

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
Ph.D.

PAR  
KAMEL HENTABLI

CONCEPTION DE LOIS DE PILOTAGE ROBUSTES ET  
SÉQUENCEMENT DE GAINS PAR L'APPROCHE DES SYSTÈMES  
LINÉAIRES À PARAMÈTRES VARIANTS

MONTREAL, LE 28 JUIN 2006

© droits réservés de Kamel HENTABLI

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Ouassima Akhrif, directeur de thèse  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Lahcen Saydy, codirecteur de thèse  
Département de génie électrique à l'École Polytechnique de Montréal

M. Louis A. Dessaint, président du jury  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Jules O'Shea, professeur (examineur externe)  
Département de génie électrique à l'École Polytechnique de Montréal

M. Maarouf Saad, professeur  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 20 DÉCEMBRE 2005

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# CONCEPTION DE LOIS DE PILOTAGE ROBUSTES ET SÉQUENCEMENT DE GAINS PAR L'APPROCHE DES SYSTÈMES LINÉAIRES À PARAMÈTRES VARIANTS

Kamel Hentabli

## SOMMAIRE

Cette recherche s'inscrit dans le cadre du projet de recherche *Active Control Technology* entre l'*Ecole de Technologie Supérieure* et le constructeur *Bombardier Aéronautique*. Le but est de concevoir des stratégies de commandes multivariables et robustes pour des modèles dynamiques d'avions. Ces stratégies de commandes devraient assurer à l'avion une haute performance et satisfaire des qualités de vol désirées en l'occurrence, une bonne manœuvrabilité, de bonnes marges de stabilité et un amortissement des mouvements phugoïdes et rapides de l'avion. Dans un premier temps, nous nous sommes principalement intéressés aux méthodes de synthèse *LTI* et plus exactement à l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  et la  $\mu$ -synthèse. Par la suite, nous avons accordé un intérêt particulier aux techniques de commande *LPV*.

Pour mener à bien ce travail, nous avons envisagé une approche fréquentielle, typiquement  $\mathcal{H}_\infty$ . Cette approche est particulièrement intéressante, dans la mesure où le modèle de synthèse est construit directement à partir des différentes spécifications du cahier des charges. En effet, ces spécifications sont traduites sous forme de gabarits fréquentiels, correspondant à des pondérations en entrée et en sortie que l'on retrouve dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  classique.

Par ailleurs, nous avons utilisé une représentation de type linéaire fractionnelle (*LFT*), jugée mieux adaptée pour la prise en compte des différents types d'incertitudes, qui peuvent intervenir sur le système. De plus, cette représentation s'avère très appropriée pour l'analyse de la robustesse via les outils de la  $\mu$ -analyse.

D'autre part, afin d'optimiser le compromis entre les spécifications de robustesse et de performance, nous avons opté pour une structure de commande à 2 degrés de liberté avec modèle de référence.

Enfin, ces techniques sont illustrées sur des applications réalistes, démontrant ainsi la pertinence et l'applicabilité de chacune d'elle.

**Mots clefs :** Commande de vol, qualités de vol et manoeuvrabilité, commande robuste, approche  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mu$ -synthèse, systèmes linéaires à paramètres variants, séquencement de gains, transformation linéaire fractionnelle, inégalité matricielle linéaire.

## AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans cette thèse, financés à travers le projet *Active Control Technology*, ont été effectués au laboratoire *Bombardier Aéronautique*, dans le département Génie Électrique de l'*Ecole de Technologie Supérieure*.

Je tiens à remercier tout particulièrement Madame Ouassima Akhrif, Professeur à l'École de Technologie Supérieure et directeur du *Groupe de Recherche en Électronique de Puissance et Commande Industrielle*, qui a bien voulu prendre en charge la direction de ma thèse, pour m'avoir fait profiter de son expérience et pour ces remarques judicieuses, et Monsieur Lahcen Saydy, Professeur à l'École Polytechnique de Montréal et coordonnateur des programmes d'études supérieures du département de génie électrique, pour avoir voulu codiriger ces travaux, pour avoir su me faire profiter de ses compétences théoriques et de son expérience.

Je remercie vivement Monsieur Louis A. Dessaint, Professeur à l'École de Technologie Supérieure et directeur de la *chaire TransEnergie sur la simulation et la commande des réseaux électriques*, pour avoir accepté de présider ce jury de thèse. Il témoigne ainsi de la confiance qu'il place dans mes travaux et m'honore par sa disponibilité.

Je tiens également à remercier Monsieur Maarouf Saad, Professeur à l'École de Technologie Supérieure et directeur du département de génie électrique, pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ces travaux et pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie également Monsieur Jules O'shea, Professeur à l'École Polytechnique de Montréal, et conseiller pour les axes de spécialisation *avionique et commande et technologies spatiales*, pour avoir accepté d'être membre du jury.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des étudiants et chercheurs du laboratoire Bombardier Aéronautique de l'ÉTS, pour leur sympathie et la bonne ambiance qu'ils ont su entretenir au sein du laboratoire, en particulier Zhu, Sixto, Raymond, Hatim, Daniel, Mohamad, Mohamad-Amal, Chafik et les Hicham(s). Des remerciements tout particuliers à Kamel Kalache pour son aide précieuse et ses encouragements.

Enfin, je tiens à remercier Madjid Haouani, post-doctorant au sein de l'équipe Bombardier Aéronautique de l'ÉTS, pour son amitié, son aide précieuse et son soutien, ainsi que mes parents et amis qui, de près comme de loin, m'ont aidé et encouragé au moments opportuns.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	v
LISTE DES TABLEAUX .....	ix
LISTE DES FIGURES .....	x
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES .....	xiv
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 MODÉLISATION DE L'AVION ET OBJECTIFS DE PILOTAGE	10
1.1 Principes des commandes de vol électriques .....	10
1.2 Equations du mouvement .....	12
1.3 Equations et représentation d'état du modèle longitudinal .....	15
1.4 Principaux objectifs de pilotage .....	19
CHAPITRE 2 COMMANDE ROBUSTE : OUTILS D'ANALYSE ET DE	
SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE .....	21
2.1 Transformation linéaire fractionnelle ( <i>LFT</i> ) .....	22
2.2 Modélisation des systèmes incertains .....	26
2.2.1 Modélisation des incertitudes paramétriques .....	26
2.2.1.1 Principe .....	26
2.2.1.2 Modélisation des incertitudes modales .....	29
2.2.2 Modélisation des incertitudes fréquentielles .....	31
2.3 L'approche $\mathcal{H}_\infty$ .....	32
2.3.1 Espace de matrices de fractions rationnelles, norme associée .....	33
2.3.1.1 Réponse fréquentielle .....	33
2.3.1.2 Espace $\mathcal{RH}_\infty$ .....	33
2.3.1.3 Norme $\mathcal{H}_\infty$ .....	33

2.3.1.4	Calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$ .....	34
2.3.2	Analyse en robustesse d'un système bouclé .....	35
2.3.2.1	Théorème du petit gain .....	35
2.3.3	Stabilité robuste .....	36
2.3.4	Optimisation $\mathcal{H}_\infty$ .....	38
2.4	La valeur singulière structurée : $\mu$ .....	42
2.4.1	Définition .....	43
2.4.2	Propriétés et calcul de la valeur singulière structurée .....	44
2.4.3	Condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste: Incertitudes structurées .....	46
2.4.4	Théorème de performance robuste .....	46
2.4.5	$\mu$ -Synthèse .....	49
2.5	Réduction de correcteurs .....	53
2.5.1	Gramiens et réalisation équilibrée .....	55
2.5.2	Réduction de modèle par troncature équilibrée .....	56
CHAPITRE 3	COMMANDE DE SYSTÈMES À PARAMÈTRES VARIANTS ..	58
3.1	Classes des systèmes linéaires .....	60
3.2	Synthèse de lois de commande à paramètres variants .....	63
3.2.1	Structure de commande des systèmes $LPV$ de type $LFT$ .....	63
3.2.2	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes $LPV$ .....	65
3.3	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ et caractérisation $LMI$ .....	69
3.3.1	Caractérisation $LMI$ pour les systèmes $LTI$ .....	70
3.3.2	Caractérisation $LMI$ pour les systèmes $LPV$ .....	73
3.4	Extension au cas des systèmes $LPV$ incertains .....	77
CHAPITRE 4	SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE ROBUSTE : APPLICATIONS AU PILOTAGE LONGITUDINAL D'AVION .....	84
4.1	Première application : Synthèse de lois de pilotage pour un avion civil .....	85
4.1.1	Description du problème et spécifications .....	85



4.1.2	Mise en forme du problème de synthèse .....	86
4.1.2.1	Modélisation .....	87
4.1.3	Structure de la loi de commande .....	90
4.1.3.1	Formulation du problème de synthèse .....	92
4.1.4	Procédures de synthèse .....	94
4.1.4.1	Première méthode : optimisation $\mathcal{H}_\infty$ .....	95
4.1.4.2	Deuxième méthode : $\mu$ -synthèse .....	95
4.1.5	Analyse des résultats .....	97
4.1.6	Conclusion .....	102
4.2	Deuxième application : Synthèse multivariable d'un pilote automatique longitudinal pour le système ADMIRE .....	108
4.2.1	Description générale .....	110
4.2.1.1	Equations du mouvement longitudinal .....	110
4.2.2	Construction du modèle de synthèse .....	113
4.2.2.1	Mise sous forme d'une $LFT$ .....	113
4.2.3	Structure de la loi de commande .....	116
4.2.3.1	Spécifications de synthèse .....	117
4.2.4	Procédure de synthèse .....	118
4.2.5	Analyse des résultats .....	120
4.2.6	Conclusion .....	124
CHAPITRE 5	SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR $LPV$ POUR LE PILOTAGE D'UN AVION DE CHASSE.....	128
5.1	Description générale .....	129
5.1.1	Equations du mouvement longitudinal .....	129
5.1.2	Nature et rôle du correcteur .....	130
5.2	Modélisation.....	131
5.2.1	Le domaine de vol .....	131
5.2.2	Approximation par un modèle $LFT$ .....	132
5.3	Construction du modèle de synthèse $LPV$ .....	136

5.3.1	Spécifications : performances et robustesse .....	136
5.3.2	Structure de la loi de commande .....	138
5.3.3	Description du modèle de synthèse .....	139
5.3.4	Spécifications et choix des filtres .....	140
5.4	Calcul du correcteur <i>LPV</i> .....	142
5.5	Analyse des résultats et simulations .....	145
5.5.1	Réduction du correcteur .....	145
5.5.2	Analyse en robustesse de la boucle fermée .....	146
5.5.3	Analyse des performances et qualités de vol .....	149
5.5.4	Simulations temporelles .....	150
5.6	Conclusion .....	153
CONCLUSION .....		158
ANNEXE A QUALITÉS DE VOL ET DE MANŒUVRABILITÉ .....		161
A.1	Définitions et spécifications militaires .....	161
A.2	Qualités de vol pour le mode longitudinal .....	163
A.2.1	Mode phugoïde .....	163
A.2.2	Oscillation d'incidence ( <i>short-period</i> ) .....	164
A.2.2.1	Le critère CAP ( <i>Control Anticipation Parameter</i> ) .....	164
A.2.2.2	Largeur de Bande ( <i>Bandwidth</i> ) et retard de phase .....	167
A.2.2.3	Dropback selon Gibson .....	168
ANNEXE B INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES .....		170
B.1	Définitions .....	170
B.2	Méthodes générales de résolution .....	173
B.3	Lemmes techniques .....	175
BIBLIOGRAPHIE .....		178

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I Définitions des dérivées de stabilité longitudinales .....	18
Tableau II Qualités de vol (QV) et spécifications de performance .....	86
Tableau III Condition de vol considérée .....	88
Tableau IV Huit configurations de $m$ et $x_{cg}$ .....	88
Tableau V Interprétation des signaux .....	92
Tableau VI Niveaux de performance obtenus par la <i>D-K itération</i> .....	97
Tableau VII Performances et qualités de vol obtenues (correcteur $K_{mu}$ ) .....	107
Tableau VIII Qualités de vol (QV) en longitudinal .....	109
Tableau IX Condition de vol considérée .....	114
Tableau X Neuf configurations de $m$ et $x_{cg}$ .....	114
Tableau XI Niveaux de performance obtenus par la <i>D-K itération</i> .....	119
Tableau XII Performances et qualités de vol obtenues. ....	125
Tableau XIII Qualités de vol (QV) et spécifications en performance .....	137
Tableau XIV Incertitudes paramétriques .....	147
Tableau XV Performances et qualités de vol obtenues .....	154
Tableau XVI Amortissement $\zeta_p$ du mode phugoïde. ....	164
Tableau XVII Amortissement $\zeta_{sp}$ du mode <i>short-period</i> .....	165
Tableau XVIII Limitations sur $\omega_{sp}^2/n_z/\alpha$ .....	165

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 0.1	Schéma de commande $LPV$ ..... 5
Figure 1.1	Principe des commandes de vol électriques ..... 10
Figure 1.2	Repère inertiel et repère lié à l'avion ..... 13
Figure 1.3	Définition des forces, moments et vitesses dans le repère avion ..... 15
Figure 2.1	Schéma bloc pour $LFT$ inférieure et $LFT$ supérieure ..... 22
Figure 2.2	Représentation d'état par une $LFT$ ..... 23
Figure 2.3	Interconnection de plusieurs $LFT$ s ..... 24
Figure 2.4	Système $LFT$ équivalent ..... 24
Figure 2.5	Système de commande en boucle fermée ..... 25
Figure 2.6	Système équivalent: forme standard ..... 25
Figure 2.7	Formulation d'un système incertain par une $LFT$ ..... 27
Figure 2.8	Représentation d'un système dynamique incertain par une $LFT$ ... 31
Figure 2.9	Perturbation multiplicative directe en sortie ..... 32
Figure 2.10	Schéma général d'étude de la robustesse en stabilité ..... 35
Figure 2.11	Robustesse en stabilité : cas d'une dynamique négligée ..... 37
Figure 2.12	Robustesse en stabilité : schéma bloc équivalent ..... 37
Figure 2.13	Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard ..... 39
Figure 2.14	Incertitudes non structurées ..... 42
Figure 2.15	Incertitudes structurées ..... 44
Figure 2.16	Schéma-bloc pour l'étude de la robustesse en performance ..... 47
Figure 2.17	Problème de stabilité robuste fictif ..... 49
Figure 2.18	$\mu$ -Analyse pour la robustesse et la performance ..... 50
Figure 2.19	$\mu$ -synthèse pour la robustesse et la performance ..... 51
Figure 2.20	Problème $\mathcal{H}_\infty$ -standard associé à la $D$ - $K$ itération ..... 52
Figure 2.21	Réduction de modèle en utilisant la norme $\mathcal{H}_\infty$ ..... 53

Figure 3.1	Enveloppe de vol pour un avion hypothétique. (×) représente une condition de vol utilisée dans le design .....	59
Figure 3.2	Classes de systèmes linéaires .....	62
Figure 3.3	Système $LPV$ de type $LFT$ .....	64
Figure 3.4	Structure des correcteurs $LPV$ .....	66
Figure 3.5	Structure équivalente de commande $LPV$ .....	68
Figure 3.6	Structure de commande des systèmes $LPV$ incertains .....	78
Figure 3.7	Structure équivalente de commande des systèmes $LPV$ incertains ..	79
Figure 3.8	Structure de commande $LPV/\mu$ .....	80
Figure 4.1	Pilote automatique de la chaîne de tangage .....	85
Figure 4.2	Mise sous forme d'une $LFT$ .....	90
Figure 4.3	Structure de commande à 2 degrés de liberté (1) .....	91
Figure 4.4	Structure de commande à 2 degrés de liberté (2) .....	91
Figure 4.5	Schéma d'interconnection pour la synthèse .....	92
Figure 4.6	Performance nominale (correcteur $K_{hinf}$ ) .....	96
Figure 4.7	Performance robuste (correcteur $K_{hinf}$ ) .....	96
Figure 4.8	Stabilité robuste (correcteur $K_{mu}$ ) .....	98
Figure 4.9	Performance robuste (correcteur $K_{mu}$ ) .....	98
Figure 4.10	Schéma d'interconnection pour la $\mu$ -analyse .....	99
Figure 4.11	Vérification de la stabilité robuste sur le système longitudinal .....	100
Figure 4.12	Vérification de la performance robuste sur le système longitudinal .	101
Figure 4.13	Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur $K_{hinf}$ ...	103
Figure 4.14	Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur $K_{hinf}$ ...	104
Figure 4.15	Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur $K_{mu}$ ....	105
Figure 4.16	Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur $K_{mu}$ ....	106
Figure 4.17	CAP vs $\zeta_{sp}$ pour les phases de vol Catégorie A, (correcteur $K_{mu}$ ) ..	107
Figure 4.18	Pilote automatique longitudinal .....	108
Figure 4.19	Repère aérodynamique et repère avion .....	111
Figure 4.20	Mise sous forme d'une $LFT$ .....	115

Figure 4.21	Schéma d'interconnection pour la $\mu$ -synthèse . . . . .	116
Figure 4.22	Représentation du problème de synthèse <i>LTI</i> robuste . . . . .	119
Figure 4.23	Performance robuste . . . . .	120
Figure 4.24	Schéma d'interconnection pour la $\mu$ -analyse . . . . .	121
Figure 4.25	Vérification de la stabilité robuste . . . . .	122
Figure 4.26	Vérification de la performance robuste . . . . .	122
Figure 4.27	Schéma d'implémentation . . . . .	123
Figure 4.28	CAP vs $\zeta_{sp}$ pour les phases de vol Catégorie A . . . . .	125
Figure 4.29	Simulations non linéaires illustrant les 9 configurations du système .	126
Figure 4.30	Simulations non linéaires illustrant les 9 configurations du système .	127
Figure 5.1	Avion de chasse avec configuration <i>delta-canard</i> . . . . .	128
Figure 5.2	Structure de commande pour le contrôle en tangage . . . . .	131
Figure 5.3	Domaine de vol dans le plan $(M, h)$ . . . . .	132
Figure 5.4	Variations des éléments $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, \dots\}$ en fonction de $\delta_h$ et $\delta_M$ . .	135
Figure 5.5	Représentation <i>LFT</i> de la dynamique rapide . . . . .	136
Figure 5.6	Représentation des incertitudes de modélisation . . . . .	138
Figure 5.7	Structure de commande à 2 degrés de liberté . . . . .	139
Figure 5.8	Schéma de synthèse . . . . .	140
Figure 5.9	Mise en forme du problème de synthèse <i>LPV</i> robuste . . . . .	142
Figure 5.10	Niveau de performances . . . . .	145
Figure 5.11	Pondérations fréquentielles . . . . .	148
Figure 5.12	Schéma d'interconnection pour l'analyse de la robustesse . . . . .	149
Figure 5.13	Stabilité robuste: prise en compte d'incertitudes mixtes . . . . .	150
Figure 5.14	Critère CAP vs $\zeta_{sp}$ pour les phases de vol (Catégorie C) . . . . .	151
Figure 5.15	Schéma d'implémentation . . . . .	152
Figure 5.16	Simulation non linéaire . . . . .	155
Figure 5.17	Simulation non linéaire . . . . .	156
Figure 5.18	Simulation non linéaire . . . . .	157
Figure A.1	Limitations en CAP vs. $\zeta_{sp}$ - Phases de vol de Catégorie A . . . . .	166

Figure A.2	Limitations en CAP vs. $\zeta_{sp}$ - Phases de vol de Catégorie C.....	166
Figure A.3	Définition de la bande passante et du retard de phase .....	167
Figure A.4	Critère pour $\omega_{BW}$ et $\tau_p$ .....	168
Figure A.5	Définition du Dropback .....	169

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

### Notations générales

$\mathbb{R}$	: Corps des réels
$\mathbb{C}$	: Corps des nombres complexes
$j$	: Imaginaire pure ( $j^2 = -1$ )
$\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_u$	: Transformations linéaire fractionnelles
$\mathcal{RH}_\infty$	: Espaces des matrices de transfert propres et stables
$I_n$	: Matrice identité de dimension $n$
$A^T$	: Matrice transposée de $A$
$A^*$	: Matrice transconjuguée de $A$
$A^{-1}$	: Matrice inverse de $A$
$\lambda_{max}(A)$	: Valeur propre maximale de $A$
$\bar{\sigma}(A)$	: Valeur singulière maximale de $A$ : $\sqrt{\lambda_{max}(AA^*)}$
$\omega$	: Pulsation ( $rad/sec$ )
$diag(A, B)$	: $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$s$	: Opérateur de Laplace

### Symboles

$\alpha$	: Angle of attack (angle d'incidence)
$\theta$	: Pitch angle (angle de tangage)
$\epsilon$	: Tail downwash angle (angle de déflexion)
$q$	: Pitch rate (vitesse de tangage)
$V_T$	: Aircraft velocity (vitesse de l'avion)
$n_z$	: Normal load factor (accélération verticale)
$M$	: Mach number
$h$	: Altitude



$\delta_e$	: Elevator control deflection (gouverne de profondeur)
$\delta_{th}$	: Throttle setting (commande des gaz)
$\tau_p$	: Phase delay (retard de phase)
$\zeta_p$	: Damping ratio of the phugoid mode
$\zeta_{sp}$	: Damping ratio of the short-period mode
$\omega_{sp}$	: Natural frequency of the short-period mode
$\omega_{BW}$	: Attitude bandwidth (largeur de bande)

### Acronymes

<i>FBW</i>	Fly By Wire (commande de vol électrique)
<i>CAP</i>	Control Anticipation Parameter
<i>LFT</i>	Linear Fractional Transformation (transformation linéaire fractionnelle)
<i>LQ</i>	Linear Quadratic (linéaire quadratique)
<i>LQG</i>	Linear Quadratic Gaussian (linéaire quadratique gaussien)
<i>LQG/LTR</i>	Linear Quadratic Gaussian, Loop Transfer Recovery (linéaire quadratique gaussien, recouvrement de transfert de boucle)
<i>LMI</i>	Linear Matrix Inequality (inégalité matricielle linéaire)
<i>LPV</i>	Linear Parameter Varying (linéaire à paramètre variant)
<i>LTI</i>	Linear Time Invariant (linéaire à temps invariant)
<i>LTV</i>	Linear Time Varying (linéaire à temps variant)

*À ma mère, à mon père.*

## INTRODUCTION

### Contexte

Depuis l'apparition des grands vols commerciaux, les commandes de vol n'ont cessé d'évoluer. Pour les premiers appareils, les commandes de vol étaient à entrée mécanique et possédaient de nombreuses tringles (*mechanical linkages*), ainsi qu'un grand réseau de tuyauterie pour la puissance hydraulique: cela prenait beaucoup de place. Plus tard, les tringles ont été remplacées par des câbles électriques, car l'entrée est devenue électrique, appelée *Fly-By-Wire (FBW)*. Ce fonctionnement en *FBW*, qui prend moins de place, offre une plus grande sécurité, car il peut remplacer les commandes conventionnelles durant les vols, en cas de pannes techniques.

D'autre part, les progrès fulgurants dans les domaines de l'électronique numérique ont donné naissance à des ordinateurs puissants et fiables augmentant ainsi la capacité de calcul à bord, tout en rassemblant des fonctions traditionnellement indépendantes et/ou en introduisant de nouvelles fonctions. De telles avancées technologiques, ont amené les ingénieurs aéronautiques à élaborer de nouvelles lois de pilotage sophistiquées, dont le but principal est d'améliorer les qualités de vol de l'appareil, en particulier au niveau de la stabilité et du pilotage.

Pour nombre d'avions actuellement en service, les lois de pilotage ont été développées principalement à l'aide de techniques classiques fréquentielles (Bode, Nyquist, ...) ou de type lieu des racines. Ces méthodologies de synthèse, essentiellement monovariables [38, 53], font largement appel à l'expérience de l'ingénieur et ont été utilisées avec succès pour la synthèse de boucles de retour [8]. Elles s'avèrent cependant insuffisantes pour traiter tous les aspects du problème de commande en particulier le problème de robustesse.

### Revue de la littérature

Depuis une trentaine d'années, de nouvelles techniques de synthèse de lois de commande multivariables ont été proposées. Toutefois, les premières applications significatives des

méthodes multivariables pour la conception de lois de commande d'un avion de transport remontent à 1978 chez Boeing [24] : la loi de pilotage automatique latérale du Boeing 767 a ainsi été intégralement synthétisée avec succès par une approche  $LQ$  (*Linear Quadratic*) afin d'éliminer un phénomène d'oscillation latérale résiduelle constaté en vol. Dans le domaine militaire, on trouve davantage de ces techniques ( $LQ$  mais aussi  $LQG$  et  $LQG/LTR$ ): Adams et *al.*, [1] utilisent la commande optimale  $LQ$  pour améliorer les caractéristiques dynamiques d'un avion de combat manoeuvrant aux grands angles par un choix judicieux du critère de performance, directement relié aux objectifs de performances.

De même, les techniques de commande modale basées sur le placement de structure propre (*Eigenstructure assignment*) ont connu un réel essor, car elles permettent d'exprimer facilement les objectifs de commande (en termes de stabilité, temps de réponse, dépassement et découplage) dans la synthèse [3, 50]. Cette méthodologie est celle retenue par Airbus pour la conception des commandes de vol électriques depuis l'Aibus A320 et a fait ses preuves durant ces dernières années [19]. Elle nécessite toutefois une connaissance approfondie du système à piloter et ne permet pas de considérer des objectifs de robustesse [51].

On retrouve aussi les techniques de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$ . Actuellement en plein essor, elles sont utilisées dans de nombreux domaines : commande des structures flexibles [5], pilotage de missiles [44] et commandes de vol [34]. L'approche  $\mathcal{H}_\infty$  permet la synthèse de lois robustes face à des incertitudes (de type dynamique), souvent introduites sous forme d'erreurs additives ou multiplicatives sur la réponse fréquentielle. Initiée par Zames au début des années 80, la commande  $\mathcal{H}_\infty$  a depuis été largement développée. En particulier, les travaux de Doyle et *al.*, [15], qui ont ramené la résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  à la résolution de deux équations découplées de Riccati.

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est particulièrement intéressante, puisqu'elle permet de prendre en compte, a priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, simplifiant ainsi la synthèse. Toutefois, en présence d'incertitudes structurées (erreurs paramétriques), la modélisation adoptée par l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  devient inadéquate. On recourt alors à la notion de valeur singulière structurée (v.s.s.) ou  $\mu$  [13, 47]. La v.s.s.

fournit en effet un cadre général pour l'étude de la robustesse d'une boucle fermée soumise à ces deux types d'incertitudes de modèle.

De nombreux travaux ont été menés afin de calculer soit la valeur exacte, soit un encadrement de la v.s.s.  $\mu$ . En pratique, on calcule une borne supérieure de la v.s.s.  $\mu$ , le conservatisme ainsi introduit est en général faible et peut être mesuré en déterminant une borne inférieure de  $\mu$  et en la comparant à la borne supérieure trouvée [58, 18].

Des solutions dérivées au problème de commande  $\mathcal{H}_\infty$  ont été donc développées et conduisent à la mise en œuvre de procédure itérative [6]. La  $\mu$ -synthèse allie de fait le concept de valeur singulière structurée et la commande  $\mathcal{H}_\infty$  pour la conception de compensateurs pour les systèmes linéaires en présence d'incertitudes structurées. La loi de commande résultante rend la performance du système insensible à ce type d'incertitudes de façon moins conservative que l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  classique.

Mais qu'arrive-t-il si le système à contrôler présente des incertitudes paramétriques à caractère non stationnaire. Une approche classique<sup>1</sup> de résolution, fréquemment adoptée dans l'industrie, consiste à :

- choisir un ensemble représentatif de points de fonctionnement<sup>2</sup>,
- linéariser le système autour de chacun de ces points,
- synthétiser un correcteur linéaire en chacun de ces points,
- construire une loi de commande globale, par interpolation des correcteurs locaux.

Les difficultés que pose une telle approche sont nombreuses. En particulier, elle ne garantit pas la stabilité globale de la boucle fermée (non stationnaire) et nécessite donc une analyse a posteriori [48, 49]. Par ailleurs, un savoir-faire éprouvé, associé à une bonne connaissance

---

<sup>1</sup> Cette approche est connue dans la littérature sous l'appellation de *séquencement de gains* ou par son nom anglais *gain scheduling*.

<sup>2</sup> On considère souvent le principe « *plus il y a de points, mieux c'est* » et la limitation se fait par rapport aux moyens de calcul.

du système sont souvent indispensables à la mise en place d'une technique d'interpolation appropriée [54].

Une autre manière d'aborder le problème repose sur la théorie de la commande adaptative, qui grâce à une estimation en ligne des paramètres du système, permet la prise en compte explicite des aspects non stationnaires. Cette approche permet en effet de répondre aux exigences de performances sur l'ensemble du domaine d'évolution, mais rencontre des difficultés dans la prise en compte des spécifications de robustesse non paramétrique (incertitudes non structurées) [35].

Il existe aussi une autre méthode, basée cette fois-ci sur les techniques d'inversion dynamique [25, 17]. L'idée consiste à inverser à chaque instant, la dynamique du système non linéaire pour lui substituer une dynamique désirée. Le but est d'obtenir un système *LTI* auquel on appliquera ensuite une technique de  $\mu$ -synthèse afin de prendre en compte les incertitudes commises au moment de l'inversion. Une telle approche soulève néanmoins deux difficultés. La première, d'ordre pratique, est liée à la complexité des correcteurs obtenus. La seconde, plutôt théorique, pose le problème de la stabilité globale en boucle fermée [41].

L'approche développée dans cette thèse repose sur le concept de systèmes linéaires à paramètres variants, *LPV* [45, 4]. Plus précisément, on supposera que le modèle non stationnaire admet une description temporelle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y &= C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \\ \theta(t) &\in \mathcal{P} \end{cases}$$

où les éléments de la représentation d'état du modèle dépendent donc explicitement du paramètre variant  $\theta(t)$ , dont l'évolution dans le domaine borné  $\mathcal{P}$ , ne traduit pas une incertitude mais une variation connue faisant partie intégrante du modèle non stationnaire. Dans la suite, on supposera donc ce paramètre accessible à la mesure en temps réel. L'idée originale des travaux présentés dans [45, 4, 7, 52] repose sur l'exploitation logique de cette

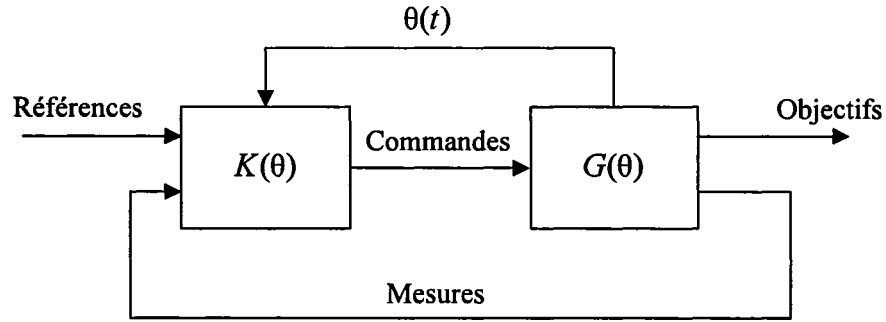


Figure 0.1 Schéma de commande *LPV*

représentation d'état par la loi de commande.

Comme le met en évidence le schéma de rétroaction ci-dessus, on retiendra pour le correcteur, une structure identique à celle du système. Ainsi, la dépendance paramétrique sera intégralement recopiée. En l'absence d'une prise en compte explicite de la structure des incertitudes paramétriques susceptibles d'affecter le modèle non stationnaire, il est intéressant de souligner la convexité des caractéristiques obtenues [4]. En effet, celles-ci prendront la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes inégalités matricielles linéaires (*LMI*). D'un point de vue numérique, il existe des outils performants [23] qui permettent d'aborder cette classe de problèmes et donc d'envisager des applications réalistes.

Dans le cas le plus général de la prise en compte simultanée des deux types d'incertitudes dynamiques (non structurées) et paramétriques, nous montrerons dans le cadre de ce mémoire, qu'à partir d'une approche bi-convexe, calquée sur le principe de la  $\mu$ -synthèse, qu'il est possible d'intégrer les phénomènes non stationnaires. Nous proposons donc ici de nous placer à mi-chemin entre la théorie et la pratique, il est donc important que les développements qui en résultent soient associés à une méthodologie pratique qui puisse être mise en œuvre de manière industrielle

## Objectifs de la thèse

L'objectif de cette thèse est de concevoir des stratégies de commandes multivariables et robustes pour des modèles dynamiques d'avions. Ces stratégies de commandes devraient assurer à l'avion une haute performance et satisfaire des qualités de vol désirées en l'occurrence, une bonne manœuvrabilité, de bonnes marges de stabilité et un amortissement des mouvements phugoïdes et *short-period* de l'avion. Cette recherche s'inscrit dans le cadre du projet de recherche *Active Control Technology* entre l'*Ecole de Technologie Supérieure* et le constructeur *Bombardier Aéronautique*.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la synthèse de lois de commande robustes (approche  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$ -synthèse) des systèmes *LTI*. En effet, pour un point de vol donné, on dispose de plusieurs modèles correspondant à différentes configurations de masse et du centre de gravité. Le but est de concevoir des lois de pilotage assurant la robustesse à l'ensemble de ces modèles.

Par la suite, nous avons accordé un intérêt particulier aux techniques de commande par séquençement de gains, et plus exactement l'approche *LPV*. En effet, dans le cas du problème de pilotage sur un domaine de vol plus large, la commande recherchée, doit non seulement assurer des spécifications (stabilité et performance) de nature locale, mais aussi globale sur l'ensemble du domaine d'évolution.

Enfin, nous nous attacherons à montrer la pertinence et l'applicabilité de ces méthodes sur des problèmes que nous avons souhaités les plus réalistes possible.

## Démarche suivie et contributions

— Pour mener à bien ce travail, nous avons adopté une méthodologie de synthèse, basée sur une approche fréquentielle, typiquement  $\mathcal{H}_\infty$ . Cette approche est particulièrement intéressante, dans la mesure où le modèle de synthèse est construit directement à partir des différentes spécifications du cahier des charges. En effet, ces spécifications sont traduites sous forme de gabarits fréquentsiels, correspondant à des pondérations en entrée et en sortie que l'on retrouve dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  classique.



- Par ailleurs, nous avons utilisé une représentation de type linéaire fractionnelle (*LFT*), jugée mieux adaptée pour la prise en compte des différents types d'incertitudes, qui peuvent intervenir sur le système. De plus, cette représentation s'avère très appropriée pour l'analyse de la robustesse via les outils de la  $\mu$ -analyse.
- D'autre part, afin d'optimiser le compromis entre les spécifications de robustesse et de performance, nous avons opté pour une structure de commande à 2 degrés de liberté avec modèle de référence. Nous l'avons appliqué avec un succès démontré par la qualité des résultats.
- Une contribution importante de cette thèse réside dans la mise au point d'une procédure de synthèse *LPV* robuste permettant de prendre en compte, non seulement les variations paramétriques du modèle mais aussi diverses formes d'incertitudes (fréquentielles ou paramétriques). Cette procédure itérative est basée sur l'alternance entre  $\mu$ -analyse et synthèse *LPV*. Bien que n'ayant pas de garantie théorique de convergence, cette procédure s'avère très efficace en pratique, où le nombre d'itérations requis reste relativement faible dans la plus part des cas.
- Un effort a également été donné pour appliquer ces techniques sur deux problèmes réalistes de pilotage d'avions. La première application concerne le pilotage longitudinal d'un avion civil. Elle a été proposée dans le cadre du projet *Active Control Technology* entre l'Ecole de Technologie Supérieure et le constructeur Bombardier Aéronautique. Les méthodes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$  sont utilisées. La seconde application concernait le pilotage longitudinal robuste d'un avion de chasse. Ce problème complémentaire du premier exemple, nous a permis de valider l'approche adoptée, sur un problème multivariable similaire à celui du pilotage d'avion civil. Nous avons cette fois-ci, utilisé seulement la technique de  $\mu$ -synthèse. De plus, ce dernier système est également utilisé pour la conception d'une loi de pilotage robuste à paramètres variants sur un large domaine de vol.

## Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée selon 5 chapitres découpés comme suit :

- Le **chapitre I** présente le principe des commandes de vol électriques ainsi que les différentes chaînes de contrôle de l'avion. Nous introduisons le modèle aérodynamique longitudinal que nous avons utilisé dans les diverses applications de ce mémoire. Les principaux objectifs du pilotage longitudinal sont ensuite exposés.
- Le **chapitre II** présente brièvement quelques outils et concepts de la commande robuste qui sont utilisés au cours de ce mémoire. Nous rappelons d'abord le principe de la représentation des systèmes sous forme de transformations linéaires fractionnelles, lequel permet d'exprimer avec un formalisme unifié, les problèmes de commande et d'analyse des systèmes bouclés. Ce formalisme, que nous utiliserons par la suite, permet l'expression des spécifications sur les performances du système bouclé, mais aussi la représentation des incertitudes intervenant sur le modèle. Nous présentons ensuite deux méthodes de synthèse (l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  et la  $\mu$ -synthèse) visant à la réalisation de correcteurs assurant la robustesse de la boucle. Nous montrons en particulier que la technique de  $\mu$ -synthèse assure en plus la robustesse en performance. La fin du chapitre expose les techniques de réduction de modèles, en particulier la méthode de réduction par *troncature équilibrée*. Cette dernière sera utilisée pour la réduction des lois de commande obtenues.
- Le **chapitre III** est consacré à la théorie du *gain scheduling* pour les systèmes *LPV*. Ces systèmes apparaissent naturellement dans de nombreuses applications où le processus à commander peut avoir des évolutions paramétriques pendant son fonctionnement (aéronautique, robotique, ...). Ce travail est essentiellement une extension des techniques de synthèse de type  $\mathcal{H}_\infty$  aux systèmes *LPV* incertains. Nous développons une méthodologie complète de synthèse de correcteurs *LFT* de type  $\mathcal{H}_\infty$ , eux même *LPV*, et satisfaisant à des objectifs de performance robustes. Il s'agit en fait d'une approche inspirée de la  $\mu$ -synthèse. Mentionnons aussi, qu'une

caractérisation LMI des solutions des problèmes  $LPV$ , est présentée sous forme d'un problème de faisabilité que l'on peut résoudre par des techniques d'optimisation convexes.

- Le **chapitre IV** présente deux applications traitées par le biais des techniques développées au chapitre II. Ces applications concernent deux problèmes concrets de commande de vol. La première application, proposée dans le cadre du groupe de recherche *ETS-Bombardier Aéronautique*, illustre les techniques de commande  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$ -synthèse sur un problème de type industriel. La deuxième application concerne le problème de pilotage longitudinal d'un avion de chasse. Cet exemple, complémentaire du premier, nous permet de valider l'approche adoptée sur un problème multivariable. Le but est de synthétiser une loi de pilotage, qui assure à la fois stabilité et performance sur un ensemble fini de modèles. Le correcteur obtenu a été validé après implémentation sur le modèle non linéaire complet du système.
- Le **chapitre V** est consacré à l'application majeure de cette thèse. Il est cette fois question de pilotage longitudinal d'un avion de chasse sur un large domaine de vol. Comme on l'a fait dans le chapitre précédent, on détaillera avec soin la construction de modèle de synthèse. La loi de commande obtenue sera validée après implémentation sur le modèle non linéaire complet du système.

Nous terminons cette thèse par une conclusion, où il sera mentionné quelques remarques et perspectives de recherche, suivie par une bibliographie et deux annexes.

## CHAPITRE 1

### MODÉLISATION DE L'AVION ET OBJECTIFS DE PILOTAGE

Nous présenterons dans ce chapitre le principe des commandes de vol électriques ainsi que les chaînes de contrôle de l'appareil à savoir les chaînes de roulis, de lacet et de tangage. Nous présenterons ensuite le modèle longitudinal linéarisé de l'avion rigide, obtenu à l'aide des équations de la dynamique du vol décrivant l'avion autour de son centre de gravité. Nous donnerons après les différents modes qui caractérisent ce mouvement et leur interprétation physique. Nous terminerons enfin le descriptif de la modélisation par une présentation des principaux objectifs à atteindre par la loi de pilotage, en ce qui concerne les qualités de vol et de manoeuvrabilité en longitudinal.

#### 1.1 Principes des commandes de vol électriques

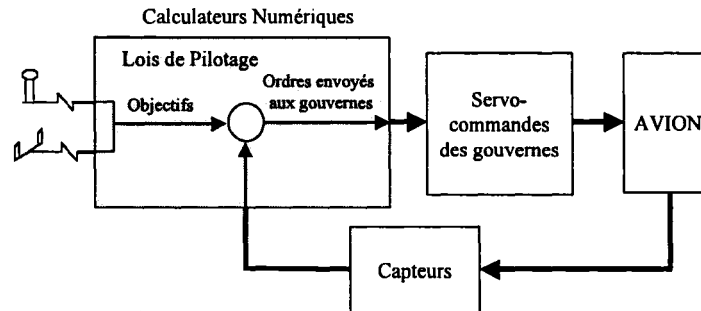


Figure 1.1 Principe des commandes de vol électriques

Le concept des commandes de vol électriques est résumé sur le schéma de la figure 1.1. On peut distinguer 3 ensembles : les servocommandes, l'avion et les capteurs. Le pilote possède 2 organes de pilotage : le palonnier et le manche. Des capteurs, situés sur les organes de pilotage, permettent de transformer les ordres du pilote en objectifs de commande. La différence entre ces objectifs et les mesures fournies par les capteurs (cap-

teurs anémométriques et inertiels) permet de déduire l'ordre de commande à envoyer aux servocommandes des gouvernes. Ce type de structure permet d'intégrer les techniques modernes de l'automatique pour commander les braquages des gouvernes en fonction des ordres du pilote et de l'état mesuré de l'avion. Pour cela, on dispose typiquement d'un modèle linéaire du système à commander sous forme de représentation d'état, décrivant son comportement autour d'un point d'équilibre.

On peut distinguer deux pilotages pour un avion : le pilotage longitudinal et le pilotage latéral.

- Le pilotage longitudinal consiste à commander la chaîne de tangage à l'aide du manche et de la manette des gaz. Pour un avion de transport civil, le tangage est contrôlé par la gouverne de profondeur située à l'arrière de l'appareil sur une surface horizontale appelée empennage horizontal.

- Le pilotage latéral consiste à commander simultanément la chaîne de lacet et de roulis, à l'aide du palonnier pour le lacet et du manche pour le roulis. Le roulis est contrôlé par des gouvernes (ailerons), petites surfaces mobiles situées aux extrémités des ailes de l'avion. Le lacet est contrôlé par la gouverne de direction situé à l'arrière de l'appareil sur une surface verticale appelée empennage vertical.

Pour certains avions ne disposant pas de stabilisateur horizontal arrière, genre aile volante ou aile delta (avion de chasse par exemple), les commandes des axes de tangage et de roulis sont assurées par les mêmes gouvernes, appelées alors élevons. Elles sont utilisées soit comme gouvernes de profondeur (débattement symétrique pour le tangage), soit comme gouvernes de roulis (débattement antisymétrique). En effet, les applications que nous allons développer plus loin, s'appuient sur des modèles d'avions correspondant à l'une ou l'autre de ces configurations<sup>1</sup>. On note par ailleurs que l'on s'intéresse dans cette thèse au problème du pilotage longitudinal seulement.

---

<sup>1</sup> Les modèles d'avion fournis par Bombardier, correspondent à un avion civil avec empennage horizontal arrière alors que dans le cas de l'avion de chasse, ce dernier présente une configuration *delta-canard*.

## 1.2 Equations du mouvement

Si l'on fait l'hypothèse que la masse de l'avion est constante, les équations générales du mouvement de l'avion rigide, par rapport au système inertiel d'axes liés à la terre, s'écrivent :

$$\sum \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{V}_T}{dt} \quad (1.1)$$

$$\sum \mathcal{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (1.2)$$

où  $\frac{d\mathbf{V}_T}{dt}$  représente l'accélération du centre de gravité de l'avion par rapport au repère inertiel,  $\mathbf{H}$  le moment cinétique de l'avion autour du centre de gravité,  $\sum \mathbf{F}$  la résultante des forces extérieures agissant sur l'avion (forces de pesanteur, forces aérodynamiques et forces de propulsion) et  $\sum \mathcal{M}$  le moment résultant des différentes forces agissant sur l'avion (moment des forces aérodynamiques et moment des forces de propulsion).  $m$  représente la masse de l'avion.

Souvent, on exprime ces équations dans le repère avion,  $R_b = (G, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$ , voir figure 1.2. C'est un repère dont le centre  $G$  est un point de référence de l'avion (souvent choisi comme étant le centre de gravité). Les axes  $\mathbf{x}_b$  et  $\mathbf{z}_b$  sont orthogonaux entre eux et contenus dans le plan de symétrie de l'avion.  $\mathbf{x}_b$  est choisi voisin de l'axe longitudinal de l'avion et orienté positif de l'arrière vers l'avant de l'appareil.  $\mathbf{z}_b$  est normal à  $\mathbf{x}_b$  et orientée vers le bas. Enfin  $\mathbf{y}_b$  est déterminé de façon à avoir un trièdre positif.

Comme ce repère n'est pas inertiel, les dérivées temporelles apparaissant dans les équations du mouvement (1.1-1.2) doivent être transformées par les règles habituelles, à savoir :

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{inertiel}} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_{\text{avion}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

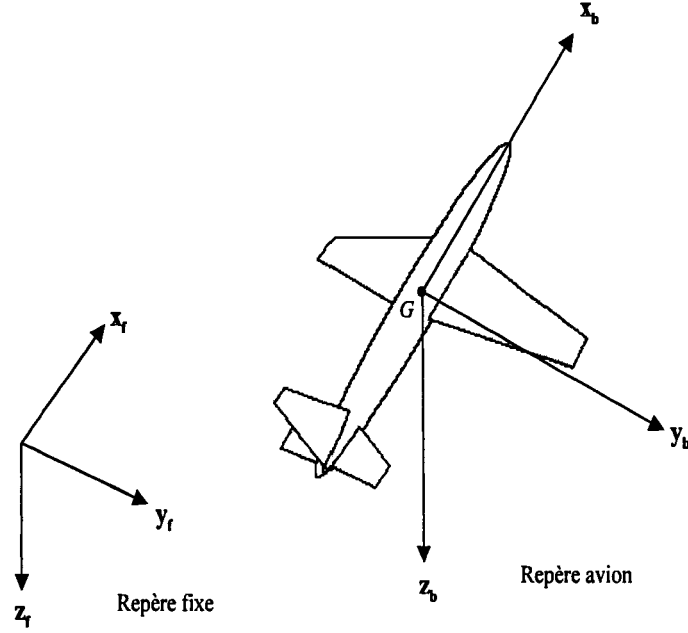


Figure 1.2 Repère inertiel et repère lié à l'avion

Les équations du mouvement en repère avion s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{F} = m \left. \frac{d\mathbf{V}_T}{dt} \right|_{\text{avion}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_T) \quad (1.3)$$

$$\mathcal{M} = \left. \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right|_{\text{avion}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \quad (1.4)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  représente la vitesse de rotation de l'avion par rapport au repère inertiel. En exprimant les coordonnées de  $\mathbf{V}_T$  et  $\boldsymbol{\omega}$  en fonction des axes  $x_b$ ,  $y_b$  et  $z_b$ , on obtient :

$$\mathbf{V}_T = U\mathbf{x}_b + V\mathbf{y}_b + W\mathbf{z}_b \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\omega} = P\mathbf{x}_b + Q\mathbf{y}_b + R\mathbf{z}_b \quad (1.6)$$

D'autre part, le moment cinétique de l'avion par rapport à son centre de gravité est donné

par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega}$$

avec :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

où  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  représentent les moments d'inertie selon les axes  $\mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{y}_b$  et  $\mathbf{z}_b$ .  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$  sont appelés produits d'inertie. On considérera par la suite, le cas le plus fréquent où le plan  $(\mathbf{x}_b\text{-}\mathbf{z}_b)$  est un plan de symétrie. Dans ces conditions, les produits d'inertie  $I_{xy}$  et  $I_{yz}$  sont nuls.

Dans le cas d'un avion symétrique, l'ensemble des équations du mouvement dynamique se résument comme suit, en l'absence de vent atmosphérique, (voir figure 1.3).

- équations de translation<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} X - mg \sin(\Theta) &= m(\dot{U} + QW - RV) \\ Y + mg \cos(\Theta) \sin(\Phi) &= m(\dot{V} + RU - PW) \\ Z + mg \cos(\Theta) \cos(\Phi) &= m(\dot{W} + PV - QU) \end{aligned} \quad (1.7)$$

- équations de rotation

$$\begin{aligned} L &= I_x \dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + (I_z - I_y)QR \\ M &= I_y \dot{Q} + I_{xz}(P^2 - R^2) + (I_x - I_z)PR \\ N &= I_z \dot{R} - I_{xz}\dot{P} + PQ(I_y - I_z) + I_{xz}QR \end{aligned} \quad (1.8)$$

De plus, en utilisant la transformation des coordonnées entre le repère inertiel et le repère avion, on peut exprimer les vitesses de rotation de l'avion ( $P, Q$  et  $R$ ) en fonction des

---

<sup>2</sup> Les termes  $-mg \sin(\Theta)$ ,  $mg \cos(\Theta) \sin(\Phi)$  et  $mg \cos(\Theta) \cos(\Phi)$  désignent les forces de pesanteur exprimées dans le repère avion.



