

Modélisation du contact avec microglissement dans les cannelures désalignées

par

Paul MORAND

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE
LA MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE AVEC MÉMOIRE
M. Sc. A.

MONTREAL, LE 21/07/2026

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC



Paul MORAND, 2026



Cette [licence Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de créditer l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

PRÉSENTATION DU JURY

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Raynald Guilbault, directeur de mémoire
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Luc Amar, codirecteur de mémoire
Invité chercheur à l'École de technologie supérieure

M. Tan Pham, président du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Noël Brunetière, membre du jury
Institut Pprime de Poitiers

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 06/07/2026

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de recherche, Raynald GUILBAULT, professeur à l'École de technologie supérieure, pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce sujet, pour la rigueur et la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de ce travail. Tout ce travail n'aurait pu voir le jour sans son expertise technique et son soutien. Son accueil, son écoute et ses conseils m'ont également grandement aidé à m'acclimater à ce changement de culture.

Mes remerciements vont également à Luc AMAR, Louis BERGER et Corentin HOUYERE, chercheurs et ingénieurs au Centre technique des industries mécaniques (CETIM), pour le suivi régulier de l'avancement de ce projet, leurs réponses à mes questionnements et leur expertise sur la problématique industrielle des cannelures. Je remercie de manière plus générale le CETIM pour le soutien financier accordé à ce projet, sans lequel cette recherche n'aurait pu être menée à son terme.

J'aimerais porter une attention particulière à Luc AMAR, qui de par sa présence à l'École de technologie supérieure en tant que chercheur invité, a continué de suivre le projet. Les connaissances qu'il m'a apportées sur le plan technique ainsi que la rigueur et la méthodologie qu'il a su m'apporter m'ont permis de réaliser ce mémoire. Je retiens également tous les moments qu'il m'a accordés pour discuter des difficultés rencontrées mais aussi de mon insertion dans le monde du travail.

J'aimerais apporter un remerciement tout particulier à Tom JAULIN, collègue de bureau qui travaille également sur un sujet du CETIM avec Raynald GUILBAULT. J'ai pu travailler en collaboration avec lui tout au long de ces deux années, je le remercie pour le soutien quotidien et tous les moments que nous avons partagés. Merci d'avoir rendu les journées de bureau plus agréables.

VI

Je suis également reconnaissant envers mon école d'origine, les Arts et Métiers, qui m'a permis de réaliser ce double diplôme ainsi qu'envers l'École de technologie supérieure pour m'avoir accueilli.

J'aimerais ensuite remercier Tan PHAM, professeur à l'École de technologie supérieure, et Noël BRUNETIERE, professeur à l'Institut Pprime de Poitiers, qui m'honorent par leur présence respective en tant que président du jury et membre de celui-ci.

Une pensée également à Jason DAI dont l'implication et les travaux de stage sur les conditions limites sont venus enrichir ce mémoire.

J'aimerais également remercier les colocataires que j'ai eus au cours de ces deux années ainsi que toutes les personnes que j'ai pu rencontrer à Montréal qui ont permis de faire de ce double diplôme une magnifique expérience de vie.

Une pensée particulière à Télia pour son écoute et son soutien, notamment durant cette période intense de rédaction.

Mes derniers remerciements iront à ma famille, tout particulièrement à mes parents, Chrystel et Fabrice, ainsi qu'à ma sœur Lise, qui m'ont encouragé dans cette démarche et qui ont fait preuve d'un soutien inconditionnel tout au long de ces années d'études.

Modélisation du contact avec microglissement dans les cannelures désalignéesPaul MORAND

RÉSUMÉ

Les liaisons cannelées constituent un moyen largement répandu de transmission du couple dans les systèmes mécaniques industriels et présentent l'avantage d'autoriser un coulisement axial relatif entre l'arbre et le moyeu. En service, un désalignement angulaire ou radial entre les axes est quasiment inévitable et concentre la charge à l'extrémité des dents, ce qui accélère les mécanismes de dégradation de surface tels que le fretting et l'usure. La géométrie conforme des cannelures rend la théorie de Hertz inadaptée à la prédiction de la pression de contact, et la simulation par éléments finis, bien qu'elle constitue la méthode de référence, reste trop coûteuse en temps de calcul pour une démarche paramétrique sur un grand nombre de configurations.

L'objectif de ce mémoire est de développer un outil numérique rapide et précis pour la prédiction des pressions de contact et la localisation des zones exposées au fretting dans les cannelures désalignées. L'approche retenue repose sur un algorithme semi-analytique de contact basé sur la théorie de Boussinesq. Celle-ci est adaptée au contact conforme par l'introduction d'une correction des effets de bord liés à l'hypothèse de demi-espace, et complétée par la formulation de Cerruti afin de prendre en compte les efforts tangentiels de frottement. Les trois sources de déformation qui contribuent au contact sont modélisées en parallèle. Un ensemble de réseaux de neurones artificiels, entraîné sur une base de données issue de simulations éléments finis, est utilisé en substitution aux calculs directs de flexion, de torsion, de cisaillement et de compression des dents et permet de réduire ainsi significativement le temps de calcul. La torsion globale de l'arbre et du moyeu est traitée par une approche de résistance des matériaux. La prédiction du fretting est obtenue par l'application locale d'une approximation de la loi d'Archard, ce qui fournit une cartographie comparative des zones de la dent les plus exposées sous un chargement donné.

La validation de l'algorithme est réalisée par comparaison avec deux cas distincts issus de la littérature. Pour chacune de ces configurations, l'algorithme retrouve les caractéristiques essentielles de la littérature, ceci permettant de justifier sa validité. L'outil développé constitue ainsi une alternative semi-analytique plus rapide que la simulation par éléments finis pour la prédiction du champ de pression de contact, de champ de déplacement et pour la cartographie de fretting dans les cannelures désalignées. Sa rapidité lui permet d'être exploitable dans une démarche paramétrique de dimensionnement et d'évaluation de configurations.

Mots-clés : cannelures, désalignement, contact conforme, pression de contact, algorithme semi-analytique, Boussinesq, Cerruti, fretting, usure, Archard, réseau de neurones artificiels

Contact modelling with micro-slip in misaligned spline couplings

Paul MORAND

ABSTRACT

Spline couplings are widely used in industrial mechanical systems to transmit torque while allowing relative axial motion between the shaft and the hub. In service, angular or parallel misalignment between the axes is virtually unavoidable. Such misalignment concentrates the load at the ends of the engaged teeth, thereby accelerating surface degradation mechanisms such as fretting and wear. The conforming geometry of spline teeth makes Hertz contact theory unsuited to the prediction of the contact pressure, and although the finite element method remains the reference approach for such problems, its computational cost is prohibitive for parametric studies covering a large number of configurations.

The objective of this work is to develop a fast and accurate numerical model for the prediction of the contact pressure distribution and the localization of fretting-prone regions in misaligned spline couplings. The proposed approach is based on a semi-analytical contact algorithm formulated on Boussinesq's theory. This formulation is adapted to conforming contact through the introduction of a correction for the edge effects associated with the half-space assumption. Cerruti's formulation is incorporated to account for the tangential friction tractions. The three sources of deformation contributing to the contact are modelled in parallel. A set of artificial neural networks, trained on a database of finite element simulations, is used in place of the direct evaluation of the tooth bending, torsion, shear and compression contributions, significantly reducing the computation time. The global torsion of the shaft and of the hub is treated through a classical beam-theory formulation. Fretting prediction is then obtained by applying an approximation of the Archard's law locally, which provides a comparative map of the regions of the tooth most exposed under a given load.

The validation of the algorithm is performed through comparison with two distinct cases from the literature. For each of these configurations, the algorithm successfully reproduces the essential features reported in the literature, thereby demonstrating its validity. Consequently, the developed tool provides a faster semi-analytical alternative to the finite element method for predicting the contact pressure and displacement fields, as well as for mapping fretting in misaligned spline couplings. Its computational efficiency makes it highly suitable for parametric sizing studies and the evaluation of various configurations.

Keywords: splines, misalignment, conforming contact, contact pressure, semi-analytical algorithm, Boussinesq, Cerruti, fretting, wear, Archard, artificial neural network

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 Revue de littérature	5
1.1 Présentation et géométrie des liaisons cannelées.....	5
1.1.1 Profils de denture	6
1.1.2 Géométrie et normalisation	6
1.1.3 Les Répartition de la charge entre les dents	7
1.1.4 Dents droites et bombé longitudinal.....	8
1.2 Mécanismes de dégradation des flancs de cannelures	9
1.2.1 Effet du fretting	9
1.2.2 Effet du micro-glissement	11
1.2.3 Effets du désalignement angulaire	11
1.2.4 Lubrification et protection contre l'usure.....	12
1.2.5 Fatigue et interaction fretting-fatigue.....	13
1.2.6 Comportement dynamique des cannelures désalignées	14
1.3 Modélisation du contact dans les liaisons cannelées	14
1.3.1 Contact conforme : limites de la théorie de Hertz.....	15
1.3.2 Modèles de contact développés pour les cannelures	16
1.4 Réseaux de neurones comme modèles de substitution	17
1.5 Conclusion	19
CHAPITRE 2 Algorithme semi-analytique de contact.....	25
2.1 Formulation fondée sur la théorie de Boussinesq	26
2.1.1 Architecture de l'algorithme	26
2.1.2 Extension au contact conforme	32
2.1.3 Validation des équations de Paul et Hashemi	35
2.2 Adaptations aux cannelures	36
2.2.1 Repère cylindrique et équilibre en couple de cannelures alignées.....	37
2.2.2 Génération de la géométrie par taillage.....	39
2.2.3 Modélisation du désalignement.....	45

2.3	Correction des effets de bord	49
2.4	Efforts tangentiels et formulation de Cerruti	57
2.5	Conclusion	60
CHAPITRE 3 Modélisation des déformations structurales		61
3.1	Modélisation de la déformation des dents	62
3.1.1	Constitution d'une base de données éléments finis	63
3.1.1.1	Choix des paramètres et plan d'expérience	63
3.1.1.2	Modèle géométrique réduit	69
3.1.1.3	Mise en œuvre des simulations	73
3.1.2	Réseau de neurones de substitution	74
3.1.3	Intégration des déformations de dent à l'algorithme	77
3.2	Modélisation de l'arbre et de la jante	80
3.3	Conclusion	86
CHAPITRE 4 Intégration de l'usure par fretting		87
4.1	Application locale de la loi d'Archard	87
4.2	Cartographie de l'usure relative	88
4.3	Conclusion	96
CHAPITRE 5 Validation par comparaison à la littérature		99
5.1	Cannelure avec correction de profil	99
5.2	Cannelure bombée à axes alignés	103
5.3	Efficacité numérique de l'algorithme	112
5.4	Conclusion	114
CONCLUSION		115
RECOMMANDATIONS		117
ANNEXE I Précision des réseaux de neurones pour la déformation des dents		119
ANNEXE II Précision des équations empiriques pour la torsion des arbres		125
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES		127

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1 Comparaison des solutions existantes pour chacun des phénomènes physiques.....	21
Tableau 3.1 Valeurs prises par les paramètres.....	67
Tableau 3.2 Impact du rayon sur la fonction d'influence	84
Tableau 3.3 Impact du rayon sur le déplacement	84
Tableau 5.1 Comparaison des grandeurs de contact aux deux couples étudiés.....	105
Tableau 5.2 Comparaison des grandeurs de contact obtenus par le modèle développé aux deux couples étudiés.....	106
Tableau 5.3 Comparaison des temps de simulation.....	113

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1 Phénomènes mis en jeu	20
Figure 2.1 Définition du contact	28
Figure 2.2 Mise à jour de l'approche rigide.....	30
Figure 2.3 Diagramme de l'algorithme proposé par Hartnett.....	31
Figure 2.4 Mise à jour de la fonction d'influence.....	34
Figure 2.5 Géométrie des cylindres	35
Figure 2.6 Champ de pression du contact entre deux cylindres	36
Figure 2.7 Définition des distances initiales	37
Figure 2.8 Projection des forces générées pour calculer le couple	39
Figure 2.9 Obtention d'une cannelure par taillage.....	40
Figure 2.10 Mise en équation du taillage.....	42
Figure 2.11 Cannelure mâle obtenue par taillage	43
Figure 2.12 Cannelure femelle obtenue par taillage	43
Figure 2.13 Diamètres des cannelures	45
Figure 2.14 Définition du désalignement.....	46
Figure 2.15 Définition des géométries dans le repère de la dent	47
Figure 2.16 Projection du maillage sur la surface du moyeu.....	47
Figure 2.17 Séparation initiale pour un désalignement de $0,0001 \text{ rad}$	48
Figure 2.18 Géométrie et numérotation des dents utilisées pour les mesures des séparations initiales	49
Figure 2.19 Méthode de suppression des effets de bords par miroir	50
Figure 2.20 Maillage d'une géométrie désalignée	51

Figure 2.21 Miroir latéral de la pièce.....	52
Figure 2.22 Miroir supérieur de la pièce.....	52
Figure 2.23 Zone de maillage	55
Figure 2.24 Réalisation des miroirs	56
Figure 2.25 Champ de pression 3D sans correction à gauche et avec correction à droite.....	57
Figure 2.26 Validation des efforts tangentiels par éléments finis.....	59
Figure 3.1 Définition des rayons.....	65
Figure 3.2 Paramétrage du point d'application d'une force selon l'axe x.....	66
Figure 3.3 Définition des points de mesure de déplacement	66
Figure 3.4 Repères utilisés pour relever les déplacements	68
Figure 3.5 Décomposition de la force normale.....	68
Figure 3.6 Géométries retenues	70
Figure 3.7 Conditions limites appliquées aux simulations	71
Figure 3.8 Effet de l'épaisseur de jante sur l'arbre	72
Figure 3.9 Erreur insérée par la jante sur l'arbre	72
Figure 3.10 Cas particulier des géométries à 6 dents.....	73
Figure 3.11 Maillage de la géométrie	74
Figure 3.12 Architecture du réseau de neurones.....	76
Figure 3.13 Insertion de la déformation des dents dans l'algorithme.....	79
Figure 3.14 Coordonnées utilisées pour la fonction d'influence de torsion.....	81
Figure 3.15 Définition du cylindre équivalent.....	81
Figure 3.16 Définition de la jante équivalente.....	83
Figure 4.1 Champ de pression du cas 1 : désalignement radial	89
Figure 4.2 Champ de glissement du cas 1 : désalignement radial, prédit pour l'arbre	90

Figure 4.3	Champ d'usure du cas 1 : désalignement radial, prédit pour l'arbre	91
Figure 4.4	Coefficient d'énergie disponible pour l'usure lors du cas 1, sur une dent lors d'une révolution complète de l'arbre	92
Figure 4.5	Champ de pression du cas 2 : désalignement angulaire	93
Figure 4.6	Champ de glissement du cas 2 : désalignement angulaire, prédit pour l'arbre...	94
Figure 4.7	Champ d'usure du cas 2 : désalignement angulaire, prédit pour l'arbre	95
Figure 4.8	Coefficient d'énergie disponible pour l'usure lors du cas 2, sur une dent lors d'une révolution complète de l'arbre	96
Figure 5.1	Correction parabolique appliquée sur le rayon du flanc.....	100
Figure 5.2	Profil de dent corrigé	100
Figure 5.3	Champ de pression de la référence selon la longueur de la cannelure (à gauche) et selon la hauteur du flanc (à droite)	101
Figure 5.4	Champs de pression obtenus du modèle développé pour le joint cannelé de la thèse de Hong (2015) et un couple de 2260 Nm	102
Figure 5.5	Correction de la dent par bombé	104
Figure 5.6	Champ de pression de la référence selon la hauteur du flanc (à gauche) et selon la longueur de la cannelure (à droite) pour un couple de 200 Nm	106
Figure 5.7	Champ de pression du modèle développé associé à l'article de Curà et al. (2017) à 200 Nm	107
Figure 5.8	Localisation de l'usure sur le flanc de dent pour la référence.....	108
Figure 5.9	Champ de glissement moyen des dents du modèle développé associé à la référence.....	109
Figure 5.10	Champ d'usure du modèle développé associé à l'article de Curà et al. (2017) à 200 Nm	110
Figure 5.11	Indicateur de l'énergie disponible pour l'usure sur un tour complet.....	111

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ANSI	American National Standards Institute
BS	British Standard
CETIM	Centre Technique des Industries Mécaniques
ÉF	Éléments finis
FEM	Finite Element Method
ISO	International Organization for Standardization
MAPDL	Mechanical Ansys Parametric Design Language
MLP	Multilayer Perceptron (perceptron multicouches)
ReLU	Rectified Linear Unit
RDM	Résistance des matériaux
TTS	Structure tribologiquement transformée

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

A	Dimension axiale du maillage [mm]
A_{ip}	Aire de la cellule (i, p) [mm ²]
$a,$	Demi-dimension axiale d'une cellule [mm]
B	Dimension radiale du maillage [mm]
b	Demi-dimension radiale d'une cellule [mm]
C_{ip}	Couple élémentaire généré par la cellule (i, p) [Nm]
c	Coefficient de creux de dent
D	Distance parcourue par la crémaillère lors du taillage [mm]
D_{ee}	Diamètres de tête de dent de l'arbre [mm]
D_{ei}	Diamètres de creux de dent du moyeu [mm]
D_{ie}	Diamètres de creux de dent de l'arbre [mm]
D_{ii}	Diamètres de tête de dent du moyeu [mm]
E	Module de Young [MPa]
F	Force normale globale [N]
F_n	Force élémentaire normale à la surface [N]
F_c	Projection orthoradiale de F_n [N]
F_{tot}	Résultante des forces projetées sur l'ensemble du maillage [N]
$f_{ip,kj}$	Fonction d'influence normale (Boussinesq) [mm/MPa]
$\tilde{f}_{ip,kj}$	Fonction d'influence normale (Paul et Hashemi) [mm/MPa]
G	Module de cisaillement [MPa]
h	Coefficient de saillie de dent

h_w	Profondeur d'usure locale [μm]
K	Constante de la fonction d'influence définie en équation (2.2) [MPa^{-1}]
k_w	Coefficient d'usure d'Archard [MPa^{-1}]
k_{relax}	Coefficient de sous-relaxation
L	Longueur axiale de la cannelure [mm]
T	Couple transmis [Nm]
m	Module [mm/dent]
P_{ip}	Pression sur la cellule (i, p) [MPa]
P	Pression de contact [MPa]
Q_x	Tractions tangentielles selon x [MPa]
Q_y	Tractions tangentielles selon y [MPa]
R^2	Coefficient de détermination
$R_{\text{eq-a}}$	Rayon équivalent en torsion de l'arbre [mm]
$R_{\text{eq-m}}$	Rayon équivalent en torsion du moyeu [mm]
R_j	Rayon extérieur de la jante du moyeu [mm]
R_m	Rayon moyen géométrique [mm]
R_p	Rayon primitif [mm]
$R_{p0,2}$	Limite d'élasticité conventionnelle à 0,2 % [MPa]
R_{pc}	Paramètre de rugosité – densité de pics [mm^{-1}]
R_{pied}	Rayon de pied de dent [mm]
R_{sk}	Paramètre de rugosité – asymétrie (skewness)
$R_{\text{tête}}$	Rayon de tête de dent [mm]

$R_{\text{troch-dév}}$	Rayon de frontière trochoïde/développante [mm]
R_1	Premier paramètre de Ruiz ($\tau * \delta$) [MPa· μm]
t	Déport de denture
t_{dent}	Matrice d'influence de déformation des dents [mm/MPa]
t_{torsion}	Matrice d'influence de torsion d'arbre/moyeu [mm/MPa]
t_x, t_y, t_z	Translations relatives moyeu/arbre respectivement selon $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$ [mm]
U_x, U_y, U_z	Composantes du déplacement respectivement selon $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$ [mm]
$u_{x_{ipkj}}$	Fonctions d'influence tangentielles pour une traction selon $\vec{x}$ [mm/MPa]
$u_{y_{ipkj}}$	Fonctions d'influence tangentielles pour une traction selon $\vec{y}$ [mm/MPa]
w_{ip}	Déplacement normal de la cellule (i, p) [mm]
X	Différences de coordonnées entre deux cellules selon $\vec{x}$ [mm]
Y	Différences de coordonnées entre deux cellules selon $\vec{y}$ [mm]
Z	Différences de coordonnées entre deux cellules selon $\vec{z}$ [mm]
z	Nombre de dents
z_i	Séparation initiale du solide i avec le plan de contact [mm]
α	Approche rigide (angle de rotation rigide) [rad]
α_D	Angle de pression [°]
β_{kj}	Angle d'orientation du glissement de la cellule (k, j) [rad]
γ	Angle parcouru par l'arbre lors du taillage [rad]
δ	Amplitude du glissement relatif [μm]
θ	Angle de désalignement [rad]
λ_D	Position axiale normalisée du point de mesure du déplacement

λ_F	Position axiale normalisée du point d'application de l'effort
μ	Coefficient de frottement
ν	Coefficient de Poisson
ρ_D	Position radiale normalisée (point d'application de l'effort / point de mesure)
ρ_F	Position radiale normalisée (point d'application de l'effort / point de mesure)
ρ_f	Coefficient du rayon de congé d'outil
τ	Contrainte tangentielle [MPa]
ψ	Facteur correcteur de quart-espace

INTRODUCTION

Les liaisons cannelées constituent un moyen de transmission du couple largement répandu dans les systèmes mécaniques industriels, que ce soit dans le domaine aéronautique, automobile ou dans les équipements de travaux. Elles permettent de transmettre des couples importants tout en autorisant un coulisement axial relatif entre l'arbre et le moyeu, ce qui en fait une solution privilégiée lorsque des contraintes d'encombrement sévères ou des démontages fréquents sont imposés. Leur robustesse apparente cache par ailleurs un dimensionnement complexe, dont la difficulté principale réside dans la prédiction de la répartition des pressions de contact entre les dents en prise du fait des géométries non parfaites et des conditions d'utilisation rendant les liaisons non alignées.

En service, un désalignement angulaire ou radial entre les axes de l'arbre et du moyeu est quasiment inévitable, il peut provenir de la déformation de la structure sous charge, d'un écart d'alignement lors de l'assemblage ou bien de l'usure progressive de l'accouplement. Ce désalignement concentre la charge sur une extrémité des dents, ce phénomène augmente localement les pressions de contact de manière significative. Le désalignement génère par ailleurs un glissement périodique lors de la rotation qui, couplé à des pressions élevées, génère des frottements qui accélèrent les mécanismes de dégradation de surface tels que le fretting et l'usure. La connaissance de ces pressions est donc indispensable pour dimensionner correctement l'accouplement et estimer sa durée de vie.

Les méthodes analytiques classiques de dimensionnement des cannelures s'appuient sur la théorie du contact de Hertz, dont l'une des hypothèses suppose des surfaces convexes en contact sur une zone de petite dimension devant les rayons de courbure des corps. Or les cannelures présentent un contact conforme : la dent de l'arbre et celle du moyeu partagent une courbure similaire, ce qui génère une zone de contact étendue. Les approches simplifiées ne permettent pas d'évaluer fidèlement les concentrations de contraintes présentes avec le désalignement des axes. C'est pourquoi la simulation par éléments finis est aujourd'hui la méthode de référence pour résoudre ce type de problème avec précision. Elle permet de

modéliser fidèlement la géométrie des dents et de calculer les distributions de pression pour un chargement donné. Toutefois, les temps de calcul nécessaires aux simulations rendent cette méthode peu adaptée à une démarche paramétrique où un grand nombre de configurations géométriques doivent être évaluées.

Le présent mémoire s'inscrit dans un projet de recherche mené en collaboration avec le Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM), dont l'objectif est de développer un outil numérique rapide et précis pour la prédiction des pressions de contact dans les cannelures désalignées. L'approche retenue repose sur un algorithme de contact semi-analytique adapté au contact conforme d'un espace semi-infini formulé à partir des fonctions d'influence élastique de Boussinesq et de Cerruti. Cet algorithme intègre une correction des effets de bord provenant des hypothèses de demi-espaces infinis sur lesquelles s'appuie la formulation théorique. Il prend également en compte l'ensemble des déformations des éléments contribuant au contact : la déformation globale (flexion, torsion, cisaillement et compression) des dents de l'arbre et du moyeu, ainsi que la torsion globale de ces deux éléments. Afin de rendre compte des déplacements liés à la déformation globale des dents, un ensemble de réseaux de neurones est entraîné sur une base de données générée par éléments finis (EF) et est utilisé en substitution à ceux-ci, permettant une accélération significative de l'algorithme.

Les travaux présentés dans ce mémoire se concentrent sur la modélisation quasi-statique du contact dans les cannelures désalignées angulairement et radialement. Les phénomènes dynamiques et les mécanismes d'usure à long terme sont hors du périmètre de cette étude, bien que le modèle développé constitue une base nécessaire à leur traitement futur. L'algorithme est validé par comparaison avec des résultats issus de la littérature.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres. Le premier chapitre constitue la revue de la littérature. On y présente le contexte des liaisons cannelées, les mécanismes de dégradation qui leur sont associés (fretting, usure et effets du désalignement), ainsi que les différentes approches de modélisation du contact disponibles dans la littérature, des méthodes analytiques aux algorithmes semi-analytiques. Le deuxième chapitre décrit l'algorithme de contact

développé ainsi que les adaptations nécessaires à la géométrie conforme des cannelures. Le troisième chapitre présente les travaux de modélisation numérique. Il décrit successivement la construction de la base de données de simulations éléments finis, le développement et l'entraînement des réseaux de neurones pour la prédiction de la déformation globale des dents, et enfin la modélisation de la torsion globale de l'arbre et du moyeu. Le quatrième chapitre propose une cartographie de l'usure à l'aide des sorties de l'algorithme tandis que le cinquième chapitre présente la validation de l'algorithme de contact développé, en confrontant les résultats du modèle à des résultats issus de la littérature.

CHAPITRE 1

Revue de littérature

Ce chapitre dresse l'état de l'art sur les liaisons cannelées désalignées et les méthodes numériques nécessaires à leur modélisation. Le caractère conforme du contact entre flancs en développante, conjugué à la géométrie tridimensionnelle imposée par le désalignement, exige des approches spécifiques pour prédire les grandeurs qui pilotent l'endommagement par fretting. La revue identifie d'abord les caractéristiques géométriques et les mécanismes de dégradation propres à ce cas d'étude, puis examine les méthodes de modélisation du contact ainsi que les modèles de substitution par réseaux de neurones permettant d'intégrer les déformations structurelles des dents dans un cadre paramétrique.

1.1 Présentation et géométrie des liaisons cannelées

Les liaisons cannelées sont des composants mécaniques permettant de transmettre un couple entre un arbre et un moyeu tout en autorisant un coulisement axial relatif entre les deux éléments. Ceci en fait une solution privilégiée dans les systèmes de transmission où des contraintes d'encombrement sévères, des démontages fréquents ou des mouvements axiaux en service sont imposés (Medina & Olver, 2002). La grande surface de contact répartie sur l'ensemble des dents leur confère une capacité de charge élevée pour un encombrement minimal, ainsi qu'une excellente précision de centrage (Xiao, Xu, Chen, & Zhang, 2023). Ces caractéristiques expliquent leur présence dans des secteurs aussi variés que l'aéronautique, l'automobile, le ferroviaire et les turbomachines industrielles.

En fonctionnement, les cannelures sont soumises à des chargements mécaniques complexes et combinés incluant le couple de transmission, des efforts radiaux, des moments de flexion et, dans les applications aéronautiques, des charges de choc, de résonance et des fluctuations cycliques du couple (Sum, Leen, & Williams, 2003 ; Zhao et al., 2023). La répartition des efforts entre les dents de la cannelure constitue un problème intrinsèquement tridimensionnel ce qui rend le dimensionnement de cette liaison nettement plus complexe. La prédiction précise

des pressions de contact sur les flancs des dents est indispensable à l'évaluation de la durée de vie de la liaison. Cette prédiction exige une modélisation qui tient compte à la fois de la géométrie exacte des surfaces en contact et des déformations structurelles de l'ensemble arbre-moyeu.

1.1.1 Profils de denture

Quatre types de cannelures se distinguent selon le profil des dents : à profil rectangulaire, triangulaire, en arc de cercle et à développante de cercle (Zhao et al., 2023). Le profil rectangulaire, également nommé dentelure, est réservé aux liaisons statiques ou à faibles charges, le centrage étant assuré par le diamètre intérieur. Le profil triangulaire s'applique aux faibles diamètres sous chargement léger. Le profil en arc de cercle offre une surface de contact et une épaisseur de dent supérieures à celles de la développante, ce qui réduit les concentrations de contraintes et convient aux cas de forts désalignements.

Le profil en développante de cercle s'est toutefois imposé comme standard dans les applications à charges élevées. La géométrie en développante, génère une composante radiale à la surface de contact qui assure l'auto-centrage de l'arbre dans le moyeu et tend à répartir uniformément le couple entre les dents en prise (Hong, 2015 ; Zhao et al., 2023). Les cannelures à développante peuvent être réalisées à dents droites ou à dents hélicoïdales. Les dents hélicoïdales transforment la liaison glissière en une liaison hélicoïdale ce qui introduit par ailleurs un effort axial sous charge. Le travail réalisé dans ce mémoire se limite aux cannelures à dents droites qui compose le cœur de la recherche nécessaire par le CETIM et qui pourra par la suite permettre de servir de base de travail pour les dents hélicoïdales.

1.1.2 Géométrie et normalisation

La géométrie des cannelures à développante est régie par la norme ISO 4156, publiée en 1981 (« ISO 4156:1981 Straight cylindrical involute splines — Metric module, side fit — Generalities, dimensions and inspection », 1981) et fondée sur le module métrique m . Cette norme remplace les standards impériaux antérieurs (ANSI B92.1-1970 et BS 3550-1963) qui

étaient fondés sur le pas diamétral et qui ne permettaient pas d'assurer l'interchangeabilité avec les composants métriques (Finney, 1994). La norme ISO 4156 définit quatre classes de tolérances (de 4H/h à 7H/h) et introduit un ajustement effectif qui intègre les écarts de profil, d'espacement, de pas, de parallélisme et d'alignement dans le calcul du jeu fonctionnel. Ces tolérances plus strictes impliquent un contrôle qualité renforcé lors de la fabrication mais permettent de garantir une répartition de charge plus prévisible (Finney, 1994).

Les paramètres géométriques fondamentaux qui définissent une cannelure à développante de cercle sont le module m , le nombre de dents z , l'angle de pression α_D et la longueur axiale L . Ces paramètres définissent la forme du flanc actif ainsi que les cercles de référence de la liaison qui sont le rayon primitif, le rayon de tête et le rayon de pied. Le flanc des dents se compose d'une développante de cercle dans la zone de contact et d'une trochoïde au pied de dent. La hauteur de dent et la profondeur de creux sont définies par des coefficients de saillie et de creux standardisés qui sont relatifs au module. Le jeu fonctionnel entre arbre et moyeu est contrôlé par les tolérances d'épaisseur de dent prescrites par la norme.

1.1.3 Les Répartition de la charge entre les dents

En théorie, toutes les dents d'une cannelure partagent équitablement la charge transmise. En pratique, cette hypothèse est rarement vérifiée. Les variations de fabrication (écarts de pas, de profil et d'espacement des dents) engendrent des jeux non uniformes entre les dents de l'arbre et du moyeu. Chase, Sorensen et DeCaires (2010) ont établi, par une analyse statistique couplée à des simulations éléments finis, que les dents s'engagent séquentiellement. La paire présentant le plus faible jeu s'engage en premier et se fléchit sous charge jusqu'à ce que la paire suivante entre en contact, et ainsi de suite. Ce modèle prédit que seule une fraction des dents participe réellement à la transmission du couple pour un niveau de charge donné, ce qui augmente fortement la charge sur chaque dent engagée par rapport à la valeur moyenne théorique.

Tjernberg (2001) a quantifié plus précisément l'impact des écarts de pas sur la durée de vie en fatigue, son étude a été menée par modélisation éléments finis et essais de fatigue sur des

cannelures trempées par induction. Il a montré que la charge maximale supportée par une dent peut atteindre 3,5 à 5 fois la charge moyenne théorique lorsque les écarts de pas sont pris en compte. Ceci réduit la durée de vie en fatigue au tiers ou à la moitié de celle d'une cannelure à pas idéal. Barrot, Paredes et Sartor (2009) ont développé des modèles analytiques de poinçons qui permettent de calculer la distribution de pression radiale, la rigidité en torsion ainsi que la répartition axiale du couple transmis pour différents cas de chargement. Ils montrent notamment que la distribution axiale du couple influence principalement l'endommagement par fretting sans modifier significativement le facteur de concentration de contraintes en pied de dent. De Vaujany, Guingand et Teixeira Alves (2017) proposent une procédure quasi-statique fondée sur la méthode des coefficients d'influence, calculés grâce à des EF, permettant un calcul rapide du partage de charge en intégrant à la fois les effets de flexion et de contact, ainsi que l'influence des déformations d'arbre et des erreurs de montage sur la distribution de pression, mais dont la résolution ne porte que sur la pression normale. Le glissement et les efforts tangentiels ne sont pas considérés, or, sous désalignement angulaire, le glissement relatif entre les flancs est important et nécessaire à la prédiction de l'endommagement par fretting.

1.1.4 Dents droites et bombé longitudinal

Les cannelures à dents droites assurent un contact s'étendant sur toute la longueur axiale de la dent lorsque les axes de l'arbre et du moyeu sont parfaitement alignés. En présence d'un désalignement angulaire, le contact se concentre à l'une des extrémités axiales de chaque dent, générant des pressions localement très élevées. Les cannelures présentant un profil bombé dans la direction axiale déplacent le centre de la zone de contact vers le milieu de la dent, réduisant ainsi les concentrations de pression aux bords. La valeur du bombé utilisé doit être choisie en fonction du désalignement attendu (Medina & Olver, 2002).

L'efficacité du bombé dépend de son amplitude et du désalignement présent en service. Yuan et al. (2024) ont montré expérimentalement et numériquement que l'amplitude optimale du bombé est liée au désalignement angulaire attendu lors du fonctionnement. Une amplitude de

bombé trop faible ne déplace pas suffisamment le contact, tandis qu'une amplitude trop élevée concentre la pression au centre de la dent dès le régime nominal. Leen, McColl, Ratsimba, et Williams (2003) ont par ailleurs étudié par éléments finis l'effet d'un profil axial modifié, avec un bombé longitudinal, dans une cannelure d'aéronef. Les résultats montrent qu'une telle modification réduit les contraintes de contact aux extrémités de manière importante.

1.2 Mécanismes de dégradation des flancs de cannelures

Les liaisons cannelées sont soumises en service à des phénomènes de dégradation complexes dont la compréhension est indispensable pour prédire leur durée de vie. Le désalignement angulaire entre les axes de l'arbre et du moyeu est le principal facteur aggravant. Il génère un glissement relatif entre les surfaces et favorise les mécanismes d'endommagement de surface présentés dans cette section. Ces mécanismes combinent des effets tribologiques, mécaniques et thermiques dont les interactions rendent le dimensionnement en durée de vie complexe.

1.2.1 Effet du fretting

Le fretting désigne l'endommagement de surface produit par un mouvement oscillatoire de faible amplitude entre deux surfaces en contact sous charge. Dans les cannelures, l'amplitude du glissement relatif entre les flancs de dents est typiquement insuffisante pour évacuer les débris hors de la zone de contact : ceux-ci s'accumulent entre les surfaces et participent activement à leur dégradation par abrasion à trois corps (Newley, 1978). Ce mécanisme se distingue du glissement macroscopique et impose une approche tribologique.

Uhlig (1954) a établi que le fretting provient de deux facteurs, l'oxydation rapide des surfaces métalliques mises à nu par le glissement et l'arrachement de particules. Les débris métalliques produits se convertissent en Fe_2O_3 par fretting secondaire entre particules. Cette oxydation accroît le volume des débris et génère des contraintes locales supplémentaires dans la zone de contact. Ainsi, la cinétique de dégradation est modifiée. Uhlig a proposé une formulation quantitative de la perte de masse par fretting corrosion prenant comme paramètres : la charge, le nombre de cycles, la fréquence et l'amplitude de glissement. Cette formulation fait

apparaître l'amplitude de glissement δ et la contrainte tangentielle τ comme les variables mécaniques liées à l'endommagement.

La température de contact constitue un paramètre supplémentaire influençant la cinétique de fretting. Archard (1959) a simplifié le concept de température flash établie par Blok dans les années 1930 (Blok, 1937a, 1937b), et démontre que celle-ci est atteinte dans une couche superficielle très mince lors du contact glissant. Selon sa simplification, la température dépend principalement de la vitesse relative des surfaces, du coefficient de frottement et des propriétés thermiques des matériaux.

Malgré la complexité de ces mécanismes, la loi d'Archard (1953), $h_w = k_w * F * \delta$, réduit en première approximation la prédiction de l'usure locale à deux grandeurs mécaniques – la force de contact F et l'amplitude de glissement δ – et un coefficient spécifique k_w . Cette formulation constitue néanmoins une simplification : la dureté des matériaux est comprise dans le coefficient k_w qui intègre également l'ensemble des facteurs non mécaniques du contact vu précédemment et n'est pas constant au cours du contact lui-même. Wang et Wahab (2021) complètent les travaux apportés par Sauger et al (2000) sur la structure tribologiquement transformée (TTS) en montrant par simulation numérique que l'usure évolue selon trois phases successives, la première phase est assimilée à du rodage tandis que la seconde est une phase de formation de la TTS, enfin un régime stabilisé qui correspond à la destruction de la TTS et à la génération de débris apparaît. Ainsi, k_w étant lié à l'usure vis-à-vis de l'équation d'Archard, il évolue lui aussi et est alors nul durant les deux premières phases qui correspondent respectivement à des déformations plastiques et à la formation de la TTS et qui toutes deux ne produisent donc pas d'usure. Durant la troisième phase, k_w devient non nul du fait de la création de débris, leur figure 14 décrit son évolution au cours de cette période à partir des résultats expérimentaux obtenus sur leur figure 11. Le fait que k_w évolue différemment selon la géométrie des surfaces en contact met en avant la complexité de sa détermination. Cette évolution est d'autant plus critique en régime de glissement partiel, caractéristique du fretting dans les cannelures puisque la variation de k_w modifie la frontière entre zones de collage et zones de glissement, et déplace ainsi les zones d'usure. Par ailleurs, Ding, McColl

et Leen (2007), mettent en avant de par leur application des éléments finis aux cannelures aéronautiques, que le paramétrage du coefficient de glissement influe grandement sur les valeurs de glissement obtenues et donc sur l'usure obtenue avec l'équation d'Archard.

