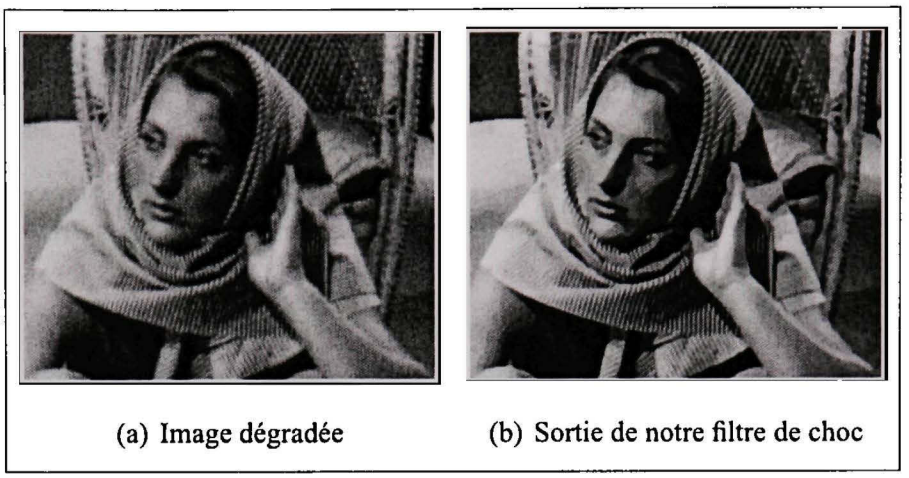


Figure 3.17 Comparaison de notre filtre de choc avec celui de Remaki et Cheriet sur différentes image de la base de données "USC-SIPI". Les sorties sont obtenues après 20 itérations de chacun des filtres.

Ainsi la simplification de l'image ne dépend plus des caractéristiques du noyau utilisé mais de la quantité de biais introduit (en fonction de la variance du bruit). Plus le paramètre α est élevé et plus la minimisation de la variance du bruit est privilégiée au détriment de l'introduction de biais. Ainsi, comme il peut être constaté sur la Figure 3.19, plus α augmente et plus l'image est simplifiée.

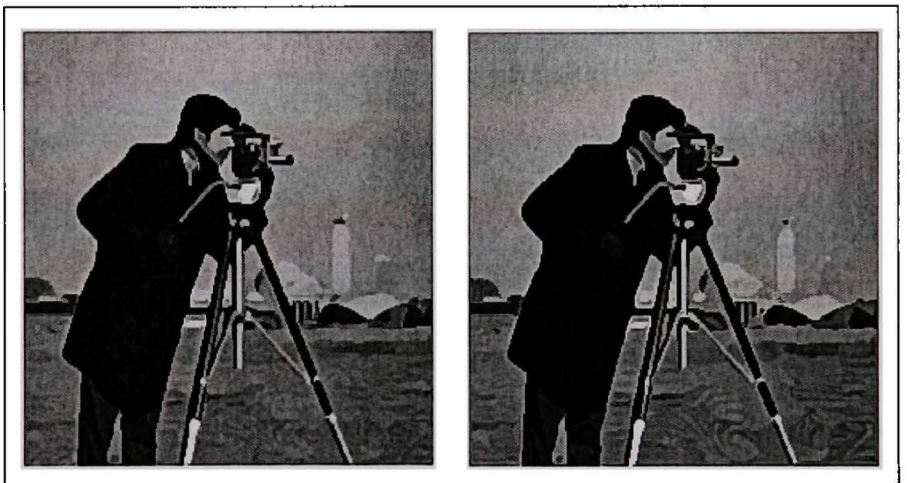
3.4.6 Extension aux images radiographiques

Les deux filtres précédents sont étendus aux images radiographiques pour rehausser leurs contours détruits par le flou. Nous en avons précisé l'origine dans la section 1.2.6. L'ex-



(a) Image dégradée (b) Sortie de notre filtre de choc

Figure 3.18 Une version dégradée de l'image texturée "barbara" et la sortie du filtre de choc utilisant le TSMNL. 10 itérations ont été réalisés.



(a) Filtre de choc avec $\alpha = 10$ (b) Filtre de choc avec $\alpha = 100$

Figure 3.19 Approche multi-échelle du filtre de choc.

tension se fait simplement en utilisant lors de la première itération, le filtre $\tilde{C}_p$MNL pour débruiter la radiographie.

3.4.6.1 Diffusion anisotrope

La diffusion anisotrope peut être utilisée pour rehausser les contours d'une image. En effet, lorsque la fonction de diffusion est :

$$g(x) = \frac{1}{1 + (\varpi x)^2} \tag{3.26}$$

l'équation 1.34 peut se réécrire :

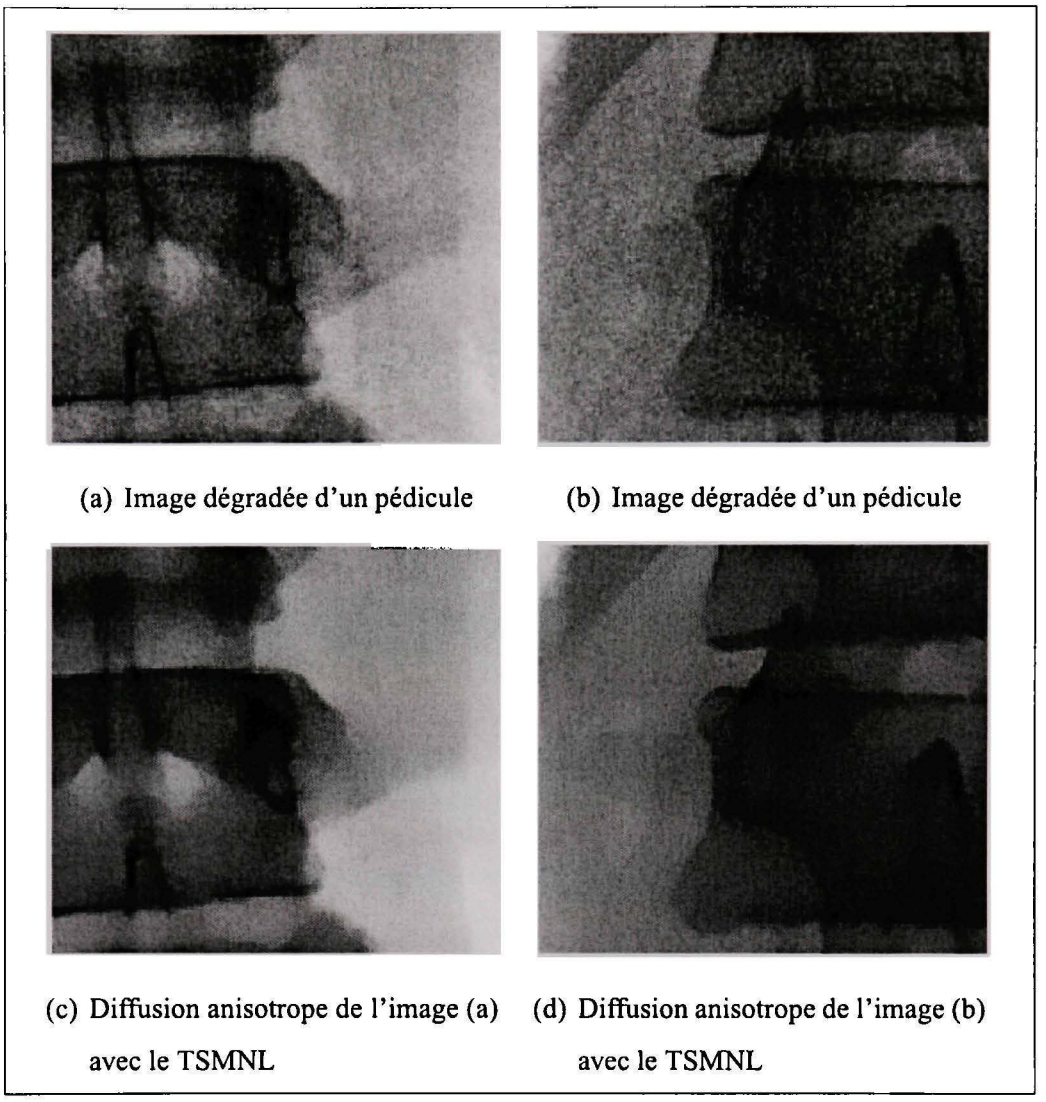
$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{1 + \varpi^2 |\nabla I|^2} I_{\xi\xi} + \frac{1 - \varpi^2 |\nabla I|^2}{(1 + \varpi^2 |\nabla I|^2)^2} I_{\eta\eta} \tag{3.27}$$

Le second terme de l'équation précédente correspond à la diffusion de l'image dans la direction du gradient. Le signe du coefficient de cette diffusion dépend du paramètre ϖ et du gradient local de l'image. Lorsque ce coefficient est positif, alors la diffusion régularise le contour, lorsqu'il est négatif la diffusion est inversée et elle rehausse l'image dans la direction du gradient.

Nous avons déterminé de façon heuristique sur plusieurs images de pédicules qu'un paramètre ϖ de 30 permet d'obtenir le meilleur rehaussement. La Figure 3.20 présente deux radiographies originales de pédicules et leurs versions diffusées par le filtre anisotrope 3.20(c) et (d). Pour les deux images les contours principaux ont bien été rehaussés. Cependant les contours dont le gradient est inférieur à ϖ ont été diffusés. C'est le cas par exemple des processus épineux.

3.4.6.2 Le filtre de choc

Nous avons aussi appliqué le filtre de choc précédemment développé aux radiographies en les filtrant avec le $\tilde{C}_p$MNL lors de la première itération. Seulement dix itérations ont été réalisées pour ne pas trop déformer l'image. La Figure 3.21 présente une image dégradée avec sa version débruitée par le $\tilde{C}_p$MNL, et sa version rehaussée par ce filtre de choc. On remarque que les contours de la vertèbre sont beaucoup plus prononcés.

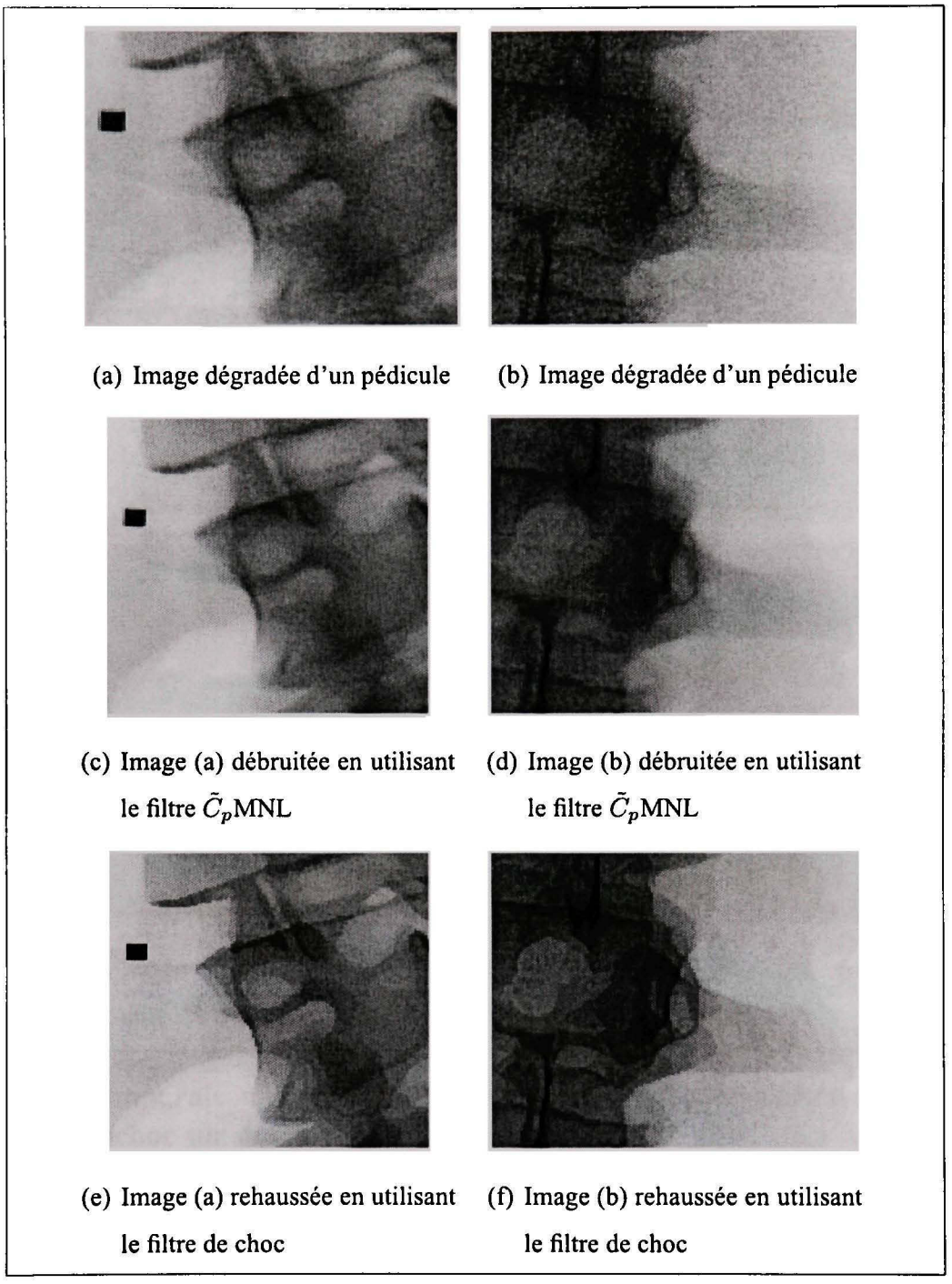


(a) Image dégradée d'un pédicule (b) Image dégradée d'un pédicule

(c) Diffusion anisotrope de l'image (a) avec le TSMNL (d) Diffusion anisotrope de l'image (b) avec le TSMNL

Figure 3.20 Rehaussement de pédicules par la diffusion anisotrope utilisant le tenseur structurel non linéaire.

La Figure 3.22 présente la comparaison des rehaussements en utilisant une diffusion anisotrope et le filtre de choc. Les images filtrées par la diffusion anisotrope sont très régulières, les contours importants ont bien été rehaussés cependant beaucoup de détails ont disparu. En comparaison lorsque le filtre de choc est utilisé, plus de détails sont restitués bien que des contours non existants sur l'image originale aient été créés. Le filtre de choc semble donner de meilleurs résultats et des images plus proches des images originales.



(a) Image dégradée d'un pédicule

(b) Image dégradée d'un pédicule

(c) Image (a) débruitée en utilisant le filtre $\tilde{C}_p$MNL

(d) Image (b) débruitée en utilisant le filtre $\tilde{C}_p$MNL

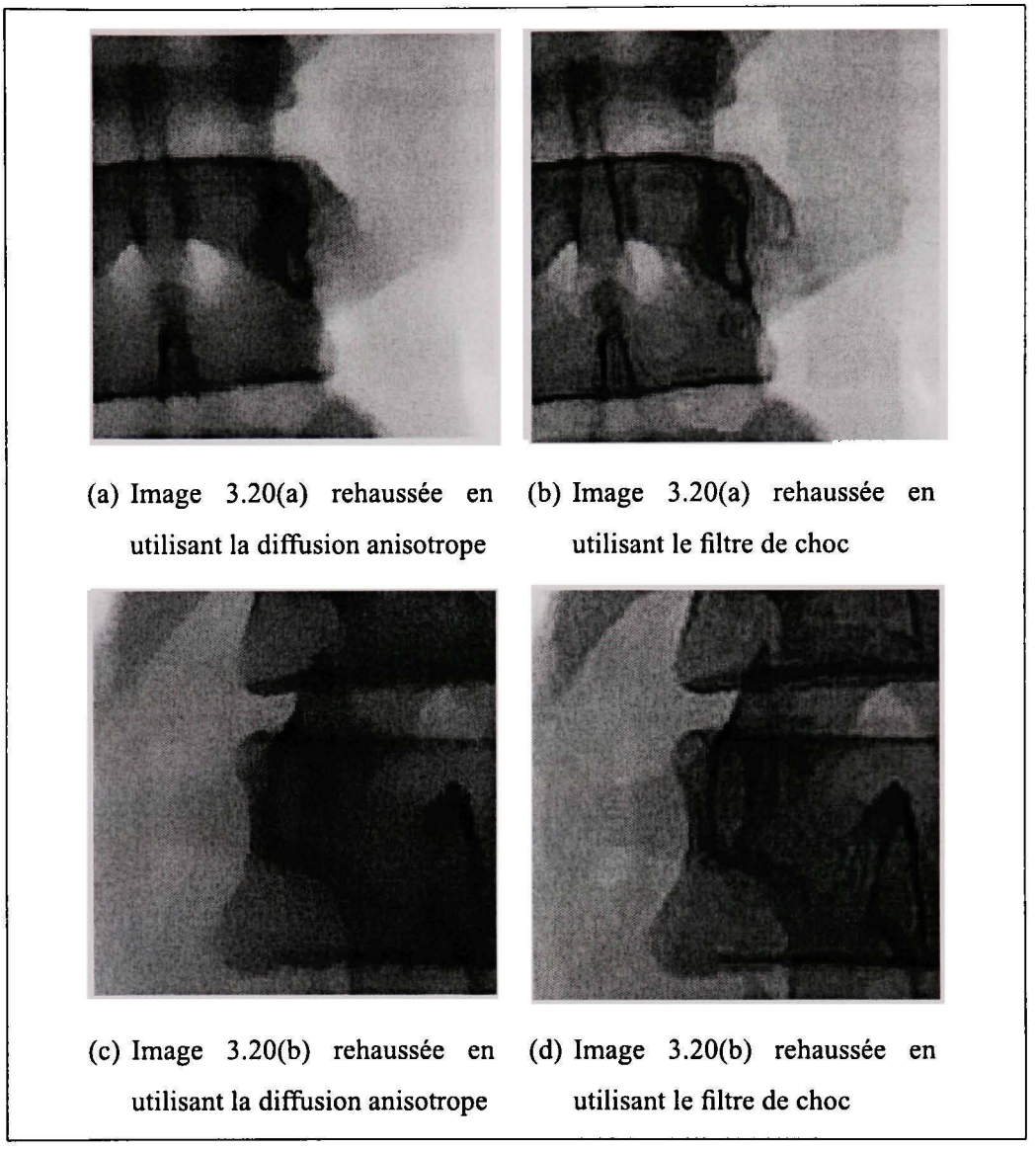
(e) Image (a) rehaussée en utilisant le filtre de choc

(f) Image (b) rehaussée en utilisant le filtre de choc

Figure 3.21 Débruitage et rehaussement de pédicules avec le filtre de choc utilisant le TSMNL.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons discuté du rehaussement des radiographies par EDP. Pour ce faire, nous avons étendu le filtre MNL aux tenseurs, permettant de les régulariser sans



(a) Image 3.20(a) rehaussée en utilisant la diffusion anisotrope

(b) Image 3.20(a) rehaussée en utilisant le filtre de choc

(c) Image 3.20(b) rehaussée en utilisant la diffusion anisotrope

(d) Image 3.20(b) rehaussée en utilisant le filtre de choc

Figure 3.22 Comparaison des rehaussements avec la diffusion anisotrope et le filtre de choc sur des radiographies de pédicules.

paramètre et en utilisant les propriétés non locales de l'image. Les tenseurs structurels résultant sont ensuite introduits dans deux EDPs. Le premier filtre, anisotrope, permet d'obtenir une image diffusée avec des contours mieux débruités. Le second filtre, de choc est sans paramètre. La comparaison visuelle de ce dernier filtre avec ceux de la littérature montre qu'ils permettent un meilleur rehaussement des contours ; Les zones uniformes sont moins tessellées, les contours sont plus réguliers et plus de détails sont présents.

Ces deux filtres sont finalement étendus aux images radiographiques en utilisant l'information a priori sur la variance du bruit en fonction des niveaux de gris. Le filtre de choc semble donner de meilleurs résultats que le filtre anisotrope, qui semble trop diffuser l'image.

CHAPITRE 4

SEGMENTATION DES PÉDICULES

4.1 Introduction

Les filtres de prétraitement présentés dans les chapitres précédents ont été développés à des fins de segmentation d'images radiographiques pour aider à la reconstruction de la colonne vertébrale. Déjà plusieurs travaux traitent de radiographies de colonne vertébrale [6], ces recherches traitent de l'appariement des formes de vertèbres [136], de la classification de vertèbres [5; 70], ou encore de segmentation des vertèbres cervicales [9] et des plateaux cervicaux [129].

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de segmentation semi-automatique des pédicules sur la vue PA. Les pédicules sont deux petites structures rondes qui prolongent la marge posterio-latéral du corps vertébral (voir Figure 4.1). Ils peuvent être identifiés sur les deux vues et sont alors utilisés comme repères pour les reconstructions 3D. Leur segmentation automatique sur les deux vues permettrait ainsi l'automatisation des reconstructions 3D. De plus, en extrayant des objets plutôt que des points, des primitives de haut niveau peuvent être utilisées pour améliorer la précision du modèle 3D. Finalement ce travail peut être utilisé en biomécanique puisque les vis pédiculaires sont utilisées pour corriger la scoliose.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, les pédicules peuvent être identifiés (après entraînement) grâce à certains de leurs pixels qui sont localement et légèrement plus foncés que l'arrière plan. Ils forment aussi une couronne autour de pixels plus clairs. Nous avons choisi d'utiliser un modèle de contour actif constant, par morceaux, pour segmenter l'intérieur des pédicules. Durant l'examen pré-doctoral, nous avions proposé d'utiliser la connaissance a priori sur la forme des pédicules. Nous nous sommes donc constitués une base de données de formes des pédicules de la vertèbre L1. Nous avons cherché à

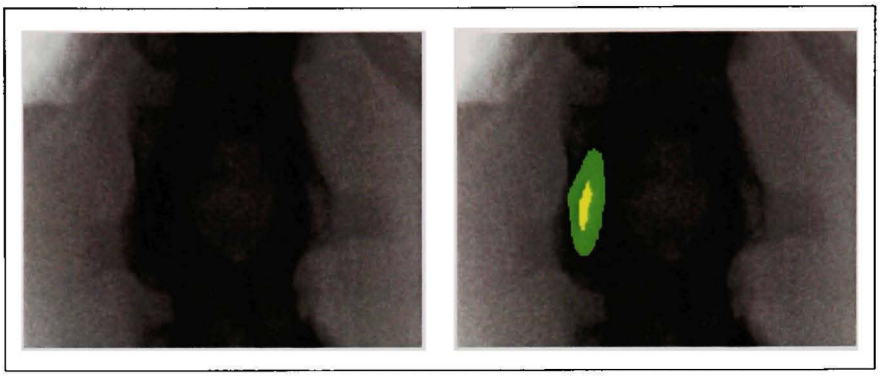


Figure 4.1 a) Radiographie d'une vertèbre L1, (b) La couronne est colorée en vert alors que l'intérieur du pédicule l'est en jaune. La radiographie a été rehaussée afin de mieux percevoir le pédicule.

caractériser cette base. Le but de cette étude est d'utiliser ces caractéristiques en tant que connaissances a priori pour guider le modèle de contours actifs. Cependant les premiers résultats obtenus étaient loin de ceux escomptés. L'injection de la connaissance a priori sur la forme, était souvent un handicap pour la segmentation. La variabilité sur la taille, la forme ainsi que la petitesse de l'objet recherché sont parmi les raisons de cet échec.

Aussi, le modèle de contours actifs utilisé est guidé par un principe de regroupement autour d'une caractéristique (propre à l'objet devant être segmenté) versus la caractéristique du fond de l'image. Dans un premier temps nous avons pris pour cette caractéristique la moyenne des niveaux de gris de l'objet, puisque les pédicules sont perçus comme plus "foncés" que le fond. Néanmoins cette caractéristique n'est pas uniforme sur tout l'intérieur du pédicule et est faiblement contrastée par rapport à celle du fond (en moyenne deux niveaux de gris). D'autre part elle est difficilement évaluable. Nous avons donc développé une table de probabilités permettant d'évaluer localement les caractéristiques. Le contour actif est initialisé sur la table de probabilités et les caractéristiques permettant de le faire évoluer sont "la probabilité d'appartenir localement à l'objet le plus clair" ou "la probabilité d'appartenir localement à l'objet le plus foncé". Ainsi le modèle de contours actifs segmente les pédicules à partir de caractéristiques locales et fortement contrastées.

Enfin, un autre avantage de cette approche est que, les valeurs de ces caractéristiques, sont les mêmes pour tous les pédicules.

Les contours actifs bien que très utilisés, sont difficiles à automatiser puisque plusieurs paramètres nécessitent d'être ajustés. Nous avons utilisé une information a priori sur l'aire des pédicules à segmenter pour automatiser le processus. Enfin nous avons développé une approche "multi-échelle" pour affiner la segmentation. Un premier processus est utilisé avec un paramètre de régularité de la forme élevé, permettant d obtenir une forme grossière mais bien localisée du pédicule. Cette forme est ensuite utilisée comme forme "a priori" et grossière de celle recherchée à une échelle plus fine.

4.2 Revue bibliographique

4.2.1 Le modèle de segmentation de Mumford-Shah

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un problème de segmentation. Mumford et Shah [89] le formulent ainsi : "Soit une image $I_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la segmentation consiste à trouver une décomposition Ω_i de Ω et une approximation régulière par morceaux, optimale I de I_0, telle que I varie régulièrement dans chaque Ω_i et rapidement ou discontinument à travers les contours des Ω_i. " Pour résoudre ce problème, Mumford et Shah proposent la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\inf_{I,C}\{F_{MS}(I,C) = \int_{\Omega}(I - I_0)^2 dxdy \; + \; \iota \int_{\Omega/C} |\nabla I|^2 dxdy \; + \; \upsilon|C|\} \qquad (4.1)$$

où ι et υ sont les poids des différents termes de l'énergie. En un minimum (I, C) de l'énergie précédente, I est une fonction régulière par morceaux approchant I_0. C approche les contours de I_0.

Plusieurs modèles de segmentation basés sur la fonctionnelle de Mumford-Shah ont été proposés dans la littérature [125][120][19][74]. Puisque notre but n'est pas de contribuer au modèle de segmentation formulé par Mumford et Shah, mais simplement de l'appli-

quer à la segmentation des pédicules. Nous ne présentons ici que quelques modèles de la littérature et principalement celui que nous allons utiliser [28].

4.2.1.1 Le modèle constant par morceaux

Chan et Vese [28] proposent un modèle plus puissant que la plupart des modèles de contours actifs [94] ou de " snakes " classiques [34][67], en excluant la fonction " détecteur de contour " utilisant le gradient de l'image. Les auteurs proposent dans un premier temps de considérer le cas à deux phases. Alors une seule ligne de niveau φ (telle que $\mathcal{C} = \{(x,y)|\varphi(x,y) = 0\}$) peut caractériser les contours de l'image. Cette dernière peut alors se décomposer ainsi :

$$I = I_1\chi(\varphi) + I_2(1 - \chi(\varphi)) \tag{4.2}$$

On suppose que I_1 et I_2 appartiennent à $C^1(\{\varphi \geq 0\})$ et à $C^1(\{\varphi < 0\})$ (resp.) Ainsi la fonctionnelle de Mumford-Shah peut s'écrire :

$$\inf_{I_1,I_2,\varphi} \left\{ \begin{array}{rcl} F^{MS}(I_1,I_2,\varphi) & = & \int_\Omega (I_1 - I_0)^2\chi(\varphi)dxdy \\ +\int_\Omega (I_2 - I_0)^2(1-\chi(\varphi))dxdy & + & \iota\int_{\Omega/\mathcal{C}} |\nabla I_1|^2\chi(\varphi)dxdy \\ +\iota\int_{\Omega/\mathcal{C}} |\nabla I_2|^2(1-\chi(\varphi))dxdy & + & \upsilon\int_\Omega |\nabla\chi(\varphi)|dxdy \end{array} \right\} \tag{4.3}$$

Les équations de Euler Lagrange peuvent être obtenues facilement en minimisant (4.1) suivant I_1, I_2 et φ. Pour résoudre le problème pratique de l'évolution de la ligne de niveau, il est imbriqué dans un schéma dynamique en introduisant un paramètre temporel artificiel t. On obtient ainsi les équations suivantes :

$$I_i - I_0 = \iota\nabla I_i \text{ dans } \{(x,y); \varphi(t,x,y) \geq 0 \text{ ou } < 0 \text{ (resp)}\} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sur } \{(x,y), \varphi_i(t,x,y) = 0\} \cup \partial\Omega \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\varphi)\left[\upsilon\nabla\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right) - (I_1 - I_0)^2 + (I_2 - I_0)^2 - \iota|\nabla I_1|^2 + \iota|\nabla I_2|^2\right] \tag{4.6}$$

L'extension à plusieurs lignes de niveau se fait facilement [127]. Le processus est relativement lourd puisqu'à chaque itération, l'image est régularisée et les lignes de niveau sont remises à jour.

4.2.1.2 Approche hiérarchique

Tsai et al. [125] proposent une implémentation hiérarchique des contours actifs qui est plus simple et sans aucun doute plus rapide que les techniques classiques basées sur les lignes de niveau. L'approche consiste à traiter chaque ligne l'une après l'autre. Ainsi sur l'image d'entrée, une unique ligne de niveau est initialisée (généralement par une répartition uniforme de graines). Lorsque l'image est segmentée, une nouvelle ligne de niveau est initialisée s'il y a lieu, dans les régions de la segmentation précédente. Celle-ci ne pourra évoluer qu'à l'intérieur de cette partie, ainsi les points triples concordent avec les jonctions en T. Malheureusement cette méthode ne permet pas de détecter automatiquement si une sous région nécessite une nouvelle segmentation.

