

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU
DOCTORAT EN GÉNIE

Ph.D.

PAR
Said GRAMI

IDENTIFICATION NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS POUR
L'AMÉLIORATION DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

MONTREAL, LE 29 OCTOBRE 2009

PRÉSENTATION DU JURY
CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE
PAR UN JURY COMPOSÉ DE

M. Pascal Bigras, directeur de thèse

Département de Génie de la Production Automatisée à l'École de Technologie Supérieure

M. Maarouf Saad, président du jury

Département de Génie Électrique à l'École de Technologie Supérieure

M. Mohamad Saad, examinateur externe

Unité d'enseignement et de recherche en sciences appliquées à l'Université du Québec en
Abitibi-Témiscamingue

M. Guy Gauthier, membre du jury

Département de Génie de la Production Automatisée à l'École de Technologie Supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 3 SEPTEMBRE 2009

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

IDENTIFICATION NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS POUR L'AMÉLIORATION DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Said GRAMI

RÉSUMÉ

Le frottement est un phénomène physique qui se manifeste au niveau des surfaces de contact en mouvement relatif. Il présente un risque accablant dans la dégradation des systèmes de commande en introduisant des erreurs de suivi, des cycles limites et carrément des instabilités.

Afin de compenser les effets du frottement en temps réel, le but de cette thèse est de proposer une approche d'identification en ligne du modèle de frottement GMS. Pour ce faire, nous proposons en premier lieu, une nouvelle approche d'identification de la partie statique du frottement (frottement de Stribeck) basée sur une théorie non linéaire d'optimisation min-max. Cette approche permet d'identifier tous les paramètres du modèle de Stribeck en même temps et en particulier les paramètres qui agissent d'une façon non linéaire dans le modèle de frottement.

L'extension pour le modèle de GMS n'est pas faisable parce que le modèle GMS ne vérifie pas les conditions d'application de cette théorie. Ainsi, une nouvelle approche est présentée pour identifier les paramètres du modèle GMS. Cette approche est basée sur la mesure de la force de frottement et une linéarisation du modèle GMS par rapport aux paramètres inconnus. L'observateur robuste de Marino est ensuite utilisé pour estimer les paramètres inconnus du modèle malgré les perturbations introduites par les erreurs d'approximation. Pour implanter l'observateur, une approche de filtrage est proposée pour éliminer les discontinuités des signaux. Un filtre particulier est introduit pour tenir compte de la commutation des signaux lors de la transition entre le régime de préglissement et le régime de glissement.

Une extension de la méthode qui, cette fois, n'est pas fondée sur l'hypothèse de la mesure de la force de frottement est proposée. Pour ce faire, une méthode de calcul de la force de frottement filtrée à partir des signaux de vitesse et de commande est développée. Une méthode de filtrage avec des conditions initiales appropriées est proposée pour vérifier les conditions d'application de l'observateur. Une validation expérimentale de l'approche d'identification est présentée à la fin de la thèse. Les résultats montrent que l'approche d'identification du modèle de frottement GMS proposée dans cette thèse admet de très bonnes performances.

À la fin, des recommandations sont formulées relativement à i) une étude approfondie de la fonction de commutation qui assure la transition entre les deux régimes de frottement pour un modèle à plusieurs étages et ii) une meilleure caractérisation de la fonction de transfert du banc expérimental afin de valider de façon plus juste l'approche proposée sur le plan pratique.

Mots clés : Identification, Frottement GMS, Frottement de Stribeck, Observateur adaptatif.

IDENTIFICATION NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS POUR L'AMÉLIORATION DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

Said GRAMI

ABSTRACT

Friction causes important undesirable phenomena in a large class of control systems. This is particularly the case in systems that require a high degree of accuracy. Friction can deteriorate control performance by introducing tracking errors, limit cycles and possibly shattering.

The goal of friction modelling is to quantify the various facets of friction behaviour. Many models, from simple to complex, designed to compensate for the unwanted friction effect have been introduced in the literature. In fact, the first friction models that were developed were static. The disadvantage of such models is that they do not represent all friction behaviours. It is thus that dynamic models were introduced.

While dynamic models represent many aspects of friction phenomena, they do not render both stiction in pre-sliding regime. Moreover, they represent a steady drift in position. For this reason, more recent models have been introduced to better illustrate friction behaviour.

More recently, the Generalized Maxwell Slip friction model known as the GMS model was introduced. It was compared to the other recently developed models and showed that it illustrates the majority of friction behaviours as well as their static and dynamic aspects. Moreover, a reduced friction model which is appropriate for simulation and control purposes was introduced.

Modelling friction in control systems is very important. However, parameter identification is necessary in order to compensate for that friction. A great deal of work has been reported in the literature.

Until now, the GMS model has not yet been adequately identified. Identification was based only on the pre-sliding regime or the pre-sliding and sliding regimes, but these identifications were based on off-line approaches like linear regression, dynamic linear regression, nonlinear regression and Monte Carlo approach.

In this thesis, our objective is to estimate the GMS friction model in both the pre-sliding and sliding regimes in order to improve the control strategy of mechanical systems by using a simple controller. The research results that led to reach our objective are :

- The identification of the Stribeck friction using a new approach based on non linear identification using min-max algorithm. The identification of the non linear function of Stribeck was successful and was validated by numerical simulations.
- The identification of the GMS model of friction based on using the measured friction force. This approach is based on a linear approximation of the GMS model over the unknown parameters. A robust observer of Marino is then used to estimate the unknown parameters

in spite of the perturbation introduced by the approximation error. In order to apply this observer, the discontinuities in signals are eliminated by a filtering approach. A particular filter implementation is proposed to take into account the signal commutations introduced by the switching between sliding and pre-sliding regimes.

- The identification of the GMS friction model without using force measurement. In fact, by constructing the filtered friction force from measurement signals, we develop a new strategy for the estimation of unknown parameters using an appropriate formulation for the robust observer of Marino.
- The validation of identification approach using a specific experimental test in laboratory. In fact, the experimental tests prove the efficiency of our identification approach in real environment.

Key words : Identification, GMS friction model, Stribeck friction model, Adaptatif observer.

REMERCIEMENTS

*Au terme de ce travail, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères au professeur **Pascal Bigras**, pour avoir encadrer cette thèse, pour son grand savoir et son immense savoir faire aussi bien mathématique, que numérique et physique; mais aussi pour toutes ses qualités humaines. Toutes ces années que j'ai passées sous sa supervision m'ont fait découvrir un grand homme de science, rigoureux et enthousiaste. Merci pour avoir suscité en moi la passion de la recherche.*

*En même temps, je dédis ce travail à mes très chers parents baba **Youssef** et mama **Habiba** ainsi que ma très chère épouse **Dalinda** qui m'ont encouragé et réconforté pendant toutes mes années d'études. Qu'ils trouvent ma reconnaissance et mon admiration à travers ce rapport. Enfin, je remercie infiniment tous mes amis avec qui j'ai passé des merveilleux moments inoubliables.*

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 ÉTAT DE L'ART.....	7
1.1 Introduction.....	7
1.2 Étude du phénomène de frottement.....	7
1.2.1 Modèles statiques.....	8
1.2.2 Phénomènes de frottement dynamique.....	11
1.2.3 Modèle dynamique.....	14
1.2.4 Conclusion.....	20
1.3 Identification des modèles de frottement.....	21
1.3.1 Identification des modèles statiques.....	22
1.3.2 Identification des modèles de frottement dynamiques.....	23
1.4 Conclusion.....	30
CHAPITRE 2 IDENTIFICATION NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE FROTTEMENT DE STRIBECK.....	32
2.1 Introduction.....	32
2.2 Modèle de frottement de Stribeck.....	33
2.3 Formulation du problème.....	34
2.4 Approche min-max.....	35
2.4.1 Introduction.....	35
2.4.2 Présentation de l'approche min-max.....	35
2.4.3 Hypothèses.....	38
2.5 Application de l'approche min-max au modèle de frottement.....	39
2.5.1 Formulation.....	39
2.5.2 Stabilité de l'estimateur.....	44
2.5.3 Propriétés.....	45
2.6 Simulation de l'estimateur min-max appliquée au modèle de frottement de Stribeck.....	49
2.6.1 Résultats de simulation.....	49
2.6.2 Limites de l'approche min-max.....	52
2.7 Conclusion.....	52
CHAPITRE 3 IDENTIFICATION DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS BASÉ SUR LA MESURE DE LA FORCE DE FROTTEMENT.....	54
3.1 Introduction.....	54
3.2 Formulation du problème.....	54

3.3	Modèle de frottement GMS.....	55
3.4	Observateur de Marino.....	59
	3.4.1 Introduction.....	59
	3.4.2 Formulation.....	60
3.5	Application de l'observateur de Marino pour l'identification du modèle de frottement GMS.....	64
	3.5.1 Introduction.....	64
	3.5.2 Application de l'observateur de Marino.....	64
3.6	Étude des fonctions de commutation.....	72
	3.6.1 Fonction de commutation idéale.....	72
	3.6.2 Fonction de commutation approximée.....	73
	3.6.3 Fonction de commutation estimée.....	74
3.7	Simulations.....	75
	3.7.1 Validation de l'approximation.....	75
	3.7.2 Estimateur à l'aide de la fonction de commutation idéale.....	77
	3.7.3 Estimateur à partir de la fonction de commutation approximée.....	85
	3.7.4 Validation.....	91
3.8	Conclusion.....	94
CHAPITRE 4 IDENTIFICATION DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS AVEC CONSTRUCTION DE LA FORCE DE FROTTEMENT FILTRÉE.....		96
4.1	Introduction.....	96
4.2	Formulation du problème.....	96
4.3	Résultats de simulation.....	104
	4.3.1 Simulation de l'estimateur avec la fonction de commutation idéale.....	104
	4.3.2 Simulation de l'estimateur avec la fonction de commutation approximée.....	109
4.4	Conclusion.....	114
CHAPITRE 5 IDENTIFICATION DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS BASÉ SUR LA MESURE DE FROTTEMENT : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE		115
5.1	Introduction.....	115
5.2	Rappel de la problématique.....	115
5.3	Description du dispositif expérimental.....	115
5.4	Résultats expérimentaux.....	119
	5.4.1 Première étape.....	120
	5.4.2 Deuxième étape.....	121
	5.4.3 Troisième étape.....	121
	5.4.4 Résultats.....	123
5.5	Conclusion.....	128
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.....		129

ANNEXE I	DÉMONSTRATIONS DES PROPRIÉTÉS ET DU THÉORÈME DU CHAPITRE 2.....	132
RÉFÉRENCES.....		151

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 2.1	Valeurs nominales des paramètres 49
Tableau 2.2	Valeurs des paramètres pour la simulation 49
Tableau 3.1	Valeurs des paramètres pour la validation 76
Tableau 3.2	Effet de la valeur de g_m sur l'approximation de frottement 78
Tableau 3.3	Valeurs des paramètres de simulation 80
Tableau 3.4	Valeurs des paramètres à estimer 81
Tableau 4.1	Valeurs des paramètres de simulation 105
Tableau 4.2	Valeurs des paramètres à estimer 106
Tableau 5.1	Valeurs des gains de l'estimateur et valeur nominale de Stribeck 122

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1.1	Frottement visqueux.	8
Figure 1.2	Frottement de Coulomb.	9
Figure 1.3	Frottement de Coulomb plus frottement statique.	9
Figure 1.4	Effet Stribeck.	10
Figure 1.5	Modèle de frottement selon Karnopp.	11
Figure 1.6	Courbe de l'hystérésis de préglissement.	12
Figure 1.7	Retard de frottement : relation fréquentielle.	13
Figure 1.8	Variation de la force de décrochage.	14
Figure 1.9	Résultat de simulation de l'effet de broutage.	15
Figure 1.10	(a) Schéma du contact réel entre deux surfaces. (b) Schéma microscopique des surfaces en contact.	16
Figure 1.11	Schéma microscopique de deux surfaces en contact pour le modèle de LuGre.	17
Figure 1.12	Frottement réel en fonction de la vitesse (hystérésis de glissement). Frottement de Stribeck (Courbe en pointillé).	20
Figure 1.13	Comparaison des quatre types de frottement.	21
Figure 2.1	Frottement de Stribeck.	33
Figure 2.2	Schéma descriptif du système.	34
Figure 2.3	Erreur d'estimation pour le paramètre visqueux (σ_v).	50
Figure 2.4	Erreur d'estimation pour le paramètre de Coulomb (σ_c).	50
Figure 2.5	Erreur d'estimation pour le paramètre (σ).	51
Figure 2.6	Erreur d'estimation pour le paramètre de Stribeck (θ_s).	51

Figure 3.1	Schéma descriptif du système.	55
Figure 3.2	(a) Schéma du contact réel entre deux surfaces. (b) schéma microscopique des surfaces en contact.	56
Figure 3.3	Frottement en fonction de la vitesse selon le modèle GMS.	56
Figure 3.4	Représentation schématique du modèle GMS.	57
Figure 3.5	Schéma de la procédure de la validation AI.	75
Figure 3.6	Force de frottement réelle et approximée.	76
Figure 3.7	Force de frottement réelle et approximée (Agrandissement)	77
Figure 3.8	Erreur de frottement.	78
Figure 3.9	Signal d'excitation (vitesse).	79
Figure 3.10	Schéma de simulation de l'observateur avec une fonction de commutation idéale.	80
Figure 3.11	Valeurs réelle et estimée de θ_1	81
Figure 3.12	Valeurs réelle et estimée de θ_2	82
Figure 3.13	Valeurs réelle et estimée de θ_3	82
Figure 3.14	Valeurs réelle et estimée de θ_4	83
Figure 3.15	Valeurs réelle et estimée de θ_5	83
Figure 3.16	Courbes du frottement réel (ligne pleine) et du frottement estimé (ligne en pointillé).	84
Figure 3.17	Erreur d'estimation du frottement.	84
Figure 3.18	Schéma de simulation de l'observateur avec une fonction de commutation approximée.	85
Figure 3.19	Fonctions de commutation idéale et approximée.	86
Figure 3.20	Fonctions de commutation idéale et approximée (agrandissement).	86
Figure 3.21	Valeurs réelle et estimée de θ_1	87
Figure 3.22	Valeurs réelle et estimée de θ_2	87

Figure 3.23	Valeurs réelle et estimée de θ_3 .	88
Figure 3.24	Valeurs réelle et estimée de θ_4 .	88
Figure 3.25	Valeurs réelle et estimée de θ_5 .	89
Figure 3.26	Frottements réel et estimé.	89
Figure 3.27	Frottements réel et estimé (agrandissement).	90
Figure 3.28	Erreur de frottement.	90
Figure 3.29	Signal d'excitation pour la validation.	91
Figure 3.30	Courbes de frottement réel et frottements estimés selon le type de commutation.	92
Figure 3.31	Courbes de frottement réel et frottements estimés selon le type de commutation (agrandissement).	93
Figure 3.32	Erreur de frottement selon le type de commutation.	93
Figure 3.33	Courbe de l'erreur de frottement selon le type de commutation (agrandissement).	94
Figure 4.1	Schéma du système du filtre.	98
Figure 4.2	Schéma de la construction de la force de frottement filtrée.	100
Figure 4.3	Schéma de la première approche pour l'application du premier étage du filtre.	101
Figure 4.4	Schéma de la deuxième approche pour l'application du premier étage du filtre.	101
Figure 4.5	Fonction de commutation.	101
Figure 4.6	Procédure de la simulation de l'estimateur basée sur la construction de la force de frottement filtrée.	105
Figure 4.7	Valeur réelle et estimée de θ_1 (commutation idéale).	106
Figure 4.8	Valeur réelle et estimée de θ_2 (commutation idéale).	107
Figure 4.9	Valeur réelle et estimée de θ_3 (commutation idéale).	107
Figure 4.10	Valeur réelle et estimée de θ_4 (commutation idéale).	108

Figure 4.11	Valeur réelle et estimée de θ_5 (commutation idéale).	108
Figure 4.12	Erreur de frottement (commutation idéale).	109
Figure 4.13	Frottement réel et estimé (commutation idéale).	109
Figure 4.14	Valeurs réelle et estimée de θ_1 (commutation approximée).	110
Figure 4.15	Valeurs réelle et estimée de θ_2 (commutation approximée).	110
Figure 4.16	Valeurs réelle et estimée de θ_3 (commutation approximée).	111
Figure 4.17	Valeurs réelle et estimée de θ_4 (commutation approximée).	111
Figure 4.18	Valeurs réelle et estimée de θ_5 (commutation approximée).	112
Figure 4.19	Erreur de frottement (commutation approximée).	112
Figure 4.20	Frottements réel et estimé (commutation approximée).	113
Figure 4.21	Courbe de frottement réel et frottement estimé (agrandissement) (commutation approximée)	113
Figure 5.1	Système moteur-corps.	116
Figure 5.2	Capteur de Force.	117
Figure 5.3	Moteur linéaire.	117
Figure 5.4	Conditionneur de signal.	118
Figure 5.5	Pilote Matériel et contrôleur de mouvement.	118
Figure 5.6	photo du dispositif expérimental.	119
Figure 5.7	Frottement en fonction du déplacement.	120
Figure 5.8	Force de frottement expérimentale.	121
Figure 5.9	Signal de vitesse expérimental.	122
Figure 5.10	Erreur de prédiction.	123
Figure 5.11	Courbe de l'estimation de θ_1	124
Figure 5.12	Courbe de l'estimation de θ_2	124

Figure 5.13	Courbe de l'estimation de θ_3	125
Figure 5.14	Courbe de l'estimation de θ_4	125
Figure 5.15	Courbe de l'estimation de θ_5	126
Figure 5.16	Frottement réel et estimé.....	127
Figure 5.17	Frottement réel et estimé (agrandissement).....	127

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

σ_c	Force de Coulomb, N
σ_s	Force Statique, N
σ_v	Coefficient visqueux, Ns/m
δ	Coefficient de Stribeck
v_s	Vitesse de Stribeck, m/s
ϵ	Constante positive
M	Masse d'un corps, Kg
θ_s	Coefficient de Stribeck, s^2/m^2
$sign$	Opérateur signe
σ	Paramètre exprimant la différence $\sigma_s - \sigma_c$, N
sat	Opérateur saturation
ω_{c1}	Pulsation de coupure du premier étage du filtre, rad/s
ω_{c2}	Pulsation de coupure du deuxième étage du filtre, rad/s
GMS	Modèle de frottement de glissement généralisé de Maxwell, en anglais, Generalized Maxwell Slip
$S(v)$	Fonction de Stribeck
arg	Argument d'une fonction d'optimisation
min	Minimum d'une fonction d'optimisation
max	Maximum d'une fonction d'optimisation
RMS	Racine des Moindres Carrées (moyenne quadratique)
\cdot^T	Transposée d'une matrice
t	Variable de temps, s
x	Position, m
v	Vitesse, m/s

\dot{v}	Accélération, m/s^2
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^n	Ensemble des vecteurs de dimension n dont les éléments sont des nombres réels
$*$	Opérateur de convolution
θ	Vecteur des paramètres inconnus
■	Fin d'une preuve

INTRODUCTION

Problématique

Le frottement est un phénomène physique qui existe systématiquement dans tout système ayant des surfaces en contact en mouvement relatif. Il engendre des effets indésirables en introduisant une dégradation importante dans les performances des systèmes de commande; par exemple des erreurs en régime permanent, des vibrations et des mouvements saccadés.

La solution de ces problèmes est variée; on cite comme exemple la lubrification des surfaces de contact ou le traitement des matériaux pour minimiser les coefficients de frottement.

La compensation du frottement lors de la conception d'une stratégie de commande est également une solution qui s'avère efficace dans le cas où les autres approches ne sont pas nécessairement applicables (par exemple, les actionneurs hydrauliques et pneumatiques ainsi que les procédés de traitement de surface comme le meulage). Toutefois, une approche de commande fondée sur une connaissance profonde du comportement de frottement nécessite une identification du modèle et plus précisément de ses paramètres afin de pouvoir compenser ce phénomène indésirable d'une façon efficace.

Mandat de la thèse

Le travail effectué dans cette thèse est consacré à l'étude de l'identification du frottement dans le but de synthétiser une stratégie de commande permettant de compenser les effets néfastes du frottement afin d'améliorer les performances de la commande des systèmes mécaniques avec frottement.

La thèse ne couvre cependant pas les aspects de la commande mais focalise plutôt sur le problème d'identification du modèle de frottement GMS qui a été récemment proposé pour améliorer significativement la caractérisation de ce phénomène physique complexe.

Justification

Certes, il y a beaucoup de travaux qui ont étudié l'identification des modèles de frottement pour une éventuelle atténuation de ses effets indésirables. Les méthodes utilisées sont variées et les résultats aussi. Il existe beaucoup de méthodes simples pour identifier des modèles de frottement simples. Ces méthodes sont beaucoup utilisées parce qu'elles sont faciles à mettre en oeuvre. Cependant, parce que les modèles utilisés ne représentent pas tous les phénomènes du frottement, les systèmes de commande fondés sur ces modèles offrent des performances très limitées.

Pour mieux modéliser les phénomènes associés au frottement, des modèles dynamiques plus complexes ont été développés. Ces modèles sont généralement représentés par des équations différentielles non linéaires qui possèdent souvent des contraintes de réalisation assez sévères.

Dans cette thèse, une approche d'identification d'un récent modèle de frottement basée sur un observateur robuste est proposée. L'approche admet l'avantage d'être :

- basée sur un observateur dont la stabilité et la robustesse sont démontrées,
- une méthode en temps réel qui permet d'identifier tous les paramètres du modèle de frottement en même temps,
- une méthode qui s'applique au modèle de frottement heuristique le plus complet jusqu'à maintenant (Le modèle GMS).

Méthodologie

Choix du modèle de frottement : Le choix du modèle de frottement est fait suite à une étude des modèles de frottement qui existent dans la littérature. En effet, les modèles de frottement peuvent être classés en deux grandes catégories : i) Les modèles statiques qui sont caractérisés par une relation simple entre la force de frottement et la vitesse, mais qui ne sont pas complets et donc qui ne représentent pas tous les phénomènes du frottement; et ii) Les modèles de frottement dynamiques qui sont plus complets, mais aussi plus complexes puisqu'ils sont modélisés

par des équations différentielles généralement non-linéaires.

Suite à une revue bibliographique, le modèle GMS a été choisie pour l'étude proposée dans cette thèse, principalement pour les avantages suivants :

- Le modèle GMS est le modèle de frottement heuristique le plus complet; il représente la majorité des phénomènes de frottement.
- Le modèle GMS représente des phénomènes de frottement qui ne sont pas modélisés par les autres modèles heuristiques alors que leur existence est prouvée expérimentalement.
- Le modèle heuristique GMS est celui qui se rapproche le plus du modèle générique qui est pour sa part extrêmement précis mais qui est inutilisable en temps réel à cause de sa grande complexité.

Identification du modèle statique de frottement : Puisque le modèle de frottement GMS est composé d'une composante statique et une autre dynamique, la première étape choisie est d'identifier la composante statique du frottement. Pour ce faire, nous proposons l'application de la méthode d'identification min-max basée sur une approche d'optimisation non linéaire puisque la composante statique du frottement est non linéaire par rapport aux paramètres inconnus et qu'elle respecte les conditions d'application de la méthode min-max.

Cependant, parce que cette condition, (qui réside dans le fait que la non-linéarité doit être une fonction qui commute de façon connue entre un état concave et un état convexe) n'est pas vérifiée pour le modèle GMS complet, l'extension de l'approche min-max n'est pas alors réalisable à notre connaissance.

Identification du modèle de frottement GMS : Puisque la méthode non linéaire ne peut pas être utilisée pour l'identification du modèle GMS, nous proposons une autre approche basée sur un observateur robuste. La formulation est d'abord basée sur l'hypothèse que le signal de la force de frottement est disponible. Puisque cet observateur s'applique uniquement aux systèmes linéaires perturbés, une formulation linéaire approximative perturbée par des non-linéarités est d'abord proposée pour formuler le problème. Cette approche permet d'identifier

avec une assez bonne précision tous les paramètres inconnus du modèle de frottement en même temps. Pour le cas où la mesure de force de frottement n'est pas disponible, une extension de l'approche pour calculer la force de frottement filtrée à partir des signaux de vitesses et de commande est proposée.

Application : Afin de valider l'approche présentée dans cette thèse, une étude expérimentale demeure nécessaire. Ainsi, une validation expérimentale est proposée en utilisant un banc d'essai disponible dans notre laboratoire.

Originalité et contributions

La contribution de cette thèse est traduite tout d'abord par une nouvelle approche d'identification du modèle de frottement statique (modèle de Stribeck) en utilisant une stratégie non linéaire d'estimation [1]. En effet, cette approche d'identification fondée sur une caractérisation concave/convexe des non linéarité n'avait jamais été appliquée à l'identification du modèle de frottement de Stribeck à cause des discontinuités de ce modèle. Dans cette thèse, un changement de variable particulier est proposé pour justement rendre ce modèle continu.

Ensuite, une nouvelle approche d'identification du modèle de frottement GMS est proposée en appliquant un observateur robuste et stable. Cette approche est basée sur la mesure de la force de frottement combinée à deux approximations et une stratégie de filtrage pour respecter les conditions d'application de l'observateur [2, 3]. En particulier, la clé de cette application de l'observateur de Marino à l'estimation des paramètres du modèle GMS est une formulation linéaire perturbée du problème qui est obtenue grâce à une approximation qui n'avait jamais été proposée auparavant.

Une adaptation de cette approche est proposée dans le cas où la force de frottement n'est pas accessible. Cette adaptation est traduite par une nouvelle approche qui permet d'utiliser la force de frottement filtrée combinée à une stratégie de filtrage bien particulière. Cette stratégie consiste en une réinitialisation du filtre selon deux mises en oeuvre différentes à chaque com-

mutation du modèle GMS. À notre connaissance, personne n'avait encore proposé une telle stratégie.

Ces approches permettent d'identifier en temps réel et en même temps tous les paramètres du modèle de frottement. Selon la revue de la littérature présenté au chapitre 1, aucune autre approche ne permet actuellement d'identifier avec une bonne précision l'ensemble des paramètres en temps réel.

Plan de la thèse

Cette thèse est composée de cinq principales parties :

Chapitre premier : Le premier chapitre de la thèse est consacré à la revue bibliographique. En effet, dans ce chapitre une étude exhaustive et critique en rapport avec la modélisation du frottement et les procédures d'identification est présentée. Cette étude nous permet de justifier le choix du modèle de frottement dans notre approche et de mettre en valeur l'originalité et la contribution de notre travail.

Chapitre second : Le deuxième chapitre présente la première approche introduite pour l'identification de la composante statique de frottement. Cette approche permet d'identifier de façon exacte tous les paramètres inconnus du modèle statique en utilisant une méthode non linéaire d'optimisation. Une preuve de stabilité et des conditions de convergence sont présentées afin d'assurer la validité théorique de la méthode.

Chapitre troisième : Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche d'identification du modèle GMS. En effet, l'approche présentée au deuxième chapitre ne peut pas être utilisée pour identifier le modèle GMS dans son ensemble parce que ce dernier ne vérifie pas les conditions d'application de la méthode min-max.

La méthode que nous proposons est d'abord basée sur la mesure de la force frottement et l'utilisation d'un observateur robuste. Afin de respecter toutes les conditions d'application de

cet observateur, des approximations sont introduites et une approche de filtrage appropriée est proposée. Cette approche permet d'identifier les deux régimes de frottement à savoir le préglissement et le glissement en même temps et avec une seule formulation.

Une fonction de commutation qui assure la transition entre les deux régimes de frottement est également proposée et validée.

Chapitre quatrième : Ce chapitre présente une extension de l'approche proposée au chapitre 3 dans le cas où la force de frottement est supposée inconnue. L'extension proposée permet de construire le signal de la force filtrée à partir des signaux de vitesse et de commande.

Ce chapitre présente également la mise en oeuvre particulière du filtre qui permet d'assurer la continuité des signaux pour que l'observateur robuste puisse être appliqué.

Chapitre cinquième : Ce chapitre est dédié à la validation expérimentale de l'approche proposée.

Un banc expérimental installé au laboratoire CORO est utilisé pour identifier les paramètres du modèle de frottement GMS en utilisant l'approche proposée au chapitre 3. Cette application permet de valider la méthode dans un environnement réel.

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART

1.1 Introduction

Dans le cadre de ce chapitre, l'avancement des recherches liées au phénomène de frottement dans les systèmes mécaniques du point de vue de la modélisation et de l'identification sera étudié. En effet, une étude bibliographique de la modélisation des phénomènes de frottement ainsi que les différentes procédures d'identification de ces modèles seront présentées.

1.2 Étude du phénomène de frottement

Le frottement est un phénomène naturel qui joue un rôle primordial dans notre vie. En effet, sans le frottement, on ne pourrait pas se tenir debout ni marcher. Sans le frottement, les voitures ne pourraient pas rouler ni s'arrêter. Ainsi, le frottement peut être considéré comme un phénomène naturel qui intervient dans une grande majorité des phénomènes physiques de notre vie courante. Toutefois, le frottement engendre des conséquences néfastes et indésirables comme l'usure ou l'échauffement ainsi que la perte d'énergie et la dégradation des performances des systèmes mécaniques.

Depuis longtemps, l'Homme a essayé de résoudre les problèmes associés au frottement en utilisant, par exemple, la lubrification. Cependant, cette solution demeure partielle et ne résout pas entièrement les problèmes. C'est pour cette raison que l'Homme essaie depuis longtemps de modéliser le phénomène de frottement afin de l'intégrer dans les systèmes de commande pour réduire le plus possible ses effets qui détériorent les performances de positionnement.

Plusieurs revues bibliographiques traitent de la modélisation du frottement. Par exemple, la revue proposée par Armstrong et al. [4] qui traite des modèles de frottement du point de vue tribologique, lubrification et physique. On trouve également la revue bibliographique proposée

par Berger [5] qui traite des modèles de frottement selon la modélisation dynamique pour des fins numériques et de simulation. Quant à la revue proposée par Shih et al. [6], elle traite des modèles de frottement selon un aspect topographique et surfaces de glissement.

Le nombre de modèles de frottement couvert par la littérature est énorme, mais ces modèles peuvent être classés en deux catégories : les modèles statiques et les modèles dynamiques.

1.2.1 Modèles statiques

Les modèles statiques sont des modèles simples qui décrivent en partie les phénomènes importants du frottement.

C'est DaVinci [4], en 1591, qui a proposé le premier modèle de frottement. Il a affirmé que le frottement croît d'une manière proportionnelle avec la vitesse (voir figure 1.1). Il s'agit du *frottement visqueux*.

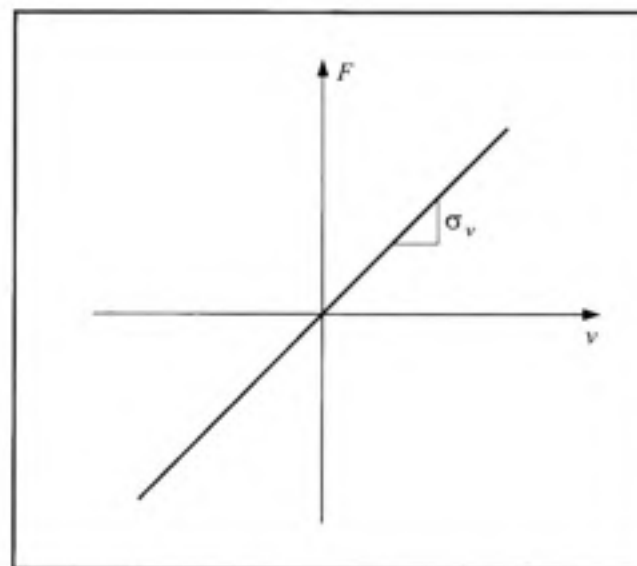


Figure 1.1 Frottement visqueux.

Il a fallu attendre jusqu'à 1785 pour avoir un deuxième modèle statique. Il s'agit du modèle de Coulomb [4] qui est caractérisé par une force de frottement constante dépendant du signe de la vitesse. De plus, Coulomb annonce que la force de frottement (*frottement de Coulomb*) n'est

pas nulle lorsque la vitesse est nulle mais plutôt égale à la force de Coulomb (voir figure 1.2).

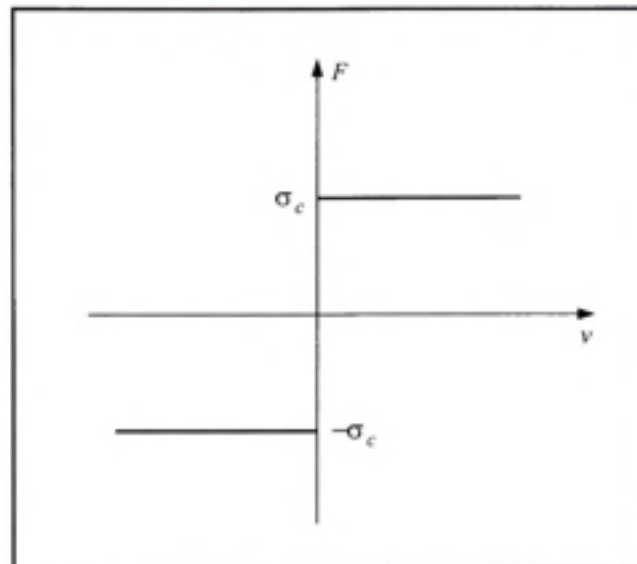


Figure 1.2 Frottement de Coulomb.

Quelques années plus tard, en 1833, Morin [4] a proposé un nouveau modèle. Il s'agit du modèle de Coulomb mais avec une force de frottement différente de celle de Coulomb lorsque la vitesse est nulle. Cette force de frottement statique est généralement supérieure à la force de frottement de Coulomb (voir figure 1.3). Autrement dit, il faut une force plus grande pour amorcer le mouvement lorsque la vitesse est nulle.

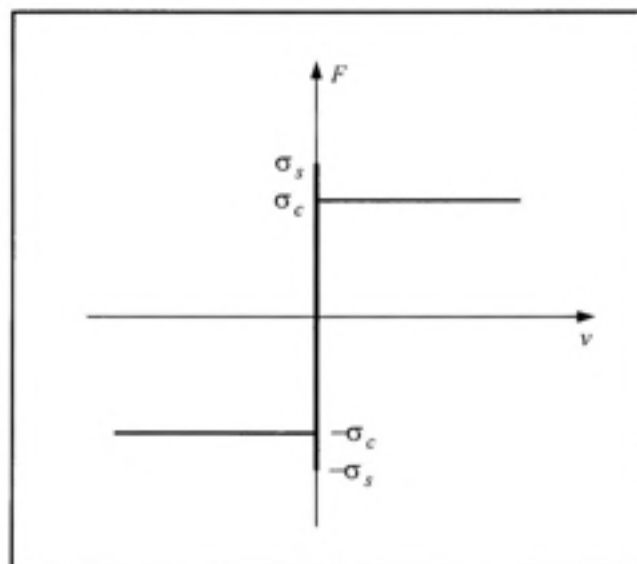


Figure 1.3 Frottement de Coulomb plus frottement statique.

Stribeck [7] a introduit en 1902 un autre phénomène de frottement qui décrit la transition entre la phase statique du frottement (σ_s) et la phase de Coulomb (σ_c). Cette transition élimine en partie la discontinuité dans le modèle de frottement de Morin au voisinage de la vitesse nulle. La forme de la transition varie selon le type de matériaux et de surfaces en contact (voir figure 1.4).

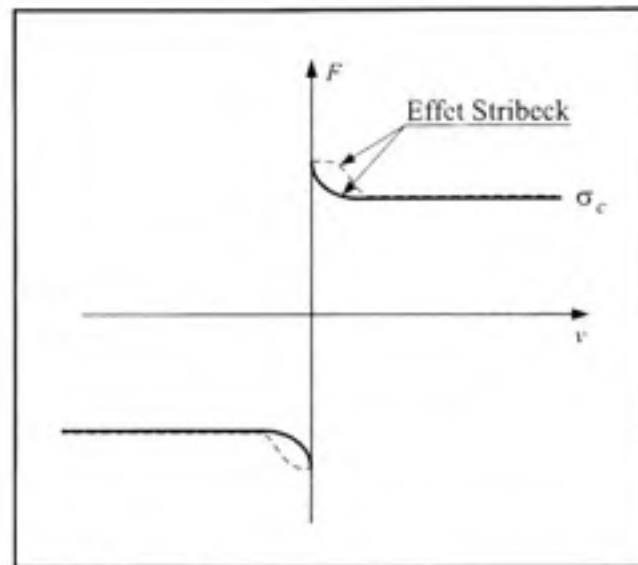


Figure 1.4 Effet Stribeck.

Sur le plan de la simulation ou de la commande, tous les modèles proposés précédemment présentent un inconvénient majeur qui réside dans la détection de la vitesse nulle combinée aux discontinuités des modèles. La solution de ce problème peut être abordée par le modèle de Karnopp [8] dans lequel est définie une plage de vitesse nulle. Dans cette plage la force de frottement dépend uniquement de la force externe (voir figure 1.5).

Contrairement aux modèles classiques proposés précédemment, le modèle d'Armstrong [4, 9] introduit une dépendance temporelle uniquement dans la région du glissement. Son modèle décrit le comportement du frottement par un système de deux équations : une équation décrivant le frottement en fonction du déplacement lorsque la vitesse est au voisinage de zéro (régime de préglissement statique) et une autre équation qui décrit le frottement statique (régime de glissement statique). Un mécanisme basé sur un paramètre auxiliaire assure la commutation

entre les deux régimes. Le défaut de ce modèle réside dans la nécessité d'initialiser les états du modèle chaque fois qu'il y a commutation.

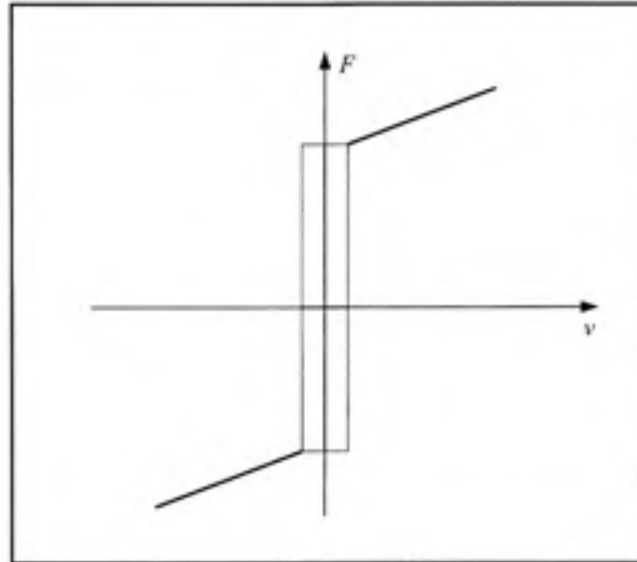


Figure 1.5 Modèle de frottement selon Karnopp.

Tous les modèles statiques sont basés sur l'observation du comportement macroscopique du frottement et la description mathématique de ces phénomènes. Toutefois, il est démontré par des expériences que les modèles statiques ne sont pas capables de représenter tous les phénomènes observés notamment ceux faisant intervenir le comportement dynamique du frottement [4]. Avant de présenter les modèles dynamiques, il est très important de décrire et représenter les phénomènes qui caractérisent le comportement dynamique du frottement.

1.2.2 Phénomènes de frottement dynamique

Déplacement de préglissement et de glissement

Le phénomène de préglissement [10] se traduit par un micro-déplacement entre deux surfaces en contact lorsqu'une force externe est appliquée. Ce déplacement est caractérisé par les propriétés des surfaces et fortement influencé par un phénomène d'adhérence qui se traduit par une élasticité considérable et un phénomène d'hystérésis de préglissement représenté sur la fi-

gure 1.6. Ce comportement peut être représenté de façon simplifiée par un ressort non-linéaire équivalent . Il est donc fonction du déplacement relatif microscopique des surfaces.

Il est important de noter à ce niveau que ce phénomène se produit tant que la force externe ne dépasse pas un seuil appelé la force de décrochage ¹. Lorsque le seuil de décrochage est dépassé (ce seuil est représenté par les lignes pointillées sur la figure 1.6) le phénomène d'adhérence disparaît. Le déplacement passe alors de l'état de préglissement à celui de glissement. En, glissement, le frottement est fonction de la vitesse relative des deux surfaces plutôt que de son déplacement.

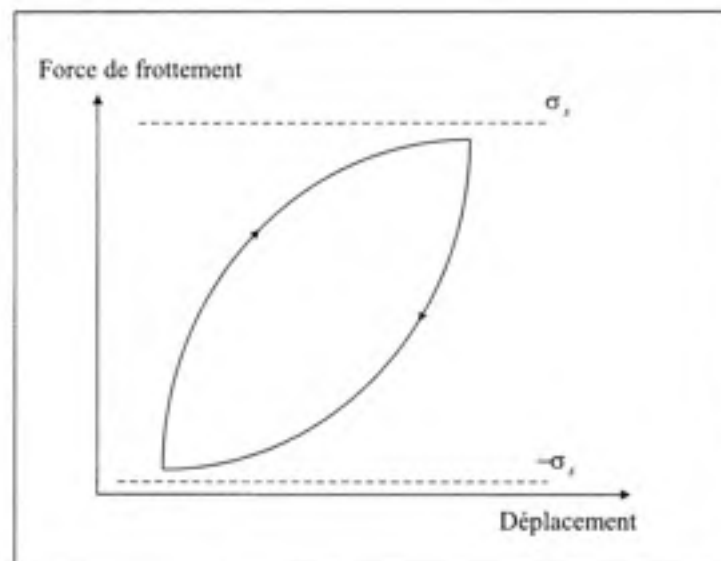


Figure 1.6 Courbe de l'hystérésis de préglissement.
(Tirée de [10])

Retard de frottement

Ce phénomène, qui survient dans la phase de glissement, est un comportement dynamique du frottement qui se traduit par un retard dans le changement de la force de frottement par rapport au changement de la vitesse [11, 12]. En effet, la force de frottement est plus grande lorsque la vitesse est croissante que lorsque la vitesse est décroissante. Il s'agit d'un phénomène

1. Force de décrochage : en anglais break away force, c'est la force externe seuil à partir de laquelle le ressort qui représente l'élasticité se brise pour donner naissance au glissement.

d'hysteresis dans le comportement du frottement en fonction de la variation de la vitesse (voir figure 1.7). Ce phénomène s'appelle aussi mémoire de frottement ou hystérésis de glissement.

On note que la largeur de la boucle d'hystérésis dépend étroitement de la fréquence et du taux d'accroissement de la vitesse.

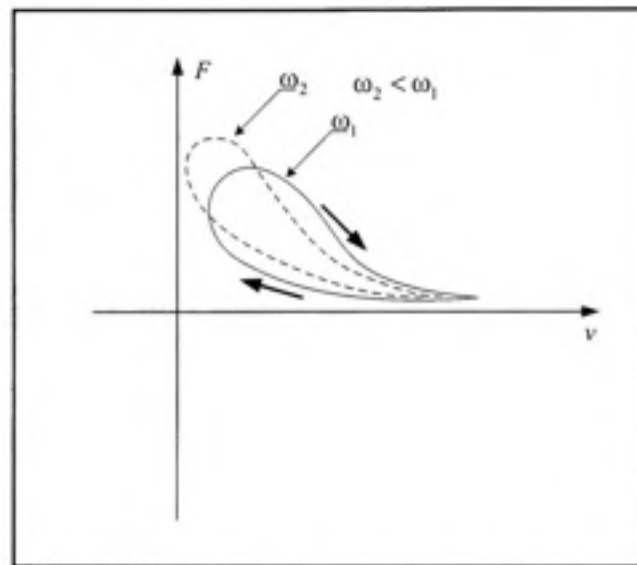


Figure 1.7 Retard de frottement : relation fréquentielle.

Variation de la force de décrochage

La force de décrochage est la force tangentielle de seuil nécessaire pour faire décrocher (glisser) une surface de contact par rapport à l'autre. Cette force dépend de la vitesse de variation de la force externe appliquée [13] (voir figure 1.8).

Effet de broutage

L'effet de broutage est un comportement du frottement qui se manifeste dans le déplacement d'un corps sur une surface qui est soumis à une force externe qui fluctue. Cet effet est caractérisé par un mouvement saccadé entre le glissement et l'adhérence [9]. Cet effet apparaît,

par exemple, lorsqu'une masse est tirée sur une surface à travers un ressort avec une vitesse constante (voir figure 1.9).

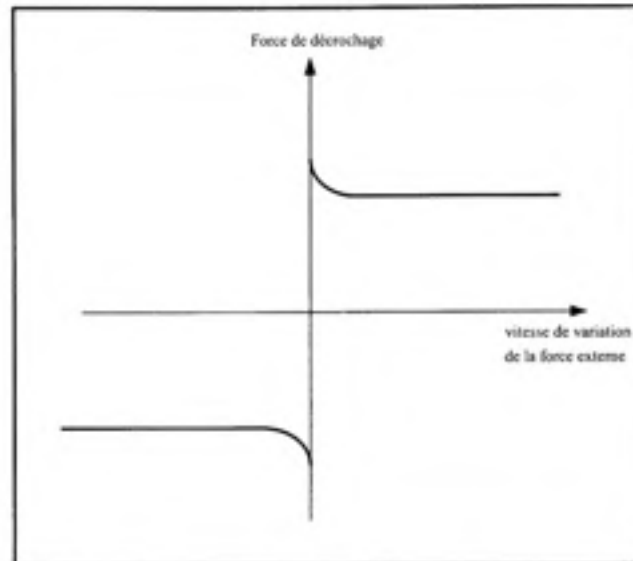


Figure 1.8 Variation de la force de décrochage.

Dépendance temporelle, directionnelle et positionnelle

La force de frottement dépend étroitement du temps, de la direction du mouvement et de la position de la première surface de contact par rapport à la deuxième [14].

1.2.3 Modèle dynamique

Dans les systèmes de commande, les phénomènes de frottement présentés auparavant comme le régime d'adhérence, l'effet de broutage et le retard de frottement sont très nuisibles et dégradent considérablement les performances des systèmes de commande de vitesse et de position. Ainsi, puisque les modèles statiques ne sont pas capables de représenter ces phénomènes adéquatement, les modèles dynamiques sont nécessaires pour améliorer les systèmes de commande. En effet, ces modèles sont plus aptes à représenter ces phénomènes grâce à leur dynamique interne.

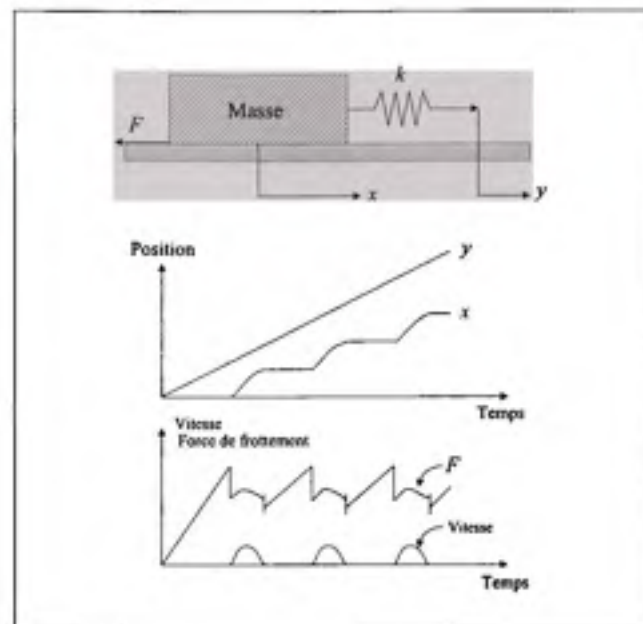


Figure 1.9 Résultat de simulation de l'effet de broutage.
(Tirée de [15])

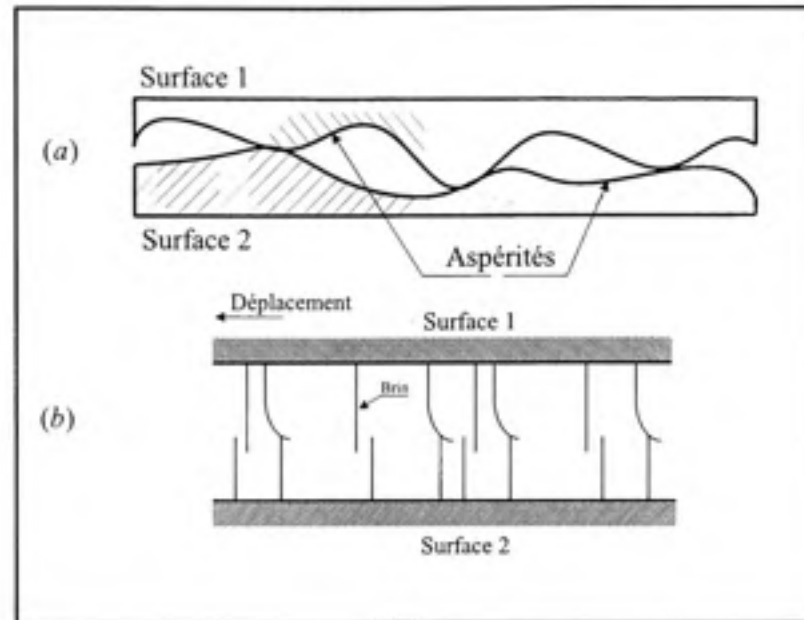
Modèle de Dahl

Selon la revue de Berger [5], les premières tentatives de représenter l'aspect dynamique de frottement remontent aux années 1940 [12, 16] dans lesquels, le frottement n'est plus fonction de la vitesse seulement, mais aussi fonction de l'accélération. Ce n'est qu'à la fin des années 1960 que le premier modèle dynamique est apparu [17, 18]. Il s'agit du modèle de Dahl inspiré du comportement d'un ressort lorsque la vitesse passe par zéro et au frottement de Coulomb en régime permanent. Cependant, le modèle de Dahl présente des lacunes traduites par l'absence d'autres phénomènes de frottement comme l'effet de Stribeck, l'effet d'adhérence et l'effet hystérésis [19].