1.2.2 Effet du micro-glissement

Le micro-glissement désigne le glissement local qui se produit en périphérie de la zone de contact lorsque l'effort tangentiel appliqué est inférieur au seuil de glissement global défini par le critère de Coulomb. Ce phénomène, de nature élastoplastique, est à l'origine du fretting dans les liaisons cannelées. Sellgren et Olofsson (1999) ont montré que le coefficient de frottement n'est pas une constante mais varie selon l'historique de chargement, en particulier lors des inversions de mouvement. Leurs simulations éléments finis qui intègrent une loi de frottement avec micro-glissement, obtiennent des distributions d'effort de frottement différentes de celles obtenues avec la loi de Coulomb classique autant à l'échelle locale que globale. Ainsi les pertes par frottement obtenues sur une surface ondulée avec la loi de Coulomb ne représentent que 48% de celles de leur modèle.

Curà, Mura et Adamo (2017) ont montré expérimentalement avec un banc dédié que le micro-glissement lié à la déflexion des dents chargées produit de l'usure par fretting même en l'absence de désalignement angulaire.

1.2.3 Effets du désalignement angulaire

La distribution de pression de contact dans une cannelure sous désalignement angulaire a été étudiée par Medina et Olver (2002) à l'aide d'un modèle de contact élastostatique avec frottement, distinguant zones de collage et zones de glissement, basé sur la méthode des éléments frontière. Cette étude parcourt un large espace de variables adimensionnelles incluant le module de Young réduit, le nombre de dents, l'angle de pression, le coefficient de frottement, la longueur réduite et l'angle de désalignement. Leur modèle démontre que les dents peuvent se retrouver momentanément sans charge au cours d'une révolution sous certaines combinaisons de paramètres, un phénomène non rapporté jusqu'alors. Par ailleurs, le

désalignement angulaire est un paramètre plus impactant que le couple transmis vis-à-vis de l'usure.

Curà et Mura (2017) ont quantifié expérimentalement sur un banc dédié l'endommagement lié au fretting sur des cannelures à profil bombé, pour des couples variables avec un désalignement angulaire et différentes conditions de lubrification. Le premier paramètre de Ruiz $R_1 = \tau * \delta$, produit de la contrainte tangentielle et de l'amplitude de glissement, est l'indicateur d'endommagement par fretting retenu pour sa relative facilité d'évaluation. Les résultats expérimentaux montrent qu'il n'y a pas d'usure lorsque le désalignement est nul mais que celle-ci augmente fortement avec l'angle de désalignement. Les cartes iso-Ruiz prédisent avec précision les zones endommagées, la forme elliptique obtenue correspond par ailleurs à la géométrie de contact hertzienne, en effet la présence d'un profil bombé rapproche la simulation d'un contact non conforme.

L'endommagement des surfaces par fretting laisse une signature mesurable sur la topographie de surface. Cuffaro, Curà et Mura (2016) ont mené des essais pour des couples et des désalignements différents qui par analyse de variance, ont montré que deux paramètres de rugosité se révèlent représentatifs de l'état d'endommagement : le paramètre R_{pc} et R_{sk} , qui traduisent respectivement le nombre de pics d'aspérités par unité de longueur et l'asymétrie de la distribution des hauteurs de surface. Ces paramètres varient de manière significative avec le désalignement et le couple transmis, cela pourrait donc permettre de mesurer l'endommagement des flancs de manière non destructive.

1.2.4 Lubrification et protection contre l'usure

La lubrification constitue le principal moyen de limitation de l'usure par fretting dans les cannelures. Weatherford, Valtierra et Ku (1968) ont mené une étude expérimentale sur les mécanismes d'usure de cannelures désalignées sous différentes atmosphères et conditions de lubrification, établissant que la protection contre l'usure résulte de l'inhibition de l'oxydation des surfaces métalliques sollicitées. Cette inhibition peut être obtenue par deux moyens, en

excluant physiquement l'oxygène de la zone de contact ou bien chimiquement en utilisant des additifs dans le lubrifiant. Les résultats montrent que la graisse protège les surfaces pendant une période d'induction puis perd ensuite sa capacité à inhiber les réactions d'oxydation. Vient ensuite une usure modérée et continue même en présence d'un film lubrifiant visible. Quant à l'huile qui contient des antioxydants, elle permet de maintenir une protection durable. Newley (1978) a confirmé ce mécanisme chimique en montrant que le taux d'usure par fretting est directement proportionnel à l'activité de l'oxygène dissous dans le lubrifiant, quelle que soit sa viscosité. Ces résultats sont cohérents avec la synthèse de Zhao et al. (2023), qui concluent que les cannelures lubrifiées à l'huile ne présentent pratiquement aucune usure, tandis que les cannelures non lubrifiées ou lubrifiées à la graisse subissent une usure plus rapide.

1.2.5 Fatigue et interaction fretting-fatigue

La fatigue constitue un mode de défaillance complémentaire au fretting dans les cannelures. Leen et al. (2003) ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet d'un chargement en couple en surcharge sur la durée de vie en fatigue d'une cannelure aéronautique à profil en barillet, établissant une corrélation entre les courbes couple-vie et les contraintes prédites par éléments finis. Les résultats confirment que la géométrie de contact à l'extrémité des dents contrôle le comportement en fatigue, et que le profil en barillet permet de déplacer les zones de forte contrainte vers des régions moins critiques.

Ding, Leen, Williams et Shipway (2008) ont modélisé l'interaction entre usure par fretting et fatigue à l'aide d'une méthode incrémentale éléments finis : la redistribution géométrique des surfaces résultant de l'usure est prise en compte à chaque incrément, et ses effets sur les paramètres de fatigue sont évalués sur un modèle 360° à maillage affiné sur une dent. Les fluctuations de couple à haute fréquence, associées au moment fléchissant tournant sont caractéristiques du fonctionnement normal du moteur. Ce mode de fonctionnement induit un glissement partiel qui augmente les dommages par fretting en déplaçant la zone d'amorçage vers l'interface collage-glissement. À l'inverse, les variations de couple à basse fréquence couplées à un chargement axial, typiques des changements de régime moteur, produisent un

glissement grossier qui augmente la surface de contact, réduit la pression de contact et diminue ainsi les dommages par fretting. Les méthodes normalisées de dimensionnement des cannelures surestiment la durée de vie en fatigue par rapport aux prédictions éléments finis du fait d'approximations sur le calcul du champ de contraintes (Curà et al., 2017).

1.2.6 Comportement dynamique des cannelures désalignées

Le désalignement entre les axes de l'arbre et du moyeu affecte également le comportement dynamique de la liaison cannelée. Xiao et al. (2023) ont développé un modèle dynamique non linéaire de cannelure désalignée intégrant les effets d'engrènement liés au désalignement et ont montré que le régime de vibration peut transiter d'un état périodique à un état chaotique avec l'augmentation de la vitesse. Le désalignement avance la vitesse de résonance principale et augmente l'instabilité de la liaison. Huang et al. (2024) ont analysé la vibration auto-entretenue des liaisons cannelées en régime supercritique. Leur modèle éléments finis du rotor intègre l'amortissement interne par frottement des cannelures. Les résultats montrent que les désalignements parallèle et angulaire modifient la vitesse critique et les conditions d'apparition des vibrations auto-entretenues. Ces phénomènes dynamiques sont hors du périmètre du présent travail, centré sur le régime quasi-statique ; la distribution de pression de contact en régime quasi-statique constitue cependant la base nécessaire à toute modélisation dynamique ultérieure, en fournissant les rigidités de contact et les amplitudes de glissement caractéristiques du comportement en régime établi.

1.3 Modélisation du contact dans les liaisons cannelées

La prédiction quantitative des pressions de contact et du glissement dans les cannelures requiert un modèle de contact capable de traiter des géométries tridimensionnelles arbitraires, sans restriction analytique sur la forme de la zone de contact. La présente section décrit les fondements des méthodes retenues dans la littérature pour aborder ce problème, en précisant leurs hypothèses, leurs extensions et leur application aux cannelures désalignées.

1.3.1 Contact conforme : limites de la théorie de Hertz

La théorie de Hertz (1882) constitue la référence classique pour l'estimation des pressions de contact entre deux solides élastiques. Son application repose sur plusieurs hypothèses restrictives : la zone de contact est petite devant les rayons de courbure des surfaces qui y sont localement approximées par des paraboloïdes de révolution. Les deux corps sont également assimilés à des demi-espaces infinis, et le glissement est absent. Ces conditions conduisent à des distributions de pression semi-elliptiques analytiquement calculables pour les géométries non conformes classiques moyennant la seule connaissance des courbures principales au point de premier contact.

Dans les liaisons cannelées à profil en développante, le contact entre un flanc de dent d'arbre et un flanc de dent de moyeu présente un caractère conforme : les rayons de courbure des deux surfaces en contact sont du même ordre de grandeur, ce qui entraîne une zone de contact étendue dont les dimensions deviennent comparables à celles de la dent elle-même. Cette caractéristique invalide l'hypothèse de demi-espace infini et rend les formules hertziennes inapplicables à la géométrie des flancs de dents comme l'ont montré Paul et Hashemi (1981) pour les corps à courbure gaussienne négative et Liu et Wayne Chen (2012) pour les contacts doublement conformes. Persson (1964) a établi des solutions analytiques pour le contact entre cylindres conformes, révélant que la distribution de pression de contact n'y suit pas la forme semi-elliptique caractéristique du contact hertzien et requiert la résolution d'équations intégrales. Ces travaux ont montré que les formules hertziennes, ne suffisent pas à déterminer la distribution de pression des contacts conformes.

La présence d'un désalignement angulaire entre l'arbre et le moyeu vient ajouter une difficulté en rendant la zone de contact tridimensionnelle et non rectangulaire. La séparation initiale entre les surfaces varie le long de l'axe de la cannelure, ce qui concentre le contact à l'une des extrémités axiales de chaque dent. Cette combinaison du caractère conforme du contact et de sa géométrie tridimensionnelle variable sous désalignement justifie le recours à des méthodes

numériques générales, présentées dans les sections suivantes, qui constituent les fondements de l'algorithme de contact développé dans ce mémoire.

1.3.2 Modèles de contact développés pour les cannelures

La littérature propose plusieurs modèles de contact développés spécifiquement pour les liaisons cannelées, s'appuyant sur des méthodes d'éléments frontière, d'éléments finis ou semi-analytiques.

Medina et Olver (2002) ont développé le premier modèle de contact élastostatique à géométrie réelle de cannelure, celui-ci traite la géométrie tridimensionnelle de la liaison au cours d'une révolution par la méthode des éléments frontière. Le modèle a permis l'identification des distributions de pression et l'estimation des amplitudes de glissement relatif sous désalignement, dont les résultats ont été détaillés à la section 1.2.3. La durée de calcul, de l'ordre de quatre à cinq jours par simulation, a cependant limité l'étude à quatorze configurations ; le flanc en développante y est en outre représenté par seulement deux éléments quadratiques sur la hauteur de dent, une discrétisation insuffisante pour restituer avec précision la géométrie du flanc et, par conséquent, la distribution de pression dans un contact conforme.

Sum et al. (2003) ont conduit une étude paramétrique par éléments finis des cannelures aéronautiques, couplant des modèles bidimensionnels et tridimensionnels. Les modèles 2D permettent une exploration rapide de l'évolution des variables qui définissent le fretting et la fatigue en fonction du nombre de dents, de l'épaisseur de celles-ci, du diamètre de l'arbre et du coefficient de frottement. Les modèles 3D servent ensuite à vérifier les tendances prédites. Les modèles tridimensionnels ont en particulier montré que la pression de contact et l'amplitude du glissement ne peuvent être correctement estimées sans modélisation explicite de la géométrie tridimensionnelle de la liaison. Ce modèle garantit donc une précision élevée mais reste limité à des cannelures parfaitement alignées.

Hong (2015) a proposé un modèle semi-analytique de distribution de charge pour les cannelures à ajustement sur les flancs. Le modèle intègre au sein d'une même matrice de compliance les contributions de flexion et de cisaillement des dents, de flexibilité de la fondation de dent, de déformation de contact et de torsion de l'arbre et du moyeu. Un schéma de discrétisation multi-pas réduit considérablement le coût de calcul et permet de réaliser des études paramétriques. Cependant, le modèle ne prend pas en compte le frottement et les phénomènes de fretting.

De Vaujany et al. (2017) ont proposé un modèle quasi-statique de distribution de pression dans les cannelures fondé sur la méthode des coefficients d'influence. Le modèle intègre les déformations de contact, établies à partir des équations de Boussinesq et de Cerruti ainsi que la flexion des dents. Les arbres peuvent être intégrés dans la géométrie pour prendre en compte leur déformation, et différentes erreurs d'assemblage (radiales, axiales et angulaires) peuvent être imposées. Le modèle se contente de la fonction d'influence des contacts non conformes développée par Boussinesq et ne corrige pas les effets de bord apportés par ses hypothèses.

Aucun des modèles présentés ne réunit simultanément le traitement du contact conforme et l'intégration des déformations structurelles des dents au sein d'une méthode rapide permettant le dimensionnement de cannelure. L'algorithme de contact semi-analytique développé dans ce mémoire tend à associer ces éléments pour prédire la distribution de pression et l'amplitude de glissement sur des cannelures à dents droites désalignées, pour toute géométrie définie par les paramètres ISO 4156.

1.4 Réseaux de neurones comme modèles de substitution

L'intégration des déformations structurelles dans l'algorithme de contact impose d'évaluer la déformée des dents, pour un grand nombre de configurations géométriques et pour des conditions de chargement distinctes. Une évaluation directe par simulation éléments finis à chaque appel de l'algorithme représenterait un coût de calcul prohibitif, incompatible avec les exigences d'un outil de dimensionnement paramétrique, tandis que la résistance des matériaux

(RDM) ne permet pas d'établir de solution analytique pour des géométries aussi complexes que les profils en développante de cercle.

La notion de métamodèle désigne une approximation de la relation entrée-sortie impliquée par une simulation coûteuse, construite à partir d'un ensemble de données d'entraînement généré au préalable (Fonseca, Navaresse, & Moynihan, 2003). Une fois entraîné, le métamodèle peut évaluer quasi-instantanément des déplacements, offrant un gain en temps de calcul considérable par rapport à la simulation originale par éléments finis. Les réseaux de neurones à propagation avant multicouches (MLP) sont particulièrement adaptés à ce cas, ils n'imposent pas d'hypothèse sur la forme de la relation à approcher et sont capables de modéliser des dépendances non linéaires entre les variables d'entrée et de sortie. Ils présentent de plus une bonne robustesse face aux déviations des hypothèses statistiques classiques.

La précision atteignable par un réseau de neurones comme substitut aux éléments finis a été démontrée dans le domaine de la mécanique des structures par Liang, Liu, Martin et Sun (2018). Ils ont développé un modèle de substitution par apprentissage profond afin de prédire la distribution de contraintes dans une paroi vasculaire. Ils ont obtenu des erreurs moyennes inférieures à 1 % par rapport aux résultats EF, le tout avec un facteur d'accélération de l'ordre de 1 800 par rapport au calcul direct. Dans le domaine spécifique des engrenages, Sendlbeck, Maurer, Otto et Stahl (2023) soulignent que les méthodes d'apprentissage automatique sont de plus en plus mobilisées pour prédire des propriétés mécaniques à partir de bases de données de simulations éléments finis paramétriques, notamment pour estimer les contraintes en pied de dent de géométries sortant du domaine de validité des formules normalisées.

Parmi les méthodes de substitution disponibles, le MLP offre le meilleur compromis précision/coût pour les problèmes de régression sur données tabulaires. Yüksel (2026) a conduit une évaluation comparative systématique de cinq approches : Kriging, forêts aléatoires, XGBoost, SVR et MLP. Les modèles doivent prédire le comportement mécanique non linéaire d'une pièce structurale à partir d'un jeu de données issu de simulations éléments finis paramétriques. Le MLP obtient les meilleurs résultats avec un coefficient de

détermination $R^2 = 0,98$ tandis que le Kriging présente de bonnes performances sur de petits jeux de données mais son coût de calcul croît de façon significative lorsque le nombre d'échantillons augmente. Les méthodes ensemblistes (XGBoost, forêts aléatoires) permettent une stabilité satisfaisante mais leur précision est inférieure à celle du MLP, tandis que la SVR se révèle la plus sensible au volume de données disponibles. Le réseau de neurones MLP est donc le plus adapté pour la prédiction de la flexion, de la torsion, du cisaillement et de la compression des dents dans l'algorithme de contact développé dans ce mémoire.

1.5 Conclusion

La revue de littérature met en évidence la complexité des phénomènes physiques à l'œuvre dans les liaisons cannelées désalignées et la diversité des approches développées pour les modéliser. Le désalignement angulaire ressort comme le paramètre le plus dominant de l'endommagement par fretting, il concentre les pressions de contact à l'extrémité des dents et amplifie le micro-glissement. Les mécanismes de dégradation associés ont fait l'objet d'une documentation expérimentale et numérique approfondie, avec des contributions récentes sur les cannelures bombées.

La Figure 1.1 résume l'ensemble des phénomènes mis en jeu, les trois types de déformation de la liaison cannelée y sont présentés et permettent de calculer les champs de déplacement et de pression, desquels le glissement et l'usure peuvent être déduits. Le Tableau 1.1 compare l'ensemble des solutions techniques existantes et présente les avantages et inconvénients de chacune d'elles.

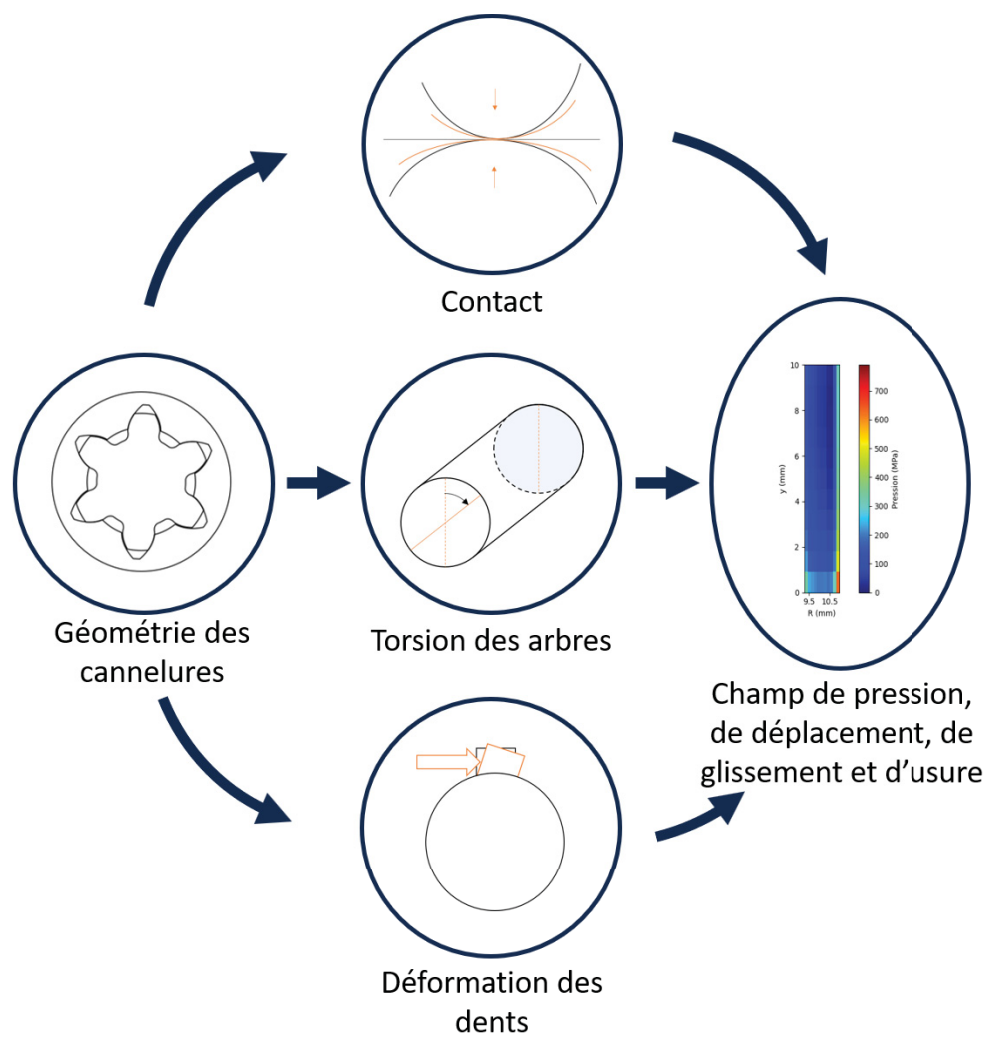


Figure 1.1 Phénomènes mis en jeu

Tableau 1.1 Comparaison des solutions existantes pour chacun des phénomènes physiques

Phénomène à modéliser	Solutions	Avantages	Inconvénients
Modélisation du contact	Théorie de Hertz	• Simplicité du modèle • Rapidité de calcul • Référence reconnue • Ne nécessite pas de maillage	• Hypothèse d'un contact non conforme • Hypothèse de corps assimilés à des demi-espaces infinis • Hypothèse de glissement absent
	Eléments finis	• Adapté aux géométries complexes • Génère les champs de pression, glissement et contraintes	• Coût de calcul important • Paramétrage du contact complexe
	Boussinesq	• Rapidité de calcul • Adapté aux géométries complexes • Ne nécessite pas de maillage volumique	• Hypothèse des surfaces de contact non conformes • Effets de bord à corriger liés à l'hypothèse de demi-espace infini • Prend uniquement en compte les efforts normaux
	Paul et Hashemi	• Adaptation de Boussinesq pour les contacts conformes • Rapidité de calcul • Adapté aux géométries complexes • Ne nécessite pas de maillage volumique	• Effets de bord à corriger liés à l'hypothèse de demi-espace infini • Prend uniquement en compte les efforts normaux
	Paul et Hashemi + Cerruti + Guilbault	• Adaptation de Paul et Hashemi avec les efforts tangentiels et les corrections d'effets de bord • Rapidité de calcul • Adapté aux géométries complexes • Ne nécessite pas de maillage volumique	• Mise en place complexe
	Poinçons	• Rapidité du modèle • Ne nécessite pas de maillage volumique	• Pertes de contact non prises en compte • Effets de bords non pris en compte

Phénomène à modéliser	Solutions	Avantages	Inconvénients
Torsion, flexion, cisaillement et compression des dents	Eléments finis	• Précision du modèle • Adapté aux géométries complexes • Prend en compte les effets entre les dents	• Coût de calcul important
	Résistance des matériaux	• Simplicité du modèle • Rapidité des calculs • Expression analytique	• Non adapté aux géométries complexes • Ignore les effets présents entre les dents
	Réseau de neurones	• Précision très proche des éléments finis • Rapidité des calculs (quasi instantané)	• Génération d'une base de données conséquente en amont • Ne fonctionne que pour une plage de paramètres définis par la base de données
Torsion de l'arbre	Eléments finis	• Précision du modèle • Adapté aux géométries complexes	• Coût de calcul important
	Résistance des matériaux	• Simplicité du modèle • Rapidité des calculs • Expression analytique	• Non adapté à des géométries complexes (arbre cannelé)
Usure	Eléments finis	• Précision du modèle • Adapté aux géométries complexes	• Coût de calcul important • Définition des paramètres de l'usure
	Critère de Ruiz	• Simplicité du modèle	• Nécessite de connaître les contraintes tangentielles • Ne permet pas de donner une valeur de profondeur de l'usure
	Equation d'Archard	• Simplicité du modèle • Permet de comparer relativement deux solutions techniques • Permet de fournir une valeur quantitative de l'usure si k_w est correctement défini	• Détermination de k_w complexe

La modélisation présentée dans ce mémoire comble les lacunes identifiées dans la revue de littérature en développant un algorithme de contact semi-analytique adapté aux cannelures à dents droites désalignées. L'algorithme intègre la fonction d'influence tridimensionnelle de Paul et Hashemi (1981) pour le contact conforme associé aux équations de Cerruti pour modéliser les efforts tangentiels. La correction de quart-espace de Guilbault (2011) pour les effets de bord aux extrémités axiales des dents, et la géométrie exacte des flancs reconstruite par simulation numérique du procédé de taillage viennent compléter la modélisation du contact. L'utilisation d'un réseau de neurones de type MLP permet d'obtenir une évaluation quasi-instantanée des déformations structurelles des dents. L'objectif est de prédire la distribution de pression ainsi que l'amplitude de glissement et les zones propices à l'usure pour l'ensemble des géométries définies par la norme ISO 4156, le tout en un temps de calcul compatible avec les exigences d'un outil de dimensionnement industriel.

L'objectif principal de cette recherche est donc de,

Développer un modèle de répartition de charge pour les cannelures désalignées permettant des dimensionnements industriels et des études paramétriques.

Cet objectif conduit aux objectifs secondaires suivants :

- 1- *Développer un modèle de contact conforme pour des flancs en développante de cercle avec des écarts de fabrication;*
- 2- *Développer un modèle de flexion-torsion-cisaillement-compression des dents basé sur un réseau de neurones entraîné sur des cas éléments finis;*
- 3- *Développer un modèle de torsion de l'arbre et du moyeu basé sur les équations de la RDM;*
- 4- *Développer un modèle de cartographie de l'usure sur le flanc des dents.*

Les hypothèses de départ sont :

- 1- Contact conforme entre les solides;*
- 2- Comportement élastique des matériaux;*
- 3- Glissement total entre les solides avec un coefficient de frottement constant sur toute la zone de contact.*

Les limites du modèle seront ainsi :

- 1- Étude quasi-statique;*
- 2- Coefficient d'usure k_w non renseigné;*
- 3- Géométrie restreinte à la norme ISO 4156;*

CHAPITRE 2

Algorithme semi-analytique de contact

Dans les cannelures désalignées, la transmission de couple génère des chargements non uniformes entre les dents de l'arbre et du moyeu, entraînant des zones de pressions de contact élevées. La détermination des champs de pression et des déformations associées est nécessaire pour évaluer la localisation de l'endommagement par usure et estimer la durée de vie de la liaison. La nature conforme du contact dans les cannelures implique des zones de contact étendues sur lesquelles les surfaces n'admettent pas de plan tangent commun unique. Cette particularité géométrique invalide les hypothèses de la théorie de Hertz, dont la validité est conditionnée à une zone de contact petite devant les rayons de courbure des solides. Le désalignement des cannelures amène également des pertes de contact cycliques lorsque les cannelures sont en rotation, qui invalident l'utilisation de la méthode des poinçons.

La méthode proposée par Hartnett (1980), fondée sur la théorie de Boussinesq, constitue le cadre de base de l'algorithme de modélisation de contact des cannelures désalignées. Elle constitue une approche numérique générale du contact entre corps élastiques, applicable à des géométries de surface arbitraires. Cependant, son application directe à ce cas d'étude nécessite certaines adaptations, elle repose en effet sur quatre hypothèses fondamentales : l'élasticité linéaire des matériaux, une pression uniforme sur chaque cellule de contact, deux solides semi-infinis ainsi que l'approximation du plan tangent commun comme plan de référence. Ces deux dernières hypothèses ne sont pas applicables au cas d'étude. En effet, les dents des cannelures présentent des dimensions finies, leurs surfaces libres aux extrémités générant des effets de bord que cette hypothèse ne permet pas de capturer. Enfin, l'hypothèse d'un plan tangent commun suppose que la composante normale z des surfaces est négligeable devant leurs composantes tangentielles. Cette hypothèse est acceptable pour les contacts non conformes classiques, mais invalide pour les flancs en développante des cannelures, où la coordonnée z est du même ordre de grandeur que les coordonnées tangentielles.

Par ailleurs, les cannelures présentent une zone de contact propre à chaque dent, l'ensemble de ces zones devant être liées les unes aux autres. La condition de fermeture globale est en outre liée au couple transmis et non à une force normale comme dans la formulation originale de Hartnett. Le désalignement angulaire entre l'arbre et le moyeu modifie également la séparation initiale entre les surfaces et la cinématique de leur mouvement relatif, deux aspects absents de celle-ci. Enfin, les efforts tangentiels de frottement, absents de la méthode proposée par Hartnett, génèrent un déplacement normal additionnel qui ne peut être négligé dans le cas des cannelures.

2.1 Formulation fondée sur la théorie de Boussinesq

La théorie de Boussinesq, permet d'exprimer le déplacement normal en tout point d'une surface d'un solide élastique semi-infini soumis à une force de surface ponctuelle. En intégrant cette solution sur une région rectangulaire, il est possible de relier une pression constante appliquée sur une surface au champ de déplacement qu'elle induit sur l'ensemble. Ce lien est exprimé à l'aide d'une fonction d'influence définie selon des hypothèses. L'algorithme de Hartnett (1980) propose une méthode numérique de contact non-hertzien reposant sur ce principe.

2.1.1 Architecture de l'algorithme

La surface de contact potentielle est discrétisée en une grille de $n * m$ cellules rectangulaires de dimensions $2a \times 2b$, chaque cellule étant identifiée par ses indices (i, j) . Ces cellules peuvent supporter une pression uniforme P_{ij} . Le déplacement normal en tout point d'une surface est donné par la somme des contributions de l'ensemble des cellules sur celle-ci :

$$w_{ip} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m P_{kj} * f_{ip,kj} \quad (2.1)$$

Dans cette relation, la fonction d'influence $f_{ip,kj}$ représente le déplacement normal au point (i, p) produit par une pression unitaire uniforme sur la cellule (k, j). L'équation suivante définit la fonction d'influence $f_{ip,kj}$:

$$f_{ip,kj}(\Delta X, \Delta Y) = K \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & * \left\{ (\Delta X + b) \ln \left(\frac{(\Delta Y + a) + \sqrt{(\Delta Y + a)^2 + (\Delta X + b)^2}}{(\Delta Y - a) + \sqrt{(\Delta Y - a)^2 + (\Delta X + b)^2}} \right) \right. \\ & + (\Delta Y + a) \ln \left(\frac{(\Delta X + b) + \sqrt{(\Delta Y + a)^2 + (\Delta X + b)^2}}{(\Delta X - b) + \sqrt{(\Delta Y + a)^2 + (\Delta X - b)^2}} \right) \\ & + (\Delta X - b) \ln \left(\frac{(\Delta Y - a) + \sqrt{(\Delta Y - a)^2 + (\Delta X - b)^2}}{(\Delta Y + a) + \sqrt{(\Delta Y + a)^2 + (\Delta X - b)^2}} \right) \\ & \left. + (\Delta Y - a) \ln \left(\frac{(\Delta X - b) + \sqrt{(\Delta Y - a)^2 + (\Delta X - b)^2}}{(\Delta X + b) + \sqrt{(\Delta Y - a)^2 + (\Delta X + b)^2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } K = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}$$

Où ΔX et ΔY représentent la différence de coordonnées entre les cellules (k, j) et (i, p) tandis que ν_i et E_i sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young du solide i. Cette équation est issue de l'intégration analytique des équations de Boussinesq sur la région rectangulaire $2a \times 2b$:

$$f(X, Y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi * E} \int_A \frac{P(x, y) dx dy}{\{(X - x)^2 + (Y - y)^2\}^{1/2}} \quad (2.3)$$

Avec A l'aire de la surface considérée.

La Figure 2.1 décrit le contact entre deux surfaces courbes. Pour celles-ci, il existe un plan tangent passant par le premier point de contact. Chaque point des surfaces 1 et 2 est alors séparé d'une distance z_i de ce plan. L'approche rigide des deux solides α est alors estimée et permet

de définir le champ de pression ainsi que les déplacements w_i de chacun des points des deux surfaces. Une cellule appartient donc à la zone de contact si :

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = \alpha \quad (2.4)$$

La pression associée à cette cellule est alors positive.

Pour une cellule hors de la zone de contact :

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 > \alpha \quad (2.5)$$

La pression associée à cette cellule est alors nulle

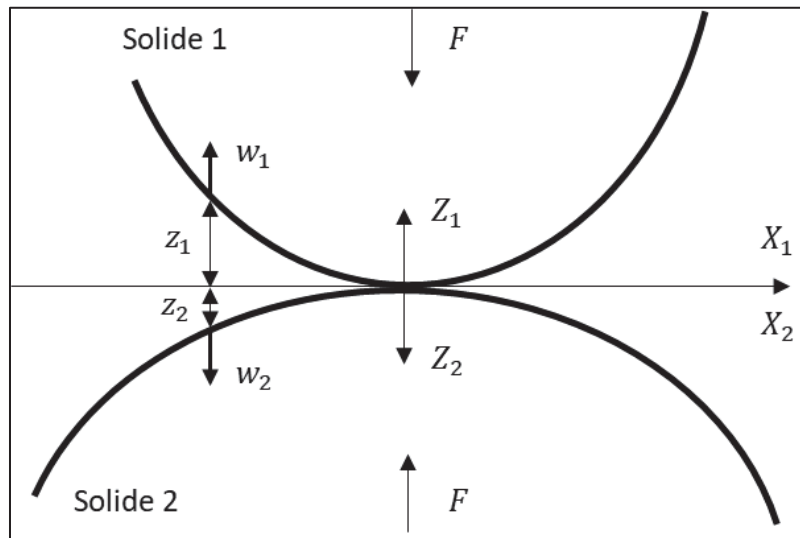


Figure 2.1 Définition du contact

Enfin, la condition de charge globale impose que la force appliquée F soit égale à la résultante des pressions F_r calculée comme suit :

$$F_r = \sum_i^n \sum_p^m P_{ip} * A_{ip} \quad (2.6)$$

Où $A_{ip} = 4ab$, est l'aire de la cellule (i, p).

La méthode de Gauss-Seidel par colonnes proposée par Hartnett (1980) permet la résolution du système. À chaque itération, les pressions d'une colonne sont recalculées en maintenant fixes les pressions de toutes les autres colonnes, celles-ci étant transférées en termes constants. Cette approche est préférée à une résolution matricielle globale car la résolution simultanée de l'ensemble des cellules peut engendrer des instabilités numériques (Hartnett, 1980). Une fois toutes les colonnes balayées, Hartnett met à jour l'approche rigide α proportionnellement à l'écart entre la force totale obtenue et la consigne, puis recommence la boucle jusqu'à convergence. Cette correction proportionnelle converge lentement dès que la zone de contact s'écarte du cas hertzien. Pour remédier à cela, la mise à jour de la valeur de l'approche rigide α dépend du nombre d'itérations déjà réalisées, comme le présente la Figure 2.2. La première mise à jour de α utilise la proportionnalité puisqu'un seul point est connu ; la méthode de Newton est utilisée lorsqu'un deuxième point a été calculé, permettant d'exploiter la tangente à la courbe ; enfin, les itérations suivantes utilisent la méthode de Halley, celle-ci faisant intervenir la dérivée seconde et offrant une convergence cubique plutôt que quadratique.

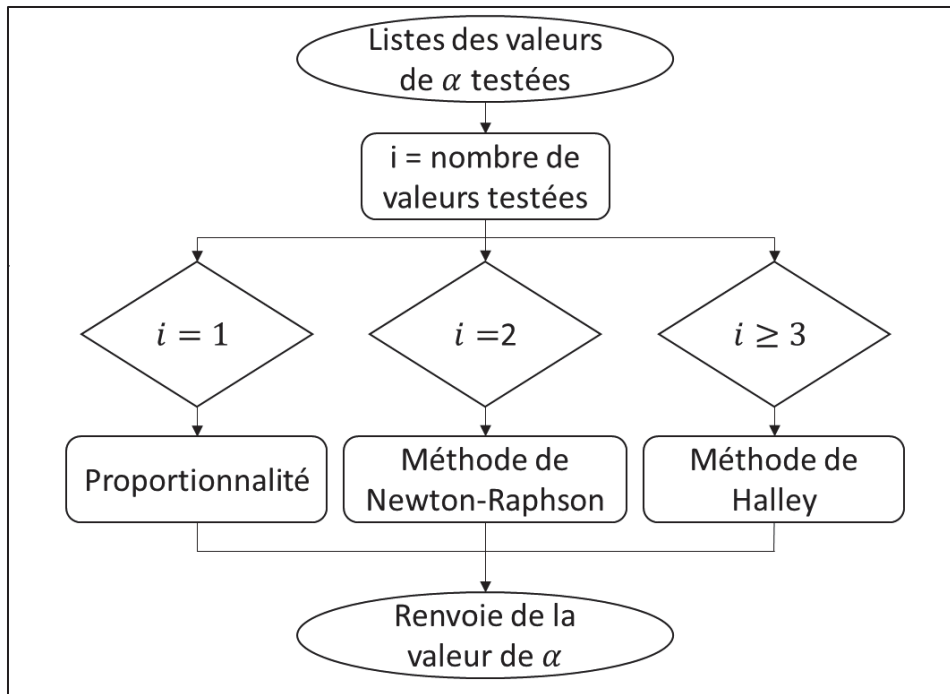


Figure 2.2 Mise à jour de l'approche rigide

La Figure 2.3 présente le diagramme de principe de fonctionnement de l'algorithme proposé par Hartnett pour l'application d'un effort F entre deux corps.