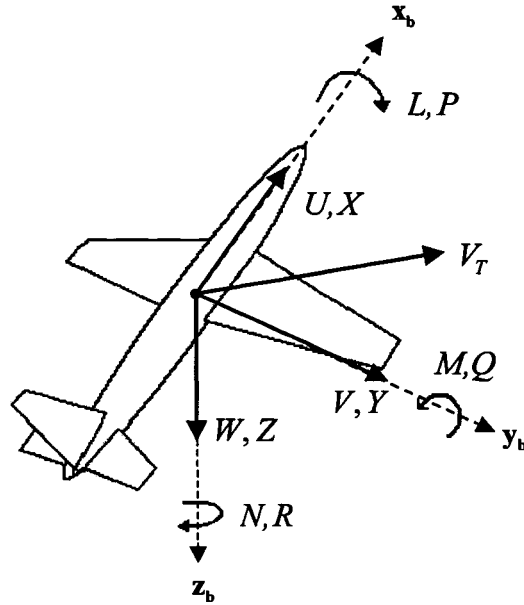


Figure 1.3 Définition des forces, moments et vitesses dans le repère avion

angles d'Euler  $\Theta$ ,  $\Phi$  et  $\Psi$ , par :

- équations cinématiques

$$\begin{aligned}
 P &= \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin(\Theta) \\
 Q &= \dot{\Theta} \cos(\Phi) + \dot{\Psi} \cos(\Theta) \sin(\Phi) \\
 R &= -\dot{\Theta} \sin(\Phi) + \dot{\Psi} \cos(\Theta) \cos(\Phi)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

où  $\Theta$ ,  $\Phi$  et  $\Psi$  désignent respectivement les angles de tangage, de roulis et de lacet.

### 1.3 Equations et représentation d'état du modèle longitudinal

On fait les hypothèses classiques de découplage longitudinal/latéral, à savoir : l'avion vol en ligne droite, dans le plan de symétrie et que les ailes et la gouverne de direction sont en position neutre.

$$V = P = R = \Phi = \Psi = 0$$

En d'autres termes, un mouvement longitudinal n'induit aucune force latérale ni couple de lacet ou de roulis. La projection des équations du mouvement dans le repère avion fournit les équations suivantes :

– équation de propulsion sur l'axe  $\mathbf{x}_b$

$$X = F_{aero_{xb}} + T_{xb} = m(\dot{U} + QW + g \sin(\Theta)) \quad (1.10)$$

– équation de sustentation sur l'axe  $\mathbf{z}_b$

$$Z = F_{aero_{zb}} + T_{zb} = m(\dot{W} - QU - g \cos(\Theta)) \quad (1.11)$$

– équation de moment de tangage

$$M = \dot{Q}I_{yy} \quad (1.12)$$

– équation cinématique de vitesse de tangage

$$\dot{\Theta} = Q \quad (1.13)$$

où  $T_{xb}$  et  $T_{zb}$  représentent les forces de propulsion. Les forces aérodynamiques  $F_{aero_{xb}}$  et  $F_{aero_{zb}}$ , sont données par :

$$\begin{aligned} F_{aero_{xb}} &= \bar{q}SC_x \\ F_{aero_{zb}} &= \bar{q}SC_z \end{aligned}$$

où  $S$  est la surface aérodynamique de référence et  $\bar{q} = \rho V_T^2 / 2$  la pression dynamique. Le moment total de tangage par rapport au centre de gravité, est donné par :

$$M = \bar{q}S\bar{c}C_m + x_{cg}F_{aero_{zb}} - z_{cg}F_{aero_{xb}} + M_T$$

où  $x_{cg}$  et  $z_{cg}$  représentent respectivement les distances entre le centre gravité et le centre aérodynamique moyen et  $\bar{c}$  la corde aérodynamique moyenne.  $M_T$  est le moment de tangage dû aux forces de propulsion. Les coefficients aérodynamiques longitudinaux  $C_x$ ,  $C_z$  et  $C_m$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} C_x = C_x(M, \alpha, h, u_{el}, \dots) \\ C_z = C_z(M, \alpha, \dot{\alpha}, \bar{c}/(2V_T)q, h, u_{el}, \dots) \\ C_m = C_m(M, \alpha, \dot{\alpha}, \bar{c}/(2V_T)q, u_{el}, \dots) \end{cases}$$

On obtient ainsi un système de quatre équations différentielles en fonction des variables longitudinales  $U$ ,  $W$ ,  $Q$  et  $\Theta$ . La linéarisation des équations longitudinales s'effectue autour d'un point d'équilibre correspondant à une condition de vol. Sous l'hypothèse que les variations des variables longitudinales restent faibles, les équations linéarisées se mettent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g \\ \frac{Z_u}{m} & \frac{Z_w}{m} & U_0 & 0 \\ \frac{1}{I_{yy}}[M_u + \frac{Z_u}{m}M_{\dot{w}}] & \frac{1}{I_{yy}}[M_w + \frac{Z_w}{m}M_{\dot{w}}] & \frac{1}{I_{yy}}[M_q + U_0M_{\dot{w}}] & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta}}{m} \\ \frac{Z_{\delta}}{m} \\ \frac{1}{I_{yy}}[M_{\delta} + \frac{Z_{\delta}}{m}M_{\dot{w}}] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Le vecteur d'état longitudinal  $x$  est donc composé des termes suivants : les écarts de vitesse  $u = U - U_0$  et  $w = W - W_0$ , par rapport à leurs équilibres respectifs, l'écart de vitesse de tangage  $q$  par rapport à l'équilibre  $Q_0$  et l'écart d'assiette  $\theta$  par rapport à l'équilibre  $\Theta_0$ .

Tableau I Définitions des dérivées de stabilité longitudinales

Symbole	Définition	commentaire
$X_u$	$\bar{q}S/U \frac{\partial X}{\partial u}$	variation de la portance et de la résistance à la traînée en fonction de $u$
$X_w$	$\bar{q}S/U \frac{\partial X}{\partial \alpha}$	variation de la portance et de la résistance à la traînée suivant l'axe longitudinal
$Z_u$	$\bar{q}S/U \frac{\partial Z}{\partial u}$	variation de la force normale avec $u$
$Z_w$	$\bar{q}S/U \frac{\partial Z}{\partial \alpha}$	pente de la courbe de portance
$M_u$	$\bar{q}\bar{c}S/U \frac{\partial M}{\partial u}$	effet de la poussée
$M_w$	$\bar{q}\bar{c}S/U \frac{\partial M}{\partial \alpha}$	raideur en tangage
$M_q$	$\bar{q}\bar{c}S/(2U/\bar{c}) \frac{\partial M}{\partial q}$	amortissement du tangage
$M_{\dot{w}}$	$\bar{q}\bar{c}S/(2U^2/\bar{c}) \frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}}$	-----
$X_\delta$	$\bar{q}S/U \frac{\partial X}{\partial \delta}$	variation de la portance et de la résistance à la traînée par rapport aux commandes $\delta$
$Z_\delta$	$\bar{q}S/U \frac{\partial Z}{\partial \delta}$	variation de la force normale avec $\delta$
$M_\delta$	$\bar{q}\bar{c}S/U \frac{\partial M}{\partial \delta}$	effort des commandes $\delta$ sur le moment de tangage

Le vecteur  $\delta$  représente les gouvernes longitudinales, qui sont déterminées en reliant les efforts aérodynamiques au braquage de la gouverne et au niveau de poussée. En général l'état est mesuré. De plus, l'utilisation de ces états et la projection des équations dans le repère avion permet d'obtenir des transferts directs entre les commandes et les sorties. Les dérivées de stabilité et les dérivées aérodynamiques sont définies dans le tableau I. Pour plus de précisions concernant les différents coefficients du modèle linéarisé (1.14) ou l'obtention des différentes équations, le lecteur pourra se reporter à [37] ou [42].

Ce système du quatrième ordre (1.14) possède donc 4 pôles, correspondant à deux modes décrivant le mouvement longitudinal de l'avion :

- Le mode phugoïde (*phugoid motion*) : c'est un mode oscillatoire associé aux états  $u$  et  $\theta$ . Il ne crée pas de difficultés majeures pour le réglage des qualités de vol longitudinales puisqu'il est lent et quasiment toujours stable bien que mal amorti. C'est donc un mode facilement pilotable autant par le pilote humain que par un pilote automatique. La phugoïde est un mouvement oscillatoire qui s'effectue quasiment sans mouvement de tangage ( $q \approx 0$ ) et une variation d'incidence très faible ( $\alpha =$

$w/U_0 \approx 0$ ).

- Oscillation d’incidence (*short-period motion*) : c’est également un mode oscillatoire associé pour sa part aux états  $w$  et  $q$ . Il est déterminant pour les qualités de vol longitudinales. l’oscillation d’incidence est essentiellement un mode à deux degrés de liberté, la vitesse restant pratiquement constante alors que l’avion subit un mouvement de tangage assez rapide.

Par ailleurs, dans certains cas (vol symétrique ou vol équilibré en montée) où la grandeur principale à contrôler est la vitesse. Il faut bien entendu être capable d’appliquer des forces parallèles à la trajectoire de vol. On agit alors sur la manette des gaz (la commande de poussée) et en réglant la traînée (aérofreins). Comme le modèle associé à cette dynamique, suppose une réponse immédiate des moteurs, cette phase ne présente pas beaucoup d’intérêt dans ce cas. En effet, la vitesse augmente immédiatement pour atteindre une nouvelle valeur, avant que les autres variables aient le temps de varier.

#### 1.4 Principaux objectifs de pilotage

L’objectif principal des commandes de vol électriques est d’améliorer les qualités de vol naturel, en particulier au niveau de la stabilité et du pilotage [20]. Les calculateurs numériques des commandes de vol ont accès aux informations inertielles et anémométriques et peuvent asservir toutes les gouvernes. On peut ainsi concevoir des lois répondant à des objectifs de pilotage classiques, mais qui doivent toutefois rester adaptées aux contraintes physiques.

En effet, alors que théoriquement on peut modifier de façon importante les qualités de vol d’un avion, en pratique de nombreuses contraintes doivent être prises en compte lors de la conception des lois de pilotage. On doit tenir compte par exemple des limitations physiques des gouvernes (limitations en débattement et vitesse de débattement). Intuitivement, plus on s’éloigne des caractéristiques de l’avion naturel (amélioration des amortissements et temps de réponse), plus les gouvernes sont sollicitées. De plus, il ne faut pas négliger

le facteur humain puisqu'il s'agit de pilotage manuel. Le comportement de l'avion doit demeurer proche de celui attendu par le pilote, fondé sur des sensations et visualisations habituelles. Ceci doit être réalisé afin d'éviter en particulier des phénomènes de pompage piloté, (*pilot-induced oscillation, PIO*), mais aussi pour permettre au pilote de maîtriser les situations de panne de système.

En terme de pilotage, il s'agit essentiellement de satisfaire certains critères de performance, en particulier les qualités de vol en longitudinal, comme décrites par la norme (MIL-STD-1797A) [39]. Pour une description plus détaillée de ces critères, le lecteur pourra se reporter à l'annexe A.

En terme de robustesse, la loi de commande doit garantir la stabilité de l'avion et assurer de bonnes marges de stabilité. L'avion doit également conserver de bonnes performances en présence d'incertitudes (paramétriques) de modèle. En effet, pour une condition de vol donnée (altitude et nombre de Mach fixés), on dispose de plusieurs modèles correspondant à différentes configurations de masse et du centre de gravité. Une unique loi de commande doit donc être calculée pour l'ensemble de ces modèles.

Enfin, il faut tenir compte de l'ordre du correcteur, qui doit conserver un ordre limité afin de faciliter l'implantation numérique de la loi de commande.

Les objectifs à atteindre par la loi de commande s'expriment en termes de performance (qualité de vol et de manoeuvrabilité, suivis de consigne, ...) et de robustesse (variation paramétrique, rejet de perturbation, ...). Cette variété dans les objectifs nous impose de mettre en œuvre et de développer des méthodes de synthèse de lois de commande permettant de tenir compte de l'ensemble de ces contraintes et de vérifier par la suite des spécifications de performance et de robustesse.

## CHAPITRE 2

### COMMANDE ROBUSTE : OUTILS D'ANALYSE ET DE SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE

Ce chapitre est consacré à un rappel des outils et concepts de la commande robuste, lesquels seront utilisés au cours de cette thèse. Nous montrerons tout d'abord que la modélisation des incertitudes intervenant sur le modèle, peut être traduite par un formalisme standard de représentation des systèmes : les Transformations Linéaires Fractionnelles (*LFT*) [16]. Ce formalisme permet d'exprimer les problème d'analyse et de commande qui feront l'objet des chapitres suivants. Nous présentons ensuite la première méthode de synthèse : l'approche  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous rappelons d'abord le théorème du petit gain, qui donne un résultat fondamental, concernant la stabilité du système bouclé face à des incertitudes non structurées. La synthèse d'une loi de commande robuste vis-à-vis de telles incertitudes est ensuite fournie, par l'algorithme de Glover-Doyle [27, 15].

La  $\mu$ -synthèse, que nous présentons au paragraphe 2.4.5, permet la réalisation de correcteurs assurant la robustesse en stabilité et en performance du système bouclé face à des incertitudes structurées. Cette méthode allie les concepts de valeur singulière structurée  $\mu$  et de commande  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous nous intéresserons, dans un premier temps (section 2.4), à l'analyse de la robustesse face à des incertitudes structurées, qui fait appel aux outils de  $\mu$ -analyse.

Nous terminons ce chapitre, par la présentation d'une technique de réduction de modèles, basée sur la méthode de réduction par *troncature équilibrée*. Cette dernière sera utilisée pour la réduction des correcteurs obtenus. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à d'autres références sur le sujet, par exemple [14], [15], [59] et [6].

## 2.1 Transformation linéaire fractionnelle (*LFT*)

La Transformation Linéaire Fractionnelle (*LFT*) est un formalisme commun de représentation des systèmes, largement utilisé dans la théorie de la commande moderne. Elle généralise les notions classiques de fonction de transfert et de représentation d'état, en permettant la prise en compte simultanée de différents types d'incertitudes qui peuvent intervenir sur le modèle.

Soit  $P$  une matrice complexe quelconque, partitionnée de la manière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$$

Supposons maintenant, qu'il existe deux bloc-structures  $\Delta_l \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$  et  $\Delta_u \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ , reliés respectivement à  $P$  comme le montre le schéma de la figure 2.1. Les transformation linéaires fractionnelles  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  et  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  sont alors définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(P, \Delta_l) &= P_{11} + P_{12}\Delta_l(I - P_{22}\Delta_l)^{-1}P_{21} \\ \mathcal{F}_u(P, \Delta_u) &= P_{22} + P_{21}\Delta_u(I - P_{11}\Delta_u)^{-1}P_{12} \end{aligned} \quad (2.1)$$

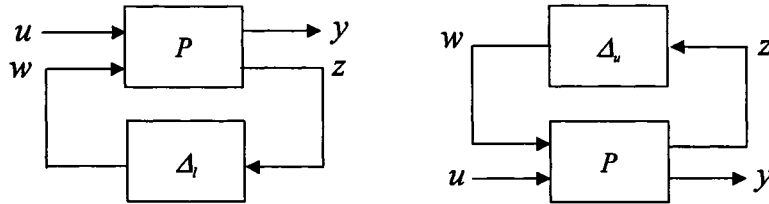


Figure 2.1 Schéma bloc pour *LFT* inférieure et *LFT* supérieure

Les indices  $l$  et  $u$  des applications  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  et  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  proviennent respectivement des initiales des mots anglais *lower* et *upper*, signifiant que  $\Delta_l$  (ou  $\Delta_u$ ) est appliquée à la partie inférieure (ou supérieure) de  $P$ . A noter que ces deux représentations sont dites



bien posées si et seulement si, l'inverse des deux matrices existent, i.e.  $\det(I - P_{22}\Delta_l) \neq 0$  et  $\det(I - P_{11}\Delta_u) \neq 0$ .

Les LFTs offrent un formalisme d'autant plus général pour la description des systèmes dynamiques, que le cas matriciel, présenté ci-dessus. Un exemple courant dans l'analyse de stabilité est la représentation d'état d'un système de commande.

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

dont la fonction de transfert est donnée par  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ .

La représentation d'état est aussi une *LFT* en la variable  $\Delta = s^{-1}I$ , (figure 2.2).

En effet :

$$\begin{aligned}G(s) &= D + C(sI - A)^{-1}B \\ &= D + C\Delta(I - A\Delta)^{-1}B \\ &= \mathcal{F}_u\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \Delta\right)\end{aligned}$$

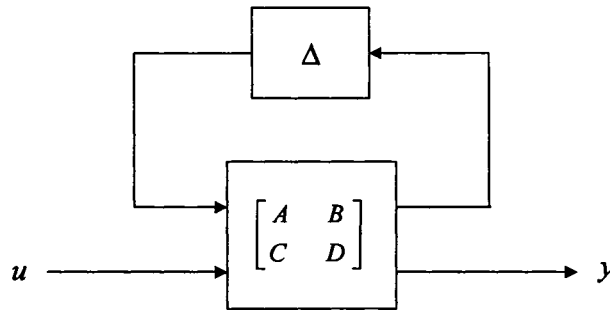


Figure 2.2 Représentation d'état par une *LFT*

D'autre part, la représentation *LFT* s'avère une technique très utile pour analyser des systèmes complexes avec autant de boucles de rétroaction et de blocs d'opérateurs en série

ou parallèle. Une propriété fondamentale des LFTs est qu'une interconnection linéaire de plusieurs LFTs peut être toujours représentée par une seule *LFT* équivalente. Pour illustrer cette propriété, considérons le système complexe avec plusieurs LFTs, représenté sur la figure 2.3.

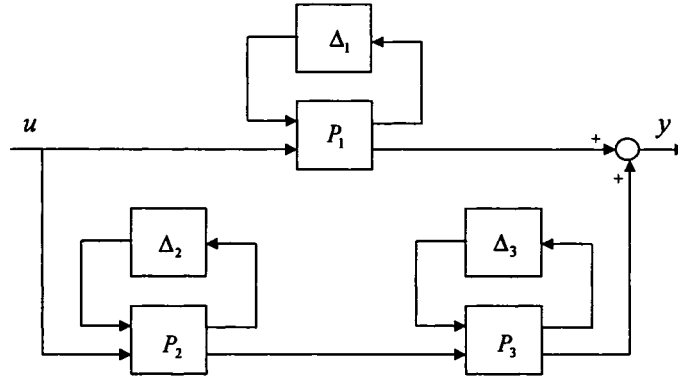


Figure 2.3 Interconnection de plusieurs LFTs

En regroupant ensemble les systèmes  $\{P_1, P_2, P_3\}$  et en isolant toutes les incertitudes  $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$  en un seul bloc, le système initial peut être représenté par une seule *LFT* équivalente, comme le montre le schéma de la figure 2.4, avec  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  et

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}^1 & 0 & 0 & P_{12}^1 \\ 0 & P_{11}^2 & 0 & P_{12}^2 \\ 0 & P_{12}^3 P_{21}^2 & P_{11}^3 & P_{12}^3 P_{22}^2 \\ P_{21}^1 & P_{22}^3 P_{21}^2 & P_{21}^3 & P_{22}^1 + P_{22}^3 P_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

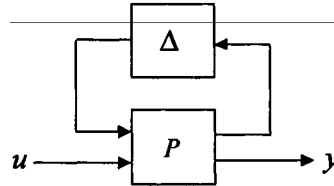


Figure 2.4 Système *LFT* équivalent

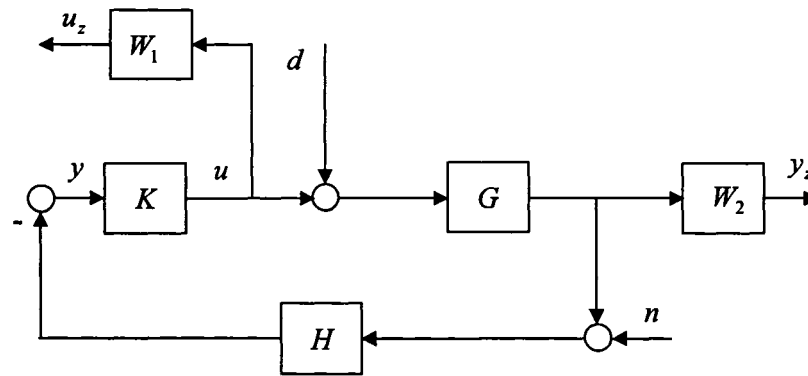


Figure 2.5 Système de commande en boucle fermée

Ce formalisme permet aussi d'exprimer le problème de la commande. Illustrons cela par un exemple. Considérons le système de commande de la figure 2.5. Ce dernier peut se mettre sous la forme standard comme le montre le schéma de la figure 2.6, avec

$$w = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} y_z \\ u_z \end{pmatrix}$$

et

$$P = \left[ \begin{array}{cc|c} W_2G & 0 & W_2G \\ 0 & 0 & W_1 \\ \hline -HG & -H & -HG \end{array} \right]$$

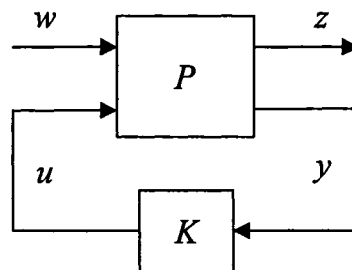


Figure 2.6 Système équivalent: forme standard

Nous aborderons plus tard dans ce chapitre, le problème de la commande, et notamment celui de l'analyse de la stabilité et de la performance des systèmes bouclés.

## 2.2 Modélisation des systèmes incertains

Le modèle d'un système utilisé pour la commande de celui-ci, quelle que soit la façon dont il a été obtenu, n'est toujours qu'une approximation. Il subsiste en effet toujours un certain nombre d'incertitudes qui sont essentiellement de deux types : les *incertitudes paramétriques* et les *incertitudes fréquentielles*.

### 2.2.1 Modélisation des incertitudes paramétriques

Ce dernier type d'incertitudes concerne les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du processus. Elles sont dues à des paramètres qui n'ont pas pu être modélisés ou mesurés avec précision.

#### 2.2.1.1 Principe

L'idée consiste là encore à mettre le système incertain sous la forme d'une *LFT*, comme sur la figure 2.7 :

$$y = \mathcal{F}_u(P(s), \Delta)u \quad \text{avec} \quad \Delta = \text{diag} \{\delta_i I\}$$

La matrice de transfert  $P(s)$  est fixée, et toutes les incertitudes paramétriques sont rassemblées dans  $\Delta$ .  $u$  et  $y$  représentent les entrées et sorties physiques du système, tandis que les scalaires réels  $\delta_i$  représentent des incertitudes paramétriques normalisées (c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse que  $\delta_i \in [-1, 1]$ ).

Illustrons cela sur un exemple. Considérons le modèle d'avion représenté par la dynamique *short-period*. On supposera de plus que certains coefficients sont mal connus. On va montrer par cet exemple qu'on peut exprimer ce système incertain sous forme d'une *LFT* supérieure.

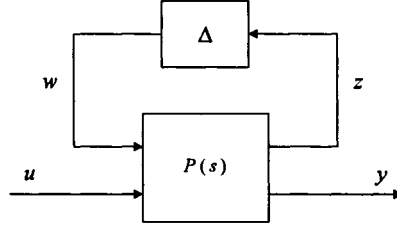


Figure 2.7 Formulation d'un système incertain par une *LFT*

La dynamique rapide étant décrite par la représentation d'état habituelle :

$$\text{équation d'état : } \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & 1 \\ M_{\alpha} & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (2.2)$$

$$\text{équation de sortie : } \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix}$$

où les états  $\alpha$  et  $q$  correspondent respectivement à l'incidence, et à la vitesse de tangage, tandis que  $\delta_e$  représente la gouverne de profondeur. Le vecteur de sortie coïncide avec le vecteur d'état lui même  $[\alpha \ q]'$ . Les paramètres aérodynamiques  $Z_{\alpha}$ ,  $M_{\alpha}$ ,  $M_q$ ,  $Z_{\delta_e}$  and  $M_{\delta_e}$  sont les dérivées de stabilité. Supposons que les trois paramètres suivants sont connus avec une certaine erreur autour de leurs valeurs nominales respectives.

$$\begin{aligned} M_{\alpha} &= M_{\alpha 0} + W_a \delta_a \\ M_q &= M_{q 0} + W_b \delta_b \\ M_{\delta_e} &= M_{\delta_e 0} + W_c \delta_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $W_a \in \mathbb{R}$ ,  $W_b \in \mathbb{R}$  et  $W_c \in \mathbb{R}$  sont trois fonctions de pondération adéquates et  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  et  $\delta_c$  sont des perturbations telles que  $|\delta_a| \leq 1$ ,  $|\delta_b| \leq 1$  et  $|\delta_c| \leq 1$ .

L'idée est alors d'introduire des entrées et sorties fictives  $w$  et  $z$ , afin de représenter les incertitudes par un rebouclage interne  $w = \Delta z$ . Définissons  $[z_1 \ z_2 \ z_3]'$  comme vecteur

de sortie :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_c \end{bmatrix} \delta_e$$

et  $[w_1 \ w_2 \ w_3]'$  comme vecteur d'entrée :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Le modèle perturbé s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|ccc|c} Z_\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & Z_{\delta_e} \\ M_{\alpha 0} & M_{q0} & 1 & 1 & 1 & M_{\delta_e 0} \\ \hline W_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_c \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \delta_e \end{bmatrix}$$

Il est strictement équivalent au système décrit par les équations 2.2 et 2.3. L'expression de la *LFT* est alors donnée par :

$$\mathcal{F}_u = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{F}_u^{11} & \mathcal{F}_u^{12} \\ \hline I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \end{array} \right]$$

avec

$$\mathcal{F}_u^{11} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_{\alpha 0} & M_{q0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{F}_u^{12} = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_{e0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_c \end{bmatrix}$$

### 2.2.1.2 Modélisation des incertitudes modales

Considérons à présent le cas où des incertitudes paramétriques sont rattachées aux paramètres physiques d'une équation du mouvement d'un système dynamique. C'est le cas généralement des modèles à structures flexibles, où des variations sont observées à travers les propriétés modales du système. Ces variations sont alors décrites par des incertitudes sur la fréquence et sur l'amortissement des modes flexibles.

Soit par exemple, le système suivant dont l'équation dynamique est donnée par :

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = u(t)$$

et supposons que la fréquence  $\omega$  et l'amortissement  $\zeta$  sont mal connus et qu'ils évoluent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \omega_0 - \Delta_\omega &\leq \omega \leq \omega_0 + \Delta_\omega \\ \zeta_0 - \Delta_\zeta &\leq \zeta \leq \zeta_0 + \Delta_\zeta \end{aligned}$$

En posant  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$  comme variables d'état, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Introduisons maintenant deux opérateurs d'incertitudes  $\delta_\omega$  ,  $\delta_\zeta$  tels que  $|\delta_\omega| \leq 1$  et  $|\delta_\zeta| \leq 1$ , on peut alors réécrire les deux paramètres précédents comme suit :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \Delta_\omega \delta_\omega \\ \zeta &= \zeta_0 + \Delta_\zeta \delta_\zeta \end{aligned}$$

L'équation d'état  $\dot{x}_2$ , devient alors :

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = & -\omega_0^2 x_1 - 2\zeta_0 \omega_0 x_2 + u - \delta_\omega (2\Delta_\omega \omega_0 x_1 + 2\Delta_\omega \zeta_0 x_2) - \delta_\zeta (2\Delta_\zeta \omega_0 x_2) \\ & - \delta_\zeta \delta_\omega (2\Delta_\zeta \Delta_\omega x_2) - \delta_\omega^2 (\Delta_\omega^2 x_1)\end{aligned}$$

En supposant que les variations modales sont petites ( $\delta_\omega \ll 1$  et  $\delta_\zeta \ll 1$ ), on peut négliger les termes suivant  $\delta_\zeta \delta_\omega$  et  $\delta_\omega^2$ . Soit le nouveau vecteur de sortie :

$$\begin{bmatrix} z_\omega \\ z_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\Delta_\omega \omega_0 & -2\Delta_\omega \zeta_0 \\ 0 & -2\Delta_\zeta \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et soit le nouveau vecteur d'entrée :

$$\begin{bmatrix} w_\omega \\ w_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\omega \\ z_\zeta \end{bmatrix}$$

Le système dynamique incertain peut être représenté par une *LFT* supérieure associée aux perturbations  $\delta_\omega$  et  $\delta_\zeta$ , comme sur la figure 2.8. La représentation d'état du système  $P$  est alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ z_\omega \\ z_\zeta \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta_0 \omega_0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline -2\Delta_\omega \omega_0 & -2\Delta_\omega \zeta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Delta_\zeta \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_\omega \\ w_\zeta \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} w_\omega \\ w_\zeta \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} z_\omega \\ z_\zeta \end{bmatrix}$$



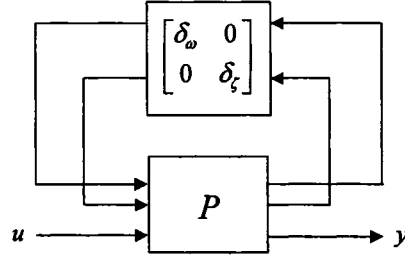


Figure 2.8 Représentation d'un système dynamique incertain par une *LFT*

L'expression de la *LFT* est alors donnée par :

$$\mathcal{F}_u = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{F}_u^{11} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right]$$

avec

$$\mathcal{F}_u^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta_0\omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\Delta_\omega\omega_0 & -2\Delta_\omega\zeta_0 \\ 0 & -2\Delta_\zeta\omega_0 \end{bmatrix}$$

### 2.2.2 Modélisation des incertitudes fréquentielles

Ce deuxième type d'incertitudes correspond de manière générale aux dynamiques non modélisées ou négligées, typiquement des dynamiques haute fréquence. La seule information dont on dispose pour caractériser ce type d'incertitude est une borne sur la norme de sa réponse fréquentielle, telle que :

$$\|\Delta(j\omega)\| \leq \delta(\omega) \quad \text{pour tout } \omega$$

La représentation de ces incertitudes peut se faire de différentes manière selon la façon dont elles interviennent dans le système. Elles peuvent être modélisées sous forme :

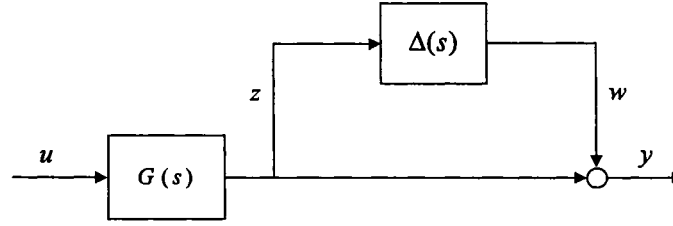


Figure 2.9 Perturbation multiplicative directe en sortie

- additive :  $G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s)$ ,
- multiplicative :  $G_p(s) = G(s)(I + \Delta_m(s))$ ,
- multiplicative inverse:  $G_p(s) = G(s)(I + \Delta_m^i(s))^{-1}$ .

La représentation sous forme additive est bien adaptée à la prise en compte des erreurs liées aux faibles non-linéarités négligées, ou à la troncature du modèle linéaire (modes haute fréquence éliminés ou non identifiés). Par contre, les représentations sous forme multiplicative ou multiplicative inverse sont bien adaptées à la représentation d'erreurs de modélisation des capteurs ou actionneurs. Illustrons cela sur l'exemple de la représentation d'une dynamique capteur négligée. L'incertitude  $\Delta(s)$ , dans ce cas, est représentée sous forme multiplicative directe en sortie du système nominal  $G(s)$ . Le système incertain de la figure 2.9 peut facilement être représenté par une *LFT* semblable à celle de la figure 2.7 :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G(s) \\ I & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$w = \Delta(s)z$$

### 2.3 L'approche $\mathcal{H}_\infty$

Nous commençons par donner les outils mathématiques indispensables qui permettront ultérieurement d'apprécier la robustesse d'un système de commande et de définir la synthèse

d'un correcteur.

### 2.3.1 Espace de matrices de fractions rationnelles, norme associée

#### 2.3.1.1 Réponse fréquentielle

L'évaluation de  $G(s)$  pour  $s = j\omega$ , avec  $\omega \geq 0$ , définit la *réponse fréquentielle* du système. Pour un système monovarié, la réponse fréquentielle est une fonction scalaire. Pour un système multivarié, la réponse fréquentielle est une fonction matricielle. On définit la plus grande *valeur singulière* de  $G(s)$  comme :

$$\bar{\sigma}[G(j\omega)] = \sqrt{\lambda_{\max}(G(j\omega)G^*(j\omega))} \quad (2.4)$$

où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de  $G(j\omega)G^*(j\omega)$ , ( $G^*(j\omega)$  désigne le transposé complexe conjugué de  $G(j\omega)$ ).

#### 2.3.1.2 Espace $\mathcal{RH}_\infty$

Rappelons qu'un système décrit par une fonction de transfert  $G(s)$  telle que  $G(\infty)$  est finie, est appelé système *propre*. Si  $G(\infty) = 0$ , le système est dit *strictement propre*.

**Définition 2.3.1.** On appelle  $\mathcal{RH}_\infty$ , le sous-espace des matrices de transfert propres et strictement stables (pas de pôles sur l'axe des imaginaires).

#### 2.3.1.3 Norme $\mathcal{H}_\infty$

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système  $G(s)$  continu, asymptotiquement stable est :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (2.5)$$

avec  $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$  définie en 2.4. La norme  $\mathcal{H}_\infty$  représente donc une mesure du gain maximal de la réponse fréquentielle de la valeur singulière de  $G(j\omega)$  sur tout le domaine de

fréquence. Dans le cas monovarié, c'est la valeur maximale du gain  $|G(j\omega)|$ . Pour les systèmes linéaires, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  s'interprète comme étant l'énergie maximale du signal de sortie  $y(t)$  suite à un signal d'entrée  $u(t)$ , d'énergie bornée.

En utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , l'espace  $\mathcal{RH}_\infty$  est tel que :

$$\mathcal{RH}_\infty = \{G(s) : G(s) \text{ propre, strictement stable et } \|G(s)\|_\infty < \infty\}$$

#### 2.3.1.4 Calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$

Il n'existe pas de méthode explicite pour calculer la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une matrice de transfert. Une première possibilité consiste à appliquer la définition, ce qui conduit à une recherche de maximum sur  $\omega$ . Une autre possibilité plus précise est basée sur les valeurs propres de la matrice hamiltonienne associée à une représentation de  $G(s)$  dans l'espace d'état. On a la propriété suivante :

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $\gamma > 0$ , et*

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty.$$

*Alors  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  et la matrice hamiltonienne associée*

$$H_\gamma := \left[ \begin{array}{cc} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{array} \right]$$

*n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, avec  $R := \gamma^2 I - D^T D$ .*

Ce dernier résultat donne une méthode itérative pour le calcul de norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une matrice de transfert  $G(s)$ .

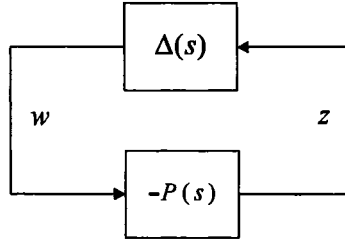


Figure 2.10 Schéma général d'étude de la robustesse en stabilité

### 2.3.2 Analyse en robustesse d'un système bouclé

#### 2.3.2.1 Théorème du petit gain

Un des résultats importants dans l'analyse de la robustesse des systèmes linéaires, est le *théorème du petit gain* qui donne une condition suffisante, permettant de caractériser la stabilité robuste d'un système bouclé [59].

**Théorème 2.3.1.** (Théorème du petit gain) *Soit  $P(s)$  une matrice de transfert stable et  $\Delta(s)$  une perturbation stable, connectée de la sortie à l'entrée de  $P(s)$  comme décrit sur la figure 2.10; alors le système en boucle fermée est stable, de manière interne, si :*

$$\|P(j\omega)\Delta(j\omega)\|_{\infty} < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.6)$$

Une autre manière de reformuler la condition 2.6 consiste à la remplacer par la condition suffisante :

$$\|P(j\omega)\| \|\Delta(j\omega)\|_{\infty} < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.7)$$

Ce résultat, basé uniquement sur la norme  $\mathcal{H}_{\infty}$  du bloc d'incertitudes  $\Delta(s)$ , conduit à envisager une classe d'incertitudes de modélisation pouvant être beaucoup plus large que celle qui caractérise réellement le système. D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.1.** *Si  $P(s)$  et  $\Delta(s)$  ont leurs pôles à partie réelle strictement négative,*

alors le système bouclé de la figure 2.10 est stable, de manière interne, si :

$$\|P(j\omega)\| \|\Delta(j\omega)\|_\infty < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.8)$$

### 2.3.3 Stabilité robuste

La robustesse en stabilité consiste en la capacité d'un système de commande à préserver sa stabilité en présence d'erreurs de modélisation inéluctables. Pour étudier cette propriété, il faut au préalable définir la classe des erreurs de modélisation vis-à-vis de laquelle la propriété de stabilité doit être satisfaite. Considérons pour l'instant, la classe des erreurs de modélisation dites non structurées. Ce type d'incertitudes correspond de manière générale aux dynamiques non modélisées ou négligées. La seule information dont on dispose est une majoration de sa norme. La représentation de ces incertitudes peut se faire de différentes manières selon la façon dont elles interviennent dans le système.

Par ailleurs, la condition 2.8 est aussi nécessaire, si les erreurs de modèle  $\Delta(s)$  sont mises à l'échelle de manière à satisfaire  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . On obtient alors, une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste du système bouclé de la figure 2.10.

On notera  $\Delta$ , l'ensemble d'incertitudes dites non structurées, satisfaisant l'inégalité  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , tel que :

$$\Delta = \{\Delta : \|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad \text{pour tout } \omega\}$$

**Théorème 2.3.2.** (Stabilité robuste) *Si  $P(s)$  et  $\Delta(s)$  ont leurs pôles à partie réelle strictement négative, alors le système de la figure 2.10 est stable de manière interne, pour toute matrice  $\Delta(s) \in \Delta$  telle que  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$  si et seulement si :*

$$\|P(j\omega)\|_\infty < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.9)$$

Nous utilisons le théorème 2.3.2 pour analyser la robustesse du système de la figure 2.11, face aux incertitudes de modélisation en entrée, pouvant représenter par exemple une

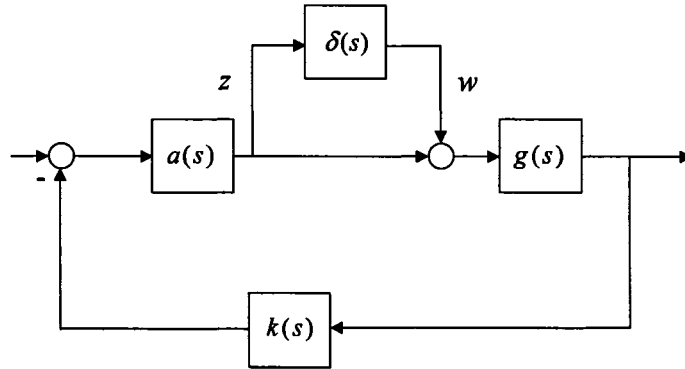


Figure 2.11 Robustesse en stabilité : cas d'une dynamique négligée

dynamique négligée de l'actionneur. Rappelons que la seule information dont on dispose est que la norme de  $\delta(s)$  est bornée. Le système bouclé de la figure 2.11 peut se mettre sous la forme  $(p(s), \delta(s))$  de la figure 2.12, en calculant :

$$z = - \left[ (1 + a(s)k(s)g(s))^{-1} a(s)k(s)g(s) \right] w$$

où  $p(s) = [(1 + a(s)k(s)g(s))^{-1} a(s)k(s)g(s)]$ , représente simplement la fonction de transfert vue par la perturbation de modèle  $\delta(s)$ .

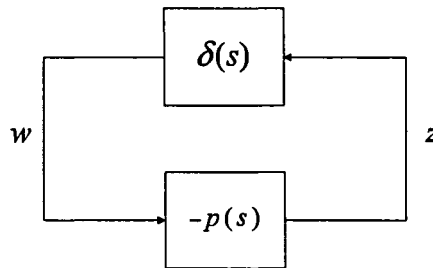


Figure 2.12 Robustesse en stabilité : schéma bloc équivalent

Supposons maintenant que tous les pôles de  $p(s)$  et  $\delta(s)$  soient à partie réelle strictement négative. Alors le système bouclé de la figure 2.12 est stable de manière interne, si et seulement si le lieu de Nyquist de  $p(s)\delta(s)$  n'encercle pas le point  $(-1, 0)$ . Cette condition

est équivalente à celle donnée par la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la boucle  $(p(s), \delta(s))$ .

$$\sup_{\omega} |p(j\omega)\delta(j\omega)| \leq 1$$

On peut dire que le critère de Nyquist utilise une condition basée sur la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , équivalente à la condition suffisante de stabilité robuste donnée par le *théorème du petit gain* :

$$\text{stabilité robuste de } (p(s), \delta(s)) \Leftrightarrow \|p(s)\delta(s)\|_\infty \leq 1$$

De plus, supposons que les erreurs de modélisation sont mises à l'échelle, en utilisant une fonction de pondération, de sorte que  $|\delta(s)| \leq 1$ . Une condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste du système bouclé  $(p(s), \delta(s))$  sera alors :

$$\text{stabilité robuste de } (p(s), \delta(s)) \Leftrightarrow \|p(s)\|_\infty < 1$$

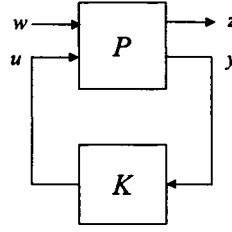
#### 2.3.4 Optimisation $\mathcal{H}_\infty$

La structure de commande que nous considérons pour la synthèse des lois est représentée par le schéma bloc de la figure 2.13. Le processus  $P$  est un système comportant deux ensembles d'entrée et deux ensembles de sortie. Le vecteur  $w$  représente toutes les entrées exogènes, telles que signaux de référence, perturbations et bruits. Le vecteur  $u$  représente les commandes. Les sorties  $z$  représentent les erreurs de régulation, qu'on souhaite maintenir à zéro. Enfin  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande. Exprimé sous cette forme, le problème de synthèse est alors la recherche d'un correcteur  $K$  qui minimise la norme du transfert des entrées exogènes  $w$  vers les erreurs  $z$ .

Si l'on décompose la matrice  $P$  selon :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$



Figure 2.13 Problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard

alors on a :

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec  $u = Ky$ , on peut écrire :

$$z = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}] w \quad (2.12)$$

que l'on note généralement :

$$z = \mathcal{F}_l(P, K)w \quad (2.13)$$

Le problème de synthèse est donc le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{K \text{ stabilisant}} \|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty \quad (2.14)$$

La résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard à partir d'une représentation d'état de la matrice  $P$  est apparue en 1988 [15] : elle a apporté une simplification et une clarification considérable par rapport aux méthodes proposées précédemment qui souvent ne représentaient pas un caractère aussi général.

Considérons le problème standard de la figure 2.13, et supposons connue une représen-

tation d'état correspondant au processus  $P$ , soit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}\tag{2.15}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ ,  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$  et  $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ .

Rappelons que l'objectif du problème est de trouver un correcteur  $K$  qui :

- stabilise de manière interne le système bouclé de la figure 2.13.
- minimise  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$

Pour résoudre ce problème, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

(H1)  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable;

(H2)  $D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}$ ;

(H3)  $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{bmatrix}$ ;

(H4)  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2, \forall \omega \in \mathbb{R}$ ;

(H5)  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2, \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

L'hypothèse (H1) est la condition nécessaire pour qu'il existe un correcteur stabilisant. L'hypothèse (H2) signifie que  $C_1 x$  et  $D_{12} u$  sont orthogonaux, de sorte qu'il n'y a pas de pondération sur les termes croisés en  $x$  et  $u$ , et que de plus la pondération sur  $u$  est normalisée. L'hypothèse (H3) est duale de (H2). L'hypothèse (H4) signifie que le

sous-système  $P_{12}$  ne doit pas avoir de zéros sur l'axe imaginaire, si  $(C_1, A, B_2)$  est une réalisation minimale. De même pour  $(H5)$  et  $P_{21}$ .

La solution  $\mathcal{H}_\infty$  fait intervenir deux équations algébriques de Ricatti:

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (2.16)$$

$$A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (2.17)$$

où  $\gamma$  est un scalaire positif. Ces deux équations sont associées aux deux matrices hamiltoniennes :

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad J_\infty := \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

Le système décrit par 2.15 et vérifiant les hypothèses  $(H1)$  à  $(H5)$ , peut être stabilisé de manière interne par un correcteur  $K$  assurant  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ , si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i)  $H_\infty$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une unique solution

$$X_\infty := Ric(H_\infty) \geq 0.$$

(ii)  $J_\infty$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une unique solution

$$Y_\infty := Ric(J_\infty) \geq 0.$$

(iii)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ .

où  $\rho()$  désigne le module de la plus grande valeur propre.

De plus, sous les conditions (i) à (iii), un tel correcteur est donné par :

$$K_0 := \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\hat{A}_\infty := A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 + C_1^T C_1$$

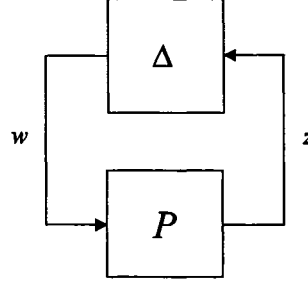


Figure 2.14 Incertitudes non structurées

avec

$$F_{\infty} := -B_2^T X_{\infty}, \quad L_{\infty} := -Y_{\infty} C_2^T, \quad Z_{\infty} := (I - \gamma^{-2} Y_{\infty} X_{\infty})^{-1}.$$

Ce correcteur a une structure qui rappelle celle obtenue en commande  $LQG$  par application du théorème de séparation. L'équation d'état correspondant au correcteur  $K_0$  ci-dessus peut en effet s'écrire :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_2u - Z_{\infty}L_{\infty}(y - C_2\hat{x}) \quad (2.18)$$

avec

$$\begin{aligned} u &= F_{\infty}\hat{x} \\ \hat{w} &= \gamma^{-2}B_1^T X_{\infty}\hat{x} \end{aligned}$$

La différence par rapport à la structure  $LQG$  provient de la présence du terme  $\hat{w}$ , qu'on peut interpréter comme la perturbation la plus défavorable pouvant agir sur le système.

#### 2.4 La valeur singulière structurée : $\mu$

Dans l'analyse de la robustesse menée au paragraphe 2.3.2, nous avons supposé que les incertitudes de modèle étaient de type dynamique, et qu'elles étaient décrites par un seul bloc  $\Delta \in \mathcal{RH}_{\infty}$ , comme le montre le schéma de la figure 2.14.

On dispose alors de résultats, qui reposent en grande partie sur le théorème du petit gain, et qui permettent de garantir la stabilité du système bouclé en fonction uniquement de la norme de ce bloc, dont la structure physique n'est pas prise en compte. On envisage ainsi une classe d'incertitudes de modèle beaucoup plus large et les résultats déduits de cette analyse présentent un caractère conservatif, et conduisent à une appréciation pessimiste de la robustesse en stabilité.

Dans cette section, nous présentons une technique permettant de tenir compte de la structure des incertitudes de modèle, qui peuvent intervenir en différents points du système: variation d'un ou plusieurs paramètres, dynamiques mal connues ou négligées des actionneurs et des capteurs. Dans la modélisation que nous allons utiliser, certaines de ces incertitudes peuvent conserver une forme non structurée, sauf qu'on ne les ramène pas toutes dans un seul bloc.

Le schéma général d'étude de la robustesse en stabilité est alors celui de la figure 2.15. Il représente un cas particulier du schéma précédent, figure 2.14, dans lequel la matrice traduisant les incertitudes de modèle a une structure bloc-diagonale :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q) \quad (2.19)$$

L'étude de la stabilité d'un système de ce type nécessite l'introduction d'un nouvel outil, la valeur singulière structurée, notée  $\mu$ , développée par Doyle depuis 1982 [13], [14].

#### 2.4.1 Définition

Considérons le schéma 2.15, correspondant à la matrice  $\Delta$  dont la structure est définie par (2.19), où les blocs  $\Delta_i$  peuvent être des scalaires ou des matrices.

Soit  $\underline{\Delta}$  l'ensemble de toutes les matrices  $\Delta$  carrées, de dimension  $n$  et diagonales par blocs, de la forme :

$$\underline{\Delta} = \{\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F)\} \quad (2.20)$$

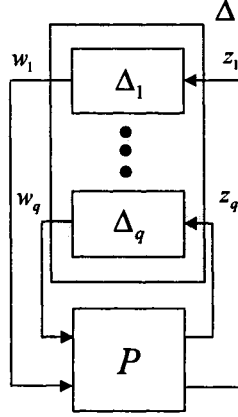


Figure 2.15 Incertitudes structurées

où les  $\delta_i$  sont des complexes, et les  $\Delta_j$  sont des matrices carrées à coefficients complexes, de dimension  $m_j$ . De plus, on notera  $\mathbf{B}_{\underline{\Delta}}$  l'ensemble des matrices  $\Delta$  appartenant à  $\underline{\Delta}$  et satisfaisant l'inégalité  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ .

**Définition 2.4.1.** Soit la matrice complexe  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , la valeur singulière structurée associée à la structure  $\underline{\Delta}$ , notée  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$ , est définie par :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \frac{1}{\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \underline{\Delta}, \det(I_n - P\Delta) = 0\}} \quad (2.21)$$

si aucune matrice  $\Delta \in \underline{\Delta}$  ne rend  $(I_n - P\Delta)$  singulière, alors  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) := 0$ .

D'après cette définition,  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)^{-1}$  est donc la valeur minimale de la norme de la matrice  $\Delta \in \underline{\Delta}$  qui rend  $(I_n - P\Delta)$  singulière. Il est important de remarquer que la valeur singulière structurée dépend à la fois de la matrice  $P$  et de la structure  $\underline{\Delta}$  envisagée.

#### 2.4.2 Propriétés et calcul de la valeur singulière structurée

La définition 2.4.1 n'est pas utilisable pour le calcul de la valeur singulière structurée, car elle conduit à un problème d'optimisation difficile à résoudre. C'est pourquoi les recherches ont été orientées vers le calcul des bornes inférieure et supérieure de  $\mu$ .

**Propriété 1** Si  $\underline{\Delta} = \{\delta I_n, \delta \in \mathbb{C}\}$ , alors  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \rho(P)$  où  $\rho(P)$  est le rayon spectral de  $P$ . On obtient donc une borne inférieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$ .

**Propriété 2** Si  $\underline{\Delta} = \{\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\}$ , alors  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \bar{\sigma}(P)$ , ce qui donne une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$

On a finalement :

$$\rho(P) \leq \mu_{\underline{\Delta}}(P) \leq \bar{\sigma}(P). \quad (2.22)$$

Toutefois, cet encadrement est parfois extrêmement large, et conduit notamment à être assez pessimiste sur la stabilité du système perturbé lorsque la borne supérieure est éloignée de la valeur réelle du  $\mu$ . Il peut cependant être sensiblement amélioré.

Soit  $\underline{\mathcal{D}}$  l'ensemble des matrices carrées inversibles de dimension  $n$ , commutant avec les matrices  $\Delta$  de  $\underline{\Delta}$ , c'est-à-dire de la forme :

$$\underline{\mathcal{D}} = \{\text{diag}(D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_1 I_{m_F}) : D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0\}$$

**Théorème 2.4.1.** *Pour toute matrice  $\mathcal{D} \in \underline{\mathcal{D}}$ , appelée matrice de **scalings**, et toute perturbation  $\Delta \in \underline{\Delta}$ , où  $\mathcal{D}\Delta = \Delta\mathcal{D}$ , on a :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \mu_{\underline{\Delta}}(\mathcal{D}P\mathcal{D}^{-1})$$

En combinant le résultat du théorème 2.4.1 et l'équation 2.22, on a donc finalement

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) \leq \mu_{\underline{\Delta}}^*(P) = \inf_{\mathcal{D} \in \underline{\mathcal{D}}} \bar{\sigma}(\mathcal{D}P\mathcal{D}^{-1}) \quad (2.23)$$

Ce majorant est évidemment moins conservatif que  $\bar{\sigma}(P)$ , toutefois, l'expérience montre qu'il est souvent une bonne approximation de  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$  et que l'écart entre  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$  et  $\mu_{\underline{\Delta}}^*(P)$  est en général faible (il est nul dans le cas de certaines structures, voir [59]). L'intérêt du majorant  $\mu_{\underline{\Delta}}^*(P)$  réside dans le fait qu'il est beaucoup plus facile à calculer que  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$ .

### 2.4.3 Condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste: Incertitudes structurées

L'usage de la valeur singulière structurée permet de généraliser le Théorème du petit gain au cas des familles de systèmes avec incertitudes structurées, et fournit le résultat suivant:

**Théorème 2.4.2.** (Théorème du petit gain structuré) *Soit la famille de systèmes bouclés  $(P, \Delta)$ , où  $P$  est une matrice de fonctions de transfert stable et où  $\Delta$  est une fonction de transfert stable telle que  $\Delta \in \underline{\Delta}$ . La famille de systèmes bouclés  $(P, \Delta)$ , de la figure 2.15, est stable pour tout  $\Delta$ , tel que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  si et seulement si :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) < 1, \quad \text{pour tout } \omega.$$

En effet, d'après le théorème du petit gain structuré, rechercher le plus grand ensemble d'incertitudes  $\Delta$  pour lequel la famille de systèmes  $(P, \Delta)$  reste stable revient à rechercher la taille de la plus petite incertitude  $\Delta \in \underline{\Delta}$  pour laquelle le système  $(P, \Delta)$  est déstabilisé. Cette taille est donnée par  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)^{-1}$ . D'autre part, On appelle  $\mu$ -analyse l'analyse de la robustesse d'un système par la mise en œuvre de ce théorème.

### 2.4.4 Théorème de performance robuste

Jusqu'à maintenant on a présenté que le problème de la robustesse en stabilité, c'est-à-dire vérifier que la famille de systèmes interconnectés  $(P, \Delta)$  est stable pour tout  $\Delta$  borné en norme  $\mathcal{H}_\infty$  par 1, et de structure donnée par  $\underline{\Delta}$ , voir figure 2.15. On considère dans cette section le problème plus général de la robustesse en performance, c'est-à-dire que le système non seulement garantit la condition de stabilité robuste mais assure un certain niveau de performance.

Considérons le système bouclé  $(P, \Delta_i)$  de la figure 2.16 où  $P$  est une matrice de transfert rationnelle et stable appartenant à  $\mathcal{RH}_\infty$ , et où  $\Delta_i$  représente une incertitude structurée stable, au sens de  $\underline{\Delta}_i$ , dont la matrice de transfert, supposée rationnelle, et satisfaisant la



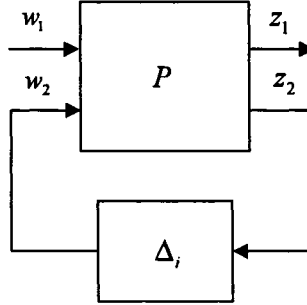


Figure 2.16 Schéma-bloc pour l'étude de la robustesse en performance

condition

$$\|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \quad (2.24)$$

En effet, si l'on décompose  $P$  selon :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

D'après le théorème 2.4.2, une condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé soit stable est :  $P_{22} \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $\mu_{\underline{\Delta}_i}(P_{22}(j\omega)) < 1$ , pour tout  $\omega$ . Supposons maintenant qu'on demande à satisfaire non seulement la stabilité du système bouclé, mais aussi un certain niveau de performances, quelle que soit l'incertitude structurée  $\Delta_i$  vérifiant la condition 2.24. C'est ce qu'on appelle un problème de *performance robuste*. Un tel objectif se mettra sous la forme :  $\|\mathcal{F}_i(P, \Delta_i)(j\omega)\|_\infty < 1$ , pour tout  $\omega$  et pour toute  $\Delta_i \in \underline{\Delta}_i$ ; plus généralement, on pourra remplacer cette inégalité par  $\mu_{\underline{\Delta}_p}(\mathcal{F}_i(P, \Delta_i)(j\omega)) < 1$ , où  $\mu_{\underline{\Delta}_p}$  désigne la valeur singulière structurée correspondant à une autre structure  $\underline{\Delta}_p$ . Soit alors  $\underline{\Delta}$  la *structure augmentée* suivante :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_i \end{bmatrix} : \Delta_p \in \underline{\Delta}_p, \Delta_i \in \underline{\Delta}_i \right\}.$$

On a le résultat suivant (*Main Loop Theorem*) :

**Théorème 2.4.3.** *L'inégalité suivante  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) < 1$  équivaut à*

$$(i) \quad \mu_{\underline{\Delta}_i}(P_{22}) < 1 \quad \text{et} \quad (ii) \quad \sup_{\Delta_i \in \underline{\Delta}_i} \mu_{\underline{\Delta}_p}(\mathcal{F}_l(P, \Delta_i)) < 1$$

On en déduit alors, que la condition de robustesse en performance peut être exprimée à l'aide de la valeur singulière structurée grâce au théorème 2.4.2 qui fournit le résultat suivant :

**Théorème 2.4.4.** (Performance Robuste) *Le système de la figure 2.16 satisfait la condition de robustesse en performance,  $\|\mathcal{F}_l(P, \Delta_i)(j\omega)\|_\infty < 1$ , pour toute matrice  $\Delta_i \in \underline{\Delta}_i$  telle que  $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$  si et seulement si :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) < 1 \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.25)$$

avec  $\underline{\Delta} = \{\text{diag}\{\Delta_p, \Delta_i\} : \Delta_p \in \underline{\Delta}_p, \Delta_i \in \underline{\Delta}_i\}$ .

Autrement dit, le *Main Loop Theorem* a permis d'établir l'équivalence entre la condition de robustesse en performance du système de la figure 2.16, et la condition de robustesse en stabilité du même système bouclé par une matrice  $\Delta_p$  fictive vérifiant  $\|\Delta_p\|_\infty \leq 1$  (figure 2.17).

En résumé, les conditions suivantes seront utilisées lors de l'analyse de la robustesse et de la performance d'un système de commande mis sous la forme de la figure 2.18.a, où  $\Delta_i$  représente les incertitudes du modèle sous forme structurée ou non, telle que  $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$ , alors :

1) La performance nominale est assurée si :

$$\|P_{22}\|_\infty < 1$$

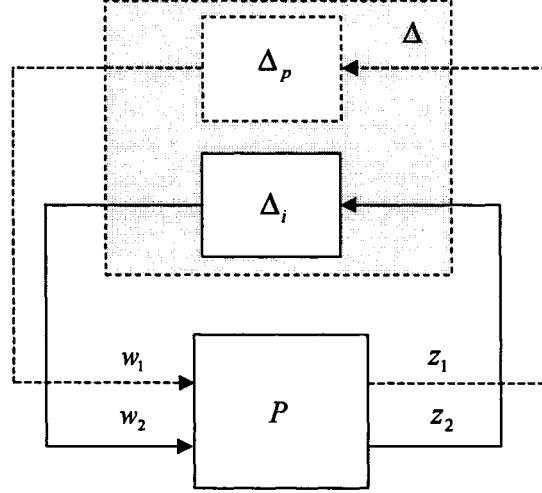


Figure 2.17 Problème de stabilité robuste fictif

2) La stabilité robuste est assurée si :

$$\forall \omega, \quad \mu_{\underline{\Delta}_i}(P_{11}(j\omega)) < 1, \quad \text{ou encore} \quad \|P_{11}\|_{\infty} < 1$$

3) La robustesse en performance est assurée si (figure 2.18.b) :

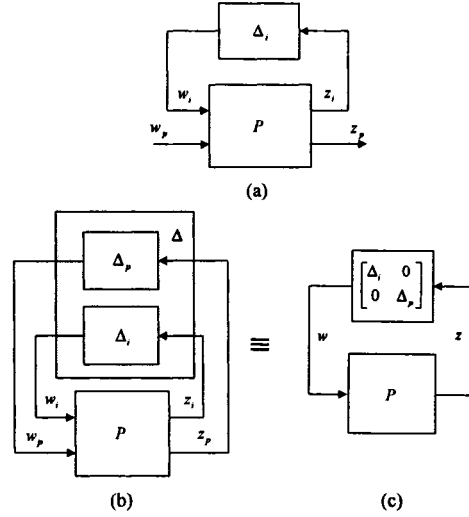
$$\|\mathcal{F}_l(P, \underline{\Delta}_i)\|_{\infty} < 1 \quad \text{ou} \quad \forall \omega, \quad \mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) < 1$$

avec  $\underline{\Delta} = \{\text{diag}\{\Delta_i, \Delta_p\} : \Delta_i \in \underline{\Delta}_i\}$

Cette dernière condition étant équivalente à une condition de robustesse en stabilité pour le système de la figure figure 2.18.c. Par ailleurs, si la troisième condition est satisfaite, les deux premières le sont aussi.

#### 2.4.5 $\mu$ -Synthèse

Le test de robustesse en performance précédent permet d'aboutir à une méthodologie de calcul de lois de commande connue sous le non de  $\mu$ -synthèse. Supposons à présent qu'on

Figure 2.18  $\mu$ -Analyse pour la robustesse et la performance

recherche à calculer un correcteur  $K$  permettant de satisfaire la condition de robustesse en performance: on obtient le schéma-bloc de la figure 2.19.a, en isolant le correcteur, qui boucle les mesures  $y$  du système sur les commandes  $u$  et en faisant apparaître une matrice  $G$  indépendante de  $K$  comportant trois types d'entrée et trois types de sortie. En transformant ce schéma sous les formes (2.19.b) et (2.19.c), on voit que la condition de robustesse en performance (2.25) s'écrit :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathcal{F}_l(G(j\omega), K(j\omega))) < 1 \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.26)$$

avec  $\mathcal{F}_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$ . La matrice  $G$  étant partitionnée conformément au schéma 2.19.c.

On appelle  $\mu$ -synthèse toute procédure permettant de calculer un correcteur  $K$  stabilisant le système et telle que la condition (2.26) soit satisfaite. Ce problème est souvent exprimé sous la forme du problème d'optimisation suivant :

**Problème de  $\mu$ -synthèse :**  $G(s)$  et  $\underline{\Delta}$  étant donnés, résoudre :

$$\inf_{K \text{ stabilisant}} \sup_{\omega} \mu_{\underline{\Delta}}(\mathcal{F}_l(G(j\omega), K(j\omega))) \quad (2.27)$$

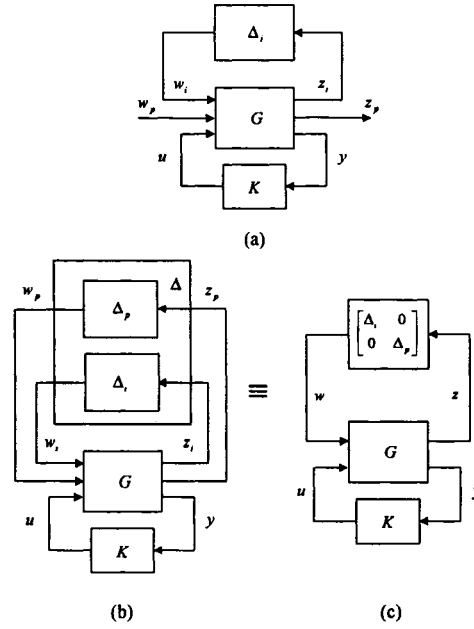


Figure 2.19  $\mu$ -synthèse pour la robustesse et la performance

Malheureusement, on ne connaît pas de méthode directe pour la résolution de ce problème. Il faut en fait avoir recours à une procédure appelée *D-K itération*, qui alterne le calcul des *scalings* optimaux  $\mathcal{D}$ , et la synthèse d'un correcteur  $K$  solution du problème d'optimisation  $\mathcal{H}_\infty$ -standard. Pour obtenir une solution approchée du problème (2.27), on peut utiliser la propriété de la borne supérieure (2.23). Le problème de  $\mu$ -synthèse peut donc être remplacé par le problème suivant :

Pour  $G$  et  $\underline{\Delta}$  donnés, résoudre :

$$\inf_{K \text{ stabilisant}} \sup_{\omega} \inf_{\mathcal{D} \in \underline{\mathcal{D}}} \|\mathcal{D}(j\omega) \mathcal{F}_l(G(j\omega), K(j\omega)) \mathcal{D}^{-1}(j\omega)\|_\infty \quad (2.28)$$

où l'ensemble  $\underline{\mathcal{D}}$  est choisi de façon cohérente avec la structure  $\underline{\Delta}$ .

L'algorithme utilisé est donc le suivant, (figure 2.20) :

1. Initialisation des matrices de *scalings*  $\mathcal{D}$ , (on prend en général  $\mathcal{D} = I$ ).
2. Calcul d'un correcteur résolvant le problème  $\mathcal{H}_\infty$ -standard,  $\|\mathcal{D} \mathcal{F}_l(G, K) \mathcal{D}^{-1}\|_\infty$ , du

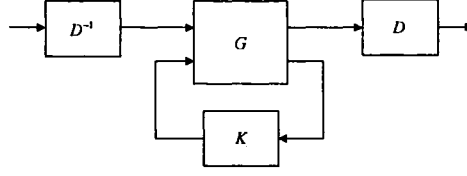


Figure 2.20 Problème  $\mathcal{H}_\infty$ -standard associé à la  $D$ - $K$  itération

système initial augmenté des *scalings*  $\mathcal{D}$ .

3. Pour  $K$  fixé, calcul à différentes fréquences  $\omega$ , les matrices de *scalings*  $\mathcal{D}_\omega$  minimisant la quantité  $\bar{\mu}$  donnée par :

$$\inf_{\mathcal{D}_\omega \in \underline{\mathcal{D}}} \|\mathcal{D}_\omega \mathcal{F}_l(G, K) \mathcal{D}_\omega^{-1}\|_\infty.$$

4. Interpolation des  $\mathcal{D}_\omega$  sur une plage de fréquence donnée, pour obtenir le nouveau *scaling*  $\mathcal{D}$
5. Répétition des étapes 2 à 4 jusqu'à ce que la quantité  $\bar{\mu}$  ne décroît plus.

On peut ainsi espérer approcher la solution du problème (2.27). Toutefois, la convergence de cet algorithme n'est pas garantie, mais la pratique montre que l'on converge dans la plupart des cas en quelques itérations, et ceci d'autant plus rapidement que le nombre de blocs de perturbation considéré est faible. Les différents outils nécessaires au calcul d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -standard ou le problème de  $\mu$ -synthèse sont disponibles dans le logiciel  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox* de *MATLAB* [6].

Il est important de remarquer qu'à chaque étape 2), on incorpore les matrices  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^{-1}$  à la matrice  $\mathcal{D} \mathcal{F}_l(G, K) \mathcal{D}^{-1}$  du problème standard. Or, le correcteur  $K$  solution de ce problème standard est du même ordre que la matrice  $\mathcal{D} \mathcal{F}_l(G, K) \mathcal{D}^{-1}$ . La  $D$ - $K$  itération augmente donc à chaque étape l'ordre du correcteur, qui peut rapidement atteindre des valeurs beaucoup plus élevées que l'ordre du processus à réguler. Il est donc impératif de les simplifier proprement car ils ne contribuent pas de façon significative à la politique

de commande nécessaire pour remplir les spécifications du cahier des charges, et peuvent poser des problèmes lors de la mise en œuvre de la loi de commande sur un ordinateur numérique.

La question maintenant est de savoir comment obtenir un correcteur d'ordre réduit, de sorte à assurer les mêmes performances que le correcteur complet, c'est-à-dire remplir correctement le cahier des charges, pour ce qui est de la stabilité, de la robustesse et de la performance. C'est ce que nous essayons de répondre à la section suivante.

## 2.5 Réduction de correcteurs

L'objectif de la réduction de modèle est : étant donnée une matrice de transfert  $G(s)$  d'ordre  $n$ , rechercher une matrice de transfert  $G_r(s)$ , d'ordre  $r$  avec  $r < n$ , qui soit *relativement proche* de  $G(s)$ . En utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$  définit alors une distance entre les deux transferts dans le cas où ils sont stables. Cela revient à assurer que leurs réponses fréquentielles (par exemple, leurs diagrammes de Bode) soient les plus proches possibles. Mathématiquement, le problème s'écrit donc :

Étant donnée  $G(s)$  stable :

$$\min_{G_r} \|G(s) - G_r(s)\|_\infty$$

où  $G_r(s)$  est une matrice de transfert stable, d'ordre  $r$ , figure 2.21.

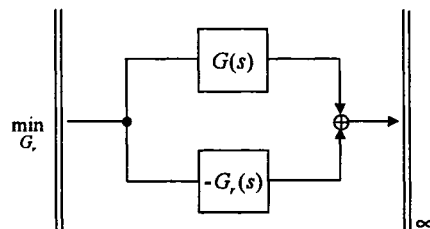


Figure 2.21 Réduction de modèle en utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$

Malheureusement, on ne sait pas résoudre efficacement ce problème. Par contre, on peut

construire une matrice de transfert  $G_r(s)$  d'ordre  $r$ , pour laquelle, même si ce n'est pas une solution optimale, il est possible de garantir que  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ ,  $\gamma$  étant calculé a priori à partir de  $G(s)$ .

Parmi les nombreuses méthodes proposées dans la littérature, nous nous intéressons aux méthodes de réduction associées à la représentation d'état des systèmes linéaires [40], et plus particulièrement à celles basées sur la notion de commandabilité et d'observabilité, mieux adaptées pour fournir des modèles d'ordre réduit pour la synthèse des lois de commande proposées dans la thèse.

Soit  $G(s)$  une matrice de transfert, d'ordre  $n$ . On appelle toute représentation d'état  $(A, B, C, D)$ , telle que :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

ou encore

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

une *réalisation* de  $G(s)$ .

**Définition 2.5.1.** *La réalisation  $(A, B, C, D)$  est dite minimale si la dimension de la matrice d'état  $A$ , est minimale.*

D'autre part, il existe un lien étroit entre la minimalité d'une représentation et les propriétés d'observabilité et de commandabilité.

**Théorème 2.5.1.** *Une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  de  $G(s)$  est minimale si et seulement si la paire  $(C, A)$  est observable et la paire  $(A, B)$  est commandable.*

On déduit alors que, pour obtenir une réalisation minimale à partir d'une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  stable, supposée non minimale, il suffit donc d'éliminer les états non



observables et les états non commandables.

Il est donc nécessaire, dans un premier temps, de définir des mesures d'observabilité et de commandabilité d'un système asymptotiquement stable (c'est-à-dire tel que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à partie réelle strictement négative).

### 2.5.1 Gramiens et réalisation équilibrée

Rappelons que le gramien de commandabilité  $P$  et le gramien d'observabilité  $Q$  d'un système asymptotiquement stable, de réalisation minimale  $(A, B, C, D)$ , sont les solutions uniques des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} AP + PA^T + BB^T &= 0 \\ A^T Q + QA + C^T C &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, les gramiens dépendent de la base dans laquelle ils sont exprimés. Par conséquent, pour ne pas privilégier ni la commandabilité, ni l'observabilité, on choisit de les représenter dans une base *équilibrée*.

**Définition 2.5.2.** *Une réalisation est dite équilibrée (en Anglais, balanced realization) si et seulement si :*

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \quad \text{avec} \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$$

Les  $\sigma_i$ , appelées *valeurs singulières de Hankel*, sont alors des mesures de la commandabilité et de l'observabilité. En général, on les classe dans l'ordre décroissant :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq \sigma_n$$

Une fois le calcul des gramiens  $P$  et  $Q$  effectué, le problème sera alors de déterminer une matrice de passage  $T$  telle que ces gramiens soient égaux et diagonaux dans cette nouvelle base. On rappelle que pour un changement de base tel que  $x = T\bar{x}$ , les gramiens

deviennent :

$$\begin{aligned}\bar{P} &= T^{-1}P(T^{-1})^T \\ \bar{Q} &= T^TQT\end{aligned}$$

On recherche donc la matrice  $T$  telle que :

$$\bar{P} = \bar{Q} = T^{-1}P(T^{-1})^T = T^TQT = \Sigma \quad (2.29)$$

D'autre part,  $P$  étant symétrique définie positive, on peut la décomposer en facteur de Cholesky  $P = R^TR$ , ( $R$  est triangulaire supérieure). On effectue ensuite la décomposition en valeurs singulières de  $RQR^T = U\Sigma^2U^T$ , où  $\Sigma^2$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de  $RQR^T$ , et les colonnes de  $U$  sont les vecteurs propres associés. On peut alors en déduire  $T$  vérifiant la relation (2.29) :

$$T = R^T U \Sigma^{-1/2}$$

### 2.5.2 Réduction de modèle par troncature équilibrée

Une fois le système mis sous forme équilibrée, on n'a plus qu'à tronquer les états correspondant aux valeurs singulières les plus faibles. Ces valeurs singulières étant la mesure de la commandabilité et de l'observabilité jointes, on élimine les états qui sont les moins commandables et observables. Il faut donc définir une distance entre le système à réduire  $G(s)$ , et le système réduit  $G_r(s)$ . On utilise dans ce cas, comme mesure de l'erreur  $\|G - G_r\|$ , la norme  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

avec  $\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega))$ .

Considérons maintenant le problème de trouver une approximation  $G_r(s)$  d'ordre  $r$ , stable

pour le système continu  $G(s)$  d'ordre  $n$ , stable, tel que  $r < n$ , et qui garantit une borne arbitraire pour la norme  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ .

**Théorème 2.5.2.** *Soit  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , telle que :*

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

*est une réalisation équilibrée, dont le gramien est donné par  $\Sigma = \text{diag}\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$*

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \\ \Sigma_2 &= \{\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n\} \end{aligned}$$

*et*

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \dots > \sigma_n$$

*où  $\sigma_i$ , est la  $i$ ème valeur singulière de Hankel. Alors, le modèle réduit,  $G_r(s)$ , d'ordre  $r$  de représentation d'état équilibrée :*

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

*obtenu par troncature est asymptotiquement stable. D'autre part, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de l'erreur est majorée par :*

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n)$$

*et cette borne est atteinte si  $r = n - 1$ , i.e.,*

$$\|G(s) - G_{n-1}(s)\|_\infty = 2\sigma_n$$

Cette méthode d'obtention d'un modèle réduit est appelée *troncature équilibrée*. Elle sera utilisée par la suite pour la réduction des correcteurs obtenus par les méthodes de synthèse proposées.

## CHAPITRE 3

### COMMANDE DE SYSTÈMES À PARAMÈTRES VARIANTS

Dans la plupart des problèmes de commande, l'objectif principal est de garantir la stabilité du système et un certain niveau de performance sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. Ces variations ou incertitudes qui affectent inévitablement le système nominal, sont essentiellement de trois types :

- incertitude non structurée qui correspond aux dynamiques mal connues ou négligées.
- incertitude structurée qui affectent la connaissance de certains paramètres physiques généralement bien localisés.
- variation paramétrique liée essentiellement aux changement de condition de fonctionnement.

Pour les systèmes linéaires invariants (*LTI*), l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  offre des outils efficaces de synthèse pour satisfaire ces objectifs de robustesse [15]. Par ailleurs, le traitement des incertitudes paramétriques reste un problème délicat et peut être approché d'une manière itérative par la  $\mu$ -synthèse [13, 14]. Mais qu'arrive-t-il, dans le cas de variations paramétriques non stationnaires ?

L'approche classique et communément utilisée dans l'industrie, repose sur deux étapes indépendantes: concevoir une série de correcteurs en différents points de fonctionnement du système, supposé localement stationnaire. Puis, élaborer une loi de commande globale par interpolation en ligne des commandes locales. Citons par exemple, le cas de l'avion dont la dynamique évolue considérablement en fonction des conditions de vol. Chaque condition de vol est caractérisée, par exemple, par la vitesse (nombre de Mach) et l'altitude, voir figure 3.1.

Malheureusement, cette technique n'offre aucune garantie a priori quant au comportement global du système (stabilité, performance). Elle soulève par ailleurs une difficulté pratique

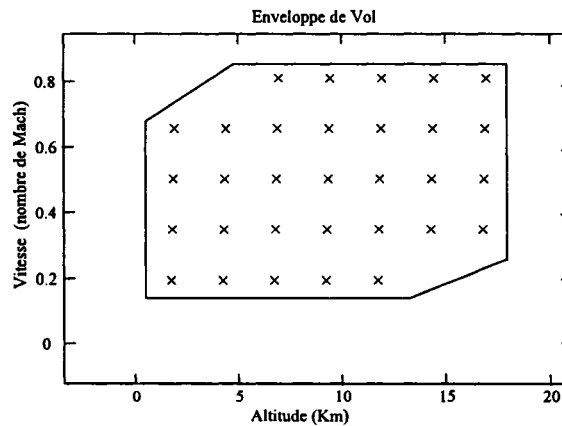


Figure 3.1 Enveloppe de vol pour un avion hypothétique. (×) représente une condition de vol utilisée dans le design

de conception relative au choix de la méthode d'interpolation en ligne, dans le cas où les correcteurs *locaux* sont d'ordre élevé. Une autre approche fondée sur la théorie de la commande adaptative, permet de prendre en compte l'évolution paramétrique du système, grâce à une estimation en ligne. Cette approche s'avère performante, mais peu robuste aux erreurs de modèles.

L'approche que nous proposons d'adopter dans cette partie de la thèse repose sur le concept de commande robuste des systèmes linéaires à paramètres variants, *LPV*.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y = C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\theta(t)$  caractérise l'évolution paramétrique du système en fonction du temps.

En ce sens, on pourra donc la rapprocher des méthodes classiques. Elle s'en démarque néanmoins par le fait essentiel que la loi de commande est recherchée sous la forme d'un *correcteur global*, ayant la même dépendance paramétrique que le système à commander. Autrement dit, les équations du correcteur, appelé *correcteur LPV*, s'écrivent sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_K &= A_K(\theta(t))x_K + B_K(\theta(t))y \\ u &= C_K(\theta(t))x_K + D_K(\theta(t))y \end{cases} \quad (3.2)$$

Cette nouvelle structure de commande se justifie par le fait que les valeurs paramétriques  $\theta(t)$ , peuvent être mesurées à chaque instant  $t$ . En raison de leur caractère évolutif, ce type de correcteur peut garantir stabilité et performance sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. De plus, contrairement aux méthodes adaptatives, cette approche évite le recours au processus d'identification en ligne. Il faut noter également que le temps de calcul lors de la mise en œuvre de telles structures de commande est faible.

Dans ce chapitre, nous décrivons la problématique générale de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes *LPV*, telle développée principalement par Packard [45] et Apkarian et Gahinet [4]. Dans la dernière section, nous proposons d'inclure les spécifications de robustesse au niveau même de la conception de la loi de commande. Ceci a pour but d'orienter notre propos vers un aspect central de la thèse : **La synthèse de correcteurs *LFT* robustes pour les systèmes *LPV* incertains**. L'algorithme que nous proposons, combine à la fois la synthèse *LPV* avec les techniques de  $\mu$ -analyse. Il s'agit d'une formulation proche de la *D-K itération*.

### 3.1 Classes des systèmes linéaires

Rappelons qu'un système linéaire à paramètres variants dans le temps (système *LTV*), d'ordre  $n$ , avec  $m$  entrées et  $p$  sorties, peut être décrit, dans le domaine temporel, par une représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (3.3)$$

où les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  et  $D(t)$  sont des fonctions généralement continues et bornées du temps, dont la dépendance est connue a priori.

Il devient maintenant impossible de déterminer une expression générale de la matrice de transition du système. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'elle vérifie les relations :

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau)$$

et

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau)A(\tau)$$

Aussi, l'utilisation d'un critère de stabilité qui repose sur l'utilisation de la matrice de transition devient très délicate, dans la mesure où il faut déterminer une borne sur  $\Phi$  dont on ne connaît pas de formulation explicite.

De nombreux travaux ont toutefois été entrepris, en s'appuyant sur l'hypothèse fondamentale d'évolution **lente** du système. En effet, une solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  correspondant a été proposée dans [46]. Cependant, sa mise en œuvre est très lourde et peu pratique car elle nécessite l'intégration des équations différentielles de Ricatti en temps réel. Par opposition, à ces méthodes, on peut aisément appliquer des techniques de types Lyapunov à des systèmes de types *LTV* particuliers (systèmes *LPV*), où la dépendance temporelle de la représentation d'état apparaît à travers la dépendance paramétrique sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y &= C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\theta(t)$  est un vecteur de paramètres variants et  $A(\theta(t))$ ,  $B(\theta(t))$ ,  $C(\theta(t))$  et  $D(\theta(t))$  dépendent de  $\theta(t)$  sous une forme définie a priori. Cette classe de systèmes n'est pas complètement générale, mais recouvre de nombreux exemples pratiques tels que les avions, les robots, etc. Il est important de noter que cette description n'exige aucune information particulière sur  $\theta(t)$  excepté son domaine de variation. Le schéma de la figure 3.2 montre les liens entre les systèmes *LTI*, *LTV* et *LPV*, où l'on voit qu'un système *LTI* peut s'interpréter comme un système *LPV* dont on a figé le paramètre  $\theta_0$ , ou encore comme un système *LTV* dont on a figé le temps  $t_0$ . Par ailleurs, un système *LTV* peut être vu

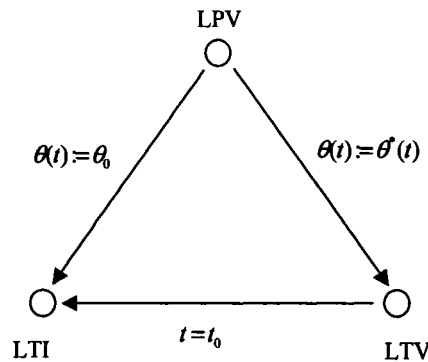


Figure 3.2 Classes de systèmes linéaires

comme un système *LPV* dont on aurait prédéfini la trajectoire  $\theta^*(t)$ .

Ainsi, par opposition à un système *LTV*, un système *LPV* pourra afficher autant de comportements différents qu'il y a de trajectoires paramétriques admissibles. Compte tenu de cette définition, on entend par trajectoires admissibles, toutes celles dont les points appartiennent à chaque instant à un domaine  $\mathcal{P}$  de l'espace-temps. La caractérisation que nous avons retenue autorise en effet certaines évolutions paramétriques présentant par exemple des discontinuités de vitesse voire même de position. Néanmoins, sur le plan mathématique, définir un ensemble de points plutôt qu'un ensemble de trajectoires, rendra le développement des méthodes d'analyse et de synthèse beaucoup plus facile.

D'autre part, et afin de rendre les formules plus lisibles, il nous arrivera fréquemment d'omettre la dépendance temporelle. Ainsi, le système 3.4 devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $\theta(t)$  est donné par :

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K) \in \mathbb{R}^K \quad (3.6)$$



## 3.2 Synthèse de lois de commande à paramètres variants

### 3.2.1 Structure de commande des systèmes *LPV* de type *LFT*

L'ensemble des systèmes non stationnaires est excessivement général pour servir de cadre à une étude dont on puisse espérer des résultats numériques exploitables. Ainsi, pour un système physique donné, il devient nécessaire de le représenter par un modèle qui permettra de simplifier la mise en œuvre des méthodes d'analyse et de synthèse. Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons à la représentation de la classe des systèmes *LPV*, dont la dépendance vis-à-vis du paramètre variant  $\theta(t)$  est supposée linéaire fractionnelle, c'est à dire sous la forme d'une transformation linéaire fractionnelle (*LFT*).

Pour cela, rappelons qu'un système  $P(s)$ , associant un signal exogène  $w$  et un signal de commande  $u$  à un signal à contrôler  $z$  et un signal de mesures  $y$ , peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  classique consiste à déterminer un contrôleur *LTI*,  $K(s)$ , qui assure la stabilité interne du système et tel que  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$  soit inférieure à un certain niveau de performance  $\gamma$ . La version *LPV* de ce problème s'exprime de manière analogue pour un système qui est maintenant de type *LPV* et non plus *LTI*. En supposant la dépendance paramétrique rationnelle, le système *LPV* initialement quelconque, peut être décrit par une *LFT* supérieure comme sur la figure 3.3. Les équations du système bouclé associé sont alors :

$$\begin{bmatrix} z_\theta \\ z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{\theta\theta}(s) & P_{\theta 1}(s) & P_{\theta 2}(s) \\ P_{1\theta}(s) & P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{2\theta}(s) & P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} w_\theta \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

et

$$w_\theta = \Theta z_\theta \quad (3.9)$$

où  $P(s)$  est un système *LTI*, et  $w_\theta$  et  $z_\theta$  sont les sorties et les entrées du bloc paramétrique  $\Theta$ , tel que :

$$\Theta = \text{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \dots, \theta_K I_{r_K}) \quad (3.10)$$

où  $r_i > 1$ , chaque fois que le paramètre  $\theta_i$  est répété, [14]. Soit  $\Theta$  l'ensemble des opérateurs  $\Theta$  de structure (3.10), tel que :

$$\Theta = \{\text{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \dots, \theta_K I_{r_K}) : \theta_i \in \mathbb{R}\} \quad (3.11)$$

Cet ensemble définit ainsi la structure de  $\Theta$  et son action sur la dynamique du système. Dans ce qui suit,  $\Theta$  représente un espace vectoriel complexe dont les dimensions sont déterminées par celle de  $\Theta$ .

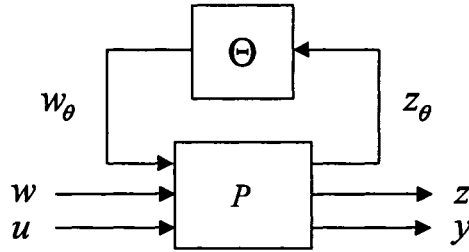


Figure 3.3 Système *LPV* de type *LFT*

Par conséquent, à chaque instant  $t$ , la fonction de transfert du système tangent est donnée par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u(P(s), \Theta) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

avec

$$\mathcal{F}_u(P(s), \Theta) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{1\theta} \\ P_{2\theta} \end{pmatrix} \Theta (I - P_{\theta\theta} \Theta)^{-1} (P_{\theta 1} \ P_{\theta 2}) \quad (3.13)$$

On s'arrange généralement pour que le domaine  $\mathcal{P}$  d'évolution des paramètres  $\theta_i(t)$  soit tel que :

$$|\theta_i| \leq 1, \quad \forall i$$

de sorte que le domaine de définition de la transformation obtenue  $\mathcal{F}_u(P, \Theta)$ , coïncide avec l'ensemble  $\mathbf{B}_\Theta$ , défini par :

$$\mathbf{B}_\Theta := \{\Theta \in \Theta : \|\Theta\|_\infty \leq 1\} \quad (3.14)$$

Là encore, plutôt que de rechercher un correcteur *LTI*, robuste aux variations paramétriques, nous proposons un correcteur dynamique ayant la même dépendance paramétrique que le système à commander  $P$ . De tels correcteurs sont *LPV* et peuvent être représentés par :

$$u = \mathcal{F}_l(K(s), \Theta)y \quad (3.15)$$

où la matrice de transfert

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{1\theta}(s) \\ K_{\theta 1}(s) & K_{\theta\theta}(s) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

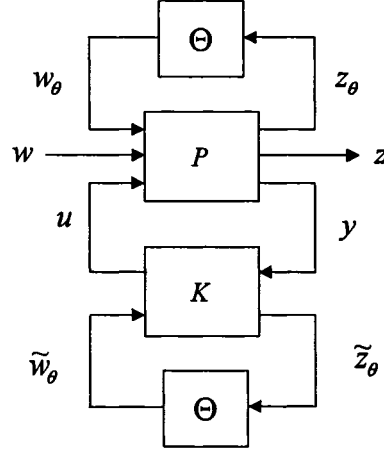
décrit la dépendance du correcteur vis-à-vis des mesures du paramètre variant  $\theta(t)$ . Avec ces notations, la fonction de transfert des perturbations  $w$  vers la sortie à contrôler  $z$  est donnée par :

$$T_{zw}(P, K, \Theta) = \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(P(s), \Theta), \mathcal{F}_l(K(s), \Theta)) \quad (3.17)$$

### 3.2.2 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes *LPV*

A la lumière de ce qui précède, le problème de synthèse consiste alors à déterminer une structure de commande telle que le correcteur *LPV*,  $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta)$ , satisfait :

- le système en boucle fermée, figure 3.4, est stable de manière interne, pour toute

Figure 3.4 Structure des correcteurs *LPV*

trajectoire paramétrique admissible, telle que :

$$\gamma^2 \Theta^T \Theta \leq 1 \quad (3.18)$$

- le transfert en boucle fermée,  $T_{zw}(P, K, \Theta)$ , vérifie :

$$\max_{\|\Theta\|_\infty \leq 1/\gamma} \|T_{zw}(P, K, \Theta)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.19)$$

On appelle *correcteur LPV sous-optimal*, tout correcteur vérifiant les deux conditions précédentes. Notons que la condition (3.19) peut être interprétée comme une condition de robustesse en performance pour toutes les trajectoires possibles du paramètre  $\Theta \in \Theta$ .

Par ailleurs, le schéma de la figure 3.4 rappelle la formulation standard des problèmes de synthèse de lois de commande robuste développées au chapitre 2. Il en diffère néanmoins par la présence d'une boucle supplémentaire. Cette boucle est celle du correcteur qui dépend ici des paramètres. Pour se ramener à la formulation standard, il suffit alors de regrouper les blocs paramétriques du système et du correcteur pour former un seul bloc répété. Cette opération est réalisée simplement, en augmentant le système  $P(s)$  de la

manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_\theta \\ z_\theta \\ z \\ y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & P(s) & 0 \\ I_r & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_a(s)} \begin{bmatrix} \tilde{w}_\theta \\ w_\theta \\ w \\ u \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ainsi, la fonction de transfert des perturbations  $w$  vers la sortie à contrôler  $z$ , s'écrit:

$$T_{zw}(P, K, \Theta) = \mathcal{F}_u \left( \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)), \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \right) \quad (3.21)$$

Il faut souligner à ce niveau que la dépendance paramétrique du système et du correcteur a été remplacée par une seule dépendance paramétrique du système augmenté  $P_a(s)$ . Cette formulation a le mérite de convertir le problème de synthèse *LPV* en un problème plus classique de robustesse en performance de type *LTI* où la structure paramétrique est répétée  $\begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$ , (voir figure 3.5). Des conditions suffisantes de résolution du problème original peuvent donc être obtenues par la théorie du petit gain, [14].

Comme dans le cas des systèmes *LTI*, nous avons besoin de la notion de transformation de similarité ou de *scaling*. On définit un ensemble de matrices de *scalings*, associé à la structure  $\Theta$  définie en 3.11, tel que :

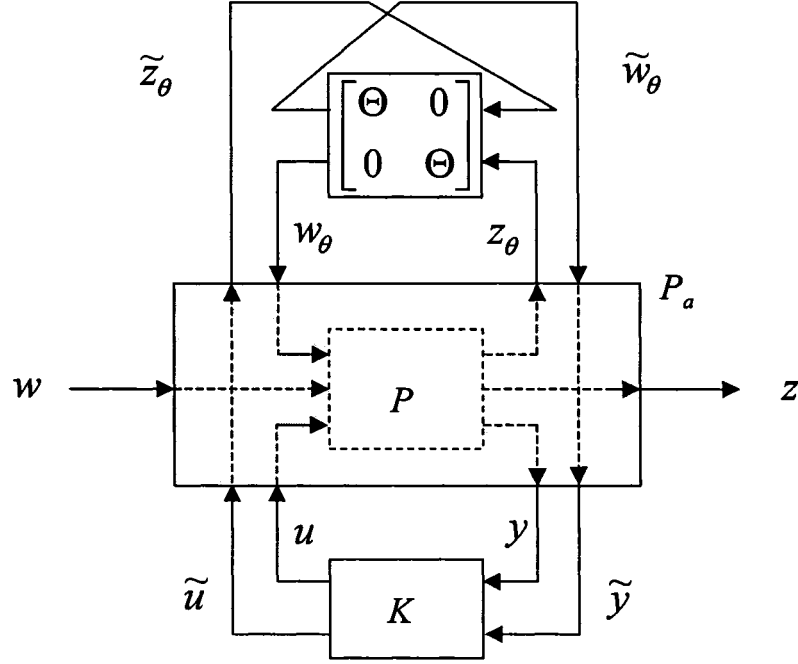
$$L_\Theta = \{L > 0 : L\Theta = \Theta L, \forall \Theta \in \Theta\} \subset \mathbb{R}^{r \times r} \quad \text{avec} \quad r = \sum_{i=1}^K r_i \quad (3.22)$$

L'ensemble  $L_\Theta$  vérifie les propriétés suivantes :

**P1)**  $I_r \in L_\Theta$

**P2)**  $L \in L_\Theta \Rightarrow L^T \in L_\Theta$

**P3)**  $L \in L_\Theta \Rightarrow L^{-1} \in L_\Theta$

Figure 3.5 Structure équivalente de commande *LPV*

**P4)**  $L_1 \in L_{\Theta}, L_2 \in L_{\Theta} \Rightarrow L_1 L_2 \Theta = \Theta L_1 L_2, \forall \Theta \in \Theta$

**P5)**  $L_{\Theta}$  est un sous ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{r \times r}$

Il s'ensuit que l'ensemble des matrices de *scalings*, commutant avec la structure répétée  $\Theta \oplus \Theta$ , est défini par :

$$L_{\Theta \oplus \Theta} \equiv \left\{ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0 : L_1, L_3 \in L_{\Theta} \text{ et } L_2 \Theta = \Theta L_2, \forall \Theta \in \Theta \right\} \quad (3.23)$$

On peut maintenant utiliser le théorème du petit gain, pour obtenir une condition suffisante de robustesse en performance en présence d'incertitudes  $\Theta \oplus \Theta$ . D'où le résultat suivant qu'on peut énoncer sous forme de théorème, [4].

**Théorème 3.2.1.** *Considérons une structure  $\Theta$  et l'ensemble des matrices de *scalings* as-*

socié  $L \in L_{\Theta \oplus \Theta}$  défini en 3.23. S'il existe une matrice de *scalings*  $L \in L_{\Theta \oplus \Theta}$  et une structure de commande  $K(s)$  telles que le système nominal en boucle fermée  $\mathcal{F}_l(P_a(s), K(s))$  soit stable de manière interne et

$$\left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (3.24)$$

alors  $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta)$  est un correcteur LPV sous-optimal.

On reconnaît ici une application directe du théorème du petit gain (cf. chapitre 2), avec utilisation de *scalings* constants, [14].

### 3.3 Synthèse $\mathcal{H}_{\infty}$ et caractérisation LMI

Dans cette section, nous présentons une caractérisation LMI de la solution du problème  $\mathcal{H}_{\infty}$  pour les systèmes LPV. Cette approche est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires [10]. Elle est donc solution d'un problème de faisabilité que l'on peut résoudre par des techniques d'optimisation convexes [11]. Par ailleurs, souhaitant ne pas alourdir trop notre exposé, les résultats sont énoncés sans démonstration. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références [4] et [22].

Pour décrire une telle solution, on a besoin d'un certain nombre de notations en espace d'état. Introduisons tout d'abord une réalisation minimale du système LPV sous la forme:

$$P(s) = \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} & D_{\theta 2} \\ D_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ D_{2\theta} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\theta} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_{\theta} & B_1 & B_2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

où le partitionnement est conforme à (3.8). Les dimensions du problème sont données par:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, D_{\theta\theta} \in \mathbb{R}^{r \times r}, D_{11} \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}, D_{22} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2} \quad (3.26)$$

On supposera dans la suite que :

(A1)  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable

(A2)  $D_{22} = 0$

La première hypothèse est nécessaire pour que la stabilisation du système soit possible en retour de sortie. La deuxième n'induit pas de perte de généralité mais permet de simplifier considérablement les calculs. De plus, on suppose que le système vérifie l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

(A3)  $D_{2\theta} = 0$  ou  $D_{\theta 2} = 0$

Cette hypothèse est suffisante (mais pas nécessaire) pour assurer que le correcteur  $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta)$ , soit causal et bien défini [4]. On notera d'ailleurs que l'une ou l'autre de ces propriétés est souvent vérifiée dans la pratique. Il s'ensuit que la représentation d'état du système augmenté  $P_a(s)$  défini en (3.20), s'écrit :

$$P_a(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \\ 0 & D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} & D_{\theta 2} & 0 \\ 0 & D_{1\theta} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{2\theta} & D_{21} & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_\theta \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & B_\theta & B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

### 3.3.1 Caractérisation LMI pour les systèmes LTI

Nous commençons d'abord par présenter la formulation standard du problème  $\mathcal{H}_\infty$  avec utilisation de *scalings* constants, pour les systèmes LTI, sous forme de problème d'optimisation LMI. Pour cela, on dispose du résultat suivant, donné par le Lemme Borné Réel, (*Bounded Real Lemma*) :



**Lemme 3.3.1.** (Lemme Borné Réel) *Considérons une structure  $\Theta$  et l'ensemble de **scalings** associé  $L_\Theta$  défini en 3.22. Considérons aussi un système LTI dont la réalisation,  $T(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ , est une matrice de transfert carrée. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *A est stable et il existe une matrice de **scalings**  $L \in L_\Theta$ , telle que :*

$$\|L^{1/2}(D + C(sI - A)^{-1}B)L^{-1/2}\|_\infty < \gamma \quad (3.28)$$

ii) *il existe une matrice symétrique  $X > 0$ , et une matrice de **scalings**  $L \in L_\Theta$ , solutions de l'inégalité matricielle suivante :*

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma L & D^T \\ C & D & -\gamma L \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

Considérons maintenant un système LTI  $P(s)$  donné par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard, avec utilisation de **scalings** constants, consiste alors :

*Etant donnée une structure  $\Theta$  et un ensemble de **scalings** associé  $L_\Theta$  défini en 3.22. Pour un  $\gamma > 0$  donné, existe-il une loi de commande  $K(s)$ , et une matrice de **scalings**  $L \in L_\Theta$ , telles que le système en boucle fermée soit stable de manière interne et :*

$$\|L^{1/2}(\mathcal{F}_l(P(s), K(s))L^{-1/2}\|_\infty < \gamma \quad (3.31)$$

Ce problème admet deux résolutions possibles. La première approche repose sur la résolution de deux équations de Riccati (cf. chapitre 2). Une deuxième solution à ce problème

repose sur l'utilisation du Lemme Borné Réel et les techniques *LMI*. D'où le théorème suivant qui donne la solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  avec retour de sortie, [4].