Modèle basé sur les brins

Le contact entre deux surfaces est caractérisé par des aspérités (voir figure 1.10 (a)) et lorsque les deux surfaces sont soumises à une force externe, le comportement du frottement peut être représenté par une élasticité (préglissement) suivi d'une plasticité (décrochage et glissement).

Ce comportement peut être modélisé par des brins² en interaction entre eux (voir figure 1.10 (b))



**Figure 1.10 (a) Schéma du contact réel entre deux surfaces.
(b) Schéma microscopique des surfaces en contact.**

Heasing et al. [20] ont proposé un modèle dynamique de frottement basé sur la théorie des brins des surfaces de contact. Ils supposent que la force de frottement est la résultante des interactions aléatoires de plusieurs brins entre eux. Toutefois, ceci rend le modèle assez complexe et très difficile à utiliser pour des fins de simulation et de commande.

Modèle de Bliman et Sorine

Le modèle de Bliman et Sorine [21, 22] est inspiré du modèle de Dahl. En effet, il consiste à étendre le modèle de Dahl à un système d'ordre 2 permettant la représentation d'un effet de Stribeck et une approximation de l'effet d'adhérence. Le défaut de ce modèle est l'absence de l'effet d'hystérésis, le phénomène de la variation de la force de décrochage et l'effet de retard de frottement.

2. Brins : en anglais Bristle

Plusieurs autres tentatives sont proposées dans la littérature afin de modéliser le frottement. On cite, à titre d'exemple, le modèle continu proposé par Majd et al. [23]. L'avantage de ce modèle est son efficacité pour des grandes et petites vitesses. Toutefois, il n'exprime pas l'effet d'hystérésis dans le régime de préglissement. Rice et Ruina [24] ont montré que la force de frottement ne dépend pas uniquement de la vitesse, mais elle dépend aussi d'une variable d'état qui exprime l'historique de la vitesse. Cependant, leur modèle ne représente pas l'effet de la variation de la force de décrochage ni l'effet de l'hystérésis.

Modèle de LuGre

Le modèle de LuGre³[25, 26] est le premier modèle proposé qui représente un grand nombre de phénomènes de frottement avec une simplicité permettant la compensation en temps réel et la simulation. Il est basé sur le modèle de Dahl d'une part et sur un modèle de brins, qui représente la nature des surfaces en contact, d'autre part. Le modèle de LuGre introduit une variable interne qui représente la deflection moyenne des brins (voir figure 1.11). Il modélise plusieurs phénomènes de frottement comme le déplacement de préglissement, la variation de la force de décrochage, l'effet de Stribeck et celui de l'adhérence.

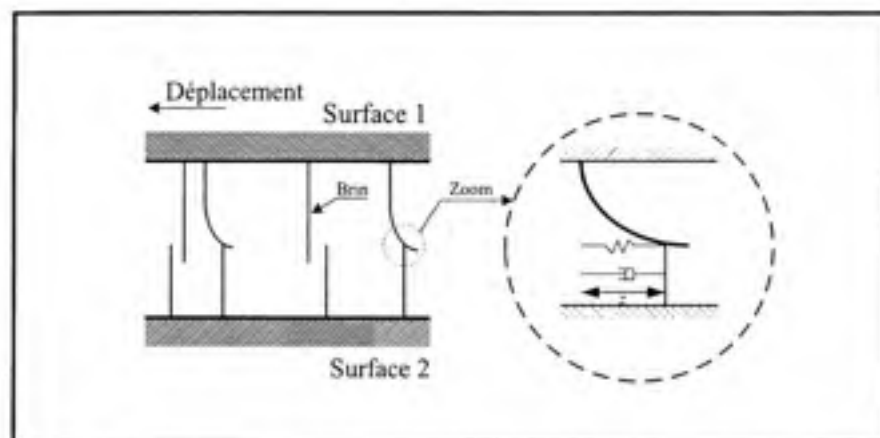


Figure 1.11 Schéma microscopique de deux surfaces en contact pour le modèle de LuGre.

3. L'appellation LuGre vient des deux noms de deux laboratoires de recherche le premier à **Lund** et le second à **Grenoble**

Le modèle de LuGre a été intensivement utilisé dans les systèmes de commande en raison de sa simplicité et de son efficacité sur le plan de la mise en oeuvre et de la simulation. Il a également fait l'objet de plusieurs études (comparaisons, critiques). En particulier, il a été comparé au modèle de Bliman et Sorine [27] et au modèle de frottement classique [28] (combinaison du frottement statique, frottement de Coulomb, frottement visqueux et l'effet de Stribeck). Le résultat de la comparaison avec le modèle de Bliman et Sorine a montré que ce dernier ne décrit pas la force statique et risque d'avoir un comportement oscillatoire alors que le modèle de LuGre montre un comportement raisonnable et fidèle au phénomène de frottement. Quant à la comparaison du modèle de LuGre au modèle classique, elle a démontré que le modèle classique présente des problèmes au niveau de simulation à cause de sa nature non différentiable et de sa discontinuité à vitesse nulle alors que le modèle de LuGre est continu, différentiable et simple à utiliser en simulation.

Toutefois, malgré ses avantages, le modèle de LuGre a été le sujet de plusieurs critiques dont on cite celle de Dupont et al. [29, 30] dans laquelle ils ont montré que le modèle de LuGre admet un phénomène de dérapage ou déviation⁴ (qui n'existe pas dans le frottement réel) lorsque la force externe appliquée présente des petites vibrations avec une amplitude plus petite que la force de décrochage.

De plus, Swevers et al. [31] ont montré que le modèle de LuGre a une faiblesse au niveau du régime de préglissement parce qu'il impose une relation simple, mais pas suffisamment réaliste, entre la force de frottement et la variable interne. Cette relation est, en effet, caractérisée par un effet d'hystérésis complexe.

Modèle de Leuven

Le modèle de Leuven est proposé par Swevers et al. [31]. Il s'agit d'un modèle plus élaboré que celui de LuGre. La structure de ce modèle permet de modéliser le régime de préglissement

4. déviation : drift en anglais

et celui de glissement sans utiliser une fonction de commutation. Contrairement au modèle de LuGre, le modèle de Leuven est caractérisé par une fonction d'hystérésis avec une mémoire non locale. De plus, en régime de glissement, il regroupe l'effet de Stribeck, la variation de la force de décrochage et l'effet de broutage. Il est représenté par deux équations, une équation qui décrit la dynamique de la variable interne et une autre équation qui traduit la force de frottement.

Le modèle de Leuven a été ensuite modifié et amélioré [32] pour éliminer un problème de discontinuité dans la force de frottement qui apparaît dans certaines transitions dans le régime de préglissement. Il a été modifié pour éliminer un problème de débordement de la mémoire non locale lors de sa mise en oeuvre. Cette modification est basée sur le modèle GMS⁵ qui sera présenté dans la prochaine section.

Modèle de GMS

Le modèle de frottement GMS [33, 34] est un des plus récents. Il s'appuie sur un modèle générique [35] basé sur un ensemble de phénomènes physiques et une étude expérimentale combinée à une modélisation microscopique des aspérités des surfaces en contact. Ce modèle générique représente très bien l'ensemble des caractéristiques du frottement, mais il est trop complexe pour être utilisé dans les systèmes de commande. Pour cette raison, le modèle GMS [35, 36] a été proposé comme une formulation simplifiée, mais représentative du modèle générique. Cette nouvelle formulation présente une haute fidélité au niveau de la représentation des caractéristiques du frottement dans les deux régimes à savoir le préglissement et le glissement. Il a d'ailleurs été comparé au modèle de LuGre puis à celui de Leuven et au modèle générique. Les résultats de cette comparaison [35] ont mis en valeur la qualité du modèle GMS. Selon des données expérimentales [33, 37], le frottement réel présente non seulement un effet hystérésis durant le régime de préglissement, mais également un deuxième effet hystérésis durant le régime de glissement. Ce dernier est caractérisé par une différence entre les courbes de frottement lorsque la vitesse est croissante et lorsqu'elle est décroissante (voir figures 1.12).

5. Modèle GMS : en anglais *Generalized Maxwell Slip model*

La comparaison de Lampeart et al. [35] a démontré que le modèle générique et le modèle GMS se comportent de façon très similaire au frottement réel. (voir figure 1.12) alors que les deux autres modèles (Leuven et LuGre) représentent mal le frottement au niveau du régime de glissement; Précisément au niveau de l'hystérésis de glissement (voir figure 1.13).

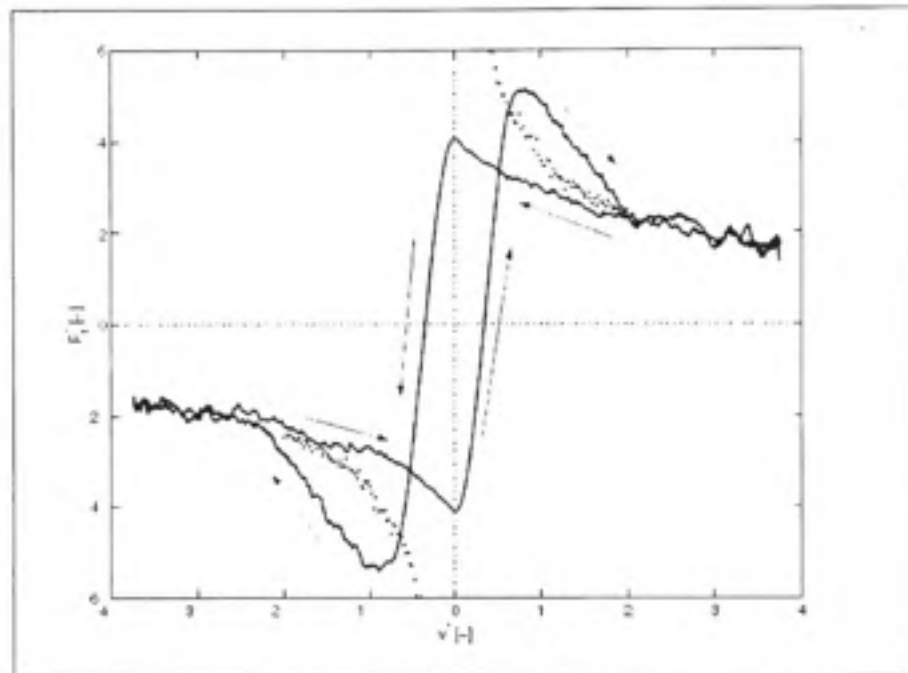


Figure 1.12 Frottement réel en fonction de la vitesse (hystérésis de glissement). Frottement de Stribeck (Courbe en pointillé).
(Tiré de [33])

1.2.4 Conclusion

Nous avons présenté une revue bibliographique assez exhaustive de la modélisation du phénomène de frottement en commençant par les modèles statiques puis en poursuivant avec les modèles dynamiques.

Cette revue de la littérature a montré que les modèles statiques ne permettent de représenter qu'un nombre très restreint de phénomènes associés au frottement. Les modèles dynamiques sont beaucoup plus représentatifs de la réalité. En particulier, le modèle GMS semble être celui

qui représente le mieux le comportement physique du frottement tout en étant suffisamment simple pour être utilisé en temps réel dans des algorithmes de commande.

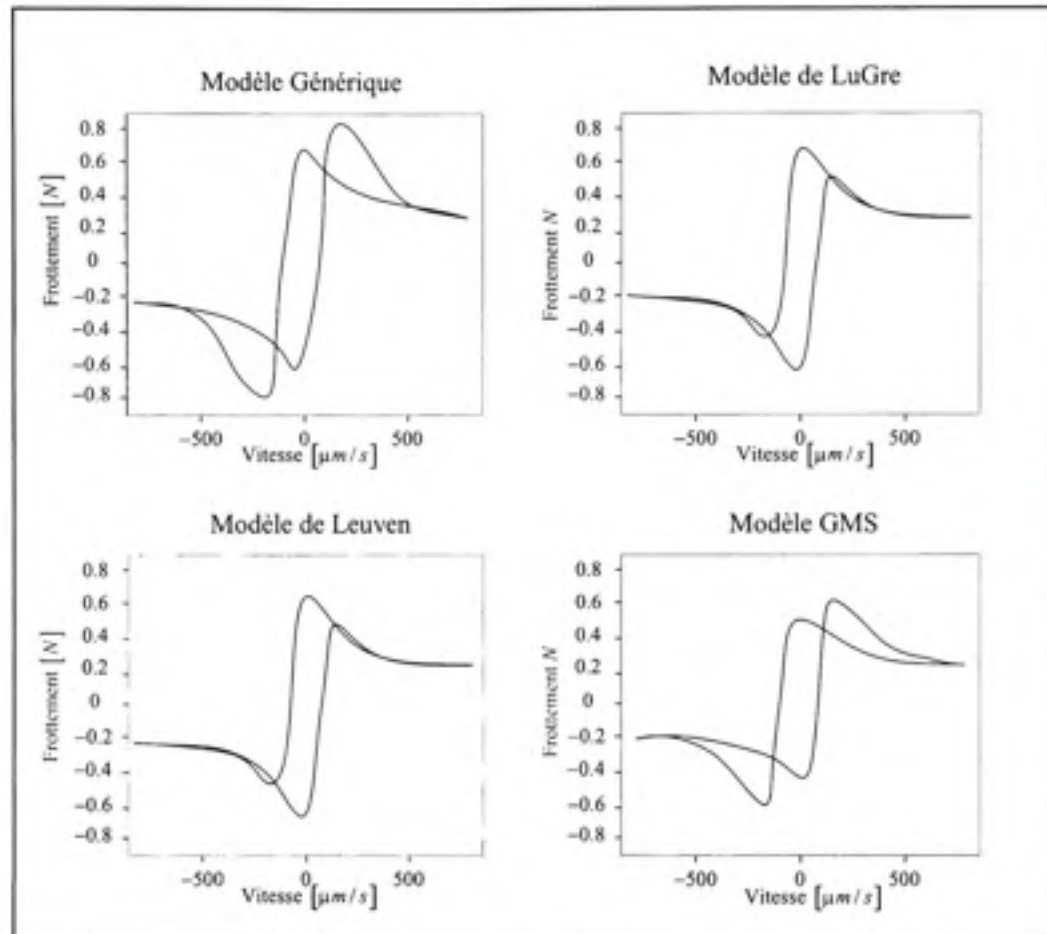


Figure 1.13 Comparaison des quatre types de frottement.
(Tirée de [35])

1.3 Identification des modèles de frottement

Il est très important de définir le modèle du frottement pour représenter son comportement dans un système mécanique. Le modèle de frottement est utilisé généralement lors de la conception de la loi de commande. Cependant, l'utilisation du modèle de frottement ne sera efficace que si tous les paramètres du modèle sont bien connus. L'identification est donc une étape cruciale pour le développement des lois de commande.

Pour cette raison, la deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude bibliographique de l'identification des modèles de frottement.

1.3.1 Identification des modèles statiques

Dans la littérature, les travaux de recherche concernant l'identification du frottement ont évolué en harmonie avec ceux de la modélisation. En effet, au départ, les travaux d'identification portent sur les modèles statiques qui sont historiquement en tête de liste. Le modèle de Coulomb a été parmi les premiers modèles identifiés. En effet, le coefficient de Coulomb a été identifié [38] à l'aide d'un observateur qui a été choisi de telle sorte que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro. Le même auteur a proposé une deuxième identification [39] dans laquelle il introduit deux observateurs, le premier pour estimer la vitesse et le second pour estimer le coefficient de Coulomb en utilisant la valeur estimée de la vitesse. La stabilité locale de cet identificateur a été démontrée. Mentzelopoulou et al. [40] ont proposé une étude de quatre observateurs non linéaires pour estimer la force de frottement afin de compenser son effet. Ils ont conclu que l'observateur basé sur le frottement de Coulomb est très simple et offre une bonne compensation du frottement. Liao et al. [41] ont proposé un observateur adaptatif basé sur la technique de Lyapunov pour estimer la force de Coulomb et compenser son effet. La stabilité exponentielle du système de compensation a été démontrée en utilisant l'hypothèse de la persistance de l'excitation.

Le modèle combiné du frottement de Coulomb et du frottement visqueux a été également l'objet des travaux d'identification. Laura et al. [42] ont proposé un estimateur s'appuyant sur un filtre de Kalman étendu pour estimer la force de frottement en utilisant le modèle du système et la mesure de la vitesse. Huang [43] a proposé un observateur adaptatif non linéaire pour estimer les coefficients de Coulomb et visqueux. Il a démontré que même sans la condition de persistance de l'excitation, le système est asymptotiquement stable par rapport à l'erreur d'estimation de la force de frottement et l'erreur de poursuite. Une autre méthode pour identifier les coefficients de Coulomb et visqueux est proposée par Liang et al. [37]. Cette identification est basée sur la réponse fréquentielle d'un oscillateur linéaire forcé. Cette méthode

est valable seulement lorsque le coefficient visqueux est considéré petit. Abdellatif et al. [44] ont proposé récemment une méthodologie pour identifier les coefficients de Coulomb et visqueux dans un manipulateur robotique parallèle sans la connaissance à priori de sa dynamique. La méthode d'identification est basée sur deux étapes : La première étape consiste à mesurer la dépendance frottement-vitesse pour donner une caractéristique locale du frottement dans le joint du manipulateur. La seconde étape consiste à identifier les paramètres de frottement (Coulomb et visqueux) en utilisant une méthode linéaire quadratique abondamment utilisée dans les procédures d'identification en général [45].

Le modèle de frottement de Stribeck est un modèle non linéaire par rapport au paramètre de Stribeck. Ainsi, les méthodes classiques d'identification ne peuvent pas être appliquées directement. Pour cette raison, Feemster et al. [46] ont proposé une technique d'estimation des paramètres en considérant une approximation linéaire du modèle combinée à une approche de minimisation basée sur le gradient. Il a combiné cette technique à une commande robuste pour compenser l'effet du paramètre qui agit d'une façon non linéaire (paramètre de Stribeck) dans le système.

Tell et al. [47] ont contourné le problème de non linéarité du modèle de Stribeck en supposant sa connaissance à priori. Ils ont alors construit un observateur pour estimer les autres paramètres. Liu et al. [48] ainsi que Bigras [49] ont proposé une linéarisation du modèle de Stribeck au tour d'une valeur nominale, pour ensuite pouvoir appliquer des méthodes linéaires d'identification.

Récemment, Carducci et al. [50] ont proposé une méthode d'identification du frottement visqueux dans un système pneumatique. Cette méthode est basée sur un algorithme d'optimisation non linéaire.

1.3.2 Identification des modèles de frottement dynamiques

L'identification des modèles dynamiques de frottement est un sujet abondamment étudié dans la littérature. On peut distinguer deux types d'identifications : l'identification hors ligne et l'identification en ligne.

Identification hors ligne : cette approche repose sur une série d'expériences et l'estimation des paramètres inconnus se fait hors ligne en combinant plusieurs techniques avec les différents résultats obtenus. Cette identification s'avère simple et parfois très efficace si les paramètres inconnus sont constants. Cependant, les paramètres du modèle de frottement peuvent varier selon les variations de l'environnement (température, pression) ainsi que selon les conditions d'utilisation (usure, lubrification). Afin de tenir compte de ces variations, l'identification en ligne (en temps réel) devient une alternative nécessaire.

Identification en ligne (Commande adaptative) : La commande adaptative permet d'intégrer la phase d'identification des paramètres à celle de la commande en temps réel. Toutefois, cette commande doit répondre à certaines hypothèses, en particulier l'hypothèse de la linéarité du modèle du système étudié par rapport à ses paramètres inconnus. On distingue deux types de commande adaptative : la commande adaptative directe et la commande adaptative indirecte. Le premier type est une commande adaptative dont l'estimation des paramètres se fait d'une manière implicite avec la loi de commande. Quant au deuxième type, il est défini par une commande adaptative dont l'estimation des paramètres inconnus se fait d'une façon explicite et indépendante de la loi de commande [45].

Dans la littérature, ces deux types d'approches ont été appliquées aux modèles de frottement dynamiques en particulier au modèle de LuGre et au modèle GMS. Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, plusieurs limitations sont cependant introduites par les approches proposées.

Identification du modèle de LuGre

Canudas et al. [51] ont proposé une identification du modèle de LuGre basée sur plusieurs étapes. Comme première étape, ils ont utilisé deux méthodes hors ligne. la première méthode consiste à faire une série d'expériences afin de tracer la courbe de frottement en fonction de la vitesse puis d'identifier les paramètres statiques à l'aide de l'algorithme d'optimisation non-linéaire Simplex. La deuxième méthode est utilisée pour identifier les paramètres dynamiques

en se basant sur la connaissance des paramètres statiques. Cette méthode est basée sur un algorithme d'optimisation nommé programme d'intégration numérique (numerical integration routine). Finalement, la deuxième étape consiste à proposer un observateur adaptatif pour estimer la variable interne du modèle de frottement.

Hensen et al. [52] ont proposé une méthode fréquentielle pour identifier les paramètres de préglissement du modèle de frottement de LuGre linéarisé. Cette méthode consiste à exciter le système avec un bruit aléatoire d'amplitude variable puis mesurer la réponse fréquentielle. Cette dernière a été utilisée pour identifier les paramètres du modèle de frottement.

Dans le même sens, Kermani et al. [53, 54] ont identifié le modèle de LuGre en utilisant une excitation du système à basse fréquence appliquée à un manipulateur robotique afin de tracer la courbe de la force de frottement en fonction de la vitesse. L'amplitude et la fréquence du signal d'excitation sont choisies de telle sorte que la force centrifuge et coriolis dans le manipulateur soient négligeables.

La théorie d'intervalle a été utilisée par Madi et al. [55] tandis qu'un algorithme génétique a été appliqué par Liu et al. [56] afin d'identifier les paramètres du modèle de frottement de LuGre en temps différé (hors ligne). Cependant, ces approches ne sont pas valables pour identifier des modèles dont les paramètres inconnus sont variants ou peuvent varier en fonction des conditions d'opération puisqu'ils ne peuvent pas être utilisés en temps réel.

L'identification en temps réel (en ligne) du modèle de frottement de LuGre est également couverte par la littérature. Au niveau de la commande adaptative directe, la majorité des travaux sont proposés avec l'hypothèse principale de la linéarité du système par rapport aux paramètres inconnus : on cite par exemple, les travaux de Tan et al. [57, 58] dans lesquels, les auteurs supposent que les paramètres qui interviennent d'une façon non linéaire, à savoir les paramètres de Coulomb, statique et celui de Stribeck, sont parfaitement connus. Ils introduisent alors un observateur non linéaire pour estimer la variable interne.

D'autres travaux [59, 60] proposent une linéarisation du modèle de frottement et construisent deux estimateurs en parallèle, le premier pour l'estimation des paramètres inconnus et le second pour estimer la variable interne. Récemment, Wenjing [61] propose une commande adaptative basée sur la commande à structure variable⁶ dans laquelle il estime les paramètres inconnus qui interviennent d'une façon linéaire et la partie non linéaire est compensée par une commande robuste (commande à structure variable).

Quant à la commande adaptative indirecte, elle est basée généralement sur un observateur pour estimer les paramètres inconnus et la variable interne du modèle du frottement de LuGre. Dans ce contexte, beaucoup de travaux supposent que tous les paramètres du modèle sont connus et construisent un observateur pour estimer la variable interne. On cite, par exemple, les travaux de Vivas et al. [62] pour commander la vitesse d'un système avec frottement en utilisant un compensateur adaptatif. Cette approche exhibe cependant un problème de comportement du compensateur lorsque la vitesse s'approche de zéro. Canudas et al. [63] proposent pour leur part un compensateur adaptatif pour commander un système dont la dépendance de la force de frottement à la position et à la vitesse est inconnue. Cette dépendance est exprimée d'une façon non linéaire dans le modèle de frottement. Pour la déterminer, ils utilisent une approximation polynomiale, puis une approximation fonctionnelle non linéaire et finalement une approximation basée sur les réseaux de neurones. Ils démontrent que le compensateur est robuste et selon le degré de connaissance de la fonction de dépendance, ils peuvent choisir une méthode adéquate pour l'approximation. Toutefois, ces approximations sont caractérisées par des structures complexes comportant beaucoup de paramètres.

D'autres travaux portent sur l'utilisation d'observateurs pour estimer la variable interne du frottement de LuGre comme dans l'estimation du frottement entre les roues d'un véhicule et la route [64], l'estimation du frottement dans les freins d'urgence [65], l'identification du frottement dans un robot [66] et finalement l'estimation du frottement dans les servosystèmes [67].

6. Commande à structure variable : en anglais Sliding mode control

Récemment, Huang et al. [68] ont proposé un observateur pour compenser le frottement dans un moteur électrique. Pour ce faire, ils ont introduit un observateur non linéaire pour estimer la variable interne et les paramètres dynamiques qui sont exprimés linéairement dans le modèle de LuGre. Cependant, Ils ont supposé que la non-linéarité dans le modèle qui est traduite par les paramètres statiques est parfaitement connue. Dans le même ordre d'idée, Alvarez et al. [69] ont proposé un observateur pour estimer la vitesse et la variable interne du modèle de frottement. Les paramètres dynamiques du modèle de frottement sont identifiés à l'aide de la méthode du gradient, mais les paramètres statiques sont supposés connus.

Identification du modèle GMS

Selon plusieurs études [33, 35, 34, 36], le modèle de frottement GMS représente fidèlement l'ensemble des phénomènes de frottement observés et ceci dans les deux régimes : préglissement et glissement.

Ce modèle est proposé depuis seulement quelques années. Il y a donc encore peu de travaux de recherche qui portent sur son identification comparativement au modèle de LuGre.

L'identification du modèle de frottement GMS a d'abord été étudiée de façon hors ligne en se basant sur des données expérimentales et des connaissances à priori. Le régime de préglissement a fait l'objet d'identification par Parlitz et al. [70]. Cette identification est basée sur un essai expérimental pour l'acquisition des données puis plusieurs approches d'identification sont exploitées. Ils utilisent deux approches d'identification à savoir une approche basée sur le comportement physiques et une approche de type boîte noire⁷. Pour la première approche, ils utilisent la régression linéaire, la régression linéaire dynamique et la régression non linéaire alors que pour la deuxième approche, ils utilisent une méthode polynomiale, les réseaux de neurones, une méthode locale non paramétrique ainsi que des réseaux dynamiques. Ils concluent que toutes les approches utilisées donnent des performances satisfaisantes. Toutefois, les méthodes basées sur le comportement physique sont plus simples, mais demandent

7. Boîte Noire : en anglais Black Box.

des connaissances à priori du système (modèle). Dans l'absence de connaissances à priori, les méthodes de type boîte noire deviennent plus intéressantes, mais elle demande beaucoup de ressources au niveau de la mise en oeuvre informatique. Le régime de préglissement a également fait l'objet de recherche d'identification par Demosthenis et al. [71]. Les approches de régression linéaire, linéaire dynamique et non linéaire ont été comparées. Une étude approfondie sur les signaux d'excitation et la propriété d'identifiabilité a été présentée en plus d'une étude comparative entre les différents résultats d'identification. Ces auteurs montrent que l'approche de régression linéaire donne une estimation partielle du régime de préglissement alors que la l'approche de régression linéaire dynamique donne une erreur d'estimation très faible, mais nécessite une paramétrisation très complexe. Quant à l'approche non linéaire, elle assure une identification complète du système et donne un compromis raisonnable entre la performance et la complexité paramétrique. Une identification par réseaux de neurones de la fonction d'hystérésis de préglissement du modèle de frottement GMS a également été proposée par Peter et al. [72]. L'avantage de cette méthode est qu'elle utilise une fonction de pondération discrète avec une seule dimension pour calculer le signal de sortie. Cette approche offre une bonne performance au niveau de la simulation, mais une grande erreur au niveau expérimental. Les auteurs concluent par conséquent qu'il faut raffiner la modélisation par l'approche neuronale pour améliorer les résultats découlant de sa mise en oeuvre expérimentale.

D'autres travaux [73, 74] portent également sur l'identification du modèle de frottement GMS avec ses deux régimes de fonctionnement, à savoir le régime de glissement et le celui de préglissement. Cette identification est basée sur l'approche de type "Boîte noire". Les auteurs démontrent par voie expérimentale que l'approche de la boîte noire permet d'avoir une bonne identification du frottement. Ils concluent que, pour améliorer la précision dans les systèmes de commande, il faut bien comprendre la nature du frottement au niveau de ses non-linéarités et de sa complexité.

Il existe d'autres méthodes d'identification hors ligne pour le modèle de frottement GMS. On cite, par exemple, l'identification par la méthode Monté carlo proposée par Demosthenis et al. [75] et la méthode de l'algorithme Nelder-Mead simplex proposée par Tjahjowidodo et al. [76].

Dans cette dernière identification, les auteurs comparent les performances d'un système électromécanique associé au frottement GMS au même système avec le frottement de Coulomb, le frottement de Coulomb avec l'effet de Stribeck, le frottement de LuGre et le frottement de Leuven. Les résultats de cette comparaison montrent que le frottement GMS est le modèle le plus approprié pour représenter le comportement du frottement.

Tous les travaux de recherche présentés dans cette section sont des méthodes d'identification hors ligne. L'inconvénient majeur de ces méthodes réside dans leur inefficacité à identifier les paramètres du modèle de frottement lorsqu'ils varient en fonction du temps selon les conditions d'opération. Pour cette raison, les prochains paragraphes portent sur l'identification en ligne.

À notre connaissance, il existe peu de travaux de recherche qui traitent de ce sujet. Un des seuls travaux qui existe actuellement sur ce sujet [77, 78], est une compensation basée sur une commande adaptative directe. Avec cette approche la fonction non linéaire de Stribeck est linéarisée pour rendre le modèle GMS linéaire par rapport aux paramètres inconnus. Puis, pour représenter les phénomènes dynamiques du régime de glissement les auteurs ont exprimé le frottement dans ce régime de glissement par une fonction de Stribeck combinée avec une perturbation. En outre, puisque le modèle de frottement de GMS est basé sur deux équations de frottement avec un mécanisme de commutation alors ils ont proposé un compensateur adaptatif intégrant un mécanisme de commutation. Ce dernier a introduit une deuxième perturbation causée par l'erreur de commutation.

Pour assurer la stabilité du système avec les deux perturbations, les auteurs ont introduit une approche de projection assez complexe dans laquelle ils définissent une région convexe qui délimite l'espace des paramètres inconnus et leurs estimés durant tout le processus d'estimations. Ce travail présente plusieurs limites à savoir :

- il est facile de déterminer l'espace convexe pour un ou deux paramètres, mais il devient difficile de le déterminer pour plus de deux paramètres inconnus.
- L'approche de projection proposée est difficile à mettre en oeuvre, particulièrement au niveau de la fonction de commutation.

- L'hypothèse qui consiste à modéliser le régime de glissement par une fonction de Stribeck perturbée, limite considérablement la précision puisque l'hystérésis de glissement peut donner lieu à des variations importantes du frottement autour de la caractéristique de Stribeck (voir Figure 1.12).

1.4 Conclusion

La revue bibliographique présentée dans ce chapitre est subdivisée en deux parties. La première partie traite de la modélisation du frottement et la seconde de l'identification.

La modélisation du frottement est présentée d'une façon chronologique en commençant par les modèles statiques simples et en finissant par les modèles dynamiques. Le critère de présentation de ces modèles est basé sur la représentation des caractéristiques et des propriétés du comportement du frottement. Selon l'ensemble des références consultées, les modèles de frottement générique et GMS sont les plus complets puisqu'ils représentent la totalité des phénomènes du frottement observés jusqu'à nos jours. Grâce à sa simplicité, le modèle GMS a l'avantage additionnel de pouvoir facilement être calculé en temps réel.

Les procédures d'identification proposées dans la littérature sont très variées. Elles traitent deux classes de modèles : les modèles statiques et les modèles dynamiques.

Pour les modèles statiques, l'identification des modèles de Coulomb, visqueux, Coulomb plus visqueux et Stribeck est bien couverte dans la littérature. Cependant, les approches d'identification en temps réel du modèle de Stribeck sont basées sur une approximation linéaire de la fonction par rapport aux paramètres. Elle ne permettent donc pas d'identifier de façon exacte le modèle.

En ce qui concerne l'identification des modèles dynamiques, deux classes d'approches se présentent :

- Approche hors ligne : algorithme numérique (optimisation, algorithmes génétiques, réseaux de neurones, méthodes fréquentielles et théorie d'intervalles),

- Approche par commande adaptative directe (commande robuste, commande à structure variable).

En particulier, les approches qui permettent d'identifier le modèle de frottement GMS en ligne (en temps réel) se limitent à une commande adaptative directe qui se base sur l'approximation de la fonction d'hystérésis de glissement par une fonction de Stribeck linéarisée qui ne permet aucun hystérésis. Le fait de négliger complètement l'hystérésis de glissement lors de l'identification dégrade considérablement la richesse du modèle GMS dont la notoriété repose justement sur la capacité de bien modéliser ce phénomène.

CHAPITRE 2

IDENTIFICATION NON LINÉAIRE DU MODÈLE DE FROTTEMENT DE STRIBECK

2.1 Introduction

Les imperfections de mouvements dans les systèmes mécaniques sont souvent causées par la présence incontournable du frottement dans les liaisons mécaniques, les engrenages, ainsi que les surfaces en contact qui subissent des mouvements relatifs.

Le modèle de Stribeck est considéré parmi les plus populaires des modèles statiques encore abondamment utilisé à ce jour dans des algorithmes de commande pour compenser le frottement [49, 79]. Il regroupe le frottement de Coulomb, le frottement statique, le frottement visqueux et l'effet de Stribeck. Qui plus est, ce modèle caractérise la partie statique des modèles dynamiques de LuGre, de Leuven et du modèle GMS dont l'estimateur sera proposé aux chapitres 3 et 4.

Dans ce chapitre, une approche d'estimation non linéaire sera appliquée au modèle de Stribeck pour identifier l'ensemble de ses paramètres sans avoir recours à une approximation de la non linéarité comme l'ensemble des travaux antérieurs. En effet selon la revue bibliographique présentée au chapitre 1, toutes les méthodes adaptatives proposées sont basées sur :

- la linéarisation du modèle de Stribeck [48],
- l'identification empirique du paramètre de Stribeck [80],
- l'hypothèse de la connaissance à priori du paramètre de Stribeck [46].

Pour identifier les paramètres du modèle sans avoir recours à ces approximations, une récente méthode d'identification basée sur une approche s'appuyant sur la commutation connue entre la convexité et la concavité de la formulation non linéaire sera appliquée.

Afin que cette approche soit applicable, une représentation d'état particulière pour assurer la condition de continuité de la formulation et pour garder la propriété de convexité et de concavité de la fonction de Stribeck est proposée. En outre, la preuve de convergence de l'algorithme

d'estimation basée sur les résultats développés dans [81] sera présentée en insistant davantage sur les différences découlant de la formulation proposée dans ce chapitre.

2.2 Modèle de frottement de Stribeck

Le modèle de frottement de Stribeck est un modèle statique qui caractérise seulement le régime de glissement. Il renferme l'effet non linéaire de Stribeck. Ce dernier caractérise la transition entre le frottement statique et celui de Coulomb qui dépend étroitement de la nature des surfaces de contact, de la nature de la lubrification et de la vitesse du mouvement [4] (voir figure 2.1).

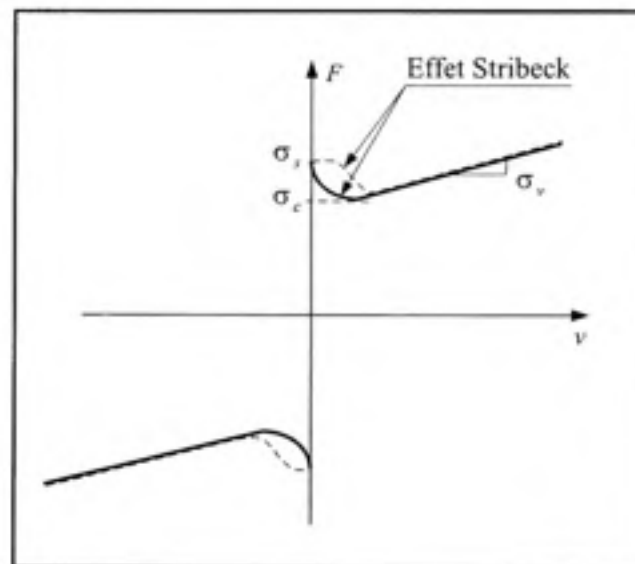


Figure 2.1 Frottement de Stribeck.

Le modèle de Stribeck est représenté par l'équation suivante [48, 49] :

$$F = \sigma_c \text{sign}(v) + (\sigma_s - \sigma_c) \text{sign}(v) e^{-\left|\frac{v}{v_s}\right|^\delta} + \sigma_v v \quad (2.1)$$

où σ_c et σ_s sont respectivement l'amplitude de la force de frottement de Coulomb et l'amplitude de la force statique, σ_v est le coefficient du frottement visqueux, v_s est la vitesse de Stribeck et δ est un coefficient qui détermine la forme de la transition de Stribeck. Dans l'équation (2.1),

$sign$ représente la fonction signe définie par

$$sign(v) = \begin{cases} +1 & \text{si } v > 0 \\ -1 & \text{si } v < 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Le coefficient δ est généralement choisi égal à 2 [52, 56]. Ainsi, les coefficients qui doivent être identifiés sont σ_c , σ_s , v_s et σ_v . Le modèle de frottement est alors linéaire par rapport à σ_c et σ_v , mais il est non linéaire par rapport aux paramètres v_s et $\sigma_s - \sigma_c$.

2.3 Formulation du problème

Soit un corps de masse M qui glisse sur une surface sous l'action d'une force u . La force de frottement qui s'oppose au mouvement est notée par F (voir figure 2.2).

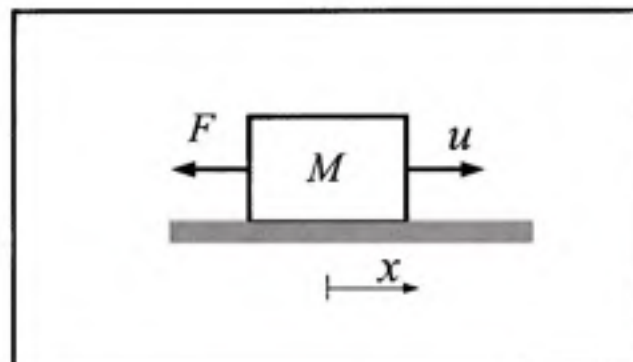


Figure 2.2 Schéma descriptif du système.

Selon la deuxième loi de Newton, l'équation dynamique du système peut s'écrire comme suit :

$$M\dot{v} = u - F \quad (2.3)$$

où F est la force de frottement, v est la vitesse, \dot{v} est l'accélération du corps et u est la force appliquée sur le corps pour le faire bouger.

En supposant que $\delta = 2$, le modèle de Stribeck peut être réécrit sous la forme usuelle suivante :

$$F = \sigma_v v + \sigma_c sign(v) + \sigma sign(v) e^{-\theta_s v^2} \quad (2.4)$$

où θ_s et σ sont définis par

$$\theta_s = \frac{1}{v_s^2} \quad (2.5)$$

$$\sigma = \sigma_s - \sigma_c \quad (2.6)$$

L'objectif est alors d'identifier les paramètres σ_v , σ_c , σ et θ_s du modèle statique non linéaire.

Récemment, une théorie basée sur une formulation min-max [82, 83, 84] a été introduite pour identifier les paramètres inconnus qui agissent d'une manière non linéaire dans une certaine classe de systèmes dynamiques. Cependant, cette formulation exige que le modèle soit concave ou convexe par rapport aux paramètres à identifier.

Dans la prochaine section, nous présenterons, en détail, cette nouvelle approche qui permettra d'identifier les paramètres du modèle de frottement de Stribeck.

2.4 Approche min-max

2.4.1 Introduction

La plupart des algorithmes d'estimation sont basés sur l'hypothèse que le système peut être exprimé sous une forme linéaire par rapport aux paramètres à estimer.

Malheureusement, plusieurs systèmes ne répondent pas à ce critère alors de nouvelles approches viennent pallier à cette difficulté. L'approche min-max [81, 82, 84, 85, 86] en est une alternative intéressante qui sera appliquée à l'identification non linéaire du modèle de frottement de Stribeck.

2.4.2 Présentation de l'approche min-max

L'approche min-max permet de résoudre le problème d'estimation des paramètres lorsque le modèle du système étudié n'est pas linéaire par rapport à ses paramètres. En fait, contrairement aux méthodes linéaires, la méthode min-max utilise une optimisation selon un critère de stabilité et un critère de sensibilité.

Dans les travaux d'Annaswamy et al. [83, 82, 86], il y a différents cas selon la nature de la fonction qui dépend des paramètres inconnus à estimer et selon la dimension de l'espace des paramètres. Ainsi, il existe le cas où la fonction non linéaire des paramètres est convexe ou concave avec un seul paramètre inconnu ou le cas similaire, mais avec un vecteur de paramètres inconnus. Il existe également les cas d'une fonction non linéaire générale avec un seul paramètre ou avec un vecteur de paramètres.

Pour chaque cas, il existe une méthodologie particulière pour résoudre le problème d'optimisation en posant une loi d'adaptation appropriée.

La classe des systèmes qui peuvent être résolus par cette approche est décrite par la forme suivante [82] :

$$\dot{y} = -\alpha(y, u)y + f(\theta, \omega(y, u)) \quad (2.7)$$

où

$$0 < \alpha_{min} \leq \alpha(y, u) \leq \alpha_{max}$$

$\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est le vecteur des paramètres à estimer, supposés bornés, dont on connaît les bornes et ω ainsi que f sont deux fonctions continues définies comme suit :

$$\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'algorithme d'estimation [82] est alors donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}} = -\alpha(y, u) \left(\hat{y} - \epsilon \text{sat}\left(\frac{\hat{y}}{\epsilon}\right) \right) + f(\hat{\theta}, \omega) - a^* \text{sat}\left(\frac{\hat{y}}{\epsilon}\right) \\ \dot{\hat{\theta}} = -\hat{y}_\epsilon \phi^* \end{cases} \quad (2.8)$$

où $\tilde{y} = \hat{y} - y$, $\tilde{y}_\epsilon = \tilde{y} - \epsilon \text{sat}\left(\frac{\tilde{y}}{\epsilon}\right)$ et ϵ est une constante positive. Aussi, sat est la fonction saturation définie par

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1, \\ x & \text{si } |x| < 1 \\ -1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

et a^* ainsi que ϕ^* sont les solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} a^* = \min_{\phi \in \mathbb{R}^m} \max_{\theta \in \Omega} G(\theta, \omega, \phi) \\ \phi^* = \arg \min_{\phi \in \mathbb{R}^m} \max_{\theta \in \Omega} G(\theta, \omega, \phi) \end{cases} \quad (2.9)$$

avec G définie par

$$G(\theta, \omega, \phi) = \text{sat}\left(\frac{\tilde{y}}{\epsilon}\right) \left(f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \phi^T(\hat{\theta} - \theta) \right)$$

Il est important de noter que la solution de ce problème dépend de la nature de f . En effet, la solution du problème d'optimisation de l'équation (2.9) dépend de la concavité¹ et de la convexité de la fonction f . La solution explicite de ce problème d'optimisation est bien détaillée dans [83].

Remarque 2.1. Contrairement à la théorie classique d'identification en ligne, dans laquelle on utilise l'erreur de prédiction pour générer la loi d'adaptation, l'approche min-max est caractérisée par l'utilisation de deux fonctions pour la synthèse. L'idée de base de cette approche consiste à synthétiser deux fonctions d'adaptation : la première fonction est celle de sensibilité pour la loi d'adaptation (équation de ϕ^* dans (2.9)); elle détermine la direction adéquate pour ajuster les paramètres à estimer. La deuxième fonction est réservée à la stabilisation de la dynamique de l'erreur (équation de a^* dans (2.9)). La synthèse de ces deux fonctions est basée sur l'optimisation d'une fonction objective qui dépend à la fois des paramètres inconnus à estimer et de l'erreur.

Remarque 2.2. La fonction sat et la constante ϵ sont introduites dans l'estimateur pour garantir la continuité de la formulation. En effet, malgré que les deux fonctions a^* et ϕ^* basculent entre

1. Une fonction $f(\theta)$ est dite convexe sur Θ , si elle vérifie cette inégalité

$$f(\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2) \leq \lambda f(\theta_1) + (1 - \lambda)f(\theta_2) \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$$

Une fonction $f(\theta)$ est dite concave sur Θ , si elle vérifie cette inégalité

$$f(\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2) \geq \lambda f(\theta_1) + (1 - \lambda)f(\theta_2) \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$

deux valeurs, l'introduction d'une zone morte par le biais de l'utilisation de la fonction *sat* et l'erreur de prédiction \tilde{y}_ϵ à la place de \tilde{y} garantissent la continuité de l'algorithme d'estimation.

2.4.3 Hypothèses

La classe de système qui permet d'appliquer l'estimateur min-max, défini par les équations (2.8) et (2.9), est caractérisée par l'ensemble des modèles qui respectent l'équation (2.7) ainsi que les hypothèses définies dans cette section. Aussi, ces hypothèses [82] permettent de garantir la stabilité et la convergence de l'estimateur.

Hypothèse 2.1. La fonction $\omega(x(t), u(t))$ est Lipschitz par rapport au temps t . Donc il existe une constante positive U_b telle que

$$\|\omega(t_1) - \omega(t_2)\| \leq U_b |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$$

Hypothèse 2.2. f est Lipschitz par rapport à ses variables alors il existe une constante positive F_θ telle que

$$\begin{aligned} |f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - f(\theta, \omega)| &\leq F_\theta \|(\Delta\theta, \Delta\omega)\| \\ &\leq F_\theta (\|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) \end{aligned}$$

Hypothèse 2.3. La fonction $f(\hat{\theta}, \omega)$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive B_f telle que

$$|f(\hat{\theta}, \omega)| < B_f$$

Hypothèse 2.4. La fonction $\omega(x, u)$ est bornée et continue par rapport à ses variables.

Hypothèse 2.5. La solution du problème d'optimisation $\phi^*(t)$ est bornée par une constante positive B_ϕ telle que $\forall t \geq t_0$

$$\|\phi^*(t)\| \leq B_\phi$$

Hypothèse 2.6. La vitesse v , l'accélération $\frac{dv}{dt}$ et la commande u sont bornées. On suppose de plus que v est Lipschitz par rapport au temps.

2.5 Application de l'approche min-max au modèle de frottement

2.5.1 Formulation

Dans cette section, l'approche min-max est appliquée au modèle de frottement de Stribeck décrit par l'équation (2.4), dans laquelle le paramètre de Stribeck (θ_s) et le paramètre σ interviennent d'une façon non linéaire. Cependant pour que l'approche soit applicable, il faut que la formulation du modèle respecte la condition de Lipschitz décrite par l'hypothèse 2.2. Or, selon l'équation (2.4), le modèle de Stribeck ne respecte pas cette condition à cause de la fonction *sign*.

Afin de résoudre ce problème, un changement de variable qui permet d'éliminer la discontinuité causée par la fonction *sign* est proposé. Ce changement de variable est défini par

$$x = (1 - e^{-k|v|})v \quad (2.10)$$

où k est une constante positive de conception. Pour que la variable x se rapproche de la vitesse v , la constante k devrait être choisie la plus élevée possible. Par contre, si cette constante était trop élevée, le système serait tellement rigide qu'il serait à la limite de la continuité. Un compromis doit être considéré pour le choix de k .

La dérivée temporelle de la variable d'état x est alors donnée par :

$$\dot{x} = (ke^{-k|v|}|v| + 1 - e^{-k|v|})\dot{v} \quad (2.11)$$

Afin de simplifier l'écriture et d'alléger les équations, on introduit la fonction $g(v)$ définie par

$$g(v) = ke^{-k|v|}|v| + 1 - e^{-k|v|} \quad (2.12)$$

Alors le système décrit par l'équation (2.3) combinée avec l'équation (2.4) peut s'écrire sous la forme suivante

$$g(v)\dot{v} = g(v) \left(\frac{1}{M}u - \frac{1}{M}\sigma_v v - \frac{1}{M}\sigma_c \text{sign}(v) - \frac{1}{M}\sigma \text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2} \right) \quad (2.13)$$

d'où

$$\dot{x} = \frac{g(v)}{M}u + \sigma \left(-\frac{g(v)}{M}v\left(\frac{\sigma_v}{\sigma}\right) - \frac{g(v)}{M}\text{sign}(v)\left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right) - \frac{g(v)}{M}\text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2} \right) \quad (2.14)$$

On pose alors $\Psi_0(u, v) = \frac{g(v)}{M}u$, $\omega_1 = -\frac{g(v)}{M}v$, $\omega_2 = -\frac{g(v)}{M}\text{sign}(v)$, $\omega_3 = v$, $\theta_1 = \frac{\sigma_v}{\sigma}$, $\theta_2 = \frac{\sigma_c}{\sigma}$, et $\theta_3 = \theta_s$.

puis, on définit

$$f(\theta, \omega) = \omega_1\theta_1 + \omega_2\theta_2 + f_3(\theta_3, \omega_3) \quad (2.15)$$

où

$$f_3(\theta_3, \omega_3) = -\frac{g(\omega_3)}{M}\text{sign}(\omega_3)e^{-\theta_3\omega_3^2} \quad (2.16)$$

avec

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3] \quad \text{et} \quad \theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$

Finalement, le système décrit par les équations (2.3) et (2.4) s'exprime par rapport à la nouvelle variable d'état x de la façon suivante :

$$\dot{x} = \Psi_0(u, v) + \sigma f(\theta, \omega) \quad (2.17)$$

où $\Psi_0(u, v)$ est une quantité parfaitement connue. En effet, $\Psi_0(u, v)$ dépend de $g(v)$, de u et de M . La commande u et la masse M sont supposés connus alors que $g(v)$ (équation (2.12)) dépend de v et de k ; un signal supposé connu et une constante k qui doit être choisie lors de la conception ou par essai et erreur.

