

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU
DOCTORAT EN GÉNIE
Ph.D.

PAR
RICHARD GIROUX

CAPTEURS BAS DE GAMME ET SYSTÈMES DE NAVIGATION INERTIELLE:
NOUVEAUX PARADIGMES D'APPLICATION

MONTREAL, LE 17 SEPTEMBRE 2004

© droits réservés de Richard Giroux

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. René Jr. Landry, Ph.D., Directeur de thèse
Professeur, Département de génie électrique, Ecole de technologie supérieure

M. Richard Gourdeau, Ph.D., Codirecteur
Professeur, Département de génie électrique, Ecole polytechnique de Montréal

M. Michel Lavoix, M.Eng., Président du jury
Professeur, Département de génie électrique, Ecole de technologie supérieure

M. Gérard Lachapelle, Ph.D., Examineur externe
Professeur, Département de géomatique, Université de Calgary

M. Bjarni Tryggvason, Examineur
Astronaute, Agence Spatiale Canadienne

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 18 AOÛT 2004

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

*Si vous écoutez votre coeur, vous savez précisément ce que vous avez à faire sur terre. Enfant, nous avons tous su. Mais parce que nous avons peur d'être déçu, peur de ne pas réussir à réaliser notre rêve, nous n'écoutons plus notre coeur. Ceci dit, il est normal de nous éloigner à un moment ou à un autre de notre **Légende Personnelle**. Ce n'est pas grave car, à plusieurs reprises la vie nous donne la possibilité de recoller à cette trajectoire.*

Extrait de « La légende personnelle, Rencontre avec Paulo Coelho, propos recueillis par Jérôme Bourguin »

« Quand on veut une chose, tout l'Univers conspire à nous permettre de réaliser notre rêve. »

« Et quand on ne peut revenir en arrière, on ne doit se préoccuper que de la meilleure manière d'aller de l'avant. »

L'Alchimiste, Paulo Coelho

CAPTEURS BAS DE GAMME ET SYSTÈMES DE NAVIGATION INERTIELLE: NOUVEAUX PARADIGMES D'APPLICATION

Richard Giroux

Résumé

L'objectif global de la thèse concerne l'utilisation des capteurs bas de gamme dans les systèmes de navigation inertielle. Les véhicules terrestres possédant une faible dynamique constituent le cadre de développement des algorithmes.

Premièrement, un nouveau modèle d'erreur pour l'intégration des SNI a été développé en utilisant une démarche claire. Le modèle générique en découlant est de nature non-linéaire, où aucune hypothèse d'approximation est impliquée. Comparativement au modèle linéaire, le modèle non-linéaire permet une convergence de l'erreur d'azimut beaucoup plus rapide. Cet aspect est important surtout lorsque la dynamique du véhicule est lente, d'où une faible observabilité de l'erreur d'azimut.

Deuxièmement, il est prouvé dans cette thèse que pour un nombre de capteurs donné, le placement orthogonal de capteurs est également optimal et équivalent au placement non-orthogonal de ces capteurs, lorsque l'on optimise le volume d'information disponible au système. De plus, en prenant en ligne de compte la complexité de la structure, et la diminution des coûts des capteurs, l'approche de redondance orthogonale devient économiquement intéressante.

D'un autre côté, la calibration en-ligne des capteurs bas de gamme est nécessaire à cause de la grande variabilité des erreurs des capteurs bas de gamme. Deux structures d'identification ont été implantées: une première où les erreurs résultantes sur les axes du repère mobile sont identifiées; et une deuxième dite indirecte avec mesure du vecteur de parité, où les erreurs des capteurs sont spécifiquement identifiées. Cette deuxième structure s'avère nécessaire si un algorithme de détection et d'isolation de fautes est implanté.

L'intérêt et le marché pour les SNI bas de gamme sont vastes et prometteurs. Les contributions élaborées dans cette thèse ajoutent une pièce supplémentaire dans le concert de la recherche mondiale qui permettra d'intégrer de façon efficace les capteurs bas de gamme dans des systèmes de navigation inertielle à bas coût hybridés avec un récepteur GNSS.

CAPTEURS BAS DE GAMME ET SYSTÈMES DE NAVIGATION INERTIELLE : NOUVEAUX PARADIGMES D'APPLICATION

Richard Giroux

SOMMAIRE

La navigation est un art ancien car se localiser dans l'espace a toujours été une nécessité pour l'homme au même titre que la conquête de nouveaux horizons. Ainsi, les systèmes de navigation ont évolué à travers le temps et depuis 1992, le système de positionnement global par satellites (GPS) se retrouvent dans de nombreuses applications. Les principaux problèmes avec le GPS sont sa disponibilité, sa fiabilité et sa vulnérabilité au brouillage. Ces problèmes forcent la combinaison du GPS avec des systèmes de navigation par inertie (SNI). Les capteurs du SNI permettent au système de navigation d'obtenir une solution de position en continue. Ces équipements, quoique essentiels, comportent plusieurs problèmes tels leur coût, leur encombrement et leur entretien pour n'en nommer que quelques-uns.

Depuis l'avènement des capteurs inertiels bas de gamme (décennie 1990), plusieurs chercheurs se sont intéressés à leur application dans des SNI. Certains privilégient l'amélioration des capteurs à proprement dit, mais d'autres s'attardent à modifier les algorithmes pour permettre l'utilisation de ces capteurs de faible précision.

L'objectif général de cette thèse concerne l'étude des méthodes d'intégration des capteurs bas de gamme dans les systèmes de navigation inertielle et évaluer les modifications à apporter aux algorithmes standards.

Implantation standard des SNI

La solution d'un système de navigation inertielle est obtenue en deux étapes. Premièrement, les équations de mouvement du corps solide dans un repère tournant (repère de navigation) sont intégrées pour obtenir la position, la vitesse et l'orientation du corps, basées sur les mesures d'accélération (accéléromètres) et de vitesses angulaire (gyromètres). Mais puisque les mesures en provenance des capteurs ne sont pas parfaites et donc contiennent des erreurs, la solution de navigation n'est pas précise après un certain temps (accumulation des erreurs). Ainsi, un modèle d'erreur est utilisé pour estimer la propagation de ces

erreurs, avec l'aide d'un filtre de Kalman. Des mesures externes sont alors utilisées pour estimer ces erreurs. Plusieurs types de capteurs peuvent être utilisés, en autant que ceux-ci donnent une information sur les erreurs de position, vitesse ou orientation. Actuellement, le système GPS constitue le système externe le plus utilisé. Une fois ces erreurs évaluées, elles sont retranchées de la solution de navigation pour corriger la solution de position, vitesse et d'orientation. De plus, les erreurs identifiées permettent d'estimer la précision du système.

Capteurs bas de gamme

La qualité des capteurs influence grandement la précision des SNI. Si des capteurs de haute précision sont utilisés, l'implantation standard donnera de bons résultats. Par contre, l'intégration des capteurs bas de gamme implique certains changements dans la façon de concevoir les SNI. Premièrement, les modèles d'erreur utilisés par le filtre de Kalman pour estimer les erreurs doivent être linéarisés. Cette linéarisation implique une hypothèse de faible erreur autour du point de fonctionnement. Les grandes erreurs présentes dans les capteurs bas de gamme rendent discutable cette hypothèse des faibles erreurs dans cette linéarisation du modèle d'erreur et peuvent induire une divergence du filtre de Kalman. De plus, la faible précision des gyromètres ne permet pas de mesurer la vitesse de rotation de la terre, principe utilisé pour initialiser l'orientation en azimut du véhicule.

Dans un autre ordre d'idée, les faibles dimensions et le faible coût des capteurs bas de gamme permettent leur utilisation en plus grand nombre. Ainsi, le paradigme de redondance voulant que l'on doit minimiser le nombre de capteurs pour une tâche donnée peut être contesté. En théorie, la mesure redondante d'un signal bruité permet une meilleure estimation du signal de base. Par contre, les capteurs utilisés dans cette thèse possèdent d'autres erreurs importantes et il n'est pas évident à priori quel niveau de gain peut être apporté par la redondance de capteurs bas de gamme.

Parmi toutes les approches entreprises par les chercheurs, deux semblent ne pas avoir été étudiées avec attention et feront l'objet d'une analyse détaillée dans cette thèse : les modèles d'erreur non-linéaire et la redondance de capteurs bas de gamme.

Modèle d'erreur non-linéaire

Quelques chercheurs se sont attardés à l'étude de l'initialisation du SNI avec des capteurs bas de gamme, où l'erreur d'azimut ne peut pas être évaluée de façon statique. Ainsi, l'er-

reur d'azimut peut être grande lors du début de la phase de navigation, et l'hypothèse d'une faible erreur dans le filtre de Kalman est contredite. Ces modèles ont été développés dans l'optique de répondre à cette problématique particulière, et se basent sur une extension du modèle linéaire.

Un nouveau modèle d'erreur a été développé dans cette thèse en utilisant une démarche claire et sans ambiguïté. Le modèle générique en découlant est de nature non-linéaire, où aucune hypothèse d'approximation est impliquée. Ce modèle est alors comparé aux modèles connus et sous les hypothèses de ces modèles, il est prouvé que le modèle non-linéaire revient aux caractéristiques de base de ces modèles.

Comparativement au modèle linéaire, le modèle non-linéaire permet une convergence de l'erreur d'azimut beaucoup plus rapide. Cet aspect est important surtout lorsque la dynamique du véhicule est lente, d'où une faible observabilité de l'erreur d'azimut. Pour ce qui est de la phase de navigation et l'identification des erreurs des capteurs en-ligne, le modèle introduit ne semble pas donner de meilleurs résultats.

L'implantation en temps réel du modèle non-linéaire est réalisable quoique la linéarisation du modèle demande plus de calcul que l'utilisation du modèle linéaire.

Redondance de capteurs bas de gamme

Il est intuitif que la redondance de capteurs implique une amélioration des performances d'un système. Premièrement, la redondance des capteurs était utilisée de sorte à minimiser le nombre de capteurs pouvant effectuer une tâche de détection et d'isolation de fautes. Ainsi, les structures géométriques nécessaires étaient relativement complexes. Il est prouvé dans cette thèse que pour un nombre de capteurs donné, le placement orthogonal de capteurs est également optimal et équivalent au placement non-orthogonal de ces capteurs, lorsque l'on optimise le volume d'information disponible au système. Évidemment, pour une tâche de détection et d'isolation de fautes, il faut plus de capteurs dans la configuration orthogonale (pour le pire des cas d'apparition des fautes). Par contre, le coût supplémentaire de ces capteurs est diminué par la simplification de la structure mécanique soutenant ces capteurs. Ainsi, en prenant en ligne de compte la complexité de la structure, et la diminution des coûts des capteurs, l'approche de redondance orthogonale devient intéressante.

D'un autre côté, l'effet de moyenne recherché par la redondance de capteurs est contre-carré par les erreurs constantes (ou variant lentement) des capteurs bas de gamme. Ainsi, en plus de la calibration hors-ligne des capteurs, les capteurs bas de gamme nécessitent une calibration en-ligne, donc une identification des erreurs. La calibration en-ligne des capteurs bas de gamme est d'autant plus importante à cause de la grande variabilité des erreurs des capteurs bas de gamme, rendant la calibration en laboratoire (hors-ligne) presque caduque.

Deux structures d'identification ont été implantées : une première où les erreurs résultantes sur les axes du repère mobile sont identifiées; et une deuxième dite indirecte avec mesure du vecteur de parité, où les erreurs des capteurs sont spécifiquement identifiées. La première méthode est applicable lorsque l'on veut seulement retrouver la caractéristique de moyenne des mesures redondantes. Par contre, si un algorithme de détection et d'isolation de fautes de capteurs doit être implanté, la deuxième structure doit être utilisée pour éviter la déclenchement de fausses alarmes. En effet, les erreurs des capteurs, si elles ne sont identifiées, peuvent causer des fausses alarmes si le seuil de déclenchement n'est pas haussé.

Une troisième approche a été étudiée de façon préliminaire et constitue une approche d'intégration directe de la redondance, où les équations de mouvement et les mesures des capteurs sont utilisées directement dans le filtre de Kalman. Ainsi, l'estimation des erreurs se fait directement à partir des équations de mouvement (pas de modèle distinct pour la propagation des erreurs du SNI). Les erreurs des capteurs sont tout de même identifiées par des modèles appropriés. Quoique les résultats préliminaires ne semblent pas concluants, la méthode est présentée en annexe pour la poursuite des travaux.

L'implantation en temps-réel de ces approches a été validée. À cause d'une limitation de nature matérielle, l'approche indirecte avec mesure de vecteur de parité a pu être implantée avec un nombre maximal de capteurs égal à neuf (3 par axe). Le temps de calcul avec l'approche où les erreurs résultantes sur les axes du mobile sont identifiées n'est pas une fonction du nombre de capteurs et est facilement utilisable en temps-réel.

Outils de développement

Pour effectuer l'analyse des algorithmes développés dans la thèse, un simulateur basé sur le logiciel Simulink a été conçu. Ce simulateur générique permet premièrement de simuler des trajectoires générées par l'utilisateur. La simulation des données inertielles est faite

de façon idéale (sans erreur) et des erreurs sont par la suite ajoutées aux données idéales pour simuler différents types de capteurs (incluant différents types d'erreur). Également, le simulateur peut être utilisé pour effectuer un post-traitement de mesures réelles. L'environnement Simulink a été sélectionné car il permet de réaliser des tests en temps-réel en utilisant une approche par prototypage rapide. Cette approche fut utilisée dans l'acquisition de mesures d'une unité de mesures inertielles redondantes conçue dans le cadre de cette thèse et a permis de minimiser le temps de conception.

Expérimentations

De façon à obtenir des données inertielles réelles, une unité d'acquisition de mesures inertielles a été remis en état de fonctionnement. Cette unité est constituée de quatre accéléromètres et quatre gyromètres agencés sur une structure tétraédrique. Ces capteurs ne sont pas de type bas de gamme (coût unitaire moyen de 1500\$ CND), mais sont tout de même des capteurs de précision commercial. La carte d'acquisition est de type commercial et conforme aux standards des ordinateurs embarqués PC104. Le mobile utilisé pour recueillir des données dynamiques est un camion utilitaire. Les algorithmes développés seront donc appliqués à la navigation véhiculaire à basse dynamique.

Contributions

Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes :

- Développement exhaustif d'un modèle de propagation des erreurs des SNI basé sur une approche générique (modèle NL);
- Preuve de l'équivalence du modèle NL par rapport aux modèles communs utilisant l'hypothèse des petites erreurs;
- Comparaison qualitative/quantitative entre la redondance orthogonale et non-orthogonale avec application aux capteurs bas de gamme;
- Étude de l'identification des erreurs des capteurs dans une structure redondante de capteurs bas de gamme;
- Conception d'un simulateur de SNI employant le logiciel Simulink et évaluation de sa performance;
- Preuve heuristique de l'équivalence entre l'intégration des équations de mouvement par des méthodes d'ordre élevé et la méthode généralement reconnue;
- Mise en marche d'une unité d'acquisition de donnée inertielle non-orthogonale;

- Implantation d'une structure de prototypage rapide pour la conception de SNI.

Domaine en pleine croissance

L'introduction des capteurs bas de gamme modifie les pratiques dans deux domaines : les modèles d'erreur et la gestion de la redondance. Les démonstrations théoriques des changements de paradigmes et les résultats présentés dans cette thèse prouvent que ces capteurs impliquent effectivement un changement dans la façon d'aborder l'intégration des systèmes de navigation inertielle. Les contributions élaborées dans cette thèse ajoutent une pièce supplémentaire dans le concert de la recherche mondiale qui permettra d'intégrer de façon efficace les capteurs bas de gamme, incluant les capteurs de type MEMS, dans des systèmes de navigation inertielle à bas coût hybridés avec un récepteur GPS.

L'intérêt et le marché pour les SNI bas de gamme sont vastes et prometteurs puisque plusieurs mobiles ne peuvent se permettre d'avoir des SNI conventionnels qui sont très coûteux et encombrants. L'utilisation de capteurs MEMS dans les SNI du futur nous permet d'aspirer à des applications multiples en aérospatiale (principalement dans les applications véhiculaires sans pilote, et où le poids et les dimensions doivent être réduites) et dans d'autres domaines connexes.

LOW-COST SENSORS AND INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS : NEW PARADIGMS OF APPLICATIONS

Richard Giroux

ABSTRACT

The exploration of the world has always relied on navigation breakthroughs. From the Polynesian experimental voyaging by use of sea landmarks and stars, to borderless space exploration, techniques of positioning were and still are of primary importance. Radio-navigation started around the beginning of the 20th century, as onboard sea ship clock bias was estimated with a standard clock reading sent from the nearby coast by wireless transmission, discovered earlier by Marconi. The Germans were first to successfully demonstrate the use of gyroscopes as a means of guidance for their V2 missiles. By doing so, they have paved the way to what has been called stabilized-platform Inertial Navigation System (INS), designed by Charles S. Draper and his team of the Instrumentation Laboratory (now called the Charles Stark Draper Laboratory, Inc.) at the MIT.

Stabilized-platform INS is a mechanical moving structure, implying significant costs in maintenance and overhaul. The advent of numerical computers has changed the way INS is implemented. Instead of having a mechanized moving platform ensuring a known orientation of the sensor frame, the orientation could then be virtually computed. Hence, it allowed the sensors to be fixed to the vehicle frame, which led to the name : Strap-down INS. Despite its attractive advantages (no external moving parts, cheaper and operational under any kind of trajectory), this new configuration soon showed its constraints : errors in the navigation solution were tightly coupled with the dynamics of the vehicle and were more sensitive to internal errors of the sensors (bias, drift, etc.). To cope with these problems, the Strap-down INS solution is combined with an external navigation aid. The Global Positioning System (GPS) is the most well-known navigation aid these days, whereas it was fully operational only in 1996. However, GPS is not a perfect system. Its main problems reside in its availability, its integrity and its risk of being jammed. Consequently, any applications requiring continuous updates of position will need to merge both systems.

During the late 80's and 90's, the integration of Strap-down INS and GPS (or other kind of navigation aid) was well established. However, the choice of sensors was limited to

varying grades of quality depending on the application. For precise navigation, the use of expensive sensors was mandatory, which restricted the application of INS mainly to the military sector (airplanes, submarines, missiles) and for the mass transportation civilian airplanes.

Standard implementation of INS

The implementation of a standard INS is done in two steps. First, the solution of the rigid body equations of motion in a rotating frame is computed to give inertial position, velocity and attitude information, based on accelerometer and rate gyros measurements. However, inherent sensor errors cause position and velocity inaccuracies to build up in the inertial solution. To cope with this misleading information, an error model is used. The error model is deducted from the equations of motion and the sensor errors, the latest being composed of bias, drift, random bias, and any other relevant error sources. The GPS is then used to compute the error, based on the GPS position and velocity information, and serve as the measurement vector for the Kalman filter. Finally, the estimated error from the Kalman filter solution is subtracted from the inertial solution to improve position, velocity and attitude information.

Low-cost sensors

A novel sensor design technique has brought to the market cheap and interestingly performing sensors. Indeed, from the classical macroscopic mechanical design and the microscopic integrated circuit fabrication technology emerged Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS). The first commercially-available MEMS sensor was the ADXL202, of Analog Devices Inc., which came on the market at the beginning of the 90's. This accelerometer was designed to be part of automotive air bags. Since that time, many improvements have enhanced the capabilities of those MEMS sensors and many other kinds of sensor have appeared. Also, because of the batch process nature of the fabrication technique, the cost of a single sensor is dramatically reduced. Then, a mosaic of yet-to-mature applications has seen a huge opportunity to improve their potential. Navigation systems are of course part of this challenge.

As one might expect, the impact of a new major technology implies a change of paradigm. The Strap-down INS was made possible due to the breakthrough of numerical computers because more complex algorithms (like the Kalman filter) have to be implemented to compensate for the deterioration in performance of the inertial sensors used (compared to the

ones used in the platform version). So, the performance of Strap-down INS is due to the use of more sophisticated algorithms compared to the Stabilized-platform INS. Hence, it is expected that the use of MEMS sensors in INS will imply a similar increase in complexity and innovation.

First, errors from low-cost sensors make them less suitable for using the standard linear error model for the Kalman filter. Also, low-cost rate gyros cannot sense the earth rate, which is a way of initializing the heading of the vehicle.

On another hand, the small size and low cost of these sensors make them suitable for using many of them, implying redundancy of measurements. Hence, the old paradigm where the minimisation of the number of sensors that performs a fault detection and isolation task can be challenged. In theory, redundant measurements of the same signal will give a better estimation of the real signal. However, due to the level of errors in low-cost sensors, and especially the “turn-on to turn-on” or slowly varying ones, it is not clear how redundancy can improve the solution in low-cost systems.

So, from all the areas of research in this field, two specific ones have not been thoroughly looked at in the literature, and are analyzed in this thesis : non-linear error model and redundancy of low-cost sensors. The algorithms that will be developed are applied to terrestrial vehicles with low dynamics.

Non-linear error model

Few researchers have investigated the area of error models applied to low-cost systems, where the heading error cannot be statically estimated. Hence, the heading error at the start of the navigation phase might be big enough so that the hypothesis of small error in the Kalman filter is no longer valid. The models developed so far addressed only this issue, and are based on the extension of the linear error model.

The error model developed in this thesis is based on a clear and sound demonstration. A generic non-linear error model is constructed, where no approximation hypothesis are used. Then, the model is compared to the known error models, and is proved to be equivalent under their respective hypothesis.

Compared to the linear error model, the rate of convergence of the heading error for the nonlinear error model is much better. This fact is very important when used with a low dynamic vehicle or equivalently when following a trajectory that has poor dynamics. Ho-

wever, for the general navigation phase, the use of the non-linear error model does not seem to improve the overall performance.

The real-time implementation of the non-linear model is feasible, although it necessitates more computational power than its linear counterpart.

Redundancy analysis of low-cost sensors

It seems logical to think that many measurements of the same signal lead to a better estimation of that signal, and this implies a better overall performance of the system. At first, redundancy was used for fault detection and isolation. While maintaining the ability of isolating a fault, the number of redundant sensors was minimized to reduce the cost of the system. Hence, a complex non-orthogonal structure of sensors was used.

It is shown in this thesis that an orthogonal redundant structure has the same amount of information than its skewed counterpart with the same number of sensors, and is still optimal. Indeed, for fault detection and isolation, the number of sensors in the orthogonal configuration increases (especially for the worst case scenario). However, taking into account the complexity of mechanical structure, and the decrease in sensor cost, it is shown that the orthogonal structure of redundant sensors is effective.

However, the average effect of redundant measurements is cancelled by deterministic errors. Hence, in addition to the calibration of the sensors prior to their use in the field, an on-line calibration has to be performed (at least for low-cost sensors). Two approaches for on-line identification have been proposed : one where only the resulting error on the axes of the body frame are identified; and a second one, where each sensor error is identified, using the parity vector of the measurements. The first method is applicable only to obtain the average effect of redundant measurements. When fault detection and isolation is needed, the second method has to be used to minimise false alarms created by sensor errors (that are not faults).

A third approach has been investigated, although the results are not conclusive. It uses a direct version of the Kalman filter, where the integration of the equation of motion, along with sensor measurements, are integrated in the Kalman filter model, instead of the error model. The theory and preliminary results are shown in an appendix.

The real-time implementation of these approaches has been verified. The indirect redundancy with parity vector measurements is more demanding than the estimation of the

resulting error on the body frame. If more than 9 sensors (3 per axis) are used, an upgrade in the embedded computer used in this thesis should be required, since the computation burden is a function of the number of sensors. The real-time computation effort for the standard redundancy is not a function of the number of sensors and is easily implemented.

Development tools

In order to simulate, test and validate the algorithms presented in the thesis, a generic simulator has been designed in the Simulink environment. It can be used to simulate any desired trajectory, or post-process real inertial data.

The Simulink environment has been chosen because it permits real-time testing through its fast-prototyping capability. This approach has been used to gather real-time inertial data from a redundant inertial measurement unit designed during the thesis and has greatly fast-tracked the design process.

Experimental setup

To obtain real inertial data, an inertial measurement unit has been overhauled. This unit is composed of four accelerometers and four gyros, placed on the sides of a tetrahedron. These sensors are not typical low-cost sensors (average unit cost of 1500\$ CND), but still are of commercial accuracy. The acquisition board has been bought off-the-shelf and is based on the PC104 standard for embedded computers. The vehicle used to gather the data is a utility vehicle. Hence, the developed algorithms will be applied to terrestrial vehicle navigation with low dynamics.

Contributions

The main scientific/technical contributions brought by this thesis can be summarized as following :

- Derivation of a generic non-linear model for the propagation of INS solution errors (NL error model);
- Proof of equivalency between the NL error model and known linear error models under their respective assumptions (usually the small error assumption);
- Qualitative and quantitative comparison between orthogonal and non-orthogonal redundancy, and proof that both structure are optimal;

- Study of redundant sensor error identification, which is crucial for sensor fault detection and isolation of low-cost sensors;
- Design of an INS simulator based on Simulink and its performance assessment;
- Heuristic proof of the equivalency between high-order integration method and the standard two-stage integration method introduced by Savage;
- Overhaul of a skewed-redundant inertial measurement unit;
- Implementation of a fast-prototyping approach for the design of INS algorithms.

Growing areas of application

Low-cost sensors modify the way INS was designed in two areas : the error model and the redundancy management. It has been theoretically proven and results show in this thesis that these sensors imply changes in the integration of inertial systems. The original contributions of this thesis are part of a global effort to efficiently integrate low-cost sensors in inertial systems fused with GPS.

As it happens quite often, a technology breakthrough creates a demand, and this demand stimulates the research and technology development and so on. Low-cost sensors applied to navigation systems have opened a broad perspective of applications, and new applications have emerged that require the development of better technology and algorithms.

AVANT-PROPOS

C'est une grande page du début de ma vie que je tourne : 11 années universitaires culminant avec la fin du doctorat. Débutant en septembre 2000, j'ai entrepris de débroussailler le domaine de la navigation inertielle, domaine n'ayant jamais été abordé à l'École de technologie supérieure (ETS). Être le premier à travailler sur un sujet dans une institution n'est pas chose facile, ni d'ailleurs être le premier étudiant au doctorat dans un laboratoire de recherche. Par contre, d'un point de vue formation à la recherche, ce cadre est exceptionnel : aucun idée préconçue, l'imagination est la seule frontière. On explore le domaine à partir des prémisses, on se penche sur les problématiques fondamentales, on fouille les articles à caractère historique pour mieux comprendre l'évolution des techniques. À partir de la compréhension globale des phénomènes en jeu, on peut alors prendre un recul et évaluer les impacts d'une nouvelle technologie sur le développement futur, telle l'introduction des capteurs bas de gamme dans la conception des systèmes de navigation inertielle. Je vois dans cette thèse plus que le fruit de mes recherches, mais également un outil de référence pour les futurs étudiants et chercheurs de la francophonie qui travailleront dans ce domaine.

En plus de me créer un créneau de connaissances approfondies dans le domaine de la navigation inertielle, la poursuite de mes études doctorales m'aura permis de réaliser un autre rêve : participer aux activités du « International Space University » (ISU). Quoique l'Agence Spatiale Européenne me subventionnait la moitié des frais d'inscription, M. François Gagnon (alors directeur du département de génie électrique), M. Robert L. Papi-neau (ancien directeur de l'ETS) et le Bureau des relations internationales ont comblé la

différence et m'ont permis de m'inscrire à la session d'été de l'ISU qui avait lieu à Brême, en Allemagne. Cette expérience a transformé ma vie et mes aspirations, et je suis très reconnaissant à ces gens. De même, M. Michel Lavoie, ancien directeur du département de génie électrique, et M. René Jr. Landry, superviseur de recherche, m'ont aidé financièrement pour participer une seconde fois à la session d'été de l'ISU, mais cette fois à titre d'assistant de recherche/enseignement. Encadrer 49 personnes en provenance de 28 pays pour qu'elles travaillent dans un but commun de recherche n'est pas chose commune, et je les remercie tout autant d'avoir permis que je vive pareille expérience.

Je tiens à remercier également mes deux superviseurs : M. René Jr. Landry (directeur, professeur à l'ETS), et M. Richard Gourdeau (co-directeur, professeur à l'École polytechnique de Montréal). Même si j'étais souvent posté à l'étranger, ce qui ne facilite pas les choses, leur soutien moral et technique, ainsi que leur esprit critique furent des pièces importantes du succès de cette thèse. Le docteur Barrie W. Leach, du « Institute for aerospace research » du Centre National de Recherche du Canada (CNRC) à Ottawa fut également d'une aide formidable avec la validation du simulateur. En seulement quelques rencontres avec lui à Ottawa, il a su me transmettre son expérience dans la conception de systèmes de navigation et une impulsion dans la progression de ma recherche. Finalement, j'aimerais remercier M. Salah Sukkarieh, du « Australian Centre for Field Robotics » (ACFR), à l'université de Sydney en Australie, pour m'avoir accueilli et encadré pendant 8 mois, de juin 2003 à janvier 2004. Le cadre international du ACFR m'a permis de discuter avec des chercheurs de pointe dans mon domaine, tout en me concentrant sur ma problématique et me permettant de rencontrer l'échéancier serré que je m'étais donné pour la fin de ma thèse.

Je ne pourrais passer sous silence les organismes qui m'ont aidé financièrement dans la poursuite de mes objectifs de vie. Premièrement, le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour l'obtention de la bourse doctorale ÉS-B. De plus, j'ai eu l'honneur d'être sélectionné par le Fonds de recherche sur la nature et les technologies (NATEQ - anciennement le Fonds FCAR) pour recevoir la bourse thématique en aérospatiale A8, bourse spéciale permettant le cumul avec la bourse doctorale du CRSNG. Également, j'aimerais remercier l'ETS pour m'avoir supporté financièrement pendant trois années avec les bourses internes de l'institution. Finalement, le Fonds NATEQ a également subventionné mon séjour de recherche à l'Université de Sydney, Australie.

À mes parents qui m'ont toujours encouragé même si c'était pour partir bien loin, je les remercie plus que tout. À mes amis et collègues de Montréal, Rouyn-Noranda, Sydney, Brême, Los Angeles et tout ceux disséminés à travers le monde avec qui j'ai eu la chance de partager quelques moments, je leur dit merci et à bientôt !

Montréal, 8 juin 2004

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE	ii
ABSTRACT	viii
AVANT-PROPOS	xiv
TABLE DES MATIÈRES	xvii
LISTE DES TABLEAUX	xxi
LISTE DES FIGURES	xxiii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES	xxx
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE	8
1.1 Différentes approches à un même problème	9
1.2 Les modèles d'erreur des SNI	15
1.3 La redondance de capteurs	16
CHAPITRE 2 LA NAVIGATION INERTIELLE	20
2.1 Repères utilisés dans les SNI	21
2.2 Équation de mouvement dans le repère de navigation	23
2.2.1 Équation de variation de la vitesse	25
2.2.2 Équation de variation de l'orientation	27
2.2.3 Équation de variation de la position	28
2.2.4 Résumé des équations et propagation des erreurs	29
2.3 Filtre de navigation	31
2.3.1 Approche directe du filtre de navigation	32
2.3.2 Approche indirecte du filtre de navigation	34
2.4 Modèle d'erreur de la solution de navigation	36
2.4.1 Perturbation de l'équation de vitesse	37
2.4.2 Perturbation de l'équation de position	38
2.4.3 Perturbation de l'équation d'orientation	39
2.4.4 Résumé du modèle d'erreur et simplification	40
2.4.5 Correction des équations de mouvement	41
2.4.5.1 Correction des solutions de position	41
2.4.5.2 Correction des solutions de vitesse	42

2.4.5.3	Correction de la solution d'orientation	42
2.5	Aide à la navigation inertielle	43
2.6	Initialisation des équations d'un SNI	44
2.7	Conclusion préliminaire	46
CHAPITRE 3	TECHNOLOGIE DES CAPTEURS	47
3.1	Classification de la performance des SNI	47
3.2	Technologie des capteurs	49
3.3	Les capteurs MEMS	52
3.4	Les caractéristiques d'erreur des capteurs inertiels	55
3.4.1	Équation de mesure des capteurs	55
3.4.2	Calibration vs identification en ligne	57
3.5	Discussion	59
CHAPITRE 4	MODÈLE D'ERREUR NON-LINÉAIRE	61
4.1	Développement mathématique du modèle d'erreur non-linéaire	62
4.1.1	Propagation non-linéaire de l'erreur d'orientation	62
4.1.2	Variation non-linéaire de l'erreur de vitesse	64
4.1.3	Variation non-linéaire de l'erreur de position	66
4.2	Équivalence entre le modèle non-linéaire d'erreur et le modèle de l'angle ψ	66
4.2.1	Équivalence de la variation de l'erreur d'orientation	66
4.2.2	Équivalence de la variation de l'erreur de vitesse	71
4.2.3	Équivalence de la variation de l'erreur de position	72
4.3	Correction des équations de mouvement avec erreurs non-linéaires et équivalence	75
4.3.1	Correction de la solution d'orientation	75
4.3.2	Correction de la solution de vitesse	76
4.3.3	Correction de la solution de position	76
4.4	Simplification du modèle non-linéaire d'erreur - application aux cap- teurs bas de gamme	77
4.5	Interprétation du modèle d'erreur non-linéaire dans l'algèbre des quaternions	79
4.5.1	Linéarisation du modèle d'erreur	81
4.6	Conclusion préliminaire	83
CHAPITRE 5	LA REDONDANCE DE CAPTEURS BAS DE GAMME	84
5.1	Théorie de la redondance	84
5.1.1	Critère d'optimisation	85
5.1.2	Configuration optimale de N capteurs à un axe de mesure	86
5.1.3	Performance des configurations	91
5.1.4	Coût associé aux configurations	93
5.2	Intégration de la redondance de capteurs bas de gamme au SNI	95

5.2.1	Impact des erreurs des capteurs dans la fusion des mesures	95
5.2.2	Approche indirecte	98
5.2.2.1	Mesure des erreurs des capteurs : application du vecteur de parité . .	99
5.2.3	Discussion	101
5.3	Conclusion préliminaire	105
CHAPITRE 6 IMPLANTATION DES ALGORITHMES		107
6.1	Concept général du simulateur	109
6.2	Simulation des mesures inertielles	110
6.2.1	Variables hors-ligne	110
6.2.2	Variables en-ligne	111
6.2.2.1	Génération de la vitesse angulaire (mesure idéale des gyromètres) .	113
6.2.2.2	Génération de l'accélération (mesure idéale des accéléromètres) . .	113
6.2.2.3	Matrices de rotation	114
6.3	Simulation des algorithmes	114
6.3.1	Modèle des capteurs	115
6.3.2	Modèle du GPS	116
6.3.3	Algorithme de navigation	117
6.3.3.1	Intégration des équations de mouvement	117
6.3.3.2	Filtre de navigation	120
6.4	Mise en oeuvre en temps réel et prototypage rapide	127
6.4.1	Prototypage rapide	127
6.4.2	Co-simulation en temps-réel	128
6.4.3	Acquisition de données	129
6.5	Performance des algorithmes	132
6.5.1	Intégration des équations de mouvement	132
6.5.2	Temps de calcul des algorithmes	134
6.6	Conclusion préliminaire	140
CHAPITRE 7 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX		142
7.1	Mise en oeuvre d'une unité de mesures inertielles redondantes . . .	142
7.1.1	Capteurs, chaîne d'acquisition et véhicule d'essai	142
7.1.1.1	Capteurs	143
7.1.1.2	Chaîne d'acquisition	146
7.1.1.3	Carte d'acquisition et ordinateur embarqué	147
7.1.2	Acquisition de données	147
7.2	Algorithme de navigation standard	153
7.3	Modèle d'erreur non-linéaire	159
7.3.1	Implantation et performance temps-réel	160
7.3.1.1	Temps de calcul d'un cycle du filtre de Kalman	161
7.3.2	Robustesse envers l'erreur d'initialisation	163
7.3.3	Robustesse face à la perte du signal GPS	165
7.3.4	Application du modèle non-linéaire à un cas réel : fusion Tetrad/GPS	169

7.3.5	Conclusion préliminaire sur le modèle d'erreur non-linéaire	176
7.4	Redondance de capteurs	178
7.4.1	Identification des erreurs des capteurs	178
7.4.1.1	Redondance indirecte	182
7.4.2	Implantation en temps-réel	188
7.4.3	Conclusion préliminaire sur la redondance de capteurs bas de gamme	189
CONCLUSION		190
ANNEXES		
1	: Notions fondamentales de mathématique	204
2	: Filtre de Kalman généralisé	207
3	: Démonstration complémentaire au modèle NL	210
4	: Initialisation du signal RS232 pour signal GPS	221
5	: Redondance directe des capteurs	223
BIBLIOGRAPHIE		235

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I Changement de paradigme	4
Tableau II Résumé des variables d'erreur de Leach et Hui	12
Tableau III Classification des gyromètres	48
Tableau IV Classification des accéléromètres	48
Tableau V Légende relative aux figures 19, 20 et 21	50
Tableau VI Comparaison des modèles d'erreur	68
Tableau VII Comparaison des approches de la redondance	103
Tableau VIII Paramètres n et m du modèle d'état	105
Tableau IX Exemple de données formant une trajectoire	111
Tableau X Orientation des capteurs dans le Tetrad	144
Tableau XI Caractéristique des gyromètres	145
Tableau XII Caractéristique des accéléromètres	145
Tableau XIII Variance du bruit des capteurs	151
Tableau XIV Pondération du filtre de Kalman	153
Tableau XV Solution d'orientation au moment de la perte du signal GPS . . .	174
Tableau XVI Caractéristique des gyromètres	181
Tableau XVII Caractéristique des accéléromètres	182
Tableau XVIII Conclusion de l'application du modèle non-linéaire	193
Tableau XIX Conclusion des configurations orthogonale et non-orthogonale . .	196
Tableau XX Conclusion de l'identification des erreurs des capteurs redondants	197
Tableau XXI Conclusion de l'implantation des algorithmes	199

Tableau XXII	Résumé des contributions de la thèse	202
Tableau XXIII	Comparaison des approches (incluant l'approche directe)	226
Tableau XXIV	Paramètres n et m du modèle d'état (incluant l'approche directe) .	228

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1 Innovation/complexification par perturbation technologique	3
Figure 2 Structure de la thèse	6
Figure 3 Aperçu général des domaines de recherche	8
Figure 4 Compensation des erreurs par réseaux de neurones	10
Figure 5 Calibration des capteurs en ligne	11
Figure 6 Modèles multiples interactifs	13
Figure 7 Aide à la navigation avec le modèle dynamique du véhicule	14
Figure 8 Configuration de capteurs redondants	17
Figure 9 Intégration de la redondance	18
Figure 10 Les repères de navigation	21
Figure 11 Définition du vecteur position	24
Figure 12 Latitude et longitude	28
Figure 13 Schéma-bloc de la solution des équations de navigation inertielle	30
Figure 14 Schéma-bloc de l'approche directe	33
Figure 15 Schéma-bloc de l'approche indirecte avec correction en aval	35
Figure 16 Schéma-bloc de l'approche indirecte avec correction en amont	35
Figure 17 Propagation des erreurs	49
Figure 18 Géométrie des erreurs	50
Figure 19 Technologie des gyromètres	51
Figure 20 Technologie des accéléromètres	52
Figure 21 Coût d'un système INS/GPS en fonction de la technologie utilisée	53

Figure 22	Trois classes de capteurs MEMS	55
Figure 23	Les repères utilisés dans le modèle d'erreur non-linéaire	63
Figure 24	Orientation d'un capteur	87
Figure 25	Projection des vecteurs directeurs sur le plan horizontal	91
Figure 26	Comparaison des configurations	92
Figure 27	Pourcentage de dégradation de la performance suite à l'isolation de fautes	93
Figure 28	Augmentation relative du coût de la structure orthogonale	94
Figure 29	Variance réelle de l'erreur avec bruit	96
Figure 30	Variance réelle de l'erreur avec bruit et biais	97
Figure 31	Approche indirecte de la redondance	102
Figure 32	Estimation du temps de calcul d'un cycle du filtre de Kalman	106
Figure 33	Étapes de conception	108
Figure 34	Concept global du simulateur	109
Figure 35	Création d'une trajectoire	110
Figure 36	Schéma-bloc de la génération des mesures inertielles idéales	112
Figure 37	Schéma-bloc de la simulation des algorithmes de navigation	115
Figure 38	Modèle Simulink pour les capteurs	117
Figure 39	Modèle Simulink pour le GPS	118
Figure 40	Algorithme de navigation	119
Figure 41	Schéma-bloc de l'intégrateur standard de Simulink	119
Figure 42	Création d'un nouveau bloc d'intégration et correction dans Simulink .	120
Figure 43	Modèle d'intégration de l'équation de variation de vitesse	121
Figure 44	Filtre de navigation	122

Figure 45	Filtre de Kalman généralisé	123
Figure 46	Propagation/correction de la matrice de covariance	124
Figure 47	Détermination de la correction des estimés du filtre de Kalman	124
Figure 48	Logique de contrôle du filtre de Kalman	125
Figure 49	Contrôle de l'erreur	126
Figure 50	Logique de contrôle du vecteur de contrôle d'erreur	126
Figure 51	Niveau hiérarchique des fonctions principales du simulateur	127
Figure 52	Prototypage rapide avec Simulink	128
Figure 53	Algorithme transmis à l'ordinateur cible pour exécution en temps-réel .	129
Figure 54	Transmission synchronisée en temps-réel des mesures des capteurs . .	130
Figure 55	Acquisition de données	130
Figure 56	Bloc d'acquisition de signal avec la carte MM32 de DiamondSystems .	131
Figure 57	Bloc d'acquisition de signal GPS	131
Figure 58	Erreur sphérique terminale	132
Figure 59	Comparaison des erreurs sphériques terminales	133
Figure 60	Comparaison des erreurs sphériques terminales de la méthode RK4 . .	135
Figure 61	Temps de calcul différé pour différentes méthodes d'intégration	136
Figure 62	Temps de calcul réel pour algorithmes d'intégration	136
Figure 63	Erreur sphérique terminale de l'hypothèse de la terre plate	137
Figure 64	Temps de calcul réel pour deux hypothèses d'équations de mouvement	137
Figure 65	Temps de calcul réel maximal pour le filtre de Kalman	138
Figure 66	Temps de calcul réel pour le contrôle de l'erreur	139
Figure 67	Temps de calcul réel total	140

Figure 68	Installation expérimentale	143
Figure 69	Axes du repère orthogonal associé avec le Tetrad	144
Figure 70	Chaîne d'acquisition	146
Figure 71	Installation expérimentale	147
Figure 72	Trajectoire d'essai	148
Figure 73	Nombre de satellites disponible	149
Figure 74	Mesures brutes des capteurs	150
Figure 75	Mesures des gyromètres, zoom des 50 premières secondes	150
Figure 76	Projection des mesures des capteurs sur le repère mobile B	151
Figure 77	Spectres de puissance des mesures des capteurs	152
Figure 78	Spectres de puissance des mesures des capteurs, échelle logarithmique	152
Figure 79	Solutions de navigation horizontale avec modèle d'erreur linéaire, et aucune identification de biais	154
Figure 80	Solutions de navigation verticale avec modèle d'erreur linéaire, et aucune identification de biais	155
Figure 81	Innovation de l'erreur de position avec modèle d'erreur linéaire, et aucune identification de biais	156
Figure 82	Solutions de navigation horizontale avec modèle d'erreur linéaire : amélioration par identification des biais	157
Figure 83	Solutions de navigation verticale avec modèle d'erreur linéaire : amélioration par identification des biais	157
Figure 84	Innovation de l'erreur de position avec modèle d'erreur linéaire : amélioration par identification des biais	158
Figure 85	Solution de navigation : orientation	159
Figure 86	Temps de calcul réel maximal pour un cycle du filtre de Kalman pour différents modèles d'erreur	162

Figure 87	Temps de calcul réel maximal pour un cycle de l'ensemble des algorithmes (utilisant différents modèles d'erreur)	162
Figure 88	Trajectoires (accélérations) utilisées pour l'évaluation de la robustesse à l'erreur d'azimut	163
Figure 89	Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'initialisation en azimut, dynamique riche	164
Figure 90	Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'initialisation en azimut, dynamique pauvre	165
Figure 91	Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'orientation sur les 3 axes	167
Figure 92	Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'orientation sur les 3 axes - Erreur de l'angle d'azimut	168
Figure 93	Performance théorique des gyromètres pour obtenir un temps de convergence de l'erreur d'azimut de 30 secondes	168
Figure 94	Solutions de navigation horizontale ; Confiance relativement élevée dans le modèle d'erreur	169
Figure 95	Solutions de navigation verticale ; Confiance relativement élevée dans le modèle d'erreur	170
Figure 96	Innovation de l'erreur de position ; Confiance relativement élevée dans le modèle d'erreur	170
Figure 97	Solutions de navigation verticale : modèle linéaire VS non-linéaire . . .	171
Figure 98	Innovation de l'erreur de position : modèle linéaire VS non-linéaire . . .	171
Figure 99	Solutions de navigation horizontale ; aucune identification des biais ; perte de signal GPS pour 20 secondes	172
Figure 100	Erreur de position ; aucune identification des biais ; perte de signal GPS pour 20 secondes	173
Figure 101	Intégration des équations de mouvement	174
Figure 102	Solutions de navigation horizontale ; calibration en ligne ; perte de signal GPS dans l'intervall $\Delta t = [165s \ 185s]$	175

Figure 103	Erreur de position ; calibration en ligne ; perte de signal GPS dans l'intervall $\Delta t = [165s \ 185s]$	175
Figure 104	Calibration des erreurs résultantes sur les axes du repère mobile B (calibration en aval)	179
Figure 105	Calibration des capteurs (calibration en amont)	180
Figure 106	Trajectoire horizontale à altitude constante	180
Figure 107	Mesures idéales des capteurs	181
Figure 108	Identification et correction en-ligne des erreurs résultantes de l'axe du repère mobile B	183
Figure 109	Identification des biais des accéléromètres sans la mesure du vecteur de parité, approche indirecte	184
Figure 110	Identification des biais des gyromètres sans la mesure du vecteur de parité, approche indirecte	185
Figure 111	Identification des biais des accéléromètres avec la mesure du vecteur de parité, approche indirecte	186
Figure 112	Identification des biais des gyromètres avec la mesure du vecteur de parité, approche indirecte	187
Figure 113	Comparaison des temps de calcul pour différentes approches	188
Figure 114	Erreur entre les repères de navigation calculé et vrai	220
Figure 115	Approche directe de la redondance	225
Figure 116	Estimation du temps de calcul d'un cycle du filtre de Kalman pour différentes approches de redondance, incluant l'approche directe	229
Figure 117	Ajout d'une correction à la structure du filtre de Kalman	230
Figure 118	Fusion des mesures des capteurs avec l'approche directe	231
Figure 119	Identification des biais des accéléromètres, approche directe	232
Figure 120	Identification des biais des gyromètres, approche directe	233
Figure 121	Estimation de l'accélération dans les axes du repère mobile B , approche directe	234

Figure 122 Comparaison des temps de calcul pour différentes approches, incluant la
redondance directe 234

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES

Abréviations

AUD	Dollar australien
cat.	Catégorie
CND	Dollar canadien
DGPS	Système de positionnement global différentiel, de l'anglais « Differential Global Positioning System »
ECEF	De l'anglais « Earth Centered Earth Fixed »
ECI	De l'anglais « Earth Center Inertial »
ÉDM	Équations de mouvement
FOG	Gyromètre à fibre optique, de l'anglais « Fiber Optic Gyro »
GNSS	Système de navigation globale par satellites, de l'anglais « Global Navigation Satellite Systems »
GPS	Système de positionnement global, de l'anglais « Global Positioning System »
IFOG	Gyromètre interférométrique à fibre optique, de l'anglais « Interferometric Fiber Optic Gyro »
ILS	Instrument Landing System
IMM	Modèles multiples interactifs, de l'anglais « Interactive Multiple Models »
INS	Système de Navigation Inertielle, de l'anglais « Inertial Navigation Systems »
LORAN	De l'anglais « Long Range Navigation »
MECA	Capteurs macro-mécanique, à masse tournante pour les gyromètres, à pendule ou suspendu pour les accéléromètres
MEMS	Système micro-électromécanique, de l'anglais « Micro-Electro-Mechanical Systems »
MIT	Massachusetts Institute of Technology
NL	Non-linéaire
NMEA	De l'anglais « National Marine Electronics Association »
ODE	De l'anglais « Ordinary Differential Equation »
RADAR	Radio Detection and Ranging
RK	Runge-Kutta
RLG	Gyromètre au laser, de l'anglais « Ring Laser Gyro »

Abbreviations (suite)

RTW	De l'anglais « Real-Time Workshop »
SNI	Système de Navigation Inertielle
TACAN	Tactical Air Navigation
VHF	Very High Frequency
VLSI	Very Large Scale Integration
VOR	VHF Omni-directional Range
VSG	De l'anglais « Vibrating structure gyros »

Symboles

${}^I\vec{a}_B$	Le vecteur de force spécifique mesuré dans le repère mobile (lecture des accéléromètres)
B	Repère mobile
B^t	Repère mobile vrai
B^c	Repère mobile calculé
$\mathbf{c}$	La fonction trigonométrique « cosinus »
${}^{R_2}C_{R_1}$	La matrice des cosinus directeurs représentant la rotation du repère R_1 vers le repère R_2
NC_B	La matrice des cosinus directeurs représentant l'orientation du mobile, composée des angles d'Euler, et représentant la solution d'orientation du SNI
EC_N	La matrice de position représentant la position du mobile composée de la longitude et de la latitude (et de l'angle de louvoiement dans certains cas), et constituant la solution de position du SNI
$\text{diag}\{\vec{x}\}$	Matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont formés par les éléments du vecteur x
$\det(\mathcal{I})$	Déterminant de la matrice d'information
E	Repère fixe terrestre (selon le contexte)
E	Espérance mathématique (selon le contexte)
$\text{fcn}(\cdot)$	Une fonction
$\vec{F}$	Vecteur de force
$\mathcal{F}$	Matrice d'état d'un système d'état sous forme continue
G	Repère géographique (selon le contexte)
$\mathcal{G}$	Matrice d'entrée d'un système d'état sous forme continue

Symboles (suite)

$\vec{g}$	Vecteur d'accélération gravitationnelle causée par la masse d'un corps
$\vec{g}_p$	Vecteur d'accélération gravitationnelle ressentie sur la terre, composée de l'attraction de la terre et de l'accélération centripète
$\mathcal{H}(\cdot)$	Fonction non-linéaire représentant les mesures
$\mathcal{H}$	Matrice de projection des mesures idéales pour obtenir les mesures redondantes (selon le contexte)
$\mathcal{H}_{x,\text{redon}}$	Matrice de projection des mesures idéales de la quantité x pour obtenir les mesures redondantes
$\mathcal{H}^*$	Matrice de projection des mesures redondantes pour obtenir les mesures idéales
$\vec{h}_i$	Vecteur unitaire associé au capteur redondant i donnant l'orientation du capteurs par rapport au trièdre fixe de référence
$\vec{h}_i^*$	Vecteur unitaire associé au capteur redondant i donnant l'orientation du capteurs par rapport au trièdre fixe de référence, augmenté d'erreurs d'angle en azimut et en élévation
h	Altitude
I	Repère inertiel (selon le contexte)
I	Matrice identité (selon le contexte)
$\mathcal{I}$	Matrice d'information
$\mathcal{J}$	Matrice jacobienne
K_k	Gain de Kalman au temps t_k
l	Nombre de lignes de la matrice de parité V^x (selon le contexte)
l	Latitude (mesure de position sphérique)
L	Longitude (mesure de position sphérique)
m	La masse du corps solide
m	Dimension du vecteur de mesure d'un système d'état (selon le contexte)
$\vec{m}$	Vecteur de mesures redondantes (selon le contexte)
M_a	Matrice d'alignement
M_e	Matrice de facteur d'échelle
$\mathcal{M}$	Ensemble des mesures externes
n	Dimension du vecteur d'état du système
N	Repère de navigation (selon le contexte)
N	Nombre total de capteurs redondants (selon le contexte)
N^t	Repère de navigation vrai

Symboles (suite)

N^c	Repère de navigation calculé
$\mathcal{N}$	Ensemble des variables de la solution de navigation
$p(\cdot)$	probabilité
$\vec{p}^x$	Vecteur de parité associé à la mesure de la quantité x
$\mathcal{P}$	Ensemble des vecteurs de parité
P	Repère des capteurs (selon le contexte)
P	Matrice de covariance des erreurs d'estimation (selon le contexte)
${}^{B^t}q_{B^c}$	Quaternion associé à la rotation entre les repères B^t et B^c
$Q_{\otimes}({}^{B^t}q_{B^c})$	Matrice équivalente à l'opérateur multiplicatif de l'algèbre des quaternions
$Q_C({}^{B^t}q_{B^c})$	Matrice équivalente à l'opérateur de rotation de l'algèbre des quaternions
Q	Matrice de confiance dans le système dans l'algorithme du filtre de Kalman
R	Matrice de covariance d'erreur des mesures dans l'algorithme du filtre de Kalman (selon le contexte)
R	Module du vecteur position (selon le contexte)
R_f	Un repère fixe
R_t	Un repère tournant
$[{}^{R_2}\vec{r}_{R_1}]_{R_3}$	Le vecteur de position de l'origine du repère R_1 par rapport à l'origine du repère R_2 mesuré par rapport au repère R_3
$[{}^E\vec{r}_N]_N$	Le vecteur de position utilisé avec l'hypothèse de la terre plate
$\ddot{\vec{r}}$	La dérivée seconde du vecteur de position
$S\{\vec{x}\}$	Matrice anti-symétrique du vecteur x
s	La fonction trigonométrique « sinus »
s_{nom}	Facteur d'échelle nominal
t	Temps
$(\cdot)^T$	Transpose d'une matrice
t	La fonction trigonométrique « tangente »
$\bar{T}$	Temps de simulation normalisé
$[{}^Zu_N]_N$	Vecteur unitaire vertical
$[{}^{R_2}\vec{v}_{R_1}]_{R_3}$	Le vecteur de vitesse de l'origine du repère R_1 par rapport à l'origine du repère R_2 mesuré par rapport au repère R_3
$[{}^E\vec{v}_N]_N$	Le vecteur de vitesse nord, est et verticale, et constituant la solution de vitesse du SNI

Symboles (suite)

$\vec{V}_{\text{mes}}$	Tension électrique équivalente de la variable mesurée par le capteur
$\mathcal{V}$	Ensemble des bruits associés aux mesures
V	Volume d'information
V^x	Matrice de parité associée à la mesure de la quantité x
V_a	Vitesse d'un véhicule par rapport à la masse d'air
$\vec{w}$	Bruit blanc
W_A	Angle de louvoisement
$^{R_2}\vec{x}_{R_1}]_{R_3}$	Le vecteur $\vec{x}$ représentant une caractéristique du repère R_1 par rapport au repère R_2 telle que mesurée dans le repère R_3
$\dot{\vec{x}}$	Première dérivée du vecteur $\vec{x}$, i.e $\frac{d\vec{x}}{dt}$
$\ddot{\vec{x}}$	Deuxième dérivée du vecteur $\vec{x}$, i.e $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$
$\vec{X}_{\text{mes}}$	Variable mesurée par un capteur
$\vec{X}_{\text{vrai}}$	La vraie variable mesurée par un capteur
$\mathcal{Y}$	Ensemble des variables de mesure

Symboles - lettres grecques

α	Pondération du coût de la complexité géométrique par rapport au coût des capteurs additionnels (contexte de la redondance)
α	Angle d'attaque (selon le contexte)
$^{R_1}\vec{\alpha}_{R_2}$	Le vecteur d'angle d'erreur associé à la matrice de rotation $^{R_1}C_{R_2}$ où le repère R_1 est inexact
$^{R_1}\vec{\beta}_{R_2}$	Le vecteur d'angle d'erreur associé à la matrice de rotation $^{R_1}C_{R_2}$ où le repère R_2 est inexact
β	Variable aléatoire (selon le contexte)
β	Angle de glissement (selon le contexte)
$^I\vec{\delta a}_B$	Total des erreurs en provenance des accéléromètres
$^I\vec{\delta \omega}_B$	Total des erreurs en provenance des gyromètres
$\vec{\delta g}_p$	Erreur de modélisation de l'accélération gravitationnelle
$\delta \mathcal{N}$	Ensemble des variables d'erreur du modèle d'erreur utilisées dans le filtre de Kalman
$^E\vec{\delta r}_N]_N$	Erreur de position dans le modèle d'erreur
$^E\vec{\delta v}_N]_N$	Erreur de vitesse dans le modèle d'erreur

Symboles - lettres grecques (suite)

$\vec{\delta x}$	Biais dans la mesure d'un capteur
$\vec{\epsilon}$	Bruit (erreur aléatoire) dans la mesure d'un capteur
γ	Innovation (dans le filtre de Kalman)
λ	Valeur propre d'une matrice
ω_e	Vitesse de rotation de la terre
$[{}^I\vec{\omega}_B]_B$	Le vecteur de vitesse angulaire du repère mobile par rapport au repère inertiel mesuré dans le repère mobile (lecture des gyromètres)
$[{}^I\vec{\omega}_E]_E$	Le vecteur de vitesse angulaire représentant la vitesse de rotation de la terre
$[{}^E\vec{\omega}_N]_N$	Le vecteur de vitesse angulaire du repère N par rapport au repère E, nommé en anglais « transport rate »
$[{}^{R_2}\vec{\omega}_{R_1}]_{R_3}$	Le vecteur de vitesse angulaire du repère R_1 par rapport au repère R_2 mesuré par rapport au repère R_3
Φ_k	Matrice de transition échantillonnée du système d'état
ϕ	Angle d'Euler représentant le roulis
$\vec{\psi}_N$	Vecteur des erreurs d'angle dans le modèle d'erreur linéaire
ψ	Angle d'Euler représentant l'azimut
Σ	Sommation
θ	Angle d'Euler représentant le tangage

Unités de mesure

deg	Degré
h	Heure
Hz	Hertz
m	mètre
μm	micro-mètre
m/s	mètre par seconde
mg	milli-g, i.e. un millièème de l'accélération gravitationnelle
μg	micro-g, i.e. un millionième de l'accélération gravitationnelle
PPM	Partie par million
rad	Radian
s	Seconde
V	Volt
Ω	Unité de résistance, Ohm

INTRODUCTION

Un peu d'histoire...

Depuis plusieurs millénaires, les hommes se sont dotés de moyens pour se repérer lors de leur déplacement. Les premiers marins utilisaient les côtes pour s'orienter, puis lorsqu'ils ont découvert la possibilité d'utiliser les étoiles comme repère, ils ont bravé l'inconnu pour repousser les limites des terres inexplorées. Ensuite, avec l'invention du compas magnétique, du sextant et la possibilité de déterminer le temps avec précision, l'exploration maritime n'avait plus de frontière.

Les guerres : vecteur de développement technologique (1920 – 1960)

L'histoire de la navigation aérienne aux instruments est relativement jeune. Le développement et l'exploitation du gyrocompas entre les deux grandes guerres fut précurseur des systèmes de navigation inertielle. Par la suite, l'avènement de la deuxième guerre mondiale engendra un momentum qui poussa l'avancement des connaissances de la technologie et de nombreuses applications militaires furent réalisées. À cet effet, un des pionniers de ces systèmes aux États-Unis, le Dr Charles Stark Draper, présente dans un article les origines de la navigation inertielle [1]. D'ailleurs, c'est durant cette guerre que le premier système de guidage par gyroscopes fut réalisé, par les allemands, avec leurs fusées balistiques V2 (également connu sous l'appellation A-4) ¹. Les applications civiles et militaires se sont accentuées après la deuxième guerre mondiale et les systèmes de navigation inertielle à plate-forme stabilisée (en anglais : stabilized platform) utilisant des gyroscopes mécaniques étaient la norme à cette époque. En effet, cette structure nécessite un algorithme de traitement relativement peu complexe et elle est principalement basée sur l'effet gyroscopique assurant le maintien des capteurs d'accélération dans un repère fixe et stabilisé.

La révolution numérique (1960 – 1990)

L'avènement des micro-ordinateurs changea la donne, et les systèmes de navigation à composants liés sont devenus monnaie courante. Dans cette configuration, les capteurs

¹ Quoique la construction des fusées « Vergeltung », pouvant être traduit en français par « vengeance » ou « revanche », a débuté vers 1939, l'armée allemande a commencé à développer la technologie des fusées (à propulsion liquide) vers 1932, avec l'embauche de Werner Von Braun, qui était alors étudiant dans la « Society for Space Travel » [2]. Il est intéressant de noter que Von Braun et ses contemporains allemands furent grandement inspirés par Hermann Oberth (1894-1989) et son ouvrage « The Rocket into Planetary Space » (1922), livre basé sur sa thèse de doctorat qui avait été refusée par ses professeurs un an auparavant...

(accéléromètres et gyromètres) sont solidaires au corps en mouvement, et l'orientation du corps est calculée à partir de la lecture des vitesses angulaires (d'où l'expression utilisée de système de navigation inertielle à composants liés « Strap-down Inertial Navigation System », en anglais). Ainsi, les pièces mécaniques sont moins sujettes aux bris et la fiabilité mécanique en est augmentée. Par contre, cette structure comporte des problèmes d'accumulation d'erreur dans la solution de navigation en provenance de la dérive des mesures des capteurs, des erreurs d'alignement des capteurs sur la structure du corps et des erreurs inhérentes aux calculs numériques. Garg [3] fait un état de l'art des SNI en 1978, avec un survol de la problématique de ces systèmes. Durant les années 70-80, la profusion des articles sur de nouveaux algorithmes et manières de concevoir ces systèmes est un bon indicatif de l'effervescence du sujet à cette époque.

L'utilisation de capteurs très précis résout partiellement le problème d'accumulation d'erreur. Par contre, ces systèmes sont limités aux applications militaires (et à l'aviation civile gros porteur) à cause de leur coût prohibitif. Lorsque la propagation des erreurs dans le système inertiel dépasse les spécifications de l'application, les systèmes inertiels autonomes sont hybridés à des moyens externes de localisation/navigation. À moins d'avoir des capteurs de très haute qualité, tous les systèmes de navigation à composants liés sont jumelés à des sources d'information externe.

La révolution de l'infiniment petit (1990 – ...)

Évidemment, la technologie change continuellement. Ainsi, avec l'accroissement de la micro-électronique, des technologies de pointe et de la miniaturisation, une nouvelle technologie a fait son apparition sur le marché depuis quelques années sous le nom de MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems). La technologie MEMS intègre deux technologies connues et maîtrisées : celle de la conception mécanique (ordre de grandeur minimale : $\approx 1000 \mu m$) et la fabrication de circuits intégrés à base de silicium (ordre de grandeur minimale $\approx 0.35 \mu m$).

Les capteurs MEMS sont maintenant d'utilisation courante, et ceux fabriqués en quantité industrielle sont très peu chers en comparaison avec les capteurs de type macro-mécaniques. Par contre, la précision des capteurs commerciaux demeure discutable pour les applications dans les systèmes de navigation par inertie. Néanmoins, de part leurs petites dimensions et faibles coûts, ils permettent d'atteindre des performances étonnantes. Il est plus que probable que cette nouvelle technologie révolutionnera plusieurs secteurs et celui de la navigation ne sera pas en reste.

Changement de paradigmes

Comme toute nouvelle technologie qui a transformé le domaine de la navigation inertielle, l'utilisation des capteurs MEMS devrait impliquer un renouveau de pensée. La figure 1 montre l'évolution de la complexité des SNI en fonction des perturbations technologiques. À chaque événement perturbateur, la complexité des systèmes va en augmentant. Il est ainsi plausible de dire que l'avènement des capteurs bas de gamme engendrera une évolution des algorithmes de traitement.