**Théorème 3.3.1.** *Considérons le système linéaire  $P(s)$ , d'ordre  $n$ , défini par :*

$$P(s) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

*et supposons que les hypothèses (A1) et (A2) soient vérifiées. Le problème 3.31 admet une solution si et seulement si il existe deux paires de matrices symétriques  $(R, S) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $(L, J) \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}$  telles que :*

$$\mathcal{N}_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma J & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma L \end{bmatrix} \mathcal{N}_R < 0 \quad (3.33)$$

$$\mathcal{N}_S^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma L & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma J \end{bmatrix} \mathcal{N}_S < 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.35)$$

$$L \in L_{\Theta}, \quad J \in L_{\Theta}, \quad LJ = 1 \quad (3.36)$$

où  $\mathcal{N}_R$  et  $\mathcal{N}_S$  sont respectivement les bases des noyaux  $(B_2^T, D_{12}^T, 0)$  et  $(C_2, D_{21}, 0)$ .

De plus, il existe un *correcteur sous-optimal*, d'ordre  $k$ , tel que :

$$K(s) = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1} B_K \quad (3.37)$$

si et seulement si les inégalités matricielles (3.33)-(3.36) sont satisfaites pour un certain

quadruplet  $(R, S, L, J)$  et où la paire  $(R, S)$  vérifie aussi :

$$\text{rang}(I - RS) \leq k \quad (3.38)$$

On est donc en présence d'un problème de faisabilité *LMI* dans lequel le correcteur n'est pas recherché explicitement. D'autre part, les inégalités (3.33)-(3.36) sont linéaires par rapport aux variables  $(R, S, L, J)$  et les contraintes  $L \in L_{\Theta}$  et  $J \in L_{\Theta}$  sont convexes. Toutefois, pour  $k \geq n$ , où (3.38) est satisfaite, la contrainte  $LJ = I$ , est fortement non convexe. Ce qui rend la résolution du problème  $\mathcal{H}_{\infty}$  avec utilisation de *scalings* un exercice difficile.

Par ailleurs, contrairement à l'approche basée sur la solution des équations de Riccati, il n'est pas nécessaire que les hypothèses liées à la perte de rang et la présence de zéros sur l'axe imaginaire soient vérifiées.

### 3.3.2 Caractérisation *LMI* pour les systèmes *LPV*

D'une manière similaire, on obtient une caractérisation *LMI* du problème de synthèse  $\mathcal{H}_{\infty}$  des systèmes *LPV* de type *LFT*.

**Théorème 3.3.2.** *Considérons un système LPV de réalisation minimale (3.25), une structure paramétrique  $\Theta$  et l'ensemble de **scalings** associé  $L \in L_{\Theta \oplus \Theta}$  défini en 3.23. Soient  $\mathcal{N}_R$  et  $\mathcal{N}_S$  respectivement des bases des noyaux  $(B_2^T, D_{\theta 2}^T, D_{12}^T, 0)$  et  $(C_2, D_{2\theta}, D_{21}, 0)$ . Finalement, supposons que les hypothèses (A1) et (A2) soient vérifiées. Le problème 3.24 admet une solution, s'il existe deux paires de matrices symétriques  $(R, S) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $(L_3, J_3) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telles que :*

$$\mathcal{N}_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & R\hat{C}_1^T & \hat{B}_1\hat{J}_3 \\ \hat{C}_1R & -\gamma\hat{J}_3 & \hat{D}_{11}\hat{J}_3 \\ \hat{J}_3\hat{B}_1^T & \hat{J}_3\hat{D}_{11}^T & -\gamma\hat{J}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_R < 0 \quad (3.39)$$

$$\mathcal{N}_S^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & S\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T \hat{L}_3 \\ \hat{B}_1^T S & -\gamma \hat{L}_3 & \hat{D}_{11}^T \hat{L}_3 \\ \hat{L}_3 \hat{C}_1 & \hat{L}_3 \hat{D}_{11} & -\gamma \hat{L}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_S < 0 \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.41)$$

$$L_3 \in L_{\Theta}, \quad J_3 \in L_{\Theta}, \quad \begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.42)$$

avec les notations

$$\hat{B}_1 = (B_{\theta} \quad B_1), \quad \hat{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{\theta} \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_{11} = \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} \\ D_{1\theta} & D_{11} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\hat{J}_3 = \begin{pmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_3 = \begin{pmatrix} L_3 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

De plus, pour  $\gamma > 0$  donné, il existe un *correcteur LFT sous-optimal*, d'ordre  $k$ , défini par la représentation d'état :

$$K(s) = \begin{pmatrix} D_{K11} & D_{K1\theta} \\ D_{K\theta 1} & D_{K\theta\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{K1} \\ C_{K\theta} \end{pmatrix} (sI - A_K)^{-1} (B_{K1} \quad B_{K\theta}) \quad (3.45)$$

si les inégalités matricielles (3.39)-(3.42) sont satisfaites pour un certain quadruplet  $(R, S, L_3, J_3)$  et où la paire  $(R, S)$  vérifie aussi :

$$\text{rang}(I - RS) \leq k \quad (3.46)$$

On obtient ainsi une caractérisation *LMI* par rapport aux variables  $(R, S, L_3, J_3)$ . En

particulier, la contrainte  $LJ = I$ , est remplacée par :

$$\begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

qui garantit également la positivité des matrices  $L_3$  et  $J_3$ . Il en résulte ainsi une caractérisation entièrement convexe du correcteur recherché. Il faut bien noter que les inégalités matricielles (3.39)-(3.42) du théorème 3.3.2, constituent simplement une condition suffisante de performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système  $LPV$  en boucle fermée, (figure 3.4). Dans le cas des systèmes  $LTI$ , les conditions obtenues étaient également nécessaires.

Par ailleurs, le problème de faisabilité  $LMI$  (théorème 3.3.2), peut être réécrit d'une façon équivalente, comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes  $LMI$ ; où l'on désire tester, dans ce cas, l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit niveau de performance  $\gamma$ . En utilisant la valeur propre généralisée, (*Generalized EigenValue Problem, GEVP*), le problème ci-dessus (théorème 3.3.2) s'écrit alors :

$$\text{minimiser } \gamma \tag{3.47}$$

sous contraintes

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.48}$$

$$L_3 \in L_\Theta, \quad J_3 \in L_\Theta, \quad \begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.49}$$

$$\mathcal{N}_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & R\hat{C}_1^T & \hat{B}_1\hat{J}_3 \\ \hat{C}_1R & -\gamma\hat{J}_3 & \hat{D}_{11}\hat{J}_3 \\ \hat{J}_3\hat{B}_1^T & \hat{J}_3\hat{D}_{11}^T & -\gamma\hat{J}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_R < 0 \tag{3.50}$$

$$\mathcal{N}_S^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & S\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T \hat{L}_3 \\ \hat{B}_1^T S & -\gamma \hat{L}_3 & \hat{D}_{11}^T \hat{L}_3 \\ \hat{L}_3 \hat{C}_1 & \hat{L}_3 \hat{D}_{11} & -\gamma \hat{L}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_S < 0 \quad (3.51)$$

On pourra résoudre ce problème à l'aide des outils de “*LMI Control Toolbox*”, [23]. Une fois les matrices  $R$ ,  $S$ ,  $L_3$  et  $J_3$  trouvées, il reste seulement à déterminer un correcteur stabilisant tel que la condition (3.24) soit satisfaite. Pour cela, on a besoin de calculer la matrice de *scalings*  $L$  qui prend en compte la contrainte :

$$L\Theta = \Theta L, \quad \forall \Theta(t) \in \Theta$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & J_3 \end{bmatrix}$$

On procède alors à la décomposition de  $(I - L_3 J_3)$  en valeurs singulières telles que :

$$I - L_3 J_3 = (U \Sigma^{\frac{1}{2}})(V \Sigma^{\frac{1}{2}})^T = M N^T$$

d'où l'on déduit les matrices  $M$  et  $N$ , puis finalement  $L$  comme l'unique solution du système linéaire [22] :

$$L \begin{bmatrix} 0 & N^T \\ I & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ L_3 & I \end{bmatrix}$$

On pourra vérifier en outre que cette solution appartient bien à l'ensemble  $L_{\Theta \oplus \Theta}$ .

Connaissant maintenant  $L$ , la synthèse d'un correcteur *LPV* de type *LFT* est obtenue, par résolution du problème d'optimisation convexe :

$$\min \gamma \quad / \quad \left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (3.52)$$

Comme on l'a mentionné ci-dessus, un tel problème admet deux résolutions possibles. La

première méthode est basée sur la résolution des équations de Riccati, [15]. Alors que la seconde repose sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires, [22]. Dans l'application du chapitre 5, nous avons opté pour la première méthode dont la solution est la plus simple et la plus fiable numériquement.

### 3.4 Extension au cas des systèmes *LPV* incertains

Jusqu'à présent, dans notre description des systèmes *LPV*, nous avons considéré le vecteur de paramètres  $\theta(t)$ , comme étant la seule variation liée au modèle et dont l'évolution peut être mesurée en temps réel. Nous étendrons ici notre étude au cas des systèmes *LPV* incertains, et ceci afin de prendre en compte, non seulement les variations paramétriques du modèle mais aussi diverses formes d'incertitudes. Une telle approche présente un réel intérêt sur le plan pratique, en particulier l'exemple de l'avion où les incertitudes qui affectent le modèle interviennent généralement à plusieurs niveaux: dynamiques mal connues ou négligées des actionneurs et des capteurs, etc. (cf. section 5.3.1 ). D'où l'utilisation de la valeur singulière structurée,  $\mu$ , (cf. chapitre 2).

Le schéma de la figure (3.6) présente la structure générale pour la synthèse des lois de commande robuste des systèmes *LPV* incertains. Le système à commander est représenté, dans ce cas, par une *LFT* supérieure :

$$\mathcal{F}_u \left( P, \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Delta_u \end{pmatrix} \right) \quad (3.53)$$

avec, comme précédemment,

$$\Theta(t) \in \Theta \quad \text{et} \quad \|\Theta\|_\infty \leq 1 \quad (3.54)$$

et, pour le bloc d'incertitudes  $\Delta_u \in \mathbf{\Delta}_u$ , tel que :

$$\mathbf{\Delta}_u = \{ \text{diag}(\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_S I_{q_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F), \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \} \quad (3.55)$$

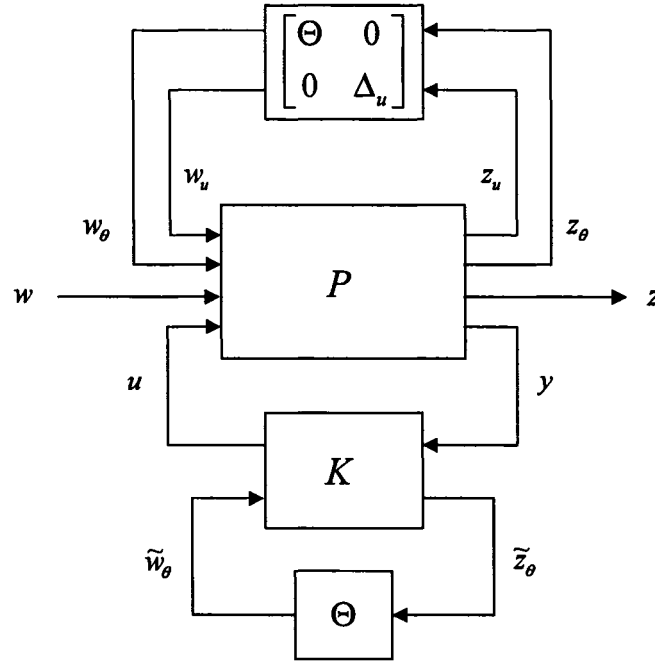


Figure 3.6 Structure de commande des systèmes *LPV* incertains

Les réels  $\delta_i$  représentent des incertitudes paramétriques invariantes tandis que les blocs complexes  $\Delta_j$  permettent de modéliser les dynamiques hautes fréquences négligées. On supposera par la suite que :

$$\begin{cases} |\delta_i| \leq 1, & \text{pour } i = 1, \dots, S \\ \|\Delta_j(s)\|_\infty \leq 1, & \text{pour } j = 1, \dots, F \end{cases} \quad (3.56)$$

En suivant une démarche similaire à celle présentée dans la section 3.2.2, le diagramme de la figure (3.6) peut être transformé en une forme mieux adaptée à la description des solutions du problème. La figure (3.7) illustre le schéma équivalent de la structure de commande des systèmes *LPV* incertains; où la dépendance paramétrique répétée du système



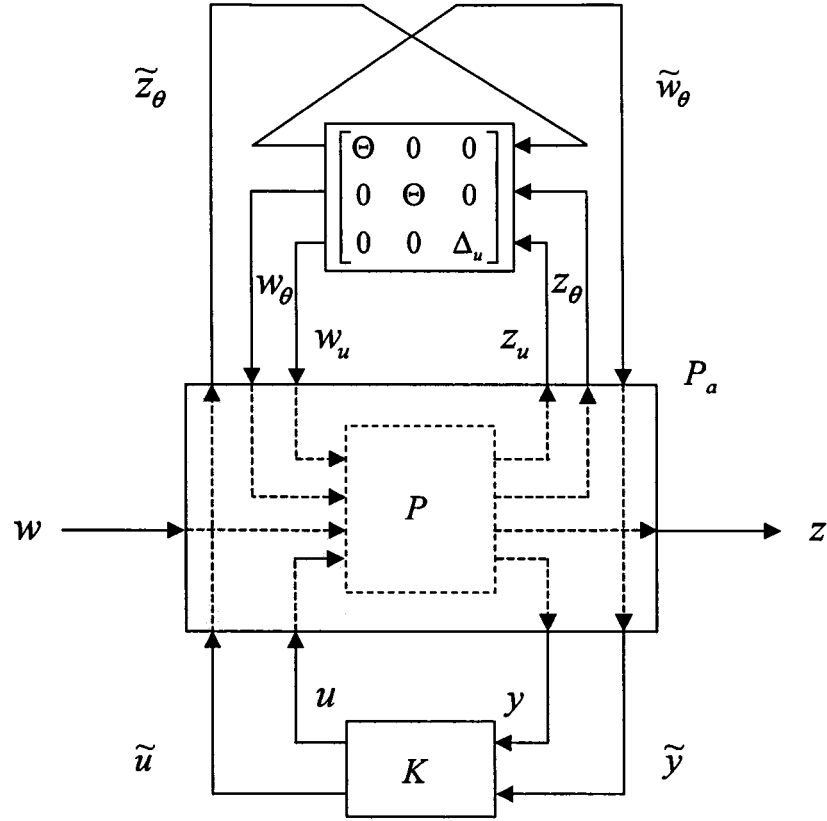


Figure 3.7 Structure équivalente de commande des systèmes *LPV* incertains

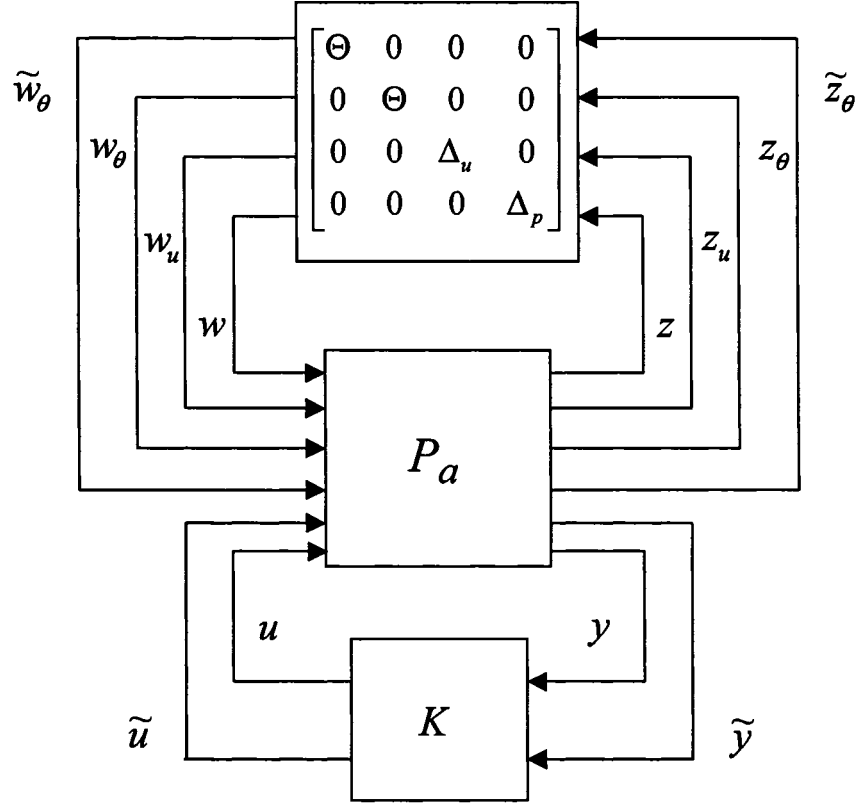
et du correcteur est augmentée par le bloc d'incertitudes stationnaires  $\Delta_u$ , telle que :

$$\begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_u \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

dont l'ensemble de matrices de *scalings* associé est donné par :

$$\left\{ \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L_u \end{bmatrix} > 0 : L \in L_{\Theta \oplus \Theta}, L_u \in L_{\Delta_u} \right\} \quad (3.58)$$

D'autre part, si le bloc  $\Delta_u$  est typiquement dédié à la représentation des incertitudes de

Figure 3.8 Structure de commande  $LPV/\mu$ 

modèles, on associera également un autre bloc aux signaux de performances, noté  $\Delta_p$ . On interprétera ainsi le problème de synthèse, comme celui de la recherche d'une loi de commande  $LPV$  assurant la **robustesse en performance**. Ceci est illustré par le schéma de la figure 3.8. L'ensemble de *scalings* associé est alors :

$$\left\{ \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{pmatrix} \end{bmatrix} > 0 : L \in L_{\Theta \oplus \Theta}, \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{pmatrix} \in L_{\Delta_u \oplus \Delta_p}, \right\} \quad (3.59)$$

Une analyse basée sur la théorie du petit gain, [14], fournit la condition suffisante de

robustesse en performance :

$$\left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{pmatrix} \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{pmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

pour toute perturbation,  $\Delta = \text{diag}(\Delta_u, \Delta_p)$ , dont la norme  $\mathcal{H}_{\infty}$  est bornée par  $1/\gamma$ .

Bien sûr, la condition ci-dessus n'est pas convexe par rapport à l'ensemble des variables  $K$ ,  $L$  et  $\text{diag}(L_u, L_p)$ . Néanmoins, on pourra déterminer  $K$  et  $L$  en fixant  $\text{diag}(L_u, L_p)$ . Puis, en fixant  $K$  et  $L$ , on résout un problème d'optimisation de performance par rapport à  $\text{diag}(L_u, L_p)$ .

On en déduit donc une méthode itérative de calcul des correcteurs  $LPV$  robustes, fondée sur l'alternance des phases de synthèse et d'analyse de la robustesse. Il s'agit en fait d'une approche inspirée de la *D-K itération*, [6].

#### Algorithme 3.4.1. (Synthèse $LPV$ robuste)

##### Etape 1) Synthèse d'un correcteur $LPV$ de type $LFT$

- Résoudre le problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale, (3.47)-(3.51), pour trouver les matrices  $L_3$  et  $J_3$ .
- En déduire la matrice de **scalings**  $L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0$ , solution unique de :

$$L \begin{bmatrix} 0 & N^T \\ I & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ L_3 & I \end{bmatrix}$$

où  $M$  et  $N$  sont obtenues par décomposition de  $(I - L_3 J_3)$  en valeurs singulières:

$$I - L_3 J_3 = (U \Sigma^{\frac{1}{2}})(V \Sigma^{\frac{1}{2}})^T = M N^T$$

- Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min \gamma \quad / \quad \left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

pour obtenir un correcteur  $K$ .

### Etape 2) Analyse de la robustesse

- Pour  $K$  et  $L$  fixés, construire le modèle d'analyse,  $\tilde{T}_{zw}$ , tel que :

$$\tilde{T}_{zw} = \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

- Calculer, à différentes fréquences  $\omega$ , les scalaires  $m_{\Theta}$  et les matrices  $M_{\Delta_u}$  et  $M_{\Delta_p}$  minimisant la quantité  $\bar{\mu}$  donnée par :

$$\bar{\mu} = \left\| \begin{bmatrix} m_{\Theta} I & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} M_{\Delta_u} & 0 \\ 0 & M_{\Delta_p} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tilde{T}_{zw} \begin{bmatrix} m_{\Theta} I & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} M_{\Delta_u} & 0 \\ 0 & M_{\Delta_p} \end{pmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \right\|_{\infty}$$

- Normaliser  $m_{\Theta}$  et  $\text{diag}(M_{\Delta_u}, M_{\Delta_p})$  par  $m_{\Theta}$  puis obtenir  $\text{diag}(L_u, L_p)$  par interpolation des fonctions de transfert normalisées  $M_{\Delta_u}$  et  $M_{\Delta_p}$ .
- Intégrer les matrices de **scalings**  $L_u$  et  $L_p$  au modèle initial  $P(s)$ , tel que :

$$P(s) \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & L_u & 0 \\ 0 & 0 & L_p \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & L_u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & L_p^{-1} \end{bmatrix}$$

- Répétez les étapes 1) et 2) jusqu'à ce que la quantité  $\bar{\mu}$  ne décroît plus.

Il est important de remarquer que la convergence de cet algorithme n'est pas garantie. Néanmoins, on peut s'attendre à un comportement proche de celui que l'on observe en  $\mu$ -synthèse. De plus, il reprend le même principe de la *D-K itération* qui consiste à alterner

les deux problèmes 1) et 2) ci-dessus avec une étape supplémentaire pour le calcul de *scalings* constants, nécessaires pour la synthèse du correcteur.

Comme dans la  $\mu$ -synthèse, après chaque étape d'analyse, les opérateurs de *scalings* dynamiques sont intégrés au modèle de synthèse, ce qui a tendance à générer des correcteurs d'ordre relativement élevé. Il est donc indispensable d'avoir recours à des méthodes de réduction d'ordre. Par ailleurs, l'algorithme de synthèse (3.4.1) présenté ci-dessus, correspond au cas des incertitudes purement complexes.

Notons que les résultats développés dans ce chapitre feront l'objet d'une application complète au pilotage longitudinal d'un avion de chasse, sur un domaine de vol étendu (cf. chapitre 5).

## CHAPITRE 4

### SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE ROBUSTE : APPLICATIONS AU PILOTAGE LONGITUDINAL D'AVION

Dans ce chapitre sont exposées deux applications traitées par le biais des techniques du chapitre 2. Ces applications concernent deux problèmes concrets de commande de vol. L'objectif est bien sûr de calculer des lois de pilotage robustes, mais aussi de montrer l'intérêt de ces approches dans la prise en compte, a priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, simplifiant ainsi la synthèse.

- **Synthèse de lois de pilotage pour un avion civil** : Cette application a été proposée dans le cadre du groupe de recherche *ETS-Bombardier Aéronautique* et a pour but l'illustration des techniques de commande modernes sur un problème de type industriel<sup>1</sup>. Les correcteurs obtenus seront analysés et comparés entre eux.
- **Synthèse multivariable d'un pilote automatique longitudinal pour le système ADMIRE<sup>2</sup> [21]** : Cette application concerne le problème de pilotage longitudinal d'un avion de chasse. La commande élaborée, consiste à contrôler de manière non interactive la vitesse de tangage ( $q$ ) et la vitesse totale ( $V_T$ ). Une description globale du problème est proposée dans la section 4.2.

---

<sup>1</sup> *Design of Practical Flight Control Systems for Commercial Aircraft using Modern Control Techniques.*

<sup>2</sup> *AeroData Model In Research Environment*, (<http://www.foi.se/admire>).

#### 4.1 Première application : Synthèse de lois de pilotage pour un avion civil

Ce problème a été proposé dans le cadre du projet *Active Control Technology* entre l'Ecole de Technologie Supérieure et le constructeur Bombardier Aéronautique, pour le développement et la conception de lois de pilotage robustes et performantes, basées sur des techniques de commande multivariables [2].

##### 4.1.1 Description du problème et spécifications

La figure ci-après, présente la structure de base proposée par Bombardier, pour le contrôle de la chaîne de tangage.<sup>3</sup>

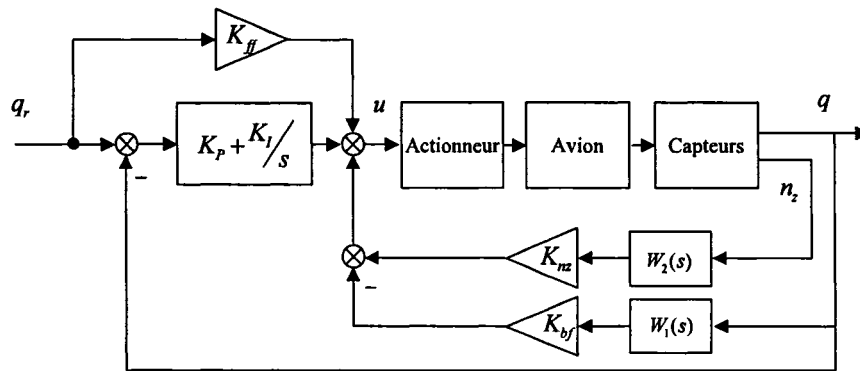


Figure 4.1 Pilote automatique de la chaîne de tangage

Cette structure de pilote automatique, repose principalement sur des techniques de synthèse classiques et monovariabiles [60]. De telles techniques sont bien maîtrisées et largement développées dans la littérature. Elles s'avèrent cependant insuffisantes quant aux traitements des incertitudes sur un problème de commande multivariable.

Nous proposons ici d'appliquer deux techniques de la commande robuste, à savoir l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  et la  $\mu$ -synthèse. Le but est de concevoir des lois de pilotage, qui soient robustes

<sup>3</sup> *Pitch-Rate Control Augmentation System.*

pour l'ensemble des modèles fournis. En effet, ces lois de commande devront satisfaire les critères de performance suivants [36] :

Tableau II Qualités de vol (QV) et spécifications de performance

QV & Performances	Contraintes à respecter
$\zeta_{sp}$ ( <i>Short-Period Mode Damping Ratio</i> )	$0.35 < \zeta_{sp} < 1.30$
$\omega_{BW}$ ( <i>Attitude Bandwidth</i> )	$> 1.5 \text{ rad/sec}$
$\tau_p$ ( <i>Phase Delay</i> )	$< 0.2 \text{ sec}$
$Drb/q_{ss}$ ( <i>Gibson's Dropback</i> )	$-0.2 < Drb/q_{ss} < 0.5 \text{ sec}$
CAP ( <i>Control Anticipation Parameter</i> )	$0.28 < CAP < 3.6$
$e_{qss}/q_{ss}$ ( <i>Pitch Rate Steady State Error</i> )	1% de la réponse indicielle en 3 sec

Ces critères correspondent aux spécifications du cahier des charges, donné par Bombardier. De plus, on doit maintenir la séparation des modes longitudinaux (phugoïde et *short-period*) et assurer la stabilité du mode phugoïde ( $\zeta_p > 0.05$ ).

D'autre part, l'avion doit également conserver de bonnes performances en présence d'incertitudes de modèle. En effet, pour un point de vol donné, on dispose de plusieurs modèles correspondant chacun à une configuration de masse et du centre de gravité.

La démarche que nous proposons de suivre, repose sur une approche fréquentielle, typiquement  $\mathcal{H}_\infty$ . Les deux techniques de synthèse employées s'appuieront sur une modélisation de type *LFT* jugée mieux adaptée. Les correcteurs obtenus seront analysés et comparés entre eux. Enfin, des simulations temporelles *LTI* viendront compléter cette première application [29], [30].

#### 4.1.2 Mise en forme du problème de synthèse

Nous présentons maintenant les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse sur lequel nous allons appliquer les techniques développées au chapitre 2.



#### 4.1.2.1 Modélisation

Nous allons simplement chercher à modéliser la dynamique rapide de l'avion, car il est ici question de pilotage en incidence. D'où, la représentation d'état simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 & Z_\epsilon \\ M_w & M_q & M_\epsilon \\ E_w & 0 & E_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (4.1)$$

où les états  $w$ ,  $q$  et  $\epsilon$  correspondent respectivement à la vitesse de l'avion le long de l'axe  $\mathbf{z}_b$ , à la vitesse de tangage et à l'angle de déflexion<sup>4</sup> au niveau de l'empennage, tandis que  $\delta_e$  représente le débattement des gouvernes aérodynamiques couplées permettant le pilotage.  $U_0$  désigne la vitesse à l'équilibre le long de l'axe  $\mathbf{x}_b$ . L'ensemble des paramètres  $\{Z_w, Z_\epsilon, Z_{\delta_e}, \dots\}$  s'expriment bien sûr, en fonction des caractéristiques aérodynamiques de l'avion et dépendent principalement du point de vol (nombre de Mach, pression dynamique, altitude). Les mesures disponibles sont la vitesse de tangage  $q$  et l'accélération verticale (*normal load factor*)  $n_z$ . Nous supposons de plus que l'accélération verticale est mesurée à une distance  $l_x$ , du centre du gravité. Il vient :

$$n_z = (\dot{w} - U_0 q - l_x \dot{q})/g$$

L'équation de la sortie s'écrit :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{Z}_w & \tilde{Z}_q & \tilde{Z}_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (4.2)$$

avec

---

<sup>4</sup> Cette déflexion est due à l'écoulement abordant l'empennage par la nappe tourbillonnaire émise par l'aile principale, et qui a pour effet de réduire l'incidence, d'un angle  $\epsilon$  (*tail downwash angle*).

$$\begin{cases} \tilde{Z}_w = (Z_w - l_x M_w)/g, \\ \tilde{Z}_q = -l_x M_q/g, \\ \tilde{Z}_\epsilon = (Z_\epsilon - l_x M_\epsilon)/g, \\ \tilde{Z}_{\delta_e} = (Z_{\delta_e} - l_x M_{\delta_e})/g. \end{cases}$$

Le point de vol considéré dans cette application, est défini par :

Tableau III Condition de vol considérée

Nombre de Mach	Altitude [ft]	Pression dynamique [psf]
0.7	15000	410.2

auquel, on associe un ensemble de 8 modèles<sup>5</sup> correspondant chacun à une configuration de masse et du centre de gravité, comme indiqué par le tableau IV.

Tableau IV Huit configurations de  $m$  et  $x_{cg}$

$m(lbs) \setminus x_{cg}(\%chord)$	16	20	35	38	48
30000		×	×		
32000					×
39000		×		×	×
46000	×			×	

Toutefois, afin d'appliquer les techniques de commande robuste, on devra d'abord exprimer ces huit modèles sous la forme d'un modèle *LFT*. Pour ce faire, nous allons procéder à une interpolation des éléments  $(Z_w, Z_\epsilon, Z_{\delta_e}, \dots)$ , puis, nous appliquerons les techniques de modélisation des systèmes incertains exposées au chapitre 2.

Avant de procéder à l'interpolation, nous commençons par exprimer les variations de la masse  $m \in [\underline{m}, \overline{m}]$  et du centre de gravité  $x_{cg} \in [\underline{x}_{cg}, \overline{x}_{cg}]$ , sous une forme normalisée, il vient :

$$\begin{aligned} m &= m_0 + m_1 \delta_m, & |\delta_m| &\leq 1 \\ x_{cg} &= x_{cg}^0 + x_{cg}^1 \delta_{cg}, & |\delta_{cg}| &\leq 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

<sup>5</sup> Les données numériques utilisées sont celles du Bombardier Challenger 604.

où  $m_0 = (\underline{m} + \overline{m})/2$ ,  $m_1 = (\overline{m} - \underline{m})/2$ ,  $x_{cg}^0 = (\underline{x}_{cg} + \overline{x}_{cg})/2$  et  $x_{cg}^1 = (\overline{x}_{cg} - \underline{x}_{cg})/2$ . On exprimera ainsi, les éléments  $(Z_w, Z_\epsilon, Z_{\delta_e}, \dots)$  en fonction des variables  $(\delta_m$  et  $\delta_{cg})$  au lieu de  $(m$  et  $x_{cg})$ . D'autre part, nous avons utilisé la formule suivante :

$$\begin{cases} Z_w &= Z_w^0 + Z_w^1 \delta_m + Z_w^2 \delta_{cg} + Z_w^3 \delta_m \delta_{cg} \\ Z_\epsilon &= Z_\epsilon^0 + Z_\epsilon^1 \delta_m + Z_\epsilon^2 \delta_{cg} + Z_\epsilon^3 \delta_m \delta_{cg} \\ Z_{\delta_e} &= Z_{\delta_e}^0 + Z_{\delta_e}^1 \delta_m + Z_{\delta_e}^2 \delta_{cg} + Z_{\delta_e}^3 \delta_m \delta_{cg} \\ &\vdots \end{cases} \quad (4.4)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés, on obtient :

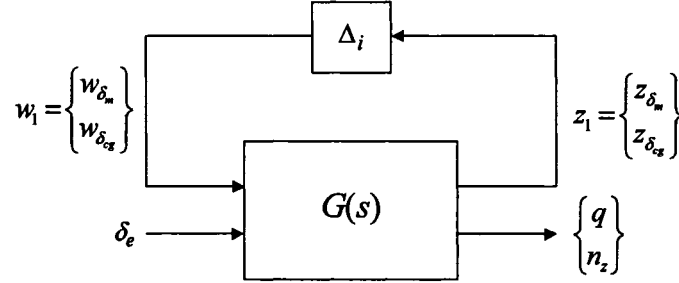
$$\begin{cases} Z_w(\delta_m, \delta_{cg}) &= -1.7232 + 0.3741 \delta_m + 0.0173 \delta_{cg} + 0.0010 \delta_m \delta_{cg} \\ Z_\epsilon(\delta_m, \delta_{cg}) &= 2.3249 - 0.5054 \delta_m - 0.0233 \delta_{cg} - 0.0013 \delta_m \delta_{cg} \\ Z_{\delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) &= -1.1098 + 0.2412 \delta_m + 0.0111 \delta_{cg} + 0.0006 \delta_m \delta_{cg} \\ M_w(\delta_m, \delta_{cg}) &= -0.0278 + 0.0023 \delta_m + 0.0120 \delta_{cg} - 0.0023 \delta_m \delta_{cg} \\ M_q(\delta_m, \delta_{cg}) &= -1.5947 + 0.1193 \delta_m + 0.0669 \delta_{cg} - 0.0805 \delta_m \delta_{cg} \\ M_\epsilon(\delta_m, \delta_{cg}) &= 0.4335 - 0.0324 \delta_m - 0.0130 \delta_{cg} + 0.0216 \delta_m \delta_{cg} \\ M_{\delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) &= -0.2069 + 0.0155 \delta_m + 0.0062 \delta_{cg} - 0.0103 \delta_m \delta_{cg} \\ E_w(\delta_m, \delta_{cg}) &= 0.6766 - 0.0002 \delta_m \\ E_\epsilon(\delta_m, \delta_{cg}) &= -23.2379 \\ \tilde{Z}_w(\delta_m, \delta_{cg}) &= 0.0536 - 0.0116 \delta_m - 0.0005 \delta_{cg} \\ \tilde{Z}_q(\delta_m, \delta_{cg}) &= 0.1753 - 0.0381 \delta_m - 0.0087 \delta_{cg} + 0.0014 \delta_m \delta_{cg} \\ \tilde{Z}_\epsilon(\delta_m, \delta_{cg}) &= -0.0723 + 0.0157 \delta_m + 0.0007 \delta_{cg} \\ \tilde{Z}_{\delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) &= 0.0345 - 0.0075 \delta_m - 0.0003 \delta_{cg} \end{cases} \quad (4.5)$$

On construit le modèle *LFT* correspondant, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

La perturbation  $(\delta_m)$  est répétée 7 fois tandis que la perturbation  $(\delta_{cg})$  est répétée 3 fois.

De plus, La représentation d'état associée au transfert  $G(s)$ , est donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Figure 4.2 Mise sous forme d'une *LFT*

avec

$$\begin{bmatrix} w_{\delta_m} \\ w_{\delta_{cg}} \end{bmatrix} = \Delta_i \begin{bmatrix} z_{\delta_m} \\ z_{\delta_{cg}} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où le partitionnement des matrices est conforme aux dimensions du problème. Après réduction, le bloc d'incertitude obtenu est de dimension 6 :

$$\Delta_i = \text{diag}(\delta_m I_3, \delta_{cg} I_3) \quad (4.8)$$

Par ailleurs, on peut vérifier que la *LFT* obtenue est une réalisation minimale [57].

#### 4.1.3 Structure de la loi de commande

On choisira pour ce problème particulièrement exigeant au niveau des performances, une structure de loi de commande, plus riche que la structure classique, puisqu'elle comporte *2 degrés de liberté*, voir figure 4.3.

Il existe en général, deux approches pour synthétiser un correcteur à 2 degrés de liberté. Par exemple, on cherche  $K_1$  pour augmenter la stabilité de la boucle fermée, puis  $K_2$  pour améliorer les performances. En effet, une telle approche à deux étapes, peut offrir une plus grande souplesse et peut produire de meilleurs résultats. Toutefois, si on procède de façon séquentielle (i.e. synthèse de  $K_1$  puis de  $K_2$ ), on risque par exemple, de détériorer

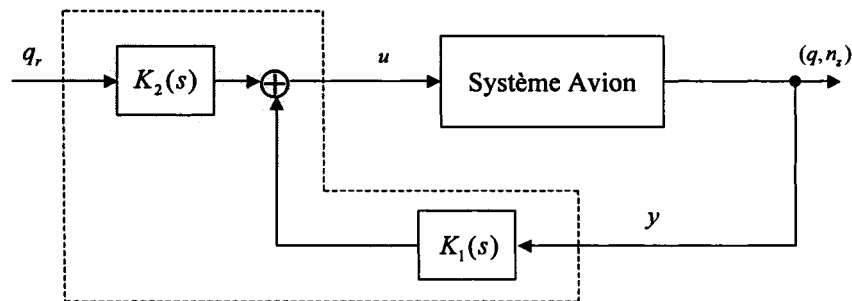


Figure 4.3 Structure de commande à 2 degrés de liberté (1)

la qualité de suivis de consigne aux dépens de la stabilité de la boucle fermée. Il sera alors nécessaire de refaire la synthèse et ainsi de suite. D'autre part, les correcteurs résultants sont indépendants et généralement d'ordre très élevé.

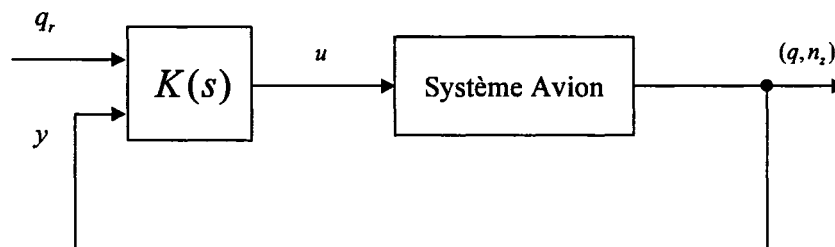


Figure 4.4 Structure de commande à 2 degrés de liberté (2)

Une autre méthode plus simple, permet de synthétiser en une seule étape, un correcteur à 2 degrés de liberté. En effet, au lieu de chercher à déterminer  $K_1$  et  $K_2$  séparément, on adoptera une approche qui consiste à déterminer un seul correcteur  $K$ , selon la structure de commande à 2 degrés de liberté (figure 4.4). C'est une approche beaucoup plus efficace et donne de bons résultats. C'est ce qui est présenté dans le paragraphe suivant.

#### 4.1.3.1 Formulation du problème de synthèse

Le modèle augmenté  $P(s)$ , utilisé pour la synthèse, est représenté par la figure 4.5.

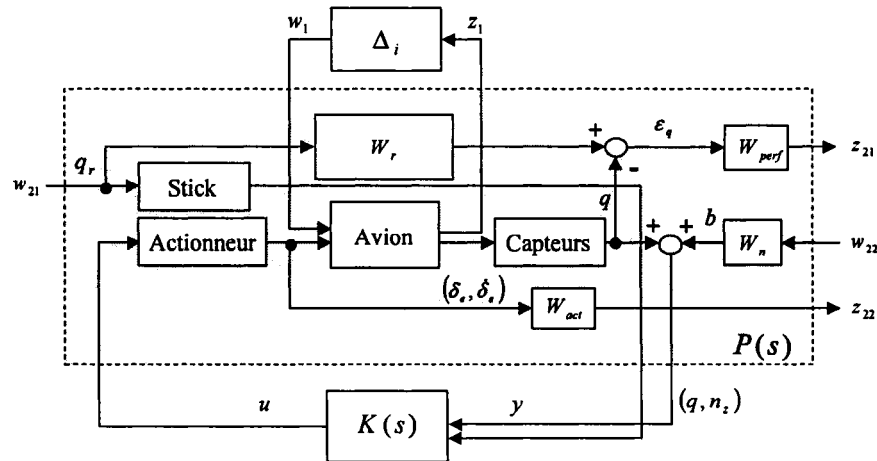


Figure 4.5 Schéma d'interconnection pour la synthèse

Ce modèle, qui correspond à la dynamique *short-period*, intègre les incertitudes paramétriques sur les coefficients aérodynamiques, les bruits de mesure ainsi qu'un modèle idéal de poursuite et des signaux d'erreurs pondérés, utilisés dans le formalisme  $\mathcal{H}_\infty$  standard pour exprimer les spécifications du cahier des charges. On y trouve aussi un ensemble "retard-actionneur", deux capteurs inertiels et un modèle représentant la dynamique du *stick*. L'interprétation des différents signaux est donnée par le tableau V.

Tableau V Interprétation des signaux

Signal	Signification
$w_{21}$	Entrée de référence ( $q_r$ )
$w_{22}$	Bruits de mesure ( $b$ )
$w_1$	Entrée des erreurs de modèle
$z_1$	Sortie des erreurs de modèle
$z_{21}$	Erreur de poursuite pondérée ( $\epsilon_q$ )
$z_{22}$	Sorties d'actionneur pondérées ( $\delta_e, \delta_e$ )
$u$	Signal de commande
$y$	Sorties mesurées ( $q, n_z$ )

## Spécifications de synthèse

• **Modèle de référence** : Afin de satisfaire les objectifs de pilotage, en matières de qualité de vol et de manoeuvrabilité, nous avons envisagé un suivi de modèle de référence de la forme :

$$W_r(s) = \frac{K_\theta (T_{\theta 2}s + 1) \exp(-\tau_\theta s)}{s^2 + 2 \zeta_{sp} \omega_{sp}s + \omega_{sp}^2} \quad (4.9)$$

Le choix des paramètres  $\{K_\theta, T_{\theta 2}, \zeta_{sp}, \omega_{sp}, \tau_\theta\}$  repose sur les spécifications du cahier des charges (tableau II). Après quelques essais, nous avons retenu le choix suivant :

$$W_r(s) = 4^2 \frac{e^{-0.1s}}{s^2 + 2(0.6)(4)s + 4^2} \quad (4.10)$$

• **Performance et stabilité robustes** : Les objectifs de performance et de robustesse sont associés respectivement aux transferts :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{q_r \rightarrow \varepsilon_q} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e} \quad (4.11)$$

Le choix des pondérations est fait à partir des spécifications suivantes :

1. Le temps de montée de la sortie  $q$  doit être inférieur à 1 seconde<sup>6</sup> avec une erreur statique faible, et un dépassement inférieur à 20%.
2. Les amplitudes de la sortie actionneur  $\delta_e$  et de sa dérivée première  $\dot{\delta}_e$  doivent être limitées, afin d'éviter le problème des commandes à *grands gains*.
3. La stabilité robuste doit être assurée sur le modèle de synthèse (robustesse face aux erreurs de modélisation et bruits de mesures).

• **Choix des pondérations** : Après quelques essais, nous avons retenu le choix suivant :

---

<sup>6</sup> Le temps de montée est défini par le temps mis par la sortie pour atteindre 90% de la valeur désirée pour une entrée de référence de type échelon.

**Le filtre  $W_{perf}$  :** Cette pondération agit directement sur le transfert  $\mathcal{F}_{q_r \rightarrow \varepsilon_q}$  qui lie l'entrée de référence  $q_r$  et l'erreur de poursuite  $\varepsilon_q$ . Nous avons choisi un filtre passe-bas de la forme:

$$W_{perf}(s) = 0.8 \frac{s + 100}{s + 4} \quad (4.12)$$

où  $W_p^{-1}(s)$  permet d'assurer une erreur de poursuite maximum de 0.05 *deg/sec* en basses fréquences.

**Le filtre  $W_{act}$  :** Pour contrôler l'amplitude des signaux de commande, la fonction de pondération  $W_{act}$  est utilisée. En effet, cette pondération agit sur le transfert  $\mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e}$  qui lie l'entrée de référence et/ou bruits de mesure aux sorties d'actionneur  $\delta_e, \dot{\delta}_e$ . Par ailleurs, pour limiter la complexité des lois de commande obtenues, on utilise seulement des gains :

$$W_{act} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

D'autre part, la pondération  $W_n$  est utilisée afin de limiter l'effet des bruits de mesure sur les sorties  $q$  et  $n_z$ . On a simplement choisi des gains statiques :

$$W_n = 0.03 I_2 \quad (4.14)$$

#### 4.1.4 Procédures de synthèse

Pour résoudre ce problème, on appliquera successivement les deux techniques suivantes :

- l'approche  $\mathcal{H}_\infty$  standard (cf. paragraphe 2.3.4),
- $\mu$ -synthèse (cf. paragraphe 2.4.5).



#### 4.1.4.1 Première méthode : optimisation $\mathcal{H}_\infty$

On applique l'approche présentée au paragraphe 2.3.4, au problème de synthèse de la figure 4.5. C'est-à-dire, on cherche un correcteur  $K(s)$ , tel que :

$$\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < 1 \quad (4.15)$$

Le correcteur résultant, noté  $K_{hinf}$ , est du même ordre que  $P(s)$ , à savoir 16. Par une simple technique de réduction, qui consiste à éliminer les dynamiques les plus rapides du contrôleur, nous avons réduit l'ordre à 5 tout en conservant la performance nominale. Plus précisément, ce correcteur assure  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty = 0.4437 < 1$ . Par ailleurs, la performance robuste n'est pas satisfaite ( $\|\mathcal{F}_u(H, \Delta_i)\|_\infty > 1$  avec  $H = \mathcal{F}_l(P, K)$ ). Les figures 4.6 et 4.7 représentent la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert nominal et la valeur du  $\mu$  en fonction de la fréquence  $\omega$ .

#### 4.1.4.2 Deuxième méthode : $\mu$ -synthèse

On désire maintenant assurer la stabilité et la performance robustes en présence d'incertitudes sur les coefficients aérodynamiques. C'est-à-dire, on doit satisfaire la relation (4.15) pour toute variation de  $\delta_m \in [-1, 1]$  et  $\delta_{cg} \in [-1, 1]$ . Pour cela, on transforme le problème de performance robuste en un problème de stabilité robuste: on connecte un bloc fictif de performance  $\Delta_p$  de dimension  $3 \times 3$  entre les signaux  $(w_{21}, w_{22})$  et  $(z_{21}, z_{22})$ . La perturbation structurée de modèle augmenté est alors définie par  $\Delta = \text{diag}(\Delta_p, \Delta_i)$ , et on obtient le schéma d'interconnection standard pour la  $\mu$ -synthèse (voir figure 2.19). On cherche alors un correcteur  $K$ , tel que :

$$\mu_\Delta(\mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega))) < 1 \quad \text{pour tout } \omega \quad (4.16)$$

Nous minimisons la valeur de  $\mu_\Delta(\mathcal{F}_l(P, K))$  au moyen de l'algorithme *D-K itération* décrit au paragraphe 2.4.5. Un résultat satisfaisant a été obtenu après la cinquième itération,

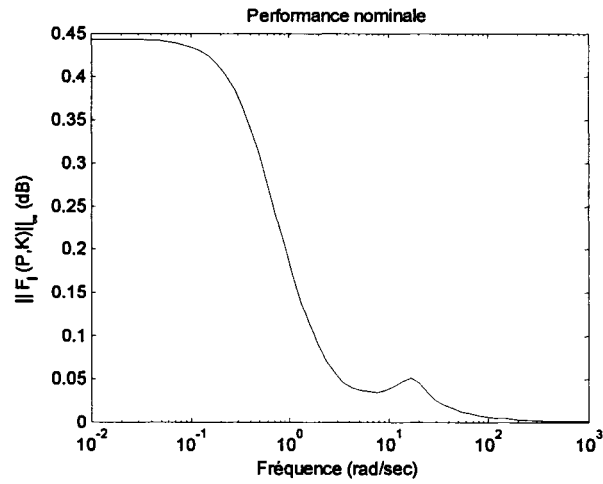


Figure 4.6 Performance nominale (correcteur  $K_{hinf}$ )

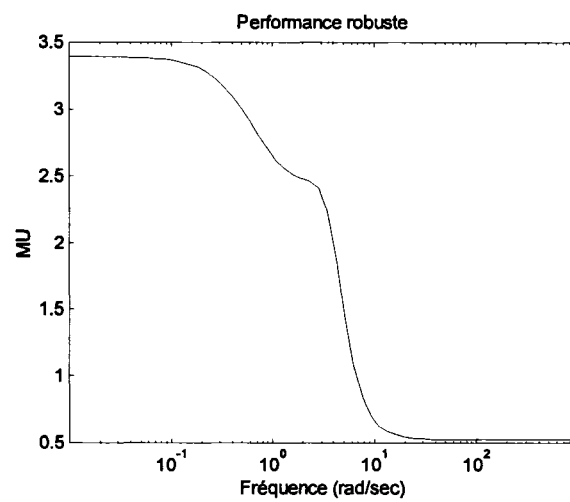


Figure 4.7 Performance robuste (correcteur  $K_{hinf}$ )

Tableau VI Niveaux de performance obtenus par la  $D$ - $K$  itération

Itération #	1	2	3	4	5
Ordre du correcteur	16	78	82	84	86
Ordre des <i>scalings</i> $D$	0	62	66	68	70
Performance $\gamma$	37.351	5.239	2.613	6.530	1.551
Valeur de $\mu$	1.744	1.092	0.936	0.937	0.928

comme on le voit sur le tableau VI.