Grâce au changement de variable proposé, les hypothèses de continuité (hypothèses 2.1 et hypothèse 2.2) sont maintenant vérifiées. La propriété suivante établit cette affirmation :

Propriété 2.1. Les fonctions $g(v)$, $g(v)\text{sign}(v)$ et $g(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_*v^2}$ sont Lipschitz par rapport à t . La fonction $f(\theta, \omega)$ est également Lipschitz par rapport à θ et ω .

Preuve : Voir annexe I page 132.

À partir de l'équation (2.17), l'observateur min-max peut être exprimé comme suit

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -K(\tilde{x} - \epsilon \text{sat}(\frac{\tilde{x}}{\epsilon})) + \Psi_0(u, v) + Kx + \hat{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - a^* \text{sat}(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}) \\ \dot{\hat{\sigma}} &= -\tilde{x}_\epsilon f(\hat{\theta}, \omega) \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\tilde{x}_\epsilon \phi^* \\ \tilde{x} &= \hat{x} - x \\ \tilde{x}_\epsilon &= \tilde{x} - \epsilon \text{sat}(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}) \end{cases} \quad (2.18)$$

Le gain K est proposé dans cette formulation alors qu'il n'existe pas dans la formulation de [82] parce que la forme du modèle du système ne respecte pas exactement la forme dans [82] (absence du terme $-\alpha(y, u)y$ dans la formulation (2.17)) et ainsi l'ajout du gain permet d'obtenir une dynamique d'erreur d'estimation similaire à celle obtenue dans [82]. En outre, l'ajout du gain K permet également d'augmenter la vitesse de convergence des paramètres estimés.

Remarque 2.3. La forme décrite par l'équation (2.17) ne respecte pas exactement celle considérée pour l'estimateur min-max proposée dans [82]. C'est pour cette raison que l'estimateur que nous proposons est également différent de celui proposé dans [82] (équations 2.8 et 2.9). Cependant, nous verrons qu'avec la formulation proposée dans cette thèse, la preuve proposée dans [82], demeure applicable grâce à quelques ajustements qui seront présentés dans les prochains paragraphes.

En appliquant l'estimateur (2.18) au système décrit par (2.17), la dynamique des erreurs d'estimation $\tilde{x} = \hat{x} - x$, $\tilde{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma$ et $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ devient

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -K\tilde{x}_\epsilon + \tilde{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \\ \dot{\tilde{\sigma}} &= -\tilde{x}_\epsilon f(\hat{\theta}, \omega) \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\tilde{x}_\epsilon \phi^* \\ \tilde{x}_\epsilon &= \tilde{x} - \epsilon \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (2.19)$$

La solution du problème d'optimisation a^* et ϕ^* doit satisfaire :

$$\begin{cases} a^* &= \min_{\phi \in \mathbb{R}^3} \max_{\theta \in \Omega_0} G(\theta, \phi) \\ \phi^* &= \arg \min_{\phi \in \mathbb{R}^3} \max_{\theta \in \Omega_0} G(\theta, \phi) \end{cases} \quad (2.20)$$

avec

$$G(\theta, \phi) = \sigma \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \left(f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \phi^T \tilde{\theta} \right) \quad (2.21)$$

Propriété 2.2. Selon l'équation (2.20), la propriété suivante est toujours vérifiée

$$\sigma \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) (f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \phi^{*T} \tilde{\theta}) - a^* \leq 0 \quad (2.22)$$

Preuve : Voir annexe I à la page 136.

Cette propriété est très importante puisqu'elle assure la négativité de la fonction de Lyapunov utilisée pour prouver la stabilité de l'estimateur dans la prochaine section.

La solution explicite du problème d'optimisation (2.20) est donnée par [83]

– Si $\hat{x} < 0$

$$a^* = \begin{cases} \sigma_{\max} \left(f_{3_{\min}} - \hat{f}_3 + \frac{f_{3_{\max}} - f_{3_{\min}}}{\theta_{3_{\max}} - \theta_{3_{\min}}} (\hat{\theta}_3 - \theta_{3_{\min}}) \right) & \text{si } f \text{ convexe } (\omega_3 < 0) \\ 0 & \text{si } f \text{ concave } (\omega_3 \geq 0) \end{cases}$$

$$\phi^* = \begin{cases} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \frac{f_{3_{\max}} - f_{3_{\min}}}{\theta_{3_{\max}} - \theta_{3_{\min}}} \end{bmatrix} & \text{si } f \text{ convexe } (\omega_3 < 0) \\ \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \nabla_{f_{3_{\hat{\theta}}}} \end{bmatrix} & \text{si } f \text{ concave } (\omega_3 \geq 0) \end{cases}$$

– Si $\hat{x} \geq 0$

$$a^* = \begin{cases} \sigma_{\max} \left(\hat{f}_3 - f_{3_{\min}} - \frac{f_{3_{\max}} - f_{3_{\min}}}{\theta_{3_{\max}} - \theta_{3_{\min}}} (\hat{\theta}_3 - \theta_{3_{\min}}) \right) & \text{si } f \text{ concave } (\omega_3 \geq 0) \\ 0 & \text{si } f \text{ convexe } (\omega_3 < 0) \end{cases}$$

$$\phi^* = \begin{cases} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \frac{f_{3_{\max}} - f_{3_{\min}}}{\theta_{3_{\max}} - \theta_{3_{\min}}} \end{bmatrix} & \text{si } f \text{ concave } (\omega_3 \geq 0) \\ \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \nabla_{f_{3_{\hat{\theta}}}} \end{bmatrix} & \text{si } f \text{ convexe } (\omega_3 < 0) \end{cases}$$

où $f_{3_{\max}} = f(\theta_{3_{\max}}, \omega_3)$, $f_{3_{\min}} = f(\theta_{3_{\min}}, \omega_3)$, $\hat{f}_3 = f(\hat{\theta}_3, \omega_3)$ et $\nabla_{f_{3_{\hat{\theta}}}} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta} |_{\theta=\hat{\theta}}$

2.5.2 Stabilité de l'estimateur

Dans ce qui suit, la stabilité de l'estimateur est démontrée.

Soit V une fonction candidate de Lyapunov définie par :

$$V = \frac{1}{2}(\tilde{x}_\epsilon^2 + \tilde{\sigma}^2 + \sigma\tilde{\theta}^T\tilde{\theta}) \quad (2.23)$$

Cette fonction de Lyapunov est directement inspirée de celle utilisée dans [83], mais le terme $\sigma\tilde{\theta}^T\tilde{\theta}$ a été ajouté pour tenir compte de l'introduction du paramètre σ dans la présente formulation.

En supposant que σ est une constante positive, la dérivée temporelle de la fonction V est donnée par

$$\dot{V} = \tilde{x}_\epsilon\dot{\tilde{x}}_\epsilon + \tilde{\sigma}\dot{\tilde{\sigma}} + \sigma\tilde{\theta}^T\dot{\tilde{\theta}}$$

Selon l'équation (2.19), on peut affirmer que

- si $|\tilde{x}| < \epsilon$ alors $\tilde{x}_\epsilon = 0$ donc, $\dot{V} = 0$.

- si $|\tilde{x}| > \epsilon$ alors $\dot{\tilde{x}}_\epsilon = \dot{\tilde{x}}$ donc, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov candidate peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{x}_\epsilon \left(-K\tilde{x}_\epsilon + \dot{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \right) \\ &\quad + \dot{\tilde{\sigma}} \left(-\tilde{x}_\epsilon f(\hat{\theta}, \omega) \right) + \sigma\tilde{\theta}^T \left(-\tilde{x}_\epsilon \phi^* \right) \\ &= -K\tilde{x}_\epsilon^2 + \tilde{x}_\epsilon \left(\dot{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) - \dot{\tilde{\sigma}}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma\tilde{\theta}^T \phi^* \right) \\ &= -K\tilde{x}_\epsilon^2 + \tilde{x}_\epsilon \left(\sigma f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) - \sigma\tilde{\theta}^T \phi^* - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \right) \\ &= -K\tilde{x}_\epsilon^2 + \tilde{x}_\epsilon \left(\sigma(f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \tilde{\theta}^T \phi^*) - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \right) \\ &= -K\tilde{x}_\epsilon^2 + \left| \tilde{x}_\epsilon \right| \left(\sigma \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) (f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \phi^{*T} \tilde{\theta}) - a^* \right) \end{aligned}$$

Ainsi, grâce à la propriété 2.2, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\dot{V} \leq -K\tilde{x}_\epsilon^2, \quad \text{lorsque } |\tilde{x}| > \epsilon \quad (2.24)$$

d'où

$$\dot{V} \leq 0, \quad \text{pour tout } \tilde{x} \quad (2.25)$$

Donc, le système est stable et \hat{x}_ϵ , $\hat{\sigma}$ et $\hat{\theta}$ sont bornés. En effet, lorsque $|\tilde{x}| > \epsilon$ alors $\tilde{x}_\epsilon^2 > 0$ et par conséquent la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est strictement négative par rapport à \tilde{x} ce qui assure la convergence de l'erreur d'estimation \tilde{x} . Cependant lorsque \tilde{x} devient plus petite que ϵ , la dérivée de la fonction de Lyapunov devient nulle ce qui entraîne l'arrêt de l'estimation. Les erreurs convergent ainsi à l'intérieur d'une boule centrée à l'origine.

Remarque 2.4. Grâce à l'hypothèse 2.2 (qui est vérifiée à partir de la propriété 2.1) et la preuve de stabilité de l'estimateur, l'hypothèse 2.3 est bien vérifiée. En effet, puisque f et ω sont Lipschitz et que l'erreur d'estimation est bornée alors la fonction $f(\hat{\theta}, \omega)$ est bornée puisque la vitesse et la commande sont bornées selon l'hypothèse 2.6.

De plus, l'hypothèse 2.4 est vérifiée puisque la fonction ω est Lipschitz (voir hypothèse 2.1) et que la commande et la vitesse sont bornées selon l'hypothèse 2.6.

L'hypothèse 2.5 est aussi vérifiée. En effet, selon l'expression de la solution du problème d'optimisation ($\phi^*(t)$) et selon les hypothèses 2.2, 2.4 et 2.6, la solution du problème d'optimisation $\phi^*(t)$ est bornée.

2.5.3 Propriétés

Dans cette section, quelques propriétés qui sont très importantes pour la compréhension du mécanisme de l'algorithme min max et pour prouver la convergence de l'estimateur seront présentées.

Les preuves de toutes les propriétés présentées dans cette section sont données en détail à l'annexe I (de la page 136 à la page 139).

Propriété 2.3. f (équation (2.15)) est une fonction convexe par rapport à θ lorsque $v < 0$ et elle est concave lorsque $v \geq 0$.

Propriété 2.4. $\bar{f}(\sigma, \theta, \omega) = \sigma f(\theta, \omega)$ est Lipschitz par rapport à ses variables donc, il existe une constante positive B_θ qui vérifie

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\sigma + \Delta\sigma, \theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega)| &= |(\sigma + \Delta\sigma)f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - \sigma f(\theta, \omega)| \\ &\leq B_\theta \|(\Delta\sigma, \Delta\theta, \Delta\omega)\| \\ &\leq B_\theta (\|\Delta\sigma\| + \|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Propriété 2.5. Selon l'équation (2.24) on a

$$\dot{V} \leq -K \tilde{x}_\epsilon^2$$

Propriété 2.6. Soit $\beta(\omega)$ définie comme suit

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\theta, \omega) \text{ est convexe} \\ -1 & \text{si } f(\theta, \omega) \text{ est concave} \end{cases}$$

alors pour a^* et β , ce qui suit est vrai

- (1) $a_-^* = 0$, si $\beta = -1$
- (2) $a_+^* = 0$, si $\beta = 1$
- (3) $\beta a^* \tilde{x}_\epsilon \leq 0$, $\forall \beta$

où a_-^* et a_+^* sont définies comme suit

$$\begin{aligned} a_-^*(\hat{\theta}, \omega) &= a^* \quad \text{si } \tilde{x}_\epsilon < 0 \\ a_+^*(\hat{\theta}, \omega) &= a^* \quad \text{si } \tilde{x}_\epsilon > 0 \end{aligned}$$

Propriété 2.7. Si dans l'équation (2.19) $|\tilde{x}_\epsilon(t_1)| \geq \gamma$ alors

$$V(t_1 + T') \leq V(t_1) - \frac{K\gamma^3}{3(M + K\gamma)} \quad (2.27)$$

où $T' = \frac{\gamma}{M + K\gamma}$ et $M = \max\{|m(t)|\}$ où $m(t)$ est définie par

$$m(t) = \hat{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \quad (2.28)$$

La propriété 2.7 est indispensable pour la démonstration du théorème de convergence de l'estimateur (voir annexe I à la page 139).

Maintenant, le théorème de la convergence de l'estimateur min-max peut être annoncé :

Théorème 2.1. Si (1) $\sigma f(\theta, \omega)$ est convexe (ou concave) par rapport à θ pour tout $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ et (2) $\forall t_1 > t_0$, il existe des constantes positives T_0, ϵ_u et un instant $t_2 \in [t_1, t_1 + T_0]$ telles que pour tout θ , la condition de persistance d'excitation suivante est vérifiée :

$$\beta(\omega(t_2)) \left\{ \hat{\sigma}(t_1) f(\hat{\theta}, \omega(t_2)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) \right\} \geq \epsilon_u \|\hat{\Omega} - \Omega\| \quad (2.29)$$

où $\beta(\omega(t))$ est définie par la propriété 2.6,

alors toutes les trajectoires de (2.19) convergent uniformément à l'intérieure de l'ensemble suivant :

$$D_\epsilon = \{X | V(X) \leq \gamma_1\}$$

où

$$X = [\tilde{x}_\epsilon, \Omega^T]^T = [\tilde{x}_\epsilon, \tilde{\sigma}, \sqrt{\sigma} \tilde{\theta}^T]^T$$

et

$$\gamma_1 = \frac{2\epsilon}{\epsilon_u^2} \left\{ 4B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + 4\sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right] \right\}$$

où B_θ est définie par la propriété 2.4 et U_b , B_f et B_ϕ sont définies respectivement par les hypothèses 2.1, 2.3 et 2.5.

La démonstration du théorème est présentée à l'annexe I à la page 141. On rappelle que cette démonstration est basée sur les résultats présentés dans [81] mais avec quelques différences qui découlent de la formulation proposée dans cette thèse pour estimer les paramètres du modèle de frottement de Stribeck. En effet, en comparant la formulation de [81] donnée par l'équation (2.7), avec la formulation présentée par l'équation (2.17), plusieurs différences peuvent être soulignées :

- a. Absence de la fonction $-\alpha(y, u)y$ dans la formulation proposée.
- b. l'existence d'une fonction parfaitement connue $\Psi_0(u, v)$ dans la formulation proposée.
- c. La fonction non linéaire dans la formulation proposée est donnée par $\sigma f(\theta, \omega)$ avec σ un paramètre inconnu à identifier.

À cause de ces différences, il faut adapter la fonction objective du problème d'optimisation puis chercher la solution adéquate à ce problème. Il faut également adapter la preuve du théorème de convergence en conséquence et la condition de la persistance d'excitation.

Remarque 2.5. Selon la définition de D_ϵ , il est possible d'affirmer que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ toutes les trajectoires convergent vers la région $X = 0$. Donc l'estimateur est uniformément asymptotiquement stable.

Remarque 2.6. L'équation (2.29) est une condition nécessaire pour la convergence de l'estimateur. Elle représente la condition de persistance d'excitation dans le cas non linéaire.

L'algorithme d'estimation min-max est différent des algorithmes classiques d'estimation au niveau structurel. En effet, les algorithmes linéaires utilisent l'erreur d'estimation pour générer la loi d'adaptation alors que l'algorithme min-max utilise deux fonctions : la première est

utilisée pour générer la loi d'adaptation tandis que la deuxième est utilisée pour assurer la stabilité globale de l'erreur d'estimation. Ainsi, la fonction de maximisation α^* garantit la stabilité globale de l'estimateur et la fonction de sensibilité ϕ^* détermine la loi d'adaptation (voir équation 2.18). En d'autres termes, la stabilité globale de l'erreur d'estimation et l'adaptation sont assurées séparément par deux fonctions différentes.

2.6 Simulation de l'estimateur min-max appliquée au modèle de frottement de Stribeck

2.6.1 Résultats de simulation

Dans cette section du chapitre, les résultats de la simulation du système de la figure 2.2 avec les paramètres présentés dans les tableaux 2.1 et 2.2 sont présentés. Les valeurs du tableau 2.1 ont été fixées arbitrairement alors que celles du tableau 2.2 ont été ajustées par essai et erreur. La masse de l'objet a été fixée à $2.5Kg$ tandis que l'excitation a été fixée à $u(t) = 8\sin(20t)$. Les figures 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 présentent respectivement les erreurs d'estimations du paramètre visqueux (σ_v), du paramètre de Coulomb (σ_c), du paramètre σ ($\sigma = \sigma_s - \sigma_c$) et du paramètre de Stribeck (θ_s).

Tableau 2.1 Valeurs nominales des paramètres

Paramètres	Valeurs nominales	Intervalles
σ_c	5	[2, 10]
σ_v	14	[10, 20]
σ	1	[0.5, 1.5]
θ_s	5000	[3000, 7000]

Tableau 2.2 Valeurs des paramètres pour la simulation

Paramètres	Valeurs
ϵ	10^{-5}
K	50
k	100

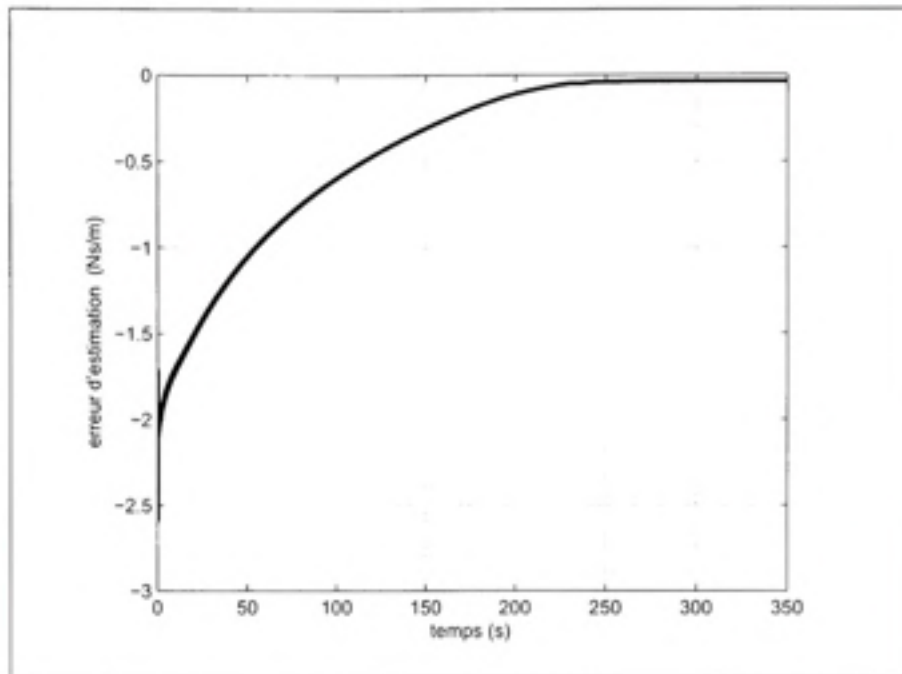


Figure 2.3 Erreur d'estimation pour le paramètre visqueux (σ_v).

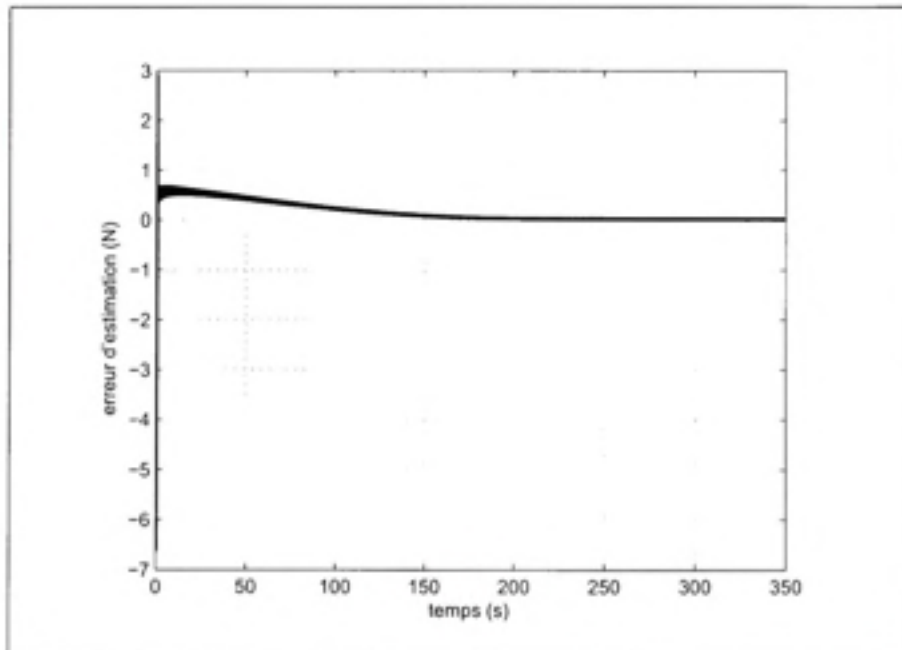


Figure 2.4 Erreur d'estimation pour le paramètre de Coulomb (σ_c).

Selon les résultats de simulation obtenus, il est clair que toutes les erreurs d'estimation des paramètres convergent vers une région très proche de zéro. De plus, malgré que le paramètre de Stribeck est exprimé d'une façon non linéaire dans le modèle de frottement, il est très bien estimé. Ceci grâce à la valeur de ϵ qui est choisie très proche de zéro.

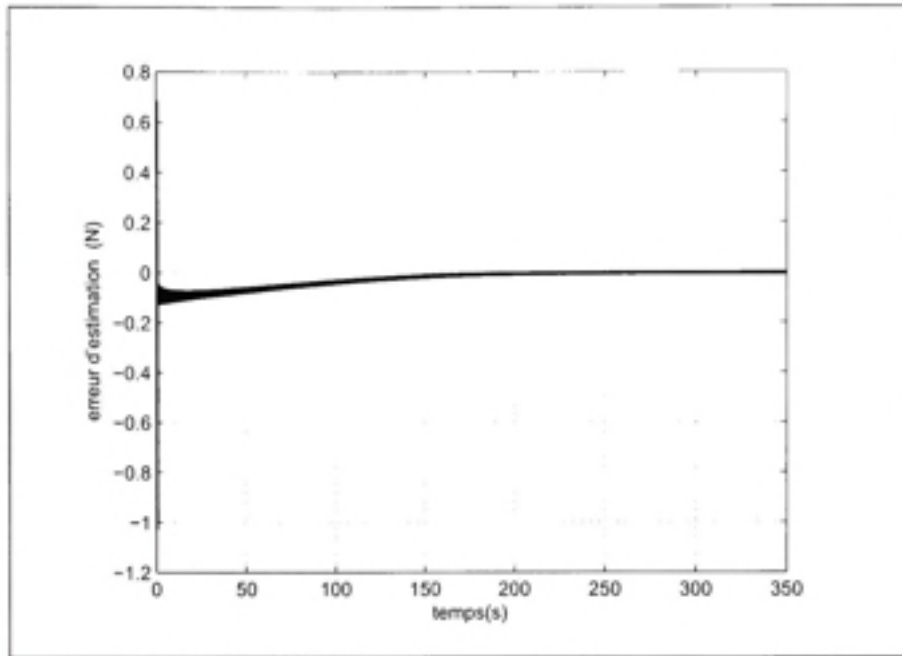


Figure 2.5 Erreur d'estimation pour le paramètre (σ).

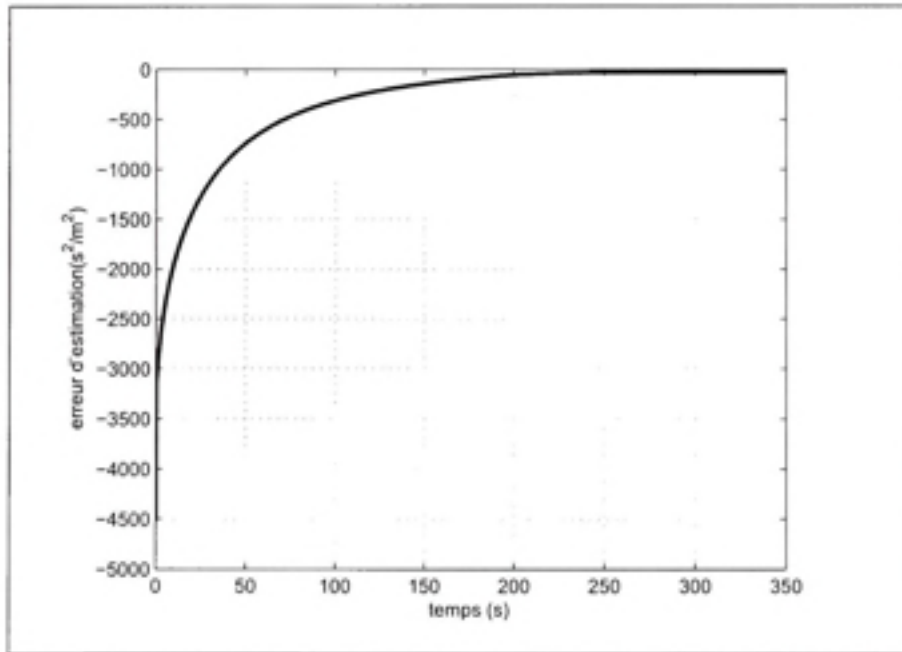


Figure 2.6 Erreur d'estimation pour le paramètre de Stribeck (θ_s).

On peut dire qu'avec une telle approche, il est possible d'identifier les paramètres inconnus du modèle de Stribeck.

2.6.2 Limites de l'approche min-max

Dans cette section, les limites de l'application de l'approche min-max pour l'identification du modèle de frottement statique incluant l'effet non linéaire de Stribeck sont présentées. Selon la section 2.4 du présent chapitre, l'approche min-max doit satisfaire plusieurs hypothèses à savoir :

- Le modèle à identifier doit s'écrire sous la forme de l'équation (2.7).
- La fonction non linéaire f de l'équation (2.7) doit être continue par rapport à ses variables.
- La fonction non linéaire f doit être concave ou/et convexe par rapport aux paramètres inconnus.

Nous avons démontré que le modèle de frottement de Stribeck, avec un changement de variable approprié, peut satisfaire à toutes les hypothèses citées ci-haut. Ainsi, l'objectif serait maintenant de proposer une généralisation de cette méthode afin d'identifier le modèle de frottement GMS, qui rappelons le, comporte en plus de l'effet Stribeck, des effets dynamiques.

Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure d'établir cette généralisation. En fait, le modèle GMS est caractérisé par deux équations dynamiques qui expriment le régime de préglissement et celui de glissement. La transition entre les deux régimes est assurée par une fonction de commutation. Pour le régime de préglissement, l'équation de frottement est linéaire par rapport au paramètre inconnu donc l'approche min-max pourrait être utilisée. Cependant, l'équation de glissement ne satisfait pas les hypothèses de l'approche. En effet, elle est discontinue à cause de l'existence de l'opérateur signe. De plus, la convexité et la concavité ne sont pas vérifiées et nous n'avons pas été en mesure de trouver un changement de variable pour palier à ce problème. Aussi, la fonction de commutation ajoute une autre complexité au modèle parce qu'elle dépend étroitement du comportement et des paramètres du frottement.

2.7 Conclusion

L'identification des paramètres du modèle de frottement de Stribeck est présentée dans ce chapitre. Ce modèle est non linéaire par rapport aux paramètres inconnus. Pour cette raison, les

approches linéaires classiques ne permettent pas d'identifier l'ensemble des paramètres de ce modèle.

Une récente approche permet d'identifier les paramètres qui s'expriment d'une façon non linéaire dans le modèle. Cette approche est caractérisée par une minimisation d'une fonction objective à l'aide d'une méthode min-max.

Dans ce chapitre, cette méthode a été appliquée au modèle de frottement de Stribeck grâce au changement de variable que nous avons proposé. Un ajustement de la formulation ainsi que de ces propriétés a ensuite été proposé pour adapter l'approche au modèle de Stribeck. Une simulation numérique a permis de valider l'approche. Cependant, à cause des hypothèses restrictives de la méthode min-max, nous n'avons pas été en mesure de généraliser son application au modèle de frottement GMS. Ainsi, dans les prochains chapitres, une autre méthodologie sera proposée afin d'identifier le modèle GMS.

CHAPITRE 3

IDENTIFICATION DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS BASÉ SUR LA MESURE DE LA FORCE DE FROTTEMENT

3.1 Introduction

Dans le chapitre 1, une revue bibliographique de la modélisation du phénomène de frottement et des méthodes d'identification est présentée. À l'aide de cette revue, il a été démontré que le modèle GMS¹ est actuellement un des modèles empiriques les plus précis puisqu'il est en mesure de représenter la majorité des phénomènes de frottement, mais son identification n'est pas bien étudiée surtout avec les méthodes en ligne et en temps réel.

Ainsi, l'objectif de ce chapitre est d'identifier les paramètres du modèle de frottement GMS par une méthode en ligne basée sur un observateur robuste. La formulation de ce dernier repose sur le signal de la force de frottement. Par conséquent, la force de frottement doit être supposée connue pour que l'observateur puisse identifier les paramètres du modèle de frottement.

La structure de ce chapitre sera comme suit : la formulation du problème sera présentée en premier. Une étude bien détaillée du modèle de frottement GMS fera l'objet de la deuxième section suivie par une présentation détaillée de l'observateur utilisé pour l'identification. L'application de cet observateur au modèle de frottement sera la principale partie de ce chapitre et finalement une validation par voie de simulation sera présentée en dernière partie.

3.2 Formulation du problème

On considère un système constitué d'un corps de masse M qui glisse sur une surface sous l'action d'une force motrice u (voir figure 3.1) alors qu'une force de frottement F vient s'opposer au mouvement.

1. GMS : Generalized Maxwell-Slip (en anglais)

Le déplacement du corps est noté par la variable x , sa vitesse par la variable v et son accélération par la variable \dot{v} .

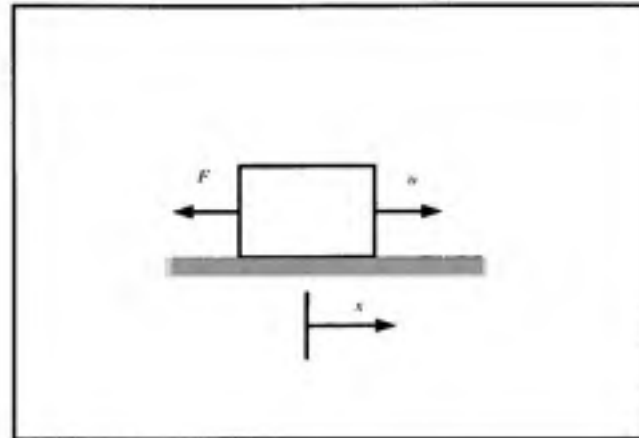


Figure 3.1 Schéma descriptif du système.

3.3 Modèle de frottement GMS

Le modèle de frottement GMS a été introduit par Al-Bender et al. [33, 34]. Il s'appuie sur un modèle générique basé sur un ensemble de phénomènes physiques et une étude expérimentale combinée à une modélisation microscopique des aspérités des surfaces en contact (voir figure 3.2). Le modèle GMS est une formulation simplifiée du modèle générique [35, 36] qui représente la majorité des phénomènes de frottement à savoir l'effet hystérésis de préglissement, l'effet de broutage, le déplacement de préglissement et la variation de la force de décrochage. La particularité de ce modèle par rapport aux autres modèles précédents est qu'il représente beaucoup plus fidèlement l'effet dynamique dans le régime de glissement. Il s'agit de l'hystérésis de glissement. En d'autres termes, ce n'est plus une seule fonction de Stribeck qui traduit le régime de glissement mais plutôt une famille de fonctions qui dépendent des changements de croissance et de décroissance de la vitesse (voir figure 3.3). En fait, plusieurs essais expérimentaux ont prouvé l'existence de ce phénomène d'hystérésis dans le régime de glissement (voir figure 1.12 du chapitre 1).

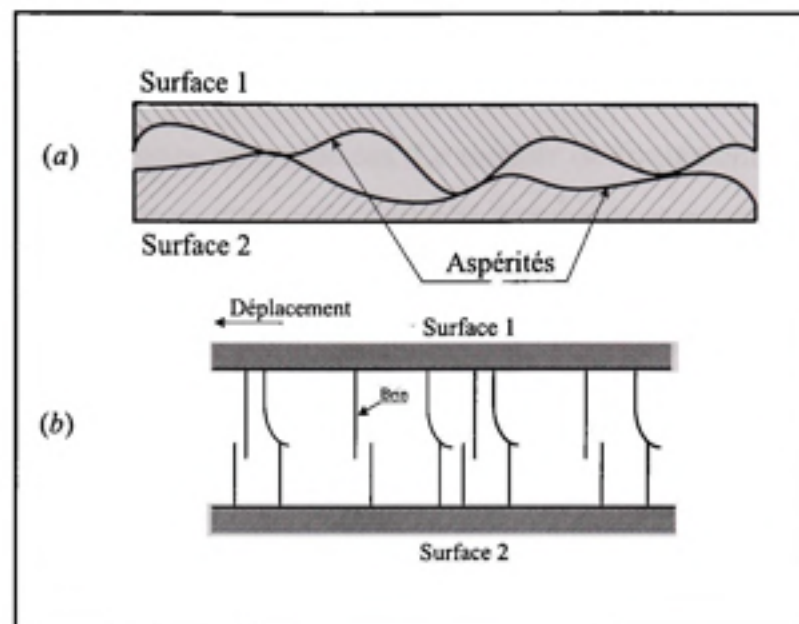


Figure 3.2 (a) Schéma du contact réel entre deux surfaces.
(b) schéma microscopique des surfaces en contact.

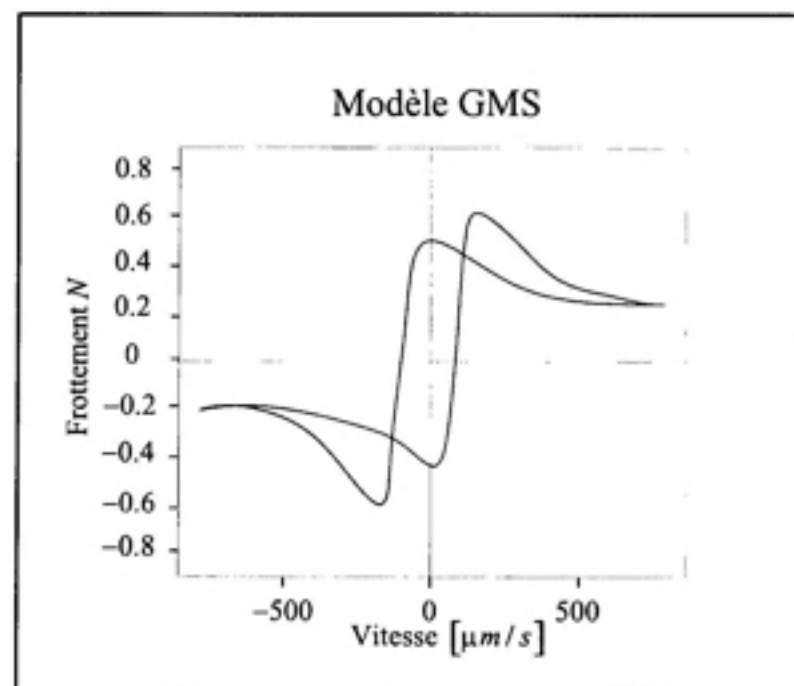


Figure 3.3 Frottement en fonction de la vitesse selon le modèle GMS.

Le modèle GMS est traduit par deux équations : une pour le régime de préglissement et une seconde pour le régime de glissement. Pour assurer la transition entre ces deux équations, des conditions de commutation sont utilisées. Le modèle de frottement est caractérisé par N étages. Chaque étage est formé d'un ressort attaché à un corps et engendre une force de frottement élémentaire F_i . Cette force est la réaction de la surface fixe sur le corps. Si l'étage est en préglissement alors la force de frottement élémentaire correspondante est fonction de la raideur du ressort et si l'étage est en glissement alors la force de frottement correspondante varie selon une dynamique bien définie (voir figure 3.4). Tous les étages ont la même entrée qui est la vitesse.

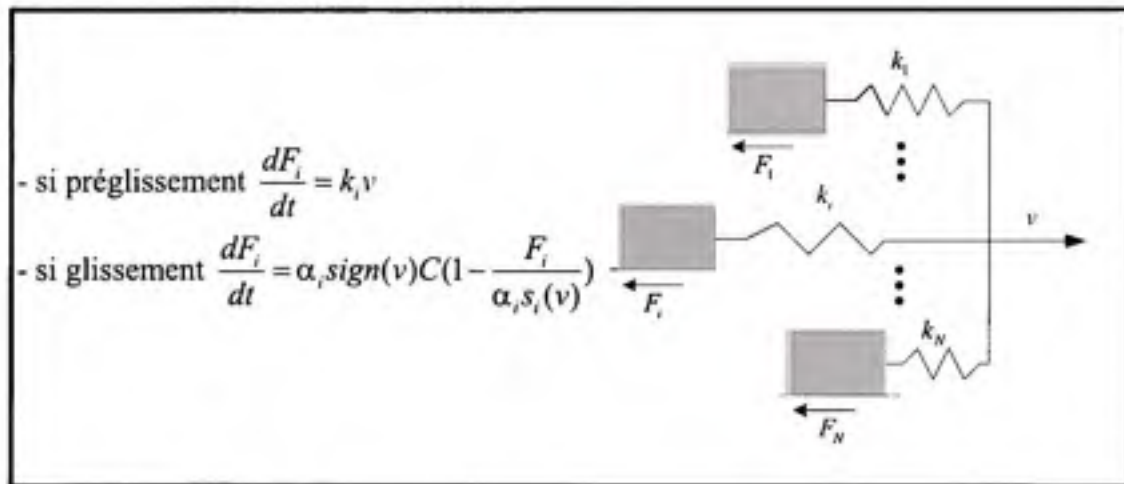


Figure 3.4 Représentation schématique du modèle GMS.

(Tirée de [34])

Sous sa forme mathématique, le modèle de frottement GMS peut s'écrire de la façon suivante :

- Si l'élément est en préglissement, la dynamique de la force de frottement s'écrit

$$\frac{dF_i}{dt} = k_i v \quad (3.1)$$

et l'élément reste en préglissement jusqu'à ce que $F_i = \alpha_i s_i(v)$ (condition de commutation).

- Si l'élément est en glissement, la dynamique de la force de frottement s'écrit

$$\frac{dF_i}{dt} = \text{sign}(v) \alpha_i C \left(1 - \frac{F_i}{\alpha_i s_i(v)} \right) \quad (3.2)$$

et l'élément reste en glissement jusqu'à ce que la vitesse passe par zéro (condition de commutation).

Dans les équations (3.1) et (3.2) k_i est le coefficient d'élasticité, F_i est la force de frottement élémentaire, $sign$ est la fonction signe, C est une constante qui caractérise l'hystérésis du glissement, $s_i(v)$ est la fonction de Stribeck élémentaire et α_i est la pondération pour l'élément i telle que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (3.3)$$

La force de frottement est la résultante de toutes les forces élémentaires

$$F = \sum_{i=1}^N F_i + F_v \quad (3.4)$$

où F_v est le frottement visqueux.

Pour des raisons de simplification et pour diminuer le nombre de paramètres inconnus, les fonctions de Stribeck peuvent être supposées égales [33]; c'est-à-dire :

$$s_i(v) = S(v) \text{ pour tout } i = 1..N. \quad (3.5)$$

En général, la fonction $S(v)$ est définie par [33] :

$$S(v) = sign(v)\sigma_c + sign(v)(\sigma_s - \sigma_c)e^{-\theta_s v^2} \quad (3.6)$$

où σ_c et σ_s sont respectivement les coefficients de frottement de Coulomb et statique tandis que θ_s est le coefficient de Stribeck. Le modèle de frottement GMS présente plusieurs propriétés [35, 36] à savoir :

Propriété 3.1. La force de frottement est une fonction continue par rapport au temps.

Propriété 3.2. La partie non visqueuse du frottement est une quantité bornée par la force de frottement statique. Cette propriété est très importante et elle sera utilisée dans notre approximation plus tard dans ce chapitre.

Propriété 3.3. En mode de glissement, le modèle de frottement GMS, sans la composante visqueuse, est représenté par une équation différentielle de premier ordre. En effet, d'après les équations 3.2 et 3.4 (en supposant que $s_i = S$), la dynamique de la force de frottement F peut être reformulée de la façon suivante :

$$\frac{|S(v)|}{C} \frac{dF}{dt} + F = S(v) \quad (3.7)$$

Cette équation différentielle a une "constante de temps" $\frac{|S(v)|}{C}$ et une excitation $S(v)$. Ainsi, la solution de cette équation qui est la force de frottement sera attirée par l'excitation externe $S(v)$.

Ceci permet d'affirmer que la valeur de la force de frottement durant le régime de glissement vérifie l'inégalité suivante : $\sigma_c < |F| < \sigma_s$ parce que $S(v)$ vérifie la même inégalité ($\sigma_c < |S(v)| < \sigma_s$). De plus, la valeur de force de frottement durant le régime de préglissement est bornée par la fonction de Stribeck $S(v)$ ce qui prouve que la valeur absolue de la force de frottement durant les deux régimes est toujours bornée par la force statique σ_s .

3.4 Observateur de Marino

3.4.1 Introduction

L'observateur de Marino [87, 88, 89, 90] est un observateur adaptatif non linéaire robuste vis-à-vis des perturbations inconnues, à condition quelles soient bornées. L'avantage de cet observateur par rapport aux autres est qu'il garantit la stabilité de la dynamique de l'erreur de prédiction malgré la présence de perturbations bornées. Il assure également la stabilité de l'erreur d'estimation des paramètres inconnus et variants dans le temps dans le cas où la condition de la persistance de l'excitation est vérifiée.

3.4.2 Formulation

La classe des systèmes concernée par l'observateur de Marino est l'ensemble des systèmes non linéaires avec des paramètres inconnus possiblement variants dans le temps. Ces systèmes font l'objet d'une perturbation inconnue, mais elle doit être bornée.

Cette classe de systèmes peut être représentée par l'ensemble des systèmes non linéaires qui peuvent être transformés à l'aide d'une transformation difféomorphe sous la forme suivante [90] :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + \Psi_0(u, y) + \sum_{i=1}^p \Psi_i(u, y) \theta_i \\ y = C_c x \end{cases} \quad (3.8)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}$ et $\theta_i, i = 1, \dots, p$ sont les paramètres inconnus.

Les matrices A_c et C_c admettent une structure bien particulière qui peut être définie comme suit

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Le vecteur $\Psi_0(u, y)$ est parfaitement connu et $\Psi_i(u, y)$ est le régresseur i qui est également supposé connu pour tout $i = 1, \dots, p$.

Si les paramètres sont variants dans le temps et s'il y a une perturbation dans le système, la classe devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + \Psi_0(u, y) + \Psi(u, y) \theta(t) + \Phi(u, y) \omega(t) \\ y = C_c x \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_p(t)]^T$ est le vecteur des paramètres inconnus et possiblement variants dans le temps, $\omega(t)$ exprime toute perturbation bornée ou une variation temporelle des paramètres inconnus et $\Psi(u, y)$ est le vecteur régresseur. Il est supposé que les paramètres sont bornés selon la relation suivante :

$$\sup_{\tau \in [0, \infty)} \|\theta(\tau)\| \leq c_1 \quad (3.11)$$

et que la variation des paramètres est aussi bornée :

$$\sup_{\tau \in [0, \infty)} \left\| \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} \right\| \leq c_2 \quad (3.12)$$

La perturbation est inconnue mais elle est également supposée bornée selon

$$\sup_{\tau \in [0, \infty)} \|\omega(\tau)\| \leq c_3 \quad (3.13)$$

où c_1 , c_2 et c_3 sont des constantes positives.

Pour le système décrit précédemment, l'observateur adaptatif de Marino prend la forme suivante [90] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A_c \hat{x} + \Psi_0(u, y) + \Psi(u, y) \hat{\theta}(t) + K y \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma q(t)(y - C_c \hat{x}) \end{cases} \quad (3.14)$$

où $q(t)$ est une projection définie par :

$$q(t) = \begin{cases} \Psi(u, y)^T & \text{si } \|\hat{\theta}\| < c_1 \\ \Psi(u, y)^T & \text{si } \|\hat{\theta}\| \geq c_1 \text{ et} \\ & (y - C_c \hat{x})\Psi(u, y) \leq 0 \\ \left[I_p - p(\hat{\theta}) \frac{\left[\frac{\partial p(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \right]^T \left[\frac{\partial p(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \right]}{\left\| \frac{\partial p(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \right\|^2} \right] \Psi(u, y)^T & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.15)$$

où

$$p(\hat{\theta}) = \frac{\|\hat{\theta}\|^2 - c_1}{\mu^2 + 2\mu c_1} \quad (3.16)$$

$\mu \in \mathbb{R}^+$ est une constante de conception. Γ et K sont deux matrices définies positives qui représentent les gains de l'observateur.

Remarque 3.1. La projection définie par l'équation (3.15) est utilisée pour garantir que les estimés du vecteur de paramètres inconnus $\hat{\theta}$ soient toujours bornés, selon l'hypothèse (3.11), durant tout le processus d'estimation. Cependant, ce mécanisme de projection n'est pas absolument nécessaire pour assurer la stabilité de l'observateur.

En combinant les relations (3.10) et (3.14), la dynamique de l'erreur de l'observateur peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A_c - KC_c)\hat{x} + \Psi(u, y)\tilde{\theta}(t) + \Phi(y, u)\omega(t) \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma q(t)C_c\hat{x} \end{cases} \quad (3.17)$$

Marino et al. ont montré que l'observateur adaptatif avec la condition de persistance de l'excitation assure la stabilité de l'erreur de prédiction et la stabilité de l'erreur d'estimation des paramètres sous certaines conditions présentées dans le théorème suivant [90] :

Theorème 3.1. Soit la classe de systèmes non linéaires qui peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + \Psi_0(u, y) + \Psi(u, y)\theta(t) + \Phi(u, y)\omega(t) \\ y = C_c x \end{cases} \quad (3.18)$$

telle que

- $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_p(t)]^T$ est le vecteur des paramètres inconnus qui sont supposés bornés et dont la borne est connue.
- $\omega(t) = [\omega_1(t), \dots, \omega_m(t)]^T$ est le vecteur de perturbation externe qui est inconnue mais bornée.
- $\Psi(u, y)$ est le vecteur régresseur qui doit être continue et dérivable de façon continue par rapport au temps avec une dérivée uniformément bornée.

L'observateur de Marino est alors donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_c \hat{x} + \Psi_0(u, y) + \Psi(u, y)\hat{\theta}(t) + K y \\ \dot{\hat{\theta}} = \Gamma q(t)(y - C_c \hat{x}) \end{cases} \quad (3.19)$$

où Γ et K sont les gains de l'observateur et $q(t)$ est une fonction de projection définie par l'équation (3.15). Dans ce contexte, si :

- A_c , $\Psi(u, y)$, $\Psi_0(u, y)$, $\Phi(u, y)$ et C_c sont connues, continues et uniformément bornées;
- il existe T et $k \in \mathbb{R}^+$ telle que la condition de persistante d'excitation :

$$\int_t^{T+t} \Psi(u, y, \tau)^T \Psi(u, y, \tau) d\tau \geq k I_p \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \quad (3.20)$$

est vérifiée, alors les erreurs de prédictions $\hat{x} - x$ et d'estimation $\hat{\theta} - \theta$ sont ultimement bornées; c'est-à-dire que la norme de ces erreurs décroît en fonction du temps jusqu'à ce qu'elle soit inférieure à la borne ultime qui est directement liée à l'amplitude de la perturbation $\omega(t)$.

Preuve : La preuve du théorème est présentée en détail dans [90].

Selon le théorème 3.1, une des conditions suffisantes pour la stabilité de l'observateur de Marino est la continuité du vecteur régresseur $\Psi(u, y)$ et l'assurance que ce vecteur soit dérivable de façon continue par rapport au temps et que sa dérivée soit uniformément bornée. Cette condition doit être satisfaite pour que les valeurs estimées des paramètres inconnus soient bornées.