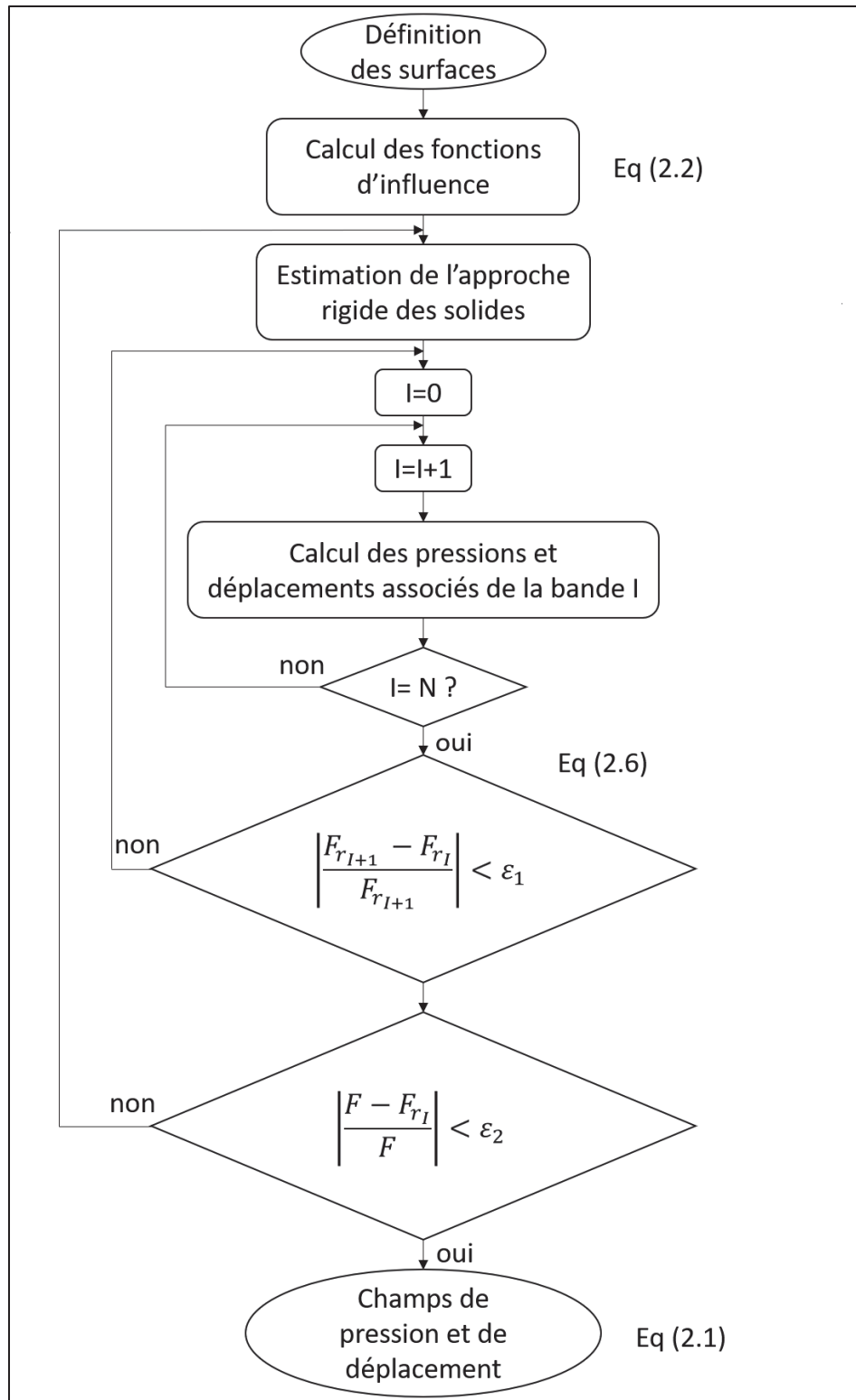


Figure 2.3 Diagramme de l'algorithme proposé par Hartnett

2.1.2 Extension au contact conforme

Dans la formulation originale de Hartnett, la surface de contact est assimilée au plan tangent commun aux deux solides. L'hypothèse implicite est que les coordonnées normales z sont identiques en tout point de la zone de contact et peuvent être supposées nulles. La fonction d'influence donnée par l'équation (2.2) est alors définie dans ce plan et le calcul des distances entre les cellules se réduit aux coordonnées x et y .

Dans le cas des cannelures, le contact est conforme et la coordonnée normale z varie de façon comparable aux coordonnées x et y d'une cellule à l'autre sur la surface de contact. La distance entre les deux cellules (i, p) et (k, j) nécessite donc un calcul en trois dimensions. La formule suivante, proposée par Paul et Hashemi (1981) remplace la fonction d'influence $f_{ip,kj}$ proposée par Hartnett :

$$\tilde{f} = \frac{1 - \nu}{\pi * E} \int_A \frac{P(x, y) \, dx dy}{\{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2\}^{1/2}} \quad (2.7)$$

Cette formule, initialement déterminée pour les géométries à courbure gaussienne négative, constitue une approximation raisonnable du déplacement normal dû à une force unitaire en surface, pour les géométries à courbure gaussienne positive (Paul & Hashemi, 1981).

Une fois l'intégration sur la cellule réalisée, l'équation (2.7) devient :

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, a, b) \\
&= \frac{1-\nu}{\pi * E} \left[\Delta Z \arctan \left(\frac{((\Delta X + b)(\Delta Y + a))}{\Delta Z \sqrt{(\Delta X + b)^2 + (\Delta Y + a)^2 + \Delta Z^2}} \right) \right. \\
&\quad - \Delta Z \arctan \left(\frac{((\Delta X - b)(\Delta Y + a))}{\Delta Z \sqrt{(\Delta X - b)^2 + (\Delta Y + a)^2 + \Delta Z^2}} \right) \\
&\quad - \Delta Z \arctan \left(\frac{((\Delta X + b)(\Delta Y - a))}{\Delta Z \sqrt{(\Delta X + b)^2 + (\Delta Y - a)^2 + \Delta Z^2}} \right) \\
&\quad + \Delta Z \arctan \left(\frac{((\Delta X - b)(\Delta Y - a))}{\Delta Z \sqrt{(\Delta X - b)^2 + (\Delta Y - a)^2 + \Delta Z^2}} \right) \\
&\quad + (\Delta Y + a) \ln \left(\frac{\left(\sqrt{(\Delta X + b)^2 + (\Delta Y + a)^2 + \Delta Z^2} - (\Delta X + b) \right)}{\sqrt{(\Delta X - b)^2 + (\Delta Y + a)^2 + \Delta Z^2} - (\Delta X - b)} \right) \\
&\quad + (\Delta Y - a) \ln \left(\frac{\left(\sqrt{(\Delta X - b)^2 + (\Delta Y - a)^2 + \Delta Z^2} - (\Delta X - b) \right)}{\sqrt{(\Delta X + b)^2 + (\Delta Y - a)^2 + \Delta Z^2} - (\Delta X + b)} \right) \\
&\quad + (\Delta X + b) \ln \left(\frac{\left(\sqrt{(\Delta X + b)^2 + (\Delta Y - a)^2 + \Delta Z^2} + (\Delta Y - a) \right)}{\sqrt{(\Delta X + b)^2 + (\Delta Y + a)^2 + \Delta Z^2} + (\Delta Y + a)} \right) \\
&\quad \left. + (\Delta X - b) \ln \left(\frac{\left(\sqrt{(\Delta X - b)^2 + (\Delta Y + a)^2 + \Delta Z^2} + (\Delta Y + a) \right)}{\sqrt{(\Delta X - b)^2 + (\Delta Y - a)^2 + \Delta Z^2} + (\Delta Y - a)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Où ΔX , ΔY et ΔZ représentent la différence de coordonnées entre les cellules (k, j) et (i, p).

Les coordonnées normales z des centres de cellules varient avec le déplacement, contrairement aux coordonnées x et y . La fonction d'influence est donc initialement calculée avec la géométrie non déformée, utilisée comme une première approximation de la surface déformée. Ainsi, une boucle itérative externe, représentée à la Figure 2.4, est ajoutée à l'algorithme. Après convergence du champ de pression et des déplacements, la géométrie des surfaces est mise à

jour et la fonction d'influence est recalculée avec les nouvelles coordonnées z . L'algorithme est alors relancé et cette procédure est répétée jusqu'à ce que la géométrie de la surface de contact converge.

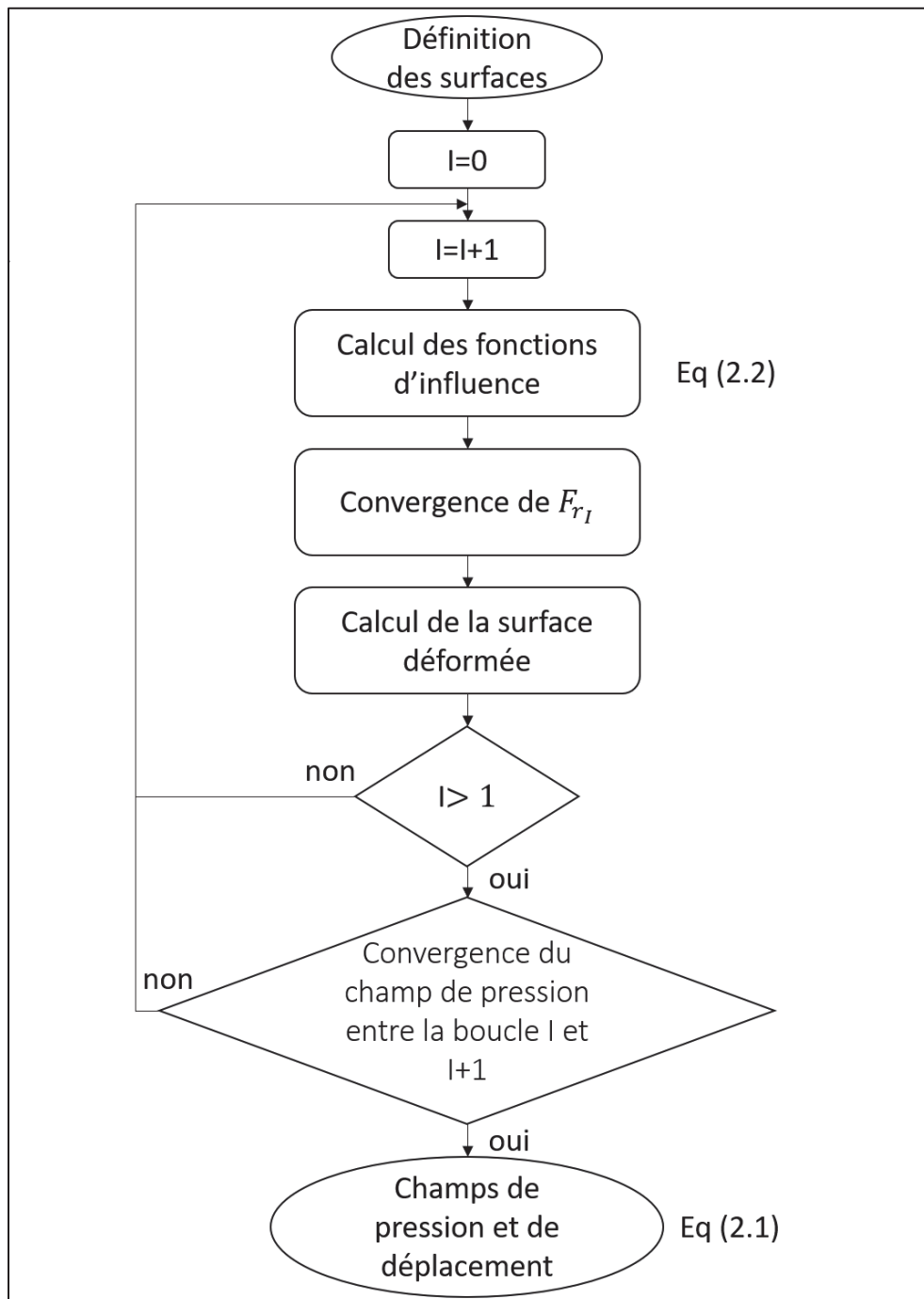


Figure 2.4 Mise à jour de la fonction d'influence

2.1.3 Validation des équations de Paul et Hashemi

Afin de valider l'implémentation de la fonction $\tilde{f}$ liée aux équations de Paul Hashemi (1981), un cas de simulation est réalisé pour comparer les résultats obtenus aux équations de Boussinesq, utilisés dans la fonction f , ainsi qu'à la théorie de Hertz. Le cas de simulation est réalisé sur le contact de deux cylindres parallèles, défini dans la Figure 2.5, de rayon 0.984 mm et 25.4 mm et de longueur 21 mm auxquels sont appliqué un effort de 6872 N.

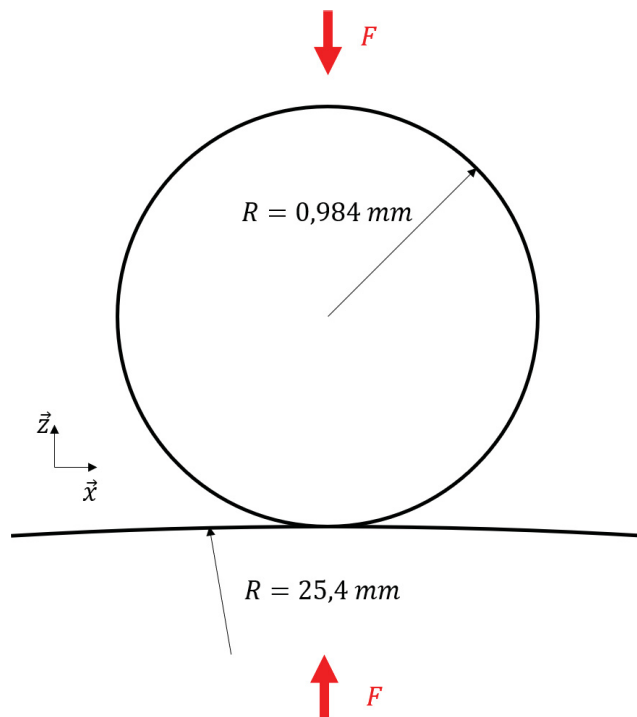


Figure 2.5 Géométrie des cylindres

Le contact de ces deux cylindres étant considéré comme non conforme, les résultats des fonctions f et $\tilde{f}$ devraient être égaux et proches de la théorie de Hertz. La Figure 2.6 qui présente la pression obtenue selon l'axe normal aux cylindres, x , vient confirmer ces attentes, les résultats des fonctions f et $\tilde{f}$ semblent confondus et sont proches de la théorie de Hertz.

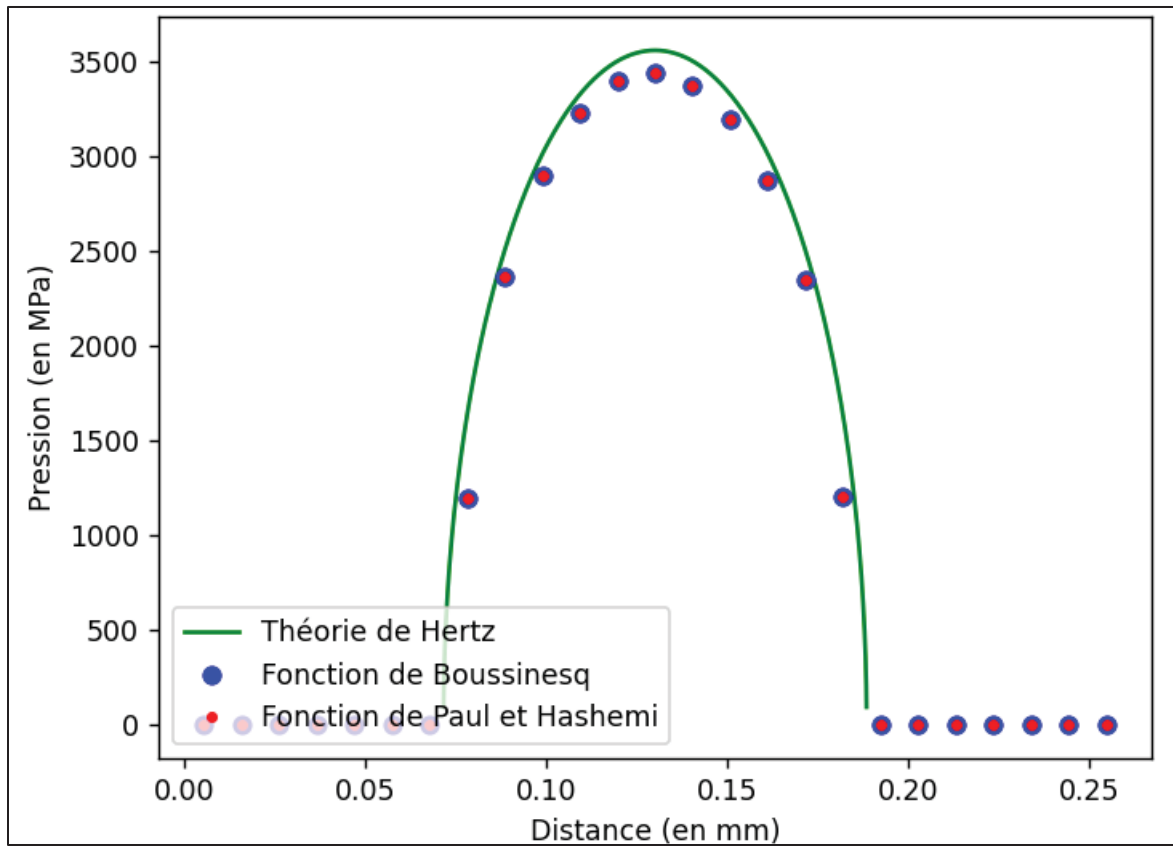


Figure 2.6 Champ de pression du contact entre deux cylindres

2.2 Adaptations aux cannelures

L'application de la méthode de Hartnett aux cannelures nécessite plusieurs adaptations liées à la géométrie spécifique de ces liaisons. La disposition des dents autour de l'axe de rotation impose de remplacer le repère cartésien de la formulation originale par un repère cylindrique, et la condition de fermeture, initialement exprimée en termes de force normale, doit être reformulée pour traduire un équilibre en couple. Par ailleurs, le calcul des séparations initiales entre les surfaces de l'arbre et du moyeu qui permet d'initialiser l'algorithme, requiert une description géométrique précise des flancs de dents, dont la forme provient du procédé de taillage. Enfin, le désalignement entre les axes de l'arbre et du moyeu modifie ces séparations initiales et doit être intégré au modèle.

2.2.1 Repère cylindrique et équilibre en couple de cannelures alignées

L'algorithme de Hartnett repose sur un repère cartésien dans lequel les distances entre cellules se mesurent en coordonnées rectilignes. Dans le cas des cannelures, en considérant une zone de contact pour chaque dent, la géométrie des surfaces de contact s'inscrit naturellement dans un repère cylindrique centré sur l'axe de rotation de l'arbre. La distance entre deux cellules homologues situées sur les deux flancs en contact ne constitue plus une simple différence de coordonnée normale, mais une longueur mesurée le long d'un arc de cercle.

La Figure 2.7 illustre ce changement de repère, pour un point du maillage situé à un rayon R de l'axe de rotation, les séparations initiales de la surface de l'arbre et de celle du moyeu sont remplacées par les longueurs d'arc z_1 et z_2 :

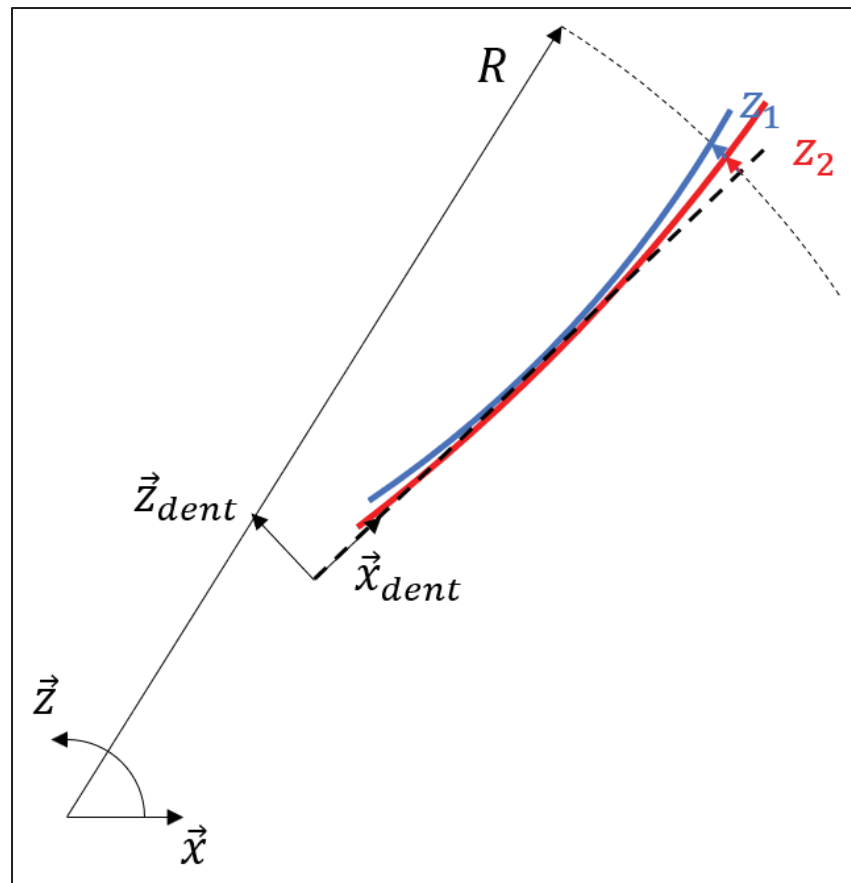


Figure 2.7 Définition des distances initiales

L'algorithme de contact s'applique à chaque paire de dents d'arbre et de moyeu de manière indépendante. Pour une cannelure à z dents, z applications parallèles de l'algorithme produisent z champs de pression P_{ip} distincts. Cette indépendance repose sur l'hypothèse que le champ de pression lié au contact sur une dent donnée ne dépend pas directement du champ de pression des dents voisines, mais uniquement de la position relative des surfaces en contact sur cette dent. L'influence d'une dent sur ses dents voisines est prise en compte dans la section 3.1.

Dans la formulation originale de Hartnett, la condition de fermeture impose que la résultante des pressions soit égale à la force normale appliquée F . Cette condition est adaptée aux cannelures, où c'est un couple qui est transmis et non une force. La Figure 2.8 illustre la démarche de projection des forces de chaque cellule pour le calcul du couple. La pression exercée sur chaque cellule (i, p) génère une force élémentaire $\vec{F}_n$ normale à la surface de la dent en ce point. La force $\vec{F}_c$ qui participe à la génération du couple élémentaire s'obtient en projetant $\vec{F}_n$ dans la direction orthoradiale (selon le vecteur tangentiel $\vec{t}$) puis en la multipliant par le bras de levier R_{ip} .

La contribution au couple de la cellule (i, p) s'écrit alors :

$$C_{ip} = F_c * R_{ip} \quad (2.9)$$

Le couple total généré correspond donc à la somme des contributions de chaque dent, chacune étant calculée en sommant les couples élémentaires de chaque cellule.

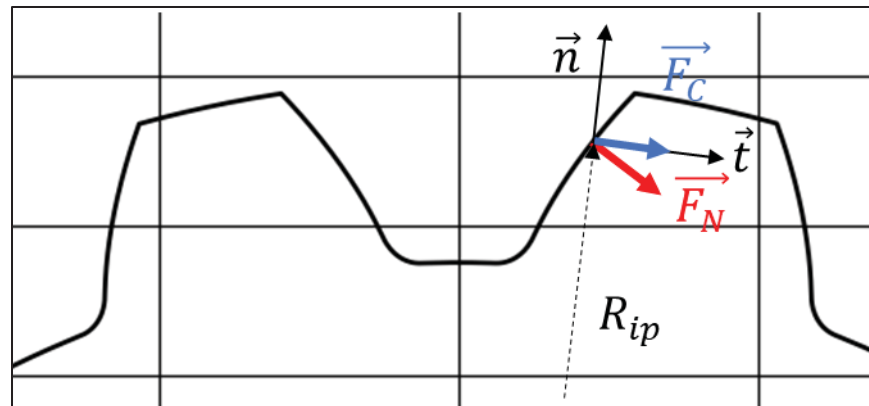


Figure 2.8 Projection des forces générées pour calculer le couple

Le couplage entre les dents s'établit par le partage d'une même approche rigide α . Dans la formulation cartésienne de Hartnett, α représente un déplacement normal, c'est-à-dire une distance de rapprochement des deux solides. Dans le repère cylindrique adopté ici, cette grandeur devient un angle : α correspond à l'angle de rotation rigide de l'arbre par rapport au moyeu. La séparation initiale entre les surfaces permet d'estimer une valeur initiale de l'approche rigide. Cette valeur est ensuite corrigée itérativement comme présenté dans la section 2.1.1 jusqu'à ce que le couple total engendré par l'ensemble des dents converge vers le couple imposé.

2.2.2 Génération de la géométrie par taillage

Le calcul des distances initiales entre les surfaces de l'arbre et du moyeu pour chaque cellule du maillage nécessite une description précise de la géométrie des flancs de dents. Celle-ci découle de son procédé de fabrication, le taillage par génération réalisé par exemple avec un outil crémaillère. La géométrie de chaque dent est reconstituée numériquement en simulant ce procédé afin de garantir la cohérence entre la géométrie calculée et la géométrie réellement usinée.

Le taillage par outil génération repose sur le mouvement relatif de l'outil de taillage, ici une crémaillère, qui reproduit la cinématique d'engrènement par rapport à l'arbre taillé. L'outil se

déplace en translation tandis que l'arbre tourne autour de son axe. Le flanc de dent résulte de l'enveloppe des positions successives de l'outil, illustrée par la vue déroulée de la Figure 2.9.

Les paramètres de l'outil crémaillère sont définis selon la norme ISO 4156 : le module m fixe le pas de la denture, l'angle de pression $\alpha_D = 30^\circ$ définit l'inclinaison des flancs de la crémaillère, le rayon $\rho_f = 0,2 * m$ définit le congé de l'outil. Enfin, les coefficients $c = 0,75 * m$ et $h = 0,5 * m$ dans le cas de dentures externes, sont respectivement les coefficients de creux et de saillie de dent qui définissent la profondeur du creux de la dent et la hauteur de la saillie de la dent vis-à-vis du rayon primitif.

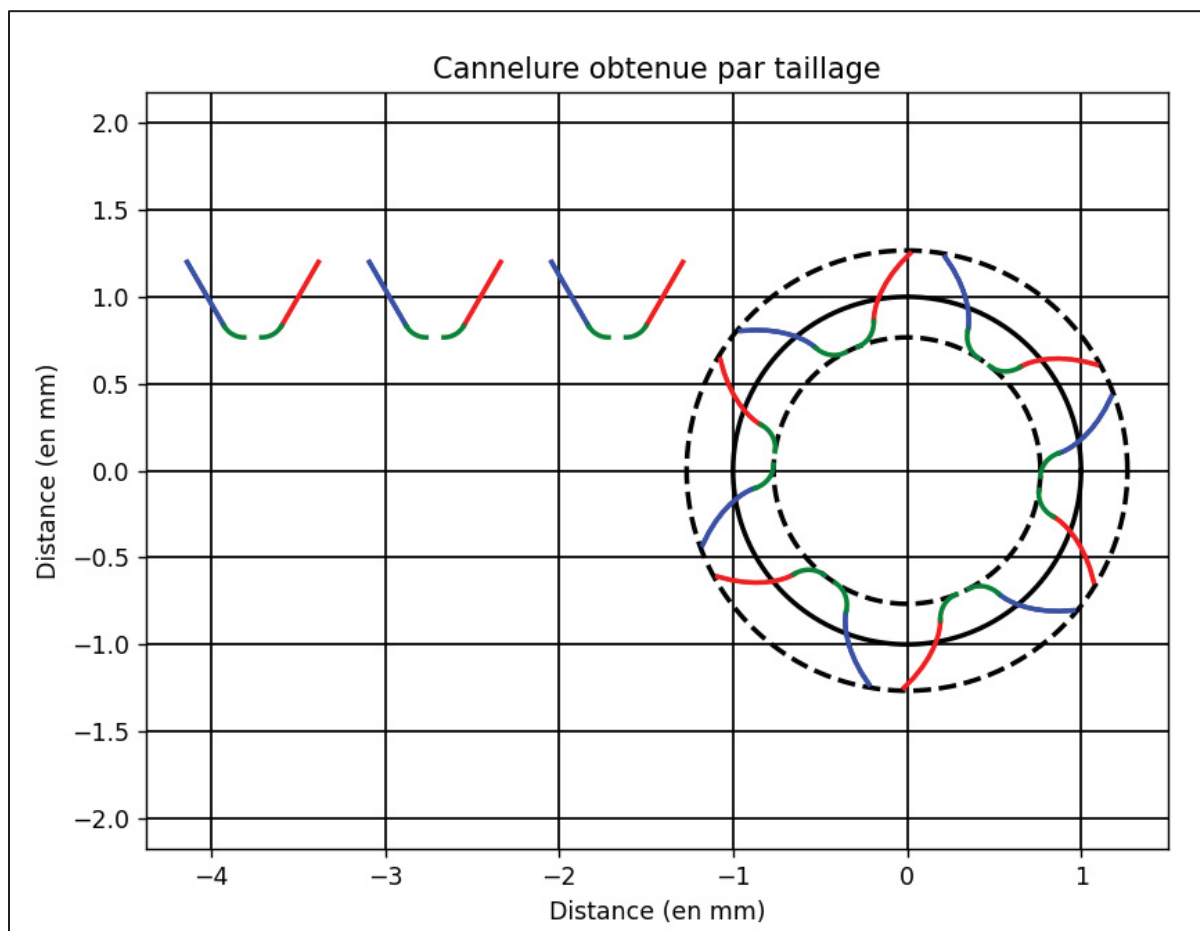


Figure 2.9 Obtention d'une cannelure par taillage

Le profil d'une dent se compose de trois zones distinctes, représentées en couleur sur la Figure 2.9. La développante de cercle, représentée en bleu et violet sur la Figure 2.9, est la zone de contact des cannelures. Seul un des deux flancs est en contact selon le sens du couple appliqué. Le pied de dent se définit à l'aide d'une trochoïde (en vert) engendrée par les congés présents sur la crémaillère. Enfin, des arcs de cercle définissent le creux et la tête de la dent. Les cercles de référence (rayon primitif, de pied de dent et de tête de dent) apparaissent en noir sur la Figure 2.9.

La génération numérique de ces profils repose sur la transformation qui associe à chaque point $M = (M_x, M_y)$ de l'outil crémaillère le point correspondant sur la dent. Pour un point situé sur le flanc rectiligne d'inclinaison k , avec $k = \arctan(\alpha_D)$, cette transformation donne :

$$D = -M_x + k * (R_p - M_y) \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} Ap_x = k * (R_p - M_y) \\ Ap_y = M_y \end{cases} \quad (2.11)$$

$$R_\alpha = \sqrt{Ap_x^2 + Ap_y^2} \quad (2.12)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{Ap_x}{Ap_y}\right) - \frac{D}{R_p} + \frac{\pi}{2} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} A_x = R_\alpha * \cos(\gamma) \\ A_y = R_\alpha * \sin(\gamma) \end{cases} \quad (2.14)$$

L'application successive des équations (2.10) à (2.14) permet d'obtenir les coordonnées du point A sur le profil de la dent, avec $R_p = \frac{mz}{2}$ le rayon primitif, γ l'angle parcouru par l'arbre au fur et à mesure de l'approche de l'outil et D la distance parcourue par la crémaillère comme le présente la Figure 2.10.

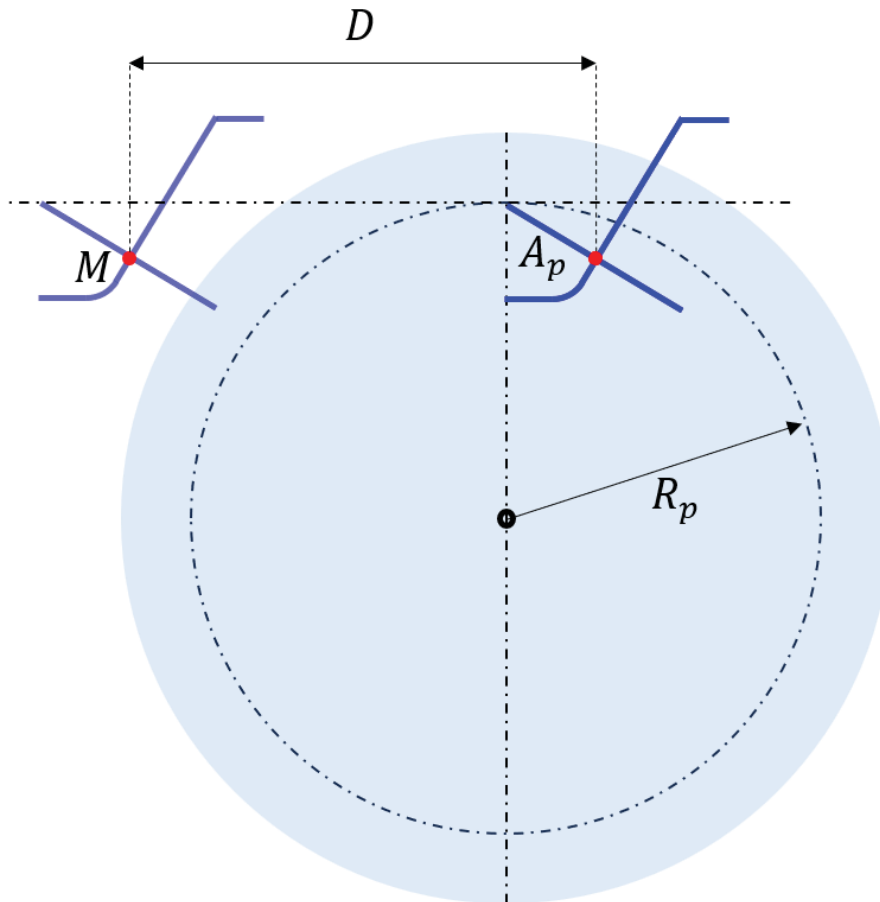


Figure 2.10 Mise en équation du taillage

La trochoïde s'obtient en appliquant cette même transformation à chaque point du congé de l'outil de rayon ρ_f .

La cannelure mâle (arbre, Figure 2.11) et la cannelure femelle (moyeu, Figure 2.12) présentent des géométries distinctes bien qu'engendrées par le même principe de taillage.

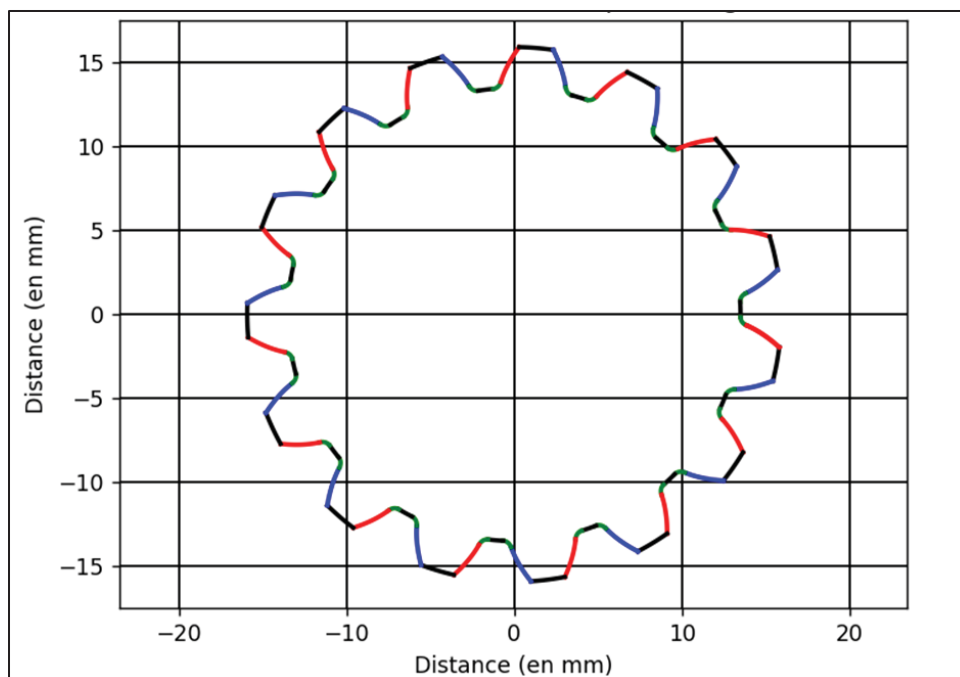


Figure 2.11 Cannelure mâle obtenue par taillage

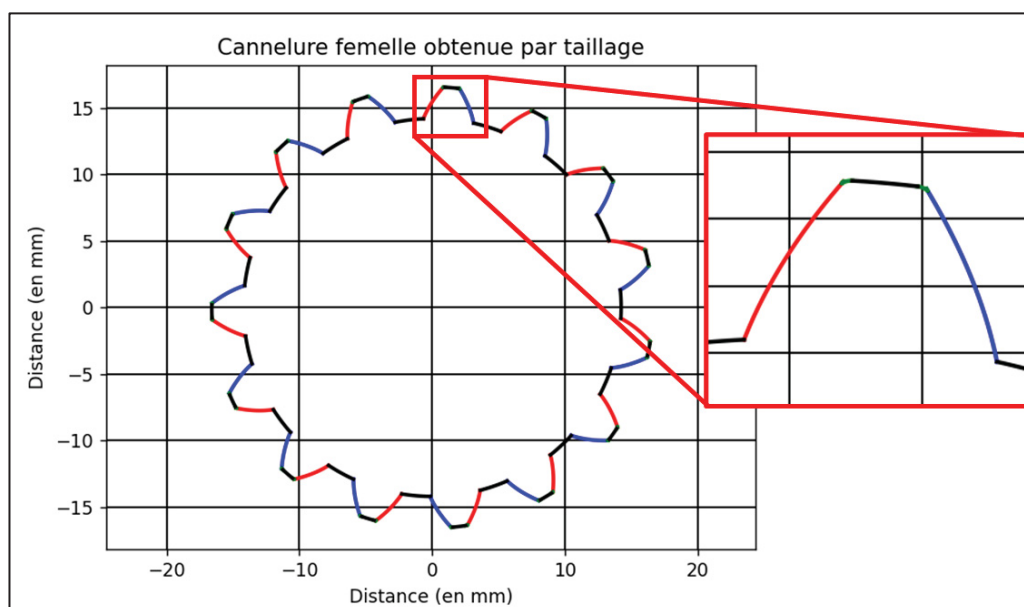


Figure 2.12 Cannelure femelle obtenue par taillage

Les déplacements calculés par l'algorithme de contact étant de l'ordre du micromètre, la géométrie des surfaces doit être connue avec une précision supérieure. Pour chaque cellule du

maillage, une évaluation par points discrets suivie d'une interpolation introduirait une erreur géométrique d'ordre de grandeur comparable. Pour éliminer cette source d'imprécision, une fonction inverse analytique détermine les coordonnées exactes sur la développante de cercle pour un rayon donné r . Les équations (2.10) à (2.14) permettent d'obtenir :

$$\alpha_y = \frac{k^2 * r + \sqrt{(k^2 + 1) * R^2 - k^2 * r^2}}{k^2 + 1} \quad (2.15)$$

Puis α_x se déduit de la relation de droite. Le point de l'outil utile est donc connu et les coordonnées du point associé sur la dent peuvent être déterminées comme précédemment. Cette inversion analytique garantit l'exactitude des coordonnées de la développante de cercle. Pour la trochoïde, l'absence de forme analytique inverse conduit à une méthode par encadrement successif : l'arc du congé de l'outil est progressivement resserré autour du segment contenant le rayon cible. Le contact n'étant pas censé se produire sur la trochoïde, l'erreur commise, inférieure à 10^{-8} mm, sur les coordonnées de la trochoïde, est acceptable.

Enfin une rotation de l'ensemble de la géométrie obtenue peut être réalisée afin de trouver une symétrie selon un axe défini ou bien afin d'orienter l'arbre dans une certaine direction pour lui appliquer un désalignement par la suite.