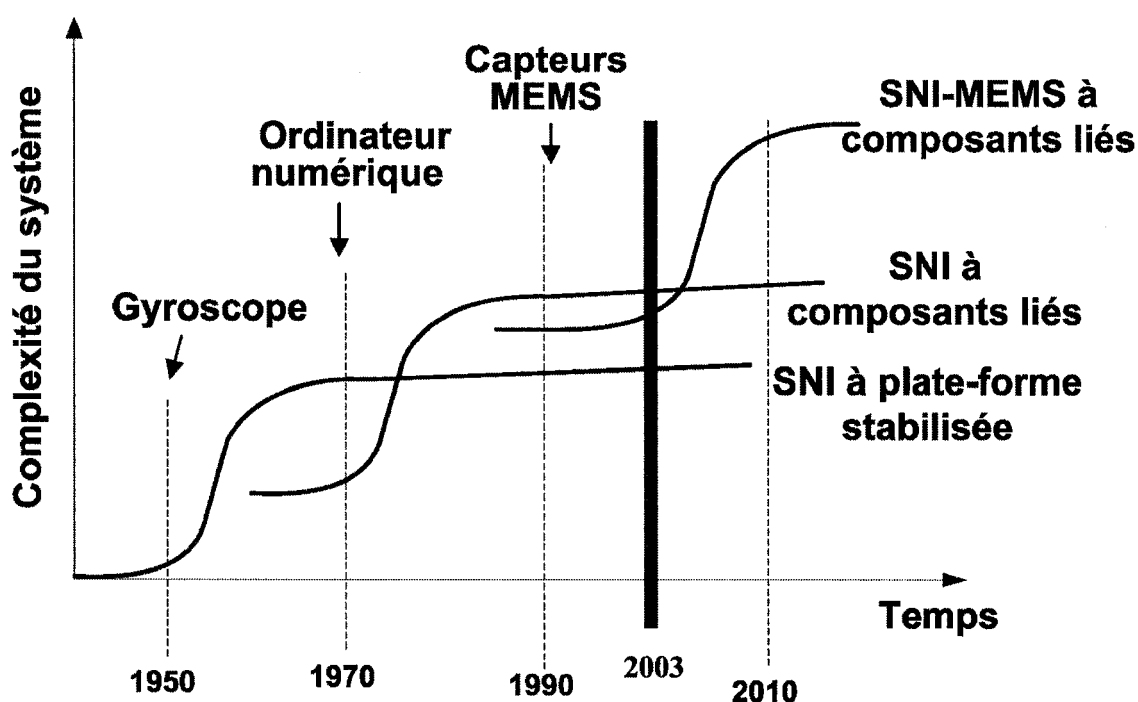


Figure 1 Innovation/compléxification par perturbation technologique

Néanmoins, la plupart des chercheurs dans le domaine utilisent la théorie développée durant les années 70-80 pour l'intégration des capteurs MEMS, incluant plusieurs hypothèses limitatives. Deux paradigmes établis sont donc confrontés dans cette thèse :

1. Les modèles d'erreur linéaires forment la base de l'estimation des erreurs des SNI;
2. La redondance de capteurs MEMS doit se faire sous la forme non-orthogonale.

Le tableau I résume les changements dans la façon d'aborder l'utilisation des capteurs bas de gamme.

Tableau I
Changement de paradigme

	Ancien paradigme	Nouveau paradigme
Modèle d'erreur	Linéaire	Non-linéaire
Redondance	Non-orthogonale	Orthogonale

Tel qu'il sera démontré, ces changements de paradigmes sont d'une part souhaitable dans certains cas pour l'estimation d'erreur, et d'autre part simplifient la configuration pour l'utilisation de la redondance.

Contributions

L'objectif global de la thèse concerne l'utilisation des capteurs bas de gamme, incluant les capteurs de type MEMS, dans les systèmes de navigation inertielle. Les véhicules terrestres possédant une faible dynamique constitueront le cadre de développement des algorithmes.

Depuis plusieurs années, l'intégration des capteurs bas de gamme (incluant les capteurs MEMS) dans les SNI fait l'objet de recherches intenses. Dans cette optique, cette thèse apporte un regard nouveau sur deux aspects de cette intégration : le développement d'un modèle d'erreurs pouvant accepter des grandes erreurs dans toutes les périodes de navigation - dont quelques contributions de chercheurs sont à souligner; et l'étude de la redondance de capteurs pour le cas particulier des capteurs bas de gamme - ce à quoi peu de chercheurs se sont intéressé jusqu'à maintenant.

Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes :

- Développement exhaustif d'un modèle de propagation des erreurs des SNI basé sur une approche générique (modèle NL);
- Preuve de l'équivalence du modèle NL par rapport aux modèles communs utilisant l'hypothèse des petites erreurs;

- Comparaison qualitative/quantitative entre la redondance orthogonale et non-orthogonale avec application aux capteurs bas de gamme;
- Étude de l'identification des erreurs des capteurs dans une structure redondante de capteurs bas de gamme;
- Conception d'un simulateur de SNI employant le logiciel Simulink et évaluation de sa performance;
- Preuve heuristique de l'équivalence entre l'intégration des équations de mouvement par des méthodes d'ordre élevé et la méthode généralement reconnue;
- Mise en marche d'une unité d'acquisition de donnée inertielle non-orthogonale;
- Implantation d'une structure de prototypage rapide pour la conception de SNI.

Structure de la thèse

La figure 2 illustre la structure logique de la thèse. À partir des notions de base des systèmes de navigation inertielle, il sera vu que l'introduction des capteurs bas de gamme perturbe la donne. Par la suite, deux approches sont proposées. L'environnement de développement est alors exposé, pour par la suite établir les résultats. De façon plus précise, les chapitres sont décrits ci-après.

Le **Chapitre 1** présente la revue de la littérature, couvrant les approches entreprises au cours des dernières années pour rendre possible l'utilisation des capteurs bas de gamme dans les SNI. Une attention particulière est portée sur la question des modèles d'erreur et l'utilisation de la redondance de capteurs.

Le **Chapitre 2** établit la base de la théorie sous-jacente aux systèmes de navigation inertielle. Cette théorie est exposée dans plusieurs ouvrages mais son inclusion dans le présent document facilite la compréhension des contributions de la thèse. De plus, la théorie présentée est plus détaillée et se fonde sur les principes de base de la mécanique, contrairement aux livres qui souvent passent sous silence les fondements de base.

Le **Chapitre 3** couvre l'aspect technologique des SNI, en présentant les différents types de capteurs inertiels et les tendances de performance, coût et dimension. La problématique entourant l'utilisation des capteurs MEMS est également présentée, en plus de détailler les erreurs courantes contenues dans les capteurs inertiels.

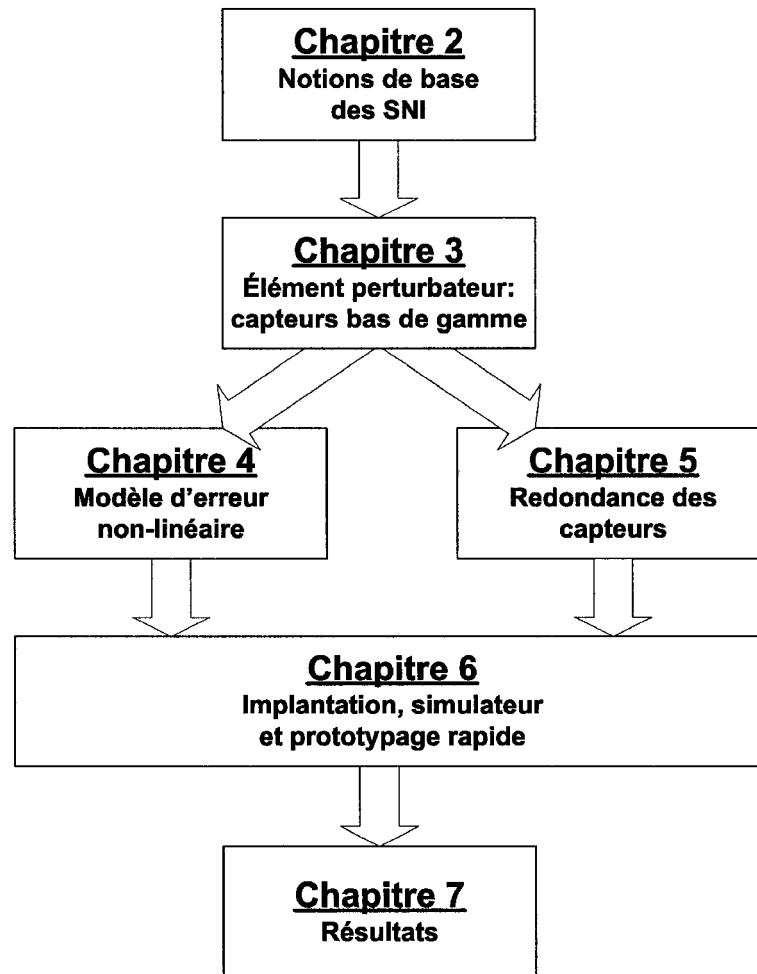


Figure 2 Structure de la thèse

Le **Chapitre 4** détaille la théorie du nouveau modèle d'erreurs généralisé et non-linéaire, démontre l'équivalence sous certaines hypothèses de ce modèle par rapport aux modèles courants et spécialise le modèle d'erreurs pour l'application aux SNI avec capteurs MEMS.

Le **Chapitre 5** traite de la redondance des capteurs MEMS comme étant différente de la redondance usuelle. En effet, les impératifs économiques et structurels régissant l'ancienne approche sont relativement assouplis par le bas coût et les faibles dimensions des capteurs MEMS. De plus, une approche pour l'identification des erreurs des structures redondantes est élaborée.

Le **Chapitre 6** introduit la notion de simulateur générique pour les SNI avec l'utilisation de Simulink. De plus, la preuve heuristique de l'équivalence entre l'intégration des équations de mouvement par des méthodes d'ordre élevé et la méthode généralement reconnue est apportée. Finalement, le chapitre présente l'implantation des algorithmes standards en temps-réel et introduit la notion de prototypage rapide pour les SNI.

Le **Chapitre 7** illustre les résultats expérimentaux de la thèse. En plus de l'explication du montage expérimental, une section se concentre sur les performances du nouveau modèle d'erreur comparées à l'état de l'art. En second lieu, la comparaison entre différentes approches d'identification d'erreurs dans les structures redondantes est illustrée par des résultats concrets.

Finalement, la thèse se termine par une conclusion relatant les principales contributions et principaux résultats. De plus, des pistes de recherche pour le futur sont exposés.

CHAPITRE 1

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Depuis le début de la navigation inertielle, beaucoup de travaux ont été faits sur l'intégration des systèmes inertiels. La théorie de base de la navigation inertielle est maintenant bien connue et maîtrisée, quoique parfois expliquée de façon ésotérique. Ainsi, la théorie de la navigation inertielle est résumée au chapitre 2. De plus, les livres suivants donnent un bon aperçu du domaine : Titterton et Weston [4], Biezad [5], Chatfield [6], Radix [7], Maybeck [8], et les deux livres les plus complets, de Savage [9, 10].

L'avènement des capteurs bas de gamme, incluant les capteurs de type MEMS, a généré un nombre substantiel de projets pour les intégrer dans des applications à bas coût. La figure 3 illustre les différentes approches, à la connaissance de l'auteur, dénombrées dans la littérature scientifique.

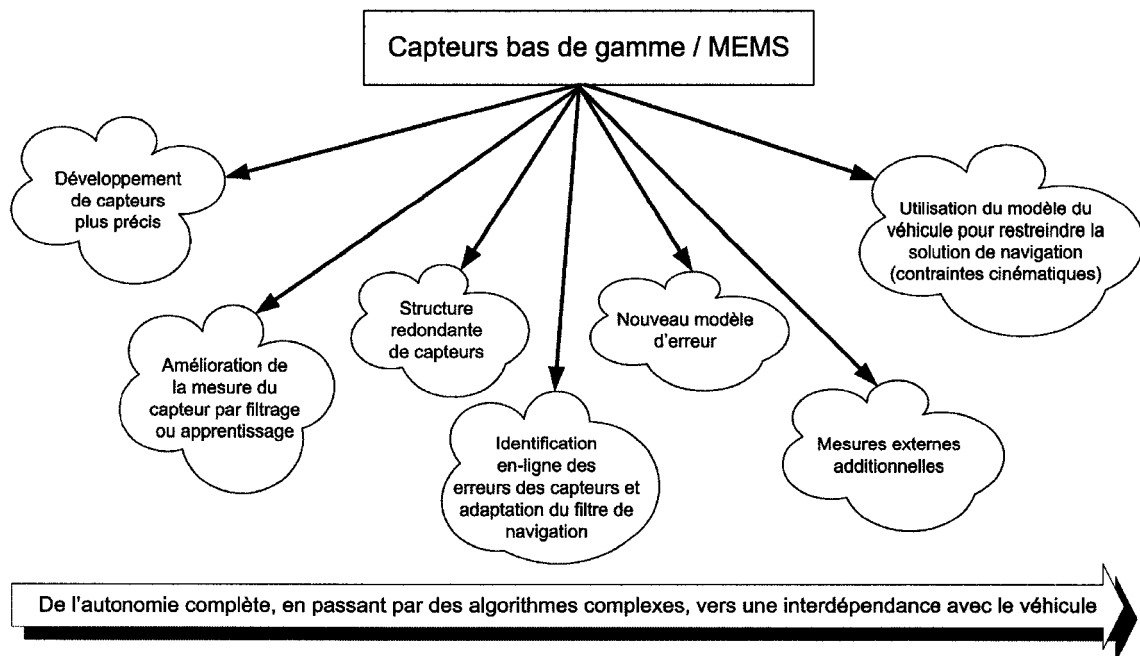


Figure 3 Aperçu général des domaines de recherche

1.1 Différentes approches à un même problème

La figure 3 peut être interprétée de gauche vers la droite, où l'extrémité gauche représente l'amélioration à proprement dite des capteurs, et l'extrémité droite utilise l'information du véhicule dans lequel le système prend place. Ainsi, le spectre de recherche dans le domaine va d'un système de navigation indépendant du véhicule dans lequel le SNI prend place vers un système dépendant du véhicule. Évidemment, plusieurs solutions intermédiaires existent. De façon succincte, les approches sont décrites ci-après. Une attention est portée sur les deux domaines qui font l'objet de la présente thèse : les modèles d'erreur des SNI et la redondance de capteurs (incluant la compensation en ligne des capteurs). La revue de ces deux secteurs font l'objet de sections particulières à la suite de la revue des autres approches.

Amélioration des capteurs

L'amélioration des capteurs nécessite beaucoup d'infrastructure et le laboratoire Draper du Massachusetts Institute of Technology (MIT) est bien équipé pour accomplir cette tâche, tel que résumé par Kourepenis [11, 12]. Dans le même ordre d'idée, les articles de Moore [13], de Gabriel [14] et de Barbour [15] illustrent une amélioration de la précision de ces capteurs. Le problème demeure toutefois l'accessibilité car même s'il est possible d'avoir certains capteurs MEMS de hautes précisions, les coûts de production restent prohibitifs (ou seulement des procédés accessibles par des centres de recherche subventionnés par les militaires). D'un autre côté, Kenny [16] démontrait récemment que la limite physique de détection d'une accélération est déjà atteinte par les capteurs utilisant les procédés de fabrication de type « surface ». Ainsi, si le marché a besoin de capteurs plus performants, c'est vers de nouveaux type de procédés de fabrication qu'il faut se tourner. Ces techniques de fabrication existent mais leur rentabilité reste encore à prouver.

Le chapitre 3 couvre en détail l'état de l'art dans les capteurs bas de gamme et les capteurs MEMS. Un chapitre complet y est dédié car il constitue la problématique qui stimule le développement de nouvelles théories.

Amélioration de la mesure

L'amélioration des mesures des capteurs par filtrage et apprentissage modifie les signaux avant qu'ils soient utilisés par les algorithmes de navigation. Une technique de pré-filtrage a été récemment présentée par El-Rabbany [17]. Il utilise la technique par ondelettes (en

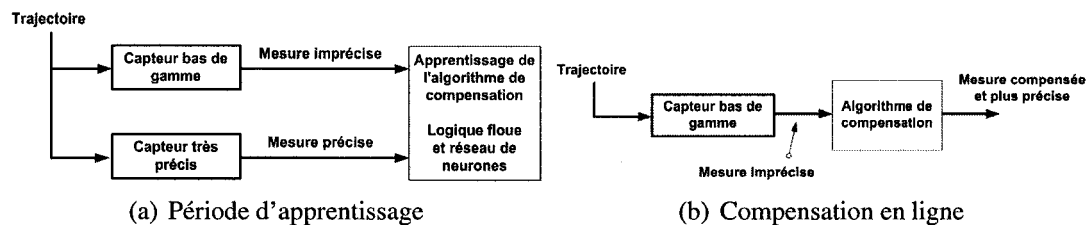


Figure 4 Compensation des erreurs par réseaux de neurones

anglais, « Wavelet ») qui retire le bruit d'un signal sans modifier le signal de base. Jusqu'à maintenant, cette technique n'a pas été implantée en ligne car le signal doit être traité en lot (en anglais, « batch processing »).

D'un autre côté, la méthode d'apprentissage présentée par Abershitz [18] peut seulement compenser les erreurs déterministes, et les règles obtenus sont seulement applicables pour le capteur utilisé durant l'apprentissage. En effet, la méthode consiste à utiliser un algorithme de logique floue et des réseaux de neurones pour compenser les erreurs du capteur. Premièrement, l'algorithme est entraîné hors-ligne avec plusieurs types de trajectoire (figure 4(a)). L'enseignement de l'algorithme est effectué avec un capteur de précision supérieure et une table tournante générant les accélérations sous contrôle expérimental. Par la suite, l'algorithme de compensation est appliqué aux capteurs en ligne (figure 4(b)). En plus de la non-répétabilité des erreurs déterministes d'une mise en marche à une autre, qui n'est pas couvert par l'apprentissage, la période d'apprentissage peut s'avérer longue pour couvrir le domaine de lecture de l'accéléromètre. Ainsi, il est préférable de s'en tenir à la calibration usuelle des SNI.

Identification en-ligne des erreurs des capteurs

Leach et Hui [19] présentent un système de navigation inertielle hybridé avec un GPS différentiel appliqué à un hélicoptère. Les capteurs utilisés (de qualité « tactique ») sont tous de meilleure précision que les capteurs MEMS. En plus de corriger la solution de position, de vitesse et d'orientation du SNI, ils incluent une boucle de rétroaction dans la mesure des capteurs de façon à calibrer en ligne les capteurs. La figure 5 illustre la boucle de rétroaction (ligne pointillée). En effet, l'estimé de l'erreur des capteurs est soustraite directement de la lecture, avant son traitement par les algorithmes de navigation et du traitement du filtre de Kalman. Ainsi, les termes d'erreur demeurent dans les limites acceptables pour l'hypothèse d'opération du filtre de Kalman linéaire.

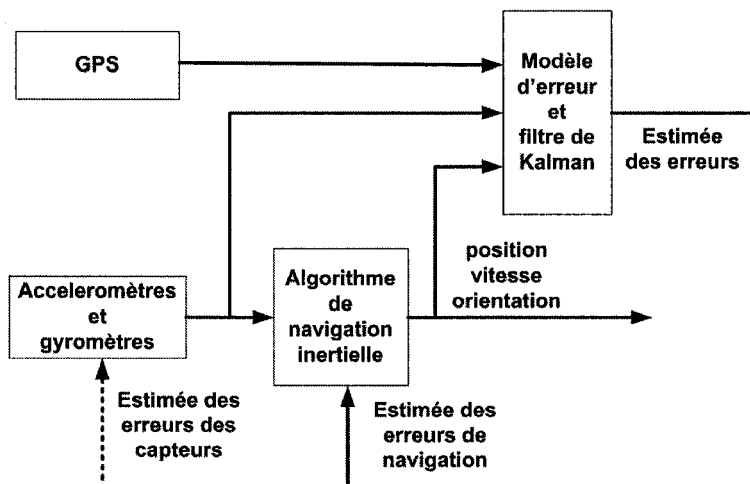


Figure 5 Calibration des capteurs en ligne

De plus, de façon à prendre en ligne de compte les erreurs des capteurs, un modèle d'erreur à 39 variables d'état est implanté. Ainsi, en plus des 10 variables d'état allouées aux erreurs du système (positions, vitesses, orientations et altitude barométrique), 29 sont dédiés spécifiquement à estimer les erreurs des capteurs, chacune représentée par un processus de Markov du premier ordre. Le tableau II résume le modèle d'erreur utilisé.

L'ordre élevé du modèle a été rendu nécessaire suite à la constatation que les erreurs de mesure des capteurs étaient anormalement élevées lors de manoeuvres particulières. L'augmentation de l'ordre du modèle pour représenter plus fidèlement le comportement des capteurs était alors de mise. Évidemment, plus l'ordre du modèle est élevé, plus le temps de calcul devient long. Par contre, aucune mention du temps de calcul n'apparaît dans le texte.

Dans le même ordre d'idée, Chen et Harigae [20] apportent une solution aux modèles d'erreur d'ordre élevé en utilisant les modèles multiples interactifs (en anglais : Interactive Multiple Models - IMM). Ainsi, différents modèles d'erreur sont établis selon la dynamique de vol, incluant seulement les paramètres importants de l'évolution des erreurs pour chacune des périodes de vol, tel qu'illustré à la figure 6. Les autres erreurs non-modélisées directement pendant cette partie du vol sont représentées par un bruit sur le système. Selon les auteurs, l'application d'une telle structure permet d'obtenir une performance supérieure en comparaison avec une structure à un seul modèle pour toutes les dynamiques de vol. Possiblement que le seul élément permettant une amélioration de la

Tableau II

Résumé des variables d'erreur de Leach et Hui

Variable	Nb	Variable	Nb
Position	3	Biais acc.	3
Vitesse	3	Facteur d'échelle acc.	3
Orientation	3	Biais baro	1
Biais gyro	3	Facteur d'échelle baro	1
Facteur d'échelle gyro	3	Boucle barométrique	1
Sensibilité des gyro aux acc.	3	Biais DGPS en position	3
Alignement des gyro avec acc.	6	Biais DGPS en vitesse	3

performance avec cette structure consiste en la possibilité d'utiliser des modèles d'erreur plus précis mais valide seulement pour une dynamique de vol donnée. Par exemple, au lieu d'avoir un modèle d'erreur d'ordre 30, qui peut être difficile à utiliser en pratique, on pourrait avoir 3 modèles d'ordre 10 représentant 3 phases de vol distinctes. Cette approche semble assez prometteuse.

Les filtres IMM entrent dans la catégorie de l'adaptation du filtre de navigation. Les méthodes d'adaptation du filtre de Kalman datent de plusieurs décennies. Jazwinski [21] et Mehra [22] ont contribué en premier dans ce domaine en présentant le filtre de Kalman adaptatif. La méthode utilise l'erreur de prédiction (les résidus) pour ajuster le modèle de bruit du processus en temps réel.

Hide et al. [23] comparent trois méthodes d'adaptation du filtre de Kalman : la pondération artificielle de l'estimée de la matrice de covariance, le filtre de Kalman adaptatif et l'estimation par modèles multiples interactifs. Sans privilégier une méthode en particulier, les auteurs soulignent l'importance d'estimer rapidement les erreurs des capteurs bas de gamme de façon à conserver la stabilité du filtre de Kalman. En utilisant les techniques d'adaptation, ils ont réussi à réduire d'un ordre de grandeur (de 500 secondes à 50-100 secondes) le temps requis pour la calibration des capteurs au démarrage. Selon Hide, malgré l'avantage des IMM à être plus robuste face aux erreurs de modélisation, ils demandent plus de temps de calcul (versus les deux autres méthodes d'adaptation) à cause de la parallélisation des multiples filtres.

Dans un article concernant la mise en oeuvre d'un système SNI utilisant des capteurs de qualité « tactique », Hutton [24] mentionne dans une phrase que les erreurs des capteurs

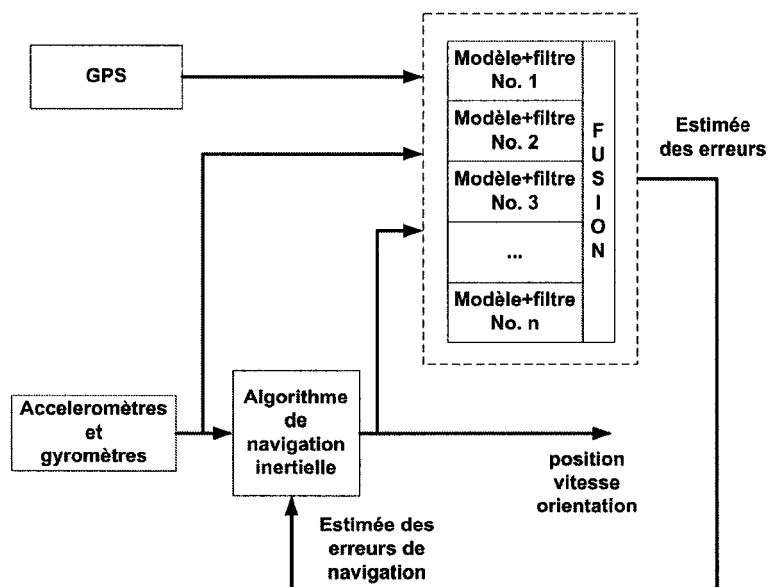


Figure 6 Modèles multiples interactifs

sont modélisées par une combinaison de modèles de Markov du premier ordre et avec la confiance dans ces modèles dépendant des manoeuvres du véhicule (un missile dans cette application). Quoique très intéressant, il n’y a aucune autre mention de cette particularité dans le reste de l’article.

Ajout de capteurs externes

Évidemment, l’ajout de capteurs externes permet l’amélioration globale de la solution de navigation, que ce soit des compas [25–28], gyroscopes à pendule [29], odomètres [27], radar/sonar [30] ou baromètres [31, 32]. Évidemment, cette liste n’est pas exhaustive mais couvre un bon nombre d’applications. Cette approche compense généralement pour la piètre qualité des capteurs bas de gamme mais augmente le coût du système. De plus, ces capteurs additionnels sont généralement assez volumineux, sauf pour le compas qui peut être sous la forme de capteurs MEMS. Également, certains de ces capteurs sont intimement liés au véhicule dans lequel ils prennent place, diminuant le degré d’indépendance du système.

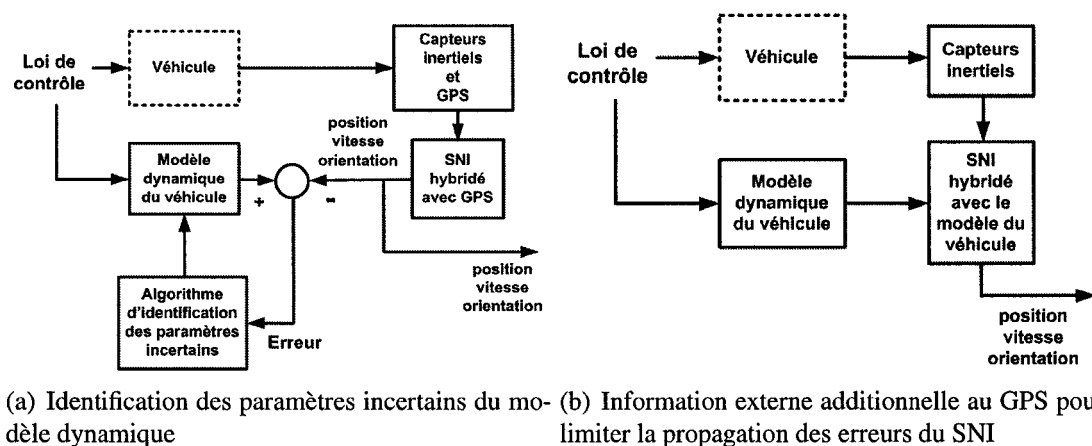


Figure 7 Aide à la navigation avec le modèle dynamique du véhicule

Utilisation d'un modèle de connaissance

Le modèle de connaissance prend généralement la forme du modèle dynamique du véhicule dans lequel le SNI prend place. Ainsi, la solution de l'équation dynamique peut être utilisée comme étant une observation, tout comme un capteur externe. Cette approche est bien adaptée pour les véhicules terrestres, où la dynamique est lente et le modèle dynamique est relativement bien connue. De plus, les contraintes non-holonomiques des véhicules terrestres peuvent être utilisées comme étant des mesures en continu, tel que stipulé par Sukkarieh [33]. Quoique non cité explicitement, Cannon [34] utilise probablement une structure similaire pour l'amélioration de la performance de la solution de navigation. Scherzinger a pour sa part récemment démontré cette approche pour un véhicule terrestre [35].

Dans une autre sphère d'applications, Koifman [36] et Eck [37] utilisent cette approche pour un avion et un hélicoptère, respectivement. L'approche utilisant les modèles dynamiques est plus difficile à implanter pour les véhicules possédant plusieurs degrés de liberté, de part la structure complexe de leur modèle et plusieurs paramètres inconnus. De façon à palier ce problème, Eck [38] identifie les paramètres incertains du modèle dynamique pendant la période où le GPS est présent (Figure 7(a)). Lorsque le GPS est inaccessible, le modèle du véhicule fournit l'information nécessaire pour réduire la propagation des erreurs dans la solution de navigation (Figure 7(b)).

L'avantage d'inclure le modèle dynamique du véhicule réside principalement dans l'augmentation de la robustesse de la solution de navigation. Même si l'approche fonctionne

pour un hélicoptère miniature, ce qu'a utilisé Eck, il est assez difficile d'avoir un modèle représentatif pour ce type de véhicule, à cause de sa dynamique très instable. De plus, l'identification du modèle nécessite une période d'entraînement. Finalement, l'inconvénient majeur de cette méthode est qu'il faut changer le modèle dynamique lorsque l'on change de véhicule.

1.2 Les modèles d'erreur des SNI

Tel qu'il sera présenté à la section 2.4, les modèles d'erreur de la solution de navigation des SNI sont nécessaires pour une certaine forme d'implantation, dite indirecte.

Les modèles d'erreur développés jusqu'à maintenant utilisent tous l'approximation d'une faible erreur d'orientation, que ce soit le modèle de l'angle ψ introduit par Pitman [39] en 1962 ou le modèle de perturbation (angle ϕ) de Britting [40] développé autour de 1971. En 1975, Benson [41] a comparé les deux modèles et statué sur leur équivalence. Le modèle de l'erreur absolue de Arshal [42] a été introduit en 1987. En 1988, Bar-Itzhack [43] traite l'analyse d'erreur du modèle de l'angle ψ avec une approche en contrôle, analysant l'observabilité des variables à estimer pour la phase d'initialisation des SNI. Finalement, Goshen-Meskin et Bar-Itzhack [44] prouvent que la différence entre les trois modèles d'erreur linéaire établit ci-haut réside simplement dans le choix des équations nominales de mouvement et les variables d'erreur avec lesquelles le modèle est représenté.

Le problème avec les capteurs MEMS et les capteurs à bas coût en général est l'ampleur des erreurs ainsi que leur caractéristiques stochastiques. De plus, lors de l'initialisation, les gyromètres bas de gamme ne sont pas assez précis pour mesurer la vitesse de rotation de la terre, donnée essentielle pour calculer la composante azimutale de l'orientation du mobile. Ainsi, lors de l'initialisation, une grande erreur en azimut est à prévoir. Quelques travaux ont portés sur l'hypothèse d'une grande erreur en azimut (en anglais, « heading »). Scherzinger [45, 46] introduit une quatrième variable représentant l'orientation mais le modèle est toujours linéaire et ce modèle est seulement utilisé dans la phase d'initialisation. Dans le cas de Kong [47], il prétend obtenir un modèle non-linéaire représentant l'orientation du mobile avec seulement trois variables, comme le cas linéaire. Par contre, le modèle présenté n'est pas non-linéaire. Malgré l'apparent succès de la méthode, ce modèle est également seulement appliqué à la phase d'initialisation du SNI et un modèle linéaire est utilisé pour la phase de navigation.

Pour palier au problème de l'initialisation des grandes erreurs avec les capteurs bas de gamme, Shin et El-Sheimy [48] ont récemment proposé une méthode d'alignement en mouvement impliquant un filtre de Kalman « sans odeur » (traduction libre pour le terme anglais « Unscented Kalman filter »). L'approche présentée, contrairement aux deux méthodes précédentes, est indépendante des capteurs utilisés (pour l'approche de Scherzinger) et ne comporte pas de changement de modèle d'erreur suite à l'initialisation. En effet, le filtre de Kalman « sans odeur », présenté en premier par Julier et Uhlmann [49], permet de propager la matrice de covariance des erreurs d'estimation avec une précision d'au moins d'ordre 2 de la série de Taylor pour n'importe quelle non-linéarité, sans pour autant augmenter la complexité de calcul par rapport au filtre de Kalman généralisé. Shin et El-Sheimy affirment, résultats à l'appui, que cette méthode permet ainsi de bien aligner le SNI en mouvement.

Dans le cas des capteurs bas de gamme, la problématique des grandes erreurs ne se présente pas seulement à la phase d'initialisation. En effet, si les mesures externes, qui servent à estimer les erreurs et corriger la solution de navigation, deviennent inaccessible durant la phase de navigation, les erreurs d'orientation deviendront vite hors borne pour la bonne marche du filtre de Kalman et l'hypothèse de linéarisation sous-jacente, impliquant une possible divergence du filtre et la mise hors-ligne du système. Pour le cas où la source externe d'information est constituée de satellite de navigation (section 2.5), la disponibilité du service est très variable dans un environnement urbain ou dans toutes situations où la ligne de vision directe avec les satellites est coupée. Le chapitre 4 répond à cette problématique en introduisant un vrai modèle non-linéaire pour les SNI.

1.3 La redondance de capteurs

La redondance des capteurs dans les systèmes de navigation inertielle est utilisée selon deux configurations : la configuration orthogonale, où les capteurs forment des axes orthogonaux entre eux; et la structure non-orthogonale, où les axes de mesure des capteurs sont dirigés perpendiculairement aux faces d'un polyèdre régulier (constituant une structure optimale). Les figures 8(a) et 8(b) illustrent les approches.

La disposition optimale non-orthogonale peut être déterminée de plusieurs façon, soit par minimisation de la variance moyenne d'estimation [7, 50, 51], soit par la théorie de l'information [33].

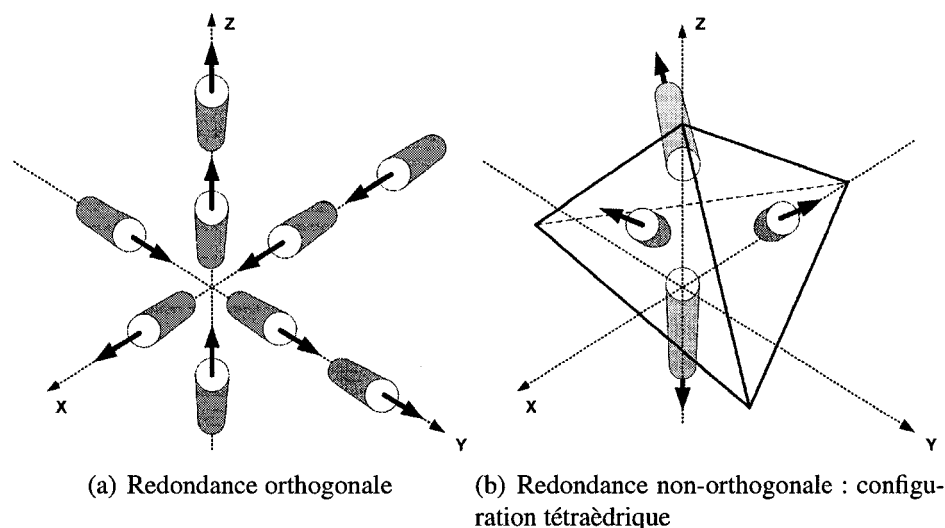


Figure 8 Configuration de capteurs redondants

La raison pour laquelle une structure complexe non-orthogonale est recherchée réside dans la minimisation du nombre de capteurs pour détecter ou isoler une faute parmi les capteurs. Par exemple, pour détecter et isoler une faute, neuf capteurs sont nécessaires dans la structure orthogonale alors que seulement cinq capteurs positionnés de façon optimale effectuent la même tâche.

Par contre, les capteurs inertiels MEMS étant plus petits, moins pesants et moins chers que leurs équivalents macro-mécaniques, leur utilisation en plus grand nombre semble de mise. Dans la mesure de l'accessibilité aux recherches publiques, il est de l'avis de l'auteur qu'aucune étude fait état du changement de paradigme que les capteurs MEMS peuvent susciter dans la théorie de la redondance. Le chapitre 5 traite de ce sujet et apporte des réponses concrètes.

L'approche classique de l'intégration de redondance dans les SNI est illustré à la figure 9 (adapté de Frank [52]). Ainsi, les mesures sont interprétées et fusionnées avant leur utilisation dans les algorithmes de navigation. Les algorithmes de détection et d'isolation de fautes dans les systèmes se seront pas abordés dans cette thèse. Néanmoins, une méthode généralement acceptée est l'utilisation des résidus pour prendre une décision. Pour plus d'information à ce sujet, l'article de Kelly [53] offre une bonne revue de cette méthode, appliquée au récepteur GPS.

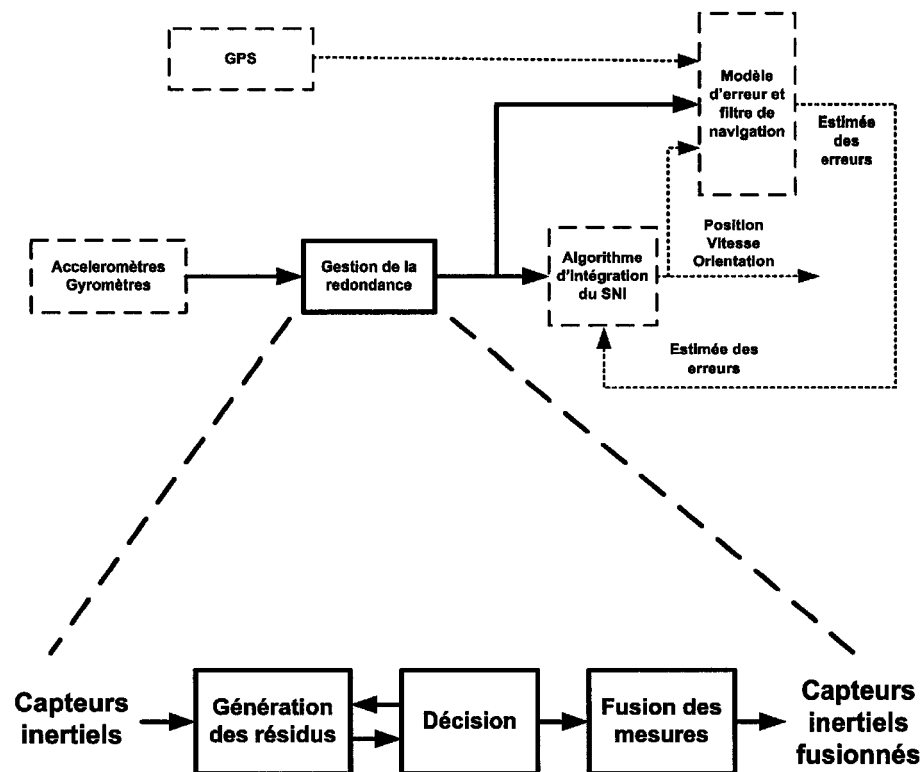


Figure 9 Intégration de la redondance

Le problème associé à l'utilisation de capteurs bas de gamme avec cette structure est que les erreurs inhérentes aux capteurs peuvent être assimilées à une faute et générer une fausse alarme dans l'algorithme de décision. On peut alors hausser le niveau de détection d'alarme, mais on risque alors de passer sous silence une vraie faute. Ainsi, il est préférable d'identifier les erreurs des capteurs redondants. Ray [54] fournit une solution intermédiaire où les capteurs se calibrent entre eux avant l'étape de la décision. Par contre, cette approche n'est bonne que lorsqu'un seul capteur possède une erreur. Alors, il est possible de corriger cette erreur en se basant sur les autres capteurs (la correction est alors relative aux autres capteurs). Pour contrer les erreurs communes aux capteurs, une source d'information externe est nécessaire.

Allerton et Jia [55] ont proposé récemment un modèle d'erreur pour les SNI utilisant une structure redondante de type non-orthogonal. Selon leur méthode, il est possible de compenser les erreurs des capteurs, peu importe leur orientation, ce qui n'était pas le cas avec l'approche traditionnelle. Cette dernière approchait compensait l'erreur de la mesure résultante de la fusion des mesures distinctes. Ainsi, leur méthode permet d'estimer indépen-

damment les erreurs de chacun des capteurs, augmentant la précision de la compensation d'erreur et la fiabilité de la détection de faute, toujours selon les chercheurs. Le problème avec cette approche réside dans l'estimation des erreurs des capteurs en aval de la fusion. Ainsi, les fausses alarmes ne sont pas réduites. De plus, aucune preuve de la faisabilité de la méthode n'a été présentée, ainsi qu'aucun résultat tangible.

CHAPITRE 2

LA NAVIGATION INERTIELLE

Le principe de base de la navigation inertielle repose simplement sur la deuxième loi de Newton, donnant l'équation de mouvement d'un corps rigide dans un repère inertiel¹, tel qu'introduit par Sir Isaac Newton en 1686 dans *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* :

$$\sum \vec{F} |_I = m \ddot{\vec{r}} |_I \quad (2.1)$$

où

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} |_I &= \text{Somme des forces agissant sur le corps dans un repère inerti-} \\ &\quad \text{tiel;} \\ m &= \text{La masse du corps solide;} \\ \ddot{\vec{r}} |_I &= \text{La dérivée seconde du vecteur de position entre le centre du} \\ &\quad \text{repère inertielle et le centre de masse du corps solide.} \end{aligned}$$

En isolant le terme d'accélération cinématique dans l'équation 2.1 et en explicitant la somme des forces externes comme étant la somme des forces spécifiques et de l'accélération gravitationnelle, on retrouve l'équation de base de la navigation inertielle.

$$\ddot{\vec{r}} |_I = \frac{\vec{F}^{\text{ext}} |_I}{m} + \vec{g} |_I \quad (2.2)$$

Évidemment, le principe de la relativité restreinte ne permet pas de mesurer distinctement les deux termes du membre de droite de l'équation 2.2 : la somme des forces spécifiques (forces cinématiques divisées par la masse du corps) et l'accélération gravitationnelle. Ainsi, la mesure d'accélération en provenance d'un capteur contient la somme des deux termes, de façon indissociable. De plus, cette mesure est en fait l'accélération du corps solide dans un repère inertiel, mais mesurée dans le repère du corps solide (et non mesurée dans le repère inertiel). Finalement, la solution $\ddot{\vec{r}} |_i$ de l'équation 2.2 ne fournit pas une information utile pour un usager sur la terre. En effet, pour les applications terrestres,

¹ Un repère inertiel est défini comme étant un système de référence où le principe d'inertie, la première loi de Newton, est valide. Dans un tel système, qui peut être décrit comme un système non accéléré, un corps qui subit une force externe nulle se déplace à une vitesse constante. Newton fit l'hypothèse qu'un système de référence fixe par rapport aux étoiles est un système inertiel [56].

l'information de position doit être donnée dans un repère qui est solidaire avec la terre. Ainsi, la solution de cette équation dans un autre repère est donc de mise.

Ce chapitre a pour but de présenter les notions générales de la navigation inertielle. Les repères de navigation seront tout d'abord introduits. Par la suite, les équations de mouvement dans ces repères seront établies, formant ainsi les équations de base pour les systèmes de navigation inertielle. Les méthodes pour obtenir la solution de navigation en présence d'erreurs dans les capteurs seront également présentées, avec un survol des aides externes à la solution de navigation et le filtre de navigation pour estimer ces erreurs.

À la fin de ce chapitre, le lecteur sera en mesure de bien comprendre les bases de la navigation inertielle, compréhension nécessaire pour apprécier les contributions de la thèse dans le domaine des systèmes de navigation inertielle de faible coût.

2.1 Repères utilisés dans les SNI

Pour que la solution de navigation soit pertinente à l'utilisateur, l'équation de navigation (équation 2.2) doit être interprétée dans un repère adéquat. Les figures 10(a) et 10(b) illustrent les repères normalement utilisés dans les systèmes de navigation inertielle.

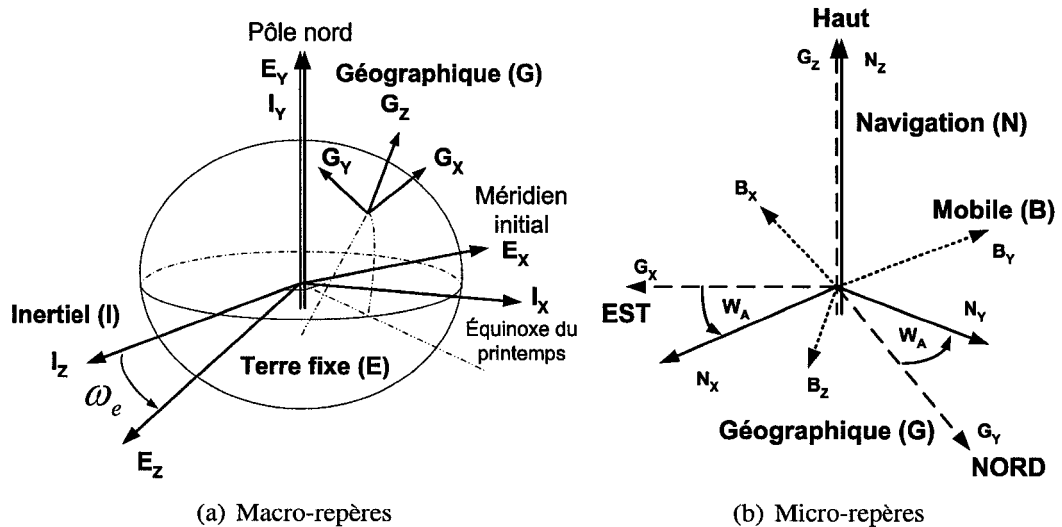


Figure 10 Les repères de navigation

Repère inertiel terrestre (I)

Communément appelé « Earth Centered Inertial - ECI », ce repère est une abstraction car il n'existe à vrai dire aucun repère purement inertiel. Les capteurs inertiels fournissent une mesure par rapport au repère inertiel. On peut associer un repère inertiel à la terre à cause de l'hypothèse de l'immensité de la sphère céleste et de la faible vitesse de rotation de la terre [56]. L'axe Y est dirigé vers le pôle nord céleste (I_Y), l'axe X est dirigé vers l'équinoxe du printemps² (I_X) et l'axe Z est défini comme le complément des deux autres axes pour former un trièdre orthogonal (I_Z). Ce repère sera désormais identifié par la lettre majuscule « I ».

Repère fixe terrestre (E)

Son nom anglais « Earth Centered Earth Fixed - ECEF » représente bien sa composition. Le repère fixe terrestre sert de référence pour la position du mobile, que ce soit en coordonnées cartésiennes ou sphériques. Ce repère est fixe et tourne avec la terre, avec une vitesse de rotation de $\omega_e = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$. L'axe Y est en direction de l'axe de rotation de la terre (E_Z), l'axe X passe par le méridien initial³ (E_X), dans le plan équatorial, et l'axe Z est à 90° est du méridien initial (E_Z), complétant la triade du repère. Dans le reste de la thèse, il sera désigné par la lettre majuscule « E » (de l'anglais « Earth »).

Repère géographique local (G)

Le repère géographique local possède la même origine que le repère mobile (centre de masse du corps en mouvement) et il est représenté par la lettre majuscule « G ». Le repère géographique est utile pour représenter la lecture de la vitesse du mobile telle qu'affichée à l'utilisateur. L'axe Z pointe vers le haut dans l'axe vertical local (G_Z), l'axe Y pointe vers le nord géographique (G_Y) et l'axe X est en direction de l'est (G_X).

Repère de navigation (N)

Le repère de navigation a la même origine que le repère géographique local G et il est dénoté par la lettre majuscule « N ». Il est utilisée pour intégrer l'accélération propre du mobile. Également, l'évolution de l'orientation du mobile dans l'espace est déterminée par

² Le vecteur défini par l'équinoxe du printemps est donné par la droite passant par le centre de la terre et le méridien de Greenwich au moment de l'équinoxe du printemps (autour du 21 mars).

³ Autrefois appelé le méridien de Greenwich, il est également connu par l'appellation « méridien zéro ».

rapport au repère de navigation. L'axe Z est parallèle à l'axe vertical local (N_Z). L'axe X (N_X) et l'axe Y (N_Y) sont perpendiculaires et complètent la triade du repère. L'orientation des axes horizontaux est donnée par l'angle de louvoiement (en anglais « wander angle ») et représenté par W_A sur la figure 10(b). Cette particularité permet l'utilisation des SNI près des pôles terrestres sans obtenir de singularités dans la solution de navigation. Dans le cas normal d'action loin des pôles, l'angle de louvoiement peut être établi comme nul. Ainsi, l'axe Y du repère N est orientée vers le nord géographique et l'axe X pointe vers l'est.

Repère mobile (B)

Le repère mobile « B » (de l'anglais « Body frame ») est solidaire au mobile en déplacement et il constitue une abstraction du mobile considéré comme une masse ponctuelle. L'axe X du repère coïncide avec l'axe longitudinal du mobile, et vers l'avant (B_X). L'axe Z est dirigé vers le bas (B_Z) et l'axe Y est orienté vers la droite (B_Y). L'origine du repère est au centre de masse du mobile.

Repère des capteurs (P)

Ce repère, qui n'est pas illustré sur les figures précédentes, est solidaire des capteurs inertiels à bord du véhicule. Les mesures des capteurs sont par rapport au repère inertiel, mais les mesures sont représentées dans le repère des capteurs. L'orientation de ce repère par rapport au repère mobile est connue par le concepteur du SNI. Ainsi, en première approximation et sans perte de généralité, il est supposé que les capteurs sont tous situés à l'origine du repère mobile ($P \equiv B$). La lettre majuscule « P » désignera ce repère (de l'anglais « platform frame »).

Maintenant que les principaux repères ont été exposés, l'équation de base du mouvement d'un corps solide dans l'espace (équation 2.2) peut être développée pour mieux interpréter la solution de navigation inertielle.

2.2 Équation de mouvement dans le repère de navigation

L'équation de base de navigation, représentée par l'équation 2.2, donne la variation de la position par rapport à un repère inertiel. L'expression de l'équation de mouvement dans le repère de navigation fait appel à la théorie des repères tournant. De façon générale, la théorie des repères tournant [57] stipule que : *la dérivée d'un vecteur par rapport à un*

repère fixe $\dot{\vec{x}}|_{R_f}$ est égale à la dérivée du vecteur par rapport au repère tournant $\dot{\vec{x}}|_{R_t}$, additionnée du produit vectoriel entre la vitesse angulaire du repère tournant par rapport au repère fixe et le vecteur même, ${}^{R_f}\vec{\omega}_{R_t} \times \vec{x}|_{R_f}$.

$$\dot{\vec{x}}|_{R_f} = \dot{\vec{x}}|_{R_t} + {}^{R_f}\vec{\omega}_{R_t} \times \vec{x}|_{R_f} \quad (2.3)$$

De façon à faciliter l'expression mathématique des équations et la compréhension du lecteur, deux notions doivent être définies : le vecteur et la mesure d'un vecteur. Un vecteur est défini par deux points, son origine et sa terminaison. La mesure d'un vecteur est la projection du vecteur sur les vecteurs unitaires orthogonaux définissant le repère dans lequel le vecteur est mesuré. Ainsi, le vecteur quelconque ($\vec{x}$ de l'équation 2.3) par rapport à un repère fixe $\vec{x}|_{R_f}$ s'écrira $[{}^{R_f}\vec{x}]_{R_m}$, i.e. le vecteur $\vec{x}$ ayant pour origine l'origine du repère fixe R_f mesuré dans le repère de mesure R_m .

Dans le cas de la navigation inertielle, les points d'origine et de terminaison d'un vecteur sont définis comme étant l'origine des repères, car les vecteurs de base ne sont pas quelconques : ce sont des vecteurs de position. La figure 11 illustre les repères I, E et N, et le vecteur de position ${}^I\vec{r}_N$. Le vecteur ${}^I\vec{r}_N$ doit se lire : le vecteur de position du repère N par rapport au repère I. Le repère de mesure n'est pas encore établi pour le moment.

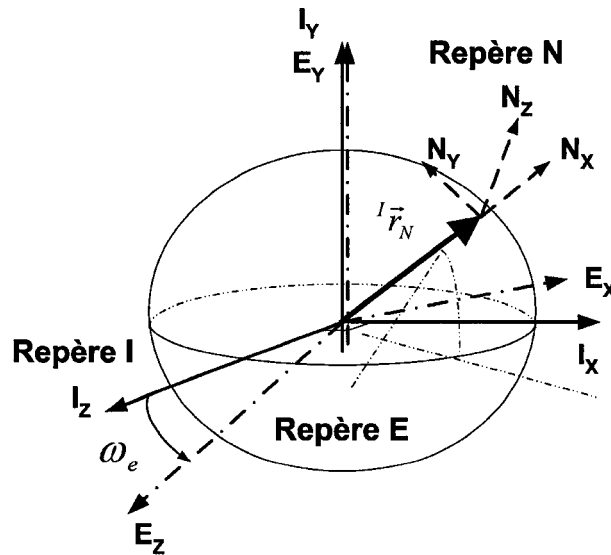


Figure 11 Définition du vecteur position

2.2.1 Équation de variation de la vitesse

La variable d'intérêt pour la vitesse du mobile est en fait la vitesse du repère N par rapport au repère E mesurée dans le repère N, qui donnera à l'usager la vitesse vers le nord, la vitesse vers l'est ainsi que la vitesse d'ascension (changement d'altitude). Il est à noter que ${}^E\vec{v}_N = {}^E\vec{v}_B$ car les deux repères partagent la même origine. Il faut donc trouver une relation du type ${}^E\dot{\vec{v}}_N = \text{fcn}(\cdot)$.

Si on applique le vecteur de position ${}^I\vec{r}_N$ à l'équation 2.3, et le tout mesuré par rapport au repère inertiel, on obtient :

$$[{}^I\dot{\vec{r}}_N]_I = [{}^E\dot{\vec{r}}_N]_I + [{}^I\vec{\omega}_E]_I \times [{}^I\vec{r}_N]_I \quad (2.4)$$

$$= [{}^E\vec{v}_N]_I + S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_I\}[{}^I\vec{r}_N]_I \quad (2.5)$$

La variable d'intérêt se trouve déjà dans cette dernière équation ${}^E\vec{v}_N = {}^E\dot{\vec{r}}_N$. Dans la suite de la thèse, le produit vectoriel est remplacé par la multiplication de la matrice antisymétrique $S\{\cdot\}$, ce qui est équivalent (annexe 7.4.3). En supposant la vitesse de rotation de la terre constante, la dérivée de l'équation 2.5 permet d'obtenir l'évolution de la variable d'intérêt ${}^E\dot{\vec{v}}_N$.

$$[{}^I\ddot{\vec{r}}_N]_I = [{}^E\dot{\vec{v}}_N]_I + S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_I\}[{}^I\dot{\vec{r}}_N]_I \quad (2.6)$$

En substituant l'équation 2.5 dans l'équation 2.6, l'équation 2.7 est obtenue.

$$[{}^I\ddot{\vec{r}}_N]_I = [{}^E\dot{\vec{v}}_N]_I + S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_I\}[{}^E\vec{v}_N]_I + S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_I\}S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_I\}[{}^I\vec{r}_N]_I \quad (2.7)$$

Le membre de gauche de l'équation 2.7 est l'accélération cinématique dans le repère inertiel, tel que représentée également par l'équation 2.2, interprétée dans le contexte de la navigation inertielle avec l'équation 2.8.

$$[{}^I\ddot{\vec{r}}_N]_I = \frac{[{}^I\vec{F}_N^{\text{ext}}]_I}{m} + [{}^I\vec{g}_N]_I \quad (2.8)$$

$$= [{}^I\vec{a}_N]_I + [{}^I\vec{g}_N]_I \quad (2.9)$$

où $[{}^I\vec{a}_N]_I = [{}^I\vec{a}_B]_I$ est la lecture des accéléromètres mais mesurée dans le repère inertiel.

En substituant l'équation 2.9 dans l'équation 2.7 et en considérant le vecteur de gravité à la surface de la terre (plumb-bob gravity) ${}^I\vec{g}_N$ comme étant la somme de l'accélération

gravitationnelle générée par la masse de la terre et de l'accélération centripète générée par la rotation du corps à la surface de la terre⁴ :

$${}^I\vec{g}_{pN} = {}^I\vec{g}_N - S\{{}^I\vec{\omega}_E\}S\{{}^I\vec{\omega}_E\}{}^I\vec{r}_N \quad (2.10)$$

et en isolant la variable d'intérêt ${}^E\dot{\vec{v}}_N{}_I$, l'équation de l'évolution de la vitesse mesurée dans le repère inertiel est donnée par l'équation 2.11.

$${}^E\dot{\vec{v}}_N{}_I = [{}^I\vec{a}_B]_I + [{}^I\vec{g}_{pN}]_I - S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_I [{}^E\vec{v}_N]_I \quad (2.11)$$

Par contre, la mesure fournie à l'utilisateur doit être dans le repère de navigation (vitesse nord, est et vers le haut). Ainsi, en utilisant les matrices de rotation (annexe 7.4.3), la mesure dans le repère de navigation de la vitesse est donnée par la relation suivante :

$$[{}^E\vec{v}_N]_N = {}^NC_I [{}^E\vec{v}_N]_I \quad (2.12)$$

où NC_I est la matrice de rotation entre le repère inertiel I et le repère de navigation N . La dérivée de l'équation 2.12 est calculée avec la règle de la dérivée en chaîne et représentée par l'équation 2.13.

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_N]_N = {}^N\dot{C}_I [{}^E\vec{v}_N]_I + {}^NC_I [{}^E\dot{\vec{v}}_N]_I \quad (2.13)$$

En utilisant les propriétés de la propagation de matrices de rotation et les propriétés des vecteurs, l'évolution de la vitesse dans le repère N peut être obtenu par l'équation 2.14 en substituant l'équation 2.11 dans l'équation 2.13.

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_N]_N = [{}^I\vec{a}_B]_N + [\vec{g}_p]_N - \left(S\{{}^E\vec{\omega}_N\}_N + 2S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_N \right) [{}^E\vec{v}_N]_N \quad (2.14)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation 2.14 est composé de la lecture des accéléromètres $[{}^I\vec{a}_B]_B$, où

$$[{}^I\vec{a}_B]_N = {}^NC_B [{}^I\vec{a}_B]_B \quad (2.15)$$

L'évolution de la matrice de rotation entre le repère mobile B et le repère de navigation N , NC_B (également appelée la matrice des cosinus directeurs de part sa composition des

⁴ L'accélération gravitationnelle générée par la masse de la terre et de l'accélération centripète ne peuvent pas être séparées par un observateur sur la terre, tel que défini par la relativité restreinte.

cosinus des angles d'Euler) doit donc être calculée et constitue l'objet de la prochaine section.

2.2.2 Équation de variation de l'orientation

La deuxième équation pertinente à la solution de navigation est la variation de l'orientation. Il existe plusieurs façon de propager l'orientation du repère mobile B par rapport au repère de navigation N , que ce soit par les angles d'Euler, des quaternions (paramètres d'Euler) ou de la matrice de rotation. De part la simplicité des équations, la matrice de rotation sera privilégiée dans le présent développement.

Tel qu'introduit à l'équation 1.11 de l'annexe 7.4.3, l'évolution de la matrice de rotation est donnée par :

$${}^I\dot{C}_B = {}^I C_B S\{[{}^I\vec{\omega}_B]_B\} \quad (2.16)$$

où $[{}^I\vec{\omega}_B]_B$ est la mesure des gyromètres, deuxième type de capteur nécessaire à la navigation inertielle. Avec la relation ${}^I C_B = {}^I C_N {}^N C_B$ et la dérivée en chaîne de ce produit matriciel, il peut être facilement démontré que

$$\begin{aligned} {}^I\dot{C}_B &= {}^I\dot{C}_N {}^N C_B + {}^I C_N {}^N\dot{C}_B \\ &\Downarrow \\ {}^N\dot{C}_B &= {}^N C_I {}^I\dot{C}_B - {}^N C_I {}^I\dot{C}_N {}^N C_B \\ &= {}^N C_B S\{[{}^I\vec{\omega}_B]_B\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_N]_N\} {}^N C_B \end{aligned} \quad (2.17)$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation 2.17 peut être décomposé comme suit,

$$[{}^I\vec{\omega}_N]_N = [{}^I\vec{\omega}_E]_N + [{}^E\vec{\omega}_N]_N \quad (2.18)$$

où $[{}^I\vec{\omega}_E]_N$ est la vitesse de rotation de la terre mesurée dans le repère N tandis que $[{}^E\vec{\omega}_N]_N = \text{fcn}([{}^E\vec{v}_N]_N)$ est défini comme la vitesse de transport du repère N . Le calcul de $[{}^I\vec{\omega}_E]_N$ nécessite la connaissance de la matrice de rotation entre le repère de navigation et le repère E : $[{}^I\vec{\omega}_E]_N = {}^E C_N^T [{}^I\vec{\omega}_E]_E$, où l'exposant « T » représente la transposée de la matrice de rotation et $[{}^I\vec{\omega}_E]_E$ est la vitesse de rotation de la terre (constante).

La matrice de rotation du repère N vers le repère E contient les coordonnées de latitude et de longitude du mobile, et constitue une des représentations de la position sur la terre (représentation sphérique). La variation de la position constitue la troisième équation nécessaire à la navigation inertielle et est présentée dans la prochaine section.

2.2.3 Équation de variation de la position

Quoique la position du repère N (et par le fait même, celle du mobile) peut être calculée de plusieurs façons, la solution présentée à l'utilisateur est normalement sous la forme d'une coordonnée sphérique (latitude, longitude et altitude). La figure 12 illustre la latitude et la longitude.

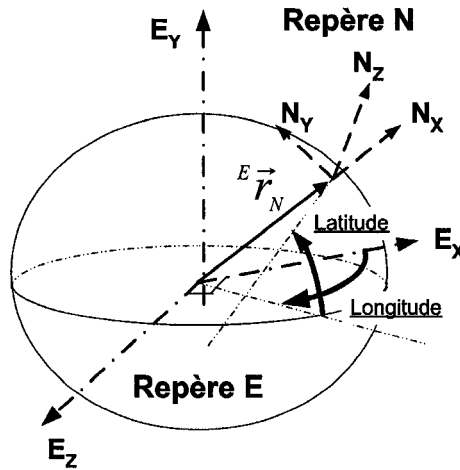


Figure 12 Latitude et longitude

La variation de la solution de position peut premièrement être reliée à la solution de vitesse :

$$[{}^E\dot{\vec{r}}_N]_N = [{}^E\vec{v}_N]_N - S\{[{}^E\vec{\omega}_N]_N\}[{}^E\vec{r}_N]_N \quad (2.19)$$

donnant une position en coordonnée cartésienne. L'affichage à l'utilisateur doit alors être précédé d'une conversion.

La latitude, la longitude et l'altitude peuvent également être calculées directement à partir de la vitesse :

$$\dot{l} = \text{fcn}([{}^E\vec{v}_N]_N) \quad (2.20)$$

$$\dot{L} = \text{fcn}([{}^E\vec{v}_N]_N) \quad (2.21)$$

$$\dot{h} = \text{fcn}([{}^E\vec{v}_N]_N) \quad (2.22)$$

où « l » est la latitude, « L » la longitude et « h » l'altitude.

Par contre, la variation de la matrice EC_N peut aussi être calculée avec la théorie de la propagation des matrices de rotation (équation 1.11).

$${}^E\dot{C}_N = {}^EC_N S\{[{}^E\vec{\omega}_N]_N\} \quad (2.23)$$

avec le calcul de $[{}^E\vec{\omega}_N]_N$ déjà effectué pour l'équation 2.18. La latitude et la longitude peuvent alors être déterminées par l'inverse trigonométrique de certains éléments de la matrice de rotation (tout comme les angles d'Euler peuvent être évalués à partir de la matrice des cosinus directeurs).