S. Gao et al. [57] proposent aussi une approche hiérarchique sur le modèle constant par morceaux de L. Vese [28]. Ils conseillent ainsi d'étudier la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$\inf_{c_1,c_2,\varphi} \left\{ \begin{array}{rcl} F^{MS}(c_1,c_2,\varphi) & = & \iota_1 \int_\Omega (c_1 - I_0)^2 \chi(\varphi) dxdy \\ +\iota_2 \int_\Omega (c_2 - I_0)^2 (1-\chi(\varphi)) dxdy & + & \upsilon \int_\Omega |\nabla \chi(\varphi)| dxdy \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

En plus de supprimer l'énergie fonction du gradient de l'image, ils différencient les paramètres $\iota_1$et ι_2. Le rapport expérimental proposé est intéressant : $\iota_1/\iota_2 \approx \sigma_I^2/\sigma_{II}^2$. Ainsi lorsqu'une seule ligne de niveau est utilisée pour segmenter sur le principe de « une région contre toutes les autres », on cherche une région uniforme contre le reste de l'image. Si cette région est constante alors le terme suivant $\int_\Omega (c_1 - I_0)^2 \chi(\varphi) dxdy$ correspond à la variance σ^2 du bruit présent dans l'image (si celui-ci est distribué identiquement sur toute l'image) alors que $\int_\Omega (c_2 - I_0)^2 (1-\chi(\varphi)) dxdy$ correspond plus ou moins à la variation de

l'image Σ^2. Pour donner un poids comparable aux deux énergies, il faut que $\iota_1 \Sigma^2 = \sigma^2 \iota_2$. On obtient une relation presque similaire à celle proposée par les auteurs.

Dans leur approche hiérarchique, les auteurs utilisent une unique ligne de niveau lors d'une première étape pour segmenter l'image en deux sous ensembles. Ensuite une seconde ligne de niveau évolue dans chaque sous partie indépendamment. Les coefficients de régularité peuvent ainsi être différents dans chacune des sous images. Une observation judicieuse sur la relation entre la régularité de la courbe et la variance du sous-ensemble traité est faite. Une extension à la segmentation régulière par morceaux est aussi proposée.

Bien que les approches hiérarchiques semblent plus rapides et converger plus souvent vers le minimum global, la convergence n'est pas assurée. D'autre part lorsque la seconde ligne de niveau est traitée, il se peut qu'en retraitant la première ligne de niveau, celle-ci évolue. De plus, la première ligne de niveau est moins précise et plus régulière, cela ne semble pas très logique. Il faudrait pouvoir la retraiter ultérieurement. Il serait sans doute judicieux de faire évoluer temporellement, et spatialement les coefficients. Notons aussi le papier de B. Sumengen et al. [120]. Ce dernier préconise d'utiliser la dissimilarité des pixels plutôt que leur similarité. Il propose aussi une méthode pour accélérer l'algorithme.

4.2.2 Études des paramètres d'attache aux données et de régularité

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, pour qu'un modèle soit facile à utiliser et précis, il faut que le nombre de paramètres à fixer soit relativement restreint, ou bien qu'ils puissent être estimés facilement. Dans la littérature, peu de papiers traitent du problème d'estimation des paramètres de la segmentation de Mumford-Shah. Cependant, ces paramètres sont souvent aussi importants que le modèle.

Dans sa thèse I. Cohen [33] propose plusieurs méthodes pour optimiser les paramètres du modèle de contours déformables précédemment introduit par Kass et Terzopoulos [67]. Il s'intéresse notamment au problème suivant :

Trouver I_α qui minimise $\varphi_\alpha(I) = \|AI - I_0\| + \alpha\|LI\|$ où A et L sont des opérateurs linéaires et I_0 correspond aux données. Le premier terme de φ_α correspond à l'attache aux données, le second correspond à la régularité de la solution. Le coefficient α est le compromis fait entre ces deux termes. Lorsque l'image est peu bruitée, on privilégie l'attache aux données. Cohen utilise la méthode des résidus qui utilise le premier terme de φ_α pour déterminer le paramètre optimal compte tenu de la variance σ^2 du bruit. Wold [135] à partir de résultats expérimentaux, montre que :

$$0.7\sigma^2 \leq \|AI - I_0\| \leq 0.95\sigma^2 \tag{4.8}$$

Ainsi formulée, la détermination de α reste encore relativement difficile. D'autre part, ce paramètre est global et ne tient compte que du bruit.

Rousselle [105] propose d'ajuster grâce à un algorithme génétique les paramètres du contour actif déterminé par l'énergie suggérée par L. Cohen [35] :

$$E(I) = \alpha_1 E_{\text{interne}}(I) + \alpha_2 E_{\text{externe}}(I) + \alpha_3 E_{\text{balloon}} \tag{4.9}$$

où l'énergie totale E est composée de trois sous-énergies ; La première correspond à la régularité du contour actif, la seconde correspond à l'énergie extérieure au contour (comme par exemple le gradient de l'image) et enfin l'énergie ballon, cette dernière permet de rétracter ou gonfler le contour. Deux approches sont testées : l'une globale et supervisée et l'autre locale et non supervisée. Le principal inconvénient de la première approche est qu'elle ne peut être mise en œuvre que sur un même type d'images. L'inconvénient majeur de la seconde est la lenteur du processus puisque les coefficients doivent être réévalués à chaque itération.

4.2.3 Incorporation de connaissances sur les statistiques des formes dans la fonctionnelle de Mumford-Shah

Nous avons évoqué, dans l'introduction, lors de l'examen pré-doctoral, que nous nous sommes intéressés à l'insertion de la connaissance a priori sur la forme de l'objet recherché

pour aider le modèle durant la segmentation. Plusieurs approches proposent d'introduire cette connaissance dans un modèle de contour actif.

4.2.3.1 Le modèle de Cremer

D. Cremers et al. [40] modifient dans un premier temps la fonctionnelle F_{MS} de Mumford-Shah permettant de paramétrer le contour actif $\mathcal{C}$ par une spline fermée dans la base des B-splines quadratiques B_n et passant par le vecteur $\vec{p}_n$:

$$\mathcal{C} : [0\ 1] \rightarrow \Omega \quad \mathcal{C}(s) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{p}_n B_n(s) \tag{4.10}$$

Ils approximent la distribution des formes d'un ensemble d'entraînement par une gaussienne. Une énergie de forme E_F est dérivée à partir de l'approximation de la distribution. Le problème final consiste à minimiser l'énergie du contour $\mathcal{C}$ suivante :

$$E(I, \mathcal{C}) = F_{MS}(I, \mathcal{C}) + E_f(\mathcal{C}) \tag{4.11}$$

où :

$$F_{MS}(I, \mathcal{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (I_0 - I)^2 dx \ + \ \alpha \int_{\Omega/\mathcal{C}} |\nabla I|^2 dx \ + \ \upsilon L_2^2(\mathcal{C}) \tag{4.12}$$

et

$$E_f(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} (\vec{p}_n - \vec{p}_n^0)^t \vec{\Sigma}^{-1} (\vec{p}_n - \vec{p}_n^0) \tag{4.13}$$

$\vec{p}_n^0$ et $\vec{\Sigma}^{-1}$ étant respectivement la moyenne et l'inverse de la matrice de covariance de la distribution gaussienne approchant la distribution des formes. L'information a priori sur les statistiques de la forme de l'objet permet de rendre « plus convexe » la fonctionnelle de Mumford-Shah. Comparée aux contours actifs géodésiques sur des images complexes, l'approche avec la distribution a priori converge plus souvent vers une segmentation optimale.

Néanmoins, ce modèle souffre de plusieurs inconvénients. Premièrement, les changements de topologie ne sont pas possibles avec ce modèle puisque le contour actif n'est pas implémenté à l'aide d'une ligne de niveau. D'autre part, la distribution des formes n'est sans

doute pas gaussienne mais plutôt multi-modale ou multi-normale (par exemple si deux formes très différentes sont plus souvent observées que les autres). Enfin, même si cette méthode permet l'invariance par translation, elle ne permet pas l'invariance par rotation, ni celle d'échelle. Ainsi, si l'objet à segmenter admet une rotation (même légère) par rapport aux formes de l'ensemble d'entraînement, alors le minimum global de l'énergie ne sera sans doute pas atteint au moment où la courbe épouse parfaitement l'objet.

4.2.3.2 Le Modèle de Rousson et de Paragios

Dans [106], les auteurs ont ajouté une énergie de forme à l'équation (4.3) guidant l'évolution du contour actif de Chan et Vese. Le contour actif minimisant cette énergie est celui dont la forme maximise la probabilité a posteriori (locale) pour une densité de formes données $p^M_{x,y}$:

$$E_f(\varphi, \mathcal{T}) = \iint_\Omega \chi_\epsilon(\varphi(x,y)) \log\left[p^M_T(\mathcal{S}\varphi)\right] dxdy \tag{4.14}$$

$\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sont des transformations du plan permettant de comparer la forme du contour actif avec la base de données (celle-ci ayant été normalisée). La densité de probabilité des formes est locale ; c'est à dire que les paramètres de cette densité sont fonction de la localisation des pixels. D'autre part, ces paramètres sont assumés indépendants d'un pixel à l'autre. La distribution utilisée est gaussienne :

$$p^M_{x,y}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_M(x,y)} e^{-\frac{(\varphi(x,y)-\varphi_M(x,y))^2}{2\sigma^2_M(x,y)}} \tag{4.15}$$

où φ_M et σ_M maximisent le logarithme de la vraisemblance des paramètres des densités locales.

Une énergie plus simple consiste simplement à considérer :

$$E_f(\varphi, \mathcal{T}) = \iint_\Omega \delta_\epsilon(\varphi)(\mathcal{S}\varphi - \mathcal{T}\varphi_M)^2 d\Omega \tag{4.16}$$

où $\mathcal{T}$ est une transformation spatiale permettant de comparer la variable φ avec le représentant φ_M de la base de données normalisées et $\mathcal{S}$ une transformation d'échelle.

4.2.3.3 Construction de la forme représentative φ_M

Dans leur article [106], les auteurs considèrent que la moyenne des fonctions lignes de niveau ne peut pas respecter la forme de la base d'entraînement tout en étant une fonction de distance. Pour pallier cette difficulté ils considèrent une approche plus rigoureuse pour estimer φ_M la forme "représentative" de la base de données. Ils cherchent φ_M qui minimise :

$$E_f(\varphi_M) = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega} (\varphi_i - \varphi_M)^2 d\Omega, \text{ sous la contrainte : } |\nabla \varphi_M|^2 = 1 \tag{4.17}$$

En utilisant une descente de gradient on obtient que :

$$\frac{d}{dt}\varphi_M = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \varphi_M) \tag{4.18}$$

Et sa projection sur l'ensemble des fonctions distance est obtenue en utilisant l'EDP suivante :

$$\frac{d}{dt}\varphi_M = (1 - \text{sign}(\varphi_M^0))(1 - |\nabla \varphi_M|) \tag{4.19}$$

où φ_M^0 correspond à une certaine itération de l'équation (4.18). φ_M est obtenue en itérant alternativement les deux équations.

4.2.3.4 La transformation $\mathcal{T}$ optimale

Une transformation $\mathcal{T}$ est utilisée pour pouvoir comparer les caractéristiques de la moyenne de la base de données φ_M à celle du contour évoluant φ. La transformation $\mathcal{T}$ recherchée minimise donc :

$$E(\varphi, \mathcal{T}) = \iint_{\Omega} \delta_\epsilon(\varphi)(\varphi - \mathcal{T}\varphi_M)^2) d\Omega \tag{4.20}$$

La transformation $\mathcal{T}$ est dépendante de trois paramètres ; une rotation θ, une translation $\mathcal{V}$ et un facteur d'échelle $\mathcal{S}$. Le calcul de variation est utilisé pour minimiser (4.20) et l'équation d'évolution de φ est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\varphi(X) = -2\delta_\epsilon(\varphi(X))\mathcal{S}(\mathcal{S}\varphi(X) - \varphi_M(\mathcal{T})) \tag{4.21}$$

où $\mathcal{T} = \text{Rot}(\theta)X + V$. Pour une transformation prédéfinie φ évoluera vers φ_M modulo $\mathcal{T}$. Dans leur algorithme la transformation $\mathcal{T}$ est mise à jour en utilisant le calcul variationnel sur (4.20). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{S} &= 2\iint_{\Omega} \delta_\epsilon(\varphi(X))\mathcal{S}(\mathcal{S}\varphi(X) - \varphi_M(\mathcal{T})(-\varphi + \nabla\varphi_M(\mathcal{T})).\frac{\partial}{\partial\mathcal{S}}\mathcal{T})d\Omega \\
\frac{d}{dt}\theta &= 2\iint_{\Omega} \delta_\epsilon(\varphi(X))\mathcal{S}(\mathcal{S}\varphi(X) - \varphi_M(\mathcal{T})(\nabla\varphi_M(\mathcal{T})).\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{T})d\Omega \\
\frac{d}{dt}\mathcal{V} &= 2\iint_{\Omega} \delta_\epsilon(\varphi(X))\mathcal{S}(\mathcal{S}\varphi(X) - \varphi_M(\mathcal{T})(\nabla\varphi_M(\mathcal{T})).\frac{\partial}{\partial\mathcal{V}}\mathcal{T})d\Omega
\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.2.3.5 Analyse en composantes principales (ACP)

Le modèle précédent est un peu simpliste. Il se peut, par exemple, que la forme moyenne ne caractérise pas entièrement la base de données. Une autre alternative proposée par Paragios et Rousson [106] est de réaliser une ACP sur la base de données afin de dégager les vecteurs, selon lesquels, ses variations sont les plus importantes. La forme évoluant est ensuite comparée avant sa projection sur le sous espace généré par les vecteurs propres.

L'ACP consiste à décomposer la covariance de la base de données en une matrice orthogonale V et une matrice diagonale D telles que :

$$\text{cov}_\varphi = VDV^T \tag{4.23}$$

Il est pratiquement impossible de calculer une décomposition sur une base de grandes images sans l'aide d'une puissante machine. Une alternative consiste à utiliser une décomposition en valeurs singulières (SVD) :

$$\varphi_N = VSU \tag{4.24}$$

où U et V sont des matrices orthogonales et S est une matrice diagonale. Les valeurs propres de la matrice de covariance de φ peuvent être retrouvées puisque :

$$\begin{aligned} \Sigma_\varphi &= \varphi_N \varphi_N^T \\ &= VSU(VSU)^T = VSUU^T S^T V^T \\ &= V(SS^T)V^T \end{aligned} \tag{4.25}$$

Par identification entre les équations (4.23) et (4.25) il vient que $SS^T = D + \text{cste}$. V est la matrice orthogonale des vecteurs propres $v_{i \leq 23}$.

Comme nous l'avons vu précédemment, plus une valeur propre est grande et plus la variance de la projection de la base de données sur le vecteur propre correspondant est important. Afin d'obtenir une base de formes, avec un nombre de vecteurs réduit, dans laquelle les principales déformations de la base de données puissent être représentées, il faut considérer les vecteurs propres dont les valeurs propres correspondantes sont les plus grandes. Dans une telle représentation de la base de données, l'énergie (4.20) devient :

$$E_f(\varphi, \mathcal{T}, \lambda) = \iint_\Omega \delta_\epsilon(\varphi)(\varphi - T(\varphi_M + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i))^2 d\Omega \tag{4.26}$$

Les λ_i optimaux sont obtenus par la projection de $(\varphi - \mathcal{T}(\varphi_M))^2$ sur les vecteurs v_i.

L'analyse statistique des formes est encore très active [69][117] principalement pour la correspondance de formes [110]. De nouvelles mesures de formes ont aussi été développées [29]. Plusieurs nouveaux modèles proposent d'intégrer cette information dans les contours actifs, pour la correspondance de formes [84][103] ou bien la segmentation [25] ou encore le pistage [39].

4.3 Un modèle de segmentation utilisant la forme des pédicules

Dans cette partie nous avons utilisé le modèle de Rousson et Paragios avec le contour actif de Chan et Vese. Ce modèle n'a pas été concluant pour plusieurs raisons que nous

présenterons ultérieurement. Nous avons tout de même choisi de présenter les différentes étapes de ce modèle car ce modèle fut présenté lors de l'examen pré-doctoral et que nous avons passé beaucoup de temps à le développer. Aussi, nous présentons ce travail, parce qu'il est intéressant de remarquer que l'incorporation de connaissance a priori ne permet pas forcément d'augmenter les performances de segmentation. La première étape de ce modèle est de se constituer une base de données de formes de pédicules.

4.3.1 Étude de la forme des pédicules

Nous avons extrait manuellement, à partir de 23 radiographies de patients différents, le pédicule droit de la même vertèbre, la L1. Pour pouvoir les comparer, nous avons réorienté toutes les formes suivant l'axe majeur et nous les avons centrées au milieu de leurs axes majeurs. Pour chaque forme $\mathbf{F}_i$, la carte de distance φ_i est obtenue à partir de :

$$\varphi_i(x,y) = \chi(\mathbf{F}_i) \min d((x,y), \partial\mathbf{F}_i) \tag{4.27}$$

où $\partial\mathbf{F}_i$ est le contour de la forme $\mathbf{F}_i$ et d représente la distance euclidienne. A partir des cartes distances des différentes formes, on peut calculer la carte d'une forme moyenne comme étant la moyenne des cartes distances :

$$\varphi_{\mathcal{M}} = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} \varphi_i \tag{4.28}$$

La Figure 4.2 montre la superposition de φ_M avec la moyenne des fonctions lignes de niveau. On remarque que les deux courbes sont pratiquement identiques, avec aussi quelques artefacts pour φ_M dus sans doute à la discrétisation du gradient. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser simplement la moyenne des fonctions ensemble de niveau $\varphi_{\mathcal{M}}$ comme représentante de la forme. A partir des cartes distances des différentes formes et de la moyenne, la matrice de covariance peut aussi être calculée :

$$\Sigma_\varphi = \mathbb{E}\left\{(\varphi_i - \varphi_{\mathcal{M}})(\varphi_i - \varphi_{\mathcal{M}})^T\right\} \tag{4.29}$$

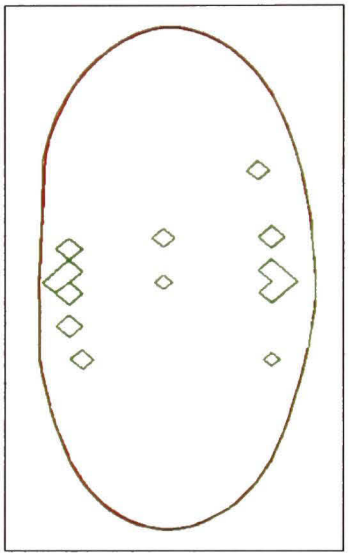


Figure 4.2 Comparaison de φ_M (en rouge) avec $\varphi_{\mathcal{M}}$ (en vert).

4.3.2 Un premier contour actif avec un modèle de forme a priori

Le premier algorithme considéré est celui minimisant l'énergie pondérée suivante :

$$E(\varphi) = \alpha_1 E_d(\varphi) + \upsilon E_r(\varphi) + \alpha_3 E_f(\varphi) \tag{4.30}$$

où les énergies E_d et E_r sont les énergies d'attache aux données et de régularité du modèle de Chan et Vese et E_f est l'énergie de forme donnée par l'équation (4.26). D'un point de vue algorithmique, le processus démarre à l'itération $t = 0$ avec $\varphi_t = \varphi_{\mathcal{M}}$. Puis à chaque nouvelle itération du processus $t + 1$, on calcule indépendamment la déformation due aux données et à la régularisation de la déformation due à l'énergie de forme. Ces deux déformations sont calculées à partir de φ_t. On obtient ainsi deux fonctions lignes de niveau :

$$\varphi^1_{t+1} = \varphi_t - \Delta t \delta_\epsilon(\varphi_t)\Big(\upsilon \nabla \left(\frac{\nabla \varphi_t}{|\nabla \varphi_t|}\right) + \big(-(I_1 - I_0)^2 + (I_2 - I_0)^2\big)\Big) \tag{4.31}$$

et :

$$\varphi^2_{t+1} = \varphi_t - 2\Delta t(\delta_\epsilon(\varphi_t(X))s_{t+1}(\varphi_t)(s_{t+1}(\varphi_t)\varphi_{t+1}(X) - \varphi_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}_{t+1}(\varphi_t)))) \tag{4.32}$$

Avec $\mathcal{S}_{t+1}$ et $\mathcal{A}_{t+1}$ calculés à partir du système d'équations (4.22), nous obtenons $\varphi_{t+1} = (1 - \alpha_3)\varphi^1_{t+1} + \alpha_3\varphi^2_{t+1}$. En faisant évoluer cet algorithme on remarque que la pondération influence grandement la qualité du résultat. Lorsque α_3 est très faible alors φ s'éloigne rapidement de $\varphi_{\mathcal{M}}$, c'est-à-dire que l'énergie de forme est très peu représentée, la segmentation finale a une forme très souvent éloignée de celles de la base de données. Lorsque α_3 est grand, φ_t évolue très peu et reste très proche de $\varphi_{\mathcal{M}}$ modulo $\mathcal{T}_t$: La forme a beaucoup de mal à évoluer puisqu'en démarrant le processus à $\varphi_0 = \varphi_{\mathcal{M}}$, l'énergie de forme impose fortement (par α_3) à φ de ne pas s'éloigner de la condition initiale.

Nous avons essayé plusieurs schémas d'implémentation afin d'obtenir une meilleure convergence. Mais de tous ces essais, les résultats sont très médiocres. Pourquoi ? Nous pensons principalement que ceci est dû à la grande variabilité de la base de données. En restant trop près de la forme moyenne nous passons à coté des pédicules dont la forme est éloignée de la moyenne. Cependant, en s'éloignant de la moyenne le risque est de sortir de la base de données en étant attiré par l'information environnante qui peut être très importante. Dans la suite, nous nous sommes intéressés à des modèles plus robustes pour représenter notre base de données.

4.3.3 Analyse en composantes principales

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté la décomposition en composantes principales. Nous avons suivi une telle approche dans cette partie. Notre base de données étant importante (nous avons déjà réduit nos images à une taille de 200×200 pixels), la matrice de covariance devient immense (dans notre cas 40 000 × 40 000), nous avons donc utilisé une décomposition SVD. Le nombre de vecteurs propres, caractérisant la base de données, a été choisi égal à 12. Ce nombre correspond au nombre i de vecteurs minimum vérifiant $\frac{\sum_{j=1}^{i} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{23} \lambda_j} > 0.995$. La Figure 4.3 présente les combinaisons linéaires de la forme moyenne $\varphi_{\mathcal{M}}$ avec chacun des 6 premiers vecteurs propres u_i avec une pondération de $\sqrt{\lambda_i}$. Le premier vecteur propre superpose le pédicule moyen, le second traduit

une intumescence sur la droite, le troisième sur la gauche. Le quatrième vecteur propre traduit la variation de la taille des pédicules dans la base. Avec les vecteurs 5 et 6 on remarque que leurs valeurs propres correspondantes sont plus faibles puisque les variations des déformations sont beaucoup moins importantes.

Mais cette décomposition n'a pas permis d'améliorer la convergence du contour actif. Les histogrammes de la Figure 4.4 indiquent que les distributions des formes pour certains pixels semblent multipolaires. Il semblerait donc, qu'il y ait plusieurs classes de pédicules. Le contour actif $\varphi_{\mathcal{M}}$ et les vecteurs propres ne sont sans doute pas représentatifs d'une telle base.

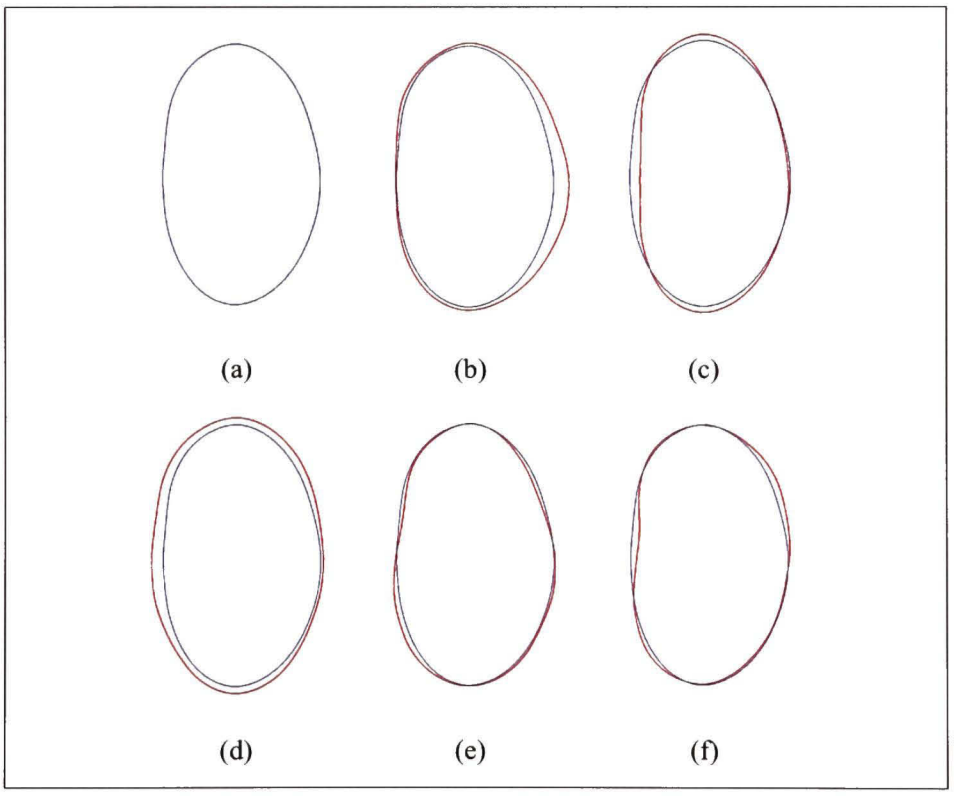


Figure 4.3 Superposition des lignes de niveau $\varphi_{\mathcal{M}} = 0$ (bleu) et $\varphi_{\mathcal{M}} + 5\sqrt{\lambda_i}v_i = 0$ (rouge) pour $i = 1...6$.

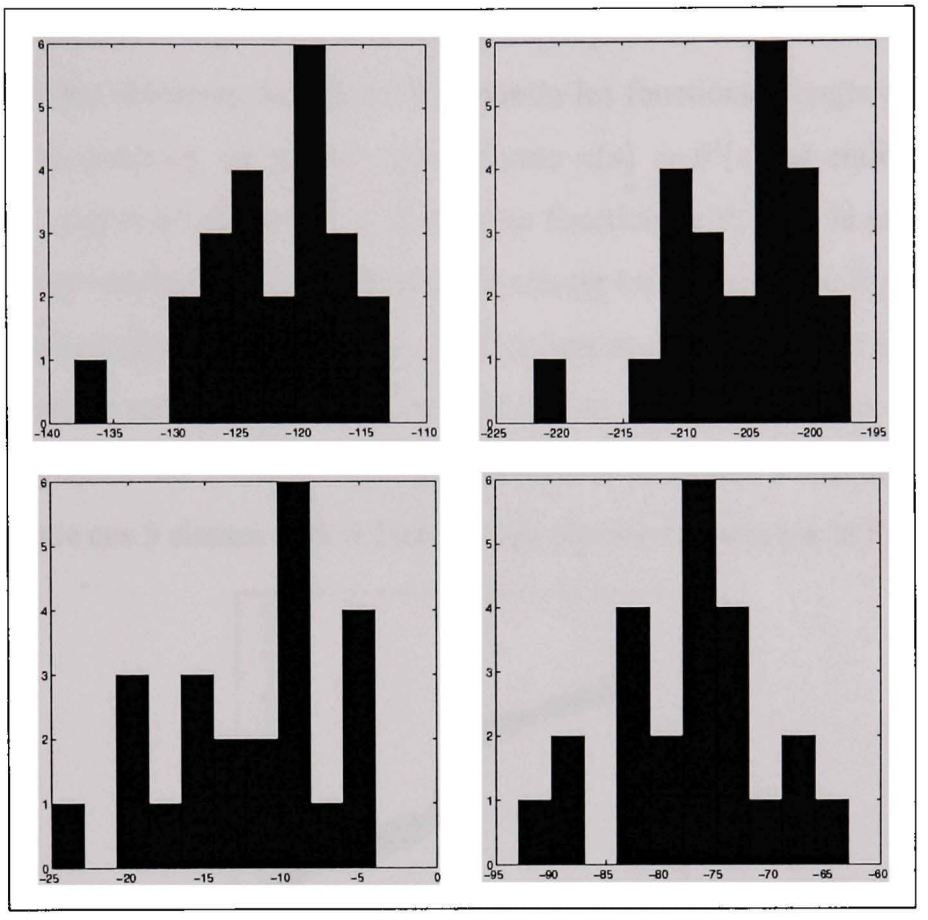


Figure 4.4 Histogramme des valeurs de $\varphi_i(x, y)$ pour des (x, y) différents et choisis aléatoirement.

4.3.4 Séparation de la base de données en classes

La Figure 4.4 affiche les histogrammes des valeurs prises par les 23 contours actifs φ_i pour des pixels (x, y) donnés. Ces figures mettent en évidence la multimodalité de certains histogrammes. Ces derniers mettent en évidence que, sans doute, il existe plusieurs classes de fonctions lignes de niveau. Nous avons aussi remarqué dans la base de données que certaines formes étaient plus proches entre elles. Nous pouvons espérer créer un modèle multimodal de notre base de données en la classifiant à partir d'un k-mean.