La Figure 2.13 illustre les diamètres dimensionnants définis par la norme ISO 4156 ainsi que le jeu présent entre l'arbre et le moyeu. L'arbre porte des dents externes dont la développante de cercle s'étend de la trochoïde jusqu'au diamètre de tête de dent D_{ee} . Le creux entre deux dents de l'arbre correspond au diamètre D_{ie} . Le moyeu présente des dents internes dont la développante s'étend du diamètre de tête D_{ii} à la trochoïde en pied de dent. Le creux de dent correspond ici au diamètre D_{ei} .

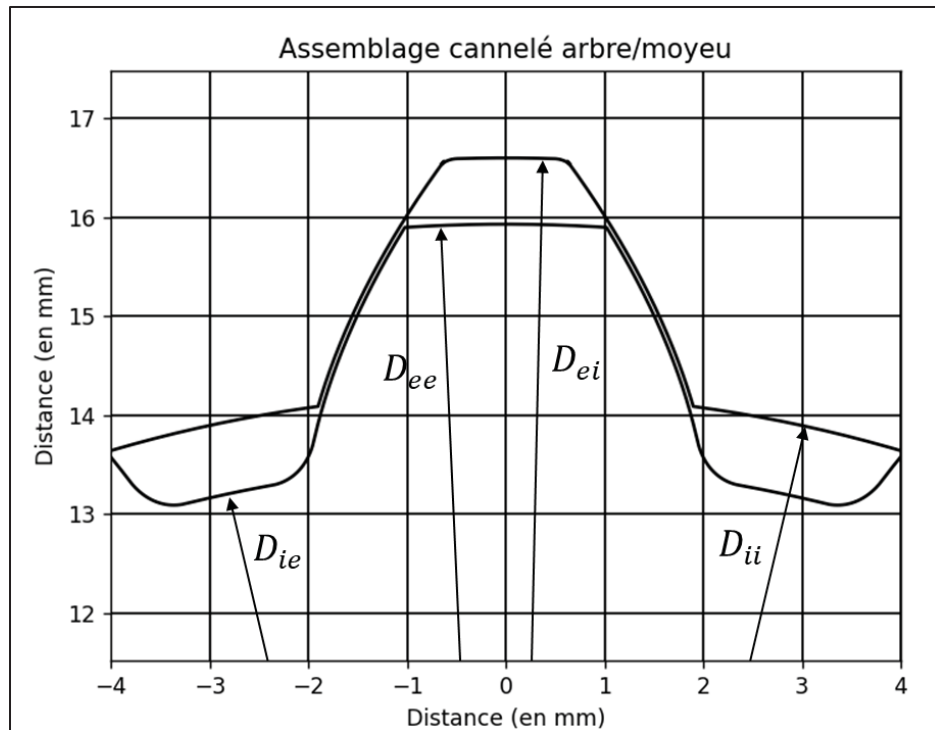


Figure 2.13 Diamètres des cannelures

2.2.3 Modélisation du désalignement

Dans une liaison cannelée en service, l'axe de l'arbre et l'axe du moyeu ne sont généralement pas parfaitement coaxiaux. Ce désalignement, illustré par la Figure 2.14, modifie la séparation initiale entre les surfaces de chaque dent et conditionne donc la distribution de pression le long de la cannelure. La géométrie de l'arbre et du moyeu sont définies dans leur repère respectif, nommés R_a et R_m dont les axes y sont confondus avec l'axe de l'arbre et du moyeu. Le repère de l'arbre est confondu avec le repère global R tandis que le repère du moyeu est lui déplacé de manière à reproduire le désalignement souhaité. Le modèle de contact intègre un désalignement général du moyeu vis-à-vis de l'arbre, pris comme référence, décrit par quatre paramètres : trois translations (t_x, t_y, t_z) et une rotation d'angle θ autour de l'axe x .

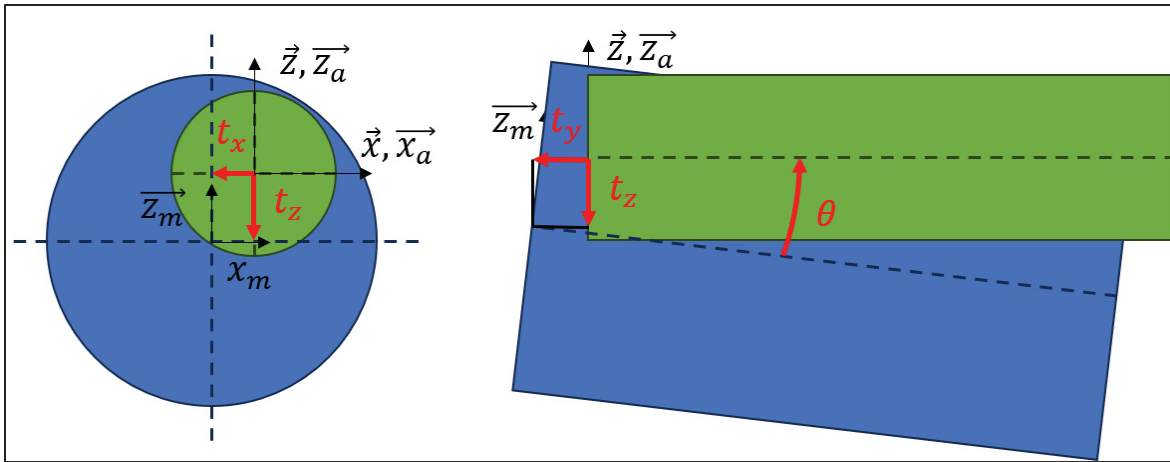


Figure 2.14 Définition du désalignement

Les trois translations permettent de décrire le désalignement du moyeu par rapport à l'arbre selon chacune des directions de l'espace, définies par rapport au repère global. La translation t_y , parallèle à l'axe de la cannelure, déplace l'ensemble du moyeu axialement. Les translations t_x et t_z déplacent le moyeu radialement dans les deux directions perpendiculaires à l'axe.

La rotation d'angle θ caractérise le désalignement angulaire entre les deux axes, celle-ci se fait par rapport à l'origine du repère situé en bout de cannelure, sur l'axe de rotation de l'arbre. Le désalignement angulaire entre l'axe de l'arbre et celui du moyeu peut être décrit par un angle unique dans un plan donné. En plaçant le repère de calcul de sorte que ce plan coïncide avec le plan (x, y) , la rotation se réduit à une rotation d'angle θ autour de l'axe x uniquement. Cette simplification permet donc de garder possible la simulation de tout montage. L'algorithme exploite ce choix de repère pour éviter de paramétrer deux angles de rotation indépendants.

Chaque pièce conserve son propre axe de rotation. L'arbre tourne autour de son axe propre, qui est le repère global de l'algorithme, et le moyeu tourne autour du sien, légèrement incliné.

Comme illustré sur la Figure 2.15, un repère est placé pour chaque dent, celui-ci est issu du repère global via une rotation autour de l'axe y , il permet de venir positionner le maillage sur le plan tangent, à une distance R_m de l'origine du repère. Le repère de l'arbre est confondu

avec le repère global tandis que celui du moyeu a subi une rotation autour de l'axe x. La Figure 2.16 montre que pour chaque cellule du maillage, les coordonnées du point correspondant sur la surface du moyeu sont obtenues en transformant les coordonnées du centre de la cellule de maillage dans le repère du moyeu, puis en projetant ce point sur la surface réelle par une rotation autour de l'axe de rotation du moyeu.

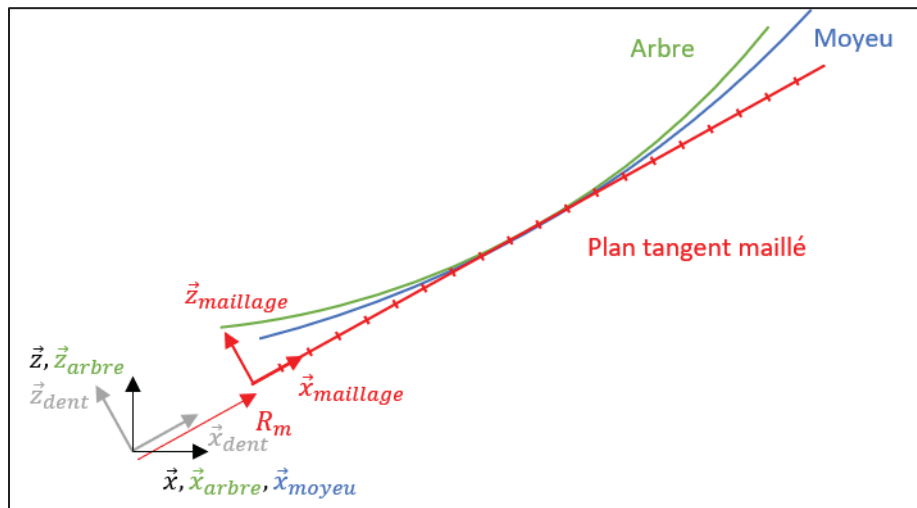


Figure 2.15 Définition des géométries dans le repère de la dent

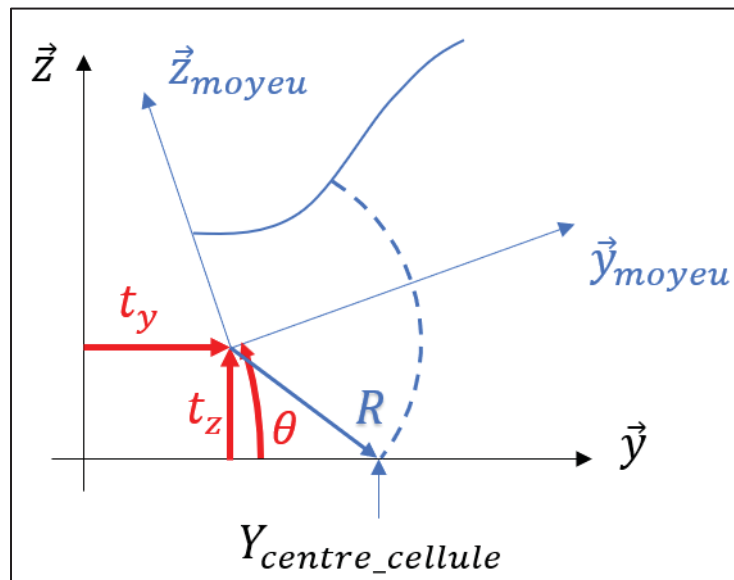


Figure 2.16 Projection du maillage sur la surface du moyeu

La Figure 2.17 présente les séparations initiales sur chacune des dents entre le flanc de l'arbre et du moyeu, le long du rayon. Elle met en évidence les effets d'un désalignement purement angulaire autour de l'axe x, de 0,0001 rad sur les séparations initiales avant d'appliquer le chargement. Ces séparations sont calculées sur l'assemblage présenté en Figure 2.18. Ainsi, un faible angle θ implique un contact entre les deux cannelures uniquement sur l'extrémité de la dent 2 avant le chargement.

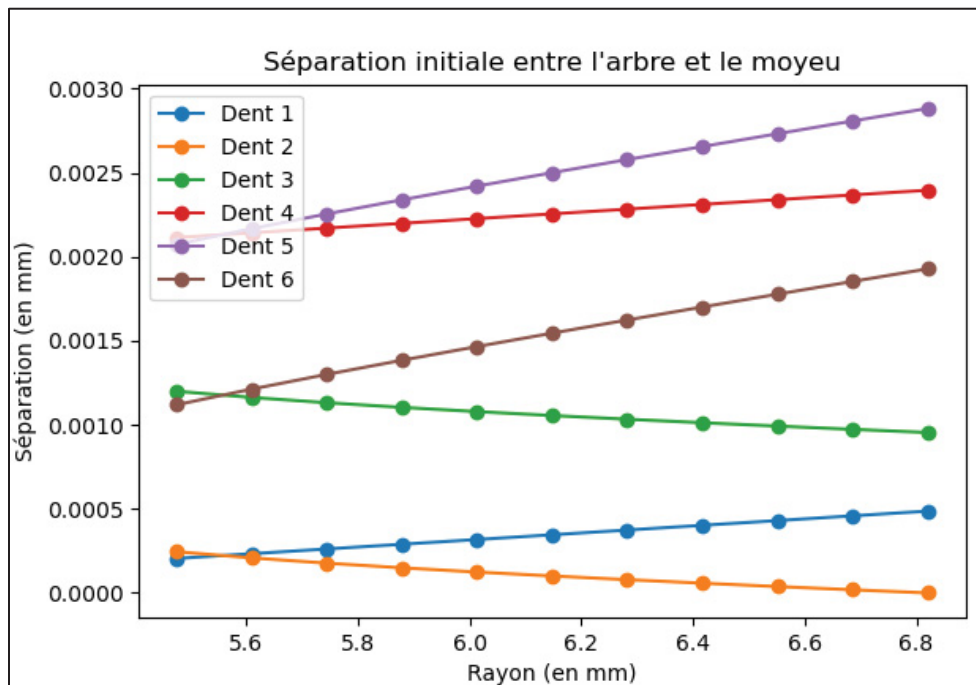


Figure 2.17 Séparation initiale pour un désalignement de 0,0001 rad

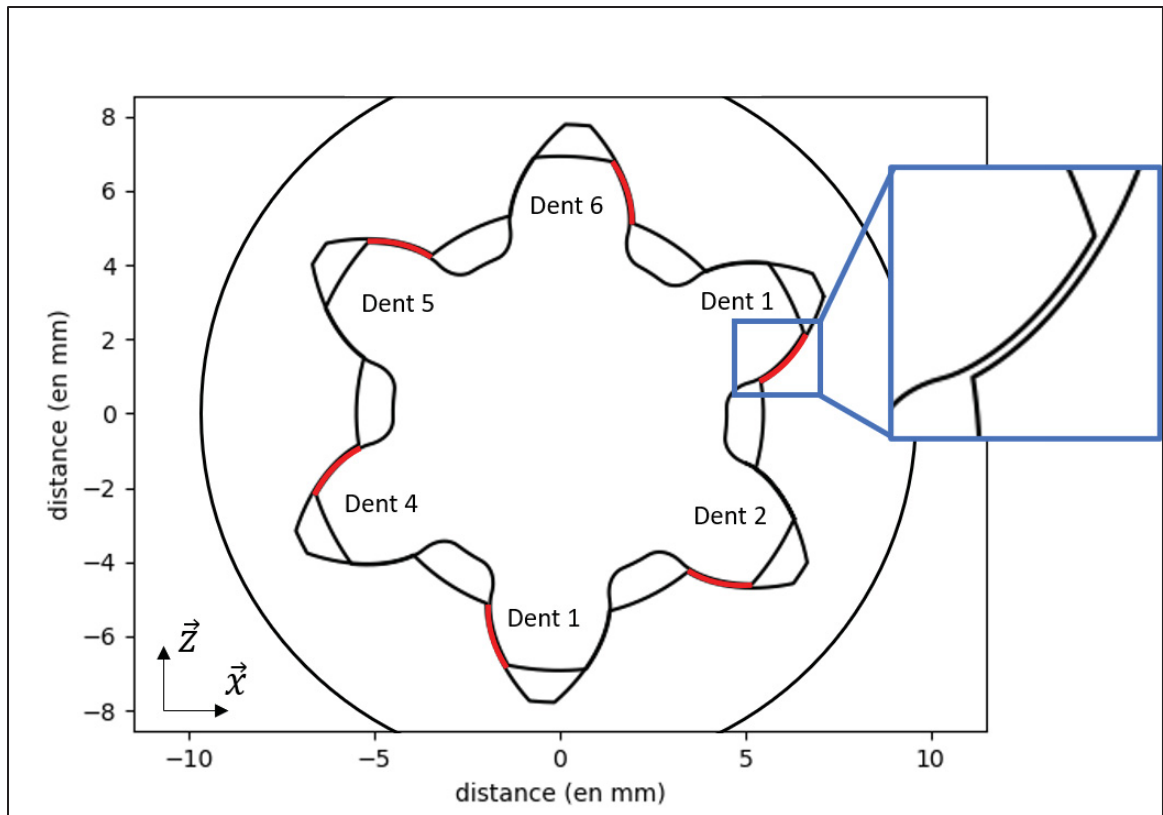


Figure 2.18 Géométrie et numérotation des dents utilisées pour les mesures des séparations initiales

2.3 Correction des effets de bord

La théorie de Boussinesq repose sur l'hypothèse de deux solides semi-infinis sans surfaces libres autres que le plan de contact. Appliquée sans correction à un corps de dimensions finies, elle génère des contraintes de cisaillement non nulles sur les surfaces libres, ce qui conduit à une surestimation des déplacements et des pressions au voisinage des bords du contact. Dans le cas des cannelures, chaque dent présente trois surfaces libres : les deux extrémités axiales (aux bords de la longueur de la cannelure) ainsi que la tête de dent.

La correction employée pour ces surfaces repose sur les travaux de Guilbault (2011), qui propose une méthode applicable au quart-espace tridimensionnel sans augmentation notable du temps de calcul. Pour relâcher les contraintes de cisaillement sur une surface libre, une

distribution de pression miroir par rapport à la surface libre est appliquée, suivant le principe de Hetényi. Cette opération annule les contraintes de cisaillement sur la surface libre mais double les contraintes normales. Pour compenser cet effet, Guilbault introduit un facteur correcteur $\psi(\nu)$ donné par l'équation (2.16), fonction du coefficient de Poisson, qui multiplie la pression miroir. Ce facteur fournit une sur-correction de la contribution des contraintes de cisaillement qui compense l'effet résiduel des contraintes normales ajoutées par l'hypothèse des espaces semi-infinis, et réduit significativement l'erreur sur les déplacements calculés aux bords.

La Figure 2.19 illustre ce principe dans le cas d'un quart-espace tridimensionnel : chaque cellule source de pression P est associée à quatre cellules miroir de poids $\psi * P$, positionnées symétriquement par rapport à chacune des quatre surfaces libres (représentées en bleu) du domaine rectangulaire. Guilbault (2011) définit le facteur ψ tel que :

$$\psi(\nu) = 1.29 - \frac{0.08 - 0.5 * \nu}{1 - \nu} \quad (2.16)$$

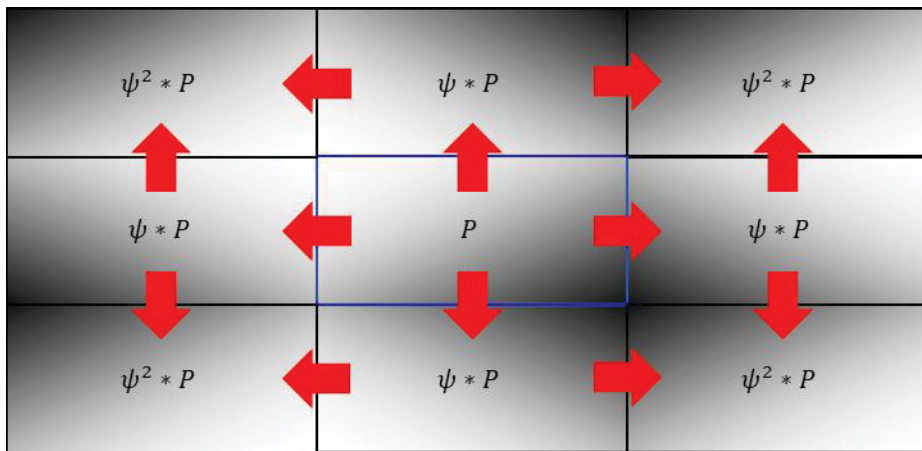


Figure 2.19 Méthode de suppression des effets de bords par miroir

Dans le cas des cannelures sans désalignement, la zone de contact sur le flanc de la dent est rectangulaire : elle s'étend sur toute la longueur axiale L de la cannelure et sur toute la hauteur radiale du flanc.

Lorsqu'un désalignement angulaire θ est introduit, les surfaces libres ne sont plus parallèles au maillage, la Figure 2.20 présente la zone de contact (en vert) et ses cellules associées (en bleu foncé) sur le maillage utilisé (ensemble des cellules bleues foncées et claires).

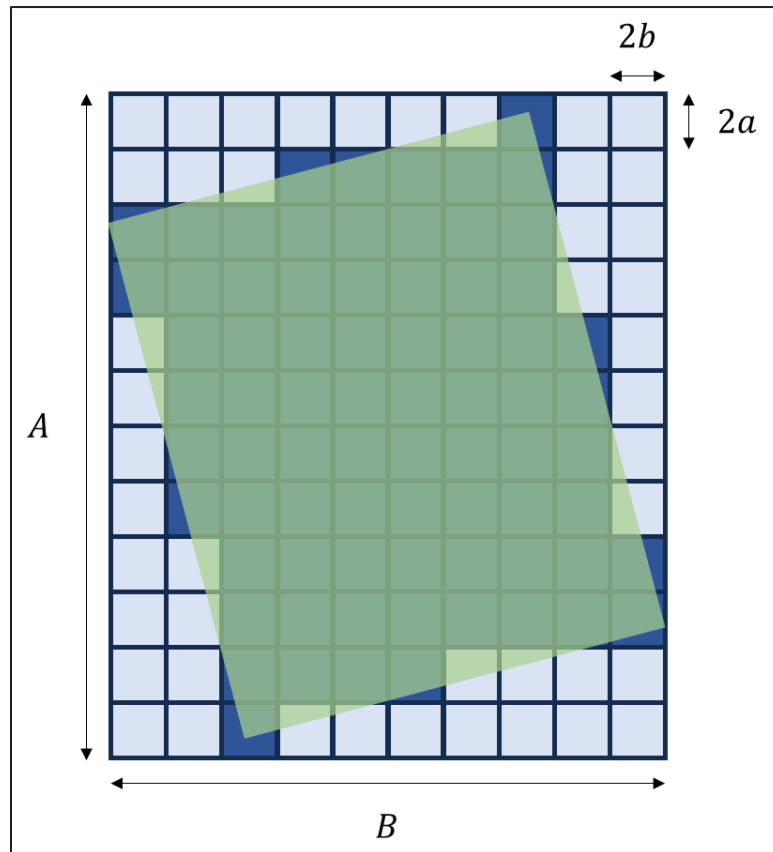


Figure 2.20 Maillage d'une géométrie désalignée

Bien que θ soit faible pour les désalignements usuels, la position de chaque surface libre varie selon la ligne ou la colonne du maillage considérée. Un miroir est donc appliqué indépendamment sur chaque ligne ou colonne comme le montrent respectivement la Figure 2.21 et la Figure 2.22 où l'on retrouve les cellules miroir en orange.

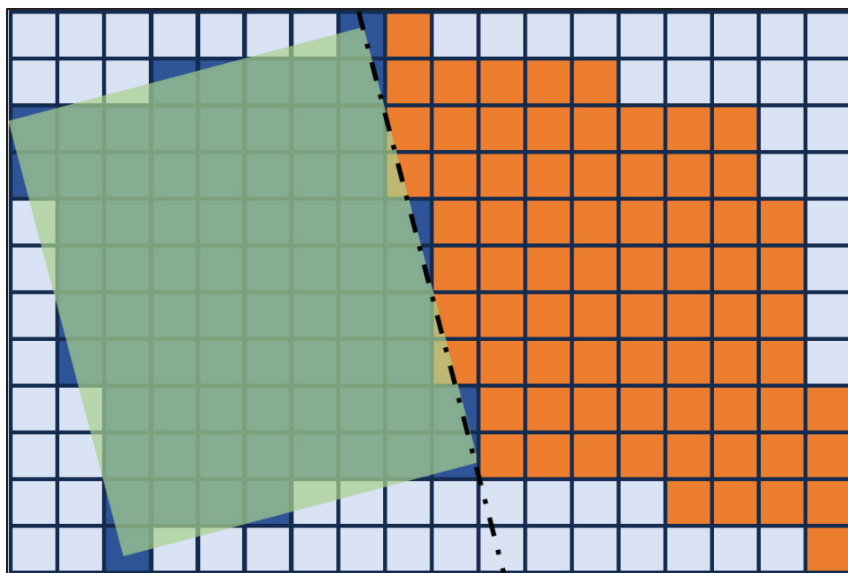


Figure 2.21 Miroir latéral de la pièce

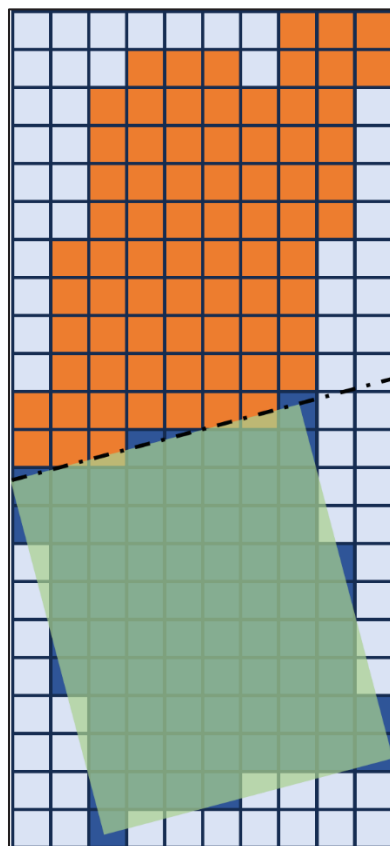


Figure 2.22 Miroir supérieur de la pièce

Selon cette méthode, le décalage du miroir est pris en compte, mais non la variation de son orientation. Les faibles angles de désalignement considérés permettent de justifier l'hypothèse de négliger cette variation. Par ailleurs, plus le maillage est fin, plus cette erreur est réduite.

Pour la géométrie initiale, sans miroir, la fonction d'influence est alors décomposée de la manière suivante, la fonction $\tilde{f}$ définie en équation (2.8) se calcule pour une cellule avec les bornes d'intégration selon x et y suivantes :

$$\tilde{f}_{central}(X, Y, Z, [x - b, x + b], [y - a, y + a], z) \quad (2.17)$$

Où (X, Y, Z) et (x, y, z) sont respectivement les coordonnées de la cellule (i, p) où le déplacement est calculé et de la cellule (k, j) où la pression est appliquée ; a et b les demi-dimensions de la cellule dans les directions axiale et radiale, et A et B les dimensions du maillage. On retrouve ainsi l'intégration de la force appliquée au centre de la cellule (x, y, z) entre les bornes $(-a; a)$ et $(-b, b)$ sur x et y respectivement. La coordonnée z utilisée pour une cellule miroir est égale à la coordonnée z de la cellule pour laquelle le miroir est réalisé.

Pour le miroir inférieur de la colonne i, les bornes d'intégration de x et y deviennent :

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_{inf_i}(X, Y, Z, [x - b, x + b], \\ &[-y + 2 * mir_{inf_i} * 2 * a - a, -y + 2 * mir_{inf_i} * 2 * a + a], z) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Où mir_{inf_i} représente le nombre de cellules situées au bas du maillage n'appartenant pas à la zone de contact pour la colonne i.

Pour le miroir supérieur de la colonne i, on obtient :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{sup_i}(X, Y, Z, [x - b, x + b], \\ & [2 * A - y - 2 * mir_{sup_i} * 2 * a - a, 2 * A - y - 2 * mir_{sup_i} * 2 * a + a], z) \end{aligned} \quad (2.19)$$

De la même manière, ici mir_{sup_i} représente le nombre de cellules situées en haut du maillage n'appartenant pas à la zone de contact pour la colonne i.

Pour le miroir de droite de la ligne p, les bornes d'intégrations sont :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{d_i}(X, Y, Z, \\ & [2 * B - x - 2 * mir_{d_p} * 2 * b - b, 2 * B - x - 2 * mir_{d_p} * 2 * b + b], \\ & [y - a, y + a], z) \end{aligned} \quad (2.20)$$

En faisant l'analogie avec le miroir supérieur et inférieur, mir_{d_p} représente le nombre de cellules situées à droite du maillage n'appartenant pas à la zone de contact pour la ligne p.

Enfin, pour le miroir de gauche, elles deviennent :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{g_i}(X, Y, Z, [-x + 2 * mir_{g_p} * 2 * b - b, -x + 2 * mir_{g_p} * 2 * b + b], \\ & [y - a, y + a], z) \end{aligned} \quad (2.21)$$

De même, mir_{g_p} représente le nombre de cellules situées à gauche du maillage n'appartenant pas à la zone de contact pour la ligne p.

En considérant la zone de contact en rouge sur la Figure 2.23 comme étant la zone de maillage, les équations (2.22) et (2.23) décrivent les fonctions d'influence incluant les corrections pour l'arbre et le moyeu respectivement :

$$\tilde{f}_{arbre} = \tilde{f}_{central} + \tilde{f}_{inf_i} + \tilde{f}_{sup_i} + \tilde{f}_{d_i} \quad (2.22)$$

$$\tilde{f}_{moyeux} = \tilde{f}_{central} + \tilde{f}_{inf_i} + \tilde{f}_{sup_i} + \tilde{f}_{g_i} \quad (2.23)$$

Les miroirs s'appliquant uniquement sur les surfaces libres, il n'y a donc pas de miroir en pied de dent, ce qui explique que seul le miroir droit soit utilisé sur l'arbre, et seul le miroir gauche soit utilisé pour le moyeu.

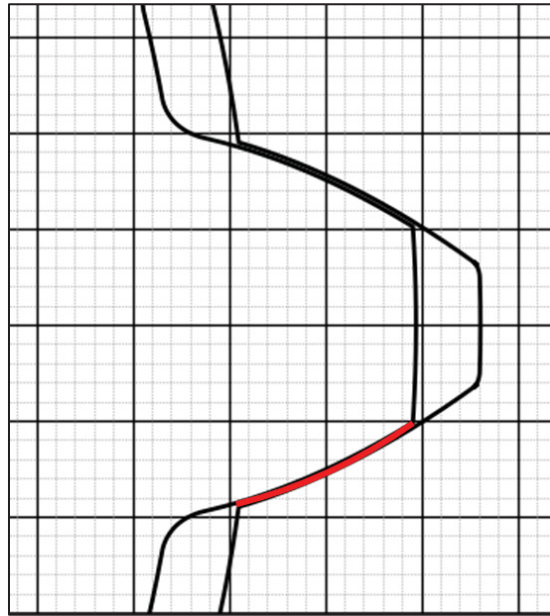


Figure 2.23 Zone de maillage

Afin de valider l'effet des deux corrections apportées : la réalisation des miroirs couplés au coefficient ψ , le même cas de simulation qu'en section 2.1.3 est utilisé. Les surfaces libres étant les extrémités des cylindres, un miroir du champ de pression coefficienté par ψ est réalisé pour chacune d'elles comme présenté dans la Figure 2.24.

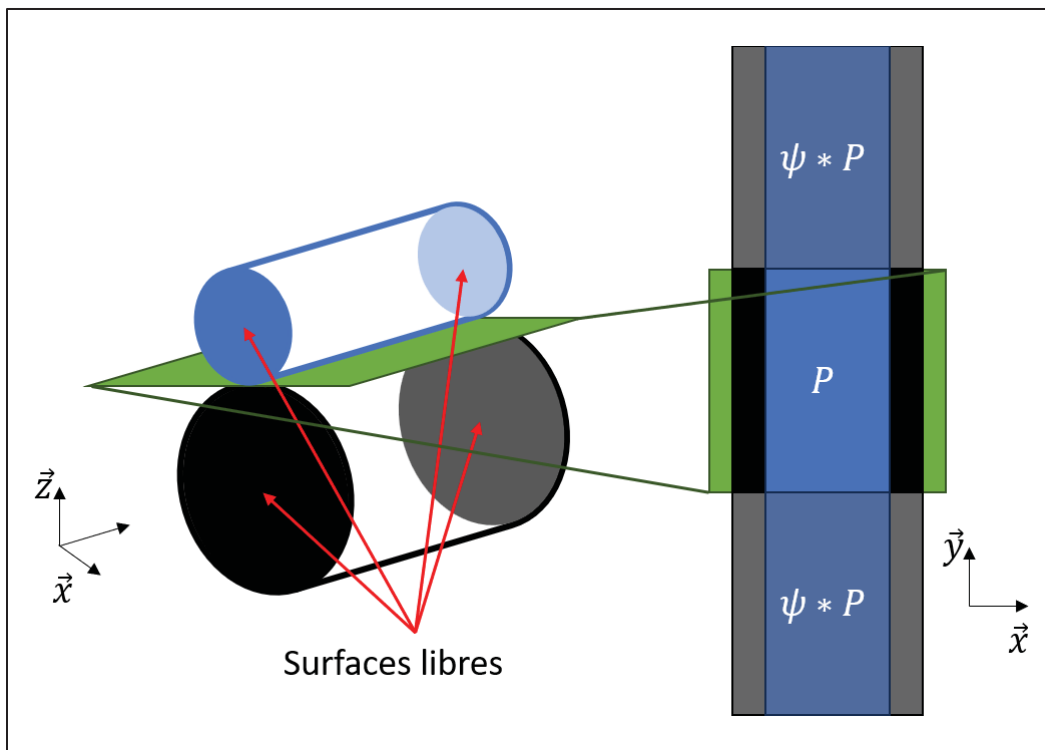


Figure 2.24 Réalisation des miroirs

La Figure 2.25 présente les champs de pression obtenus sans correction à gauche et avec correction à droite. Comme attendu, la pression qui présentait des pics aux bords des surfaces libres, présente une réduction une fois les corrections appliquées qui traduit le fait qu'il n'y ait pas de matière de l'autre côté de la surface.

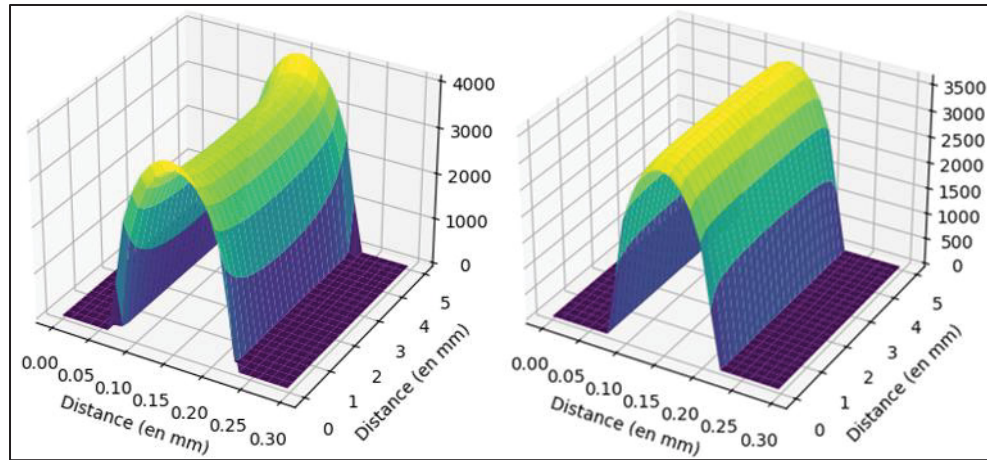


Figure 2.25 Champ de pression 3D sans correction à gauche et avec correction à droite

2.4 Efforts tangentiels et formulation de Cerruti

La formulation de Hartnett présentée jusqu'ici ne tient compte que des efforts normaux dans le calcul du déplacement des surfaces. Or, dans une liaison cannelée désalignée, des glissements importants apparaissent et le frottement engendre des tractions tangentiels dont l'effet sur le déplacement normal ne peut être négligé.

La démarche présentée par Guilbault (2000), qui s'appuie sur la formulation de Cerruti, part de l'expression du déplacement normal en surface d'un solide semi-infini produit par une force tangentielle Q_x concentrée selon la direction x :

$$w_z(Q_x) = Q_x * \frac{1 - 2 * \nu}{4 * \pi * G * r} \quad (2.24)$$

Où G est le module de cisaillement, ν le coefficient de Poisson et r la distance entre le point d'application de la force et le point où le déplacement est mesuré. L'intégration de cette expression sur une région rectangulaire $2a \times 2b$ conduit à la fonction d'influence tangentielle $u_{x_{ip,kj}}$ associée au déplacement selon $\vec{z}$ lié à une traction orientée selon $\vec{x}$ (Guilbault, 2000).

$$\begin{aligned}
u_{x_{ip,kj}} = & -0.5 \left(-Y * \log((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2) \right. \\
& + 2\sqrt{(x - X)^2 + (z - Z)^2} \\
& * \arctan\left(\frac{(y - Y)}{\sqrt{(x - X)^2 + (z - Z)^2}}\right) \\
& \left. + y * \ln((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2) - 2 * y \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Une seconde fonction d'influence tangentielle $u_{y_{ip,kj}}$ est construite de façon analogue pour la traction orientée selon y, afin de prendre en compte l'ensemble des efforts tangentiels présents sur la surface. Le déplacement normal total au point (i, p) est alors obtenu en cumulant les contributions normales et tangentielles :

$$w_{ip} = \sum_k^n \sum_j^m \left(P_{kj} * f_{ip,kj} + Q_{x_{kj}} * u_{x_{ip,kj}} + Q_{y_{kj}} * u_{y_{ip,kj}} \right) \tag{2.26}$$

Avec μ le coefficient de frottement considéré constant sur l'ensemble de la surface et β_{kj} l'angle présent entre l'axe $\vec{x}$ et la direction du glissement de la cellule (k, j). Un glissement total est supposé dans l'ensemble de la zone de contact, ce qui revient à négliger toute zone d'adhérence.

Pour chaque centre de cellule, le déplacement relatif entre les surfaces est évalué entre deux pas de calcul successifs, séparément côté arbre et côté moyeu. La direction du glissement β fixe l'orientation locale de la traction tangentielle et permet d'en projeter l'amplitude selon les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ liés à chacune des fonctions d'influence. La norme intervient pour sa part dans le calcul de l'usure développé au CHAPITRE 4.

L'équation suivante définit le lien entre l'effort normal et les efforts tangentiels :

$$\begin{cases} Q_{x_{kj}} = \mu * P_{kj} * \cos(\beta_{kj}) \\ Q_{y_{kj}} = \mu * P_{kj} * \sin(\beta_{kj}) \end{cases} \quad (2.27)$$

Les corrections d'effets de bord ne sont pas réappliquées au niveau de la fonction d'influence tangentielle. Cette dernière prend en entrée le champ de pression normale, qui a déjà été corrigé lors de son calcul via la fonction d'influence normale $\tilde{f}$.

La Figure 2.26 présente la validation de la fonction d'influence tangentielle. Le déplacement normal d'un solide semi-infini soumis à deux bandes de traction tangentielle uniforme d'orientations opposées est calculé analytiquement à l'aide de la fonction $u_{x_{ip,kj}}$ et comparé aux résultats d'une simulation par éléments finis réalisée avec Ansys. L'accord entre les deux résultats confirme la validité de la fonction d'influence tangentielle implémentée dans l'algorithme.