L'altitude est toujours calculée avec l'intégration de la composante vertical de la vitesse mesurée dans le repère N,

$$\dot{h} = [{}^Zu_N]_N \cdot [{}^E\vec{v}_N]_N \quad (2.24)$$

où $[{}^Zu_N]_N$ est le vecteur unitaire vertical dans le repère N et « $\cdot$ » est le produit scalaire entre deux vecteurs.

2.2.4 Résumé des équations et propagation des erreurs

Les équations définissant la navigation inertielle sont regroupées ci-dessous, où des termes d'erreurs ont été ajoutés pour illustrer le propos de cette sous-section. De plus, la figure 13 (adapté de Titterton [4]) montre schématiquement les principales fonctions de l'algorithme d'intégration des équations de mouvement dans un SNI.

$$\begin{aligned} [{}^E\dot{\vec{v}}_N]_N &= {}^NC_B[{}^I\vec{a}_B + \underbrace{{}^I\vec{\delta a}_B}]_B + [\vec{g}_p + \underbrace{\vec{\delta g}_p}]_N \\ &\quad - (S\{[{}^E\vec{\omega}_N]_N\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_N\})[{}^E\vec{v}_N]_N \end{aligned} \quad (2.25)$$

$${}^N\dot{C}_B = {}^N C_B S\{[{}^I\vec{\omega}_B + \underbrace{{}^I\delta\vec{\omega}_B}_B]\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_N]\} {}^N C_B \quad (2.26)$$

$${}^E\dot{C}_N = {}^E C_N S\{[{}^E\vec{\omega}_N]\} \quad (2.27)$$

$$\dot{h} = [{}^Z u_N]_N \cdot [{}^E \vec{v}_N]_N \quad (2.28)$$

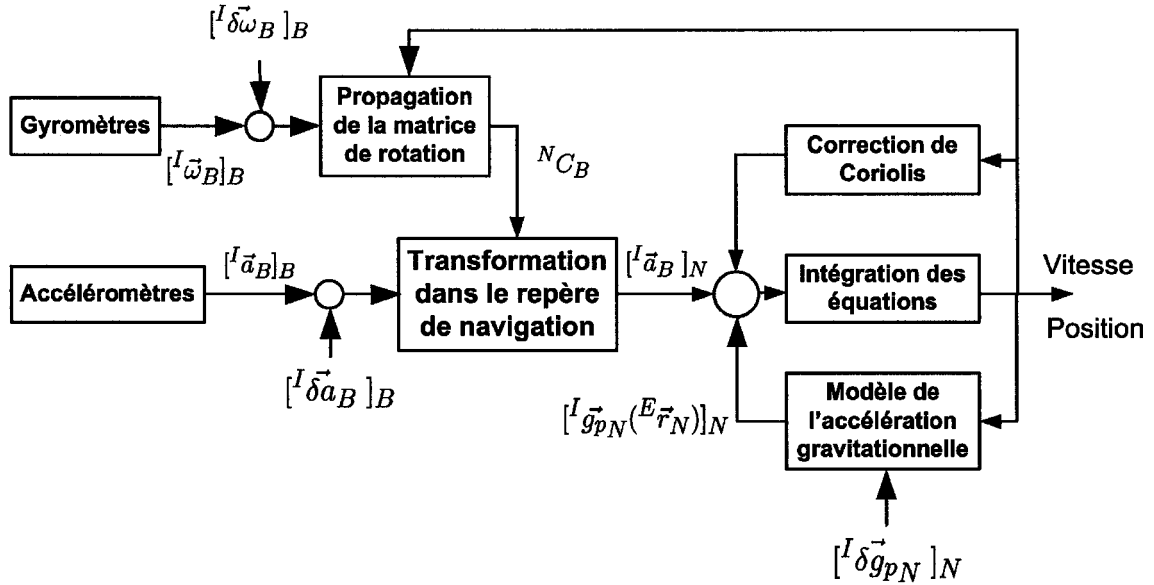


Figure 13 Schéma-bloc de la solution des équations de navigation inertielle

Il est clair que les erreurs des accéléromètres ${}^I\delta\vec{a}_B$, du modèle de gravité $\delta\vec{g}_p$ et des gyroscopes ${}^I\delta\vec{\omega}_B$ sont propagées à travers la solution de navigation. Pour la solution de vitesse, en plus des erreurs directes en provenance des accéléromètres et du modèle de gravité, les erreurs accumulées dans la solution d'orientation ${}^N C_B$, à cause des erreurs des gyroscopes, sont transmises à la solution de vitesse par la rotation de la lecture des accéléromètres. Il est donc nécessaire de corriger la solution de navigation $\mathcal{N} = \{{}^N C_B, [{}^E \vec{v}_N]_N, {}^E C_N, h\}$, où $\mathcal{N}$ représente l'ensemble des variables de la solution de navigation.

Les prochaines sous-sections illustrent les méthodes employées pour maintenir l'intégrité de la solution de position, vitesse et d'orientation, avec l'aide d'estimateurs optimaux (ou sous-optimaux, selon le cas) et de mesures externes.

2.3 Filtre de navigation

Dans un système de navigation inertielle, le filtre de navigation est utilisé pour obtenir la meilleure estimation possible de la solution de navigation, étant donné les erreurs inhérentes aux systèmes de navigation inertielle (capteurs, arithmétique finie et modèle de l'accélération gravitationnelle) et les mesures externes imparfaites. De façon à rendre concises les expressions mathématiques, les équations 2.25 à 2.28 seront remplacées par l'équation 2.29, où la variation de l'ensemble des variables de la solution de navigation $\dot{\mathcal{N}}$ est fonction de la solution de navigation elle-même $\mathcal{N}$ et de la lecture des accéléromètres $[{}^I\vec{a}_B]_B$ et des gyromètres $[{}^I\vec{\omega}_B]_B$.

$$\dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}(\mathcal{N}, [{}^I\vec{a}_B]_B, [{}^I\vec{\omega}_B]_B) \quad (2.29)$$

Les termes d'erreur qui ont été mis en évidence aux équations 2.25 à 2.28 seront maintenant considérés comme implicites aux mesures des capteurs et à la modélisation de l'accélération gravitationnelle.

De façon générale, rappelons que l'estimation d'une variable aléatoire est effectuée en fonction d'un coût associé à la densité de probabilité a posteriori de la variable à estimer. Ainsi, soit l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{N}$ à estimer, l'ensemble des mesures $\mathcal{Y}$ de cet ensemble assujetties à un ensemble de bruits de mesure $\mathcal{V}$ et la densité de probabilité conditionnelle aux mesures $p(\mathcal{N} | \mathcal{Y})$,

$$p(\mathcal{N} | \mathcal{Y}) \rightarrow \hat{\mathcal{N}} \quad (2.30)$$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H}(\mathcal{N}, \mathcal{V}) \quad (2.31)$$

il est possible de déterminer, par exemple, pour la fonction de coût minimisant l'erreur quadratique de la variable à estimer, que l'estimation la valeur optimale est donnée par l'espérance mathématique de la variable.

$$\hat{\mathcal{N}} = E\{\mathcal{N} | \mathcal{Y}\} \quad (2.32)$$

Le fait de connaître le modèle du système d'état à estimer et l'utilisation d'hypothèses de travail permettent de simplifier le problème d'estimation. Par contre, les simplifications apportées amènent également certaines limitations dans l'algorithme. Le filtre de navigation le plus utilisé dans le système de navigation est un estimateur optimal linéaire : le

filtre de Kalman. Le filtre de Kalman repose sur des hypothèses fondamentales. Premièrement, le modèle du système régissant l'évolution des variables d'état à estimer est connu. Également, la densité de probabilité a priori des variables d'état est de type gaussien. Deuxièmement, les mesures répondent également à une densité de probabilité gaussienne. Finalement, selon l'hypothèse classique du filtre de Kalman linéaire, la densité de probabilité des erreurs de mesure est indépendante des variables d'état.

Étant donné ces hypothèses, l'estimation des variables d'état est calculé par les équations 2.33 à 2.35,

$$\widehat{\mathcal{N}}_{k|k} = \widehat{\mathcal{N}}_{k|k-1} + K_k \gamma_k \quad (2.33)$$

$$\gamma_k = \mathcal{Y}_k - \mathcal{H}(\widehat{\mathcal{N}}_{k|k-1}) \quad (2.34)$$

$$\widehat{\mathcal{N}}_{k|k-1} = \Phi_k(\widehat{\mathcal{N}}_{k-1|k-1}, [{}^I \vec{a}_B]_B(k), [{}^I \vec{\omega}_B]_B(k)) \quad (2.35)$$

où

$\widehat{\mathcal{N}}_{k k}$	=	L'estimation des variables au temps k , a posteriori de la mesure externe (connaissance de la mesure au temps k);
$\widehat{\mathcal{N}}_{k k-1}$	=	L'estimation des variables au temps k , a priori de la mesure externe (connaissance de la mesure au temps $k - 1$ seulement);
K_k	=	La pondération des corrections de l'estimation a priori (gain de Kalman);
γ_k	=	L'innovation, représentant l'erreur entre les mesures externes $\mathcal{Y}_k$ et l'estimation des mesures externes à partir de l'estimation à priori des variables $\widehat{\mathcal{Y}}_k = \mathcal{H}(\widehat{\mathcal{N}}_{k k-1})$;
$\Phi_k(\dots)$	=	Matrice de transition du système d'état (version échantillonnée de l'équation 2.29).

L'algorithme complet du filtre de Kalman généralisé aux systèmes non-linéaires peut être consulté à l'annexe 1.2.

2.3.1 Approche directe du filtre de navigation

Dans l'implantation du filtre de navigation en approche directe, la solution de navigation est évaluée directement par le filtre, telle que représentée par les équations 2.33 à 2.35. L'équation de mesure est donnée par l'équation 2.36, où l'ensemble des mesures externes

$\mathcal{M}$ est modélisé par une fonction non-linéaire $\mathcal{H}$ de la solution de navigation avec $\mathcal{V}$ représentant les erreurs de mesure. La figure 14 illustre l'implantation de l'approche directe.

$$\mathcal{Y}_k^{\text{dir}} = \mathcal{H}^{\text{dir}}(\mathcal{N}_{k|k}, \mathcal{V}) = \mathcal{M}_k \quad (2.36)$$

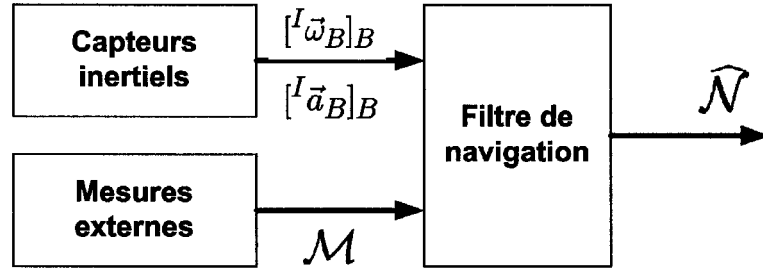


Figure 14 Schéma-bloc de l'approche directe

Puisque la solution de navigation est la variable d'état du filtre de Kalman dans l'approche directe, la fréquence de l'étape de prédiction (équation 2.35 et l'équation de propagation de l'estimation de la covariance de l'erreur d'estimation - équation 2.20 de l'annexe 1.2) doit être égale à la fréquence d'acquisition des capteurs d'accélération et de vitesse angulaire. Les mesures de capteurs peuvent également être interprétées comme étant une commande du système d'état. Cette contrainte rend l'approche directe peu intéressante pour les applications en temps-réel. De plus, les matrices de rotation (${}^N C_B$, ${}^E C_N$) se prêtent mal à la représentation par vecteur d'état. L'orientation du véhicule devrait alors être interprétée en terme de quaternions, représentation mathématique plus favorable pour les grandes fréquences de calcul (4 paramètres représentent l'orientation d'un corps vs 6 paramètres -indépendants- pour les matrices de rotation). Également, la variation de la matrice de position devrait être changée pour l'évolution de la latitude et de la longitude (équations 2.20 et 2.21).

Finalement, la solution de navigation est corrigée à la fréquence des mesures externes. Néanmoins, une deuxième approche réduit l'effort de calcul tout en conservant l'avantage de l'approche directe : l'approche indirecte avec correction en amont.

2.3.2 Approche indirecte du filtre de navigation

L'approche indirecte évalue l'erreur de la solution de navigation, au lieu d'estimer la solution elle-même. Cette façon de procéder est également plus naturelle à l'opération du filtre de Kalman. L'équation 2.29 est donc intégrée de façon conventionnelle et la solution est utilisée dans l'estimation. L'estimation de l'erreur de la solution de navigation est calculée par un processus similaire aux équations 2.33 à 2.35, dans lequel l'ensemble des variables représentant la solution de navigation $\mathcal{N}$ est remplacée par un ensemble représentant les variables d'erreur $\delta\mathcal{N}$.

$$\widehat{\delta\mathcal{N}}_{k|k} = \widehat{\delta\mathcal{N}}_{k|k-1} + K_k \gamma_k \quad (2.37)$$

$$\gamma_k = \mathcal{Y}_k^{\text{ind}} - \mathcal{H}^{\text{ind}}(\widehat{\delta\mathcal{N}}_{k|k-1}) \quad (2.38)$$

$$\widehat{\delta\mathcal{N}}_{k|k-1} = \Phi_k^{\text{err}}(\mathcal{N}, [{}^I\vec{a}_B]_B(k)) \widehat{\delta\mathcal{N}}_{k-1|k-1} \quad (2.39)$$

avec comme modèle de mesure $\mathcal{Y}_k^{\text{ind}}$ calculé à partir de la solution de navigation $\mathcal{N}$ au temps k , de l'ensemble des mesures externes $\mathcal{M}_k$ et avec $\mathcal{V}$ représentant toujours les erreurs de mesure.

$$\mathcal{Y}_k^{\text{ind}} = \mathcal{H}^{\text{ind}}(\delta\mathcal{N}_{k|k}, \mathcal{V}) = \mathcal{H}^{\text{ext}}(\mathcal{N}_k) - \mathcal{M}_k \quad (2.40)$$

La matrice de transition Φ_k^{err} réfère à un nouveau modèle $\mathcal{F}^{\text{err}}$ représentant l'évolution de l'erreur de la solution de navigation (linéarisation des équations de base), illustré par l'équation 2.41. Ce modèle sera expliqué dans la sous-section 2.4.

$$\delta\dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, [{}^I\vec{a}_B]_B) \delta\mathcal{N} \quad (2.41)$$

Dans cette approche, la fréquence de l'étape de prédiction du filtre de Kalman peut être égale ou inférieure à la fréquence d'acquisition des capteurs inertiels (identique à la fréquence d'intégration des équations de mouvement). Dans le cas où la fréquence de la prédiction est inférieure, la matrice de transition Φ_k^{err} doit tout de même être propagée à la fréquence d'acquisition des capteurs pour conserver l'intégrité de l'estimation de l'erreur.

L'estimation de l'erreur peut alors être appliquée à la solution de navigation, et ce, de deux façon : correction en aval (en anglais : « feedforward ») ou correction en amont (en anglais : « feedback »). Les figures 15 et 16 montrent les deux configurations.

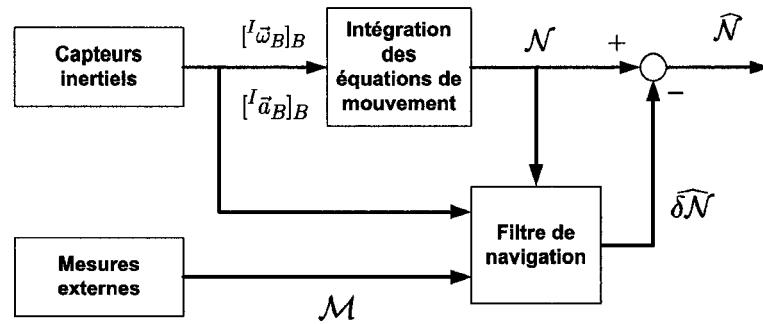


Figure 15 Schéma-bloc de l'approche indirecte avec correction en aval

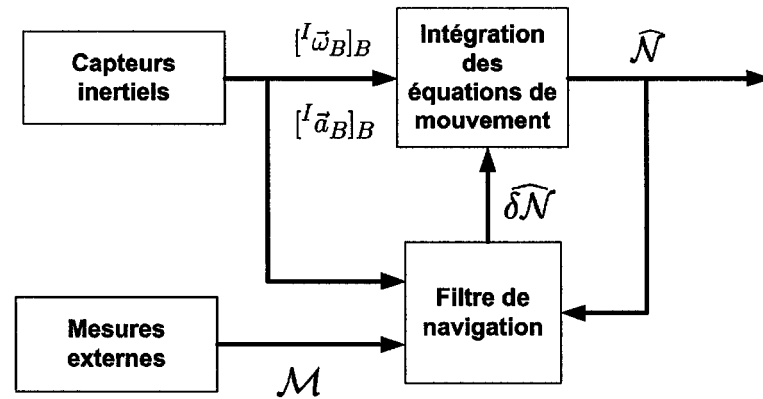


Figure 16 Schéma-bloc de l'approche indirecte avec correction en amont

L'approche avec correction en aval applique simplement la correction à la solution de navigation, sans altérer le mécanisme par lequel les équations sont intégrées. L'erreur contenue dans la solution de navigation $\mathcal{N}$ sera croissante dans le temps, sans borne supérieure, et l'évaluation de l'erreur par le filtre de Kalman sera ainsi toujours croissante. L'hypothèse d'une erreur relativement petite nécessaire au processus de linéarisation est alors enfreinte et le filtre pourrait diverger. Néanmoins, cette méthode d'intégration du filtre de navigation peut être utilisée avec des capteurs précis car les erreurs seront relativement petites (quoique tout de même non bornées).

L'approche avec correction en amont solutionne le précédent problème car l'estimation de l'erreur est utilisée pour recalculer la solution de navigation à l'intérieur du mécanisme d'intégration. L'estimation de l'erreur dans le filtre de Kalman doit être réinitialisée lors de cette correction. L'avantage de cette configuration réside dans la possibilité de « bor-

ner » l'erreur d'estimation et d'obtenir un erreur relativement petite permettant une bonne linéarisation du filtre de Kalman étendu.

2.4 Modèle d'erreur de la solution de navigation

Tel qu'il a été introduit à la section précédente, l'approche indirecte du filtre de navigation requiert un modèle de la propagation de l'erreur dans la solution de navigation ⁵.

Il existe plusieurs modèles d'erreur [44], selon les repères dans lesquels les équations sont linéarisées et que le vecteur d'erreur d'angles est interprété. Le plus populaire des modèles interprète les erreurs dans un repère de navigation « calculé » N^c , et utilise un vecteur d'erreur d'orientation dénoté ψ , d'où l'appellation « modèle de l'angle ψ » [41]. Cet angle est défini ci-dessous. Le vecteur des erreurs d'angle peut être utilisé pour représenter une rotation dans le cas spécifique où ces erreurs sont petites. Dans ce modèle, l'ensemble des variables d'erreur est représenté par $\delta\mathcal{N} = \{[{}^E\delta\vec{v}_{N^c}]_{N^c}, [{}^E\delta\vec{r}_{N^c}]_{N^c}, \vec{\psi}_{N^c}\}$.

Les équations de mouvement généralement utilisées pour déterminer le modèle d'erreur (équations de mouvement à perturber/linéariser) sont données aux équations 2.42 à 2.44, représentant la variation de la vitesse et de la position du repère de navigation par rapport au repère terrestre fixe, et mesurées par rapport au repère terrestre fixe, ainsi que la variation de la matrice de rotation du repère B vers le repère E .

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_{N^c}]_E = {}^EC_B[{}^I\vec{a}_B]_B + [\vec{g}_p]_E - 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\}[{}^E\vec{v}_{N^c}]_E \quad (2.42)$$

$$[{}^E\dot{\vec{r}}_{N^c}]_E = [{}^E\vec{v}_{N^c}]_E \quad (2.43)$$

$${}^E\dot{C}_B = {}^EC_B S\{[{}^I\vec{\omega}_B]_B\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} {}^EC_B \quad (2.44)$$

De façon plus formelle, définissons les angles qui sont utilisés dans les modèles d'erreur.

Définition 2.4.1 *Soit la relation suivante,*

$$\vec{\psi} \equiv {}^E\vec{\alpha}_B \quad (2.45)$$

ces vecteurs représentent le vecteur d'angle d'erreur associé à la matrice EC_B où le repère E est inexact.

⁵ La dérivation du modèle d'erreur linéaire s'inspire grandement du livre de Savage [9]. Pour plus de détails sur la perturbations des équations de mouvement, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage en question.

Définition 2.4.2 Soit la relation suivante,

$$\vec{\delta\theta} \equiv {}^E\vec{\beta}_N = -{}^E\vec{\alpha}_N = {}^N\vec{\alpha}_E \quad (2.46)$$

ces vecteurs représentent le vecteur d'angle d'erreur associé à la matrice EC_N où le repère N est inexact.

Définition 2.4.3 Soit la relation suivante,

$$\vec{\phi} \equiv {}^N\vec{\alpha}_B \quad (2.47)$$

ces vecteurs représentent le vecteur d'angle d'erreur associé à la matrice NC_B où le repère N est inexact. Il est également intéressant de noter que

$$\vec{\phi} = \vec{\psi} + \vec{\delta\theta} \quad (2.48)$$

2.4.1 Perturbation de l'équation de vitesse

En appliquant une perturbation aux variables nominales de l'équation 2.42, l'erreur de vitesse est propagée telle que :

$$\begin{aligned} [{}^E\dot{\vec{\delta v}}_{N^c}]_E &= {}^E\delta C_B [{}^I\vec{a}_B]_B + {}^EC_B [{}^I\vec{\delta a}_B]_B + [\vec{\delta g}_p]_E \\ &\quad - 2S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_E]_E\} [{}^E\vec{v}_{N^c}]_E \\ &\quad - 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_E \end{aligned} \quad (2.49)$$

Étant donnée que les repères I et E sont connus, l'erreur de la vitesse angulaire entre ces repères est nulle. Ainsi, l'équation 2.49 est réduite à :

$$\begin{aligned} [{}^E\dot{\vec{\delta v}}_{N^c}]_E &= {}^E\delta C_B [{}^I\vec{a}_B]_B + {}^EC_B [{}^I\vec{\delta a}_B]_B + [\vec{\delta g}_p]_E \\ &\quad - 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_E \end{aligned} \quad (2.50)$$

De plus, pour des petits angles, la perturbation de la matrice de rotation est donnée par :

$${}^E\delta C_B \approx -S\{[{}^E\vec{\alpha}_B]_E\} {}^EC_B \quad (2.51)$$

$$\approx -S\{[\vec{\psi}]_E\} {}^EC_B \quad (2.52)$$

En substituant l'équation 2.52 dans l'équation 2.50, la version linéaire de la variation de l'erreur de vitesse peut être obtenue.

$$\begin{aligned} [{}^E \dot{\delta v}_{N^c}]_E &= S\{{}^E C_B [{}^I \vec{a}_B]_B\} [\vec{\psi}]_E + {}^E C_B [{}^I \delta \vec{a}_B]_B + [\delta \vec{g}_p]_E \\ &\quad - 2S\{{}^I \vec{\omega}_E\} [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_E \end{aligned} \quad (2.53)$$

La variable d'intérêt pour l'erreur de vitesse est plutôt $[{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}$, qui peut être obtenue par rotation du vecteur dans le repère désiré.

$$[{}^E \vec{v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c} C_E [{}^E \vec{v}_{N^c}]_E \quad (2.54)$$

$\Downarrow$

$$[{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = \underbrace{{}^{N^c} C_E [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_E}_{\text{Modèle d'erreur}} + \underbrace{{}^{N^c} \delta C_E [{}^E \vec{v}_{N^c}]_E}_{\text{Correction}} \quad (2.55)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation 2.55 est conservé pour le développement de l'équation d'erreur, alors que le deuxième terme n'est pas négligé mais bien utilisé dans la correction d'erreur des équations de mouvement (c.f. §2.4.5).

La dérivée de l'équation 2.55 (sans le deuxième terme du membre de droite) donne :

$$[{}^E \dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c} \dot{C}_E [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_E + {}^{N^c} C_E [{}^E \dot{\delta v}_{N^c}]_E \quad (2.56)$$

En substituant les équations 2.23 et 2.55 dans l'équation 2.56, la variation de l'erreur de vitesse est donnée par l'équation 2.57.

$$\begin{aligned} [{}^E \dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} &= S\{{}^{N^c} C_B [{}^I \vec{a}_B]_B\} [\vec{\psi}]_{N^c} + {}^{N^c} C_B [{}^I \delta \vec{a}_B]_B + [\delta \vec{g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{{}^E \vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} + 2S\{{}^I \vec{\omega}_E\}_{N^c} \right) [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.4.2 Perturbation de l'équation de position

En appliquant une perturbation aux variables nominales de l'équation 2.43, et par la même démarche mathématique que précédemment, la variation de l'erreur de position est déterminée de la façon suivante :

$$[{}^E \vec{r}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c} C_E [{}^E \vec{r}_{N^c}]_E \quad (2.58)$$

$\Downarrow$

$$[{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} = \underbrace{{}^{N^c}C_E[{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_E}_{\text{Modèle d'erreur}} + \underbrace{{}^{N^c}\delta C_E[{}^E\vec{r}_{N^c}]_E}_{\text{Correction}} \quad (2.59)$$

$$[{}^E\dot{\vec{\delta r}}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \quad (2.60)$$

2.4.3 Perturbation de l'équation d'orientation

De la même façon, la variation de l'erreur d'orientation peut être trouvée en appliquant une perturbation aux variables nominales de l'équation 2.44 :

$$\begin{aligned} {}^E\dot{C}_B &= {}^E\delta C_B S\{[{}^I\vec{\omega}_B]_B\} + {}^E C_B S\{[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_B\} \\ &\quad - S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} {}^E\delta C_B \end{aligned} \quad (2.61)$$

De plus, de part la dérivée de l'équation 2.52, la dérivée de la perturbation peut être obtenue.

$${}^E\dot{\delta C}_B \approx -S\{[\dot{\vec{\psi}}]_E\} {}^E C_B - S\{[\vec{\psi}]_E\} {}^E\dot{C}_B \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ S\{[\dot{\vec{\psi}}]_E\} &\approx -{}^E\dot{C}_B {}^E C_B^T - S\{[\vec{\psi}]_E\} {}^E\dot{C}_B {}^E C_B^T \end{aligned} \quad (2.63)$$

En substituant l'équation 2.52 dans l'équation 2.61, et en substituant le résultat et l'équation 2.44 dans l'équation 2.63, la variation du vecteur de l'erreur d'angle est donnée par :

$$S\{[\dot{\vec{\psi}}]_E\} = -S\{[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_B\} + S\left\{S\{[\vec{\psi}]_E\}[{}^I\vec{\omega}_E]_E\right\} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ [\dot{\vec{\psi}}]_E &= -{}^E C_B [{}^I\delta\vec{\omega}_B]_B - S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} [\vec{\psi}]_E \end{aligned} \quad (2.65)$$

En prenant la dérivée de $[\vec{\psi}]_{N^c} = {}^{N^c}C_E[\vec{\psi}]_E$, il peut être facilement prouvé que

$$[\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} = -{}^{N^c}C_E [{}^I\delta\vec{\omega}_B]_B - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [\vec{\psi}]_{N^c} \quad (2.66)$$

2.4.4 Résumé du modèle d'erreur et simplification

Le modèle d'erreur linéaire complet est résumé avec les équations 2.67 à 2.69.

$$[{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_B S\{[{}^I\vec{a}_B]_B\}^B C_{N^c}[\vec{\psi}]_{N^c} + {}^{N^c}C_B[{}^I\vec{\delta a}_B]_B + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} - (S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\})[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \quad (2.67)$$

$$[{}^E\dot{\delta r}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \quad (2.68)$$

$$[\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} = -{}^{N^c}C_B[{}^I\vec{\delta \omega}_B]_B - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[\vec{\psi}]_{N^c} \quad (2.69)$$

Sous la forme compacte déjà présentée à l'équation 2.41, le système d'état peut être écrit comme suit :

$$\delta \dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t}) \delta \mathcal{N} + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} \\ [{}^I\vec{\delta \omega}_B]_{B^t} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

La principale limitation de ce modèle réside dans l'hypothèse des petites erreurs d'orientation. Durant la phase d'initialisation du SNI, cela peut représenter un problème causant la divergence ou la lente convergence pour le cas avec correction en amont. De plus, durant la phase de navigation, l'absence prolongée des signaux externes pourrait rendre l'erreur d'orientation supérieure à l'hypothèse dans certain cas, résultant en une faute du filtre. Le chapitre 4 expose une réponse à ces faiblesses.

Finalement, il peut être intéressant d'analyser le modèle d'erreur selon l'application. En effet, l'utilisation de capteurs MEMS (ou généralement des capteurs à bas coûts) simplifie le modèle d'erreur car les erreurs causées par les capteurs sont beaucoup plus importantes que les autres termes. Également, les applications terrestres et les applications aériennes à basse vitesse (i.e. hélicoptère miniature) impliquent les mêmes simplifications. Ainsi, pour les cas sus-mentionnés, un modèle d'erreur simplifié peut être utilisé et il est présenté aux équations 2.71 à 2.73.

$$[{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_B S\{[{}^I\vec{a}_B]_B\}^B C_{N^c}[\vec{\psi}]_{N^c} + {}^{N^c}C_B[{}^I\vec{\delta a}_B]_B \quad (2.71)$$

$$[{}^E\dot{\delta r}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \quad (2.72)$$

$$[\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} = -{}^{N^c}C_B[{}^I\vec{\delta \omega}_B]_B \quad (2.73)$$

2.4.5 Correction des équations de mouvement

Les variables d'erreur choisies ne sont pas applicables directement pour corriger les équations de mouvement. Une fois les erreurs évaluées par le filtre de navigation, la correction de la solution de navigation doit être faite en interprétant les erreurs estimées $\widehat{\delta\mathcal{N}}$ dans l'espace de navigation $\mathcal{N}$.

$$\widehat{\delta\mathcal{N}} \xrightarrow{T} \widehat{\delta\mathcal{N}}_{\text{corr}} \quad (2.74)$$

$$\mathcal{N}^{(+)} = \mathcal{N}^{(-)} - \widehat{\delta\mathcal{N}}_{\text{corr}} \quad (2.75)$$

où $\mathcal{N}^{(-)}$ est l'ensemble des solutions de navigation avant la correction et $\mathcal{N}^{(+)}$ est l'ensemble des solutions de navigation après la correction.

2.4.5.1 Correction des solutions de position

L'erreur de position est donnée par un vecteur $[{}^E\vec{\delta r}_N]_N$ alors que la solution est représentée par une matrice de position EC_N . En fait, la matrice de position est par rapport au repère de navigation calculé N^c . La solution peut alors être corrigée par

$${}^EC_{N^c}^{(+)} = {}^EC_{N^c}^{(-)} - {}^E\delta C_{N^c} \quad (2.76)$$

De part la théorie de perturbation des matrices de rotation et en assumant que ${}^E\vec{\beta}_{N^t} = \vec{0}$,

$${}^E\delta C_{N^c} \approx {}^EC_{N^c} S\{[{}^E\vec{\beta}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (2.77)$$

$$\approx {}^EC_{N^c} S\{[{}^E\vec{\beta}_{N^t} + {}^{N^t}\vec{\beta}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (2.78)$$

$$\approx {}^EC_{N^c} S\{[\vec{\delta\theta}]_{N^c}\} \quad (2.79)$$

où le vecteur d'erreur d'angle $[\vec{\delta\theta}]_{N^c}$ (entre le repère N^c et N^t) est relativement petit. Ainsi, la correction sous forme de produit matriciel est donnée par :

$${}^EC_{N^c}^{(+)} = {}^EC_{N^c}^{(-)} (I - S\{[\vec{\delta\theta}]_{N^c}\}) \quad (2.80)$$

L'erreur d'angle peut être calculé à partir du vecteur d'erreur $[{}^E\vec{\delta r}_N]_N$:

$$[{}^E\vec{\delta r}_N]_N \xrightarrow{T_{\delta\theta}} [\vec{\delta\theta}]_{N^c} \quad (2.81)$$

$$[\vec{\delta\theta}]_{N^c} = \frac{1}{R} (S\{[{}^Zu_N]_N\} [{}^E\vec{\delta r}_N]_N) \quad (2.82)$$

où R est le module du vecteur de position du mobile et $[^Z u_N]_N$ est un vecteur unitaire vertical dans le repère N .

Pour l'erreur d'altitude, la transformation est directe.

$$[^E \vec{\delta r}_N]_N \xrightarrow{T_{\delta h}} \delta h \quad (2.83)$$

$$\delta h = [^Z u_N]_N \cdot [^E \vec{\delta r}_N]_N \quad (2.84)$$

$$h^{(+)} = h^{(-)} - \delta h \quad (2.85)$$

2.4.5.2 Correction des solutions de vitesse

Pour l'erreur de vitesse, aucune transformation est nécessaire. Par contre, le terme mis en réserve à l'équation 2.55 doit être inclu.

$$[^E \vec{\delta v}_N]_N \implies [^E \vec{\delta v}_N]_N - S\{[\vec{\delta \theta}]_{N^c}\} [^E \vec{v}_N]_N \quad (2.86)$$

$$[^E \vec{v}_N]_N^{(+)} = [^E \vec{v}_N]_N^{(-)} - [^E \vec{\delta v}_N]_N + S\{[\vec{\delta \theta}]_{N^c}\} [^E \vec{v}_N]_N \quad (2.87)$$

$$= (I + S\{[\vec{\delta \theta}]_{N^c}\}) [^E \vec{v}_N]_N^{(-)} - [^E \vec{\delta v}_N]_N \quad (2.88)$$

2.4.5.3 Correction de la solution d'orientation

La solution d'orientation peut être corrigée par

$$^{N^c} C_B^{(+)} = ^{N^c} C_B^{(-)} - ^{N^c} \delta C_B \quad (2.89)$$

avec

$$^{N^c} \delta C_B \approx -S\{[^{N^c} \vec{\vartheta}_B]_{N^c}\} ^{N^c} C_B \quad (2.90)$$

$$\approx -S\{[^{N^c} \vec{\vartheta}_E + ^E \vec{\vartheta}_B]_{N^c}\} ^{N^c} C_B \quad (2.91)$$

$$\approx -S\{[\vec{\delta \theta}]_{N^c} + [\vec{\psi}]_{N^c}\} ^{N^c} C_B \quad (2.92)$$

avec $[\vec{\delta \theta}]_{N^c}$ donnée par l'équation 2.82 et $[\vec{\psi}]_{N^c} \in \delta \mathcal{N}$ donnée par l'estimation des erreurs directement, sans transformation.

2.5 Aide à la navigation inertielle

Tel qu'il a été souligné dans les sections précédentes, des aides à la navigation sont nécessaires pour limiter la propagation des erreurs dans la solution de navigation. En effet, pour évaluer les erreurs et les retrancher de la solution, le filtre de Kalman a besoin de mesures externes.

Quoique qu'il existe beaucoup d'options concernant l'aide à la navigation, que ce soit des systèmes par satellite, les systèmes de vision [58], les systèmes radio-terrestres, les capteurs spécifiques aux véhicules [27], des capteurs de champs magnétique [28], les systèmes de radio-navigation sont les plus couramment utilisés.

Ces systèmes d'aide à la navigation sont basés sur terre ou dans l'espace, et ils ont différentes portées d'action. Parmi les plus importants, notons le LORAN-C, les systèmes ILS, le VOR, le TACAN et le RADAR [5]. Le premier système mondial de radio-navigation, le système OMEGA, a été mis hors d'usage le 30 septembre 1997 après plus de 26 ans d'opération. Il possédait huit stations terrestres dans autant de pays différents. Par la suite, le système TRANSIT [59] fut un système de radio-localisation par satellites qui fut précurseur du système mondial de positionnement que l'on connaît aujourd'hui. Justement, nul doute que l'avènement du système de positionnement global par satellite (en anglais, GPS : Global Positioning System) fut un point tournant dans la navigation aérienne. À cet effet, et malgré l'importance des systèmes traditionnels, le plan fédéral de radio-navigation des États-Unis a mis en haute priorité le développement de l'utilisation du système GPS appliqué à la navigation aérienne. En effet, depuis 1992, les récepteurs GPS se retrouvent dans de nombreuses applications. Cependant, les avancements technologiques connus jusqu'à maintenant ne permettent pas de dissocier les deux technologies (système de navigation par inertie et radio-localisation) car les faiblesses de l'un sont les points forts de l'autre et vice-versa. En effet, les systèmes inertiels sont peu stables à long terme, alors que l'erreur des mesures externes GPS est normalement bornée. D'un autre côté, le système inertiel n'est pas vulnérable aux interférences, comme le sont les systèmes de radio-navigation.

En plus du GPS, il existe un système de localisation par satellite russe, nommé GLO-NASS, et un système européen (GALILEO) est en voie de développement et devrait être opérationnel en 2008. Le terme global pour tous ces systèmes est GNSS, pour « Global Navigation Satellite System ».

Les méthodes d'intégration suggérées jusqu'à maintenant font appel à la notion d'intégration découplée (en anglais, « loosely coupled ») des GNSS et du SNI. Les deux systèmes utilisent un filtre de Kalman séparé et les solutions de haut niveau sont fusionnées (la mesure externe utilisée à la section 2.3 provient d'une estimation par filtre de Kalman dans le récepteur GPS). Il existe d'autres niveaux d'intégration GNSS/SNI. Entre autre, l'intégration fortement couplée (en anglais, « tightly coupled ») où le modèle d'erreur du filtre de Kalman comprend le modèle d'erreur du SNI et celui du GNSS. La solution du SNI et les pseudo-distances du GNSS sont transmis au filtre de Kalman. Un autre type d'intégration est proposé : la notion d'intégration extrêmement couplée (en anglais, « ultra-tightly coupled » [60]). Cette structure utilise un filtre de Kalman beaucoup plus en amont dans la chaîne du récepteur GPS. Quoique beaucoup plus complexe, cette méthode semble donner une meilleure robustesse à l'ensemble GNSS/SNI. Lewis [61] traite de cette intégration dans le contexte des capteurs MEMS.

Les mesures provenant des aides à la navigation sont ainsi utilisées dans l'algorithme de navigation tel que représenté par l'équation 2.36 ou l'équation 2.40, selon que l'approche de l'intégration directe ou indirecte est implantée, et constituent l'ensemble des mesures externes $\mathcal{M}$.

2.6 Initialisation des équations d'un SNI

L'intégration des équations de mouvement (équations 2.25 à 2.28) nécessite la détermination de la valeur initiale des variables à intégrer, i.e. la position en latitude/longitude, donnant la matrice de position ${}^E C_N$, l'altitude h , la vitesse ${}^E \vec{v}_N$ qui est généralement nulle, et la matrice d'orientation ${}^N C_B$.

Pour ce qui est de la position, l'initialisation est relativement directe avec les lectures de position GPS. La matrice de position ${}^E C_N$ est alors donnée par :

$${}^E C_N(0) = \begin{pmatrix} cL_0 & -sL_0sl_0 & sL_0cl_0 \\ 0 & cl_0 & sl_0 \\ -sL_0 & -cL_0sl_0 & cL_0cl_0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

pour le cas où l'angle de louvoiement W_A est nul. L'initialisation de la vitesse est également trivial.

Pour l'orientation, deux niveaux d'initialisation doivent être appliqués en général : l'initialisation grossière et l'alignement fin. Le lecteur est invité à consulter des ouvrages cou-

vrant ce sujet, tels le livre de Savage [10]. Il est admis que durant cette phase, le véhicule est quasi-stationnaire, i.e. seulement sujet à des variations aléatoires causées par le vent ou la vibration du moteur. Une méthode relativement simple sera présentée dans cette section, employant la mesure des capteurs inertiels.

La méthode présentée peut être assimilée à l'initialisation grossière car elle ne fait pas intervenir le filtre de Kalman. Il utilise la mesure des capteurs d'accélération pour déterminer une partie de l'orientation du véhicule. En effet, avec l'hypothèse quasi-stationnaire, la lecture des accéléromètres est donnée par :

$$\begin{aligned} [{}^I\vec{a}_B]_B &= {}^NC_B^T [\vec{g}_p]_N \\ &= {}^NC_B^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\text{avec } g_p = | [{}^I\vec{a}_B]_B | = \sqrt{[{}^I\vec{a}_B]_B(x)^2 + [{}^I\vec{a}_B]_B(y)^2 + [{}^I\vec{a}_B]_B(z)^2}$$

En identifiant les termes dans la matrice d'orientation, on peut retrouver l'angle de tangage θ et l'angle de roulis ϕ par les relations suivantes :

$$\tan \phi = \frac{[{}^I\vec{a}_B]_B(y)}{[{}^I\vec{a}_B]_B(z)} \quad (2.95)$$

$$\tan \theta = \frac{[{}^I\vec{a}_B]_B(x)}{\sqrt{[{}^I\vec{a}_B]_B(y)^2 + [{}^I\vec{a}_B]_B(z)^2}} \quad (2.96)$$

où

$${}^NC_B = \begin{pmatrix} c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

L'angle de lacet (azimut) ne peut pas être déterminé par la mesure des accélérations. Il doit être obtenu à partir de l'estimation de la composante horizontale de la vitesse de rotation de la terre, mesurée par les gyromètres.

$$\begin{aligned} [{}^I\vec{\omega}_B]_B &= {}^NC_B^T [{}^I\vec{\omega}_E]_N \\ &= {}^NC_B^T {}^NC_E [{}^I\vec{\omega}_E]_E \end{aligned}$$

$$= {}^N C_B^T \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_e \mathbf{c}l \\ \omega_e \mathbf{s}l \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Ainsi, en isolant les termes adéquats, on peut retrouver une relation pour l'angle de lacet :

$$\mathbf{c}\psi = \frac{[{}^I \vec{\omega}_B]_B(x)}{\mathbf{c}\theta \mathbf{c}l \omega_e} - \mathbf{t}\theta \mathbf{t}l \quad (2.99)$$

Évidemment, cette méthode n'est pas très précise avec une seule mesure, à cause des erreurs des capteurs. C'est la raison pour laquelle la procédure d'initialisation fait appel à un alignement fin, employant un filtre de Kalman pour estimer la valeur initiales des variables à intégrer. De plus, dans le cas où les gyromètres utilisés ne sont pas assez précis pour mesurer la vitesse de rotation de la terre, un autre moyen doit être utilisé, tel un compas électronique.

2.7 Conclusion préliminaire

Ce premier chapitre a couvert les notions de base de la navigation inertielle. Premièrement, les équations de mouvement ont été dérivées à partir des équations générales de mouvement dans un repère inertiel. La solution de navigation en provenance de l'intégration simple de ces équations n'est pas précise car les erreurs contenues dans les capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres) se propagent dans la solution. Il faut donc borner cette propagation d'erreur avec l'utilisation de mesures externes.

Plusieurs méthodes existent pour fusionner les mesures externes avec les SNI. La plus usuelle comprend un filtre de Kalman qui estime les erreurs basées sur un modèle de propagation des erreurs dans le SNI. Pour les capteurs bas de gamme, les erreurs générées sont très importantes et le chapitre suivant décrit de façon plus détaillée les capteurs inertiels.

CHAPITRE 3

TECHNOLOGIE DES CAPTEURS : DU MACRO VERS LE MICRO

Tel qu'introduit au chapitre 2, le coeur d'un système de navigation inertielle est composé d'accéléromètres et de gyromètres. Quoique représentant un abus de langage, ces deux types de capteurs seront dorénavant identifiés comme des capteurs inertiels. Le but de ce chapitre est de présenter les capteurs inertiels de type MEMS en les mettant en perspective avec les technologies utilisées jusqu'à maintenant.

Premièrement, la classification des capteurs inertiels sera exposée, ainsi que les catégories de performance des SNI. Par la suite, les technologies de fabrication des capteurs seront vues succinctement en comparant la complexité, les coûts et les tendances pour le futur. Troisièmement, la technologie entourant les capteurs micro-électromécaniques sera explicitée. En complément, les erreurs présentes dans les capteurs inertiels seront expliquées, avec comme solution : la calibration et l'identification en ligne. Finalement, une brève discussion relatant les faits intéressants établis jusqu'à maintenant conclut le chapitre, et donne la direction pour la suite de la thèse.

3.1 Classification de la performance des SNI

Puisque la précision des capteurs utilisés influence directement la performance des SNI, ces deux concepts sont intimement liés. Les tableaux III et IV illustrent les caractéristiques des capteurs pour différentes performances de SNI, tels qu'adaptés de Hewitson [62] et Barbour [63]. De façon à mieux apprécier les différentes performances, la figure 17 montre le cumul des erreurs de position sphérique (module du vecteur d'erreur de position) en fonction des erreurs de biais des capteurs, et ce en boucle ouverte (sans aide à la navigation externe).

Les catégories « NAVIGATION I et II » sont utilisées dans l'aviation civile et militaire, ainsi que les missiles stratégiques et la navigation sous-marine autonome. La catégorie « TACTIQUE » est d'origine militaire, pour les applications nécessitant une bonne précision pour quelques minutes [24] (missiles, bombes et autres pièces d'artillerie). Récemment, une autre catégorie s'est insérée dans la littérature et elle est dénotée « COMMERCIALE ». Cette catégorie inclue la robotique mobile, les applications de contrôle et la navigation inertielle à bas coût (aidée de capteurs externes).

Tableau III
Classification des gyromètres

Gyromètres			
	Caractéristiques		
Niveau de performance	Biais [deg/h]	Facteur d'échelle [ppm]	Bruit ¹ [deg/h/ $\sqrt{Hz}$]
Navigation II	0.002 - 0.01	5 - 50	0.002 - 0.005
Navigation I	0.002 - 0.1	1 - 100	0.002 - 0.05
Tactique	1 - 50	100 - 1000	0.2 - 0.5
Commercial	50 - 3600	100 - 5000	0.5 - 1

Tableau IV
Classification des accéléromètres

Accéléromètres			
	Caractéristiques		
Niveau de performance	Biais [μg]	Facteur d'échelle [ppm]	Bruit ¹ [$\mu g/\sqrt{Hz}$]
Navigation II	0.1 - 10	2 - 20	1 - 10
Navigation I	10 - 300	100 - 300	50
Tactique	200 - 1000	400 - 1000	200 - 600
Commercial	1000 - 10000	800 - 5000	800 - 10000

Il est intéressant de noter que les erreurs des gyromètres dominent la propagation de l'erreur de position au-delà d'une certaine précision (figure 17). Cette propriété peut être expliquée de façon simplifiée à partir de la figure 18.

En effet, l'influence d'une erreur d'accéléromètre δa_y sur la position est une fonction du carrée de la durée de navigation :

$$\xi_{py}^{\delta a_y} = \int \int \delta a_y dt$$

¹La plage de fréquence dans laquelle cette caractéristique est définie n'est pas spécifié dans les articles consultés.

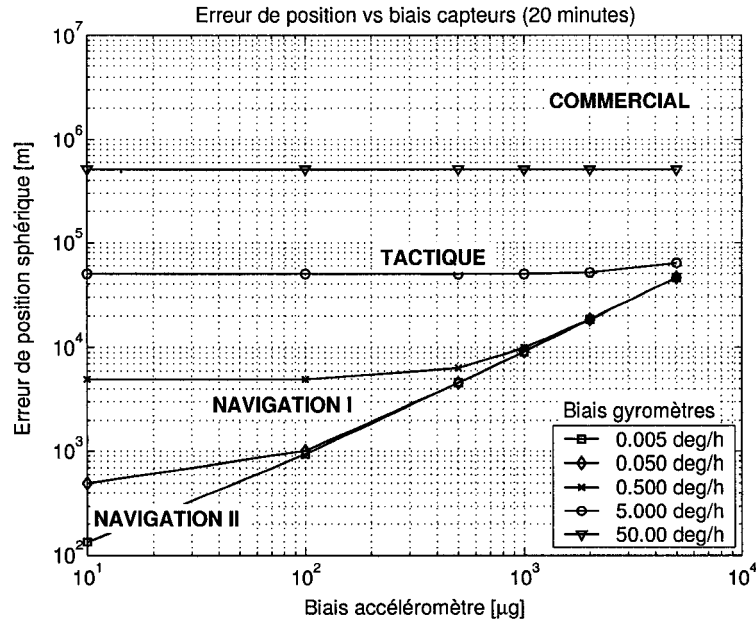


Figure 17 Propagation des erreurs

$$= \frac{1}{2} \delta a_y t^2 \quad (3.1)$$

Par contre, la contribution d'une erreur d'orientation causée par une erreur de gyromètre ϵ_z dans l'axe Z se traduit par une influence au cube du temps pour la position sur l'axe Y :

$$\begin{aligned} \xi_{py}^{\epsilon_z} &= \int \int a_x \sin(\epsilon_z t) dt \\ &\approx \int \int a_x \epsilon_z t dt \\ &\approx \frac{1}{6} a_x \epsilon_z t^3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ainsi, il peut être interprété que les gyromètres sont l'aspect critique de tout SNI. L'utilisation de SNI tactique ou de moindre performance pour une durée prolongée nécessite donc l'utilisation de moyens externes pour borner l'erreur de position, comme il a été noté à la section 2.2.4 du chapitre 2.

3.2 Technologie des capteurs

Évidemment, beaucoup de travaux ont porté sur la conception de capteurs et il existe une multitude de principes de mesure différents. Le but de la thèse n'est pas d'en faire une

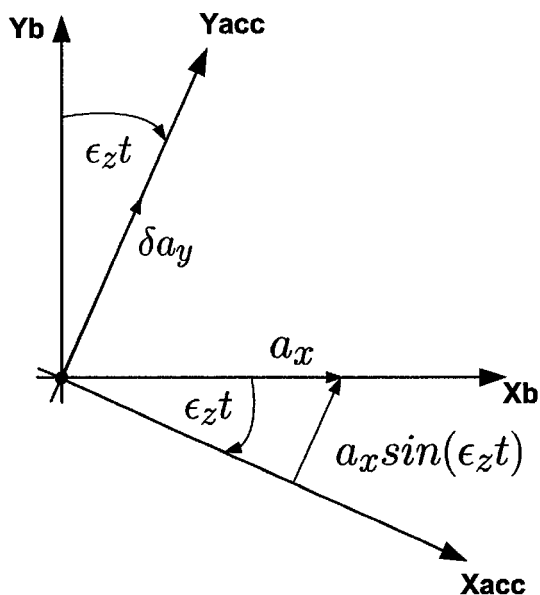


Figure 18 Géométrie des erreurs

revue exhaustive et le lecteur est invité à consulter des ouvrages qui traitent de la technologie des capteurs, dont celui de Lawrence [64] qui traite spécifiquement des capteurs inertiels ou celui de Kovacs [65] pour les capteurs de type MEMS en tout genre (et incluant les capteurs inertiels). Néanmoins, la prochaine section se concentrera sur une technologie spécifique, celle de la micro-technologie. Ainsi, pour préciser les tableaux et figures précédents, les figures 19 et 20 (adaptées de Barbour [63]) illustrent les différentes technologies de capteurs inertiels avec la classification des SNI associés.

Tableau V

Légende relative aux figures 19, 20 et 21

FOG	Fiber Optic Gyro (Gyromètre à fibre optique)
IFOG	Interferometric Fiber Optic Gyro (Gyromètre interférométrique à fibre optique)
RLG	Ring Laser Gyro (Gyromètre au laser)
MECA	Mechanical (Capteurs macro-mécanique, à masse tournante pour les gyromètres, à pendule ou à suspendu pour les accéléromètres)

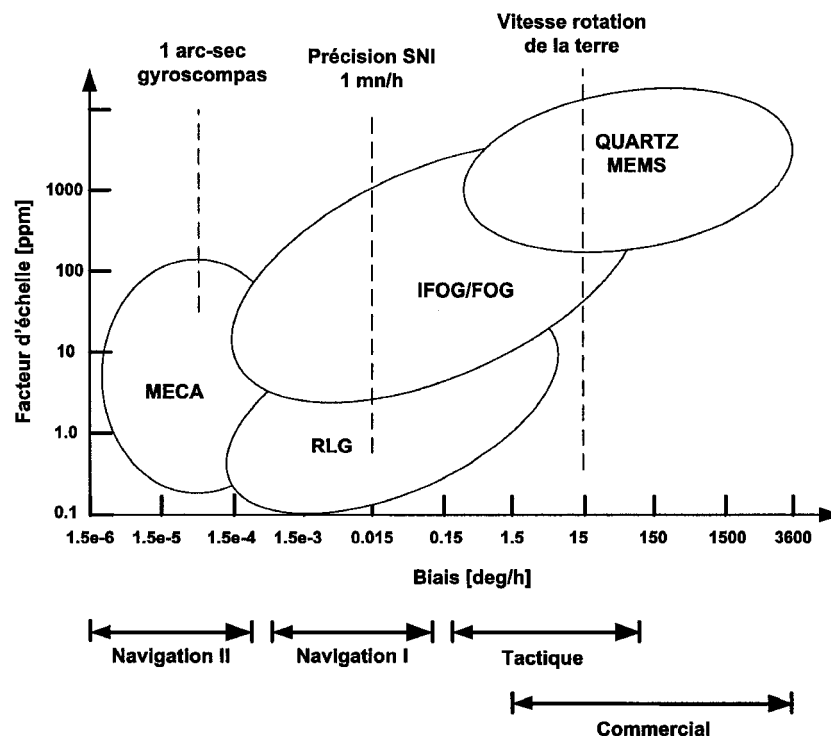


Figure 19 Technologie des gyromètres

Les gyromètres sont le type de capteurs dont la conception est la plus difficile. Plusieurs technologies existent, et les plus précises sont évidemment les plus coûteuses. À part les gyromètres mécaniques qui sont très complexes, les capteurs utilisant des lasers sont les plus précis. La figure 19 indique également la vitesse de rotation de la terre. Tout instrument à gauche de cette ligne peut mesurer la vitesse de rotation de la terre et ainsi initialiser le SNI de façon autonome. De l'autre côté, la vitesse de rotation de la terre est englobée par les erreurs des capteurs et l'initialisation de l'orientation du SNI doit se faire avec d'autres moyens externes.

Pour ce qui est des accéléromètres, la technologie est assez bien maîtrisée et de bons accéléromètres peuvent être obtenus à prix raisonnable. Les capteurs macro-mécaniques sont les plus précis et certains sont également de petites dimensions. Également, les capteurs utilisant des cristaux (résonateurs) sont de plus en plus précis.

La sélection de capteurs dépend principalement du niveau de performance recherché, et la figure 21 illustre les coûts pour l'hybridation d'un SNI avec GPS pour différentes technologies (adapté de Barbour [63]). Il est clair que les systèmes totalement autonome n'ont

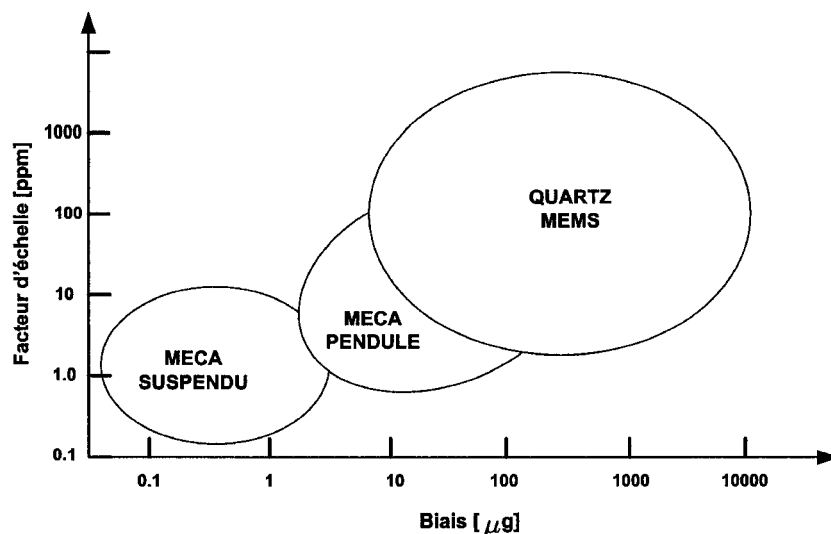


Figure 20 Technologie des accéléromètres

aucune avenue commerciale, à cause de leur coût excessif, et seront utilisés seulement dans le secteur militaire ou un petit segment de l'aviation civile. D'un autre côté, le coût minime de 10\$ pour un SNI à base de MEMS sera possible seulement dans le cas où un marché de masse existe. Ainsi, des capteurs relativement performants pourront être produit en grande quantité, réduisant ainsi le coût global de ces systèmes. La section suivante traite particulièrement de la micro-technologie.

3.3 Les capteurs MEMS

Les révolutions technologiques se sont succédées sans cesse depuis des siècles. Plus récemment, avec l'accroissement de la micro-électronique, des technologies de pointe et de la miniaturisation, une nouvelle technologie a fait son apparition sur le marché sous le nom de MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems). La technologie MEMS intègre deux technologies connues et maîtrisées : celle de la conception mécanique (ordre de grandeur minimale : $\approx 1000 \mu m$) et celle de la fabrication de circuits intégrés à base de silicium - VLSI (ordre de grandeur minimale $\approx 0.35 \mu m$).

La différence fondamentale entre les capteurs macroscopiques et les capteurs microscopiques est l'ordre de grandeur de la quantité physique qui est mesurée. En effet, de façon générale, la réduction de la dimension d'un capteur de force (ex. accéléromètre) implique une réduction de la force à détecter ($f = ma$). Par exemple, certains accéléro-

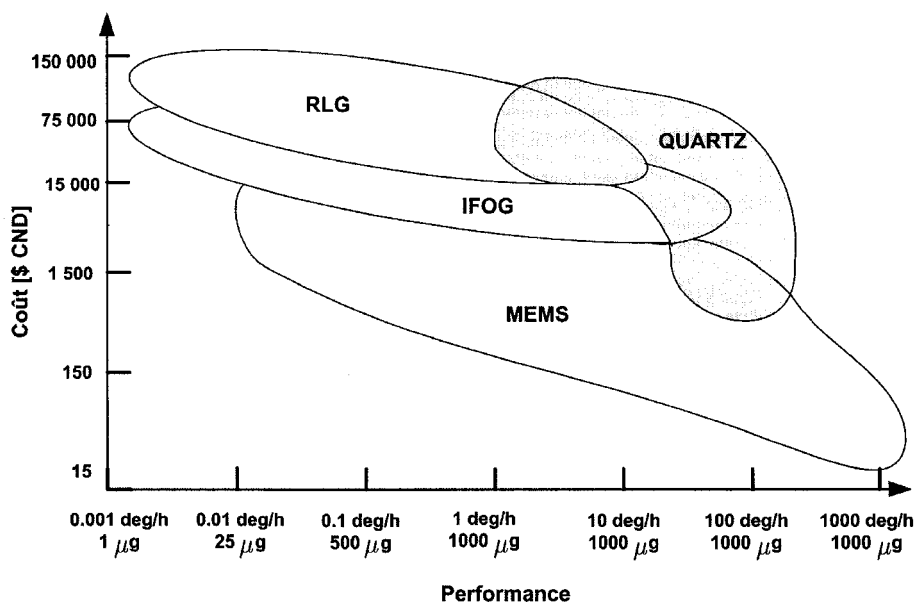


Figure 21 Coût d'un système INS/GPS en fonction de la technologie utilisée

mètres doivent détecter des forces allant du milli-newton (10^{-3}) au atto-newton (10^{-18}). Le problème est causé par l'importance du bruit thermodynamique dans les structures micro-mécaniques [16]. Il existe ainsi une limite physique à la miniaturisation, si on veut garder une sensibilité appréciable dans les applications désirées. En effet, l'accélération minimale détectable est inversement proportionnelle à la masse du dispositif. Donc, plus les capteurs seront miniaturisés, moins ils seront sensibles [16].

Les capteurs MEMS sont conçus principalement selon deux techniques : « surface micromachining » et le « bulk micromachining » [66]. La technique « bulk » est apparue la première (vers les années 1975) et elle est encore très utilisée jusqu'à maintenant. Il s'agit de graver une structure à même une gaufre de silicium à l'aide d'un solvant. En utilisant les propriétés anisotropiques du silicium, les structures mécaniques résultantes peuvent être très précises. De plus, les propriétés mécaniques du silicium sont très bien connues, minimisant les incertitudes de fabrication.

D'un autre côté, la technique « surface » est similaire au procédé de fabrication de circuits intégrés. Les structures mécaniques sont formées par le dépôt et la gravure de plusieurs minces couches de polysilicium [65]. Le procédé étant compatible avec celui des circuits intégrés, il est possible d'intégrer à la fois la structure mécanique et les circuits de traitement de signal. Ce dernier aspect demeure toutefois un important domaine de re-

cherche [14, 66, 67]. Le problème avec la technique « surface » est la difficulté à contrôler les propriétés mécaniques des couches superficielles, et donc les performances du capteur.

La première application industrielle des capteurs micro-mécaniques fut un capteur de pression, réalisé en 1958. Cependant, la miniaturisation des capteurs et leurs diversifications sont venues avec le développement de l'industrie des semi-conducteurs, incluant l'amélioration des procédés de micro-fabrication. La compagnie Analog Device fut la première à effectuer une production de masse d'un capteur MEMS : l'accéléromètre ADXL050. L'avènement de ce capteur d'accélération comme élément déclencheur des sacs gonflables pour voiture ouvrit un marché encore immature.

Actuellement, une quantité appréciable de capteurs inertiels existent. Par contre, la précision des capteurs commerciaux à faible coût demeure discutable pour les applications dans les systèmes de navigation par inertie. Néanmoins, de part leurs petites dimensions et faibles coûts, ils permettent d'atteindre des performances étonnantes (Acar [68])¹. Depuis une dizaine d'année, la précision des capteurs inertiels s'est en effet améliorée, en même temps que les procédés de fabrication. Le laboratoire Draper, du Massachusetts Institute of Technology (MIT), fut un des premiers à utiliser la microtechnique pour concevoir des capteurs inertiels. Depuis ce temps, la précision des capteurs a évolué et un article de Kourepenis [11], du Laboratoire Draper, relate cette évolution. Dans le même ordre d'idée, les articles de Moore [13], de Gabriel [14] et de Barbour [15] illustrent une amélioration de la précision de ces capteurs, et prévoient une bonne précision le jour où des systèmes de navigation complets seront intégrés sur une puce électronique. Le problème est que nous n'en sommes pas encore rendus là, du moins commercialement. Car même s'il est possible d'avoir certains capteurs MEMS de hautes précisions, les coûts de production restent prohibitifs (ou seulement des procédés accessibles par des centres de recherche subventionnés par les militaires). À cet effet, Kenny [16] démontrait récemment que la limite physique de détection d'une accélération est déjà atteinte par les capteurs utilisant les procédés de fabrication de type « surface ».

Récemment, Bird [69] a résumé l'évolution des capteurs MEMS et a classifié les capteurs en trois catégories, dont la figure 22 s'inspire. Les capteurs MEMS commerciaux se classent dans les catégories 2 et 3, tandis que les capteurs MEMS haut de gamme sont classés comme catégorie 1. Évidemment, les prix sont variables en conséquence et peuvent être reliés à la figure 21.

¹ Les capteurs MEMS abordables sur le marché sont principalement des accéléromètres. Ceux étudiés par Acar pouvaient atteindre une résolution de 0.5 mg.