Une deuxième condition est la persistance de l'excitation. Ceci veut dire que l'excitation doit être persistante (le signal $\Psi(u, y)$ doit être suffisamment riche) pour que les estimations convergent vers des valeurs proches des valeurs réelles des paramètres inconnus. Plus de détails sur la condition de persistance d'excitation sont donnés dans [90].

3.5 Application de l'observateur de Marino pour l'identification du modèle de frottement GMS

3.5.1 Introduction

Dans cette section, la méthodologie suivie pour appliquer l'observateur de Marino afin d'identifier le modèle de frottement GMS sera présentée. En effet, le modèle de frottement sera réécrit sous une autre forme qui respecte les hypothèses de l'observateur de Marino. De plus, puisque le modèle GMS n'est pas linéaire par rapport aux paramètres inconnus, une approximation linéarisante sera proposée, discutée et enfin validée par voie de simulation. Cette approximation, combinée à une linéarisation de la fonction de Stribeck, permettra de rendre le modèle GMS linéaire par rapport à ses paramètres mais perturbé par les erreurs de linéarisation. La robustesse de l'observateur de Marino permettra d'assurer la stabilité de l'estimateur malgré ces perturbations.

3.5.2 Application de l'observateur de Marino

La dynamique du système de la figure 3.1 est donnée par

$$M\dot{v} = u - F \quad (3.21)$$

où M est la masse du corps, \dot{v} est son accélération, u est la force externe exercée sur le corps et F est la force de frottement que nous supposons décrite par le modèle GMS.

Hypothèse 3.1. Le frottement visqueux est supposé négligeable.

Cette hypothèse sera vérifiée lors de la simulation et des expérimentations par l'utilisation de vitesses faibles. L'objectif de cette hypothèse est de ne pas alourdir la procédure d'identification avec un terme qui est linéaire en fonction de la vitesse et donc facile à identifier.

Hypothèse 3.2. Il est supposé que le modèle de frottement GMS est caractérisé par un seul élément. Ceci veut dire que $N = 1$ et $\alpha = \alpha_1 = 1$.

Cette hypothèse est introduite pour simplifier le modèle de frottement et limiter le nombre de paramètres à identifier. De plus, cette hypothèse permet d'utiliser seulement deux fonctions de commutation.

Hypothèse 3.3. Les paramètres du modèle de frottement GMS sont constants et bornés.

Hypothèse 3.4. Le signal de vitesse $v(t)$ est borné.

Dans le cadre de cette thèse, les paramètres du modèle de frottement GMS sont supposés constants. Cependant, l'estimateur pourrait fonctionner lorsque les paramètres varient lentement (voir équation (3.12)) [90].

Grâce à l'hypothèse 3.2, le modèle de frottement, décrit par les relations (3.1) à (3.4), peut être réécrit sous la forme suivante :

– Si le système est en préglissement, la dynamique de la force de frottement est :

$$\frac{dF}{dt} = kv \tag{3.22}$$

jusqu'à ce que $F = S(v)$ (première fonction de commutation).

– Si le système est en glissement, la dynamique de la force de frottement est :

$$\frac{dF}{dt} = \text{sign}(v)C \left(1 - \frac{F}{S(v)} \right) \quad (3.23)$$

jusqu'à ce que la vitesse passe par zéro (deuxième fonction de commutation).

Maintenant, la première étape consiste à réécrire le modèle de frottement GMS sous une forme qui respecte les hypothèses de l'observateur de Marino.

En préglissement :

En régime de préglissement et d'après l'équation (3.22), la dynamique de la force de frottement peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{F} = kv \quad (3.24)$$

En posant $x = F$ et $\theta_{st} = k$, l'équation (3.24) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \Psi_{st}(u, v)\theta_{st} \\ y = C_c x \end{cases} \quad (3.25)$$

où $C_c = 1$ et $\Psi_{st}(u, v) = v$.

Il est à noter que même si Ψ_{st} dépend de u et de v plutôt que de u et de y (voir théorème 3.1), le théorème de Marino reste valide. En effet, la preuve donnée dans [90], est directement fondée sur un lemme qui assume de façon générale que le système est variant. Ce qui permet de considérer Ψ_{st} comme une fonction de u et du temps par l'entremise de la vitesse $v(t)$.

En glissement :

Selon les équations (3.6) et (3.23), la dynamique de la force de frottement, durant le régime de glissement, est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \text{sign}(v)C \left(1 - \frac{F}{S(v)} \right) \\ &= \frac{\text{sign}(v)}{S(v)} C \left(\text{sign}(v)\sigma_c + \text{sign}(v)(\sigma_s - \sigma_c)e^{-\theta_s v^2} - F \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le problème de cette formulation est qu'elle n'est pas linéaire par rapport aux paramètres du modèle alors que selon l'équation (3.10), la formulation doit être linéaire afin d'appliquer l'observateur de Marino.

Donc, pour rendre la formulation linéaire par rapport aux paramètres inconnus, deux approximations sont introduites :

A1 la première approximation consiste à approximer $\frac{sign(v)}{S(v)}$ par $\frac{1}{g_m}$, où g_m est une constante qui représente une valeur approximative de la fonction de Stribeck. Selon l'équation (3.6), il est clair que $g_m \in [\sigma_c \ \sigma_s]$. Cette approximation est justifiée parce que selon l'équation (3.26), la dynamique de la force de frottement est représentée par une équation différentielle de premier ordre avec une "constante de temps" variante $\tau(t) = \frac{S(v)}{sign(v)C}$ où $v \neq 0$ puisque le système est en glissement.

Ainsi, cette "constante de temps" variante vérifie la condition suivante $\tau(t) \in \frac{1}{C}[\sigma_c \ \sigma_s]$. Sa variation est donc faible lorsque $\sigma_s - \sigma_c \ll \sigma_c$. L'erreur de cette approximation peut facilement être calculée en remplaçant $\frac{sign(v)}{S(v)}$ par $\frac{1}{g_m}$ dans l'équation (3.26) et en calculant la différence entre ce résultat et l'équation (3.26) :

$$F_{d1} = C \left[sign(v) - sign(v) \frac{F}{S(v)} - \frac{S(v)}{g_m} + \frac{F}{g_m} \right] \quad (3.27)$$

A2 la deuxième approximation consiste à linéariser l'expression $e^{-\theta_s v^2}$ par rapport à θ_s au voisinage d'une valeur nominale θ_s^N . En effet, en utilisant la série de Taylor pour la fonction $f(\theta_s) = e^{-\theta_s v^2}$ au voisinage de θ_s^N et en considérant les termes d'ordre supérieure ou égale à 2 comme erreur d'approximation, la fonction exponentielle peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} f(\theta_s) = e^{-\theta_s v^2} &= f(\theta_s^N) + \frac{f'(\theta_s^N)}{1!}(\theta_s - \theta_s^N) + F_{d2} \\ &= e^{-\theta_s^N v^2} - v^2 e^{-\theta_s^N v^2}(\theta_s - \theta_s^N) + F_{d2} \\ &= e^{-\theta_s^N v^2} + v^2 e^{-\theta_s^N v^2} \theta_s^N - v^2 e^{-\theta_s^N v^2} \theta_s + F_{d2} \\ &= h_1(u, v) + h_2(u, v) \theta_s + F_{d2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $h_1(u, v) = e^{-\theta_s^N v^2} + v^2 e^{-\theta_s^N v^2} \theta_s^N$ et $h_2(u, v) = -v^2 e^{-\theta_s^N v^2}$ sont deux quantités parfaitement connues et F_{d2} est l'erreur due à la linéarisation.

La linéarisation de la fonction exponentielle décrite par l'approximation **A2** a déjà été introduite dans la littérature [48, 49] afin d'estimer les paramètres du modèle de Stribeck. Cependant, l'approximation **A1** n'a, à notre connaissance, jamais été proposée auparavant. À la fin de ce chapitre, des simulations du modèle de frottement GMS ainsi que la validation de l'estimateur avec cette approximation vont montrer la qualité de cette hypothèse simplificatrice.

Propriété 3.4. L'erreur d'approximation F_{d1} est bornée parce que la force de frottement est bornée (Propriété 3.2) et la fonction de Stribeck $S(v)$ est également bornée. En effet, l'erreur décrite par l'équation 3.27 est bornée lorsque F est bornée.

Propriété 3.5. L'erreur de linéarisation F_{d2} est bornée parce que les paramètres du modèle et la vitesse sont supposés bornés.

L'application des approximations **A1** et **A2** au modèle de glissement décrit par l'équation (3.26) transforme le système sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{1}{g_m} C \left(\text{sign}(v) \sigma_c + \text{sign}(v) (\sigma_s - \sigma_c) (h_1(u, v) + h_2(u, v) \theta_s + F_{d2}) - F \right) + F_{d1} \\ &= -F \frac{C}{g_m} + \text{sign}(v) \frac{C \sigma_c}{g_m} + \text{sign}(v) h_1(u, v) \frac{C \sigma}{g_m} + \text{sign}(v) h_2(u, v) \frac{C \theta_s}{g_m} + F_D \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $\sigma = \sigma_s - \sigma_c$ et $F_D = F_{d2} \frac{C \sigma}{g_m} \text{sign}(v) + F_{d1}$ est l'erreur d'approximation causée par **A1** et **A2**.

D'après l'équation (3.29) et grâce aux deux approximations proposées, la dynamique de la force de frottement durant le régime de glissement est maintenant linéaire par rapport aux paramètres inconnus. Ces deux approximations ont cependant introduit une perturbation bornée

dans la formulation. Selon le théorème 3.1, si la condition de persistance de l'excitation est vérifiée, cette perturbation ne rendra pas l'estimateur instable mais pondérera l'amplitude de l'erreur d'estimation en régime permanent.

À partir de l'équation (3.29), en posant

$$\theta_{st} = \left[\frac{C}{g_m} \quad \frac{C\sigma_c}{g_m} \quad \frac{C\sigma}{g_m} \quad \frac{C\sigma\theta_s}{g_m} \right]^T \quad (3.30)$$

$$\Psi_{st}(u, v) = [-F, \text{sign}(v), \text{sign}(v)h_1(u, v), \text{sign}(v)h_2(u, v)] \quad (3.31)$$

ainsi que $x = F$, le modèle du frottement en glissement peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \Psi_{st}(u, v)\theta_{st} + F_D \\ y = C_c x \end{cases} \quad (3.32)$$

où $C_c = 1$

Les formulations du modèle en préglissement (3.25) et en glissement (3.32) doivent maintenant être combinées. Pour ce faire, la variable de commutation $Q(t)$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} Q(t) = 0 & \text{si le système est en glissement.} \\ Q(t) = 1 & \text{si le système est en préglissement.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Ainsi, selon les équations (3.25), (3.32) et (3.33), la formulation complète de la dynamique du système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi(u, v)\theta + \omega(t) \\ y = C_c x \end{cases} \quad (3.34)$$

où $\theta = [\theta_{st}^T, \theta_{st}^T]^T$, $\psi(u, v) = S_{12}(t) = (1 - Q(t))S_1(t) + Q(t)S_2(t)$ et $\omega(t) = (1 - Q(t))\omega_s(t)$

avec $S_1(t) = [\psi_{st}(u, v) \ 0]$, $S_2(t) = [0 \ \psi_{st}(u, v)]$ et $\omega_s(t) = F_D$.

De cette façon, grâce à la variable de commutation $Q(t)$, les deux régimes de frottement ont été combinés dans une seule équation. Cette dernière respecte la forme suggérée par Marino dans laquelle, on a $A_c = 0$ et $\Psi_0(u, v) = 0$. Toutefois pour appliquer l'observateur de Marino,

il faut respecter une condition supplémentaire : la continuité du vecteur régresseur $\psi(u, v)$ de l'équation (3.34) et l'assurance qu'il soit dérivable de façon continue et que sa dérivée soit bornée. Or, selon la construction du vecteur régresseur (équation (3.31)), la fonction $\Psi_{sl}(u, v)$ n'est pas continue à cause de l'opérateur signe. Qui plus est, même si la propriété 3.1 assure la continuité du modèle lors des commutations des régimes de glissement et de préglissement, les approximations **A1** et **A2** peuvent ajouter des discontinuités lors des commutations.

Pour palier à ce problème, un filtre est appliquée de part et d'autre de l'égalité de l'équation (3.34) qui décrit le modèle. Ainsi, l'égalité sera maintenue, mais les discontinuités disparaîtront grâce au filtre. Le filtre garantira de surcroît que le régresseur sera dérivable de façon continue et que sa dérivée sera bornée. Cette technique est couramment utilisée lors de l'identification des systèmes. Elle est utilisée, en particulier, pour éviter les mesures des dérivés des signaux [91]. Pour annuler toute dépendance du modèle filtré aux paramètres filtrés, il est également nécessaire de respecter l'hypothèse 3.3 (les paramètres sont supposés constants).

Pour assurer la condition de continuité du régresseur filtré et de sa dérivée, le filtre choisi est une cascade de deux passe-bas de premier ordre avec des fréquences de coupure ω_{c1} et ω_{c2} . La fonction de transfert dans le domaine de Laplace de chacun de ces filtres est donnée par :

$$H_i(s) = \frac{\omega_{ci}}{s + \omega_{ci}} \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (3.35)$$

En appliquant ce filtre à deux étages, le modèle de frottement prend la forme filtrée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_F &= \psi_F(u, v)\theta + \omega_F(t) \\ y_F &= C_c x_F \end{cases} \quad (3.36)$$

où l'indice F désigne que les signaux sont filtrés.

Il est important de noter que, d'une façon générale, lorsqu'on filtre un signal $u(t)$ à l'aide d'une cascade de deux filtres, le signal filtré s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_f(t) &= h_1(t) * u(t) && \text{premier étage} \\ u_F(t) &= h_2(t) * u_f(t) && \text{deuxième étage} \end{aligned} \quad (3.37)$$

où $h_1(t)$ est la réponse impulsionnelle du premier étage du filtre, $h_2(t)$ est la réponse impulsionnelle de son deuxième étage et $*$ représente la convolution temporelle. Ainsi, dans le système d'équations (3.36), chaque signal filtré respecte l'équation (3.37).

Propriété 3.6. Selon les propriétés 3.5 et 3.4, la perturbation $\omega_F(t)$ est bornée parce qu'elle est une somme de deux quantités bornées filtrées.

Grâce à cette propriété et à l'approche de filtrage, toutes les conditions d'application de l'observateur de Marino sont vérifiées lorsqu'on considère que les signaux sont suffisamment riche pour respecter la condition de persistance de l'excitation (équation (3.20)). Ainsi, il est possible de construire l'observateur de Marino comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= -K C_c \hat{x} + \psi_F(u, v) \hat{\theta} + K y_F \\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma \psi_F(u, v)^T (y_F - C_c \hat{x}) \end{cases} \quad (3.38)$$

où K et Γ sont les gains de l'observateur. L'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation est alors donnée par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= -K C_c \tilde{x} + \psi_F(u, y) \tilde{\theta} - \omega_F(t) \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\Gamma \psi_F(u, y)^T C_c \tilde{x} \end{cases} \quad (3.39)$$

où $\tilde{x} = \hat{x} - x_F$ et $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Il est très important de noter que la stabilité de cette équation est étudiée par Marino [90] et la convergence des paramètres estimés est prouvée avec la condition de persistance d'excitation. Ceci, met en valeur l'approche proposée dans cette thèse par rapport aux autres méthodes d'identification proposées dans la littérature. En effet, ces méthodes utilisent généralement des approches hors ligne qui ne nécessitent pas nécessairement d'étude de stabilité puisqu'ils sont fondées sur des techniques d'optimisation.

3.6 Étude des fonctions de commutation

3.6.1 Fonction de commutation idéale

Le modèle de frottement GMS est composé de deux régimes dont chacun est caractérisé par une équation dynamique de la force de frottement. Ces deux régimes sont le préglissement et le glissement. Les fonctions de commutation assurent la transition d'un régime à l'autre selon des conditions précises. En effet, selon les équations (3.22) et (3.23), le passage du régime de préglissement au régime de glissement est assuré par une condition d'égalité entre la valeur de la force de frottement, à l'instant de transition, et celle de la fonction de Stribeck au même instant, c'est-à-dire lorsque

$$F(t) = k \int_{t_i}^t v dt + F(t_i) = S(v) \quad (3.40)$$

où t_i est l'instant de commutation du régime de glissement au régime de préglissement précédent; ce qui représente le temps correspondant au dernier passage de la vitesse par zéros.

Quant à la transition du régime de glissement au régime de préglissement, elle est dictée par la condition de passage de la vitesse par zéro.

La fonction de commutation idéale traduit ces conditions de transition entre les deux régimes. Sur le plan pratique, la transition du régime de glissement au régime de préglissement est facile à détecter parce que la vitesse est une variable mesurable alors que la transition du régime de préglissement au régime de glissement pose un problème parce que la condition $F = S(v)$ n'est pas entièrement connue a priori. En effet, la fonction de Stribeck $S(v)$ dépend des paramètres à estimer (voir équation (3.6)).

Ainsi, la fonction de commutation idéale ne peut pas être mise en oeuvre pour la procédure d'identification.

3.6.2 Fonction de commutation approximée

Pour palier à ce problème, nous proposons une approximation de la condition de commutation entre les régimes de préglissement et de glissement. Cette condition est construite en trois étapes : la première étape consiste à trouver une valeur à priori \bar{k} du coefficient de raideur k . Elle peut être déterminée par un essai en régime de préglissement [31]. En effet, pour déterminer le coefficient du raideur k , un essai à très faible vitesse peut être fait afin de tracer la caractéristique du frottement en fonction du déplacement (courbe d'hystérésis en régime de préglissement). La mesure de la pente autour de zéro donne la valeur du coefficient de raideur en régime de préglissement.

La deuxième étape consiste à trouver une valeur à priori $\bar{\sigma}_c$ du coefficient de frottement de Coulomb. Cette valeur peut être déterminée par une identification hors ligne spécifique [40].

La dernière étape consiste à approximer la fonction de commutation (3.40) par l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{t_i}^t \bar{k} v dt + \bar{\sigma}_c \text{sign}(v(t_i^-)) \right| > \bar{\sigma}_c^+ \quad (3.41)$$

où t_i est l'instant de commutation au régime de préglissement précédant, c'est-à-dire lorsque la vitesse est passée par la valeur zéro alors que t_i^- est un instant qui précède l'instant t_i de façon infinitésimale .

Le paramètre $\bar{\sigma}_c^+$ est défini par :

$$\bar{\sigma}_c^+ = \bar{\sigma}_c + \varepsilon \quad (3.42)$$

où ε est une constante positive infinitésimale.

La quantité $\bar{\sigma}_c \text{sign}(v(t_i^-))$ est introduite pour approximer la condition initiale $F(t_i)$ tandis que la quantité $\bar{\sigma}_c^+$ est introduite pour approximer la fonction de Stribeck $S(v)$. La quantité ε est pour sa part introduite pour éviter que la condition de commutation approximative soit satisfaite

dès le début de l'intégration lors de la mise en oeuvre. En effet, à l'instant t_i , la condition devient $\sigma_c > \sigma_c$. Ce qui pourrait être artificiellement vérifiée à cause de la numérisation.

3.6.3 Fonction de commutation estimée

La fonction proposée dans le paragraphe précédent permet d'approximer la commutation idéale du régime de préglissement au régime de glissement durant toute la procédure d'estimation. Les approximations utilisées ne sont cependant pas d'une grande précision puisqu'elles sont fondées sur une connaissance à priori mais simpliste du frottement. Dans ce paragraphe, une deuxième fonction est proposée pour approximer de façon plus juste la commutation à partir de l'ensemble des paramètres estimés. Cette condition n'est pas basée directement sur les paramètres estimés du modèle mais plutôt sur l'estimation du vecteur theta des paramètres reformulés (équations (3.25), (3.30) et (3.32)). Pour ce faire, la condition de commutation (3.40) est d'abord reformulée en fonction du modèle de Stribeck linéarisé selon l'approximation **A2** :

$$\left| \hat{F} \right| > \left| \hat{\sigma}_c \text{sign}(v) + \hat{\sigma} \text{sign}(v) h_1(v) - \hat{\sigma} \hat{\theta}_s \text{sign}(v) h_2(v) \right| \quad (3.43)$$

où $h_1(v)$ et $h_2(v)$ sont les deux quantités introduites dans l'équation (3.28).

Pour assurer la compatibilité avec le vecteur des paramètres θ , la condition (3.43) est multipliée de part et d'autre de l'inégalité par la quantité positive $\frac{\hat{C}}{g_m}$.

$$\left| \frac{\hat{C}}{g_m} \hat{F} \right| > \left| \frac{\hat{C}}{g_m} \hat{\sigma}_c \text{sign}(v) + \frac{\hat{C}}{g_m} \hat{\sigma} \text{sign}(v) h_1(v) - \frac{\hat{C}}{g_m} \hat{\sigma} \hat{\theta}_s \text{sign}(v) h_2(v) \right| \quad (3.44)$$

Ainsi, l'équation (3.44) est équivalente à l'équation suivante :

$$\left| \hat{\theta}_1 \hat{F} \right| > \left| \hat{\theta}_2 \text{sign}(v) + \hat{\theta}_3 \text{sign}(v) h_1(v) - \hat{\theta}_4 \text{sign}(v) h_2(v) \right| \quad (3.45)$$

qui est uniquement fonction des éléments du vecteur $\hat{\theta}$.

3.7 Simulations

Dans cette section, les résultats de simulation pour l'identification du modèle de frottement GMS en se basant sur la mesure de la force de frottement sont présentés.

Les résultats de la simulation seront présentés en quatre parties : la première partie sera consacrée à la validation de l'approximation A1 proposée à la section 3.5. La deuxième partie traitera de l'identification du modèle de frottement GMS en considérant la fonction de commutation idéale. Quant à la troisième partie, elle traitera de l'identification du même modèle de frottement avec la fonction de commutation approximée proposée à la section 3.6. Une étude comparative sera finalement présentée en regard de la force estimée à partir du vecteur $\hat{\theta}$ et des approximations proposées du mécanisme de commutation. La quatrième partie est consacrée à la validation globale de l'approche.

3.7.1 Validation de l'approximation

Dans cette section, une validation sommaire de l'approximation A1 proposée à la section 3.5 de la page 67 est présentée. Pour ce faire, le système de la figure 3.1 est d'abord simulé avec le frottement réel en utilisant les équations exactes (3.1) et (3.2) puis avec le frottement approximé (basé sur l'approximation A1) (voir figure 3.5). Le signal de vitesse est donné par : $v(t) = 0.1\sin(2\pi t)$. Le tableau 3.1 présente l'ensemble des paramètres utilisés pour cette validation.

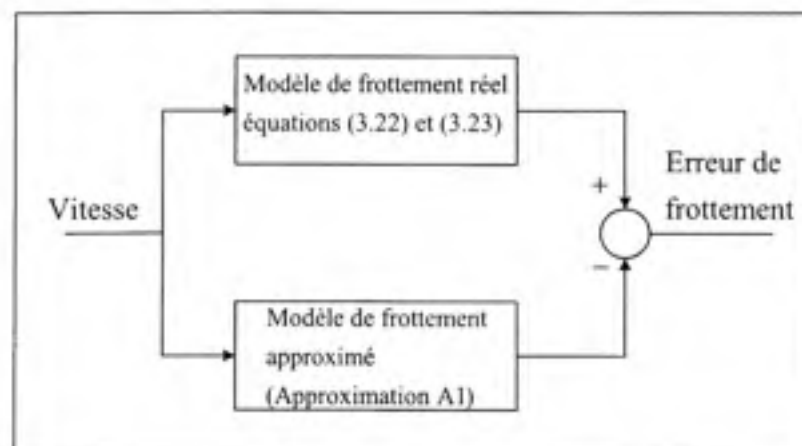


Figure 3.5 Schéma de la procédure de la validation A1.

Tableau 3.1 Valeurs des paramètres pour la validation

Paramètres	Valeurs	Unités
σ_c	10	N
σ_s	15	N
C	24	N/s
θ_s	10^4	s^2/m^2
M	1	Kg
k	5×10^5	N/m
g_m	10	N

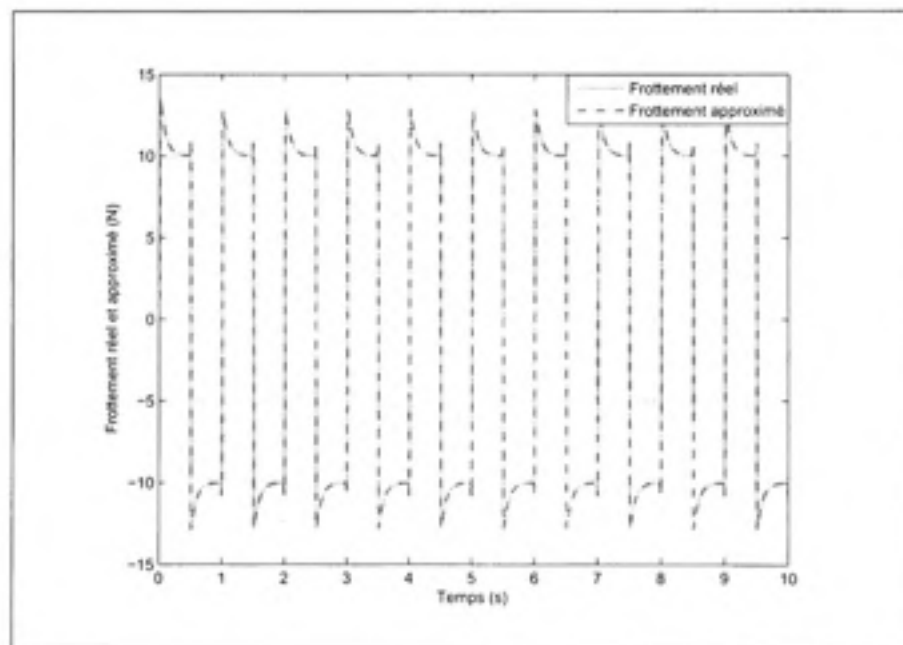


Figure 3.6 Force de frottement réelle et approximée.

La figure 3.6 présente le frottement réel tandis que la figure 3.8 présente l'erreur entre les forces de frottement réelle et approximée. L'amplitude de l'erreur due à l'approximation ne dépasse pas $0.02N$. Cette erreur est de l'ordre de 0.2% de l'amplitude du frottement.

En terme d'erreur, le tableau 3.2 présente les valeurs RMS des erreurs de frottement entre le frottement réel et le frottement approximé. Ces erreurs sont calculées selon les valeurs de g_m

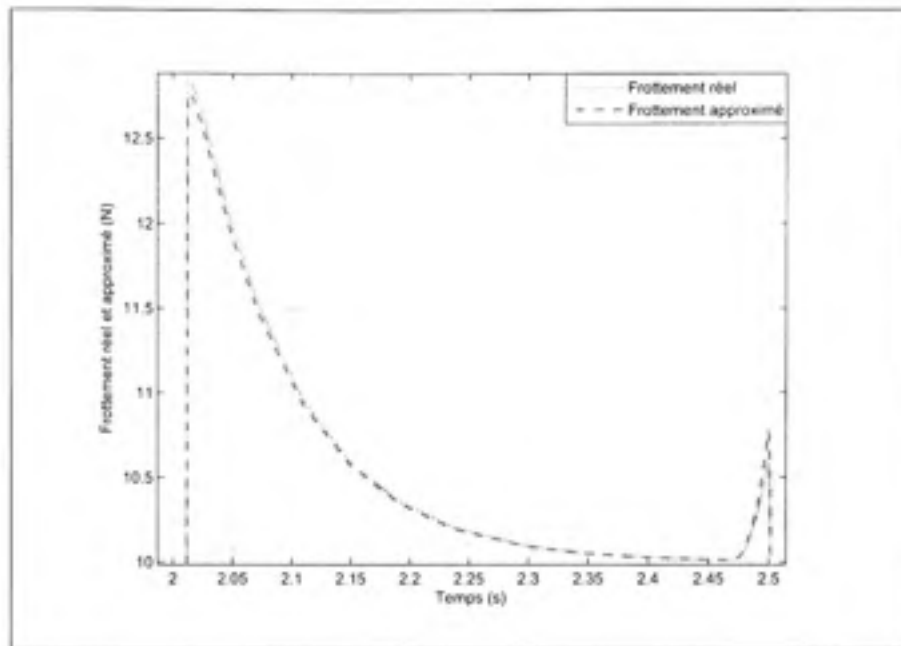


Figure 3.7 Force de frottement réelle et approximée (Agrandissement) .

($\sigma_c \leq g_m \leq \sigma_s$). Ainsi, D'après ce tableau, les erreurs RMS sont quasi identiques quel que soit la valeur de g_m . La valeur de g_m utilisée pour approximer la fonction de Stribeck n'engendre pas un grand écart entre la force de frottement exacte basée sur le modèle réel et le frottement approximé basée sur l'approximation **A1**.

Ainsi, selon ces résultats, l'approximation proposée engendre une erreur d'amplitude très faible comparativement à celle de la force de frottement indépendamment de la valeur de g_m . Cette validation sommaire sera confirmée par la simulation de l'estimateur présentée à la section suivante.

3.7.2 Estimateur à l'aide de la fonction de commutation idéale

La simulation de cette partie est basée sur le système de l'équation (3.21). Les données numériques sont présentées dans les tableaux 3.3 et 3.4. Le signal d'excitation est utilisé de telle manière à imposer un comportement de la vitesse sous la forme d'une modulation d'amplitude d'un signal sinusoïdal décrit par l'équation suivante : $v = 0.01 \sin(0.2\pi t + 0.025) \sin(2\pi t)$ (voir figure 3.9).

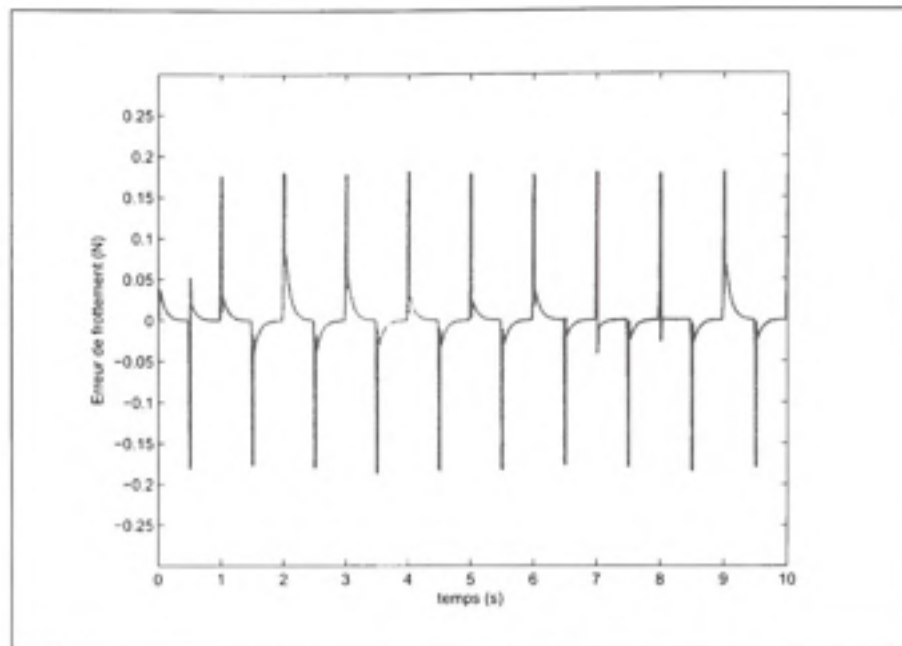


Figure 3.8 Erreur de frottement.

Tableau 3.2 Effet de la valeur de g_m sur l'approximation de frottement

Valeur de g_m	Erreur RMS
$g_m = \sigma_c$	0.0433
$g_m = 1.1\sigma_c$	0.0361
$g_m = 1.2\sigma_c$	0.0336
$g_m = 1.3\sigma_c$	0.0349
$g_m = 1.4\sigma_c$	0.0379
$g_m = 1.5\sigma_c = \sigma_s$	0.0421

Cette modulation est introduite afin de favoriser le respect de la condition de la persistante d'excitation permettant ainsi, une convergence des paramètres estimés.

La figure 3.10 représente le schéma de la réalisation de cette simulation.

Les valeurs numériques utilisées pour les simulations sont des valeurs tirées de la littérature [35, 25]. Pour les gains de l'observateur, ils ont été choisis par essai-erreur. Les gains trouvés

sont les suivants :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 8 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{14} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

et

$$K = (10^6) \quad (3.47)$$

Ces gains sont élevés pour la simple raison que les signaux de l'observateur sont très faibles.

On rappelle que dans cette section la fonction de commutation qui assure la transition du régime de préglissement au régime de glissement est celle décrite par l'équation (3.40). Elle n'est donc pas réalisable puisqu'elle nécessite la connaissance à priori des paramètres du modèle. Qui plus est, même si l'estimateur est formulé à partir du modèle approximatif et filtré présenté à la section 3.5, la simulation du frottement réel s'appuie, quant à elle, sur le modèle GMS sans aucune approximation. Cette simulation exacte servira à comparer et à valider les résultats de l'estimateur.

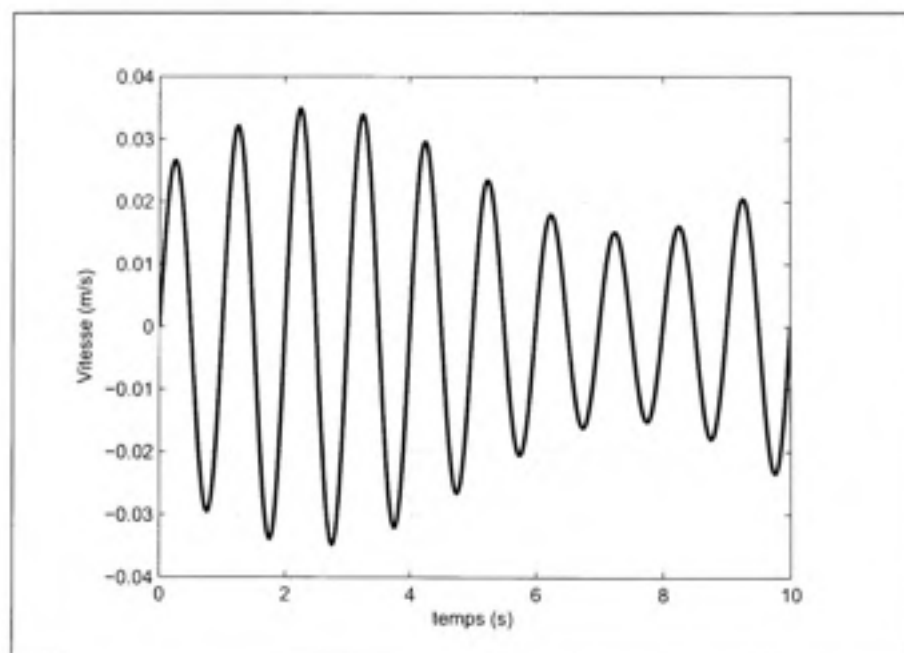


Figure 3.9 Signal d'excitation (vitesse).

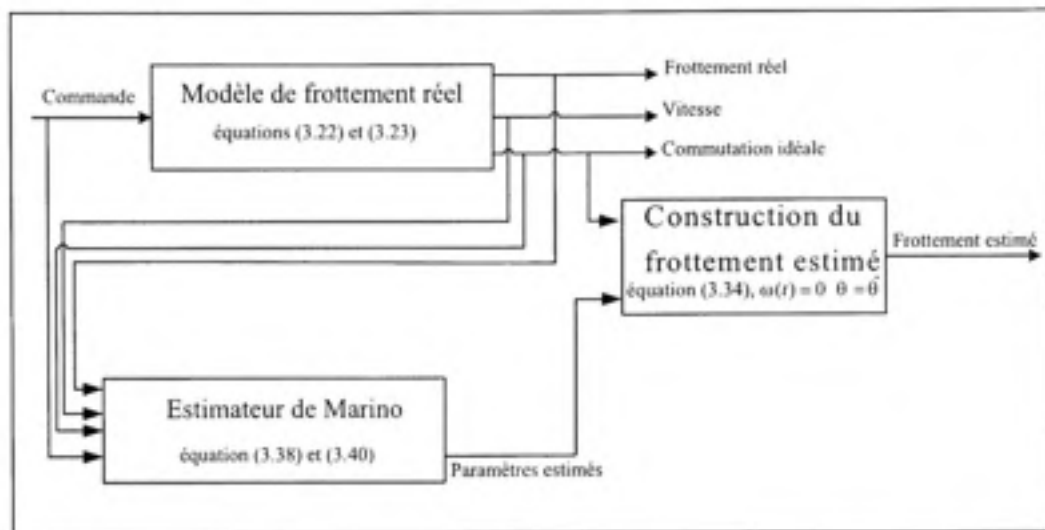


Figure 3.10 Schéma de simulation de l'observateur avec une fonction de commutation idéale.

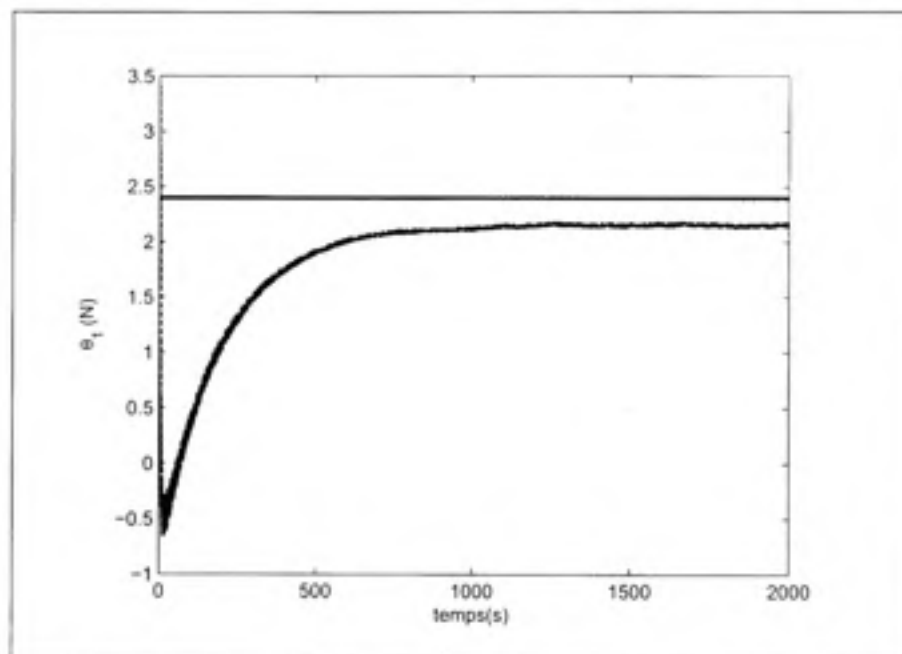
Tableau 3.3 Valeurs des paramètres de simulation

Paramètres	Valeurs	Unités
σ_c	10	N
σ_s	15	N
C	24	N/s
θ_s	10^4	s^2/m^2
M	1	Kg
k	5×10^5	N/m
ω_{c1}	10	rad/s
ω_{c2}	100	rad/s

Les figures 3.11, 3.12, 3.13 et 3.14 présentent les valeurs réelles et estimées des paramètres du régime de glissement. D'après ces figures, les valeurs estimées convergent vers des valeurs proches des vraies valeurs. En effet, à cause des approximations **A1** et **A2** introduites au régime de glissement pour rendre la formulation linéaire par rapport aux paramètres inconnus, l'estimation des paramètres est basée sur un modèle approximé du modèle réel. Ceci explique les erreurs d'estimations non nulles.

Tableau 3.4 Valeurs des paramètres à estimer

Paramètres	Valeurs réelles	Valeurs initiales	Unités
θ_1	2.4	1.2	s^{-1}
θ_2	24	12	N/s
θ_3	12	6	N/s
θ_4	12×10^4	9×10^4	Ns/m^2
θ_5	5×10^5	2.5×10^5	N/m

Figure 3.11 Valeurs réelle et estimée de θ_1 .

Selon l'équation (3.32), les approximations introduites pour la formulation du régime de glissement sont à l'origine des perturbations ajoutées au modèle de frottement et selon Marino et al. [90] (voir théorème 3.1), si le système présente des perturbations bornées alors les erreurs d'estimations ne sont pas nulles, mais convergent uniformément dans une boule centrée à l'origine et dont le rayon dépend des bornes de la perturbation.

En ce qui concerne la valeur estimée du paramètre du régime de préglissement (θ_5), elle est présentée à la figure 3.15. Selon cette figure, on remarque que la valeur estimée est très proche de la vraie valeur mais qu'elle n'est pas exactement identique. En effet, même si le modèle de pré-

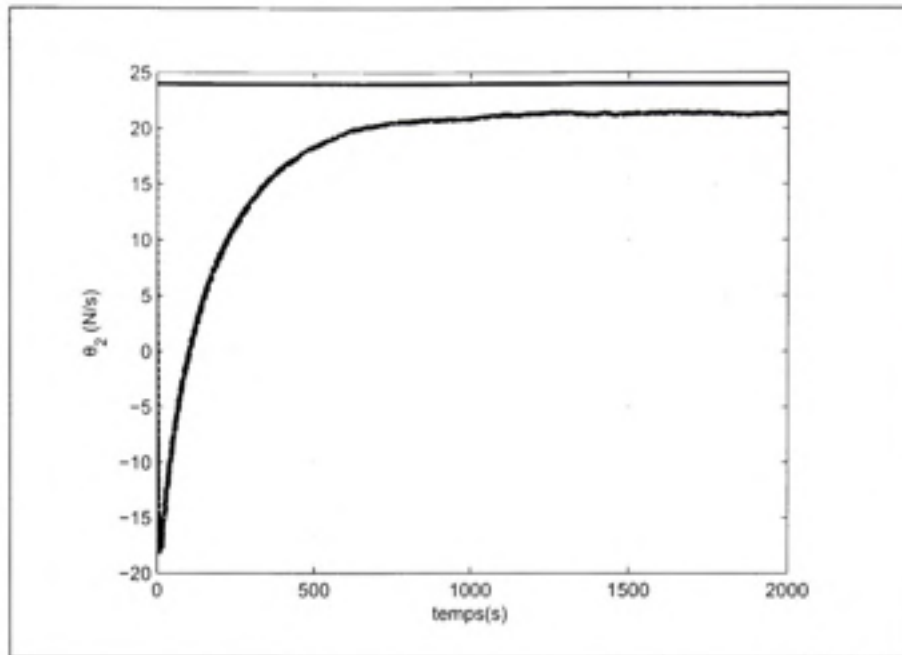


Figure 3.12 Valeurs réelle et estimée de θ_2 .

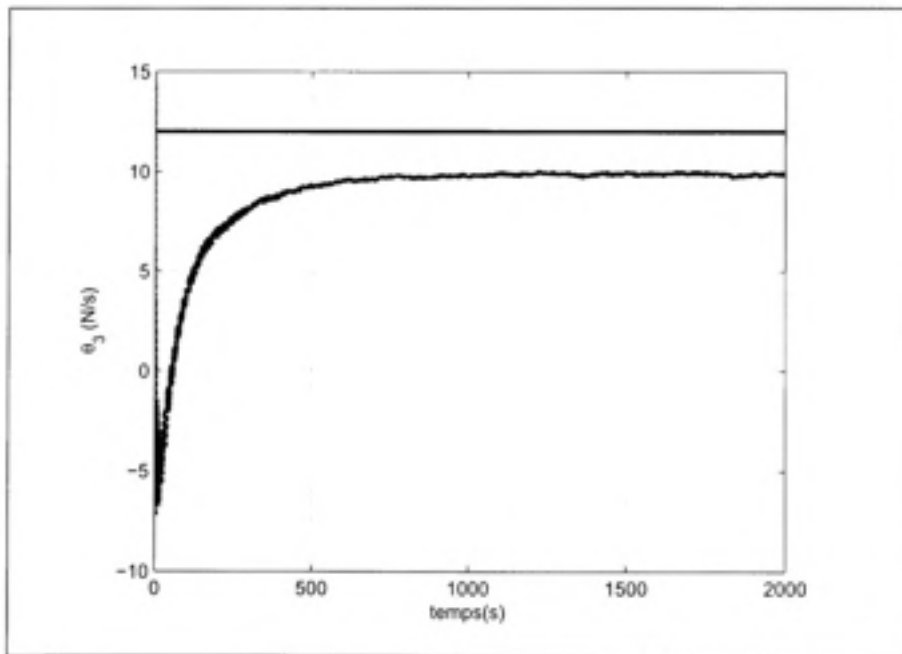


Figure 3.13 Valeurs réelle et estimée de θ_3 .

glissement est linéaire par rapport au paramètre inconnu k et que par conséquent l'estimateur est basé sur un modèle exact, la perturbation du régime de glissement a un effet dynamique sur l'estimateur qui se répercute non seulement sur l'instant présent, mais aussi dans le futur lorsqu'il y a commutation au régime de préglissement. L'estimateur en régime de préglissement est donc affecté par la perturbation du régime de glissement.

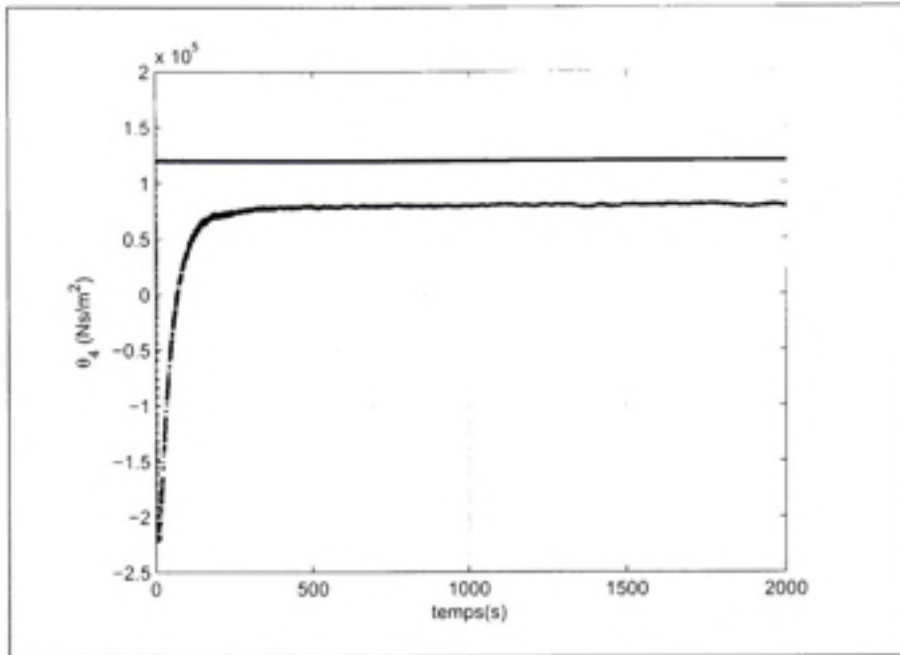


Figure 3.14 Valeurs réelle et estimée de θ_4 .

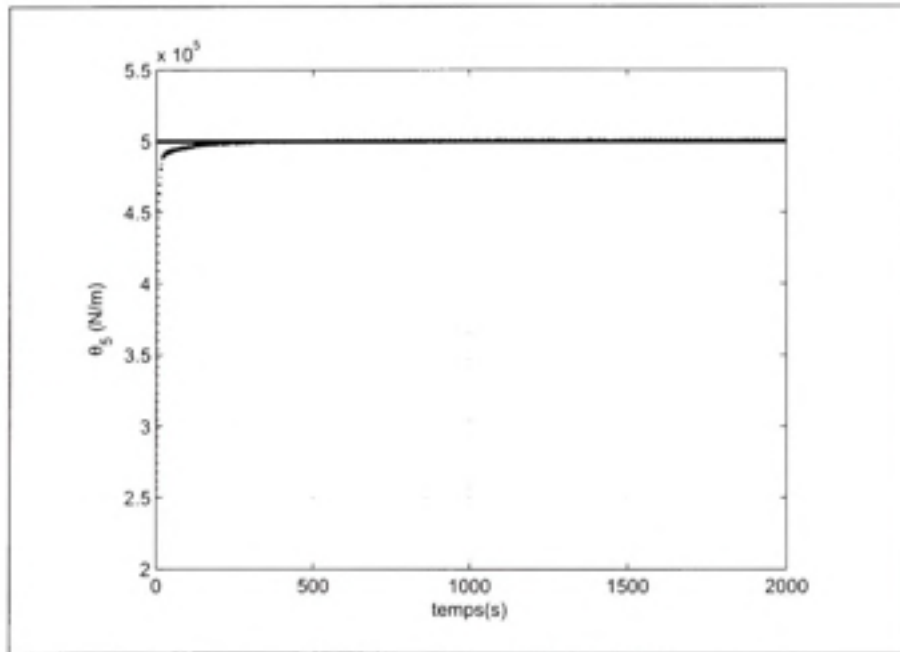


Figure 3.15 Valeurs réelle et estimée de θ_5 .