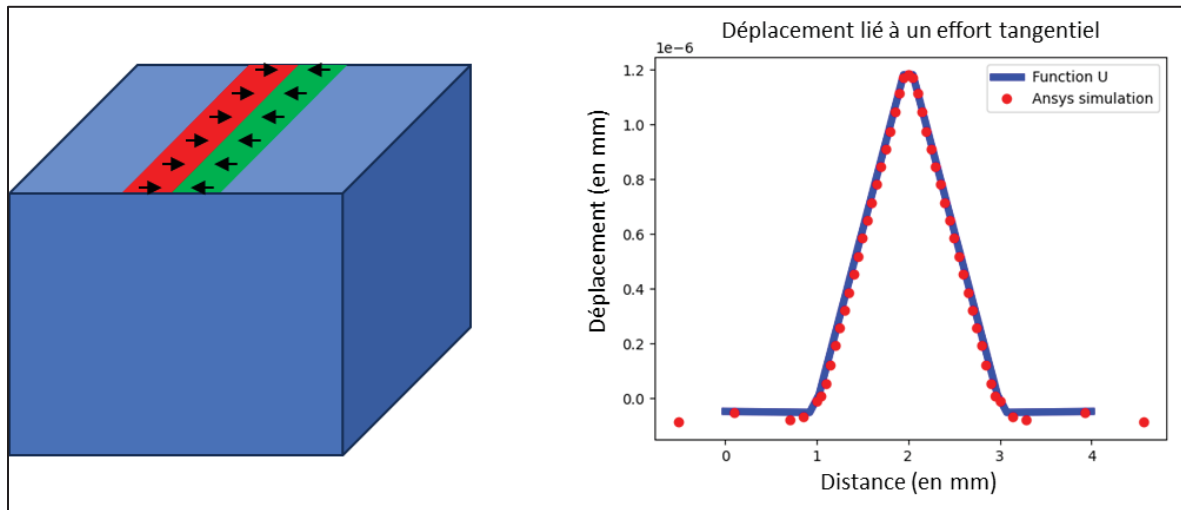


Figure 2.26 Validation des efforts tangentiels par éléments finis

L'algorithme prend ainsi en compte le couplage entre frottement et déplacement normal, et dispose des grandeurs cinématiques (norme et direction du glissement) nécessaires à la modélisation ultérieure de l'usure.

2.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté le développement d'un algorithme de modélisation du contact dans les cannelures désalignées, fondé sur la théorie de Boussinesq et s'inspirant de l'approche numérique de Hartnett (1980). Plusieurs adaptations ont été apportées pour répondre aux spécificités de cette liaison : la prise en compte du caractère conforme du contact, la génération de la géométrie des dents selon la norme ISO 4156, l'introduction du désalignement angulaire et axial entre l'arbre et le moyeu, la correction des effets de bord par la méthode des miroirs ainsi que l'intégration des efforts tangentiels de frottement par les fonctions d'influence de Cerruti. L'algorithme résultant permet de calculer les champs de pression et de déplacement sur l'ensemble des dents en contact pour un couple transmis donné.

La modélisation du contact développée dans ce chapitre constitue le noyau du modèle global de la liaison cannelée. Pour représenter fidèlement son comportement, il est nécessaire d'y intégrer les déformations structurelles. Le chapitre suivant présente à cet effet la modélisation de la déformation des dents ainsi que de la torsion de l'arbre et de la jante du moyeu.

CHAPITRE 3

Modélisation des déformations structurales

L'algorithme développé au CHAPITRE 2 calcule la distribution des pressions de contact entre les flancs des dents en supposant que les dents, l'arbre et le moyeu se comportent comme des solides rigides en dehors de la zone de contact surfacique. Or, sous l'effet des pressions transmises, chaque dent se déforme par flexion, torsion, cisaillement et compression, modifiant localement la géométrie de sa surface et donc les jeux entre dents en contact. À l'échelle globale, le couple transmis tord l'arbre et le moyeu sur leur longueur induisant un déplacement tangentiel qui redistribue les jeux sur l'ensemble de la longueur d'engrènement. Ces deux contributions doivent donc être intégrées à l'algorithme.

La modélisation de la déformation des dents constitue le premier défi abordé dans ce chapitre. La géométrie complexe d'une dent de cannelure rend difficile l'établissement d'une formulation analytique liée à la RDM. De plus, il faudrait que celle-ci soit valable pour l'ensemble des géométries de la norme ISO 4156. Dans sa thèse, Hong (2015) utilise la méthode des plaques épaisses qui permet d'obtenir les déplacements via des équations. Cette méthode-là implique d'assimiler la dent à une plaque conique et de devoir calculer la translation et la rotation de la base de la dent de manière séparée. Une base de données de simulations éléments finis est donc construite pour couvrir l'espace des paramètres géométriques industriels pertinents. Ensuite, des réseaux de neurones sont entraînés sur cette base de données afin de prédire les déplacements liés à des efforts unitaires. La modélisation de la torsion de l'arbre et du moyeu constitue le second défi, la section cannelée ne se prête pas à l'application directe de la formule analytique de torsion d'un cylindre. Un rayon de cylindre équivalent est alors déterminé sur des simulations éléments finis. Ce modèle s'intègre à l'algorithme selon la même stratégie itérative que celle adoptée pour les déformations de dents.

3.1 Modélisation de la déformation des dents

La flexion, la torsion, le cisaillement et la compression des dents modifient la géométrie des surfaces en contact à l'échelle de la dent entière et créent un couplage supplémentaire avec la distribution de pression qu'il est nécessaire d'intégrer dans le modèle. La difficulté réside dans la complexité géométrique des dents. La section transversale d'une dent de cannelure qui varie avec le module, est formée d'un flanc en développante de cercle, d'une trochoïde en pied et d'un arc de cercle en tête qui relie les deux flancs. La déformée qui en résulte sous un chargement de contact quelconque ne se prête pas à une expression analytique. Pour le moyeu, l'épaisseur de jante constitue un paramètre supplémentaire qui gouverne la rigidité de la couronne et dont l'influence sur la déformée des dents s'ajoute à celle des paramètres géométriques précédents.

Une approche par éléments finis permettrait de calculer cette déformée avec précision pour n'importe quelle géométrie donnée. Cependant, l'intégrer directement dans l'algorithme de contact itératif représente un coût de calcul prohibitif : une évaluation de la déformée est requise à chaque itération, pour un grand nombre de configurations de chargement différents. Par ailleurs, chaque nouvelle géométrie de cannelure exigerait de relancer de nouvelles simulations.

La déformée des dents est donc prédite par un ensemble de réseaux de neurones entraîné sur une large base de données de simulations éléments finis, ce qui permet d'obtenir une prédiction quasi-instantanée pour toute géométrie et tout chargement compris dans l'espace d'entraînement.

Cette approche soulève deux défis principaux, définir un plan d'expérience qui couvre l'ensemble des géométries de cannelures normalisées tout en maintenant le nombre de simulations à un niveau réalisable. Il est aussi nécessaire d'isoler la déformation de la dent afin de ne pas prendre en compte la torsion de l'arbre ou du moyeu.

Dans sa thèse, Hong (2015) néglige complètement l'effet d'une dent sur ses dents voisines, or le choix fait pour l'algorithme est de considérer l'effet d'une dent sur la dent qui la précède et qui la suit. Ceci implique donc que le réseau de neurones puisse rendre compte de la déformation de la dent chargée ainsi que de ses deux voisines les plus proches.

3.1.1 Constitution d'une base de données éléments finis

La modélisation du comportement d'une dent de cannelure requiert une connaissance précise de son champ de déplacement en fonction de la géométrie, de la position de l'effort appliqué et du point de mesure. La construction d'une base de données par simulation éléments finis permet de couvrir l'ensemble des configurations géométriques nécessaires : elle associe à chaque combinaison de paramètres géométriques et de conditions de chargement les déplacements correspondants, qui seront ensuite utilisés pour entraîner les réseaux de neurones. Cette section présente d'abord comment les paramètres ont été définis pour représenter l'ensemble des géométries de cannelures industrielles pertinentes, puis comment la géométrie simulée a été simplifiée afin de rendre le volume de calcul nécessaire réalisable, et enfin l'exécution des simulations à grande échelle sur des serveurs de calcul haute performance.

3.1.1.1 Choix des paramètres et plan d'expérience

La déformée d'une dent de cannelure sous charge dépend de sa géométrie, de la position de l'effort appliqué et de la position du point de mesure. La géométrie d'une dent ISO 4156 repose sur trois paramètres indépendants : le module m , le nombre de dents z et la longueur de cannelure L . Le rayon primitif $R = m * \frac{z}{2}$ découle directement de m et z et ne constitue pas un paramètre supplémentaire.

Plusieurs paramètres restent fixés dans l'ensemble des simulations. L'angle de pression est défini à 30° conformément aux cannelures les plus répandues de la norme ISO 4156. Le coefficient de Poisson vaut $\nu = 0.3$. Le déport de denture t reste nul sur l'ensemble des

simulations. En régime d'élasticité linéaire, le déplacement d'un point de la dent est proportionnel à l'effort appliqué F et inversement proportionnel au module de Young E ; les déplacements stockés dans la base de données sont donc normalisés par le rapport F/E , ce qui permet de prédire les déplacements pour tout matériau élastique isotrope et toute intensité de chargement à condition de rester dans le domaine élastique du matériau.

La Figure 3.1 illustre les rayons caractéristiques du profil d'une dent : le rayon de pied de dent $R_{\text{pied}} = m * \left(\frac{z}{2} - 0.75\right)$ et le rayon de tête $R_{\text{tête}} = m * \left(\frac{z}{2} + 0.5\right)$. Le rayon $R_{\text{troch-dév}}$ définit la frontière entre la développante de cercle et la trochoïde.

Le paramètre ρ_F compris entre 0 et 1 définit le pourcentage de la hauteur de dent auquel est appliquée la force, il vaut donc 0 à $R_{\text{troch-dév}}$ et 1 au rayon de tête. Le paramètre ρ_D est défini de façon analogue pour le point de mesure du déplacement sur la développante de cercle. D'une manière générale, l'équation suivante définit la valeur ρ associée à un point de rayon r :

$$\rho_{F \text{ ou } D} = \frac{r_{F \text{ ou } D} - R_{\text{troch-dév}}}{R_{\text{tête}} - R_{\text{troch-dév}}} \quad (3.1)$$

Un point de mesure supplémentaire $\rho_{D_{\text{troch}}}$ est défini à mi-rayon de la trochoïde afin de rendre compte du déplacement dans cette zone. En effet, il peut être utile dans certains cas de connaître la déformation de la trochoïde.

Les positions du point d'application de l'effort et du point de mesure du déplacement se définissent tous deux par deux coordonnées, la hauteur sur la dent $\rho_{F \text{ ou } D}$ définie précédemment, ainsi que par la position axiale $\lambda_{F \text{ ou } D}$ selon l'axe z , normalisée par la longueur de la cannelure L :

$$\lambda_{F \text{ ou } D} = \frac{Z}{L} \quad (3.2)$$

Ces deux normalisations rendent les coordonnées sans dimension et indépendantes de la taille de la dent, ce qui permet de mesurer le champ de déplacement de toutes les dents de la même manière.

Comme le montre la Figure 3.1, les efforts sont appliqués sur un flanc de la dent et les déplacements sont mesurés sur le flanc opposé. Ceci permet de ne mesurer que les déplacements liés à la flexion, à la torsion, au cisaillement et à la compression de la dent et de ne pas prendre en compte les déplacements surfaciques liés au contact.

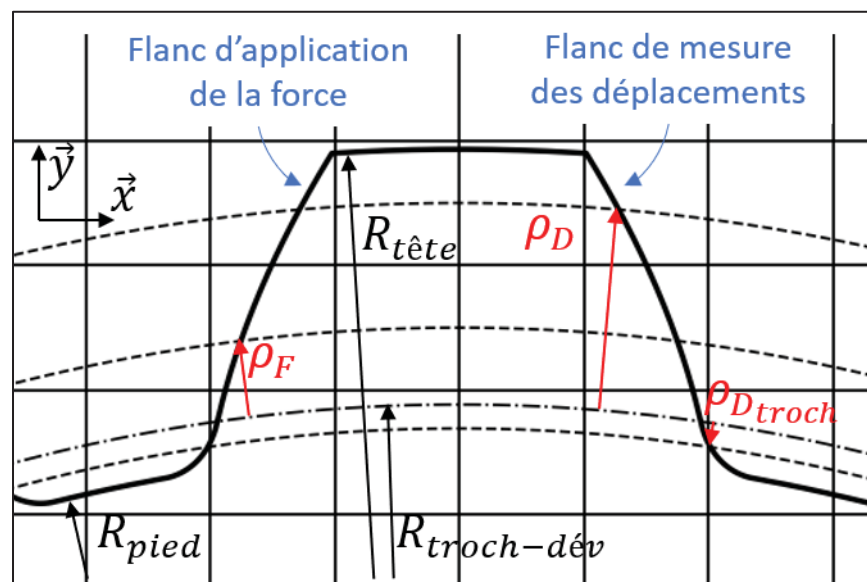


Figure 3.1 Définition des rayons

Les déplacements se mesurent en 30 points par dent (5 positions axiales $\times$ 6 positions radiales : 5 sur la développante de cercle et une à mi-rayon de la trochoïde) sur 3 dents, présentés sur la Figure 3.3, (la dent chargée ainsi que la précédente et la suivante), soit 90 points de mesure par simulation.

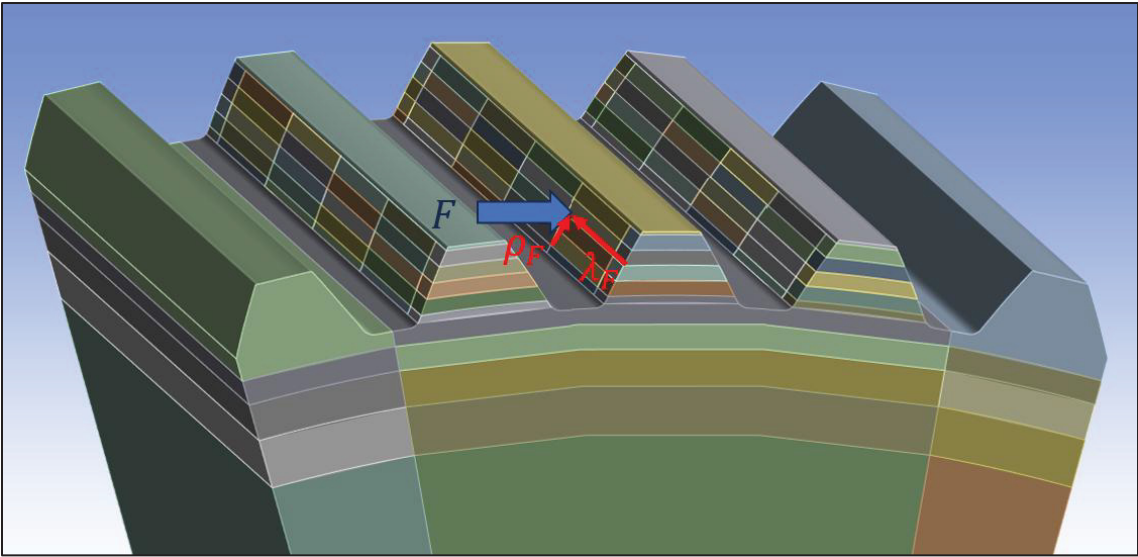


Figure 3.2 Paramétrage du point d'application d'une force selon l'axe x

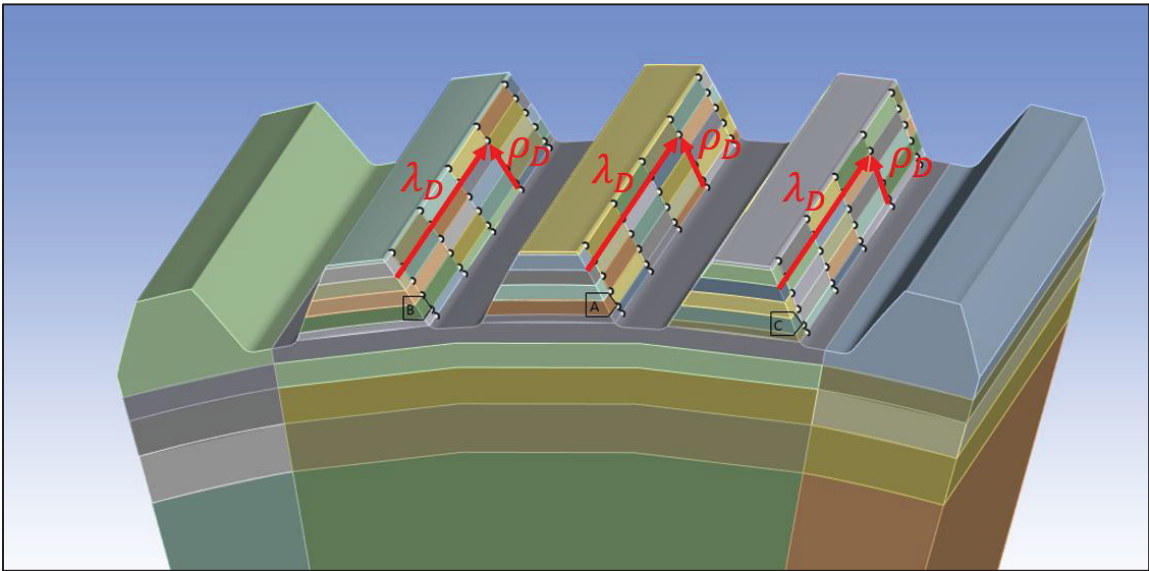


Figure 3.3 Définition des points de mesure de déplacement

Chaque paramètre prend 5 valeurs, ce qui produit un espace de géométries suffisamment dense tout en maintenant un nombre de simulations réalisable, ces valeurs sont présentées dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1 Valeurs prises par les paramètres

Paramètre	Valeur 1	Valeur 2	Valeur 3	Valeur 4	Valeur 5
m	0.5	1.875	3.25	4.625	6
z	6	30	54	72	102
$\rho_{F \text{ ou } D}$	0.05	0.275	0.5	0.725	0.95
$\lambda_{F \text{ ou } D}$	0.05	0.275	0.5	0.725	0.95

La longueur de cannelure varie quant à elle selon cinq valeurs réparties uniformément entre $4 * m$ et $3 * m * z$ pour chaque combinaison (m, z). Pour les simulations sur les moyeux, l'épaisseur de jante est à rajouter comme nouveau paramètre, celle-ci prend trois valeurs : 3, 4.5 et 6 fois le module, afin de couvrir la plage des configurations rencontrées en pratique.

À chaque combinaison de paramètres, deux simulations distinctes sont réalisées, l'une avec un effort selon x et la seconde avec un effort selon y, afin de dissocier les deux composantes de déformation de la dent. Cela porte à 50 le nombre de chargements distincts à appliquer par géométrie et à 6 250 le nombre total de simulations pour l'arbre et 18 750 pour le moyeu.

Lors des simulations, les déplacements ont été mesurés selon les trois axes (x, y et z) propres à chaque dent tels que définis dans la Figure 3.4, la dent centrale étant associée au repère global. Toutefois, pour le modèle développé, seul le déplacement selon l'axe x est utilisé. L'hypothèse selon laquelle les déplacements selon les axes y et z sont négligeables a été faite.

Les déplacements pour une force unitaire (D_{xx} et D_{xy}) mesurés pour chaque composante de force (F_x selon x et F_y selon y du repère global) sont mesurés selon l'axe x du repère associé à la dent où le déplacement est mesuré. Les déplacements selon les axes y et z sont relevés mais ne sont pas pris en compte dans les calculs, ceux-ci sont négligés du fait qu'ils soient à minima 10 fois inférieurs aux déplacements selon l'axe x. Le déplacement total selon l'axe x induit par une force normale à la surface peut alors par la suite être reconstruit. La force normale appliquée est décomposée selon les axes x et y du repère de la dent en fonction de l'angle local du profil et le déplacement selon l'axe x est obtenu selon la relation ci-dessous :

$$D = F_x D_{xx} + F_y D_{xy} \quad (3.3)$$

Avec D_{xx} et D_{xy} qui sont les déplacements pour une force unitaire, en mm/N.

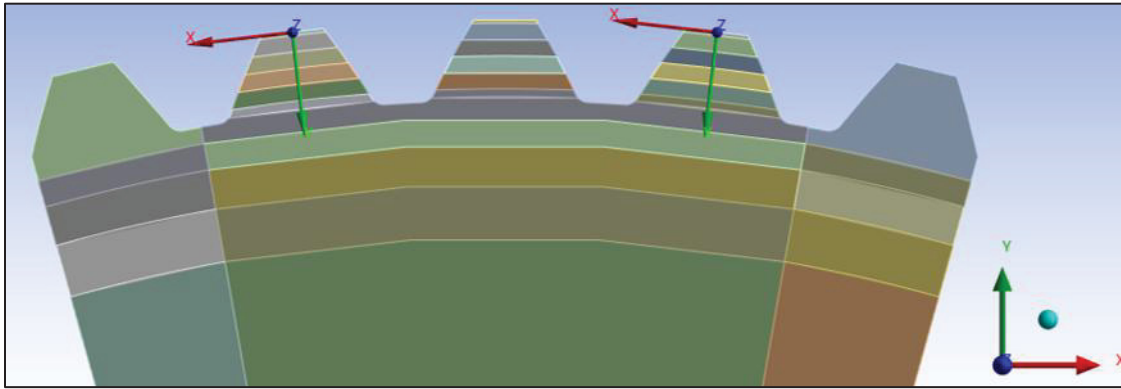


Figure 3.4 Repères utilisés pour relever les déplacements

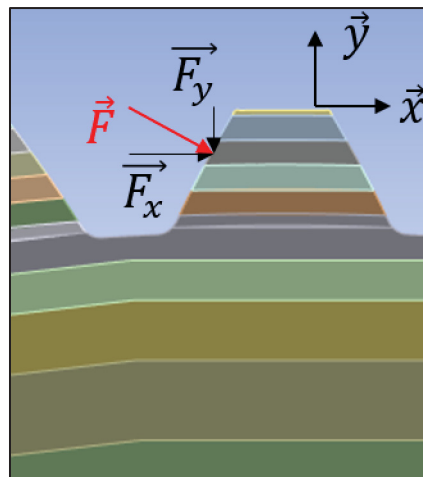


Figure 3.5 Décomposition de la force normale

Le choix de cinq valeurs par paramètre repose sur la nature des dépendances mises en jeu. La théorie des poutres montre que la flèche et la torsion d'une dent varient avec ses dimensions selon des lois polynomiales d'ordre deux à trois ; cinq points de simulation permettent donc de reconstruire ces dépendances tout en conservant un à deux degrés de liberté pour vérifier la

qualité de l'ajustement. Cette densité d'échantillonnage représente par ailleurs la limite admissible au regard du coût de calcul, le nombre total de simulations s'élevant déjà à 25 000. Pour la même raison, le paramètre d'épaisseur de jante a été restreint à trois valeurs : son influence sur la déformée de la dent étant secondaire devant celle du module et du nombre de dents, un échantillonnage plus grossier a été jugé suffisant.

L'ensemble des plages utilisées pour les différents paramètres a été choisi selon les dimensions les plus courantes dans l'industrie ainsi que selon les besoins du CETIM vis-à-vis de leurs clients.

3.1.1.2 Modèle géométrique réduit

Simuler l'arbre cannelé dans sa totalité imposerait un maillage très dense sur un volume important, ce qui rendrait le temps de calcul incompatible avec le nombre de simulations à réaliser. La géométrie est donc réduite à un secteur angulaire de cinq dents consécutives : une dent centrale sur laquelle l'effort est appliqué, une dent de chaque côté afin de mesurer les déplacements sur les dents voisines et une dent à chaque extrémité pour protéger les trois dents centrales d'éventuels effets de bord parasites. La Figure 3.6 présente les géométries retenues, le découpage du volume en sections permet d'obtenir un maillage adapté et progressif (fin au niveau des dents et grossier vers l'intérieur du cylindre, détaillé par la suite).

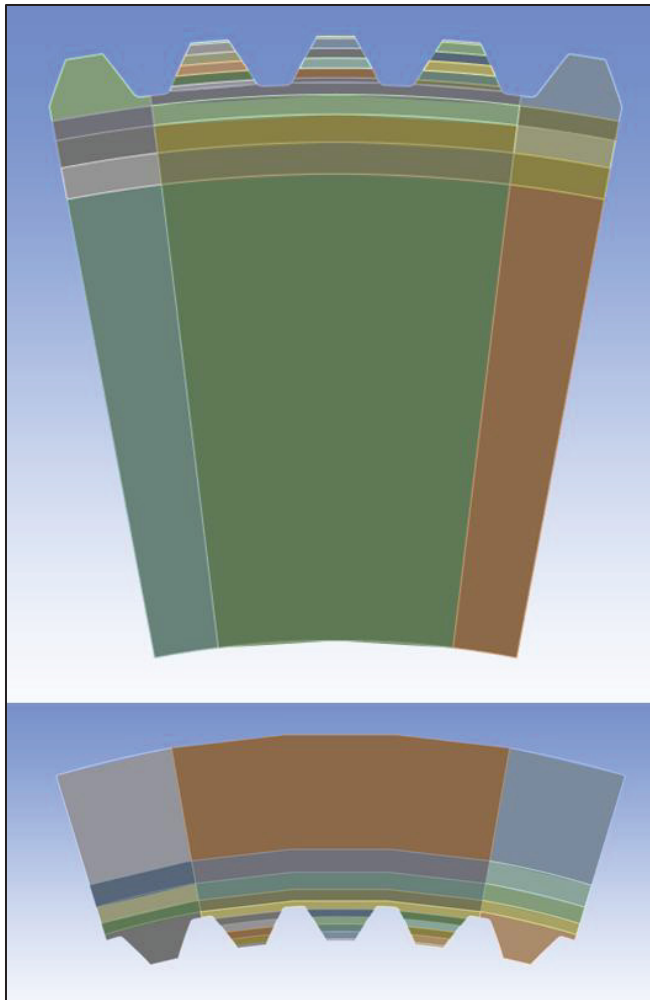


Figure 3.6 Géométries retenues

Pour les arbres, le volume à mailler est réduit davantage en supprimant le cœur du cylindre et en ne conservant qu'une jante d'épaisseur 14 fois le module.

Comme le montre la Figure 3.7, les simulations ont été réalisées en plaçant un encastrement comme condition frontière à l'intérieur de la jante de l'arbre (surface C sur la figure). Afin de bloquer la torsion de l'arbre qui ne doit pas être mesurée ici, des appuis plans sont placés sur les faces droite et gauche de la portion d'arbre (surfaces A et B sur la figure). Afin de pouvoir simuler le plus grand nombre de conditions limites aux extrémités des cannelures (gorges, entailles de taillage, ...), les faces avant et arrière des cannelures sont laissées libres. Pour les

moyeux, les conditions aux frontières sont les mêmes, la surface extérieure de la jante est laissée libre.

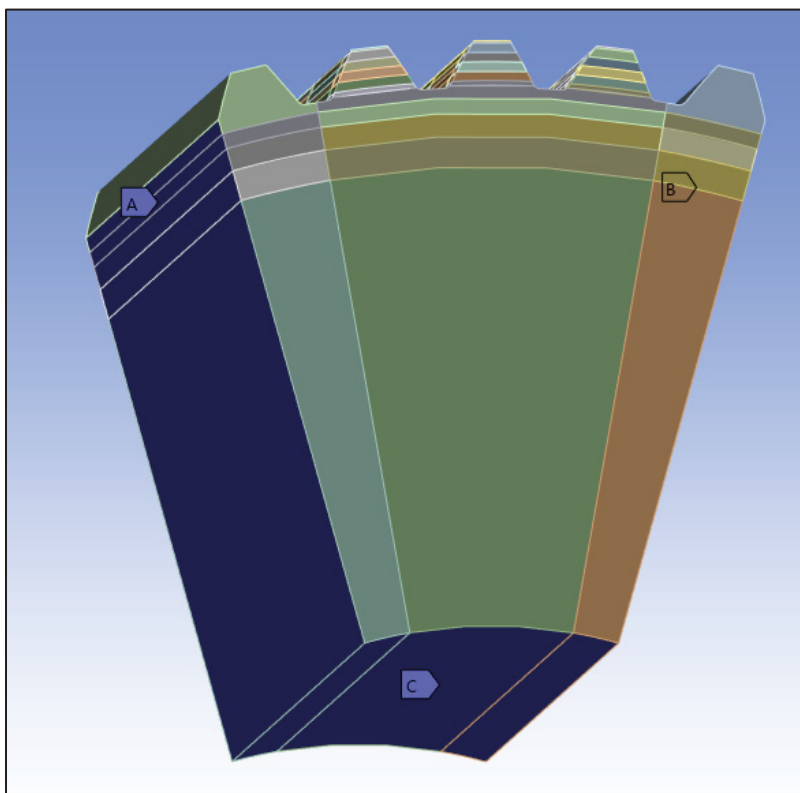


Figure 3.7 Conditions limites appliquées aux simulations

La Figure 3.8 montre l'évolution des déplacements obtenus avec différentes épaisseurs de jante ainsi qu'avec la jante pleine lorsqu'une force de 10 N est appliquée selon l'axe x. La Figure 3.9 montre que l'erreur est inférieure à 0,44 % en utilisant une jante de $14 \times m$, jugée négligeable, c'est donc cette géométrie qui a été retenue.

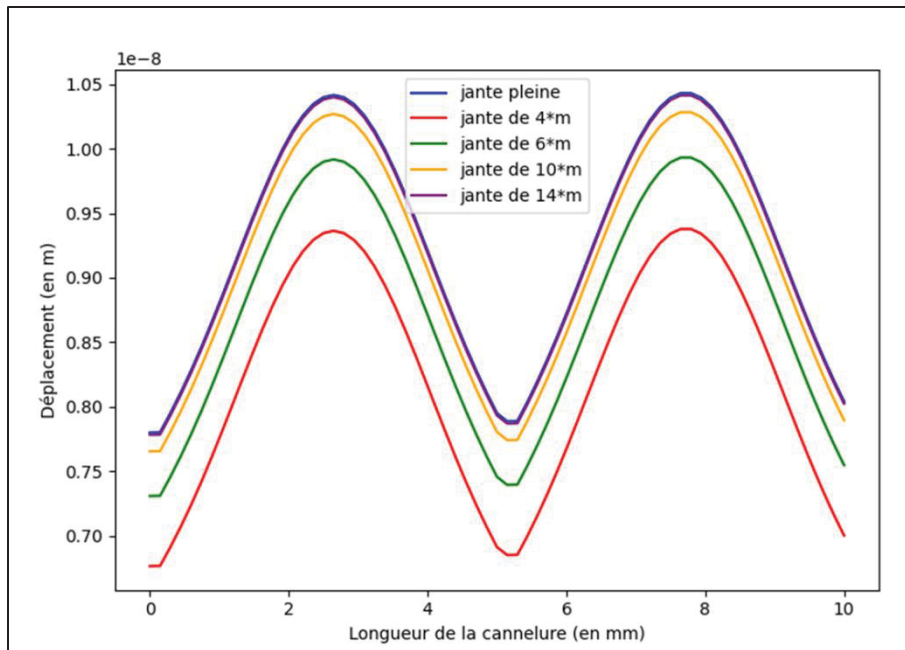


Figure 3.8 Effet de l'épaisseur de jante sur l'arbre

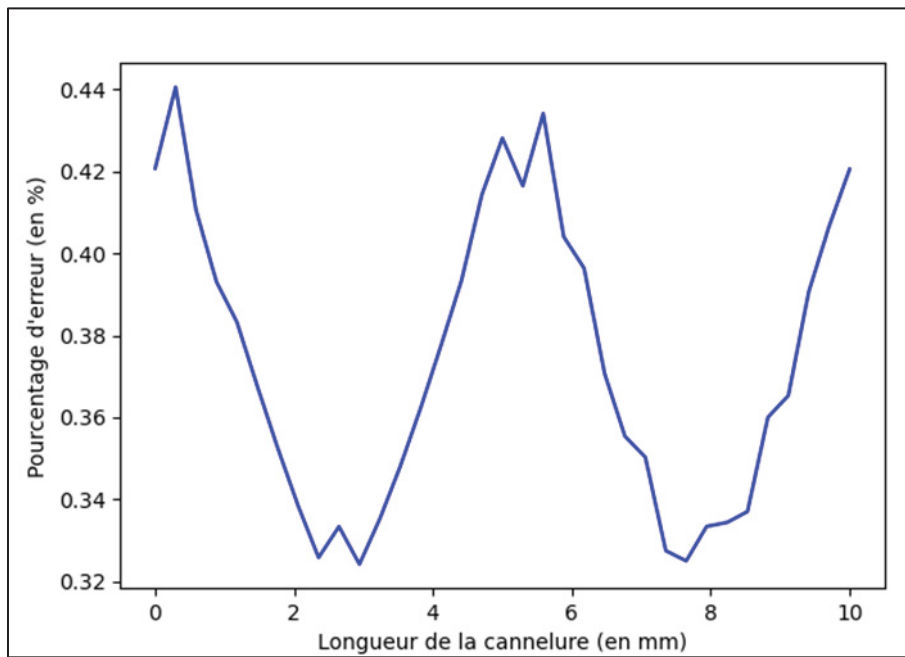


Figure 3.9 Erreur insérée par la jante sur l'arbre

Pour les cannelures à $z = 6$ dents, le secteur angulaire de cinq dents représente une fraction importante du tour complet comme le montre la Figure 3.10, ce qui modifie la géométrie du secteur par rapport aux cannelures à plus grand nombre de dents. De plus, l'arbre est conservé dans sa totalité puisque son rayon est inférieur à 14 fois le module, ainsi la réduction en jante n'est pas applicable. Cinq dents sont néanmoins simulées dans tous les cas.

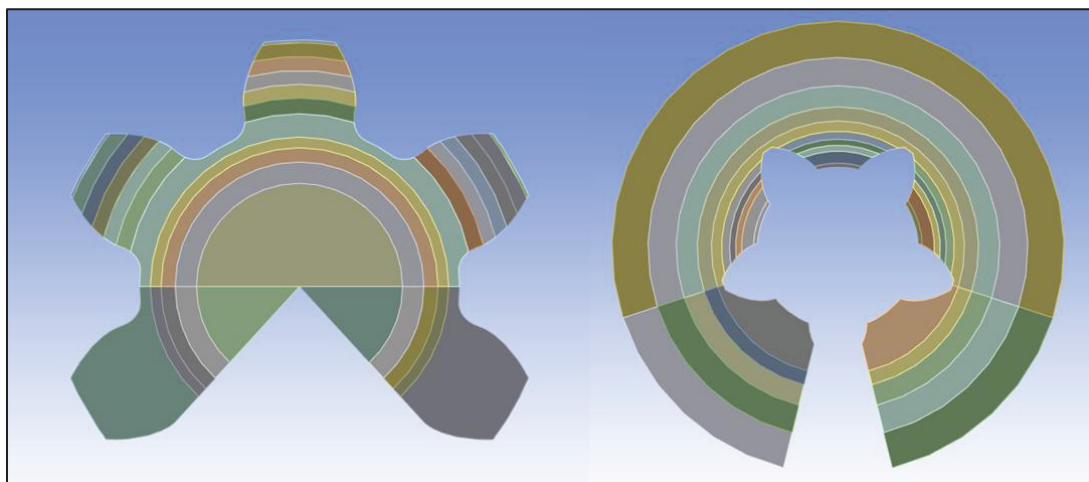


Figure 3.10 Cas particulier des géométries à 6 dents

3.1.1.3 Mise en œuvre des simulations

Les simulations sont réalisées avec le logiciel Ansys Mechanical, en utilisant le module MAPDL (Mechanical Ansys Parametric Design Language) piloté par scripts ainsi que l'interface graphique Workbench. Les géométries et le maillage sont générés sur Workbench puis le fichier de simulation MAPDL est extrait. Une fois les différentes géométries réalisées, cette approche permet d'automatiser entièrement l'application des chargements et l'extraction des résultats.

Les serveurs de l'Alliance de recherche numérique du Canada (Calcul Québec) permettent de réaliser l'ensemble des simulations. Cela permet de lancer jusqu'à cinquante simulations en parallèle, cette limite étant imposée par le nombre de licences Ansys disponibles, et de disposer d'une mémoire vive pouvant atteindre 700 Go pour les simulations les plus exigeantes. Une

comparaison préalable entre les résultats obtenus en local et sur les serveurs distants a confirmé la concordance des solutions.

Avant de lancer l'ensemble du plan d'expérience, une étude de convergence du maillage a été conduite afin d'optimiser le raffinement de celui-ci. Des éléments hexaèdres quadratiques constituent le maillage, avec un minimum de 4 éléments sur la hauteur de chaque tranche de couleur de la dent, excepté pour la tranche supérieure qui ne possède qu'un seul élément sur sa hauteur. Pour le maillage de l'arbre, à chaque changement de section, la taille des éléments est multipliée par deux. Les maillages utilisés pour les géométries simulées possèdent ainsi entre un et huit millions d'éléments. La Figure 3.11 illustre le maillage retenu à la suite de celle-ci :

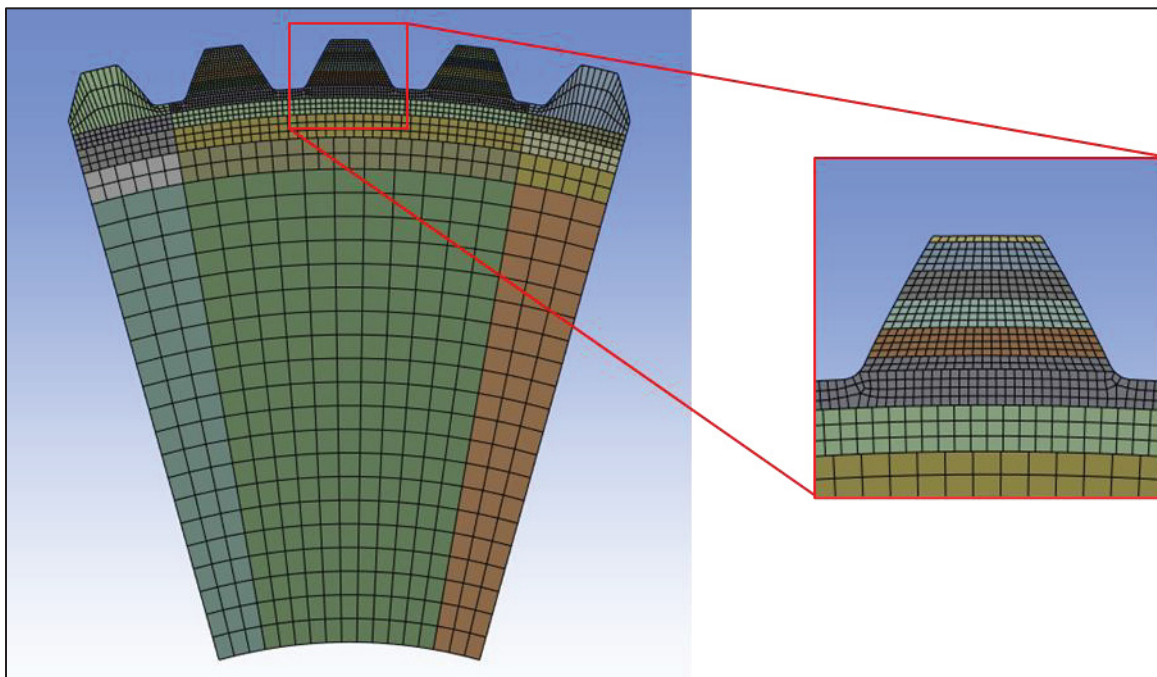


Figure 3.11 Maillage de la géométrie

3.1.2 Réseau de neurones de substitution

Le problème à résoudre est une régression non linéaire : pour chaque effort normal à la surface, appliqué en position (ρ_F, λ_F) sur une dent de géométrie (m, z, L) , le modèle doit prédire le

déplacement selon l'axe x de la dent en un point de mesure en position (ρ_D, λ_D) pour les trois dents concernées. La relation entre ces sept paramètres pour l'arbre, et huit pour le moyeu, et les déplacements résulte de la géométrie tridimensionnelle complète de la dent. La complexité qui en résulte rend difficile l'établissement d'une formulation analytique valable pour l'ensemble des géométries couvertes.