Nous avons paramétré de nouveau les formes de pédicules de telle façon que la longueur d'arc Λ de leur contour soit de période 2π et satisfasse $|\Lambda'(s)| = 1$ pour tout s, l'abscisse curviligne. $\Lambda'(s)$ peut être réécrite à l'aide de la décomposition complexe $e^{i\vartheta(s)}$. $\vartheta(s)$ est

identifiée à la fonction d'angle de la courbe, elle correspond à l'angle entre le vecteur $\alpha'(s)$ et l'axe positif des abscisses. La Figure 4.5 montre les fonctions d'angle des 23 formes de notre base de données. La courbure de la forme $\kappa(s) = \vartheta'(s)$ est entièrement déterminée par ϑ. Lorsque les formes sont classées en fonction de ϑ, elles le sont donc aussi en fonction de la courbure. Il est préférable de classer les formes avec ϑ plutôt qu'avec la courbure, puisqu'elle ne nécessite seulement qu'une seule dérivation et est ainsi moins bruitée. Nous avons utilisé un k-means [50] sur ϑ avec 5 classes en sortie. La Figure 4.6 affiche les moyennes des 5 classes ainsi que les formes associées à chacune des classes. On remarque que ces 5 classes sont différentes des formes données par la Figure 4.3.

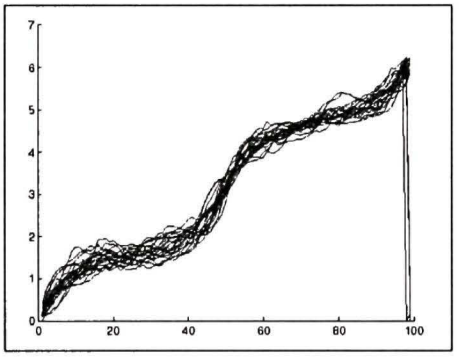


Figure 4.5 Superposition des fonctions d'angle des 23 formes de la base de données.

En classant la base de pédicules, la notion de fonction de ligne de niveau $\varphi_{\mathcal{M}}$ représentative n'existe plus, ainsi φ ne peut donc plus être comparée à un unique représentant ; Il faut la comparer avec le représentant de chaque classe, ce qui est relativement difficile. Comme pour la décomposition en composantes principales, nous avons créé 5 vecteurs :

$$v_i = \varphi_{\mathcal{M}} - \varphi_{\mathcal{M}_i} \tag{4.33}$$

où les $\varphi_{\mathcal{M}_i}$ sont les fonctions lignes de niveau des 5 classes i, et $\varphi_{\mathcal{M}}$ est la fonction représentant toute la base. La fonction φ est donc comparée aux cinq fonctions $\varphi_{\mathcal{M}} + \lambda_i\, v_i$, où le coefficient λ_i est la projection de $(\varphi - T(\varphi_{\mathcal{M}}))^2$ sur le vecteur v_i. La classe i la plus proche de φ est celle dont la valeur de λ est maximale. Seul ce dernier coefficient est

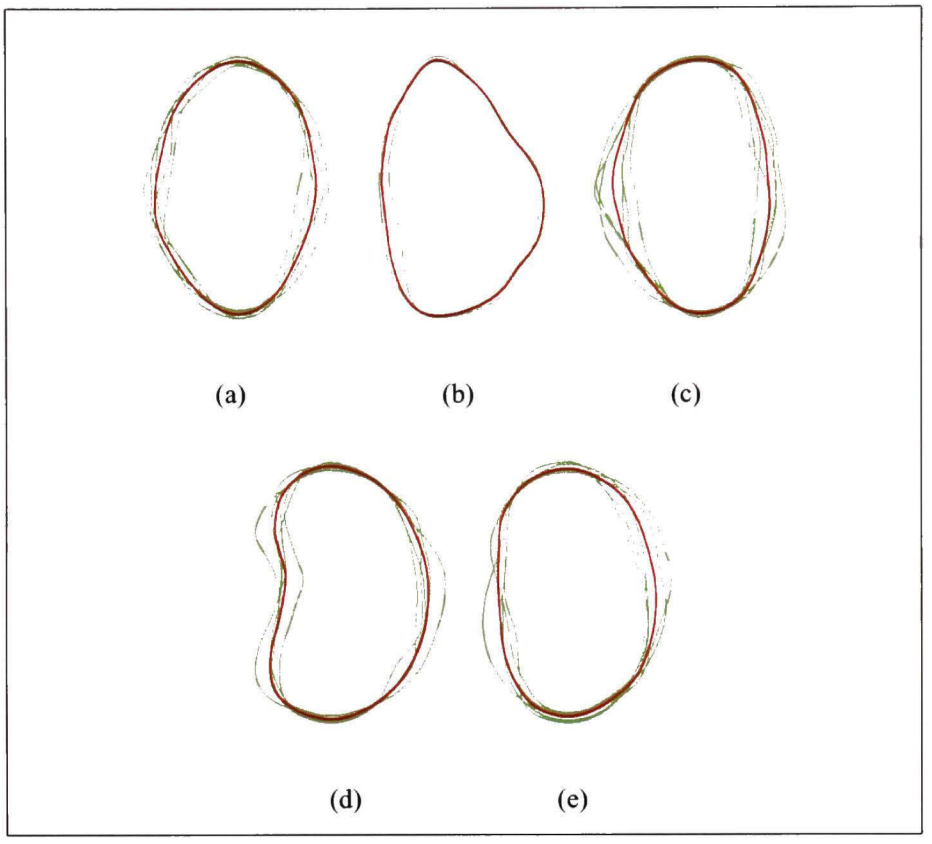


Figure 4.6 Superposition pour chacune des 5 classes, de la forme moyenne (rouge) des formes de la base de données appartenant à chacune d'elles (vert).

utilisé. L'énergie de forme devient ainsi :

$$E_f(\varphi, \mathcal{T}, \lambda) = \iint_{\Omega} \delta_\epsilon(\varphi)(\varphi - \mathcal{T}(\varphi_M + \lambda_i v_i))^2 d\Omega \tag{4.34}$$

Cette dernière énergie de forme est utilisée pour la minimisation de l'énergie totale (4.30). Cependant elle ne permet pas, non plus, une bonne convergence de la fonction ligne de niveau vers le pédicule à segmenter. En fait, d'un point de vue plus général, sur toutes ces méthodes utilisant la forme a priori des pédicules, il semble qu'elles aient beaucoup de difficultés à converger vers le pédicule souhaité. Plusieurs causes peuvent être mises en évidence ; La première est que, les pédicules sont de petits objets, et donc peu de pixels les caractérisent. Aussi leurs formes sont très variables. En effet suivant l'orientation de la vertèbre, celle-ci change beaucoup. Et puis, d'un patient à un autre, les formes sont aussi très différentes. Par surcroît, les patients traités sont souvent en période de croissance, or

la forme et la taille des pédicules sont souvent très différentes entre le début et le fin de la croissance. Enfin les pédicules s'apparentent à des ellipses, or ces formes ne présentent aucune discontinuité dans leur contour qui pourrait être identifiée pour leur reconnaissance. Avec tous ces éléments, il semble donc illusoire de vouloir créer un modèle utilisant une base de formes a priori.

Un autre problème dans la convergence du contour actif est que les images sont très faiblement contrastées. Dans la suite nous allons voir comment à partir de ces images peu contrastées, on peut créer une table de probabilités sur laquelle un contour actif peut être initialisé.

4.4 La segmentation des pédicules

Pour permettre au modèle de Chan et Vese de bien segmenter les pédicules, nous avons finalement adopté les quatre étapes suivantes (Voir Figure 4.7) :

- **initialisation :** l'algorithme est initialisé en cliquant dans l'intérieur du pédicule ;
- **la table de probabilités :** dans un voisinage du point d'initialisation, une table de probabilités est construite en assignant à chaque pixel une probabilité d'appartenir localement à l'objet le plus noir ;
- **une segmentation grossière :** le contour actif est traité sur la table avec un paramètre de régularité v élevé. Ainsi les pixels ayant une haute (ou une faible) probabilité sont groupés ensemble. Si la segmentation à la sortie n'est pas acceptable le contour actif est réinitialisé avec un paramètre de régularité différent et dépendant de la segmentation résultante ;
- **segmentation affinée :** cette segmentation permet l'apparition de fortes courbures le long du contour actif, elle permet ainsi d'atteindre la totalité de l'intérieur du pédicule. Ce modèle est aussi augmenté par un terme d'attache à la forme grossière.

Ces quatre étapes sont détaillées dans les prochaines sous-sections.

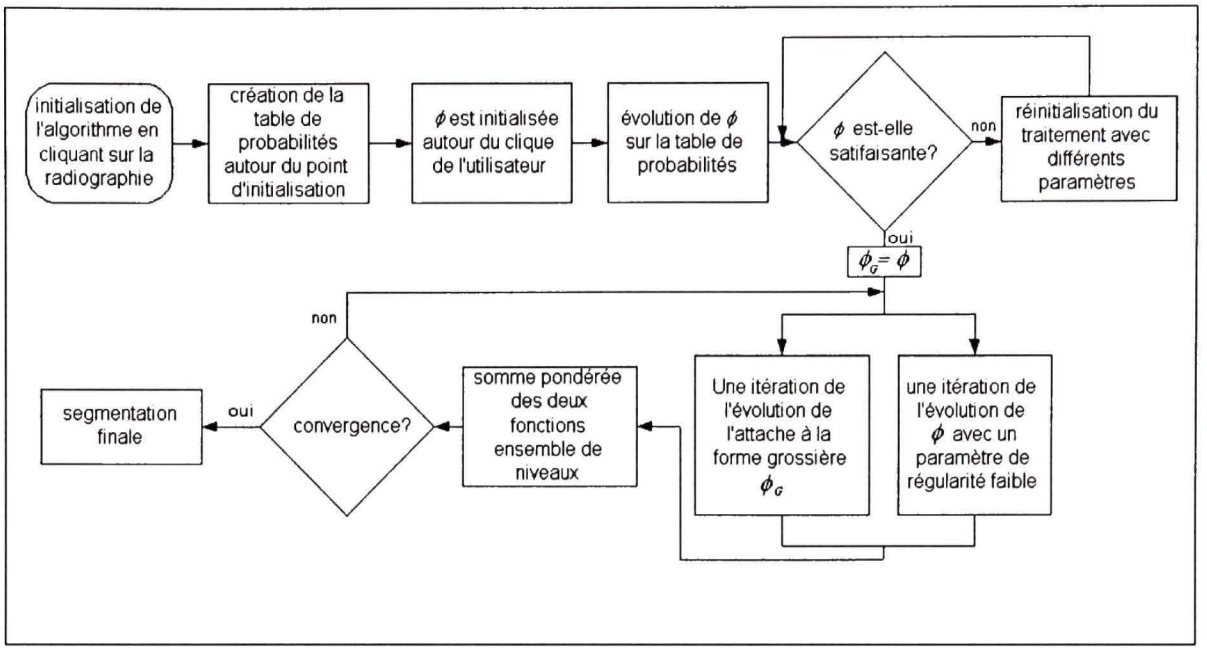


Figure 4.7 Diagramme du système.

4.4.1 Table de probabilités

4.4.1.1 Motivation

Un des inconvénients majeurs, du modèle constant par morceaux de Chan et Vese, est la détermination des caractéristiques des objets. En effet chacune d'elles est déterminée globalement sur chaque objet ; c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule valeur de caractéristique pour chaque objet. Or il se peut que celle-ci ne soit pas constante mais simplement homogène (régulière). Ainsi une détermination locale de la caractéristique permettrait dans certains cas d'éviter à la fonctionnelle d'énergie de converger vers un minimum local. En fait dans certains cas, la non uniformité de la caractéristique (niveau de gris) n'est pas due à l'objet en lui-même mais à la variabilité des objets le superposant. Pour notre application, nos caractéristiques, correspondant aux niveaux de gris moyens de l'intérieur et de la couronne du pédicule, sont très proches ; seulement deux niveaux de gris les différencient en moyenne. Il est clair que cette différence de contraste n'est pas visible à l'œil nu.

Or nous sommes capables de percevoir les pédicules comme étant une couronne foncée sur un fond plus clair. C'est le contraste local qui est généralement plus important que le contraste global qui nous permet de les percevoir ; C'est-à-dire que "généralement" la couronne du pédicule est localement plus sombre que son voisinage mais peut être globalement très proche du fond. Dans cette partie nous allons tenter de marier le modèle de Chan Vese avec une détermination locale de ses caractéristiques. Dans [76], les auteurs proposent une telle détermination locale, cependant les caractéristiques utilisées sont encore les niveaux de gris. Or dans notre cas la différence de telles caractéristiques est tellement faible que cette approche ne semble pas souhaitable. Nous allons donc présenter dans la prochaine sous-section, une carte de probabilités associant à chaque pixel, une probabilité d'appartenir à la couronne du pédicule. En faisant évoluer le contour actif de Chan Vese sur la table de probabilités, on évite de converger vers des minima locaux.

4.4.1.2 Table de probabilités

Pour chaque pixel $x \in \Omega$, soit $V_a(x) \in \Omega$ le voisinage de x de taille a. Il faut sélectionner un voisinage assez grand pour qu'en chaque pixel appartenant à l'intérieur du pédicule, il existe au moins un pixel appartenant à la couronne du pédicule. On cherche ensuite à séparer l'histogramme de l'image I au voisinage de x en deux classes ; $C_1(x)$ le fond et $C_2(x)$ la couronne. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode de Otsu [95]. Soit :

$$hist_a : x \rightarrow p : \begin{cases} [0\ 255] \cap \mathbb{N} & \rightarrow & [0\ 1] \\ i & \rightarrow & \frac{n(i)}{N} \end{cases}$$

où $n(x)$ correspond au nombre de pixels de niveau de gris i dans le voisinage V_a de x et N est la taille du voisinage. La fonction p représente la répartition des niveaux de gris dans $V_a(x)$, elle peut être vue comme une distribution de probabilités discrète des niveaux de gris. $hist_a$ associe donc à chaque pixel x de l'image une fonction de répartition des niveaux de gris de son voisinage ; $hist_a$ est l'histogramme du voisinage V_a de x. On peut calculer à partir de la distribution p les moments :

$$\text{d'ordre 0 :} \quad m_0(k) = \sum_{i=1}^{k} p(i)$$
$$\text{d'ordre 1 :} \quad m_1(k) = \sum_{i=1}^{k} i.p(i)$$

On note $k^* = k^*(x)$ le niveau de gris seuil séparant dans l'histogramme de $V_a(x)$ la classe C_1 de la classe C_2. Si les probabilités d'appartenir à C_1 et C_2 sont notées respectivement p_1 et p_2, alors $p_1(k^*) = m_0(k^*)$ et $p_2(k^*) = 1 - m_1(k^*)$. Les niveaux de gris moyens des deux classes sont :

$$\aleph_1 = \frac{m_1(k^*)}{p_1(k^*)} \text{ et } \aleph_2 = \frac{m_1(255) - m_1(k^*)}{p_2(k^*)}$$

Les variances des deux classes sont données par :

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{k^*} [i - \aleph_1]^2]p(i)/p_1(k^*)$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{i=1}^{k^*} [i - \aleph_2]^2]p(i)/p_2(k^*)$$

Les deux classes sont déterminées par un seul paramètre le seuil k^*. Une discrimination automatique des deux classes consiste à automatiser la recherche de ce seuil. Une bonne mesure discriminante peut être obtenue à partir des homogénéités des deux classes, celles-ci sont directement liées à leur variance. Le seuil optimal k^* peut être obtenu en minimisant une somme pondérée des variances des deux classes. Otsu propose ainsi comme pondération, la variance interclasse :

$$\sigma_I^2(k) = p_1(k)\sigma_1^2(k) + p_2(k)\sigma_2^2(k)$$

et donc :

$$k^* = \arg\min_k \sigma_W^2(k)$$

En décomposant la variance totale en :

$$\sigma^2 = \sigma_I^2(k) + p_1(k)p_2(k)[\aleph_1(k) - \aleph_2(k)]^2$$

La seconde partie s'appelle la variance intra-classe $\sigma_B^2(k)$. La minimisation de la variance interclasse revient à maximiser $\sigma_B^2(k)$, et donc maximiser la distance entre les deux

moyennes. La recherche du maximum peut être simplement faite par une recherche séquentielle sur tous les niveaux de gris.

A partir de ces valeurs nous souhaitons obtenir $p(x \in C_1(x,a))$. Pour cela nous utilisons le théorème de Bayes [50] :

$$p(x \in C_1(x,a)) = \frac{p_1 P(x|C_1(x,a))}{p_1 P(x|C_1(x,a)) + p_2 P(x|C_2(x,a))}$$

En supposant que la distribution des niveaux de gris à l'intérieur de chacune des deux classes est gaussienne :

$$p(x|C_i(x,a)) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} e^{-\frac{(\aleph_i - u(x))^2}{\sigma_i^2}}$$

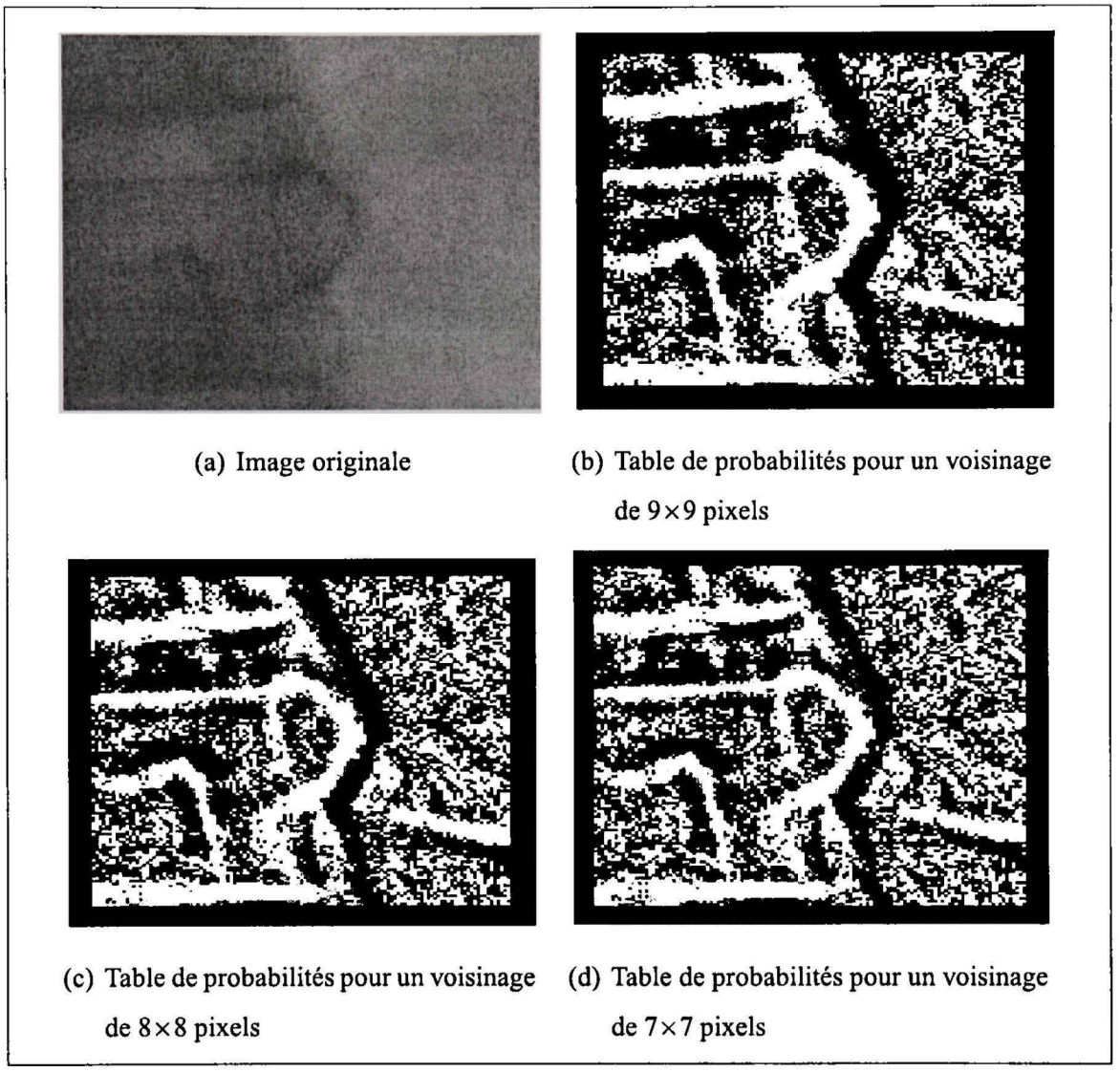
On obtient ainsi :

$$p(x \in C_1(x,a)) = p_1\sigma_2^2 \frac{1}{p_1\sigma_2^2 + p_2\sigma_1^2 e^{-\frac{\sigma_1^2(\aleph_2 - u(x))^2}{\sigma_2^2(\aleph_1 - u(x))^2}}} \tag{4.35}$$

Nous notons $\mathbf{T}_a(i) = p(i \in C_1(x,a))$ la table de probabilités. Grâce à celle-ci, nous discriminons localement l'image en deux classes d'objets. Ainsi la couronne des pédicules et les contours ressortent fortement de la table par leur probabilité élevée, alors que l'intérieur des pédicules et l'intérieur des vertèbres reçoivent des probabilités plus faibles 4.8. Pour passer de la détermination locale à la détermination globale, il suffit simplement de traiter la table de probabilités à la place de l'image, avec pour caractéristiques les probabilités d'appartenir et de ne pas appartenir à l'objet le plus foncé. Ces probabilités ayant été obtenues localement, peuvent ainsi être traitées globalement par un modèle du type de celui de Chan et de Vese.

4.4.1.3 Quelques problèmes dûs à la table de probabilités

Le problème de cette approche est l'hypothèse avancée : localement il existe uniquement deux objets dans l'image. Or ceci n'est pas forcément vrai lorsque, par exemple, un plateau intersecte un pédicule. A cause de cette superposition, quatre objets sont présents : le



(a) Image originale

(b) Table de probabilités pour un voisinage de 9×9 pixels

(c) Table de probabilités pour un voisinage de 8×8 pixels

(d) Table de probabilités pour un voisinage de 7×7 pixels

Figure 4.8 Exemples de tables de probabilités pour différentes tailles a de voisinage.

fond, la couronne du pédicule, le plateau et la superposition couronne-plateau. Localement l'image n'est plus bimodale et dans ce cas, l'algorithme de Otsu n'est pas utilisable. D'autres algorithmes, comme Otsu récursif [31], permettent de segmenter des images multimodales, mais soit il est nécessaire de préciser le nombre de modes soit l'algorithme identifie automatiquement celui-ci au nombre de pics présents dans l'histogramme. Comme nous souhaitons un seuillage automatique les premières méthodes ne sont pas envisageables. Quant aux secondes, nous avons vérifié expérimentalement qu'elles ne donnent pas de résultats satisfaisants.

Même si quelques problèmes existent, cette table de probabilités est un outil appréciable qui permet de bien mettre en valeur les pédicules. Aussi, plusieurs procédés que nous présenterons plus loin nous permettent de contrer les difficultés engendrées par la création de la table.

4.5 Forme grossière de pédicule

L'algorithme de Chan et Vese est initialisé sur la table de probabilités $\mathbf{T}_a$ afin de regrouper tous les pixels ayant une probabilité forte p^2 d'appartenir à l'intérieur du pédicule, c'est-à-dire ayant aussi une probabilité forte de ne pas appartenir à la couronne. Au temps $t = 0$ le processus est initialisé avec une fonction distance φ_0 dont la courbe de niveau $\varphi_0 = 0$ correspond à un cercle de rayon 5 (pixels) et de centre pt, choisi par l'utilisateur. Les caractéristiques c_1 et c_2 de l'intérieur et de l'extérieur de la forme sont représentées par les probabilités p^2 et $p^1 = 1 - p^2$.On les initialise à $p_0^2 = 1$.

Pour seule information a priori sur la forme du pédicule, nous imposons :
- une aire maximale $\mathcal{A}_{\max}$ et une aire minimale $\mathcal{A}_{\min}$ sur la forme à segmenter ;
- un paramètre υ correspondant au poids de l'énergie de régularité.

Le paramètre υ est choisi élevé dans un premier temps afin d'obtenir une forme avec un contour régulier, ainsi la ligne de niveau ne peut évoluer en dehors du pédicule lorsque la couronne du pédicule présente un trou comme sur la Figure 4.9. On fait donc évoluer l'équation suivante :

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t + \upsilon \quad \delta_\epsilon(\varphi)\nabla\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right) \quad + \quad \delta_\epsilon(\varphi)\left(-(p_t^2 - \mathbf{T})^2 + (p_t^1 - \mathbf{T})^2\right) \tag{4.36}$$

L'aire $\mathcal{A}_t$ de la forme est extraite au temps t en calculant l'aire de la partie positive de φ. Si $\mathcal{A}_t$ est supérieure à $\mathcal{A}_{\max}$, trop de pixels ont été admis dans l'ensemble $\chi(\varphi) > 0$. La couronne du pédicule se trouvant à la frontière extérieure de l'intérieur du pédicule, certains de ces pixels de la couronne ont donc dû être admis dans l'intérieur du pédicule. Généralement ils l'ont été parce que leur probabilité d'appartenir à la couronne est faible

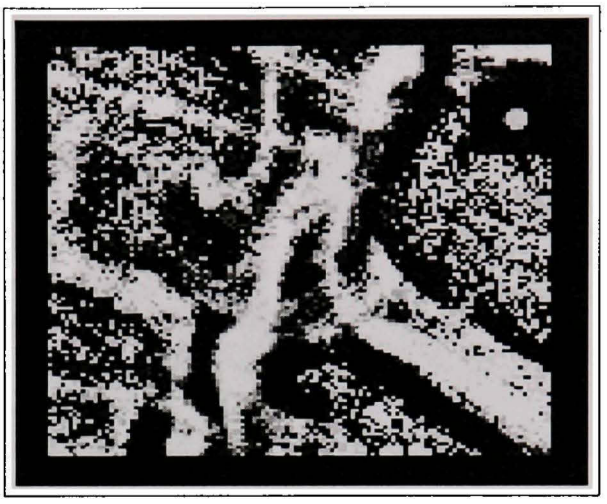


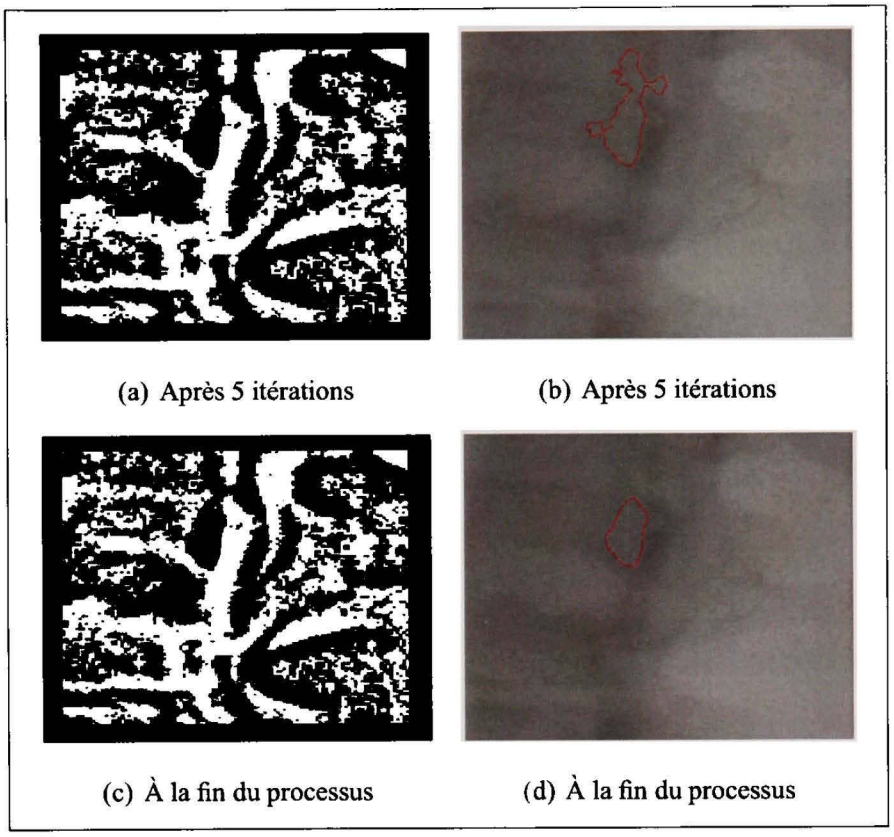
Figure 4.9 Exemple de trou dans couronne de la table de probabilités d'un pédicule.

(la table pouvant être bruitée). La caractéristique de l'extérieur du pédicule est réévaluée en diminuant sa valeur afin de rendre la condition de non appartenance à la couronne plus sélective. Les pixels à la limite de la condition de non appartenance au temps t se font exclure, réduisant ainsi l'aire de la forme (Voir Figure 4.10).

Si $\mathcal{A}_t$ est inférieure à $\mathcal{A}_{\min}$ alors il y a des pixels appartenant à intérieur du pédicule qui ne sont pas inclus dans la forme. En augmentant la probabilité p_2 la condition de non appartenance est moins sélective. Certains pixels extérieurs, proches du contour de la forme et ayant été auparavant à la limite de la condition d'admission vont être inclus dans la forme, augmentant ainsi son aire.