La figure 3.16 représente le frottement réel et le frottement estimé (calculé à partir des paramètres estimés) alors que la figure 3.17 représente l'erreur de prédiction qui est la différence entre le frottement réel et le frottement estimé. On remarque, selon ces figures, que malgré que l'estimateur est basé sur un modèle de glissement approximé (equations (3.31) et (3.32)),

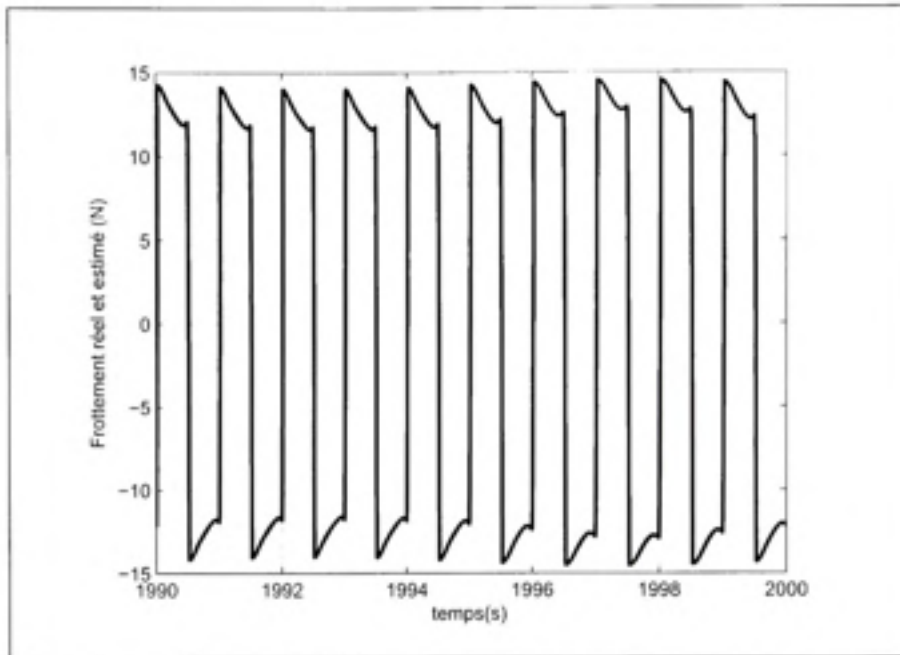


Figure 3.16 Courbes du frottement réel (ligne pleine) et du frottement estimé (ligne en pointillé).

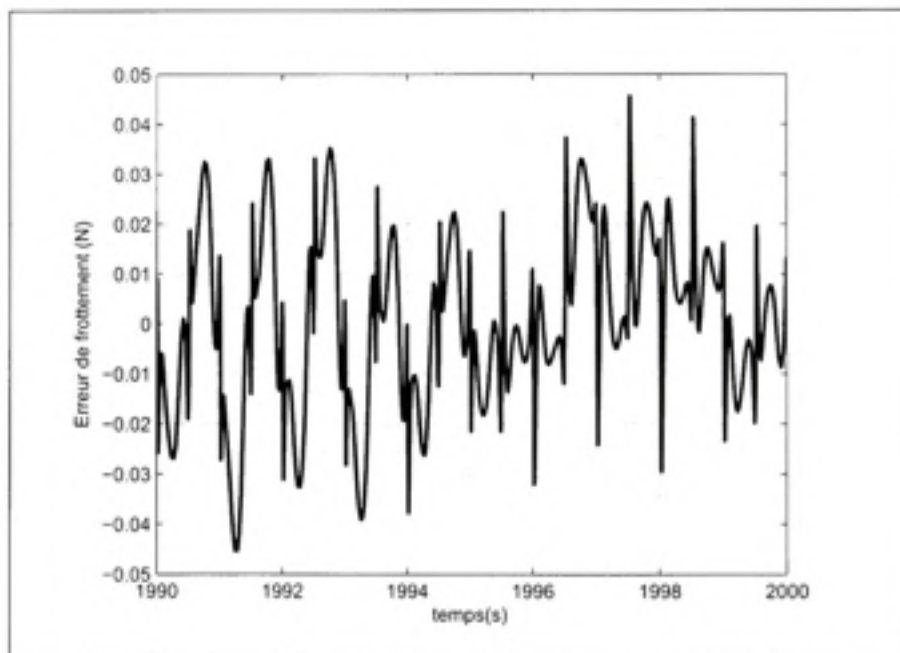


Figure 3.17 Erreur d'estimation du frottement.

l'erreur d'estimation du frottement est très proche de zéro. En effet, cette erreur ne dépasse pas 0.04 N.

Il est à noter que la force de frottement estimée est calculée à partir des valeurs estimées des paramètres et que l'observateur de Marino est basé sur un modèle approximé alors que le frottement réel est calculé à partir du modèle exact.

On peut dire que l'estimateur de Marino, en présence de perturbation bornée, adapte les paramètres estimés de façon à réduire l'erreur de prédiction.

3.7.3 Estimateur à partir de la fonction de commutation approximée

Dans cette section, les résultats de simulation de l'identification des paramètres du modèle de frottement seront présentés. Contrairement à la section précédente, la fonction de commutation est maintenant approximée selon la condition simplifiée de la section 3.6.2 (équation (3.41)). Pour cette approximation, il est cependant nécessaire d'avoir une connaissance à priori des paramètres k et σ_c . Ces paramètres sont directement tirés du tableau 3.3.

Ainsi, dans ce qui suit, les résultats de simulation seront présentés et l'effet de la commutation approximée sur les performances de l'estimateur sera étudié.

La procédure de la réalisation de cette simulation est présentée sur la figure 3.18.

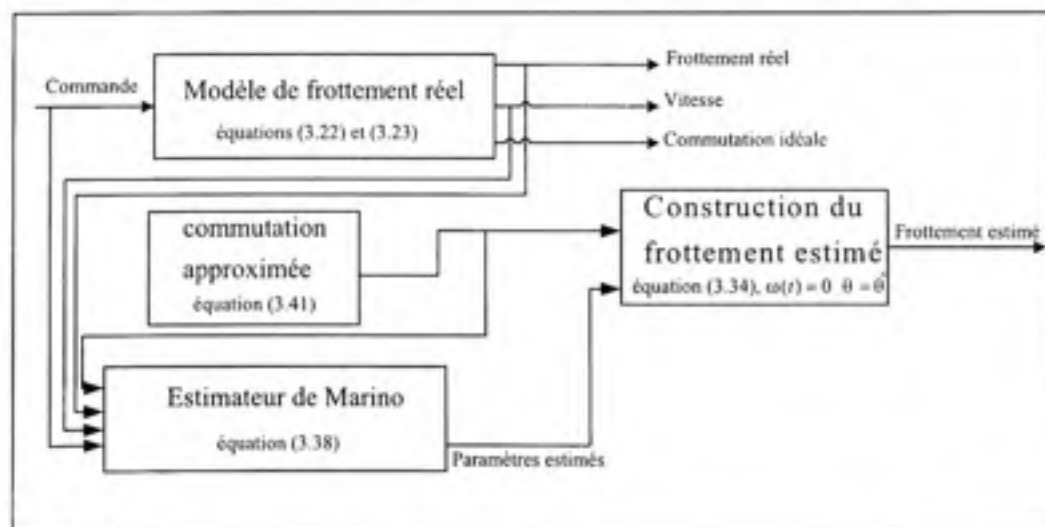


Figure 3.18 Schéma de simulation de l'observateur avec une fonction de commutation approximée.

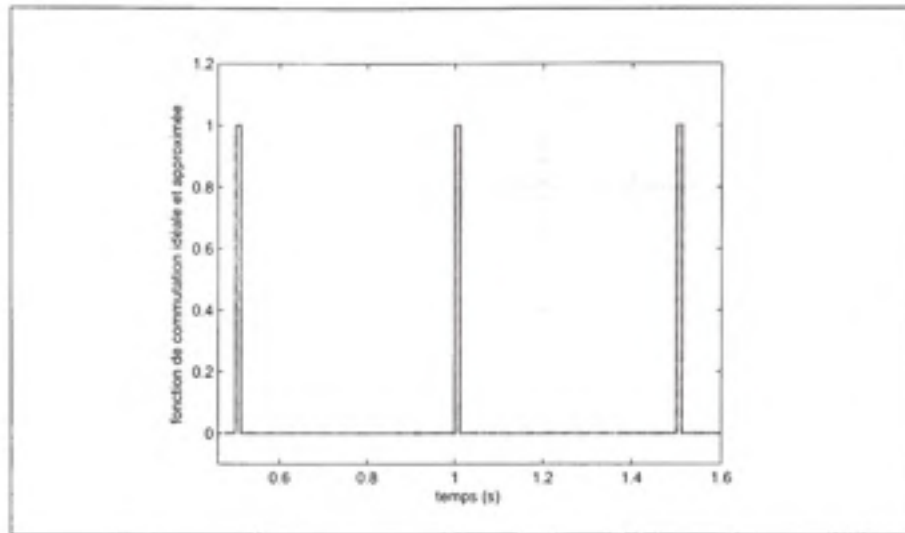


Figure 3.19 Fonctions de commutation idéale et approximée.

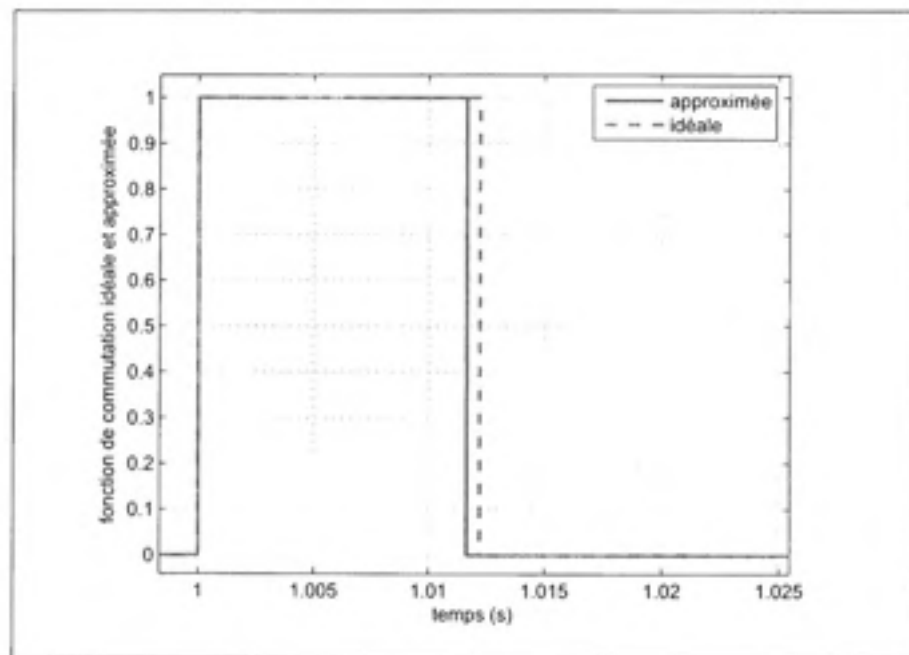


Figure 3.20 Fonctions de commutation idéale et approximée (agrandissement).

Les deux courbes (Figures 3.19 et 3.20) présentent les fonctions de commutation idéale (équation (3.40)) et approximée (équation (3.41)). Selon ces deux courbes, les deux fonctions de commutation se superposent à l'instant de transition du régime de glissement au régime de préglissement qui est caractérisé par le passage de la vitesse par zéro (voir figure 3.20). Par contre, la transition du régime de préglissement au régime de glissement selon la fonction de commutation approximée se fait légèrement avant la transition réelle (figure 3.20).

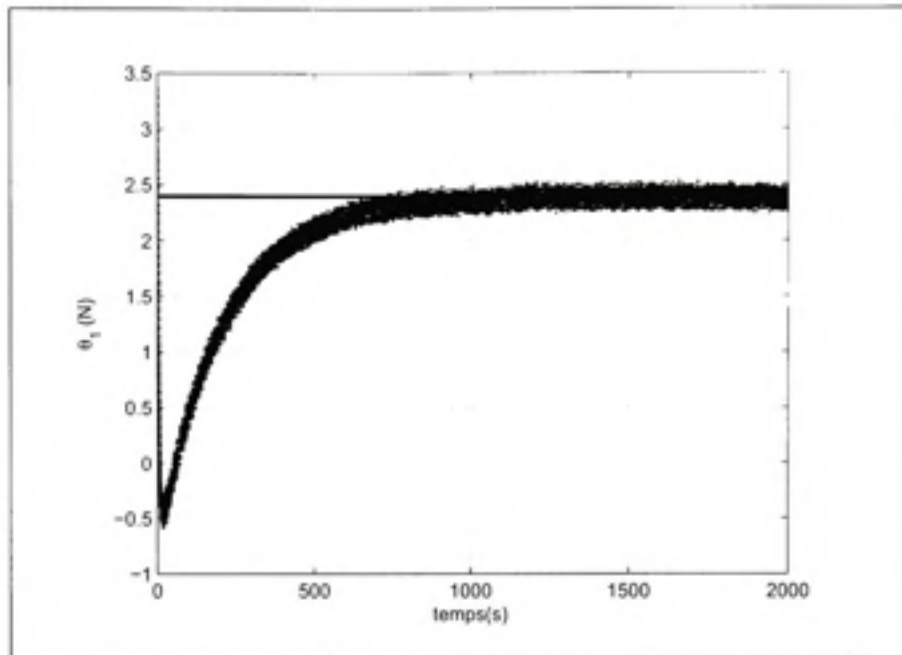


Figure 3.21 Valeurs réelle et estimée de θ_1 .

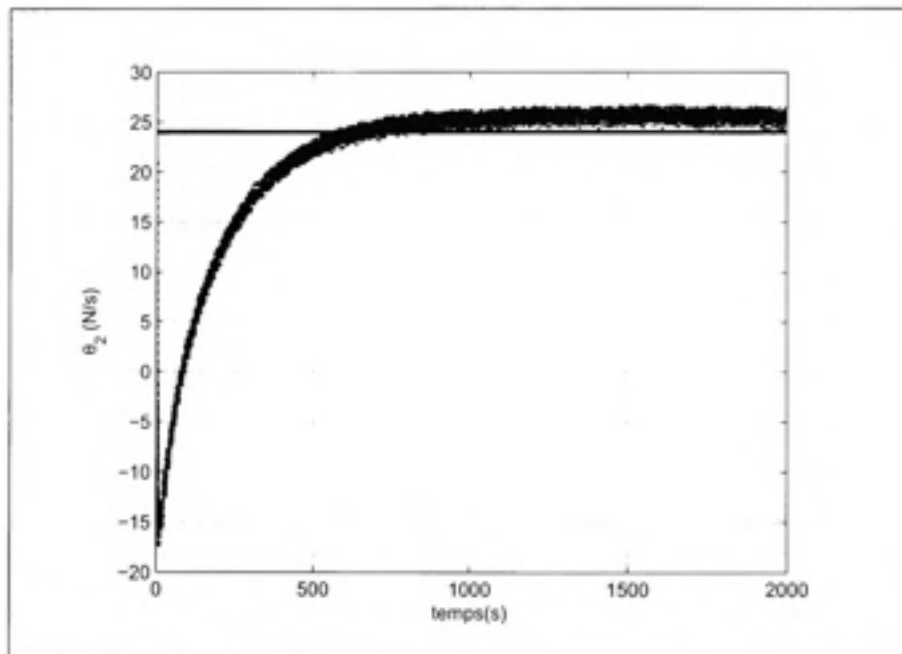


Figure 3.22 Valeurs réelle et estimée de θ_2 .

Les figures 3.21, 3.22, 3.23 et 3.24 représentent respectivement les valeurs réelles et estimées des paramètres θ_1 , θ_2 , θ_3 , et θ_4 . D'après ces figures, on remarque que les valeurs estimées convergent vers des valeurs proches des vraies valeurs des paramètres. Ceci est dû principalement aux approximations **A1** et **A2** introduites au régime de glissement (équation (3.29)). De plus, une troisième approximation est ajoutée au niveau de la fonction de commutation. Toutes

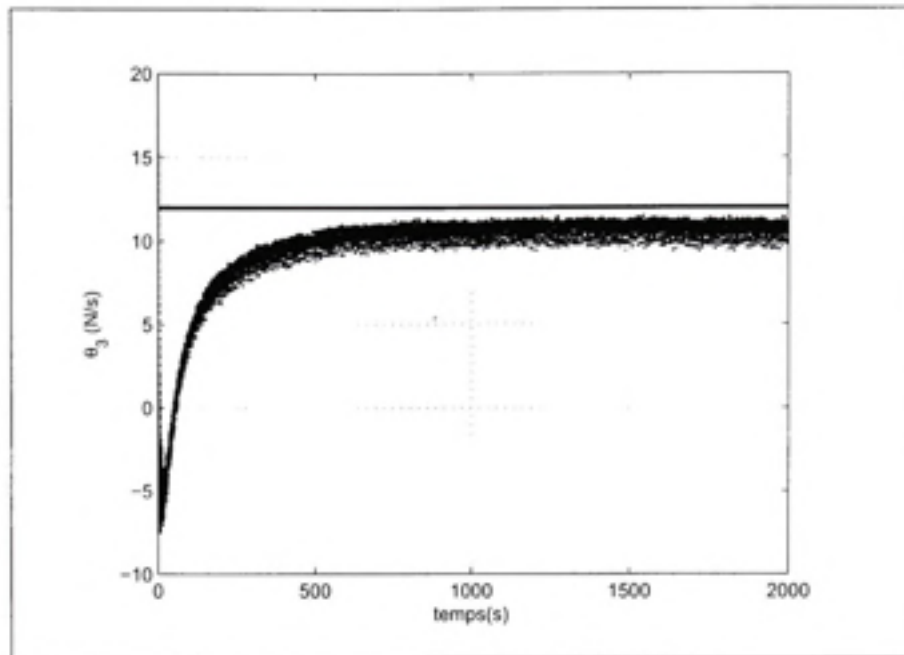


Figure 3.23 Valeurs réelle et estimée de θ_3 .

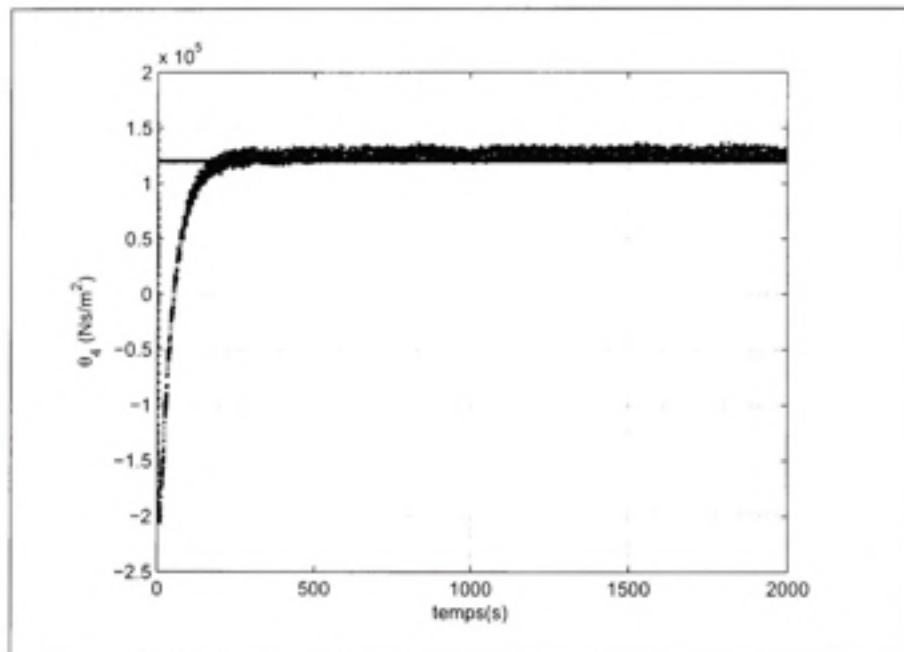


Figure 3.24 Valeurs réelle et estimée de θ_4 .

ces approximations engendrent des erreurs de modélisation qui sont introduites au niveau de l'estimateur sous forme d'une perturbation.

En ce qui concerne la valeur estimée du paramètre k (θ_5), présentée sur la figure 3.25, elle converge également vers une valeur assez proche de la vraie valeur du paramètre.

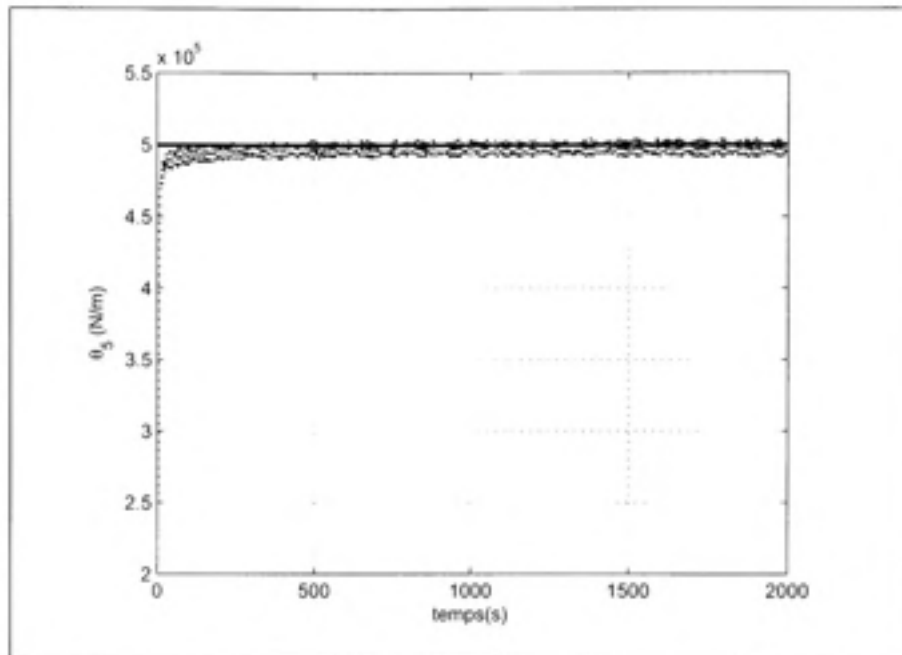


Figure 3.25 Valeurs réelle et estimée de θ_5 .

Les frottements estimés (calculés à partir des valeurs estimées des paramètres et basés sur la fonction de commutation approximée (équation (3.41))) et réels sont présentés à la figure 3.26. Pour mettre en évidence la différence entre les deux frottements, un agrandissement est présenté à la figure 3.27 et l'erreur d'estimation est présentée à la figure 3.28.

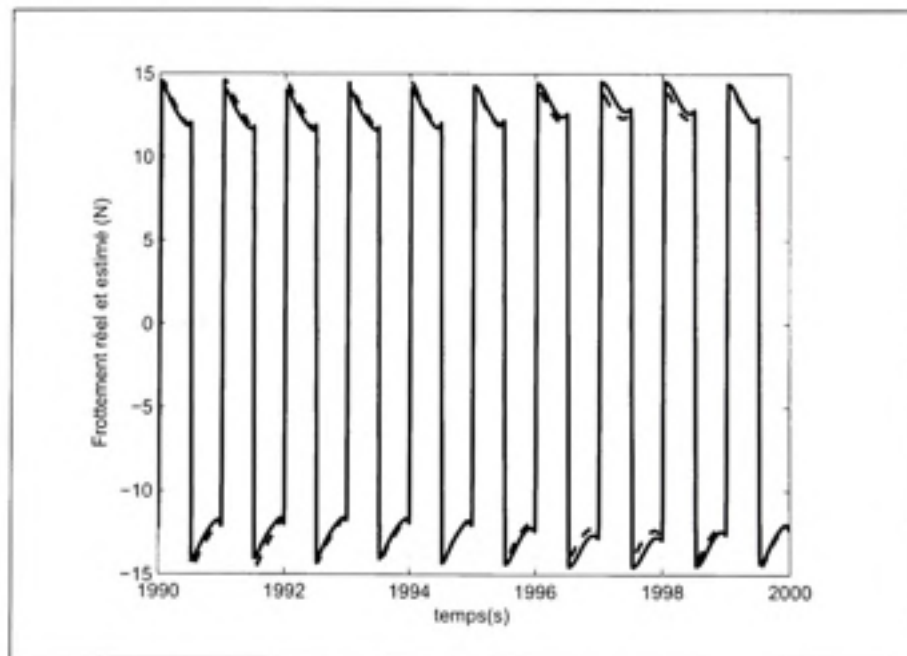


Figure 3.26 Frottements réel et estimé.

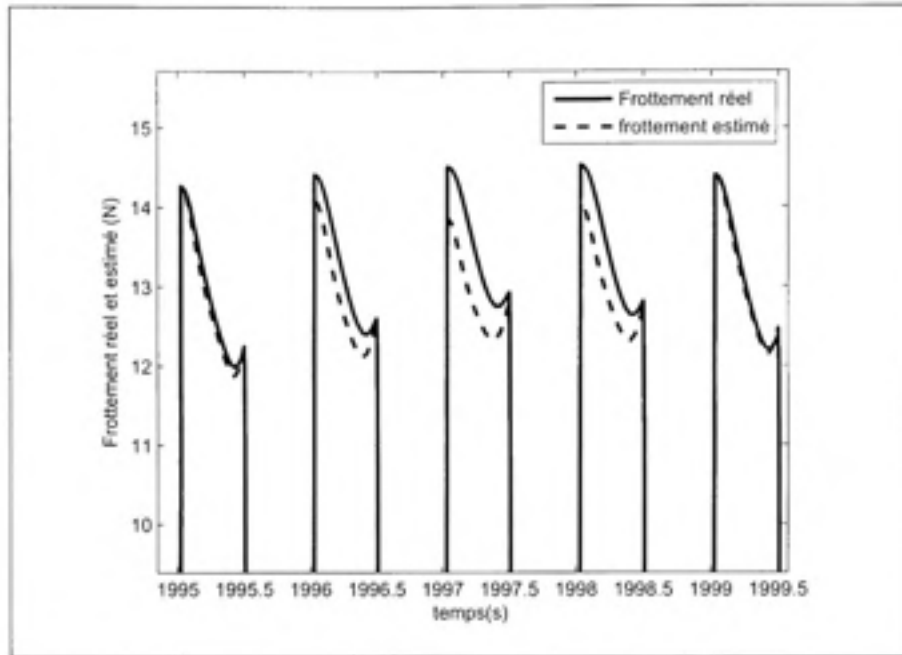


Figure 3.27 Frottements réel et estimé (agrandissement).

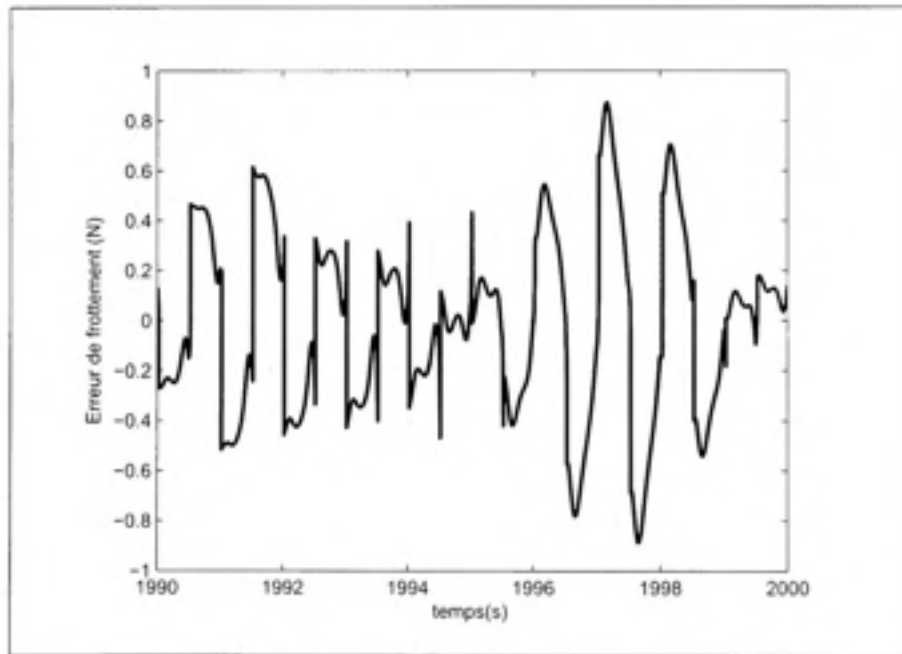


Figure 3.28 Erreur de frottement.

En ce qui concerne l'amplitude de l'erreur, elle est plus importante que celle obtenue avec une fonction de commutation idéale. La Figure 3.27 montre que l'approximation de la fonction de commutation semble affecter davantage la reconstruction de la force de frottement à partir des paramètres estimés que l'estimation des paramètres proprement dit.

L'observateur de Marino estime donc de façon assez précise les paramètres du modèle. Pour cette raison, la section suivante compare la reconstruction de la force de frottement estimée à partir des commutations idéale, approximée et estimée.

3.7.4 Validation

Dans cette section, une validation de la reconstruction de la force de frottement estimée est présentée. Une étude comparative des trois fonctions de commutation est présentée afin de déterminer leur effet sur la précision de la force reconstruite à partir des paramètres estimés.

Pour ce faire, une fois que les paramètres du modèle de frottement sont identifiés à l'aide de la fonction de commutation approximée (équation (3.41)) selon la procédure de la section précédente, un signal de vitesse aléatoire est utilisé pour reconstruire trois forces de frottement basées sur les trois fonctions de commutation (idéale, approximée et estimée). Les erreurs entre la force de frottement réelle et les trois forces ainsi construites sont déterminées et comparées.

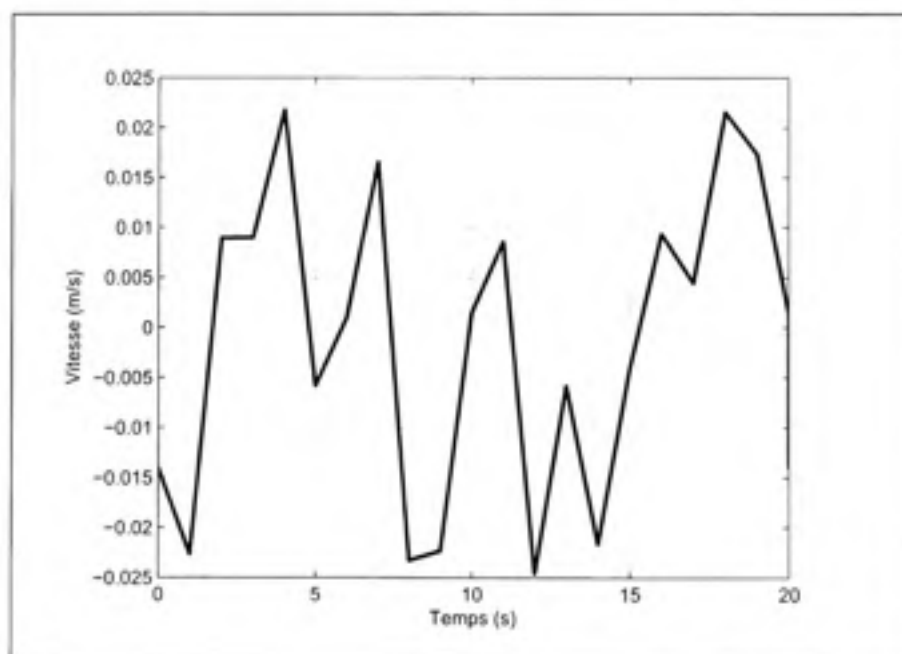


Figure 3.29 Signal d'excitation pour la validation.

Le signal d'excitation utilisé pour valider l'approche d'identification est une vitesse aléatoire de telle manière à obtenir une force de frottement indépendante de celle utilisée lors de l'identification. Le signal de vitesse utilisé est présenté sur la figure 3.29.

En utilisant les valeurs moyennes des estimés des paramètres du modèle de frottement, les forces de frottement estimées basées respectivement sur la fonction de commutation idéale (équation 3.40), puis la fonction de commutation approximée (équation (3.41)) et finalement sur la fonction de commutation estimée (équation (3.45)) sont construites. Ces trois forces de frottement avec celle du frottement réel sont présentées sur la figure 3.30. Afin de mieux visualiser les différentes courbes des forces de frottement, un agrandissement est présenté sur la figure 3.31.

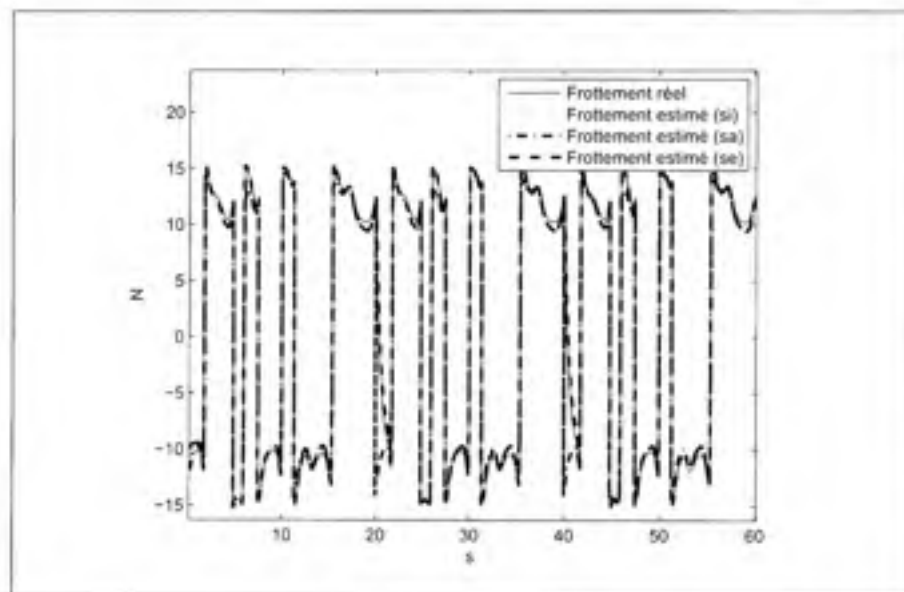


Figure 3.30 Courbes de frottement réel et frottements estimés selon le type de commutation.

Il est à noter que sur la légende des figures 3.30 et 3.31, l'abréviation 'si' est utilisée pour signifier 'commutation idéale', 'sa' pour signifier 'commutation approximée' et finalement 'se' pour signifier 'commutation estimée'.

D'après la figure 3.30, les différentes forces de frottement estimées suivent la force de frottement réelle, mais avec une certaine marge d'erreur qui dépend étroitement du type de la fonction de commutation utilisée. Plus en détail, selon la figure 3.31, les forces de frottement

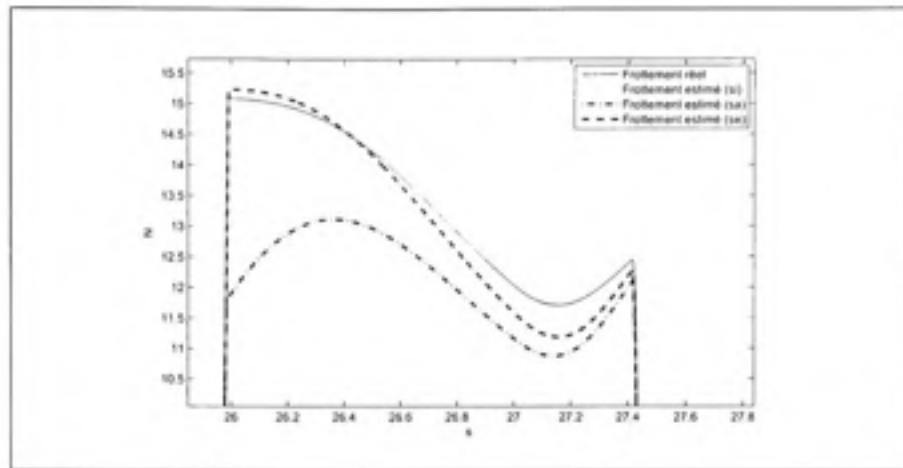


Figure 3.31 Courbes de frottement réel et frottements estimés selon le type de commutation (agrandissement).

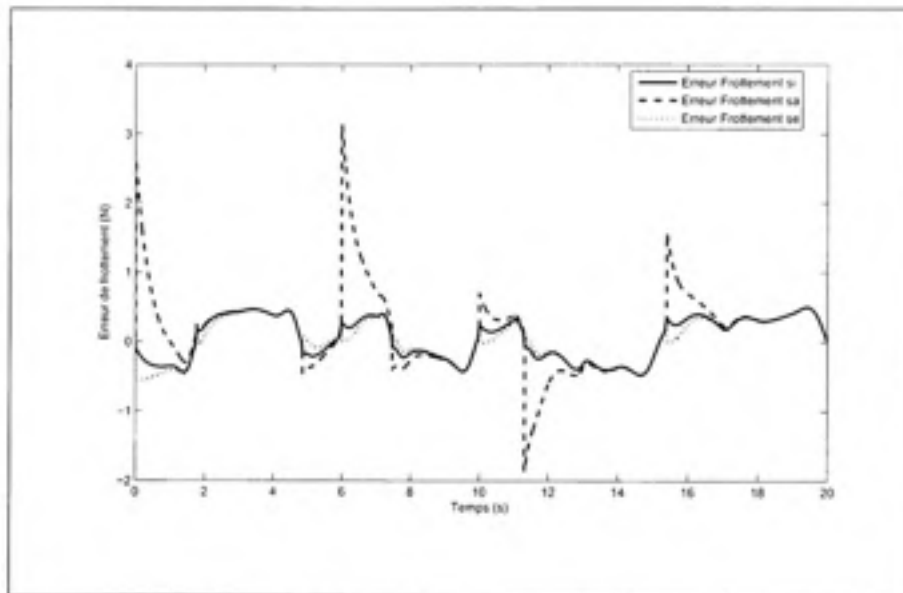


Figure 3.32 Erreur de frottement selon le type de commutation.

estimées selon les fonctions de commutation idéale et estimée sont beaucoup plus proches de la force de frottement réelle comparativement à la force de frottement estimée basée sur la commutation approximée.

En terme d'erreur, il est clair sur les figures 3.32 et 3.33 que les erreurs entre la force de frottement réelle et celles basées sur la commutation idéale et estimée sont plus petites que celle basée sur la commutation approximée. De plus, les trois types d'erreurs deviennent égaux après une certaine durée lors du régime de glissement. Ceci peut être expliqué par le fait que si la

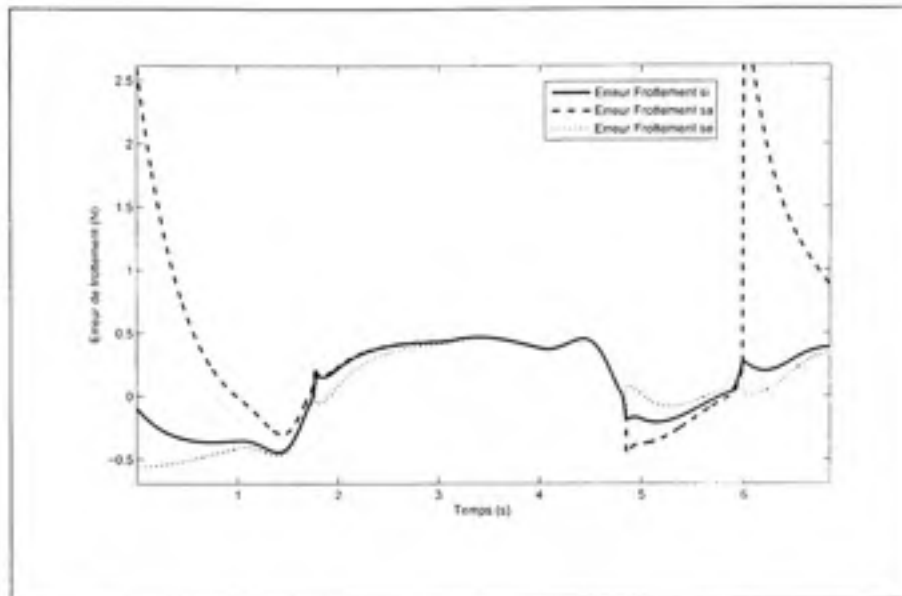


Figure 3.33 Courbe de l'erreur de frottement selon le type de commutation (agrandissement).

durée du régime de glissement est assez longue, l'estimateur de Marino arrive à estimer la force de frottement indépendamment du type de la fonction de commutation parce que cette dernière affecte principalement la transition du régime de préglissement au régime de glissement.

Ainsi, l'approche proposée dans ce chapitre a été validée et ses performances sont assez bonnes grâce à l'introduction de la fonction de commutation estimée. En effet, la procédure d'identification se fait en trois étapes : la première étape consiste à trouver des valeurs a priori du coefficient de raideur k et du paramètre de Coulomb σ_c afin de construire la fonction de commutation approximée. La deuxième étape consiste à estimer tous les paramètres inconnus en se basant sur cette fonction de commutation approximée. Finalement à l'aide des paramètres identifiés, la fonction de commutation estimée est utilisée pour reconstruire la force de frottement estimée.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre un estimateur de Marino basé sur le modèle de frottement GMS est formulé en supposant que le signal de la force de frottement est accessible. Pour ce faire, d'une part

la fonction de Stribeck a été linéarisée et d'autre part une approximation linéarisante du modèle GMS dans le régime de glissement a été proposée. Une approximation de la fonction de commutation a également été proposée pour compléter la formulation. Ces approximations ont engendré des perturbations bornées qui ont affecté l'équation dynamique de la force de frottement. D'après les résultats de simulation obtenus, la force estimée semble davantage affectée par ces approximations que les paramètres estimés. En particulier, l'approximation de la fonction de commutation affecte considérablement la force estimée mais semble affecter de façon moins significative les paramètres estimés. Pour compenser cet effet néfaste sur la reconstruction de la force de frottement estimée, une seconde approximation de la fonction de commutation à partir des paramètres estimés a été proposée puis validée par simulation. Les résultats confirment que la force de frottement reconstruite à partir de la fonction de commutation estimée à partir des paramètres (obtenue à l'aide de l'estimateur accompagné de la fonction de commutation approximée) améliore de façon significative la qualité de la force estimée. La force reconstruite à l'aide de la fonction de commutation estimée est en fait très similaire à celle obtenue à l'aide de la fonction de commutation idéale.

CHAPITRE 4

IDENTIFICATION DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS AVEC CONSTRUCTION DE LA FORCE DE FROTTEMENT FILTRÉE

4.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, une formulation pour l'identification du modèle de frottement GMS basée sur la mesure de frottement a été proposée. Toutefois, cette formulation nécessite un capteur de force qui, dans la plupart des applications, peut difficilement être installé de façon à mesurer la force de frottement. Qui plus est, ce capteur engendre des coûts supplémentaires lors de la mise en oeuvre d'un système de commande sans compter que lorsque la force de frottement est mesurée, elle devient facile à compenser sans avoir recours à un estimateur. Pour ces raisons, dans ce chapitre, une extension de l'approche d'identification sera proposée. Cette extension vise à remplacer la mesure de la force de frottement par une reconstruction de ce signal à l'aide des signaux de commande et de vitesse. Cette reconstruction nécessitera un traitement particulier des signaux filtrés pour tenir compte de la fonction de commutation du modèle de préglissement au modèle de glissement.

La structure du chapitre sera comme suit : Un bref rappel de la formulation de l'estimateur des paramètres s'appuyant sur la mesure de la force de frottement est d'abord présenté. La procédure de la construction de la force de frottement filtrée à partir des autres signaux mesurés est ensuite proposée. Une validation des performances de l'approche d'identification par voie de simulation est présentée à la fin du chapitre.

4.2 Formulation du problème

Il s'agit du même système que celui étudié au chapitre 3; c'est-à-dire, un corps de masse M qui glisse sur une surface sous l'action d'une force u (voir figure 3.1). L'équation dynamique du système en mouvement est donc donnée par

$$M\dot{v} = u - F \quad (4.1)$$

où M est la masse du corps, v est sa vitesse, u est la force externe appliquée et F est la force de frottement. Cette dernière est décrite par le modèle GMS introduit au chapitre 3.

Grâce aux approximations **A1** et **A2** proposées au chapitre 3, le modèle GMS a été reformulé de façon à ce qu'il s'exprime sous une forme linéaire par rapport aux paramètres à estimer en admettant toutefois une perturbation non linéaire bornée. Le résultat de cette formulation est donné par (équation (3.34)) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi(u, v)\theta + \omega(t) \\ y = C_c x \end{cases} \quad (4.2)$$

où $x = F$ (la force de frottement), $C_c = 1$, $\theta = [\theta_{st}^T, \theta_{sl}^T]^T$ est le vecteur des paramètres à estimer, $\psi(u, v) = S(t) = (1 - Q(t))S_1(t) + Q(t)S_2(t)$ et $\omega(t) = (1 - Q(t))\omega_s(t)$

avec $S_1(t) = [\psi_{st}(u, v) \ 0]$, $S_2(t) = [0 \ \psi_{sl}(u, v)]$ et $\omega_s(t) = F_D$.

Dans ces expressions, on rappelle que θ_{sl} est le vecteur des paramètres du modèle de glissement donné par l'expression (3.29), $\theta_{st} = k$ est le paramètre du modèle de préglissement, $\psi_{st}(u, v)$ est le régresseur du modèle de glissement donnée par l'équation (3.31), $\psi_{sl}(u, v) = v$ est le régresseur du modèle de préglissement et F_D est la perturbation bornée donnée par l'équation (3.29). La variable $Q(t)$, quant à elle, est utilisée pour indiquer la commutation des modèles de glissement et de préglissement (voir equation (3.33)).

Au chapitre 3, l'application d'un filtre de deuxième ordre (équation (3.35)) aux deux côtés de l'égalité de la formulation (4.2) a permis de respecter la condition de continuité du vecteur régresseur de l'observateur de Marino et de sa dérivée. À titre indicatif, cette formulation filtrée (équation (3.36)) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}_F = \psi_F(u, v)\theta + \omega_F(t) \\ y_F = C_c x_F \end{cases} \quad (4.3)$$

L'objectif est maintenant d'éliminer l'hypothèse que le signal de la force de frottement est disponible en reconstruisant cette force à partir des autres signaux disponibles. De façon générale,

cette reconstruction n'est pas causale. Cependant, la formulation filtrée donnée par l'équation (4.3) ne dépend pas de la force de frottement mais plutôt de la force de frottement filtrée. Comme l'explique la proposition suivante, le premier étage de cette force filtrée peut être reconstruite à l'aide d'une réalisation d'état particulière.

Proposition 4.1. Pour le système de la figure 3.1, la force de frottement filtrée par $H_1(s)$ peut être obtenue à partir des deux signaux u et v à l'aide d'une réalisation d'état de premier ordre.

Preuve : L'équation dynamique du système représenté sur la figure 3.1 est donnée par

$$M\dot{v} = u - F \quad (4.4)$$

Ainsi, la force de frottement sera

$$-F = M\dot{v} - u \quad (4.5)$$

Si on applique le filtre de premier ordre dont la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}}$ (voir figure 4.1), la force de frottement filtrée dans le domaine de Laplace peut s'écrire comme suit :

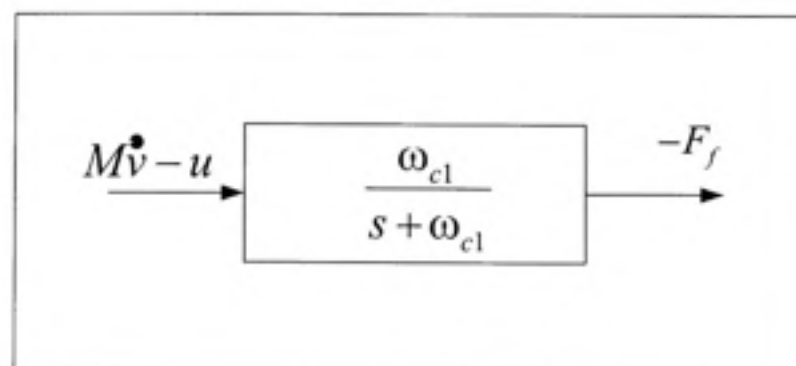


Figure 4.1 Schéma du système du filtre.

$$\begin{aligned}
-F_f &= \frac{M\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}}\dot{v} - \frac{\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}}u \\
&= \frac{M\omega_{c1}sv}{s + \omega_{c1}} - \frac{\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}}u \\
&= M\omega_{c1}v - \frac{\omega_{c1}u + \omega_{c1}^2 Mv}{s + \omega_{c1}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En posant $R(s)$ la variable d'état dans le domaine de Laplace définie par

$$R(s) = \frac{-\omega_{c1}u(s) - \omega_{c1}^2 Mv(s)}{s + \omega_{c1}} \tag{4.7}$$

alors, dans le domaine temporel

$$\dot{r} + \omega_{c1}r = -\omega_{c1}u - \omega_{c1}^2 Mv \tag{4.8}$$

de sorte que la dérivée de la variable d'état sera

$$\dot{r} = -\omega_{c1}r - \omega_{c1}u - \omega_{c1}^2 Mv \tag{4.9}$$

Si $y_1 = -F_f$ est la sortie du système alors, selon (4.6), la force de frottement filtrée peut s'écrire sous la forme suivante :

$$-F_f = y_1 = r + M\omega_{c1}v \tag{4.10}$$

Ainsi, l'équation d'état de la force de frottement filtrée en fonction de la commande u et de la vitesse v est donnée par

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\omega_{c1}r - \omega_{c1}u - \omega_{c1}^2 Mv \\ y_1 &= -F_f = r + M\omega_{c1}v \end{cases} \tag{4.11}$$

Cette réalisation d'état, illustrée par la figure 4.2, complète la preuve de la proposition 4.1. Il est donc possible d'obtenir le premier étage de la force de frottement filtrée à partir des signaux de commande et de vitesse. Le deuxième étage du filtre peut alors être appliqué directement sur le signal F_f de façon à obtenir le signal complètement filtré F_F (comme l'indique l'équation (3.37)). Il subsiste toutefois un autre problème au niveau du premier étage du filtrage du vec-

teur régresseur qui dépend aussi de la force de frottement. En effet, selon les équations (3.33) et (3.34) et du fait que $\psi(u, v) = S_{12}(t) = (1 - Q(t))S_1(t) + Q(t)S_2(t)$ où $S_1(t) = [\psi_{st}(u, v) \ 0]$ et $S_2(t) = [0 \ \psi_{st}(u, v)]$, le premier terme de $S_{12}(t)$ commute d'une valeur nulle à la valeur F lorsqu'il y a commutation du régime de préglissement au régime de glissement. Normalement, ce signal pourrait être filtré directement, comme c'est le cas pour tout les autres éléments de la matrice ligne $S_{12}(t)$ (voir la figure 4.3). Cependant, ce terme basculant à chaque commutation de 0 à F doit être traité différemment puisque F n'est pas connu et ne peut pas être reconstruit.