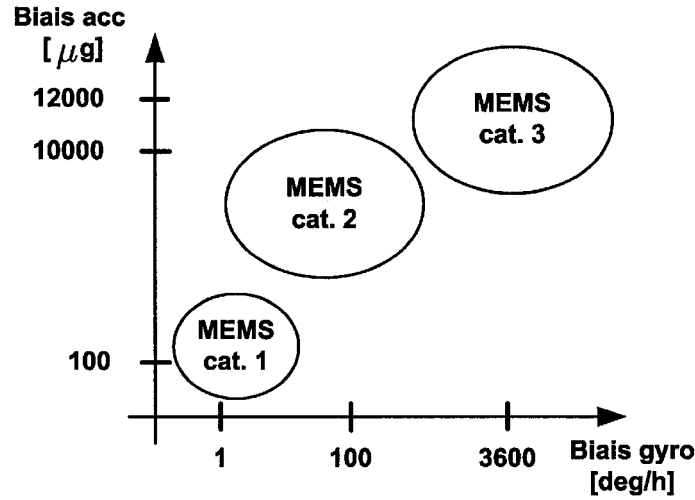


Figure 22 Trois classes de capteurs MEMS

Selon la technologie, les capteurs présentent des comportements d'erreur différents mais il est possible de généraliser les caractéristiques d'erreur pour les capteurs. De façon à compléter la revue des capteurs inertiels, la prochaine section présente les erreurs les plus communes et montre la façon de palier à ces erreurs.

3.4 Les caractéristiques d'erreur des capteurs inertiels

Certaines caractéristiques d'erreur de capteurs ont été introduites à la section 3.1. Cette section illustre de façon plus complète la notion d'erreur des capteurs inertiels.

3.4.1 Équation de mesure des capteurs

De manière simplifiée, la mesure d'une variable (accélération ou vitesse angulaire) peut être exprimée comme aux équations 3.3 et 3.4. L'équation 3.3 représente les erreurs dominantes dans les capteurs, mais des modèles beaucoup plus complexes existent. Le lecteur peut se référer aux livres de Lawrence [64] ou Savage [9]. L'article de Damico [70] et celui de Park [71] font également une bonne revue des caractéristiques des capteurs.

$$\vec{V}_{\text{mes}} = s_{\text{nom}}(I + M_e)(M_a \vec{X}_{\text{vrai}} + \vec{\delta x} + \vec{\epsilon}) \quad (3.3)$$

$$\vec{X}_{\text{mes}} = \frac{1}{s_{\text{nom}}} \vec{V}_{\text{mes}} \quad (3.4)$$

où

$\vec{X}_{\text{mes}}$	=	Variable mesurée par le capteur [m/s^2] ou [rad/s]
$\vec{V}_{\text{mes}}$	=	Tension électrique équivalente de la variable mesurée par le capteur [V]
s_{nom}	=	Facteur d'échelle nominal [$V/m/s^2$] ou [$V/rad/s$]
$\vec{X}_{\text{vrai}}$	=	La vraie variable mesurée
M_e	=	Matrice de facteur d'échelle
M_a	=	Matrice d'alignement
$\vec{\delta x}$	=	Biais dans la mesure du capteur
$\vec{\epsilon}$	=	Bruit (erreur aléatoire) dans la mesure du capteur

Facteur d'échelle

La matrice diagonale $M_e = \text{diag}\{\vec{m}_e\}$ est composée de la variation du facteur d'échelle nominal s_{nom} . Ainsi, en l'absence d'erreurs dans le facteur d'échelle, la matrice M_e est une matrice nulle ($M_e = 0_{3 \times 3}$). Principalement, la variation du facteur d'échelle nominal est causée par un changement de température et/ou par la non-linéarité du facteur d'échelle sur la plage de mesure. Le facteur d'échelle peut donc varier dans le temps. Également, il peut exister une asymétrie entre la plage négative et positive de la mesure, et finalement une petite variation dans le facteur d'échelle peut survenir d'une mise en marche à l'autre.

Biais

Le biais $\vec{\delta x}$ est une erreur relativement constante dans la mesure d'un capteur. Il existe trois types de biais : un biais systématique (normalement fournit par le manufacturier), un biais variable d'une mise en marche à l'autre, et un biais variable durant le fonctionnement du capteur ².

Alignement

Les vecteurs lignes de $M_a = I_{3 \times 3} + [\vec{m}_{ax} \vec{m}_{ay} \vec{m}_{az}]^T$ sont les vecteurs unitaires représentant la projection de chacun des axes du capteur sur le repère mobile B . Dans le cas sans erreur, la matrice M_a est une matrice identité ($M_a = I_{3 \times 3}$). L'erreur d'alignement peut provenir de deux sources. Premièrement, la conception du capteur en tant que telle peut contenir des erreurs dans l'orthogonalité des axes de mesures (ou bien les axes ne sont pas tout à fait alignés avec le boîtier). Deuxièmement, la disposition physique des capteurs

² La variation du biais d'un capteur durant le fonctionnement est principalement causée par un changement de température ou d'environnement vibratoire. Quoique les fiches techniques des capteurs provenant du manufacturier donne un ordre d'idée de l'importance de ces erreurs, un étalonnage du capteur en laboratoire est nécessaire pour s'assurer de la véracité des informations fournies par le manufacturier.

par rapport au repère mobile B peut être désaxée. Selon le type de capteurs, les erreurs d'alignement peuvent également être suscitées par la dynamique du véhicule.

Erreur aléatoire (bruit de mesure)

L'erreur aléatoire $\vec{\epsilon}$ d'un capteur est également appelée bruit de mesure. Peu importe la complexité d'un capteur, il existe toujours un bruit de mesure avec un certain rapport signal sur bruit. Le bruit est d'origine mécanique, thermique et électrique [16].

3.4.2 Calibration vs identification en ligne

L'inversion de l'équation de mesure (équations 3.3 et 3.4) permet de retrouver la vraie variable à mesurer, identifiée ci-après comme la mesure compensée $\vec{X}_{\text{comp}}$, étant donnée que l'erreur aléatoire $\vec{\epsilon}$ ne peut évidemment pas être déterminée.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\text{mes}} &= s_{\text{nom}}(I + M_e)(M_a \vec{X}_{\text{vrai}} + \vec{\delta x} + \vec{\epsilon}) \\ &\Downarrow \\ \vec{X}_{\text{comp}} &= M_a^{-1}((I + M_e)^{-1} \vec{X}_{\text{mes}} - \vec{\delta x}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Il existe deux étapes de calibration. Premièrement, les capteurs sont généralement testés sur un banc d'essai en laboratoire. Cette première étape permet d'évaluer les erreurs de nature déterministe, tel le biais systématique et les erreurs d'alignement dans les axes du capteur. De plus, le facteur d'échelle nominal réel peut être déterminé (il peut différer de la fiche technique du manufacturier). Finalement, des tests en environnement contrôlé peuvent également être faits pour déterminer la variation du facteur d'échelle et du biais en fonction de la température et de l'ambiance vibratoire. Pour la plupart des systèmes de navigation, la calibration des capteurs et du SNI est suffisante.

La deuxième étape de calibration a lieu durant la phase d'initialisation du SNI (mais également durant la phase de navigation pour une calibration en-ligne). Le véhicule étant d'habitude fixe durant la période d'initialisation, le biais des capteurs (celui d'une mise en marche à l'autre) peut facilement être déterminé.

Il est de plus en plus admis dans la littérature que les erreurs des capteurs bas de gamme doivent être identifiés en-ligne [19, 38]. Pour ce faire, les caractéristiques d'erreur sont gé-

néralement représentées par un processus de Markov d'ordre 0 (mouvements Brownien).

$$\dot{\vec{\beta}}(t) = \alpha \vec{\beta}(t) + \vec{w}(t) \quad (3.6)$$

$\Downarrow$ Mouvement Brownien, $\alpha = 0$

$$\dot{\vec{\beta}}_b(t) = \vec{w}(t) \quad (3.7)$$

où $\vec{w}(t)$ est un vecteur de bruit blanc. Les paramètres des capteurs sont modélisés comme étant des constantes variant lentement (ou rapidement) dans le temps, selon que la densité spectrale du bruit $\vec{w}(t)$ est relativement petite (ou importante).

Ainsi, les variables d'erreur $[^I \delta \vec{a}_B]_B$ et $[^I \delta \vec{\omega}_B]_B$ dans les équations 2.71 et 2.73 peuvent être remplacées par :

$$[^I \delta \vec{x}_B]_B = \vec{\delta x} + \text{diag}\{[^I \vec{x}_B]_B\} \vec{m}_e^x + \begin{pmatrix} [^I \vec{x}_B]_B \cdot \vec{m}_{ax}^x \\ [^I \vec{x}_B]_B \cdot \vec{m}_{ay}^x \\ [^I \vec{x}_B]_B \cdot \vec{m}_{az}^x \end{pmatrix} + \epsilon^x \quad (3.8)$$

où $x = a$ pour les accéléromètres, $x = \omega$ pour les gyromètres et le symbole « $\cdot$ » représente le produit scalaire de deux vecteurs.

De plus, le modèle d'erreur du SNI (équations 2.71, 2.72 et 2.73) doit être augmenté pour inclure la variation des paramètres, i.e. 15 variables d'état supplémentaires pour chaque ensemble de 3 capteurs d'accélération ou de vitesse angulaire, illustrées par l'ensemble des équations 3.9.

$$\begin{aligned} \dot{\delta a}(t) &= \vec{w}_{\delta a}(t) & \dot{\delta \omega}(t) &= \vec{w}_{\delta \omega}(t) \\ \dot{m}_e^a(t) &= \vec{w}_{mea}(t) & \dot{m}_e^\omega(t) &= \vec{w}_{mew}(t) \\ \dot{\vec{m}}_{ax}^a(t) &= \vec{w}_{maxa}(t) & \dot{\vec{m}}_{ax}^\omega(t) &= \vec{w}_{max\omega}(t) \\ \dot{\vec{m}}_{ay}^a(t) &= \vec{w}_{may a}(t) & \dot{\vec{m}}_{ay}^\omega(t) &= \vec{w}_{may \omega}(t) \\ \dot{\vec{m}}_{az}^a(t) &= \vec{w}_{maza}(t) & \dot{\vec{m}}_{az}^\omega(t) &= \vec{w}_{maz \omega}(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le problème de l'identification en ligne est l'observabilité de chacun des paramètres. Ce n'est pas évident que les paramètres peuvent être identifiés séparément. Plusieurs travaux ont porté sur l'observabilité des paramètres lors de la phase d'initialisation (Bar-Itzhack [43], Goshen-Meskin [72]). Par contre, peu de travaux portent sur l'observabilité

des paramètres durant la phase de navigation, quoique il est généralement accepté que l'observabilité est une fonction de la dynamique de vol (Sukkariéh [33]). Il est en effet difficile de différencier les contributions spécifiques de chacun des paramètres avec seulement une mesure de vitesse externe. Également, Park [71] n'aborde pas les caractéristiques d'erreur d'alignement pour les capteurs bas de gamme, mais seulement les erreurs de facteur d'échelle et les biais. D'un autre côté, ces paramètres peuvent être identifiés en laboratoire car l'environnement est contrôlé (connaissance relativement exacte des variables à mesurer).

Ainsi, pour les capteurs bas de gamme, seulement le biais sera inclu dans le modèle d'erreur du SNI pour identifier et calibrer les capteurs en ligne. En agissant de la sorte, « seulement » 6 variables supplémentaires sont ajoutées au modèle d'erreur conventionnel. La variation du facteur d'échelle peut être contrôlée en agissant sur la température du boîtier des capteurs [38, 73]. De plus, l'estimation du biais peut également contenir des contributions des autres erreurs, selon la vitesse de variation de l'estimation du biais. Les équations 3.10 à 3.12 constituent le modèle d'erreur standard tel que présenté à la section 2.4, avec comme ajout les biais des capteurs qui sont identifiés à partir des modèles représentés par les équations 3.13 et 3.14.

$$[{}^E \dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c} C_B S \{ [{}^I \vec{a}_B]_B \}^B C_{N^c} [\vec{\psi}]_{N^c} + {}^{N^c} C_B \vec{\delta a} + {}^{N^c} C_B \vec{\epsilon}^a \quad (3.10)$$

$$[{}^E \dot{\delta r}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E \delta v_{N^c}]_{N^c} \quad (3.11)$$

$$[\vec{\psi}]_{N^c} = -{}^{N^c} C_B \delta \vec{\omega} - {}^{N^c} C_B \vec{\epsilon}^\omega \quad (3.12)$$

$$\vec{\delta a}(t) = \vec{w}_{\delta a}(t) \quad (3.13)$$

$$\delta \vec{\omega}(t) = \vec{w}_{\delta \omega}(t) \quad (3.14)$$

À la même fréquence que la correction des équations de mouvement, les capteurs peuvent ainsi être calibrés en ligne avec l'estimation des paramètres et l'équation 3.5. Cette structure est la même que celle utilisée par Leach et Hui [19] et illustrée à la figure 5 du chapitre 1.

3.5 Discussion

Suite aux différentes problématiques soulignées précédemment, il est possible de tirer plusieurs constatations par rapport à l'utilisation de capteurs bas de gamme dans les SNI.

Premièrement, il est évident que l'hybridation d'un système de positionnement par GPS avec un système de navigation par inertie constitue un amalgame intéressant de part la stabilité à long terme du GPS et la précision à court terme des SNI. Par contre, entre deux mesures de positionnement par GPS ou lors de l'absence du signal GPS, la centrale inertielle opère seule et les erreurs de positionnement s'accumulent.

D'un autre côté, les capteurs MEMS commerciaux (ou capteurs bas de gamme de façon générale) développés depuis une dizaine d'année sont moins précis que les capteurs mécaniques, mais moins chers et généralement prennent peu de place. Mais selon Kenny [16], les capteurs mécaniques de type MEMS sont limités en terme de précision lorsque l'on veut les miniaturiser davantage. Cette limitation mécanique se pose pour les accéléromètres et gyromètres utilisant des structures mécaniques (ex. poutre en déflexion, membrane en vibration, etc.). Les procédés de fabrication actuels permettant une production de masse sont limités à de telles structures. Ainsi, la précision des capteurs MEMS commerciaux ne devraient pas s'améliorer significativement (de façon à changer de gamme de performance de SNI) dans un proche avenir.

Troisièmement, les capteurs bas de gamme ne permettent pas de mesurer la vitesse de rotation de la terre (voir figure 19), nécessitant un moyen externe pour initialiser l'azimut du système. En l'absence de ce moyen externe pour réduire l'erreur d'azimut avant la phase de navigation, la convergence du filtre de Kalman avec le modèle d'erreur linéaire n'est pas assurée. Ainsi, un modèle d'erreur non-linéaire pour SNI est donc de mise pour prendre en compte les grandes erreurs des capteurs bas de gamme. Le développement mathématique d'un tel modèle sera présenté au chapitre 4. Dans un autre ordre d'idée, les faibles dimensions et le faible coût des capteurs permettent leur utilisation en plus grand nombre. Ainsi, le paradigme de redondance voulant que l'on doit minimiser le nombre de capteurs pour une tâche donnée peut être contesté. En théorie, la mesure redondante d'un signal bruité permet une meilleure estimation du signal de base (Dasarathy [74]). Par contre, les capteurs MEMS possèdent d'autres erreurs importantes (tel qu'il a été présenté dans ce chapitre) et il n'est pas évident à priori quel niveau de gain peut être apporté par la redondance de capteurs bas de gamme. Le chapitre 5 répond à ces interrogations.

Un point important dans l'utilisation des capteurs bas de gamme est l'identification des erreurs et la compensation en ligne. L'identification des erreurs sera également abordée dans le chapitre 5 et dans le chapitre 7, ce dernier traitant des résultats obtenus pour les théories avancées dans la thèse.

CHAPITRE 4

MODÈLE D'ERREUR NON-LINÉAIRE

Tel qu'il a été introduit aux chapitres précédents, les modèles d'erreur sont nécessaires pour établir correctement la solution de navigation. Par contre, les modèles d'erreur développés jusqu'à maintenant utilisent tous l'approximation d'une faible erreur d'orientation [41–43]. Quelques travaux ont portés sur l'hypothèse d'une grande erreur, mais ils se sont concentrés seulement sur une grande erreur d'azimut (en anglais, « heading ») durant la phase d'initialisation. Scherzinger [45,46] introduit une quatrième variable pour représenter l'orientation dans la phase d'initialisation, alors que Kong [47], qui affirme utiliser un modèle non-linéaire, utilise toujours un modèle à 3 variables représentant l'orientation pour la phase d'initialisation du SNI.

Le problème avec les capteurs MEMS et les capteurs à bas coût en général est l'ampleur des erreurs. Ainsi, en plus du problème de l'initialisation de l'azimut, si les mesures externes qui servent à évaluer les erreurs et corriger la solution de navigation deviennent inaccessibles durant la phase de navigation, les erreurs d'orientation deviendront vite hors borne pour la bonne marche du filtre de Kalman et l'hypothèse de linéarisation sous-jacente.

Comme introduit au chapitre 1, d'autres alternatives existent pour prendre en considération les caractéristiques non-linéaires associées à l'utilisation des capteurs bas de gamme dans les SNI. Entre autre, la parallélisation de filtres de Kalman linéaire, ou bien l'utilisation d'un filtre de Kalman « sans odeur », sont des avenues intéressantes. Néanmoins, le développement d'un modèle d'erreur représentant mieux les erreurs présentes dans les SNI est de mise. Ce chapitre revient donc sur le modèle d'erreur introduit à la section 2.4 du chapitre 2, de façon à obtenir un modèle d'erreur non-linéaire et robuste aux grandes erreurs.

De façon similaire au développement des équations linéaires, les équations complètes seront premièrement utilisées dans le développement des équations non-linéaires de propagation des erreurs, répétées ici pour plus de clarté aux équations 4.1 à 4.4. On se rappellera que l'équation 4.1 représente la variation de la vitesse, les équations 4.2 et 4.3 représentent l'évolution de la position, alors que l'équation 4.4 donne la variation de la matrice de rotation (i.e. l'évolution de l'orientation du repère mobile B par rapport au repère de naviga-

tion N). Les simplifications résultantes de l'application entourant l'utilisation de capteurs bas de gamme dans les SNI seront par la suite exposées. En effet, le développement d'un modèle non-linéaire complet possède peu d'avantage en comparaison avec le modèle linéaire, pour des SNI utilisant des capteurs précis. Par contre, puisque la raison principale motivant l'utilisation d'un modèle d'erreur non-linéaire est l'utilisation de capteurs bas de gamme, les équations d'erreur utilisées doivent refléter le cas à l'étude.

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_N]_N = {}^NC_B[{}^I\vec{a}_B]_B + [\vec{g}_p]_N - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_N]_N\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_N\} \right) [{}^E\vec{v}_N]_N \quad (4.1)$$

$${}^E\dot{C}_N = {}^EC_N S\{[{}^E\vec{\omega}_N]_N\} \quad (4.2)$$

$$\dot{h} = [{}^Zu_N]_N \cdot [{}^E\vec{v}_N]_N \quad (4.3)$$

$${}^N\dot{C}_B = {}^NC_B S\{[{}^I\vec{\omega}_B]_B\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_N]_N\} {}^NC_B \quad (4.4)$$

4.1 Développement mathématique du modèle d'erreur non-linéaire

Contrairement à la théorie généralement acceptée, où les erreurs entre les repères sont petites, le modèle non-linéaire se base sur la théorie des matrices de rotation, sans aucune hypothèse tant qu'à la grandeur des erreurs. Pour ce faire, quatre repères seront introduits : le vrai repère de navigation N^t , le repère de navigation calculé N^c , le vrai repère mobile B^t et le repère mobile calculé B^c .

Définition 4.1.1 *Les vrais repères (N^t , B^t) sont inconnus et exacts, alors que les repères calculés (N^c , B^c) sont connus mais inexacts.*

4.1.1 Propagation non-linéaire de l'erreur d'orientation

La variable d'intérêt pour la variation de l'erreur d'orientation est la matrice de rotation entre le repère mobile calculé et le vrai repère mobile, ${}^{B^t}C_{B^c}$. Cette matrice de rotation peut être obtenue par la théorie des rotations successives :

$${}^{B^t}C_{B^c} = {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \quad (4.5)$$

La théorie de la dérivée en chaîne permet d'obtenir la variation de la matrice d'erreur d'orientation.

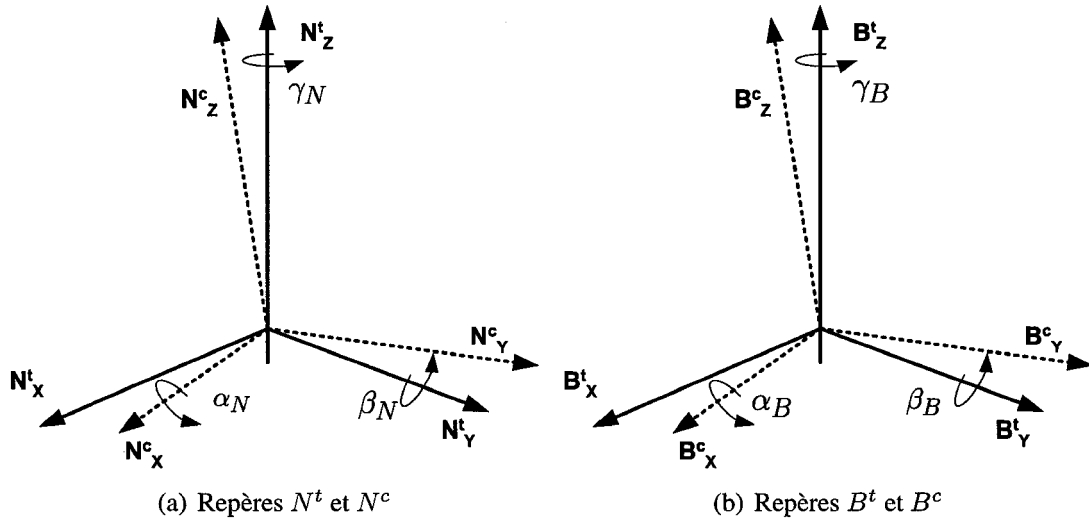


Figure 23 Les repères utilisés dans le modèle d'erreur non-linéaire

$$\begin{aligned}
 {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &= {}^{B^t}\dot{C}_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\
 &\quad + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\
 &\quad + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}\dot{C}_{B^c}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Les dérivées des matrices dans le premier et troisième termes du membre de droite de l'équation 4.6 peuvent être obtenues à partir de l'équation de base (équation 4.4) interprétée dans leurs repères respectifs. Premièrement, la variation de la matrice de rotation entre les vrais repères N^t et B^t est donnée directement par les équations 4.7 ou 4.8.

$${}^{N^t}\dot{C}_{B^t} = {}^{N^t}C_{B^t} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} {}^{N^t}C_{B^t} \tag{4.7}$$

$\Downarrow$

$${}^{B^t}\dot{C}_{N^t} = -S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} {}^{B^t}C_{N^t} + {}^{B^t}C_{N^t} S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} \tag{4.8}$$

D'un autre côté, l'application directe de l'équation 4.4 aux repères calculés nécessite l'introduction de l'erreur de vitesse angulaire entre le repère calculé et le vrai repère, ${}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}$. De plus, la mesure des gyromètres est toujours dans le repère vrai B^t .

$${}^{N^c}\dot{C}_{B^c} = {}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \tag{4.9}$$

$$= {}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \tag{4.10}$$

La dérivée de la matrice du deuxième terme de l'équation 4.6 peut être obtenue directement de la théorie de la propagation des matrices de rotation :

$${}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = {}^{N^t}C_{N^c} S\{{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} \quad (4.11)$$

En substituant les équations 4.8, 4.10 et 4.11 dans l'équation 4.6, et en utilisant la relation

$${}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c} = -{}^I\vec{\omega}_{N^t} + {}^I\vec{\omega}_{N^c} \quad (4.12)$$

l'équation non-linéaire de la variation des erreurs d'orientation peut être obtenue, et représentée par l'équation 4.13. Les détails de la démonstration se trouvent à l'annexe 1.2.

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} = & {}^{B^t}C_{B^c} S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ & + {}^{B^t}C_{B^c} S\{{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}\}_{B^t} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Finalement, l'erreur de vitesse angulaire est reliée à l'erreur des gyromètres par :

$${}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c} = {}^I\vec{\delta\omega}_B \quad (4.14)$$

Donc, l'équation 4.13 peut être réécrite par rapport à l'erreur des gyromètres

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} = & {}^{B^t}C_{B^c} S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ & - {}^{B^t}C_{B^c} S\{{}^I\vec{\delta\omega}_B\}_{B^t} \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.1.2 Variation non-linéaire de l'erreur de vitesse

Tel qu'introduit à la section 2.4.1 du chapitre 2, la variable d'intérêt pour la variation de l'erreur de la vitesse est l'erreur de vitesse du repère de navigation calculé N^c par rapport au repère fixe terre E , i.e. ${}^E\vec{\delta v}_{N^c}$. Cette variable d'intérêt peut être obtenue en soustrayant la « vraie » vitesse de la vitesse « calculée » :

$$\begin{aligned} [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} &= [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} - [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^c} \\ &= [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} - {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \end{aligned} \quad (4.16)$$

En dérivant l'équation 4.16, la variation de l'erreur de vitesse est obtenue.

$$[{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E\dot{v}_{N^c}]_{N^c} - {}^{N^c}\dot{C}_{N^t}[{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} - {}^{N^c}C_{N^t}[{}^E\dot{v}_{N^t}]_{N^t} \quad (4.17)$$

De la même façon que pour l'erreur d'orientation, le troisième terme du membre de droite de l'équation 4.17 peut être interprété en substituant dans l'équation 4.1 le repère N pour le repère N^t , ce qui donne l'équation 4.18 .

$$\begin{aligned} [{}^E\dot{v}_{N^t}]_{N^t} &= {}^{N^t}C_{B^t}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{g}_p]_{N^t} \\ &\quad - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^t}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation 4.17 peut être calculée par la même opération (repère N substitué par N^c cette fois-ci), et en interprétant la lecture de l'accéléromètre $[{}^I\vec{a}_B]_B$ comme étant toujours dans le vrai repère mobile (les capteurs sont réellement fixés au vrai repère mobile).

$$\begin{aligned} [{}^E\dot{v}_{N^c}]_{N^c} &= {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.19)$$

La dérivée de la matrice dans le deuxième terme de l'équation 4.17 est donnée par la transposé de l'équation 4.11.

$$\begin{aligned} {}^{N^c}\dot{C}_{N^t} &= {}^{N^c}C_{N^t} S\{[{}^{N^c}\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} \\ &= -S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} \end{aligned} \quad (4.20)$$

En substituant les équations 4.18, 4.19 et 4.20 dans l'équation 4.17, et en utilisant la relation

$${}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c} = -{}^E\vec{\omega}_{N^t} + {}^E\vec{\omega}_{N^c} \quad (4.21)$$

l'équation non-linéaire de la variation des erreurs de vitesse peut être obtenue, et représentée par l'équation 4.22.

$$\begin{aligned} [{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} &= {}^{N^c}C_{B^c} \left(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.22)$$

où ${}^I\delta\vec{a}_{B^t} = {}^{B^t}\vec{a}_{B^c}$ est l'erreur des accéléromètres. Les détails de la démonstration sont donnés à l'annexe 1.2.

4.1.3 Variation non-linéaire de l'erreur de position

L'erreur non-linéaire de position peut être représentée par la matrice de rotation entre le vrai repère de navigation et le repère de navigation calculé, i.e. ${}^{N^t}C_{N^c}$. Toujours en utilisant la règle des rotations successives des rotations, cette matrice d'erreur est donnée par :

$${}^{N^t}C_{N^c} = {}^{N^t}C_E {}^E C_{N^c} \quad (4.23)$$

En dérivant l'équation 4.23 et en interprétant les dérivés des matrices de rotation résultantes par rapport à leurs repères respectifs avec l'équation 4.2, l'équation non-linéaire de la variation des erreurs de position horizontal peut être obtenue, et représentée par l'équation 4.24.

$${}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = {}^{N^t}C_{N^c} S\{{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} \quad (4.24)$$

Les détails de cette démonstration sont également donnés à l'annexe 1.2. D'un autre côté, l'erreur d'altitude est toujours donnée par la relation linéaire suivante :

$$[\delta h]_{N^c} = [{}^Z u_N]_N \cdot [{}^E \delta v_{N^c}]_{N^c} \quad (4.25)$$

4.2 Équivalence entre le modèle non-linéaire d'erreur et le modèle de l'angle ψ

De façon à résumer les modèles d'erreur, le tableau VI montre les principales équations. Le modèle de l'angle ψ n'est valide que pour des petites erreurs d'angle (section 2.4), alors que le modèle non-linéaire ne possède pas de limitation. Néanmoins, lorsque les erreurs d'angle dans le modèle non-linéaire sont petites, son comportement devrait être similaire à celui du modèle de l'angle ψ .

4.2.1 Équivalence de la variation de l'erreur d'orientation

L'équivalence entre les deux modèles se fera en deux temps. Premièrement, les vecteurs d'erreur d'angles seront analysés. Par la suite, la similitude de la variation des erreurs d'orientation sera exposée.

Définition 4.2.1 Soit la matrice définissant l'orientation du repère mobile calculé B^c par rapport au vrai repère mobile B^t , ${}^{B^t}C_{B^c}$, l'erreur d'orientation peut également être représentée par le vecteur d'Euler $[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}$ et les angles d'Euler $(\alpha_B, \beta_B, \gamma_B)$, définis à la figure 23(b), liés à la matrice de rotation (et vice versa) tel que

$${}^{B^t}C_{B^c} = \begin{pmatrix} c\gamma_B c\beta_B & c\gamma_B s\beta_B s\alpha_B - s\gamma_B c\alpha_B & c\gamma_B s\beta_B c\alpha_B + s\gamma_B s\alpha_B \\ s\gamma_B c\beta_B & s\gamma_B s\beta_B s\alpha_B + c\gamma_B c\alpha_B & s\gamma_B s\beta_B c\alpha_B - c\gamma_B s\alpha_B \\ -s\beta_B & c\beta_B s\alpha_B & c\beta_B c\alpha_B \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c} = [\alpha_B \ \beta_B \ \gamma_B]^T \quad (4.27)$$

Proposition 4.2.1 Le vecteur d'angle d'erreur ${}^{B^c}\vec{\vartheta}_{B^t}$ du modèle non-linéaire et le vecteur d'angle d'erreur $\vec{\psi}$ du modèle d'erreur de l'angle ψ sont équivalents à un signe près pour des petits angles d'erreur:

$${}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c} \equiv -\vec{\psi} \quad (4.28)$$

Preuve

Le vecteur ${}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}$ est le vecteur d'erreur d'angle associé à la matrice de rotation ${}^{B^t}C_{B^c}$ où B^c est inexact. Ainsi, la relation suivante est vraie :

$${}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c} = {}^{B^t}\vec{\beta}_{B^c} \quad (4.29)$$

La loi de l'addition vectorielle permet d'écrire ce vecteur comme une somme de vecteur

$${}^{B^t}\vec{\beta}_{B^c} = {}^{B^t}\vec{\beta}_E + {}^E\vec{\beta}_{B^c} \quad (4.30)$$

$$= \vec{0} + {}^E\vec{\beta}_{B^c} \quad (4.31)$$

où les vecteurs nuls résultent de l'exactitude des repères. Finalement, de part la définition 2.4.1, l'équivalence est directe car le repère E est alors inexact.

$${}^{B^c}\vec{\vartheta}_{B^t} = {}^E\vec{\beta}_{B^c} \quad (4.32)$$

$$= -{}^E\vec{\alpha}_{B^c} \quad (4.33)$$

$$= -\vec{\psi} \quad (4.34)$$

...

CQFD

Tableau VI
Comparaison des modèles d'erreur

Variables	Modèle angle ψ	Modèle non-linéaire
Erreur de vitesse	$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} E \\ \dot{\delta v}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} &= S \left\{ \begin{smallmatrix} N^c \\ C_B \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{a}_B \end{smallmatrix} \right]_B \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\psi} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \\ &+ \begin{smallmatrix} N^c \\ C_B \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\delta a}_B \end{smallmatrix} \right]_B \end{smallmatrix} + \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\delta g}_p \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \\ &- \left(S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\omega}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\omega}_E \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \right) \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\delta v}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} E \\ \dot{\delta v}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} &= \begin{smallmatrix} N^c \\ C_{B^c} \left(I - \begin{smallmatrix} B^t \\ C_{B^c}^T \end{smallmatrix} \right) \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{a}_{B^t} \end{smallmatrix} \right]_{B^t} \end{smallmatrix} \\ &+ \begin{smallmatrix} N^c \\ C_{B^c} \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\delta a}_{B^t} \end{smallmatrix} \right]_{B^t} \end{smallmatrix} + \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\delta g}_p \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \\ &- \left(S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\omega}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\omega}_E \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \right) \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\delta v}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \end{aligned}$
Erreur de position	$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} E \\ \dot{\delta r}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} &= \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\delta v}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \\ &- S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\omega}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\delta r}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \begin{smallmatrix} N^t \\ \dot{C}_{N^c} \end{smallmatrix} &= \begin{smallmatrix} N^t \\ C_{N^c} \end{smallmatrix} S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} N^t \\ \vec{\omega}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \\ \left[\begin{smallmatrix} I \\ \dot{h} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} &= \left[\begin{smallmatrix} Z \\ u_N \end{smallmatrix} \right]_N \cdot \left[\begin{smallmatrix} E \\ \vec{\delta v}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \end{aligned}$
Erreur d'orientation	$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} I \\ \dot{\psi} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} &= \begin{smallmatrix} N^c \\ C_B \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\delta \omega}_B \end{smallmatrix} \right]_B \end{smallmatrix} \\ &- S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\omega}_{N^c} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \right\} \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\psi} \end{smallmatrix} \right]_{N^c} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \begin{smallmatrix} B^t \\ \dot{C}_{B^c} \end{smallmatrix} &= - \begin{smallmatrix} B^t \\ C_{B^c} \end{smallmatrix} S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\delta \omega}_B \end{smallmatrix} \right]_{B^c} \right\} \\ &+ \begin{smallmatrix} B^t \\ C_{B^c} \end{smallmatrix} S \left\{ \left(I - \begin{smallmatrix} B^t \\ C_{B^c}^T \end{smallmatrix} \right) \left[\begin{smallmatrix} I \\ \vec{\omega}_{B^t} \end{smallmatrix} \right]_{B^t} \right\} \end{aligned}$

Proposition 4.2.2 *Pour une petite erreur d'orientation ${}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}$, la variation de la matrice d'erreur d'orientation par le modèle non-linéaire est équivalente à la variation du vecteur d'erreur d'angle du modèle de l'angle ψ .*

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &= {}^{B^t}C_{B^c}S\{[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c}\} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{B^c}S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \end{aligned} \quad {}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c} \xrightarrow{\equiv} \vec{0} \quad \begin{aligned} [\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} &= -{}^{N^c}C_B[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_B \\ &\quad - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[\vec{\psi}]_{N^c} \end{aligned}$$

Preuve

Si l'erreur d'angle est relativement petite, la définition 4.2.1 de la matrice de rotation peut être approximée par :

$${}^{B^t}C_{B^c} \approx I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} \quad (4.35)$$

En substituant l'équation 4.15 dans la dérivée de l'équation 4.35, la dérivée du vecteur d'erreur d'angle peut être obtenue :

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &\approx S\{[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c}\} \\ &\Downarrow \\ S\{[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c}\} &\approx {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} \\ &\Downarrow \text{équation 4.15} \\ &\approx {}^{B^t}C_{B^c}S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{B^c}S\{[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_{B^t}\} \\ &\Downarrow \text{équation 4.35} \\ &\approx (I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\})S\{(I - (I - S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\})) [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\quad + (I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\})S\{[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_{B^t}\} \\ &\approx (I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\})S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\quad + (I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\})S\{[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_{B^t}\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

En se référant à l'annexe 1.2 pour le détail de la démonstration, l'approximation de la dérivée du vecteur d'erreur d'angle peut être donnée par :

$$S\{[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c}\} \approx S\{[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c}\} + S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \quad (4.38)$$

En appliquant l'opérateur anti-symétrique inverse $S^{-1}\{ \cdot \}$ à l'équation 4.38, la relation vectorielle est obtenue. L'équation 4.39 représente la dérivée du vecteur d'erreur d'angle du modèle non-linéaire (dans le cas d'une petite erreur) mesurée dans le repère mobile calculé B^c .

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c} \approx [{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c} + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \quad (4.39)$$

Puisque la dérivée du vecteur d'erreur d'angle du modèle de l'angle ψ est mesurée dans le repère de navigation calculé, l'équation 4.39 doit être interprétée dans ce repère pour prouver l'équivalence. La théorie de la mesure des vecteurs donne :

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c} \quad (4.40)$$

D'un autre côté, la dérivée de l'équation 4.40 donne la variation du vecteur d'erreur :

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}\dot{C}_{B^c}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c} + {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c} \quad (4.41)$$

En substituant les équations 4.10 et 4.39 dans l'équation 4.41, la variation du vecteur d'erreur d'angle du modèle non-linéaire avec hypothèse de petites erreurs dans le repère N^c est donnée par (avec les détails à l'annexe 1.2) :

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c} \quad (4.42)$$

$$= {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c} \quad (4.43)$$

De part la proposition 4.2.1, l'équation 4.43 peut être écrite sous la forme du vecteur d'erreur d'angle du modèle de l'angle ψ .

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c} \quad (4.44)$$

$\Downarrow$

$$-[\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} + S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[\vec{\psi}]_{N^c} \quad (4.45)$$

$$[\vec{\psi}]_{N^c} = -{}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[\vec{\psi}]_{N^c} \quad (4.46)$$

L'équation 4.46 est identique à l'équation 2.69, développée dans le cadre du modèle d'erreur linéaire de l'angle ψ .

4.2.2 Équivalence de la variation de l'erreur de vitesse

Proposition 4.2.3 *Pour une petite erreur d'orientation ${}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}$, la variation du vecteur d'erreur de vitesse par le modèle non-linéaire est équivalente à la variation du vecteur d'erreur de vitesse du modèle de l'angle ψ .*

$$[{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \Big|_{\text{modèle NL}} \stackrel{{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c} \rightarrow \vec{0}}{\equiv} [{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \Big|_{\text{modèle } \psi} \quad (4.47)$$

Preuve

L'équivalence entre les équations de variation d'erreur de vitesse entre les deux modèles est relativement directe. Tel que vue précédemment, l'hypothèse d'une erreur d'angle petite permet l'approximation de la matrice d'erreur de rotation par :

$${}^{B^t}C_{B^c}^T \approx I - S\{{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}\}_{B^c} \quad (4.48)$$

En substituant l'équation 4.48 dans le premier terme du membre de droite de l'équation 4.49,

$$[{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c} \left(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} - \left(S\{{}^E\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} + 2S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_{N^c} \right) [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \quad (4.49)$$

↓ équation 4.48

$$\begin{aligned} &\approx {}^{N^c}C_{B^c} \left(I - (I - S\{{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}\}_{B^c}) \right) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{{}^E\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} + 2S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_{N^c} \right) [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \\ &\approx {}^{N^c}C_{B^c} S\{{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}\}_{B^c} [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{{}^E\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} + 2S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_{N^c} \right) [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} &\approx S\{{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}\}_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{{}^E\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} + 2S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_{N^c} \right) [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.51)$$

↓ propriété du produit vectoriel (voir annexe 1.2)

$$\begin{aligned} &\approx -S\{{}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t}\} [{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} \\ &\quad - \left(S\{{}^E\vec{\omega}_{N^c}\}_{N^c} + 2S\{{}^I\vec{\omega}_E\}_{N^c} \right) [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.52)$$

↓ Proposition 4.2.1

$$\begin{aligned} \approx & S\{ {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t}\}[\vec{\psi}]_{N^c} + {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} \\ & - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right)[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.53)$$

L'équation 4.53 est identique à l'équation 2.67.

CQFD

...

4.2.3 Équivalence de la variation de l'erreur de position

Définition 4.2.2 Soit la matrice définissant l'orientation du repère de navigation calculé N^c par rapport au vrai repère de navigation N^t , ${}^{N^t}C_{N^c}$, l'erreur de position (sous forme polaire) peut également être représentée par le vecteur d'Euler $[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}$ et les angles d'Euler $(\alpha_N, \beta_N, \gamma_N)$, définis à la figure 23(a), liés à la matrice de rotation (et vice versa) tel que

$${}^{N^t}C_{N^c} = \begin{pmatrix} c\gamma_N c\beta_N & c\gamma_N s\beta_N s\alpha_N - s\gamma_N c\alpha_N & c\gamma_N s\beta_N c\alpha_N + s\gamma_N s\alpha_N \\ s\gamma_N c\beta_N & s\gamma_N s\beta_N s\alpha_N + c\gamma_N c\alpha_N & s\gamma_N s\beta_N c\alpha_N - c\gamma_N s\alpha_N \\ -s\beta_N & c\beta_N s\alpha_N & c\beta_N c\alpha_N \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c} = [\alpha_N \ \beta_N \ \gamma_N]^T \quad (4.55)$$

Proposition 4.2.4 Le vecteur d'angle d'erreur ${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}$ du modèle non-linéaire et le vecteur d'angle d'erreur $\vec{\delta\theta}$ du modèle d'erreur de l'angle ψ sont équivalents.

$${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c} \equiv \vec{\delta\theta} \quad (4.56)$$

Preuve

Le vecteur ${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}$ est le vecteur d'erreur d'angle associé à la matrice de rotation ${}^{N^t}C_{N^c}$ où N^c est inexact. Ainsi, la relation suivante est vraie :

$${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c} = {}^{N^t}\vec{\beta}_{N^c} \quad (4.57)$$

$$= {}^{N^t}\vec{\beta}_E + {}^E\vec{\beta}_{N^c} \quad (4.58)$$

$$= \vec{0} + {}^E\vec{\beta}_{N^c} \quad (4.59)$$

où le vecteur nul résulte de l'exactitude des repères. Finalement, de part la définition 2.4.2, l'équivalence est directe.

$${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c} = {}^E\vec{\beta}_{N^c} \quad (4.60)$$

$$= \vec{\delta\theta} \quad (4.61)$$

CQFD

...

Proposition 4.2.5 *Pour une petite erreur de position ${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}$ (sous forme polaire), la variation de la matrice d'erreur de position du modèle non-linéaire est équivalente à la variation du vecteur d'erreur de position du modèle de l'angle ψ .*

$${}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \stackrel{{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c} \rightarrow \vec{0}}{\equiv} [{}^E\dot{\vec{\delta r}}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \quad (4.62)$$

Corollaire 4.2.1 (de la Proposition 4.2.5) *Pour une petite erreur de position ${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}$ (sous forme polaire), la variation du vecteur d'angle d'erreur de position du modèle non-linéaire est équivalente à la variation du vecteur d'angle d'erreur de position du modèle de l'angle ψ .*

$${}^{N^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{N^c} \stackrel{{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c} \rightarrow \vec{0}}{\equiv} \dot{\vec{\delta\theta}} \mid [\vec{\delta\theta}]_{N^c} = \frac{1}{R} \left(S\{[{}^Z u_N]_N\} [{}^E\vec{\delta r}_N]_N \right) \quad (4.63)$$

Preuve

Étape 1 : Calcul de la dérivée de $\vec{\delta\theta}$

$$[\vec{\delta\theta}]_{N^c} = \frac{1}{R} \left(S\{[{}^Z u_N]_N\} [{}^E\vec{\delta r}_N]_N \right) \quad (4.64)$$

$\Downarrow$

$$[\dot{\vec{\delta\theta}}]_{N^c} = \frac{1}{R} \left(S\{[{}^Z u_N]_N\} [{}^E\dot{\vec{\delta r}}_N]_N \right) \quad (4.65)$$

En substituant l'équation 2.68 dans l'équation 4.65, la variation de l'angle d'erreur de position dans le modèle de l'angle ψ peut être obtenue.

$$[\dot{\delta\theta}]_{N^c} = \frac{1}{R} \left(S\{[{}^Z u_N]_N\} [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - \frac{1}{R} \left(S\{[{}^Z u_N]_N\} S\{[{}^E \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E \vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \right) \right) \quad (4.66)$$

Étape 2 : Calcul de la dérivée de ${}^{N^t} \vec{\vartheta}_{N^c}$

Si l'erreur d'angle de position est relativement petite, la définition 4.2.2 de la matrice de rotation peut être approximée par :

$${}^{N^t} C_{N^c} \approx I + S\{[{}^{N^t} \vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (4.67)$$

En substituant l'équation 4.11 dans la dérivée de l'équation 4.67, la dérivée du vecteur d'erreur d'angle peut être obtenue :

$${}^{N^t} \dot{C}_{N^c} = S\{[{}^{N^t} \dot{\vec{\vartheta}}_{N^c}]_{N^c}\} \approx S\{[{}^{N^t} \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + \overline{S\{[{}^{N^t} \vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\} S\{[{}^{N^t} \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}} \quad (4.68)$$

où le terme avec la barre au-dessus correspond à un produit d'erreur, donnant une erreur du deuxième ordre et pouvant être négligée. L'équation 4.68 peut ainsi être approximée par :

$$S\{[{}^{N^t} \dot{\vec{\vartheta}}_{N^c}]_{N^c}\} \approx S\{[{}^{N^t} \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (4.69)$$

En appliquant l'opérateur anti-symétrique inverse $S^{-1}\{\cdot\}$ à l'équation 4.69,

$$\begin{aligned} [{}^{N^t} \dot{\vec{\vartheta}}_{N^c}]_{N^c} &\approx [{}^{N^t} \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c} \\ &\approx \frac{1}{R} S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \\ &\quad - \frac{1}{R} S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\} S\{[{}^E \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E \vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \end{aligned} \quad (4.70)$$

la variation de l'erreur d'angle de position du modèle non-linéaire (avec hypothèse d'erreur d'angle de position petite) est donnée par l'équation 4.70. Les étapes intermédiaires de la démonstration se trouvent à l'annexe 1.2.

En comparant l'équation 4.70 et l'équation 4.66, l'équivalence est directe et prouve que ${}^{N^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{N^c} = \dot{\vec{\delta\theta}}$

CQFD

...

4.3 Correction des équations de mouvement avec erreurs non-linéaires et équivalence

Tout comme à la section 2.4.5, l'estimation des erreurs doit être soustraite de la solution des équations de mouvement. Cette section illustre la façon de corriger la solution de navigation avec l'estimation des erreurs employant le modèle non-linéaire, et démontre l'équivalence de la correction dans le cas spécifique où ces erreurs sont petites.

4.3.1 Correction de la solution d'orientation

L'équation 4.5 représente la règle des rotations successives dans l'algèbre des matrices de rotation permettant le calcul de l'erreur d'orientation. En isolant dans le membre de gauche la matrice de rotation entre les deux vraies repères B^t et N^t , la correction à appliquer est immédiate.

$${}^{N^t}C_{B^t} = {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} {}^{B^t}C_{B^c}^T \quad (4.71)$$

$\Downarrow$

$${}^{N^c}C_{B^c}^{(+)} = {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} {}^{B^t}C_{B^c}^T \quad (4.72)$$

avec ${}^{N^t}C_{N^c}$ donnée par la solution de l'équation 4.24 et ${}^{B^c}C_{B^t}$ donnée par la solution de l'équation 4.15. On peut retrouver la version linéaire de la correction de la propagation de l'orientation (équation 2.92) en supposant des petites erreurs pour ${}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}$ et ${}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}$ et le produit des vecteurs d'erreur négligeable.

$$\begin{aligned} {}^{N^c}C_{B^c}^{(+)} &= {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} {}^{B^t}C_{B^c}^T \\ &\approx \left(I + S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\} \right) {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} \left(I - S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} \right) \\ &\approx \left(I + S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\} \right) \left(I - S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\} \right) {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} \\ &\approx \left(I + S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\} - S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\} \right) {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} \end{aligned} \quad (4.73)$$

↓ Propositions 4.2.1 et 4.2.4

$${}^{N^c}C_{B^c}^{(+)} = \left(I + S\{[\delta\vec{\theta}]_{N^c}\} + S\{[\vec{\psi}]_{N^c}\} \right)^{N^c} C_{B^c}^{(-)} \quad (4.74)$$

4.3.2 Correction de la solution de vitesse

L'équation 4.16 représente l'erreur de vitesse en fonction des vecteurs de vitesse. En isolant dans le membre de gauche le vecteur de vitesse vraie, la correction à appliquer peut être déterminée.

$$[{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} = {}^{N^t}C_{N^c} \left([{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} - [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \right) \quad (4.75)$$

↓

$$[{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(+)} = {}^{N^t}C_{N^c} \left([{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(-)} - [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \right) \quad (4.76)$$

où ${}^{N^t}C_{N^c}$ est donnée par la solution de l'équation 4.24 et $[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}$ par l'estimation de l'équation 4.22 par le filtre de Kalman.

La correction linéaire de la vitesse (équation 2.88) peut être retrouvée en assumant une petite erreur dans l'angle entre les repères N^t et N^c et en négligeant le produit de deux vecteurs d'erreur.

$$[{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(+)} = {}^{N^t}C_{N^c} \left([{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(-)} - [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \right) \quad (4.77)$$

$$\approx \left(I + S\{[{}^{N^t}\vec{\delta\theta}]_{N^c}\} \right) \left([{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(-)} - [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \right) \quad (4.78)$$

↓ Proposition 4.2.4

$$[{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(+)} \approx \left(I + S\{[\delta\vec{\theta}]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c}^{(-)} - [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \quad (4.79)$$

4.3.3 Correction de la solution de position

L'équation 4.23 représente la règle des rotations successives dans l'algèbre des matrices de rotation permettant le calcul de matrice d'erreur de position. En isolant dans le membre de gauche la matrice de rotation entre les deux vraies repères E et N^t , la correction peut être calculée.

$${}^E C_{N^t} = {}^E C_{N^c} {}^{N^t} C_{N^c}^T \quad (4.80)$$

$$\Downarrow$$

$${}^E C_{N^c}^{(+)} = {}^E C_{N^c}^{(-)} {}^{N^t} C_{N^c}^T \quad (4.81)$$

où ${}^{N^t} C_{N^c}$ est une fois de plus donnée par la solution de l'équation 4.24. L'altitude est corrigée de façon identique à la version linéaire (section 2.4.5.1). On peut retrouver la version linéaire de la correction de la propagation de la matrice de position (équation 2.80) en supposant des petites erreurs pour ${}^{N^t} \vec{\vartheta}_{N^c}$.

$${}^E C_{N^c}^{(+)} = {}^E C_{N^c}^{(-)} {}^{N^t} C_{N^c}^T \quad (4.82)$$

$$\approx {}^E C_{N^c}^{(-)} \left(I - S\{[{}^{N^t} \vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\} \right) \quad (4.83)$$

$\Downarrow$ Proposition 4.2.4

$${}^E C_{N^c}^{(+)} \approx {}^E C_{N^c}^{(-)} \left(I - S\{[\vec{\delta\theta}]_{N^c}\} \right) \quad (4.84)$$

4.4 Simplification du modèle non-linéaire d'erreur - application aux capteurs bas de gamme

Le modèle d'erreur résumé au tableau VI de la page 67 peut être simplifié pour prendre en ligne de compte l'application dans lequel il servira. Premièrement, tout comme il a été présenté à la section 2.4 chapitre 2, l'équation de variation de l'erreur de vitesse peut être réduite en négligeant la contribution de l'erreur de vitesse dans sa propre propagation. Ceci est causé par les erreurs des capteurs qui sont beaucoup plus importantes que la contribution de l'erreur de la vitesse. De la même façon, l'erreur dans la modélisation de l'accélération gravitationnelle peut être négligée. Ainsi, la variation non-linéaire de l'erreur de vitesse sera donnée par l'équation 4.85.

$$[{}^E \dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c} C_{B^c} \left(I - {}^{B^t} C_{B^c}^T \right) [{}^I \vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c} C_{B^c} [{}^I \vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c} \\ - \left(S\{[{}^E \vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I \vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E \vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}$$

$\Downarrow$ simplifications

$$[{}^E \dot{\delta v}_N]_N = {}^N C_{B^c} \left(I - {}^{B^t} C_{B^c}^T \right) [{}^I \vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^N C_{B^c} [{}^I \vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} \quad (4.85)$$

Pour la variation de l'erreur de position, qui dans la version non-linéaire est représentée par une matrice contenant les erreurs de position sous forme d'angle, il s'avère évident que cette représentation peut être simplifiée. En effet, pour une erreur d'angle inférieure à 5° , cette matrice peut être mise sous forme linéaire, et 5° en terme de position angulaire constitue une très grande distance sur la surface de la terre. Puisque le signal externe du GPS sera presque tout le temps accessible (sauf lors des pertes de signal, mais le temps de perte ne permet pas d'atteindre une erreur de positionnement de l'ordre de 5°), l'erreur de position sera relativement petite, du moins assez petite pour permettre l'utilisation de la forme linéaire de la propagation de l'erreur de position, tel que donnée à l'équation 4.86.

$$\begin{aligned}
 {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} &= {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\
 [\delta\dot{h}]_{N^c} &= [{}^Zu_N]_N \cdot [{}^E\delta\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\
 &\Downarrow \text{ simplifications} \\
 [{}^E\delta\dot{r}_N]_N &= [{}^E\delta\vec{v}_N]_N
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

La propagation de l'erreur d'orientation n'est pas simplifiée car c'est la raison d'être du modèle d'erreur non-linéaire : prendre en ligne de compte les grandes erreurs d'orientation. L'équation de propagation est reprise à l'équation 4.87 pour plus de clarté dans le discours.

$$\begin{aligned}
 {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &= {}^{B^t}C_{B^c} S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\
 &\quad + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_{B^t}\}
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

La simplification de la variation de l'erreur d'orientation par le modèle linéaire de l'angle ψ , tout en conservant l'équation de variation non-linéaire de l'erreur de vitesse 4.85, donne le modèle « non-linéaire » de Kong [47]. Ainsi, l'équation de variation de l'erreur d'orientation du modèle de Kong est donnée par l'équation 4.88.

$$[\dot{\vec{\psi}}]_{B^c} = -[{}^I\delta\vec{\omega}_B]_B \tag{4.88}$$

Par la suite, la matrice de rotation ${}^{B^t}C_{B^c}^T$, utilisée dans l'équation 4.85, peut être calculée par l'approximation :

$${}^{B^t}C_{B^c}^T(\psi_x, \psi_y, \psi_z) \approx \begin{pmatrix} \mathbf{C}\psi_z & \mathbf{S}\psi_z & -\psi_y \\ -\mathbf{S}\psi_z & \mathbf{C}\psi_z & \psi_x \\ \psi_y\mathbf{C}\psi_z + \psi_x\mathbf{S}\psi_z & \psi_y\mathbf{S}\psi_z - \psi_x\mathbf{C}\psi_z & 1 \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

$$\neq I + S\{[\psi]_{B^c}\} \quad (4.90)$$

Le modèle de Kong peut être considéré « non-linéaire » car il y a une multiplication de variables d'état dans la variation de l'erreur de vitesse, du fait que l'angle d'erreur d'azimut ψ_z n'est pas considéré comme petit. Par contre, une grande erreur d'angle d'orientation sera mal interprétée dans la propagation des erreurs d'angle (équation 4.88). Le modèle non-linéaire présenté comble cette lacune.

4.5 Interprétation du modèle d'erreur non-linéaire dans l'algèbre des quaternions

Le nouveau modèle d'erreur, résumé aux équations 4.85, 4.86 et 4.87, se définit difficilement par un modèle d'état à cause de l'utilisation des matrices de rotation. Le modèle d'état est nécessaire pour l'estimation des erreurs par le filtre de Kalman, estimateur choisi comme filtre de navigation.

L'algèbre des quaternions est une autre façon d'interpréter la rotation de vecteur. Pour une introduction aux quaternions, le lecteur peut consulter l'article de Chou [75] ou le livre de Savage [9]. Ainsi, la variation de l'orientation du vrai repère B^t par rapport au repère calculé B^c peut être défini par :

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &= {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{B^c} S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\Downarrow \text{algèbres des quaternions} \\ {}^{B^t}\dot{\underline{q}}_{B^c} &= \frac{1}{2} {}^{B^t}\underline{q}_{B^c} \otimes [\underline{\epsilon}]_{B^t} \\ &\quad + \frac{1}{2} {}^{B^t}\underline{q}_{B^c} \otimes \underline{q}_{\omega} \end{aligned} \quad (4.91)$$

où $[\underline{\epsilon}]_{B^t}$ est le quaternion associé au vecteur $[\vec{\epsilon}]_{B^t}$, $\underline{q}_{\omega}$ est le quaternion associé au vecteur donné par le produit $(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}$, ${}^{B^c}\underline{q}_{B^t}$ est le quaternion représentant la rotation sous la forme des paramètres d'Euler et $\otimes$ est l'opérateur de multiplication dans l'algèbre

des quaternions.

$$\underline{q}_\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ (I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \end{pmatrix} ; [\underline{\epsilon}]_{B^t} = \begin{pmatrix} 0 \\ [\vec{\epsilon}]_{B^t} \end{pmatrix} ; {}^{B^c}\underline{q}_{B^t} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Toujours dans l'optique d'utiliser le modèle avec le filtre de Kalman, l'opérateur de multiplication dans l'algèbre des quaternions est remplacé par son équivalent de produit matriciel

$${}^{B^t}\underline{q}_{B^c} \otimes [\underline{\epsilon}]_{B^t} \equiv \mathcal{Q}_\otimes({}^{B^t}\underline{q}_{B^c})[\vec{\epsilon}]_{B^t} \quad (4.92)$$

où

$$\mathcal{Q}_\otimes({}^{B^t}\underline{q}_{B^c}) = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

D'un autre côté, les produits ${}^{B^t}C_{B^c}^T[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t}$ ou ${}^{B^t}C_{B^c}^T[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}$ doivent être interprétés dans l'algèbre des quaternions. Le produit de rotation dans l'algèbre des quaternions est donné par :

$${}^{B^c}C_{B^t}(\alpha, \beta, \gamma)[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \equiv {}^{B^c}\underline{q}_{B^t} [{}^I\underline{a}_{B^t}]_{B^t} {}^{B^c}\underline{q}_{B^t}^* \quad (4.94)$$

où ${}^{B^c}\underline{q}_{B^t}^*$ est le complexe conjugué de ${}^{B^c}\underline{q}_{B^t}$. Cette opération de rotation dans l'algèbre des quaternions peut également être exprimée comme un produit matriciel :

$${}^{B^c}\underline{q}_{B^t} [{}^I\underline{a}_{B^t}]_{B^t} {}^{B^c}\underline{q}_{B^t}^* = \mathcal{Q}_C({}^{B^c}\underline{q}_{B^t})[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \quad (4.95)$$

où

$$\mathcal{Q}_C^T({}^{B^t}\underline{q}_{B^c}) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

Ainsi, les équations du modèle d'erreur peuvent être écrites dans l'algèbre des quaternions sous la forme :

$$[{}^E\dot{\delta v}_N]_N = {}^NC_{B^c}(I - \mathcal{Q}_C^{T(B^t}\underline{q}_{B^c})) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^NC_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} \quad (4.97)$$

$$[{}^E\dot{\delta r}_N]_N = [{}^E\vec{\delta v}_N]_N \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{\underline{q}}_{B^c} &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\otimes}({}^{B^t}\underline{q}_{B^c}) [\vec{\epsilon}]_{B^t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\otimes}({}^{B^t}\underline{q}_{B^c}) (I - \mathcal{Q}_C^{T(B^t}\underline{q}_{B^c})) [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \end{aligned} \quad (4.99)$$

4.5.1 Linéarisation du modèle d'erreur

Pour utiliser le modèle d'erreur non-linéaire dans le filtre de Kalman, une version linéaire du modèle est nécessaire. Les équations 4.97, 4.98 et 4.99 peuvent être écrite sous une forme compacte.

$$\begin{aligned} \delta \vec{\mathcal{N}}^q &= \vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}(\mathcal{N}, \delta \vec{\mathcal{N}}^q, [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t}, [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}) \\ &\quad + \mathcal{G}^{\text{NL}}(\mathcal{N}, \delta \vec{\mathcal{N}}^q) \begin{pmatrix} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} \\ [\vec{\epsilon}]_{B^t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.100)$$

avec $\delta \vec{\mathcal{N}}^q = [{}^E\vec{\delta v}_N]_N^T [{}^E\vec{\delta r}_N]_N^T {}^{B^t}\underline{q}_{B^c}^T]^T$ et

$$\vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{F}}_v^{\text{NL}} \\ \vec{\mathcal{F}}_r^{\text{NL}} \\ \vec{\mathcal{F}}_q^{\text{NL}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^NC_{B^c}(I - \mathcal{Q}_C^{T(B^t}\underline{q}_{B^c})) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \\ [{}^E\vec{\delta v}_N]_N \\ \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\otimes}({}^{B^t}\underline{q}_{B^c}) (I - \mathcal{Q}_C^{T(B^t}\underline{q}_{B^c})) [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

La version linéaire de l'équation 4.100 est donnée en calculant le jacobien du vecteur non-linéaire $\vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}$,

$$\mathcal{J}(\vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}) = \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}}{\partial \delta \vec{\mathcal{N}}^q} \right)_{10 \times 10} \quad (4.102)$$

$$= \begin{pmatrix} [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_v^{\text{NL}}}{\partial \delta \vec{\mathcal{N}}^q} \right]_{3 \times 4} \\ [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 4} \\ [0]_{4 \times 3} & [0]_{4 \times 3} & \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_q^{\text{NL}}}{\partial \delta \vec{\mathcal{N}}^q} \right]_{4 \times 4} \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

où

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_v^{\text{NL}}}{\partial \delta \vec{\mathcal{N}}^q} = -^N C_{B^c} \left(\left[\frac{\partial \vec{q}_{C^i}}{\partial q_{j-1}} \cdot [{}^I \vec{a}_{B^t}]_{B^t} \right]_{ij} \right)_{3 \times 4} \quad (4.104)$$

$$i = 1 \dots 3, j = 1 \dots 4$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_q^{\text{NL}}}{\partial \delta \vec{\mathcal{N}}^q} &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{q}_{\otimes i}}{\partial q_{j-1}} \cdot [{}^I \vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \right]_{ij} \right)_{4 \times 4} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial q_{\otimes} \vec{q}_C^i}{\partial q_{j-1}} \cdot [{}^I \vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \right]_{ij} \right)_{4 \times 4} \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$i = 1 \dots 4, j = 1 \dots 4$$

avec « $\cdot$ » représentant le produit vectoriel, $\vec{q}_{C^i}$ est le $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne composant la matrice $\mathcal{Q}_C({}^{B^t} \underline{q}_{B^c})$,

$$\mathcal{Q}_C({}^{B^t} \underline{q}_{B^c}) = \left(\vec{q}_{C^1}^T \vec{q}_{C^2}^T \vec{q}_{C^3}^T \right) \quad (4.106)$$

$\vec{q}_{\otimes i}$ est le $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne composant la matrice $\mathcal{Q}_{\otimes}({}^{B^t} \underline{q}_{B^c})$.

$$\mathcal{Q}_{\otimes}({}^{B^t} \underline{q}_{B^c}) = \left(\vec{q}_{\otimes 1}^T \vec{q}_{\otimes 2}^T \vec{q}_{\otimes 3}^T \vec{q}_{\otimes 4}^T \right) \quad (4.107)$$

et $q_{\otimes} \vec{q}_{C^i}$ est le $i^{\text{ième}}$ vecteur ligne composant du produit des matrices $\mathcal{Q}_{\otimes} \mathcal{Q}_C$

$$\mathcal{Q}_{\otimes}({}^{B^t} \underline{q}_{B^c}) \mathcal{Q}_C({}^{B^t} \underline{q}_{B^c}) = \left(q_{\otimes} \vec{q}_{C^1}^T q_{\otimes} \vec{q}_{C^2}^T q_{\otimes} \vec{q}_{C^3}^T q_{\otimes} \vec{q}_{C^4}^T \right) \quad (4.108)$$

4.6 Conclusion préliminaire

Ce chapitre a présenté une méthode rigoureuse pour obtenir un modèle non-linéaire de propagation des erreurs dans un SNI. Il a été prouvé que ce modèle rejoint le modèle linéaire standard en utilisant l'hypothèse des petits angles d'erreur, et généralise également le modèle « non-linéaire » de Kong. La correction apportée à la solution des équations de mouvement est également abordée, avec son équivalence de la correction avec le modèle linéaire. Finalement, le modèle non-linéaire est développé pour l'application avec capteurs bas de gamme. Ainsi, le modèle d'erreur non-linéaire peut être simplifié pour prendre en compte que les erreurs des capteurs sont plus importantes que les autres contributions. L'implantation dans le filtre de Kalman implique l'utilisation des quaternions pour représenter les erreurs d'orientation, diminuant de 6 à 4 le nombre de variables pour interpréter les erreurs d'angle. L'application de ce modèle sera faite au chapitre 7, où il sera démontré expérimentalement que son utilisation dans certain cas est avantageux pour réduire le temps de convergence des erreurs.