Après réduction, le correcteur résultant, noté  $K_{mu}$ , est d'ordre 15. Ce dernier assure la performance nominale ainsi que la stabilité robuste. La valeur de  $\mu$  pour la performance robuste vaut 0.93. Les figures 4.8 et 4.9 représentent la stabilité robuste et la performance robuste pour ce correcteur.

#### 4.1.5 Analyse des résultats

Avant de conclure, nous nous livrons ici à une série de tests en vue de valider ou non les lois de commande obtenues. Il s'agit de tests dans les domaines fréquentiel ( $\mu$ -analyse) et temporel (simulations  $LTI$ ). On notera par ailleurs, que l'ensemble de ces tests est réalisé sur le modèle longitudinal complet (modes phugoïde et *short-period*).

#### Analyse fréquentielle

On rappelle que le modèle utilisé pour la synthèse des correcteurs  $K_{hinf}$  et  $K_{mu}$ , est basé sur une approximation simplifiée du mode longitudinal. Par conséquent, il devient nécessaire d'envisager une étude des propriétés de ces lois de commande sur le modèle longitudinal complet. Le schéma d'interconnection pour la  $\mu$ -analyse, est donné par la figure 4.10.

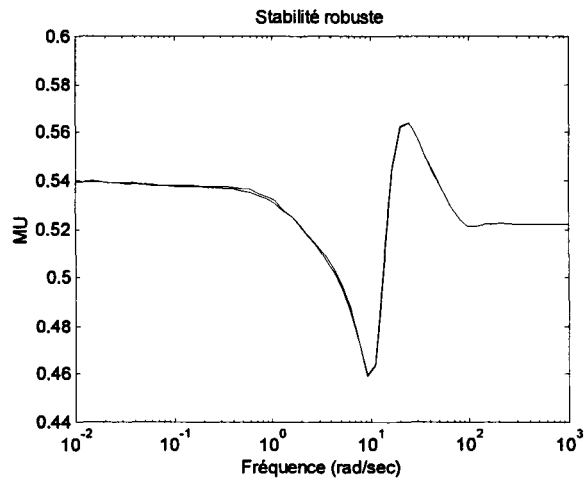


Figure 4.8 Stabilité robuste (correcteur  $K_{mu}$ )

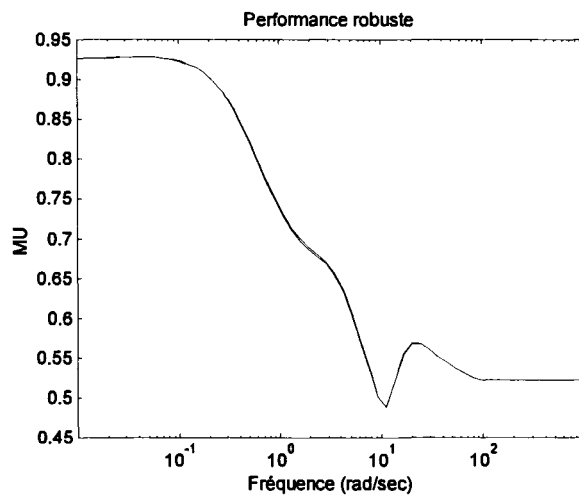


Figure 4.9 Performance robuste (correcteur  $K_{mu}$ )

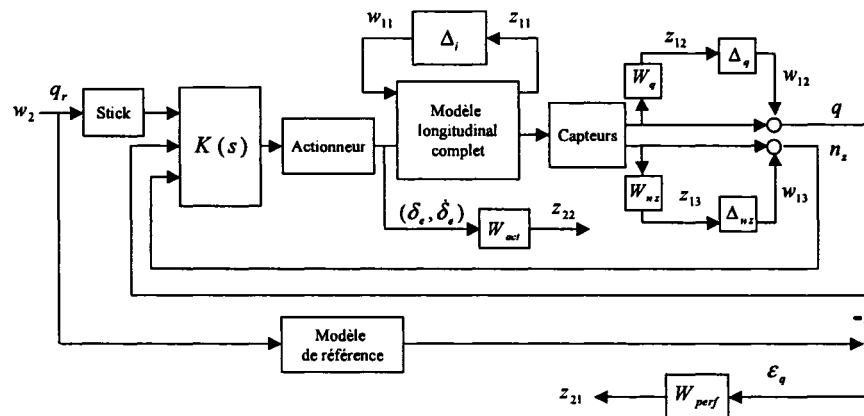


Figure 4.10 Schéma d'interconnexion pour la  $\mu$ -analyse

Afin d'appliquer les outils de la  $\mu$ -analyse, on doit d'abord exprimer le système incertain (tableaux III et IV) sous la forme d'un modèle *LFT*.

Comme précédemment, nous avons choisi de modéliser l'ensemble des 8 modèles définissant notre système, sous la forme d'un modèle *LFT* soumis à une perturbation structurée  $\Delta_i$ , telle que :

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \delta_m I_{10} & 0 \\ 0 & \delta_{cg} I_5 \end{pmatrix}$$

où  $\delta_m$  et  $\delta_{cg}$  sont deux scalaires réels dont la variation est comprise entre -1 et 1. On tiendra compte par ailleurs de la présence d'incertitudes dynamiques au niveau des capteurs. Pour cela, nous avons représenté ces dynamiques négligées, par deux filtres de type passe-haut, tels que :

$$W_q(s) = W_{nz}(s) = 0.4 \frac{s + 0.5}{s + 50}$$

Un tel choix permet de représenter une erreur de 2% en basses fréquences, qui augmente jusqu'à 40% en hautes fréquences.

On notera enfin la présence des pondérations fréquentielles  $W_{perf}$  et  $W_{act}$  dont le choix est le même que précédemment.

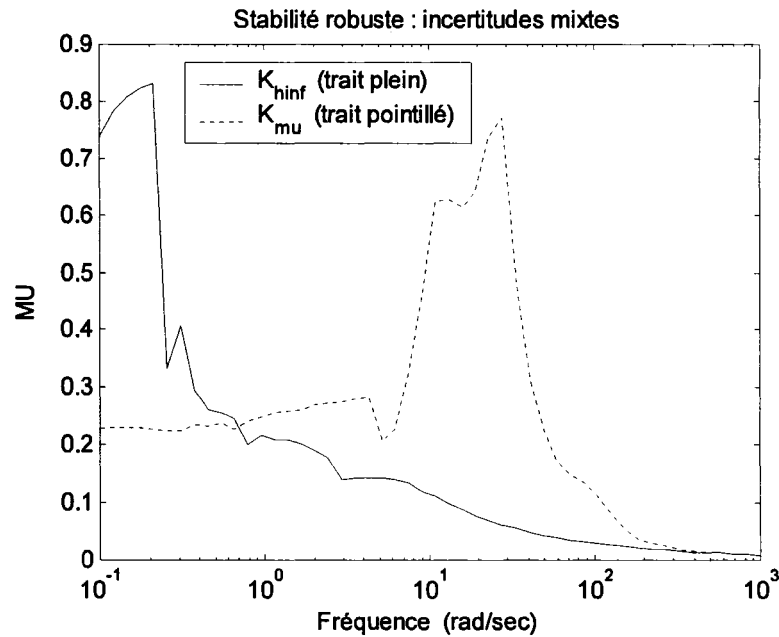


Figure 4.11 Vérification de la stabilité robuste sur le système longitudinal

Les figures 4.11 et 4.12 présentent les tracés de  $\mu$  pour l'analyse de la robustesse et de la performance. On peut constater que la stabilité robuste du système en boucle fermée est assurée pour les 2 lois de commande, tandis que la performance robuste n'est assurée que pour le correcteur  $K_{mu}$ . Compte tenu de cette première analyse, le correcteur  $K_{hinf}$ , basé sur la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  standard, n'est pas la mieux adapté à notre problème.

### Simulations temporelles

Nous proposons maintenant d'étudier le comportement des correcteurs  $K_{hinf}$  et  $K_{mu}$  par des simulations temporelles. Dans chaque cas, la loi de commande est implémentée sur le système linéaire complet, intégrant le modèle longitudinal (système d'ordre 5), la dynamique du *stick* (modèle d'ordre 6), un ensemble "retard-actionneur" (modèle d'ordre 6) et deux capteurs (modèle d'ordre 5 chacun). Le retard est modélisé ici par une fonction de transfert d'ordre 5 (approximation de Padé).

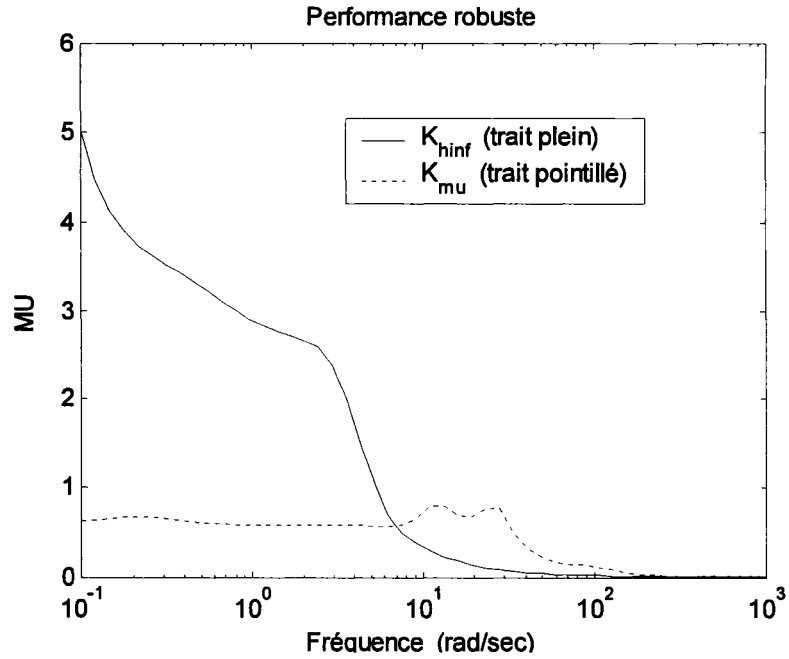


Figure 4.12 Vérification de la performance robuste sur le système longitudinal

Au cours de chaque simulation, on applique successivement deux échelons en  $q_r$  d'amplitude 5 rad/sec chacun. Le premier échelon est appliqué à l'instant 2 sec, et le second à l'instant 10 sec. La durée de chacun est 4 sec.

Les figures 4.13 et 4.14 présentent les réponses temporelles du système bouclé avec le correcteur  $K_{hinf}$ . Nous nous sommes limités à présenter le cas nominal. On peut constater que les critères de synthèse, en terme de performance sont acceptables.

Les figures 4.15 et 4.16 présentent les réponses temporelles du système bouclé avec le correcteur  $K_{mu}$ . On a testé ce correcteur pour les 8 configurations données par le tableau IV. On constate que les spécifications de performance sont entièrement satisfaites, puisque le temps de montée est inférieure à 1 sec, avec une erreur statique très faible et un dépassement inférieur à 12%. On remarquera par ailleurs le respect des spécifications au niveau du débattement des gouvernes, tant en position ( $|\delta_e| < 8 \text{ deg}$ ) qu'en vitesse ( $|\dot{\delta}_e| < 10 \text{ deg/sec}$ ).

## Analyse des performances et qualités de vol

Nous avons également vérifié, pour le correcteur  $K_{mu}$ , les spécifications du cahier des charges, en termes de performance et de qualité de vol (tableau II). Les résultats de ces tests sont rassemblés dans le tableau VII. En ce qui concerne les valeurs du CAP (*Control Anticipation Parameter*), on les a tracées dans le plan, en fonction de l'amortissement  $\zeta_{sp}$ , comme le montre la figure 4.17. Globalement, on constate que les spécifications de performance et de qualité de vol (niveau 1) sont entièrement satisfaites, pour l'ensemble des 8 configurations (tableaux III et IV).

### 4.1.6 Conclusion

Dans cette première partie, nous avons appliqué deux techniques de la commande robuste, à un problème réaliste de pilotage longitudinal d'un avion civil. Le travail consiste d'abord à obtenir une représentation *LFT* de notre modèle d'avion, couvrant les huit configurations qui caractérisent le point de vol. Afin de tenir compte de l'ensemble des spécifications du cahier des charges, nous avons inclus dans le modèle de synthèse diverses spécifications de robustesse et de performance sous la forme de pondérations fréquentielles. Notons enfin, que la synthèse est réalisée selon la structure de commande à 2 degrés de liberté.

Par ailleurs, afin de valider cette approche, les correcteurs obtenus sont testés sur le modèle longitudinal complet. Le premier correcteur, basé sur une optimisation  $\mathcal{H}_\infty$  standard, n'assure que la performance nominale, tandis que le second correcteur, basé sur la  $\mu$ -synthèse, assure à la fois la performance nominale et la performance robuste. De plus, ce dernier vérifie l'ensemble des spécifications de performance (qualité de vol du niveau 1), pour les 8 configurations du notre système.



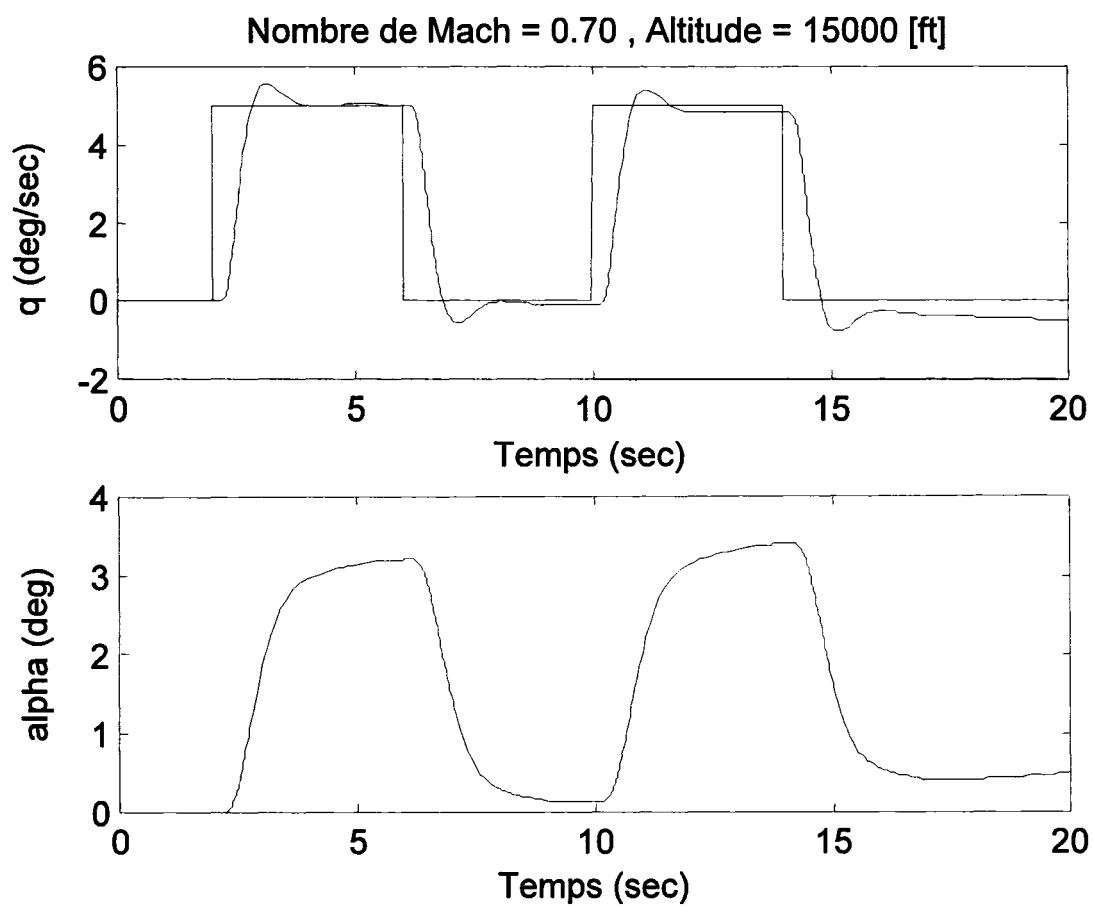


Figure 4.13 Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur  $K_{hinf}$

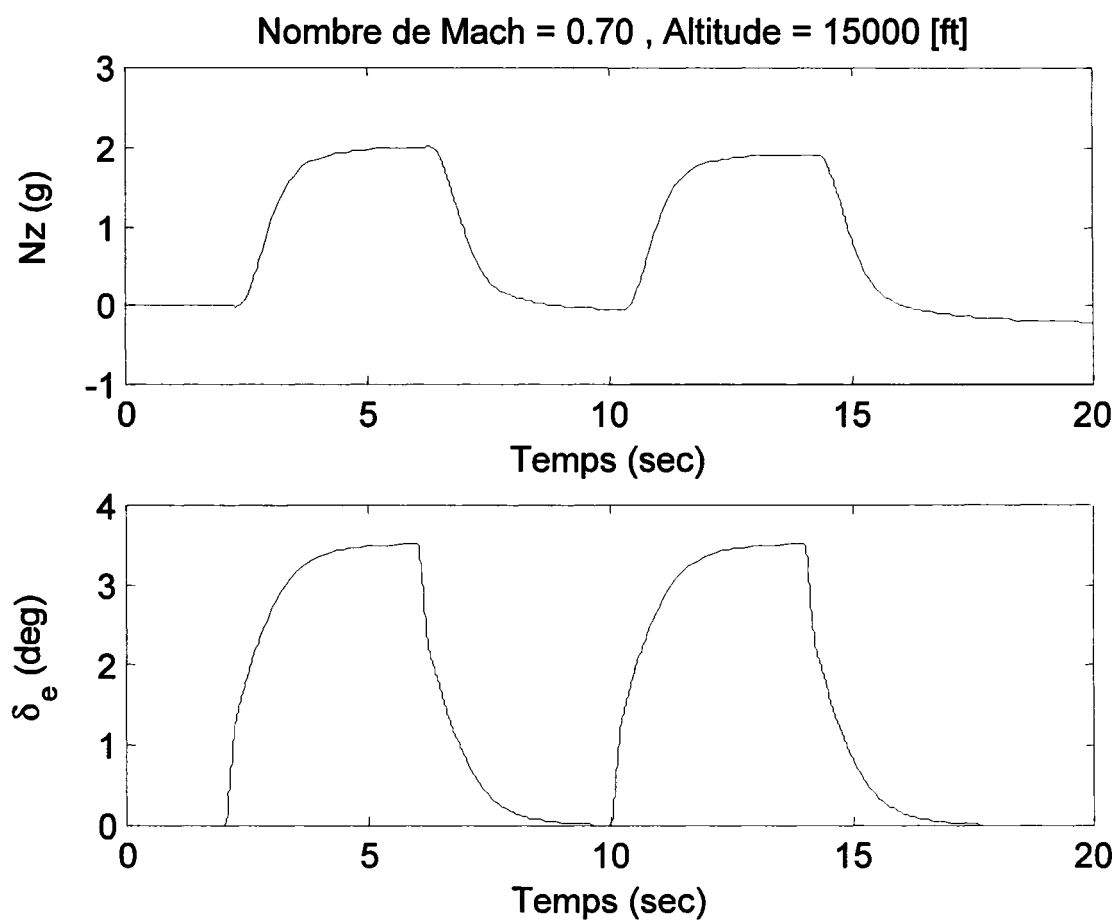


Figure 4.14 Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur  $K_{hinf}$

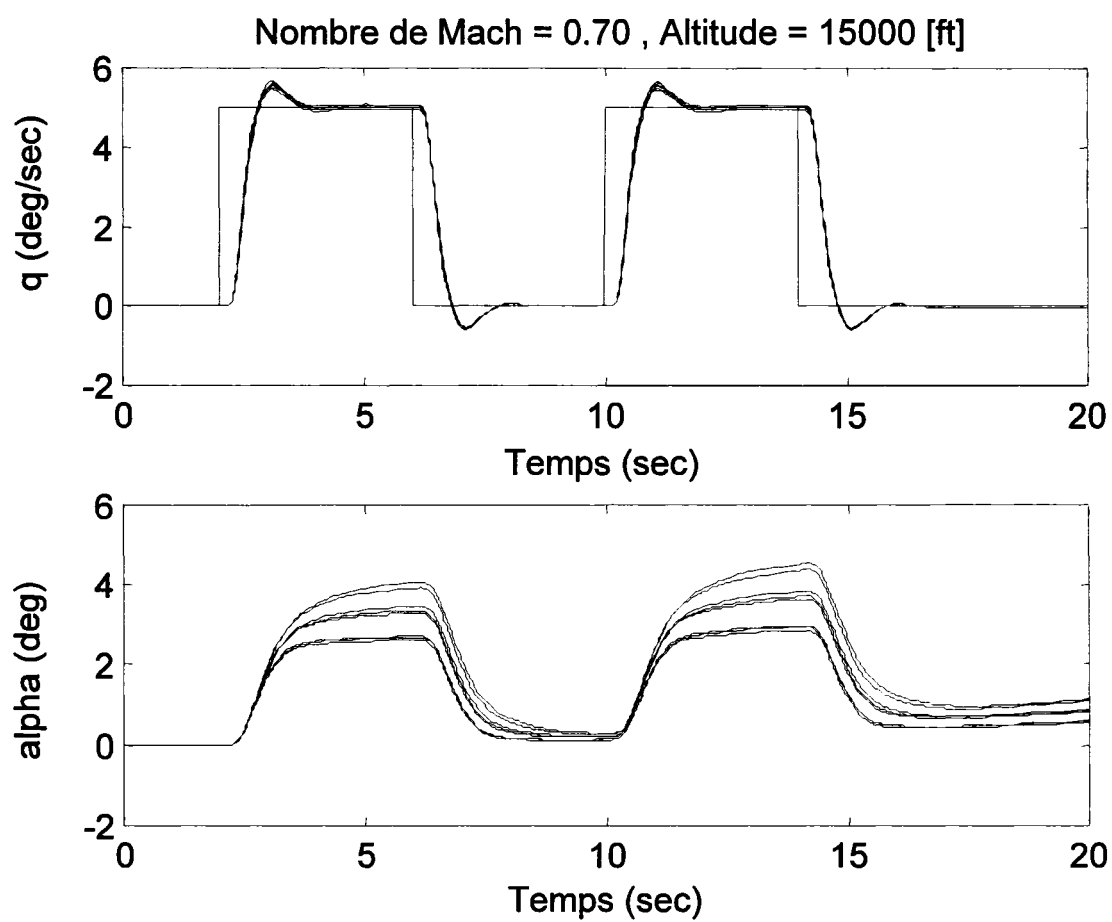


Figure 4.15 Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur  $K_{mu}$

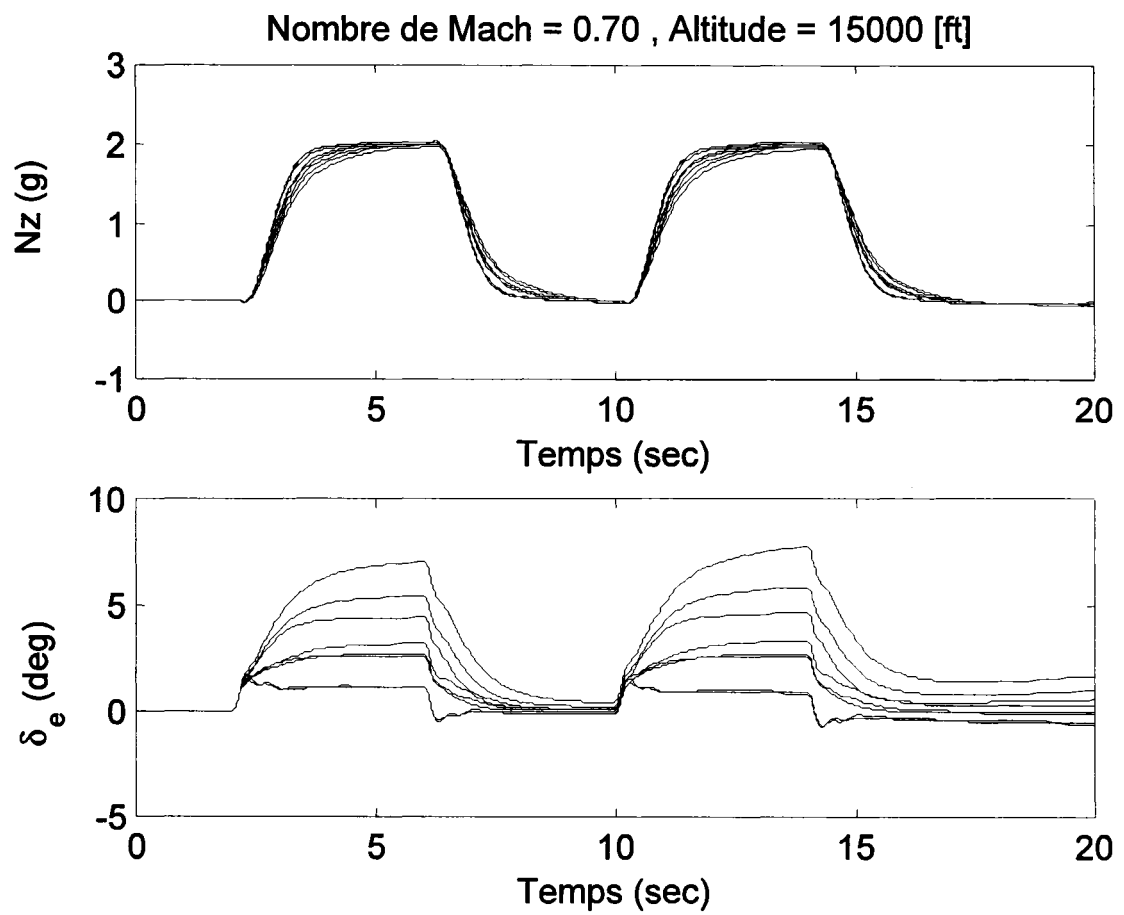
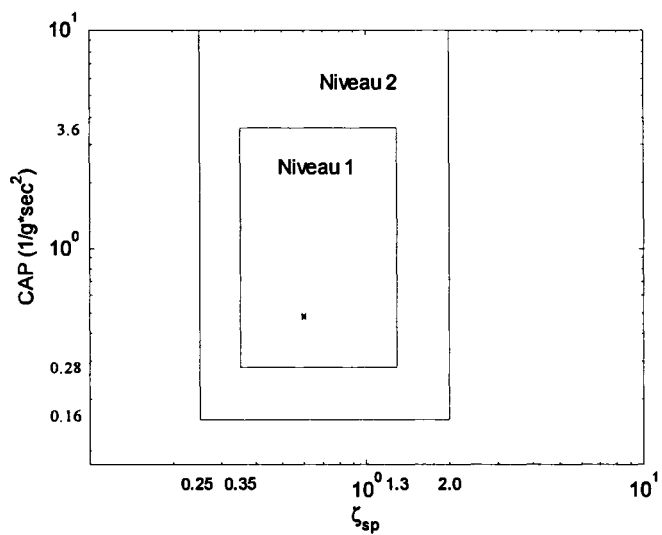


Figure 4.16 Réponses temporelles du système bouclé par le correcteur  $K_{mu}$

Tableau VII Performances et qualités de vol obtenues (correcteur  $K_{mu}$ )

$m(klbs)/$ $x_{cg}(\%chord)$	$\omega_{BW}$	$\tau_p$	$\zeta_{sp}$	$Drb/q_{ss}$	$ \frac{e_{qss}}{q_{ss}} $
30/20	1.7075	0.2159	0.5968	0.3967	0.1583%
30/35	1.7205	0.2128	0.5966	0.3891	0.1501%
39/20	1.7071	0.2138	0.5966	0.3965	0.1422%
39/38	1.7214	0.2100	0.5964	0.3865	0.1422%
46/16	1.7020	0.2131	0.5966	0.3977	0.1370%
46/38	1.7218	0.2098	0.5964	0.3853	0.1484%
32/48	1.7285	0.2075	0.5964	0.3822	0.1413%
39/48	1.7261	0.2058	0.5963	0.3808	0.1405%

Figure 4.17 CAP vs  $\zeta_{sp}$  pour les phases de vol Catégorie A, (correcteur  $K_{mu}$ )

## 4.2 Deuxième application : Synthèse multivariable d'un pilote automatique longitudinal pour le système ADMIRE

Le problème considéré dans cette section, est celui du pilotage longitudinal robuste d'un avion de chasse. L'objectif est de concevoir une loi de commande multivariable, en utilisant la technique de  $\mu$ -synthèse. La commande élaborée, consiste à contrôler de manière découplée la vitesse de tangage ( $q$ ) et la vitesse totale ( $V_T$ ). Notons par ailleurs, que les résultats qui sont donnés ici sont relatifs à la boucle (interne) de stabilisation longitudinale. La structure physique de la loi de commande est celle décrite sur la figure 4.18.

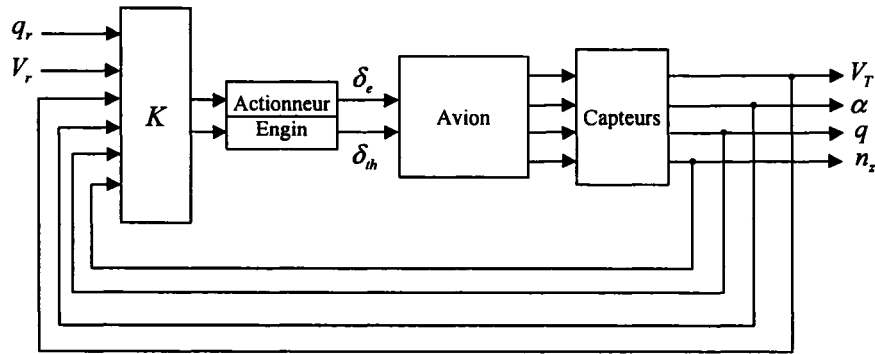


Figure 4.18 Pilote automatique longitudinal

Les données numériques que nous avons utilisées sont celles du système ADMIRE [21]. Il s'agit d'une version simplifiée d'un avion de chasse mono-place avec une configuration *delta-canard*. Les données aérodynamiques du modèle générique ont été développées par la société Saab AB et l'Institut Royal de Technologie (KTH) de Suède. C'est un modèle non-linéaire à six degrés de liberté, conçu pour atteindre des vitesses de 1.2 Mach et des altitudes de 6000 mètres, avec un angle d'attaque qui varie de -10 à 30 degrés et un angle de dérapage de  $\pm 20$  degrés. Le modèle est construit à partir de douze équations différentielles non-linéaires, et les données aérodynamiques consistent en des tables, contenant les valeurs des coefficients aérodynamiques. Les surfaces de contrôle disponibles sont : le canard droit et gauche, le gouvernail de direction, le volet de bord principal et quatre élévons. A cela, s'ajoute l'entrée de la manette des gaz pour le contrôle de la vitesse. Des modèles

d'actionneurs et des capteurs sont aussi intégrés au système.

Pour répondre au cahier des charges, la loi de commande doit satisfaire les critères de performance suivants :

1. Objectifs de pilotage : l'ensemble de ces objectifs est résumé par le tableau suivant:

Tableau VIII Qualités de vol (QV) en longitudinal

QV & Performances	Contraintes à respecter
$Drb/q_{ss}$ ( <i>Gibson's Dropback</i> )	$0.0 < Drb/q_{ss} < 0.25 \text{ sec}$
$\omega_{BW}$ ( <i>Attitude Bandwidth</i> )	$> 1.5 \text{ rad/sec}$
$\tau_p$ ( <i>Phase Delay</i> )	$< 0.20 \text{ sec}$
$\zeta_{sp}$ ( <i>Short-Period Mode Damping Ratio</i> )	$0.35 < \zeta_{sp} < 1.30$
CAP ( <i>Control Anticipation Parameter</i> )	$0.28 < CAP < 3.6$

2. Spécifications temporelles [55] :

- Le temps de réponse de la sortie  $q$  doit être inférieur à 2 secondes<sup>7</sup> avec une erreur statique faible et un dépassement inférieur à 10%.
- Le temps de réponse de la sortie  $V_T$  doit être inférieur à 4 secondes (*i.e.* une constante de temps plus petite que 1.33 *sec.*) et pas de dépassement.

3. Couplage entre  $q$  et  $V_T$  : la variation maximale de  $V_T$  doit être inférieure à 0.1 *m/sec* pour une demande en  $q$  égale à 5 *deg/sec*; de même la variation maximale de  $q$  doit être inférieure à 0.5 *deg/sec* pour une demande en  $V_T$  égale à 4 *m/sec*.

$$\Delta V_T \leq 0.1 \text{ m/sec} \quad \text{dans le cas où } q_r = 5 \text{ deg/sec}$$

$$\Delta q \leq 0.5 \text{ deg/sec} \quad \text{dans le cas où } V_r = 4 \text{ m/sec}$$

4. Critère de robustesse : la stabilité robuste doit être assurée pour les variations suivantes :

<sup>7</sup> Le temps de réponse  $t_r$  est défini ici tel que  $0.95 \leq y(t) \leq 1.05, \forall t \geq t_r$ , si  $y(t)$  est la réponse à un échelon unitaire.

- Variation de la masse :

$$7280 \text{ kg} \leq m \leq 10920 \text{ kg}$$

- Variation du centre de gravité ( $\Delta x_{cg}$  horizontal) :

$$-0.15 \text{ m} \leq \Delta x_{cg} \leq 0.15 \text{ m}$$

5. Problèmes de saturation : les sorties des servocommandes  $\delta_e$  et  $\delta_{th}$ , et leurs dérivées premières  $\dot{\delta}_e$  et  $\dot{\delta}_{th}$ , doivent être limitées.

Pour résoudre ce problème, nous avons adopté la même démarche que précédemment (section 4.1). Cette méthodologie de synthèse, basée sur une approche fréquentielle, est particulièrement intéressante. Elle permet en effet de prendre en compte, a priori et explicitement, les spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, simplifiant ainsi la synthèse. Enfin, pour valider cette approche, le correcteur obtenu sera analysé puis implémenté sur le système non linéaire.

#### 4.2.1 Description générale

##### 4.2.1.1 Equations du mouvement longitudinal

Nous rappelons ici brièvement les équations du mouvement de l'avion dans le plan longitudinal (pour plus de détails voir [53] et [21]). Pour cela, nous ferons les hypothèses classiques, à savoir :

- Terre plate et immobile,
- Accélération gravitationnelle constante (variation de  $g$  avec l'altitude est négligeable),
- Masse et inerties varient lentement,
- Découplage longitudinal/latéral.



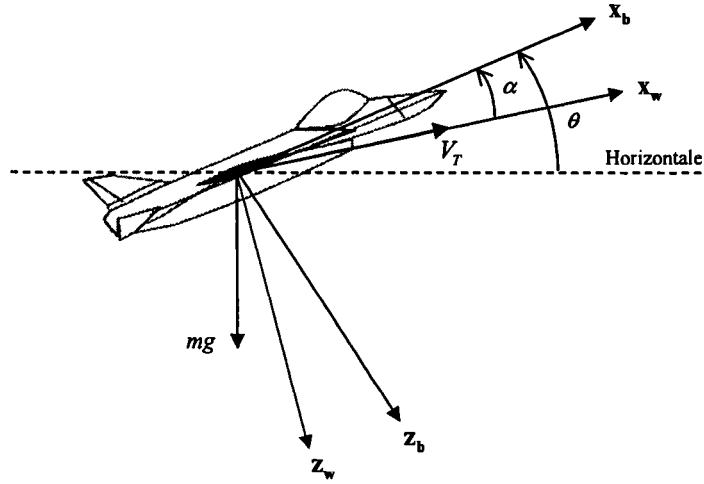


Figure 4.19 Repère aérodynamique et repère avion

Dans cette application, on est amené à travailler dans le repère aérodynamique (*wind axes*). Ce repère a également pour centre le point  $G^8$ . L'axe  $x_w$  est porté par la vitesse aérodynamique de l'avion,  $z_w$  est dans le plan de symétrie de l'avion et orienté positivement vers le ventre de l'appareil et  $y_w$  complète le trièdre positif. La figure 4.19 représente la position du repère aérodynamique par rapport au repère avion.

La projection des équations du mouvement longitudinal dans le repère aérodynamique, conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 m\dot{V}_T &= F_{xw} - mg \sin(\theta - \alpha) \\
 mV_T\dot{\alpha} &= F_{zw} + mg \cos(\theta - \alpha) + mV_TQ \\
 \dot{\theta} &= Q \\
 I_y\dot{Q} &= M_y
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

où  $V_T$  représente la vitesse de l'avion,  $\alpha$  l'angle d'incidence,  $Q$  la vitesse de tangage et  $\theta$  l'angle de tangage.  $F_{xw}$  et  $F_{zw}$  représentent les résultantes des forces projetées sur les axes  $x_w$  et  $z_w$ .  $M_y$  correspond au moment de tangage de l'avion autour de l'axe  $y_w$  tandis que  $m$  et  $I_y$  désignent respectivement la masse de l'avion et le moment d'inertie en tangage.

<sup>8</sup> En général, on choisit le même point  $G$  pour les repères aérodynamique et avion.

Compte tenu que le modèle aérodynamique du système ADMIRE est exprimé dans le repère avion, les projections  $F_{xw}$  et  $F_{zw}$  dans le repère aérodynamique, sont données par :

$$\begin{aligned} F_{xw} &= F_{xb} \cos(\alpha) + F_{zb} \sin(\alpha) \\ F_{zw} &= -F_{xb} \sin(\alpha) + F_{zb} \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{xb} &= F_{aero_{xb}} + T_{xb} \\ F_{zb} &= F_{aero_{zb}} + T_{zb} \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $T_{xb}$  et  $T_{zb}$  représentent les forces de propulsion dans le repère avion, alors que les forces aérodynamiques  $F_{aero_{xb}}$  et  $F_{aero_{zb}}$ , vérifient :

$$\begin{aligned} F_{aero_{xb}} &= -\bar{q}SC_x(h, M, \alpha, u_{el}, u_n) \\ F_{aero_{zb}} &= -\bar{q}SC_z(h, M, \alpha, \dot{\alpha}, \bar{c}/(2V_T)q, u_{el}, u_n) \end{aligned} \quad (4.20)$$

où  $S$  est la surface aérodynamique de référence,  $\bar{c}$  la corde aérodynamique moyenne et  $\bar{q} = \rho V_T^2/2$  la pression dynamique.  $u_{el}$  (*elevons*) et  $u_n$  (*canards*) représentent les entrées de gouvernes. Elles sont utilisées soit comme gouvernes de profondeur (débattement symétrique), soit comme gouvernes de roulis (débattement antisymétrique).

Par ailleurs, le moment total de tangage par rapport au centre de gravité, est donné par :

$$M_y = \bar{q}S\bar{c}C_m(M, \alpha, \dot{\alpha}, \bar{c}/(2V_T)q, u_{el}, u_n) - x_{cg}F_{aero_{zb}} + z_{cg}F_{aero_{xb}} + M_T \quad (4.21)$$

où  $x_{cg}$  et  $z_{cg}$  représentent respectivement les distances entre le centre gravité et le centre aérodynamique moyen.  $M_T$  est le moment de tangage dû aux forces de propulsion. Notons enfin que les coefficients  $C_x$  (force tangentielle),  $C_z$  (force normale) et  $C_m$  (moment de tangage) sont ici des fonctions du point de vol (altitude  $h$  et nombre de Mach  $M$ ).

## Représentation d'état

La linéarisation des équations du mouvement s'effectue autour d'un point d'équilibre correspondant à un point de vol donné. Sous l'hypothèse que les variations des variables

longitudinales restent faibles, les équations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_T \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\dot{v}_T v_T} & A_{\dot{v}_T \alpha} & A_{\dot{v}_T q} & -g \\ A_{\dot{\alpha} v_T} & A_{\dot{\alpha} \alpha} & A_{\dot{\alpha} q} & 0 \\ A_{\dot{q} v_T} & A_{\dot{q} \alpha} & A_{\dot{q} q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\dot{v}_T \delta_e} & B_{\dot{v}_T \delta_{th}} \\ B_{\dot{\alpha} \delta_e} & B_{\dot{\alpha} \delta_{th}} \\ B_{\dot{q} \delta_e} & B_{\dot{q} \delta_{th}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_{th} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

où  $v_T$ ,  $\alpha$ ,  $q$  et  $\theta$  sont les 4 variables d'état longitudinales. Les entrées de commande sont: la gouverne de profondeur  $\delta_e$  et la commande des gaz  $\delta_{th}$ . Par ailleurs, on considère les quatre sorties suivantes : la vitesse de l'avion  $v_T$ , l'angle d'incidence  $\alpha$ , la vitesse de tangage  $q$  et le facteur de charge vertical  $n_z = -V_{T_e}(\dot{\alpha} - q)/g$ , où  $V_{T_e}$  désigne la vitesse de l'avion par rapport à l'air en régime établi. L'équation de sortie s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} v_T \\ \alpha \\ q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_{n_z v_T} & C_{n_z \alpha} & C_{n_z q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{n_z \delta_e} & D_{n_z \delta_{th}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_{th} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Les équations (4.22)-(4.23) décrivent donc un système *LTI* dont les éléments  $\{A_{\dot{v}_T v_T}, A_{\dot{v}_T \alpha}, A_{\dot{v}_T q}, B_{\dot{v}_T \delta_e}, B_{\dot{v}_T \delta_{th}}, \dots\}$  s'expriment bien sûr en fonction des caractéristiques aérodynamiques de l'avion, et dépendent principalement du point de vol.

#### 4.2.2 Construction du modèle de synthèse

Nous présentons maintenant les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse sur lequel nous allons appliquer la technique de  $\mu$ -synthèse.

##### 4.2.2.1 Mise sous forme d'une *LFT*

Comme dans l'application précédente, nous nous intéressons ici à la commande d'un système incertain, décrit par un ensemble fini de modèles *LTI* (4.22)-(4.23). Pour cela, nous

avons considéré le point de vol suivant :

Tableau IX Condition de vol considérée

Nombre de Mach	Altitude [m]
0.35	3000

auquel, on associé un ensemble de 9 modèles correspondant chacun à une configuration de masse et du centre de gravité, comme indiqué par le tableau X.

Tableau X Neuf configurations de  $m$  et  $x_{cg}$

$m$ [kg] \ $\Delta x_{cg}$ [m]	-0.15	0	0.15
7280	×	×	×
9100	×	×	×
10920	×	×	×

Afin d'appliquer la technique de  $\mu$ -synthèse, nous avons exprimé ces 9 modèles sous la forme d'un modèle *LFT*, en suivant la même procédure que précédemment.

On obtient donc:

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
 A_{\dot{v}_T v_T}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.0159 - 0.0017 \delta_m + 0.0005 \delta_{cg} + 0.0001 \delta_m \delta_{cg} \\
 A_{\dot{v}_T \alpha}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -4.5319 - 0.1113 \delta_m + 0.3595 \delta_{cg} - 0.0146 \delta_m \delta_{cg} \\
 A_{\dot{v}_T q}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.2790 + 0.0050 \delta_m + 0.0165 \delta_{cg} - 0.0002 \delta_m \delta_{cg} \\
 A_{\dot{\alpha} q}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.0014 \\
 A_{\dot{\alpha} \alpha}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.8189 + 0.1680 \delta_m + 0.0004 \delta_{cg} - 0.0002 \delta_m \delta_{cg} \\
 A_{\dot{\alpha} q}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 0.9752 + 0.0050 \delta_m \\
 A_{\dot{q} v_T}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.0005 \\
 A_{\dot{q} \alpha}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 3.8958 + 0.0161 \delta_m + 1.5438 \delta_{cg} - 0.0145 \delta_m \delta_{cg} \\
 A_{\dot{q} q}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.8027 - 0.0163 \delta_m + 0.0516 \delta_{cg} + 0.0010 \delta_m \delta_{cg} \\
 B_{\dot{v}_T \delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 2.0707 - 0.1111 \delta_m - 0.0473 \delta_{cg} + 0.0134 \delta_m \delta_{cg} \\
 B_{\dot{v}_T \delta_{th}}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 7.7386 - 1.5864 \delta_m + 0.0057 \delta_{cg} + 0.0010 \delta_m \delta_{cg} \\
 B_{\dot{\alpha} \delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 0.1548 - 0.0315 \delta_m + 0.0001 \delta_{cg} - 0.0005 \delta_m \delta_{cg} \\
 B_{\dot{\alpha} \delta_{th}}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.0074 + 0.0001 \delta_m + 0.0004 \delta_{cg}
 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B_{\dot{q}\delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 4.3910 - 0.0126 \delta_m - 0.2810 \delta_{cg} + 0.0024 \delta_m \delta_{cg} \\ B_{\dot{q}\delta_{th}}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -0.1228 + 0.0076 \delta_m - 0.0009 \delta_{cg} - 0.0001 \delta_m \delta_{cg} \\ C_{n_z v_T}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 0.0170 \\ C_{n_z \alpha}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 9.5978 - 1.9370 \delta_m - 0.0087 \delta_{cg} - 0.0010 \delta_m \delta_{cg} \\ C_{n_z q}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 0.2926 - 0.0589 \delta_m - 0.0001 \delta_{cg} \\ D_{n_z \delta_e}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & -1.8267 + 0.3681 \delta_m + 0.0053 \delta_m \delta_{cg} \\ D_{n_z \delta_{th}}(\delta_m, \delta_{cg}) & = & 0.0096 + 0.0003 \delta_m - 0.0007 \delta_{cg} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Finalement, le système (4.24)-(4.25) est mis sous la forme d'une *LFT*, comme indiqué sur la figure 4.20. La perturbation ( $\delta_m$ ) est répétée 8 fois tandis que la perturbation ( $\delta_{cg}$ ) est répétée 4 fois.

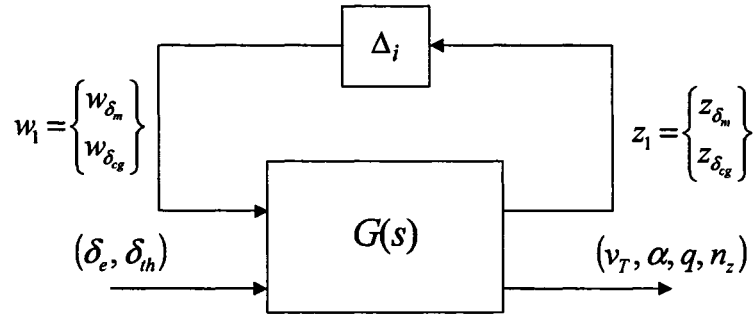


Figure 4.20 Mise sous forme d'une *LFT*

Par ailleurs, la représentation d'état associée au transfert  $G(s)$ , est donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{bmatrix} w_{\delta_m} \\ w_{\delta_{cg}} \end{bmatrix} = \Delta_i \begin{bmatrix} z_{\delta_m} \\ z_{\delta_{cg}} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Après réduction, le bloc d'incertitude obtenu est de dimension 6 :

$$\Delta_i = \text{diag}(\delta_m I_4, \delta_{cg} I_2) \quad (4.28)$$

### 4.2.3 Structure de la loi de commande

Le correcteur sera synthétisé selon la structure de commande à 2 degrés de liberté, (voir figure 4.21). Le schéma de synthèse intègre les incertitudes paramétriques sur les coefficients aérodynamiques, les bruits de mesure ainsi que deux modèles de poursuite, et des signaux d'erreurs pondérés utilisés pour exprimer les spécifications du cahier des charges. On y trouve aussi un ensemble "actionneur/engin" et quatre capteurs.