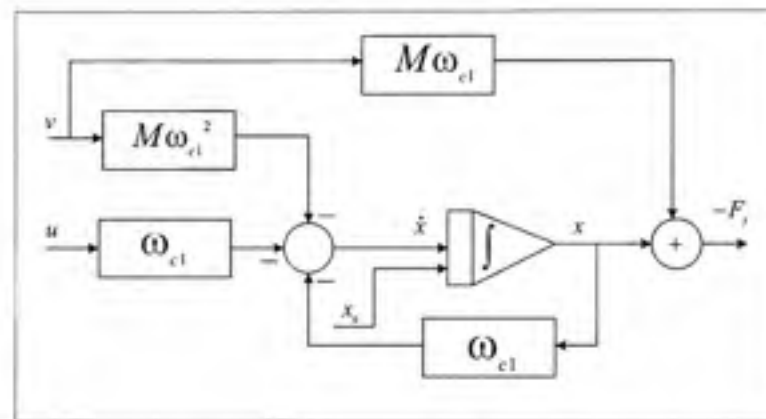


Figure 4.2 Schéma de la construction de la force de frottement filtrée.

De plus, même si le signal filtré F_f peut être obtenu à partir de la réalisation d'état (4.11), le filtrage du signal commutant de 0 à F n'est pas simplement la commutation entre 0 et F_f . En effet, ce filtrage devrait engendrer une continuité du signal de part et d'autre de chaque instant de commutation. Or, de façon générale, la commutation de 0 à F_f ne respecte pas cette continuité; à moins d'introduire des conditions initiales appropriées à chaque commutation. Dans ce qui suit, des conditions initiales qui garantiront cette continuité seront justement proposées de façon à ce que la reconstruction filtrée du signal puisse être obtenue selon la méthodologie illustrée par la figure 4.4.

Proposition 4.2. En utilisant des conditions initiales appropriées à chaque transition du signal de commutation $Q(t)$, le signal $S_{12f}(t)$ peut être obtenu par la méthodologie illustrée par la figure 4.4.

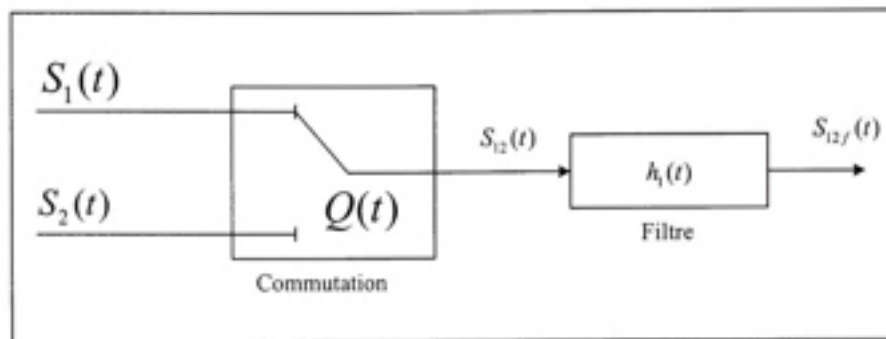


Figure 4.3 Schéma de la première approche pour l'application du premier étage du filtre.

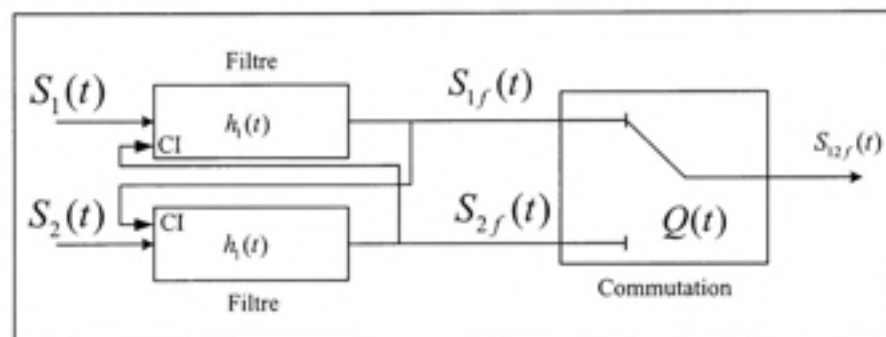


Figure 4.4 Schéma de la deuxième approche pour l'application du premier étage du filtre.

Preuve : Pour prouver cette proposition, on suppose sans perte de généralité, que le signal de commutation évolue tel qu'illustré par la figure 4.5.

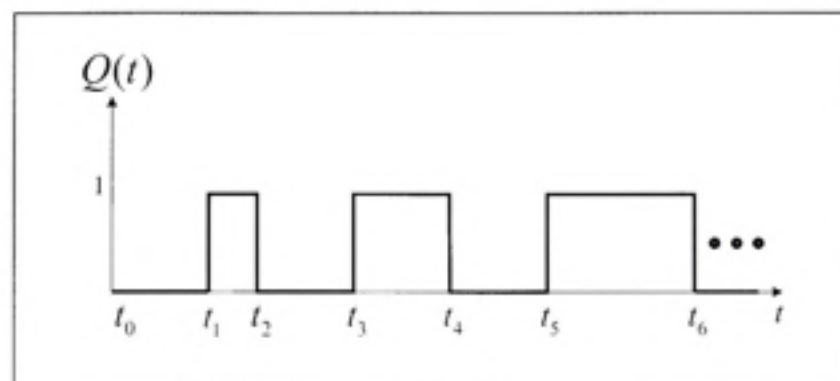


Figure 4.5 Fonction de commutation.

Sachant que $S_{12}(t) = (1 - Q(t))S_1(t) + Q(t)S_2(t)$, le signal filtré $S_{12f}(t)$ peut s'exprimer en fonction des signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ de la façon suivante :

$$S_{12f}(t) = h_1(t - t_0)S_{12f}(t_0) + \int_{t_0}^t h_1(t - \tau) \left(S_1(\tau)(1 - Q(\tau)) + S_2(\tau)Q(\tau) \right) d\tau \quad (4.12)$$

où $h_1(t)$ est la réponse impulsionnelle du premier étage du filtre et $Q(t)$ est la fonction de commutation.

Selon le signal $Q(t)$ illustré par la figure 4.5,

$$S_{12f}(t) = h_1(t - t_0)S_{12f}(t_0) + \int_{t_0}^t h_1(t - \tau)S_1(\tau)d\tau \quad t_0 < t \leq t_1 \quad (4.13)$$

En posant la condition initiale $S_{1f}(t_0) = S_{12f}(t_0)$, on déduit alors que

$$S_{12f}(t) = S_{1f}(t) \quad \text{pour } t_0 < t \leq t_1 \text{ et } S_{1f}(t_0) = S_{12f}(t_0) \quad (4.14)$$

En effet, l'égalité est respectée puisque le signal filtré $S_{1f}(t)$ s'exprime comme suit :

$$S_{1f}(t) = h_1(t - t_0)S_{1f}(t_0) + \int_{t_0}^t h_1(t - \tau)S_1(\tau)d\tau \quad (4.15)$$

Ensuite, en utilisant de nouveau la définition de $Q(t)$ illustrée par la figure 4.5 combinée à l'équation (4.12), on peut écrire

$$S_{12f}(t) = h_1(t - t_1)S_{12f}(t_1) + \int_{t_1}^t h_1(t - \tau)S_2(\tau)d\tau \quad t_1 < t \leq t_2 \quad (4.16)$$

À partir de l'équation (4.14), on a $S_{12f}(t_1) = S_{1f}(t_1)$ et donc en posant la condition initiale $S_{2f}(t_1) = S_{1f}(t_1)$, on obtient,

$$S_{12f}(t) = S_{2f}(t) \quad \text{pour } t_1 < t \leq t_2 \text{ et } S_{2f}(t_1) = S_{1f}(t_1) \quad (4.17)$$

où $S_{2f}(t)$ est la version filtrée du signal $S_2(t)$.

Le reste de la preuve s'effectue de la même façon pour les autres intervalles $t_i < t \leq t_i + 1$ pour $i \geq 2$.

En conclusion, il est montré qu'il est possible de calculer le signal filtré $S_{12f}(t)$ à partir de

$S_{1f}(t)$ et $S_{2f}(t)$ en utilisant les conditions initiales suivantes pour chaque transition de $Q(t)$:

$$S_{1f}(t_0) = S_{12f}(t_0)$$

et pour $i = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\begin{cases} S_{2f}(t_i) = S_{1f}(t_i) & \text{si } i \text{ impaire} \\ S_{1f}(t_i) = S_{2f}(t_i) & \text{si } i \text{ paire} \end{cases}$$

En d'autres termes, à l'instant t_i , lorsque la fonction de commutation transite à la valeur 1, le filtre du signal $S_2(t)$ est en cours d'exécution utilisant $S_{1f}(t_i)$ comme condition initiale alors que lorsque la fonction de commutation transite à la valeur 0, à l'instant t_{i+1} , le filtre du signal $S_1(t)$ utilise $S_{2f}(t_{i+1})$ comme condition initiale. Ceci complète la preuve de la proposition 4.2.

Ainsi, l'utilisation de cette approche permet de commuter entre les signaux tout en garantissant la continuité des signaux filtrés à l'aide du premier étage. Pour l'ensemble des signaux à l'exception du signal de la force F , la réalisation d'état du premier étage du filtre respecte la forme standard suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx_f}{dt} = -\omega_{c1}x_f + \omega_{c1}x_{nf} \\ y_f = x_f \end{cases} \quad \text{avec } x_f(t_i) = x_{fi} \quad (4.18)$$

où x_{nf} est l'entrée du filtre, y_f est sa sortie, x_{fi} est la condition initiale et ω_{c1} est la fréquence de coupure. Tel que stipulé par la proposition 4.1, pour le signal F , la réalisation qui permet de reconstruire la force tout en appliquant le premier étage du filtre est donnée par l'équation (4.11). Selon l'équation de sortie de cette réalisation d'état, la condition initiale de la variable d'état du filtre pourra être imposée en fonction des conditions initiales de sortie (proposition 4.2) et d'entrée :

$$r(t_i) = y_1(t_i) - M\omega_{c1}v(t_i) \quad (4.19)$$

Le signal du régresseur filtré $S_{12f}(t)$ peut alors être entièrement reconstruit à partir des signaux de commande et de vitesse selon la méthodologie illustrée par la figure 4.4. Le deuxième étage

du filtre peut alors être appliqué directement sur le signal S_{12f} de façon à obtenir le signal complètement filtré S_{12F} .

4.3 Résultats de simulation

Les résultats de simulations pour valider l'approche d'identification des paramètres du modèle de frottement GMS sont présentés dans cette section qui est subdivisée en deux principales parties : la première partie sera consacrée aux résultats de simulation avec l'utilisation d'une fonction de commutation supposée idéale. On rappelle que la fonction de commutation est une fonction qui détecte l'instant de transition entre les deux régimes de frottement à savoir le régime de préglissement et le régime de glissement.

Les résultats de simulation avec une fonction de commutation approximée feront l'objet de la deuxième partie. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 3, cette fonction requiert seulement la connaissance à priori du frottement de Coulomb (σ_c) et du paramètre de rigidité k qui sont facilement identifiables.

La procédure de simulation de l'estimation des paramètres du modèle de frottement basée sur la construction de la force de frottement filtrée proposée dans ce chapitre est présentée sur la figure 4.6.

4.3.1 Simulation de l'estimateur avec la fonction de commutation idéale

Dans cette section, la fonction de commutation est supposée idéale, c'est-à-dire que les instants de transitions des régimes de frottement sont parfaitement connus. La simulation est réalisée en considérant les données des tableaux 4.1 et 4.2. Le signal d'excitation utilisé est donné par $v = 0.01 \sin(0.2\pi t + 0.025) \sin(2\pi t)$. En ce qui concerne les conditions initiales des paramètres estimés, elles sont données dans le tableau 4.2. Les conditions initiales des variables d'états et les variables d'états estimés sont nulles.

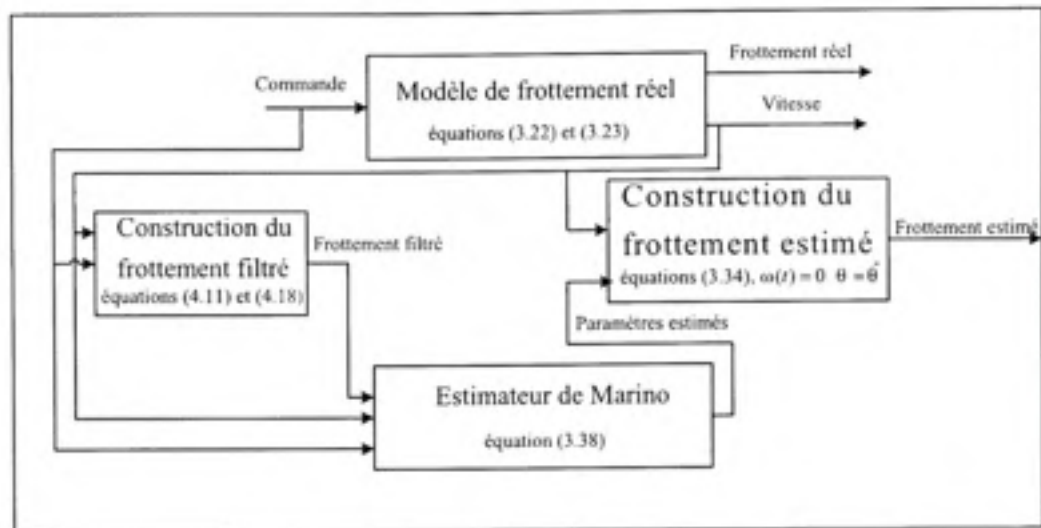


Figure 4.6 Procédure de la simulation de l'estimateur basée sur la construction de la force de frottement filtrée.

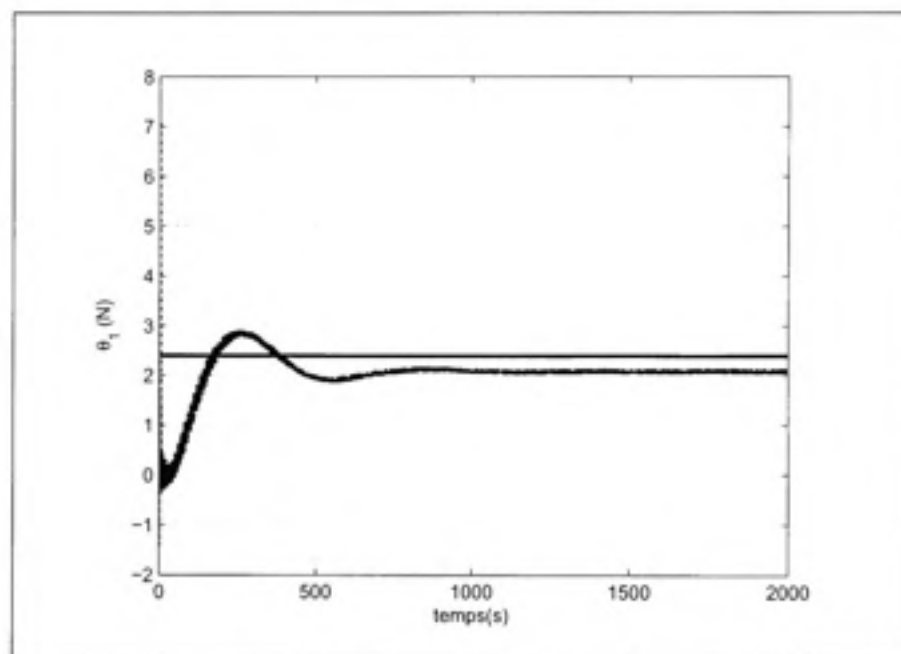
Tableau 4.1 Valeurs des paramètres de simulation

Paramètres	Valeurs	Unités
σ_c	10	N
σ_s	15	N
C	24	N/s
θ_s	10^4	s^2/m^2
M	1	Kg
k	5×10^5	N/m
ω_{c1}	10	rad/s
ω_{c2}	100	rad/s

Les figures 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 et 4.11 présentent les valeurs estimées et réelles des paramètres du modèle. On remarque que pour l'ensemble des paramètres, les valeurs estimées des paramètres ne convergent pas exactement vers les vraies valeurs et ceci est principalement dû aux différentes approximations qui sont introduites dans le régime de glissement pour rendre le modèle linéaire par rapport aux paramètres inconnus.

Tableau 4.2 Valeurs des paramètres à estimer

Paramètres	Valeurs réelles	Valeurs initiales	Unités
θ_1	2.4	1.2	s^{-1}
θ_2	24	12	N/s
θ_3	12	6	N/s
θ_4	12×10^4	9×10^4	Ns/m^2
θ_5	5×10^5	2.5×10^5	N/m

Figure 4.7 Valeur réelle et estimée de θ_1 (commutation idéale).

On rappelle que deux approximations dans le régime de glissement sont introduites, la première pour linéariser le modèle par rapport au paramètre θ_s et la seconde pour éliminer la non linéarité au niveau de la fonction de Stribeck (soit $S(v)$).

La figure 4.12 représente l'erreur entre la force de frottement réelle et celle estimée. Sur cette figure, l'amplitude maximale de cette erreur ne dépasse pas $0.05N$ ce qui prouve que l'estimateur est capable d'estimer la force de frottement avec une très bonne précision malgré la présence des perturbations causées par les approximations.

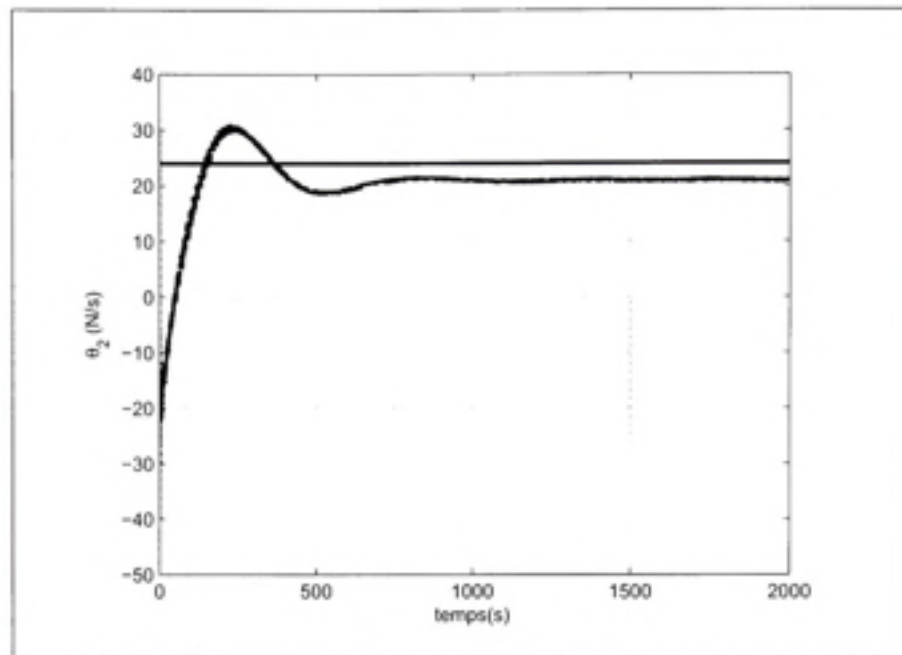


Figure 4.8 Valeur réelle et estimée de θ_2 (commutation idéale).

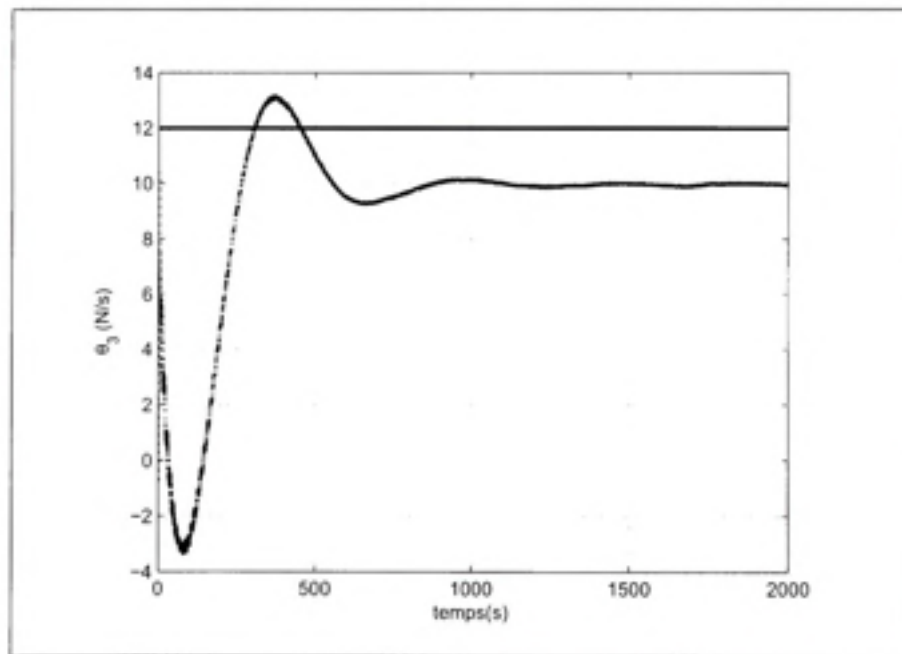


Figure 4.9 Valeur réelle et estimée de θ_3 (commutation idéale).

Il est très important de noter que la force de frottement estimée n'est pas celle qui est calculée par l'estimateur. Elle est plutôt recalculée à partir du modèle et des paramètres estimés. Cette force de frottement estimée "de validation", est comparée à la force de frottement réelle à la figure 4.13.

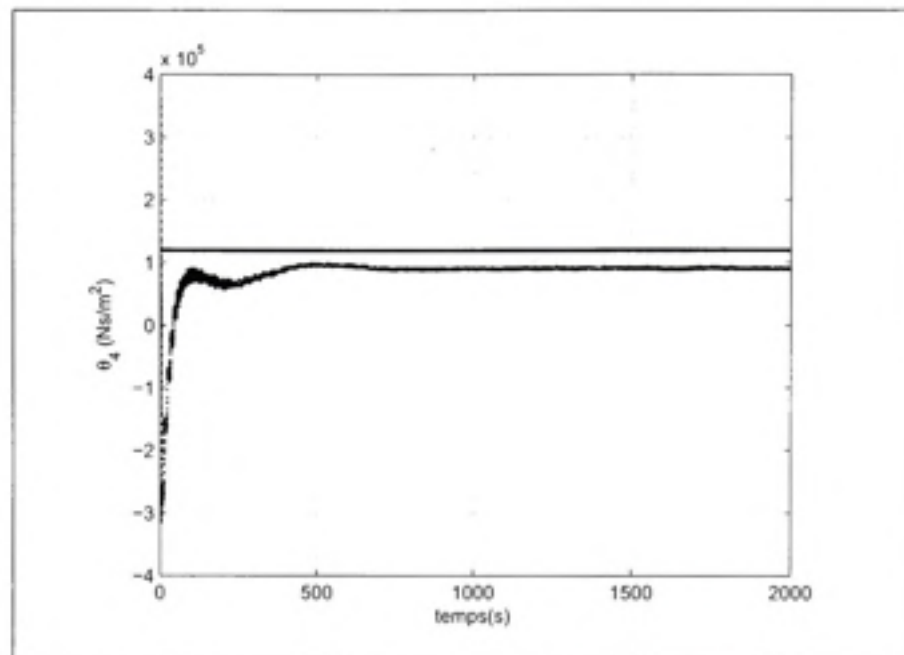


Figure 4.10 Valeur réelle et estimée de θ_4 (commutation idéale).

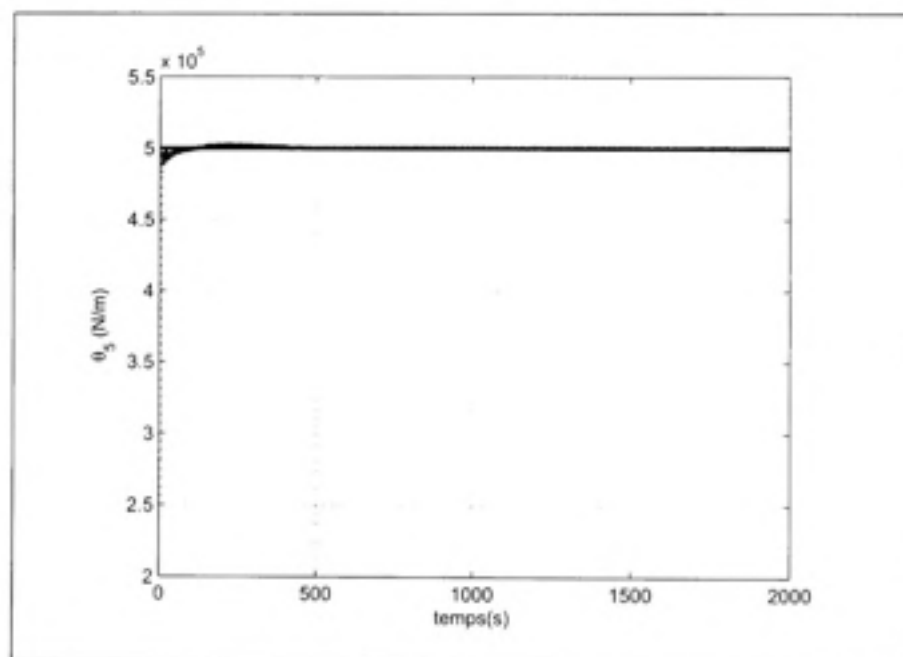


Figure 4.11 Valeur réelle et estimée de θ_5 (commutation idéale).

Ainsi, à la lumière des simulations réalisées, on peut dire que si la fonction de commutation est parfaitement connue alors l'estimateur est assez performant pour estimer la force de frottement et donner de bonnes valeurs d'estimations des paramètres inconnus. Ces paramètres estimés permettent de calculer la force de frottement en temps réel et éventuellement de l'intégrer dans un système de commande pour compenser le frottement.

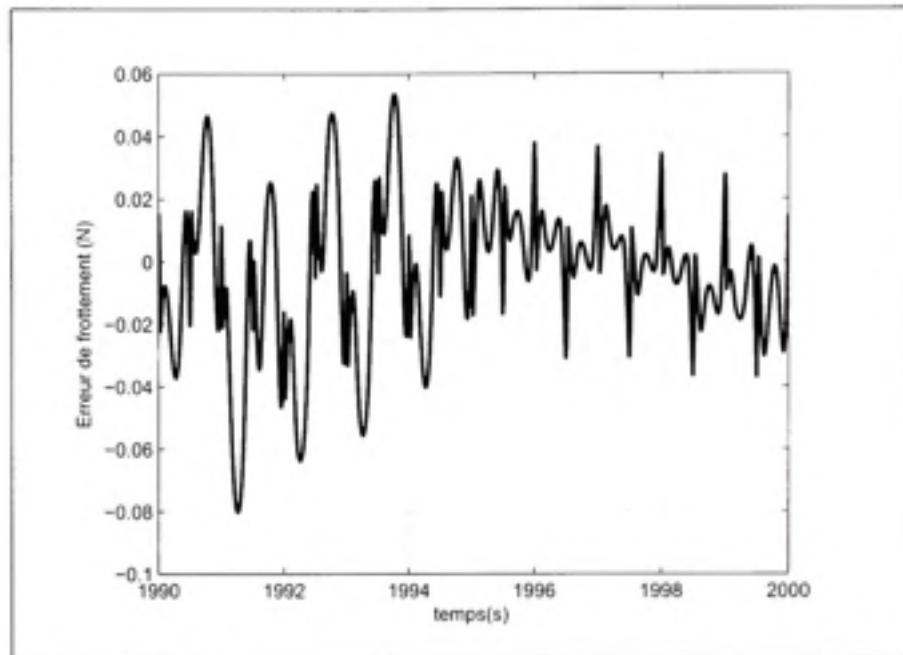


Figure 4.12 Erreur de frottement (commutation idéale).

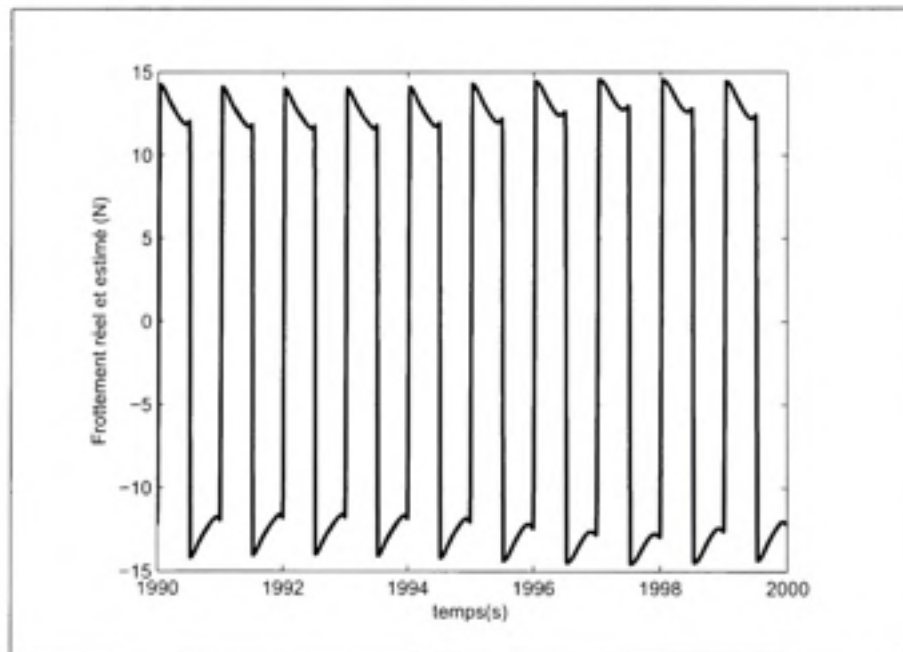


Figure 4.13 Frottement réel et estimé (commutation idéale).

4.3.2 Simulation de l'estimateur avec la fonction de commutation approximée

Dans cette section, les résultats de simulation basés sur la fonction de commutation approximée, proposée au chapitre 3 (section 3.6.2), seront présentés.

Les données utilisées pour cette simulation sont exactement les mêmes que celles utilisées dans la section précédente (voir tableau 4.1). En ce qui concerne le signal d'excitation, il est également le même que celui utilisé à la section précédente.

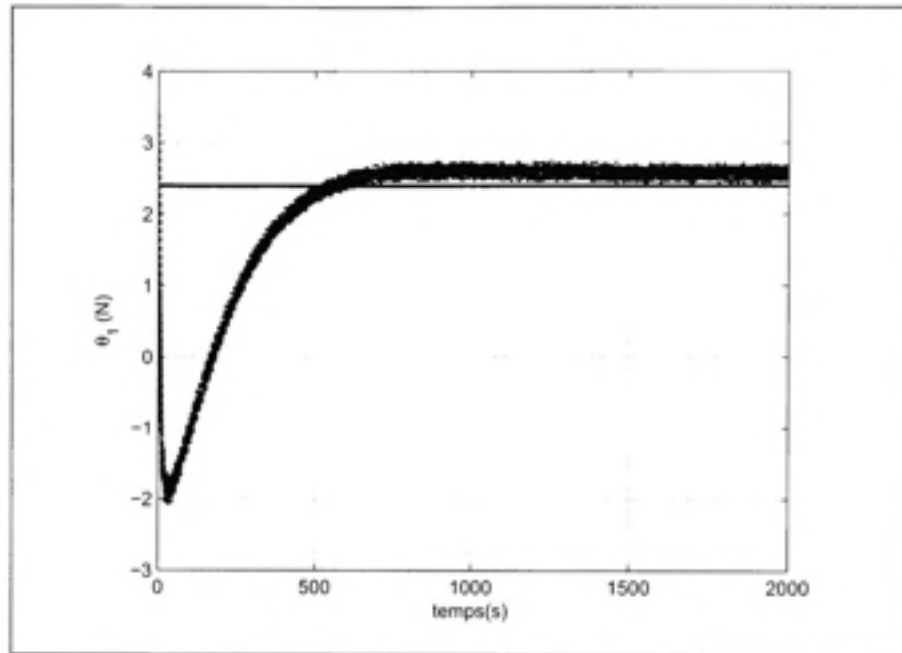


Figure 4.14 Valeurs réelle et estimée de θ_1 (commutation approximée).

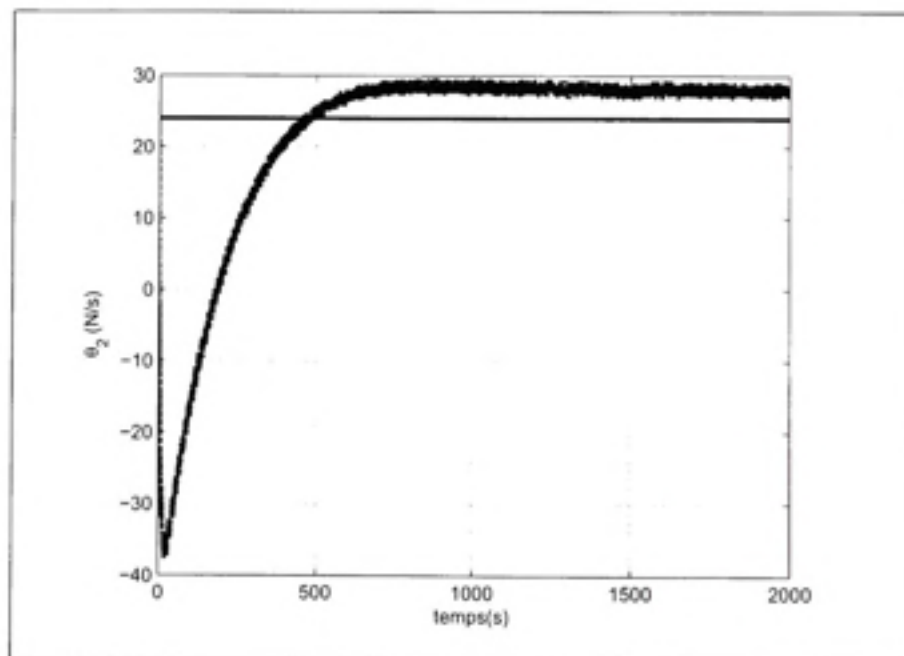


Figure 4.15 Valeurs réelle et estimée de θ_2 (commutation approximée).

Les figures 4.14 à 4.18 présentent les valeurs estimées des paramètres inconnus et leur vraie valeur. Il est clair que ces valeurs estimées convergent vers des valeurs proches des vraies valeurs.

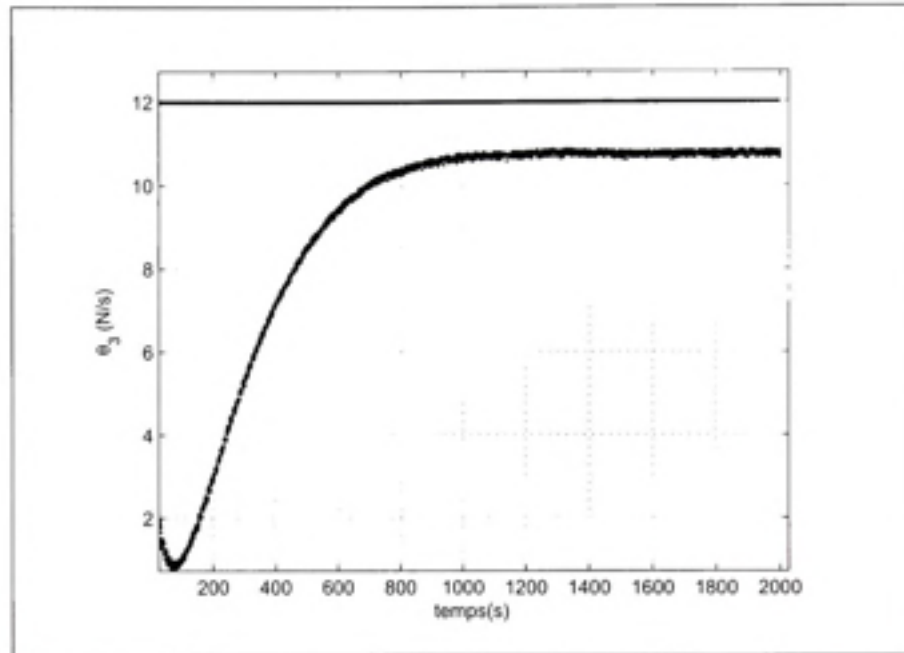


Figure 4.16 Valeurs réelle et estimée de θ_3 (commutation approximée).

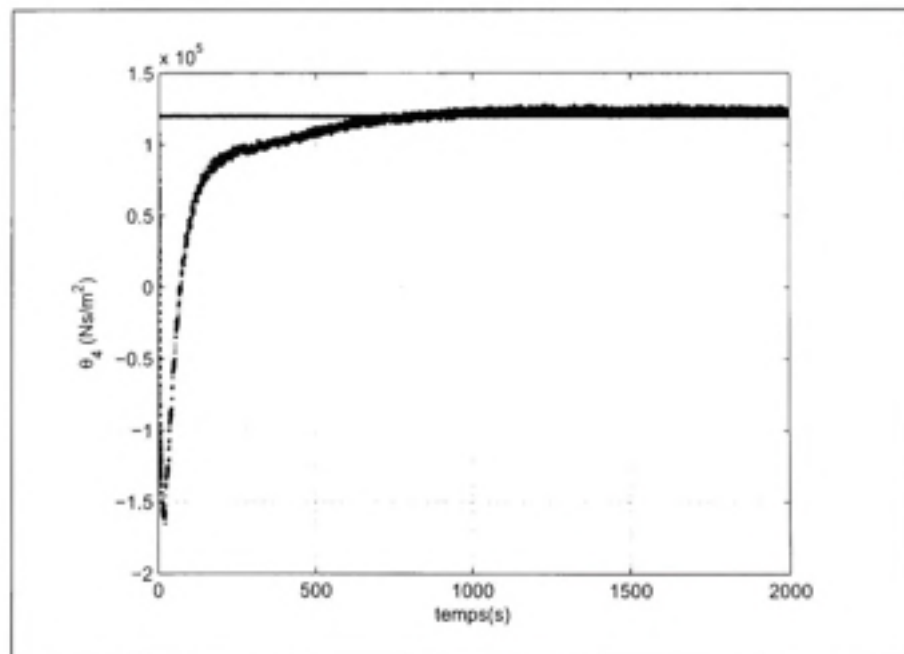


Figure 4.17 Valeurs réelle et estimée de θ_4 (commutation approximée).

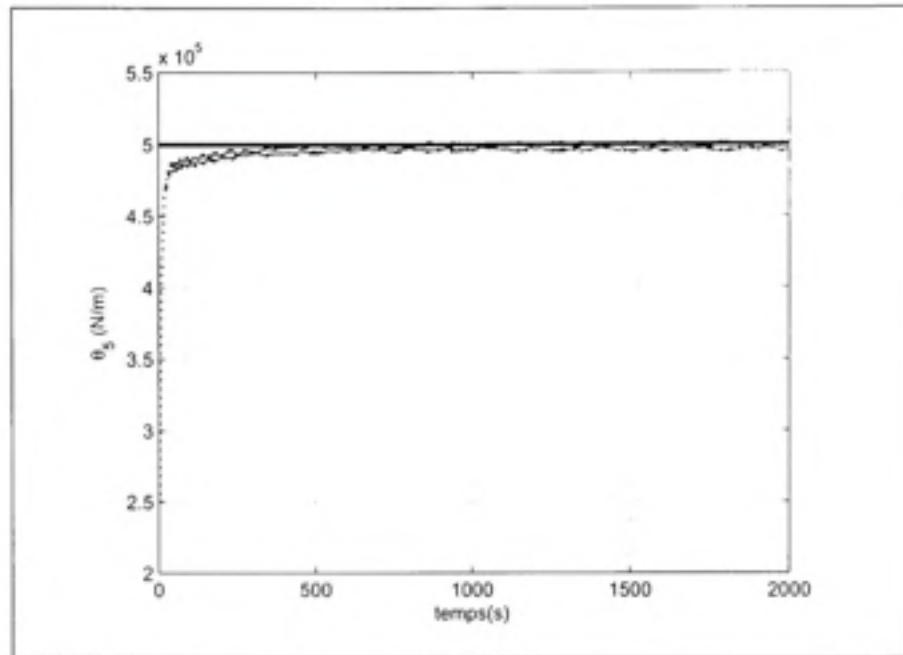


Figure 4.18 Valeurs réelle et estimée de θ_5 (commutation approximée).

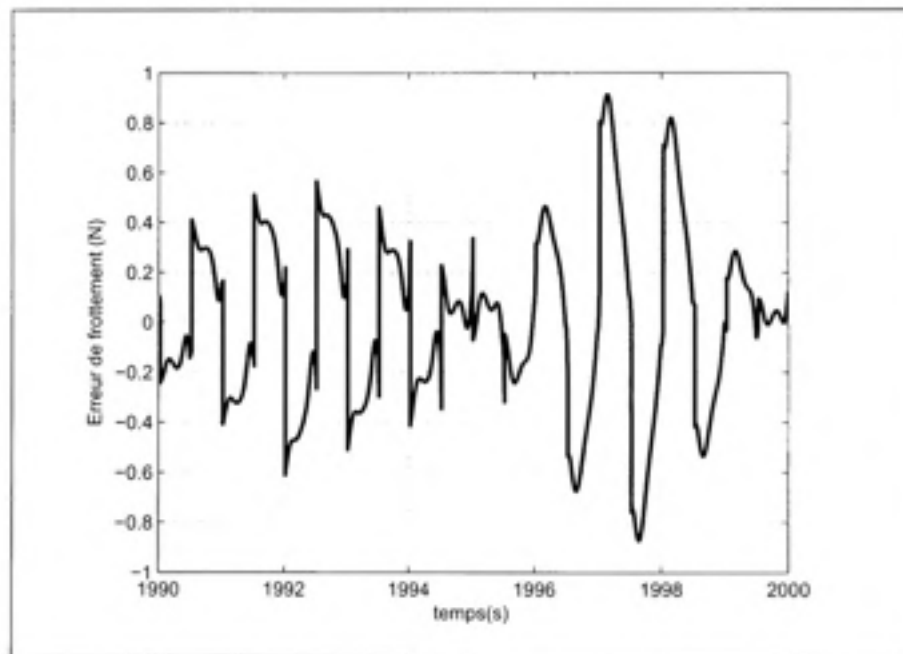


Figure 4.19 Erreur de frottement (commutation approximée).

Les figures 4.20 et 4.21 représentent les frottements réel et estimé (calculé à partir des paramètres estimés en utilisant la fonction de commutation approximée). D'après ces deux figures, les deux forces de frottement sont proches, mais avec une erreur plus importante qu'avec la simulation de l'estimateur avec la fonction de commutation idéale (figure 4.12).

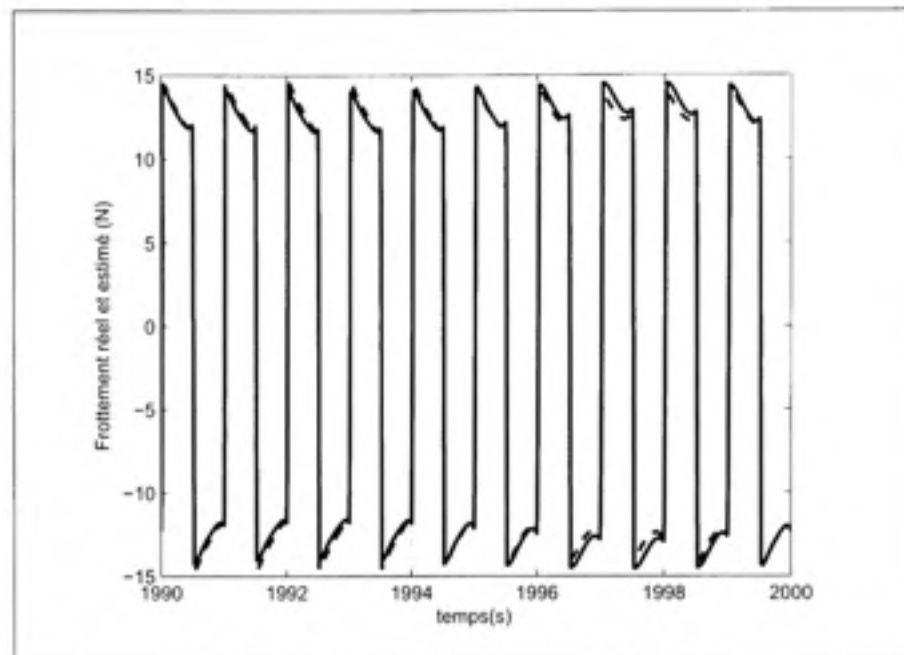


Figure 4.20 Frottements réel et estimé (commutation approximée).

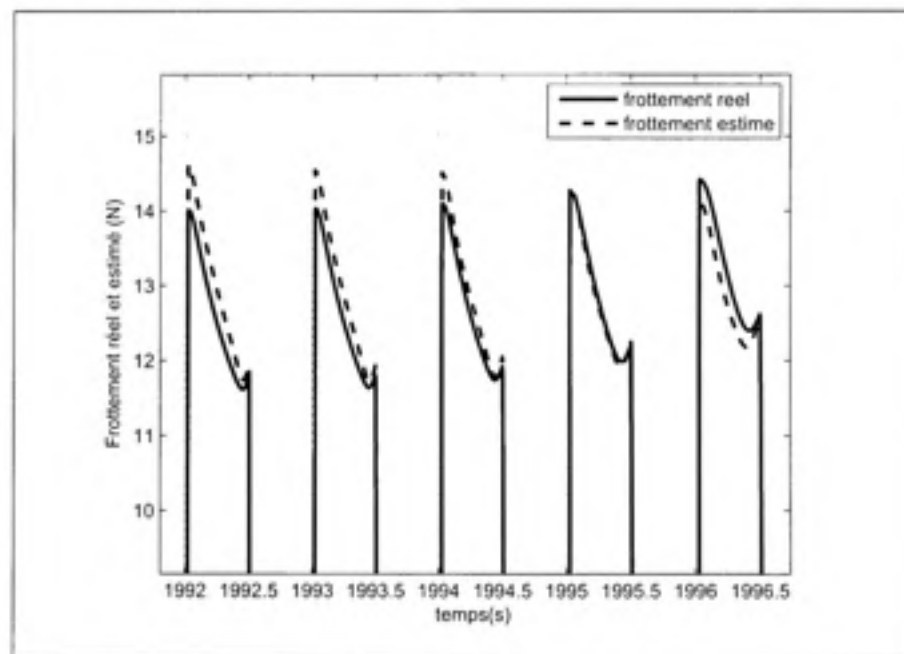


Figure 4.21 Courbe de frottement réel et frottement estimé (agrandissement) (commutation approximée).

En effet, les erreurs d'estimations pour la première simulation, avec une fonction de commutation idéale, ne dépassent pas $0.05N$ alors que celles pour la présente simulation, avec une fonction de commutation approximée, sont de l'ordre de $0.9N$ (voir figures 4.12 et 4.19). Toutefois, comme expliqué au chapitre 3, les erreurs d'estimation de la force de frottement sont

beaucoup plus affectées par l'utilisation de la fonction de commutation approximée que les erreurs d'estimation des paramètres. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, pour palier à cette erreur, la force de frottement estimée peut être obtenue à l'aide des paramètres estimés combinés à la fonction de commutation estimée proposée au chapitre 3 (section 3.6.3). Avec cette fonction de commutation estimée, les erreurs d'estimation deviennent comparable avec celles obtenues à l'aide de la fonction de commutation idéale.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'application de l'observateur de Marino pour l'identification du modèle de frottement GMS sans avoir recourt à la mesure de la force de frottement est présentée. Pour ce faire, une reformulation du filtrage des signaux qui permet de reconstruire la force de frottement filtrée à partir des signaux de commande et de vitesse est proposée.

Afin de respecter les conditions de continuité des signaux, le filtrage proposé incorpore une réinitialisation des conditions initiales à chaque commutation.

La performance de l'observateur est étudiée par voie de simulation en deux principales parties : la première partie est présentée avec une fonction de commutation idéale alors que la deuxième partie est présentée avec la fonction de commutation approximée proposée au chapitre 3. L'observateur montre de bonnes performances dans les deux cas particulièrement pour ce qui a trait à l'estimation des paramètres. Aussi, comme montré au chapitre 3, l'utilisation de la fonction de commutation estimée permet de rectifier en grande partie l'erreur d'estimation de la force de frottement introduite par la fonction de commutation approximée.

CHAPITRE 5

IDENTIFICATION DU MODÈLE DE FROTTEMENT GMS BASÉ SUR LA MESURE DE FROTTEMENT : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous utiliserons un dispositif expérimental qui représente le système étudié dans cette thèse à savoir un corps qui glisse sur une surface sous l'action d'une force externe et d'une force de frottement. La force de frottement générée par le système sera mesurée puis utilisée pour valider de façon expérimentale l'approche d'estimation proposée au chapitre 3.