CHAPITRE 5

LA REDONDANCE DE CAPTEURS BAS DE GAMME

Tel qu'établit au chapitre 1, la redondance de capteurs est un autre moyen d'améliorer la performance des systèmes de navigation inertielle à bas coût.

La redondance fut d'abord introduite pour augmenter la robustesse des systèmes face aux fautes des capteurs (ou fautes du système selon le cas) en dédoublant les systèmes qui effectuaient la même tâche. Ainsi, la première configuration des capteurs redondants fut orthogonale, i.e. plusieurs trièdres de capteurs étaient juxtaposés, formant ainsi des mesures redondantes sur chacun des trois axes principaux. La configuration non-orthogonale a été privilégiée par la suite car elle minimise le nombre de capteurs pour une fonction donnée. Les premiers travaux sur le sujet remonte au début des années 1970, par entre autre Pejsa [51]. Par contre, l'avènement des capteurs à bas coût, dont les capteurs MEMS, change ce paradigme. Ce chapitre expose ce changement de vision et propose une nouvelle approche à la redondance avec capteurs bas de gamme.

Ce chapitre débute par la comparaison des structures non-orthogonale et orthogonale, et démontre leur équivalence en ce qui concerne la quantité d'information utile au système¹.

La perte d'information suivant l'isolation de fautes pour chacune des configurations est comparée, en plus d'une évaluation qualitative des coûts. Par la suite, l'intégration de la redondance de capteurs bas de gamme dans les SNI et l'identification des erreurs des capteurs redondants est abordée, en comparant deux approches : standard et indirecte.

5.1 Théorie de la redondance

Soit la variable à mesurer $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$, la mesure redondante de cette variable peut être définie par l'équation suivante :

$$\vec{m}_{(N \times 1)} = \mathcal{H}_{(N \times 3)} \vec{x}_{(3 \times 1)} + \vec{v}_{(N \times 1)} \quad (5.1)$$

où $\vec{m}_{(N \times 1)}$ est le vecteur des N mesures effectuées par les N capteurs, $\mathcal{H}_{(N \times 3)}$ est la matrice de projection, avec ses vecteurs lignes $\vec{h}_i$ représentant le vecteur unitaire de direction

¹ La section 5.1 se rapportant au changement de paradigme de la redondance fut présentée à la conférence « International Federation of Automatic Control - Symposium on cost oriented automation », en juin 2004 [76].

du capteur i par rapport au repère de la variable à mesurer $\vec{x}$, et $\vec{v}_{(N \times 1)}$ est le vecteur de bruit de mesure des N capteurs. La meilleure estimation de la variable peut être déterminée de plusieurs façons (que ce soit par la théorie du filtre de Kalman discret, par la méthode des moindres carrés ou par la méthode du maximum de vraisemblance - Radix [7]) et elle est donnée par l'équation 5.2, où la variance des mesures est supposée identique.

$$\hat{\vec{x}} = (\mathcal{H}^T \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T \vec{m} \quad (5.2)$$

D'un autre côté, et en gardant l'hypothèse d'une même variance du bruit de mesure pour tous les capteurs $\sigma_v^2 = \sigma_{v_i}^2 = E\{v_i^2\}$, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\begin{aligned} P &= E\{(\hat{\vec{x}} - \vec{x})(\hat{\vec{x}} - \vec{x})^T\} \\ &= \sigma_v^2 (\mathcal{H}^T \mathcal{H})^{-1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ainsi, le problème général de la redondance est de déterminer la matrice de projection $\mathcal{H}$ (et ainsi la configuration géométrique des capteurs) qui minimise un critère de performance en relation avec la matrice de covariance de l'erreur d'estimation P .

De façon analogue, la minimisation de ce critère peut être assimilée à la maximisation de l'inverse de ce critère. Ainsi, au lieu d'utiliser la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, l'inverse de cette matrice sera employé. L'inverse de cette matrice est appelé matrice d'information et est dénoté $\mathcal{I}$.

$$\mathcal{I} = P^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} \mathcal{H}^T \mathcal{H} \quad (5.4)$$

5.1.1 Critère d'optimisation

Dans la littérature, il semble exister trois critères d'optimisation pour le placement optimal des capteurs [50] : la minimisation de la trace, la minimisation du déterminant ou la minimisation du conditionnement de la matrice de covariance P . Les deux premiers critères peuvent facilement être inversés (maximisation au lieu de la minimisation) pour être appliqués à la matrice d'information (maximisation de la trace ou maximisation du déterminant de la matrice d'information $\mathcal{I}$), et illustrés aux équations 5.5 et 5.6.

$$\mathcal{T} = \text{Trace}(\mathcal{I}) \propto \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (5.5)$$

$$V = \det(\mathcal{I}) \propto \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.6)$$

La maximisation du déterminant est un meilleur choix de critère car il est relié à la distribution de l'information dans l'espace (multiplication des valeurs propres de la matrice d'information), contrairement à la trace qui donne un critère d'information globale (somme des valeurs propres de la matrice d'information).

Selon une interprétation géométrique, les valeurs propres constituent les demi-axes d'un ellipsoïde de révolution, dont le volume est à maximiser. Le volume d'information est ainsi proportionnel aux produits des valeurs propres, et par le fait même du déterminant. En maximisant le déterminant de la matrice d'information, on se retrouve donc à maximiser le volume d'information dans l'espace.

$$\max_{\mathcal{H}} V = \max_{\mathcal{H}} \det(\mathcal{I}) = \max_{\mathcal{H}} \det(\mathcal{H}^T \mathcal{H}) \quad (5.7)$$

5.1.2 Configuration optimale de N capteurs à un axe de mesure

De façon à déterminer la configuration optimale des capteurs, il est supposé sans limiter la portée des résultats que ces capteurs ne possèdent qu'un axe de mesure. L'axe de mesure est représenté dans l'espace de la variable à mesurer par deux angles, ψ et θ , donnant l'orientation dans le plan horizontal et son élévation, respectivement. La figure 24 illustre un axe de mesure.

En relation avec la disposition géométrique du capteur, le vecteur directeur du capteur i est donné par :

$$\vec{h}_i = \begin{pmatrix} c\theta_i c\psi_i \\ c\theta_i s\psi_i \\ s\theta_i \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

et la matrice de projection est donnée par :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \vec{h}_1^T \\ \vec{h}_2^T \\ \vdots \\ \vec{h}_N^T \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

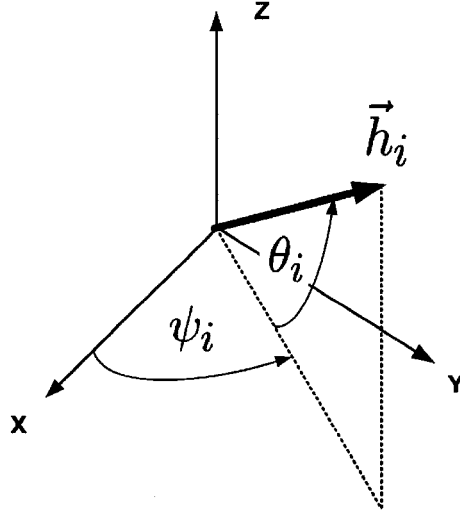


Figure 24 Orientation d'un capteur

Avec cette convention, la matrice d'information peut être explicitée en fonction des angles pour chacun des capteurs.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{H}^T \mathcal{H} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \dots & \vec{h}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{h}_1^T \\ \vec{h}_2^T \\ \vdots \\ \vec{h}_N^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$= \begin{pmatrix} c\theta_1 c\psi_1 & c\theta_2 c\psi_2 & \dots & c\theta_N c\psi_N \\ c\theta_1 s\psi_1 & c\theta_2 s\psi_2 & \dots & c\theta_N s\psi_N \\ s\theta_1 & s\theta_2 & \dots & s\theta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta_1 c\psi_1 & c\theta_1 s\psi_1 & s\theta_1 \\ c\theta_2 c\psi_2 & c\theta_2 s\psi_2 & s\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c\theta_N c\psi_N & c\theta_N s\psi_N & s\theta_N \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum c^2\theta_i c^2\psi_i & \sum c^2\theta_i c\psi_i s\psi_i & \sum c\theta_i s\theta_i c\psi_i \\ \sum c^2\theta_i c\psi_i s\psi_i & \sum c^2\theta_i s^2\psi_i & \sum c\theta_i s\theta_i s\psi_i \\ \sum c\theta_i s\theta_i c\psi_i & \sum c\theta_i s\theta_i s\psi_i & \sum s^2\theta_i \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

où la sommation $\sum(\cdot)$ est pour tous les capteurs, i.e. $\sum_{i=1}^N(\cdot)$.

En employant le critère d'optimisation introduit précédemment, le volume d'information est donné explicitement par :

$$\begin{aligned}
 V &= \det(\mathcal{I}) \\
 &= \sum c^2 \theta_i c^2 \psi_i \sum c^2 \theta_i s^2 \psi_i \sum s^2 \theta_i - \sum c^2 \theta_i c^2 \psi_i \left(\sum c \theta_i s \theta_i s \psi_i \right)^2 \\
 &\quad - \left(\sum c^2 \theta_i c \psi_i s \psi_i \right)^2 \sum s^2 \theta_i - \left(\sum c \theta_i s \theta_i c \psi_i \right)^2 \sum c^2 \theta_i s^2 \psi_i \quad (5.13) \\
 &\quad + 2 \sum c^2 \theta_i c \psi_i s \psi_i \sum c \theta_i s \theta_i c \psi_i \sum c \theta_i s \theta_i s \psi_i
 \end{aligned}$$

Cette équation est évidemment trop complexe pour être optimisée de façon numérique, d'autant plus qu'elle contient des termes circulaires, donnant une infinité de solutions. Ainsi, il est d'usage d'émettre certaines hypothèses. Premièrement, l'élévation sera considérée identique pour tous les capteurs². Quoique qu'elle peut sembler contraignante, cette hypothèse permet la distribution uniforme de l'information dans l'espace, caractéristique recherchée dans le processus d'optimisation, lorsqu'elle est liée à la deuxième hypothèse. Cette première hypothèse simplifie l'équation 5.13 comme suit :

$$\begin{aligned}
 V &= N s^2 \theta c^4 \theta \sum c^2 \psi_i \sum s^2 \psi_i - s^2 \theta c^4 \theta \sum c^2 \psi_i \left(\sum s \psi_i \right)^2 \\
 &\quad - N s^2 \theta c^4 \theta \left(\sum c \psi_i s \psi_i \right)^2 - s^2 \theta c^4 \theta \left(\sum c \psi_i \right)^2 \sum s^2 \psi_i \quad (5.14) \\
 &\quad + 2 s^2 \theta c^4 \theta \sum c \psi_i s \psi_i \sum c \psi_i \sum s \psi_i
 \end{aligned}$$

La deuxième hypothèse provient du désir de maximiser le volume d'information. Les termes négatifs de l'équation 5.14 resteront négatifs peu importe la valeur des angles ψ_i , à cause du carré des termes. Ainsi, pour maximiser l'expression, ces termes doivent être nuls. Les angles d'orientation dans le plan horizontal qui annulent les sommation $\sum s \psi_i$, $\sum c \psi_i$ et $\sum c \psi_i s \psi_i$ sont nécessairement symétriques autour d'un cercle. Ainsi, le volume d'information pour une configuration de N capteurs un axe avec une élévation identique et une orientation symétrique dans le plan horizontal est donné par :

$$V = N s^2 \theta c^4 \theta \sum_{i=1}^N c^2 \psi_i \sum_{i=1}^N s^2 \psi_i \quad (5.15)$$

² Cette hypothèse permet d'obtenir une configuration optimale. Il existe une deuxième structure optimale où un capteur est placé au zénith ($\theta = 90^\circ$) et les autres capteurs ont une élévation qui est fonction du nombre de capteurs [7]. Il est également possible de faire un lien entre cette dernière configuration optimale et le choix optimal de satellites GPS dans la solution de navigation, où le volume géométrique défini par les satellites doit être maximisé [77].

Le processus d'optimisation de la configuration géométrique peut donc être transféré de la matrice générique $\mathcal{H}$ (équation 5.7) vers les angles qui la forme, ψ_i et θ_i , donnée à l'équation 5.16.

$$\{\theta_i^{\text{opt}}, \psi_i^{\text{opt}}\} = \arg \max_{\theta_i, \psi_i} \{ V \} \quad (5.16)$$

A partir de l'équation 5.15, il est possible de déterminer l'élévation optimale des axes de mesure. En prenant la dérivée par rapport à l'angle d'élévation, et égalant le résultat à zéro, l'angle optimal peut être obtenu.

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2N \sum_{i=1}^N \mathbf{c}^2 \psi_i \sum_{i=1}^N \mathbf{s}^2 \psi_i \mathbf{s} \theta \mathbf{c}^3 \theta (1 - 3\mathbf{s}^2 \theta) = 0 \quad (5.17)$$

Les angles d'orientation dans le plan horizontal étant symétriques, les sommes des cosinus et sinus des angles sont non-nulles. En considérant l'angle d'élévation comme étant différent de 0° et 90° , l'angle optimal est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^2 \theta_{\text{opt}} &= \frac{1}{3} \\ \Downarrow \\ \theta_{\text{opt}} &= 35,26^\circ \end{aligned} \quad (5.18)$$

D'un autre côté, il a déjà été formulé que les angles d'orientation optimaux dans le plan horizontal sont symétriques. En effet, en prenant la dérivée de l'équation 5.14 par rapport à un angle d'orientation quelconque ψ_k :

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_k} = N \mathbf{s}^2 \theta \mathbf{c}^4 \theta \mathbf{s}(2\psi_k) \left(N - 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{s}^2 \psi_i \right) = 0 \quad (5.19)$$

en considérant l'angle d'élévation comme étant différent de 0° et 90° , et en supposant que $\mathbf{s}(2\psi_k) \neq 0$ (ce qui peut toujours être obtenu par rotation des angles optimaux symétriques), la somme des carrés du sinus des angles optimaux est égale au nombre de capteurs divisé par 2, ce qui est seulement possible dans le cas d'une symétrie des axes autour d'un cercle.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{s}^2 \psi_i = \frac{N}{2} \quad (5.20)$$

Ainsi, les angles symétriques autour d'un cercle sont définis comme suit :

$$\psi_i = \frac{360}{N} (i - 1) \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (5.21)$$

et sont représentés à la figure 25(a) pour le cas à six capteurs un axe. Par contre, une autre structure d'angle d'orientation satisfait la relation exprimée par l'équation 5.20 et est donnée par l'équation 5.22.

$$\psi_i = \frac{360}{N} 2(i - 1) \quad , \quad i = 1 \dots N \quad (5.22)$$

Dans cette dernière configuration, les axes se superposent selon trois orientations distinctes, tel que présenté à la figure 25(b). Il peut être démontré facilement que cette configuration donne une structure où les axes sont perpendiculaires entre eux. En effet, soit les vecteurs directeurs de deux axes quelconques $\vec{h}_k$ et $\vec{h}_j$,

$$\vec{h}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{c}\theta \mathbf{c}\psi_k \\ \mathbf{c}\theta \mathbf{s}\psi_k \\ \mathbf{s}\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{h}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{c}\theta \mathbf{c}\psi_j \\ \mathbf{c}\theta \mathbf{s}\psi_j \\ \mathbf{s}\theta \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Le produit scalaire entre ces deux vecteurs donne

$$\vec{h}_k \cdot \vec{h}_j = \mathbf{c}^2\theta \mathbf{c}(\psi_k - \psi_j) + \mathbf{s}^2\theta \quad (5.24)$$

$$= 0 \quad (5.25)$$

car $\psi_k - \psi_j = \pm 120^\circ \quad \forall k \neq j - 3d \quad , \quad d = 0 \dots (\frac{N}{3} - 1)$.

Puisque le produit scalaire entre deux vecteurs directeurs (unitaires) est égal au cosinus de l'angle entre ces vecteurs, le résultat de l'équation 5.25 implique que tous les vecteurs directeurs (non-colinéaires) de cette configuration sont perpendiculaires les uns aux autres.

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_j &= \mathbf{c}\beta_{kj} = 0 \\ &\Downarrow \\ \beta_{kj} &= 90^\circ \end{aligned} \quad (5.26)$$

où $k, j = 1 \dots N \quad , \quad k \neq j - 3d \quad , \quad d = 0 \dots (\frac{N}{3} - 1)$.

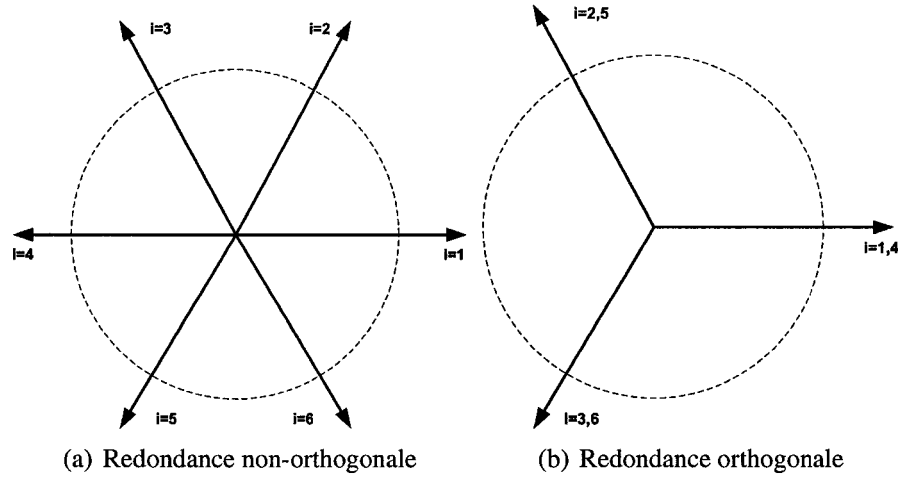


Figure 25 Projection des vecteurs directeurs sur le plan horizontal, cas pour 6 capteurs un axe

Ainsi, les configurations orthogonale et non-orthogonale de capteurs possèdent le même volume d'information. En effet, avec les relations 5.18 et 5.20, il est facile de démontrer que le volume d'information est seulement une fonction du nombre de capteur pour les configurations géométriques optimales, telles que celles présentées. Ce résultat est conforme avec le résultat obtenu par Sukkarieh [73] dans le cas particulier de la redondance non-orthogonale.

$$\begin{aligned}
 V &= N s^2 \theta c^4 \theta \sum_{i=1}^N c^2 \psi_i \sum_{i=1}^N s^2 \psi_i \\
 &= \frac{N^3}{27}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

5.1.3 Performance des configurations

D'un autre côté, la possibilité de détecter et d'isoler des fautes est fonction du nombre de triades qui peut être formé à partir de trois capteurs non-coplanaires. On voit donc que la détection et l'isolation de fautes avec une structure orthogonale peut nécessiter un nombre considérable de capteurs, si le pire des cas est utilisé pour la conception du système. La figure 26 compare les deux configurations de capteurs, avec le volume d'information en ordonnée, le nombre d'isolation de fautes en abscisse. Le nombre de capteurs nécessaire pour effectuer la tâche est indiqué sur la courbe de chaque configuration. Les configurations regroupant 6, 9 et 12 capteurs sont mises en évidence car elles contiennent un

nombre de capteurs qui peut être représenté autant par une configuration orthogonale que par une structure non-orthogonale. On remarque premièrement que pour une tâche donnée, le volume d'information est plus élevé pour la configuration orthogonale. Ce fait est lié aux nombres de capteurs supplémentaires nécessaire pour effectuer cette tâche. Par contre, pour un volume d'information donné, la structure non-orthogonale permet une plus grande isolation de fautes. Dans le meilleur des cas où il y a des fautes distribuées également sur

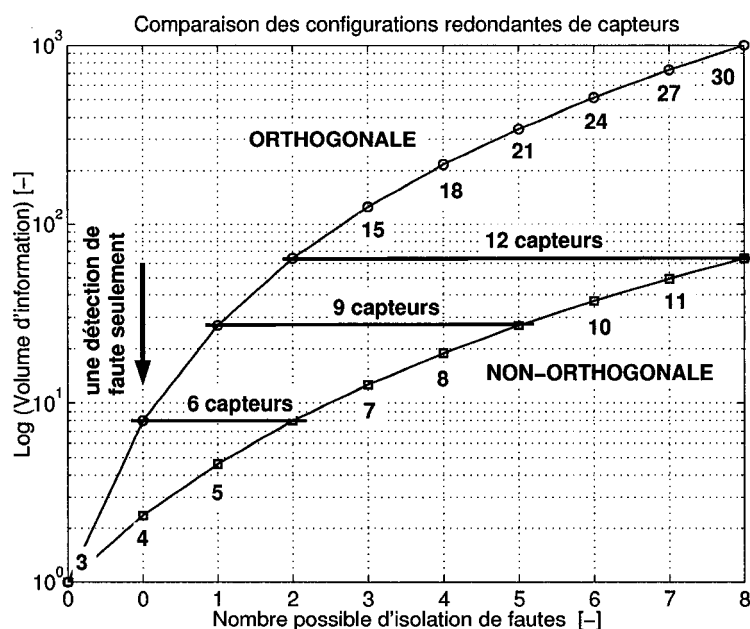


Figure 26 Comparaison des configurations : volume d'information disponible pour des tâches d'isolation spécifiques et en fonction du nombre de capteurs redondants

les trois axes de la structure orthogonale, le nombre de fautes pouvant être isolé est multiplié par trois par rapport au pire des cas. Dans le même ordre d'idée, les figures 27(a) et 27(b) illustrent la dégradation de la performance suite à l'isolation de fautes, selon les deux configurations et avec le meilleur et le pire des cas d'apparition de fautes. La dégradation de la performance est calculée comme le rapport entre le niveau d'information après et avant l'isolation des fautes.

Pour la configuration orthogonale, le pire des cas est représenté par le cumul de fautes sur le même axe de mesure, tandis que le meilleur des cas répartit les fautes également entre les axes. Pour la configuration non-orthogonale, le pire des scénarios est la faute de cap-

teurs adjacents un à l'autre, alors que le meilleur des cas suppose des fautes symétriques.

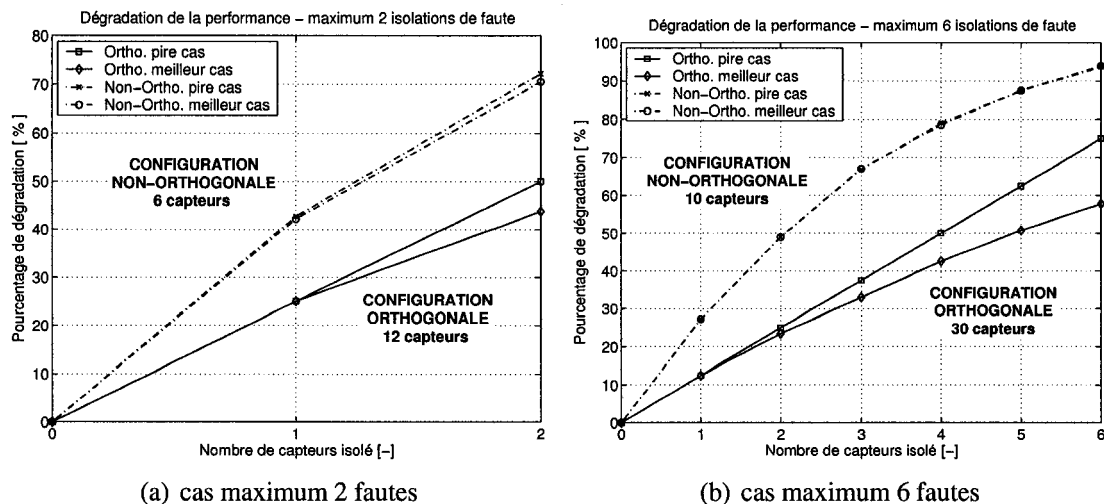


Figure 27 Pourcentage de dégradation de la performance suite à l'isolation de fautes

À partir des trois dernières figures, l'approche orthogonale semble posséder plusieurs avantages. De un, la quantité d'information pour une tâche donnée est supérieure à la configuration non-orthogonale. Ce fait n'est pas surprenant puisque le nombre de capteurs est supérieure dans la configuration orthogonale. De plus, la perte relative d'information avec l'isolement d'une faute est moins importante dans le cas de la structure orthogonale. Le nombre de capteurs utilisé est principalement la cause de cette moindre diminution de performance. Quoique la structure non-orthogonale est moins sujette à des variations de performance entre le meilleur et le pire des cas d'isolation de fautes (à cause de la distribution spatiale des capteurs), il demeure néanmoins que la dégradation des performances est plus importante. Ainsi, la performance globale de la structure orthogonale semble la privilégier pour l'utilisation des capteurs bas de gamme dans les SNI.

5.1.4 Coût associé aux configurations

L'argument le plus souvent utilisé contre la structure orthogonale est le nombre de capteurs, influençant à la hausse le coût de cette configuration. Le coût avancé est alors seulement lié aux nombres de capteurs supplémentaires. La figure 28 montre l'évolution relative du coût de la structure orthogonale par rapport à la structure non-orthogonale, pour une tâche donnée. Au lieu de prendre seulement en compte le nombre de capteurs, un coût

relatif à la complexité géométrique est introduit. Le coût relatif est donné par l'équation

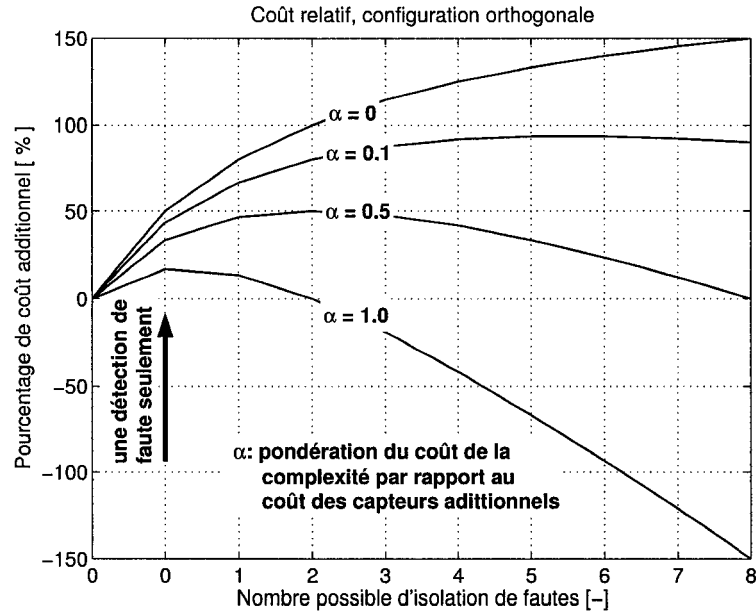


Figure 28 Augmentation relative du coût de la structure orthogonale par rapport à la structure non-orthogonale, pour des tâches spécifiques d'isolation de fautes

5.28, où α est un paramètre donnant l'importance qualitative de la complexité dans la formulation du coût.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Coût relatif} \\ \text{additionnel} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Coût relatif associé aux} \\ \text{capteurs supplémentaires} \end{array} \right) - \alpha \left(\begin{array}{c} \text{Coût relatif associé à} \\ \text{la complexité mécanique} \end{array} \right) \quad (5.28)$$

Ainsi, $\alpha = 0$ implique que l'augmentation du coût est seulement lié aux capteurs additionnels. Par contre, il peut être admis que la complexité de la structure non-orthogonale implique un coût non-négligeable, et il doit être pris en compte dans l'analyse de coût. Quoique purement qualitatif, l'influence de la complexité illustrée à la figure 28 est notable. De plus, le facteur α peut être assimilé à la diminution du coût unitaire des capteurs. En effet, même si le coût des capteurs diminue, la complexité géométrique reste la même. Ainsi, le coût relatif de la structure orthogonale diminue par rapport à la structure non-orthogonale pour une diminution du coût des capteurs.

L'étude de la redondance effectuée jusqu'à maintenant suppose que les capteurs utilisés sont relativement précis, où seulement du bruit de mesure constitue l'erreur de mesure. La section suivante présente une solution à la redondance de capteurs bas de gamme, incluant des erreurs autre que le bruit de mesure.

5.2 Intégration de la redondance de capteurs bas de gamme au SNI

Tel que souligné à la section 1.3 du chapitre 1, l'intégration de la redondance de capteurs bas de gamme dans les SNI pose un défi. En effet, l'approche conventionnelle considère simultanément toutes les mesures, élimine par test statistique celles jugées défailtantes, calcule une mesure sûre et utilise cette mesure pour le traitement dans les algorithmes de navigation (voir figure 9 pour référence). Les erreurs contenues dans les capteurs bas de gamme rendent cette approche peu intéressante car des fausses alarmes peuvent survenir. De plus, le gain associé à la diminution de la variance du bruit est annulé par la nature non-aléatoire des autres erreurs. En effet, il est intéressant de visualiser théoriquement l'impact des erreurs sur la fusion des capteurs.

5.2.1 Impact des erreurs des capteurs dans la fusion des mesures

De façon intuitive, plus de mesures impliquent une diminution de l'incertitude, et donc une meilleure performance globale du système. En prenant seulement l'équation de mesure dans un axe, on peut analyser le bénéfice d'utiliser plusieurs mesures d'un même phénomène. En effet, soit la valeur moyenne de trois échantillons pris à un même instant, et il est possible de calculer la variance résultante :

$$m(k) = \frac{z_1(k) + z_2(k) + z_3(k)}{3} \quad (5.29)$$

$$E\{m^2\} = \frac{1}{9}E\{(z_1 + z_2 + z_3)^2\} \quad (5.30)$$

$$= \frac{1}{9}E\{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3\} \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{9}(E\{z_1^2\} + E\{z_2^2\} + E\{z_3^2\}) \quad (5.32)$$

$$= \frac{1}{9}(\sigma_{v_1}^2 + \sigma_{v_2}^2 + \sigma_{v_3}^2 + 3\sigma_{w_c}^2) \quad (5.33)$$

$$= \frac{\sigma_v^2 + \sigma_{w_c}^2}{3} \quad (5.34)$$

À l'équation 5.30, l'indice k a été retiré pour faciliter l'écriture. L'équation 5.31 développe le carré de la somme. L'équation 5.32 retient l'hypothèse que les variables aléatoires gaussiennes ne sont pas corrélées, ce qui implique que la variance de leurs produits croisés est nulle. La variable z_i est composée d'une variable déterministe et d'une stochastique. Ainsi, les équations 5.33 et 5.34 est l'application directe de la définition de ces variables, en supposant que les variances des signaux sont de valeurs identiques. Ainsi, on peut voir que l'ajout de mesures redondantes diminue la variance de la moyenne de ces mesures, par un facteur égal au nombre de ces mesures. L'écart de la mesure diminue donc avec la racine carrée du nombre de mesures, tendant de façon asymptotique vers zéro dans le cas idéal.

De façon à appliquer ce premier résultat pour les SNI, une première comparaison sera faite entre la redondance de trois capteurs par axe par rapport à un capteur par axe, pour les trois axes du repère mobile B (redondance orthogonale de 9 capteurs). Pour mieux évaluer le comportement théorique en première instance, seulement une erreur de bruit est ajoutée aux mesures exactes des capteurs. En faisant plusieurs simulations avec les mêmes paramètres (simulation de Monte-Carlo), il est possible d'évaluer la variance réelle des erreurs sur la solution de navigation. Les figures 29(a) et 29(b) montrent la variance réelle calculée par simulation de Monte-Carlo, pour l'erreur de vitesse et l'erreur d'orientation, où une perte du signal GPS à lieu pendant 30 secondes.

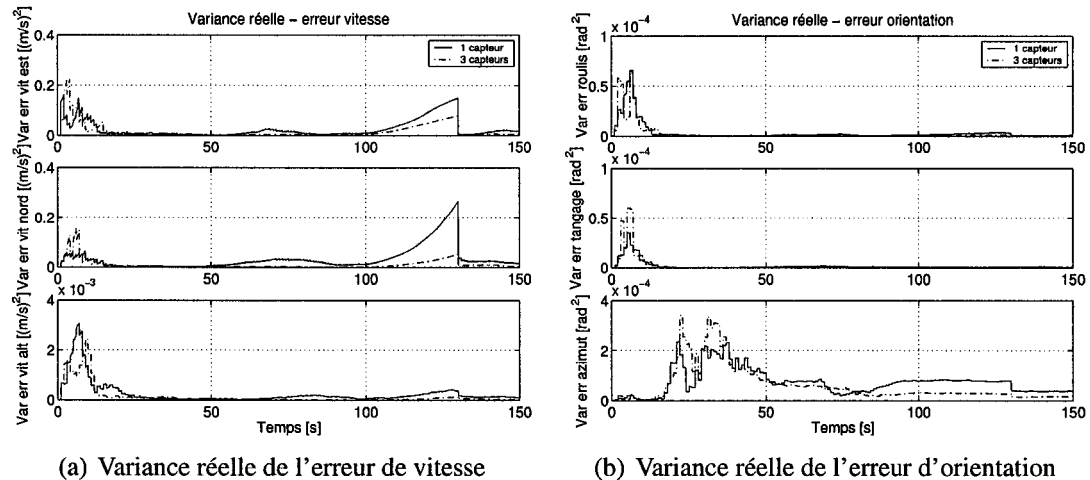


Figure 29 Variance réelle de l'erreur, avec uniquement du bruit blanc dans les mesures des capteurs

De façon théorique, l'estimation de la variance d'erreur de vitesse pour le cas avec 3 capteurs est plus petite que la variance avec seulement 1 capteur, et les figures précédentes illustrent ce fait. Par contre, ces simulations ne faisaient intervenir que du bruit de mesure dans les capteurs, et il est clair que ce cas est très optimiste, surtout avec des capteurs bas de gamme.

En ajoutant un biais dans les capteurs d'accélération (10 mg) et de vitesse angulaire (100 deg/h), on peut visualiser l'impact des erreurs de biais sur le calcul de la variance. On remarque, à partir des figures 30(a) et 30(b), que l'amélioration liée à la redondance de la performance en temps de perte de signal GPS n'est plus conservée lorsque les erreurs des capteurs ne sont pas identifiées. Ainsi, pour que la redondance des capteurs soient efficaces, il faut identifier les biais et ce sujet est traité à la section suivante.

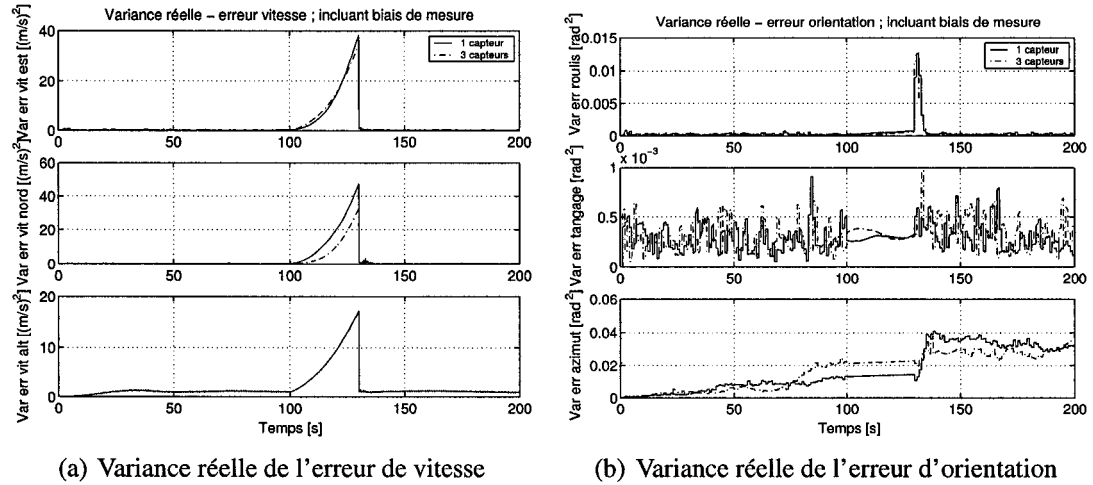


Figure 30 Variance réelle de l'erreur, avec du bruit blanc et un biais dans les mesures des capteurs

Pour les approches d'intégration de la redondance qui seront exposées, le vecteur de mesures redondantes sera donné par :

$$\vec{m}_k^x = \mathcal{H}_{x, \text{redon}} [{}^I \vec{x}_B]_B + \delta \vec{x}_k + \vec{v}_k^x \quad (5.35)$$

où $\vec{m}_k^x \in \mathbf{R}^N$ est l'ensemble des N mesures redondantes de l'accélération ($x = a$) ou de la vitesse angulaire ($x = \omega$). L'équation inclue également la matrice de projection $\mathcal{H}_{x, \text{redon}}$ de la variable à mesurer « x » sur les axes des N capteurs redondants, ainsi que le vecteur d'erreur $\delta \vec{x}$ et le bruit de mesure $\vec{v}_k^x$ pour les N capteurs de chaque variable à mesurer.

5.2.2 Approche indirecte

Tel que vu à la section 2.4 du chapitre 2, l'approche indirecte utilise un modèle d'erreur du SNI pour corriger la solution des équations de mouvement. En interprétant l'équation 2.70 dans l'environnement de la redondance indirecte, les équations différentielles du modèle d'erreur pour la redondance indirecte sont données par :

$$\delta\dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, [\hat{a}_B]_B) \delta\mathcal{N} + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} [{}^I\vec{\delta a}_B]_B \\ [{}^I\vec{\delta \omega}_B]_B \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$\dot{\vec{\delta a}}(t) = \vec{w}_{\delta a}(t) \quad (5.37)$$

$$\dot{\vec{\delta \omega}}(t) = \vec{w}_{\delta \omega}(t) \quad (5.38)$$

où $[\hat{a}_B]_B$ est la meilleure estimation de l'accélération et $[{}^I\vec{\delta x}_B]_B \in \mathbf{R}^3$ est l'erreur des capteurs, mais interprétée selon les trois axes orthogonaux du repère B du véhicule, alors que $\vec{\delta x}(t) \in \mathbf{R}^N$ est le vecteur des erreurs de chaque capteur ($x = a$ ou ω).

En utilisant le même résultat qu'à la section 5.1 où l'estimation optimale d'une mesure redondante est donnée, on peut déduire que

$$[\hat{a}_B]_B = \mathcal{H}_a^* \vec{m}_k^a \quad (5.39)$$

$$[{}^I\vec{\delta x}_B]_B = \mathcal{H}_x^* \vec{\delta x} \quad (5.40)$$

où $\mathcal{H}_x^* = (\mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T \mathcal{H}_{x,\text{redon}})^{-1} \mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T$, en supposant une variance du bruit de mesure égale pour tous les capteurs. Ainsi, les équations différentielles représentant le modèle d'état de la redondance indirecte sont données aux équations 5.41 à 5.43.

$$\delta\dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, \mathcal{H}_a^* \vec{m}_k^a) \delta\mathcal{N} + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} \mathcal{H}_a^* \vec{\delta a} \\ \mathcal{H}_\omega^* \vec{\delta \omega} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

$$\dot{\vec{\delta a}}(t) = \vec{w}_{\delta a}(t) \quad (5.42)$$

$$\dot{\vec{\delta \omega}}(t) = \vec{w}_{\delta \omega}(t) \quad (5.43)$$

où

$$\mathcal{F}^{\text{err}} = \begin{pmatrix} [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [{}^N C_B S \{ \mathcal{H}_a^* \vec{m}_k^a \} {}^N C_B]_{3 \times 3} & [{}^N C_B \mathcal{H}_a^*]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \\ [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [{}^N C_B \mathcal{H}_\omega^*]_{3 \times N} \\ [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

$$\mathcal{G}^{\text{err}} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -{}^N C_B \end{bmatrix}_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \\ [0]_{3 \times 3} & \begin{bmatrix} {}^N C_B \end{bmatrix}_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \\ [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times 3} & [I]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times 3} & [0]_{N \times N} & [I]_{N \times N} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Tout comme l'approche indirecte de l'intégration des SNI, le modèle de mesure est fonction des mesures externes et de la solution des équations de mouvement, de façon à calculer l'erreur de la solution du SNI.

$$\mathcal{Y}_k^{\text{ext,ind}} = \mathcal{H}_{\text{gps}}^{\text{ind}} \delta \mathcal{N}_{k|k} + \mathcal{V} = \mathcal{H}^{\text{ext}}(\mathcal{N}_k) - \mathcal{M}_k \quad (5.46)$$

où

$$\mathcal{H}_{\text{gps}}^{\text{ind}} = \begin{pmatrix} [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \\ [0]_{3 \times 3} & [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times N} & [0]_{3 \times N} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

5.2.2.1 Mesure des erreurs des capteurs : application du vecteur de parité

En plus de la mesure externe, il est possible d'obtenir une mesure de l'erreur des capteurs en utilisant l'espace de parité associé à la matrice de projection $\mathcal{H}_{x,\text{redon}}$, tel qu'introduit

par Ray [54]. Le vecteur de parité $\vec{p}_k^x \in \mathbf{R}^l$ est défini tel que

$$\vec{p}_k^x = V^x \vec{m}_k^x \quad (5.48)$$

alors que la matrice V^x est déterminée par la relation

$$V_{(l \times N)}^x \mathcal{H}_{(N \times 3)}^{x, \text{redon}} = 0_{(l \times 3)} \quad (5.49)$$

La dimension de $\vec{p}_k^x$ est égale à $l = N - n$, avec $n = 3$ pour notre cas (espace à trois dimensions), donnant également la dimension du noyau de l'espace définie par les vecteurs colonnes de $\mathcal{H}^{x, \text{redon}}$.

En substituant l'équation 5.35 dans l'équation 5.48, et en utilisant la relation 5.49, le vecteur de parité représente en fait des relations linéaires entre les erreurs des capteurs, et indique la cohérence entre les mesures redondantes.

$$\begin{aligned} \vec{p}_k^x &= V^x \vec{m}_k^x \\ &\Downarrow \text{Équation 5.35} \\ &= V^x \left(\mathcal{H}_{x, \text{redon}} [{}^I \vec{x}_B]_B + \delta \vec{x}_k + \vec{v}_k^x \right) \\ &\Downarrow \text{Équation 5.49} \\ &= V^x \delta \vec{x}_k + \vec{\epsilon}_k^x \end{aligned} \quad (5.50)$$

avec $E[\vec{\epsilon}_k^x (\vec{\epsilon}_j^x)^T] = V^x R_k^x (V^x)^T \delta_{kj}$ et R_k^x la matrice de covariance des erreurs de mesure $\vec{v}_k^x$.

Le nombre de ligne de V^x (dimension de $\vec{p}_k^x$) est de $l = N - n$ car c'est le nombre maximum de vecteurs lignes linéairement indépendants. Toutes lignes supplémentaires dans la matrice V^x , respectant la relation 5.49, sera linéairement dépendante des autres lignes. Dans le contexte du filtre de Kalman, cette propriété rend le filtre inopérant à cause de l'inversion de la matrice $[HP_{k|k-1}H^T + R_k]^{-1}$ dans le calcul du gain de Kalman (voir annexe 1.2). Ainsi, que ce soit pour la tâche de détection et d'isolation de fautes, ou pour la tâche d'identification des erreurs, le vecteur de parité est le même.

Par exemple, pour neufs capteurs orthogonaux, l'équation 5.50 donnerait :

$$\begin{aligned}\vec{p}_k^x &= V^x \vec{\delta x}_k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_k^{x1} \\ \delta x_k^{x2} \\ \delta x_k^{x3} \\ \delta x_k^{y1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{z3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, de façon générale, le modèle de mesure peut être augmenté des mesures suivantes :

$$\mathcal{Y}_k^{x,\text{parite},\text{ind}} = V^x \vec{\delta x}_k + \vec{\epsilon}_k^x = V^x \vec{m}_k^x \quad (5.51)$$

ou de façon plus générale :

$$\mathcal{Y}_k^{\text{parite},\text{ind}} = \mathcal{H}_{\text{parite}}^{\text{ind}} \delta \mathcal{N}_{k|k} + \mathcal{V}_{\text{parite}} = \mathcal{P}_k \quad (5.52)$$

où $\mathcal{P}_k$ est l'ensemble des vecteurs de parité augmenté, $\mathcal{V}_{\text{parite}}$ est l'ensemble des bruit de mesure associée et

$$\mathcal{H}_{\text{parite}}^{\text{ind}} = \begin{pmatrix} [0]_{l \times 3} & [0]_{l \times 3} & [0]_{l \times 3} & [V_{\text{ident}}^a]_{l \times N} & [0]_{l \times N} \\ [0]_{l \times 3} & [0]_{l \times 3} & [0]_{l \times 3} & [0]_{l \times N} & [V_{\text{ident}}^\omega]_{l \times N} \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

La figure 31 illustre l'approche indirecte de la redondance, où la fonction de détection et d'isolation de fautes est illustrée en trait pointillé.

5.2.3 Discussion

Le tableau VII résume les modèles utilisés par le filtre de Kalman pour les approches de redondance standard et indirecte.

La deuxième approche, indirecte, permet d'identifier les erreurs des capteurs. Par contre, de part la dimension du vecteur de parité qui augmente avec le nombre de capteurs redondants, l'implantation en temps-réel peut devenir problématique.

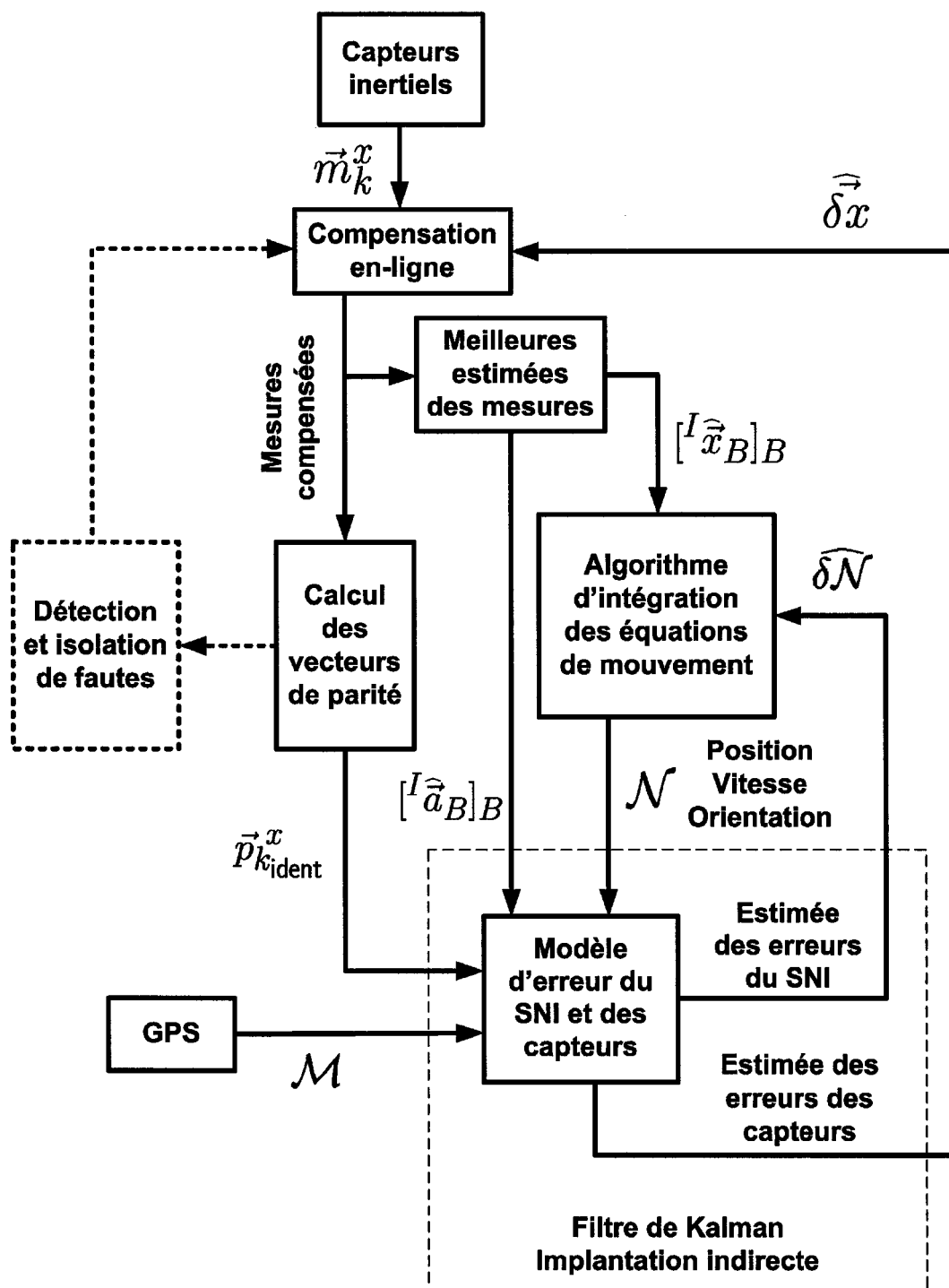


Figure 31 Approche indirecte de la redondance

Tableau VII

Comparaison des approches de la redondance

Modèles	Redondance standard	Redondance indirecte
Système	$\delta \dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, \mathcal{H}^* \vec{m}_k^a) \delta \mathcal{N} \\ + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} [I \delta a_B]_B^{\text{INS}} \\ [I \delta \omega_B]_B^{\text{INS}} \end{pmatrix}$	$\delta \dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, \mathcal{H}^* \vec{m}_k^a) \delta \mathcal{N} \\ + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} \mathcal{H}^* \vec{\delta a} \\ \mathcal{H}^* \vec{\delta \omega} \end{pmatrix}$ $\vec{\delta a}(t) = \vec{w}_{\delta a}(t)$ $\vec{\delta \omega}(t) = \vec{w}_{\delta \omega}(t)$
Mesure	$\mathcal{Y}_k^{\text{ext,ind}} = \mathcal{H}^{\text{ind}}(\delta \mathcal{N}_{k k}, \mathcal{V}) \\ = \mathcal{H}^{\text{ext}}(\mathcal{N}_k) - \mathcal{M}_k$	$\mathcal{Y}_k^{\text{ext,ind}} = \mathcal{H}^{\text{ind}}(\delta \mathcal{N}_{k k}, \mathcal{V}) \\ = \mathcal{H}^{\text{ext}}(\mathcal{N}_k) - \mathcal{M}_k$ $\mathcal{Y}_k^{a,\text{indir}} = V^a \vec{\delta a}_k + \vec{\epsilon}_k^a = \vec{p}_k^a$ $\mathcal{Y}_k^{\omega,\text{indir}} = V^\omega \vec{\delta \omega}_k + \vec{\epsilon}_k^\omega = \vec{p}_k^\omega$
Autres	$\mathcal{H}_x^* = (\mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T \mathcal{H}_{x,\text{redon}})^{-1} \mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T$	$\mathcal{H}_x^* = (\mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T \mathcal{H}_{x,\text{redon}})^{-1} \mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T$ $V^x \mathcal{H}_{x,\text{redon}} = 0$

Le temps de calcul associé au pire cas du filtre de Kalman, à savoir lors des phases combinées de prédiction/correction, peut être évalué. Le temps de calcul est théoriquement associé aux nombres de multiplications à effectuer pour chacune des tâches du filtre de Kalman. Soit n la dimension du vecteur d'état du système, et m la dimension du vecteur de mesures, le nombre de multiplications pour les phases du filtre de Kalman peut être évalué comme suit :

$$\text{Phase de prédiction} : \text{Nb mult} = 4n^3 \quad (5.54)$$

$$\text{Phase de correction} : \text{Nb mult} = 4n^2m + 2m^2n + m^3 \quad (5.55)$$

Le tableau VIII résume les dimensions des vecteurs pour chacune des phases. Pour obtenir le nombre de multiplications total, le résultat de la phase de prédiction doit être additionné au résultat de la phase de correction appropriée. La phase « correction GPS » représente la mesure du GPS uniquement. La phase « correction GPS + parité » représente le cas de la redondance indirecte où l'ensemble des vecteurs de parité sont utilisés dans l'algorithme, alors la phase « correction GPS + parité segmentée » utilise la particularité que la matrice V^x possède plusieurs éléments nuls. Ainsi, tel que représenté à l'équation 5.56, la matrice peut être segmentée en plusieurs sous-matrices, réduisant la quantité de multiplications.

$$\vec{p}_k^x = (V^x)_{(l \times 3N)} \begin{pmatrix} \delta x_k^{x1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{xN} \\ \delta x_k^{y1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{yN} \\ \delta x_k^{z1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{zN} \end{pmatrix}_{(3N \times 1)} = \begin{bmatrix} (V^x)_{(\frac{l}{3} \times N)}^x \begin{pmatrix} \delta x_k^{x1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{xN} \end{pmatrix}_{(N \times 1)} \\ (V^x)_{(\frac{l}{3} \times N)}^y \begin{pmatrix} \delta x_k^{y1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{yN} \end{pmatrix}_{(N \times 1)} \\ (V^x)_{(\frac{l}{3} \times N)}^z \begin{pmatrix} \delta x_k^{z1} \\ \vdots \\ \delta x_k^{zN} \end{pmatrix}_{(N \times 1)} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

La figure 32 reprend les résultats sous forme de graphique, avec en abscisse le nombre total de capteurs dans le système inertiel. Le temps de calcul pour la phase de correction (incluant la phase de prédiction) est représenté sur l'ordonnée de la figure, en milliseconde, et il est basé sur les performances d'un processeur Pentium Mobile 266MHz, avec 266 MIPS (Mega Instruction per Second) et avec l'hypothèse qu'une multiplication est effectuée en une instruction. Le temps de calcul ne prend pas en considération les autres instructions. L'estimation du temps de calcul sera comparée au vrai temps de calcul dans le chapitre des expérimentations, et devrait donner une meilleure évaluation des possibilités d'implantation en temps-réel.

Sur cette même figure, on peut voir que le temps de calcul pour l'approche indirecte avec matrice segmentée est évidemment moindre que l'approche indirecte classique. De plus, si les erreurs des capteurs dans l'approche indirecte peuvent être évaluées à partir des mesures GPS uniquement (sans la mesure du vecteur de parité étendu), la performance de cette approche par rapport à l'approche directe est d'autant plus importante.

Tableau VIII

Évaluation de n et m en fonction de N pour les phases du filtre de Kalman

Phases	Redondance standard	Redondance indirecte
Prédiction	$n = 9$	$n = 9 + 2N$
Correction GPS	$n = 9$ $m = 6$	$n = 9 + 2N$ $m = 6$
Correction GPS + parité étendu		$n = 9 + 2N$ $m = 2l + 6$
Correction GPS + parité étendu segmentée		$n = 9 + 2N$ $m_{GPS} = 6$ $m_i = \frac{l}{3}$ $i = 1 \dots 2N$

5.3 Conclusion préliminaire

Ce chapitre sur la redondance des capteurs bas de gamme a illustré deux nouvelles approches. Premièrement, il a été prouvé que le volume d'information ne dépend pas de la configuration des capteurs (en autant qu'elles soient optimales), mais seulement du nombre de capteurs. De plus, en exposant la perte d'information avec l'isolation de fautes pour les configurations orthogonale et non-orthogonale, et une nouvelle approche du coût des systèmes, l'approche orthogonale mérite une attention dans la conception de systèmes redondants.

De plus, l'intégration des capteurs redondants dans l'environnement des systèmes de navigation inertielle nécessite l'identification des erreurs. Les approches standard et indirecte de la redondance furent comparées théoriquement en exposant leur complexité respective. Une évaluation expérimentale doit par contre être effectuée pour déterminer la faisabilité

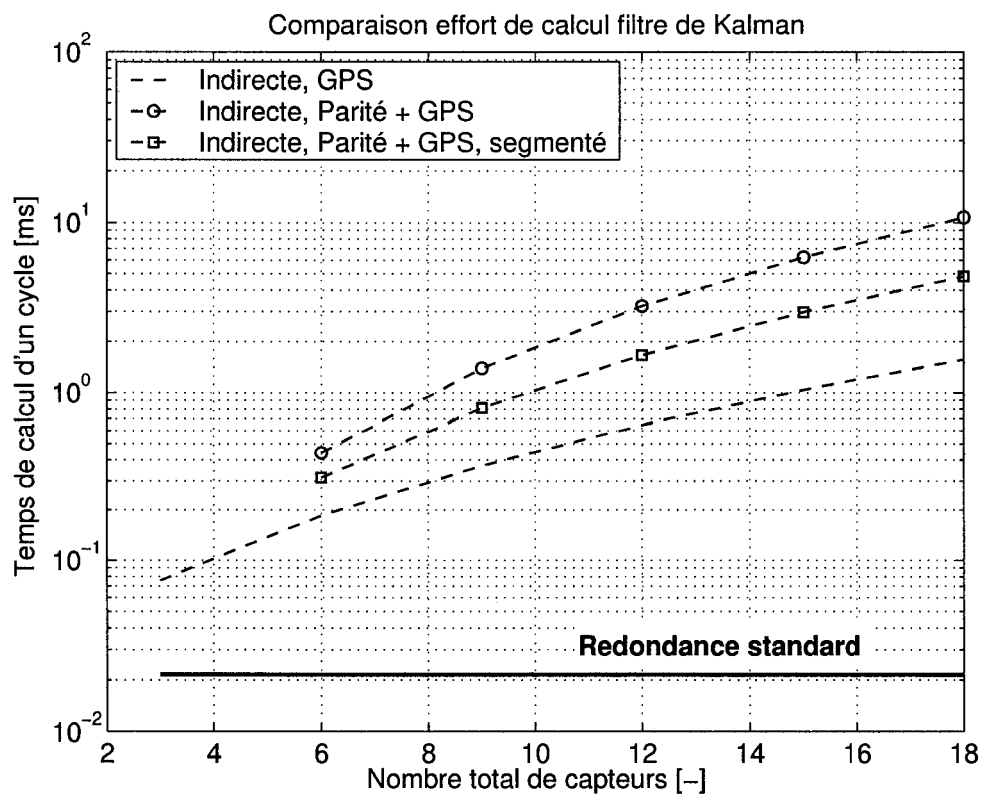


Figure 32 Estimation du temps de calcul d'un cycle du filtre de Kalman pour différentes approches de redondance, basé sur les performances d'un processeur Pentium Mobile 266 MHz

en temps-réel des algorithmes, en plus de la possibilité d'identifier réellement les erreurs des capteurs redondants. Le chapitre 7 couvre cet aspect.

CHAPITRE 6

IMPLANTATION DES ALGORITHMES : SIMULATION ET PROTOTYPAGE RAPIDE

Tout développement en ingénierie utilise une chaîne d'actions représentée par la figure 33. À partir de spécifications, le concept théorique est tout d'abord établi. Par la suite, l'analyse et la simulation des concepts sont effectuées pour valider les hypothèses et s'assurer que les spécifications sont rencontrées. L'analyse théorique des algorithmes dans les SNI est particulièrement difficile, de part leur non-linéarité et l'interdépendance de plusieurs systèmes. Ainsi, l'étape de simulation est nécessaire dans le processus de conception pour valider les algorithmes et évaluer leur performance. Par la suite, le concept développé peut être transposé dans une forme exécutable en temps-réel, et un prototype en résulte. Des tests et vérifications avec le produit réel permettent d'évaluer à nouveau la rencontre des spécifications, et des modifications peuvent être apportées en conséquence.

En ce qui concerne les SNI avec capteurs bas de gamme et MEMS, l'expérimentation est une partie essentielle de la conception car les caractéristiques très complexes des erreurs des capteurs rendent leur simulation difficile. Néanmoins, la simulation des algorithmes constitue une étape essentielle. Également, le simulateur doit être assez polyvalent pour effectuer un post-traitement de données réelles en provenance de capteurs. Ces fonctionnalités seront décrites dans les prochaines sections.

Excluant les simulateurs privés, le seul simulateur commercial (et abordable, autour de 1500\$ CND) disponible sur le marché est constitué de fichiers script Matlab, par la compagnie GPSofNav [78]. Quoique certains simulateurs sont rapportés dans la littérature, comme le NAVPACK [79], il est de l'avis de l'auteur que seulement un simulateur employant le logiciel Simulink a été introduit jusqu'à maintenant (Eck [80]). Les simulateurs conçus dans l'environnement Simulink devraient devenir de plus en plus présents dans la simulation de systèmes, incluant les systèmes inertiels. En effet, la modularité et l'affichage graphique rend facile l'amélioration du simulateur et facilite l'apprentissage des nouveaux programmeurs, tel que souligné par Otter [81]. De plus, l'intérêt de Simulink comme environnement de simulation est augmenté par la possibilité de prototypage rapide, avec les outils tels que « Real-Time Workshop (RTW) » et « xPC Target » de la compagnie Mathworks (ou tout autre environnement temps-réel compatible). Ce processus de conception (simulation et test en temps-réel par prototypage rapide) réduit le délai entre

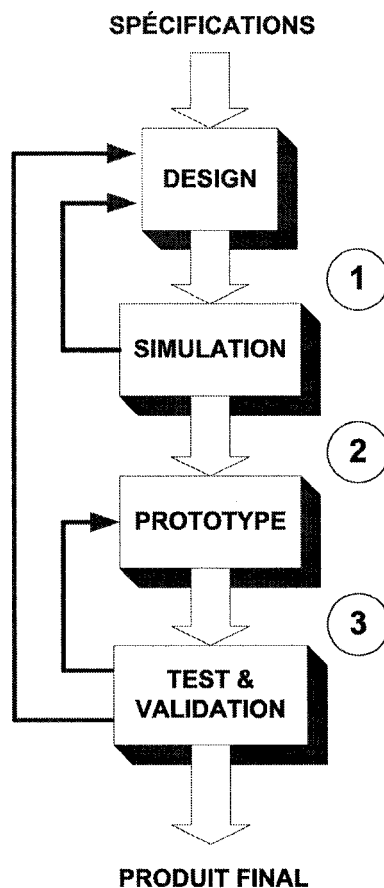


Figure 33 Étapes de conception

la validation des algorithmes et l'implantation en temps-réel, et ainsi réduit les coûts de développement [82]. En effet, la transition « 2 » de la figure 33 peut se faire directement sans réécrire le code dans un langage de haut niveau (par exemple, le langage C).

En se référant encore à la figure 33, on peut admettre que les chapitres 2, 4 et 5 constituent les concepts à implanter, i.e. la phase de design. Le présent chapitre expose les deux phases subséquentes : la simulation et le prototypage rapide. Premièrement, la simulation des mesures inertielles sera expliquée. Cette étape est nécessaire lorsque des données réelles de capteurs ne sont pas disponibles. Par la suite, l'implantation des algorithmes de navigation dans Simulink (incluant l'intégration des équations de mouvement et le filtre de navigation) sera illustré, avec les problématiques et les façons de les résoudre. Finalement, les considérations pratiques pour le prototypage rapide et l'évaluation de la performance pour l'exécution en temps-réel seront illustrées.

6.1 Concept général du simulateur

La figure 34 illustre le concept du simulateur ¹. Premièrement, une trajectoire doit être conçue sur la base des connaissances du comportement général du véhicule. Par la suite, les mesures inertielles peuvent être générées, pour être par la suite additionnées à des erreurs et utilisées par l'algorithme de navigation. Étant donnée que les mesures idéales des capteurs pour une trajectoire donnée sont uniques, il s'avère logique d'effectuer la génération des mesures qu'une seule fois pour une trajectoire, et d'utiliser le résultat pour simuler les algorithmes autant de fois que nécessaire. Ainsi, le simulateur est divisé en deux parties : la simulation des mesures, et la simulation des algorithmes de navigation.