Un réseau de neurones constitue un approximateur universel de fonctions continues, ce qui le rend adapté à ce type de problème. De plus, une fois entraîné, son évaluation se réduit à une succession de produits matrice-vecteur dont le temps de calcul est infime, ce qui représente un avantage majeur lors de son intégration dans l'algorithme de contact itératif.

Comme décrit précédemment, les déplacements sont mesurés sur trois dents : la dent centrale sur laquelle l'effort est appliqué, ainsi que les deux dents voisines. Le comportement de chacune de ces trois dents étant différent, deux réseaux distincts sont entraînés pour chaque dent, un pour modéliser le déplacement lié à l'effort F_x et un second pour F_y . Le même principe s'applique au moyeu, pour lequel six réseaux supplémentaires sont entraînés. Au total, douze réseaux de neurones permettront de produire les déplacements de six dents.

Un réseau de type perceptron multicouche, implémenté avec la bibliothèque Keras (TensorFlow), est retenu pour chacun. La Figure 3.12 présente l'architecture retenue : sept entrées normalisées ($m, z, L, \rho_F, \lambda_F, \rho_D, \lambda_D$) alimentent deux couches cachées successives de 2817 neurones chacune avant d'aboutir à la sortie D qui correspond au déplacement tangentiel du point (ρ_D, λ_D) mesuré selon l'axe x sur le repère propre à la dent comme le montre la Figure 3.4 (la dent centrale étant verticale est mesurée selon le repère global). Pour les réseaux du moyeu, comme vu à la section 3.1.1.1, une huitième entrée s'ajoute : l'épaisseur de jante j qui doit donc être fournie en entrée du réseau de neurones. Les neurones des couches cachées utilisent une fonction d'activation : Rectified Linear Unit (ReLU) ; tandis que la couche de sortie est linéaire. Cette architecture est identique pour les douze réseaux hormis l'entrée du réseau de neurones qui passe de 7 à 8 pour le moyeu.

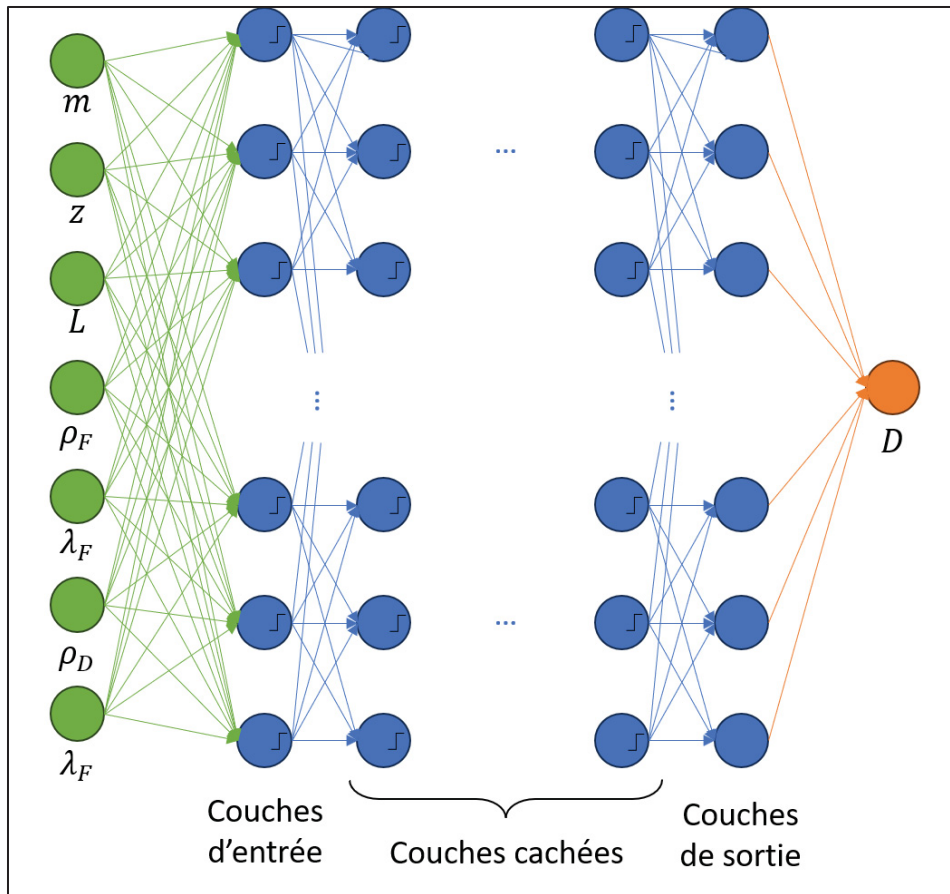


Figure 3.12 Architecture du réseau de neurones

L'architecture retenue résulte d'une optimisation bayésienne conduite via la bibliothèque Optuna. L'espace de recherche couvre le nombre de couches cachées (1 à 10), le nombre de neurones par couche (50 à 10 000), la patience de l'arrêt précoce (10 à 200 itérations) et la taille de lot (10 à 1 000). L'optimiseur Adam minimise l'erreur quadratique moyenne. Les serveurs de Calcul Québec ont permis de réaliser cette optimisation particulièrement longue et coûteuse en calcul.

L'ensemble des entrées et sorties est normalisé dans $[0, 1]$ préalablement à l'entraînement comme le montre l'équation suivante :

$$\Omega_{normalisé} = \frac{\Omega - \Omega_{min}}{\Omega_{max} - \Omega_{min}} \quad (3.4)$$

Les douze réseaux sont entraînés sur l'ensemble des simulations réalisées. Les données sont réparties à 60 % pour l'entraînement, 20 % pour la validation et 20 % pour le test. Les performances obtenues sur le jeu de test s'échelonnent, selon le réseau considéré, entre $R^2 = 0,9734$ et $R^2 = 0,9839$, ce qui témoigne d'une bonne capacité de généralisation pour l'ensemble des configurations simulées. Une analyse plus poussée de la précision des réseaux de neurones est proposée en ANNEXE I.

3.1.3 Intégration des déformations de dent à l'algorithme

De façon analogue à la fonction d'influence de contact définie au CHAPITRE 2, une fonction d'influence de déformation de dent $t_dent_{ip,kj}$ est introduite : elle représente le déplacement selon l'axe x au point (ρ_D, λ_D) de la surface produit par une pression unitaire appliquée en (ρ_F, λ_F) , via la flexion, la torsion le cisaillement et la compression de la dent. Cette matrice est de dimensions $(n \times m \times n \times m)$, identique en structure à la matrice d'influence de contact.

Les réseaux de neurones sont appelés une seule fois, en début de calcul, pour construire cette matrice. La géométrie de la dent n'évoluant pas au cours des itérations, il n'est pas nécessaire de la recalculer. Pour une pression appliquée sur une cellule d'une dent, le réseau de cette dent-ci, considérée comme la dent centrale, fournit le déplacement en chacune de ses cellules. Les réseaux des dents voisines fournissent les déplacements induits par les deux dents adjacentes.

La matrice $t_dent_{ip,kj}$ n'étant pas symétrique définie positive, elle ne peut être incorporée directement dans la résolution par Gauss-Seidel, qui requiert cette propriété pour garantir la convergence. La stratégie adoptée consiste à résoudre l'algorithme de contact sans la contribution des déformations de dents, à calculer les déplacements induits par $t_dent_{ip,kj}$ à partir du champ de pression obtenu, puis à mettre à jour la surface de contact en conséquence.

Cette procédure est répétée jusqu'à convergence de la surface, s'intégrant naturellement dans la boucle de recalcul déjà présente dans l'algorithme, comme l'illustre la Figure 3.13.

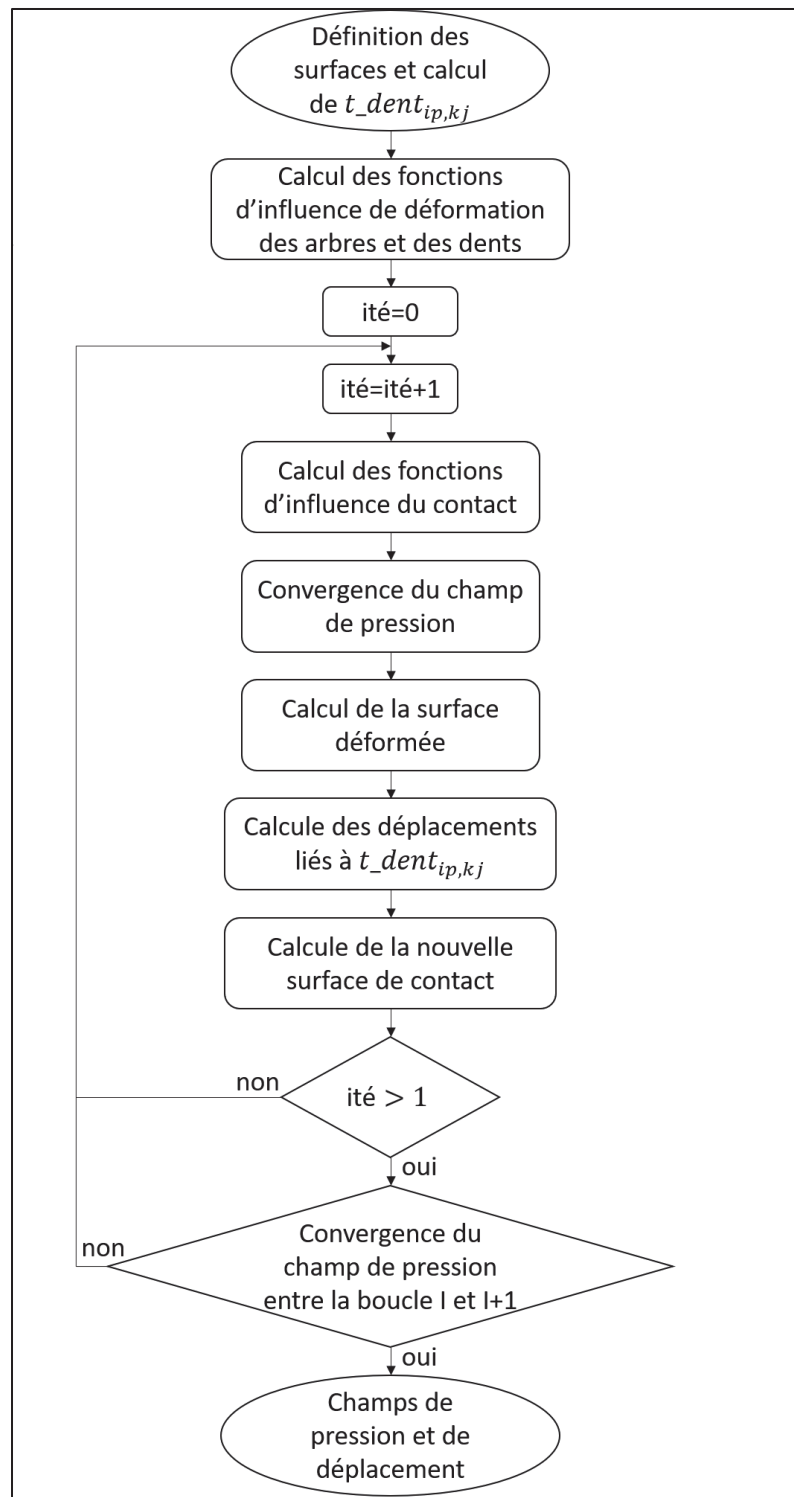


Figure 3.13 Insertion de la déformation des dents dans l'algorithme

3.2 Modélisation de l'arbre et de la jante

L'algorithme de contact présenté jusqu'ici intègre les déplacements surfaciques liés au contact ainsi que les déplacements induits par la déformation des dents. Cependant, il suppose implicitement que l'arbre et le moyeu restent globalement indéformables. Or, sous l'effet du couple transmis, l'arbre et le moyeu sont soumis à de la torsion, modifiant la distribution des jeux sur la longueur d'engrènement et donc la répartition des pressions de contact. Ces effets structuraux doivent donc être intégrés à l'algorithme pour reproduire fidèlement le comportement réel de l'assemblage.

Pour un cylindre plein de rayon R , de module de cisaillement G , soumis à un effort unitaire en un point situé au rayon R_{kj} et à la position longitudinale y_{kj} , le déplacement tangentiel ($t_{torsion_{ip,kj}}$) induit en un point situé au rayon R_{ip} et à la position y_{ip} s'écrit :

$$t_{torsion_{ip,kj}} = \frac{32 * R_{ip} * R_{kj} * \min(y_{ip}, y_{kj})}{G * \pi * (2 * R)^4} \quad (3.5)$$

La Figure 3.14 représente les coordonnées utilisées sur un cylindre.

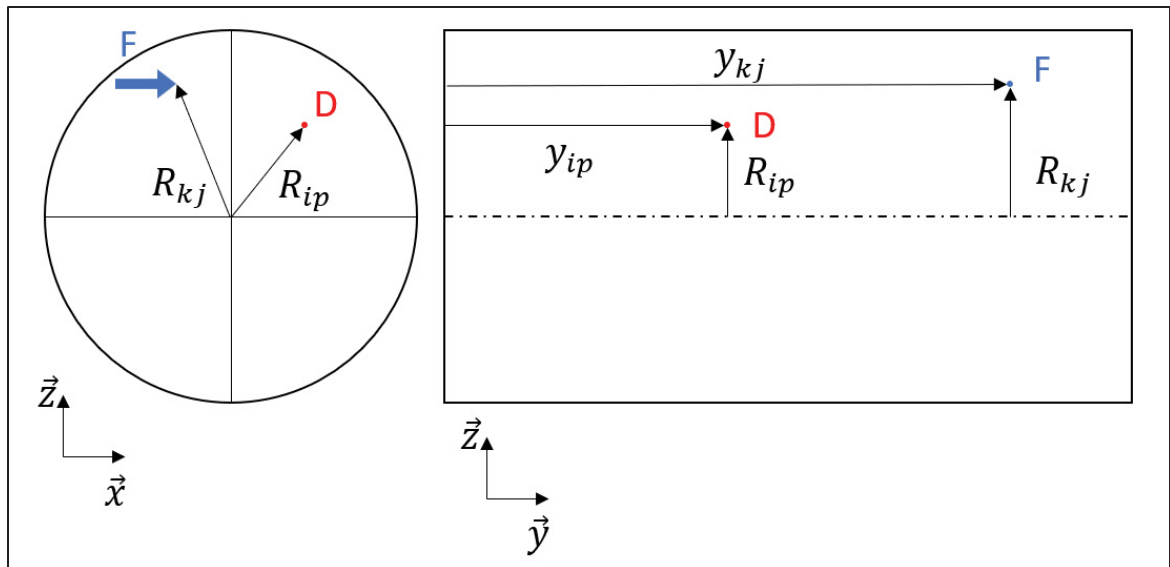


Figure 3.14 Coordonnées utilisées pour la fonction d'influence de torsion

La section transversale d'un arbre cannelé ne correspond pas à celle d'un cylindre plein et la formule analytique précédente ne s'applique pas directement. La stratégie adoptée consiste à définir un rayon équivalent R_{eq-a} , comme illustré sur la Figure 3.15, tel que le cylindre plein associé présente la même rigidité en torsion que l'arbre cannelé.

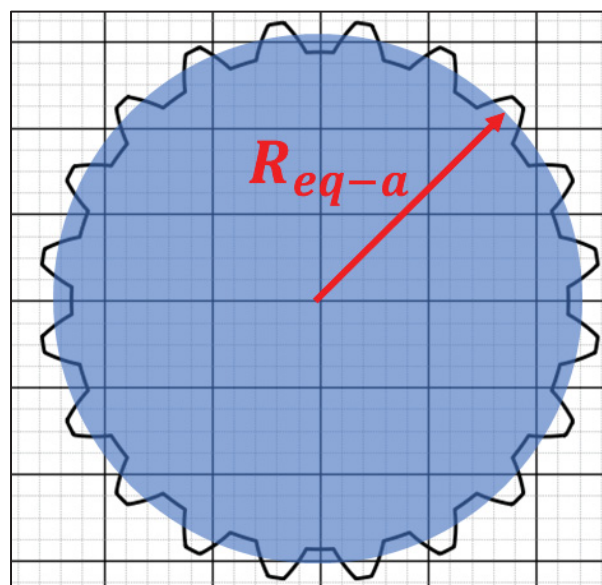


Figure 3.15 Définition du cylindre équivalent

Une étude a donc été menée afin de déterminer la valeur de ce rayon équivalent. Pour un ensemble de configurations de cannelures couvrant la plage de paramètres étudiée, la résolution de la formule de torsion à rebours permet d'obtenir le rayon R_{eq-a} : le déplacement tangentiel calculé par simulation par éléments finis est injecté dans la formule analytique afin d'en extraire le rayon du cylindre équivalent correspondant. L'application d'une régression sur l'ensemble de ces valeurs permet d'établir la formule empirique suivante avec $R^2 = 0.99990$:

$$R_{eq-a}(m, z) = 0,4938 * (m * z) - 0,284 * m + 0,0026 * z - 0,1150 \quad (3.6)$$

Le même principe s'applique au moyeu, dont la section correspond à un tube de rayon extérieur R_j et de rayon intérieur équivalent R_{eq-m} (Figure 3.16). La formule de torsion d'un tube creux est utilisée en lieu et place de celle du cylindre plein. L'épaisseur de jante introduit un paramètre supplémentaire dans la formule empirique, le rayon extérieur R_j , ce qui donne pour la nouvelle équation $R^2 = 99659$:

$$R_{eq-m}(m, z, R_j) = 0.8616 * R_j - 0.001 * (m * z) - 0.2131 * m + 0.032 * z - 1.9619 \quad (3.7)$$

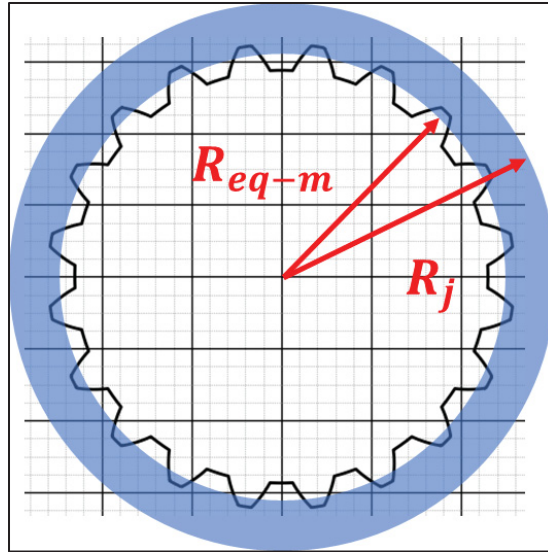


Figure 3.16 Définition de la jante équivalente

Afin de justifier le recours à ces formules empiriques, une étude comparative a été menée en remplaçant le rayon équivalent par le rayon primitif R_p puis par le rayon moyen R_m défini dans l'équation suivante :

$$R_m = \frac{R_{\text{tête de dent}} - R_{\text{creux de dent}}}{2} \quad (3.8)$$

Le Tableau 3.2 et le Tableau 3.3 présentent respectivement les écarts observés sur la fonction d'influence et sur le déplacement. Ces résultats correspondent à la géométrie la plus sensible au choix du rayon vis-à-vis de l'arbre : $m = 6, z = 6, L = 108 \text{ mm}$, avec une épaisseur de jante de $3 * m$. Les résultats obtenus avec les simulations éléments finis sur Ansys étant pris pour références. Le Tableau 3.2 présente donc les écarts moyens présents sur la fonction d'influence si celle-ci est calculée avec le rayon équivalent, primitif ou moyen par rapport aux valeurs obtenues avec les éléments finis. L'écart E est donc calculé de la manière suivante :

$$E = \frac{1}{(n * m)^2} \sum_{i,p,k,j} \left(\frac{t_{\text{torsion}_{ip,kj \text{ ansys}}} - t_{\text{torsion}_{ip,kj \text{ Req,Rp ou Rm}}}}{t_{\text{torsion}_{ip,kj \text{ Ransys}}}} \right) * 100 \quad (3.9)$$

Tableau 3.2 Impact du rayon sur la fonction d'influence

	Arbre	Moyeu
R_{eq}	1,52%	3,2%
R_p	18,73 %	28.36 %
R_m	12.24 %	26,89 %

De la même manière, le Tableau 3.3 présente les écarts obtenus après résolution de la simulation avec la géométrie présentée ci-dessus pour laquelle aucun désalignement n'est appliqué sur l'arbre et le moyeu. Le tableau présente donc un résumé de la comparaison des écarts obtenus en utilisant le rayon équivalent, primitif et moyen par rapport aux résultats obtenus avec le rayon des éléments finis. L'écart moyen présent entre toutes les cellules du maillage est calculé également selon l'équation (3.9) tandis que l'équation suivante définit l'écart maximal obtenu sur une cellule :

$$E = \max \left(\left(\frac{t_{torsion_{ip,kj \text{ Ransys}}} - t_{torsion_{ip,kj \text{ Req,Rp ou Rm}}}}{t_{torsion_{ip,kj \text{ Ransys}}}} \right) * 100 \right) \quad (3.10)$$

Tableau 3.3 Impact du rayon sur le déplacement

	Arbre		Moyeu	
	Moyenne	Maximum	Moyenne	Maximum
R_{eq}	8,32 %	8,79 %	0,07 %	0,12 %
R_p	52,51 %	53,02 %	0,39 %	0,57 %
R_m	39,89 %	40,24 %	1,65 %	2,26 %

Les écarts sont nettement plus importants côté arbre que côté moyeu puisque la géométrie a été choisie de telle sorte que la variation du rayon impacte principalement l'arbre. De plus, la rigidité en torsion de l'arbre est plus faible que celle du moyeu, ceci le rend donc plus sensible au choix du rayon.

Ces écarts sont donc trop importants pour assimiler le rayon primitif ou le rayon moyen au rayon équivalent de torsion. L'algorithme conserve donc les formules empiriques établies plus haut qui permettent de définir le rayon équivalent. Une analyse plus poussée de la précision de ces équations est proposée en ANNEXE II.

Une fois ces rayons équivalents validés, la matrice d'influence de torsion $t_{torsion_{ip,kj}}$ qui en découle, calculée analytiquement, est construite une seule fois en début de calcul puisqu'elle ne dépend que des rayons des cellules (fixés) et non des déplacements tangentiels induits par le champ de pression.

Comme discuté à la section 3.1.3 pour la déformation des dents, l'ajout de cette contribution possède également une matrice d'influence totale non symétrique définie positive, ce qui invalide la résolution directe par Gauss-Seidel. La même stratégie est donc appliquée : l'algorithme de contact est résolu sans la contribution de la torsion, les déplacements induits sont calculés a posteriori à partir du champ de pression obtenu, la surface de contact est mise à jour, et l'ensemble est répété jusqu'à convergence dans la boucle de calcul déjà présente dans l'algorithme.

L'ajout des contributions de déformation des dents et de torsion globale produit à chaque itération des incréments de déplacement importants ; ces incréments, non amortis, peuvent provoquer une oscillation autour de la solution voire une divergence. Une sous-relaxation est donc appliquée sur le déplacement obtenu : à chaque itération, seuls 5 % des nouveaux déplacements sont conservés, les 95 % restants proviennent de l'itération précédente, comme le montre l'équation suivante :

$$w_{ité+1} = w_{ité+1} * k_{relax} + w_{ité} * (1 - k_{relax}) \quad (3.11)$$

3.3 Conclusion

Ce chapitre a présenté la modélisation des contributions structurales qui s'ajoutent aux déplacements surfaciques de contact calculés au CHAPITRE 2. La déformation des dents sous charge a été caractérisée par une approche combinant simulation éléments finis et apprentissage automatique. La création d'une base de données de 25 000 simulations Ansys couvrant l'espace des géométries de cannelures normalisées et l'entraînement d'un ensemble de douze réseaux de neurones sur celle-ci permettent de prédire les déplacements induits par flexion, torsion, cisaillement et compression des dents en tout point de la surface. Ces prédictions sont intégrées à l'algorithme de contact sous la forme d'une matrice d'influence de déformation incorporée par une procédure itérative adaptée aux propriétés de cette matrice. La torsion de l'arbre et du moyeu a quant à elle été modélisée par un rayon équivalent déterminé par inversion sur des simulations éléments finis, permettant d'appliquer une formule analytique empirique de torsion malgré la section non-cylindrique des cannelures. L'algorithme intègre la matrice d'influence associée selon la même stratégie itérative.

L'ensemble de ces contributions, combinées à l'algorithme de contact du CHAPITRE 2, constitue un modèle complet de la liaison cannelée désalignée capable de prédire les champs de pression et de déplacement en tenant compte des déformations à toutes les échelles de l'assemblage. Le chapitre suivant présente l'étude de l'usure des cannelures à partir des résultats de l'algorithme réalisé.

CHAPITRE 4

Intégration de l'usure par fretting

L'algorithme développé dans les chapitres précédents fournit, pour une géométrie et un couple donné, les champs de pression de contact et d'amplitude de glissement en tout point des flancs engagés de l'arbre et du moyeu. Ces deux grandeurs sont précisément les variables mécaniques qui pilotent la dégradation des surfaces par usure (Archard, 1953). Le modèle développé est donc directement exploitable pour identifier les zones de la dent les plus exposées à l'usure sous un chargement donné.

4.1 Application locale de la loi d'Archard

La loi d'Archard (1953) relie la profondeur d'usure locale h_w de la cellule (i, p) à la force de contact F_{ip} ($= P_{ip} * A_{ip}$) et à l'amplitude de glissement δ_{ip} par la relation suivante :

$$h_{w_{ip}} = k_{w_{ip}} * P_{ip} * A_{ip} * \delta_{ip} \quad (4.1)$$

Le coefficient k_w regroupe l'ensemble des contributions non mécaniques au phénomène d'usure : dureté du matériau étudié dans la paire et adhésion des surfaces de la paire. L'adhésion dépend de la compatibilité chimique des surfaces, de leur état, de la lubrification et de la température de contact. Comme indiqué à la section 1.2.1, k_w n'est pas constant au cours du cycle de fonctionnement d'une liaison cannelée et dépend du régime tribologique instantané.

La caractérisation expérimentale de k_w pour l'ensemble des conditions possibles ne rentre pas dans le cadre de ce mémoire. Le choix retenu consiste donc à conserver la forme locale de la loi d'Archard et à supposer k_w uniforme sur l'ensemble de la dent et constant sur le cycle de fonctionnement. Cela revient à négliger à la fois les variations spatiales du régime tribologique entre les différentes zones du flanc et son évolution temporelle au fur et à mesure des cycles.

La valeur réelle de l'usure restera ainsi indéterminée. Le calcul permettra cependant d'obtenir un indicateur de l'énergie disponible pour l'usure, ce qui permet alors de réaliser des comparaisons de l'usure entre les différentes zones de la dent. La calibration ultérieure de k_w , à partir d'essais dédiés ou de mesures d'usure permettrait d'en extraire une prédiction quantitative. Le produit $P * \delta$ décrit ainsi la densité de l'énergie disponible pour provoquer de l'usure.

4.2 Cartographie de l'usure relative

Le produit $P * \delta$ est calculé en chaque centre de cellule à partir des sorties de l'algorithme de répartition de charge, puis projeté sur la surface du flanc dans le repère local de la dent. À k_w constant, le produit est aussi proportionnel à la profondeur d'usure locale et conduit directement à la cartographie comparative recherchée. Les zones où $P * \delta$ est élevé correspondent aux régions exposées aux pertes de matière les plus rapides et identifient les points critiques pour la durée de vie de la liaison.

Cet indicateur est étroitement apparenté au paramètre de Ruiz $R_1 = \tau * \delta$ introduit à la section 1.2.3, la seule différence provient du coefficient de frottement ($\tau = \mu * P$). Le classement relatif des zones critiques fourni par les deux indicateurs est donc identique si l'on considère le coefficient de frottement uniforme sur la zone de contact. La formulation retenue ici, fondée directement sur P , présente l'avantage de calculer la cartographie d'usure sans prendre en compte le coefficient de frottement qui reste indépendamment paramétrable dans l'algorithme.

Afin d'illustrer les prédictions qu'il est possible d'obtenir avec la démarche proposée, la Figure 4.1 montre le champ de pression obtenu pour la géométrie $z = 10$, $m = 2$ mm, $L = 10$ mm avec une épaisseur de jante de $3 * m$ du moyeu, lorsqu'elle est soumise à un couple appliqué de 30 Nm et un désalignement radial de 0,01 mm. Ce désalignement radial correspond à une translation de 0,01 mm du moyeu selon l'axe z du repère global.

Les graphiques de la Figure 4.1 montrent les champs de pression obtenus sur les 10 dents, le rayon évolue sur l'abscisse tandis que sur l'ordonnée se présente la longueur de la cannelure.

Ces résultats indiquent, qu'à l'instant considéré, la pression se répartit uniquement sur 6 dents, et que la distribution sur les flancs varie fortement d'une dent à l'autre. Certaines supportent la charge en tête et d'autres en pied, d'autres encore de façon plus uniforme.

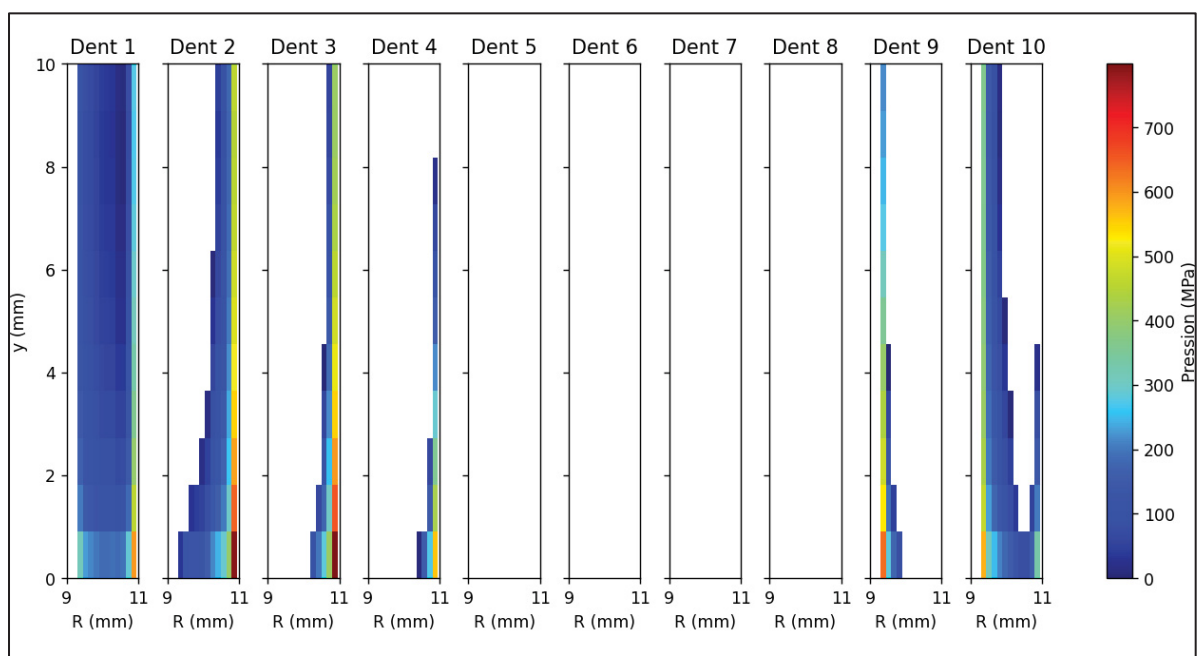


Figure 4.1 Champ de pression du cas 1 : désalignement radial

La Figure 4.2 présente le champ de glissement obtenu pour ce même joint cannelé sur les dents de l'arbre. Respectivement pour chaque dent, le glissement est plus élevé en tête de dent qu'en pied de dent, le glissement augmentant lorsque le rayon augmente. Une certaine symétrie apparaît également sur les dents subissant un glissement élevé et faible. En effet, les dents 3, 4 et 5 sont diamétralement opposées aux dents 8, 9 et 10 et les dents 1 et 2 sont opposées aux dents 6 et 7.

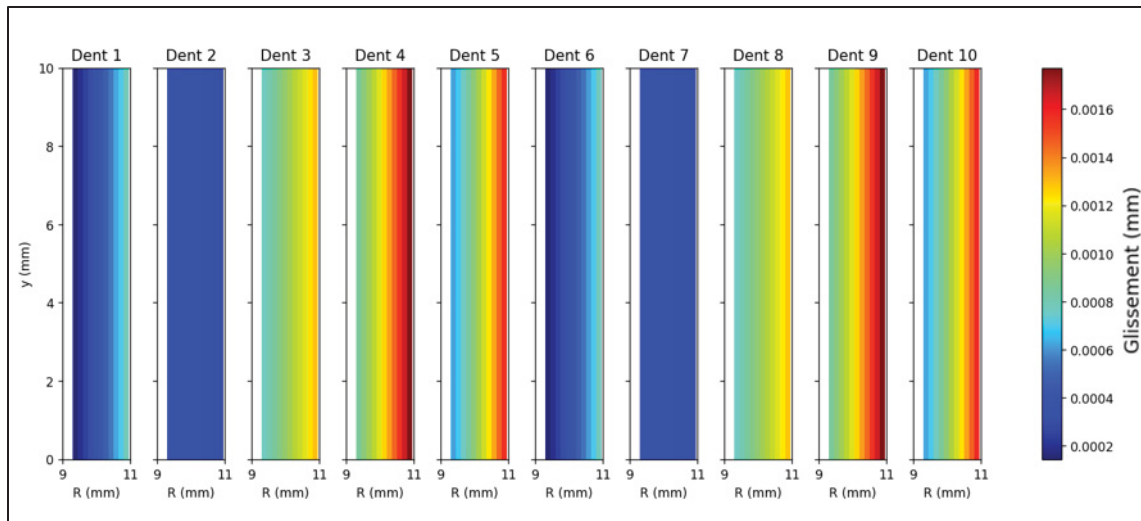


Figure 4.2 Champ de glissement du cas 1 : désalignement radial, prédit pour l'arbre

La Figure 4.3 présente le champ d'indicateur d'énergie disponible pour l'usure sur les dents de l'arbre calculé à partir du produit de la pression et du glissement. Les distributions obtenues traduisent le fait que les dents devraient s'user principalement en pied et en tête, tandis que le centre du flanc ne devrait demeurer que très peu affecté.

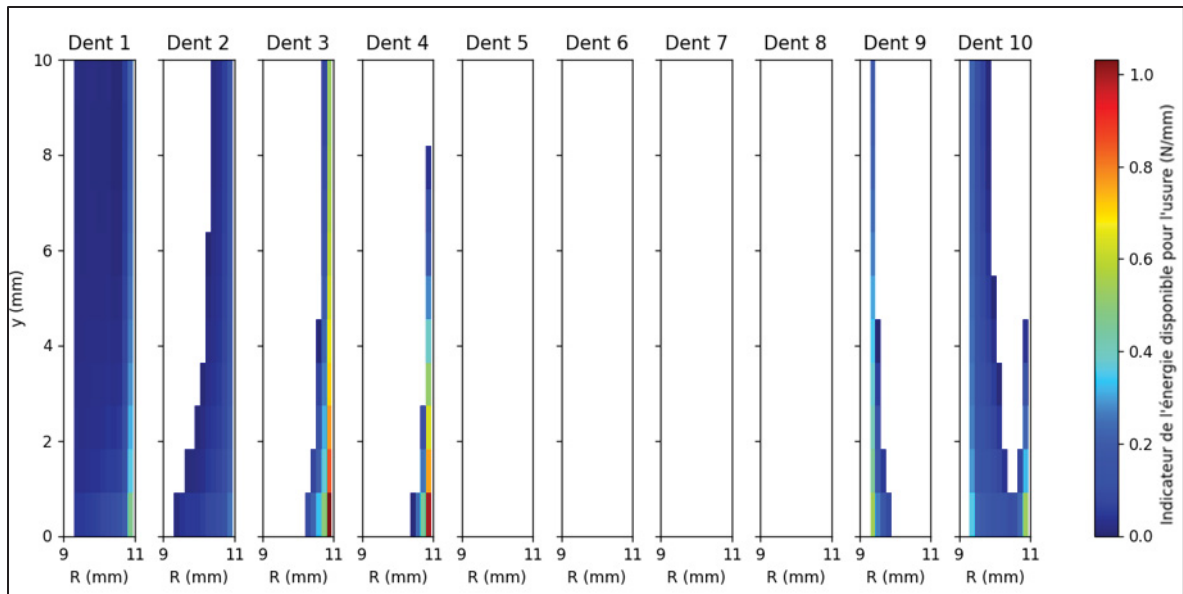


Figure 4.3 Champ d'usure du cas 1 : désalignement radial, prédit pour l'arbre

La Figure 4.4 présente la somme de ces graphiques qui représente le coefficient d'énergie disponible pour l'usure sur le flanc d'une dent lors d'une rotation complète de l'arbre. Elle permet ainsi de mettre en évidence les zones ayant le plus d'énergie disponible pour développer de l'usure. Dans ce cas, la tête de dent du côté où le couple est appliqué représente la partie la plus à risque.