5.2 Rappel de la problématique

Le système étudié dans cette thèse est régi par l'équation dynamique suivante :

$$M\dot{v} = u - F \quad (5.1)$$

où v est la vitesse de déplacement du corps de masse M , u est la force de commande, \dot{v} est l'accélération et F est la force de frottement.

On suppose que la force de frottement peut être modélisée par le modèle GMS linéarisé par les approximations **A1** et **A2** présentées au chapitre 3 (section 3.5). La validation considérée dans ce chapitre consiste alors à recueillir des mesures de force de frottement et de vitesse du banc d'essai. Ces données seront ensuite utilisées pour valider l'estimateur proposé au chapitre 3.

5.3 Description du dispositif expérimental

Dans cette section, le dispositif expérimental utilisé pour recueillir les données qui serviront à la validation est présenté en détail. Ce dispositif sera utilisé pour reproduire le comportement du système masse-frottement décrit dans les autres chapitres. Cependant, le dispositif est conçu spécifiquement pour faciliter la mesure de la force de frottement qui est nécessaire pour la validation. Ce dispositif est composé de deux corps, d'un actionneur linéaire, d'un capteur de

position et d'un capteur de force. Le corps de masse M se déplace sous l'effet de la force générée par l'actionneur linéaire. Le capteur de position incorporé à l'actionneur mesure ce déplacement. Pour engendrer la force de frottement, un deuxième corps est déposé sur le corps de masse M tout en étant contraint à ne pas se déplacer dans la direction horizontale. Il y a donc un glissement relatif entre les surfaces des deux corps qui donne lieu à la force de frottement. Contre la butée qui assure la contrainte de mouvement horizontale est installé le capteur de force qui mesure ainsi la force de frottement (voir figure 5.1).

Pour assurer la consistance du déplacement et de la force de frottement, une commande du déplacement du corps est mise en oeuvre grâce à des cartes d'acquisition et un système d'ordinateurs temps réel.

Dans ce qui suit, une description détaillée des différentes composantes du dispositif expérimental accompagnée par des schémas représentatifs est présentée. Voici une description de chacune des composantes du dispositif schématisé par la figure 5.1.

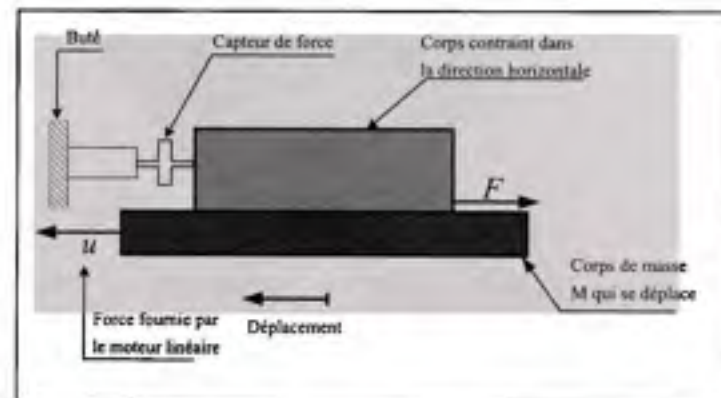


Figure 5.1 Système moteur-corps.

Capteur de Force : Le capteur de force est un instrument de mesure qui permet de mesurer les forces de traction et de compression entre ses bornes. Il donne en conséquence une tension électrique relative à la force appliquée.

Le capteur de force utilisé est de type **LC 201-25** dont la capacité est de $(\pm 100 \text{ N})$ $(\pm 25 \text{ lb})$. Le capteur de force est illustré par la figure 5.2.



Figure 5.2 Capteur de Force.

Moteur linéaire : L'actionneur linéaire est un moteur à courant continu sans balais dont le mouvement est linéaire (voir figure 5.3). Le moteur utilisé de type **Parker Trilogy 11007M-B Modular**. Il inclus un encodeur linéaire de type **RGH22** qui permet de mesurer la position avec une précision de $0.1\mu m$.

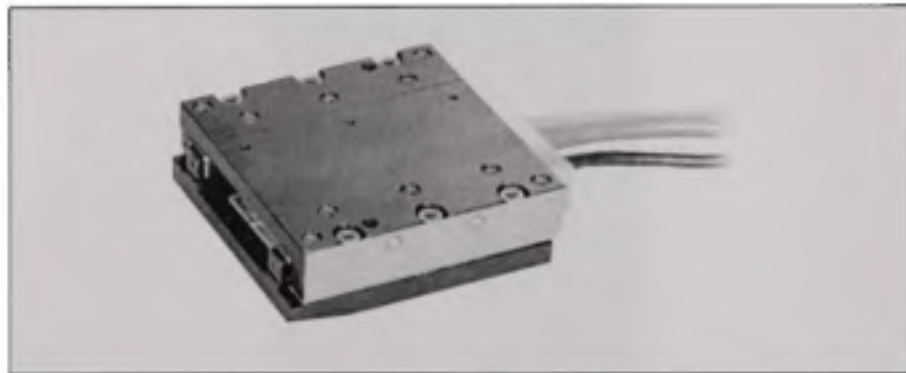


Figure 5.3 Moteur linéaire.

Conditionneur : Le conditionneur est un amplificateur de signal qui est utilisé pour amplifier la tension générée par le capteur de force. Le conditionneur utilisé est de type **DMD-465WD** de la compagnie OMEGA. La figure 5.4 montre le conditionneur.

Pilote matériel du moteur¹ : Le pilote matériel permet de fournir la puissance à chacune des phases du moteur de façon à ce que la force engendrée soit proportionnelle au signal de commande (voir figure 5.5). Il est de type **ELMO motion control EOR-5/230**.

1. Pilote matériel du moteur : en anglais, Motion control drive



Figure 5.4 Conditionneur de signal.



Figure 5.5 Pilote Matériel et contrôleur de mouvement.

Cartes d'acquisitions : Les cartes d'acquisition assurent le transfert des mesures et de la force de commande entre l'ordinateur et les capteurs ainsi que le pilote matériel du moteur linéaire. Dans le dispositif expérimental, deux cartes d'acquisition sont utilisées : la première est de type **PCI-6601** de National Instrument pour l'acquisition des données à partir de l'encodeur et la seconde est une carte de type **PCI-6052** de National Instrument qui assure le transfert des données entre l'ordinateur et le capteur de force ainsi que le pilote matériel.

Ordinateurs : Les ordinateurs sont utilisés pour commander le moteur linéaire d'une part et pour collecter les données et les traiter d'autre part. Le dispositif expérimental comprend deux ordinateurs : le premier est doté du système d'exploitation Windows. Il est utilisé pour éditer, à l'aide du logiciel Simulink, le programme de commande et pour traiter les données récupérées à partir des capteurs. Quant au second ordinateur, il est doté d'un système d'exploitation temps réel sur lequel le logiciel de commande en temps réel XPC est installé. La liaison entre ces deux ordinateurs est assurée par un lien Ethernet via un câble de type RJ45.

La figure 5.6 présente une photo du dispositif expérimental qui est installé dans le laboratoire CORO (Laboratoire de Commande et de Robotique).

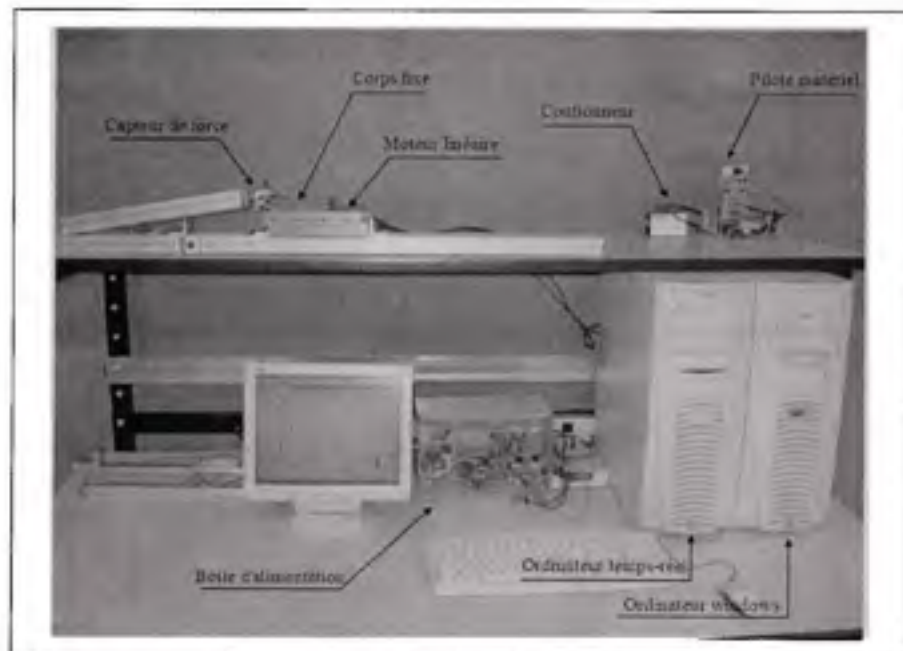


Figure 5.6 photo du dispositif expérimental.

5.4 Résultats expérimentaux

Dans cette section, les résultats expérimentaux de l'identification du modèle de frottement GMS basés sur la mesure de frottement sont présentés. Cette mesure est assurée par le capteur de force installé sur le dispositif. L'application de l'approche d'identification sur le dispositif expérimental se fait en trois étapes : la première étape consiste à déterminer à partir d'un essai

en préglissement une valeur à priori du paramètre de préglissement k . La deuxième étape sert à déterminer une valeur à priori du coefficient de frottement de Coulomb σ_c en appliquant une méthode d'identification bien connue décrite dans [40]. La troisième étape consiste à appliquer l'approche proposée dans cette thèse pour estimer la force de frottement et tous les paramètres du modèle GMS.

5.4.1 Première étape

La première étape de la procédure d'identification sert à déterminer une valeur à priori du paramètre de préglissement. Pour ce faire, nous procédons à un essai en préglissement sur le dispositif expérimental en utilisant une très faible vitesse de façon à ce que le système soit en régime de préglissement. Ceci permet de tracer la force de frottement en fonction du déplacement et par la suite, de déterminer la valeur du paramètre de rigidité k du préglissement. Pour ce faire, la pente de la caractéristique tracée à la figure 5.7 est déterminée [34]. Le résultat de cette identification est $k = 5 \times 10^5 N/m$.

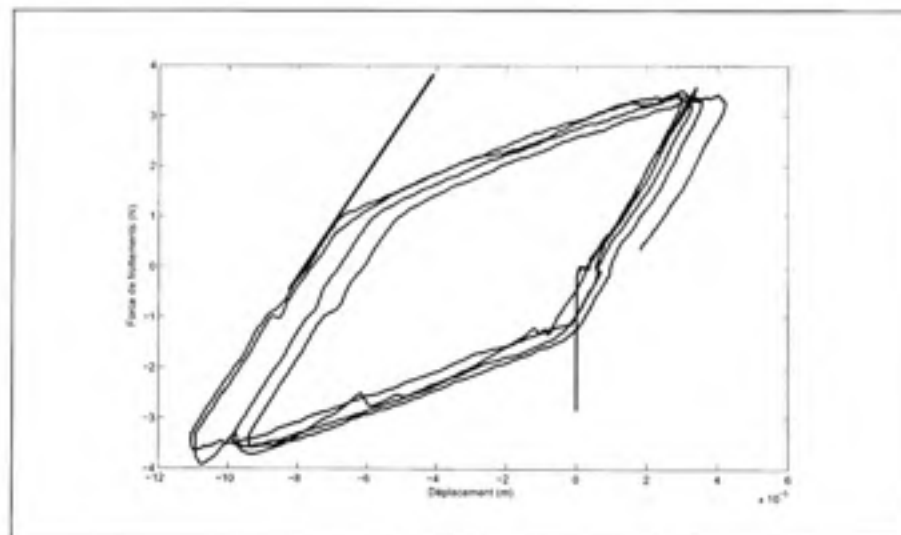


Figure 5.7 Frottement en fonction du déplacement.

5.4.2 Deuxième étape

La deuxième étape consiste à trouver une valeur approximative du paramètre de Coulomb. Pour ce faire, l'estimateur de Coulomb introduit par Yazdizadeh et al. [92] est utilisé. En effet, puisque le frottement de Coulomb est définie comme une force, antagoniste au mouvement, dont l'amplitude est constante et indépendante de la vitesse (voir section 1.2), l'estimation du paramètre de Coulomb est facilement réalisable. Ceci est étudié dans plusieurs travaux, comme ceux de Aizel et al. [15] et de Yazdizadeh et al. [92].

L'essai appliqué sur le dispositif expérimental a permis de trouver une valeur du paramètre de Coulomb $\sigma_c = 2.2$. Les signaux de force et de vitesse qui ont été utilisés pour cette identification sont illustrés respectivement par les figures 5.8 et 5.9.

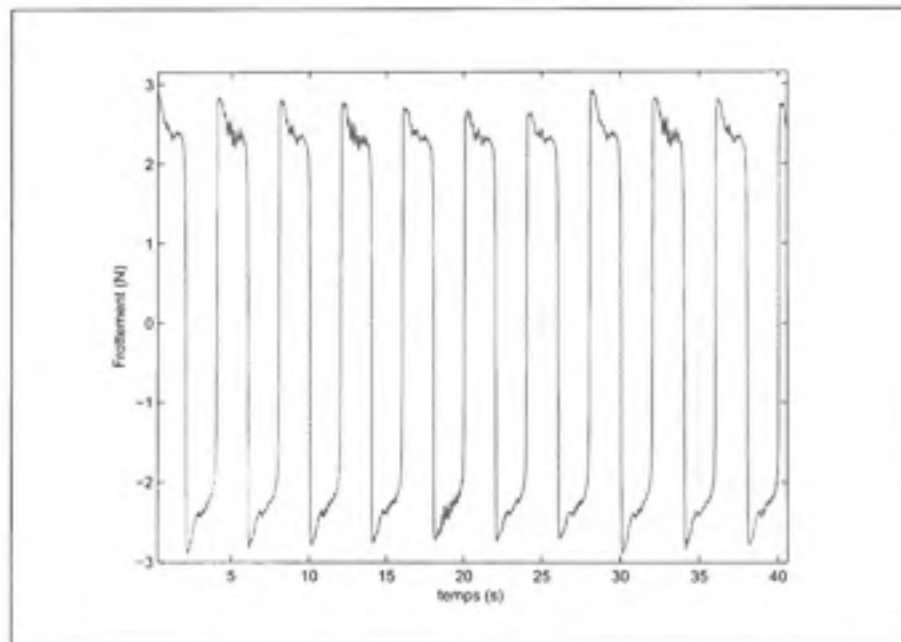


Figure 5.8 Force de frottement expérimentale.

5.4.3 Troisième étape

Une fois que les paramètres de préglissement et de Coulomb sont identifiés, la commutation approximée proposée au chapitre 3 peut être combinée à l'estimateur proposé pour identifier l'ensemble des paramètres du modèle GMS. Cette approche est présentée en détail à la section

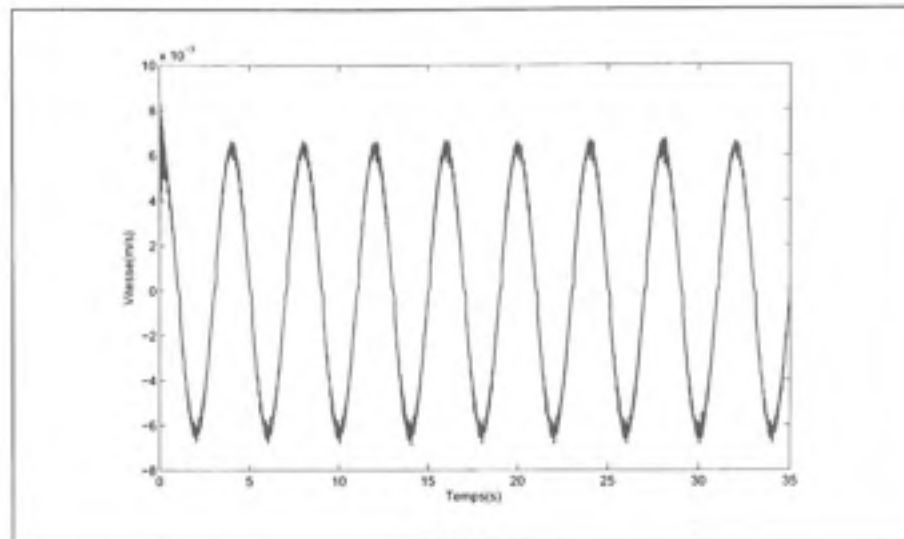


Figure 5.9 Signal de vitesse expérimental.

3.5 du chapitre 3.

Pour la procédure d'identification, le filtre utilisé est une cascade de deux passe bas de premier ordre dont les fréquences de coupure ont été fixées à $\omega_{c1} = 2\pi \text{ rad/s}$ et $\omega_{c2} = 20\pi \text{ rad/s}$. Ce filtre, expliqué en détail au chapitre 3, est utilisé pour éliminer les discontinuités dans le modèle afin de pouvoir respecter les conditions d'application de l'observateur de Marino.

La validation à partir des données expérimentales a été réalisée en considérant les paramètres de l'observateur donnés dans le tableau 5.1. Pour la mise en oeuvre de la fonction de commutation approximative, une zone morte entre -10^{-5} et $+10^{-5}$ a été ajoutée au signal de vitesse pour éviter les fausses commutations qui auraient peut être générées artificiellement par le bruit de mesure.

Tableau 5.1 Valeurs des gains de l'estimateur et valeur nominale de Stribeck

Gains	Valeurs
K	9×10^5
Γ	$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 \times 10^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.5 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \times 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \times 10^2 \end{pmatrix}$
θ_s^N	4×10^4

5.4.4 Résultats

L'application de l'observateur donne les résultats graphiques présentés sur les figures qui suivent. La figure 5.10 représente l'erreur de prédiction (erreur d'estimation de la force de frottement).

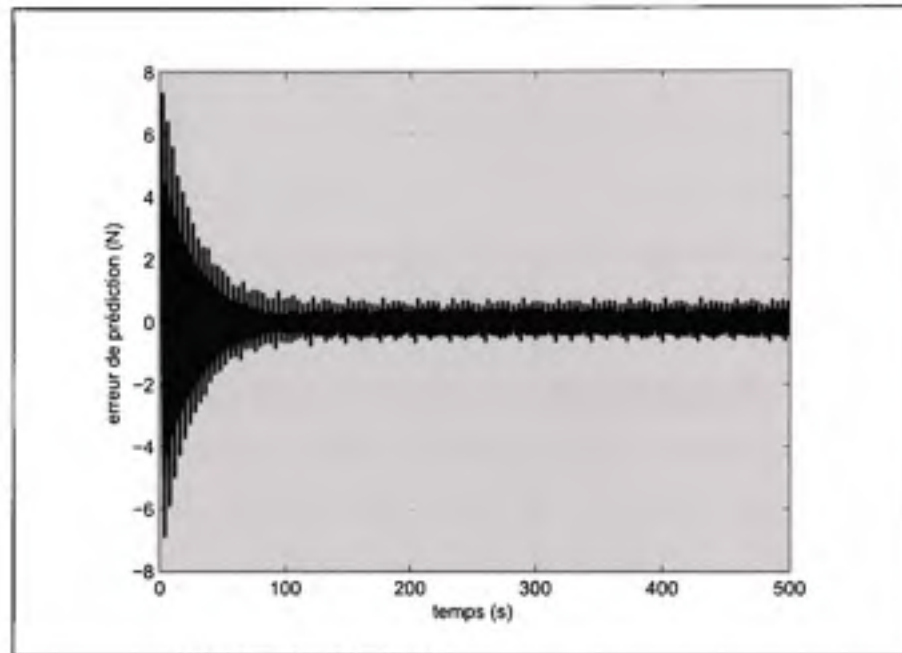


Figure 5.10 Erreur de prédiction.

Les figures 5.11, 5.12, 5.13 et 5.14 représentent les valeurs estimées des paramètres du régime de glissement et la figure 5.15 est celle du paramètre du régime de préglissement.

D'après ces figures, toutes les valeurs estimées sont bornées. Elles convergent vers des valeurs positives sauf celle à la figure 5.13 qui converge vers une valeur négative. Ce comportement peut être expliqué par deux raisons : la première découle du fait que le signal d'excitation pourrait être non persistant alors que la condition de persistance d'excitation est nécessaire pour la convergence de l'estimateur. La deuxième raison est traduite par le fait que l'ensemble des paramètres qui représente la solution du problème d'estimation pourrait ne pas être unique, c'est-à-dire, il existe plus qu'un ensemble de paramètres qui peuvent être utilisés pour construire la force de frottement estimée.

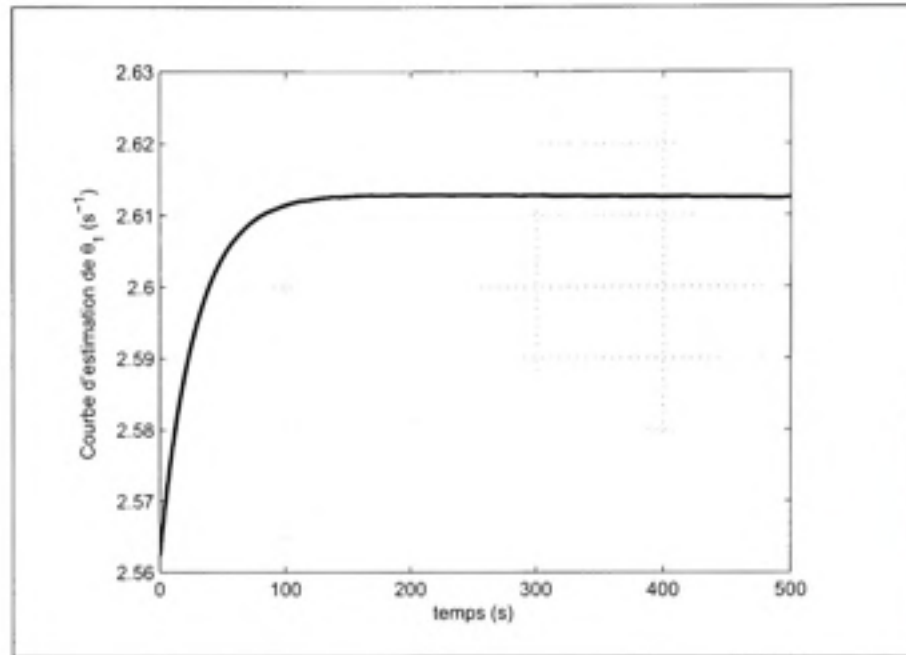


Figure 5.11 Courbe de l'estimation de θ_1 .

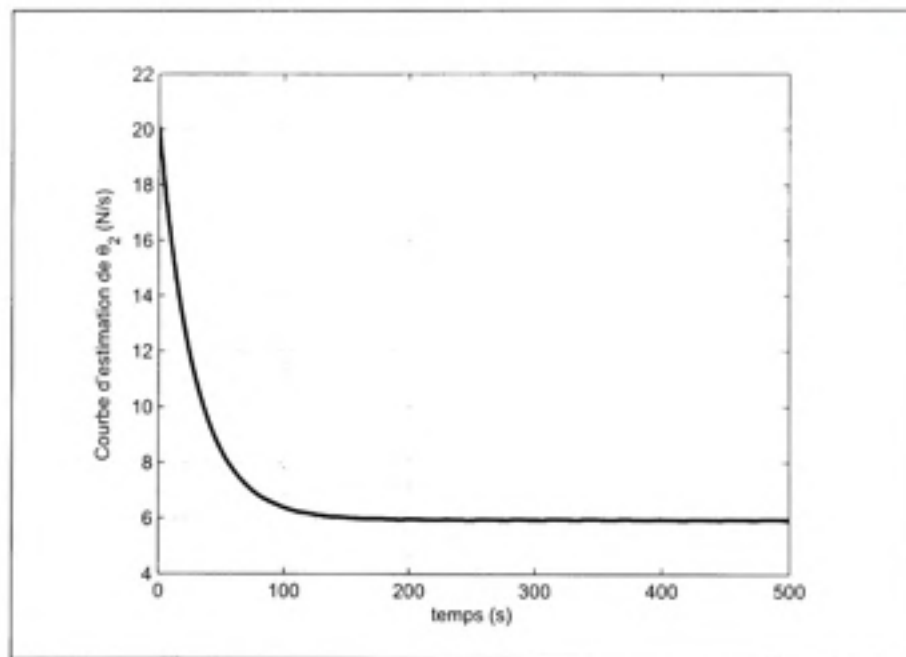


Figure 5.12 Courbe de l'estimation de θ_2 .

D'après la figure 5.14 qui représente la courbe d'estimation du paramètre θ_4 , il est clair que la convergence de ce paramètre semble moins bonne que celle des autres paramètres. Ceci peut s'expliquer en partie par le fait que la valeur de l'élément du vecteur régresseur correspondant à θ_4 est très faible comparativement à ceux des autres paramètres. Il faut donc introduire un gain très élevé qui entraîne une dégradation de la convergence en introduisant des problèmes

numériques au niveau de la simulation. Qui plus est, le choix du paramètre nominal de la linéarisation de la fonction de Stribeck pourrait avoir un effet significatif sur la convergence.

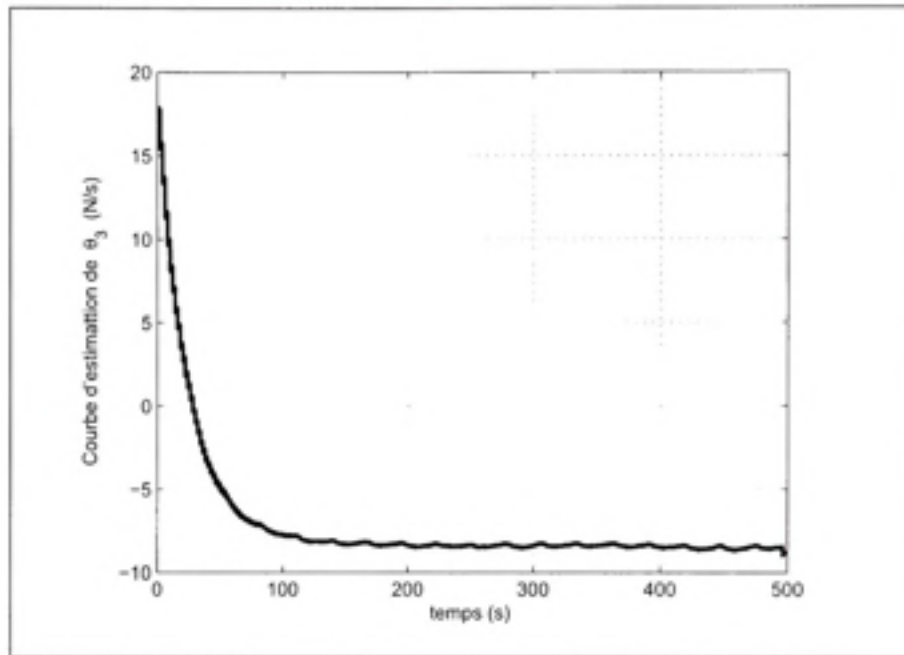


Figure 5.13 Courbe de l'estimation de θ_3 .

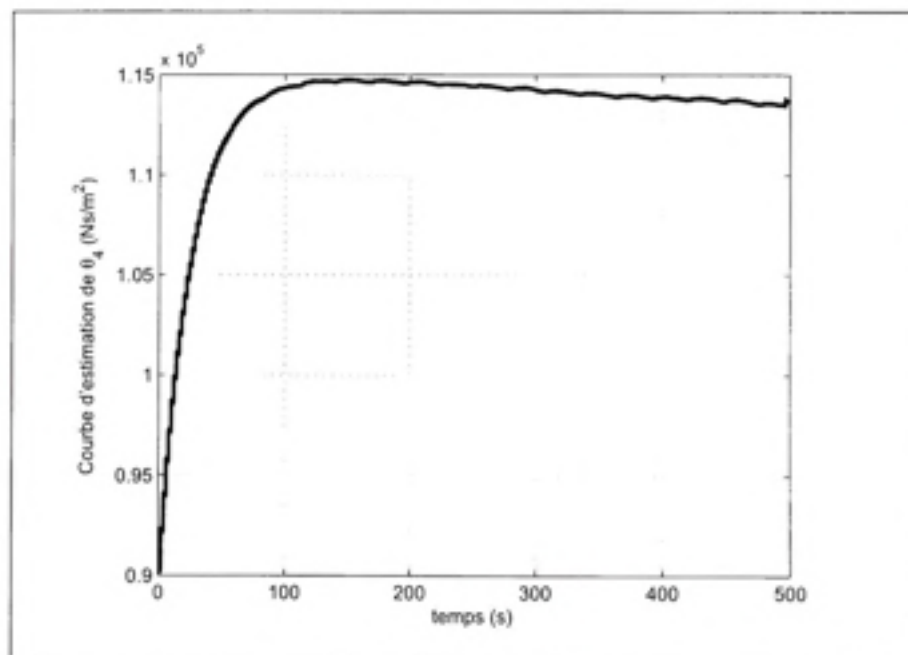


Figure 5.14 Courbe de l'estimation de θ_4 .

Selon la figure 5.15, l'estimation de θ_5 converge vers une valeur proche de celle trouvée par l'essai de préglissement.

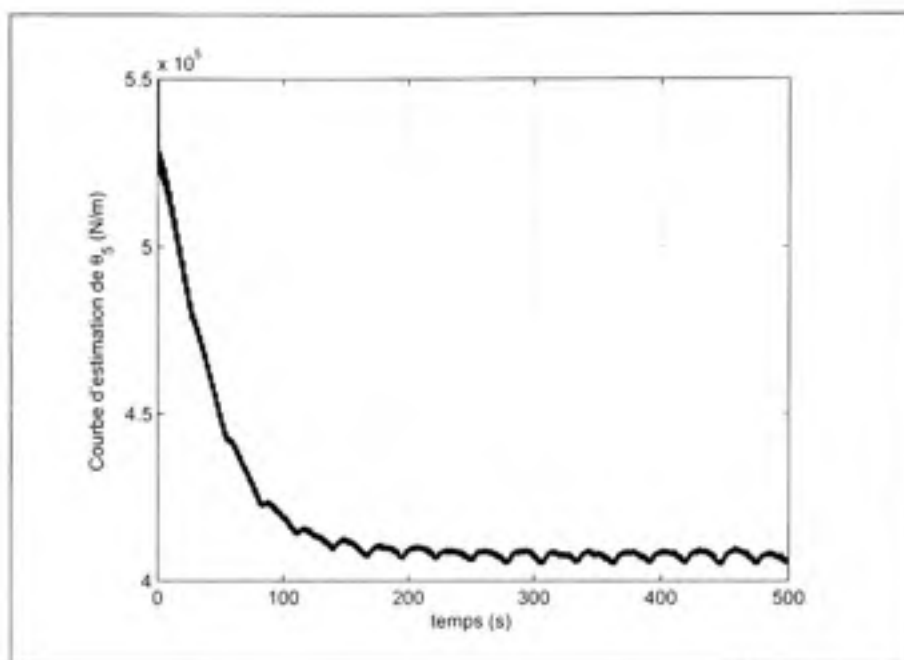


Figure 5.15 Courbe de l'estimation de θ_5 .

La force de frottement réelle et celle calculée à partir des paramètres estimés sont présentées à la figure 5.16. Un agrandissement de ces deux forces est présenté à la figure 5.17. D'après ces deux figures, les deux forces de frottement sont relativement proches. Donc, l'observateur de Marino est capable d'estimer avec une assez bonne précision la force de frottement malgré les différentes perturbations introduites, d'une part, par les approximations proposées et, d'autre part, par les incertitudes du dispositif expérimental.

Il est à noter que, en plus d'appliquer l'approche d'identification avec mesure de frottement, nous avons tenté d'appliquer l'approche d'identification sans aucune mesure de frottement (l'approche proposée au chapitre 4). Toutefois, nous avons rencontré une difficulté qui rend l'application de la méthode peu concluante. En effet, pour appliquer l'observateur de Marino nous avons supposé que le comportement du moteur linéaire est caractérisé par un simple gain. C'est-à-dire que le courant d'excitation du moteur et la force générée de ce dernier sont reliés par une constante que nous avons identifiée par un essai en boucle ouverte. Cependant, l'observateur n'était pas en mesure d'estimer correctement ni la force de frottement ni les paramètres du modèle GMS. Ainsi, nous avons conclu que la fonction de transfert du moteur

doit être modélisée par une caractéristique non linéaire. En raison des contraintes de temps, cette caractérisation de l'actionneur linéaire ne sera pas couverte par le travail de cette thèse.

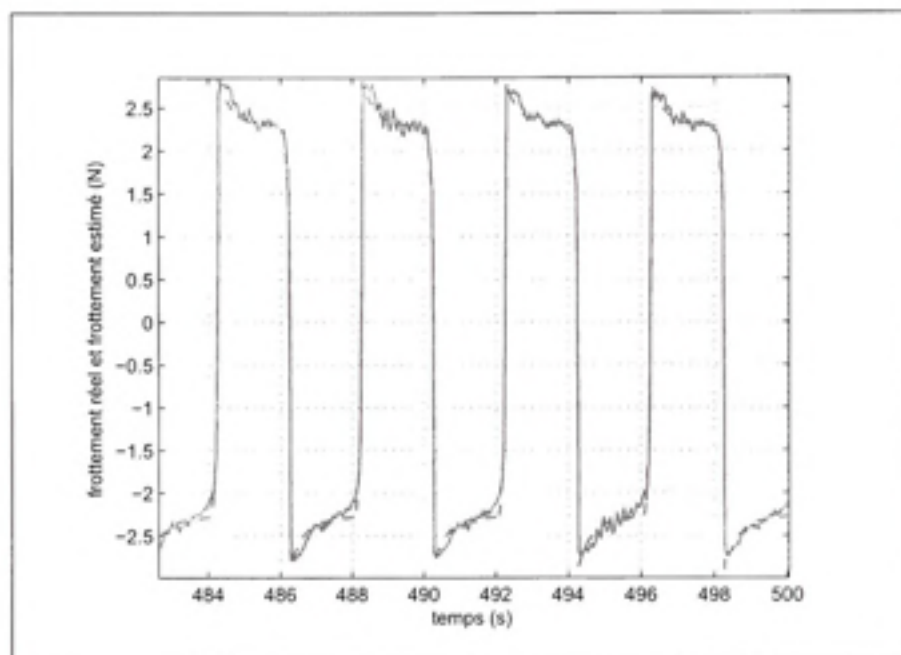


Figure 5.16 Frottement réel et estimé.

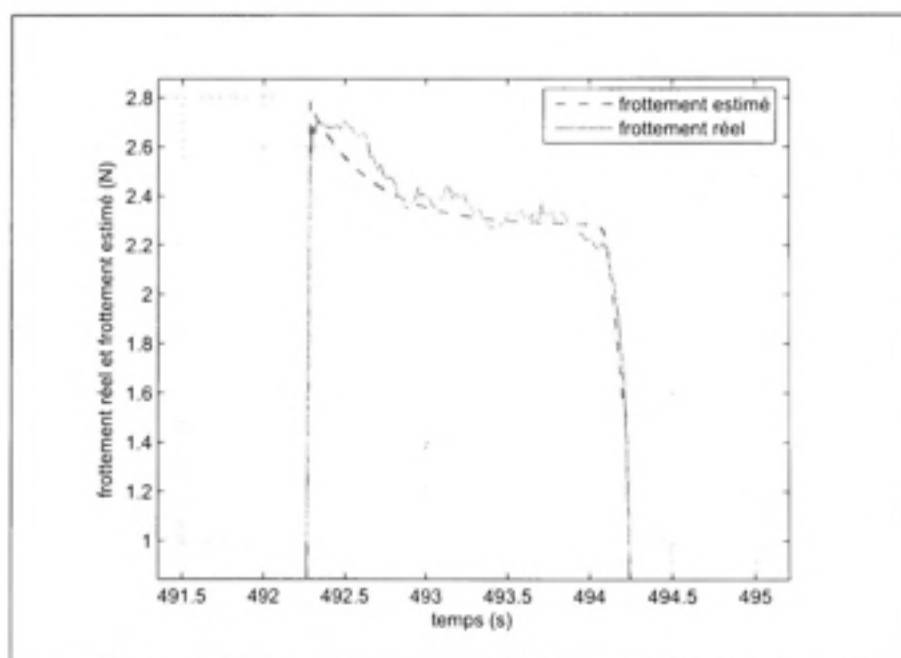


Figure 5.17 Frottement réel et estimé (agrandissement).

5.5 Conclusion

Au cours du présent chapitre, une validation expérimentale de l'approche d'identification du modèle de frottement GMS basée sur la mesure de la force de frottement est présentée.

Pour ce faire, une description détaillée du dispositif expérimental, utilisé lors de la validation, a été présentée. Les résultats expérimentaux, présentés à la dernière section, ont démontré que l'observateur possède une bonne performance et estime la force de frottement ainsi que les paramètres du modèle GMS avec une bonne précision.

La validation expérimentale sur le dispositif est faite en trois étapes : la première étape permet de déterminer une valeur à priori du coefficient d'élasticité à l'aide d'un essai en préglissement. La deuxième étape consiste à estimer la valeur du coefficient de Coulomb. Les deux valeurs ainsi trouvées permettent de construire la fonction de commutation approximée. Quant à la troisième étape, elle consiste à appliquer l'observateur de Marino pour estimer tous les paramètres du modèle GMS ainsi que la force de frottement.

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Certes, le frottement est un phénomène néfaste dans les systèmes de commande; il engendre d'importantes dégradations des performances (erreurs en régimes permanents, mouvement saccadé, vibration et oscillation), surtout lorsque la précision est une spécification exigée.

La contribution de cette thèse servira éventuellement à corriger ces effets néfastes en introduisant une approche d'identification de tous les paramètres du modèle de frottement GMS en temps réel.

Ainsi, dans le but de situer notre contribution par rapport aux travaux de modélisation et de compensation du frottement, nous établissons d'abord une étude bibliographique assez exhaustive des différents modèles de frottement ainsi que des techniques d'identification et de compensation du frottement en mettant en relief les qualités et les limites de ces travaux. Ensuite, nous développons d'abord notre approche d'identification de la composante statique du frottement à savoir le frottement de Stribeck dans lequel, les paramètres inconnus n'agissent pas d'une façon linéaire dans la formulation. Pour cette raison, notre approche est basée sur une formulation non linéaire combinée avec une technique d'optimisation (min-max) qui garantit la stabilité et la convergence des erreurs d'estimation sous certaines conditions.

Cette approche ainsi introduite prouve son efficacité avec le frottement de Stribeck, mais n'est pas applicable au modèle GMS.

L'étape suivante concerne l'identification du frottement GMS avec une approche basée sur un observateur robuste (Observateur de Marino). En effet, nous développons une stratégie d'identification des paramètres du modèle tout en utilisant la mesure de la force de frottement et nous introduisons deux approximations et une méthode de filtrage afin d'éliminer respectivement les non-linéarités et les discontinuités du modèle. Une étude de la fonction de commutation qui assure la transition entre les deux régimes de frottement est également présentée et validée par le biais de simulations.

Les résultats de simulation montrent que l'observateur identifie, avec une bonne précision, les paramètres du modèle avec les deux types de fonctions de commutation (commutation idéale et approximée). Cependant, l'observateur avec la fonction de commutation idéale donne une erreur de frottement moins élevée que celle avec la fonction de commutation approximée. Par contre, l'observateur avec la fonction de commutation estimée donne une erreur de frottement assez proche de celle obtenue avec une fonction de commutation idéale.

Par la suite, nous présentons l'approche d'identification du modèle de frottement GMS sans mesure de la force de frottement. Il s'agit de la même approche, mais avec une reconstruction de la force de frottement filtrée. Cette reconstruction permet de calculer la force de frottement filtrée à partir des signaux mesurables de commande et de vitesse combinée à un filtrage qui assure la continuité des signaux grâce à des conditions initiales particulières, qui sont réappliquées à chaque commutation du modèle. Les résultats de simulation montrent, encore une fois, que l'approche proposée permet d'identifier, avec une bonne précision, les paramètres du modèle de frottement avec les deux types de commutation.

Finalement, nous pouvons conclure que l'expérimentation réalisée au sein de notre laboratoire valide notre approche dans un environnement réel. Cependant, il est très important, pour poursuivre ce travail, de signaler quelques recommandations à savoir :

- Il est très important d'identifier, de façon plus précise, le dispositif expérimental et en particulier l'actionneur linéaire. En effet, lors de notre expérimentation, il s'est avéré impossible de valider l'approche d'identification s'appuyant sur la reconstruction de la force de frottement filtrée, parce que la modélisation linéaire que nous avons considérée pour l'actionneur n'est pas suffisamment précise.
- Une étude de mise en oeuvre de l'algorithme d'identification en temps réel serait d'une grande importance pour poursuivre ce travail.
- Il serait possible d'appliquer l'approche proposée dans cette thèse à un modèle de frottement GMS à plusieurs étages. Cette extension nécessiterait, toutefois, une étude de la fonction de la commutation qui deviendrait beaucoup plus complexe dans ce cas.

- Puisque l'approche d'identification proposée permet de compenser l'effet de frottement dans les systèmes de commande, il serait très intéressant d'appliquer cette méthode à un système de commande de position.

ANNEXE I

DÉMONSTRATIONS DES PROPRIÉTÉS ET DU THÉORÈME DU CHAPITRE 2

Propriété 2.1 Les fonctions $g(v)$, $g(v)\text{sign}(v)$ et $g(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_*v^2}$ sont Lipschitz par rapport à t . La fonction $f(\theta, \omega)$ est également Lipschitz par rapport à θ et ω .

Preuve : Selon l'équation (2.12), on a

$$g(v) = ke^{-k|v|}|v| + 1 - e^{-k|v|} \quad (\text{I.1})$$

On veut démontrer que $g(v)$ est Lipschitz par rapport au temps. Pour ce faire, on démontre, tout d'abord, que la fonction $g(v)$ est Lipschitz par rapport à la variable $|v|$. Si on calcule cette dérivée, on trouve la fonction suivante qui est continue par rapport à $|v|$:

$$\frac{dg(v)}{d|v|} = 2ke^{-k|v|} - k^2|v|e^{-k|v|} \quad (\text{I.2})$$

Selon l'hypothèse 2.6, la vitesse est bornée ce qui implique que la dérivée de $g(v)$ par rapport à $|v|$ est également bornée. Donc, la fonction $g(v)$ est Lipschitz par rapport à $|v|$ [93].

De plus, la variable $|v|$ est Lipschitz par rapport à v parce que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| |v_2| - |v_1| \right| \leq |v_2 - v_1| \quad (\text{I.3})$$

En effet, l'égalité est vérifiée lorsque v_1 et v_2 sont de même signe tandis que l'inégalité est vérifiée lorsque v_1 et v_2 sont de signe opposée.

Finalement, la variable $v(t)$ est Lipschitz par rapport au temps selon l'hypothèse 2.6. Ainsi, la fonction $g(v)$ est Lipschitz par rapport au temps; c'est-à-dire, il existe une constante positive Φ_g telle que $\forall t_1, t_2$:

$$\left| g(v(t_1)) - g(v(t_2)) \right| \leq \Phi_g |t_1 - t_2| \quad (\text{I.4})$$

La fonction $g(v)\text{sign}(v)$ est dérivable partout par rapport à v et est continue. En effet,

- si $v > 0^+$ alors $g(v^+)sign(v^+) = g(v^+) = ke^{-kv^+}v^+ + 1 + e^{-kv^+}$ et la dérivée est calculée comme suit :

$$\frac{dg(v^+)}{dv^+} = 2ke^{-kv^+} - k^2e^{-kv^+}v^+ \quad (I.5)$$

- si $v < 0^-$ alors $g(v^-)sign(v^-) = -g(v^-) = ke^{kv^-}v^- - 1 + e^{kv^-}$ et la dérivée est calculée comme suit :

$$\frac{-dg(v^-)}{dv^-} = 2ke^{kv^-} + k^2e^{kv^-}v^- \quad (I.6)$$

en combinant les deux cas, on peut écrire :

$$\left. \frac{dg(v)sign(v)}{dv} \right|_{v^+=0^+} = \left. \frac{dg(v)sign(v)}{dv} \right|_{v^-=0^-} = 2k \quad (I.7)$$

Donc, la fonction $g(v)sign(v)$ est dérivable partout par rapport à v et est continue. De plus, puisque la vitesse est supposée bornée et continue alors la dérivée de la fonction $g(v)sign(v)$ est bornée et continue ce qui implique que cette fonction est Lipschitz par rapport à v [93]. En outre, la variable v est Lipschitz selon l'hypothèse 2.6. Ainsi, la fonction $g(v)sign(v)$ est Lipschitz par rapport au temps; c'est-à-dire, il existe une constante positive Φ_{gs} telle que pour tout t_1 et t_2 , cette inégalité est vérifiée :

$$\left| \left| g(v(t_1))sign(v(t_1)) - g(v(t_2))sign(v(t_2)) \right| \right| \leq \Phi_{gs} |t_1 - t_2| \quad (I.8)$$

La fonction $g(v)sign(v)e^{-\theta_s v^2}$ est Lipschitz par rapport à t . En effet,

- si $v > 0^+$ alors $g(v)sign(v)e^{-\theta_s v^2} = g(v^+)e^{-\theta_s v^2}$ et la dérivée de cette fonction par rapport à la variable vitesse est donnée par

$$\frac{dg(v^+)e^{-\theta_s v^2}}{dv^+} = (2ke^{-kv^+} - k^2e^{-kv^+}v^+)e^{-\theta_s v^2} - g(v^+)\theta_s v^+ e^{-\theta_s v^2} \quad (I.9)$$

- si $v < 0^-$ alors $g(v)sign(v)e^{-\theta_s v^2} = -g(v^-)e^{-\theta_s v^2}$ et la dérivée de cette fonction par rapport à la variable vitesse est donnée par

$$\frac{-dg(v^-)e^{-\theta_s v^2}}{dv^-} = (2ke^{kv^-} + k^2e^{kv^-}v^-)e^{-\theta_s v^2} + g(v^-)\theta_s v^- e^{-\theta_s v^2} \quad (I.10)$$

D'après les deux équations (I.9) et (I.10), on peut écrire :

$$\left. \frac{dg(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2}}{dv} \right|_{v=0^+} = \left. \frac{dg(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2}}{dv} \right|_{v=0^-} = 2k \quad (\text{I.11})$$

Ceci implique que la fonction $g(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2}$ est dérivable partout par rapport à v et est continue. De plus, puisque la vitesse est bornée alors la dérivée de la fonction $g(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2}$ par rapport à v est bornée ce qui démontre que cette fonction est Lipschitz par rapport à la variable v [93].

Selon l'hypothèse 2.6, la vitesse est Lipschitz par rapport au temps. Ceci prouve que la fonction $g(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_s v^2}$ est Lipschitz par rapport à t ; c'est-à-dire, il existe une constante positive Φ_{gse} telle que pour tout t_1 et t_2 , cette inégalité est vérifiée :

$$\left| \left| g(v(t_1))\text{sign}(v(t_1))e^{-\theta_s v(t_1)^2} - g(v(t_2))\text{sign}(v(t_2))e^{-\theta_s v(t_2)^2} \right| \right| \leq \Phi_{gse} |t_1 - t_2| \quad (\text{I.12})$$

La fonction définie par l'équation (I.13) est Lipschitz par rapport à ses variables. Afin de démontrer cette propriété, il est possible de calculer la jacobienne de la fonction et montrer que cette dernière est bornée et continue [93].

$$f(\theta, \omega) = \omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_2 + f_3(\omega_3, \theta_3) \quad (\text{I.13})$$

où $\omega_1 = -\frac{g(v)}{M}v$, $\omega_2 = -\frac{g(v)}{M}\text{sign}(v)$, $\omega_3 = v$, $\theta_1 = \frac{\sigma_v}{\sigma}$, $\theta_2 = \frac{\sigma_c}{\sigma}$, $\theta_3 = \theta_s$ et $f_3(\theta_3, \omega_3) = -\frac{g(\omega_3)}{M}\text{sign}(\omega_3)e^{-\theta_3 \omega_3^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = \omega_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2} = \omega_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_3} = \frac{g(\omega_3)}{M} \text{sign}(\omega_3) \omega_3^2 e^{-\theta_3 \omega_3^2} \text{ est continue par rapport à } \omega_3 \text{ puisque } g(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = \theta_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_2} = \theta_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_3} = -\frac{1}{M} e^{-\theta_3 \omega_3^2} \left(2k e^{-k|\omega_3|} - k^2 e^{-k|\omega_3|} |\omega_3| - 2\theta_3 \omega_3 g(\omega_3) \text{sign}(\omega_3) \right)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial \omega_3}$ est bornée parce que :

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_3} = \frac{\partial f_3}{\partial \omega_3} \tag{I.14}$$

et selon la démonstration précédente, la dérivée de $g(v)\text{sign}(v)e^{-\theta_3 v^2}$ par rapport à $v = \omega_3$ est définie partout et est continue et bornée puisque la vitesse est bornée.