Cette démarche est itérée jusqu'à convergence du système. L'algorithme s'arrête si $p_t^0 \simeq p_t^1$ ou encore lorsque $t > \tau$. En effet :

- si $p_t^0 \simeq p_t^1$ alors $\mathcal{A}_t < \mathcal{A}_{\min}$ ou bien $\mathcal{A}_t > \mathcal{A}_{\max}$;
- si $t > \tau$ alors le processus n'a pas eu le temps de converger avant τ itérations. Nous avons vérifié expérimentalement que cette condition n'était pas vérifiée lorsque la forme n'avait pas réussi à se restreindre à l'intérieur du pédicule, son aire continue de croître. Dans ce cas, alors $\mathcal{A}_\tau > \mathcal{A}_{\max}$.



(a) Après 5 itérations (b) Après 5 itérations

(c) À la fin du processus (d) À la fin du processus

Figure 4.10 L'aire $\mathcal{A}(\varphi_t = 0)$ est supérieure à $\mathcal{A}_{\max}$, la probabilité p_1 descend donc jusqu'à $\frac{215}{255}$.

Tous les problèmes de convergence du contour actif correspondent à une question d'aire :

- si $\mathcal{A}_t < \mathcal{A}_{\min}$ alors le problème de convergence rencontré n'est pas dû à la qualité de la table comme précédemment mais à la forme du pédicule : En effet lorsque le pédicule est trop fin (dans le cas d'une rotation de vertèbre) et que la contrainte de régularité est trop forte, la forme a du mal à croître dans les zones où la courbure du contour est forte. On réitère donc l'algorithme précédent avec les mêmes conditions initiales sauf pour la pondération de la régularité v qui est diminuée. On réitère cette opération jusqu'à convergence de l'algorithme vers une forme d'aire acceptable ;
- si $\mathcal{A}_t > \mathcal{A}_{\max}$, on observe très souvent que dans ce cas la couronne est "percée". Ceci se produit souvent à cause d'une superposition du plateau ou d'un autre objet sur le pédicule, la table est alors mal définie. Si la pondération v de la régularité est trop faible

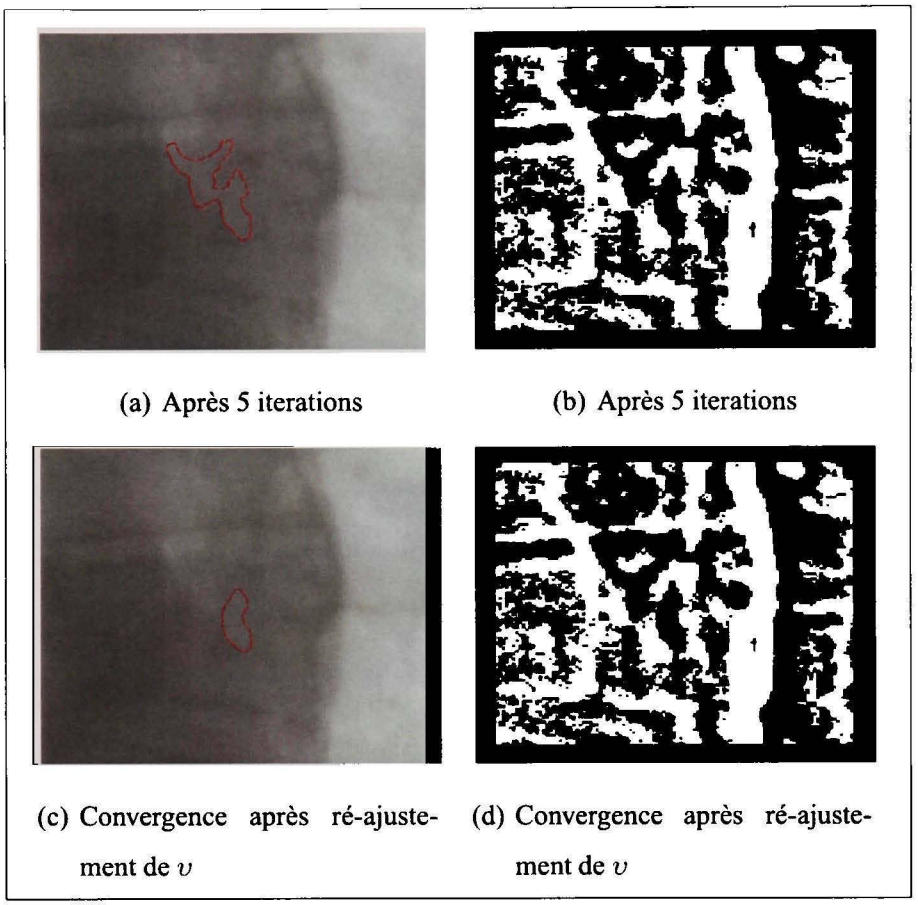


Figure 4.11 La ligne de niveau n'est pas assez régulière lors de la première itération, on réajuste le coefficient υ pour obtenir une bonne convergence. Le contour est plus grossier après la deuxième itération.

alors le contour de la forme s'engouffre dans le "trou" permettant à la forme d'évoluer à l'extérieur du pédicule. L'algorithme est réinitialisé avec un paramètre de régularité υ plus élevé pour empêcher la forme d'évoluer là où la courbure de son contour est forte (Figure 4.11).

La mise à jour automatique des caractéristiques ainsi que le paramètre de régularité nous permettent de segmenter avec le même modèle des formes grossières de pédicules appartenant à des niveaux vertébraux différents (thoraciques et lombaires) sans aucun ajustement manuel.

4.5.1 Recherche d'une segmentation plus fine

L'algorithme de Chan et Vese avec un coefficient de régularité υ élevé donne une forme grossière qui approche celle du pédicule recherché. Dans cette section, nous présentons comment obtenir une segmentation plus fine pour mieux estimer la forme réelle du pédicule. Nous construisons avant tout une fonction distance φ_G à partir de la forme grossière segmentée dans la section précédente. Puis nous utilisons un second algorithme basé sur le modèle de la section 4.2.3.2 développé par Rousson et Paragios afin d'obtenir une meilleure estimation du pédicule sur une table T_b (qui peut être différente de T_a). Cependant, au lieu de faire évoluer φ relativement à une base de données, nous la faisons évoluer en fonction de la forme grossière φ_M sur table T_b.

Entrée: fonction ligne de niveau ϕ_t

Sortie : fonction ligne de niveau ϕ_{t+1}

3.1 $\varphi^1_{t+1} = \varphi_t + \upsilon\delta_\epsilon(\varphi)\nabla\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right) + \delta_\epsilon(\varphi)\left((p^1_t - \mathrm{T}_b)^2 - (p^2_t - \mathrm{T}_b)^2\right)$;

3.2 $\varphi^2_{t+1} = \varphi_t - 2 \times dt(\varphi_t - \varphi_G)$;

3.3 $\varphi_{t+1} = (1-\alpha)\,\varphi^1_{t+1} + \alpha\,\varphi^2_{t+1}$;

3.4 mise à jour de p^2_{t+1} et p^1_{t+1} à l'aide de $\mathcal{A}_{\max}$ et de $\mathcal{A}_{\min}$;

Algorithm 3: Fonction Multi_form($\varphi_G, \mathrm{T}_b, \mathcal{A}_{\max}, \mathcal{A}_{\min}, \upsilon$)

Aucune transformation $\mathcal{T}$ n'est utilisée ici puisque φ_G est une représentation grossière du pédicule. Elle est déjà bien localisée, bien orientée et à la bonne échelle par rapport à la segmentation finale.

De plus, le coefficient de pondération α n'est plus uniforme sur tout l'espace de définition de φ, il devient spatialement dépendant. Ainsi dans certaines localisations spatiales, nous pouvons imposer à φ de rester proche de φ_G et dans d'autres de la laisser évoluer. Nous le rendons aussi dépendant de φ et de φ_G, en utilisant une forme sigmoïdale :

$$\alpha = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(\|\varphi - \varphi_G\| - P)}} \tag{4.37}$$

Lorsque la fonction φ est proche de φ_G, elle évolue librement pour aller chercher les

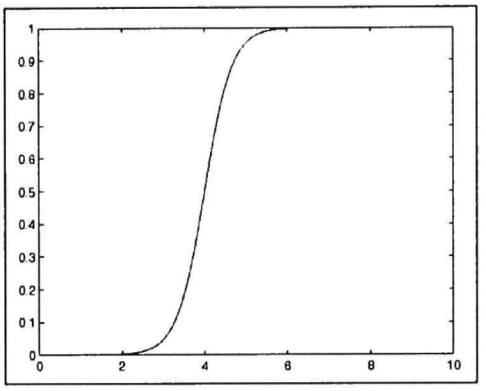


Figure 4.12 Représentation graphique du coefficient α utilisé pour les expériences.

détails. Mais lorsque φ s'éloigne trop de φ_G en un pixel donné, son évolution est ralentie jusqu'à s'arrêter complètement. La courbe de la Figure 4.12 représente le coefficient α avec les paramètres utilisés pour nos expériences. 4 est le point d'inflexion de la courbe et pour $\|\varphi - \varphi_G\| > 5$ la courbe est déjà proche de 1, ainsi φ évolue plus ou moins librement tant que $\|\varphi - \varphi_G\| < 5$. Du point de vue de la forme cela revient à laisser évoluer son contour sur une étroite bande de 10 pixels de large.

4.5.2 Différence de segmentation entre les pédicules thoraciques et les pédicules lombaires

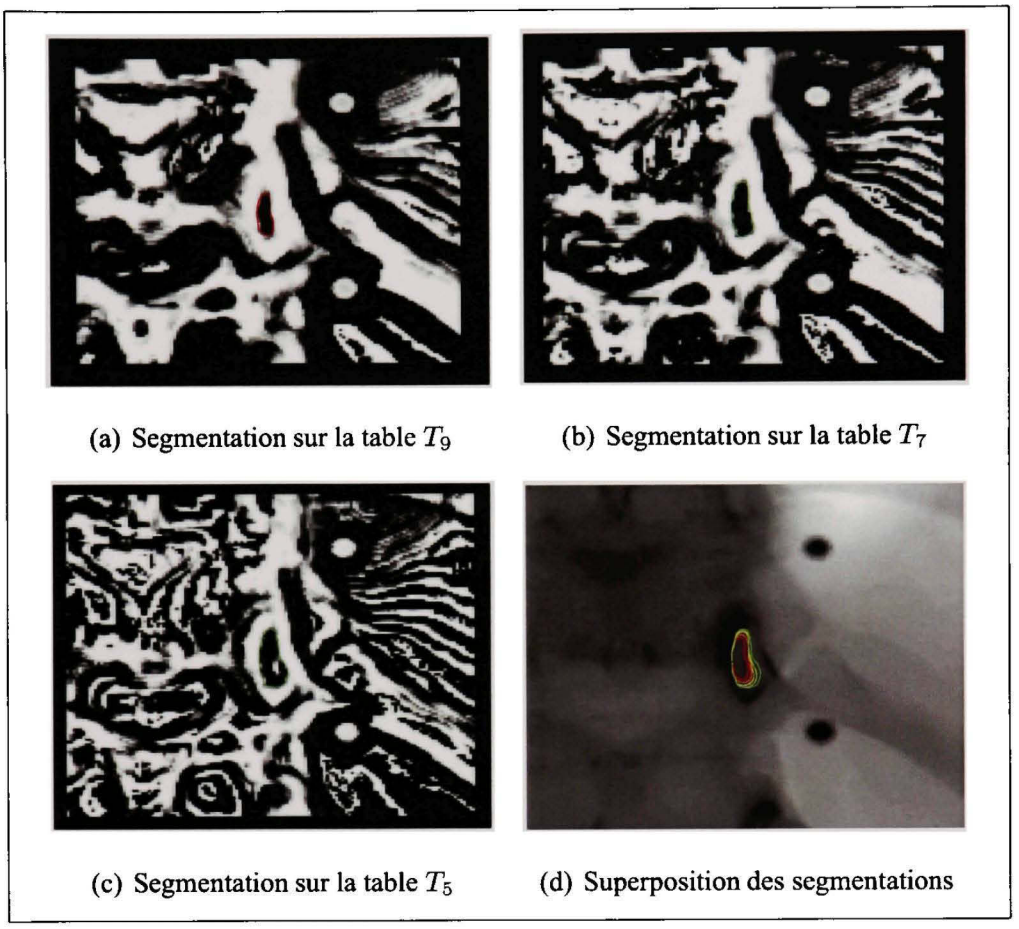
Avec l'algorithme précédent nous traitons différemment les vertèbres thoraciques et les vertèbres lombaires. En effet, comme nous l'avons évoqué lors de la présentation de la table de probabilités, il faut que pour chaque pixel appartenant à l'intérieur du pédicule il y ait au moins un pixel de son voisinage appartenant à la couronne. Cependant, plus large est le voisinage et plus grossière est la table (inversement plus petit est le voisinage, et plus la table est bruitée). Ainsi, il est donc nécessaire de trouver une taille de voisinage qui est un bon compromis entre la grossièreté de la table et le ratio de la taille du voisinage sur la taille du pédicule. Elle a été choisie en fonction du paramètre $\mathcal{A}_{\text{max}}$. A cause de la rotation axiale et de leurs formes, les vertèbres de $T11$ à $L4$ peuvent avoir de gros

pédicules comparés aux autres vertèbres. C'est pourquoi nous utilisons deux tailles de voisinage différentes ; 7×7 pour les dix premières vertèbres et 9×9 pour les autres.

Pour la segmentation fine, la même séparation entre vertèbres est utilisée. Pour les dix premières thoraciques, le second algorithme est initialisé sur la table T_7 avec un paramètre de régularité v plus petit, permettant à la forme d'être moins régulière et de chercher les détails autour de φ_G. Pour les autres vertèbres, puisqu'un voisinage de 9×9 pixels donnent des tables trop grossières, des tailles de voisinage plus petites doivent être utilisées. De plus, la forte amplitude de la rotation axiale sur ces vertèbres déforme l'intérieur des pédicules, l'un devient fin alors que l'autre devient gros ; Ainsi pour atteindre les sommets supérieurs et inférieurs du pédicule fin, l'algorithme doit être roulé sur une table T_5. L'approche que nous proposons consiste à traiter le second algorithme itérativement sur différentes tables (de la table T_8 à la table T_5). Lorsque le processus converge sur une table, la fonction ligne de niveau φ résultante devient la nouvelle fonction ligne de niveau grossière φ_G pour l'échelle suivante. Par exemple sur la Figure 4.13, on remarque que sur T_9, l'intérieur du pédicule n'est pas entièrement visible, il n'est donc pas bien segmenté. Plus l'échelle devient fine et plus l'intégralité de l'intérieur du pédicule est visible et meilleure est sa segmentation. Cependant une tache blanche apparaît dans l'intérieur du pédicule en descendant dans les échelles. Mais, parce que le contour actif est attaché à la forme grossière de l'échelle précédente, il peut aller chercher la forme exacte du pédicule sans être dérangé par cette tache.

4.5.3 Paramètres

Trois paramètres initiaux sont à ajuster : v, $\mathcal{A}_{\max}$ et $\mathcal{A}_{\min}$. Nous avons utilisé dix radiographies pour estimer ces différents paramètres. Les résultats sont présentés sur le Tableau 4.1.



(a) Segmentation sur la table T_9 (b) Segmentation sur la table T_7

(c) Segmentation sur la table T_5 (d) Superposition des segmentations

Figure 4.13 La segmentation multi échelle et la superposition des segmentations aux différentes échelles sur l'image originale.

4.5.4 Pour augmenter le taux de segmentation

La méthode présentée précédemment ne permet pas de segmenter tous les pédicules. C'est le cas par exemple, lorsque la couronne est fortement trouée, ou bien lorsque le pédicule est coupé par le plateau supérieur de la vertèbre. Si la segmentation des pédicules est développée comme outil d'aide au diagnostique, il peut être demandé à l'utilisateur des informations supplémentaires permettant l'augmentation du taux de segmentation des pédicules. Nous avons, à cet effet, développé quelques petits algorithmes permettant d'aller chercher des pédicules pour lesquels la méthode précédemment présentée échouerait.

Tableau 4.1

Valeurs des trois paramètres pour les différents niveaux vertébraux

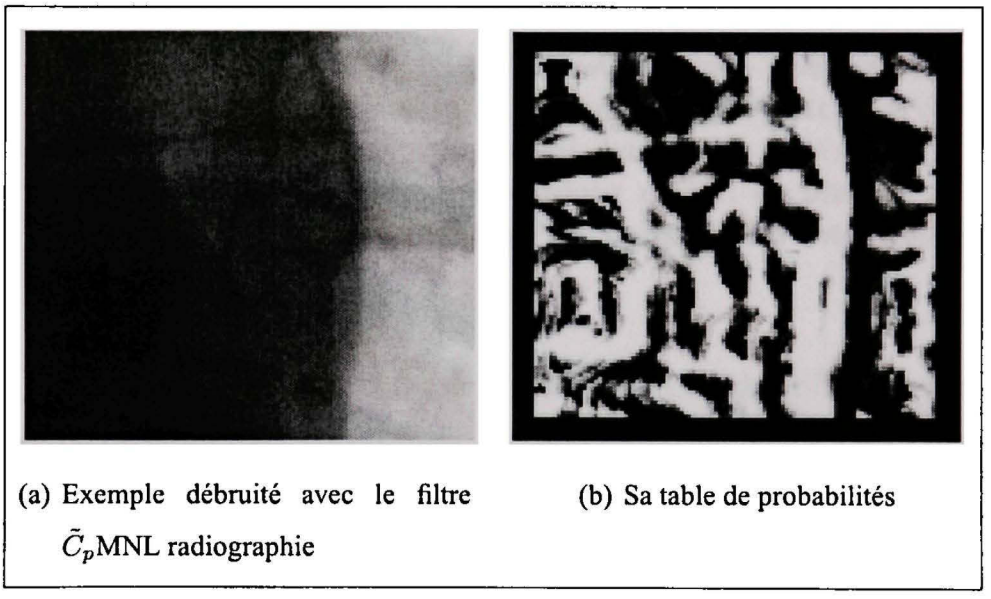
numéro de la vertèbre	$\mathcal{A}_{\min}$	$\mathcal{A}_{\max}$	régularité
1	40	70	0.5×255^2
2	35	75	0.5×255^2
3	35	75	0.5×255^2
4	35	75	0.15×255^2
5	30	100	0.07×255^2
6	40	120	0.07×255^2
7	40	130	0.07×255^2
8	40	150	0.07×255^2
9	40	170	0.07×255^2
10	70	200	0.07×255^2
11	70	600	0.07×255^2
12	70	600	0.07×255^2
13	70	320	0.07×255^2
14	70	320	0.07×255^2
15	70	320	0.07×255^2
16	70	320	0.07×255^2

4.5.4.1 Les pédicules dont la couronne est fortement trouée

En utilisant la table de probabilités, il se peut que l'anneau du pédicule comporte des trous (voir Figure 4.14). Comme nous l'avons évoqué dans les parties précédentes, ceci est dû à la superposition du pédicule avec un autre objet, par exemple un plateau vertébral, un organe (comme par exemple un cœur). En effet, dans ces cas, nous ne sommes plus en présence de deux objets, mais de trois ou plus. La table de probabilités est donc mal définie aux alentours de ces superpositions, et dans certain cas des trous sont créés dans l'anneau du pédicule. Nous avons vu précédemment comment traiter ces anomalies en utilisant un coefficient de régularité élevé. Mais lorsque le trou est trop important, le contour actif

ne peut qu'échouer dans la segmentation. Cependant les pédicules comportant de telles anomalies peuvent être identifiés par la personne qui initialise l'algorithme et être traités différemment.

Dans ce cas extrême, le même algorithme de Chan et Vese est utilisé sur la table de probabilités du pédicule, mais sans réajustement automatique du coefficient de régularité et des caractéristiques. Le contour évolue donc ainsi en dehors de la couronne du pédicule. La ligne de niveau 0 (Voir Figure 4.15) ainsi extraite est ensuite traitée postérieurement afin d'obtenir l'arc du contour C coïncidant avec le contour du pédicule.



(a) Exemple débruité avec le filtre $\tilde{C}_p$MNL radiographie

(b) Sa table de probabilités

Figure 4.14 Un exemple de pédicule dont le trou dans la couronne du pédicule sur la table de probabilités est grand. On remarque sur la radiographie a) la superposition d'un objet qui rend la partie gauche beaucoup plus foncée. C'est cette superposition qui crée le trou sur la table de probabilités.

Le plan est recentré au point d'initialisation de l'algorithme Chan-Vese. Pour tout angle $\theta_i = \frac{i \times 2\pi}{360}$, la droite d'équation $y = tan(\theta_i)x$ intersecte C en un, voire plusieurs points (Voir Figure 4.15). Seul le point le plus proche du centre est conservé, les autres sont rejetés. On obtient ainsi à partir de $i = [0, 359]$ un échantillonnage de plusieurs arcs connexes de C. On entend par connexe le fait qu'il n y ait pas de point rejeté entre plusieurs points

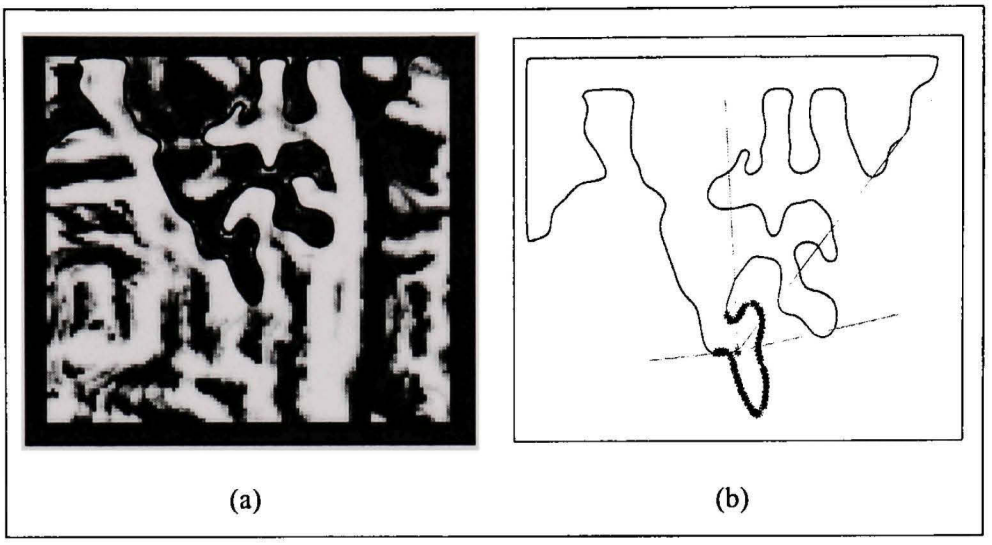


Figure 4.15 Le contour extrait par l'algorithme de Chan-Vese est superposé à la table de probabilités sur (a). La Figure (b) présente la première partie du traitement postérieur.Les demi droites (en vert) partant du point d'initialisation intersectent le contour extrait en plusieurs points. Les points rouges correspondent à l'arc connexe des intersections les plus proches.

conservés. On ne conserve que les arcs de C dont tous les échantillons sont proches du centre relativement aux autres échantillons. On note C^* cet ensemble d'échantillons. Cette approche permet de supprimer certaines parties de la ligne de niveau ne coïncidant pas avec le contour du pédicule. Toutefois, souvent tous les échantillons de C^* ne s'accordent pas avec le contour du pédicule. Cet ensemble doit donc encore être traité afin de l'élaguer des mauvais échantillons. Au niveau du trou de la couronne du pédicule sur la table de probabilités, la ligne de niveau a tendance à être concave (Voir Figure 4.15). Dans la suite nous allons chercher à identifier ces concavités. La première étape consiste à extraire les points x_i^c appartenant à l'enveloppe convexe de C^* (Voir Figure 4.16). Dans chaque zone concave, on identifie le point le plus éloigné de sa projection orthogonale sur l'enveloppe convexe. De ces points de forte concavité, et des extrémités de C^*, nous cherchons ceux qui correspondent le mieux au trou de la couronne. Dans cet ensemble de points sont extraits successivement deux points y_1 et y_2, on calcule les angles $\alpha_1 = tan^{-1}(C^{*\prime}(y_1))$ et

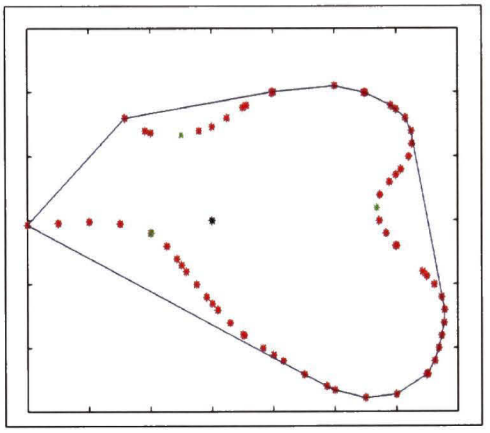


Figure 4.16 Envelope convexe (en bleu) du contour $\mathcal{C}^*$ (les points rouges). Les points verts sont les points de forte concavité.

$\alpha_2 = tan^{-1}(\mathcal{C}^{*'}(y_2))$ ainsi que $\alpha_3 = tan^{-1}(\mathcal{C}^*(y_1) - \mathcal{C}^*(y_2)$. Puis les différences suivantes :

$$dif_1 = |\alpha_1 - \alpha_2| \quad mod\, 2\pi \tag{4.38}$$

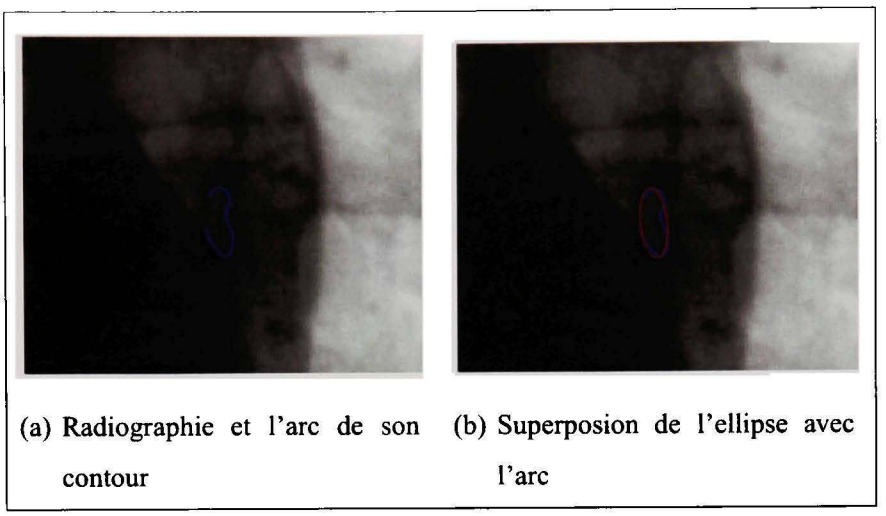
et

$$dif_2 = |\alpha_1 - \alpha_3| + |\alpha_2 - \alpha_3| \quad mod\, 2\pi \tag{4.39}$$

Les deux points sélectionnés sont ceux tels que $|dif_1 - dif_2| \quad mod\, 2\pi$ est le plus petit. Dans l'exemple présenté sur la Figure 4.17 l'arc ainsi extrait coïncide bien avec le contour du pédicule. Afin d'obtenir une forme fermée, une ellipse peut être ajustée à l'arc à l'aide de la méthode des moindres carrés [13]. La Figure 4.17(b) montre la superposition d'une telle ellipse avec l'arc de la Figure en (a).

4.5.4.2 Lors d'une forte rotation

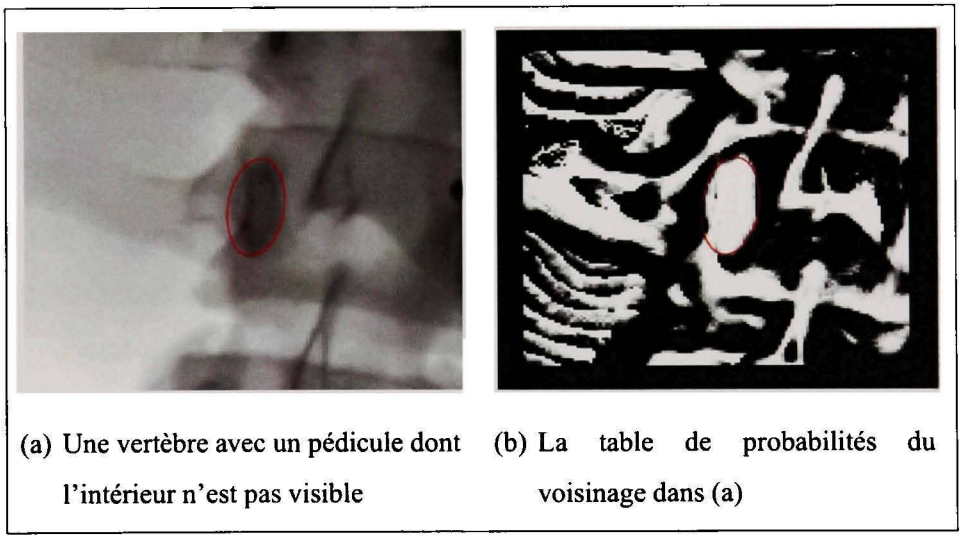
Plus la rotation axiale de la vertèbre est importante et plus la largeur de l'intérieur du pédicule est petite. Lorsque la rotation est très importante, l'intérieur du pédicule n'est plus visible. La couronne du pédicule se superpose pour ne former qu'une ellipse plus foncée. Dans ces cas particuliers, nous allons chercher à identifier une ellipse blanche sur la table de probabilités (Figure 4.18).