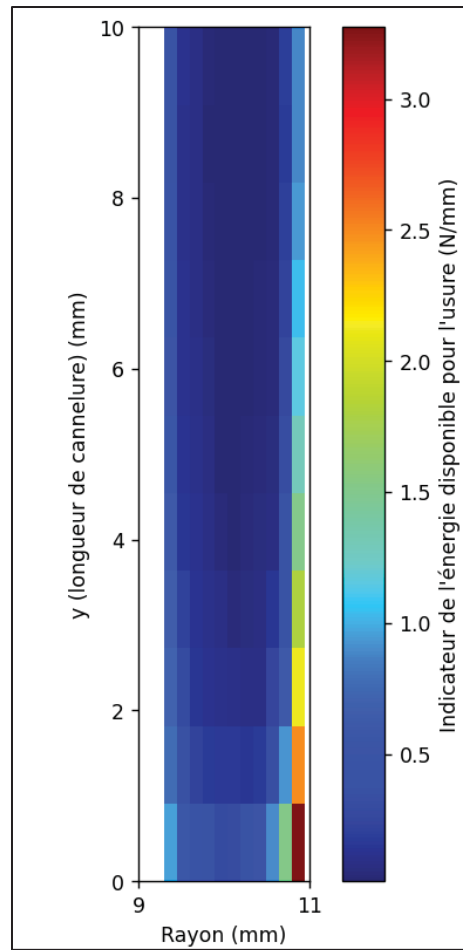


Figure 4.4 Coefficient d'énergie disponible pour l'usure lors du cas 1, sur une dent lors d'une révolution complète de l'arbre

À titre de comparaison, la Figure 4.5 présente le champ de pression obtenu sur la même cannelure sous un désalignement angulaire de $0,02^\circ$ autour de l'axe x du repère global. La distribution sur le flanc n'est plus dictée par la hauteur de dent, mais par la position axiale ; de plus, l'ensemble des dents est en prise.

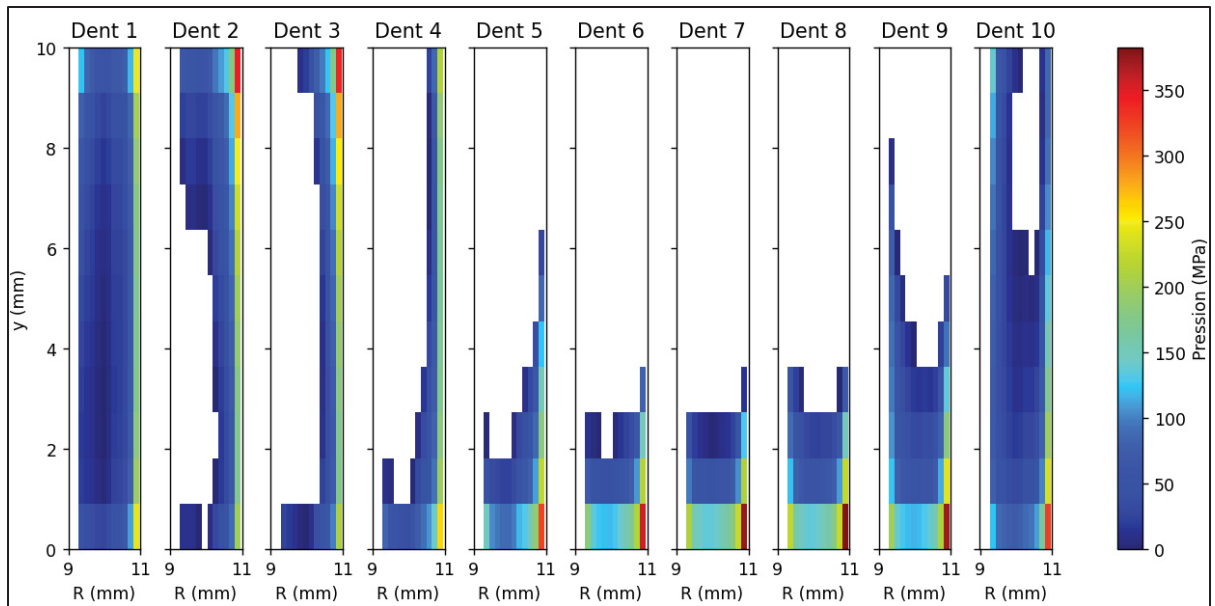


Figure 4.5 Champ de pression du cas 2 : désalignement angulaire

Le glissement sur l'arbre est principalement localisé en bout de cannelure comme le montre la Figure 4.6. En effet le désalignement angulaire étant réalisé par une rotation réalisée autour de l'axe x qui se situe à $y = 0$, les écarts engendrés sont plus élevés en $y = 10$. Comme précédemment, le glissement est, respectivement sur chaque dent, plus élevé en tête de dent qu'en pied de dent.

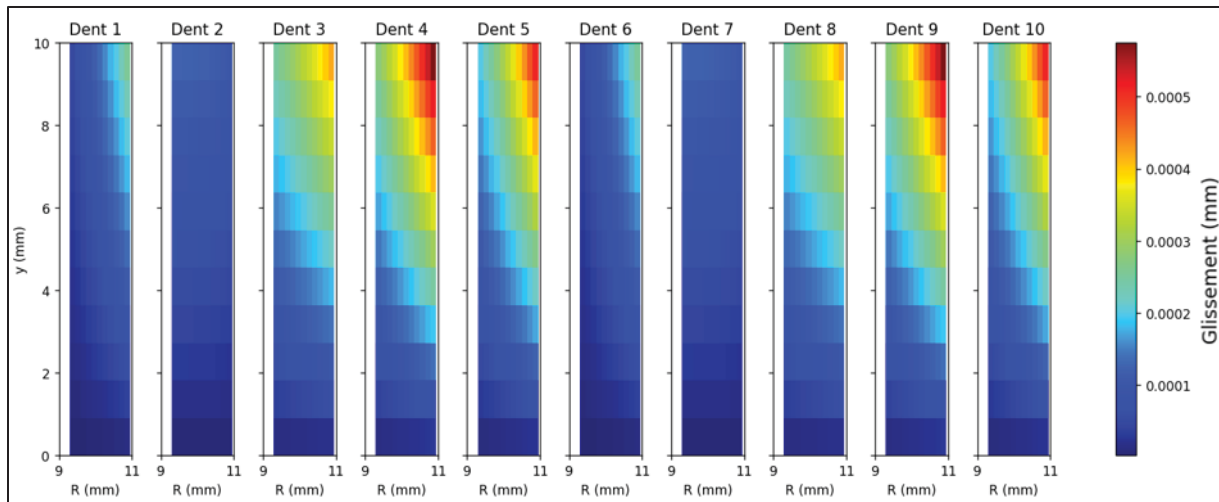


Figure 4.6 Champ de glissement du cas 2 : désalignement angulaire, prédit pour l'arbre

Les dents dont le chargement est le plus uniforme sont les moins touchées par l'usure, comme le montre la Figure 4.7. Bien que, en rotation, les dents passent par les 10 positions montrées, à cette position précise, la dent 7, qui se trouve à la position angulaire 216 degrés par rapport à la dent 1 présente le pic de pression le plus élevé. Cependant, elle ne subit pas une usure marquée puisque le glissement change de sens à cet endroit et son amplitude est faible comme le montre la Figure 4.6. Ce sont ainsi les dents qui cumulent une pression élevée et un glissement élevé qui sont les plus à risque vis-à-vis de l'usure.

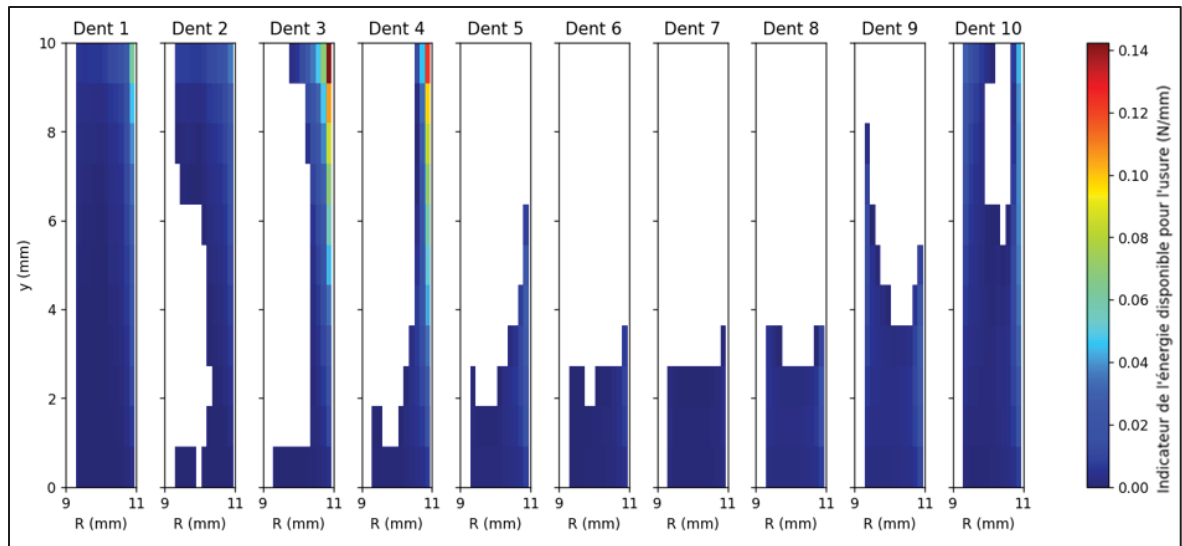


Figure 4.7 Champ d'usure du cas 2 : désalignement angulaire, prédit pour l'arbre

Enfin, la Figure 4.8 présente le coefficient d'énergie disponible pour l'usure sur une dent lors d'une révolution complète de l'arbre. La partie la plus à risque de la cannelure se situe donc en tête de dent, le coefficient d'usure qui vaut ici 0.4 est très faible en comparaison du cas 1, où celui-ci atteignait une valeur supérieure à 3. Il est donc possible de conclure que le désalignement radial semble être plus critique que le désalignement angulaire en termes d'énergie disponible pour l'usure.

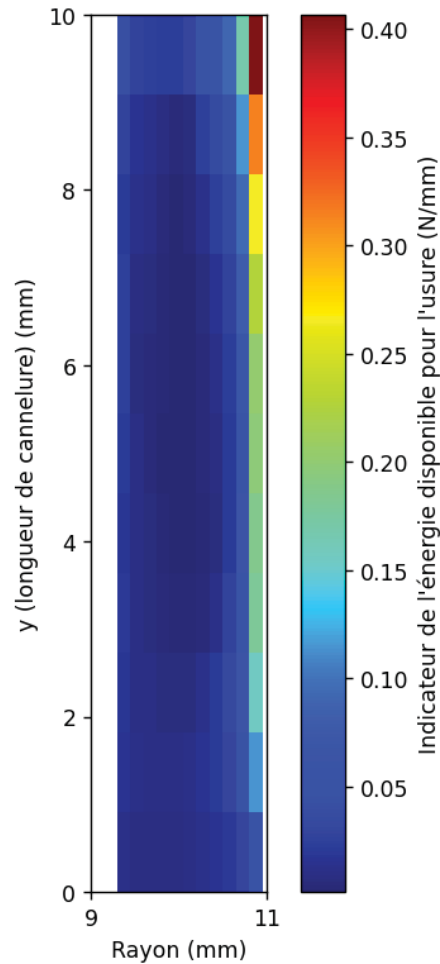


Figure 4.8 Coefficient d'énergie disponible pour l'usure lors du cas 2, sur une dent lors d'une révolution complète de l'arbre

Au-delà de la comparaison entre zones d'une même configuration illustrée ci-dessus, comme réalisé précédemment, le caractère relatif de l'indicateur autorise également la comparaison de plusieurs désalignements sans nécessiter une calibration distincte pour chacune. Il est également possible d'étudier les conséquences d'un changement de géométrie, de chargement, de bombé, de micro-correction ou bien d'écart de fabrication.

4.3 Conclusion

Ce chapitre a proposé une exploitation directe des sorties de l'algorithme de contact pour estimer l'usure des flancs des dents par application locale de la loi d'Archard. Le choix de

conserver le coefficient d'usure non calibré restreint l'indicateur obtenu à une comparaison relative entre zones de la dent et entre configurations, mais permet une utilisation immédiate du modèle pour identifier les zones critiques d'une liaison cannelée sans nécessiter de campagne expérimentale préalable. La méthode reste par construction compatible avec une calibration ultérieure du coefficient k_w , qui transformerait cet indicateur comparatif en une prédiction quantitative de la profondeur d'usure cumulée.

L'algorithme complet, combiné à cet indicateur d'énergie disponible pour l'usure, constitue désormais un outil de calcul exploitable pour le dimensionnement et le diagnostic des liaisons cannelées désalignées. Sa fiabilité doit cependant être établie avant toute utilisation pratique. Le chapitre suivant présente à cet effet la validation des champs de pression, de glissement et d'usure prédits par l'algorithme, par comparaison avec les résultats publiés dans la littérature sur des cas de référence.

CHAPITRE 5

Validation par comparaison à la littérature

Afin de valider le modèle proposé, les sections qui suivent compareront ses prédictions pour différentes géométries tirées de la littérature scientifique. D’abord, un premier cas permettra de valider le champ de pression obtenu par le modèle développé sur des cannelures dont le profil a été corrigé, ensuite un second cas permettra de valider les zones de prédiction d’usure sur un cas de cannelures bombées.

5.1 Cannelure avec correction de profil

Le premier cas de validation reprend la cannelure de référence étudiée par Hong (2015) dans sa thèse de doctorat (Tableau 2.1, p. 52). Il s’agit d’un accouplement à 25 dents de module 3,175 mm, d’angle de pression 30° , de largeur de denture 50,8 mm, conforme à la norme ANSI B92.1-1996. La sollicitation considérée est une torsion pure à un couple $M_z = 2260 \text{ Nm}$, qui correspond à la configuration de la Figure 2.11 de la thèse de Hong.

Ce premier cas de validation est sélectionné pour sa simplicité, il permet de valider le modèle développé et principalement le champ de pression obtenu sur des cannelures alignées. Les limites de ce modèle résident dans la géométrie de la cannelure utilisée puisque l’auteur utilise des cannelures issues de la norme B92.1-1996, ce qui implique que les coefficients de creux et de saillie des dents ne sont pas exactement les mêmes. Ceci amène à des variations sur la géométrie des dents ainsi que sur leur rigidité, ce qui peut modifier le champ de pression.

Afin d’éviter des concentrations de contraintes en pied et tête de dent qui sont courantes ((Hong, 2015)figure 2.19(a)), Hong ajoute une dépouille de denture basée sur la parabole présentée en Figure 5.1. Celle-ci est définie par trois points : 4 μm en pied de dent, 0 μm au cercle primitif et 3 μm en tête. La correction est appliquée comme le schématise la Figure 5.2 où le profil corrigé de la dent apparaît en rouge.

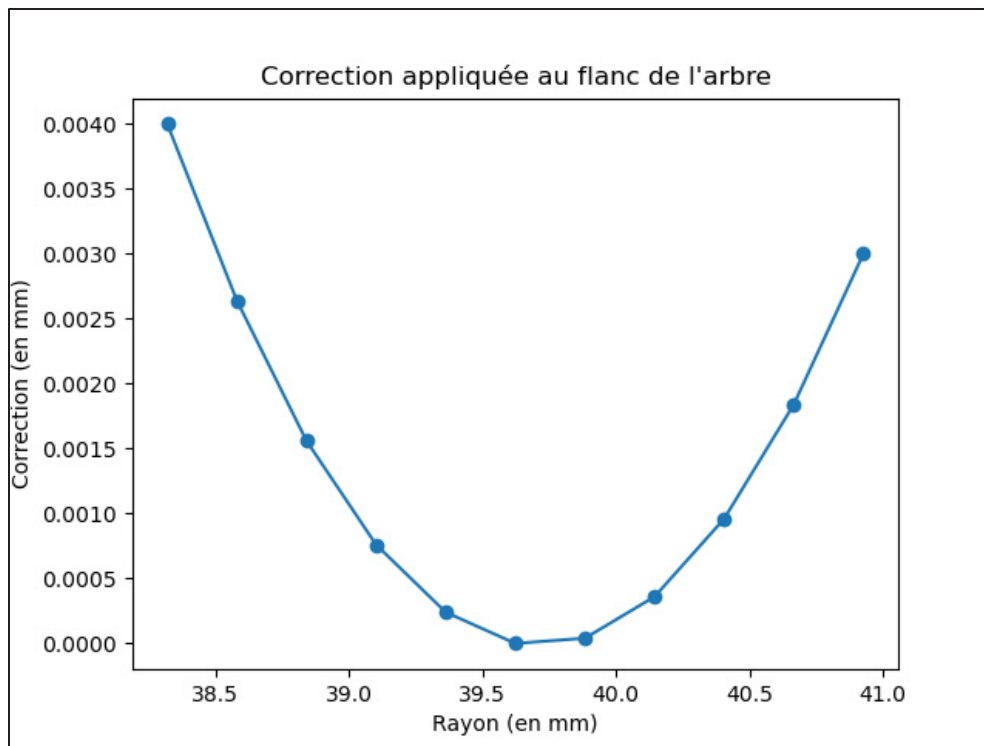


Figure 5.1 Correction parabolique appliquée sur le rayon du flanc

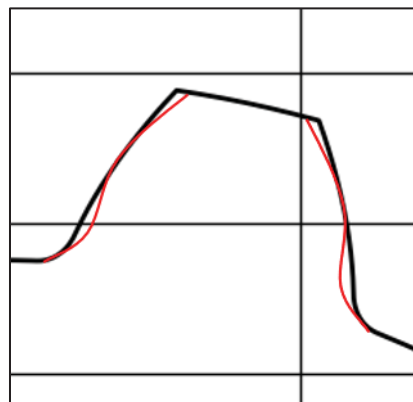


Figure 5.2 Profil de dent corrigé

Une des limites de ce cas d'étude réside dans les conditions limites appliquées, l'auteur (Hong, 2015) fait le choix d'encastrement l'ensemble de la surface extérieure du moyeu, ce qui a pour conséquence de grandement rigidifier ce dernier et donc d'étendre la zone de contact sur la longueur de la cannelure. Afin de se rapprocher le plus possible de la modélisation de l'auteur,

la fonction d'influence de torsion du moyeu a été considérée comme nulle. La torsion du moyeu est donc bloquée mais le fait d'encastrier le moyeu par son extérieur implique également une rigidité de la rotation et de la translation de la base de la dent qui ne peut pas être prise en compte par le modèle développé. En effet, ces deux phénomènes sont inclus dans les réseaux de neurones avec les autres phénomènes propres à la déformation de la dent. Cette différence devra donc être prise en compte dans la comparaison des résultats des deux modèles.

La répartition de la charge entre les dents, rapportée par Hong, possède les caractéristiques suivantes : la pression se concentre à mi-hauteur du flanc de la dent et s'étend sur toute la longueur de la cannelure, en étant plus élevée du côté où le couple est appliqué, elle y atteint la valeur maximale de 118MPa. Toutes les dents sont engagées simultanément et uniformément. Le champ de pression est représenté dans la Figure 5.3, le graphique de gauche représente l'évolution de la pression selon la longueur de cannelure à mi-hauteur de dent tandis que le graphique de droite présente l'évolution de la pression selon la hauteur du flanc à mi-longueur de la cannelure.

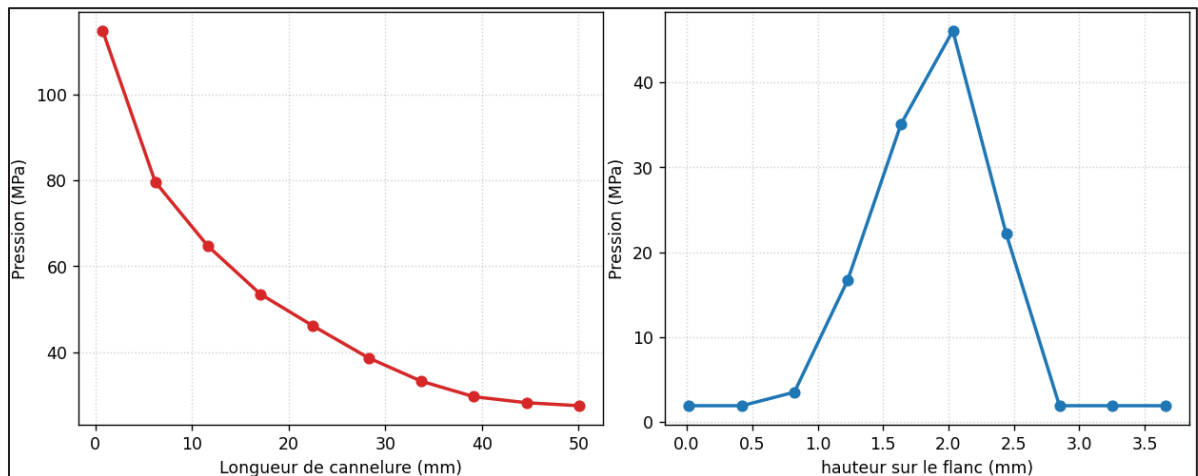


Figure 5.3 Champ de pression de la référence selon la longueur de la cannelure (à gauche) et selon la hauteur du flanc (à droite)

La Figure 5.4 présente le champ de pression obtenu à l'aide du modèle développé pour la géométrie de denture corrigée de la référence (Hong, 2015) soumise au couple $M_z = 2260 \text{ Nm}$

en torsion pure. Le graphique présente le champ de pression pour une dent puisqu'en absence de désalignement, le contact est identique sur l'ensemble des dents. L'abscisse et l'ordonnée correspondent respectivement au rayon et à la longueur (axe y) de la cannelure.

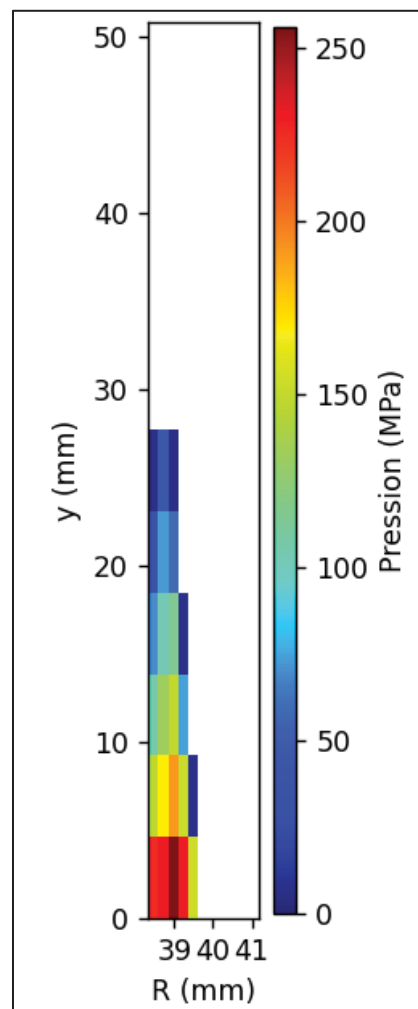


Figure 5.4 Champs de pression obtenus du modèle développé pour le joint cannelé de la thèse de Hong (2015) et un couple de 2260 Nm

La forme des résultats obtenus est similaire à celle des résultats de la référence (Hong, 2015), une pression élevée à l'extrémité des dents et qui diminue sur la longueur de celles-ci. Il n'y a pas de concentration de pression en tête ou pied de dent, ce qui correspond à l'utilisation de la correction du flanc.

Toutefois, les résultats obtenus montrent que le contact s'effectue légèrement en dessous de la mi-hauteur de la dent tandis que les résultats de référence montraient un contact à mi-hauteur. Cette légère différence provient sûrement de la géométrie de la dent qui n'est pas définie par la même norme.

La différence majeure provient du fait que seulement la moitié de la longueur des dents est en contact tandis que l'auteur obtenait la totalité de la longueur du flanc en contact (Hong, 2015). Cette différence s'explique par la différence des conditions limites appliquées, la torsion du moyeu a été supprimée du modèle développé afin de se rapprocher du modèle de l'auteur mais l'impact sur la déformation des dents n'a pas pu être pris en compte. Enfin, les pics de pression obtenus atteignent ici 237 MPa ce qui est supérieur à la valeur de référence de 118 MPa (Hong, 2015), mais cohérent puisque le moyeu simulé par Hong est plus rigide ce qui augmente la zone de contact et réduit les pics de pression.

Les résultats obtenus, bien que différents, sont conformes avec les différences présentes entre les deux modèles et permettent de valider le champ de pression obtenu dans l'ensemble.

5.2 Cannelure bombée à axes alignés

Le second cas de validation a pour but de valider la cohérence de l'indicateur de l'énergie disponible pour l'usure. Le champ de pression obtenu par le modèle développé sera dans un premier temps comparé avec ce deuxième cas puis les résultats liés à l'usure seront ensuite étudiés.

Ce second cas reprend la cannelure bombée étudiée expérimentalement et numériquement par Curà, Mura et Adamo (2017). Il s'agit d'un accouplement à 26 dents de module 1,27 mm, d'angle de pression 30° et de longueur de denture 12,5 mm, en acier 42CrMo4 ($E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$). Le modèle EF de l'article applique un coefficient de frottement de 0,11 avec les axes de l'arbre et du moyeu supposés parfaitement alignés. Deux niveaux de couple sont utilisés, 200 Nm et 700 Nm.

Un bombé longitudinal de rayon $R_{bombé} = 160 \text{ mm}$ est appliqué uniquement sur l'arbre. Cette correction est reproduite dans le présent modèle, la correction qui a pour but de ramener la zone de contact à mi-longueur de la cannelure est nulle au plan médian de la cannelure et atteint $122 \text{ }\mu\text{m}$ aux deux arêtes axiales. La Figure 5.5 présente la correction du bombé (en rouge) sur la dent initiale (en noir).

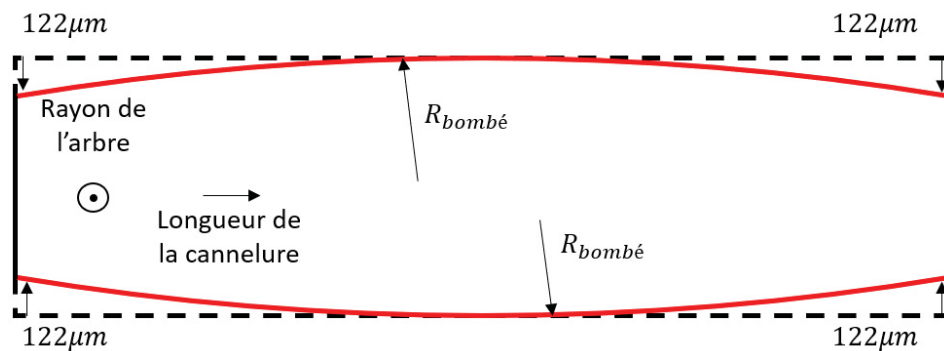


Figure 5.5 Correction de la dent par bombé

La géométrie des cannelures utilisée ne suivant pas la norme ISO 4156, des écarts sur les coefficients de creux et de saillie modifient la géométrie du flanc de la cannelure par rapport au présent modèle. Ces écarts sont faibles en termes de torsion, flexion, cisaillement et compression des dents mais peuvent être importants lors de la modélisation du contact qui peut varier fortement pour quelques micromètres d'écarts.

L'absence d'une correction sur la hauteur du flanc, comme expliqué par Hong dans la section précédente, apporte des concentrations de contraintes en pied et tête de dent, les auteurs ont fait volontairement ce choix pour leurs expériences, et recommandent de les ajouter pour de prochaines études.

Les auteurs confrontent leurs simulations éléments finis à deux modèles analytiques de référence, la théorie de Hertz, qui suppose le contact concentré sur une ellipse de petite étendue,

et la formule de Niemann qui distribue uniformément le couple sur la totalité de la surface engagée. Le Tableau 5.1 reproduit leurs valeurs aux deux couples étudiés de 200 et 700Nm.

Tableau 5.1 Comparaison des grandeurs de contact aux deux couples étudiés

Tiré de Curà et al. (2017)

Couple	Méthode	Aire de contact (en mm^2)	P_{moy} (en MPa)	P_{max} (en MPa)
200 Nm	EF	2,69	179,8	370,8
	Hertz	5,66	95,0	142,5
	Niemann	-	30,3	-
700 Nm	EF	6,05	275,0	833,8
	Hertz	13,05	144,3	216,4
	Niemann	-	106,1	-

Les écarts de valeurs entre leur modèle EF et les solutions analytiques sont relativement importants, ce qui s'explique par le fait que ces dernières (Hertz et Niemann) ne sont pas adaptées pour modéliser les contacts conformes. La Figure 5.6 représente le champ de pression obtenu par les auteurs selon la hauteur du flanc de la dent à mi-longueur de celle-ci à gauche et selon la longueur de cannelure à mi-hauteur de celle-ci à droite. Le champ de pression se situe principalement à mi-longueur de la cannelure, en tête et pied de dent.

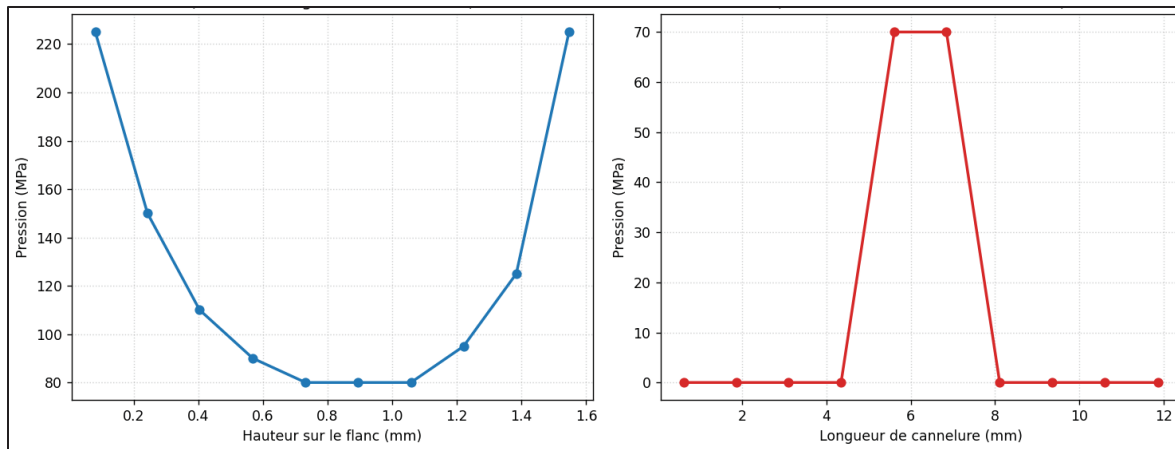


Figure 5.6 Champ de pression de la référence selon la hauteur du flanc (à gauche) et selon la longueur de la cannelure (à droite) pour un couple de 200 Nm

La répartition du champ de pression confirme les effets attendus du bombé qui a pour but de ramener le contact à mi-longueur de la cannelure. Ainsi, une correction supplémentaire sur la hauteur du flanc (une dépouille de denture) comme appliquée dans le premier cas de validation aurait sûrement permis de ramener le contact à mi-hauteur de la dent et éviter des concentrations de pression en pied et tête de dent.

Le Tableau 5.2 présente les résultats obtenus pour les deux cas de chargement avec le modèle développé dans ce mémoire, tandis que la Figure 5.7 présente le champ de pression obtenu pour un couple de 200Nm.

Tableau 5.2 Comparaison des grandeurs de contact obtenus par le modèle développé aux deux couples étudiés

Couple	Aire de contact (en mm^2)	P_{moy} (en MPa)	P_{max} (en MPa)
200 Nm	2,03	43,49	779,18
700 Nm	3,15	152,36	1597,91

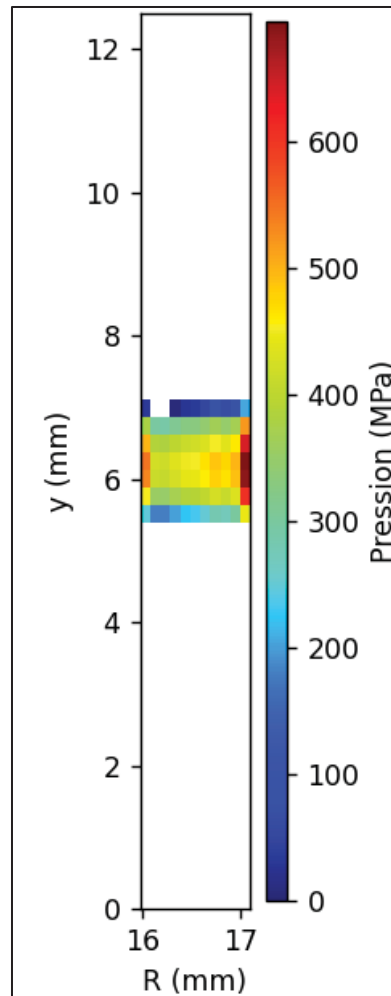


Figure 5.7 Champ de pression du modèle développé associé à l'article de Curà et al. (2017) à 200 Nm

La pression est bien présente à mi-longueur de la cannelure comme attendu mais celle-ci se focalise uniquement en tête des dents de l'arbre et donc en pied des dents du moyeu. Cet écart provient des coefficients de creux et de saillie de dent qui ne sont pas les mêmes que ceux utilisés dans l'article de référence. En effet, les cannelures utilisées dans l'article ne suivent pas la norme ISO 4156 et les valeurs des coefficients utilisés sont donc différents, ce qui vient modifier les zones de contact.

La perte du contact en pied de dent de l'arbre implique donc une réduction de la surface de contact et donc une augmentation de la valeur maximale de pression. Par ailleurs, la

discrétisation du flanc impose au pic d'être porté par une cellule de surface finie, ce qui le rend sensible au raffinement du maillage axial autour du plan médian, où le bombé concentre la portée.

Pour le couple de 200Nm, l'aire du contact reste relativement proche de celle qu'ils ont obtenue avec le modèle par éléments finis de la référence, la perte du contact en pied de dent justifie cet écart ainsi que les écarts liés sur les pressions.

Afin de valider leur modèle, les auteurs comparent ses prédictions à des résultats expérimentaux. Une cannelure a pour cela été testée en fatigue en faisant varier la valeur du couple appliqué, ces valeurs ne sont pas données dans la référence. Ne connaissant pas les conditions de chargement exactes, il devient difficile de comparer les mesures expérimentales avec des résultats tirés du modèle développé. Les résultats obtenus expérimentalement montrent que l'usure apparaît principalement à mi-longueur de la cannelure et à mi-hauteur également sous la forme d'une ellipse, comme le montre la Figure 5.8.

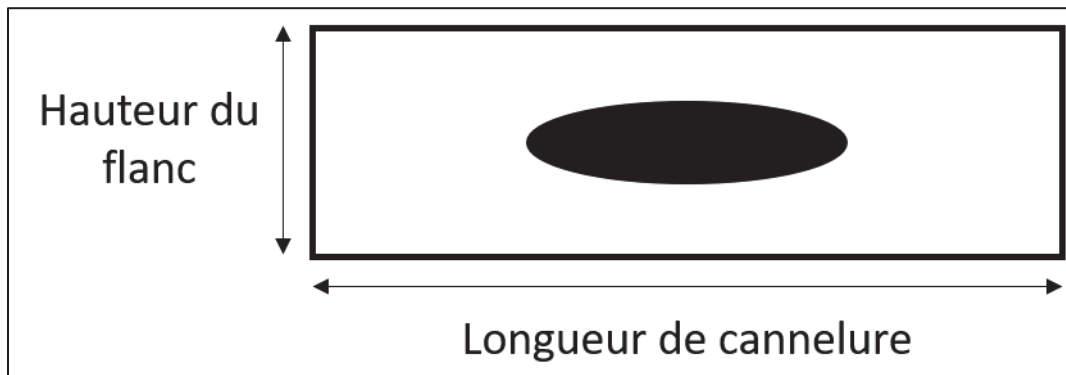


Figure 5.8 Localisation de l'usure sur le flanc de dent pour la référence

La Figure 5.9 présente le champ de glissement obtenu sur les dents de l'arbre à l'aide du modèle développé pour la référence. Les valeurs obtenues sont très faibles voire nulles en raison de l'absence de désalignement entre les deux axes, le glissement devant mathématiquement être égal sur toutes les dents, le glissement moyen des dents est alors présenté sur la figure suivante :

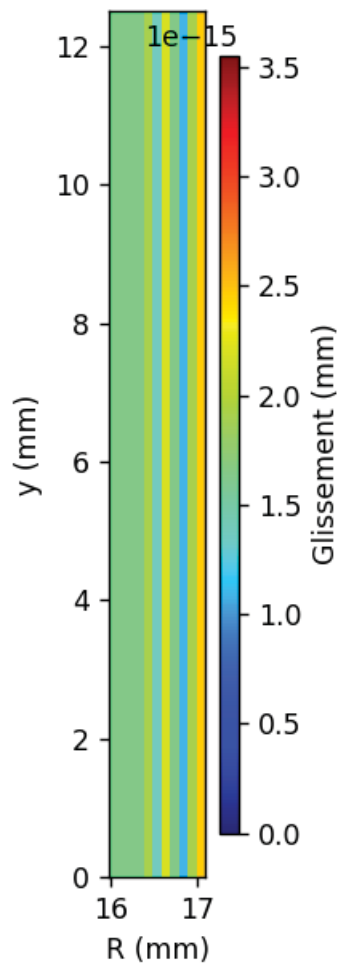


Figure 5.9 Champ de glissement moyen des dents du modèle développé associé à la référence

La Figure 5.10 présente les résultats obtenus par le modèle sur l'arbre pour l'indicateur d'énergie disponible pour l'usure introduit plus tôt. Cet indicateur fournit une valeur proportionnelle à l'énergie disponible pour l'usure présente entre deux pas de dents. En concordance avec la figure précédente, le champ de glissement étant sensé être égal sur toutes les dents, le champ d'usure moyen est présenté sur la figure suivante :

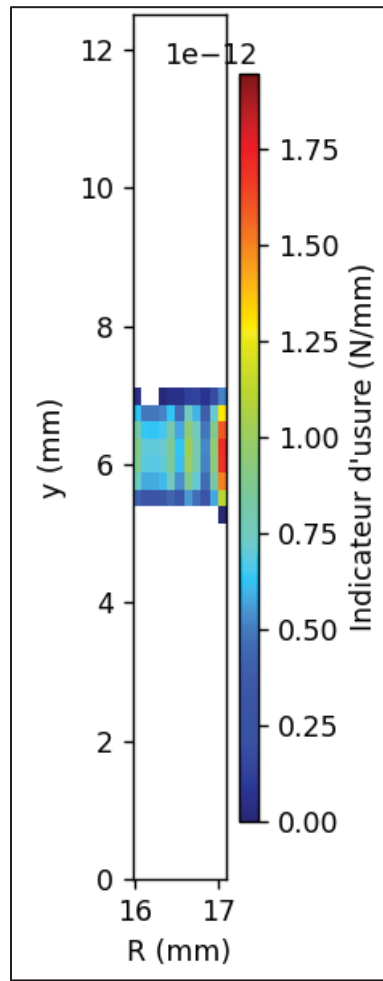


Figure 5.10 Champ d'usure du modèle développé associé à l'article de Curà et al. (2017) à 200 Nm

La Figure 5.11 illustre la somme des indicateurs d'usure des 26 dents de l'arbre, ce qui correspond ainsi à l'indicateur cumulé par une dent lors d'une révolution complète. Cette figure permet ainsi de mieux comprendre l'usure des dents et de comparer les résultats du modèle développé avec l'usure expérimentale des dents.