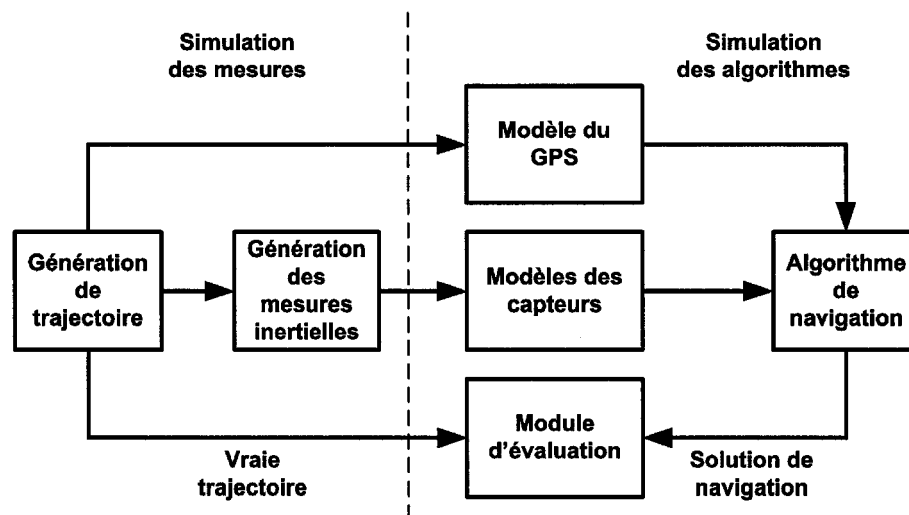


Figure 34 Concept global du simulateur

¹ Le concept du simulateur générique basé sur l'environnement de simulation Simulink fut présenté en plusieurs parties. Premièrement, le concept général du simulateur et les avantages du prototypage rapide (sections 6.2 et 6.4.1) ont été présentés à la conférence « 9th St-Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems », en 2002 [83]. Par la suite, le journal russe « Journal of Gyroscopy and Navigation » a demandé l'autorisation pour traduire l'article [84]. Finalement, l'évaluation de la performance du simulateur (une partie de la section 6.5) fut présentée à la conférence « 14th Symposium on Navigation of the Canadian Navigation Society », en 2003 [85], et également publié dans le journal « Canadian Aeronautics and Space Journal » [86].

6.2 Simulation des mesures inertielles

La simulation (ou la génération) des mesures inertielles est effectuée en deux étapes : une première étape hors-ligne, et une deuxième phase en-ligne utilisant certaines fonctions des algorithmes de navigation.

6.2.1 Variables hors-ligne

La trajectoire est premièrement basée sur une série de données représentant le comportement du véhicule, i.e. la vitesse « air » (vitesse du véhicule par rapport à la masse d'air), orientation, angle d'attaque et angle de glissement. Le tableau 6.2.1 montre un exemple de ces données, où les angles d'attaque et de glissement ont été omis sans perte de généralité, et représentent l'étape 1 et l'ensemble de variables No. 1 de la figure 35.

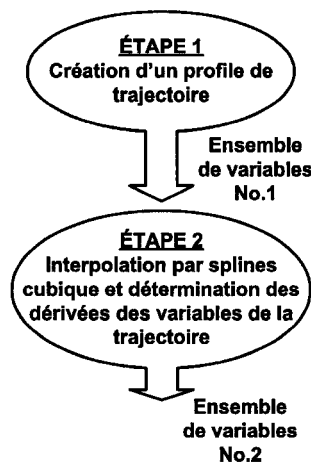


Figure 35 Création d'une trajectoire

Par la suite, le premier ensemble de variables est utilisé pour obtenir l'information sur la trajectoire à une période d'échantillonnage désirée, en utilisant des splines cubiques (étape No. 2 de la figure 35). Les splines cubiques sont également utilisées pour calculer la dérivée des variables. À cause de l'ordre d'interpolation des splines cubiques, la dérivée de ces splines est également une fonction continue. Donc, l'ensemble des variables No. 2 est composé des variables suivantes :

- Les angles d'Euler (ϕ, θ, ψ)
- La dérivée des angles d'Euler ($\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$)

Tableau IX

Exemple de données formant une trajectoire

Temps [s]	Azimut [deg]	Angle de tangage [deg]	Angle de roulis [deg]	Vitesse « air » [m/s]
0.0	45.0	0.0	0.0	0.0
1.0	45.0	0.0	0.0	5.0
2.0	45.0	0.0	0.0	10.0
14.0	45.0	0.0	0.0	70.0
15.0	45.0	0.0	0.0	75.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
181.0	45.0	9.5	0.0	76.2
182.0	45.0	9.0	0.0	77.5
198.0	45.0	4.5	0.0	97.5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- La vitesse « air » (V_a)
- La dérivée de la vitesse « air » ($\dot{V}_a$)
- Les angles d'attaque et de glissement, si applicable (α , β)
- La dérivée des angles d'attaque et de glissement, si applicable ($\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$)

6.2.2 Variables en-ligne

Après le calcul des variables hors-ligne, le module « Génération de trajectoire » (figure 36) utilise ces informations pour calculer des variables cinématiques qui seront ensuite utilisées dans la génération des mesures inertielles, commençant par la vitesse du véhicule dans le repère mobile B :

$$[{}^E\vec{v}_N]_B = [{}^E\vec{v}_B]_B = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_a \mathbf{c}\beta \mathbf{c}\alpha \\ V_a \mathbf{s}\beta \\ V_a \mathbf{c}\beta \mathbf{s}\alpha \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

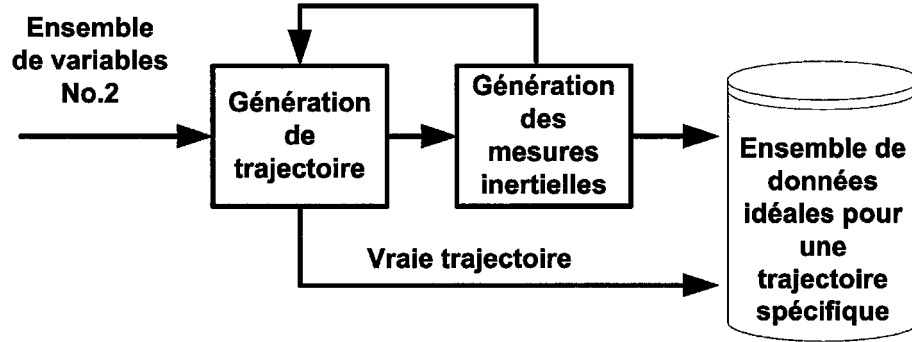


Figure 36 Schéma-bloc de la génération des mesures inertielles idéales

La vitesse dans le repère de navigation N est alors calculée à partir de la vitesse dans le repère mobile

$$[{}^E\vec{v}_N]_N = {}^B C_N^T [{}^E\vec{v}_N]_B \quad (6.2)$$

où ${}^B C_N = f(\phi, \theta, \psi)$ est la matrice des cosinus directeurs, introduite à la section 2.6 du chapitre 2.

La dérivée de la vitesse dans le repère de navigation est également nécessaire au calcul des mesures inertielles.

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_N]_N = {}^B \dot{C}_N^T [{}^E\vec{v}_N]_B + {}^B C_N^T [{}^E\dot{\vec{v}}_N]_B \quad (6.3)$$

$$= {}^B C_N^T S\{[{}^N\vec{\omega}_B]_B\} [{}^E\vec{v}_N]_B + {}^B C_N^T [{}^E\dot{\vec{v}}_N]_B \quad (6.4)$$

avec

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_N]_B = \begin{pmatrix} \dot{V}_a c\beta c\alpha - V_a \dot{\beta} s\beta c\alpha - V_a c\beta \dot{\alpha} s\alpha \\ \dot{V}_a s\beta + V_a \dot{\beta} c\beta \\ \dot{V}_a c\beta s\alpha - V_a \dot{\beta} s\beta s\alpha + V_a c\beta \dot{\alpha} c\alpha \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

L'équation 6.5 est obtenue en appliquant la dérivée en chaîne à l'équation 6.1 et avec $[{}^N\vec{\omega}_B]_B$ donné par l'équation 6.6.

$$[{}^N\vec{\omega}_B]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

6.2.2.1 Génération de la vitesse angulaire (mesure idéale des gyromètres)

La vitesse angulaire du repère mobile (B) par rapport au repère inertiel (I) mesurée par rapport au repère mobile $[^I\vec{\omega}_B]_B$ peut être décomposée comme suit :

$$[^I\vec{\omega}_B]_B = [^I\vec{\omega}_E]_B + [^E\vec{\omega}_N]_B + [^N\vec{\omega}_B]_B \quad (6.7)$$

$$= {}^B C_N {}^N C_E [^I\vec{\omega}_E]_E + {}^B C_N [^E\vec{\omega}_N]_N + [^N\vec{\omega}_B]_B \quad (6.8)$$

où les trois termes sont respectivement la vitesse de rotation de la terre $[^I\vec{\omega}_E]_E = [0 \ \omega_e \ 0]^T$, la vitesse de rotation du repère de navigation autour de la terre $[^E\vec{\omega}_N]_N$ (en anglais : transport rate) et la vitesse de rotation du mobile par rapport au repère de navigation $[^N\vec{\omega}_B]_B$.

La vitesse de rotation du repère de navigation autour de la terre a été présentée à la section 2.2 du chapitre 2. L'expression complète de $[^E\vec{\omega}_N]_N \equiv \vec{\rho}^N$ peut être obtenue dans le livre de Savage [87].

La vitesse de rotation du mobile par rapport au repère local est fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées. La matrice de propagation des angles d'Euler est déterminée selon la séquence des rotations élémentaires qui définissent les angles d'Euler, et est repris à l'équation 6.9.

$$[^N\vec{\omega}_B]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

6.2.2.2 Génération de l'accélération (mesure idéale des accéléromètres)

L'équation représentant l'accélération provient de l'inversion de l'équation de propagation de vitesse (équation 2.14 du chapitre 2).

$$[^I\vec{a}_B]_B = {}^B C_N [^I\vec{a}_B]_N \quad (6.10)$$

$$[^I\vec{a}_B]_N = [^E\dot{\vec{v}}_N]_N - [\vec{g}_p]_N + \left(S\{[^E\vec{\omega}_N]_N\} + 2S\{[^I\vec{\omega}_E]_N\} \right) [^E\vec{v}_N]_N \quad (6.11)$$

avec $[^I\vec{\omega}_E]_N$ et $[^E\vec{\omega}_N]_N$ obtenus à la section précédente. L'accélération est donc composée de l'accélération cinématique, l'accélération gravitationnelle telle que vue sur la terre et

l'accélération de coriolis. L'accélération gravitationnelle telle que vue sur la terre est composée, de façon indissociable, de l'attraction terrestre et de l'accélération centripète (où le vecteur ${}^E\vec{r}_N$ est le vecteur de position du centre de la terre à la position du véhicule).

$$[\vec{g}_p]_N = [\vec{g}]_N - {}^N C_E \left(S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_E\} [{}^E\vec{r}_N]_N \right) \quad (6.12)$$

avec $[\vec{g}]_N$ l'accélération causée par la masse de la terre. Ce terme peut être calculé de plusieurs façon. Pour plus de détails, se référer au livre de Chatfield [6] ou à l'article de Li [88].

6.2.2.3 Matrices de rotation

Finalement, les matrices ${}^B C_N$ et ${}^N C_E$ sont les mêmes que celles introduites au chapitre 2. La matrice ${}^B C_N$ est calculée directement à partir des angles d'Euler, alors que l'évolution de ${}^N C_E$ est calculé à partir de l'équation introduite à la section 2.2.3 du chapitre 2.

$${}^E \dot{C}_N = {}^E C_N S\{[{}^E\vec{\omega}_N]_N\} \quad (6.13)$$

$$[{}^E\vec{\omega}_N]_N = \text{fcn}([{}^E\vec{v}_N]_N) \quad (6.14)$$

Les mesures inertielles données par les équations 6.8 et 6.10 sont exemptes d'erreur et contiennent toute l'information reliée à la trajectoire sans aucune hypothèse simplificatrice. En effet, contrairement à ce que suppose Eck [80] dans son simulateur, la génération des mesures doit être la plus fidèle possible à la réalité, même si les capteurs employés par après dans la simulation des algorithmes ne sont pas assez précis pour mesurer toutes les subtilités. Les mesures représentent l'équivalent en terme de variable inertielle de la trajectoire cinématique suivie par le véhicule. Il est donc possible d'appliquer ces mesures pour la validation des algorithmes sans régénérer les mesures à nouveau.

6.3 Simulation des algorithmes

La simulation des algorithmes s'effectue à partir des mesures idéales générées précédemment. La figure 37 illustre la connection entre les différents blocs de simulation. Les mesures inertielles idéales sont additionnées à des erreurs dans le module « Modèle des capteurs », pour être ensuite utilisées dans l'algorithme de navigation. Les mesures idéales de position et de vitesse sont également utilisées par le module « Modèle du GPS », de façon à simuler les mesures effectuées par le récepteur de positionnement par satellites, et à être

également utilisées par les algorithmes de navigation. Finalement, la comparaison entre la solution de navigation fournit par les algorithmes et la trajectoire de référence simulée fournit une évaluation de la performance des algorithmes.

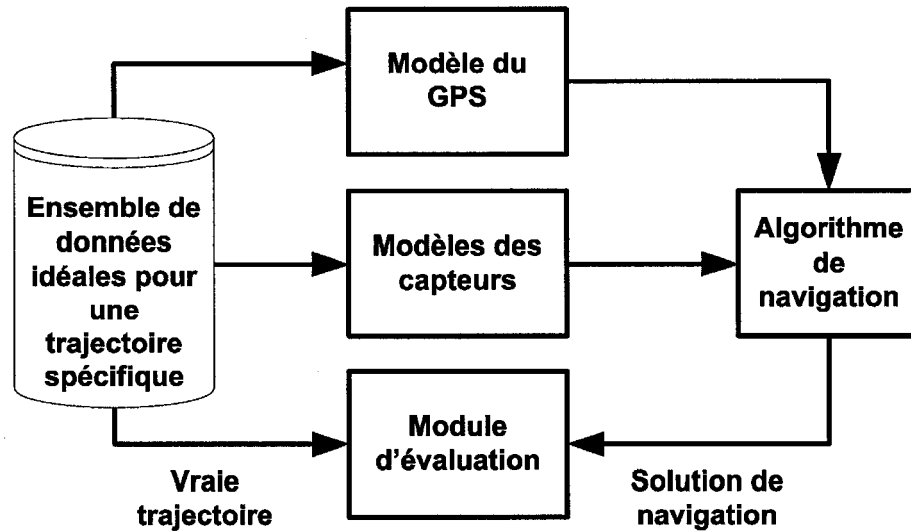


Figure 37 Schéma-bloc de la simulation des algorithmes de navigation

6.3.1 Modèle des capteurs

Le modèle des capteurs se base sur l'analyse faite au chapitre 3, répété ici pour faciliter la lecture.

$$\vec{X}_{\text{mes}} = (I + M_e)(M_a \vec{X}_{\text{vrai}} + \vec{\delta x} + \vec{\epsilon}) \quad (6.15)$$

où

$\vec{X}_{\text{mes}}$	=	Variable mesurée par le capteur [m/s^2] ou [rad/s]
$\vec{X}_{\text{vrai}}$	=	La vraie variable mesurée
M_e	=	Matrice de facteur d'échelle
M_a	=	Matrice d'alignement
$\vec{\delta x}$	=	Biais dans la mesure du capteur
$\vec{\epsilon}$	=	Bruit (erreur aléatoire) dans la mesure du capteur

Quoique le modèle d'erreur des capteurs utilisé dans le filtre de Kalman ne comporte pas tous ces paramètres, le modèle d'erreur donnant une mesure représentative de la réalité

devrait contenir les paramètres les plus importants, tels ceux exposés. Le bloc « Modèle des capteurs » de la figure 37 est illustré plus en détail à la figure 38, représentant le modèle Simulink pour les capteurs inertiels.

L'équation 6.15 représente la mesure résultante pour une triade orthogonale de capteurs, avec la matrice d'alignement M_a possédant les erreurs d'alignement dans les éléments autre que la diagonale principale. Pour prendre en compte la redondance des capteurs, la matrice d'alignement M_a doit être remplacée par une matrice de projection augmentée des erreurs d'alignement H telle que le vecteur unitaire de projection du capteur i est donné par l'équation 6.16.

$$\vec{h}_i^* = \begin{pmatrix} c(\theta_i + \delta\theta_i)c(\psi_i + \delta\psi_i) \\ c(\theta_i + \delta\theta_i)s(\psi_i + \delta\psi_i) \\ s(\theta_i + \delta\theta_i) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

où $\delta\theta_i$ et $\delta\psi_i$ sont les erreurs d'alignement en élévation et en azimut, respectivement (pour référence, voir figure 24, chapitre 5).

Pour représenter encore plus fidèlement le comportement réel, un bloc de saturation et de quantification peut être ajouté. La quantification ne se fait pas directement au niveau des capteurs, mais à la carte d'acquisition. Néanmoins, pour les besoins de la simulation, cette hypothèse est valable. Finalement, en première approximation, les erreurs des capteurs (facteur d'échelle, alignement et biais) ne sont pas simulées avec un comportement stochastique. Quoique ne représentant pas la réalité à ce niveau (car les capteurs bas de gamme présentent de fortes caractéristiques stochastiques), la simulation d'un comportement déterministe des erreurs est suffisante pour une évaluation des algorithmes proposés. Une modification du modèle des capteurs pour inclure ce type de comportement pourrait se faire aisément dans une étape d'amélioration du simulateur.

6.3.2 Modèle du GPS

Le système complet du GPS (signaux satellites, technologie des récepteurs, brouillage, etc) n'est pas simulé. Le GPS est modélisé à un haut niveau, où seulement la solution de navigation est donnée. Ainsi, la position réelle et la vitesse réelle sont additionnées à un bruit représentant l'erreur du GPS sur la position et la vitesse. Évidemment, le niveau de précision de la solution du GPS sur chacun des axes peut être modifié (la solution dans

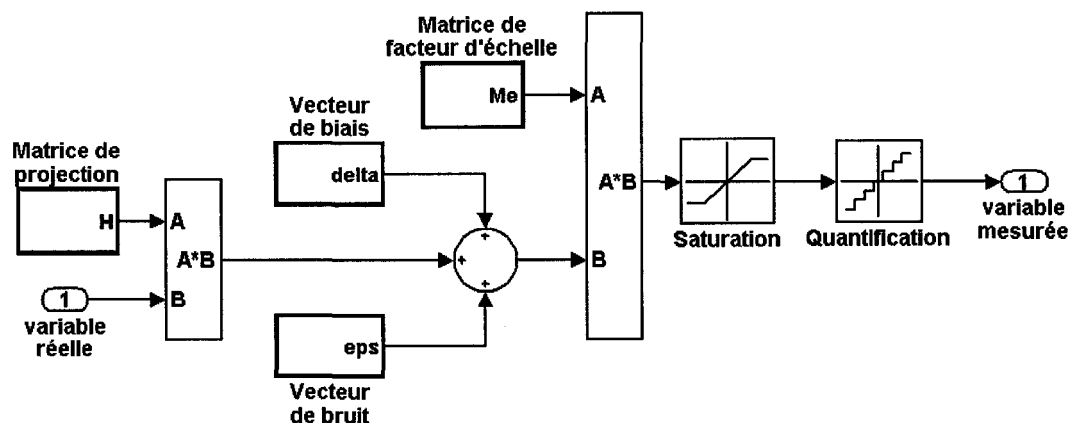


Figure 38 Modèle Simulink pour les capteurs

l'axe vertical est moins précise que dans le plan horizontal). La période de rafraîchissement des données GPS est modifiable, et il est possible de simuler des manquements de service (en anglais, « outage »). La solution de position du GPS est interprétée dans la convention UTM (Universal Transverse Mercator), très utilisée pour les applications à faible rayon d'action. Le bloc « Modèle GPS » de la figure 37 est illustré plus en détail à la figure 39, représentant le modèle dans l'environnement Simulink.

6.3.3 Algorithme de navigation

L'algorithme de navigation est l'implantation des sections 2.2 et 2.3 du chapitre 2. L'approche indirecte dans l'environnement Simulink est illustrée à la figure 40, et constitue la vue intérieure du bloc « Algorithme de navigation » de la figure 37. Dans cette approche, la solution des équations de mouvement est obtenue par intégration, alors que les erreurs de la solution sont évaluées par un filtre de navigation. Dans l'approche directe, seulement le filtre de navigation constitue l'algorithme de navigation. Les prochaines sous-sections détaillent l'implantation de ces deux blocs formant le cœur d'un système de navigation.

6.3.3.1 Intégration des équations de mouvement

L'intégration des équations de mouvement peut se faire de bien des façons. Durant les premiers temps de la navigation inertielle, les concepteurs devaient faire face à un choix entre la précision des calculs et la lourdeur des calculs pour l'implantation des algorithmes d'intégration. Au milieu des années 60, Savage [87, 89] a proposé un compromis : un

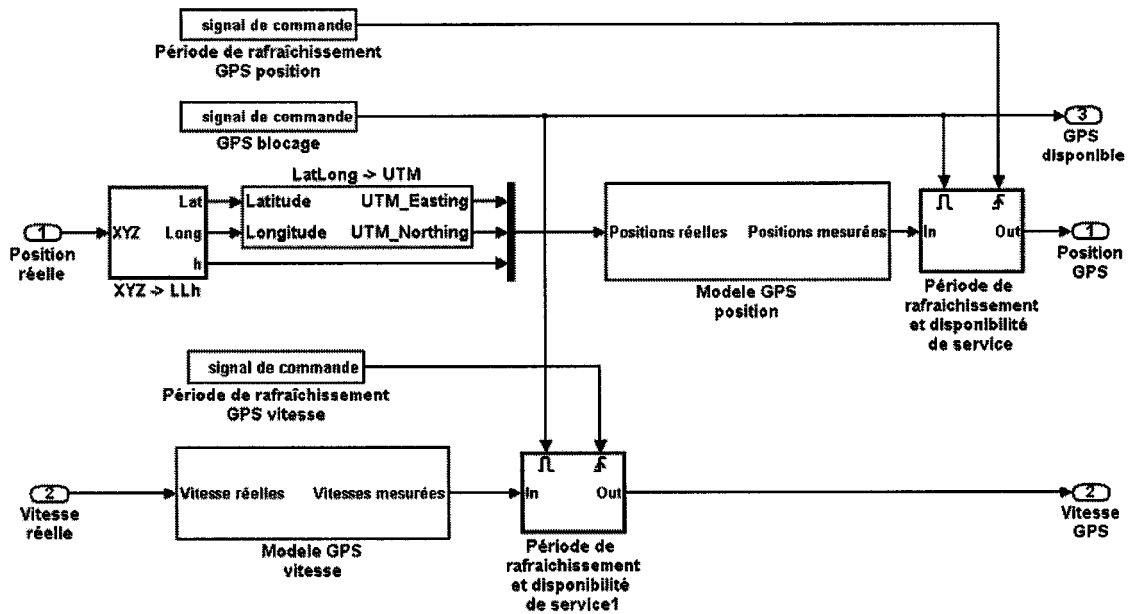


Figure 39 Modèle Simulink pour le GPS

algorithme simple à haute fréquence qui alimente un deuxième algorithme à rythme plus lent. Cette approche d'intégration est maintenant considérée comme l'état de l'art pour les systèmes de navigation inertielle [90].

Par contre, la technologie des ordinateurs embarqués évolue constamment et la puissance actuelle de calcul est considérable en comparaison à ce qui était disponible à cette époque. Ainsi, comme le suggère Chatfield [6], une méthode d'intégration à un cycle et à ordre élevé peut maintenant être implantée en temps réel.

De façon générale, la valeur d'une variable dynamique à un instant discret m est fonction de la valeur de cette variable à l'instant précédent $m - 1$ additionnée de l'intégrale de l'évolution de cette variable.

$$x(m) = x(m - 1) + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \dot{x}(t) dt \quad (6.17)$$

Plusieurs méthodes d'intégration (en continu) sont disponibles dans l'environnement Simulink [91]. Ainsi, une méthode d'ordre élevé peut être choisie et appliquée à la version continue des équations de mouvement, tel que représentée par les équations 2.25 à 2.28 du

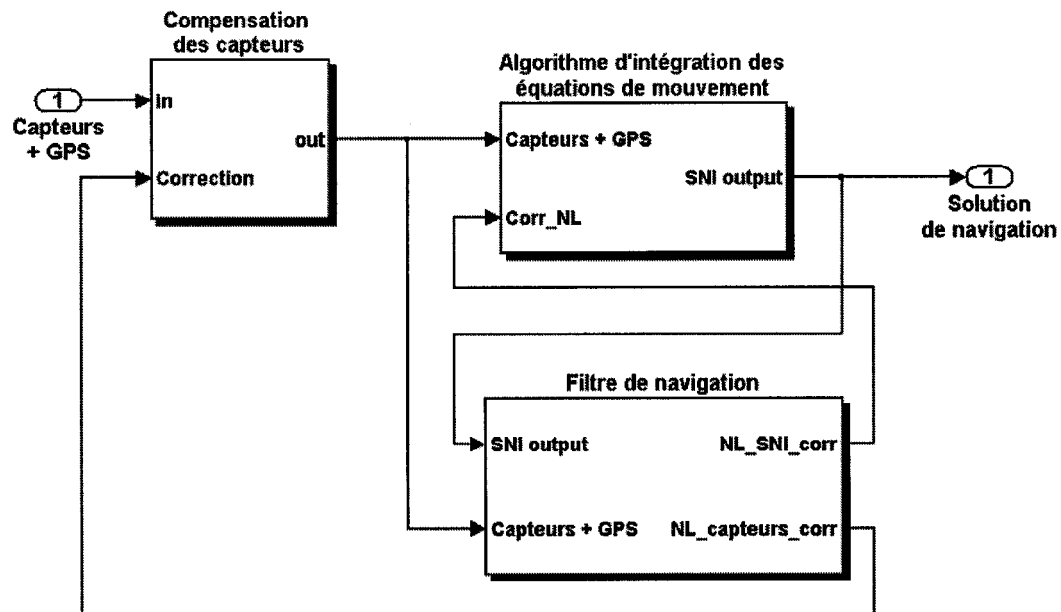


Figure 40 Algorithme de navigation

chapitre 2. Une étude de l'impact des méthodes d'intégration est présentée à la section 6.5.1.

Néanmoins, l'application directe de la fonction intégrale de Simulink n'est pas possible à cause de la nécessité de corriger en-ligne la solution de navigation (correction des erreurs en amont de l'approche indirecte). En effet, en se référant à l'équation 6.17 et à la figure 41, seulement la dérivée de la variable et la valeur de la variable au temps m est disponible. La valeur de la variable au temps $m - 1$ est interne à la fonction intégrale et ne peut pas être corrigée.

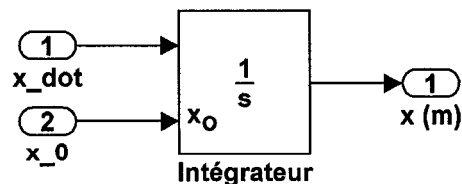


Figure 41 Schéma-bloc de l'intégrateur standard de Simulink

Une fonction intégrale avec correction est donc nécessaire et cette fonction a été conçue comme une « S-function » de Simulink, i.e. une fonction codée en langage C et compilée spécialement pour être utilisée comme un bloc dans Simulink. La figure 42(a) illustre les entrées/sorties du bloc, alors que la figure 42(b) montre la fenêtre de dialogue de la nouvelle fonction. Par exemple, la figure 43 représente le module d'intégration de l'équation

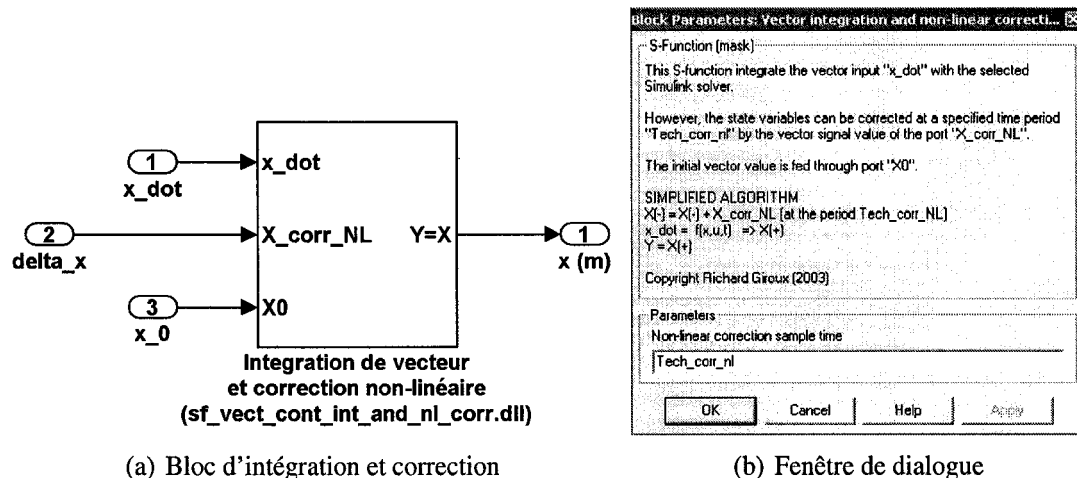


Figure 42 Création d'un nouveau bloc d'intégration et correction dans Simulink

de la variation de la vitesse (section 2.2.1), et constitue une composante du bloc « Algorithme d'intégration des équations de mouvement » de la figure 40. En plus d'appliquer la correction non-linéaire à l'intégration, la correction doit également être appliquée à la valeur d'entrée du bloc, puisque cette dernière est utilisée dans le calcul de la dérivée de la variable en question.

6.3.3.2 Filtre de navigation

Dans l'approche indirecte, le filtre de navigation est utilisé pour estimer les erreurs dans la solution de navigation. Les erreurs sont alors soustraites de la solution de navigation, soit en amont ou en aval. L'approche implantée dans ce chapitre est la correction en amont. La figure 44 représente la configuration du filtre de navigation dans l'environnement Simulink, et constitue le contenu du bloc « Filtre de navigation » de la figure 40. Le filtre de navigation est composé principalement de deux blocs : le filtre de Kalman généralisé, utilisé pour déterminer le meilleur estimé des erreurs, et un bloc de contrôle d'erreur. Ces deux fonctions sont expliquées plus en détail dans ce qui suit.

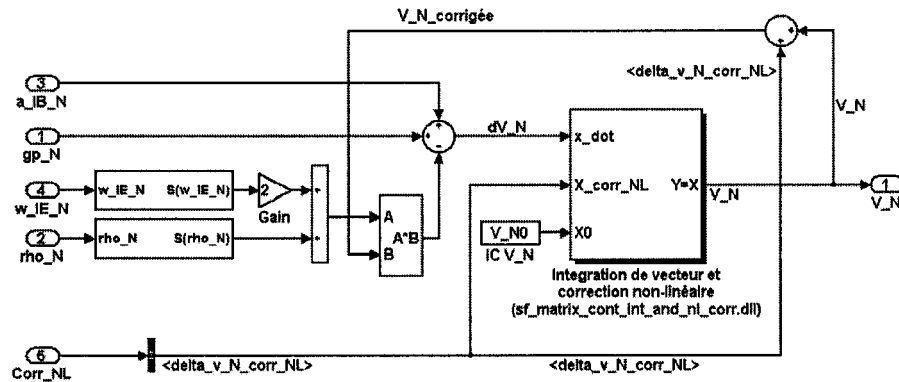


Figure 43 Modèle d'intégration de l'équation de variation de vitesse

Filtre de Kalman généralisé

La figure 45 illustre l'implantation du filtre de Kalman, avec les fonctions de propagation de l'estimation de l'erreur et de l'estimation de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, et la fonction de correction de ces deux estimations. Il s'agit en fait de l'implantation des algorithmes de l'annexe 1.2. Un bloc générant les paramètres du système est également implanté. Ainsi, les paramètres variant dans le temps (matrice du système Φ , matrice de covariance de l'erreur de position du GPS R_{GPS} , la matrice de projection H lors de l'isolation de fautes, le vecteur de modélisation du système $w(k)$ étant une fonction de la solution du SNI) sont modifiés à chaque temps d'échantillonnage. La figure 46 montre l'implantation de la propagation de la matrice de covariance, ainsi que l'application de sa correction. Lorsqu'il n'y a pas de correction, la quantité soustraite est nulle. Par contre, lors de la réception d'un signal GPS, la correction à apporter est calculée (voir figure 47) et est appliquée à la correction (qui est normalement nulle) pour une période d'échantillonnage (du filtre de Kalman, qui peut être différent de la période d'échantillonnage des capteurs inertiels). La logique qui génère l'événement de correction est implantée dans une machine à état, représentée comme un bloc à la figure 44 et explicité à la figure 48.

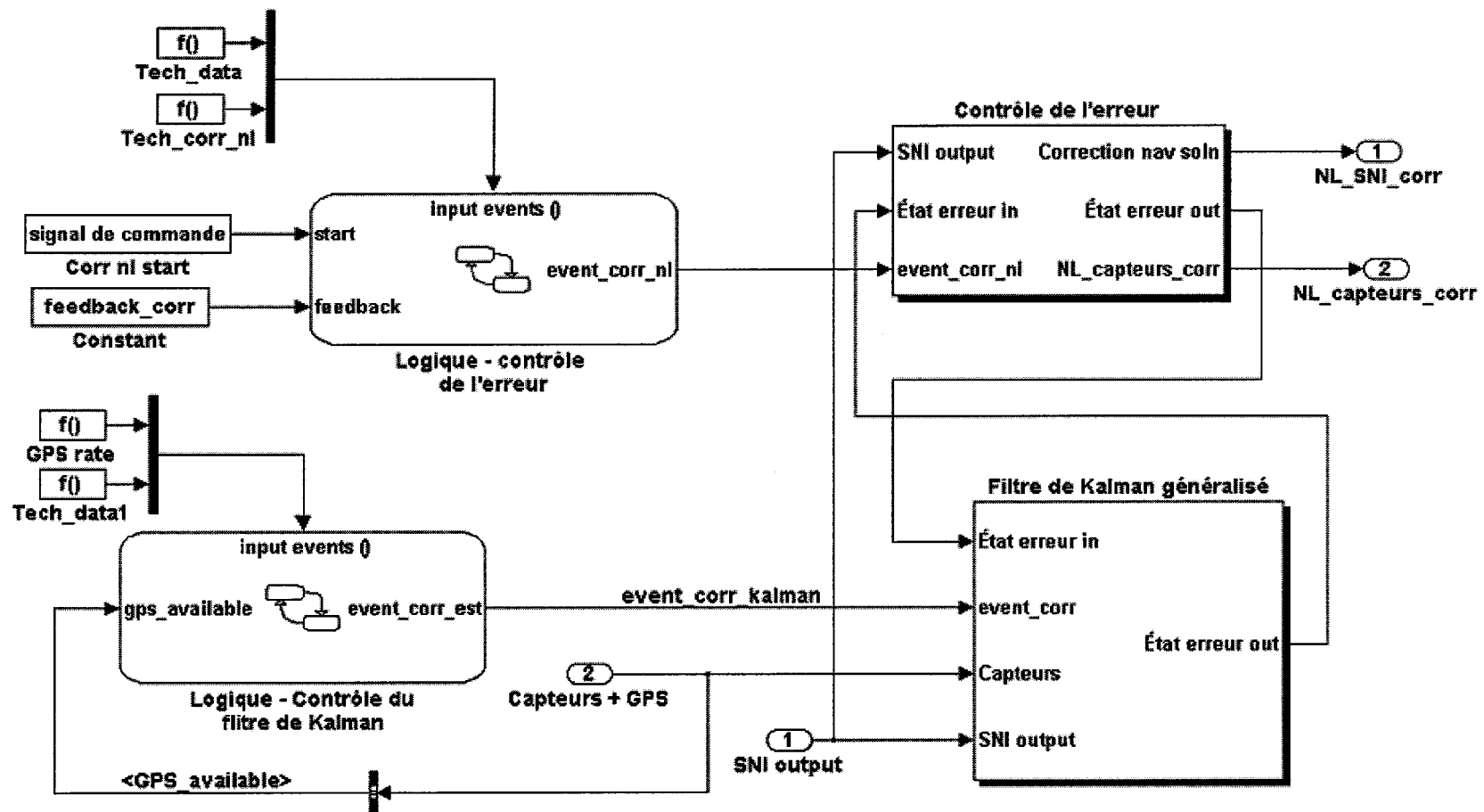


Figure 44 Filtre de navigation

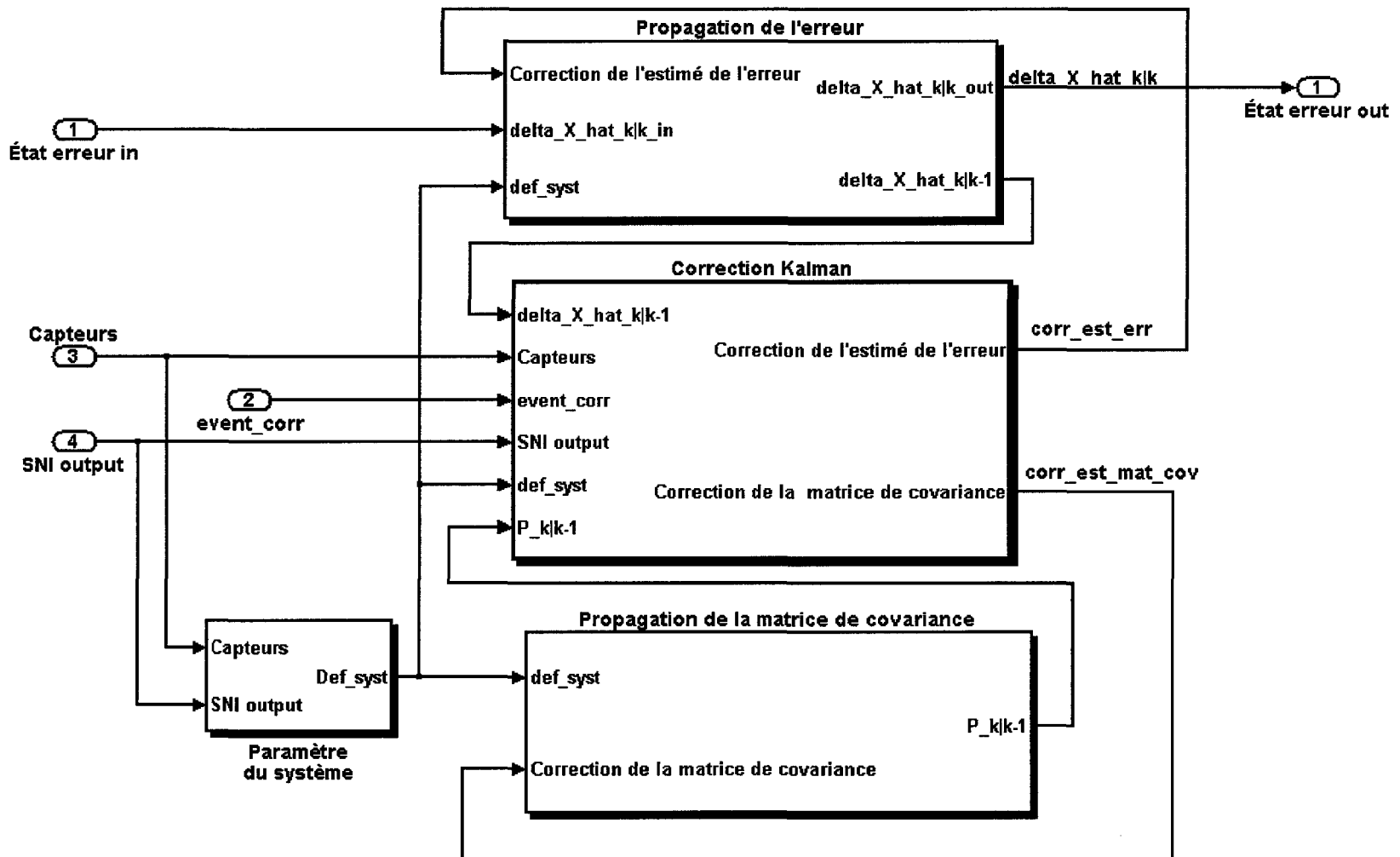


Figure 45 Filtre de Kalman généralisé

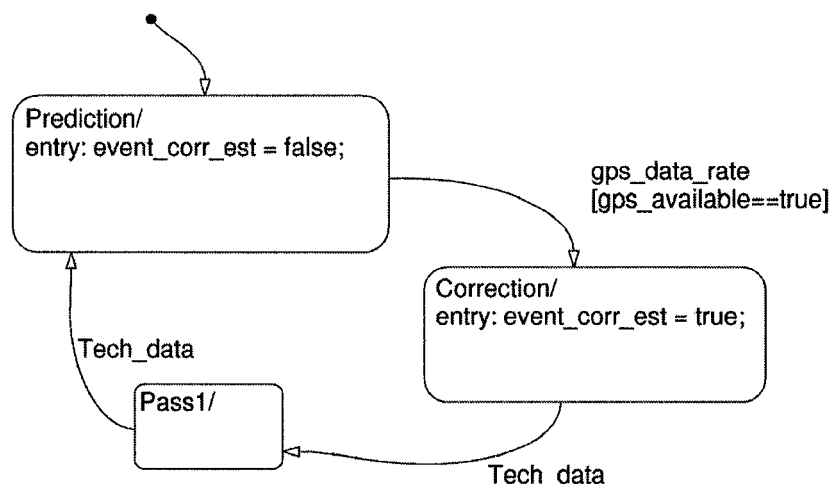


Figure 48 Logique de contrôle du filtre de Kalman

Contrôle de l'erreur

Le contrôle de l'erreur dans le filtre de Kalman généralisé est nécessaire à cause de l'application de l'erreur en amont de la solution de navigation. Ainsi, lorsque la correction de l'erreur est appliquée en amont de la solution de navigation, l'estimation de l'erreur dans le filtre de Kalman doit être ré-initialisée. Également, puisque les erreurs ne sont pas exactement compatibles avec les variables des équations de mouvement, une transformation des erreurs est nécessaire (section 2.4.5). La figure 49 illustre le propos (et représente le bloc « Contrôle de l'erreur » de la figure 44). Lorsqu'il n'y a pas de commande de correction, le vecteur de contrôle d'erreur est nul. Ainsi, le vecteur d'état des erreurs estimées à la sortie est égal au vecteur d'état des erreurs estimées à l'entrée. De plus, la correction appliquée au bloc d'intégration des équations de mouvement est nulle. Par contre, lorsqu'une commande de correction est envoyée, le vecteur de contrôle d'erreur est égal au vecteur d'état des erreurs estimées à l'entrée. Ainsi, le vecteur d'état des erreurs estimées à la sortie est nul (soustraction de deux vecteurs identiques) alors que la correction à appliquer aux équations de mouvement est calculée et appliquée pour une période d'échantillonnage. La logique de contrôle du contrôle de l'erreur est donnée à la figure 50 (représentée également à la figure 40 sous forme de bloc) et est constituée d'une machine à état. La correction devrait normalement se faire après qu'une mesure GPS soit effectuée.

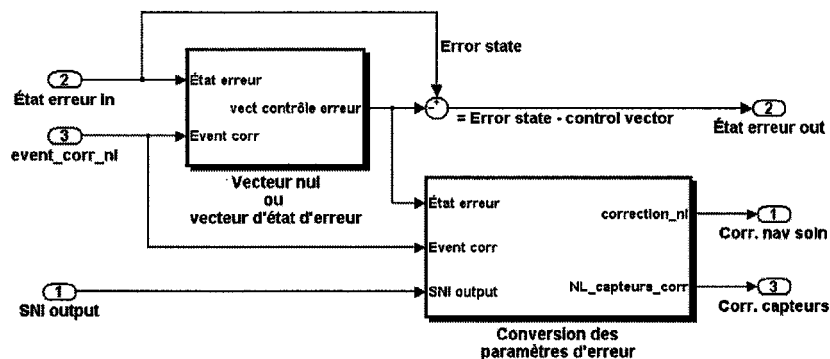


Figure 49 Contrôle de l'erreur

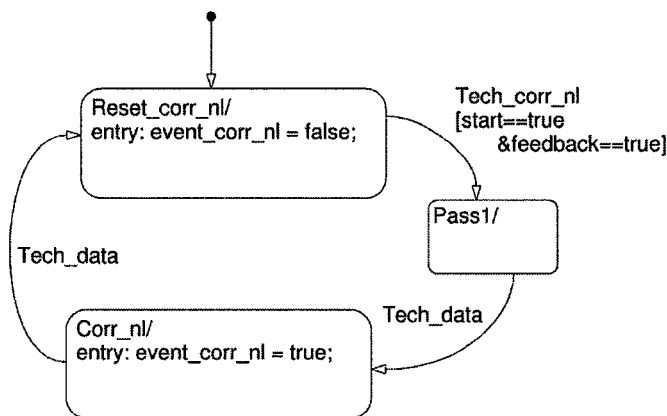


Figure 50 Logique de contrôle du vecteur de contrôle d'erreur

Cette section a présentée succinctement la structure du simulateur. En résumé, la figure 51 illustre les niveaux hiérarchiques des fonctions principales du simulateur présenté dans cette section. Les prochaines sections exposeront le concept de prototypage rapide et les performances du simulateur, en plus des caractéristiques temps-réel de certains algorithmes.

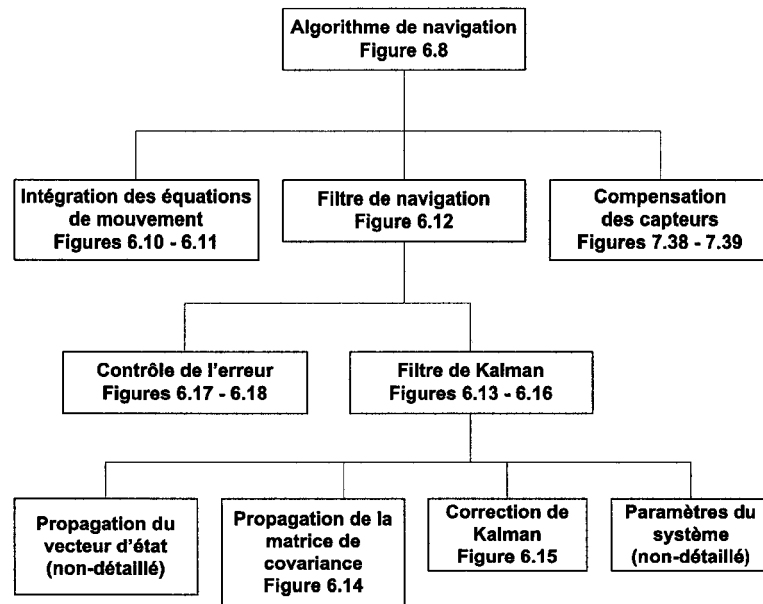


Figure 51 Niveau hiérarchique des fonctions principales du simulateur

6.4 Mise en oeuvre en temps réel et prototypage rapide

En se référant encore une fois à la figure 33, la suite logique de la simulation est la transposition des algorithmes dans un environnement en temps-réel, de façon à pouvoir statuer sur les performances et effectuer des tests réalistes. Tel que discuté auparavant, l'environnement de simulation Simulink offre un cadre convivial pour exécuter rapidement le transfert des algorithmes simulés vers une plate-forme en temps-réel. En effet, en utilisant « Real-Time Workshop » et « xPC Target » avec Simulink, il est possible de générer un noyau de démarrage pour un ordinateur dont la seule fonction est d'exécuter les algorithmes choisis. Le but de cette section n'est pas de décrire complètement la façon de procéder pour accomplir cette tâche. Le lecteur peut se référer à la documentation de Mathworks pour obtenir plus de détails [91]. Seulement les concepts généraux seront expliqués.

6.4.1 Prototypage rapide

La figure 52 illustre le concept. Premièrement, une disquette de démarrage doit être conçue à partir de l'ordinateur hôte, avec les caractéristiques de l'ordinateur cible. Une fois cette opération effectuée, l'ordinateur cible peut être démarré avec cette disquette et un système d'opération dédié opère l'ordinateur.

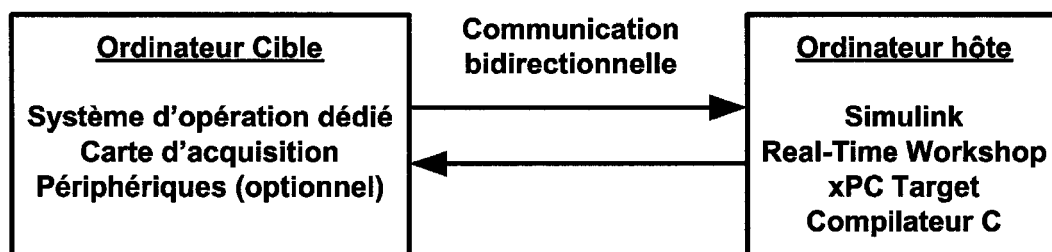


Figure 52 Prototypage rapide avec Simulink

Un lien de communication entre les deux ordinateurs est essentiels. Pour obtenir une vitesse de transmission maximale, un lien Ethernet direct peut être établi. Ainsi, il est possible de transmettre à l'ordinateur cible des algorithmes à être traités en temps réel. Une fois le traitement en temps-réel terminé, l'ordinateur cible envoie les résultats à l'ordinateur hôte où un post-traitement peut être effectué. Cette approche implique que des capteurs réels sont utilisés et échantillonnés par la carte d'acquisition jumelée à l'ordinateur cible. Certains algorithmes développés dans cette thèse supposent des configurations de multiples capteurs, qui peuvent s'avérer chères pour simplement prouver le concept. De plus, le test en temps-réel avec capteur implique un véhicule en mouvement, ce qui limite le nombre d'essais à être effectuer. Pour contourner ce problème, la co-simulation en temps-réel est introduite.

6.4.2 Co-simulation en temps-réel

La co-simulation en temps-réel implique la génération et la transmission par l'ordinateur hôte des mesures des capteurs tel que l'ordinateur cible ne peut différencier entre la réalité et la fiction. Le problème de ce genre de structure est la synchronisation entre les deux ordinateurs, car l'ordinateur cible fonctionne en temps-réel alors que la simulation de capteurs dans l'ordinateur hôte (Simulink) fonctionne en temps différé. Pour palier à ce problème, l'algorithme à simuler en temps-réel doit être augmenté pour contenir une base de temps qui sera envoyée à l'ordinateur hôte. La figure 53 illustre un exemple d'algorithme envoyé vers l'ordinateur cible. Le temps en provenance de l'horloge de l'ordinateur cible est ainsi envoyé à l'ordinateur hôte sous forme de constante (« Tech_data » et « Tech_gps »).

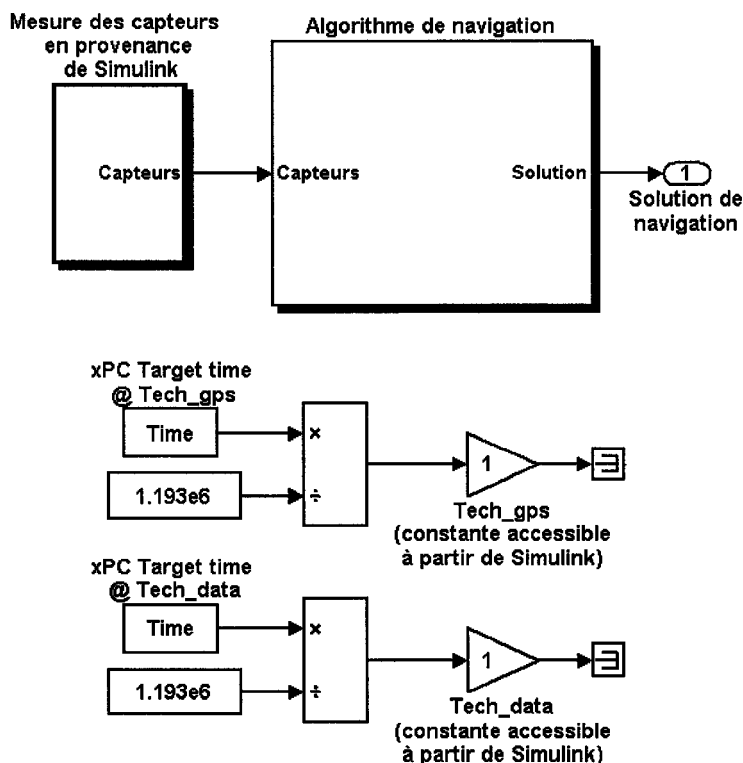


Figure 53 Algorithme transmis à l'ordinateur cible pour exécution en temps-réel

D'un autre côté, l'ordinateur hôte lit les constantes de temps, et lors d'un changement de valeur (qui arrive exactement au temps d'échantillonnage respectif en temps-réel), une nouvelle mesure de capteurs est envoyée, comme le montre la figure 54.

Ainsi, il sera possible de simuler n'importe quelle configuration de capteurs avec un algorithme fonctionnant en temps réel. Quoique intéressante, cette approche apporte peu d'information supplémentaire. En effet, les performances de précision peuvent être établies en temps différé. De plus, en s'assurant de la possibilité d'opération en temps-réel, la co-simulation perd de son importance. Ainsi, la co-simulation se sera pas utilisée dans la thèse. En effet, la validation des performances de précision de la solution de navigation peut se faire en temps différé sans diminuer la portée des résultats.

6.4.3 Acquisition de données

Durant la phase de développement, le traitement de données réelles en temps différé permet une validation supplémentaire des algorithmes. L'acquisition de données avec Simu-

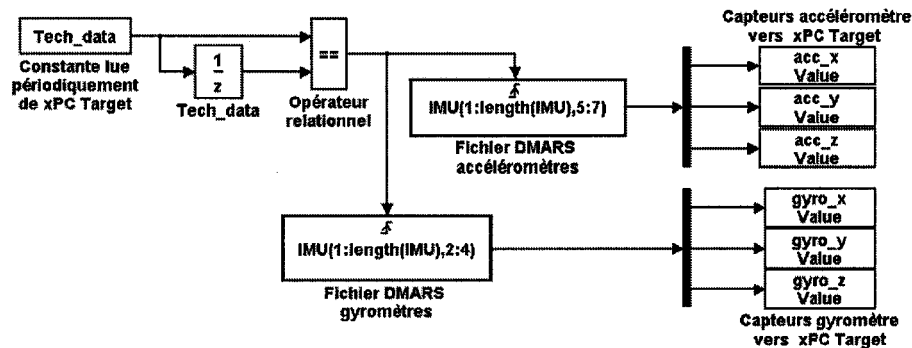


Figure 54 Transmission synchronisée en temps-réel des mesures des capteurs à partir de Simulink

link se fait assez simplement. La figure 55 illustre le modèle de haut niveau qui sert à l'acquisition, avec la lecture des mesures des capteurs inertiels et les mesures du GPS.

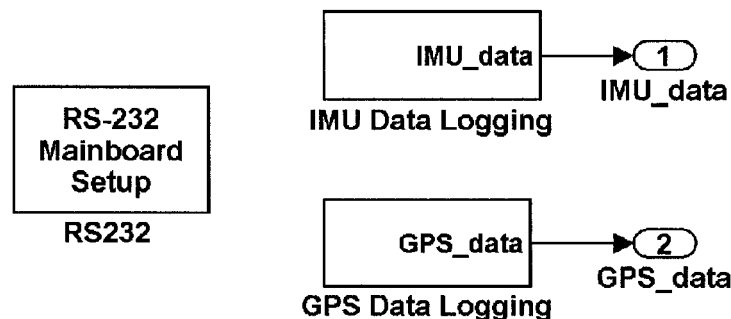


Figure 55 Acquisition de données

Les capteurs inertiels sont échantillonnés à la fréquence désirée à l'aide d'une carte d'acquisition analogique/numérique (dans ce cas-ci, une carte MM32 de Diamond Systems), où le bloc Simulink correspondant est présenté à la figure 56(a) et la fenêtre de dialogue à la figure 56(b). D'un autre côté, les mesures GPS sont disponibles à partir d'un port série avec protocole de communication RS232. Une structure d'acquisition avec protocole RS232 doit alors être implantée dans Simulink et ce bloc est présenté à la figure 57(a) avec la fenêtre de dialogue à la figure 57(b). Ce dernier bloc nécessite une définition des variables transmises par le port série. Cette définition doit être incluse dans un fichier script Matlab dont le contenu se trouve à l'annexe 3.6.

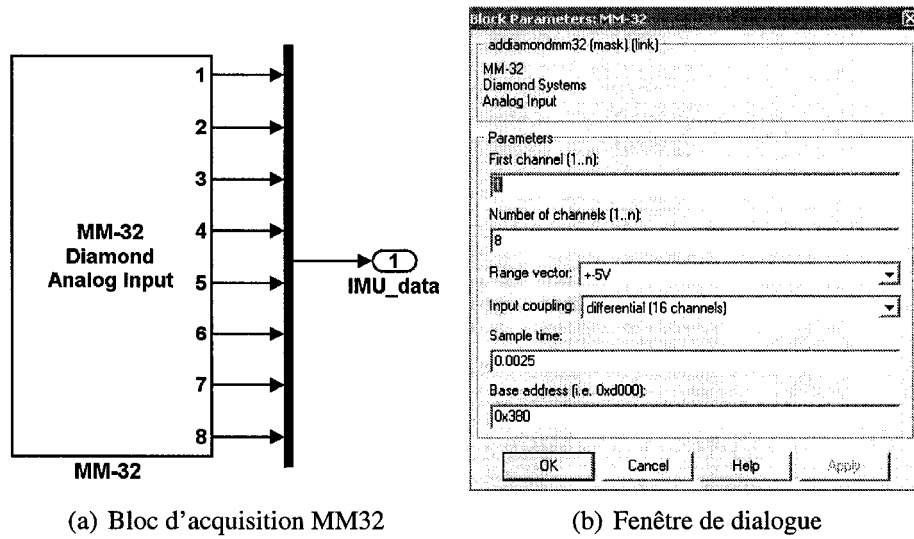


Figure 56 Bloc d'acquisition de signal avec la carte MM32 de DiamondSystems

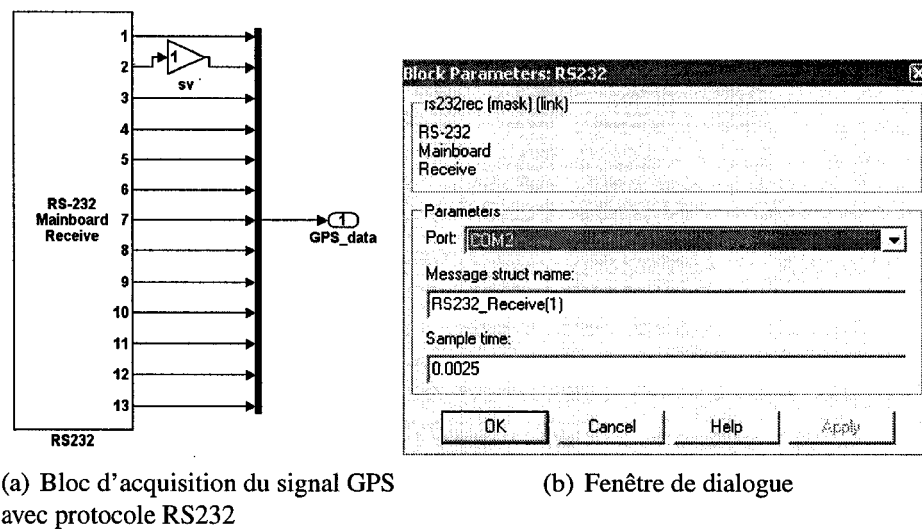


Figure 57 Bloc d'acquisition de signal GPS

6.5 Performance des algorithmes

L'évaluation de la performance des algorithmes se fera en deux temps. Premièrement, l'hypothèse selon laquelle les méthodes d'intégration d'ordre élevé peuvent remplacer la méthode à deux cycles de Savage sera prouvée de façon heuristique. Ensuite, les temps de calcul exigés par les algorithmes seront comparés, de façon à évaluer la possibilité d'implantation en temps-réel des algorithmes de navigation.

6.5.1 Intégration des équations de mouvement

De façon à évaluer la précision des algorithmes d'intégration, une trajectoire est simulée et la solution de navigation est comparée avec la trajectoire réelle. Pour plus de détails sur la méthode employée, se référer à un article publié récemment sur cette contribution (Giroux [86]). Aucune erreur dans les capteurs n'est simulée car on veut statuer sur la précision de la méthode d'intégration. Par contre, la période d'échantillonnage des capteurs inertiels est le facteur déterminant dans la précision du résultat final. Le paramètre de comparaison sera l'erreur sphérique terminale, i.e. le module du vecteur d'erreur représentant la différence entre la position finale calculée et la position finale réelle. La figure 58 illustre le vecteur d'erreur terminale.

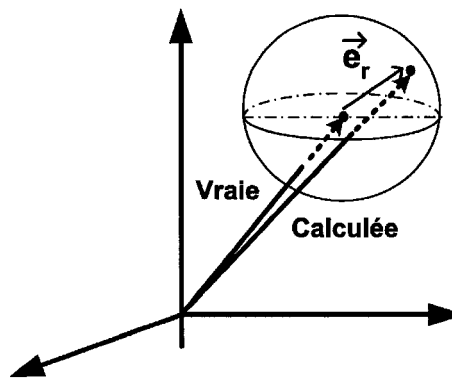


Figure 58 Erreur sphérique terminale

La figure 59 représente les erreurs sphériques terminales de plusieurs méthodes d'intégration disponible dans Simulink, et également celle de Savage. Pour plus de détails sur la méthode à deux cycles d'intégration, se référer aux articles de Savage [87, 89]. Les méthodes utilisées dans Simulink sont les suivantes [91] :

- ODE5 : la méthode Dormand-Prince
- ODE4 : la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4
- ODE3 : la méthode de Bogacki-Shampine
- ODE2 : la méthode de Heun
- ODE1 : la méthode d'Euler

Les méthodes de Bogacki-Shampine, Runge-Kutta ordre 4 et Dormand-Prince sont toutes des variantes de la méthode de Runge-Kutta et sont considérées comme des méthodes à ordre élevé. D'un autre côté, la méthode d'Euler est une méthode du premier ordre et n'est pas considéré ici car les erreurs engendrées par cette méthode sont trop grandes. Entre ces deux extrémités, la méthode de Heun, également connue sous le nom de méthode d'Euler amélioré ou Runge-Kutta d'ordre 2, donne de bons résultats considérant la quantité relativement minime de calcul impliqué.

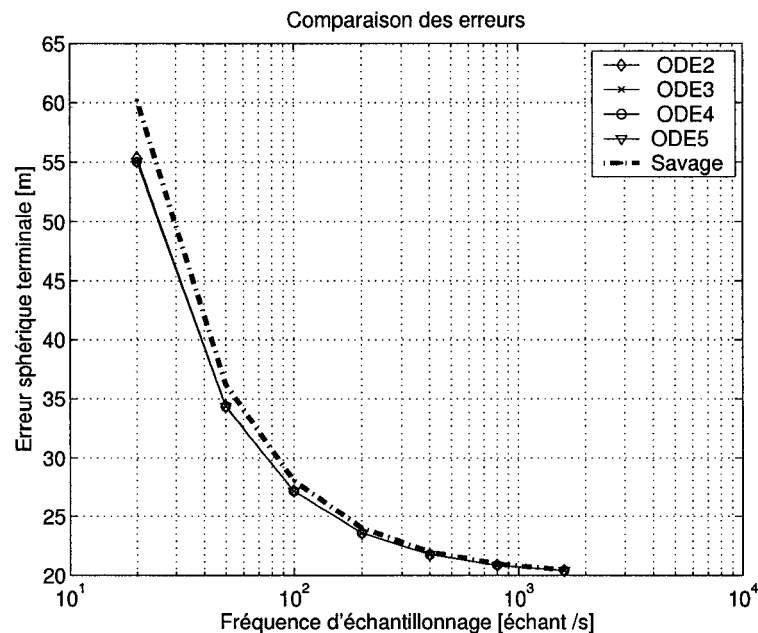


Figure 59 Comparaison des erreurs sphériques terminales de différentes méthodes d'intégration

Il est préférable d'utiliser une méthode d'intégration d'ordre plus élevé que l'ordre 2, même si à prime abord les résultats présentés semblent indiquer une même performance. En fait, la trajectoire simulée, quoique comportant une dynamique rapide par endroit, ne

présente pas de vibration ou de dynamique rapide permanente. Dans de tels cas, il est préférable d'utiliser une technique d'intégration permettant de retirer le maximum d'information. Cet aspect est abordé plus en détail dans l'article publié en relation avec cette section de la thèse (Giroux [86]). La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) sera donc privilégiée par la suite dans la thèse.