(a) Radiographie et l'arc de son contour

(b) Superposion de l'ellipse avec l'arc

Figure 4.17 (a) Superposition de l'arc extrait avec la radiographie originale. En (b), la superposition de l'arc avec l'ellipse obtenue par la méthode des moindres carrés.



(a) Une vertèbre avec un pédicule dont l'intérieur n'est pas visible

(b) La table de probabilités du voisinage dans (a)

Figure 4.18 Exemple d'un pédicule dont l'intérieur n'est pas visible. sur la Figure (b), la table de probabilités met en évidence une ellipse blanche. L'ellipse rouge est l'ellipse qui a été segmentée par l'algorithme de la section 4.5.4.2.

Une ellipse $\mathcal{E}$ possède cinq paramètres ; son centre ct (considéré comme 2 paramètres), son orientation θ, sa longueur a et sa largeur b. Son équation est donnée par :

$$\mathcal{E}(ct,\theta,a,b) \; : \begin{cases} x(t) = ct + a\cos(t)\cos(\theta) - b\sin(t)\sin(\theta) \\ y(t) = ct + a\sin(t)\cos(\theta) - b\cos(t)\sin(\theta) \end{cases} \quad \forall t \in [0\ 2\pi] \qquad (4.40)$$

A partir de la table de probabilités nous allons itérativement mettre à jour ces cinq coefficients.

A l'initialisation de l'algorithme, on considère un disque $\mathcal{E}_0$ de rayon deux pixels, centré au point d'initialisation. Pour la suite l'algorithme est considéré à l'itération i, $\mathcal{E}_i$ est une ellipse dont la longueur et la largeur sont respectivement a_i et b_i. A l'intérieur de $\mathcal{E}_i$ certains pixels ont une valeur dans la table de probabilités supérieure à $1/2$ et d'autres inférieure à cette valeur. Les premiers sont notés p_1.

A partir des pixels p_1, nous calculons la moyenne ct_{i+1} et la matrice de covariance $\text{cov}(p_1)$. Du vecteur propre principal V de $\text{cov}(p_1)$, nous déduisons l'orientation de l'ellipse à l'itération suivante :

$$\theta_{i+1} = (1 - \text{sign}(V(2)))\pi \ + \ \text{sign}(V(2))\text{acos}(V(1)) \tag{4.41}$$

Maintenant nous cherchons la longueur et la largeur de l'ellipse à l'itération $i+1$. Pour ceci, nous considérons les pixels p_2 appartenant à $\mathcal{E}(ct_{i+1}, \theta_{i+1}, a_i + 1, b_i)$ mais n'appartenant pas à $\mathcal{E}(ct_{i+1}, \theta_{i+1}, a_i, b_i)$. dif_2 est la différence entre les pixels p_2 dont la valeur sur la table de probabilités est supérieure à $1/2$ et ceux dont la valeur est inférieure à $1/2$. De même sont considérés les pixels p_3 appartenant à $\mathcal{E}(ct_{i+1}, \theta_{i+1}, a_i, b_i + 1)$ mais n'appartenant pas à $\mathcal{E}(ct_{i+1}, \theta_{i+1}, a_i, b_i)$. dif_3 est la différence équivalente à dif_2 sur les points p_3. Si dif_2 est supérieure à dif_3, alors la longueur est mise à jour :

$$a_{i+1} = a_i + 1 \ \text{ et } \ b_{i+1} = b_i \tag{4.42}$$

Dans le cas contraire, c'est la largeur qui est mise à jour :

$$a_{i+1} = a_i \ \text{ et } \ b_{i+1} = b_i + 1 \tag{4.43}$$

Le processus itératif s'arrête lorsque dif_2 et dif_3 sont tous les deux négatifs.

4.6 Double initialisation

Lorsque la rotation *frontale* est importante, les pédicules et le plateau supérieur de la vertèbre se superposent. Sur la radiographie, une ligne foncée intersecte le pédicule ; Sur la table de probabilités l'intérieur du pédicule est coupé en deux (Voir Figure 4.19). Étant donné que nous ne possédons pas d'information a priori sur cette rotation, il est impossible de segmenter correctement ces pédicules. Dans ce cas particulier, l'interface graphique permet à l'utilisateur de faire une double initialisation, une dans chaque partie de l'intérieur du pédicule. Deux formes sont ainsi obtenues. Pour obtenir une unique forme, il suffit de prendre l'enveloppe convexe incluant les deux formes.



(a) Pédicule intersecté par le plateau supérieur de la vertèbre

(b) Table de probabilités de a)

Figure 4.19 Exemple d'un pédicule intersecté par le plateau supérieur de la vertèbre. En rouge les formes segmentées grâce à une double initialisation et en bleu l'enveloppe convexe

4.7 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre nous avons présenté quelques méthodes basées sur les contours actifs. Nous présentons plus particulièrement le modèle constant par morceaux, développé par Chan et Vese. Cependant, du fait du faible contraste des ra-

diographies, ce contour actif segmente difficilement les pédicules. Nous avons donc créé une table de probabilités qui augmente le contraste entre la couronne et l'intérieur du pédicule. Le contour actif est initialisé sur cette table. En fixant le paramètre de régularité haut, on obtient un contour grossier du pédicule mais bien localisé. Un deuxième algorithme utilisant l'information "a priori" sur la forme grossière affine la forme de la segmentation et permet d'obtenir les sommets du pédicule. Dans la dernière partie de ce chapitre, quelques autres méthodes permettent d'augmenter le taux de segmentation. La segmentation des pédicules peut être utilisée comme outil d'aide au diagnostic, il peut être demandé à l'utilisateur des informations supplémentaires permettant d'augmenter le taux de segmentation des pédicules. A partir de ces informations supplémentaires, de nouvelles approches ont été développées dans la dernière partie de ce chapitre.

Dans le prochain chapitre, nous présentons les expériences réalisées sur 40 patients à l'aide de ce modèle de segmentation de pédicules.

CHAPITRE 5

EXPÉRIMENTATIONS ET RÉSULTATS

5.1 Introduction

Dans cette partie du travail nous présentons les résultats de segmentation de pédicules. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'importance des différents prétraitements sur la segmentation des pédicules. Dans un premier temps nous discutons de l'influence du débruitage et du filtre de choc sur la construction de la table de probabilités. Puis nous comparons les différents taux de segmentations de pédicules réalisées sur les radiographies originales, sur les radiographies débruitées par le $\tilde{C_{0.3p}}$ et sur les radiographies rehaussées par le filtre de choc utilisant le TSMNL. Nous discutons aussi de l'influence du débruitage sur la forme des segmentations extraites. Pour finir cette partie nous présentons succinctement l'influence des deux prétraitements sur la détection des contours et donc sur les modèles de segmentation les utilisant. De cette première partie, il ressort que le filtre de débruitage est le prétraitement qui permet d'obtenir la meilleure segmentation des pédicules. Dans la deuxième partie de ce chapitre, les expériences sont réalisées à partir des radiographies débruitées. Dans cette dernière partie, la segmentation y est réalisée sur un très grand nombre de pédicules. Les résultats de la segmentation sont ensuite comparés avec les points extraits par l'expert.

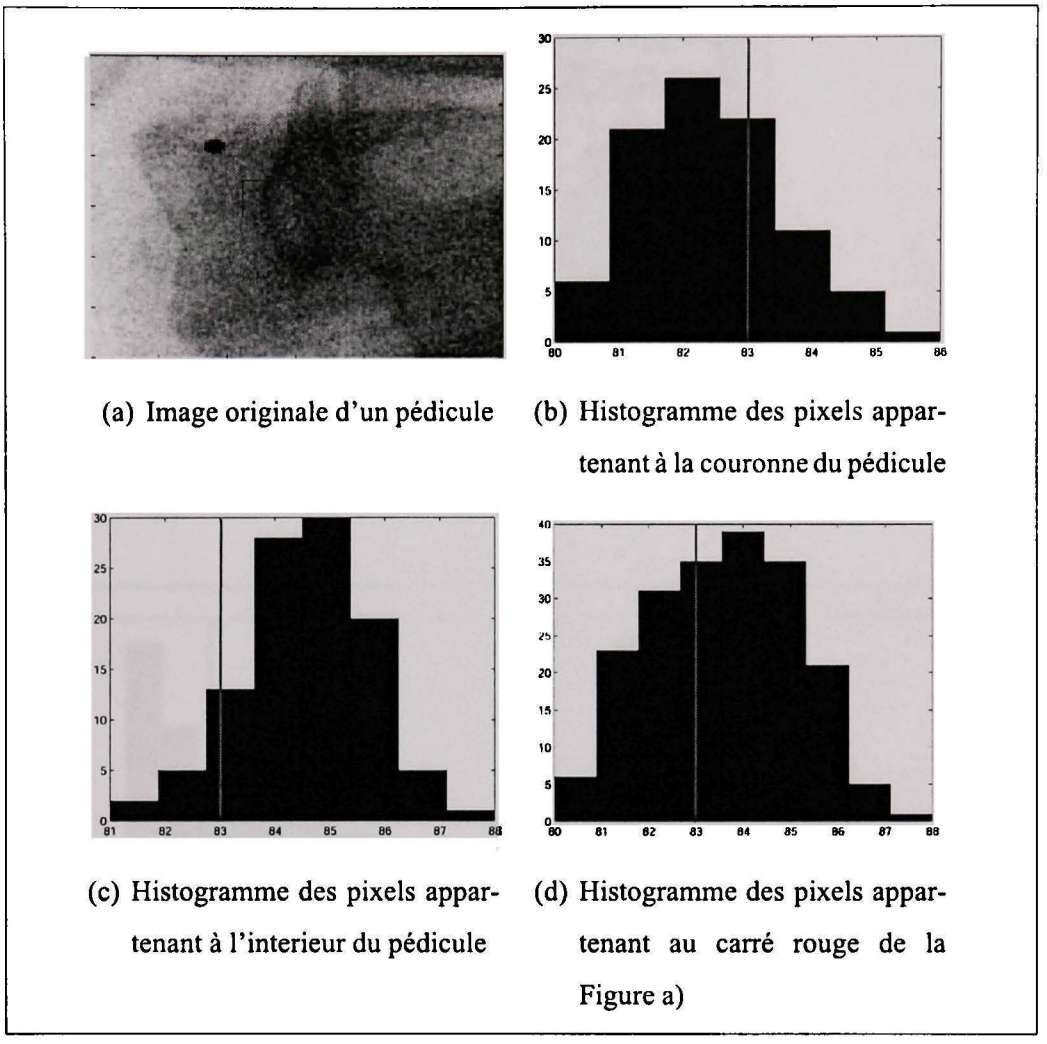
5.2 Influence du prétraitement sur la segmentation des pédicules

5.2.1 Influence du prétraitement sur la table de probabilités

Pour rappel, la probabilité de chaque pixel appartenant à la table de probabilités est obtenue en appliquant l'algorithme de Otsu sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $n \times n$ (voir Figure (5.1(a)). Lorsque deux objets, de niveau de gris moyen différent, sont présents dans le voisinage, l'histogramme des pixels appartenants à $\mathcal{V}$ est constitué de deux lobes, chacun appartenant

à l'un des deux objets. L'algorithme de Otsu fournit de manière automatique la meilleure valeur permettant de discriminer ces deux lobes. En présence de bruit dans l'image, la largeur des deux lobes augmente, mais si la différence de gris entre les deux objets est suffisamment grande alors le bruit n'affecte pas la réponse de l'algorithme. Cependant comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, la différence des niveaux de gris moyen entre l'intérieur et la couronne des pédicules est très faible, de l'ordre de quelques niveaux de gris. Les centres des deux lobes sont très proches et à cause du bruit, ils sont relativement larges. La superposition des deux lobes sur le même histogramme crée très souvent un unique lobe (Figure 5.1(d)). Or à l'entrée de l'algorithme de Otsu, l'histogramme de l'image est supposé bi-modal. Les conditions d'utilisation de l'algorithme de Otsu ne sont donc pas toujours satisfaites dans ce cas, il se peut alors que le seuil à la sortie de l'algorithme soit erroné. Aussi en supposant que celui-ci est optimal et qu'il sépare au mieux l'histogramme, une partie de chacun des deux lobes sera mal classée (comme il peut être constaté sur la Figure 5.1(b)). La table de probabilités d'une radiographie est donc fortement bruitée (Figure 5.2).

Le prétaitrement des images des pédicules permet de réduire significativement le bruit sur la table de probabilités. Ainsi par exemple, le débruitage de l'image agit directement sur la largeur des deux lobes. Donc à la différence des images bruitées, l'histogramme de l'image après filtrage (Figure 5.3(a)) présente bien deux lobes, même si ceux-ci sont toujours très entrecroisés. La binarisation des images débruitées est donc de meilleure qualité (Figure 5.4(a)). L'autre filtre, le filtre de choc, diffuse localement la valeur maximale et la valeur minimale de l'image. Sur l'histogramme, les deux lobes sont ainsi attirés par leurs valeurs extrêmes (Figure 5.3(b)), la différence entre les deux lobes se creuse au fil des itérations et la discrétisation de l'image en est aussi facilitée. La table de probabilités résultant de l'algorithme de Otsu est ainsi de meilleure qualité (Figure 5.3(b)). Entre les deux filtres de prétraitement, on remarque que le filtre de choc permet une plus grande discrimination des histogrammes, il en résulte que les tables de probabilités sont nettement plus contrastées.



(a) Image originale d'un pédicule

(b) Histogramme des pixels appartenant à la couronne du pédicule

(c) Histogramme des pixels appartenant à l'interieur du pédicule

(d) Histogramme des pixels appartenant au carré rouge de la Figure a)

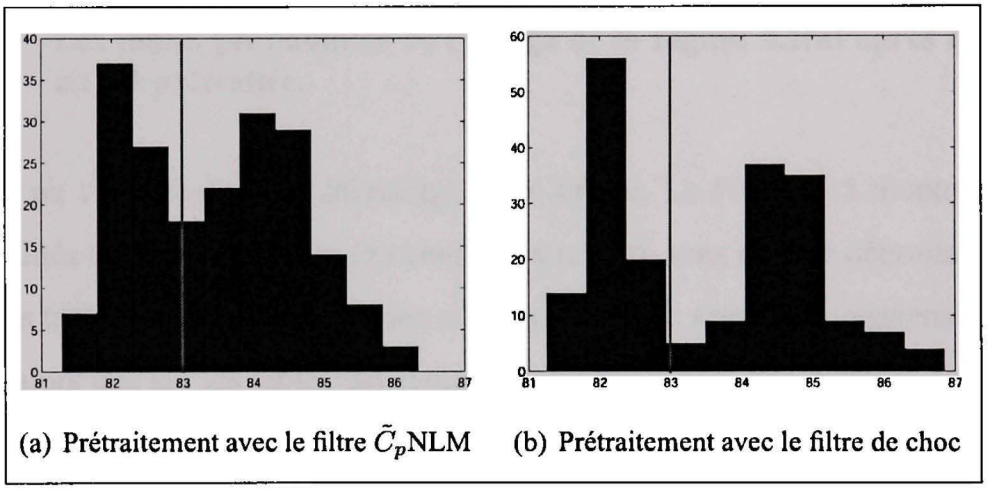
Figure 5.1 Pour trouver la probabilité du pixel en rouge sur la Figure a), on utilise les pixels dans le carré bordé de rouge. La Figure b) présente l'histogramme des pixels appartenants à ce carré et à la couronne du pédicule. La Figure c) présente l'histogramme des autres pixels appartenants au carré. Enfin la Figure d) présente l'histogramme de l'ensemble des pixels dans le carré rouge. Les traits rouges représentent le seuil obtenu par Otsu.

5.2.2 Influence du prétraitement sur le taux de segmentation de pédicules

L'algorithme de segmentation constant par morceaux de Chan et Vese est capable de segmenter les images bruitées. Le fait que les images soient bruitées ne devrait donc pas lui poser de problème. Cependant, l'augmentation de la qualité des tables de probabilités par l'utilisation d'un algorithme de débruitage ou de rehaussement devrait influencer la



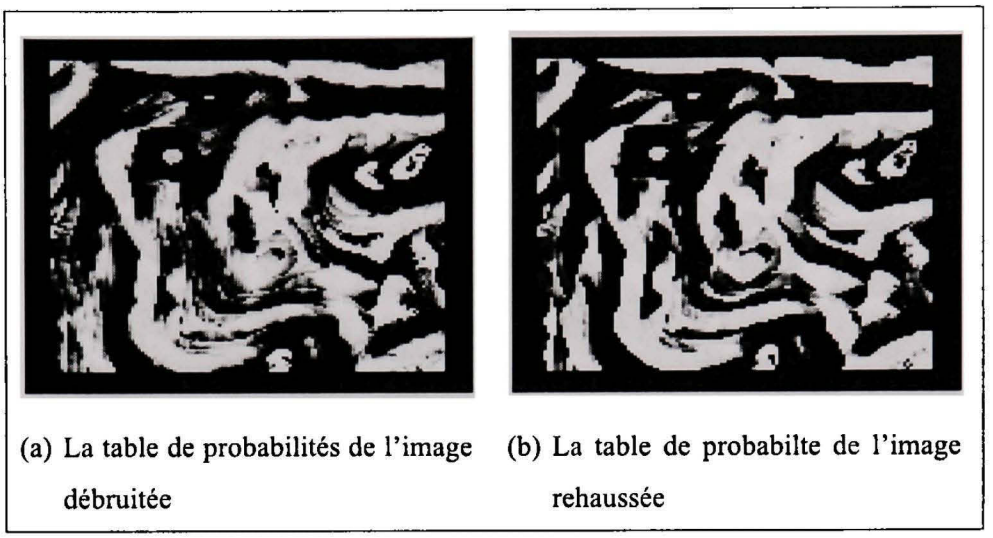
Figure 5.2 La table de l'image originale Figure 5.1(a).



(a) Prétraitement avec le filtre $\tilde{C}_p$NLM (b) Prétraitement avec le filtre de choc

Figure 5.3 Les deux histogrammes des pixels appartenant au carré rouge de la Figure 5.1(a) après avoir été prétraités.

qualité de la segmentation. Pour évaluer l'influence du prétraitement, nous nous sommes intéressés à la segmentation des pédicules sur quatre radiographies. Pour chacune des images nous avons segmenté les pédicules à partir des images originales (bruitées), des images débruitées et des images diffusées par dix itérations du filtre de choc. Sur les quatre radiographies, 102 pédicules ont été jugés visibles. A partir des radiographies originales, 82 pédicules ont été segmentés par l'algorithme. Lorsque les radiographies ont été débruitées, 87 pédicules sont segmentés. Le débruitage a ainsi permis de segmenter six nouveaux pédicules. Par contre un pédicule segmenté sur une des radiographies orig-



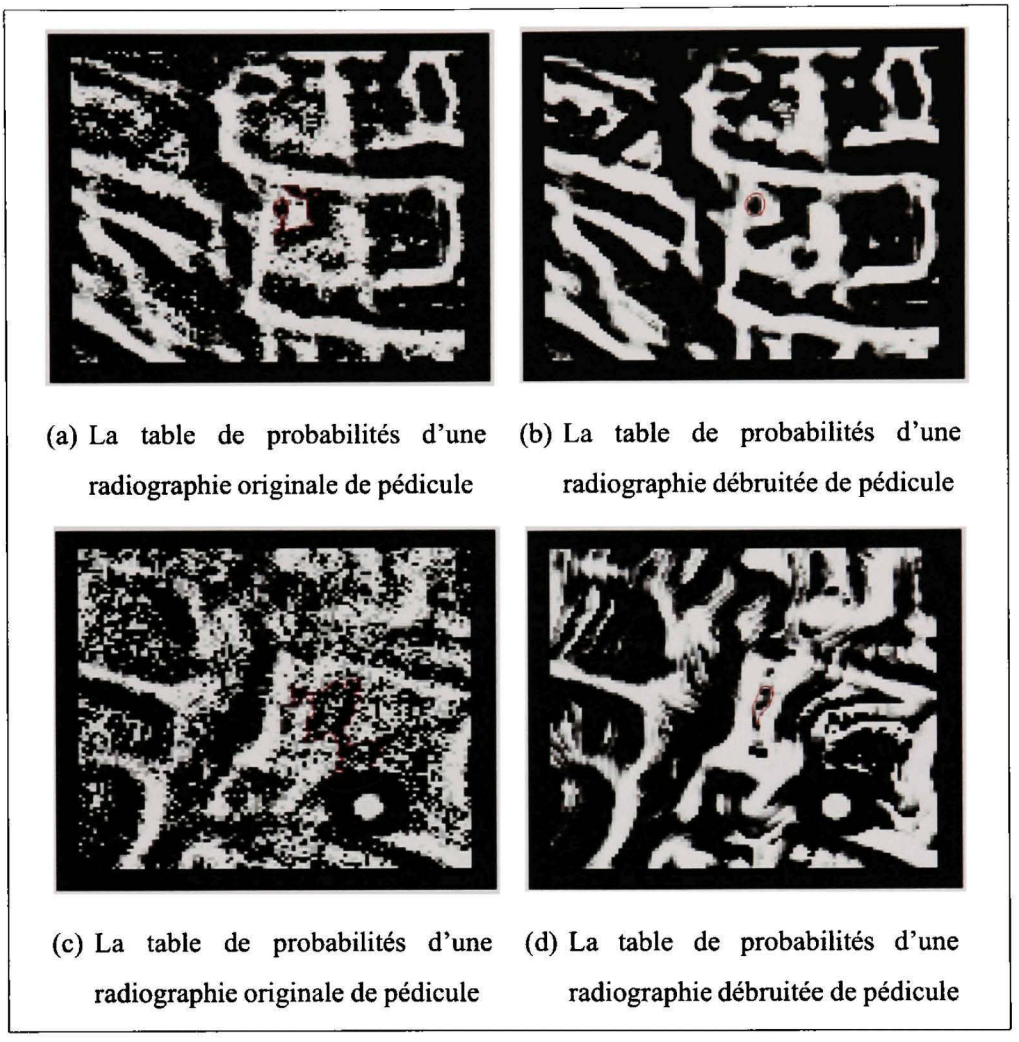
(a) La table de probabilités de l'image débruitée

(b) La table de probabilte de l'image rehaussée

Figure 5.4 Les tables probabilités de l'image de la Figure 5.1(a) après que celle-ci ait été prétraitée.

inales, n'a pu l'être lorsque le débruitage a été utilisé. La Figure 5.5 montre les tables de probabilités de deux pédicules (au centre des tables), sans et avec débruitage de l'image. Sur les tables bruitées, l'algorithme n'a pas permis de segmenter convenablement les pédicules alors que sur les tables des radiographies débruitées l'algorithme a réussi à extraire la bonne forme. Lorsque l'algorithme est initialisé, l'aire de la forme étant petite, les caractéristiques c_1 et c_2 du modèle 5.5 sont mises à jour. Ainsi, puisque les couronnes sont peu contrastées sur les tables bruitées, certains de leurs pixels sont inclus à l'intérieur du contour actif. Celui-ci finit par croître à l'extérieur du pédicule. Sur les tables de probabilités des images débruitées, la couronne est plus fortement contrastée. Ainsi les pixels de la couronne ne sont pas inclus à l'intérieur du contour actif, ce qui l'empêche d'évoluer à l'extérieur du pédicule. La mise à jour des caractéristiques et du paramètre de régularité permet au contour actif de grossir suffisamment pour segmenter l'intégralité de l'intérieur du pédicule. L'utilisation du modèle de débruitage permet ainsi d'augmenter légèrement le taux de segmentation des pédicules.

Lorsque les radiographies ont été diffusées avec le filtre de choc, 81 pédicules ont été segmentés. Par rapport aux radiographies originales sept nouveaux pédicules ont été seg-



(a) La table de probabilités d'une radiographie originale de pédicule

(b) La table de probabilités d'une radiographie débruitée de pédicule

(c) La table de probabilités d'une radiographie originale de pédicule

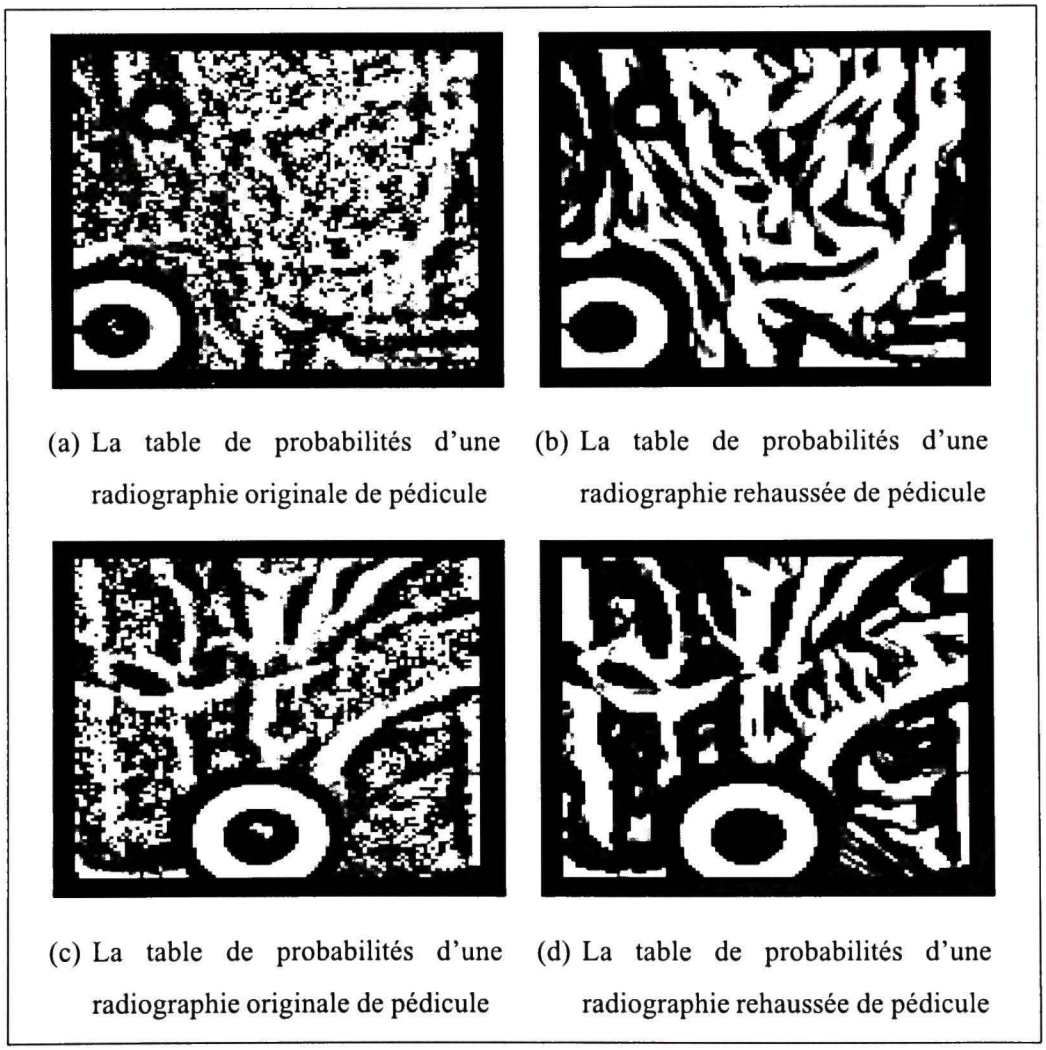
(d) La table de probabilités d'une radiographie débruitée de pédicule

Figure 5.5 Deux tables de probabilités de pédicules pour lesquelles l'algorithme de segmentation a convergé seulement lorsque les radiographies débruitées étaient utilisées.

mentés. Cependant parmi les pédicules qui avaient été segmentés à partir des radiographies originales huit n'ont pu l'être à partir des radiographies rehaussées. Le filtre de choc s'il permet d'aider la segmentation de certains pédicules, ne permet pas d'augmenter le taux de segmentation.

A la différence du débruitage, dont l'objectif est l'atténuation du bruit dans l'image originale et donc de minimiser ou au pire de contrôler l'erreur entre l'image originale et l'image débruitée, le filtre de choc déforme l'image afin de mettre en évidence, voire d'amplifier

certaines structures locales de l'image. Lorsque l'image est faiblement contrastée, il se peut que le sens de la diffusion soit erronée, ainsi au lieu d'amplifier la structure locale de l'image, le filtre de choc la détruit. Dans certains cas, le filtre de choc détruit le pédicule, il devient alors impossible de le segmenter. Les Figures 5.6 montrent ainsi deux tables de probabilités pour lesquelles, le filtre de choc, au lieu d'augmenter le contraste entre l'intérieur du pédicule et sa couronne a complètement détruit la structure du pédicule (Figure 5.6(b)) ou encore a renforcé le trou dans la couronne (Figure 5.6(d)).



(a) La table de probabilités d'une radiographie originale de pédicule

(b) La table de probabilités d'une radiographie rehaussée de pédicule

(c) La table de probabilités d'une radiographie originale de pédicule

(d) La table de probabilités d'une radiographie rehaussée de pédicule

Figure 5.6 Deux tables de probabilités de pédicules pour lesquelles le filtre de choc a détruit la couronne du pédicule.