Selon l'hypothèse 2.6, la vitesse et l'accélération sont bornées. Ainsi, toutes les dérivées partielles de la fonction $f(\theta, \omega)$ sont continues et bornées ce qui implique que la jacobienne de $f(\theta, \omega)$ est continue et bornée. Ceci prouve que la fonction $f(\theta, \omega)$ est Lipschitz; c'est-à-dire il existe une constante Φ_f telle que :

$$\left\| f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - f(\theta, \omega) \right\| \leq \Phi_f \left(\left\| \Delta\theta \right\| + \left\| \Delta\omega \right\| \right) \tag{I.15}$$

■

Propriété 2.2 Selon l'équation (2.20), la propriété suivante est toujours vérifiée

$$\sigma \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right)(f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \phi^{*T} \tilde{\theta}) - a^* \leq 0 \quad (I.16)$$

Preuve : la preuve de cette propriété découle de la définition de la fonction a^* . En effet, a^* est la solution du problème d'optimisation dont la fonction objective est donnée par :

$$G(\theta, \phi) = \sigma \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \left(f(\hat{\theta}, \omega) - f(\theta, \omega) - \phi^T \tilde{\theta} \right) \quad (I.17)$$

et puisque a^* est par définition le minimum (selon ϕ) des maxima (selon θ) de la fonction objective (où a^* et ϕ^* sont les solutions du problème d'optimisation) on peut affirmer que

$$a^* \geq G(\theta, \phi^*) \quad (I.18)$$

ce qui est équivalent à dire que

$$G(\theta, \phi^*) - a^* \leq 0 \quad (I.19)$$

d'où la preuve de la propriété. ■

Propriété 2.3 f (équation (2.15)) est une fonction convexe par rapport à θ lorsque $v < 0$ et elle est concave lorsque $v \geq 0$.

Preuve : la fonction f est une somme de deux fonctions de θ . La première fonction est linéaire donc elle peut être considérée comme une fonction convexe ou concave. La seconde fonction est f_3 (équation 2.16). Donc pour montrer la convexité de f , il faut montrer la convexité de f_3 . Ceci peut être résolu par le calcul de la dérivé seconde de f_3 .

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta_3^2} = -\omega_3^2 \frac{g(v)}{M} \text{sign}(v) e^{-\theta_3 v^2} \quad (I.20)$$

Puisque $g(v)$ et $e^{-\theta_3 v^2}$ sont toujours positives donc on peut dire que la convexité de f_3 est dictée par le signe de v . En effet, si $v \leq 0$ alors f_3 est convexe donc f est convexe et si $v > 0$ alors f_3 est concave donc f est concave. ■

Propriété 2.4 $\bar{f}(\sigma, \theta, \omega) = \sigma f(\theta, \omega)$ est Lipschitz par rapport à ses variables donc, il existe une constante positive B_θ qui vérifie

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\sigma + \Delta\sigma, \theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega)| &= |(\sigma + \Delta\sigma)f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - \sigma f(\theta, \omega)| \\ &\leq B_\theta \|(\Delta\sigma, \Delta\theta, \Delta\omega)\| \\ &\leq B_\theta (\|\Delta\sigma\| + \|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) \end{aligned} \quad (I.21)$$

Preuve : selon l'hypothèse 2.2 on a

$$\left| f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - f(\theta, \omega) \right| \leq F_\theta (\|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) \quad (I.22)$$

Puisque $\sigma > 0$, on peut écrire

$$\left| \sigma f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - \sigma f(\theta, \omega) \right| \leq \sigma F_\theta (\|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) \quad (I.23)$$

et on a

$$\begin{aligned} &\left| (\sigma + \Delta\sigma)f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - \sigma f(\theta, \omega) \right| \\ &= \left| \sigma f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - \sigma f(\theta, \omega) + \Delta\sigma f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) \right| \\ &\leq \left| \sigma f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) - \sigma f(\theta, \omega) \right| + \|\Delta\sigma\| \left| f(\theta + \Delta\theta, \omega + \Delta\omega) \right| \\ &\leq \sigma F_\theta (\|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) + B_f \|\Delta\sigma\| \\ &\leq B_\theta (\|\Delta\sigma\| + \|\Delta\theta\| + \|\Delta\omega\|) \end{aligned} \quad (I.24)$$

où $B_\theta = \max\{\sigma F_\theta, B_f\}$ ■

Propriété 2.5 Selon l'équation (2.24) on a

$$\dot{V} \leq -K \tilde{x}_e^2 \quad (I.25)$$

Preuve : Voir la preuve de stabilité de l'estimateur (section 2.5.2). ■

Propriété 2.6 On définit $\beta(\omega)$ comme suit

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\theta, \omega) \text{ est convexe} \\ -1 & \text{si } f(\theta, \omega) \text{ est concave} \end{cases} \quad (1.26)$$

donc pour a^* et β , ce qui suit est vrai

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_-^* = 0, \quad \text{si } \beta = -1 \\ (2) \quad & a_+^* = 0, \quad \text{si } \beta = 1 \\ (3) \quad & \beta a^* \tilde{x}_\epsilon \leq 0, \quad \forall \beta \end{aligned} \quad (1.27)$$

où a_-^* et a_+^* sont définies comme suit

$$\begin{aligned} a_-^*(\hat{\theta}, \omega) &= a^* \quad \text{si } \tilde{x}_\epsilon < 0 \\ a_+^*(\hat{\theta}, \omega) &= a^* \quad \text{si } \tilde{x}_\epsilon > 0 \end{aligned}$$

Preuve : Si $\beta = -1$ alors $f(\theta, \omega)$ est une fonction concave donc à partir de la solution du problème d'optimisation, on peut écrire

$$a^* = 0, \quad \text{lorsque } \tilde{x} < 0 \quad (1.28)$$

donc on obtient

$$a_-^* = 0, \quad \text{si } \beta = -1 \quad (1.29)$$

lorsque $\tilde{x} > 0$ on peut écrire à partir de la solution du problème d'optimisation que $a^* > 0$ donc on aura

$$\beta a^* \tilde{x} \leq 0 \quad (1.30)$$

si $\beta = 1$ alors $f(\theta, \omega)$ est une fonction convexe donc à partir de la solution du problème d'optimisation on a

$$a^* = 0, \quad \text{lorsque } \tilde{x} > 0 \quad (1.31)$$

donc on aura

$$a_+^* = 0, \quad \text{si } \beta = 1 \quad (1.32)$$

et lorsque $\tilde{x} < 0$ alors on aura $\beta = 1$ et $a^* > 0$ ce qui donne

$$\beta a^* \tilde{x} \leq 0 \quad (1.33)$$

■

Propriété 2.7 Si dans l'équation (2.19) $|\tilde{x}_\epsilon(t_1)| \geq \gamma$ alors

$$V(t_1 + T') \leq V(t_1) - \frac{K\gamma^3}{3(M + K\gamma)} \quad (1.34)$$

où $T' = \frac{\gamma}{M + K\gamma}$ et $M = \max\{|m(t)|\}$ où $m(t)$ est définie par

$$m(t) = \hat{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \quad (1.35)$$

Preuve : Pour montrer cette propriété, on a besoin du lemme suivant [82]

Lemme I.1. Si on a

$$\begin{cases} \dot{x} &= -k(t)x + z(t) \\ \dot{x}_m &= -k_m x_m + z_m \end{cases} \quad (1.36)$$

avec $k(t) > 0$, $k_m > 0$ et $z(t) \leq z_m \quad \forall t \geq t_0$,

Si $x(t_0) \leq x_m(t_0) < 0$ et $k(t) \leq k_m$ alors $x(t) \leq x_m(t) \quad \forall t \geq t_0$

avec $x_m(t) \leq 0$

Maintenant on peut donner la preuve de la propriété comme suit : Puisque $|\tilde{x}_\epsilon(t_1)| \geq \gamma$ par hypothèse, il existe deux cas possible : (1) $\tilde{x}_\epsilon(t_1) \geq \gamma$ et (2) $\tilde{x}_\epsilon(t_1) \leq -\gamma$. La démonstration sera fait seulement pour le deuxième cas; le premier cas pouvant se démontrer de façon similaire.

On suppose donc que

$$\tilde{x}_\epsilon(t_1) \leq -\gamma \quad \text{et} \quad \gamma > \epsilon \quad (1.37)$$

Selon l'équation (2.19) et sachant que \tilde{x} et \tilde{x}_ϵ ont la même dérivée ($\dot{\tilde{x}}_\epsilon = \dot{\tilde{x}}$), on a

$$\dot{\tilde{x}}_\epsilon = -K\tilde{x}_\epsilon + m(t) \quad (1.38)$$

avec $m(t)$ définie par l'équation (I.35).

On peut affirmer que $m(t)$ est bornée parce que $|\hat{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega)|$ et a^* sont bornées. Donc

il existe une constante positive M telle que

$$|m(t)| < M \quad (\text{I.39})$$

On note ici que x_m est la solution de l'équation différentielle suivante : $\forall t \geq t_1$

$$\dot{x}_m = -Kx_m + M \quad x_m(t_1) = -\gamma \quad (\text{I.40})$$

Selon les équations (I.37, I.38, et I.40) et le lemme I.1, on obtient

$$\tilde{x}_c(t_1 + \tau) \leq x_m(t_1 + \tau) \quad \forall \tau > 0 \quad \text{et} \quad x_m(t_1 + \tau) \leq 0 \quad (\text{I.41})$$

À partir de l'équations (I.40), on trouve que

$$x_m(t_1 + \tau) = \left(-\frac{M}{K} - \gamma\right)e^{-K\tau} + \frac{M}{K} \quad (\text{I.42})$$

x_m est une fonction concave par rapport à τ pour $\tau \geq 0$ puisque la dérivée seconde de x_m par rapport à τ est négative. Donc, on peut écrire

$$x_m(t_1 + \tau) \leq x_m(t_1) + \tau \nabla_{x_m(t_1 + \tau)} \Big|_{\tau=0} \quad (\text{I.43})$$

En combinant les équations (I.41) et (I.43), on obtient

$$\tilde{x}_c(t_1 + \tau) \leq -\gamma + (M + K\gamma)\tau \quad \forall \tau > 0 \quad (\text{I.44})$$

Si on note $T' = \frac{\gamma}{M + K\gamma}$, on peut vérifier à partir de l'équation (I.44) que

$$\tilde{x}_c(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_1, t_1 + T'] \quad (\text{I.45})$$

Puis, en utilisant l'équation (I.44), on trouve que

$$-\tilde{x}_c(t_1 + \tau) \geq \gamma - (M + K\gamma)\tau \geq -(M + K\gamma)\tau \quad \forall \tau > 0 \quad (\text{I.46})$$

et ceci donne ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T'} |\tilde{x}_\epsilon(t_1 + \tau)|^2 d\tau &\geq \int_0^{T'} (M + K\gamma)^2 \tau^2 d\tau \\
 &\geq (M + K\gamma)^2 \left[\frac{\tau^3}{3} \right]_0^{T'} \\
 &\geq \frac{\gamma^3}{3(M + K\gamma)}
 \end{aligned} \tag{I.47}$$

Maintenant en intégrant l'équation (2.24) sur $[t_1, t_1 + T']$, on peut avoir

$$V(t_1 + T') \leq V(t_1) - \frac{K\gamma^3}{3(M + K\gamma)} \tag{I.48}$$

Comme mentionné plus haut, le cas où $\tilde{x}_\epsilon(t_1) > \gamma$ peut être démontré de façon similaire. ■

Théorème 2.1 Si (1) $\sigma f(\theta, \omega)$ est convexe (ou concave) par rapport θ pour tout $\omega(t) \in \mathbb{R}^m$ et (2) $\forall t_1 > t_0$, il existe des constantes positives T_0 , ϵ_u et un instant $t_2 \in [t_1, t_1 + T_0]$ telles que pour tout θ , la condition de persistance d'excitation suivante est vérifiée :

$$\beta(\omega(t_2)) \left\{ \hat{\sigma}(t_1) f(\hat{\theta}, \omega(t_2)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) \right\} \geq \epsilon_u \|\hat{\Omega} - \Omega\| \tag{I.49}$$

où $\beta(\omega(t))$ est définie par la propriété 2.6,

alors toutes les trajectoires de (2.19) convergent uniformément à l'intérieur de l'ensemble suivant :

$$D_\epsilon = \{X | V(X) \leq \gamma_1\} \tag{I.50}$$

où

$$X = [\tilde{x}_\epsilon, \Omega^T]^T = [\tilde{x}_\epsilon, \tilde{\sigma}, \sqrt{\sigma} \tilde{\theta}^T]^T \tag{I.51}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} X^T X \tag{I.52}$$

et

$$\gamma_1 = \frac{2\epsilon}{\epsilon_u^2} \left\{ 4B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + 4\sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right] \right\} \tag{I.53}$$

où B_θ est définie par la propriété 2.4 et U_b , B_f et B_Φ sont définies respectivement par les hypothèses 2.1, 2.3 et 2.5.

Preuve :

$\forall t_1$ et $\hat{\Omega}(t_1)$, si la condition de persistance d'excitation est vérifiée alors $\exists t_2 \in [t_1, t_1 + T_0]$ tel que

$$\beta(\omega(t_2)) \left\{ \hat{\sigma}(t_1) f(\hat{\theta}(t_1), \omega(t_2)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) \right\} \geq \epsilon_u \|\hat{\Omega}(t_1) - \Omega\| \quad (\text{I.54})$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\beta(\omega(t_2)) = 1$ i.e. $f(\theta, \omega(t_2))$ est une fonction convexe ou linéaire par rapport à θ . Ainsi, on obtient

$$\hat{\sigma}(t_1) f(\hat{\theta}(t_1), \omega(t_2)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) \geq \bar{\epsilon} \quad (\text{I.55})$$

où

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_u \|\hat{\Omega}(t_1) - \Omega\| \quad (\text{I.56})$$

si $X(t_1) \in D_\epsilon$ alors $\forall t > t_1$, $X(t) \in D_\epsilon$ parce que selon (2.23) et (I.51) $V = \frac{1}{2} X^T X$ est une fonction de Lyapunov et $\dot{V} \leq 0$ selon la propriété 2.5.

Maintenant si on suppose que $X(t_1) \notin D_\epsilon$, cela implique que

$$|\tilde{x}_\epsilon(t_1)| > \sqrt{\gamma_1} \quad \text{ou} \quad \|\tilde{\Omega}(t_1)\| > \sqrt{\gamma_1} \quad (\text{I.57})$$

En effet, d'abord, si $X(t_1) \notin D_\epsilon$ alors $V(X) > \gamma_1$. Puisque $V(X) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_\epsilon^2 + \|\tilde{\Omega}\|^2)$ alors on a

$$V(X) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_\epsilon^2 + \|\tilde{\Omega}\|^2) > \gamma_1 \quad (\text{I.58})$$

Puis, d'autre part,

$$|\tilde{x}_\epsilon| < \sqrt{\gamma_1} \quad \text{et} \quad \|\tilde{\Omega}\| < \sqrt{\gamma_1} \quad \implies \quad |\tilde{x}_\epsilon|^2 + \|\tilde{\Omega}\|^2 < 2\gamma_1 \quad (\text{I.59})$$

en inversant l'implication (I.59) on obtient

$$|\tilde{x}_\epsilon|^2 + \|\tilde{\Omega}\|^2 > 2\gamma_1 \quad \implies \quad |\tilde{x}_\epsilon| > \sqrt{\gamma_1} \quad \text{ou} \quad \|\tilde{\Omega}\| > \sqrt{\gamma_1} \quad (\text{I.60})$$

ce qui démontre, combiné à (I.58), l'équation (I.57).

Examinons maintenant les deux possibilités : (1) $|\tilde{x}_\epsilon(t_1)| > \sqrt{\gamma_1}$ et (2) $\|\tilde{\Omega}(t_1)\| > \sqrt{\gamma_1}$.

(1) Si $|\tilde{x}_\epsilon(t_1)| > \sqrt{\gamma_1}$ alors selon la propriété 2.7, V est décroissante de façon à ce que X se

rapproche de D_ϵ .

(2) Si $\|\tilde{\Omega}(t_1)\| > \sqrt{\gamma_1}$ alors on doit prouver que $|\tilde{x}_\epsilon|$ devient supérieure à une constante positive à un temps $t_3 > t_1$ de façon à utiliser la propriété 2.7 pour montrer une fois de plus que X décroît et se rapproche donc de D_ϵ .

Puisque $\|\tilde{\Omega}(t_1)\| > \sqrt{\gamma_1}$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 &= \epsilon_u^2 \|\tilde{\Omega}(t_1) - \Omega\|^2 = \epsilon_u^2 \|\tilde{\Omega}(t_1)\|^2 > \epsilon_u^2 \gamma_1 \\ &> \epsilon_u^2 \frac{2\epsilon}{\epsilon_u^2} \left\{ 4B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + 4\sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right] \right\} \\ &> 2\epsilon \left\{ 4B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + 4\sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (I.61)$$

Maintenant, on peut démontrer que si l'équation (I.61) est vérifiée alors il $\exists t_3 \in [t_2, t_2 + T_1]$ tels que

$$|\tilde{x}_\epsilon(t_3)| \geq \min\{1, \bar{\delta}\} \quad (I.62)$$

avec

$$\bar{\delta} = \min\left\{ \frac{\bar{\epsilon}}{2(B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\theta B_\Phi T_0 + K)}, \xi \right\} \quad (I.63)$$

$$\xi = \frac{\bar{\epsilon}^2 - \epsilon \Delta}{2\bar{\epsilon}(B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\theta B_\Phi T_0 + K) + \Delta} \quad (I.64)$$

$$\Delta = 4B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + 4\sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right] \quad (I.65)$$

et

$$T_1 = \frac{\bar{\epsilon} - (B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\theta B_\Phi T_0 + K)\bar{\delta}}{B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + \sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right]} \quad (I.66)$$

Cette démonstration peut être fait par contradiction :

Supposons que l'équation (I.61) est vraie et que l'équation (I.62) n'est pas vraie, donc on peut écrire que

$$|\tilde{x}_\epsilon(t_2 + \tau)| < 1 \quad \text{et} \quad |\tilde{x}_\epsilon(t_2 + \tau)| < \bar{\delta} \quad \forall \tau \in [0, T_1] \quad (I.67)$$

Selon l'équation (2.19), on peut écrire que

$$\dot{\tilde{x}} \geq -K\bar{\delta} + \left[\hat{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega) \right] - a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \quad (I.68)$$

On peut alors démontrer que \tilde{x}_ϵ devient grand sur $[t_2, t_2 + T_1]$ en trouvant une borne inférieure de l'expression entre crochet et le dernier terme de (I.68).

ÉTAPE (i) : il faut trouver une borne inférieure de la quantité suivante $\hat{\sigma}f(\hat{\theta}, \omega) - \sigma f(\theta, \omega)$.

Selon l'équation (2.19), on a

$$(1) \dot{\tilde{\sigma}} = -\tilde{x}_\epsilon f(\hat{\theta}, \omega) \quad \text{et} \quad (2) \dot{\tilde{\theta}} = -\tilde{x}_\epsilon \phi^* \quad (I.69)$$

en intégrant sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ et sachant que $t_2 - t_1 \leq 0$,

$$\begin{aligned} \|\Delta\tilde{\sigma}\| &= \|\tilde{\sigma}(t_2) - \tilde{\sigma}(t_1)\| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\tilde{\sigma}} d\tau \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} -\tilde{x}_\epsilon f(\hat{\theta}, \omega) d\tau \right| \\ &\leq \max_{t_1 < t < t_2} \|\tilde{x}_\epsilon\| \max_{t_1 < t < t_2} |f(\hat{\theta}, \omega)| \left| \int_{t_1}^{t_2} d\tau \right| \\ &\leq \bar{\delta} B_f T_0 \end{aligned} \quad (I.70)$$

selon la même démarche, on aura

$$\begin{aligned} \|\Delta\tilde{\theta}\| &= \|\tilde{\theta}(t_2) - \tilde{\theta}(t_1)\| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\tilde{\theta}} d\tau \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} -\tilde{x}_\epsilon \phi^* d\tau \right| \\ &\leq \max_{t_1 < t < t_2} \|\tilde{x}_\epsilon\| \max_{t_1 < t < t_2} \|\phi^*\| \left| \int_{t_1}^{t_2} d\tau \right| \\ &\leq \bar{\delta} B_\phi T_0 \end{aligned} \quad (I.71)$$

Selon la propriété 2.4 et en utilisant les équations (I.70) et (I.71), on a

$$\begin{aligned} \left| \hat{\sigma}(t_2) f(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) - \hat{\sigma}(t_1) f(\hat{\theta}(t_1), \omega(t_2)) \right| &\leq B_\theta \|\Delta\tilde{\Omega}\| \\ &\leq B_\theta \|\Delta\tilde{\sigma} + \sqrt{\sigma} \Delta\tilde{\theta}\| \\ &\leq B_\theta (\|\Delta\tilde{\sigma}\| + \sqrt{\sigma} \|\Delta\tilde{\theta}\|) \\ &\leq B_\theta (\bar{\delta} B_f T_0 + \sqrt{\sigma} \bar{\delta} B_\phi T_0) \end{aligned} \quad (I.72)$$

En utilisant les équations (I.72) et (I.55), on aura

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}(t_2)f(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) &= \hat{\sigma}(t_1)f(\hat{\theta}(t_1), \omega(t_2)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) \\
 &+ \hat{\sigma}(t_2)f(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) \\
 &- \hat{\sigma}(t_1)f(\hat{\theta}(t_1), \omega(t_2)) \\
 &\geq \bar{\epsilon} - B_\theta(\bar{\delta}B_fT_0 + \sqrt{\bar{\sigma}\bar{\delta}}B_\Phi T_0)
 \end{aligned} \tag{I.73}$$

On sait déjà que ω est Lipschitz, donc on peut écrire

$$\|\omega(t_2 + \tau) - \omega(t_2)\| \leq U_b\tau \tag{I.74}$$

Selon la dynamique de l'erreur (équation (2.19)), On a

$$\dot{\hat{\theta}} = -\tilde{x}_\epsilon\Phi^* \tag{I.75}$$

pour $\tau \in [0, T_2]$, on intègre l'équation (I.75) sur $[t_2, t_2 + \tau]$ on aura alors

$$\int_{t_2}^{t_2+\tau} \dot{\hat{\theta}} d\eta = \int_{t_2}^{t_2+\tau} -\tilde{x}_\epsilon\Phi^* d\eta = \hat{\theta}(t_2 + \tau) - \hat{\theta}(t_2) \tag{I.76}$$

donc on obtient

$$\|\hat{\theta}(t_2 + \tau) - \hat{\theta}(t_2)\| = \left| \int_{t_2}^{t_2+\tau} -\tilde{x}_\epsilon\Phi^* d\eta \right| \leq B_\Phi \int_{t_2}^{t_2+\tau} d\eta \tag{I.77}$$

c'est-à-dire

$$\|\hat{\theta}(t_2 + \tau) - \hat{\theta}(t_2)\| \leq B_\Phi\tau \tag{I.78}$$

Puisqu'on a

$$|\tilde{x}_\epsilon(t_2 + \tau)| < 1 \text{ et } |f(\hat{\theta}, \omega)| < B_f \quad \forall \tau \in [0, T_1] \tag{I.79}$$

donc on peut écrire ce qui suit

$$\begin{aligned}
 \|\hat{\sigma}(t_2 + \tau) - \hat{\sigma}(t_2)\| &= \left| \int_{t_2}^{t_2 + \tau} \dot{\hat{\sigma}}(\tau) d\eta \right| = \left| \int_{t_2}^{t_2 + \tau} -\tilde{x}_\epsilon f(\hat{\theta}, \omega) d\eta \right| \\
 &\leq \int_{t_2}^{t_2 + \tau} \|\tilde{x}_\epsilon\| \|f(\hat{\theta}, \omega)\| d\eta \\
 &\leq B_f \tau
 \end{aligned} \tag{I.80}$$

selon les équations (I.74),(I.78) et (I.80), il est possible de prouver ce qui suit

$$\begin{aligned}
 \left| \hat{\sigma}(t_2 + \tau) \hat{f}_{2\tau} - \hat{\sigma}(t_2) \hat{f}_2 - (\sigma f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) - \sigma f(\theta, \omega(t_2))) \right| &\leq B_\theta (\|\Delta\Omega\| \\
 &\quad + 2\|\omega(t_2 + \tau) - \omega(t_2)\|) \\
 &\leq B_\theta (B_f + \sqrt{\sigma} B_\Phi + 2U_b) \tau
 \end{aligned} \tag{I.81}$$

où

$$\hat{f}_{2\tau} = f(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) \tag{I.82}$$

$$\hat{f}_2 = f(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) \tag{I.83}$$

l'équation (I.81) implique que

$$\hat{\sigma}(t_2 + \tau) \hat{f}_{2\tau} - \sigma f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) \geq \hat{\sigma}(t_2) \hat{f}_2 - \sigma f(\theta, \omega(t_2)) - B_\theta (B_f + \sqrt{\sigma} B_\Phi + 2U_b) \tau \tag{I.84}$$

En combinant l'équation (I.73) et l'équation (I.84), on peut écrire

$$\hat{\sigma}(t_2 + \tau) \hat{f}_{2\tau} - \sigma f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) \geq \bar{\epsilon} - B_\theta (\bar{\delta} B_f T_0 + \sqrt{\sigma} \bar{\delta} B_\Phi T_0) - B_\theta (B_f + \sqrt{\sigma} B_\Phi + 2U_b) \tau \tag{I.85}$$

ce qui donne une borne inférieure de l'expression entre crochet dans l'équation (I.68).

ÉTAPE (ii) : Cette étape consiste à trouver une borne inférieure de la quantité suivante $-a^* \text{sat}(\frac{\tilde{x}}{\epsilon})$ de l'expression (I.68).

On a montré que dans l'équation (I.81),

$$\left| \hat{\sigma}(t_2 + \tau) \hat{f}_{2\tau} - \hat{\sigma}(t_2) \hat{f}_2 - \sigma f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) + \sigma f(\theta, \omega(t_2)) \right| \leq B_\theta (2U_b + \sqrt{\sigma} B_\Phi + B_f) \tau \tag{I.86}$$

Selon l'équation (I.78) et l'hypothèse 2.5, on obtient

$$\left| \Phi^*(t_2)(\hat{\theta}(t_2 + \tau) - \hat{\theta}(t_2)) \right| \leq B_\Phi^2 \tau \quad (I.87)$$

On sait que à l'instant t_2 , $\beta(\omega(t_2)) = 1$ donc, selon la propriété 2.6, on a $a_+^*(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) = 0$.

par définition on a

$$a_+^*(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) = \sigma \max_{\theta \in \Omega_0} \left\{ \hat{f}_2 - f(\theta, \omega(t_2)) - \Phi^*(t_2)(\hat{\theta}(t_2) - \theta) \right\} \quad (I.88)$$

et

$$a_+^*(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) = \sigma \max_{\theta \in \Omega_0} \left\{ \hat{f}_{2\tau} - f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) - \Phi^*(t_2 + \tau)(\hat{\theta}(t_2 + \tau) - \theta) \right\} \quad (I.89)$$

On peut écrire

$$a_+^*(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) \leq \sigma \max_{\theta \in \Omega_0} \left\{ \hat{f}_{2\tau} - f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) - \Phi^*(t_2)(\hat{\theta}(t_2 + \tau) - \theta) \right\} \quad (I.90)$$

En combinant l'équation (I.89) et l'équation (I.90), on obtient

$$\begin{aligned} a_+^*(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) &\leq a_+^*(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) \\ &+ \sigma \max_{\theta \in \Omega_0} \left\{ \hat{f}_{2\tau} - f(\theta, \omega(t_2 + \tau)) - (\hat{f}_2 - f(\theta, \omega(t_2))) \right. \\ &\quad \left. - \Phi^*(t_2)(\hat{\theta}(t_2 + \tau) - \hat{\theta}(t_2)) \right\} \end{aligned} \quad (I.91)$$

on peut déduire que

$$a_+^*(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) \leq a_+^*(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) + \sigma \left(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f)\tau + B_\Phi^2\tau \right) \quad (I.92)$$

On a $a_+^*(\hat{\theta}(t_2), \omega(t_2)) = 0$, donc selon l'équation (I.92), on obtient

$$-a_+^*(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) \geq -\sigma \left(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f)\tau + B_\Phi^2\tau \right) \quad (I.93)$$

Ainsi, on aura $\forall \tau \in [0, T_1]$

$$-a_+^*(\hat{\theta}(t_2 + \tau), \omega(t_2 + \tau)) \text{sat} \left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon} \right) \geq -\sigma \left(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f)\tau + B_\Phi^2\tau \right) \quad (I.94)$$

ce qui donne une borne inférieure de $-a^* \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right)$.

ÉTAPE (iii) : Cette étape consiste à trouver une borne inférieure de \tilde{x}_ϵ en utilisant les bornes trouvées dans la première et la deuxième étapes.

En combinant l'équation (I.94), l'équation (I.85) et l'équation (I.68), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t_2 + \tau) \geq & -K\bar{\delta} + \bar{\epsilon} - B_\theta(\bar{\delta}B_fT_0 + \sqrt{\sigma}\bar{\delta}B_\Phi T_0) \\ & - B_\theta(B_f + \sqrt{\sigma}B_\Phi + 2U_b)\tau \\ & - \sigma\left(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma}B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2\right)\tau \end{aligned} \quad (I.95)$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t_2 + \tau) \geq & \bar{\epsilon} - (K + B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\Phi B_\theta T_0)\bar{\delta} \\ & - \left\{ B_\theta(B_f + \sqrt{\sigma} B_\Phi + 2U_b) \right. \\ & \left. + \sigma(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma} B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2) \right\} \tau \\ & \forall \tau \in [0, T_1] \end{aligned} \quad (I.96)$$

Maintenant on intègre l'équation (I.96) sur $[0, T_1]$

$$\begin{aligned} & \tilde{x}(t_2 + T_1) - \tilde{x}(t_2) \\ & \geq \int_0^{T_1} \left[\bar{\epsilon} - (K + B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\Phi B_\theta T_0)\bar{\delta} - \left\{ B_\theta(B_f + \sqrt{\sigma} B_\Phi + 2U_b) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sigma(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma} B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2) \right\} \tau \right] d\tau \end{aligned} \quad (I.97)$$

l'équation (I.97) peut être simplifiée comme suit

$$\begin{aligned} & \tilde{x}(t_2 + T_1) - \tilde{x}(t_2) \\ & \geq \frac{(\bar{\epsilon} - (K + B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\Phi B_\theta T_0)\bar{\delta})^2}{2(B_\theta(B_f + \sqrt{\sigma} B_\Phi + 2U_b) + \sigma(B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma} B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2))} \end{aligned} \quad (I.98)$$

puisque l'équation (I.67) est vraie $\forall \tau \in [0, T_1]$, on aura

$$|\tilde{x}_\epsilon(t_2)| < \bar{\delta} \quad (I.99)$$

ce qui implique que

$$\tilde{x}_\epsilon(t_2) = \tilde{x} - \epsilon \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) > -\bar{\delta} \quad (I.100)$$

ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t_2) &> -\bar{\delta} + \epsilon \text{sat}\left(\frac{\tilde{x}}{\epsilon}\right) \\ &> -\bar{\delta} - \epsilon\end{aligned}\tag{I.101}$$

À partir de la définition de $\bar{\delta}$, on a

$$\bar{\delta} \leq \xi\tag{I.102}$$

où ξ est définie à l'équation (I.64). L'équation (I.102) peut être réécrite comme suit

$$2\epsilon + 2\bar{\delta} \leq \frac{\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon}\lambda_1\bar{\delta}}{2\lambda_2}\tag{I.103}$$

où

$$\lambda_1 = B_\theta B_f T_0 + \sqrt{\sigma} B_\theta B_\Phi T_0 + K\tag{I.104}$$

$$\lambda_2 = B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma} B_\Phi + B_f) + \sigma \left[B_\theta(2U_b + \sqrt{\sigma} B_\Phi + B_f) + B_\Phi^2 \right]\tag{I.105}$$

Maintenant en combinant les équations (I.97, I.101 et I.103), on trouve que

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t_2 + T_1) &\geq \frac{(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}\lambda_1\bar{\delta})^2}{2\lambda_2} - \epsilon - \bar{\delta} \\ &\geq \frac{\bar{\epsilon}^2 - 2\bar{\epsilon}\lambda_1\bar{\delta}}{2\lambda_2} - \epsilon - \bar{\delta} \\ &\geq 2\bar{\delta} + 2\epsilon - \epsilon - \bar{\delta} \\ &\geq \bar{\delta} + \epsilon\end{aligned}\tag{I.106}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\tilde{x}_\epsilon(t_2 + T_1) > \bar{\delta}\tag{I.107}$$

ce qui est contradictoire avec l'équation (I.67), donc l'équation (I.62) doit être vraie.

Ainsi, si l'équation (I.61) est vraie alors $\exists t_3 \in [t_2, t_2 + T_1]$ tel que $|\tilde{x}(t_3)| \geq \min\{1, \bar{\delta}\}$.

En conclusion, on peut dire que

si $V(t_1) > \gamma_1$ alors on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad |\tilde{x}_\epsilon(t_1)| > \sqrt{\gamma_1} \\ \text{ou} \\ (2) \quad |\dot{\tilde{x}}_\epsilon(t_3)| \geq \delta_0 = \min\{1, \bar{\delta}\}, \quad t_3 \in [t_1, t_1 + T_0 + T_1] \end{array} \right. \quad (\text{I.108})$$

où $t_3 = t_2 + T_1$

- si (1) est vrai alors

$$V(t_1 + T'_2) \leq V(t_1) - \frac{K\sqrt{\gamma_1}^3}{3(M + K\sqrt{\gamma_1})} \quad (\text{I.109})$$

où

$$T'_2 = \frac{\sqrt{\gamma_1}}{M + K\sqrt{\gamma_1}} \quad (\text{I.110})$$

- si (2) est vrai alors $\exists T'_1 = \frac{\delta_0}{M + K\delta_0}$ tel que

$$V(t_3 + T'_1) \leq V(t_3) - \frac{K\delta_0^3}{3(M + K\delta_0)} \quad (\text{I.111})$$

Selon les équations (I.111 et I.109), on peut dire que pour tout $V(t_1) > \gamma_1$,

$$V(t_1 + T'_3) \leq V(t_1) - \Delta V \quad (\text{I.112})$$

où

$$T'_3 = \max \left\{ T_0 + T_1 + T'_1, T_0 + T_1 + T'_2 \right\} \quad (\text{I.113})$$

$$\Delta V = \min \left\{ \frac{K\delta_0^3}{3(M + K\delta_0)}, \frac{K\sqrt{\gamma_1}^3}{3(M + K\sqrt{\gamma_1})} \right\} \quad (\text{I.114})$$

Ceci implique que $V(t)$ décroît par une quantité finie dans chaque intervalle T'_3 jusqu'à ce que la trajectoire atteigne D_ϵ .

on note que, selon la définition de D_ϵ , si $\epsilon \rightarrow 0$ alors toutes les trajectoires convergent vers la région $X = 0$ et donc l'estimateur est uniformément asymptotiquement stable. ■

RÉFÉRENCES

- [1] Grami, S. et Bigras, P. Nonlinear identification of friction model using concave/convex parameterization. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE 2006)*, 272–277.
- [2] Grami, S. et Bigras, P. (2006). Identification of a new friction model based on robust adaptive observer. *Fourth IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'07)*.
- [3] Grami, S. et Bigras, P. (2008). Identification of a new friction model based on robust adaptive observer. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 5(4), 297–304.
- [4] Armstrong-Hélouvry, B., Dupont, P. et Wit, C. C. d. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30(7), 1083–1138.
- [5] Berger, E. J. (2002). Friction modeling for dynamic system simulation. *ASME journal of applied Mechanics Reviews*, 55(6), 535–577.
- [6] Shih, Y. T. et Lee, A.-C. (2003). Survey on modeling and control for motion systems with friction. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 24(4), 337–352.
- [7] Stribeck, R. (1902). The key qualities of sliding and roller bearings. *Zeitschrift des Vereines Seutscher Ingenieure*, 46(38), 1342–1348.
- [8] Karnopp, D. (1985). Computer simulation of slip-stick friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and control*, 107(1), 100–103.
- [9] Armstrong-Hélouvry, B. (1993). Stic slip and control in low-speed motion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(10), 1483–1496.
- [10] Olsson, H., Aström, K. J., Wit, C. C. D., Gäfvert, M. et Lichinsky., P. (1998). Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4(3), 176–195.
- [11] Hess, D. P. et Soom, A. (1990). Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities. *Journal of Tribology*, 112, 147–152.
- [12] Rabinowicz, E. (1958). The nature of the static and kenetic coefficient of friction. *Journal of Applied Physics*, 22(11), 1373–1379.
- [13] Courtney-Pratt, J. et Eisner, E. (1957). The effect of the tangential force on the contact of mettalic bodies. *Proceedings of Royal Society*, A238, 529–550.

- [14] Blau, P. J. (1996). *Friction Science and Technology*. Marcel Dekker, NY, 1. I. faulkner edition.
- [15] Noureddine, A. (2005). *Comparaison de quatre méthodes d'identification d'un modèle statique de frottement : simulations et expérimentations*. Mémoire de maîtrise, Université de Québec, École de Technologie Supérieure.
- [16] Sampson, J., Morgan, F., Reed, D. et Muskat, M. (1943). Studies in lubrication : Friction bahavior during the slip portion of the stick-slip process. *Journal of Applied Physics*, 14(12), 689–700.
- [17] Dahl, P. (1968). A solid friction model. *Technical Report TOR-0158*, 3107–3118.
- [18] Dahl, P. (1976). Solid friction damping of mechanical vibration. *AIAA Journal*, 14(12), 1675–1682.
- [19] Bliman, P. A. (1992). Mathematical study of the dahl's friction model. *European Journal of Méchanics*, 11(6), 835–848.
- [20] Haessig, D. et Friedland, B. (1991). On the modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and control*, 113(3), 354–362.
- [21] Bliman, P. A. et Sorine, M. (1992). Friction modeling by hysteresis operators. application to dahl, sticktion ans Stribeck effects. *European Journal of mechanics*, 11(6), 835–848.
- [22] Bliman, P. A. et Sorine, M. (1995). Easy to use realistic dry friction models for automatic control. *Proceedings 3rd European Control conference ECC'95*, 3788–3794.
- [23] Majd, V. J. et Simaan, M. A. (1995). A continuous friction model for servo systems with stiction. *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Control Applications*, 296–301.
- [24] Rice, J. R. et Ruina, A. L. (1983). Stability of steady frictional slipping. *Journal of Applied Mechanics*, 50(2).
- [25] Wit, C. C. d., Olsson, H., Astrom, K. J. et Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3), 419–425.
- [26] Wit, C. C. d. (1998). Comments on "a new model for control of systems with friction". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8), 1189–1190.
- [27] Gäfvert, M. (1997). Comparisons of two dynamic friction models. *IEEE International Conference on Control Applications*, 386–391.
- [28] Altpeter, F., Ghorbel, F. et Longchamp, R. (1998). Relationship between two friction models : A singular perturbation approach. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1572–1574.

- [29] Dupont, P., Armstrong, B. et Hayward, V. (2000). Elasto-plastic friction model : contact compliance and stiction. *Proceedings of the American Control Conference*, 1072–1077, Chicago, Illinois.
- [30] Dupont, P., Hayward, V., Armstrong, B. et Altpeter, F. (2002). Single state elastoplastic friction models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5), 787–792.
- [31] Swevers, J., Al-Bender, F., Ganseman, C. G. et Prajogo, T. (2000). An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4), 675–687.
- [32] Lampaert, V., Swevers, J. et Al-Bender, F. (2002). Modification of the leuven integrated friction model structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4), 683–687.
- [33] Al-Bender, F., lampaert, V. et Swevers, J. (2004). A novel generic model at asperity level for dry friction force dynamics. *Tribology Letters*, 16(1), 81–93.
- [34] Al-Bender, F., Lampaert, V. et Swevers, J. (2004). Modeling of dry sliding dynamics : from heuristic models to physically motivated models and back. *CHAOS*, 14(2), 446–460.
- [35] Lampaert, V., Al-Bender, F. et Swevers, J. (2003). A generalized maxwell-slip friction model appropriate for control purposes. *Physics and Control*, 2003, 1170–1177.
- [36] Al-Bender, F., Lampaert, V. et Swevers, J. (2005). The generalized maxwell-slip model : A novel model for friction simulation and compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1883–1887.
- [37] Liang, J.-W. et Feeny, B. F. (2004). Identifying Coulomb and viscous friction in forced dual-damped oscillators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126(1), 118–125.
- [38] Friedland, B. et Park, Y. J. (1992). On adaptive friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10), 1609–1612.
- [39] Friedland, B. et Mentzelopoulou, S. (1992). On adaptive friction compensation without velocity measurement. *Proceedings of the first IEEE Conference on Control Application*, 1076–1081.
- [40] Mentzelopoulou, S. et Friedland, B. (1994). Experimental evaluation of friction estimation and compensation techniques. *Proceedings of the american Control Conference*, 3132–3136.
- [41] Liao, T.-L. et Chien, T.-I. (2000). An exponentially stable adaptive friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5), 977–980.
- [42] Ray, L. R. et Remine, J. S. (1998). Machine friction estimation for modeling, diagnostics and control. *Proceedings of the American Control Conference*, 2737–2741.

- [43] Huang, J. T. (2001). An adaptive compensator for a servosystem with Coulomb and viscous friction. *IEEE International Conference on Control applications*, 196–199.
- [44] Abdellatif, H., Grotjahn, M. et Heimann, B. (2007). Independent identification of friction characteristics for parallel manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 129, 294–302.
- [45] Astrom, K. J. et Wittenmark, B. (2008). *Adaptive control*. Dover Publications, NY, dover edition.
- [46] Feemster, M., Vedagarbha, P., Dawson, D. M. et Haste, D. (1999). Adaptive control techniques for friction compensation. *Mechatronics*, 9, 125–145.
- [47] Teel, A. Kadiyala, R. Kokotovic, P. Sastry, S. (1991). Indirect techniques for adaptive input-output linearization of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 53(1), 193–222.
- [48] Liu, G. (2002). Décomposition-based friction compensation of mechanical systems. *Mechatronics*, 12, 755–769.
- [49] Bigras, P. (2009). Reduced nonlinear observer for bounded estimation of the static friction model with the Stribeck effect. *Systems and Control Letters*, 58, 119–123.
- [50] Carducci, G., Giannoccaro, N. I., Messina, A. et Rollo, G. (2006). Identification of viscous friction coefficients for pneumatic system model using optimization methods. *Mathematic and Computers in Simulation*, 71, 385–394.
- [51] Wit, C. C. d. et Lischinsky, P. (1997). Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control*, 11, 65–80.
- [52] Hensen, R. H. A., Molengraft, M. J. G. v. d. et Steinbuch, M. (2002). Frequency domain identification of dynamic friction model parameters. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(2), 191–196.
- [53] Kermani, M. R., Patel, R. et Moallem, M. (2005). Friction identification in robotic manipulators : Case studies. *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications*, 1170–1175.
- [54] Kermani, M. R., Patel, R. V. et Moallem, M. (2007). Friction identification and compensation in robotic manipulators. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 56(6), 2346–2353.
- [55] Madi, M. S., Khayati, K. et Bigras, P. (2004). Parameter estimation for the LuGre friction model using interval analysis. *IEEE international Conference. Systems, Man and Cybernetics. The Hague, Netherlands*.

- [56] Liu, D.-P. (2006). Parameter identification for LuGre friction model using genetic algorithms. *Proceedings of the 5th International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 3419–3422.
- [57] Tan, Y. et Kanellakopoulos, I. (1999). Adaptive nonlinear friction compensation with parametric uncertainties. *Proceeding of the American Control Conference*, 25112515.
- [58] Tan, Y., Chang, J. et Tan, H. (2000). Adaptive friction compensation for induction motors with inertia and load uncertainties. *Proceedings of the American Control Conference*, 615–620.
- [59] Zhang, Y., Liu, G. et Goldenberg, A. A. (2002). Friction compensation with estimated velocity. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2650–2655.
- [60] Xu, L. et Yao, B. (2008). Adaptive robust control of mechanical systems with non-linear dynamic friction compensation. *International Journal of Control*, 81(2), 167–176.
- [61] Wenjing, Z. (2007). An adaptive sliding mode compensation for friction and force ripple in pmsm ac servo system. *Proceedings on the 26th Chinese Control Conference*, 71–75.
- [62] Vivas, C. et Rubio, F. R. (2002). Gain-scheduling control of systems with dynamic friction. *Proceedings of the 41st IEEE International Conference on Decision and Control*, 89–94.
- [63] Wit, C. C. d. et Ge, S. S. (1997). Adaptive friction compensation for systems with generalized velocity /position friction dependency. *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, 2465–2470.
- [64] Wit, C. C. d. et Horowitz, R. (1999). Observers for tire / road contact friction using only wheel angular velocity information. *Proceedings of the 38th Conference on decision and Control*, 3932–3937.
- [65] Yi, J., Alvarez, L., Claeys, X., Horowitz, R. et Wit, C. C. d. (2001). Emergency braking control with an observer-based dynamic tire/road friction model and wheel angular velocity information. *Proceedings of the American Control Conference*, 19–24.
- [66] Mu, D.-J., Wang, H.-R., Wang, X. et Wei, L.-X. (2004). Observer based friction compensation in robot control. *Proceedings of the Third International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 401–405.
- [67] Xie, W.-F. et Zhao, Z.-Y. (2007). Sliding mode observer based adaptive control for servo actuator with friction. *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 1196–1201.

- [68] Huang, C.-I. et Fu, L.-C. (2007). Adaptive approach to motion controller of linear induction motor with friction compensation. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 12(4), 480–490.
- [69] Alvarez, L., Yi, J. et Olmos, L. (2005). Dynamic friction model-based tire-road friction estimation and emergency braking control. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 127, 22–32.
- [70] Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Al-Bender, F., Lampaert, V., Tjahjowidodo, T., Fassois, S. D., Rizos, D., Wong, C. X., Worden, K. et Manson, G. (2004). Identification of pre-sliding friction dynamics. *CHAOS*, 14(2), 420–430.
- [71] Rizos, D. D. et Fassois, S. D. (2004). Presliding friction identification based upon the maxwell slip model structure. *CHAOS*, 14(2), 431–445.
- [72] Peter, B., Gabor, H., Viencent, L. et Swevers, J. (2005). Nonlocal hysteresis function identification and compensation with neural networks. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(6), 2227–2238.
- [73] Worden, K., Wong, C. X., Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Tjahjowidodo, T., Al-Bender, F., Fassois, S. D. et Rizos, D. D. (2005). Identification of pre-sliding and sliding friction. *ENOC-2005*, 1985–1995.
- [74] Worden, K., Wong, C. X., Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Tjahjowidodo, T., Al-Bender, F., Rizos, D. et Fassois, S. D. (2007). Identification of pre-sliding and sliding friction dynamics : Grey box and black-box models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21, 514–534.
- [75] Rizos, D. D. et Fassois, S. D. (2005). Maxwell slip model based identification and control of systems with friction. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 4578–4583, Spain.
- [76] Tjahjowidodo, T., Al-Bender, F., Brussel, H. V. et Symens, W. (2007). Friction characterization and compensation in electro-mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 308, 632–646.
- [77] Nilkhamhang, I. et Sano, A. (2006). Adaptive compensation of the linearly-parameterized GMS friction model with parameter projection. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 6271–6276.
- [78] Nilkhamhang, I. et Sano, A. (2006). Particle swarm optimization for identification of GMS friction model. *SICE-ICASE International Joint Conference*, 5628–5633.
- [79] Marton, L. et Lantos, B. (2009). Control of mechanical systems with Stribeck friction and backlash. *Systems and Control Letters*, 58, 141–147.

- [80] Kim, S. J., Ha, I.-J., Kang, J. H., Kim, C. H. et Lim, S. G. A new parameter identification method for mechanical systems with friction. *IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference) Volume = 1, Pages = 322-327, Year = 1997.*
- [81] Cao, C., Annaswamy, A. M. et Kojic, A. (2003). Parameter convergence in nonlinear parameterized systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 48(3), 397–412.
- [82] Cao, C. et Annaswamy, A. M. (2002). Parameter convergence in systems with general nonlinear parameterization using a hierarchical algorithm. *Proceeding of the American Control Conference*, 376–381.
- [83] Annaswamy, A. M., Skantze, F. P. et Loh, A.-P. (1998). Adaptive control of continuous time systems with convex/concave parameterization. *Automatica*, 34(1), 33–49.
- [84] Loh, A.-P., Annaswamy, A. M. et Skantze, F. P. (1999). Adaptation in the presence of a general nonlinear parameterization : An error model approach. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(9), 1634–1652.
- [85] Misovec, K. M. et Annaswamy, A. M. (1999). Friction compensation using adaptive nonlinear control with persistent excitation. *International Journal of Control*, 72(5), 457–479.
- [86] Kojic, A., Cao, C. et Annaswamy, A. M. (2000). Parameter convergence in systems with convex/concave parameterization. *Proceedings of the American Control Conference*, 2240–2244.
- [87] Marino, R. (1990). Adaptive observers for single output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9), 1054–1058.
- [88] Marino, R. et Tomei, P. (1992). Global adaptive observer for nonlinear systems via filtered transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8), 1239–1245.
- [89] Marino, R. et Santosuosso, G. L. (1999). Robust adaptive observers for nonlinear systems with bounded disturbances. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, 5200–5205.
- [90] Marino, R., Santosuosso, G. L. et Tomei, P. (2001). Robust adaptive observers for nonlinear systems with bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6), 967–972.
- [91] Slotine, J.-J. E. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, NJ, Englewood cliffs edition.

- [92] Yazdizadeh, A. et Khorsani, K. (1996). Adaptive friction compensation using a Lyapunov-based design scheme. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, 1060–1065.
- [93] Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, NJ, second edition.