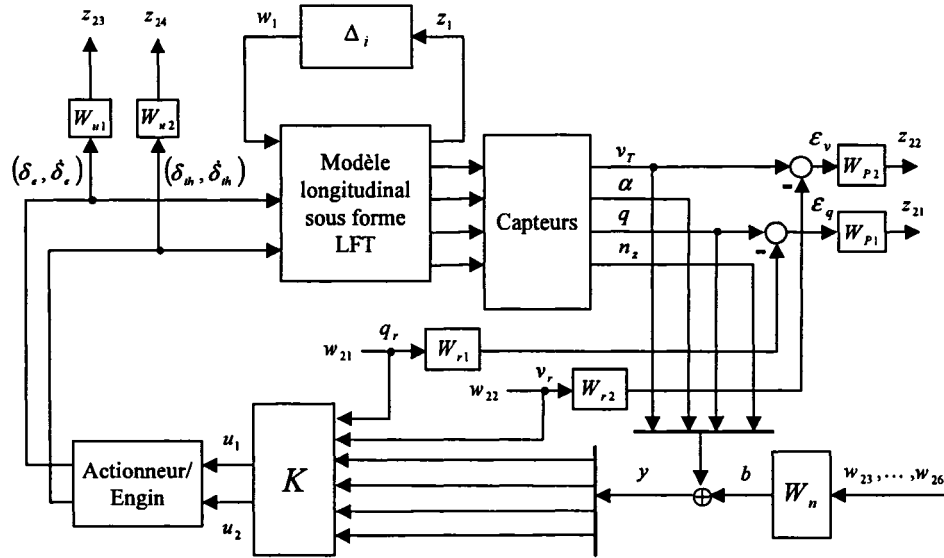


Figure 4.21 Schéma d'interconnection pour la  $\mu$ -synthèse

Les différents signaux du système sont définis comme suit :

- Le vecteur d'entrées exogènes  $w_2$ , de dimension 6, contient 4 signaux correspondant aux bruits de capteurs (sur les sorties mesurées  $v_T$ ,  $\alpha$ ,  $q$  et  $n_z$ ) et deux signaux de consigne  $q_r$  et  $v_r$ .

- Le vecteur des sorties régulées  $z_2$ , de dimension 4, contient :
  - 2 signaux d'erreurs pondérées correspondant aux objectifs de performance.
  - 4 signaux d'erreurs pondérées correspondant à des limitations d'amplitudes sur les sorties actionneur/moteur  $\delta_e$  et  $\delta_{th}$ , et leurs dérivées  $\dot{\delta}_e$  et  $\dot{\delta}_{th}$ .
- Le vecteur  $u$  des entrées de commande, contient les 2 entrées  $u_1$  et  $u_2$  de l'ensemble actionneur/moteur.
- Enfin, le vecteur  $y$  des sorties, contient les 4 sorties mesurées  $v_T$ ,  $\alpha$ ,  $q$  et  $n_z$ .

#### 4.2.3.1 Spécifications de synthèse

- **Modèles de référence :**

1. Pour la réponse en tangage, on cherche à se rapprocher le plus possible d'une fonction de transfert du deuxième ordre, telle que :

$$W_{r1}(s) = 4^2 \frac{e^{-0.1s}}{s^2 + 2(0.6)(4)s + 4^2}$$

2. Pour la réponse en vitesse, on cherche à se rapprocher le plus possible d'une fonction de transfert du premier ordre, telle que :

$$W_{r2}(s) = \frac{1}{0.9s + 1}$$

- **Performance et stabilité robustes :**

Le schéma (4.21) fait apparaître les transferts suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{11} = \mathcal{F}_{q_r \rightarrow \varepsilon_q} \\ \mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_{v_r \rightarrow \varepsilon_v} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_{21} = \mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e} \\ \mathcal{F}_{22} = \mathcal{F}_{v_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e} \end{array} \right.$$

que l'on associera respectivement aux objectifs de performance et de robustesse. Finalement, le choix des pondérations est fait à partir des spécifications du cahier des charges. D'où, le choix suivant :

**Les filtres  $W_{p1}$ ,  $W_{p2}$  :** Les gabarits fréquentiels choisis sont :

$$W_{p1}(s) = 0.01 \frac{s + 100}{s + 0.2} \quad \text{et} \quad W_{p2}(s) = 0.16 \frac{s + 50}{s + 0.2}$$

dans la mesure où le critère de performances porte sur la qualité du suivi de consignes en  $q$  et  $v_T$ .

**Les filtres  $W_{u1}$ ,  $W_{u2}$  :** On procédera de façon similaire en ce qui concerne le réglage des filtres sur les signaux de commandes.

$$W_{u1} = W_{u2} = \begin{pmatrix} W_\delta & 0 \\ 0 & W_\delta \end{pmatrix}$$

où  $W_\delta = \frac{0.01 \times (s/10+1)}{s/1000+1}$  est un filtre passe-haut du premier ordre, tandis que  $W_\delta = 0.02$  est un simple gain statique.

**Le filtre  $W_n$  :** Comme précédemment, pour limiter l'effet des bruits de mesure sur les sorties, on utilise seulement des gains.

$$W_n = 0.01 \, I_4$$

#### 4.2.4 Procédure de synthèse

Toutes les spécifications de synthèse ont été regroupées en un unique objectif de performance robuste, portant sur le transfert entre  $w_2$  et  $z_2$ , comme indiqué sur la figure 4.22.

On applique ici la méthode de résolution itérative décrite au paragraphe 2.4.5, par l'algorithme *D-K itération*. Comme nous l'avons fait sur l'application précédente, on cherche un



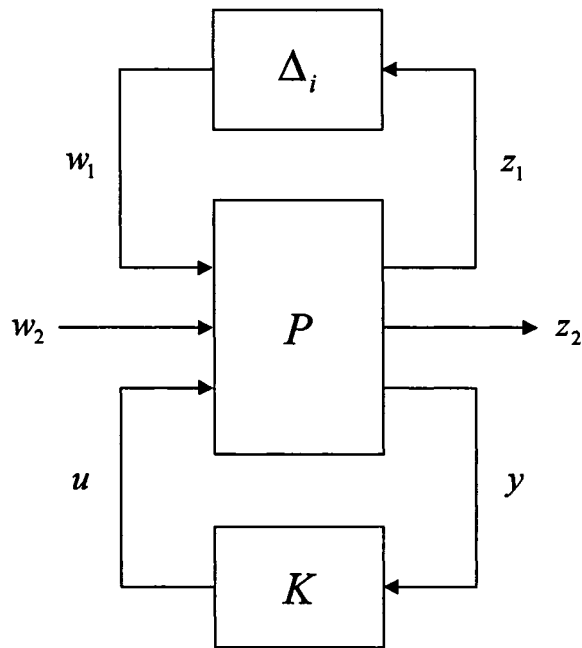


Figure 4.22 Représentation du problème de synthèse *LTI* robuste

correcteur  $K$ , tel que :

$$\mu_{\Delta}(\mathcal{F}_l(P(j\omega), K(j\omega))) < 1 \quad \text{pour tout } \omega$$

Un résultat satisfaisant a été obtenu après la première itération :

Tableau XI Niveaux de performance obtenus par la *D-K itération*

Itération #	Ordre du correcteur	Ordre des <i>scalings</i> $D$	Performance $\gamma$	Valeur de $\mu$
1	22	0	5.523	0.414

Après réduction, le correcteur résultant, est d'ordre 16. La valeur de  $\mu$  pour la performance robuste vaut 0.42. La figure 4.23 représente la performance robuste pour ce correcteur.

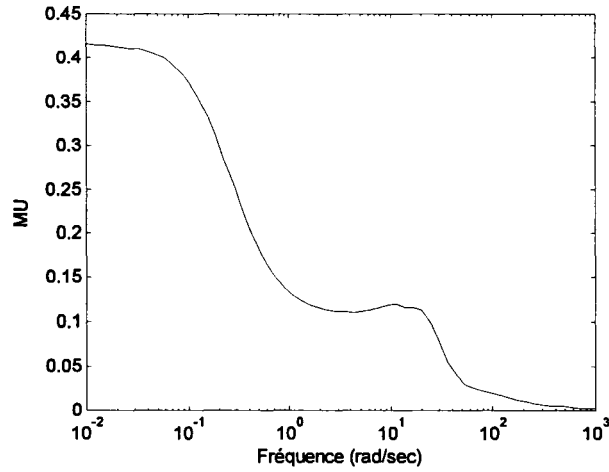


Figure 4.23 Performance robuste

#### 4.2.5 Analyse des résultats

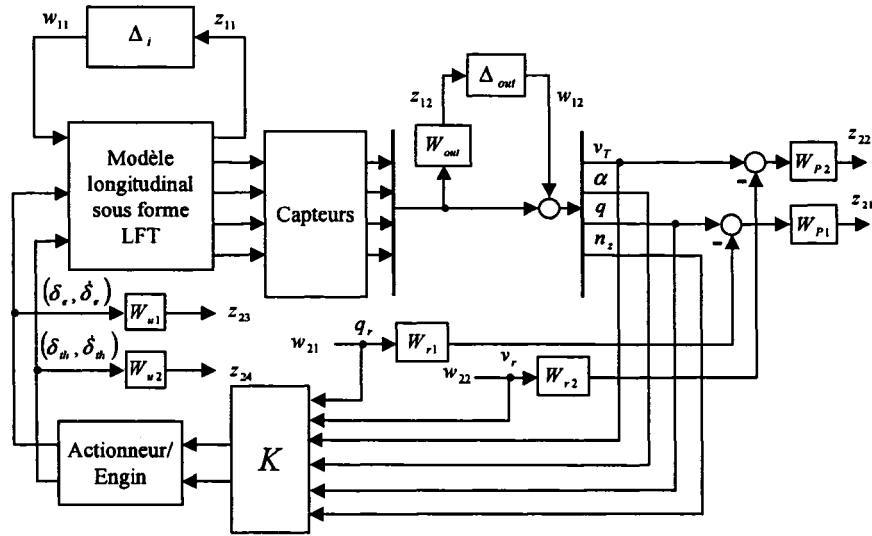
Avant de procéder à l'implémentation sur le système non linéaire, puis aux validations finales, on propose ici une rapide analyse du correcteur en boucle fermée.

##### Analyse fréquentielle

Le schéma d'interconnection pour la  $\mu$ -analyse, est donné par la figure 4.24. Comme précédemment, nous avons choisi de modéliser l'ensemble des 9 modèles définissant notre système, sous la forme d'un modèle *LFT* soumis à une perturbation structurée  $\Delta_i$ , telle que :

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} \delta_m I_8 & 0 \\ 0 & \delta_{cg} I_4 \end{pmatrix}$$

où  $\delta_m$  et  $\delta_{cg}$  sont deux scalaires réels dont la variation est comprise entre -1 et 1. On tiendra compte par ailleurs de la présence d'incertitudes dynamiques au niveau des capteurs. Pour cela, nous avons représenté ces dynamiques négligées, par des filtres de type passe-haut, tels que :

Figure 4.24 Schéma d'interconnection pour la  $\mu$ -analyse

$$W_{out}(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.4(s+0.25)}{s+25} I_2 & 0 \\ 0 & \frac{0.6(s+0.5)}{s+50} I_2 \end{pmatrix}$$

Un tel choix permet de représenter :

- une erreur (au niveau des capteurs anémométriques) de 0.4% en basses fréquences, qui augmente jusqu'à 40% en hautes fréquences.
- une erreur (au niveau des capteurs inertiels) de 0.6% en basses fréquences, qui augmente jusqu'à 60% en hautes fréquences.

On notera enfin la présence des pondérations suivantes :  $W_{p1}$ ,  $W_{p2}$ ,  $W_{u1}$  et  $W_{u2}$  dont le choix est le même que précédemment.

Les figures 4.25 et 4.26 présentent les tracés de  $\mu$  pour l'analyse de la robustesse et de la performance. On peut constater que le système en boucle fermée, satisfait à la fois la condition de stabilité robuste et de performance robuste, ce qui témoigne d'un comportement robuste de cette loi de commande.

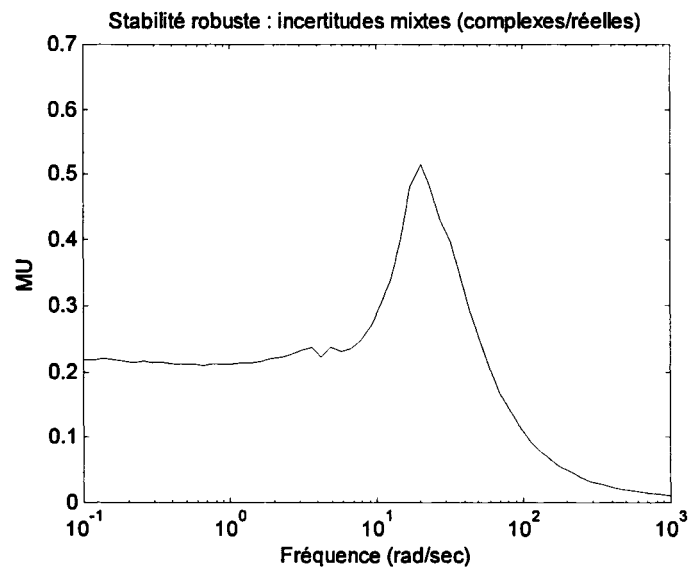


Figure 4.25 Vérification de la stabilité robuste

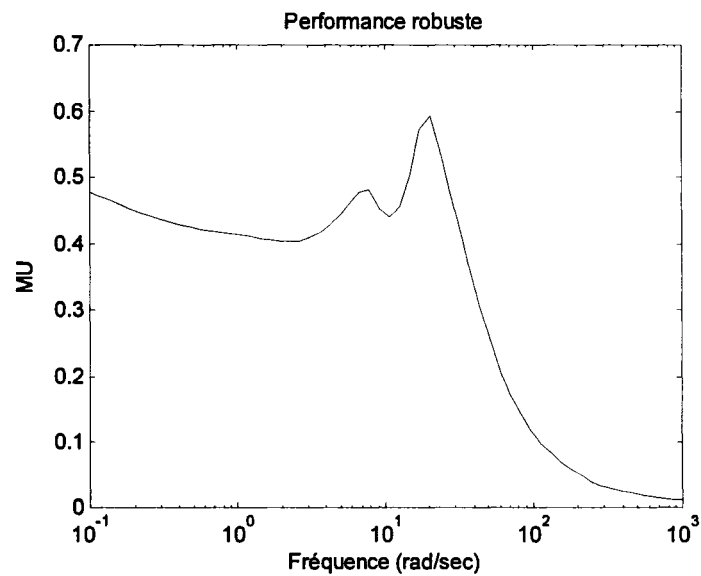


Figure 4.26 Vérification de la performance robuste

## Analyse des performances et qualités de vol

Nous avons également vérifié les spécifications du cahier des charges, en termes de qualité de vol (tableau VIII). Les résultats de ces tests sont rassemblés dans le tableau XII. En ce qui concerne les valeurs du CAP (*Control Anticipation Parameter*), on les a tracées dans le plan, en fonction de l'amortissement  $\zeta_{sp}$ , comme le montre la figure 4.28. Globalement, on constate que les spécifications de performance et de qualité de vol (niveau 1) sont entièrement satisfaites, pour l'ensemble des 9 configurations (tableaux IX et X).

## Simulations temporelles

Conformément au schéma d'implémentation donné par la figure 4.27, le correcteur *LTI* réduit a d'abord été discrétisé. La période d'échantillonnage que nous avons utilisée est de 5 msec.

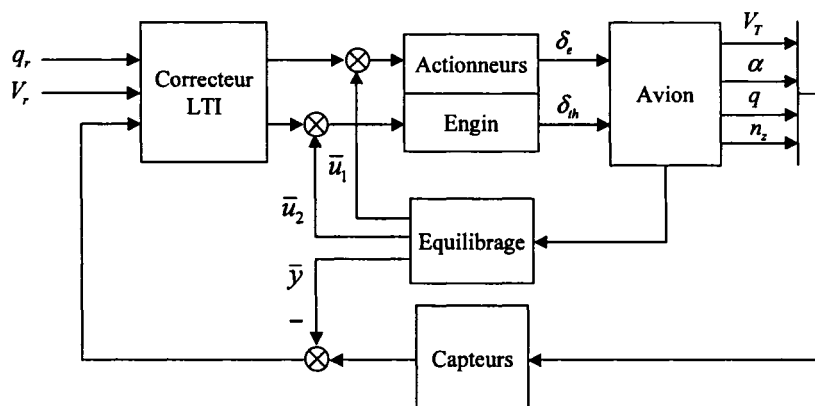


Figure 4.27 Schéma d'implémentation

Les figures 4.29 et 4.30 présentent des simulations temporelles, réalisées à partir du système non linéaire complet, intégrant la modélisation des actionneurs et capteurs. Dans la mesure où la conception du correcteur repose sur la linéarisation du système ADMIRE, nous avons modifié les signaux d'entrées/sorties de celui-ci, comme indiqué sur le schéma 4.27.

Pour l'entrée de référence  $q_r$ , on utilise un échelon d'amplitude 5 *deg/sec* d'une durée de 5 *sec*. Ce signal est appliqué à l'instant initial de la simulation. Une deuxième simulation temporelle est réalisée avec l'entrée de référence  $V_r$ . On utilise dans ce cas, un échelon d'amplitude 4 *m/sec* qui dure aussi 5 *sec*. Les résultats dans le domaine temporel satisfont les spécifications de performance puisque les temps de réponse sont inférieurs à 2 *sec* pour  $q$  et 4 *sec* pour  $v_T$ . De plus, On ne constate aucun dépassement sur la sortie  $v_T$ , alors que la sortie  $q$  présente un dépassement inférieur à 10%. Enfin, les erreurs statiques sur  $\varepsilon_q$  et  $\varepsilon_v$  sont pratiquement nulles.

On remarque de plus le faible couplage entre  $q$  et  $v_T$ , puisque dans chaque cas, on ne dépasse pas les limites fixées par le cahier des charge.

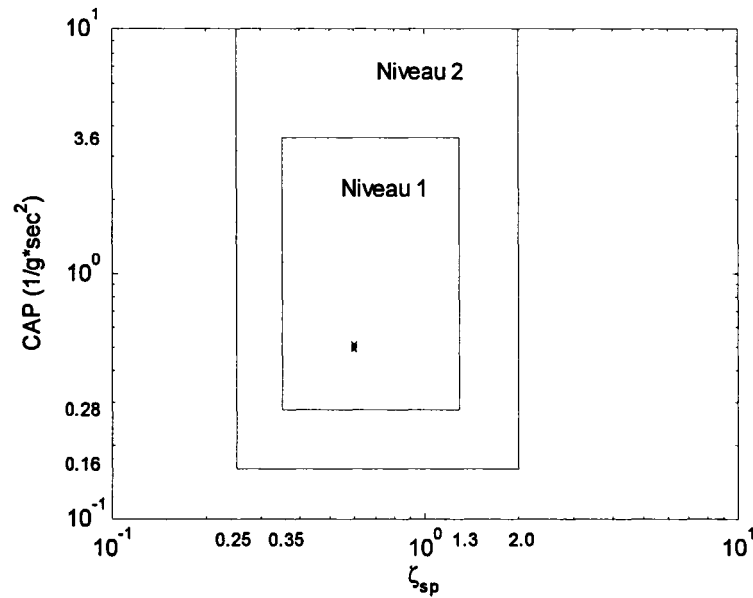
#### 4.2.6 Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons appliqué la technique de  $\mu$ -synthèse, au problème de pilotage longitudinal robuste d'un avion de chasse. Disposant d'une forme *LFT* du modèle d'avion, nous avons utilisé la même approche fréquentielle que dans l'application précédente. Cette approche, nous a permis d'obtenir une loi de commande assurant à la fois la performance et la robustesse à l'ensemble des neuf configurations définissant le point de vol. De plus, le correcteur résultant, assure un découplage satisfaisant entre les deux chaînes de commande, ce qui permet au pilote de gérer ces deux chaînes de façon indépendante.

D'autre part, il faut souligner la méthodologie de synthèse que nous avons adoptée dans la résolution de ce problème. En effet, on s'est attaché à montrer que ce sont les spécifications du cahier des charges qui conduisent à construire le modèle de synthèse. Enfin la synthèse d'un correcteur à 2 degrés de liberté se fait de façon très naturelle.

Tableau XII Performances et qualités de vol obtenues.

$(m[kg]; \Delta x_{cg}[m])$	$Drb/q_{ss}$	$\omega_{BW}$	$\tau_p$	$\zeta_{sp}$
(7280; -0.15)	0.0665	1.7221	0.2130	0.5979
(7280; 0)	0.0754	1.7147	0.2138	0.5979
(7280; 0.15)	0.0710	1.7187	0.2134	0.5979
(9100; -0.15)	0.0629	1.7219	0.2130	0.5978
(9100; 0)	0.0747	1.7140	0.2140	0.5978
(9100; 0.15)	0.0689	1.7182	0.2135	0.5978
(10920; -0.15)	0.0598	1.7205	0.2132	0.5976
(10920; 0)	0.0740	1.7124	0.2143	0.5976
(10920; 0.15)	0.0676	1.7172	0.2136	0.5976

Figure 4.28 CAP vs  $\zeta_{sp}$  pour les phases de vol Catégorie A

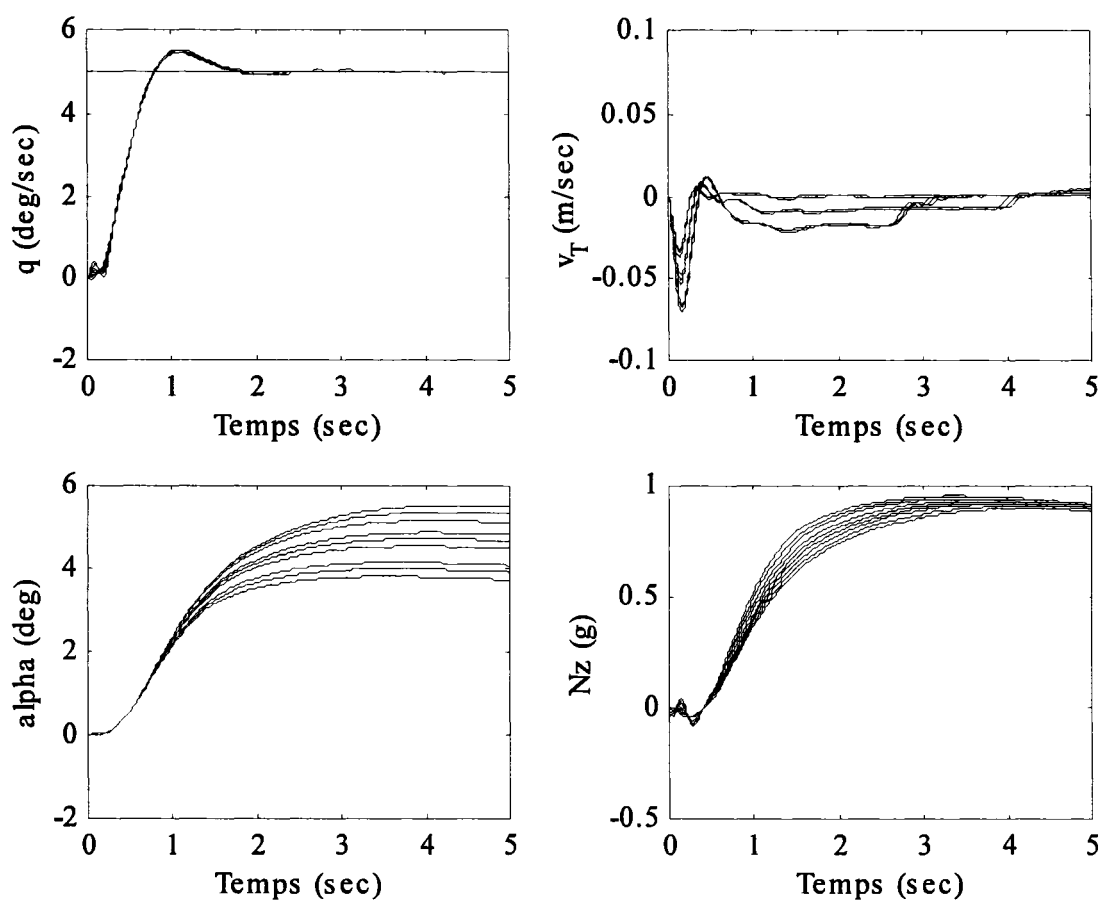


Figure 4.29 Simulations non linéaires illustrant les 9 configurations du système



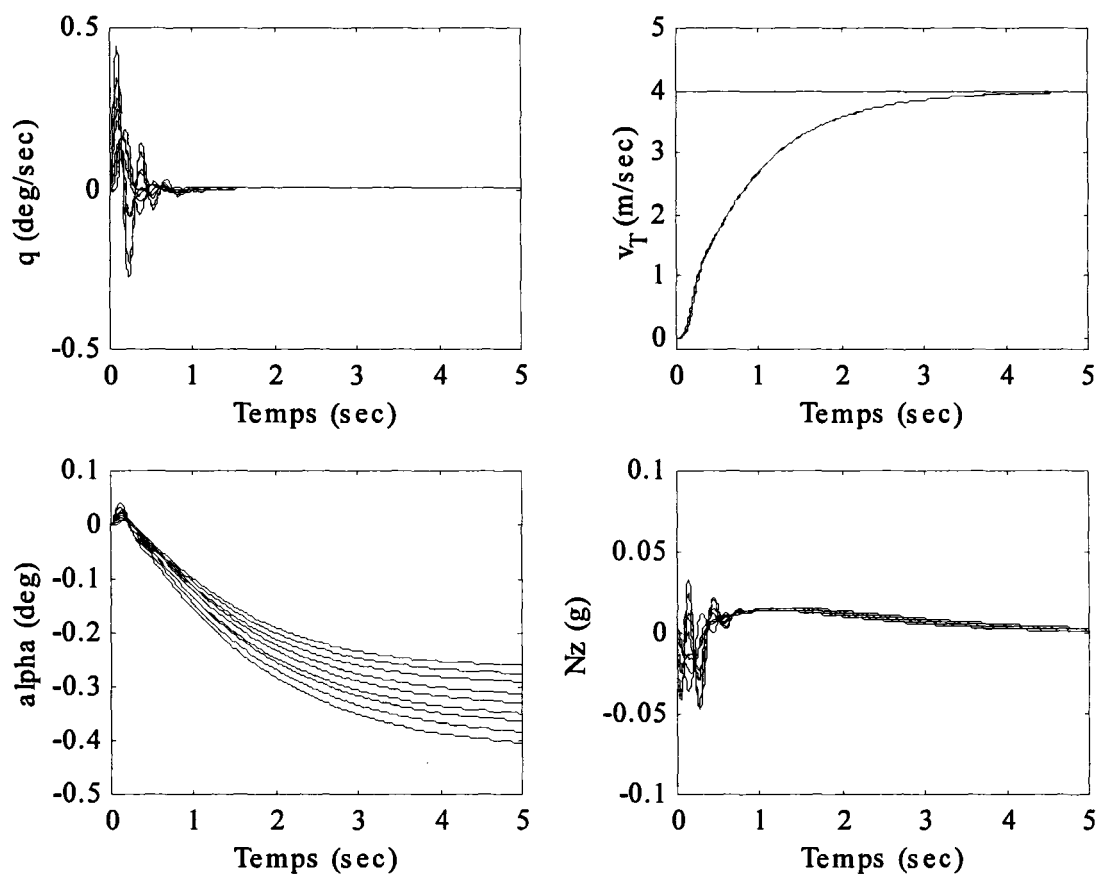


Figure 4.30 Simulations non linéaires illustrant les 9 configurations du système

## CHAPITRE 5

### SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR *LPV* POUR LE PILOTAGE D'UN AVION DE CHASSE

L'application que nous allons développer dans ce chapitre concerne la conception d'une loi de commande robuste à paramètres variants permettant de faciliter le pilotage d'un avion de chasse dans le plan longitudinal.

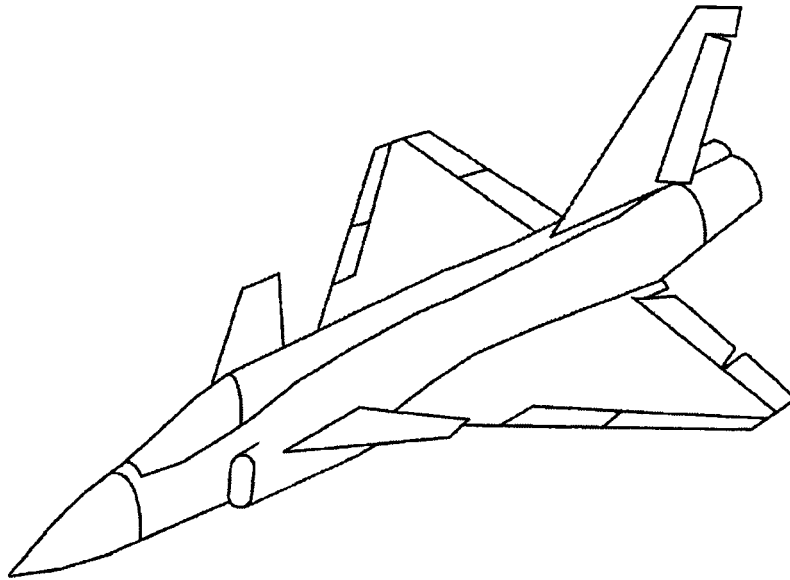


Figure 5.1 Avion de chasse avec configuration *delta-canard*

Le système pris en considération est celui du modèle ADMIRE détaillé dans la section 4.2. Dans cette section, nous avons effectué une synthèse *LTI*. L'approche proposée ici est différente. Nous ne considérons plus l'évolution de l'avion autour d'un point de vol, mais sur un domaine plus large, défini par un ensemble de points de vol. Il faut donc s'attendre à des variations paramétriques, ainsi qu'à d'importantes non-linéarités. Par conséquent, la loi de commande devra s'adapter à ces évolutions, qui engendrent des variations importantes sur les dynamiques de l'appareil. De plus, pour répondre au cahier

des charge, elle doit :

- assurer un niveau de performance élevé sur l'ensemble du domaine de vol,
- garantir la stabilité de l'avion et assurer des marges de robustesse satisfaisantes.

La démarche que nous proposons de suivre, repose sur le concept de système *LPV* et la technique de synthèse employée s'appuiera sur une modélisation de type *LFT* jugée mieux adaptée. Ce choix permettra notamment d'appliquer l'algorithme de synthèse de lois de commande *LPV* développé au chapitre 3. Le correcteur obtenu sera analysé puis implémenté sur le système non linéaire. Une série de simulations temporelles viendra finalement valider cette approche.

## 5.1 Description générale

### 5.1.1 Equations du mouvement longitudinal

Dans cette application, on suppose légitime le découplage des axes de tangage, de roulis et lacet, et on s'intéressera par la suite aux évolutions de l'avion dans le plan longitudinal, car il est ici question de contrôle de tangage.

Après linéarisation autour d'un point de vol, les équations du mouvement longitudinal sont décrites par la représentation simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\dot{\alpha}\alpha} & A_{\dot{\alpha}q} \\ A_{\dot{q}\alpha} & A_{\dot{q}q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\dot{\alpha}\delta_e} \\ B_{\dot{q}\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.1)$$

où les états  $\alpha$  et  $q$  correspondent respectivement à l'angle d'incidence, et à la vitesse de tangage  $q$ , tandis que la commande  $\delta_e$  représente le débattement des gouvernes aérodynamiques couplées agissant en guise de profondeur. Les mesures disponibles sont la vitesse de tangage  $q$  et le facteur de charge vertical  $n_z = -V_{T_e}(\dot{\alpha} - q)/g$ , où  $V_{T_e}$  désigne la vitesse de l'avion par rapport à l'air, en régime établi.

L'équation de sortie est donnée par :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_{n_z\alpha} & C_{n_zq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{n_z\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.2)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\dot{\alpha}\alpha} = Z_\alpha/(mV_{T_e}); \quad Z_\alpha = -\bar{q}SC_{z\alpha}; \\ A_{\dot{\alpha}q} = 1 + Z_q/(mV_{T_e}); \quad Z_q = -\bar{q}S\bar{c}/(2V_{T_e})C_{zq}; \\ A_{\dot{q}\alpha} = 1/I_y [M_\alpha + (Z_\alpha/(mV_{T_e}))M_{\dot{\alpha}}]; \quad M_{\dot{\alpha}} = \bar{q}S\bar{c}(\bar{c}/(2V_{T_e}))C_{m\dot{\alpha}}; \\ M_\alpha = \bar{q}S\bar{c}C_{m\alpha} - x_{cg}\bar{q}SC_{z\alpha} + z_{cg}\bar{q}SC_{x\alpha} + M_{T\alpha}; \\ A_{\dot{q}q} = 1/I_y [M_q + (1 + Z_q/(mV_{T_e}))M_{\dot{\alpha}}]; \quad M_q = \bar{q}S\bar{c}(\bar{c}/(2V_{T_e}))C_{mq} - x_{cg}\bar{q}SC_{zq}; \\ B_{\dot{\alpha}\delta_e} = Z_{\delta_e}/(mV_{T_e}); \quad Z_{\delta_e} = -\bar{q}SC_{z\delta_e}; \\ B_{\dot{q}\delta_e} = 1/I_y [M_{\delta_e} + (Z_{\delta_e}/(mV_{T_e}))M_{\dot{\alpha}}]; \\ M_{\delta_e} = \bar{q}S\bar{c}C_{m\delta_e} - x_{cg}\bar{q}SC_{z\delta_e} + z_{cg}\bar{q}SC_{x\delta_e}; \\ C_{n_z\alpha} = -Z_\alpha/(mg); \\ C_{n_zq} = -Z_q/(mg); \\ D_{n_z\delta_e} = -Z_{\delta_e}/(mg). \end{array} \right.$$

Les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  s'expriment bien sûr, en fonction des caractéristiques aérodynamiques de l'avion, et dépendent principalement du point de vol. Pour plus de détails sur la définition de ces coefficients, le lecteur pourra se reporter à [42] ou [53].

### 5.1.2 Nature et rôle du correcteur

Avant d'aborder les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse, on doit avant tout préciser ici, qu'il ne s'agit pas de concevoir un système de pilotage automatique longitudinal complet, mais uniquement de régler la partie *short-period* portant sur la dynamique rapide. Son rôle est de permettre un asservissement direct de la chaîne de tangage, de sorte que le pilote n'ait qu'à afficher la consigne à suivre, sans se soucier des paramètres (altitude, vitesse) susceptibles d'influencer le comportement de l'avion.

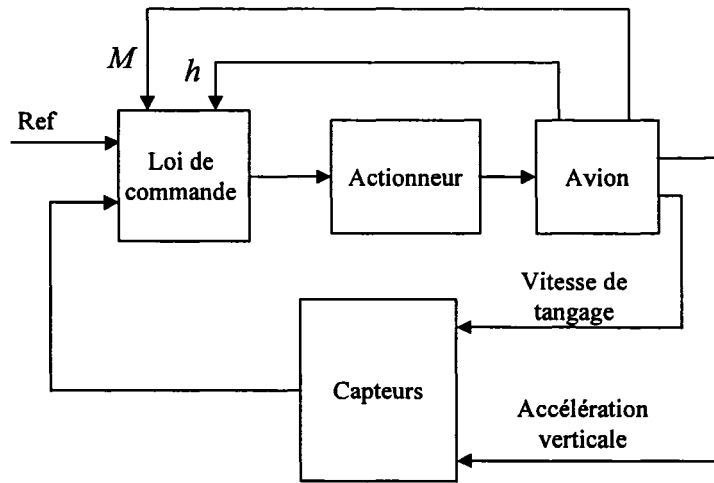


Figure 5.2 Structure de commande pour le contrôle en tangage

Pour élaborer le signal de commande, le contrôleur (*pitch-rate control augmentation system*) utilise essentiellement comme mesures : la vitesse de tangage et l'accélération verticale (*normal load factor*), voir figure 5.2. Il devra par ailleurs s'adapter aux évolutions du modèle en intégrant les paramètres ( $h$  et  $M$ ) qui caractérisent le point de vol. La loi de commande recherchée est donc non stationnaire. Compte tenu du haut niveau de performance requis sur un large domaine de vol, nous illustrons par la suite le bien fondé de ce choix de méthodes de synthèse *LPV*.

## 5.2 Modélisation

Compte tenu des éléments qui précèdent, nous allons simplement chercher à modéliser la dynamique rapide de l'avion. Le but est d'obtenir un système *LPV* exploitable par les techniques développées au chapitre 3.

### 5.2.1 Le domaine de vol

Le domaine de vol considéré dans cette application est représenté sur la figure 5.3, où chaque point correspond à une condition de vol, caractérisée par l'altitude  $h$  et le nombre

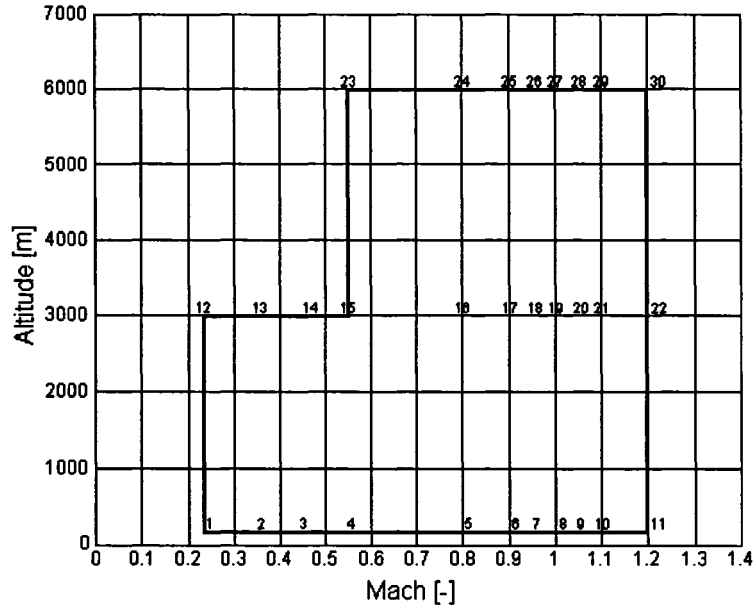


Figure 5.3 Domaine de vol dans le plan  $(M, h)$

de Mach  $M$ .

Les équations (5.1)-(5.2) décrivent donc un système *LPV* dont les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}(h, M), A_{\dot{\alpha}q}(h, M), B_{\dot{\alpha}\delta_e}(h, M), \dots\}$  sont ici des fonctions des paramètres (Altitude  $h$  et nombre de Mach  $M$ ) qui évoluent dans le domaine de vol (figure 5.3).

### 5.2.2 Approximation par un modèle *LFT*

Dans la construction de ce modèle, on distingue deux grandes étapes :

- Interpolation des éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  par des fonctions rationnelles et/ou polynômiales,
- Mise sous forme *LFT* (cf. chapitre 2).

La première est spécifique de la nature de l'application considérée. C'est aussi une étape préliminaire très importante qui permet de définir les éléments du bloc paramétrique  $\Theta$  de la *LFT*.

## Interpolations

La technique utilisée repose sur une interpolation bi-dimensionnelle, au sens des moindres carrés, d'un ensemble de 30 modèles de la forme (5.1)-(5.2). Le calcul des modèles est effectué pour différentes valeurs d'altitude  $\{20m, 3000m, 6000m\}$  et du nombre de Mach  $\{0.22, 0.35, 0.45, 0.55, 0.80, 0.90, 0.95, 1.00, 1.05, 1.10, 1.20\}$ .

Avant de procéder à l'interpolation, nous commençons par exprimer les variations d'altitude  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$  et du nombre de Mach  $M \in [\underline{M}, \bar{M}]$ , sous une forme normalisée, il vient :

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 \delta_h, & |\delta_h| &\leq 1 \\ M &= M_0 + M_1 \delta_M, & |\delta_M| &\leq 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $h_0 = (\underline{h} + \bar{h})/2$ ,  $h_1 = (\bar{h} - \underline{h})/2$ ,  $M_0 = (\underline{M} + \bar{M})/2$  et  $M_1 = (\bar{M} - \underline{M})/2$ . Ainsi, les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  s'exprimeront à présent en fonction des variables ( $\delta_h$  et  $\delta_M$ ) au lieu de ( $h$  et  $M$ ).

Dans le but de limiter la complexité du modèle, les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  seront approchés par des fonctions polynômiales en  $\delta_h$  et  $\delta_M$ , de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\dot{\alpha}\alpha} &= A_{\dot{\alpha}\alpha}^0 + A_{\dot{\alpha}\alpha}^1 \delta_h + A_{\dot{\alpha}\alpha}^2 \delta_M + A_{\dot{\alpha}\alpha}^3 \delta_h \delta_M \\ A_{\dot{\alpha}q} &= A_{\dot{\alpha}q}^0 + A_{\dot{\alpha}q}^1 \delta_h + A_{\dot{\alpha}q}^2 \delta_M + A_{\dot{\alpha}q}^3 \delta_h \delta_M \\ B_{\dot{\alpha}\delta_e} &= B_{\dot{\alpha}\delta_e}^0 + B_{\dot{\alpha}\delta_e}^1 \delta_h + B_{\dot{\alpha}\delta_e}^2 \delta_M + B_{\dot{\alpha}\delta_e}^3 \delta_h \delta_M \\ C_{n_z\alpha} &= C_{n_z\alpha}^0 + C_{n_z\alpha}^1 \delta_h + C_{n_z\alpha}^2 \delta_M + C_{n_z\alpha}^3 \delta_h \delta_M \\ D_{n_z\delta_e} &= D_{n_z\delta_e}^0 + D_{n_z\delta_e}^1 \delta_h + D_{n_z\delta_e}^2 \delta_M + D_{n_z\delta_e}^3 \delta_h \delta_M \\ &\vdots \end{aligned} \right. \quad (5.4)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\dot{\alpha}\alpha}(\delta_h, \delta_M) &= -1.9216 + 0.6318 \delta_h - 1.5418 \delta_M + 0.3942 \delta_h \delta_M \\ A_{\dot{\alpha}q}(\delta_h, \delta_M) &= 0.9771 + 0.0024 \delta_h + 0.0183 \delta_M - 0.0012 \delta_h \delta_M \\ A_{\dot{q}\alpha}(\delta_h, \delta_M) &= -12.6745 + 8.0843 \delta_h - 44.4783 \delta_M + 2.7475 \delta_h \delta_M \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_{\dot{q}q}(\delta_h, \delta_M) & = & -2.0157 + 0.4880 \delta_h - 1.1329 \delta_M + 0.3755 \delta_h \delta_M \\ B_{\dot{\alpha}\delta_e}(\delta_h, \delta_M) & = & 0.1995 - 0.0213 \delta_h - 0.0073 \delta_M + 0.0007 \delta_h \delta_M \\ B_{\dot{q}\delta_e}(\delta_h, \delta_M) & = & 20.1174 - 4.5809 \delta_h + 16.9868 \delta_M - 3.8893 \delta_h \delta_M \\ C_{n_z\alpha}(\delta_h, \delta_M) & = & 55.7965 - 21.9749 \delta_h + 71.1299 \delta_M - 18.5000 \delta_h \delta_M \\ C_{n_zq}(\delta_h, \delta_M) & = & 0.4741 - 0.0134 \delta_h - 0.2622 \delta_M - 0.0434 \delta_h \delta_M \\ D_{n_z\delta_e}(\delta_h, \delta_M) & = & -4.9583 + 0.5227 \delta_h - 2.0803 \delta_M + 0.3879 \delta_h \delta_M \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Notons par ailleurs que les erreurs de modèle liées bien sûr aux erreurs d'interpolation, mais aussi aux erreurs dues à la linéarisation, seront prises en compte sous forme de perturbation multiplicative en entrée, comme on le verra lors de la construction du modèle de synthèse.

### Mise sous forme *LFT*

En appliquant les techniques de modélisation exposées aux paragraphes 2.2, on obtient ainsi le modèle *LFT* correspondant, comme indiqué sur la figure 5.5. La variation d'altitude ( $\delta_h$ ) est répétée 3 fois tandis que la variation de vitesse ( $\delta_M$ ) est répétée 6 fois.

La représentation d'état associée au transfert  $G(s)$ , est donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta 2} \\ D_{2\theta} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\theta \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} B_\theta & B_2 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

avec

$$\begin{bmatrix} w_{\delta_h} \\ w_{\delta_M} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} z_{\delta_h} \\ z_{\delta_M} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

A noter que le partitionnement des matrices est conforme aux dimensions du problème. Après réduction, le bloc paramétrique obtenu est de dimension 6 :

$$\Theta(t) = \text{diag}(\theta_1 I_3, \theta_2 I_3), \quad \text{avec } \theta_1 = \delta_h \text{ et } \theta_2 = \delta_M \quad (5.8)$$



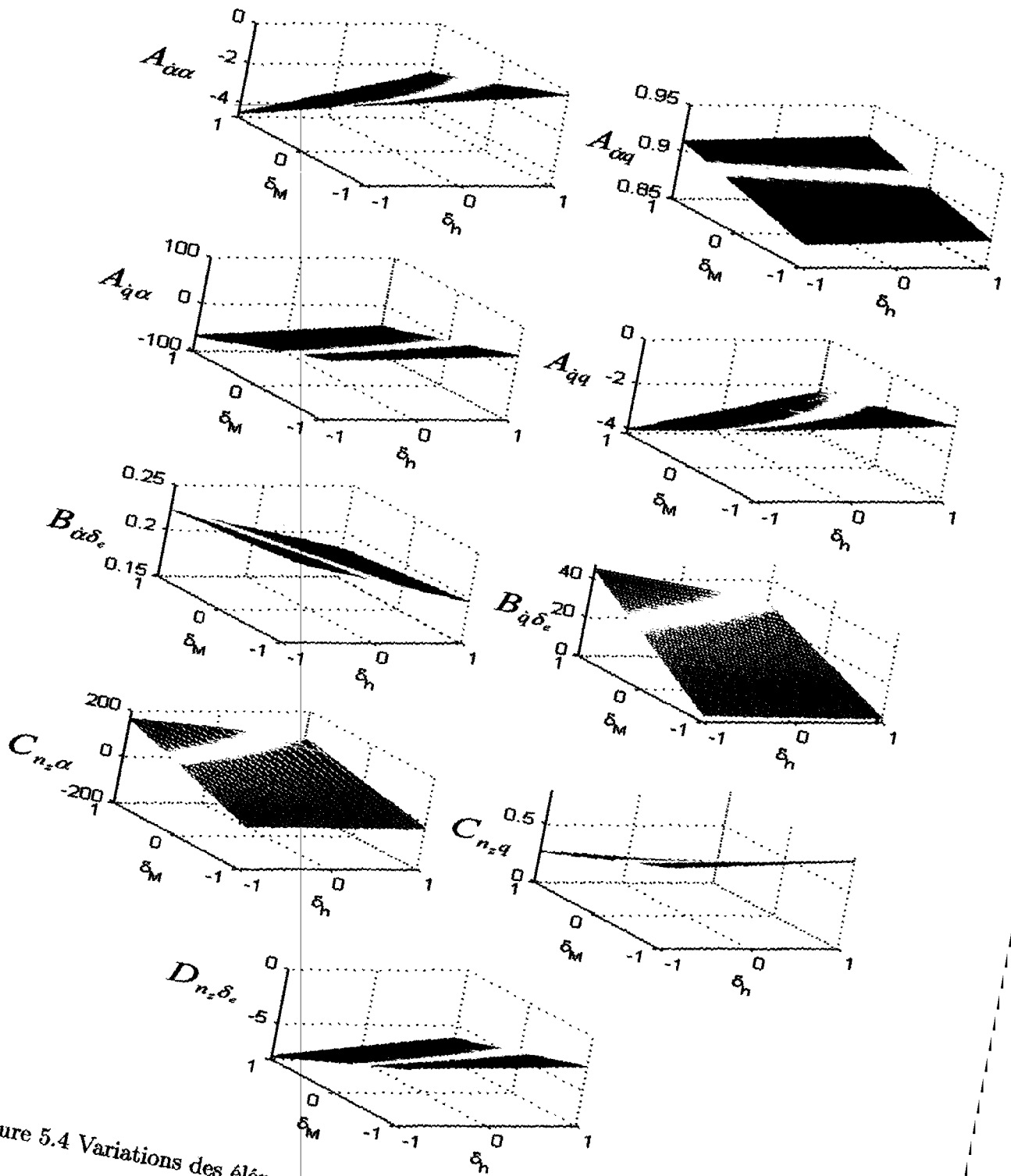


Figure 5.4 Variations des éléments  $\{A_{\alpha\alpha}, A_{\alpha q}, \dots\}$  en fonction de  $\delta_h$  et  $\delta_M$

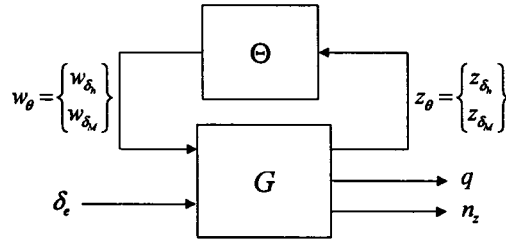


Figure 5.5 Représentation *LFT* de la dynamique rapide

Par ailleurs, on pourra vérifier que la *LFT* obtenue (5.6), est une réalisation minimale.