5.2.3 Influence du débruitage sur la forme des pédicules segmentés

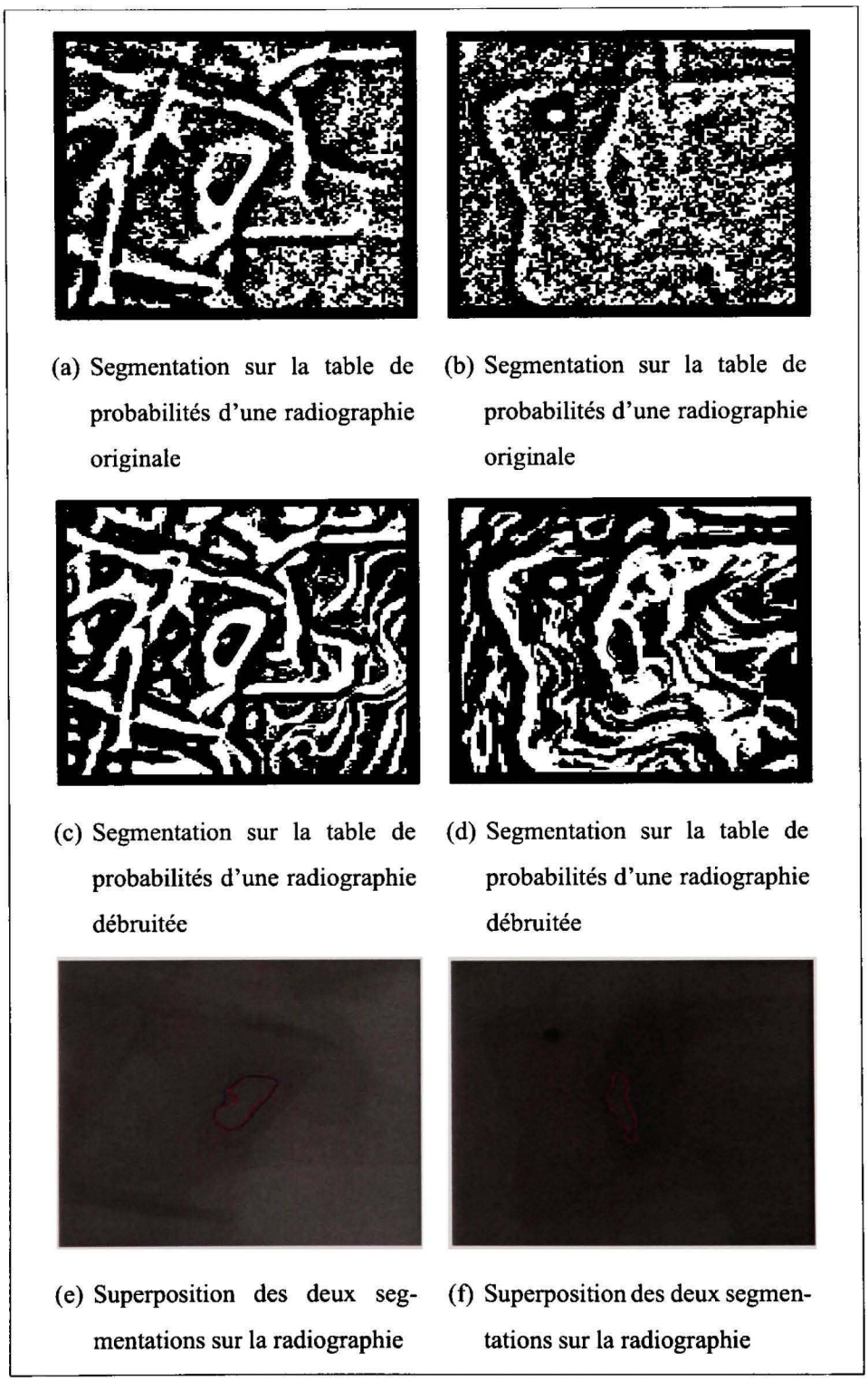
Nous avons constaté que lorsque les radiographies étaient débruitées avant la segmentation des pédicules, les contours des formes segmentées étaient souvent moins affectées par le bruit et étaient souvent plus régulières. Pour mesurer cette différence de régularité, nous avons utilisé une mesure de la longueur des contours. La longueur d'un contour $C(x(t), y(t))$ est donné par :

$$l_c = \int \|\nabla C\| dt \tag{5.1}$$

Dans 40% des segmentations, la longueur des contours était sensiblement la même. Ces segmentations correspondent principalement aux pédicules contrastés pour lesquels le bruit influence peu la table de probabilités. Dans près de 40 autres pour cent de segmentations, la régularisation des radiographies réduit la longueur des contours des pédicules segmentés. La Figure 5.7 montre deux exemples de segmentations de pédicules pour lesquels la régularisation a permis d'extraire une meilleure forme. Enfin dans les 20 derniers pour cent, la longueur du contour de la segmentation était plus grande lorsque la régularisation des images était utilisée. Dans la plupart des cas, ces pédicules se trouvent sur des vertèbres thoraciques. La différence de longueur est souvent peu importante et due à un, voire deux pixels inclus ou exclus de l'intérieur du contour actif.

5.2.4 Influence des prétraitements sur d'autres types de segmentation

Le modèle de segmentation que nous employons dans cette thèse n'utilise pas l'information sur les contours de l'image. Cependant les contours sont des vecteurs d'information très importants et sont utilisés dans beaucoup de modèles de segmentation. Depuis le début de l'imagerie, des modèles pour les détecter ont été développés [27] [87]. Mais la détection de contours est souvent un problème mal posé et hautement sensible au bruit. Le débruitage des images permet de mieux restituer les contours de l'image. Ainsi sur la Figure 5.8, nous avons utilisé un filtre de Sobel [61] sur l'image originale et sur l'image débruitée par le $\tilde{C}_p$MNL avec deux seuils 1 et 0.5. Avec le filtre de débruitage beaucoup



(a) Segmentation sur la table de probabilités d'une radiographie originale

(b) Segmentation sur la table de probabilités d'une radiographie originale

(c) Segmentation sur la table de probabilités d'une radiographie débruitée

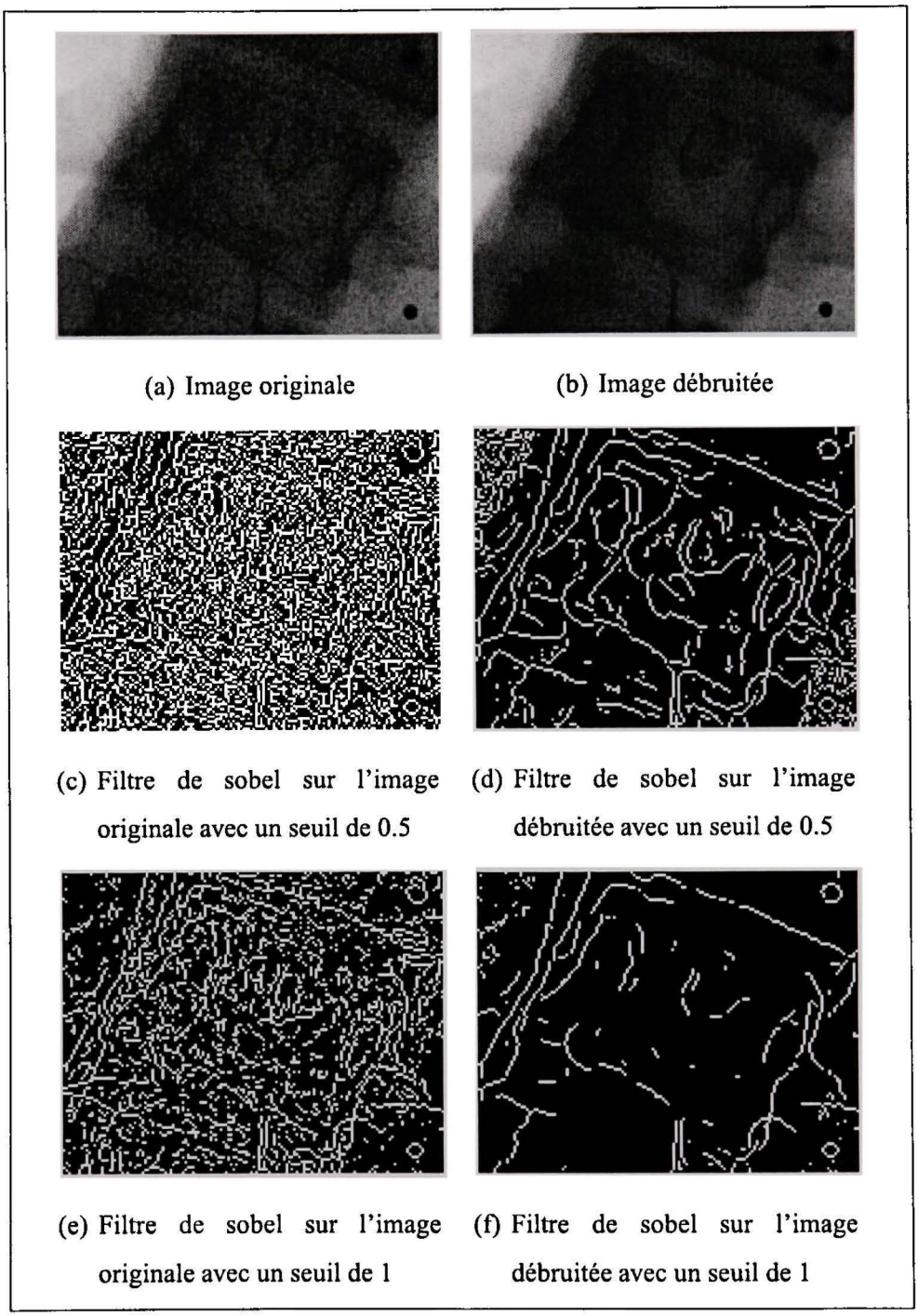
(d) Segmentation sur la table de probabilités d'une radiographie débruitée

(e) Superposition des deux segmentations sur la radiographie

(f) Superposition des deux segmentations sur la radiographie

Figure 5.7 Deux exemples de pédicules pour lesquels le débruitage a permis une meilleure segmentation.

de contours dus au bruit ont été supprimés, seuls les contours importants de l'image ont été conservés.



(a) Image originale

(b) Image débruitée

(c) Filtre de sobel sur l'image originale avec un seuil de 0.5

(d) Filtre de sobel sur l'image débruitée avec un seuil de 0.5

(e) Filtre de sobel sur l'image originale avec un seuil de 1

(f) Filtre de sobel sur l'image débruitée avec un seuil de 1

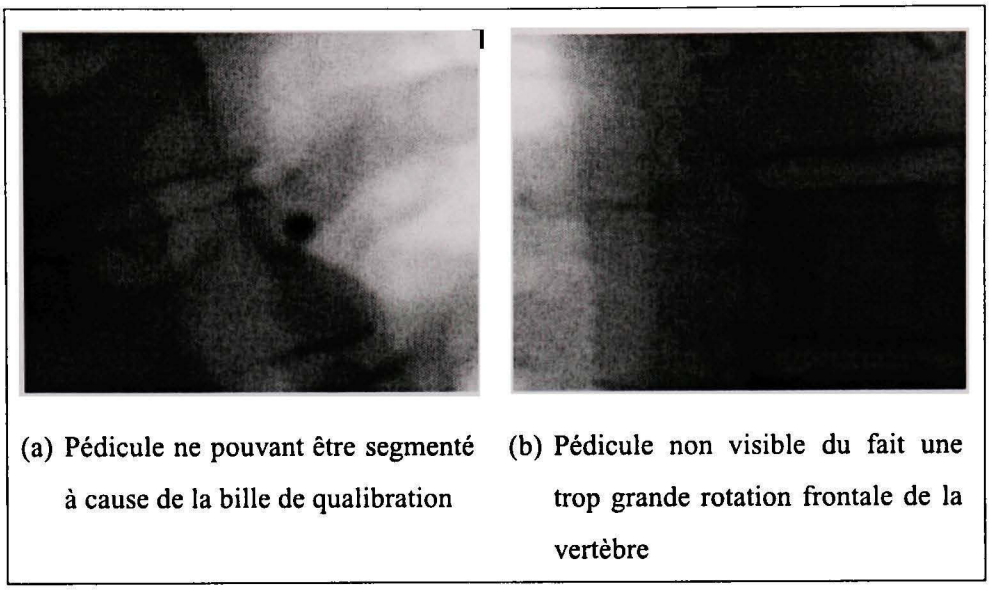
Figure 5.8 Détection de contour avec un filtre de Sobel. Le seuil permet de ne considérer que les contours qui lui sont supérieurs.

5.3 Segmentation de pédicules

5.3.1 Protocole expérimental

Afin d'évaluer la segmentation des pédicules, nous avons utilisé 38 nouvelles radiographies de patients scoliotiques. Ces radiographies ont été prises de mai 1993 à mai 1999 par la même machine. Sur les 38 sujets, 35 étaient de sexe féminin et 3 de sexe masculin. Au moment de la radiographie ils étaient âgés de 11 à 20 ans. Ces radiographies font partie de la base de données Linky'1 de l'hôpital Sainte-Justine à Montréal. Nous nous sommes intéressés à la segmentation des 12 vertèbres thoraciques (T1-T12) et des 4 premières vertèbres lombaires (L1-L4) (La cinquième lombaire (L5) étant très différente des autres, notre algorithme ne permet pas de bien la segmenter). Cela représente un total de 1292 pédicules. Cependant, tous ces pédicules ne peuvent être utilisés pour tester la segmentation. Ainsi, 121 pédicules sont dégradés par la superposition d'une bille de calibration comme sur la Figure 5.9(a). Notre algorithme ne permet pas de tenir compte d'une telle dégradation. Des modèles d'inpainting [113] ont été développés au LAVIANI et pourraient être ultérieurement utilisés pour segmenter ces pédicules. Les pédicules les plus touchés par cette dégradation appartiennent aux vertèbres T4, T10 et T11. De même, du fait d'une rotation axiale de la vertèbre trop importante, certains pédicules ne sont tout simplement pas visibles sur la radiographie PA 5.9(b). Enfin, certains pédicules étaient tellement peu contrastés qu'ils ne sont pas visibles de visu. Nous n'avons donc pas considéré ces 224 pédicules dans nos expériences. Ainsi, notre étude porte finalement sur 899 pédicules.

Les images radiographies ont toutes été automatiquement débruitées par le filtre $\tilde{C}_p$MNL car, comme nous l'avons vu dans la section précédente, il permet d'augmenter le taux de segmentation d'environ 5%. Ensuite pour chaque pédicule, une région d'intérêt est sélectionnée automatiquement à partir des points définis par l'expert. Pour faciliter les expériences, nous avons développé une interface graphique (Figure 5.10). Celle-ci affiche



(a) Pédicule ne pouvant être segmenté à cause de la bille de qualibration

(b) Pédicule non visible du fait une trop grande rotation frontale de la vertèbre

Figure 5.9 Exemple de deux pédicules qui ne sont pas utilisés dans nos expériences.

une région d'intérêt d'un pédicule et sa table de probabilités. Plusieurs boutons permettent de sélectionner le type d'initialisation ainsi que la méthode de segmentation utilisée parmi celles que nous avons présenté dans la section 4.5.4.

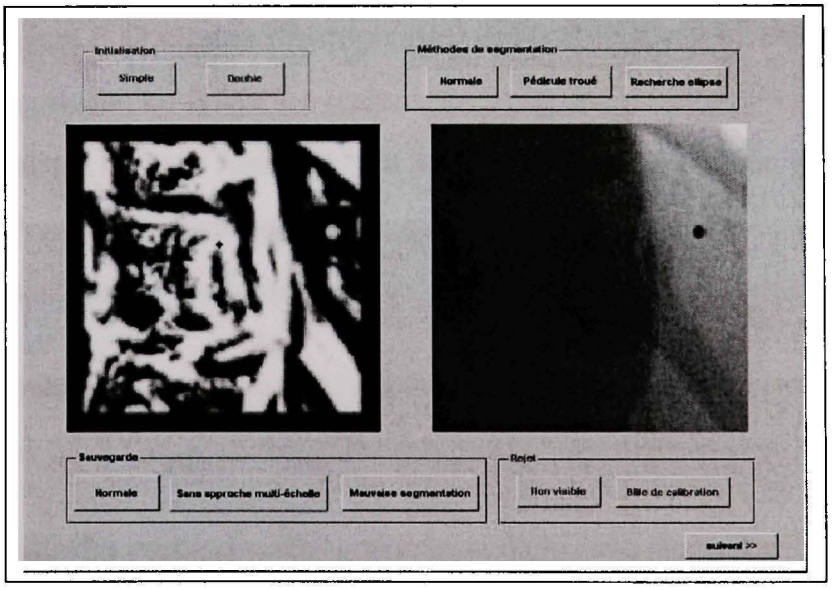


Figure 5.10 Interface graphique utilisée pour les expériences.

5.3.2 Résultats

5.3.2.1 Sur le taux de Segmentation

L'algorithme principal 4.4 a été utilisé dans 74.1% des cas, alors que dans 12 autres pour cent nous avons préféré conserver la segmentation grossière qui était meilleure que la segmentation fine. Ceci a été le cas principalement pour les vertèbres T1,T2 et L4, sans doute parce que la rotation axiale de ces vertèbres est souvent faible. Le pédicule ne présente pas de forte courbure. Ainsi un paramètre de régularité fort est, parfois préférable car il permet d'obtenir l'intégralité de la forme du pédicule sans être gêné, ni par le bruit, ni par les trous dans la couronne. Dans 4.6% des segmentations, les pédicules segmentés ont dû subir un post-traitement 4.5.4.1. Finalement la segmentation par recherche d'ellipse 4.5.4.2 et la double initialisation 4.6 ont été utilisées dans 5.5% et dans 3.7%. L'ensemble de ces méthodes a permis la segmentation de 81.1% des 899 pédicules. Le taux de réussite de chaque algorithme est homogène sauf, lorsque le post-traitement et la recherche d'ellipse sont utilisés. Alors, dans respectivement 92% et 77% des cas, la segmentation est réussie. La Figure 5.11 montre l'histogramme des taux de réussite. Deux radiographies ont un taux de segmentation faible (en dessous de 50%). Pour une des deux radiographies, la scoliose du patient est très forte, elle est largement plus prononcée que celles des 37 autres patients. Pour l'autre radiographie, la patiente présente un surplus pondéral. Plus de rayons X sont absorbés par les tissus adipeux et l'image est beaucoup moins contrastée.

Le taux de segmentation pour chaque type de vertèbre est relativement homogène, sauf pour les vertèbres T3 à T6 qui sont légèrement moins bien segmentées.

La forme et la taille des pédicules dépendent aussi de la croissance des patients. Il se peut donc, que, le taux de reconnaissance varie en fonction de la croissance des patients. Nous avons donc affiché sur la Figure 5.12 le taux de segmentation en fonction de l'âge des patients (lorsqu'il était disponible). Aucune relation n'est mise en évidence, le taux de

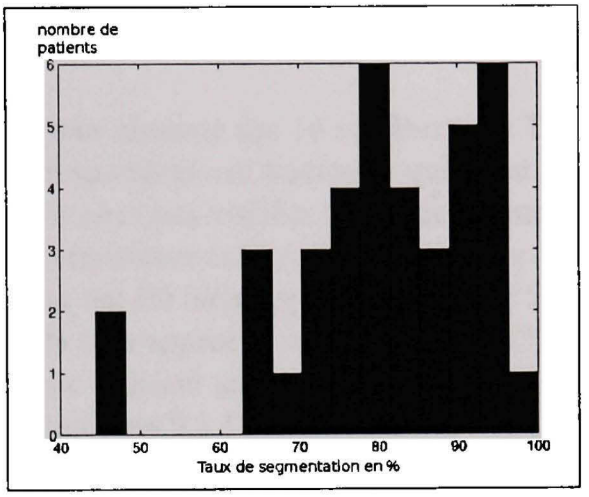


Figure 5.11 Histogramme des taux de réussite.

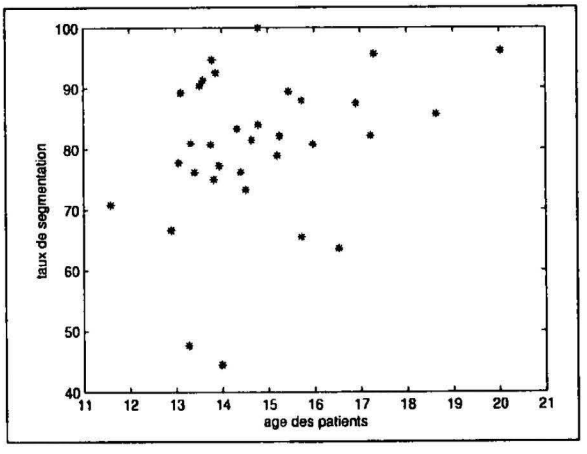


Figure 5.12 Haut de segmentation en fonction de l'âge des patients.

segmentation est donc indépendant de l'âge des patients. Mais, la croissance intervient à des âges différents suivant les patients.

5.3.2.2 Invariance aux points d'initialisation

Les segmentations de pédicules ne doivent être déterminées qu'à partir de l'algorithme, elles doivent être ainsi indépendantes du point d'initialisation. Dans le but de vérifier ce prérequis, nous avons donc réalisé une expérience comprenant un ensemble de 10

Tableau 5.1

Nombre de segmentations pour chacune des 16 vertèbres (de T1 à L4). La deuxième et la troisième colonnes correspondent aux pédicules qui n'ont pas été utilisés dans la segmentation car ils n'étaient pas visibles (seconde colonne) ou car une bille de calibration les dégradait (troisième colonne). Les colonnes 4 à 8 correspondent aux nombres de pédicules qui ont été bien segmentés pour les 5 méthodes : la méthode principale (M1), la méthode sans approche multi-échelle (M2), la méthode par sélection d'ellipse (M3), la méthode utilisant un post-traitement (M4) et la méthode à double initialisation (M5). Les colonnes 9 à 12 correspondent aux pédicules qui ont été mal segmentés par les 4 approches. Enfin la dernière colonne présente le taux de segmentation par vertèbre

vertèbre	non utilisable		bonne segmentation					mauvaise segmentation				**taux de segmentation**
	N-V	C	M1	M2	M3	M4	M5	M1	M3	M4	M5	
T1	16	6	32	15	1	0	0	6	0	0	0	**88.9%**
T2	16	2	32	12	3	0	1	9	0	0	1	**82.8%**
T3	14	9	30	4	3	0	3	11	2	0	0	**75.5%**
T4	14	16	21	2	6	2	0	14	0	0	1	**67.4%**
T5	14	7	31	4	3	1	0	14	2	0	0	**70.9%**
T6	16	4	29	3	3	4	1	13	2	0	1	**71.4%**
T7	15	6	33	4	2	5	1	10	0	0	0	**81.8%**
T8	21	3	36	1	1	2	2	10	0	0	0	**80.8%**
T9	19	3	37	1	0	6	2	5	0	0	1	**88.5%**
T10	10	15	34	5	0	4	1	6	0	1	0	**86.3%**
T11	20	22	20	5	0	2	2	5	0	0	0	**85.3%**
T12	10	9	25	11	1	4	5	11	0	0	0	**80.7%**
L1	11	5	38	6	6	2	0	6	2	0	0	**86.7%**
L2	7	8	36	5	5	3	1	8	2	1	0	**82.0%**
L3	9	3	41	5	2	2	3	10	0	1	0	**82.8%**
L4	12	3	24	21	1	0	6	8	1	0	0	**85.3%**
totaux	**224**	**121**	**499**	**104**	**37**	**37**	**28**	**146**	**11**	**3**	**4**	**81.1%**

pédicules appartenant à différents niveaux vertébraux de la colonne ; L'algorithme de segmentation principal a été initialisé avec différents points pour chaque pédicule. La variance sur la localisation du centre est de l'ordre de 0.0616 pixels, soit 0.025mm (voir Figure 5.13). Ce résultat montre que l'algorithme est insensible aux points d'initialisation, ce qui rend le modèle robuste et indépendant de l'utilisateur. Pour mieux comprendre ce résultat, considérons le cas simple de deux initialisations différentes sur un même pédicule. Si les trois paramètres c_1 c_2 et r ne changent pas, les algorithmes seront, dans les deux cas, guidés seulement par la table de probabilités et produiront la même segmentation et donc les mêmes centres.

Dans un cas plus général, puisque l'intérieur des pédicules est relativement petit, les points d'initialisation seront proches, en prenant la partie positive des fonctions ensemble de niveau relativement grande, après quelques itérations, ces deux fonctions seront très proches l'une de l'autre. Donc les aires de parties positives évolueront de la même manière, les paramètres évolueront eux aussi de façon similaire entraînant une segmentation finale quasiment identique.

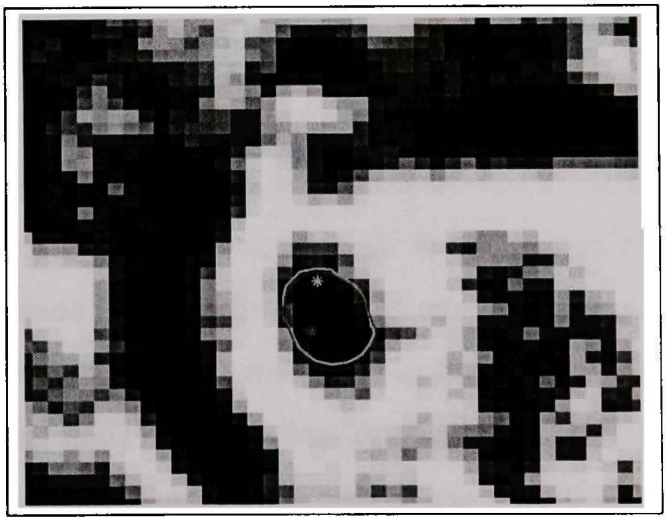


Figure 5.13 Exemple de segmentation avec des points d initialisation différents lorsque l'algorithme principal est utilisé.

5.3.2.3 La comparaison avec l'expert

Pour chaque pédicule nous possédons deux repères sélectionnés pas un expert. Ils correspondent au sommet supérieur et au somment inférieur de la couronne du pédicule. Il est difficile de comparer les formes segmentées par notre algorithme avec deux points appartenant à deux repères anatomiques différents. Cependant la sélection de ces repères est principalement utilisée pour déterminer la rotation frontale des vertèbres. Si pour des sujets sains, l'orientation du corps vertébral,(aussi connue sous le nom de rotation frontale (Figure 5.14)), pouvait être calculée à partir de l'orientation des plateaux, pour des patients atteints de scoliose, les vertèbres sont souvent déformées et l'orientation des plateaux ne coïncident pas toujours avec l'orientation de la vertèbre. "The spine communauty" [119] a largement accepté qu'en utilisant les pédicules, l'estimation de la rotation était plus sûre. La rotation frontale telle que décrite dans [92], est estimée sur la vue PA en calculant l'angle entre l'axe des abscisses de la vue PA et la ligne passant par les centres des pédicules. Le centre des pédicules est obtenu par le milieu du segment joignant le sommet supérieur au sommet inférieur. Pour confronter notre segmentation avec les points des experts, nous avons dans un premier temps comparé les centroïdes des formes segmentées avec les centres de pédicules, puis nous avons comparé les angles de la rotation frontale.

La Figure 5.15 présente l'histogramme des distances entre les centroïdes des formes segmentées et les centres des pédicules obtenus par le marquage de sommets fait par l'expert. La distance moyenne est de l'ordre de 3,7 pixels (moins de 1.5mm). Sachant que la différence moyenne entre les centres marqués par deux experts différents est de l'ordre de 5 pixels, l'erreur moyenne des centroïdes des pédicules est donc très acceptable. Les deux premières colonnes du Tableau 5.2 montrent que cette différence est homogène sur toutes les vertèbres. La distance entre certains centres de pédicules aux centroïdes des segmentations associées est suffisamment grande. Le Tableau de Figures 5.16 montre quatre exemples pour lesquels cette distance est supérieure à 3mm. Pour les quatre images, nous avons affiché en bleu les sommets marqués par l'expert, en rouge le centre du pédicule

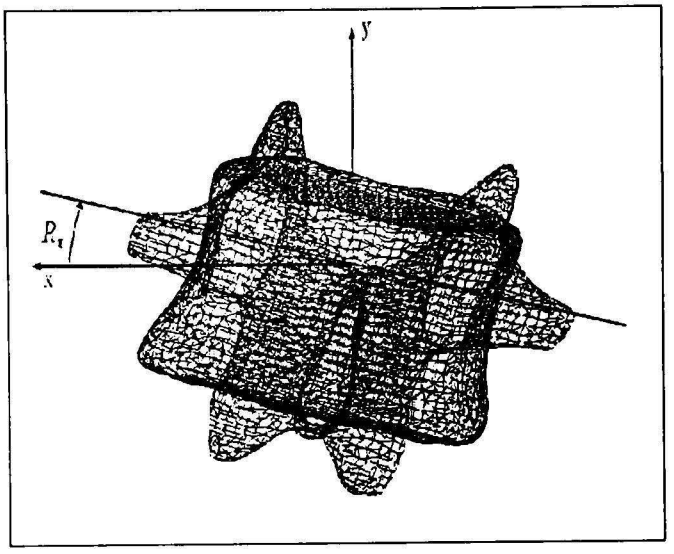


Figure 5.14 R_x **correspond à la rotation frontale.**

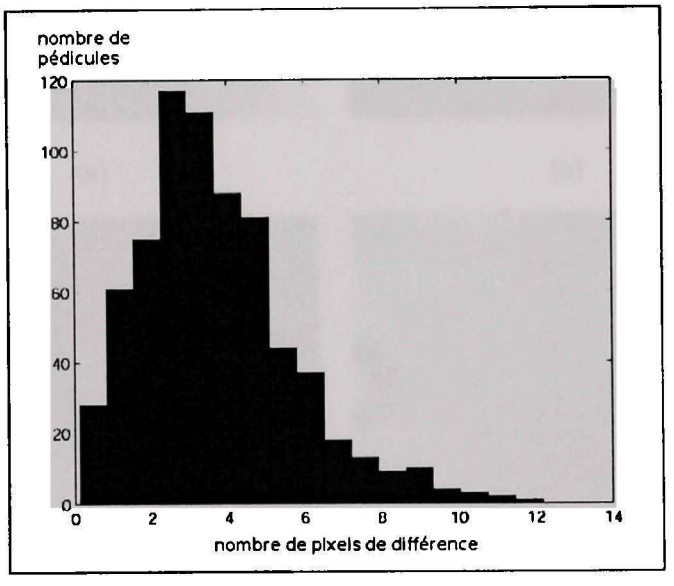


Figure 5.15 Histogramme de la différence entre le centre des pédicules indiqué par l'expert et les centroïdes des formes extraites.

associé et en vert le centroïde du pédicule segmenté. Sur les quatre exemples certaines marques de l'expert ne correspondent pas aux sommets du pédicule. Le centre du pédicule est donc souvent décalé et éloigné du centroïde. Il peut paraître étonnant que les points de l'expert soient décalés. Cependant il ne les détermine pas qu'à partir de la radiogra-

phie PA mais aussi à partir de la radiographie LAT. Or ces deux radiographies ne sont pas prises simultanément et il se peut qu'entre deux acquisitions le patient bouge. Aussi nous avons constaté que la matrice de passage, qui permet d'associer un point d'une vue radiographique à une droite sur l'autre vue, était légèrement erronée au niveau des lombaires (ceci est sans doute dû à la distorsion des images). Ainsi, les sommets des pédicules sur les deux différentes vues ne concordent pas toujours, l'expert choisit le meilleur compromis permettant la meilleure estimation des différentes rotations associées à la vertèbre.