Une autre argument pour la sélection de l'algorithme RK4 est illustré à la figure 60. Une règle de design empirique citée dans Savage [9] suggère que l'erreur de position engendrée par la méthode d'intégration ne devrait pas être supérieure à 5% de l'erreur de position engendrée par les erreurs des capteurs dans le SNI. La figure 60 montre en ordonné cette portion d'erreur engendrée par les capteurs. Également inclus dans la figure, l'erreur sphérique terminale totale de la méthode RK4 est présentée. En se basant sur cette figure, il peut être admis que les ensembles de capteurs se trouvant au-dessus de la ligne RK4 sont des ensembles de capteurs pouvant être utilisés dans un SNI avec la méthode d'intégration RK4. Tel que vu au chapitre 3, ces capteurs sont d'ordre tactique ou de moindre précision, ce qui inclut le type de capteurs visés par la thèse. Finalement, la fréquence d'échantillonnage devrait être fixée par l'environnement dynamique du véhicule, mais également par la puissance de calcul disponible, deuxième point qui sera discuté en relation avec la performance des algorithmes.

6.5.2 Temps de calcul des algorithmes

Le temps de calcul pour les trois parties de l'algorithme principal sera évalué : l'intégration des équations de mouvement, le filtre de Kalman, et le contrôle de l'erreur.

Temps de calcul de l'intégration des équations de mouvement

En première analyse, il est possible de déterminer l'effort de calcul pour chacune des méthodes d'intégration en notant le temps de simulation (différé) pour une trajectoire donnée. Ainsi, pour une trajectoire de vingt minutes, la figure 61 montre le temps de simulation normalisé $\bar{T}$ pour chaque méthode. Ces simulations ont été effectuées avec un processeur Pentium III 933 MHz avec 256Mb de mémoire vive. La portion des courbes inférieure au temps normalisé, $\bar{T} < 1$, représente les paires possibles de paramètres (algorithme d'intégration et période d'échantillonnage) pour une implantation en temps-réel.

Évidemment, cette première analyse donne seulement un aperçu. Pour plus de précision quant à l'implantation en temps-réel des algorithmes, les algorithmes ont été transférés

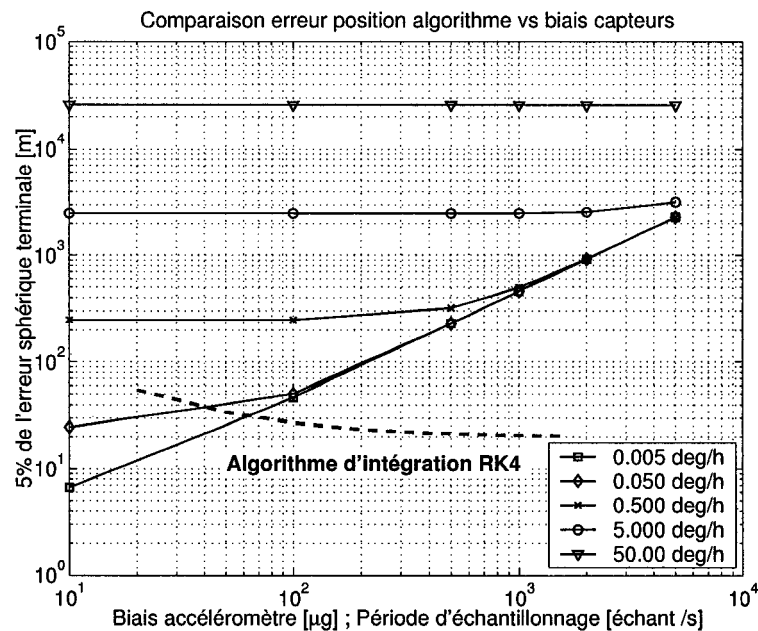


Figure 60 Comparaison des erreurs sphériques terminales de la méthode RK4 et différentes précision de capteurs

dans un ordinateur cible avec l'environnement « xPC Target ». La figure 62 résume les résultats pour les différentes méthodes d'intégration. L'ordinateur cible possède un processeur Pentium Mobile de 256MHz, avec 128Mb de mémoire vive.

On remarque que l'effort de calcul pour les méthodes d'intégration d'ordre élevé est sensiblement plus exigeant que la méthode de Savage. Néanmoins, le temps de calcul étant inférieur à une milliseconde, l'implantation en temps-réel ne cause pas de problème. Il est également intéressant de comparer le temps de calcul pour la méthode RK4 pour différentes hypothèses d'équations de mouvement. En effet, pour des véhicules terrestres, l'hypothèse d'une terre plate peut être utilisée. Les équations sont ainsi moins complexes. La figure 63 illustre l'erreur sphérique terminale causée par cette hypothèse. Il est clair que l'utilisation de ce modèle doit être accompagnée d'un filtre de Kalman, de façon à corriger les erreurs induites par l'hypothèse. Il est intéressant de constater que l'erreur n'est pas fonction de la période d'échantillonnage, mais seulement causée par la simplification des équations. D'un autre côté, la figure 64 illustre la différence du temps de calcul d'un cycle d'intégration entre l'hypothèse de terre plate et les équations de mouvement standards. Ainsi, dans l'éventualité d'un compromis en matière de charge de calcul, l'hypothèse de la terre plate peut être intéressante.

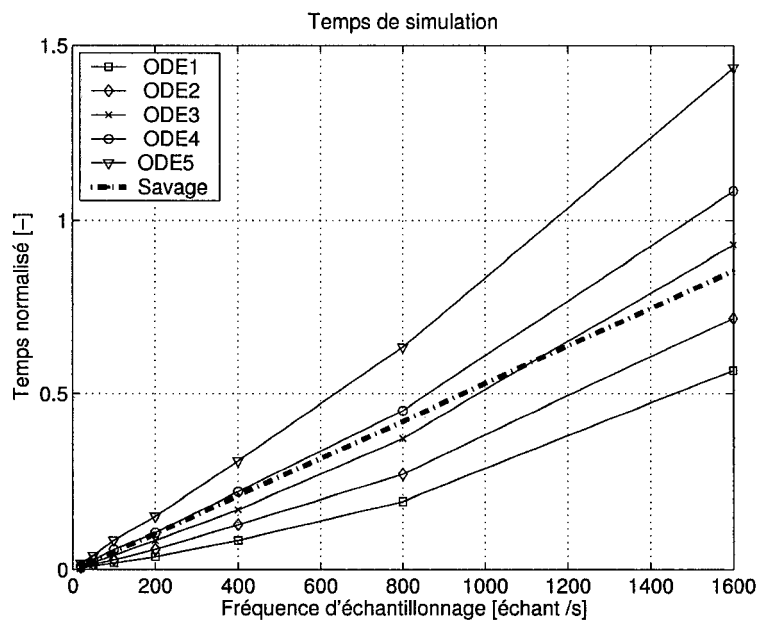


Figure 61 Temps de calcul différé pour différentes méthodes d'intégration des équations de mouvement

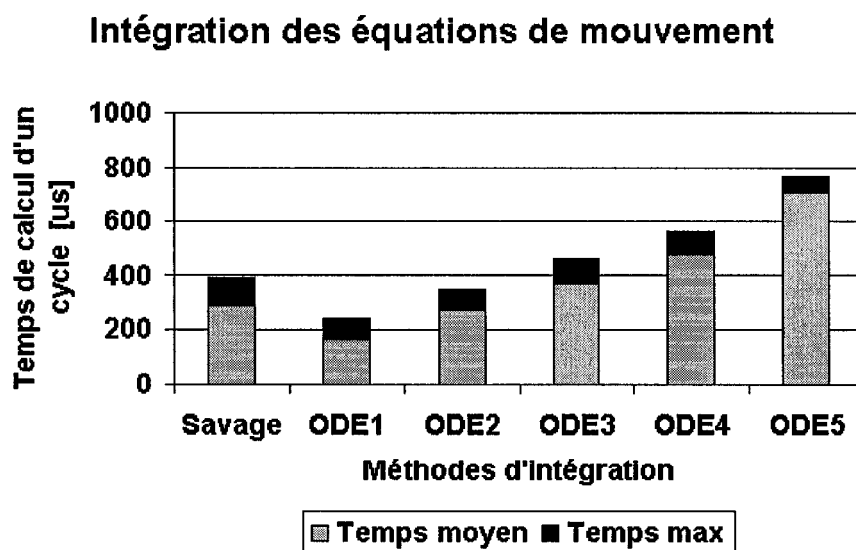


Figure 62 Temps de calcul réel pour algorithmes d'intégration

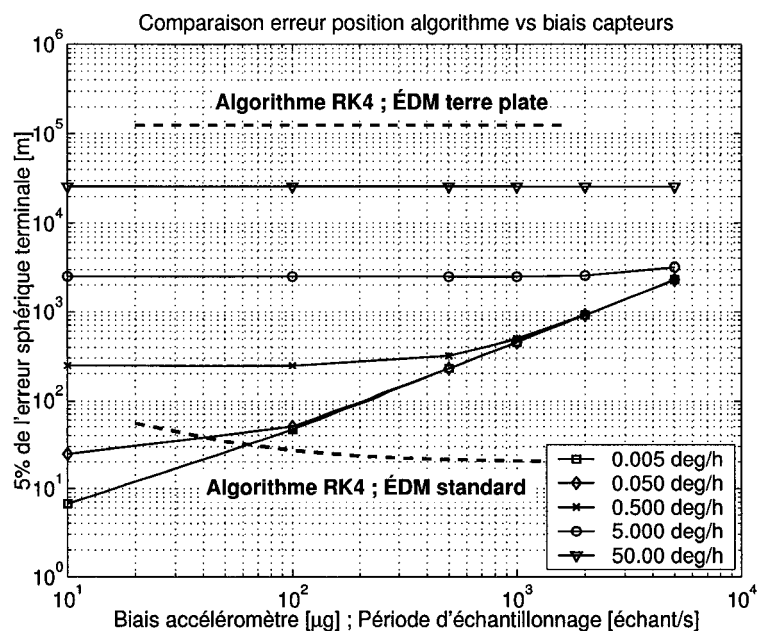


Figure 63 Erreur sphérique terminale de l'hypothèse de la terre plate pour les équations de mouvement

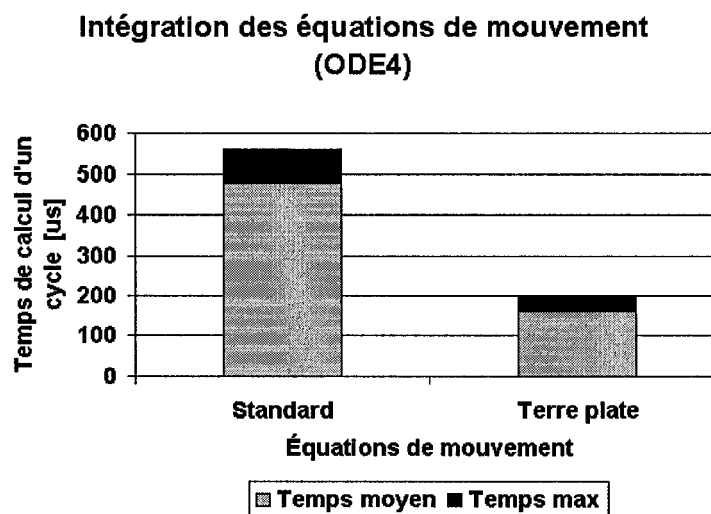


Figure 64 Temps de calcul réel pour deux hypothèses d'équations de mouvement

Temps de calcul du filtre de Kalman

Le temps de calcul du filtre de Kalman est fonction du modèle d'erreur utilisé, à cause du nombre de variables. Dans cette section, seulement le modèle introduit au chapitre 2 sera analysé. L'effort de calcul pour les modèles d'erreur non-linéaire et avec redondance sera analysé dans le prochain chapitre. La figure 65 montre les résultats du temps de calcul pour la linéarisation, pour la phase de prédiction et prédiction/correction du modèle sans erreur des capteurs (9 variables) et pour le modèle avec identification d'une erreur par capteur (15 variables). Premièrement, on remarque un accroissement d'effort de calcul substantiel

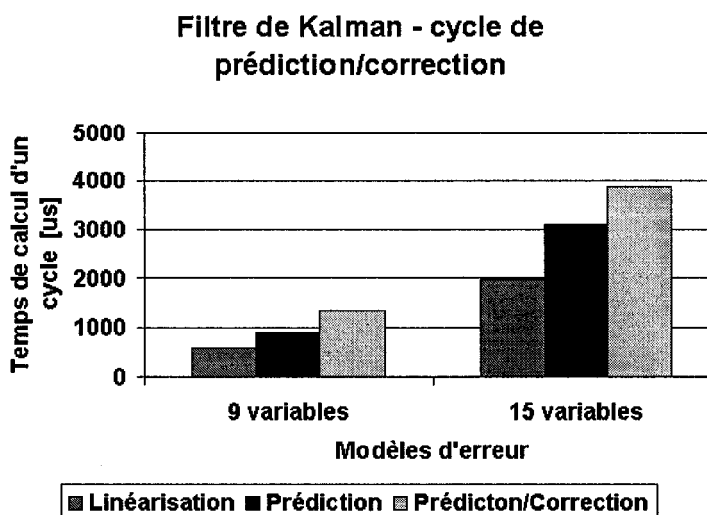


Figure 65 Temps de calcul réel maximal pour le filtre de Kalman

pour le modèle à 15 variables. De plus, la phase de correction n'apporte pas un effort relatif supplémentaire considérable, comme il aurait pu être estimé. Ceci est causé en partie par le bloc « Paramètres du système » (voir la figure 45) qui doit être calculé à chaque itération de la phase de prédiction. Ce bloc calcule la matrice de transition Φ , la matrice d'entrée G et la matrice de pondération Q , nécessitant un effort de calcul important.

Temps de calcul du contrôle de l'erreur

Tel qu'explicité auparavant, le contrôle d'erreur est nécessaire pour l'implantation de l'approche indirecte avec correction en amont. La figure 66 illustre le temps de calcul d'un cycle pour le contrôle de l'erreur, selon les deux hypothèses de développement des équations de mouvement, tel qu'introduit précédemment. Le temps de correction pour

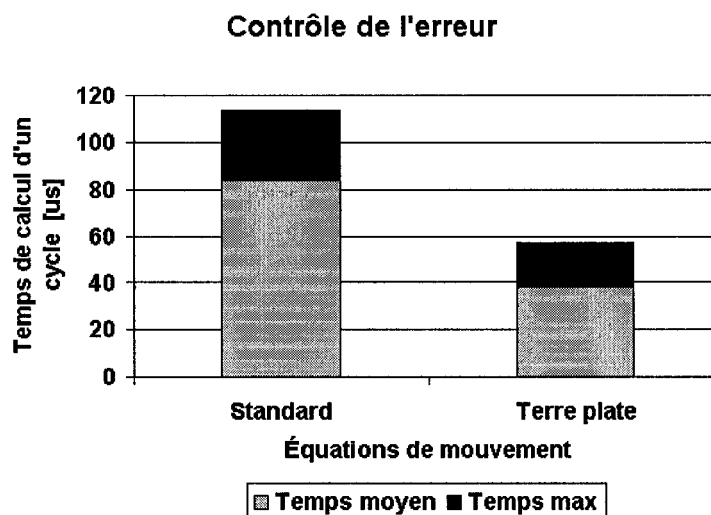


Figure 66 Temps de calcul réel pour le contrôle de l'erreur

le modèle standard est plus élevé que le modèle terre plate à cause de la transformation des variables d'erreur du modèle d'erreur vers une correction d'erreur compatible avec les équations de mouvement. Dans le cas du modèle terre plate, les variables d'erreur sont applicables directement pour corriger les équations de mouvement, sauf pour l'erreur d'orientation qui doit être transformée ($\psi_N \rightarrow {}^B\delta C_N$). Par contre, l'effort de calcul de cette opération est relativement minime comparé avec l'effort de calcul exigé par le filtre de Kalman.

Temps de calcul total

La somme des temps de calcul pour chacune des fonctions dans l'algorithme de navigation n'est pas exactement égale au véritable effort de calcul, principalement à cause de l'échange d'information entre les blocs. La figure 67 montre le temps de calcul pour un cycle de l'algorithme de navigation complet, tel que présenté à la figure 40, avec le modèle

d'erreur linéaire à 9 variables. Il est intéressant de noter qu'il y a qu'une petite différence d'effort de calcul entre l'hypothèse de la terre plate et les équations de mouvement complètes. Ce fait est principalement lié à l'effort de calcul exigé par le filtre de Kalman.

Ainsi, avec un temps d'exécution de l'ordre de $5000 \mu s$, une fréquence d'échantillonnage des capteurs à 200 Hz est envisageable. En se référant à la figure 59, l'erreur (sans correction) associée à l'algorithme d'intégration des équations de mouvement à cette fréquence est similaire à celle engendrée par l'algorithme de Savage.

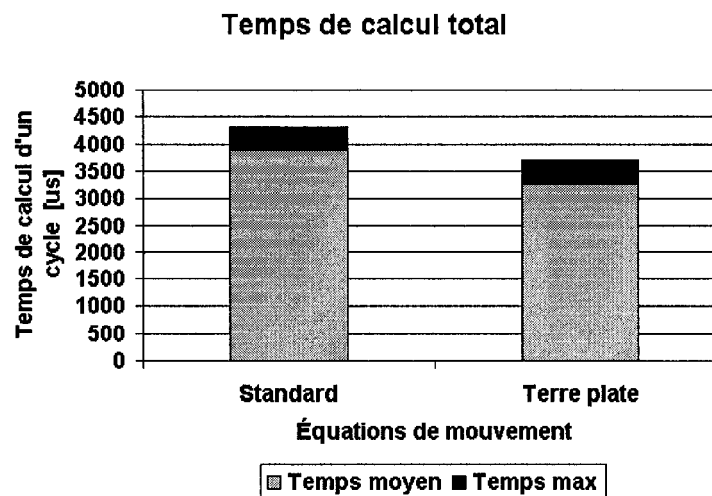


Figure 67 Temps de calcul réel total pour l'ensemble des algorithmes pour un cycle, incluant un modèle d'erreur à 9 variables

6.6 Conclusion préliminaire

Ce chapitre a présenté l'implantation des algorithmes de navigation. Premièrement, un simulateur a été introduit. Ce simulateur est utilisé en partie pour générer des mesures inertielles parfaites liées à une trajectoire donnée, lorsque des mesures réelles ne sont pas disponibles. Par la suite, les algorithmes de navigation peuvent être simulés avec ces données inertielles, en les additionnant à des erreurs générées par des modèles de capteurs. Si des données réelles sont disponibles, il est également possible de simuler les algorithmes avec les données réelles.

Le simulateur a été conçu dans l'environnement Simulink pour faciliter la transition des algorithmes simulés vers des algorithmes utilisables dans un environnement en temps-réel.

La procédure pour simuler en temps-réel les algorithmes avec des données fournies par Simulink (co-simulation) a également été montré, en plus de la méthode d'acquisition des signaux des capteurs inertiels et du signal GPS par protocole RS232.

Finalement, le chapitre a démontré l'intérêt d'utiliser des algorithmes d'intégration d'ordre élevé en comparaison avec l'algorithme de Savage. L'analyse de l'effort de calcul pour les algorithmes a également démontré la possibilité d'implanter en temps-réel les algorithmes standard de navigation. Le prochain chapitre analyse l'implantation des nouveaux algorithmes proposés et illustre les résultats expérimentaux associés.

CHAPITRE 7

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Ce chapitre regroupe les résultats expérimentaux. En plus de résultats par simulation, des données réelles seront utilisées pour établir les performances des algorithmes. La première section explique le montage expérimental. Par la suite, les résultats expérimentaux basés sur les méthodes énumérées aux chapitres précédents, i.e. le chapitre 4 : modèle d'erreur non-linéaire et le chapitre 5 : redondance de capteurs, seront présentés.

7.1 Mise en oeuvre d'une unité de mesures inertielles redondantes

Lors d'un séjour de recherche à l'Université de Sydney (Australian Centre for Field Robotics), une unité de mesures inertielles fut remis en état de fonctionnement ¹. Un premier concept d'acquisition avait été implanté en 1999 dans le cadre d'une thèse [33]. Il s'agissait alors d'un module d'acquisition conçu totalement au centre de recherche et peu compatible avec d'autres modules commerciaux. Dans le but de rendre la plate-forme plus polyvalente, une transition vers une unité d'acquisition commerciale fut entreprise et constitue la partie expérimentale de cette thèse. Seulement la structure mécanique des capteurs fut conservée.

Également, une approche par prototypage rapide fut privilégiée de façon à accélérer le processus de développement. Puisque cette approche n'avait jamais été entreprise dans ce centre de recherche, la contribution fut double : réalisation technique et transfert de connaissance. Tout d'abord, la structure géométrique de l'agencement des capteurs sera présentée ainsi que les caractéristiques des capteurs. Le véhicule d'essai utilisé sera également brièvement décrit. Finalement, les résultats de l'acquisition des signaux seront expliqués.

7.1.1 Capteurs, chaîne d'acquisition et véhicule d'essai

La figure 68 montre une photo de l'installation expérimentale, comprenant l'ensemble des 8 capteurs (4 capteurs d'accélération et 4 capteurs de vitesse angulaire), une carte d'interface et l'ordinateur embarqué.

¹ La section 7.1 fut présentée à la conférence « Institute of Navigation National Technical Meeting », en janvier 2004 [92].

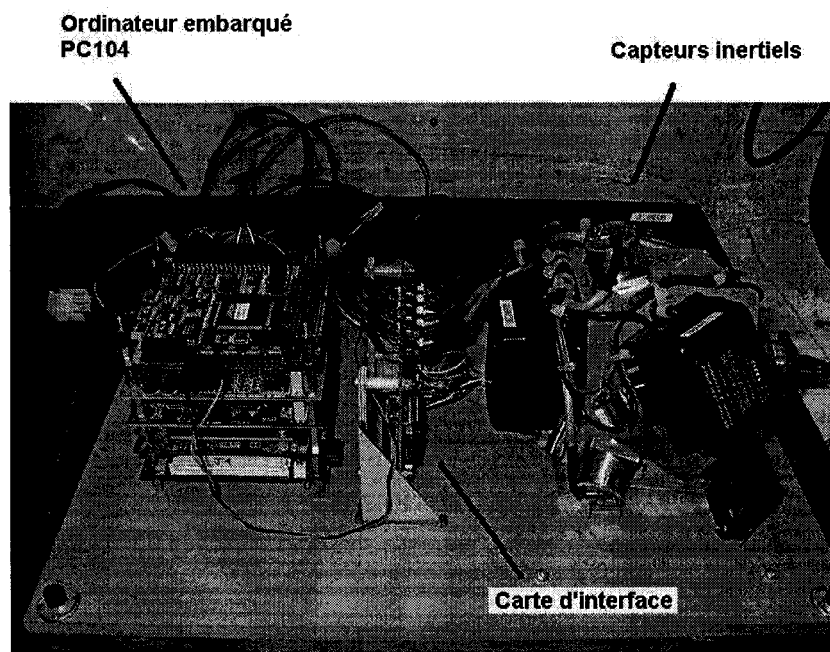


Figure 68 Installation expérimentale

7.1.1.1 Capteurs

Les capteurs sont positionnés sur deux structures tétraédriques imbriquées une dans l'autre. Les faces parallèles de chacun des tétraèdres forment des paires accéléromètres/gyromètres. L'orientation des capteurs est donnée par le tableau X. De plus, l'ensemble est tourné d'un angle de $+19,47^\circ$ par rapport à l'axe Y de façon à ce qu'une paire de capteurs mesure directement l'accélération et la vitesse angulaire de l'axe X, comme illustré à la figure 69.

Les capteurs utilisés sont de type bas de gamme², mais ne sont pas des capteurs basés sur la fabrication MEMS. Les accéléromètres sont de la série QLC400 de la compagnie Allied Signal, tandis que les gyromètres ont été fournis par la compagnie British Aerospace, et sont de la série « VSG », qui veut dire « Vibrating Structure Gyros » en anglais. Le coût des accéléromètres étaient de 1200 AUD (environ 1000 CND) l'unité en 1999, alors que les gyromètres étaient évalués à environ 2500 AUD l'unité (environ 2000 CND) à cette époque. Les tableaux XI et XII donnent les caractéristiques des capteurs telles que déterminées dans la thèse de Sukkarieh [33].

² Les capteurs datent de 1999. Voilà 5 ans, ces capteurs étaient effectivement caractérisés en tant que bas de gamme. Par contre, comparativement aux capteurs bas de gamme disponibles en 2004, ils peuvent être maintenant considérés comme moyenne gamme. Néanmoins, ce sont des capteurs de type commercial.

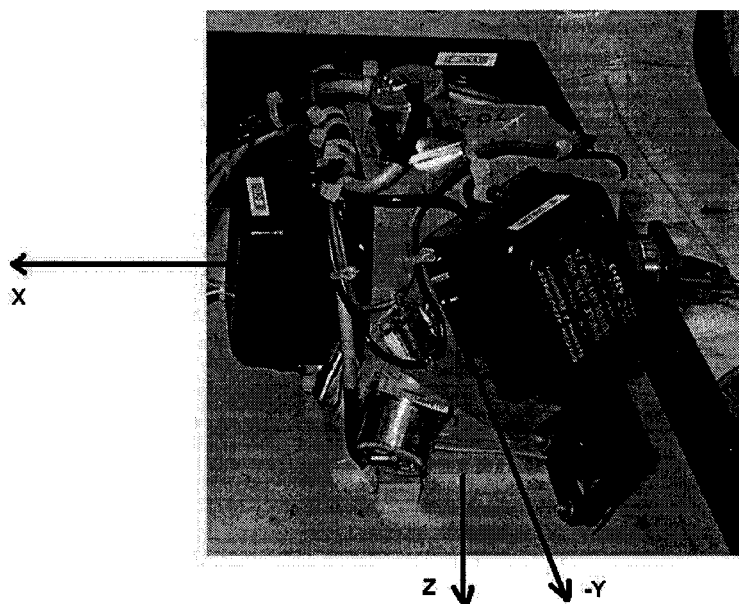


Figure 69 Axes du repère orthogonal associé avec le Tetrad

Tableau X

Orientation des capteurs dans le Tetrad

Capteurs	Azimut	Élévation	Capteurs	Azimut	Élévation
Acc 0	0	-19,47	Gyro 0	0	-19,47
Acc 1	120	-19,47	Gyro 1	120	-19,47
Acc 2	240	-19,47	Gyro 2	240	-19,47
Acc 3	0	-90	Gyro 3	0	90

Tableau XI
Caractéristique des gyromètres

Spécifications	Gyro 0	Gyro 1	Gyro 2	Gyro 3
Plage de mesure [<i>deg/s</i>]	±500	±200	±200	±200
Facteur d'échelle nominal [<i>mV/deg/s</i>]	10,06	24,83	24,72	24,88
Biais à 20 deg C [<i>deg/s</i>]	0,04	-0,07	0,013	0,028

Tableau XII
Caractéristique des accéléromètres

Spécifications	Acc 0	Acc 1	Acc 2	Acc 3
Plage de mesure [<i>g</i>]	≤ 20	≤ 20	≤ 20	≤ 20
Facteur d'échelle nominal [<i>mA/g</i>]	1.333	1.344	1.33	1.327
Biais [<i>mg</i>]	0,3	-0,8	3,2	3,3

7.1.1.2 Chaîne d'acquisition

La chaîne d'acquisition des capteurs inertiels est composée d'une carte d'interface et d'une carte d'acquisition jumelée à un ordinateur embarqué. La figure 70 illustre le concept d'acquisition pour les accéléromètres.

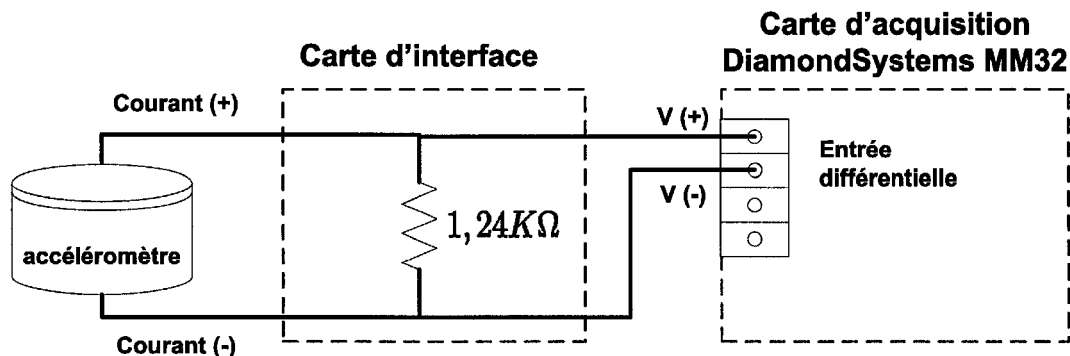


Figure 70 Chaîne d'acquisition

La carte d'interface est nécessaire pour faire la transition entre les signaux des capteurs et l'acquisition du signal. En effet, le signal des accéléromètres est un courant électrique et la carte d'acquisition mesure une tension électrique. De plus, puisque la plage de mesure de $\pm 20g$ est beaucoup trop grande pour l'application envisagée, une réduction de la plage de mesure (et donc une augmentation de la sensibilité) a été conçue. En admettant une acquisition de tension à $\pm 5V$, une résistance de charge de $1,24 K\Omega$ donnera une plage réduite de $\pm 3g$, ce qui est amplement suffisant. Pour les gyromètres, une résistance de charge doit également être introduite tel que spécifié dans la fiche technique. Par contre, aucune modification de la plage ne peut être introduite.

La carte d'interface est également utilisée pour acquérir des signaux de température. Huit capteurs de température sont utilisés pour obtenir la température de la surface des capteurs inertiels. De plus, un circuit de modulation par pulsation alimente des éléments chauffant pour augmenter la température de la structure métallique sur laquelle les capteurs sont fixés. En utilisant des petits ventilateurs et en recouvrant l'installation d'un boîtier, la température est relativement uniforme à l'intérieur du boîtier. Ainsi, un circuit de contrôle de la température en boucle fermée peut être conçu de façon à stabiliser les erreurs des capteurs. Dans le cadre de la thèse, cet aspect n'a pas été traité.

7.1.1.3 Carte d'acquisition et ordinateur embarqué

Un ordinateur de type PC104 a été intégré à l'ensemble et constitue l'unité d'acquisition. Le module central est un processeur Pentium Mobile 266 MHz avec 128 Mo de mémoire vive. La carte d'acquisition est de type Diamond Systems MM32. Principalement, la carte d'acquisition possède 16 canaux différentiels à représentation de 16 bits. Avec cette représentation à 16 bits, la résolution disponible est beaucoup plus grande que la précision des capteurs ($1\mu g$ pour les accéléromètres et $6 \times 10^{-3} \text{ deg/s}$ pour les gyromètres). La cadence maximale d'échantillonnage est de 200 000 échantillons par seconde. Également, il n'y a pas de filtre anti-repliement intégré dans cette carte d'acquisition. Pour plus d'information, se référer à la fiche technique [93].

Pour sa part, le signal GPS (récepteur Ashtech 12 canaux [94]) est reçu par la voie d'un port série RS232 en format NMEA (de l'anglais « National Marine Electronics Association »).

7.1.2 Acquisition de données

Le véhicule utilisé pour obtenir des données de déplacement et les données GPS est illustré à la figure 71(a), tandis que l'installation du matériel à l'arrière du véhicule est montré à la figure 71(b). L'acquisition des signaux est faite à partir de Simulink, tel que présentée à la section 6.4.3.

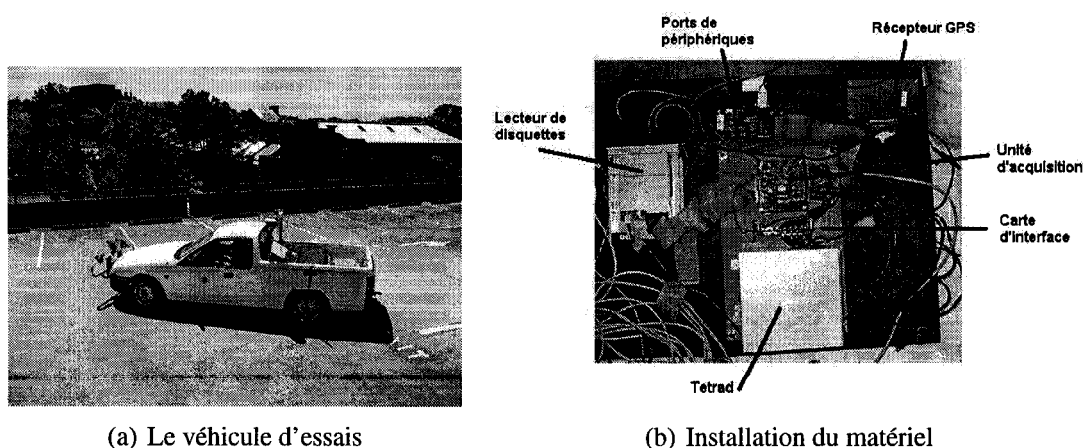


Figure 71 Installation expérimentale

Une trajectoire incluant des courbes et des lignes droites, ainsi que des montés et descentes fut effectuée. Les figures 72(a) et 72(b) montrent le tracé horizontal et la trajectoire verticale, respectivement. Les cercles représentent la position GPS, alors que le trait continu est l'intégration de la vitesse GPS. On voit une certaine différence entre ces deux résultats. La vitesse GPS, puisque'elle provenait d'une installation non-différentielle, est moins fiable.

De plus, la figure 73 donne le nombre de satellites GPS disponible au moment de l'expérimentation. Puisque aucune référence plus fiable n'est utilisée, ce sera les données GPS (non-différentielles) qui serviront de base de comparaison pour la solution de navigation SNI/GPS. La fréquence de rafraîchissement des données GPS est de 1 Hz. On remarque que le nombre de satellites diminue lorsque le véhicule est sur le palier inférieur de la trajectoire (corrélation entre la figure 72(b) et 73).

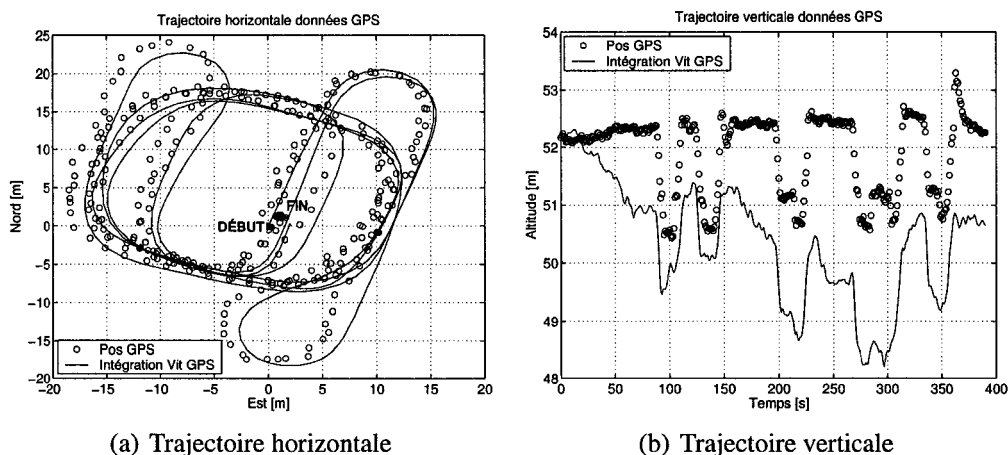


Figure 72 Trajectoire d'essai

Les mesures brutes des capteurs sont reproduites à la figure 74(a) pour les gyromètres, et à la figure 74(b) pour les accéléromètres. Il est clair à partir des données des gyromètres qu'un biais existe dans les mesures, comme le démontre la figure 75 où les 50 premières secondes des mesures sont illustrées. La valeur de sortie des capteurs est non-nulle au repos, alors que la mesure devrait être nulle. Ainsi, en post-traitement, une première calibration pourra être apportée aux mesures en retranchant cette valeur au repos.

En projetant les mesures sur les axes du véhicule (repère mobile B) en utilisant l'équation 5.2 du chapitre 5, on retrouve les mesures d'accélération et de vitesse angulaire dans ce

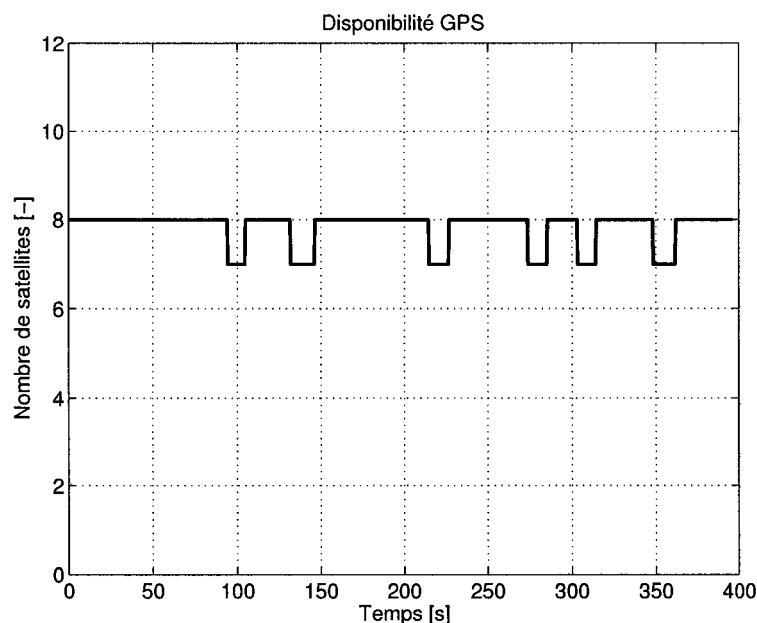


Figure 73 Nombre de satellites disponible

repère, tel qu'illustrées aux figures 76(a) et 76(b). Ce sont entre autre ces mesures qui seront utilisées par la suite pour tester les algorithmes développés au cours de la thèse.

À partir de ces mesures, il est possible de déterminer approximativement le niveau de bruit de mesure dans les capteurs. Le tableau XIII expose la variance du bruit de certains capteurs, alors que les figures 77(a) et 77(b) montrent la spectre de puissance de ces mêmes capteurs. Il est intéressant de noter que le niveau de bruit augmente considérablement lorsque la transmission du véhicule passe du niveau « neutre » au niveau « embrayé ». Ce niveau de bruit supplémentaire est causé par le moteur et le système de transmission du véhicule. On voit en effet que le spectre de puissance des mesures, entre 20Hz et 40Hz, est plus important pour la phase « embrayée » de la transmission que pour la phase « neutre ». On voit d'autant plus cette augmentation avec les figures 78(a) et 78(b), où le spectre de puissance est illustré avec une échelle logarithmique. Finalement, on remarque un niveau de bruit considérable proche de la fréquence de coupure de 100 Hz (occasionnée par la fréquence d'échantillonnage de 200 Hz). Dans la version préliminaire de la chaîne d'acquisition des mesures, un filtre anti-repliement externe n'a pas été conçu. Un tel filtre aurait permis de diminuer le bruit en provenance des hautes fréquences du spectre et sera nécessaire pour la poursuite des travaux, de façon à obtenir de meilleures mesures.

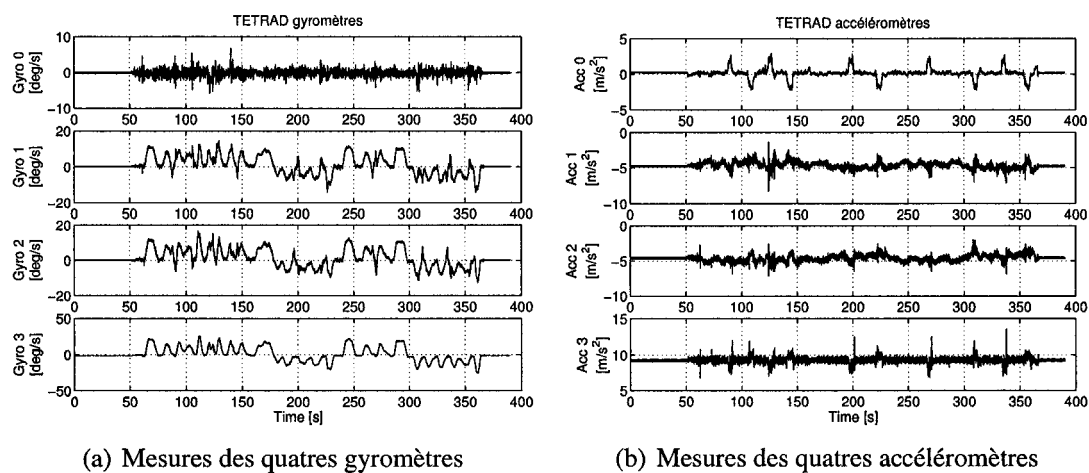


Figure 74 Mesures brutes des capteurs

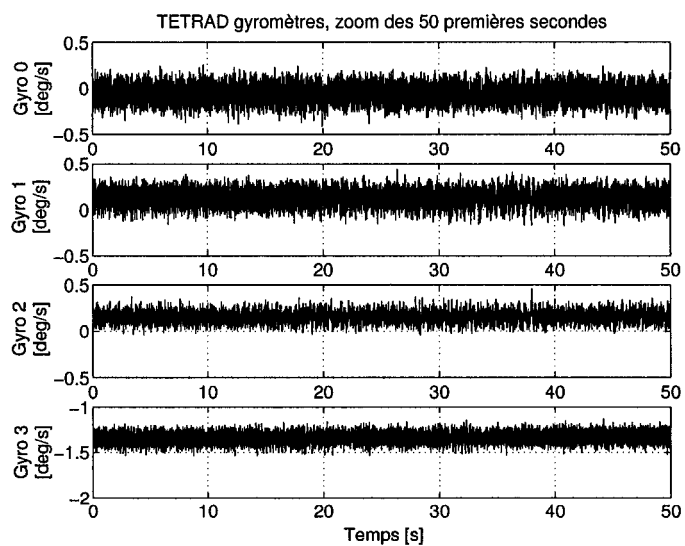


Figure 75 Mesures des gyromètres, zoom des 50 premières secondes

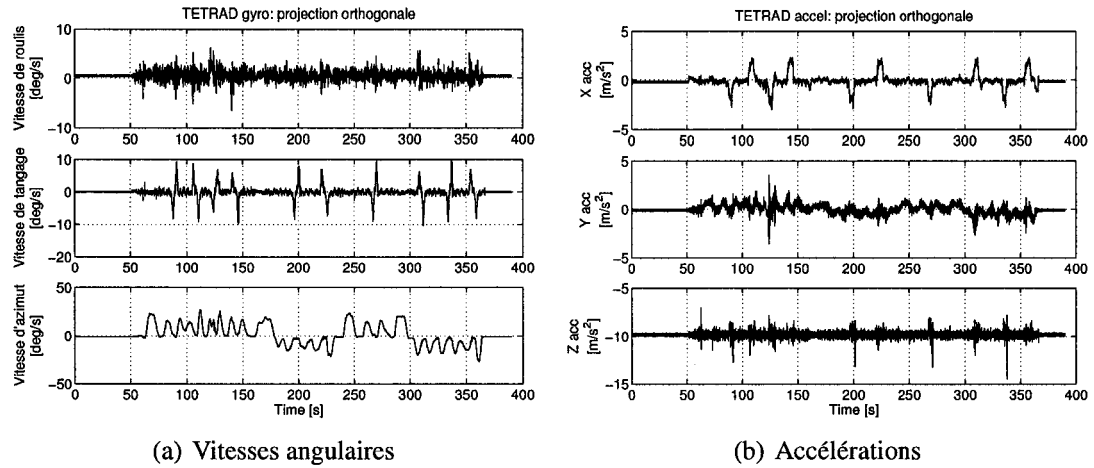


Figure 76 Projection des mesures des capteurs sur le repère mobile B

Tableau XIII

Variance du bruit des capteurs

Transmission	Gyro 0 [$(deg/s)^2$]	Acc 3 [$(m/s^2)^2$]
Neutre	0,0058	0,011
Embrayée	0,16	1,007

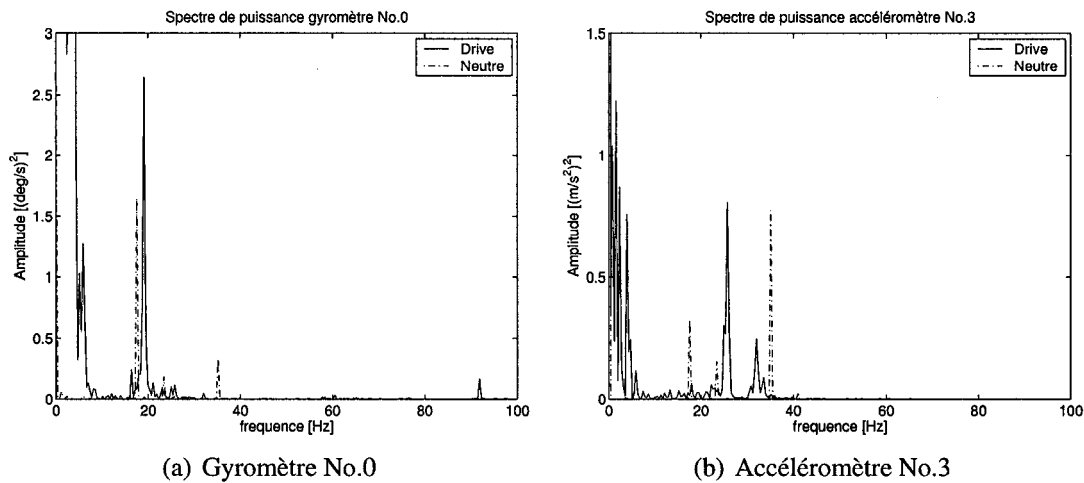


Figure 77 Spectres de puissance des mesures des capteurs

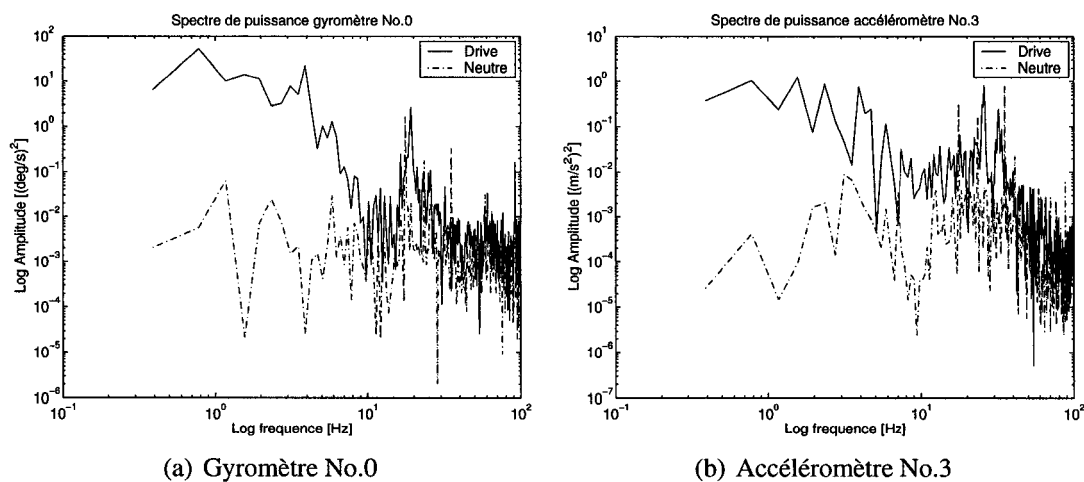


Figure 78 Spectres de puissance des mesures des capteurs, échelle logarithmique

7.2 Algorithme de navigation standard

Avant de passer aux algorithmes développés au cours de la thèse, il s'avère intéressant de procéder avec l'essai de l'algorithme de base utilisant le modèle linéaire.

La premier essai est effectué sans identifier les biais des capteurs. Le filtre de Kalman est ajusté de deux façons : pour que le suivi de position soit serré, avec peu de confiance dans le modèle d'erreur (grande confiance dans les mesures GPS); et pour que la solution de navigation soit uniforme, i.e. sans saut brusque occasionné par une trop grande confiance dans les mesures GPS (grande confiance dans le modèle d'erreur).

Tableau XIV

Pondération du filtre de Kalman

Cas	Pondération Filtre de Kalman
Grande confiance dans le modèle $\Rightarrow$ mesures GPS très filtrées	$\frac{\ Q\ }{\ R\ } \rightarrow 0$
Peu de confiance dans le modèle $\Rightarrow$ mesures GPS peu filtrées	$\frac{\ Q\ }{\ R\ } \rightarrow \infty$

Les figures 79(a) et 79(b) montrent la solution générale de position comparée avec les données de position GPS. Les solutions dans l'axe vertical sont données aux figures 80(a) et 80(b). Pour le plan horizontal, on voit que la solution pour une bonne confiance dans les mesures GPS (ou une faible confiance dans le modèle d'erreur) suit relativement bien les mesures GPS, tandis qu'une grande confiance dans le modèle d'erreur diminue la qualité de la solution. Même constat pour l'axe vertical, alors que même une faible confiance du modèle ne donne pas une solution exacte, quoique meilleure que le cas où les mesures GPS sont moins prises en compte.

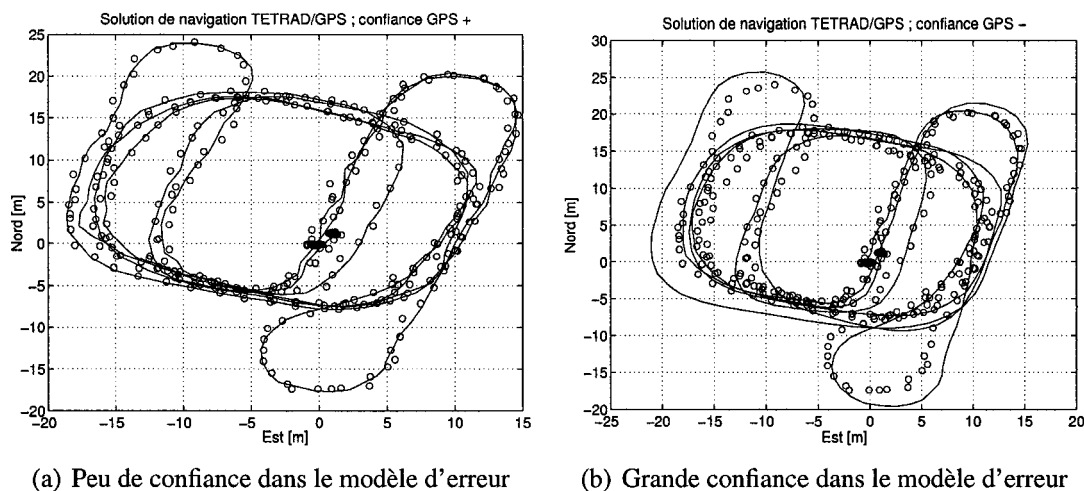
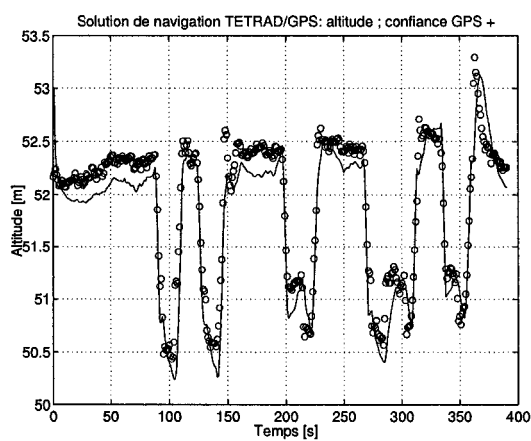
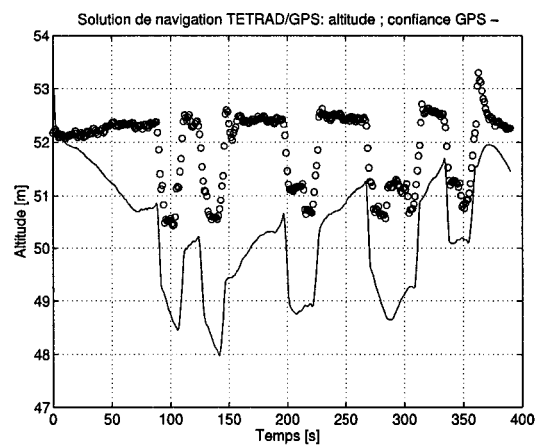


Figure 79 Solutions de navigation horizontale avec modèle d'erreur linéaire, et aucune identification de biais

On peut mieux apprécier ce décalage en regardant l'innovation du filtre de Kalman, i.e. la différence entre l'erreur estimée et l'erreur réelle, montrée aux figures 81(a) et 81(b). Puisque l'innovation n'est pas un bruit blanc (ou plutôt s'en rapprochant) et possède une moyenne non-nulle, le modèle d'erreur ne représente pas parfaitement le comportement du système, et la correction ne peut pas être parfaite, d'où les erreurs dans la solution de navigation pour les cas où la confiance du modèle est mise de l'avant. La structure de l'innovation suggère ainsi une amélioration dans la modélisation. Cette ajout sera concrétisé par la modélisation d'un biais pour chacun des axes du corps en mouvement (contrairement à l'identification des erreurs des capteurs à proprement dit).



(a) Peu de confiance dans le modèle d'erreur



(b) Grande confiance dans le modèle d'erreur

Figure 80 Solutions de navigation verticale avec modèle d'erreur linéaire, et aucune identification de biais

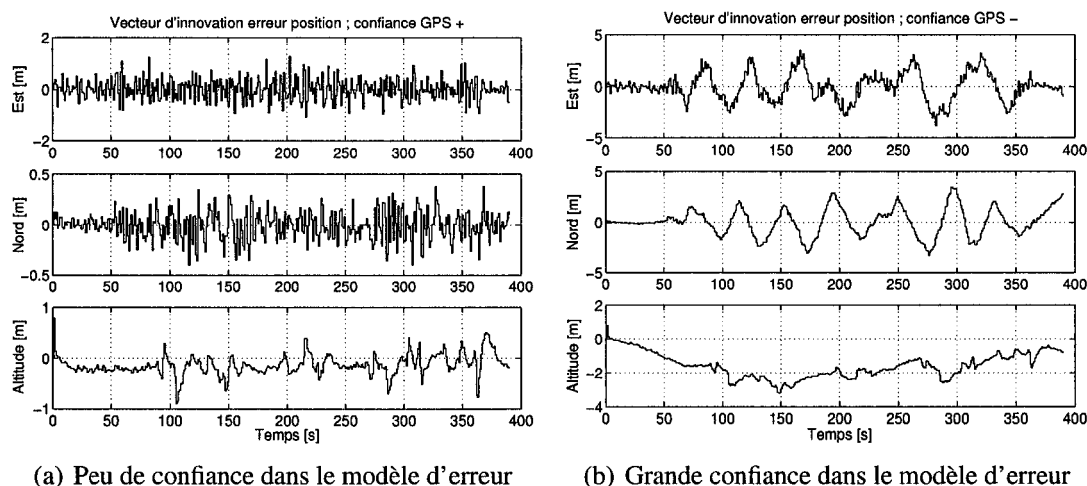
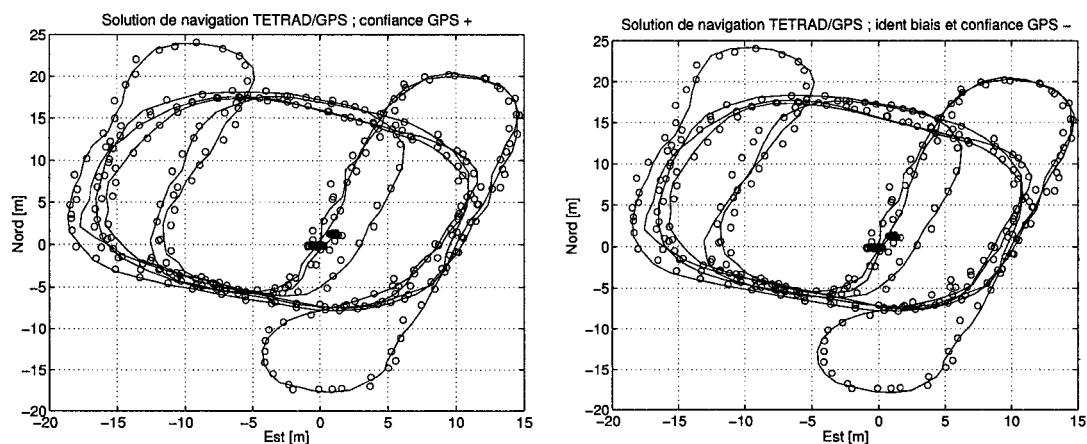


Figure 81 Innovation de l'erreur de position avec modèle d'erreur linéaire, et aucune identification de biais

Les figures 82(b), 83(b) et 84(b) illustrent la solution de navigation pour un modèle d'erreur linéaire et incluant l'identification du biais des capteurs résultant pour chacun des axes du mobile. De plus, le filtre de Kalman est ajusté de façon identique pour la confiance dans le modèle d'erreur que dans le cas précédent, où les mesures GPS étaient moins prises en compte. Les figures 82(a), 83(a) et 84(a) (à gauche des figures ci-haut mentionnées) sont les mêmes que les figures 79(b), 80(b) et 81(b), i.e. avec un modèle d'erreur linéaire sans identification des biais, mais avec une pondération accrue des mesures GPS.

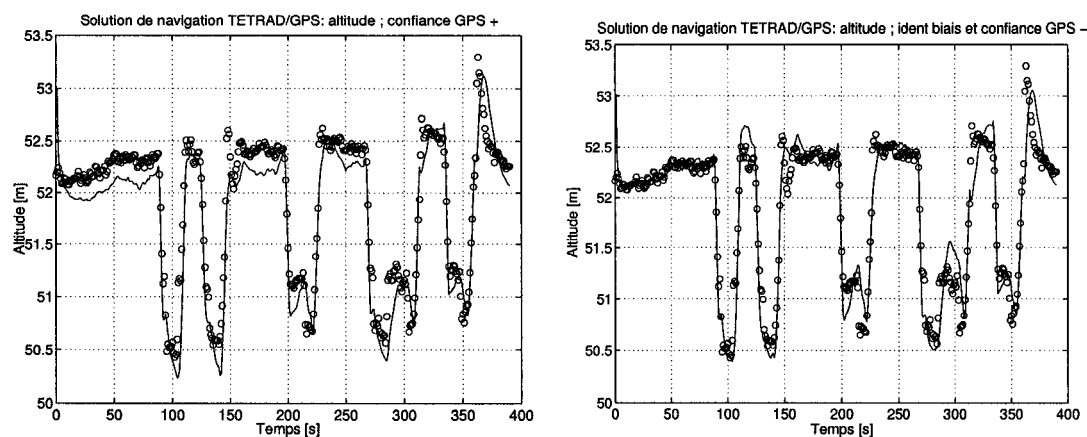
On remarque tout d'abord que le comportement général dans le plan horizontal est similaire, avec également une innovation relativement identique. Par contre, la solution de navigation dans l'axe vertical est améliorée par l'introduction d'un biais dans le modèle, comme on peut également le remarquer par l'innovation de l'erreur d'altitude qui est maintenant plus proche d'un bruit gaussien (du moins avec une moyenne nulle).

À partir de ces trois cas préliminaires, quelques constations peuvent être relevées et seront utiles par la suite. Premièrement, la plus grande partie du biais des gyromètres a été soustraite avant l'utilisation des mesures dans l'algorithme en post-traitement. Ceci a pu être possible avec la phase d'initialisation où il était évident que les mesures de vitesse angulaire devaient être nulles.



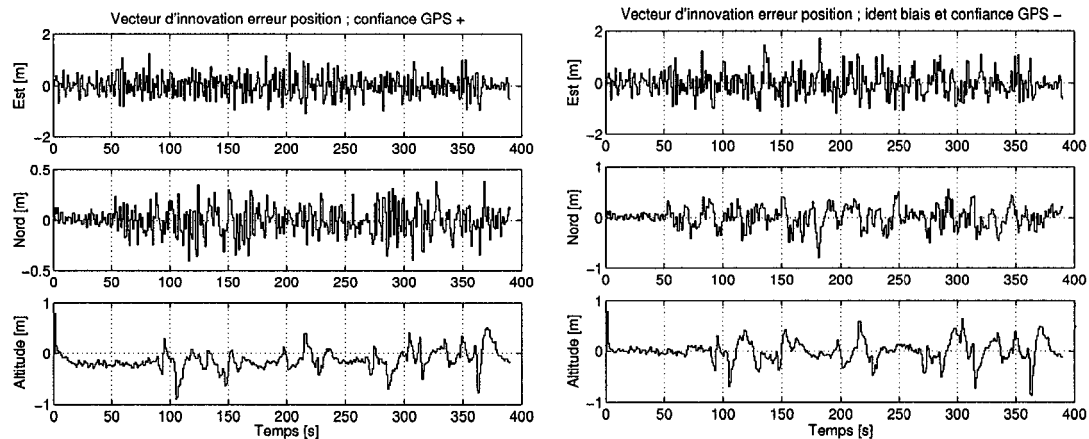
(a) Peu de confiance dans le modèle d'erreur, aucune identification des biais (b) Grande confiance dans le modèle d'erreur avec identification des biais

Figure 82 Solutions de navigation horizontale avec modèle d'erreur linéaire : amélioration par identification des biais



(a) Peu de confiance dans le modèle d'erreur, aucune identification des biais (b) Grande confiance dans le modèle d'erreur avec identification des biais

Figure 83 Solutions de navigation verticale avec modèle d'erreur linéaire : amélioration par identification des biais



(a) Peu de confiance dans le modèle d'erreur, aucune identification des biais (b) Grande confiance dans le modèle d'erreur avec identification des biais

Figure 84 Innovation de l'erreur de position avec modèle d'erreur linéaire : amélioration par identification des biais

De plus, il est possible d'obtenir une solution de navigation sans identifier les erreurs des capteurs, en ajustant le filtre Kalman pour mettre plus d'emphasis sur les mesures GPS. Par contre, cette façon de faire va un peu à l'encontre de la philosophie inhérente aux systèmes inertiels, car le modèle d'erreur est alors peu utilisé dans le filtre de Kalman et les mesures GPS ne sont pratiquement pas filtrées. D'un autre côté, mettre plus d'emphasis sur le modèle d'erreur, si il ne représente pas la réalité, donne une solution de navigation dégradée, comme on l'a vu à la figure 79(b). Ainsi, une bonne représentation du modèle d'erreur est nécessaire, et l'identification des erreurs des capteurs est appropriée. Dans le cas qui a été présenté, seulement l'erreur des axes du repère mobile a été identifiée, et non les erreurs des capteurs à proprement dit. Puisque les capteurs sont fixes par rapport au repère mobile, cette particularité n'affecte pas la performance « globale » du système, mais a une incidence pour la détection et l'isolation des fautes, tel qu'il sera vu à la section 7.4.