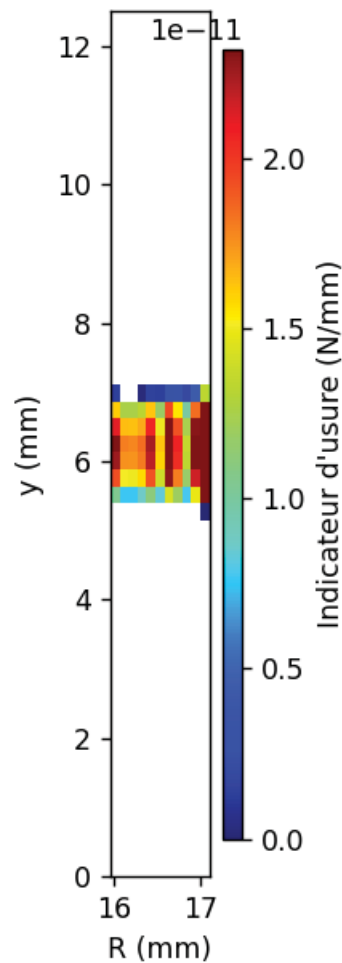


Figure 5.11 Indicateur de l'énergie disponible pour l'usure sur un tour complet

La distribution d'usure prédite est concentrée à mi-largeur de denture, en cohérence avec la zone de contact imposée par le bombé mais celle-ci se concentre particulièrement sur la saillie des dents de l'arbre du joint cannelé, soit la partie la plus proche de la tête de dent. Cet effet provient du fait que le modèle ne prédit aucun contact proche du pied des dents de l'arbre. Cet écart a déjà été justifié par le manque d'informations connues sur la géométrie exacte de la cannelure et l'absence d'une dépouille de la denture sur la hauteur du flanc. La localisation de l'usure paraît tout de même logique avec le champ de pression prédit et les résultats obtenus expérimentalement sur les spécimens d'essai après 9×10^6 cycles présentés en Figure 5.8.

5.3 Efficacité numérique de l'algorithme

L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre a été obtenu sur un ordinateur personnel doté d'un processeur cadencé à 1,7 GHz, comprenant dix cœurs et seize Go de mémoire vive. Le coût numérique de l'algorithme se répartit entre deux étapes successives. La première consiste en l'évaluation des fonctions d'influence de déformation des dents par les douze réseaux de neurones développés à la section 3.1, dont la durée dépend essentiellement de la finesse du maillage retenu sur le flanc de dent. Les fonctions d'influence sont déterminées en une dizaine de secondes pour une discrétisation 11×11 et en environ deux minutes et trente secondes pour une discrétisation 21×21 . Cette étape est réalisée une seule fois en début de calcul et son coût est indépendant du nombre de dents engagées. La seconde étape regroupe l'ensemble des autres fonctions d'influence ainsi que la résolution de l'algorithme et le post-traitement. Elle reste inférieure à une minute pour un maillage 11×11 et à deux minutes pour un maillage 21×21 , pour des nombres de dents compris entre 6 et 50. Un calcul complet correspond donc à un temps total de l'ordre de la minute pour le maillage standard et de quelques minutes pour le maillage le plus raffiné. L'évaluation initiale des réseaux de neurones reste un poste d'optimisation envisageable, par exemple via une stratégie de prédiction par blocs ou une parallélisation des douze réseaux de neurones. Elle ne constitue toutefois pas, à ce stade, un frein opérationnel.

Ces durées se comparent favorablement à celles rapportées par le modèle semi-analytique de Hong (2015). Il indique pour son modèle des temps compris entre quatre et trente minutes selon la finesse du maillage pour une cannelure à vingt-cinq dents, sur un processeur cadencé à 3,4 GHz, et abaisse cette durée à une dizaine de secondes au prix d'un schéma de discrétisation multi-étapes plus complexe à mettre en œuvre.

L'écart est nettement plus marqué vis-à-vis des modèles éléments finis. Le code commercial Helical3D utilisé par Hong (2015) comme référence numérique requiert de dix à quatre-vingt-dix minutes par analyse selon le maillage, sur le même matériel que son modèle semi-analytique, et ne fournit que la matrice de raideur de l'accouplement. Le modèle ABAQUS

développé par Ding et al. (2008) pour la simulation couplée fretting-usure d'une cannelure aéronautique demande quant à lui environ six jours par analyse sur un processeur Pentium 4 à 3 GHz, durée que les auteurs eux-mêmes jugent incompatible avec une simulation au-delà de quelques centaines de cycles. Par ailleurs, le modèle aux éléments de frontière de Medina et Olver (2002) requiert quatre à cinq jours par configuration sur un Pentium III à 800 MHz.

Le Tableau 5.3 présente les différents temps de simulations discutés précédemment, une attention doit toutefois être portée sur les années des modèles développés dont la technologie disponible à ces périodes-là peut impacter les temps de simulations.

Tableau 5.3 Comparaison des temps de simulation

Modèle	Caractéristiques de la simulation	Temps de la simulation
Modèle développé	Maillage 11*11 par dent	~1 min
	Maillage 21*21 par dent	~5 min
Modèle de coefficients d'influence développé par Hong (2015)	Modèle de base	4 à 30 min
	Modèle avec discrétisation multi étape	10 à 20 secondes
Modèle Hélica3D utilisé par Hong (2015)	Modèle éléments finis	10 à 90 min
Modèle ABAQUS développé par Ding et al. (2008)	Modèle éléments finis avec mise à jour itérative de l'usure	6 jours
Modèle d'éléments de frontière développé par Medina et Olver (2002)	Maillage de 2*10 par dent	4 à 5 jours

L'algorithme proposé se positionne ainsi dans le même ordre de grandeur que les modèles semi-analytiques et justifie sa rapidité vis-à-vis des modèles éléments finis et éléments de frontière.

5.4 Conclusion

L'algorithme développé tout au long de ce mémoire a donc pu être vérifié vis-à-vis de deux publications, le premier cas de comparaison qui s'appuie sur la thèse de Hong (2015) a permis de valider le champ de pression obtenu par le modèle développé tandis que le second cas a permis de valider la cohérence de l'indicateur d'énergie disponible pour l'usure. Une comparaison avec des cas de désalignement pourrait permettre de renforcer la validité de l'algorithme. Enfin, une comparaison de l'efficacité numérique de l'algorithme a permis de prouver sa rapidité vis-à-vis des modèles éléments finis et de montrer qu'il est tout aussi rapide que les autres modèles qui se basent sur la même méthode.

CONCLUSION

Ce mémoire a été réalisé afin de développer un outil numérique rapide et précis pour la prédiction des pressions de contact et la localisation des zones exposées au fretting dans les cannelures désalignées. Plus précisément, l'objectif est de proposer une alternative semi-analytique à la simulation par éléments finis, dont le coût de calcul rend impraticable à la fois une démarche paramétrique sur un grand nombre de configurations et un usage courant en dimensionnement industriel. Cette alternative doit toutefois rester fidèle à la physique d'un contact conforme.

L'algorithme développé s'appuie sur la formulation de Boussinesq pour le contact normal et sur celle de Cerruti pour les efforts tangentiels de frottement, avec une correction des effets de bord destinée à compenser les limites de l'hypothèse de demi-espace. À cette déformation surfacique s'ajoutent deux autres contributions prises en compte simultanément : la déformation des dents ; et la torsion globale de l'arbre et du moyeu. La flexion, la torsion, le cisaillement et la compression des dents de l'arbre et du moyeu sont prédites par douze réseaux de neurones — six pour l'arbre, six pour le moyeu — entraînés sur une base de données d'environ vingt-cinq mille simulations éléments finis paramétriques réalisées sur Calcul Québec. L'architecture retenue (deux couches cachées de 2 817 neurones, activation ReLU) atteint un coefficient de détermination supérieur à 0,97 sur l'ensemble des douze réseaux. La torsion globale de l'arbre et du moyeu est traitée par une approche RDM fondée sur un rayon équivalent dont l'expression a été calibrée sur une série de simulations éléments finis dédiées, fournissant des formules empiriques en fonction du module, du nombre de dents et, pour le moyeu, de l'épaisseur de jante. L'algorithme est enfin étendu à la prédiction du fretting par l'application locale de la loi d'Archard sur le produit de la pression et de l'amplitude de glissement obtenues en chaque cellule de contact, ce qui produit une cartographie comparative des zones de la dent les plus exposées pour un chargement donné.

La validation de l'algorithme a été conduite en comparant les résultats obtenus à deux cas issus de la littérature. Le premier cas provenant de la thèse de Hong (2015), porte sur une cannelure

droite en torsion pure avec une correction parabolique du flanc. L'algorithme reproduit les caractéristiques essentielles du champ de pression publié, et l'écart de répartition de la pression le long du flanc s'explique par l'encastrement du moyeu réalisé par Hong sur l'ensemble de l'extérieur du moyeu. Le deuxième cas, issu de l'article de Curà et al. (2017), porte sur une cannelure bombée à axes alignés. L'algorithme retrouve la structure du champ de pression rapportée par les auteurs ainsi que les ordres de grandeur du tableau de comparaison FEM / Hertz / Niemann publié dans l'article. L'écart observé sur la valeur du pic, localisé à la frontière entre la développante et la trochoïde, provient de deux facteurs principaux, le manque de correction sur la hauteur du flanc ainsi que le coefficient de creux et le rayon de congé de l'outil, non précisés par les auteurs, qui définissent radialement la zone de contact. Des comparaisons sur des cas plus complexes, avec notamment des désalignements, permettraient de renforcer la validité du modèle développé.

Le travail présenté reste cependant soumis à un certain nombre de limites qu'il convient d'explicitier. La formulation du contact est purement élastique : la plasticité locale qui apparaît lorsque la pression maximale dépasse la limite d'élasticité du matériau n'est pas reproduite. Le modèle est par ailleurs quasi-statique et n'aborde pas les phénomènes dynamiques ni l'évolution temporelle de l'usure. Le glissement est considéré comme total, une modélisation en collage-glissement associée à un coefficient k_w de la loi d'Archard non uniforme et non constant sur le cycle de fonctionnement permettrait une quantification absolue de l'usure. Enfin, la géométrie de l'arbre et du moyeu retenue dans l'algorithme suit la norme ISO 4156, et toute transposition à une autre norme sort du domaine de validité des réseaux de neurones entraînés.

L'outil développé constitue ainsi une alternative semi-analytique rapide pour la prédiction du champ de pression de contact et la cartographie du fretting dans les cannelures désalignées. Il fournit dès à présent un support exploitable pour des études paramétriques de dimensionnement et d'évaluation de configurations, et constitue une base à partir de laquelle pourront être développées les extensions visées par le projet de recherche conduit en collaboration avec le CETIM.

RECOMMANDATIONS

Les pistes d'amélioration et d'extension du travail présenté peuvent être regroupées selon trois axes : le raffinement physique du modèle, l'extension du domaine géométrique et la validation expérimentale.

Raffinement physique du modèle

- Tenir compte de la variabilité de k_w au cours du cycle de fonctionnement, en s'appuyant notamment sur les phases d'évolution identifiées par Wang et Wahab (2021).
- Calibrer le coefficient k_w de la loi d'Archard par des essais d'usure dédiés afin de quantifier la profondeur usée.
- Intégrer le calcul de l'usure cycle par cycle pour passer de la cartographie instantanée à une prédiction de durée de vie de l'accouplement. Cette extension demande une mise à jour itérative des surfaces de contact à mesure que l'usure se développe.
- Étendre la formulation à un modèle élasto-plastique local pour traiter les pics de pression dépassant la limite d'élasticité du matériau en s'appuyant sur des travaux similaires (Chen, Wang, Wang, Keer, & Cao, 2008 ; Chiu, 1977, 1978 ; Jacq, Nélis, Lormand, & Girodin, 2002 ; Liu, Jin, Wang, Keer, & Wang, 2012 ; Z. Wang et al., 2013).
- Implémenter un frottement de type collage-glissement, en lieu et place du frottement de Coulomb pur actuellement utilisé, afin de mieux résoudre la zone de contact en présence de désalignement.

Extension du domaine géométrique

- Intégrer le coefficient de saillie et de creux de dent, ainsi que le déport et l'angle de pression α_D à la base de données des réseaux de neurones afin de pouvoir simuler toutes les géométries de dent et ne plus être restreint à la norme ISO 4156.
- Étendre l'algorithme à des modifications de profil paramétrisables (bombé axial, correction radiale de type parabolique ou polynomiale d'ordre supérieur, etc.) pour

couvrir les corrections de bombé et de pied et de tête de dent rencontrées dans les conceptions industrielles.

- Aborder les cannelures hélicoïdales, à l'image du cas étudié par Leen et al. (2003), afin d'étendre l'outil aux configurations avec un effort axial.

Validation expérimentale

- Confronter directement les prédictions de l'algorithme à des mesures réalisées sur un banc d'essai dédié.

L'intégration du coefficient d'usure et de ses variations au cours du cycle de fonctionnement ainsi que la confrontation directe à des mesures sur banc constituent les deux priorités afin de rendre l'outil exploitable industriellement dans le cadre du projet de recherche conduit avec le CETIM.

ANNEXE I

Précision des réseaux de neurones pour la déformation des dents

La section 3.1.2 a présenté l'entraînement des douze réseaux de neurones utilisés pour prédire les déplacements induits par la flexion, la torsion, le cisaillement et la compression des dents. Les performances y sont résumées par le coefficient de détermination obtenu sur le jeu de test, compris entre $R^2 = 0,9734$ et $R^2 = 0,9839$ selon le réseau considéré. Cette annexe complète ces valeurs par une représentation graphique de la qualité des prédictions.

I.1 Corrélation entre les prédictions et les résultats éléments finis

La Figure-A I-1 présente les prédictions du réseau de neurones en fonction des résultats attendus, c'est-à-dire des déplacements issus des simulations éléments finis, pour l'ensemble des points du jeu de test. Ce jeu regroupe les points de données réservés au test, ces points n'ont donc jamais été rencontrés lors de l'entraînement. Les déplacements présentés correspondent aux valeurs normalisées entre 0 et 1 telles qu'utilisées par le réseau de neurones. La droite continue $y = x$ représente la prédiction idéale, pour laquelle la valeur prédite est égale à la valeur attendue, tandis que les droites en pointillés délimitent une marge de $\pm 10\%$ autour de celle-ci.

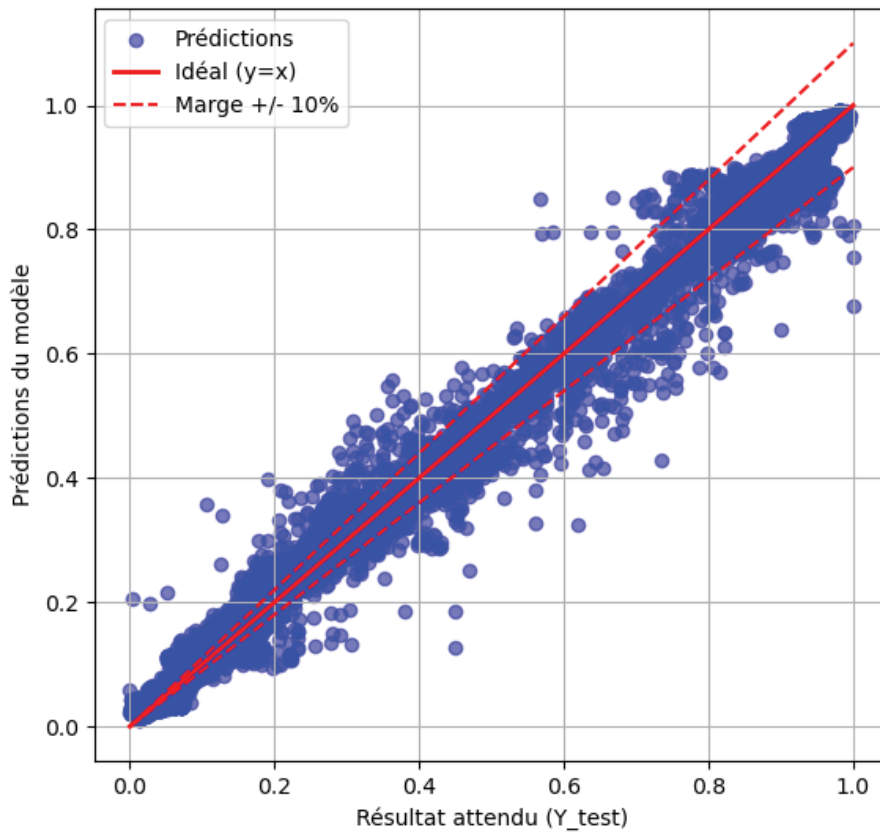


Figure-A I-1 Prédiction du réseau de neurones en fonction des résultats attendus

La grande majorité des points se situe à l'intérieur de la marge de $\pm 10\%$ et se répartit de manière symétrique autour de la droite idéale, ce qui traduit l'absence de biais systématique : les déplacements ne sont, en moyenne, ni surestimés ni sous-estimés. Quelques points isolés s'écartent davantage de la droite idéale, notamment pour les faibles déplacements où la marge relative de $\pm 10\%$ devient très restrictive puisqu'un écart absolu minime suffit à en sortir. Le comportement illustré sur cette figure est représentatif de l'ensemble des douze réseaux entraînés. Ces résultats confirment graphiquement la capacité de généralisation traduite par les coefficients de détermination et justifient l'utilisation des réseaux de neurones en substitution aux simulations éléments finis dans l'algorithme de contact. L'origine de ces écarts est examinée plus en détail dans la sous-section suivante au moyen de l'erreur relative.

I.2 Erreur relative des prédictions

L'analyse précédente peut être complétée par l'examen de l'erreur relative commise par le réseau de neurones sur chaque point du jeu de test. Cette erreur rapporte l'écart entre la valeur prédite et la valeur attendue à cette dernière, selon l'équation (A I-1) :

$$erreur\ relative = \frac{u_{prédit} - u_{EF}}{u_{EF}} \quad (A\ I-1)$$

Avec u_{EF} la valeur attendue, obtenue par éléments finis.

La Figure-A I-2 présente cette erreur relative en fonction de la valeur attendue, pour les mêmes points du jeu de test que la Figure-A I-1. Contrairement à la Figure-A I-1, les déplacements sont ici exprimés dans leur échelle physique, avant normalisation. Le graphique supérieur couvre la totalité de la plage d'erreurs observée, tandis que le graphique inférieur restreint l'axe vertical à l'intervalle $\pm 0,3$ afin de rendre visible la répartition de la grande majorité des points. Dans les deux cas, la droite horizontale en pointillés marque l'erreur nulle, correspondant à une prédiction parfaite.

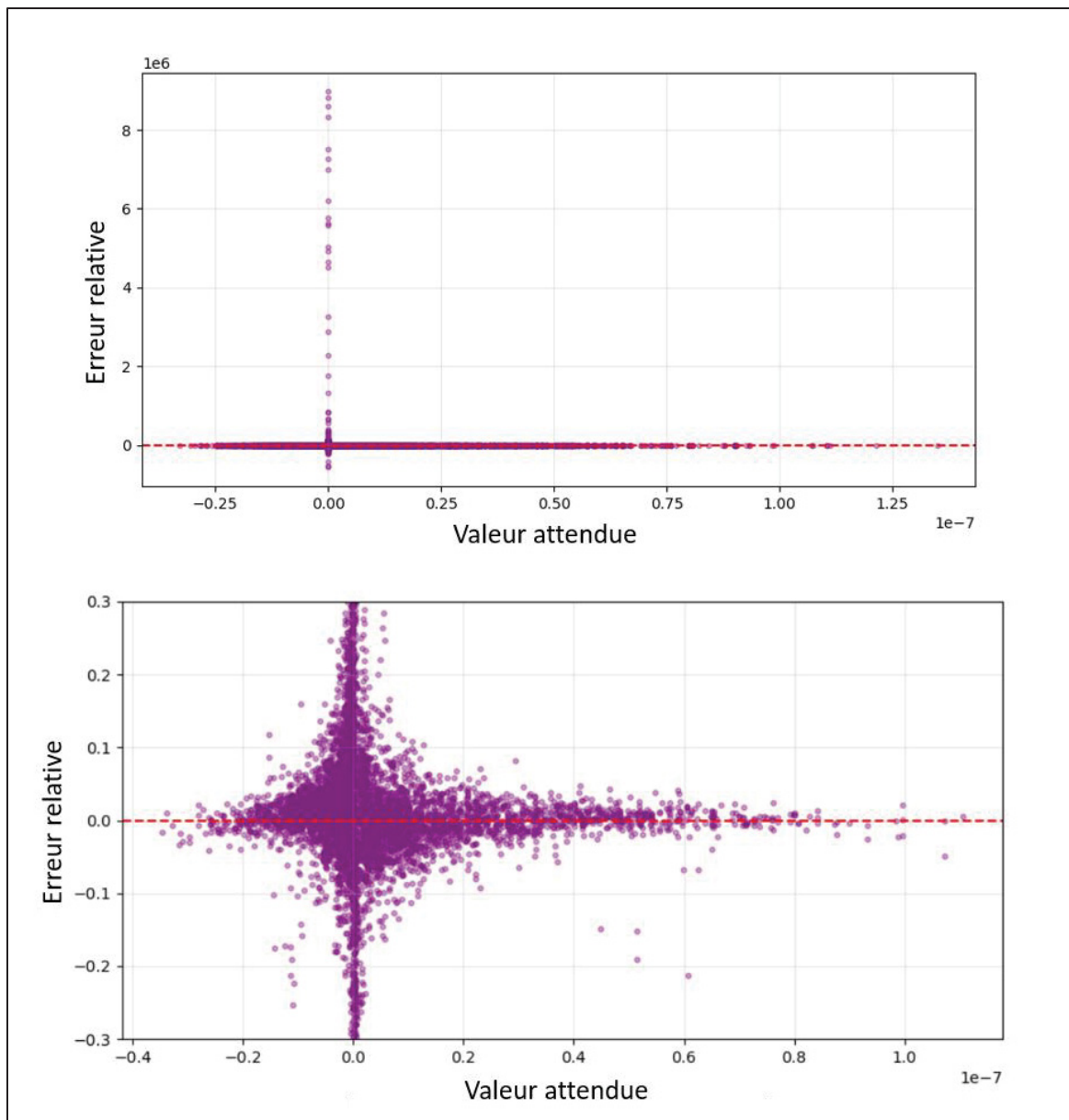


Figure-A I-2 Erreur relative de la prédiction en fonction de la valeur attendue, sur la page complète en haut et restreinte à $\pm 0,3$ en bas

Le graphique supérieur montre que les erreurs relatives de très grande amplitude se concentrent exclusivement au voisinage de la valeur attendue nulle. Ce comportement découle directement de la définition donnée à l'équation (A I-1) : lorsque la valeur attendue tend vers zéro, le dénominateur s'annule et un écart absolu pourtant infime produit une erreur relative arbitrairement grande. Ces points ne traduisent donc pas une défaillance du réseau de neurones, mais une limite de l'indicateur lui-même. Le graphique inférieur précise la répartition du reste des points : le nuage adopte une forme d'entonnoir centré sur la droite d'erreur nulle, qui s'élargit à l'approche de la valeur attendue nulle et se resserre rapidement dès que l'amplitude

des déplacements devient significative. La distribution demeure symétrique de part et d'autre de l'erreur nulle, ce qui confirme l'absence de biais systématique relevée sur la Figure-A I-1. Pour les déplacements d'amplitude notable, c'est-à-dire ceux qui contribuent réellement aux déformations calculées par l'algorithme de contact, l'erreur relative demeure très majoritairement contenue dans la marge de $\pm 10\%$. Les écarts importants relevés sur les deux figures de cette annexe ne concernent ainsi que des déplacements quasi nuls, sans influence sur les résultats de l'algorithme.

ANNEXE II

Précision des équations empiriques pour la torsion de l'arbre et du moyeu

La section 3.2 a introduit un rayon équivalent en torsion permettant d'assimiler la section cannelée de l'arbre à un cylindre plein et celle du moyeu à un tube creux, afin d'appliquer les formules analytiques de torsion de la RDM. Des formules empiriques, établies par régression sur des simulations éléments finis, fournissent ce rayon en fonction du module et du nombre de dents, ainsi que du rayon extérieur de la jante pour le moyeu. Cette annexe présente la vérification de la précision de ces formules.

La Figure-A II-1 compare, pour un ensemble de configurations de validation couvrant la plage de paramètres étudiée, le rayon équivalent calculé par les formules empiriques, en ordonnée, au rayon équivalent extrait des simulations Ansys par inversion de la formule de torsion, en abscisse. Le graphique de gauche correspond à l'arbre et celui de droite au moyeu. La droite continue $x = y$ représente la correspondance parfaite entre les deux valeurs, tandis que les droites en pointillés délimitent une marge de $\pm 10\%$.

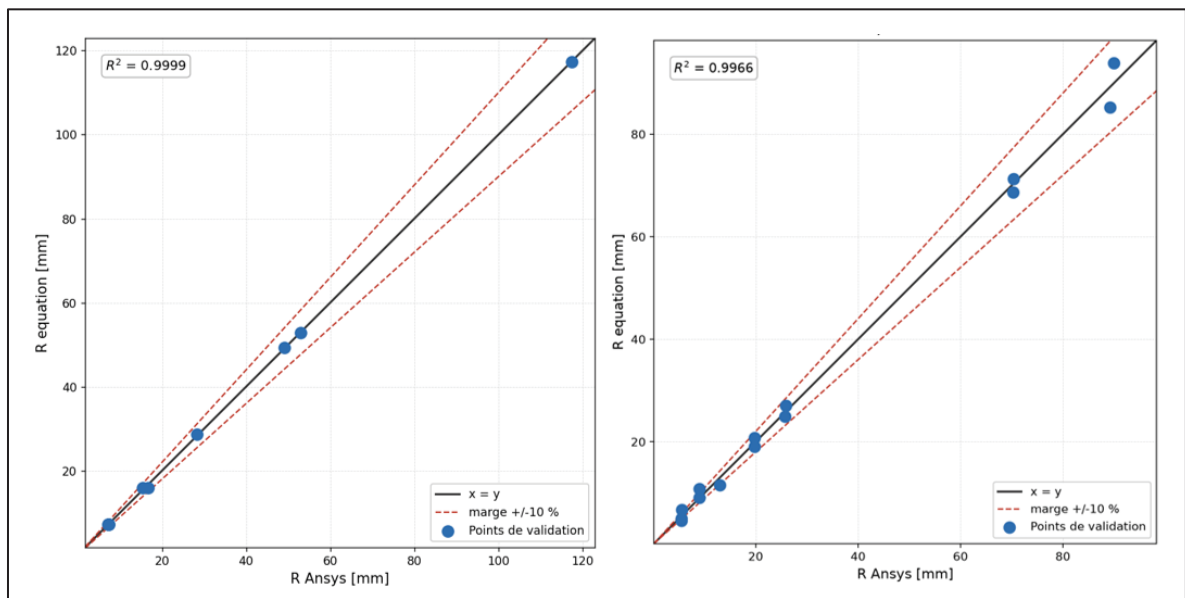


Figure-A II-1 Rayons équivalents prédits par l'équation empirique en fonction du rayon obtenu par éléments finis, pour l'arbre à gauche et le moyeu à droite

Pour l'arbre, les points de validation sont pratiquement confondus avec la droite $x = y$ et le coefficient de détermination atteint $R^2 = 0,9999$. Pour le moyeu, la corrélation demeure très élevée avec $R^2 = 0,9966$, les écarts les plus visibles apparaissent pour les rayons les plus grands mais restent contenus dans la marge de $\pm 10\%$. Cette précision légèrement moindre s'explique

par le paramètre supplémentaire qu'introduit l'épaisseur de jante dans la formule empirique du moyeu. L'ensemble des points se situant dans la marge de $\pm 10\%$, les formules empiriques restituent fidèlement la rigidité en torsion des sections cannelées sur l'ensemble de la plage de géométries couverte, ce qui justifie leur utilisation dans le calcul de la matrice d'influence de torsion présentée à la section 3.2.

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Archard, J. F. (1953). Contact and Rubbing of Flat Surfaces. *Journal of Applied Physics*, 24(8), 981-988. <https://doi.org/10.1063/1.1721448>
- Archard, J. F. (1959). The temperature of rubbing surfaces. *Wear*, 2(6), 438-455. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(59\)90159-0](https://doi.org/10.1016/0043-1648(59)90159-0)
- Barrot, A., Paredes, M., & Sartor, M. (2009). Extended equations of load distribution in the axial direction in a spline coupling. *Engineering Failure Analysis*, 16(1), 200-211. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2008.03.001>
- Blok, H. (1937a). General discussion on lubrication, p. 222.
- Blok, H. (1937b). Second World Petroleum Congress. Paris.
- Chase, K. W., Sorensen, C. D., & DeCaires, B. J. K. (2010). Variation Analysis of Tooth Engagement and Loads in Involute Splines. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 7(4), 746-754. <https://doi.org/10.1109/TASE.2009.2033033>
- Chen, W. W., Wang, Q. J., Wang, F., Keer, L. M., & Cao, J. (2008). Three-Dimensional Repeated Elasto-Plastic Point Contacts, Rolling, and Sliding. *Journal of Applied Mechanics*, 75(2), 021021. <https://doi.org/10.1115/1.2755171>
- Chiu, Y. P. (1977). On the Stress Field Due to Initial Strains in a Cuboid Surrounded by an Infinite Elastic Space. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4), 587-590. <https://doi.org/10.1115/1.3424140>

- Chiu, Y. P. (1978). On the Stress Field and Surface Deformation in a Half Space With a Cuboidal Zone in Which Initial Strains Are Uniform. *Journal of Applied Mechanics*, 45(2), 302-306. <https://doi.org/10.1115/1.3424292>
- Cuffaro, V., Curà, F., & Mura, A. (2016). Damage identification on spline coupling teeth by means of roughness parameters. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 82, 9-16. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.09.008>
- Curà, F., & Mura, A. (2017). Evaluation of the fretting wear damage on crowned splined couplings. *Procedia Structural Integrity*, 5, 1393-1400. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2017.07.203>
- Curà, F., Mura, A., & Adamo, F. (2017). Fatigue damage in spline couplings: numerical simulations and experimental validation. *Procedia Structural Integrity*, 5, 1326-1333. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2017.07.141>
- De Vaujany, J. P., Guingand, M., & Teixeira Alves, J. (2017). Quasi-static analysis of spline coupling under load. *Mechanics & Industry*, 18(2), 202. <https://doi.org/10.1051/meca/2016022>
- Ding, J., Leen, S. B., Williams, E. J., & Shipway, P. H. (2008). Finite element simulation of fretting wear-fatigue interaction in spline couplings. *Tribology - Materials, Surfaces & Interfaces*, 2(1), 10-24. <https://doi.org/10.1179/175158308X320791>
- Ding, J., McColl, I. R., & Leen, S. B. (2007). The application of fretting wear modelling to a spline coupling. *Wear*, 262(9-10), 1205-1216. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2006.11.017>
- Finney, J. (1994). A Comparison of ISO 4156/ANSI B92.2M,-,1980 With Older Imperial Standards.

- Fonseca, D. J., Navarrese, D. O., & Moynihan, G. P. (2003). Simulation metamodeling through artificial neural networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 16(3), 177-183. [https://doi.org/10.1016/S0952-1976\(03\)00043-5](https://doi.org/10.1016/S0952-1976(03)00043-5)
- Guilbault, R. (2000). *Développement d'un modèle tridimensionnel d'engrenages cylindriques hélicoïdaux : calcul des distributions linéiques de charge et contraintes au pied des dents*. Université de Laval.
- Guilbault, R. (2011). A Fast Correction for Elastic Quarter-Space Applied to 3D Modeling of Edge Contact Problems. *Journal of Tribology*, 133(3), 031402. <https://doi.org/10.1115/1.4003766>
- Hartnett, M. J. (1980). A general numerical solution for elastic body contact problems.
- Hertz, H. (1882). Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *crll*, 1882(92), 156-171. <https://doi.org/10.1515/crll.1882.92.156>
- Hong, J. (2015). A SEMI-ANALYTICAL LOAD DISTRIBUTION MODEL OF SPLINE JOINTS.
- Huang, W., Liu, Z., Ma, H., Zhu, H., Zeng, Y., Chen, Y., & Guan, H. (2024). Self-excited vibration analysis of spline rotor systems considering parallel and angular misalignments. *Tribology International*, 198, 109920. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2024.109920>
- ISO 4156:1981 Straight cylindrical involute splines — Metric module, side fit — Generalities, dimensions and inspection. (1981, mai). Genève.

- Jacq, C., Nélías, D., Lormand, G., & Girodin, D. (2002). Development of a Three-Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code. *Journal of Tribology*, 124(4), 653-667. <https://doi.org/10.1115/1.1467920>
- Leen, S. B., McColl, I. R., Ratsimba, C. H. H., & Williams, E. J. (2003). Fatigue life prediction for a barrelled spline coupling under torque overload. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 217(3), 123-142. <https://doi.org/10.1243/095441003322297234>
- Liang, L., Liu, M., Martin, C., & Sun, W. (2018). A deep learning approach to estimate stress distribution: a fast and accurate surrogate of finite-element analysis. *Journal of The Royal Society Interface*, 15(138), 20170844. <https://doi.org/10.1098/rsif.2017.0844>
- Liu, S., Jin, X., Wang, Z., Keer, L. M., & Wang, Q. (2012). Analytical solution for elastic fields caused by eigenstrains in a half-space and numerical implementation based on FFT. *International Journal of Plasticity*, 35, 135-154. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.002>
- Liu, S., & Wayne Chen, W. (2012). Two-dimensional numerical analyses of double conforming contacts with effect of curvature. *International Journal of Solids and Structures*, 49(11-12), 1365-1374. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.02.019>
- Medina, S., & Olver, A. V. (2002). Regimes of Contact in Spline Couplings. *Journal of Tribology*, 124(2), 351-357. <https://doi.org/10.1115/1.1403456>
- Newley, R. A. (1978). The mechanisms of fretting wear of misaligned splines in the presence of a lubricant.
- Paul, B., & Hashemi, J. (1981). Contact Pressures on Closely Conforming Elastic Bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 48(3), 543-548. <https://doi.org/10.1115/1.3157671>

- Persson, A. (1964). On the stress distribution of cylindrical elastic bodies in contact.
- Sauger, E., Fouvry, S., Ponsonnet, L., Kapsa, P., Martin, J. M., & Vincent, L. (2000). Tribologically transformed structure in fretting. *Wear*, 245(1-2), 39-52. [https://doi.org/10.1016/S0043-1648\(00\)00464-6](https://doi.org/10.1016/S0043-1648(00)00464-6)
- Sellgren, U., & Olofsson, U. (1999). Application of a constitutive model for micro-slip in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 170(1-2), 65-77. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00189-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00189-3)
- Sendlbeck, S., Maurer, M., Otto, M., & Stahl, K. (2023). Potentials and challenges in enhancing the gear transmission development with machine learning methods—a review. *Forschung im Ingenieurwesen*, 87(4), 1333-1346. <https://doi.org/10.1007/s10010-023-00699-y>
- Sum, W. S., Leen, S. B., & Williams, E. J. (2003). Parametric Study on the Frictional Contact Behaviour between Spline Teeth. *Materials Science Forum*, 440-441, 69-76. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.440-441.69>
- Tjernberg, A. (2001). Load distribution in the axial direction in a spline coupling. *Engineering Failure Analysis*, 8(6), 557-570. [https://doi.org/10.1016/S1350-6307\(00\)00027-3](https://doi.org/10.1016/S1350-6307(00)00027-3)
- Uhlig, H. H. (1954). Mechanism of Fretting Corrosion. *Journal of Applied Mechanics*, 21(4), 401-407. <https://doi.org/10.1115/1.4010940>
- Wang, S., & Wahab, M. A. (2021). A Numerical Study on the Effect of Variable Wear Coefficient on Fretting Wear Characteristics. *Materials*, 14(8), 1840. <https://doi.org/10.3390/ma14081840>

- Wang, Z., Jin, X., Liu, S., Keer, L. M., Cao, J., & Wang, Q. (2013). A new fast method for solving contact plasticity and its application in analyzing elasto-plastic partial slip. *Mechanics of Materials*, 60, 18-35. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.01.001>
- Weatherford, W. D., Valtierra, M. L., & Ku, P. M. (1968). Mechanisms of Wear in Misaligned Splines. *Journal of Lubrication Technology*, 90(1), 42-48. <https://doi.org/10.1115/1.3601559>
- Xiao, L., Xu, Y., Chen, Z., & Zhang, L. (2023). Non-linear dynamic response of misaligned spline coupling: Theoretical modeling and experimental investigation. *Journal of Vibration and Control*, 29(7-8), 1590-1605. <https://doi.org/10.1177/10775463211067104>
- Yuan, Y., Zhao, G., Zhao, X., Qian, L., Ma, S., & Wang, F. (2024). Contact stress prediction and fretting wear measurement of aeronautic crowned involute splines. *Tribology International*, 193, 109407. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2024.109407>
- Yüksel, N. (2026). Comparative analysis of surrogate models for nonlinear behavior prediction of an aircraft landing gear bracket. *Journal of Engineering Research*, S2307187726000040. <https://doi.org/10.1016/j.jer.2026.01.005>
- Zhao, G., Zhao, X., Qian, L., Yuan, Y., Ma, S., & Guo, M. (2023). A Review of Aviation Spline Research. *Lubricants*, 11(1), 6. <https://doi.org/10.3390/lubricants11010006>