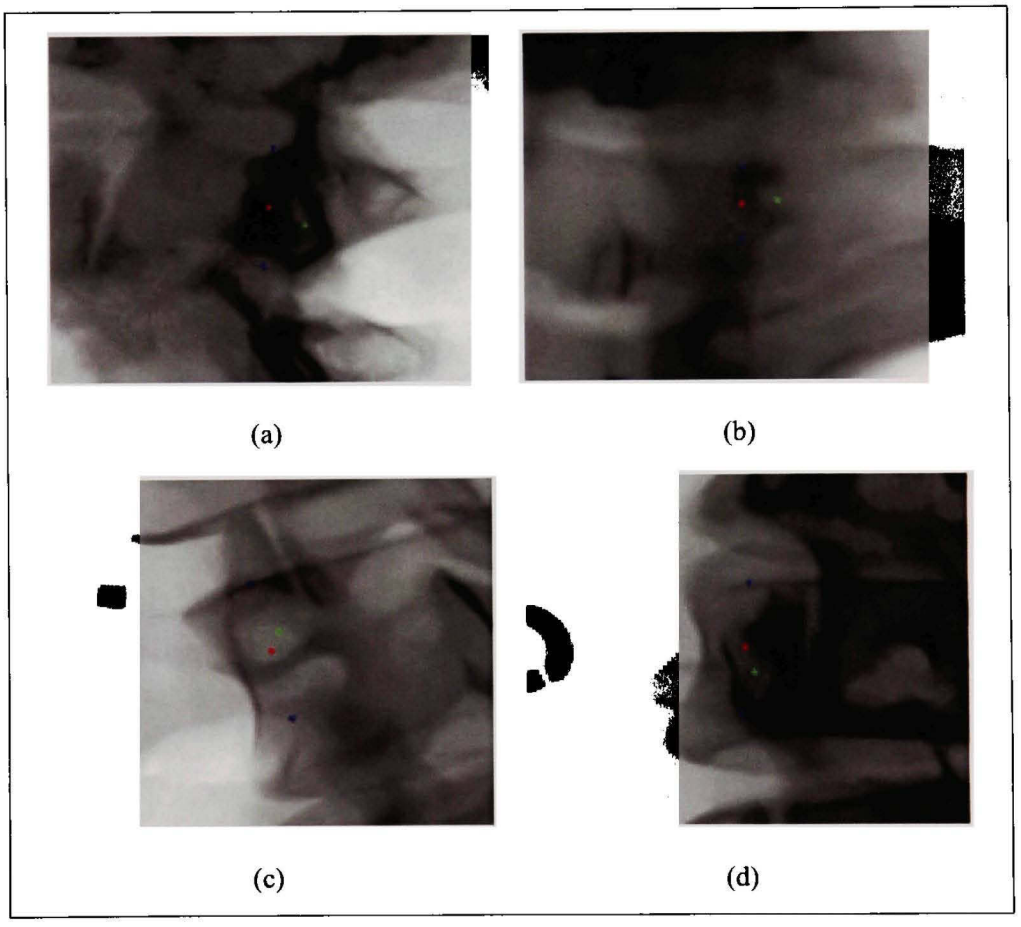


Figure 5.16 Quatre exemples pour lesquels la distance entre les centres des pédicules et les centroïdes des formes segmentées est supérieure 3.5mm. Pour les 4 images, nous avons affiché en bleu les sommets marqués par l'expert, en rouge le centre du pédicule associé et en vert le centroïde du pédicule segmenté.

La Figure 5.17 présente l'histogramme de la différence entre l'estimation de la rotation frontale à partir des points de l'expert et l'estimation de la même rotation avec les centroïdes des formes extraites par notre algorithme de segmentation. La différence moyenne de la rotation frontale est de 1.9 degrés. Cette erreur est très acceptable puisque l'erreur manuelle est d'environ 5 degrés. On remarque aussi que la plupart des différences d'angles est en dessous de cette valeur. Notre évaluation de l'angle frontal est donc proche de celle de l'expert. L'avant dernière colonne du Tableau 5.2 montre que cette différence d'angle est légèrement plus importante pour les vertèbres de T9 à T12. Pour ces mêmes vertèbres, la variance de la différence d'angles est aussi plus importante. Sans doute pour quelques vertèbres de ces niveaux thoraciques, la différence de l'angle est relativement plus importante.

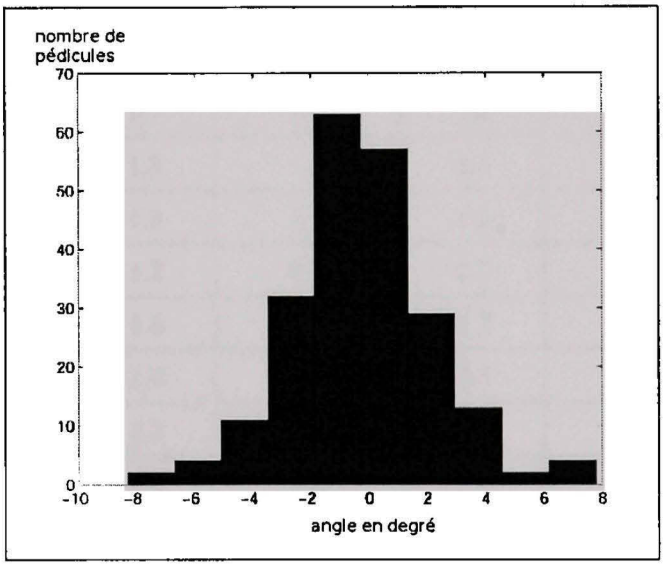


Figure 5.17 Histogramme de la différence (en degré) entre l'estimation de la rotation frontale à partir des points de l'expert et l'estimation de la même rotation avec les centroïdes des formes extraites par notre algorithme de segmentation. Les angles sont exprimés en degrés.

Tableau 5.2

La première colonne donne la différence moyenne en millimètre entre le centre des pédicules et le centroïde de la forme extraite pour chaque vertèbre T1 à L4. La seconde colonne correspond à la variance de cette différence. La troisième colonne présente la différence des estimations de la rotation frontale pour chaque niveau vertébral. Cette différence est donnée en degré. La quatrième colonne présente la variance de la différence d'angles

vertèbre	différence sur le centre du pédicule		différence de la rotation frontale	
	moyenne	variance	moyenne	variance
T1	1.9	3.0	1.4	3.2
T2	1.2	0.3	1.5	3.1
T3	1.7	0.9	2.0	4.4
T4	1.8	1.4	1.9	3.6
T5	1.4	0.3	1.7	5.5
T6	1.7	0.9	1.4	3.4
T7	1.8	1.3	2.1	7.2
T8	1.3	1.1	1.3	3.3
T9	1.2	0.5	2.7	10.7
T10	1.6	0.8	2.7	9.2
T11	2.0	0.4	2.3	1.8
T12	1.3	0.5	2.4	8.7
L1	1.4	0.6	2.1	9.2
L2	1.3	0.3	2.0	8.4
L3	1.4	0.3	1.7	4.8
L4	1.4	1.1	1.7	3.9
totaux	**1.5 mm**	**0.9 mm**	**1.9**	**6.1**

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de segmentation de pédicules. Cette étude est à notre connaissance la première sur ce sujet. D'autre part dans la littérature la segmen-

tation de radiographies digitales est souvent limitée à la partie lombaire de la colonne et ne s'intéresse pas à des détails aussi fins que les pédicules. Notre étude présente des résultats raisonnables pour de telles tâches, et est ainsi une première étape vers d'autres études afin d'automatiser la segmentation en injectant, par exemple, certaines informations a priori dans le processus.

Les conclusions de ce chapitre offrent de bonnes perspectives pour la segmentation automatique des pédicules sur une paire de vues stéréo-radiographiques afin d'automatiser la reconstruction 3D de la colonne vertébrale. Enfin, en segmentant les pédicules, des primitives de haut niveau peuvent être extraites pour générer un modèle 3D plus juste et plus représentatif que ceux reconstruits manuellement.

CONCLUSION

Les images radiographiques sont utilisées depuis près d'un siècle pour aider les praticiens dans leur diagnostics. Depuis quelques décennies, l'utilisation d'ordinateurs a permis d'offrir de nouveaux outils de visualisation du corps humain, notamment avec l'imagerie 3D. A l'Hôpital Sainte-Justine, les radiographies de patients atteints de scoliose idiopathique servent à reconstruire leur colonne vertébrale en trois dimensions. Ceci permettant de mieux comprendre les déformations dues à cette pathologie mais aussi afin de poser un diagnostic plus précis pour chaque patient. Cependant, les radiographies sont des images fortement dégradées. Ces dégradations influencent la qualité de la reconstruction. Le but principal de cette thèse fut de développer des outils de prétraitements adaptés aux radiographies afin de réduire l'influence du bruit et du flou dus au modèle d'acquisition de ces images.

Pour réduire le bruit des images radiographiques, nous nous sommes dans un premier temps intéressés à ses caractéristiques afin de mieux le comprendre et de mieux le modéliser. Ainsi les radiographies sont des données hétéroscédastiques, c'est-à-dire que la variance du bruit en un pixel donné dépend de son niveau de gris. A partir de cette caractéristique, nous avons étendu le filtre à moyennes non locales aux radiographies. Ce faisant, le paramètre de régularisation est ajusté en chaque pixel automatiquement en fonction des structures locales de l'image. Nous avons aussi réduit l'influence du nombre d'échantillons utilisés dans le débruitage, ce dernier est ainsi fixé en fonction du temps de calcul autorisé pour le prétraitement. Le modèle de débruitage est ainsi automatique et bien adapté aux images radiographiques. Nous avons aussi proposé quelques modifications au filtre MNL original. Nous avons introduit une régression robuste qui permet d'augmenter le pouvoir de débruitage du modèle. Plus généralement pour tous types d'images (naturelles ou hétéroscédastiques), le modèle que nous avons proposé offre des performances nettement supérieures à celles du filtre MNL original. Aussi, un autre avantage majeur de ce nouveau filtre est qu'il fournit une mesure d'adéquation de l'image débruitée. Elle permet

ainsi de connaître les régions bien débruitées mais aussi les pixels pour lesquels la réduction du bruit a été faible. Cette information sur la qualité du débruitage peut être très utile dans les phases suivantes du traitement des images, telle que la segmentation.

Nous nous sommes ensuite intéressés au rehaussement des radiographies. Nous avons choisi d'utiliser une approche par EDP. Ces dernières permettent de rehausser les contours d'une image lorsque le noyau du flou n'est pas connu ou qu'il n'est pas uniforme sur l'image, tel que pour le radiographies. Les récentes EDPs utilisent un tenseur structurel linéaire afin d'estimer le gradient de l'image dans le bruit ; Ce dernier ayant été amplifié par l'opérateur discret de dérivation. Cependant le tenseur structurel linéaire détruit la non-homogénéité du gradient dans les régions fortement informatives telles que les coins ou les jonctions en T. Nous avons proposés dans cette thèse un nouveau tenseur structurel, le TSMNL basé sur les caractéristiques non locales des dérivatives de l'image pour fournir une estimation robuste du gradient. Ce nouveau tenseur structurel est, comme pour le modèle de débruitage du second chapitre, automatique. Les paramètres de régularisation s'ajustent automatiquement en fonction des structures locales des dérivées de l'image. Ainsi les EDP utilisant le TSMNL ont un nombre de paramètres restreint en comparaison des autres EDPs. Parce que l'ajustement des paramètres est local, la diffusion s'adapte localement à l'image et les images diffusées sont ainsi de meilleure qualité. De plus, le TSMNL utilise les caractéristiques du bruit pour estimer le gradient de l'image. Le TSMNL est ainsi aisément étendu aux images hétéroscédastiques et donc aux images radiographiques. Nous nous sommes intéressés à deux EDPs de rehaussement, la diffusion anisotrope et le filtre de choc, nous présentons des résultats sur des images naturelles et sur des radiographies. Le filtre de choc offre de meilleurs résultats, aussi un paramètre de moins doit être ajusté, c'est ce filtre qui a été dans la suite utilisé.

Afin d'évaluer l'impact du filtrage sur les traitements postérieurs des images, nous nous sommes intéressés à la segmentation des pédicules. Afin d'augmenter les caractéristiques locales des pédicules, nous avons créé une table de probabilités. Cette dernière met en év-

idence la couronne du pédicule par rapport à son intérieur. Un contour actif multi-échelle initialisé sur la table de probabilités permet de segmenter les pédicules. Les paramètres du contour actif sont gérés automatiquement par le modèle. Dans la dernière partie de cette thèse nous avons segmenté des pédicules à partir de radiographies originales, de radiographies débruitées et de radiographies rehaussées. Nous avons constaté que le débruitage améliorait la qualité de la table de probabilités et qu'il augmentait le taux de segmentation. Aussi la forme des pédicules segmentés est de meilleure qualité après débruitage. Afin de valider notre algorithme de segmentation, nous l'avons utilisé sur 38 radiographies préalablement débruitées. Le taux de segmentation était plus que satisfaisant de part la difficulté du problème. Pour valider nos résultats cliniquement, nous avons comparé les formes segmentées avec les repères anatomiques marqués par l'expert. Pour ce faire nous avons comparé les centroïdes des formes segmentées avec les centres de pédicules. Nous avons aussi comparé les estimations de la rotation frontale des vertèbres obtenues à partir des centres de pédicules définis par l'expert et celles obtenues à partir des pédicules segmentés. Pour chacune des deux comparaisons, les différences entre l'estimation de l'expert et celle basée sur notre segmentation est inférieure à l'erreur humaine.

Perspectives

- sur le débruitage : le filtre de débruitage que nous avons présenté est encore un filtre de première génération. Beaucoup d'améliorations peuvent encore être apportées à ce modèle. Pour le moment ce modèle est basé sur des régressions constantes locales ; Il pourrait aussi être étendu aux régressions linéaires locales. La statistique C_p permet de comparer les régressions de degrés différents et pourrait donc être utilisée pour choisir le degré de la régression (en effet un modèle linéaire n'est pas forcément plus performant qu'un modèle constant). Cependant, il faudrait veiller à ne pas trop augmenter le temps de calcul déjà important. Aussi, afin que la performance de l'extension à une approche

linéaire soit appréciable, il est évident qu'une régression robuste doit être développée pour le cas linéaire, ce qui n'est d'après [106] pas chose aisée.

Une autre amélioration concerne la robustesse de la régression. Une étude plus approfondie doit être menée afin de confirmer ou d'infirmer le seuillage des distances.

La statistique C_p est évaluée sur un voisinage carré, cependant certains pixels, même lorsqu'ils n'ont pas été seuillés par la robustesse de la régression, sont tout de même débruités différemment du pixel concerné. Ceci introduit un biais au pixel concerné entre le calcul de la C_p et l'erreur réelle entre l'image débruitée et l'image originale. En investissant de nouveaux voisinages, nous pouvons espérer augmenter la performance du modèle. Ainsi, il faudrait différencier le nombre d'échantillons pour le débruitage et le nombre de pixels utilisés pour calculer la C_p. La loi des grands nombres nous apprend que seule une trentaine d'échantillons est nécessaire pour obtenir une bonne estimation de la moyenne et de la variance d'une distribution. Ainsi en utilisant seulement les 30 pixels ayant des voisinages proches du pixel à débruiter, nous pourrions obtenir une estimation bonne et non biaisée de l'erreur de l'image débruitée au pixel concerné. Ce faisant, le temps de calcul serait aussi considérablement réduit puisque le calcul serait réalisé sur un nombre restreint de pixels.

Un autre point que j'ai commencé à considérer est le traitement des pixels ayant un voisinage très différent des autres pixels (nous les appelons échantillons rares). L'exemple extrême étant les coins des objets. Du fait de leur faible représentativité dans l'image, ceux-ci sont mal débruités, alors que souvent certains pixels dans leur voisinage appartiennent au même objet et donc pourrait grandement aider à leur débruitage. Toutefois, il se peut qu'en changeant la forme du voisinage sur lequel est calculé la distance entre échantillons, ces pixels rares se rapprochent des pixels appartenant au même objet. Avec Martin Poirier, étudiant en maîtrise, nous avons utilisé la statistique C_p afin de choisir le voisinage optimal pour le débruitage de chaque pixel. Cependant les résultats que nous avons obtenus n'étaient pas concluants. En effet, en changeant le voisinage pour traiter un pixel rare, la rareté du pixel est décalée à un de ses voisins.

Or ce pixel voisin est lui aussi utilisé pour calculer la statistique C_p du pixel considéré, la performance du modèle n'est donc pas améliorée. En effet pour bien réaliser cette approche, il faudrait d'abord se consacrer au paragraphe précédent pour supprimer du calcul de la C_p le pixel voisin devenu rare.

Enfin un des inconvénients majeurs du filtre MNL est le temps de calcul prohibitif. Dans l'annexe A, nous avons utilisé un MLP afin d'apprendre l'estimation de la largeur de bande. Les résultats sont prometteurs et cette approche mérite d'être approfondie ;

- sur le rehaussement : pour le filtre de choc, il serait intéressant d'étudier l'estimation de $\text{sign}(u_{\xi\xi})$ plutôt que l'estimation de $u_{\xi\xi}$.

  La diffusion à partir du TSMNL est extrêmement lente, il serait donc intéressant d'étudier l'évolution des largeurs de bande en fonction des itérations, ceci permettrait peut être de prévoir les largeurs de bandes seulement après quelques itérations pour augmenter la rapidité du modèle.

  Il serait aussi intéressant d'utiliser une largeur de bande variable dans le modèle développé dans [24] ;
- sur le contour actif : les énergies d'attache aux données dans le modèle de Chan et Vese sont associées à une distance euclidienne entre le niveau de gris de chaque pixel et le niveau de gris de chaque objet. Cette distance étant peu robuste au bruit, une énergie sur la régularité du contour et son paramètre associé sont importants pour réaliser une bonne segmentation. Cependant dans du bruit fort, un paramètre de régularité élevé est nécessaire pour obtenir une bonne segmentation, ceci a pour conséquence d'arrondir les angles des contours. En utilisant une distance entre voisinage telle que celle utilisée pour le filtre MNL, les énergies d'attache aux données seraient moins sensibles au bruit et l'influence de l'énergie de régularité serait réduite. De ce fait, un tel modèle permettrait sans doute de mieux restituer les discontinuités des contours ;
- sur la segmentation des pédicules : en utilisant le modéle de J.Boisvert [12], l'initialisation de la segmentation pourrait être automatisée pour un certain nombre de pédicules.

LISTE DES PUBLICATIONS

Articles publiés dans des revues internationales avec comité de relecture ou dans des proceedings de conférence :

- V. Doré, L. Duong, F. Cheriet and M. Cheriet Towards Segmentation of Pedicles on Posteroanterior X-Ray Views of Scoliotic Patients, *ICIAR 2007, LNCS 4633*, pp. 1028-1039, 2007.

- E. Ben Braiek, M. Cheriet, and V. Doré, SKCS-A Separable Kernel Family with Compact Support to improve visual segmentation of handwritten data, *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis*, Vol. 5, N° 1, pp. 14-29, 2005.

- E. Ben Braiek, M. Cheriet, V. Doré, Conception d'une nouvelle famille de noyaux séparables à support compact appliqués à l'extraction de données visuelles manuscrites, *Traitement du Signal*, Vol. 23, N° 1, pp. 25-40, 2006.

- M. Cheriet, V. Doré, Amincissement-sans-segmentation et rehaussement des images de niveau de gris par un filtre de chocs utilisant des champs de diffusion, *Traitement du Signal*, Vol. 23, N° 1, pp. 79-94, 2006.

Articles acceptés pour publication dans une revue internationale avec comité de relecture :

- V. Doré, M. Cheriet, Robust NL-means Filter with Optimal Pixel-wise Smoothing Parameter for Statistical Image Denoising, *IEEE Transaction on Signal Processing*.

Articles soumis dans une revue internationale avec comité de relecture :

- V. Doré, M. Cheriet, Non-Local Adaptive Structural Tensors ; Applications to Anisotropic Diffusion and Shock Filtering, *IEEE Transaction on Signal Processing*.

Articles en voie de soumission dans une revue internationnale avec comité de relecture :

- V. Doré, L. Duong, F. Cheriet and M. Cheriet Semi-automatical Segmentation of Pedicles on Posteroanterior X-Ray Views of Patients affected by the Adolescent idiopathic Scoliosis, *IEEE Transaction on BioMedical Engineering*

ANNEXE I

SUR L'APPRENTISSAGE DU PARAMÈTRE DE RÉGULARISATION DU FILTRE C_pMNL

I.1 Introduction

Dans les sections précédentes nous avons présenté un modèle d'estimation du paramètre de régularisation du filtre à moyennes non locales. L'inconvénient majeur de ce modèle est son temps d'exécution prohibitif qui le rend difficilement utilisable dans un cadre industriel. Il est difficile de donner une estimation du temps de calcul, ni même de la complexité de l'algorithme ; En effet ceux-ci dépendent de la variance du bruit mais aussi du nombre d'itérations de la méthode de Newton et du nombre d'échantillons utilisés pour débruiter chaque pixel. Ces deux deux dernières variables sont différentes en chaque pixel et difficilement estimables, elles dépendent des structures présentes dans l'image. Cependant, en chaque pixel et à chaque itération de la méthode de Newton l'algorithme calcule les exponentiels des éléments d'une matrice de taille $(2t+1) \times (2t+1)/2$. Même si certaines stratégies de programmation permettent de réduire le nombre de calculs, le temps d'exécution reste tout de même considérable. Cependant, le choix du paramètre de régularisation h semble suivre une certaine règle en fonction des pixels échantillons. Par exemple, dans les régions uniformes, un grand paramètre est choisi par la statistique C_p, alors que lorsque des structures peu contrastées apparaissent, celui-ci devient relativement petit. Aussi, en présence de structures contrastées, un paramètre moyen est choisi. Enfin, la variance du bruit influe fortement le choix du paramètre. Seulement, si l'on considère une base de données d'images, comme nos radiographies par exemple, le bruit présente les mêmes caractéristiques sur toute la base. La règle qui semble apparaître sur le choix du paramètre pourrait être estimée à partir d'un système d'apprentissage. Si une telle règle peut être apprise, alors le temps nécessaire pour le débruitage sera considérablement réduit.

I.2 Le système d'apprentissage

I.2.1 Le perceptron multicouche MLP

Les systèmes d'apprentissage sont principalement utilisés pour des problèmes de classification. Toutefois certains systèmes permettent de modéliser des fonctions complexes. Parmi ces derniers, on trouve les réseaux de neurones et les machines à vecteurs de support (SVM). Notre choix s'est porté sur le perceptron multicouche du fait de son apprentissage rapide.

Le perceptron multicouche (MLP) est un réseau de neurones. Il est constitué de i couches de S_i neurones chacune. Chaque neurone de la couche i est relié par des synapses aux S_{i-1} neurones de la couche précédente et aux S_{i+1} neurones de la couche suivante. L'information est propagée vers l'avant, c'est-à-dire de la couche $i-1$ vers la couche i ; Telle qu'en provenance d'un neurone k de la couche $i-1$, elle est multipliée par un poids w_{kl} dans la synapse le reliant au neurone l. En chaque neurone de la couche i, les informations provenant des S_{i-1} neurones de la couches précédentes sont additionnées. Le neurone est active lorsque cette somme est supérieure à un certain seuil. Cette opération est réalisée couche après couche jusqu'au neurone de sortie (celui de la dernière couche).

La phase d'apprentissage consiste à ajuster les poids $w_k l$. Elle est dite supervisée pour le MLP, car celui-ci est entraîné à partir d'exemples d'entrées dont la sortie souhaitée est déjà connue. Pour chacun des exemples, la sortie du MLP est comparée avec celle souhaitée. Le gradient de l'erreur résultante est ensuite rétropropagé d'un neurone à ses synapses et aux neurones de la couche précédente. Les poids sont ainsi mis à jour.

I.2.2 les entrées et les sorties du système

Avant de traiter du choix des caractéristiques utilisées, on peut remarquer que le nombre d'échantillons utilisés pour le débruitage n'est pas le même d'un pixel à l'autre. En con-

séquence, le nombre de caractéristiques risque d'être variable. Plusieurs méthodes existent afin de remédier à cette lacune de caractéristiques ; par exemple la réduction de la dimensionalité des entrées, la complétion des caractéristiques manquantes soit par la caractéristique moyenne, soit par une valeur déviante. Cette dernière possibilité permet au système d'identifier les caractéristiques manquantes. Ici notre but n'est pas de développer un modèle d'apprentissage performant mais simplement de prouver que le choix du paramètre peut être mimé par un système d'apprentissage. Dans cette optique, pour l'entraînement, nous n'avons seulement utilisé des exemples dont le nombres de caractéristiques est maximal. De la même manière, pour caractéristiques d'entrée d_i, nous avons utilisé les pixels dans le voisinage $\mathcal{N}(i)$ du pixel i, auxquels nous avons soustrait le niveau de gris moyen de $\mathcal{N}(i)$, ceci pour conserver l'invariance par changement de contraste.

Pour les valeurs de sortie du système, nous avons utilisé le logarithme du paramètre estimé par la statistique C_p sur le vecteur d_i. La fonction logarithme permet d'étaler l'histogramme du paramètre. En effet il y a peu de paramètres très grands mais souvent ceux ci sont très éloignés du paramètre médian. Lors de la normalisation ente 0 et 1 des exemples la plupart des paramètres de sortie se trouvent dans une largeur de bande très réduite (voir hist). Le paramètre médian s'il est choisi par le MLP risque de produire une petite erreur puisque proche de la plupart des paramètres, il y a donc très peu de diversité à la sortie, ce qui n'est pas souhaite, puisque le but est d'adapter le paramètre en chaque pixel. C'est pourquoi le logarithme est utilise pour étaler l'histogramme du paramètre de régularisation.

I.3 Expérience

I.3.1 protocole

Un des inconvénients majeurs du MLP est le nombre de paramètres à ajuster pour obtenir un système performant. Parmi ceux-ci on trouve le nombre de couches, le nombre de

neurones sur chaque couche, le paramètre d'apprentissage, etc. Aucun de ces paramètres n'a été ajuste lors de notre expérience. Nous avons seulement pris une unique couche cachée de cinq neurones.

L'expérience a été réalisée sur l'image du cameraman dégradée par un bruit blanc gaussien de variance 120. Les pixels de celle-ci ont été séparés en deux ensembles P_1 et P_2 de cardinalité équivalente. Chacun des deux ensembles est à son tour divisé en un ensemble d'entraînement E_i et un ensemble de validation V_i, où la validation représente 1/5 de l'entraînement. Un premier MLP R_1 est entraîné avec les caractéristiques d_i^1 et les sorties h_i^1 des pixels appartenant à E_i. Le réseau a été entraîné sur 500 époques. Le réseau final R_1 est celui ayant la plus petite erreur sur la base de validation V_1. Un second MLP R_2 est entraîné à partir des pixels appartenant à P_2.

Le test consiste à utiliser le réseau R_1(resp. R_2) sur les pixels appartenant a P_2 (resp. P_1). On obtient ainsi l'image du cameraman entièrement débruitée sans devoir recourir à une autre image possédant les mêmes caractéristiques que la première.