### 5.3 Construction du modèle de synthèse *LPV*

Nous présentons maintenant les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse *LPV* sur lequel nous appliquerons ensuite la méthode résumée par l'algorithme 3.4.1 : *Synthèse LPV robuste*.

#### 5.3.1 Spécifications : performances et robustesse

Le problème de commande considéré dans cette application, consiste à réaliser un asservissement de la vitesse de tangage, en laissant le contrôle de l'incidence à la charge du pilote. Il s'agit d'un choix classique dans la conception d'un pilotage longitudinal. Par ailleurs, en plus de répondre à des objectifs de pilotage classiques (qualités de vol et de manoeuvrabilité), la loi de commande doit assurer un niveau de performance élevé sur l'ensemble du domaine de fonctionnement, en prenant en compte l'évolution des dynamiques au cours du vol.

#### Modèle de référence et qualités de vol

Afin de satisfaire ces objectifs, qui correspondent également à une demande de la part des pilotes, on envisage un suivi de modèle de référence de la forme suivante :

$$W_r(s) = \frac{K_\theta (T_{\theta 2}s + 1) \exp(-\tau_\theta s)}{s^2 + 2 \zeta_{sp} \omega_{sp}s + \omega_{sp}^2} \quad (5.9)$$

Ce modèle est donc un système de second ordre, dont le choix des paramètres  $\{K_\theta, T_{\theta 2}, \zeta_{sp}, \omega_{sp}, \tau_\theta\}$  tient compte des spécifications du cahier des charges en termes de qualité de vol et de manoeuvrabilité des avions, comme décrites par la norme (MIL-STD-1797A). L'ensemble de ces spécifications est indiqué par le tableau suivant :

Tableau XIII Qualités de vol (QV) et spécifications en performance

QV & Performances	Contraintes à respecter
$Drb/q_{ss}$ ( <i>Gibson's Dropback</i> )	$0.0 < Drb/q_{ss} < 0.25 \text{ sec}$
$\omega_{BW}$ ( <i>Attitude Bandwidth</i> )	$> 1.75 \text{ rad/sec}$
$\tau_p$ ( <i>Phase Delay</i> )	$< 0.14 \text{ sec}$
$\zeta_{sp}$ ( <i>Short-Period Mode Damping Ratio</i> )	$0.35 < \zeta_{sp} < 1.30$
CAP ( <i>Control Anticipation Parameter</i> )	$0.16 < CAP < 3.6$

En plus, on doit également assurer la séparation des modes longitudinaux (phugoïde et oscillation d'incidence) et conserver la stabilité du mode phugoïde. Pour ce faire, nous avons choisi un modèle de référence stationnaire avec un amortissement de 0.6 et une pulsation de  $4 \text{ rad/sec}$  :

$$W_r(s) = \frac{4^2}{s^2 + 2(0.6)(4)s + 4^2} \quad (5.10)$$

## Robustesse

Afin de prendre en compte les erreurs de modélisation, mais aussi les imperfections du modèle mathématique<sup>1</sup>, nous avons intégré au modèle *LPV*, un bloc supplémentaire  $\{\Delta_u, W_u\}$ , où  $\Delta_u$  représente une incertitude de modèle non structurée, ramenée en entrée du système, tandis que  $W_u$  permet d'assurer  $\bar{\sigma}(\Delta_u) \leq 1$  à toute fréquence, (figure 5.6).

<sup>1</sup> utilisation d'un modèle simplifié, erreurs d'interpolation, etc.

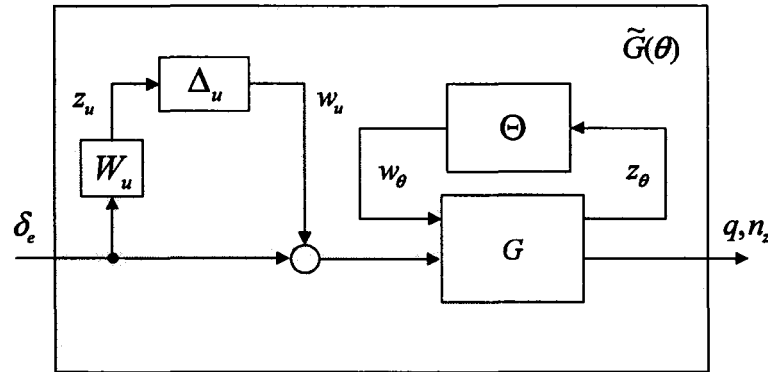


Figure 5.6 Représentation des incertitudes de modélisation

Le gabarit fréquentiel choisi pour  $W_u$  est :

$$W_u(s) = \frac{0.001 \times (s/100 + 1)}{s/10000 + 1} \quad (5.11)$$

ce qui signifie que le modèle *LPV* peut tolérer une erreur multiplicative de 0.1% en basse fréquence, qui augmente jusqu'à 10% en haute fréquence.

Par ailleurs, il convient d'inclure au schéma de synthèse d'autres spécifications de robustesse. Celles-ci devront traduire notamment les incertitudes au niveau de l'actionneur d'une part et du processus de mesure d'autre part. On traduira ces phénomènes par la modélisation de perturbations en entrée et en sortie (voir figure 5.8).

### 5.3.2 Structure de la loi de commande

On retiendra pour cette application, une structure de commande analogue à celle que nous avons utilisée pour le pilotage longitudinal d'un avion civil (paragraphe 4.1.3). Le *feedback*  $K_1$  a pour but de diminuer la sensibilité de la boucle fermée face aux incertitudes dynamiques et/ou paramétriques tandis que la *précommande*  $K_2$  améliore les performances sur la poursuite d'une référence (figure 5.7).

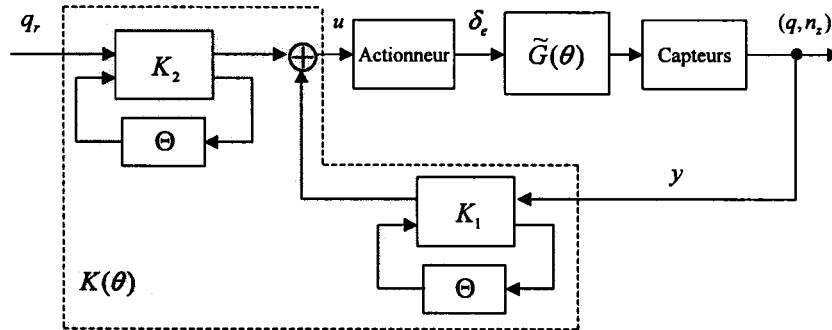


Figure 5.7 Structure de commande à 2 degrés de liberté

On y trouve également :

- un actionneur, décrit par :

$$F_1(s) = \frac{e^{-0.02s}}{0.05s + 1}$$

- deux capteurs inertiels (même fonction pour  $q$  et  $n_z$ ), dont les fonctions de transfert sont données par :

$$H_q(s) = H_{n_z}(s) = \frac{1 + 0.005346s + 0.0001903s^2}{1 + 0.03082s + 0.0004942s^2}$$

Notons par ailleurs, qu'au lieu de chercher à déterminer explicitement  $K_1(\theta)$  et  $K_2(\theta)$ , nous adoptons la même approche qui consiste à synthétiser un seul correcteur  $K(\theta)$ , selon la structure de commande à 2 degrés de liberté.

### 5.3.3 Description du modèle de synthèse

La procédure de construction du modèle de synthèse que nous détaillons maintenant est largement inspirée de la formulation classique des problèmes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . La différence essentielle réside dans le fait que les opérateurs dont on va rechercher à minimiser le gain, dépendent du paramètre variant  $\theta$ .

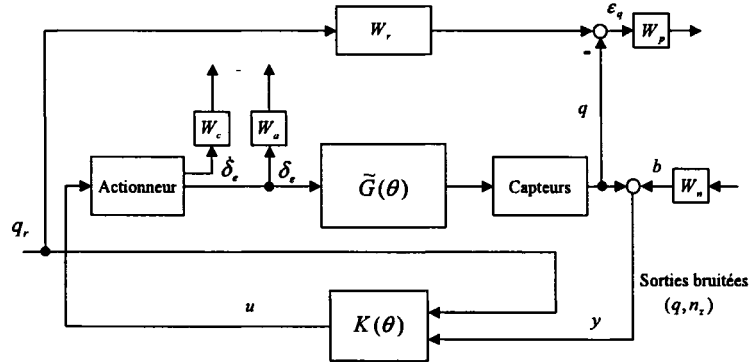


Figure 5.8 Schéma de synthèse

Le schéma de la figure (5.8) fait apparaître les transferts suivants :

$$\mathcal{F}_1(\theta) = \mathcal{F}_{q_r \rightarrow \varepsilon_q}(\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2(\theta) = \mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e}(\theta) \quad (5.12)$$

que l'on associera respectivement aux objectifs de performance (suivi de consigne) et de robustesse (erreurs de modèle en entrée et en sortie). Notons enfin la présence de pondérations fréquentielles  $W_p$ ,  $W_a$ ,  $W_c$  et  $W_n$  dont il faut bien reconnaître que le réglage reste un problème délicat.

#### 5.3.4 Spécifications et choix des filtres

La détermination des filtres de pondération repose sur une analyse à paramètres *gelés* du système *LPV*. Les principes qui vont guider notre choix sont donc ceux que l'on retrouve en synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  classique. Les exigences au niveau performances et robustesse, si l'on considère l'avion comme un système *LTI* autour de chaque point de vol sont les suivantes:

1. Le temps de réponse de la sortie  $q$  doit être inférieur à 2 secondes avec une erreur statique  $\varepsilon_q$  faible, et un dépassement inférieur à 10%.
2. Les amplitudes de la sortie actionneur  $\delta_e$  et de sa dérivée première  $\dot{\delta}_e$  doivent être limitées.

3. La stabilité robuste doit être assurée sur le modèle de synthèse (robustesse face aux erreurs de modélisation et bruits de mesures).

Après quelques essais, suivis d'analyse en boucle fermée des résultats obtenus, nous avons finalement retenu le choix suivant :

**Le filtre  $W_p$  :** Cette pondération agit directement sur le transfert  $\mathcal{F}_{q_r \rightarrow \varepsilon_q}$  qui lie l'entrée de référence  $q_r$  et l'erreur de poursuite  $\varepsilon_q$ . Le gabarit fréquentiel choisi pour satisfaire l'objectif de performance est :

$$W_p(s) = \frac{4 \times (s/10 + 1)}{s/2 + 1} \quad (5.13)$$

où  $W_p^{-1}(s)$  permet d'assurer une erreur de poursuite maximum de  $0.25 \text{ deg/sec}$  en basses fréquences.

**Les filtres  $\{W_a, W_c\}$  :** Ces pondérations agissent sur le transfert  $\mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e}$  qui lie l'entrée de référence et/ou bruits de mesure à la sortie actionneur  $\delta_e$  et de sa dérivée  $\dot{\delta}_e$ . Ainsi, pour contrôler l'effort de commande, les pondérations obtenues sont :

$$W_a = 1/2 \quad \text{et} \quad W_c = 1/50 \quad (5.14)$$

où  $W_a$  et  $W_c$  permettent respectivement des valeurs maximales de  $2 \text{ deg}$  pour  $\delta_e$  et  $50 \text{ deg/sec}$  pour  $\dot{\delta}_e$ .

**Le filtre  $W_n$  :** Ce filtre est choisi simplement comme un gain statique,

$$W_n = 0.01 I_2 \quad (5.15)$$

afin de limiter les bruits de mesures en hautes fréquences sur  $q$  et  $n_z$ .

#### 5.4 Calcul du correcteur $LPV$

La formulation du problème de synthèse considéré dans ce paragraphe est résumée par la figure 5.9 :

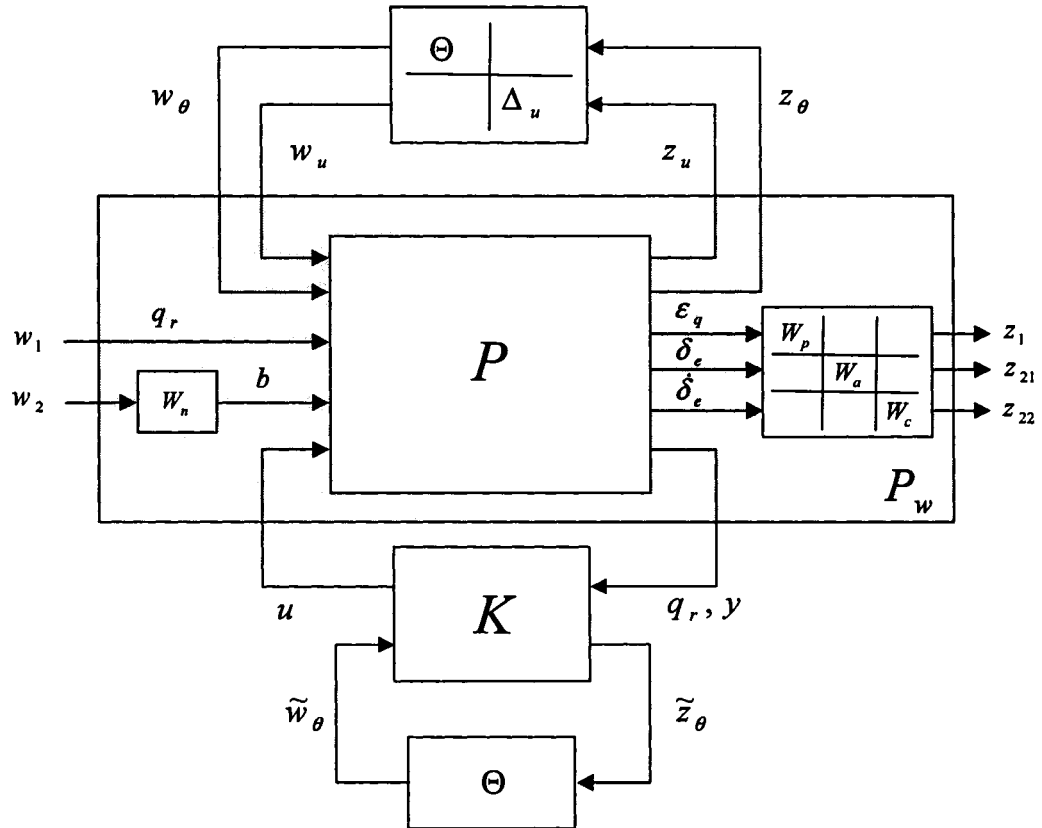


Figure 5.9 Mise en forme du problème de synthèse  $LPV$  robuste

On appliquera ici la méthode de résolution itérative décrite au chapitre 3, par l'algorithme 3.4.1, en comparant les résultats obtenus par la mise en œuvre de *scalings* constants puis de *scalings* dynamiques.



### Première itération :

#### Etape 1 : Synthèse $LPV$ de type $\mathcal{H}_\infty$

On commence par résoudre le problème de faisabilité  $LMI$  formulé par (3.47)-(3.51) en appliquant le théorème (3.3.2) au modèle pondéré  $P_w(s)$ . La convergence est obtenue après 62 itérations, avec un niveau de performances tel que :

$$\gamma = 2.617$$

On détermine ensuite le correcteur  $K$ , tel que la condition (3.24) soit satisfaite. Pour cela, on calcule d'abord la matrice de *scalings* constants  $L$ . Puis, on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\min \gamma / \left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_w^a(s), K(s)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

#### Etape 2 : Analyse

Pour  $K$  et  $L$  fixés, on effectue ensuite une analyse de la robustesse, en prenant en considération la structure des incertitudes. Pour ce faire, on introduira des opérateurs de *scalings* dynamiques :

$$D = \text{diag}(L_u, L_{\varepsilon_q}^p, L_{\delta_e}^p, L_{\dot{\delta}_e}^p)$$

Pour résoudre le problème, on suivra la démarche indiquée au chapitre 3 (voir algorithme 3.4.1). Le calcul des *scalings* dynamiques est réalisé sur une répartition logarithmique des fréquences entre  $10^{-2}$  et  $10^3$  (on retiendra 50 points).

Le tracé de la figure 5.10 représente le niveau de performance  $\gamma(\omega)$  en fonction de la fréquence, après optimisation des *scalings*  $D$  :

$$\left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma(\omega)}} D(j\omega) \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_w^a(j\omega), K(j\omega)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma(\omega)}} D^{-1}(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

Comme prévu, on notera une amélioration sensible du niveau de performances. Néanmoins, les valeurs obtenus restent supérieures à 1. On devra donc procéder à une nouvelle étape de synthèse.

### Deuxième itération :

#### Etape 1 : Nouvelle synthèse *LPV*

On commence ici par intégrer les matrices de *scalings* dynamiques  $D$  au modèle initial  $P_w(s)$ , tel que :

$$P_w(s) \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} P_w(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

les résultats obtenus après cette nouvelle synthèse sont donc : le test de faisabilité *LMI* converge après 132 itérations, avec un niveau de performances tel que :

$$\gamma = 1.065$$

De plus, le correcteur<sup>2</sup> *LFT* correspondant est d'ordre 11.

#### Etape 2 : Analyse

On effectue ici une autre analyse du dernier résultat obtenu en synthèse (*scalings* constants). On observe donc une amélioration importante du niveau de performances qui devient inférieur à 1 (voir figure 5.10).

---

<sup>2</sup> Il est important de noter que la méthode de synthèse ne garantit pas la stabilité du correcteur, toutefois sur notre exemple, le correcteur issu de cet algorithme est stable.

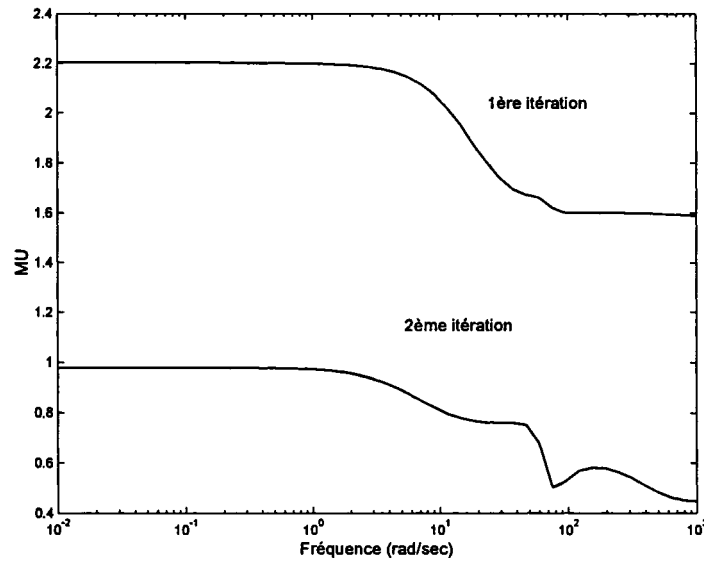


Figure 5.10 Niveau de performances

Le correcteur obtenu à la deuxième itération, est donc jugé satisfaisant dans la mesure où il remplit les objectifs de synthèse que nous nous étions fixés.

## 5.5 Analyse des résultats et simulations

Avant de procéder à l'implémentation sur le système non linéaire, puis aux validations finales, on propose ici une analyse du correcteur en boucle fermée, en termes de robustesse et de performances. Le problème de la réduction de l'ordre sera également évoqué.

### 5.5.1 Réduction du correcteur

Pour des raisons pratiques, en vue de la mise en œuvre sur système réel, la loi de commande  $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta(t))$  a finalement été réduite. Pour cela, profitant de la structure *LFT*, nous avons appliqué une technique classique de réduction équilibrée (voir chapitre 2) au système stationnaire  $K(s)$  d'ordre 11, pour le ramener ainsi à 9.

### 5.5.2 Analyse en robustesse de la boucle fermée

Durant l'étape de construction du modèle de synthèse, nous avons supposé que les incertitudes de modèle étaient de type dynamique, et qu'elles étaient décrites par le bloc  $\Delta_u$  comme le montre le schéma de la figure 5.6. Nous avons déjà souligné le caractère conservatif introduit par une telle représentation. De plus, la prise en compte explicite des incertitudes paramétriques produit, en général, des matrices de *scalings* d'ordre très élevé, ce qui a tendance à accroître la complexité de la loi de commande. Par conséquent, il devient nécessaire d'envisager une étude (a posteriori) en robustesse du système en boucle fermée en présence d'incertitudes sur le modèle aérodynamique. Pour cela, nous reprenons pour cette analyse, les 30 modèles *LTI*, utilisés pour la synthèse du correcteur *LPV*.

Dans cette application, les incertitudes de modèle dépendent à la fois de la configuration de l'avion (répartition de la masse à l'intérieur de l'avion, position du centre de gravité), et des erreurs d'identification des coefficients aérodynamiques (voir tableau XIV). Dans le cas des incertitudes de configuration,  $I_y$  et  $x_{cg}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_{nom}} (1 + \Delta I_y \delta_{I_y}) \quad \text{avec} \quad |\delta_{I_y}| \leq 1 \\ x_{cg} &= x_{cg_{nom}} + \Delta x_{cg} \delta_{x_{cg}} \quad \text{avec} \quad |\delta_{x_{cg}}| \leq 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $I_{y_{nom}}$  et  $x_{cg_{nom}}$  correspondent respectivement aux valeurs nominales des coefficients, tandis que  $\delta_{I_y}$  et  $\delta_{x_{cg}}$  représentent les incertitudes.

De la même façon, on tiendra compte de la présence d'incertitudes sur trois coefficients qui caractérisent le modèle aérodynamique. Ces coefficients sont  $C_{m\alpha}$ ,  $C_{mq}$  et  $C_{m\delta_e}$ . On réécrit alors chaque coefficient comme suit :

$$C_{mi} = C_{mi_{nom}} + \Delta C_{mi} \delta_{C_{mi}} \quad \text{pour} \quad i = \alpha, q, \delta_e \quad (5.17)$$

où  $C_{mi_{nom}}$  représente la valeur nominale du coefficient, tandis que  $\delta_{C_{mi}}$  représente la perturbation, telle que  $|\delta_{C_{mi}}| \leq 1$ .

Afin d'appliquer les techniques exposées au chapitre 2, en particulier l'outil  $\mu$ -analyse, on

Tableau XIV Incertitudes paramétriques

Parameter Symbol	$[min; max]$	Units	Description
$\Delta I_y$	$[-20; 20]$	$[\%]$	Incertitude relative sur le moment d'inertie $I_y$ par rapport à l'axe $y_w$
$\Delta x_{cg}$	$[-0.15; 0.15]$	$[m]$	Incertitude absolue sur la position $x_{cg}$ du centre de gravité selon l'axe $x_w$
$\Delta C_{m\alpha}$	$[-0.10; 0.10]$	$[1/rad]$	Incertitude absolue sur $C_{m\alpha}$ ( <i>pitch stability coefficient</i> )
$\Delta C_{mq}$	$[-0.10; 0.10]$	$[-]$	Incertitude absolue sur $C_{mq}$ ( <i>pitch damping coefficient</i> )
$\Delta C_{m\delta_e}$	$[-0.03; 0.03]$	$[1/rad]$	Incertitude absolue sur $C_{m\delta_e}$ ( <i>pitch control coefficient</i> )

doit d'abord exprimer chaque modèle perturbé (5.1)-(5.2) sous la forme d'un modèle *LFT*. Pour cela, nous avons représenté  $1/I_y$  et  $x_{cg}$  par deux *LFT* inférieures, telles que :

$$1/I_y = \mathcal{F}_l(M_{I_y}, \delta_{I_y}) \quad \text{où} \quad M_{I_y} = \begin{bmatrix} 1/I_{y_{nom}} & -1/I_{y_{nom}} \\ \Delta I_y & -\Delta I_y \end{bmatrix}$$

et

$$x_{cg} = \mathcal{F}_l(M_{x_{cg}}, \delta_{x_{cg}}) \quad \text{où} \quad M_{x_{cg}} = \begin{bmatrix} x_{cg_{nom}} & 1 \\ \Delta x_{cg} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons également représenté chacun des coefficients  $C_{mi}$ , par une *LFT* inférieure, telle que, pour  $i = \alpha, q, \delta_e$  :

$$C_{mi} = \mathcal{F}_l(M_{C_{mi}}, \delta_{C_{mi}}) \quad \text{où} \quad M_{C_{mi}} = \begin{bmatrix} C_{mi_{nom}} & 1 \\ \Delta C_{mi} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous complétons par ailleurs le modèle d'analyse, par la prise en compte d'incertitudes multiplicatives au niveau des capteurs. Pour satisfaire cette contrainte, nous avons choisi des pondérations fréquentielles de type passe-haut, telles que :

$$W_{out}(s) = \text{diag}(W_q(s), W_{nz}(s))$$

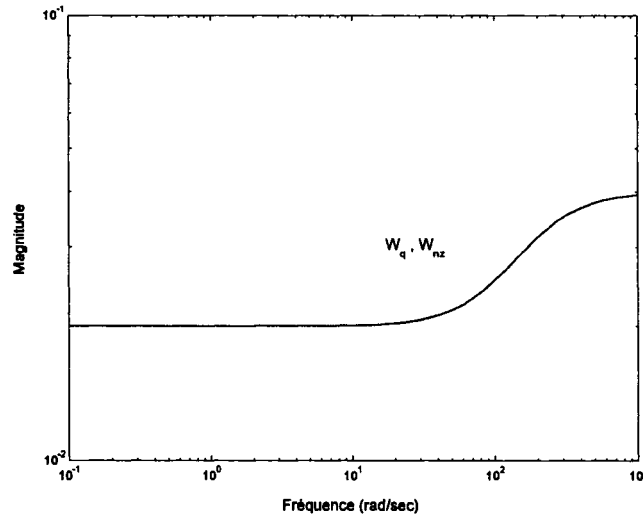


Figure 5.11 Pondérations fréquentielles

où  $W_q(s) = W_{nz}(s) = 0.02(s/100 + 1)/(s/200 + 1)$ . Un tel choix permet de représenter une dynamique capteur négligée de 2% en basses fréquences, qui augmente jusqu'à 4% en hautes fréquences (figure 5.11).

Le schéma d'interconnection pour l'analyse de la robustesse, est donné par la figure 5.12. Le bloc  $\Delta G$ , qui traduit les incertitudes paramétriques du système, comprend 5 perturbations réelles :

$$\Delta G_{5 \times 5} = \text{diag}[\delta_{x_{cg}}, \delta_{C_{m\alpha}}, \delta_{C_{mq}}, \delta_{C_{m\delta_e}}, \delta_{I_y}]$$

dont la variation de chacune d'elles, est comprise entre -1 et 1. En revanche, les blocs  $\Delta_q$  et  $\Delta_{nz}$  sont des incertitudes complexes ( $1 \times 1$ ), telles que  $\|\Delta_q(j\omega)\| \leq 1$  et  $\|\Delta_{nz}(j\omega)\| \leq 1$ .

La figure 5.13 présente les tracés de  $\mu$  pour l'analyse de la robustesse. Chaque tracé correspond à la réponse du système en boucle fermée, pour une condition de vol donnée. On peut constater que la stabilité robuste du système est assurée sur l'ensemble des points de vol donné par la figure 5.3. On gardera néanmoins à l'esprit la validité toute relative de ce type de test.

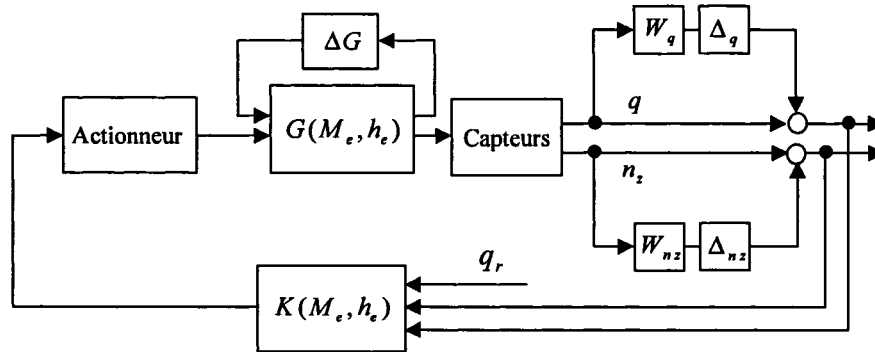


Figure 5.12 Schéma d'interconnection pour l'analyse de la robustesse

### 5.5.3 Analyse des performances et qualités de vol

L'objectif de cette analyse est d'étudier le comportement longitudinal de l'avion sur l'ensemble du domaine de vol. Pour cela, nous avons réalisé une série de tests, sur chacun des 30 points de vol, afin de vérifier les spécifications du cahier des charges, en termes de performance et de qualité de vol (voir tableau XIII). On notera par ailleurs, que le modèle utilisé pour cette analyse, comprend : le correcteur *LTI* d'ordre 9, un ensemble "actionneur-retard", deux capteurs inertiels et le modèle longitudinal complet (phugoïde et *short-period*). Le retard est modélisé ici par une fonction de transfert d'ordre 2 (approximation de Padé).

Les résultats de ces tests<sup>3</sup> sont rassemblés dans le tableau XV. En ce qui concerne les valeurs du CAP (*Control Anticipation Parameter*), on les a tracées dans le plan, en fonction de l'amortissement  $\zeta_{sp}$ , comme le montre la figure 5.14.

Un examen rapide du tableaux XV, nous révèle que les exigences en matières de qualité de vol et de manoeuvrabilité, sont satisfaites<sup>4</sup> sur l'ensemble des conditions de vol. La figure 5.14 conduit à la même conclusion, à l'exception des points 7, 8, 9, 10, 11 et 22 où

<sup>3</sup> Il s'agit de tests classiques dans les domaines fréquentiel (diagramme de bode) et temporel (simulations *LTI*)

<sup>4</sup> niveau 1.

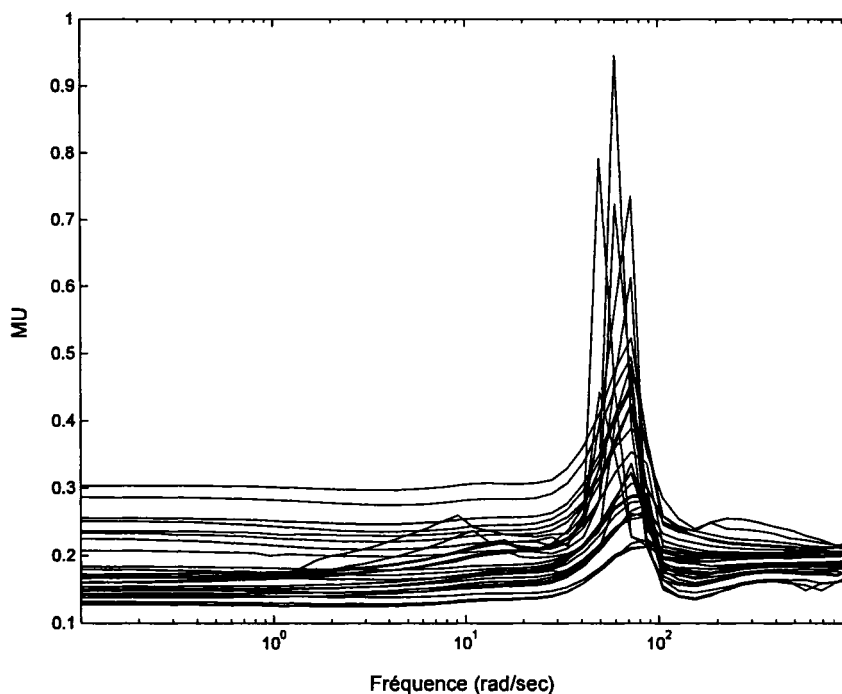


Figure 5.13 Stabilité robuste: prise en compte d'incertitudes mixtes

les spécifications en performance sont toutefois acceptables<sup>5</sup>, mais demandent un effort supplémentaire du pilote pour accomplir la mission en phase de vol.

#### 5.5.4 Simulations temporelles

Bien que les analyses que nous venons de présenter donnent un premier aperçu favorable quant aux propriétés locales du correcteur, elles ne permettent pas de conclure quant au respect des spécifications lorsque l'avion évolue sur son domaine de vol. Les simulations temporelles<sup>6</sup> que nous présentons ici, sont effectuées sur le système non linéaire complet. Dans la mesure où la conception du correcteur repose sur la linéarisation du système, nous avons modifié les signaux qu'il reçoit et génère comme indiqué sur la figure 5.15.

<sup>5</sup> niveau 2.

<sup>6</sup> L'analyse fréquentielle n'est plus valable ici.



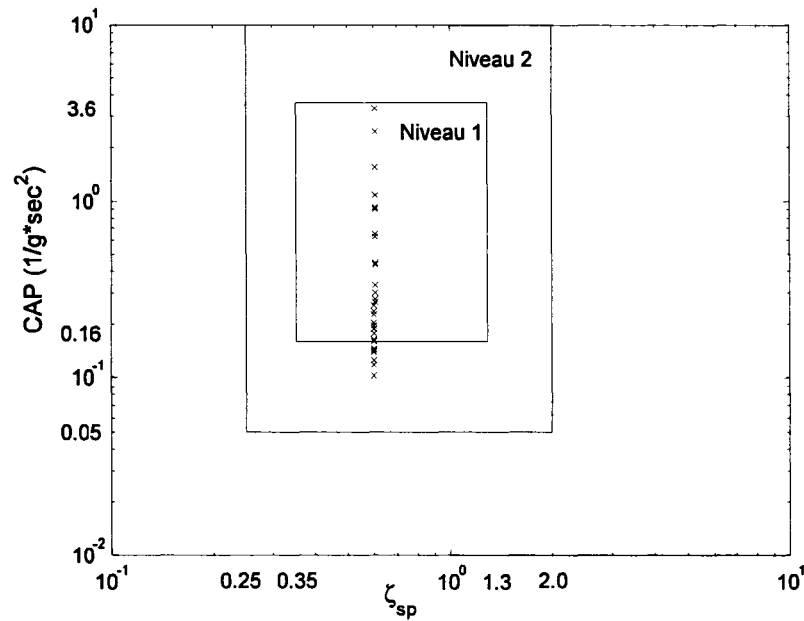


Figure 5.14 Critère CAP vs  $\zeta_{sp}$  pour les phases de vol (Catégorie C)

L'algorithme de réglage, entre chaque période d'échantillonnage, passe par les opérations suivantes :

- construction du bloc  $\Theta$  à partir de  $\delta_h$  et  $\delta_M$ ,
- rebouclage de  $\Theta$  sur le correcteur,
- discrétisation<sup>7</sup> **en ligne** du correcteur,
- calcul des signaux de commande.

D'autre part, la période d'échantillonnage que nous avons utilisée est de 1 *msec*.

Les figures 5.16 et 5.17 montrent des simulations non linéaires. Dans la première simulation, le système est initialisé à partir du point de vol (altitude=20m et Mach=0.22), alors

<sup>7</sup> La détermination du modèle discret, repose sur l'approximation classique selon laquelle sur tout intervalle de la forme  $[kT_e, (k+1)T_e[$ , les vecteurs  $x$ ,  $u$  et  $\theta$  diffèrent peu de leurs valeurs prises à l'instant  $kT_e$ .

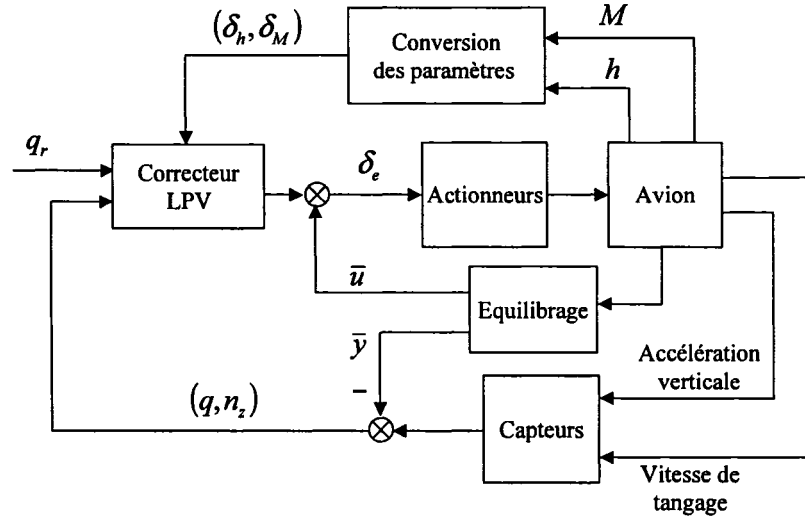


Figure 5.15 Schéma d'implémentation

que dans la seconde simulation, il est initialisé à partir de la condition (altitude=6000m et Mach=1.20). Au cours de chaque simulation, dont la durée est de 20 sec, on applique successivement deux échelons sur  $q_r$ . Le premier d'amplitude 10 deg/sec, dure 5 sec. A l'instant 10 sec, on applique un second échelon d'amplitude -10 deg/sec, pendant 5 sec. Globalement, on constate que les spécifications de performances sont entièrement satisfaites<sup>8</sup>, puisque le temps de réponse est autour de 1.5 sec avec une erreur statique nulle et un dépassement inférieur à 7%. On remarquera aussi le respect des spécifications au niveau du débattement des gouvernes ( $|\delta_e| < 0.2 \text{ rad}$ ). Par ailleurs, la dynamique phugoïde n'a pas d'effet perceptible sur les réponses du système.

Sur la troisième simulation (figure 5.18), nous avons inclus des incertitudes dans le modèle d'avion :  $\Delta I_y = 0.20 I_y$ ,  $\Delta x_{cg} = 0.15 \text{ m}$ ,  $\Delta C_{m\alpha} = 0.1 \text{ rad}^{-1}$ ,  $\Delta C_{mq} = 0.1$  et  $\Delta C_{m\delta_e} = 0.03 \text{ rad}^{-1}$ . L'avion est initialisé à partir du point d'équilibre correspondant à la condition<sup>9</sup> (altitude=2000m et Mach=0.60). On constatera que la stabilité de la boucle fermée est préservée, de plus le système présente un comportement désiré<sup>10</sup>.

<sup>8</sup> qualité de vol et de manoeuvrabilité de niveau 1.

<sup>9</sup> On notera que cette condition n'appartient pas à l'ensemble des points de vol utilisés pour la conception du correcteur LPV, toutefois reste à l'intérieur du domaine de vol.

<sup>10</sup> qualité de vol et de manoeuvrabilité de niveau 1.

## 5.6 Conclusion

Cette application au pilotage longitudinal d'un avion de chasse constitue finalement un argument supplémentaire en faveur de la méthode de synthèse développée au chapitre 3. Elle illustre notamment l'intérêt de notre algorithme qui, calqué sur le principe de la *D-K itération*, permet de générer des correcteurs *LPV* robustes. Par ailleurs, il peut être intéressant de noter la méthodologie adoptée pour la synthèse de la loi de commande *LPV*, depuis la phase de construction du modèle *LPV* jusqu'aux validations finales sur simulations non linéaires. Une procédure similaire pourrait être ainsi envisagée dans le cadre du pilotage des avions civils.

Tableau XV Performances et qualités de vol obtenues

Point	$Drb/q_{ss}$	$\omega_{BW}$	$\tau_p$	$\zeta_{sp}$
1	0.0768	2.2126	0.1203	0.6024
2	0.0596	2.2185	0.1171	0.6024
3	0.0568	2.2192	0.1163	0.6019
4	0.0550	2.2199	0.1158	0.6013
5	0.0545	2.2238	0.1159	0.5995
6	0.0540	2.2224	0.1162	0.5990
7	0.0535	2.2228	0.1158	0.5988
8	0.0629	2.2208	0.1165	0.5982
9	0.0726	2.2199	0.1171	0.5979
10	0.0896	2.2191	0.1174	0.5977
11	0.1058	2.2198	0.1178	0.5974
12	0.0900	2.1995	0.1233	0.6022
13	0.0613	2.2125	0.1182	0.6027
14	0.0572	2.2143	0.1171	0.6023
15	0.0549	2.2151	0.1164	0.6020
16	0.0538	2.2158	0.1161	0.6002
17	0.0527	2.2132	0.1162	0.5996
18	0.0523	2.2150	0.1157	0.5993
19	0.0596	2.2124	0.1162	0.5988
20	0.0659	2.2116	0.1165	0.5983
21	0.0732	2.2112	0.1167	0.5980
22	0.0866	2.2102	0.1170	0.5973
23	0.0542	2.2094	0.1174	0.6025
24	0.0508	2.2077	0.1163	0.6017
25	0.0502	2.2061	0.1164	0.6010
26	0.0504	2.2081	0.1159	0.6008
27	0.0457	2.2060	0.1161	0.6004
28	0.0598	2.2057	0.1163	0.6001
29	0.0681	2.2057	0.1165	0.5997
30	0.0725	2.2024	0.1166	0.5991

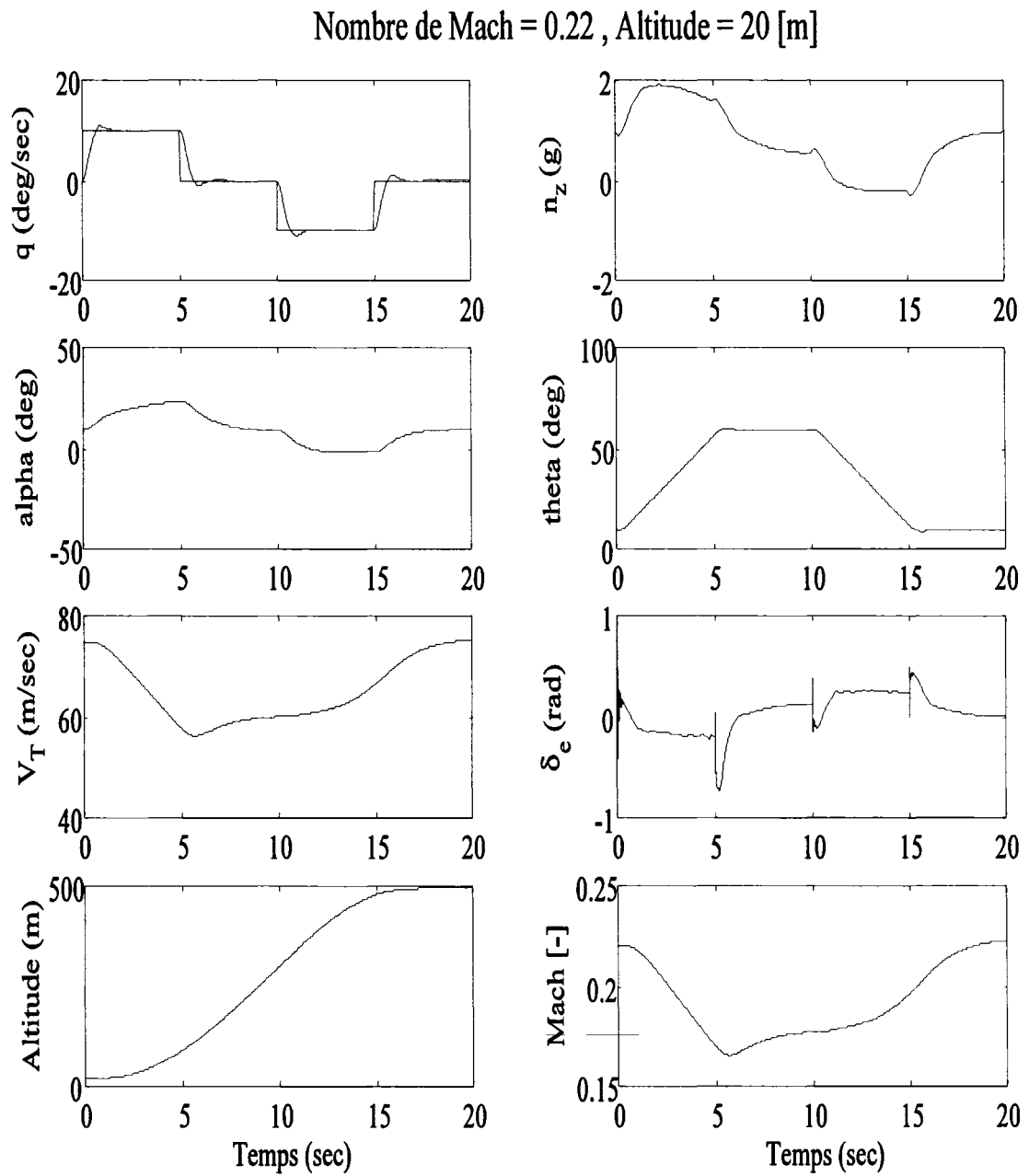


Figure 5.16 Simulation non linéaire

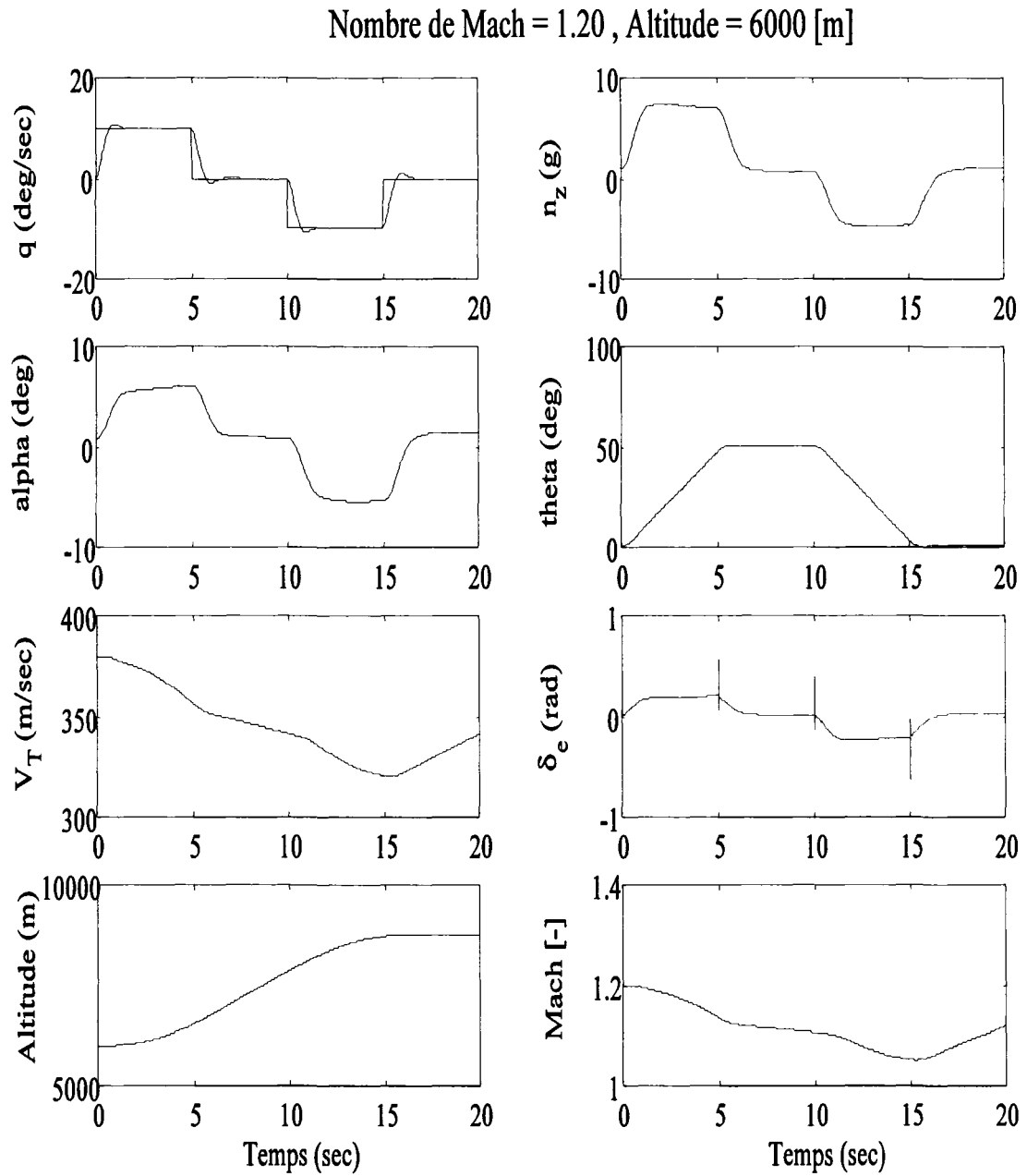


Figure 5.17 Simulation non linéaire

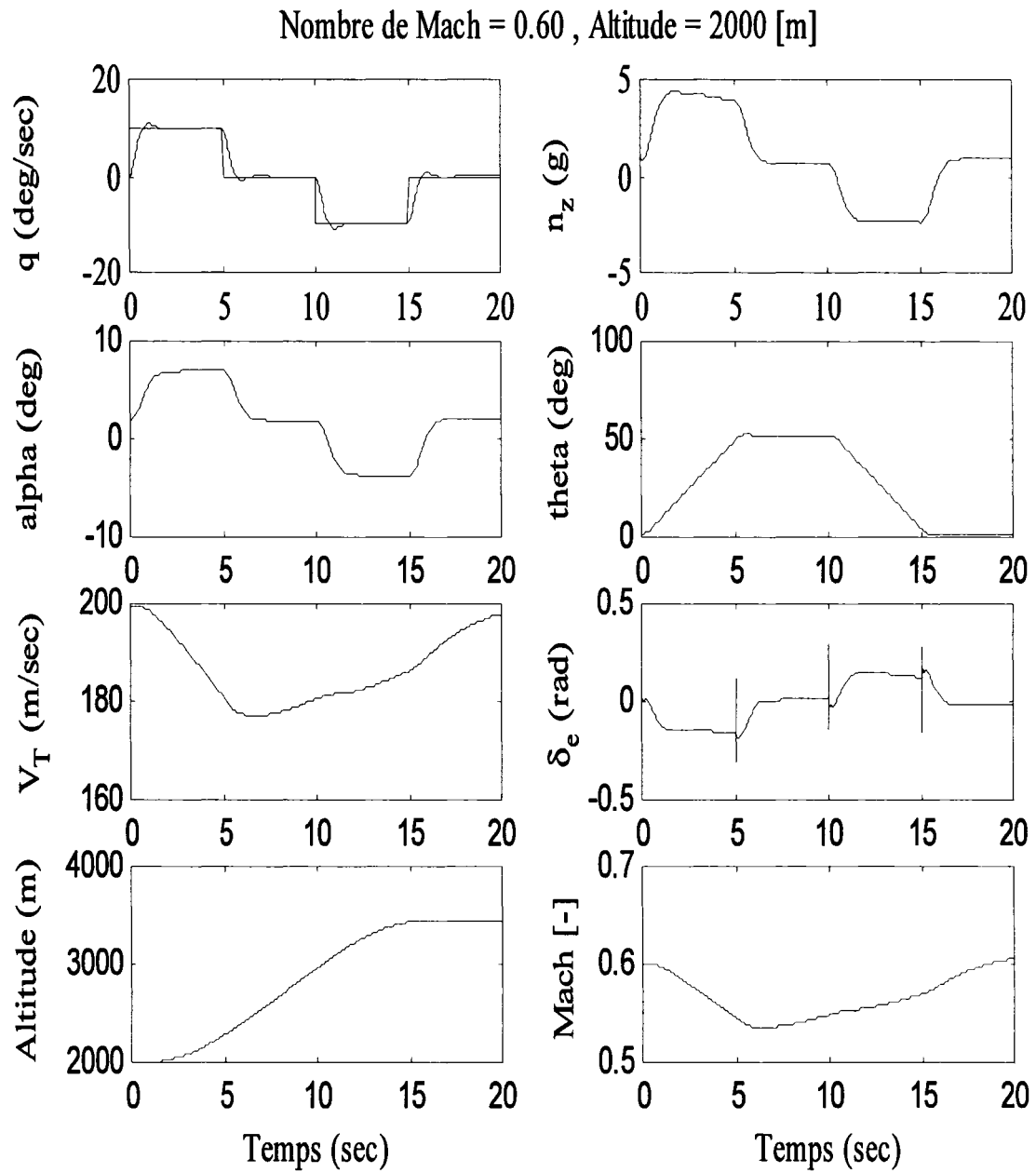


Figure 5.18 Simulation non linéaire

## CONCLUSION

### Résumé de la contribution

#### Sur le plan théorique

Nous avons étendu notre étude au cas des systèmes *LPV* incertains, et ceci afin de prendre en compte, non seulement les variations paramétriques du modèle mais aussi diverses formes d'incertitudes (paramétriques, dynamiques négligées des actionneurs et des capteurs, phénomènes non linéaires). Pour cela, une approche bi-convexe, inspirée de la  $\mu$ -synthèse, a ainsi pu être développée (cf. section 3.4.1).

#### Sur la mise en œuvre : vers une approche méthodologique de synthèse

Pour faciliter les réglages et étudier les compromis, nous avons adopté une méthodologie de synthèse, basée sur une approche fréquentielle, typiquement  $\mathcal{H}_\infty$ . Grâce à cette approche, nous avons pu prendre en compte, a priori et explicitement, les différentes spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges. En effet, le modèle (critère) de synthèse est construit directement à partir de ces spécifications. Toutefois, la construction de ce modèle demande un effort d'analyse du problème de commande, et augmente le nombre de paramètres de réglage lors de la synthèse, au travers le choix de pondérations. Or, ces pondérations sont directement interprétables en termes de comportement entrées-sorties et ont véritablement un sens physique. En d'autres termes, le modèle de synthèse est construit pour résoudre un problème de commande particulier et prendre en compte explicitement un ensemble de spécifications de performance et de robustesse. Enfin la synthèse de correcteurs selon la structure de commande à 2 degrés de liberté se fait de façon très naturelle.



## Au niveau des applications

Dans ce travail, motivé avant tout par le problème de pilotage des avions, nous avons consacré une part importante de nos efforts aux développements d'applications réalistes. Les méthodes théoriques proposées ont donc fait l'objet d'un codage numérique sur *MATLAB*, utilisant en particulier les outils : “ *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox*” [6] et “*LMI Control Toolbox*” [23].

La première application concernait le pilotage longitudinal d'un avion civil (section 4.1). Elle a été proposée dans le cadre du projet *Active Control Technology* entre l'Ecole de Technologie Supérieure et le constructeur Bombardier Aéronautique. Les méthodes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$  ont été utilisées. L'objectif est de concevoir des lois de commande robustes et performantes pour le contrôle de la chaîne de tangage. Comparativement à l'approche  $\mathcal{H}_\infty$ , le correcteur réalisé par la  $\mu$ -synthèse, satisfait à la fois les propriétés de performance et de robustesse. La difficulté essentielle à laquelle nous avons été confrontée au départ, résidait dans la nécessité de disposer d'une forme *LFT* du problème, représentative des 8 modèles fournis.

La seconde application concernait le pilotage longitudinal robuste d'un avion de chasse (section 4.2). Ce problème complémentaire du premier exemple, nous a permis ainsi de valider l'approche adoptée, sur un problème multivariable similaire à celui du pilotage d'avion civil. Nous avons cette fois-ci, utilisé uniquement la technique de  $\mu$ -synthèse. La commande élaborée, a permis de contrôler de manière découplée la vitesse de tangage ( $q$ ) et la vitesse totale ( $V_T$ ). De plus, le correcteur *LTI* a été validé après implémentation sur le modèle non linéaire complet du système.

L'application principale de notre travail concerne bien entendu la conception d'une loi de commande pour le pilotage longitudinal d'un avion de chasse sur un large domaine de vol. Cette application a fait l'objet d'un développement complet au chapitre 5. A partir de 30 modèles *LTI*, représentant l'ensemble du domaine de vol, un modèle *LPV* de type *LFT* a été construit. L'algorithme de synthèse de lois de commande *LPV* robustes a été mis en œuvre avec succès. Le correcteur *LPV* a fait l'objet d'une implémentation complète

sur le système non linéaire intégrant les dynamiques des capteurs et des actionneurs. Les simulations temporelles valident finalement notre approche.

## Critiques et perspectives

Comme tout algorithme de synthèse, celui que nous avons développé dans la thèse pour le calcul de correcteurs *LPV* robuste, présente quelques limitations qu'il convient de garder à l'esprit au moment de la conception des lois de commande. Il s'agira principalement de limitations numériques. En particulier, si l'ordre du système est trop élevé, les temps de calcul augmentent rapidement pour finalement devenir prohibitifs.

Par ailleurs, comme un prolongement futur de nos travaux, il serait intéressant d'inclure la vitesse d'évolution des paramètres  $\dot{\theta}$ , dans le bloc  $\Theta$  des paramètres variants, en affinant ainsi la modélisation du système *LPV*, ce qui aura tendance à réduire un peu plus le conservatisme de la méthode.

Enfin, les applications que nous présentons ici appartiennent principalement au domaine de l'aéronautique. Il serait intéressant de poursuivre l'exploitation de ces techniques dans d'autres domaines, par exemple des applications dans le domaine spatial ou la robotique où l'aspect non stationnaire est fortement présent, sont parfaitement envisageables.

## ANNEXE A

### QUALITÉS DE VOL ET DE MANŒUVRABILITÉ

Les qualités de vol et de manœuvrabilité (*Handling Qualities*) représentent la facilité avec laquelle un pilote peut opérer son appareil selon la phase de vol considérée. Les qualités de vol dépendent non seulement de la dynamique de l'avion, mais aussi de son système de contrôle et des informations perçues par le pilote. Elles incluent tout ce qui concerne la sécurité de vol et l'efficacité en performance d'un avion. La norme militaire MIL-STD-1797A [39], contient les critères pour les qualités de vol et de manœuvrabilité utilisés dans l'armée de l'air américaine. Les concepteurs d'avions utilisent cette norme comme guide pour atteindre une dynamique d'avion acceptable.

#### A.1 Définitions et spécifications militaires

Avant de quantifier les qualités de vol et de manœuvrabilité, il est d'abord nécessaire d'introduire plusieurs classifications. Ces définitions et spécifications sont toutes d'origine militaire [39]. La réglementation civile n'entre pas dans d'autant de détails.

On considère qu'un avion appartient à l'une des 4 catégories suivantes :

**Classe I** Avion léger et petit (Poids maximal de 5000 kg).

**Classe II** Avion de masse moyenne (Poids compris entre 5000 kg et 30 000 kg) avec manœuvrabilité modérée.

**Classe III** Avion massif (Poids de plus de 30 000 kg) avec manœuvrabilité modérée.

**Classe IV** Avion de haute manœuvrabilité.

De plus, des catégories regroupant les différentes phases de vol ont été établies. En effet, certaines phases de vol sont plus contraignantes que d'autres et imposent des exigences additionnelles. Les phases de vol sont divisées en 3 catégories, comme suit :

### Phases de vol non terminales

**Catégorie A :** Elles sont celles exigeant des manœuvres rapides, une poursuite précise ou un contrôle précis de la trajectoire. Les phases de vol contenues dans cette catégorie sont: le combat air-air, l'attaque au sol, le suivi de terrain, la recherche et le sauvetage.

**Catégorie B :** Elles sont celles accomplies par des manœuvres graduelles et ne requièrent pas de poursuite précise. Néanmoins, une certaine précision dans la trajectoire peut être nécessaire. Sont compris dans cette catégorie: la montée, le vol en croisière, le vol en attente et la descente.

### Phases de vol terminales

**Catégorie C :** Elles sont celles accomplies par des manœuvres graduelles et nécessitent un contrôle très précis de la trajectoire. Sont compris dans cette catégorie: le décollage, l'atterrissage et les différents types d'approche.

Les échelles d'appréciation pour les qualités de vol sont donnés en termes de niveaux d'acceptabilité. Ces niveaux indiquent la capacité d'un avion à compléter les missions pour lesquelles il est fait, et sont basés sur l'échelle d'opinion du pilote de Cooper-Harper [39].

**Niveau 1 - Satisfaisant :** Les qualités de vol sont complètement adéquates pour la phase de vol de la mission considérée. La tâche désirée est réalisable sans plus de compensation de la part du pilote.

**Niveau 2 - Acceptable :** Les qualités de vol sont adéquates pour accomplir la phase de vol de la mission mais une augmentation de la charge de travail du pilote et/ou une dégradation dans l'efficacité de la mission, existent.

**Niveau 3 - Contrôlable :** Les qualités de vol sont telles que l'avion peut être contrôlé mais la charge de travail du pilote est excessive et/ou l'efficacité de la mission est gravement dégradée.

## A.2 Qualités de vol pour le mode longitudinal

A partir de critères qualitatifs comme l'opinion du pilote, il a fallu en déduire des critères quantitatifs afin de guider les ingénieurs dans la conception de lois de commande remplissant ces qualités de vol et de manœuvrabilité. Nous verrons dans cette partie les paramètres les plus importants qui affectent le mouvement longitudinal.

Le concept du système équivalent d'ordre réduit est généralement employé pour évaluer ces qualités. En effet, le mouvement de l'avion qui caractérise le mode longitudinal peut être approximé par un modèle équivalent d'ordre réduit :

$$\frac{\theta}{\delta_e} = \frac{K_\theta (T_{\theta 1}s + 1)(T_{\theta 2}s + 1) \exp(-\tau_\theta s)}{(s^2 + 2\zeta_p \omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_{sp} \omega_{sp} s + \omega_{sp}^2)} \quad (\text{A.1})$$

où

$\theta$	: angle d'incidence
$\delta_e$	: débattement des gouvernes aérodynamiques couplées
$K_\theta$	: gain de transfert de l'angle d'incidence
$-1/T_{\theta 1}, -1/T_{\theta 2}$	: zéros relatifs aux modes phugoïde et <i>short-period</i>
$\tau_\theta$	: retard équivalent
$\zeta_p$	: amortissement du mode phugoïde
$\omega_p$	: pulsation propre du mode phugoïde
$\zeta_{sp}$	: amortissement du mode <i>short-period</i>
$\omega_{sp}$	: pulsation propre du mode <i>short-period</i>

Le choix des paramètres tient compte des objectifs de pilotage en termes de qualités de vol et de manœuvrabilité.

### A.2.1 Mode phugoïde

Le mode phugoïde est un mode basse fréquence et oscillant. Il correspond à un échange entre énergie cinétique (vitesse) et énergie potentielle (altitude). Il se manifeste par une

oscillation de longue période en assiette  $\theta$ , en variation de vitesse relative  $u$ , en altitude  $h$  et en pente  $\gamma$ , alors que l'angle d'attaque  $\alpha$  demeure relativement constant. Il est généralement stable mais très mal amorti.

Les critères concernant ce mode portent sur l'amortissement  $\zeta_p$  et la pulsation propre  $\omega_p$ .

Tableau XVI Amortissement  $\zeta_p$  du mode phugoïde

Critères de stabilité	
Niveau 1	$\zeta_p \geq 0.04$
Niveau 2	$\zeta_p \geq 0$
Niveau 3	$T_{2p} \geq 55sec$

$T_{2p}$  désigne le temps pour doubler l'amplitude de la sortie quand le mode phugoïde est instable (i.e.  $\zeta_p < 0$ ).

On souhaite de plus que la pulsation propre  $\omega_p$  soit comprise entre 0.01 et 1 rad/s, l'essentiel étant que les domaines de fréquence des modes phugoïde et oscillation d'incidence (*short-period*) soient bien séparés.

### A.2.2 Oscillation d'incidence (*short-period*)

Le mode *short-period* est le mode naturel rapide de l'avion. Il est généralement oscillatoire et de moyenne fréquence, qui concerne essentiellement l'angle d'incidence  $\alpha$ , le tangage  $q$  et le facteur de charge  $n_z$ ; on considère que la variation de vitesse relative  $u$  demeure constante et n'est pas affectée par les oscillations dues au mode *short-period*. Les valeurs désirées pour l'amortissement  $\zeta_{sp}$  sont mentionnées dans le tableau XVII.

#### A.2.2.1 Le critère CAP (*Control Anticipation Parameter*)

La capacité du pilote à contrôler le mouvement à court terme de l'avion dépend aussi bien du mode *short-period* que du numérateur. Par conséquent, l'effet du zéro du numérateur  $-1/T_{\theta 2}$  a été incorporé dans le critère appelé *Control Anticipation Parameter*, défini de la

Tableau XVII Amortissement  $\zeta_{sp}$  du mode *short-period*

Niveau	Phases de vol Catégories A & C		Phases de vol Cat. B	
	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1	0.35	1.30	0.30	2.00
2	0.25	2.00	0.25	2.00
3	0.15	—	0.15	—

façon suivante :

$$CAP = \frac{\ddot{\theta}_0}{\Delta n_z} \simeq \frac{\omega_{sp}^2}{n_z/\alpha} \simeq \frac{\omega_{sp}^2}{\frac{V_T}{g} \frac{1}{T_{\theta 2}}}$$

où  $V_T$  est la vitesse totale de l'avion par rapport à l'air et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

Conçu originalement comme le rapport de l'accélération initiale en tangage  $\ddot{\theta}_0$  sur la variation finale d'accélération normale  $\Delta n_z$ , on a vite déduit une bonne approximation liant la pulsation propre  $\omega_{sp}$  du *short-period* et le zéro  $-1/T_{\theta 2}$  du numérateur. La quantité  $n_z/\alpha$  est la sensibilité du facteur de charge à une variation d'incidence. A grande vitesse, ce rapport est grand et à basse vitesse, il est faible.

L'amplitude du CAP donne une bonne indication de la perception que le pilote a des accélérations verticale et en tangage. C'est essentiel à cause du retard entre la commande d'entrée du pilote et l'accélération normale finale.

Tableau XVIII Limitations sur  $\omega_{sp}^2/n_z/\alpha$ 

Niveau	Phases de vol Cat. A		Phases de vol Cat. B		Phases de vol Cat. C	
	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1	0.28	3.60	0.085	3.60	0.16	3.60
2	$\omega_{sp} \geq 1.0$				$\omega_{sp} \geq 0.7$	
	0.16	10.0	0.038	10.0	0.096	10.0
3	$\omega_{sp} \geq 0.6$				$\omega_{sp} \geq 0.4$	
	0.016	—	0.038	—	0.096	—

Les limitations du CAP sont données dans le tableau XVIII. Les figures A.1 et A.2, pour les phases de vol de Catégories A et C, montrent comment on peut combiner CAP et  $\zeta_{sp}$ .

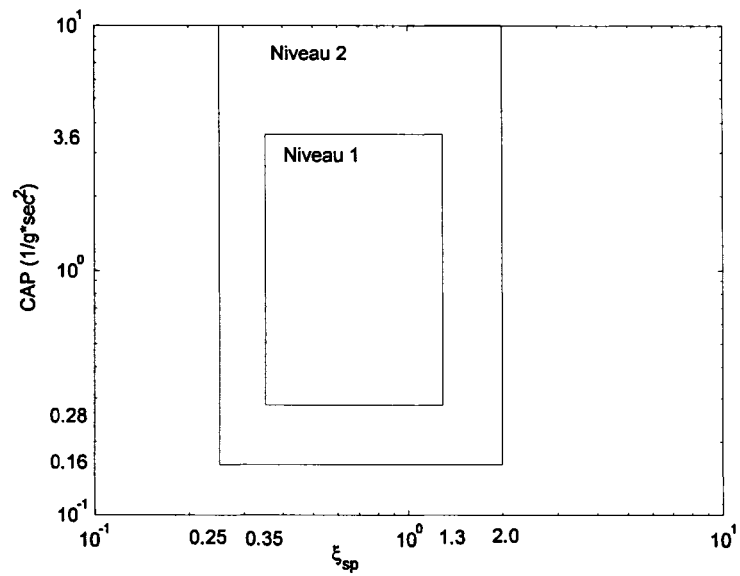


Figure A.1 Limitations en CAP vs.  $\zeta_{sp}$  - Phases de vol de Catégorie A

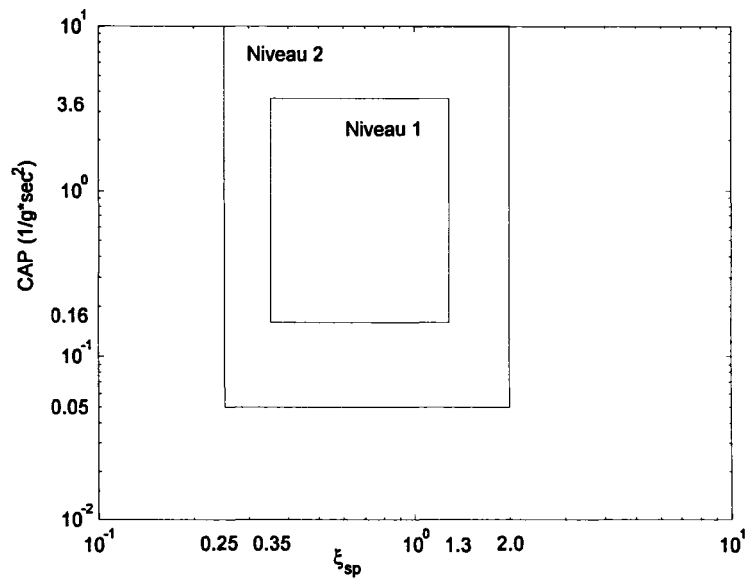


Figure A.2 Limitations en CAP vs.  $\zeta_{sp}$  - Phases de vol de Catégorie C



### A.2.2.2 Largeur de Bande (*Bandwidth*) et retard de phase

Ce critère est basé sur la réponse en fréquence associée à la fonction de transfert reliant la commande du pilote  $\delta_{ref}$  à l'angle d'assiette  $\theta$ . La bande passante  $\omega_{BW}$  est définie comme étant la plus petite des deux pulsations  $\omega_{BWG}$  et  $\omega_{BWPH}$ ,  $\omega_{BWG}$  est la pulsation où le gain a augmenté de 6 dB relativement à la valeur du gain où la phase vaut  $-180^\circ$  et  $\omega_{BWPH}$  la pulsation où la phase vaut  $-135^\circ$ . La figure A.3 illustre cela.

En général, une grande bande passante assure des réponses plus rapides alors qu'une faible bande passante entraîne des réponses lentes.

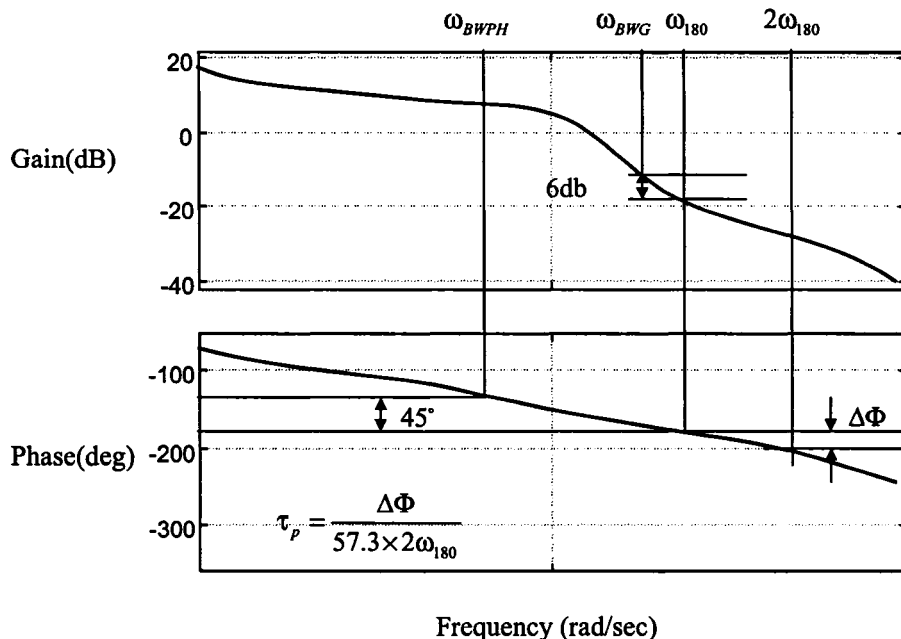


Figure A.3 Définition de la bande passante et du retard de phase

À ce critère s'ajoute le critère du retard de phase (*phase delay*). Il vient en fait compléter le critère précédent dans le sens où il renseigne sur la pente de la courbe de phase au-delà de la pulsation où la phase vaut  $-180^\circ$ . il s'applique à la phase de la fonction de transfert  $\theta/\delta_{ref}$ . Le retard de phase  $\tau_p$  est défini de la façon suivante :

$$\tau_p = \frac{\Delta\Phi_{2\omega_{180}}}{57.3 \times 2\omega_{180}}$$

où  $\Delta\Phi_{2\omega_{180}}$  est la variation de phase entre  $\omega_{180}$  et  $2\omega_{180}$ .

La figure A.4 montre les limites imposées sur la bande passante et le retard de phase pour les qualités de vol de niveau 1 et 2, [31, 32]. Pour satisfaire les caractéristiques de niveau 1, une bande passante  $\omega_{BW}$  de 1.4 rad/sec ou supérieure est nécessaire. En dernier lieu, un retard excessif dans la boucle de rétroaction entre l'erreur en assiette et la commande du pilote peut résulter en un couplage avion-pilote qui produit des oscillations très mal amorties et dans le pire des cas, instables. Ce sont les PIOs ou *pilot-induced oscillations*.

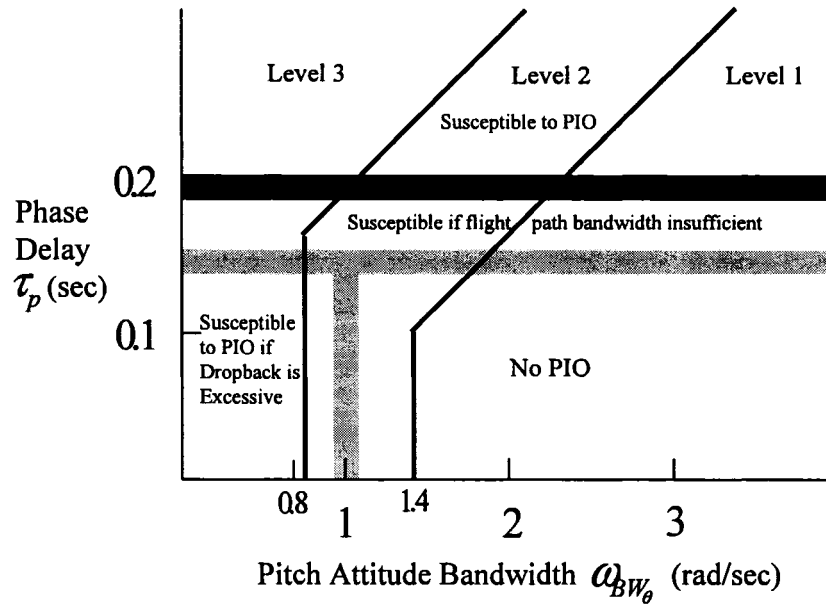


Figure A.4 Critère pour  $\omega_{BW}$  et  $\tau_p$

### A.2.2.3 Dropback selon Gibson

Le critère portant sur la bande passante ne couvre pas adéquatement les effets d'une phase excessive, J.C. Gibson [26] propose un critère qui définit un paramètre appelé *Dropback*.

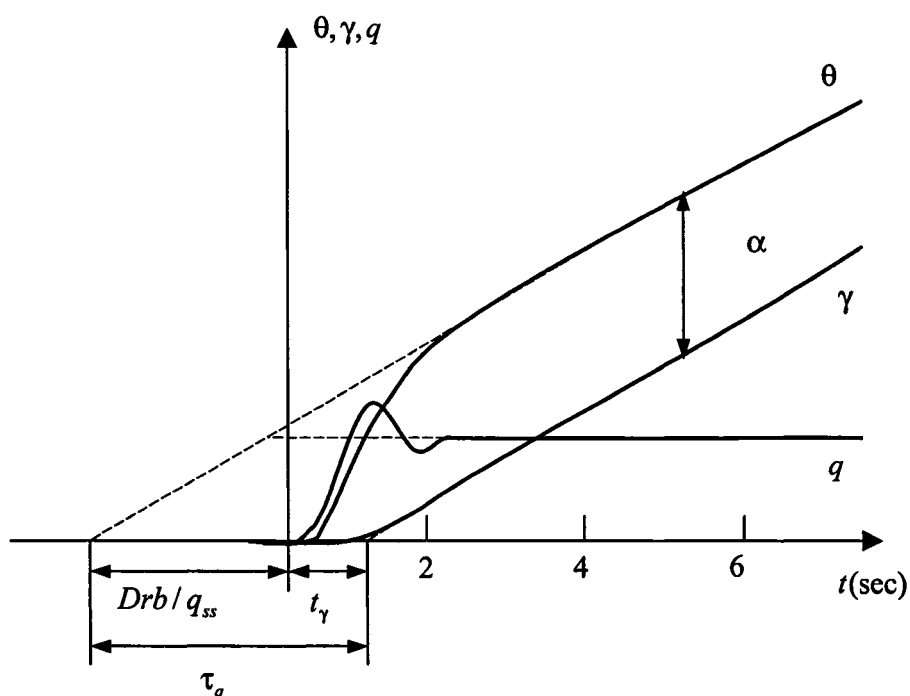


Figure A.5 Définition du Dropback

Le dropback est une mesure à court terme des changements d'assiette  $\theta$ . Il est calculé en observant la réponse de l'avion en assiette  $\theta$  suite à une entrée échelon  $\delta_{ref}$ . La figure A.5 illustre le calcul du dropback, noté  $Drb$ ;  $q_{ss}$  désigne la valeur en régime permanent de la vitesse en tangage  $q$ .

Un dropback excessif entraîne une perte de précision et des mouvements trop brusques dans le contrôle du tangage  $q$ . Gibson suggère que le rapport  $Drb/q_{ss}$  devrait être inférieur à 0.25 pour une poursuite précise et inférieur à 0.1 pour un atterrissage.

## ANNEXE B

### INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES

Les principaux résultats présentés dans ce mémoire, sont exprimés à l'aide d'inégalités matricielles linéaires, **LMI**. Ce formalisme est particulièrement attrayant puisqu'il conduit à des problèmes d'optimisation convexe pour lesquels il existe des outils de résolution efficaces qui utilisent la structure spécifique du problème *LMI* [23].

Nous présentons ici les définitions mathématiques sur lesquels repose la notion d'inégalité matricielle linéaire ainsi que les principaux lemmes techniques utilisés pour exprimer sous forme de *LMI* certaines inégalités matricielles initialement non linéaires. Pour un complément d'information sur le sujet, nous invitons le lecteur à ce reporter à [10].

#### B.1 Définitions

La notion d'inégalité matricielle linéaire repose sur la définition d'une relation d'ordre sur les matrices symétriques (ou hermitiennes).

- **Positivité des matrices symétriques (ou hermitiennes)**

**Définition B.1.1.** *La matrice symétrique  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite positive (resp. strictement positive) si et seulement si :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad v^T P v \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0) \quad (\text{B.1})$$

En remarquant que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, nous pouvons énoncer la propriété suivante :

**Propriété B.1.1.**

$$P = P^T \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0) \iff \lambda_{\min}(P) \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0) \quad (\text{B.2})$$

Une seconde propriété fondamentale que nous utilisons, le plus souvent est la suivante :

**Propriété B.1.2.** *Etant donnée une matrice quelconque  $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$  de rang plein, on a :*

$$P = P^T > 0 \iff V^T P V > 0 \quad (\text{B.3})$$

La notion de positivité des matrices hermitiennes est une extension immédiate dans  $\mathbb{C}$  des résultats exprimés dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition B.1.2.** *Soit une matrice  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,*

$$P = P^* > 0 \text{ (resp. } \geq 0) \iff \forall v \in \mathbb{C}^n, \quad v^T P v > 0 \text{ (resp. } \geq 0) \quad (\text{B.4})$$

Notons que la propriété B.1.1 reste valable dans la mesure où les valeurs propres de matrices hermitiennes restent réelles.

L'application des théorie du petit gain ou de la positivité, entre autres, conduisent souvent à des problèmes de résolution *LMI* au sens de la positivité de ces matrices, c'est-à-dire :

$$P(x) = S(x) + jT(x) > 0 \quad (\text{B.5})$$

où  $P(x)$  est une matrice hermitienne de  $\mathbb{C}^{n \times n}$  dont la partie réelle symétrique est notée  $S(x)$  tandis que  $T(x)$  correspond à la partie imaginaire, anti-symétrique ( $T(x) = -T^T(x)$ ).

Cependant les algorithmes de résolution travaillent sur des inégalités réelles. Il convient de modifier la relation B.5 en remarquant que :

$$V \begin{pmatrix} S(x) & T(x) \\ -T(x) & S(x) \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} S(x) - jT(x) & 0 \\ 0 & S(x) + jT(x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

avec

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

On en déduit l'identité des spectres<sup>1</sup> :

$$\Lambda(P(x)) = \Lambda \begin{pmatrix} S(x) & T(x) \\ -T(x) & S(s) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

puis finalement :

$$P(x) > 0 \iff \begin{pmatrix} S(x) & T(x) \\ -T(x) & S(s) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{B.9})$$

### • Inégalités matricielles linéaires

**Définition B.1.3.** *Etant donnée une famille de matrices symétriques  $\{P_i\}_{i=0\dots r}$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et un vecteur  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r]^T$  de  $\mathbb{R}^r$ , une inégalité matricielle linéaire (LMI) stricte (resp. non stricte) s'écrit sous la forme :*

$$P(x) = P_0 + x_1 P_1 + \dots + x_r P_r > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0) \quad (\text{B.10})$$

*Remarques :*

1. Les variables de décision  $x_i$  stockées dans le vecteur  $x$  peuvent l'être également dans une matrice quelconque  $X$ . Ainsi, par exemple, l'inégalité suivante est une LMI (on suppose les matrices de dimensions compatibles de sorte que le produit  $AXB$  soit bien défini)

$$AXB + B^T X^T A^T < 0 \quad (\text{B.11})$$

Cette expression est bien linéaire en  $X$  et donc par rapport aux scalaires  $x_{ij}$  qui constituent cette matrice.

---

<sup>1</sup> On note  $\Lambda(M)$  le spectre d'une matrice  $M$ .

2. Un ensemble de *LMI* peut être traité comme une seule *LMI* structurée. En effet, on a :

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad P_i(x) > 0 \iff \text{diag}(P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)) > 0 \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Méthodes générales de résolution

Les trois problèmes d'optimisation convexe les plus rencontrés sous forme *LMI* sont les suivants :

- **Le problème de faisabilité** : il s'agit de trouver un vecteur  $x$  tel que  $P(x) > 0$ . On remplace généralement ce problème par la recherche de  $x$  qui minimise le scalaire  $\gamma$  tel que :

$$-P(x) < \gamma I \quad (\text{B.13})$$

si le meilleur  $\gamma$  obtenu est négatif, le problème est faisable. Vérifier la stabilité d'un système linéaire invariant se ramène très facilement à ce genre de problème.

- **Le problème de valeurs propres** : il s'agit cette fois ci de minimiser un objectif linéaire sous contrainte *LMI*, supposée faisable :

$$\text{minimiser } c^T x \text{ sous la contrainte } P(x) > 0 \quad (\text{B.14})$$

où  $c$  est un vecteur de même dimension que  $x$ . On pourra rencontrer ce type de problème en cherchant par exemple à calculer la norme d'un système linéaire.

- **Le problème de valeurs propres généralisées** : ce type de problème, numériquement plus coûteux, se formalise ainsi :

$$\text{minimiser } \lambda \quad / \quad \begin{cases} A(x) < \lambda B(x) \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

C'est essentiellement ce type de problème que l'on a été amené à résoudre dans le cadre de recherche de *scalings*, lors de la synthèse des lois de commande *LPV* (voir chapitre 3).

*Remarques :*

1. Les contraintes exprimées à travers chacun de ces problèmes sont strictes. Il peut arriver que l'on ait à prendre en compte des inégalités non strictes. Bien qu'il existe certains cas pathologiques, une *LMI* faisable et non stricte peut toujours se ramener à une inégalité stricte [10].
2. Les trois problèmes que nous avons présentés sont naturellement convexes ou quasi-convexes, ce qui garantit l'existence d'un optimum global.

Nous exposons ici très rapidement deux grandes familles de méthodes de résolution permettant de traiter ce type de problèmes.

**Méthodes des plans sécants :** tel l'algorithme de l'ellipsoïde [9]. Ces méthodes garantissent une certaine efficacité sur le plan théorique, puisqu'elles assurent la convergence vers l'optimum en temps polynomial. En revanche, l'implantation sur ordinateur conduit souvent à des temps de calcul prohibitifs.

**Méthodes du point intérieur :** elles offrent un avantage certain sur les techniques de plans sécants: la rapidité. Ces méthodes ont été améliorées et étendues au cas général par Nesterov et Nemirovsky [43, 56]. L'idée est de transformer les contraintes inégalités au moyen de la fonction *barrière* :

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\log(\det(P(x))) & \text{si } P(x) > 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Ainsi par exemple, le problème de faisabilité revient à minimiser cette fonction  $\Phi(x)$ .

Plusieurs outils sont disponibles pour la résolution de *LMI*. Citons par exemple le plus connu d'entre eux: "*LMI Control Toolbox*", proposé par Gahinet et *al.*, [23].



### B.3 Lemmes techniques

Le complément de Schur est sans doute le lemme le plus utilisé car il permet d'écrire sous forme de *LMI*, l'essentiel des inégalités matricielles **non linéaires** rencontrées dans la théorie de l'automatique.

- **Lemme de Schur et variantes**

Après avoir rappelé ce lemme, nous présentons les principales variations de ce lemme appliquées pour les problèmes de l'automatique.

**Lemme B.3.1.** (Complément de Schur) *Etant données une de matrice quelconque  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et deux matrices symétriques  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , alors :*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & S \end{pmatrix} > 0 &\iff \begin{cases} R > 0 \\ S - M^T R^{-1} M > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} S > 0 \\ R - M S^{-1} M^T > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

**Corollaire B.3.1.** (Projection du complément de Schur) *En reprenant les notations précédentes et en introduisant de plus la matrice  $N \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et l'identité  $I$  de  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , on a:*

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \iff \begin{cases} S > 0 \\ N^T (R - M S^{-1} M^T) N > 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Nous terminons cette annexe, en présentant ces exemples classiques d'application du complément de Schur :

- **Valeur singulière maximale**

Etant donnée une matrice  $M$  quelconque de  $\mathbb{R}^{n \times m}$ ,

$$\bar{\sigma}(D) = \sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)} < \gamma \iff \begin{bmatrix} \gamma I & M \\ M^T & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.19})$$

### • Inégalité algébrique de Riccati

Considérons par exemple, l'inégalité de Riccati qui intervient souvent en *commande optimale* :

$$A^T P + P A + P B R B^T P + Q < 0 \quad \text{où} \quad P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{B.20})$$

En utilisant le complément de Schur, la condition (B.20) peut s'écrire comme une *LMI* :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + Q & P B \\ B^T P & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.21})$$

en la variable  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### • Performance $\mathcal{H}_\infty$ et caractérisation *LMI*

Dans le cadre des systèmes linéaires invariants, on relie couramment la notion de performance (ou robustesse) à l'existence d'une borne sur la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert. Ainsi, pour un système stable donné, calculer sa norme  $\mathcal{H}_\infty$  devient un exercice intéressant. Parmi les nombreuses solutions proposées dans la littérature, on peut retenir celle qui repose sur l'utilisation du **lemme borné réel**. Ce dernier présente l'avantage de transformer une contrainte  $\mathcal{H}_\infty$  sous forme d'inégalité matricielle linéaire.

**Lemme B.3.2.** (Lemme Borné Réel) *Considérons un système LTI dont la fonction de transfert est donnée par  $T(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ . Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $\|D + C(sI - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$  et  $A$  est stable (c'est-à-dire tel que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à partie réelle strictement négative).

2) il existe une matrice symétrique définie positive  $P$ , solution de l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.22})$$

Notons que la *LMI* (B.22) est équivalente à :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(D) < \gamma \\ A^T P + PA + \gamma^{-1} C^T C + \gamma (PB + \gamma^{-1} C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (B^T P + \gamma^{-1} D^T C) < 0 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

où l'on reconnaît l'inégalité algébrique de Riccati associée avec le lemme borné réel. Cette approche a été utilisée dans le chapitre 3, pour donner une caractérisation *LMI* de la solution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes *LPV*.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams, R.J., Sparks, A.G. and Banda, S.S. (1993). Full Enveloppe Multivariable Control Law Synthesis for a High Performance Test Aircraft. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, pp. 948-955.
- [2] Akhrif, O., Saad, M., Zhu, G., Garcia-Aguilar, S., Hentabli, K. and Wu, G. (2000). *Design of Practical Flight Control Systems for Commercial Aircraft Using Modern Control Techniques*. Technical Report, No. 2.
- [3] Andry, A.N., Shapiro, E.Y. and Chung, J.C. (1983). Eigenstructure Assignment for Linear Systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-19, pp. 711-729.
- [4] Apkarian, P. and Gahinet, P. (1995). A Convex Characterization of Gain Scheduling  $H_\infty$  Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 5, pp. 853-864.
- [5] Balas, G.J. and Doyle, J.C. (1994). Control of Lightly Damped, Flexible Modes in the Controller Crossover Region. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 17, No. 2, pp. 370-377.
- [6] Balas, G.J., Doyle, J.C., Glover, K. and Smith, P.R. (1998).  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The MathWorks Inc., Natick, MA.
- [7] Becker, G., Packard, P., Philbrick, D. and Balas, G.J. (1993). Control of Parameterically-Dependent Linear Systems : A Single Quadratic Lyapunov Approach. *In the proceedings of the American Control Conference*, pp. 2795-2799.
- [8] Blight, J.D., Dailey, R.L. and Gangsaas, D. (1994). Practical Control Law Design for Aircraft using Multivariable Techniques. *International Journal of Control*, Vol. 59, No. 1, pp. 93-137.
- [9] Boyd, S. and Barratt, C. (1991). *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice-Hall.

- [10] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics. Vol. 15, Philadelphia, PA.
- [11] Boyd, S. and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.
- [12] Cockburn, J.C. and Morton, B.G. (1997). Linear Fractional Representations of Uncertain Systems. *Automatica*, Vol. 33, pp. 1263-1271.
- [13] Doyle, J.C. (1982). Analysis of Feedback Systems with structured uncertainties. *In the Proceedings of the Institute of Electrical Engineers*, Part D, Vol. 6, pp. 242-250.
- [14] Doyle, J.C. (1985). Structured Uncertainty in Control System Design. *In the Proceedings of the Conference of Decision and Control*, pp. 260-265.
- [15] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. and Francis, B.A. (1989). State-Space Solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, pp. 831-847.
- [16] Doyle, J.C., Packard, A. and Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ . *In the Proceedings of the Conference of Decision and Control*, pp. 1227-1232.
- [17] Enns, D.F., Bugajski, D.J., Hendrick, R.C. and Stein, G. (1994). Dynamic Inversion : An Evolving Methodology for Flight Control Design. *International Journal of Control*, Vol. 59, No.1, pp. 71-91.
- [18] Fan, M., Tits, A. and Doyle, J.C. (1991). Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, pp. 25-38.
- [19] Favre, C. (1996). Fly-by-Wire for Commercial Aircraft : The Airbus Experience. In Tischler M.B., Edition : *Advances in Aircraft Flight Control*. Taylor and Francis.

- [20] Fielding, C. and Luckner, R. (2000). Industrial Considerations for Flight Control. In *Flight Control Systems : Practical Issues in Design and Implementation*. Edited by Roger W. Pratt, IEE books and AIAA press.
- [21] Forssell, L. and Johansson, F. (2001). *The Aero-Data Model In a Research Environment (ADMIRE) for Flight Control Robustness Evaluation*. Technical Report GAR-TEUR FM(AG11)/TP-119-7.
- [22] Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, No. 4, pp. 421-448.
- [23] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J. and Chilali, M. (1994). *LMI Control Toolbox*. The MathWorks, Inc., Natick, MA.
- [24] Gangsaas, D., Bruce, K.R., Blight, J.D. and Uy-Loi Ly (1986). Application of Modern Synthesis to Aircraft Control : Three Case Studies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, No. 11, 995-1014.
- [25] Garrard, W.L., Enns, D.F. and Snell, S.A. (1992). Nonlinear Feedback Control of Highly Manoeuvrable Aircraft. *International Journal of Control*, Vol. 56, pp. 799-812.
- [26] Gibson J.C. (1999). *Development of a Methodology for Excellence in Handling Qualities Design for Fly by Wire Aircraft*. Delf University Press.
- [27] Glover, K. and Doyle, J.C. (1988). State Space Formulae for All Stabilizing Controllers that Satisfy an  $H_\infty$  Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity. *Systems and Control Letters*, Vol. 11, pp. 167-172.
- [28] Harper, R.P. and Cooper, G.E. (1986). Handling Qualities and Pilot Evaluation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 9, No. 5, pp. 515-529.
- [29] Hentabli, K., Akhrif, O. and Saydy, L. (2003). Robust Longitudinal Flight Control System Under Weight and Center of Gravity Uncertainty. *IEEE CCECE*, Montreal, Canada , pp. 1743-1748.

- [30] Hentabli, K., Saydy, L. and Akhrif, O. (2003). Robust Flight Control Design with Handling Qualities Incorporation via Low Order Model Matching. *IEEE International Conference on Control and Automation*, Montreal, Canada, pp. 193-197.
- [31] Hodgkinson, J. (1999). *Aircraft Handling Qualities*. AIAA Inc. and Blackwell Science Ltd.
- [32] Hodgkinson, J. and Mitchell, D. (2000). Handling Qualities. In *Flight Control Systems : Practical Issues in Design and Implementation*. Edited by Roger W. Pratt, IEE books and AIAA press.
- [33] Hoh, R.H. and Mitchell, D.G. (1996). Handling Qualities Specification - A Functional Requirement for the Flight Control system. In Tischler M.B., Edition : *Advances in Aircraft Flight Control*. Taylor and Francis.
- [34] Hyde, R.A. and Glover, K. (1993). Taking  $\mathcal{H}_\infty$  Control into Flight. *In the Proceedings of the Conference of Decision and Control*, pp. 1458-1463.
- [35] Lee, W.S., Anderson, B.D.O. and Kosut, R.L. (1993). A New Approach to Adaptive robust Control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 7, No. 3, pp. 183-211.
- [36] Macmillen, F. (1998). *Data Package for Bombardier/ETS Active Control Technology Collaboration*. Bombarier Aerospace.
- [37] McLean, D. (1990). *Automatic Flight Control Systems*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- [38] McRuer, D., Ashkenas, I. and Graham, D. (1973). *Aircraft Dynamic and Automatic Control*. Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [39] *Military Standard - Flying Qualities of Piloted Aircraft*. Department of Defense, MIL-STD-1797A, Washington, D.C., January 1990.

- [40] Moore, B.C. (1981). Principal Component Analysis in Linear Systems : Controllability, Observability and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, pp. 853-864.
- [41] Morton, B., Enns, D.G. and Zhang B.Y. (1996). Stability of Dynamic Inversion Control Laws Applied to Nonlinear Aircraft Pitch Axis Models. *International Journal of Control*, Vol. 63, No.1, pp. 1-25.
- [42] Nelson, R.C. (1998). *Flight Stability and Automatic Control*. McGraw-Hill, New York.
- [43] Nesterov, Yu.N. and Nemirovski, A.S. (1994). *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming : Theory and Applications*. Studies in Applied Mathematics. Vol. 13, Philadelphia.
- [44] Nichols, R.A., Reichert, R.T. and Rugh, W.J. (1993). Gain Scheduling for  $\mathcal{H}_\infty$  Controllers : A Flight Control Example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 1, No. 2, pp. 69-79.
- [45] Packard, P. (1994). Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations. *Systems and Control Letters*, 22, pp. 79-92.
- [46] Ravi, R., Nagpal, K.M. and Khargonekar, P.P. (1991).  $\mathcal{H}_\infty$  Control of Linear Time-Varying Systems : A State-Space Approach. *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 29, No. 6, pp. 1394-1413.
- [47] Safonov, M. (1982). Stability Margins for Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems. *In IEE Proceedings*, Vol. 129, Part D, pp. 251-256.
- [48] Shamma, J.F. and Athans, M. (1990). Analysis of Gain-Scheduled Control for Nonlinear Plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, pp. 898-907.
- [49] Shamma, J.F. and Athans, M. (1991). Guaranteed Properties of Gain Scheduled Control for Linear Parameters-Varying Plants. *Automatica*, Vol. 27, pp. 559-564.



- [50] Sobel, K.M. and Shapiro, E.Y. (1985). Application of Eigenstructure Assignment to Lateral Translation and Yaw Pointing Flight Control. *In the Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, pp. 1423-1428.
- [51] Sobel, K.M., Shapiro E.Y. and Andry, A.N. (1994). Eigenstructure Assignment. *International Journal of Control*, Vol. 59, No. 1, pp. 13-37.
- [52] Spillman, M. (2000). Robust Longitudinal Flight Control Design Using Linear Parameters-Varying Feedback. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 23, No. 1, pp. 101-108.
- [53] Stevens, B.L. and Lewis, F.L. (2003). *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- [54] Stilwell, D.J. and Rugh, W.J. (2000). Stability Preserving Interpolation Methods for the Synthesis of Gain-Scheduled Controllers. *Automatica*, Vol. 36, No. 5, pp. 665-671.
- [55] Tucker, M.R. and Walker, D.J. (1997). *RCAM Design Challenge Presentation Document : An  $\mathcal{H}_\infty$  Approach*. Technical Report GARTEUR FM(AG08)/TP-088-21.
- [56] Vandenberghe, L. and Boyd, S. (1996). *Semidefinite Programming*. SIAM Review, 38(1), pp. 49-95.
- [57] Wang, W., Doyle, J.C. and Beck, C. (1991). Model Reduction of LFT Systems. *In the Proceedings of the Conference of Decision and Control*, pp. 1233-1238.
- [58] Young, P. and Doyle, J.C. (1990). Computation of  $\mu$  with Real and Complex Uncertainties. *In the Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1230-1235.
- [59] Zhou, K., Doyle, J.C. and Glover K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [60] Zhu, G., Akhrif, O., Saydy, L. and Hentabli, K. (2000). Robustness Augmentation of Fixed Structure Flight Control Systems via  $\mu$ . *In the proceedings of the AIAA Conference on Guidance, Navigation and Control*, 2000-4366.