La principale difficulté du test est de gérer les pixels n'ayant pas le nombre maximal de caractéristiques. Les caractéristiques manquantes doivent être complétées. Les remplacer par une valeur constante ne semble pas souhaitable. En effet le paramètre de régularisation h_i est sans aucun doute lié à l'homogénéité des pixels dans le voisinage $\mathcal{N}(i)$. En remplaçant les caractéristiques manquantes par une valeur moyenne ou bien par une valeur déviante, le système pourrait être tenté de comprendre que plusieurs pixels se ressemblent ou qu'ils sont au contraire très différents et donc choisir le mauvais paramètre. Pour compléter les caractéristiques manquantes il semble donc plus approprié de respecter la densité des caractéristiques existantes. Pour cela, on estime la densité f_i des caractéristiques existantes du pixel i. A partir de cette densité, les caractéristiques manquantes sont générées aléatoirement en remarquant que :

$$P(i < d) = jj \tag{I.1}$$

Où, u est une distribution uniforme.

I.3.2 les résultats

L'image débruitée $\hat{I}_{MLP}$ à partir des deux réseaux est présentée sur la Figure I.2 en comparaison du débruitage par la statistique C_p Figure I.2. Le PSNR de la sortie du C_pMNL est le plus élevé, il est de 33dB. Celui du filtre MNL original (Figure I.3) dont le paramètre de régularisation a été optimisé est d'environ 31.1dB. En utilisant le MLP, le PSNR du filtre de débruitage est de 32.5dB. Il y a bien eu apprentissage du paramètre puisque le MLP augmente le PSNR du MNL. Le PSNR de l'image à la sortie du filtre utilisant le réseau est légèrement inférieur a celle du C_pMLP. Cependant le temps de calcul est nettement inférieur, le temps de calcul a été divisé par 16. Ce premier résultats est encourageant puisqu'en utilisant des caractéristiques plus évoluées et en optimisant les paramètres du MLP, le PSNR ne peut qu'augmenter. Aussi on remarque que seuls les pixels ayant le nombre maximal de caractéristiques ont été utilisés lors de l'entraînement. Or ceux ayant un nombre de caractéristiques différents sont sans doute (déjà du fait qu'ils aient moins de caractéristiques) très différents ; pour ceux-ci le paramètre est mal estimé. Il faudrait pouvoir les inclure dans l'entraînement. D'autre part, la distribution du paramètre h n'est pas uniforme, le modèle se révèle peut être bon pour la plupart des pixels mais très mauvais pour les autres. Enfin le nombre d'exemples utilisés lors de l'apprentissage est sans doute insuffisant par rapport au nombre de neurones utilisés, et ils ne sont peut être pas assez représentatif du problème. Il faudrait tester ce modèle sur un plus grand nombre d'images.



Figure I.1 Image débruitée par le filtre C_pMNL.



Figure I.2 Image débruitée par le filtre MNL dont le paramètre d'apprentissage a été appris par le MLP.

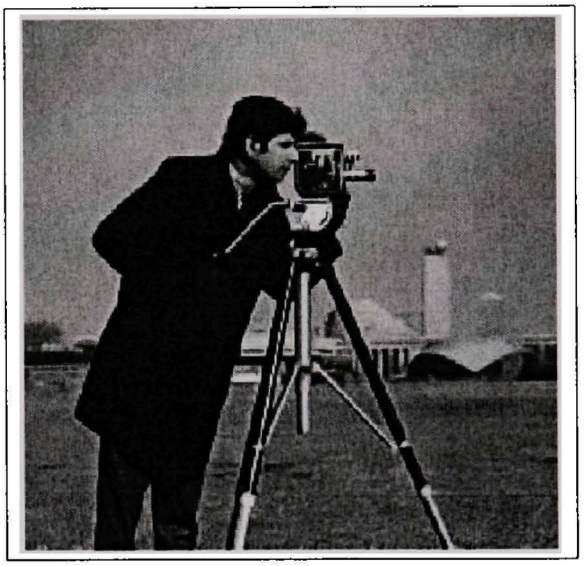


Figure I.3 Image débruitée par le filtre MNL original et avec le paramètre de régularité optimal.

ANNEXE II

CALCUL DE LA VARIANCE DU BRUIT DANS LES CANAUX D'UN TENSEUR

Dans le troisième chapitre nous avons besoin de la variance du bruit dans chaque canal du tenseur. Pour rappel, I est l'image débruitée :

$$I = u + \nu\epsilon$$

Où u est l'image originale recherchée. ϵ est le bruit de variance σ affectant l'image à l'entrée du filtre. ν est le coefficient de réduction du bruit.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(I_x^2) &= \text{Var}\left(u_x + \nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j) - \nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j)\right)^2 \\
&= \text{Var}\big(2(\nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j) - \nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j))u_x \\
&\quad +(\nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j) - \nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j))^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big(4(\nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j) - \nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j))^2u_x^2 \\
&\quad +(\nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j) - \nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j))^4\big) \\
&= 4((\nu^2(i+1,j) + \nu^2(i-1,j))u_x^2\sigma^2) + \mathbb{E}(\nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j))^4 \\
&\quad +\mathbb{E}(\nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j))^4 + 6\nu^2(i+1,j)\nu^2(i-1,j)\mathbb{E}(\epsilon^2(i+1,j)\epsilon^2(i-1,j))
\end{aligned}$$

Pour un bruit gaussien, les moments impaires sont nuls et le moment centrée quatrième est égal à 3σ, nous avons alors pour un tel bruit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\nu(i+1,j)\epsilon(i+1,j))^4 + \mathbb{E}(\nu(i-1,j)\epsilon(i-1,j))^4 \\
&\quad -2\nu^2(i+1,j)\nu^2(i-1,j)\mathbb{E}(\epsilon^2(i+1,j)\epsilon^2(i-1,j)) \\
&= 3 * \nu^4(i+1,j)\sigma^4 + 3 * \nu^4(i-1,j)\sigma^4 + 6\nu^2(i+1,j)\nu^2(i-1,j)\sigma^4 \\
&= 3 * (\nu^2(i+1,j) + \nu^2(i-1,j))^2\sigma^4
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\text{Var}(I_x^2) = 4((\nu^2(i+1,j) + \nu^2(i-1,j))u_x^2\sigma^2) + 3(\nu^2(i+1,j) + \nu^2(i-1,j))^2\sigma^4}$$

Idem pour la variance de I_y^2, on trouve que :

$$\boxed{\text{Var}(I_y^2) = 4((\nu^2(i,j+1) + \nu^2(i,j-1))u_y^2\sigma^2) + 3(\nu^2(i,j+1) + \nu^2(i,j-1))^2\sigma^4}$$

Pour la variance des dérivées croisées nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{Var}(I_x I_y) &= \text{Var}\big((u_x + (\nu\epsilon)_x)(u_y + (\nu\epsilon)_y)\big) \\
&= \text{Var}\big(u_x u_y + (\nu\epsilon)_x u_y + (\nu\epsilon)_y u_x + (\nu\epsilon)_x(\nu\epsilon)_y\big) \\
&= \mathbb{E}\big(u_x^2 u_y^2 + (\nu\epsilon)_x^2 u_y^2 + (\nu\epsilon)_y^2 u_x^2 + (\nu\epsilon)_x^2(\nu\epsilon)_y^2\big) - u_x^2 u_y^2
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{\text{Var}(I_x I_y) = (\nu_x^2 u_y^2 + \nu_y^2 u_x^2 + \nu_x^2\nu_y^2\sigma^2)\sigma^2}$$

Les indices x et y correspondent aux convolutions avec les filtres $F_x = [1\ 0\ -1]$ et $F_y = [1\ 0\ -1]^T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. ABRAMSON : On bandwidth variation in kernel estimates- a square root law. *The Annals of Statistics*, 10:1217–1223, 1982.

[2] H. AKAIKE : A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723, 1974.

[3] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.L. LIONS et J.M. MOREL : Axioms and fundamental equations of image processing. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 16(9):200–257, 1993.

[4] L. ALVAREZ et L. MAZORRA : Signal and image restauration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM J. Num. Anal.*, 31(2):590–605, 1994.

[5] A. ANTANI, L.R. LONG, G.R. THOMA et R.J. STANLEY : Vertebra shape classification using MLP for content-based image retrieval. *In Neural Networks, Proceedings of the International Joint Conference on*, volume 1, pages 160–165, 2003.

[6] S. ANTANI, L.R. LONG, G.R. THOMA et D.J. LEE : Anatomical shape representation in spine x-ray images. *In Proceedings of IASTED International Conference on Visualization, Imaging and Image Processing*, pages 510–515, 2003.

[7] G. AUBERT et P. KORNPROBST : *Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (second edition)*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 2006.

[8] S.P. AWATE et R.T. WHITAKER : Unsupervised, Information-Theoretic, Adaptive Image Filtering for Image Restoration. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 364–376, 2006.

[9] M. BENJELLOUN et S. MAHMOUDI : Mobility Estimation and Analysis in Medical X-ray Images Using Corners and Faces Contours Detection. *In Machine Vision and Image Processing Conference, 2007. IMVIP 2007. International*, pages 106–116, 2007.

[10] A. BERLINET, G. BIAU et L. ROUVIERE : Optimal l_1 bandwidth selection for variable kernel estimation. *Statistics and Probability letters*, 74(20):116–128, 2005.

[11] J. BIGÜN et G.H. GRANLUND : Optimal orientation detection of linear symmetry. *In Proc. First International Conference on Computer Vision*, pages 433–438, 1987.

[12] J. BOISVERT, F. CHERIET, X. PENNEC, H. LABELLE et N. AYACHE : Articulated spine models for 3d reconstruction from partial radiographic data. *IEEE medical (à paraitre)*.

[13] F.L. BOOKSTEIN : Fitting conic sections to scattered data. *Computer Graphics and Image Processing*, 9(1):56–71, 1979.

[14] J. BOULANGER : *Non-parametric estimation and contributions to image sequence analysis : Modeling, simulation and estimation of the intracellular traffic in video-microscopy image sequences*. Thèse de doctorat, IRISA, France, 2007.

[15] E. Ben BRAIEK, M.CHERIET et V.DORÉ : Conception d'une nouvelle famille de noyaux séparables à support compact appliqués à l'extraction des données visuelles manuscrites. *TS. Traitement du signal*, 23(1):25–40, 2006.

[16] E.B. BRAIEK, M. CHERIET et V.DORÉ : SKCS-A Separable Kernel Family with Compact Support to improve visual segmentation of handwritten data. *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis*, 5(1):14–29, 2005.

[17] L. BREIMAN, W. MEISEL et E. PURCELL : Variable kernel estimates of multivariate densities. *Technometrics*, 19:135–144, 1977.

[18] M.J. BREWER : A bayesian model for local smoothing in kernel density estimation. *Statistics and Computing*, 10:299–309, 2000.

[19] T. BROX et J. WEICKERT : Level set based image segmentation with multiple regions. *Pattern Recognition*, 3175:415–423, 2004.

[20] T. BROX, J. WEICKERT, B. BURGETH et P. MRÀZEK : Nonlinear structure tensors. Rapport technique, Preprint No 113,Fachrichtung 6.1-Mathematik, Universität des Saarlandes, 2004.

[21] A. BUADES, B. COLL et J.M.MOREL : The staircasing effect in neighborhood filters and its solution. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 15(6):1499–1505, 2006.

[22] A. BUADES, B. COLL et J.M. MOREL : A non-local algorithm for image denoising. *In Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 60–65. IEEE Computer Society Conference on, 2005.

[23] A. BUADES, B. COLL et J.M. MOREL : A review of image denoising algorithms, with a new one. *Multiscale Modeling and Simulation (SIAM Interdisciplinary Journal*, 4(2):490–530, 2005.

[24] A. BUADES, B. COLL et J.M. MOREL : Image enhancement by non-local reverse heat equation. Rapport technique, Preprint CMLA 2006-22, 2006.

[25] B.W.HONG, E. PRADOS, S. SOATTO et L. VESE : Shape Representation based on Integral Kernels : Application to Image Matching and Segmentation. *In Proceedings of the 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition-Volume 1*, pages 833–840. IEEE Computer Society Washington, DC, USA, 2006.

[26] E.J. CANDES et D.L. DONOHO : Curvelets-a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges. *Curves and Surfaces*, pages 1–10, 1999.

[27] J. CANNY : A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986.

[28] T.F. CHAN et L.A. VESE : Active contours without edges. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(2):266–277, 2001.

[29] G. CHARPIAT, O. FAUGERAS et R. KERIVEN : Shape metrics, warping and statistics. *In Image Processing, 2003. Proceedings. 2003 International Conference on*, volume 2, pages 627–630, 2003.

[30] M. CHERIET et V. DORÉ : Amincissement-sans-segmentation et rehaussement des images de niveau de gris par un filtre de chocs utilisant des champs de diffusion. *TS. Traitement du signal*, 23(1):79–94, 2006.

[31] M. CHERIET, J.N. SAID et C.Y. SUEN : A recursive thresholding technique for image segmentation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7(6):918–921, 1998.

[32] W.S. CLEVELAND et C. LOADER : Smoothing by local regression : Principles and methods. Rapport technique, Technical Report, AT&T Bell Laboratories Murray Hill, NY., 1995.

[33] I. COHEN : *Modèles Déformables 2D and 3D : Application a la segmentation d'images médicales.* Thèse de doctorat, Université Paris 9 - Dauphine, 1992.

[34] L.D. COHEN : On active contour models and balloons. *CVGIP : Image Understanding*, 53(2):211–218, 1991.

[35] L.D. COHEN : Multiple Contour Finding and Perceptual Grouping using Minimal Paths. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3):225–236, 2001.

[36] D. COMANICIU et P. MEER : Meanshift : A robust approach toward feature space analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(5):603–619, 2002.

[37] D. COMANICIU, V. RAMESH et P. MEER : The variable bandwidth mean shift and data-driven scale selection. *In Proceedings of the 8th IEEE Inter. Conf. on Computer Vision*, pages 438–445. IEEE Computer Society Press, 2001.

[38] P. CRAVEN et G. WAHBA : Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik*, 31(6):377–403, 1979.

[39] D. CREMERS : Dynamical Statistical Shape Priors for Level Set-Based Tracking. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 1262–1273, 2006.

[40] D. CREMERS, F. TISCHHÄUSER, J. WEICKERT et C. SCHNÖRR : Diffusion Snakes : Introducing Statistical Shape Knowledge into the Mumford-Shah Functional. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):295–313, 2002.

[41] D. CUTHBERT, F.S. WOOD et J.W. GORMAN : *Fitting equations to data : computer analysis of multifactor data, 2nd ed.* New York ; Toronto : J. Wiley, 1980.

[42] B. DANNY et D. COMANICIU : A common framework for nonlinear diffusion, adaptive smoothing, bilateral filtering and mean shift. *Image and Video Computing*, 22(1):73–81, 2004.

[43] P. DEHEUVELS : Estimation non paramétrique de la densité par histogrammes généralisés. *Revue de Statistique Appliquée*, 25(3):5–42, 1977.

[44] A. DESOLNEUX, L. MOISAN et J.M. MOREL : Computational gestalt and perception thresholds. *Journal of Physiology-Paris 97*, pages 311–324, 2003.

[45] S. DIDAS, P. MRAZEK et J. WEICKERT : Energy-Based Image Simplification with Nonlocal Data and Smoothness Terms. *In Algorithms for Approximation–Proceedings of the 5th International Conference, Chester*, pages 51–60. Springer, 2005.

[46] M.N. DO : Contourlets and sparse image expansions. *In Proceedings of SPIE*, volume 5207, pages 560–570, 2003.

[47] M.N. DO et M. VETTERLI : Contourlets : a directional multiresolution image representation. *In Image Processing. 2002. Proceedings. 2002 International Conference on*, volume 1, pages 357–360, 2002.

[48] M.N. DONOHO et I. JOHNSTONE : Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, 1994.

[49] V. DORÉ : Loi d'échelle dans les images naturelles : Modélisation, estimation and débruitage, rapport de stage de dea. Rapport technique, ENS Cachan, 2003.

[50] R.O. DUDA, P.E. HART et D.G. STORK : *Pattern Classification*. Wiley-Interscience, 2000.

[51] L. DUONG : Détection et classification automatique de la colonne vertébrale à partir d'images à rayons-x. Rapport technique, rapport de synthèse sur l'état de l'avancement de la recherche, 2004.

[52] L. DUONG, F. CHERIET et H. LABELLE : Towards an Automatic Classification of Spinal Curves from X-Ray Images. *In Research Into Spinal Deformities 5*, pages 419–424. IOS Press, 2006.

[53] W.T. EADIE, D. DRIJARD et F.E. JAMES : *Statistical Methods in Experimental Physics*. 1971.

[54] H.L. ENG et K.K. MA : Noise adaptive soft-switching median filter. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(2):242–251, 2001.

[55] J. FAN, I. GIJBELS, T.C. HU et L.S. HUANG : A study of variable bandwidth selection for local polynomial regression. *Statistica Sinica*, 6:113–127, 1996.

[56] W. FÖRSTNER et E. GÜLCH : A fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and centers of circular features. *In Proc. ISPRS Intercommission Conference on Fast Processing of Photogrammetric Data*, pages 281–305, 1987.

[57] S. GAO et T.D. BUI : Image segmentation and selective smoothing by using Mumford-Shah model. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 14(10):1537–1549, 2005.

[58] I. GIJBELS, A. LAMBERT et P. QIU : Edge-preserving image denoising and estimation of discontinuous surfaces. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(7):1075–1087, 2006.

[59] G. GILBOA, N. SOCHEN et Y.Y. ZEEVI : Estimation of optimal PDE-based denoising in the SNR sense. Rapport technique.

[60] G. GILBOA, N. SOCHEN et Y.Y. ZEEVI : Image enhancement and denoising by complex diffusion processes. *Image Enhancement and Denoising by Complex*

Diffusion Processes, 25(8):1020–1036, 2004.

[61] R.C. GONZALEZ et R.E. WOODS : *Digital Image Processing , 2nd ed.* Prentice Hall, 2001.

[62] P. GRAVEL, G. BEAUDOIN et J. De GUISE : A method for modeling noise in medical images. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 23(10):1221–1232, octobre 2004.

[63] F. GUICHARD et J.M. MOREL : *Image Analysis and P.D.E.s.* 2001.

[64] F. GUICHARD et J.M. MOREL : A note on two classical enhancement filters and their associated pde's. *Inter. Journ. of Computer Vision*, 52:152–160, 2003.

[65] P. HALL, S.J. SHEATHER, M.C. JONES et J.S. MARRON : On optimal data-based bandwidth selection in kernel density estimation. *Biometrika*, 78:263–269, 1991.

[66] G. KANIZSA : *Grammatica del Vedere.* Il Mulina, Bologna, 1997.

[67] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS : Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.

[68] C. KERVRANN et J. BOULANGER : Optimal spatial adaptation for patch-based image denoising. *Image Processing, IEEE Trans. on*, 15(10):2866–2878, 2006.

[69] E. KLASSEN, A. SRIVASTAVA, W. MIO et S.H. JOSHI : Analysis of Planar Shapes Using Geodesic Paths on Shape Spaces. *IEEE transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 372–383, 2004.

[70] S. KOOMPAIROJN, K.A. HUA et C.BHADRAKOM : Automatic Classification System for Lumbar Spine X-ray Images. *In Computer-Based Medical Systems, 2006. CBMS 2006. 19th IEEE International Symposium on*, pages 213–218, 2006.

[71] P. KORNPROBST, R. DERICHE et G. AUBERT : Image coupling, restoration and enhancement via pde's. *In Proc. Int. Conf. on Image Processing 1997*, pages 458–461, 1997.

[72] U. KÖTHE : Integrated edge and junction detection with the boundary tensor. *In ICCV 03, Proc of the 9th Intl. Conf. on Computr Vision*, pages 424–431, 2003.

[73] H.P. KRAMER et J.B. BRUCKNER : Iterations of a non-linear transformation for enhancement of digital images. *Pattern Recognition*, 7(1-2):53–58, 1975.

[74] J.L. LIE et M.X.C. TAI : A binary level set model and some applications to Mumford-Shah image segmentation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 15(5):1171–1181, 2006.

[75] T. LINDEBERG : *Scale-Space Theory in Computer Vision*. Publisher : Springer ; 1 edition, 1993.

[76] J. LIU : Robust Image Segmentation using Local Median. *In Computer and Robot Vision, 2006. The 3rd Canadian Conference on*, pages 31–31, 2006.

[77] C. LOADER : *Local Regression and likelihood (Statistics and Computing)*. Publisher : Springer-Verlag, 1999.

[78] D.O. LOFTSGAARDEN et C.P. QUESENBERRY : A nonparametric estimate of a multivariate density function. *Ann. Math. Statist.*, 36:1049–1051, 1965.

[79] A. MACOVSKI : *Medical Imaging Systems*. Prentice Hall ; Facsimile edition, 1983.

[80] H. MÂITRE : *Le traitement des images*. 2003.

[81] S. MALLAT : *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.

[82] S. MALLAT et G. PEYRE : Traitements Géométriques des Images par Bandelettes.

[83] C. MALLOWS : Some comments on c_p. *Technometrics*, 15:661–675, 1973.

[84] S. MANAY, D. CREMERS et B.W. HONG : Integral Invariants for Shape Matching. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 1602–1618, 2006.

[85] D.J. MARCHETTE, C.E. PRIEBE, G.W. ROGERS et J.L. SOLKA : Filtered kernel estimation. Rapport technique, Naval Surface Warfare Center, Virginia, Australia, 1994.

[86] D.W. MARQUARDT : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math*, 11(2):431–441, 1963.

[87] J.S. MARRON : *A personal view of smoothing and statistics ; Book Chapter : In W.Hardle and M.G.Schimek (Eds.), Statistical Theory and Computational Aspects of Smoothing*. Physica-Verlag, Heidelberg, 1996.

[88] P. MEER, E.S. BAUGHTER et A.P. ROSENFELD : Frequency domain analysis and synthesis of image pyramid generating kernels. *IEEE Transactions on Pattern*

Analysis and Machine Intelligence, 9(4):512–522, 1987.

[89] D. MUMFORD et D.M.J. SHAH : Boundary detection by minimizing functionals. *In Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco*, pages 22–26, 1985.

[90] E.A. NARADAYA : On estimating regression. *Theor. Probab. Appl.*, 9:141–142, 1964.

[91] J. NOCEDAL et S.J. WRIGHT : *Numerical optimization*. Springer Verlag, New York, 1999.

[92] M.F. O'BRIEN, T.R.KUKLO, K.M. BLANKE et L.G. LENKE : Spinal Deformity Study Group Radiographic Measurement Manual. *Medtronic Sofamor Danek, USA*, 2004.

[93] S. OSHER et L. RUDIN : Feature orientation image enhancement using shock filters. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(4):919–940, 1990.

[94] S.J. OSHER et J.A. SETHIAN : Fronts propagation with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1):12–49, 1988.

[95] N. OTSU : A threshold selection method from grey-level histograms. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, 9:62–66, 1978.

[96] N. PARAGIOS, Y. CHEN et O. FAUGERAS : *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*. Springer, 2006.

[97] P. PERISTERA et A. KOSTAKI : An evaluation of the performance of kernel estimators for graduating mortality data. *Journal of Population Research*, 22(2): 185–197, 2005.

[98] P. PERONA et J. MALIK : Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *Pattern Analysis and Machine Intelligence IEEE Trans. on*, 12(7):629–639, 1990.

[99] C. PRIEBE et D. MARCHETTE : Alternating kernel and mixture density estimatescomputational. *Computational Statistics and Data Analysis*, 35:43–65, 2000.

[100] L. REMAKI et M. CHERIET : Kcs : A new kernel family with compact support in scale space : Formulation and impact. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(6):970–981, 2000.

[101] L. REMAKI et M. CHERIET : Enhanced and restored signals as a generalized solution for shock filter models. part i-existance and uniqueness result of the cauchy problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 279(1):189–209, 2003.

[102] L. REMAKI et M. CHERIET : Enhanced and restored signals as a generalized solution for shock filter models. part ii - numerical study. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 279(2):398–417, 2003.

[103] B. ROSENHAHN, T. BROX, D. CREMERS et H.P. SEIDEL : A comparison of shape matching methods for contour based pose estimation. *Combinatorial Image Analysis, LNCS*, 4040:263–276, 2006.

[104] P.J. ROUSSEEUW et A.M. LEROY : *Robust regression and outlier detection.* Publisher :Wiley, 1986.

[105] J.J. ROUSSELLES, N. VINCENTM et N. VERBEKE : Generic Algorithm to Set Active Contour. *In 10th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns CAIP'2003*, pages 345–352, 2003.

[106] M. ROUSSON et N. PARAGIOS : Shape priors for level set representations. *In Proc. of the Europ. Conf. on Comp. Vis*, volume 2351, pages 78–92. Springer, 2002.

[107] L.I. RUDIN, S. OSHER et E. FATEMI : Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60(1-4):259–268, 1992.

[108] D. RUPPERT, S.J. SHEATHER et M.P. WAND : An effective bandwidth selector for local least squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 90:1257–1270, 1995.

[109] S. SARYAZDI et M. CHERIET : PKCS : A Polynomial Kernel Family With Compact Support for Scale-Space Image Processing. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 16(9):2299–2308, 2007.

[110] C. SCOTT et R. NOWAK : Robust Contour Matching via the Order Preserving Assignment Problem. *IEEE Trans. on Image Processing*, 15(7):1831–1838, 2006.

[111] I.W. SELESNICK, R.G. BARANIUK et N.C. KINGSBURY : The dual-tree complex wavelet transform. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 22(6):123–151, 2005.

[112] L. SENDUR et I.W. SELESNICK : Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(11):2744–2756, 2002.

[113] J. SHEN : Inpainting and the fundamental problem of image processing. *SIAM News*, 36(5):1–4, 2003.

[114] B.W. SILVERMAN : *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Monogr. on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1986.

[115] M. SINGH et N. AHUJA : Regression based bandwidth selection for segmentation using parzen windows. *In Proceedings of the 9th IEEE Inter. Conf. on Computer Vision*, pages 2–9. IEEE Computer Society Press, 2003.

[116] S. SMITH et J. BRADY : Susan-a new approach to low level image processing. *International Journal of Computer Vision*, 23(1):45–78, 1997.

[117] A. SRIVASTAVA et W. MIO : Some approaches to shape analysis. *In Proc. 12th Europena Conference on Signal Processing (EUSIPCO)*, pages 357–363.

[118] J.L. STARCK, E.J. CANDES et D.L. DONOHO : The curvelet transform for image denoising. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 11(6):670–684, 2002.

[119] I.A. STOKES : Three-dimensional terminology of spinal deformity. A report presented to the Scoliosis Research Society by the Scoliosis Research Society Working Group on 3-D terminology of spinal deformity. *Spine*, 19(2):236–48, 1994.

[120] B. SUMENGEN et B.S. MANJUNATH : Graph Partitioning Active Contours (GPAC) for Image Segmentation. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 509–521, 2006.

[121] J. SUN : Kernel smoothing estimation of gdp growth and inflation rate in finland : A nonparametric approach. Rapport technique, Working paper, Department of Economics, Iowa State University, 2006.

[122] H. TAKEDA, S. FARSIU et P. MILANFAR : Kernel regression for image processing and reconstruction. *IEEE Trans. on Image Processing*, 16(2):349–366, 2007.

[123] G.R. TERREL et D.W. SCOTT : Variable kernel density estimation. *Annals of Statistics*, 20:1236–1265, 1992.

[124] C. TOMASI et R. MANDUCHI : Bilateral filtering for gray and color images. *In Proceedings of the 9th IEEE Inter. Conf. on Computer Vision*, pages 839–846. IEEE Computer Society Press, 1998.

[125] A. TSAI, A. YEZZI et A.S. WILLSKY : Curve evolution implementation of the Mumford-Shah functional forimage segmentation, denoising, interpolation, and

magnification. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(8):1169–1186, 2001.

[126] R. van der BOOMGAARD et J. van de WEIJER : Robust estimation of orientation for texture analysis. *In Proc. Second International Workshop on Texture Analysis and Synthesis*. IEEE Computer Society Conference on, 2002.

[127] L.A. VESE et T.F. CHAN : A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):271–293, 2002.

[128] M. WAND et M. JONES : *Kernel Smoothing*. Publisher : Chapman & Hall, 1995.

[129] G.Q. WEI, J.Z. QIAN et H. SCHRAMM : Generalized Dynamic Programming Approaches for Object Detection : Detecting Spine Boundaries and Vertebra Endplates. *In Proc. Computer Vision and Pattern Recongition*, pages 954–959, 2001.

[130] J. WEICKERT : *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. ECMI Series. Teubner-Verlag, 1998.

[131] J. WEICKERT : Coherence-enhancing shock filters. *In B. Michaelis, G. Krell (Eds.) : Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science*, 2781:1–8, 2003.

[132] J. WEICKERT et H. Hagen (EDS.) : *Visualization and Processing of Tensor Fields, (Mathematics & visualization)*. Springer, 2006.

[133] J. WEICKERT et C. SCHNÖRR : Pde-based preprocessing of medical images. Rapport technique, technical Report 8/2000, computer science series, CVGPR Group, 2006.

[134] A.P. WITKIN : Scale space filtering. *Readings in Computer Vision : Issues, Problems, Principles, and Paradigms*, pages 329–332, 1987.

[135] S. WOLD : Estimation of activation parameters from one kinetic experiment (varytemp method). error analysis and revised computer program. *Acta. Chem. Scand*, 25:336–339, 1971.

[136] X.XU, D.J.LEE, S.ANTANI et L.R.LONG : Pre-Indexing for Fast Partial Shape Matching of Vertebrae Images. *In Proc 19th International Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS 2006)*, pages 105–110, 2006.

[137] L. YAROSLAVSKY : *Digital Picture Processing- An introduction*. Springer Verlag, 1985.