Finalement, la solution de navigation pour l'orientation n'est pas facile à valider. En effet, même la mesure d'azimut qui provient du récepteur GPS est en fait un dérivé de la vitesse, et n'est ainsi pas une mesure indépendante de l'orientation. La figure 85 montre les solutions d'orientation pour le cas où les biais sont identifiés et où le modèle d'erreur possède une certaine confiance à l'intérieur du processus de filtrage de Kalman.

Quoique l'on ne peut pas comparer directement ce résultat, il est fort probablement correct. En effet, les changements dans l'angle de tangage correspondent aux descentes et montées du véhicule, tandis que les changements de l'angle de roulis sont occasionnés dans certains cas par le commencement (ou la fin) des descentes (ou montées) avec une trajectoire non-perpendiculaire à la pente. L'évolution de l'angle d'azimut suit la logique des virages successifs. Cette solution d'orientation sera la solution de base pour comparer les performances dans les sections suivantes.

Maintenant qu'il est démontré que l'algorithme de base fonctionne correctement avec des données réelles, les nouveaux algorithmes présentés dans la thèse peuvent être éprouvés. Les sections suivantes présentent donc les résultats pour le modèle d'erreur non-linéaire et pour la redondance des capteurs bas de gamme.

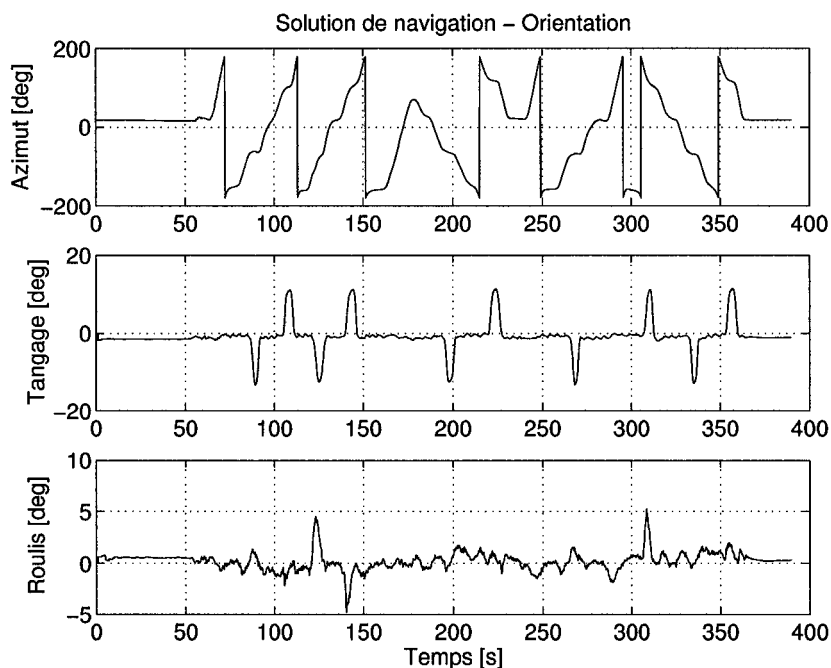


Figure 85 Solution de navigation : orientation

7.3 Modèle d'erreur non-linéaire

Les résultats entourant le modèle d'erreur non-linéaire visent à démontrer expérimentalement les avantages et limitations du modèle comparé aux autres modèles existant. Premièrement, l'implantation du modèle dans Simulink sera détaillée, incluant l'évaluation du temps de calcul réel de l'algorithme.

Par la suite, les modèles d'erreur seront comparés dans le cas où il existe une erreur initiale dans l'angle d'azimut. Ce cas se présente lorsque les capteurs de vitesse angulaire ne sont pas assez précis pour mesurer la vitesse de rotation de la terre (chapitre 2, section 2.6).

Le perte du signal GPS affecte évidemment la performance du système durant la phase de navigation, car le système perd l'observabilité des variables d'état à estimer. Ainsi, une erreur est accumulée et il sera démontré que le modèle d'erreur non-linéaire peut être plus approprié dans un cas particulier où de grandes erreurs sont accumulées.

Finalement, l'algorithme non-linéaire d'identification des erreurs d'un SNI sera appliqué à des données réelles, confirmant la possibilité d'utiliser cet algorithme dans un contexte expérimental.

7.3.1 Implantation et performance temps-réel

Tel qu'expliqué à la section 6.3.3.1 du chapitre 6, la correction en amont de l'intégration des équations de mouvement nécessite la création d'un nouveau bloc d'intégration dans Simulink. De plus, la méthode de correction des équations de mouvement avec le modèle non-linéaire a d'abord été présentée comme impliquant des multiplications matricielles, comparativement à la méthode standard où la correction est une addition de matrice. Au lieu de créer un nouveau bloc d'intégration où la correction est une multiplication, l'équation de correction pour l'erreur non-linéaire d'orientation sera transformée en une addition. En effet, en utilisant une approche similaire à la section 4.3, nous obtenons la correction non-linéaire à additionner.

$$\begin{aligned}
 {}^{N^c}C_{B^c}^{(+)} &= {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} {}^{B^t}C_{B^c}^T \\
 &\approx \left(I + S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\} \right) {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} \left(I - I + {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) \\
 &\approx {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} + S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} - {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} \left(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) \\
 &\approx {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} + {}^N\delta C_B
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

où

$${}^N\delta C_B = S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} - {}^{N^c}C_{B^c}^{(-)} \left(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) \tag{7.2}$$

Le sous-bloc de contrôle de l'erreur a également été modifié pour prendre en compte la structure des quaternions. En effet, lorsque l'algorithme de contrôle de l'erreur applique

la correction aux équations de mouvement, le vecteur d'état doit être ré-initialisé à une valeur nulle. Pour les quaternions, la valeur nulle (erreur en rotation nulle) est représenté par l'équation 7.3.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ré-initialisation} & & \\
 \text{erreur orientation} & & \\
 [\vec{\psi}]_{N^c}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \Longleftrightarrow & {}^{B^c}\underline{q}_{B^t}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.3) \\
 \text{Modèle d'erreur linéaire} & & \text{Modèle d'erreur non-linéaire}
 \end{array}$$

Pour ce qui est du filtre de Kalman étendu, l'implantation dans Simulink reste la même que celle présentée au chapitre 6, mais en prenant en considération que le modèle d'erreur doit être linéarisé à chaque pas de calcul avec la nouvelle estimation du vecteur d'erreur. La linéarisation est donnée à la section 4.5.1 du chapitre 4, alors que l'algorithme du filtre de Kalman étendu est donné à l'annexe 1.2.

7.3.1.1 Temps de calcul d'un cycle du filtre de Kalman

Le temps de calcul pour un cycle du filtre de Kalman étendu est évalué pour les modèles d'erreurs non-linéaires, le modèle de Kong et le modèle linéaire. La figure 86 illustre les temps de calcul pour le filtre de Kalman uniquement. On remarque que les modèles linéaire et de Kong sont relativement similaires. C'était prévisible puisque les deux modèles possèdent le même nombre de variables d'état, facteur important dans l'effort de calcul du filtre. On peut justement remarquer cet effort supplémentaire dans le cas du modèle non-linéaire (10 variables d'état) où l'effort de calcul est plus grand. Par contre, l'étape de linéarisation est du même ordre de grandeur.

En évaluant le temps de calcul total (intégration des équations de mouvement, contrôle de l'erreur et filtre de Kalman) pour les trois modèles, on remarque que le modèle non-linéaire est plus exigeant et ne rencontre pas la limite de fréquence d'échantillonnage de 200 Hz établie précédemment à la section 6.5.2. Son utilisation impliquera donc une diminution de la cadence d'échantillonnage. Il reste tout de même que l'implantation en temps réel du modèle non-linéaire est tout à fait possible.

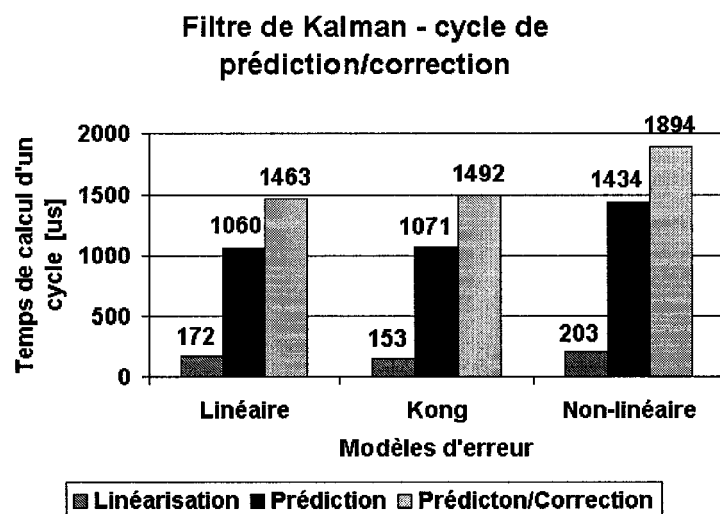


Figure 86 Temps de calcul réel maximal pour un cycle du filtre de Kalman pour différents modèles d'erreur

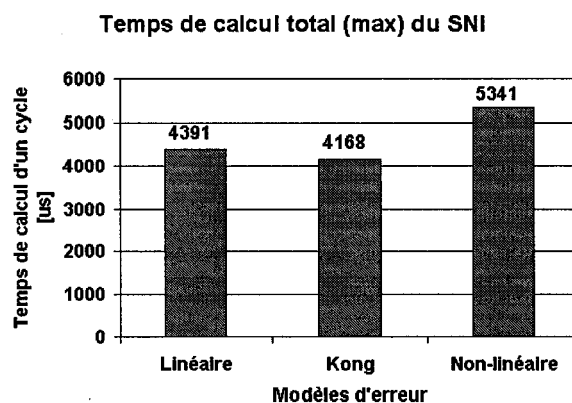


Figure 87 Temps de calcul réel maximal pour un cycle de l'ensemble des algorithmes (utilisant différents modèles d'erreur)

7.3.2 Robustesse envers l'erreur d'initialisation

Tel qu'indiqué auparavant, l'initialisation de l'azimut pour un SNI avec capteurs bas de gamme n'est pas possible en adoptant la méthode standard. Ainsi, si un compas électronique n'est pas utilisé pour initialiser l'azimut, une grande erreur d'azimut est prévisible et le filtre de navigation doit pouvoir estimer cette erreur rapidement et corriger les équations de navigation. Une première évaluation de la robustesse des estimateurs est effectuée avec une trajectoire rectiligne simulée, incluant des accélérations et décélérations, et est illustrée à la figure 88(a). Dans un deuxième temps, une autre trajectoire rectiligne, mais comportant moins de dynamique, sera testée. Cette seconde trajectoire est illustrée à la figure 88(b).

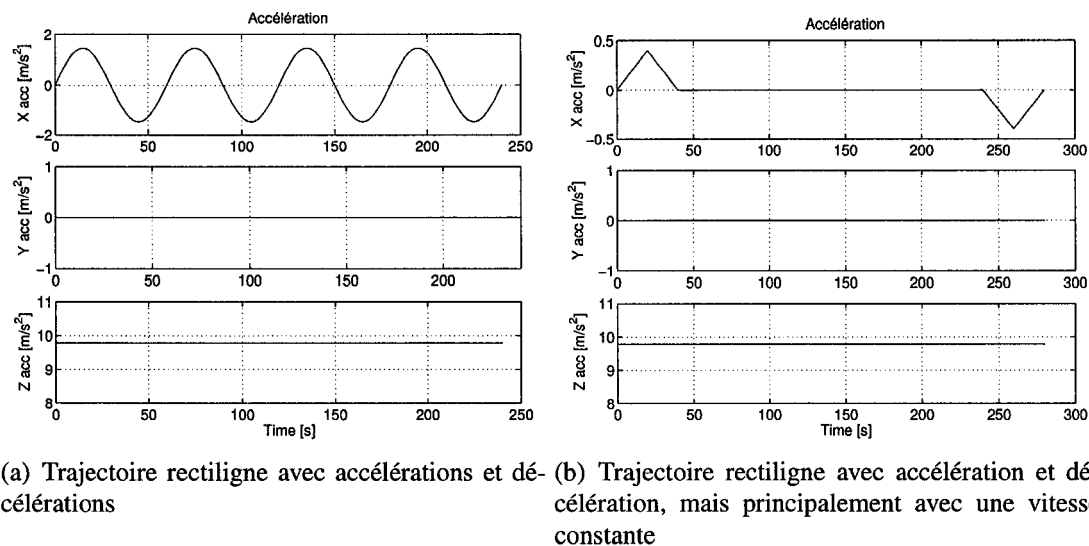


Figure 88 Trajectoires (accélérations) utilisées pour l'évaluation de la robustesse à l'erreur d'azimut

La figure 89 illustre les résultats pour la trajectoire avec accélérations et décélérations, donnant une bonne dynamique et une observabilité complète de l'orientation. Ainsi, pour des faibles erreurs d'azimut, le comportement des deux algorithmes est similaire, tel qu'appuyé par la théorie. Par contre, à des erreurs importantes, le temps de convergence pour le modèle non-linéaire est beaucoup plus petit, permettant une utilisation efficace du filtre plus rapidement pour la navigation normale, suite à cette initialisation en-ligne de l'azimut. Évidemment, ces résultats pour différentes erreurs d'azimut sont pour un réglage de

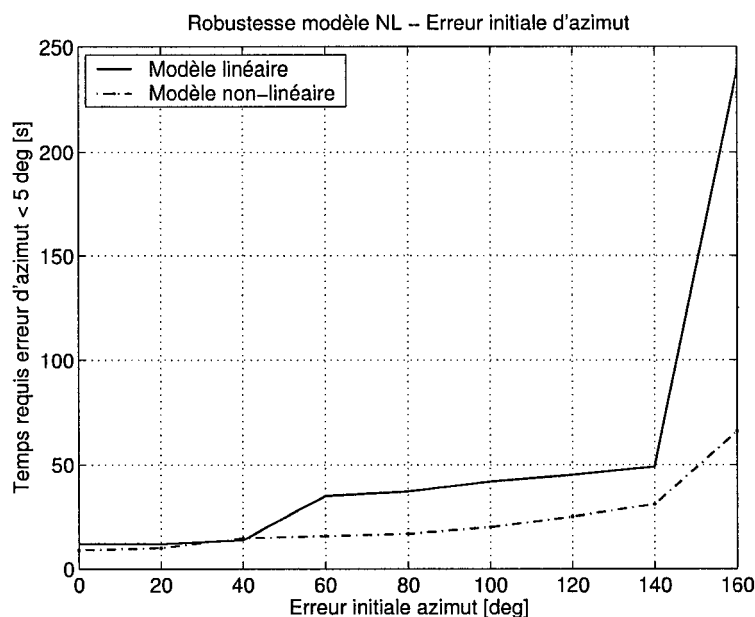


Figure 89 Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'initialisation en azimut, avec une trajectoire comportant une bonne dynamique

filtre de Kalman, qui doit être assez souple pour allouer de grandes erreurs, tout en étant assez précis lorsque les erreurs sont dans une domaine acceptable.

En utilisant une trajectoire de test avec une relative faible accélération et une vitesse constante, on remarque l'effet sur l'identification de l'erreur d'azimut. En effet, une accélération nulle dans les axes horizontaux rend inobservable l'erreur d'azimut. Ainsi, une identification rapide de l'erreur est importante pour les trajectoires ayant une dynamique faible, et le modèle non-linéaire semble être approprié pour répondre à ce cas.

Finalement, la pondération utilisée pour accepter de larges erreurs d'orientation initiale (valeur initiale de la matrice de covariance des erreurs - P_0) dans le filtre de Kalman est différente de la pondération qui devrait normalement être utilisée dans la phase de navigation. Ainsi, un algorithme d'adaptation pourrait être utilisé pour modifier la pondération dans le filtre de Kalman lorsque l'erreur d'azimut estimée est inférieure à une certaine limite. Il existe aussi le cas où le modèle d'erreur dans le filtre de Kalman peut être simplement changé, comme Kong [47] et Scherzinger [46] l'ont fait. Néanmoins, l'approche d'adaptation du filtre semble donner plus de flexibilité.

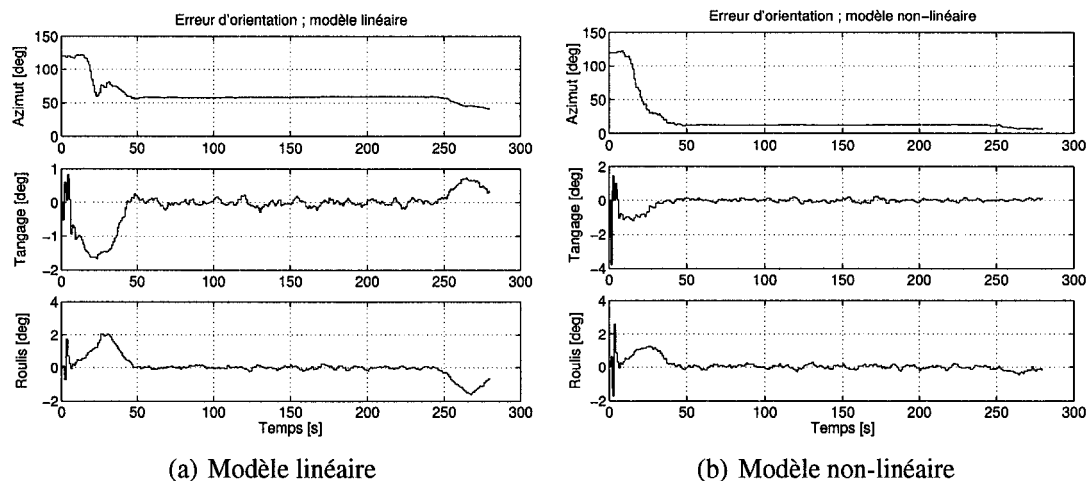


Figure 90 Réduction de l'erreur d'orientation avec une erreur d'azimut initiale de 120° selon les modèles utilisés, avec une trajectoire comportant une vitesse constante

7.3.3 Robustesse face à la perte du signal GPS

Lors de la perte du signal GPS (ou de la mesure externe dans le cas général), le filtre de Kalman fonctionne seulement dans le mode de prédiction. Plusieurs cas peuvent alors se présenter.

Premièrement, si les erreurs des capteurs ont été estimées préalablement à la perte du signal, et que les capteurs ont été calibrés en-ligne, une perte de signal occasionnera évidemment une dégradation de la précision de la solution de navigation, mais elle sera récupérable lors de la reprise des mesures externes.

D'un autre côté, si on identifie les erreurs des capteurs, mais qu'on ne calibre pas en-ligne les capteurs, il est toujours possible de corriger la solution de navigation avec la prédiction des erreurs seulement, avec comme limitation le degré de confiance dans l'estimation des erreurs préalable à la perte du signal externe.

Dans ces deux premiers cas, le modèle non-linéaire ne se démarque pas du comportement du modèle linéaire à cause de la structure d'opération du filtre de Kalman étendu. En effet, puisque le système est linéarisé avec l'estimation des erreurs en temps réel, et que les erreurs estimées sont ré-initialisées lors de la correction en amont des équations de mouvement, les erreurs estimées demeurent relativement petites dans le temps.

Un troisième cas concerne un modèle d'estimation des erreurs de navigation qui ne possède pas d'estimation des erreurs des capteurs, et donc aucune calibration en-ligne. Quoique cette approche est de moins en moins utilisée à cause des erreurs inhérentes aux capteurs bas de gamme, la problématique engendrée par ce cas s'apparente à la robustesse d'initialisation avec des grandes erreurs d'orientation. En effet, puisque les capteurs ne sont pas calibrés, ils contiennent des erreurs qui sont propagées (entre autre) dans la solution d'orientation. Puisque la perte du signal externe engendre un arrêt de l'estimation de l'erreur d'orientation, l'erreur dans la solution d'orientation sera sans cesse croissante. Lors de la reprise du signal externe, une grande erreur d'orientation est à prévoir et le filtre doit être préparé à faire face à cette grande erreur. De plus, l'erreur d'orientation n'est plus seulement en azimut, mais bien dans les trois axes de déplacement.

Une analyse similaire à celle précédente est effectuée, où des erreurs d'orientation initiale sur les trois axes sont appliquées à l'algorithme de navigation. Les réponses des algorithmes pour l'erreur de roulis, de tangage et d'azimut sont présentées aux figures 91(a), 91(b) et 92, respectivement. On remarque tout d'abord que le temps de convergence pour les grands angles semblent coïncider avec le temps de convergence pour les petits angles. En fait, puisque les erreurs sont sur les trois axes, l'erreur résultante avec les grandes erreurs revient au cas des petites erreurs (effet de la combinaison des rotations). De plus, on peut remarquer que les erreurs de tangage et de roulis sont facilement identifiables, puisque leur observabilité provient du vecteur de gravité qui est toujours présent (figures 91(a) et 91(b)). Par contre, l'erreur d'azimut prend toujours plus de temps, mais le temps de convergence est amélioré avec l'utilisation du modèle non-linéaire (figure 92).

Par la suite, il est possible de faire un lien entre l'erreur d'orientation et la qualité des capteurs et le temps de perte du signal. De façon théorique, on peut voir à la figure 93 que le modèle non-linéaire permet l'utilisation de capteurs de moindre qualité. En effet, si on désire obtenir un temps de recouvrement de 30 secondes pour l'erreur d'azimut après une perte de signal GPS, la figure 93 donne la précision des gyromètres en fonction du temps de perte du signal GPS. Ainsi, pour un temps de perte donné, le modèle non-linéaire permet l'utilisation de capteurs de moindre qualité que le modèle linéaire.

Quoique de façon théorique, le modèle d'erreur non-linéaire semble apporter une réponse intéressante au problème des grandes erreurs, l'intérêt pratique de l'approche est discutable pour la phase de navigation. En effet, en utilisant des capteurs bas de gamme, la technique usuelle est d'évaluer les erreurs en ligne et de les retrancher de la mesure des

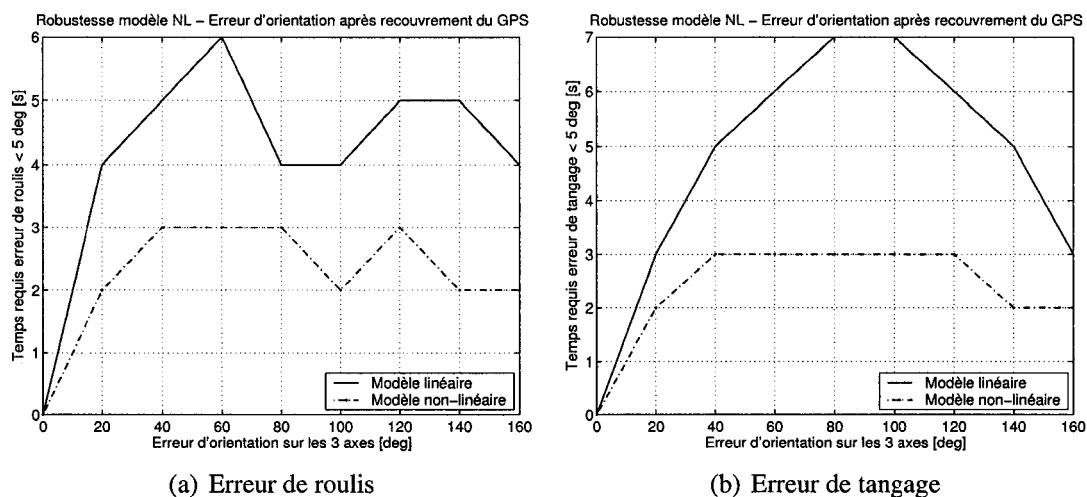


Figure 91 Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'orientation sur les 3 axes

capteurs. Si l'identification des erreurs n'est pas faite, le filtre de Kalman risque fort de diverger à cause de la différence entre le modèle et la réalité, même avec une forte confiance dans les mesures GPS. Cet état de fait fut corroboré par simulation. Ce faisant, l'intérêt du modèle non-linéaire pour la phase de navigation est assez minime. Tout de même, son application pour un cas réel sera fait dans la prochaine section.

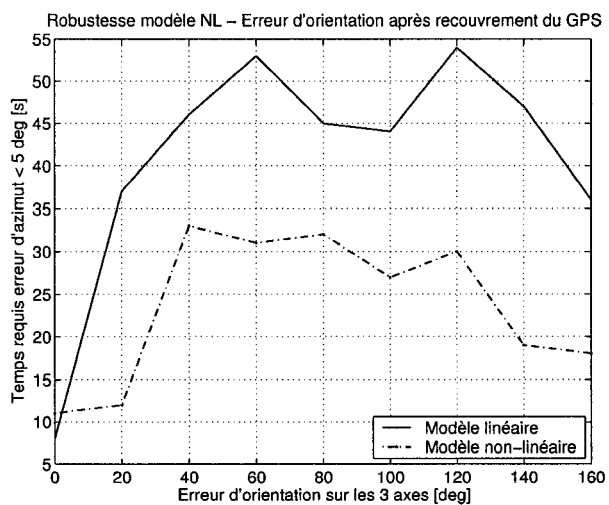


Figure 92 Comparaison de la robustesse des modèles d'erreur face à une erreur d'orientation sur les 3 axes - Erreur de l'angle d'azimut

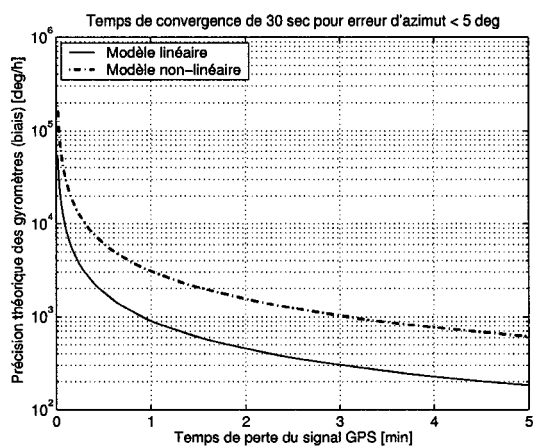


Figure 93 Performance théorique des gyromètres pour obtenir un temps de convergence de l'erreur d'azimut de 30 secondes pour différents période de perte de signal GPS

7.3.4 Application du modèle non-linéaire à un cas réel : fusion Tetrads/GPS

Premièrement, le modèle non-linéaire est appliqué à la fusion entre les capteurs Tetrads et le GPS, tel qu'introduit au début du chapitre. Dans ce premier résultat, la structure d'implantation du modèle non-linéaire inclut également l'identification des erreurs selon les axes du mobile. La solution de navigation avec le modèle non-linéaire est comparée avec la solution de navigation employant le modèle linéaire avec identification des erreurs. Dans la première série de figures (figures 94(a) à 96(b)), la confiance dans le modèle d'erreur est relativement élevée par rapport aux mesures GPS, et cette confiance est la même pour le modèle linéaire et non-linéaire.

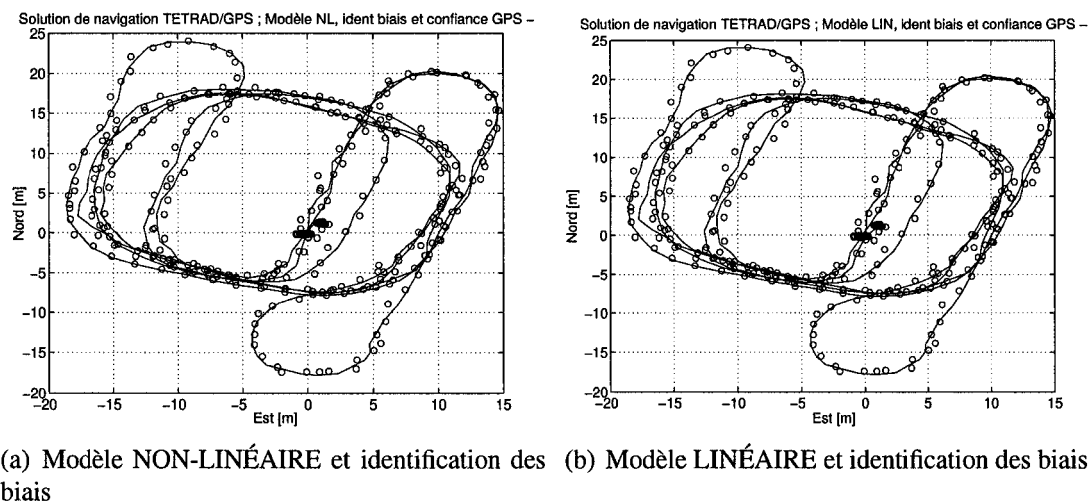


Figure 94 Solutions de navigation horizontale ; Confiance relativement élevée dans le modèle d'erreur

On remarque aucune différence tangible dans la solution horizontale de navigation. L'identification des biais dans le repère mobile et la bonne qualité des mesures GPS dans le plan horizontal rendent la distinction des solutions peu perceptible. Par contre, la solution dans l'axe vertical est meilleure dans le cas du modèle non-linéaire. Puisque la pondération du filtre de Kalman est la même pour les deux modèles, on peut penser que l'identification des biais est peut-être meilleure dans le cas du modèle non-linéaire, ce qui expliquerait la différence dans la solution de position verticale. Justement, en regardant l'innovation de l'erreur de position verticale pour le modèle linéaire, on voit que son comportement est moins proche d'un bruit blanc que ne l'est l'innovation de l'erreur d'altitude pour le modèle non-linéaire. On peut améliorer le comportement de la solution du modèle linéaire en réduisant la pondération de confiance dans le modèle, de façon à « compenser » pour les biais qui sont moins bien évalués (figures 97(b) et 98(b)).

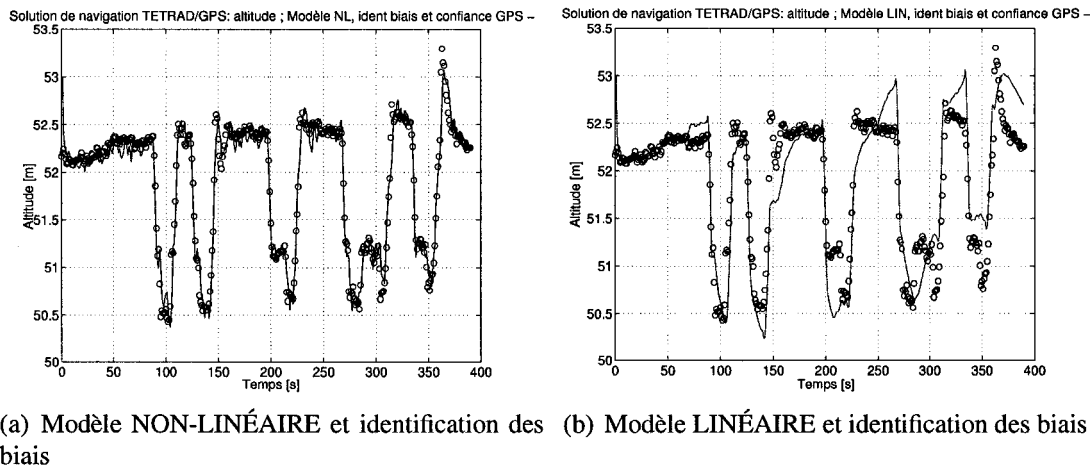


Figure 95 Solutions de navigation verticale ; Confiance relativement élevée dans le modèle d'erreur

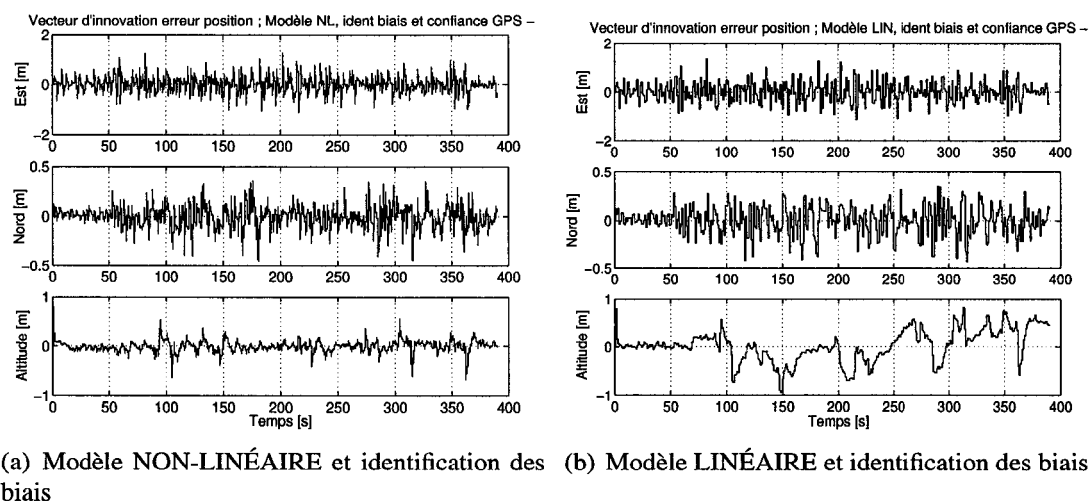


Figure 96 Innovation de l'erreur de position ; Confiance relativement élevée dans le modèle d'erreur

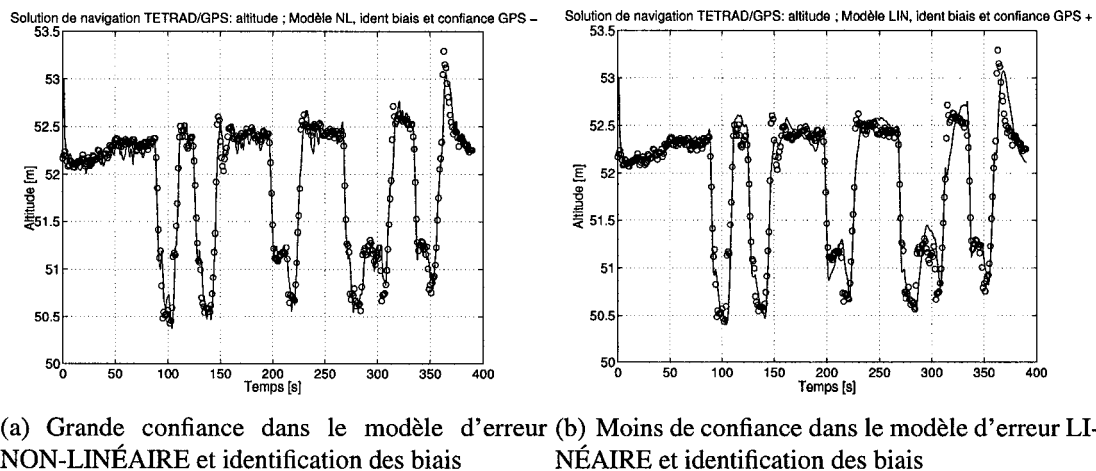


Figure 97 Solutions de navigation verticale : modèle linéaire VS non-linéaire

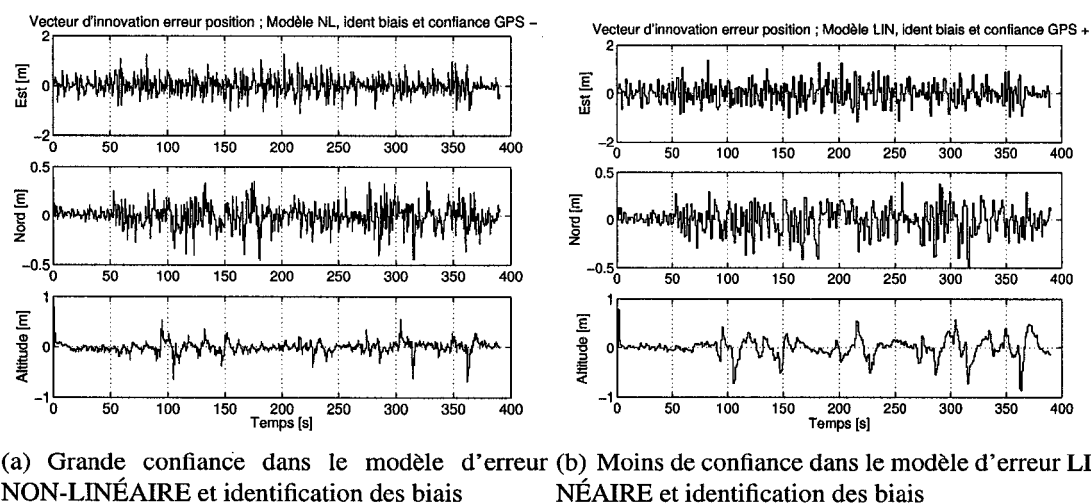
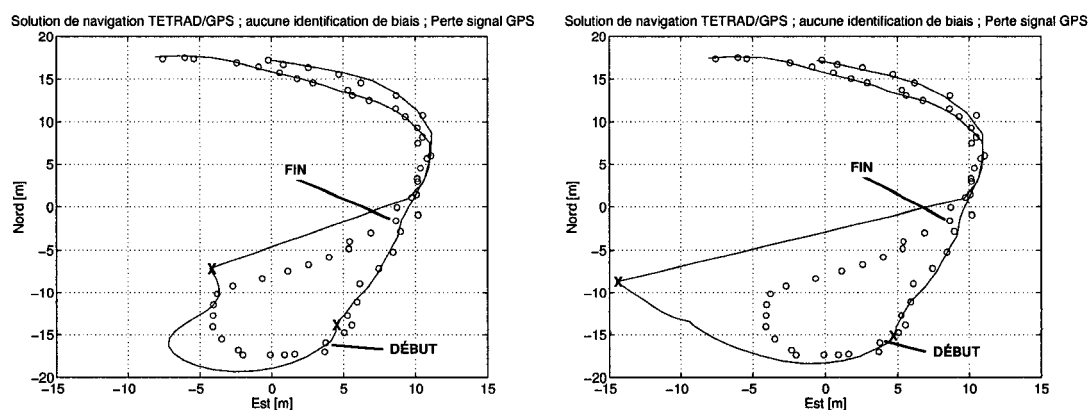


Figure 98 Innovation de l'erreur de position : modèle linéaire VS non-linéaire

Maintenant, si on simule un manquement du signal GPS, on remarque que la calibration en ligne des capteurs est nécessaire. En effet, les figures 99(a) et 99(b) montrent la trajectoire horizontale alors que le signal GPS est perdu pour une durée de 20 secondes, pour les modèles linéaire et non-linéaire, et pour le cas où les capteurs ne sont pas calibrés en ligne (et aucune identification de biais). Également, les figures 100(a) et 100(b) illustrent l'évolution de l'erreur de position nord, est et en altitude, en fonction du temps.



(a) Modèle NON-LINÉAIRE et aucune identification des biais
(b) Modèle LINÉAIRE et aucune identification des biais

Figure 99 Solutions de navigation horizontale ; aucune identification des biais ; perte de signal GPS pour 20 secondes

On remarque sur ces figures un comportement étrange. Durant la perte du signal GPS, les équations de mouvement sont simplement intégrées à partir des mesures fournies par les capteurs d'accélération et de vitesse angulaire. Quoique les équations et les entrées sont les mêmes, les solutions ne le sont pas. Une explication possible à ce phénomène est que les conditions initiales à l'intégration pure (i.e. la solution de navigation au moment de la perte du signal GPS) n'est pas la même pour les deux algorithmes, puisque les modèles linéaire et non-linéaire ont corrigés leur équations de mouvement respectives de façon différente. En effet, le tableau XV illustre la solution d'orientation au moment de la perte de signal GPS pour les deux algorithmes, et on remarque la différence. Les solutions de vitesse et de position sont relativement similaires. En appliquant les conditions initiales de l'algorithme utilisant le modèle non-linéaire à l'algorithme utilisant le modèle linéaire, on devrait retrouver la même trajectoire pour la partie intégrée sans le signal GPS. La figure 101 montre l'intégration des équations de mouvement dans le contexte d'application du modèle linéaire mais avec les conditions initiales de l'algorithme employant le modèle non-linéaire, et est représentée par la ligne en trait pointillé. La solution est alors presque identique, sauf pour le dernier segment.

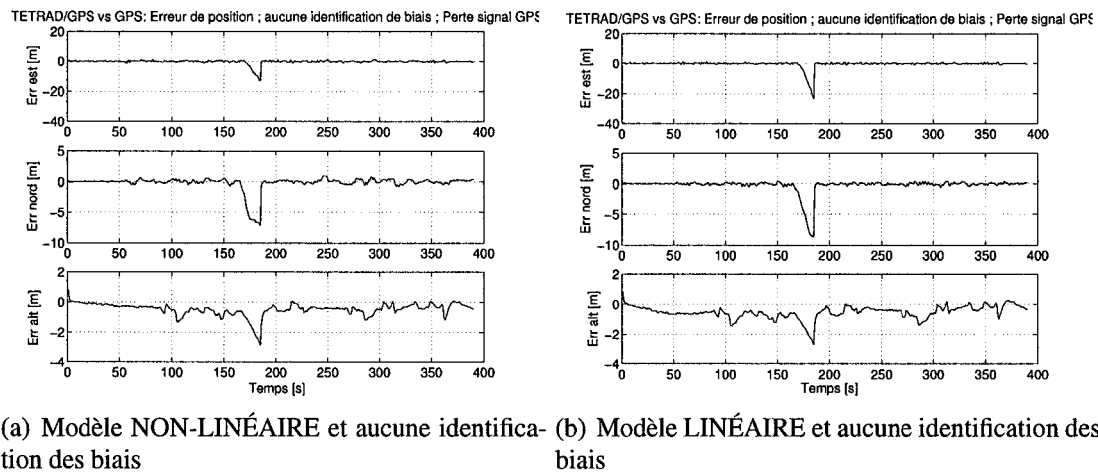


Figure 100 Erreur de position ; aucune identification des biais ; perte de signal GPS pour 20 secondes

Tel que stipulé auparavant, la calibration en ligne des capteurs est nécessaire (ou du moins la rétroaction des estimations d'erreur sur les axes du repère mobile, tel qu'il sera appliqué ici). Les solutions de navigation dans le plan horizontal avec l'estimation des erreurs des axes du repère mobile et appliqué en rétroaction sont montrées aux figures 102(a) et 102(b). L'évolution des erreurs de position en fonction du temps sont d'un autre côté présentée aux figures 103(a) et 103(b), respectivement pour le modèle non-linéaire et pour le modèle linéaire. On remarque une large amélioration dans la solution pour les deux algorithmes d'identification. Néanmoins, il s'est avéré que l'ajustement du filtre de Kalman est très difficile pour les modèles comportant plusieurs paramètres, dont l'estimation des erreurs. Les paramètres appliqués sont ceux qui ont été jugés les plus appropriés, i.e. donnant une réponse la plus favorable pour les modèles utilisés. Quoique le modèle non-linéaire semble à priori donner une meilleure solution, cet avantage est assez minime et très sensible à l'ajustement du filtre de Kalman. Ainsi, l'utilisation du modèle non-linéaire n'est pas vraiment plus avantageux dans le cas de la rétroaction de erreurs des capteurs.

Tableau XV

Solution d'orientation au moment de la perte du signal GPS

Solution d'orientation au moment de la perte GPS	Avec modèle linéaire	Avec modèle non-linéaire	Avec modèle linéaire et identification de biais (figure 85)
Azimut	-106,88°	-146,05°	-124,4°
Tangage	-0,92°	-0,19°	-0,46°
Roulis	0,005°	-0,55°	-0,36°

Solution de navigation TETRAD/GPS ; aucune identification de biais ; Perte signal GPS

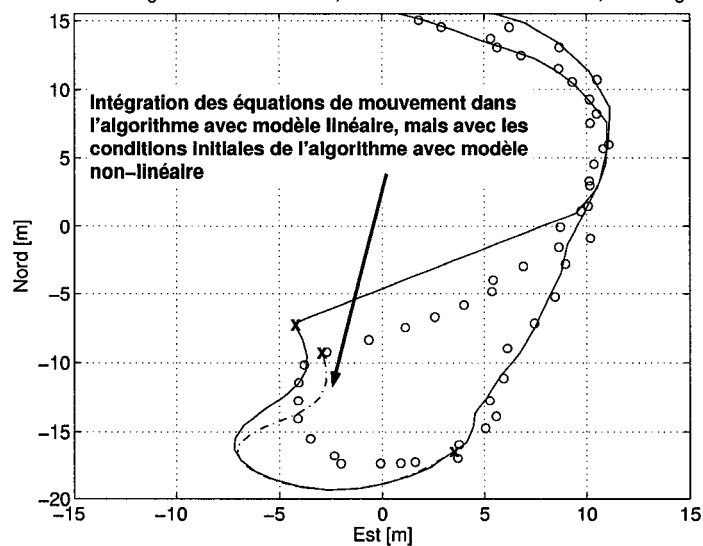


Figure 101 Intégration des équations de mouvement avec les mêmes conditions initiales

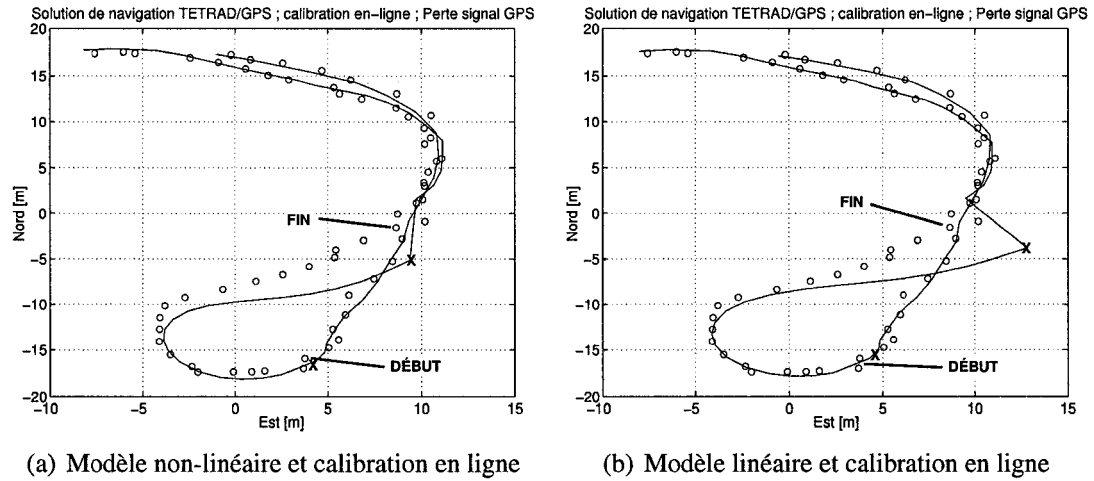


Figure 102 Solutions de navigation horizontale ; calibration en ligne ; perte de signal GPS dans l'intervall $\Delta t = [165s \ 185s]$

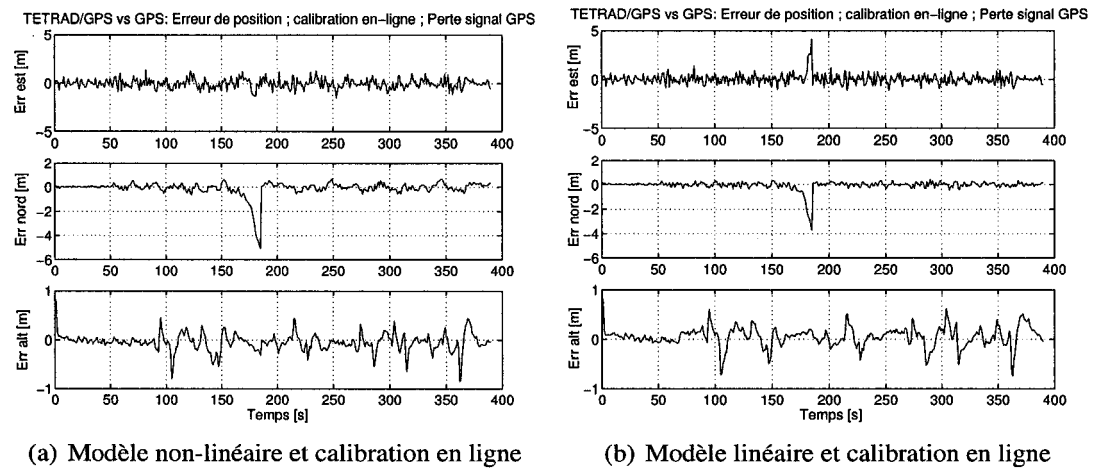


Figure 103 Erreur de position ; calibration en ligne ; perte de signal GPS dans l'intervall $\Delta t = [165s \ 185s]$

7.3.5 Conclusion préliminaire sur le modèle d'erreur non-linéaire

En conclusion préliminaire, le développement du modèle non-linéaire a apporté un regard nouveau sur le développement des modèles d'erreur. Le développement mathématique est rigoureux, ce qui était difficile à trouver dans la littérature (l'approche mathématique de Kong [47] pour établir son modèle est très discutable). Il a été démontré que le modèle recoupe le modèle présenté par Kong et le modèle linéaire couramment utilisé.

L'amélioration des performances apportée par l'utilisation de ce modèle réside dans l'initialisation de l'azimut où de grandes erreurs peuvent survenir. D'autant plus que la dynamique du véhicule est lente, l'identification doit se faire rapidement et le modèle non-linéaire est approprié dans ce cas.

L'application de cet approche sur un cas réel nous montre que l'estimation des erreurs des capteurs (ou l'estimation des erreurs sur les axes du repère mobile) est nécessaire pour obtenir une bonne performance (avec la calibration en-ligne). Il est également important que la solution de navigation soit la plus proche possible de la réalité lorsque le signal GPS est perdu, de façon à ne pas introduire des erreurs supplémentaires induites par des conditions initiales erronées à l'intégration pure des équations de mouvement. Finalement, lorsque les erreurs sont identifiées et corrigées en-ligne, l'intérêt du modèle non-linéaire perd de son importance de par la structure du filtre de Kalman étendu.

Le test des algorithmes avec des données réelles permet d'établir certaines tendances et performances. Par contre, la durée de l'expérimentation est de 400 secondes, ce qui équivaut à un peu moins que 7 minutes. Quoique la durée de l'expérimentation est suffisante pour évaluer les algorithmes de façon préliminaire, des expérimentations plus longues (30 minutes) permettraient de mieux établir la robustesse des algorithmes. En effet, sur des périodes plus longues, les caractéristiques aléatoires du signal GPS deviennent « colorées », ce qui peut diminuer la performance de l'algorithme de fusion des mesures SNI/GPS.

Également, il est important de noter que les tests expérimentaux des algorithmes ont été effectués avec seulement un lot de données. Plusieurs types de trajectoires et de tests expérimentaux seraient nécessaires pour établir plus certainement les performances des algorithmes présentés. Néanmoins, ces tests préliminaires permettent de visualiser les avantages des méthodes présentées.

Également, l'échantillonnage des capteurs inertiels a été effectué à une cadence de 200 Hz. Une fréquence d'échantillonnage plus élevée permettrait de mieux capter toutes les subtilités des déplacements et l'erreur résultante dans la solution de navigation sera moindre (se référer à la figure 59 du chapitre 6). Par contre, à cause de la piètre qualité des capteurs, l'augmentation de la cadence d'échantillonnage aura seulement une petite influence sur la précision de l'ensemble (se référer à la figure 60 du chapitre 6). De plus, la fréquence d'échantillonnage des capteurs n'a pas d'influence sur l'estimation de leurs erreurs dans le filtre de Kalman. En effet, c'est seulement la fréquence des mesures externes qui évaluent l'erreur du SNI qui peut influencer la vitesse ou la précision de l'évaluation des erreurs des capteurs.

Par contre, l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage pourrait réduire le niveau de bruit global en étalant ce bruit sur un plus grand spectre de fréquences. Ce constat est d'autant plus vrai que dans la première étape d'acquisition de signaux, il n'y avait pas de filtre anti-repliement. Ainsi, une plus grande fréquence d'échantillonnage aurait permis d'obtenir des mesures moins bruitées.

7.4 Redondance de capteurs

Cette section traite de la redondance des capteurs bas de gamme, qui a été exposée au chapitre 5. Il a été souligné que les erreurs des capteurs doivent être bien identifiées pour permettre une bonne fusion de leur données. De plus, dans l'optique de détecter et d'isoler les fautes (qui n'est pas un sujet qui a été abordé directement dans la thèse), la correction des erreurs est nécessaire pour diminuer les fausses alarmes. Deux structures d'intégration de la redondance seront évaluées dans cette section : la redondance indirecte sans la mesure du vecteur de parité (qui peut être assimilée à la méthode standard), ainsi que l'approche indirecte avec la mesure du vecteur de parité.

Premièrement, on verra de quelle façon les performances globales du SNI peuvent être améliorées par l'utilisation de la redondance. Par la suite, les méthodes d'identification sont comparées et les temps de calcul réels des approches seront comparés pour évaluer la possibilité d'implantation en temps-réel. Finalement, une discussion complétera le chapitre.

7.4.1 Identification des erreurs des capteurs

L'identification des biais peut se faire à plusieurs niveaux. Premièrement, le biais sur chaque axe du repère mobile B résultant de la combinaison des biais des capteurs redondants peut être identifié. Cette erreur sera alors retranchée de la projection optimale des mesures des capteurs sur chacun des axes. Quoique cette structure peut être implantée sous forme directe, elle ne sera ici utilisée que pour l'implantation indirecte. La figure 104 représente l'implantation Simulink de cette approche. L'avantage de cette approche réside dans la diminution de la longueur du vecteur des variables d'état, diminuant ainsi l'effort de calcul. Par contre, il n'est pas possible de corriger les capteurs directement, ce qui limite cette approche pour l'identification et l'isolation de fautes de capteurs.

Pour palier à ce dernier problème, il faut identifier les erreurs de chacun des capteurs, les corriger et par la suite projeter de façon optimale les mesures corrigées sur chacun des axes du repère mobile B . Cette implantation est représentée à la figure 105, et sera utilisée pour l'approche de redondance indirecte avec mesure du vecteur de parité et pour l'approche de redondance directe (à la différence près que dans l'approche directe, les mesures ne sont pas orthogonalisées avant d'être traitées).

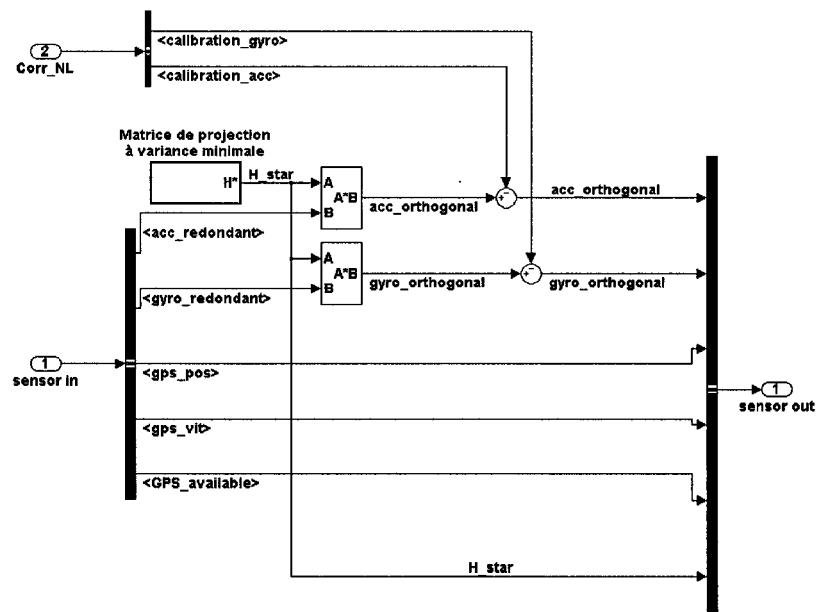


Figure 104 Calibration des erreurs résultantes sur les axes du repère mobile B (calibration en aval)

Pour comparer les approches, la trajectoire (simulée) représentée par la figure 106 est utilisée. Les figures 107(a) et 107(b) illustrent la dynamique de la trajectoire, avec les mesures d'accélération et de vitesse angulaire, respectivement.

Des erreurs de biais sont ajoutées aux mesures des capteurs, en plus du bruit de mesure. Le bruit de mesure pour les accéléromètres est de $4 \times 10^{-4} (m/s^2)^2$, alors que celui des gyromètres est de $1 \times 10^{-5} (rad/s)^2$. Les erreurs de biais sur les capteurs sont données aux tableaux XVI et XVII.

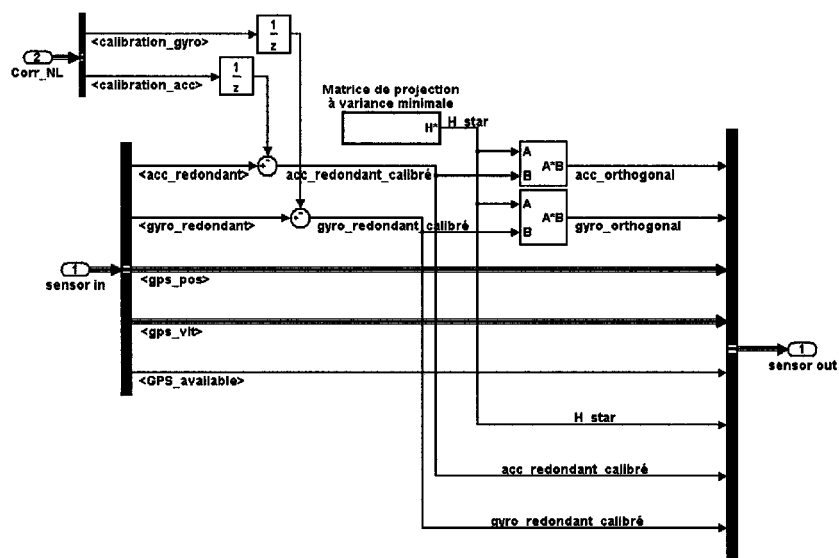


Figure 105 Calibration des capteurs (calibration en amont)

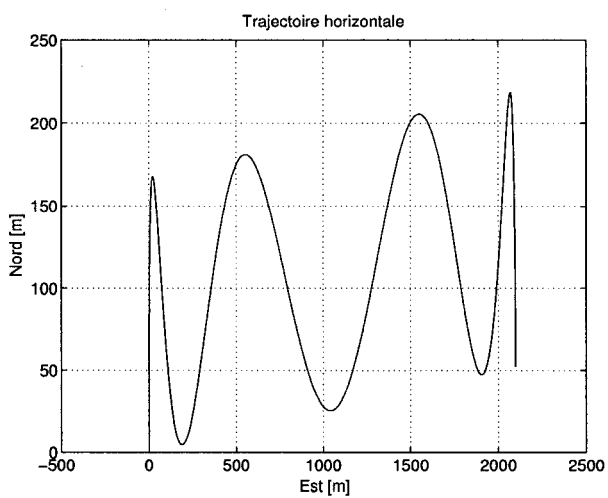


Figure 106 Trajectoire horizontale à altitude constante

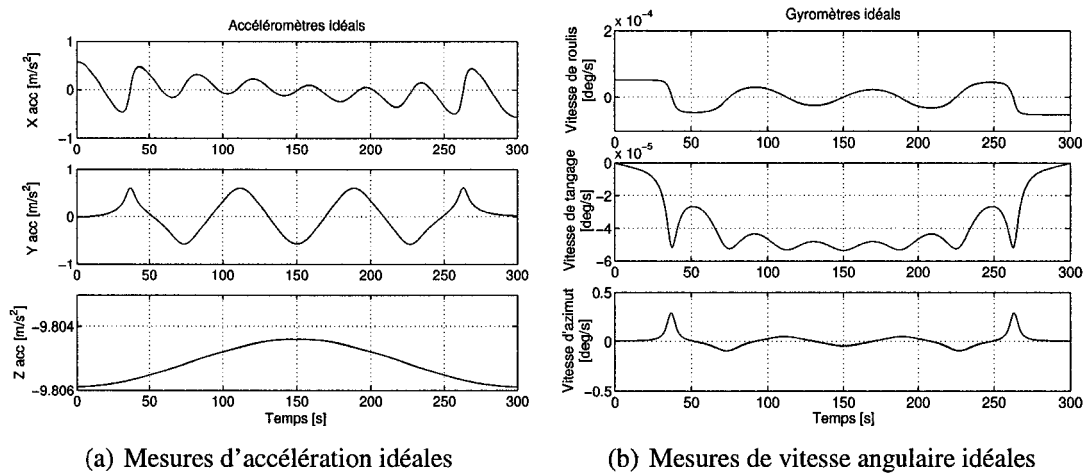


Figure 107 Mesures idéales des capteurs

Tableau XVI

Caractéristique des gyromètres

Biais	No.1	No.2	No.3	Moyenne
Gyro X [deg/h]	10	20	60	30
Gyro Y [deg/h]	100	-40	50	36.67
Gyro Z [deg/h]	50	-10	140	60

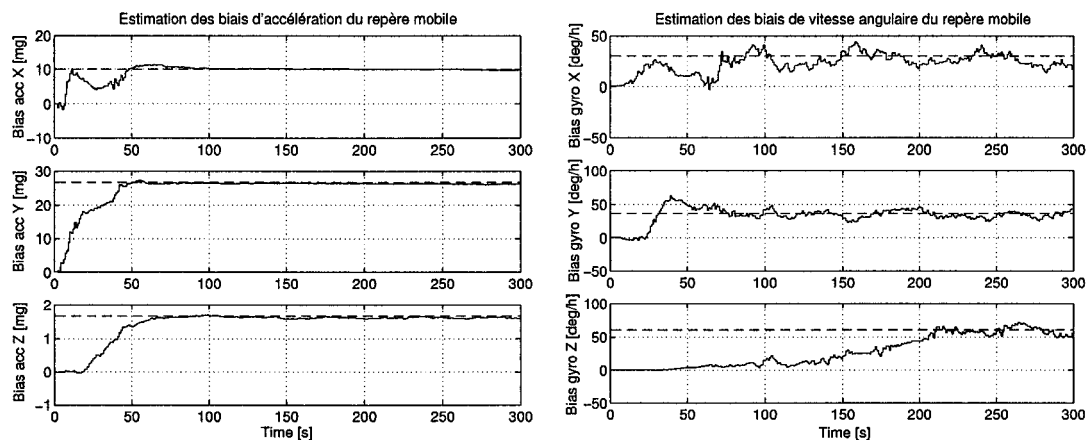
Tableau XVII
Caractéristique des accéléromètres

Biais	No.1	No.2	No.3	Moyenne
Acc X [mg]	5	15	10	10
Acc Y [mg]	30	60	-10	26.67
Acc Z [mg]	10	-25	20	1.67

7.4.1.1 Redondance indirecte

La première simulation illustre l'identification des erreurs résultantes de la projection des erreurs des capteurs sur les axes du repère mobile B , et utilise la calibration en aval, tel que présenté à la figure 104, avec l'approche indirecte de la redondance. Les erreurs identifiées doivent correspondre à la moyenne des erreurs présentées aux tableaux XVI et XVII, car seulement l'erreur résultante sur l'axe du repère B est identifiée. Les figures 108(a) et 108(b) montrent l'identification des biais résultants, qui coïncide avec la moyenne des erreurs de biais, et confirment ce que l'on attendait de cette approche.

De façon à mieux représenter le comportement du système et permettre la détection et l'isolation de fautes, les biais des capteurs sont identifiés séparément et la calibration en-ligne des capteurs est faite en amont telle qu'illustrée à la figure 105. Dans un premier temps, seulement les mesures externes données par le GPS sont utilisées pour identifier les erreurs. Les figures 109 et 110 donnent les résultats de l'identification des biais des capteurs, ceux des accéléromètres et gyromètres, respectivement. Les biais identifiés sont encore une fois la moyenne des erreurs des biais des capteurs, que ce soit pour les accéléromètres ou pour les gyromètres. En effet, avec seulement une mesure externe de la vitesse GPS, l'estimateur (i.e. le filtre de Kalman) ne peut pas distinguer entre les différentes erreurs des capteurs et seulement la moyenne des erreurs des capteurs est identifiée. Ainsi, l'augmentation de l'effort de calcul engendrée par l'ajout d'une variable pour chaque erreur des capteurs n'est pas justifiée si seulement les mesures GPS sont utilisées.



(a) Identification des biais d'accélération du repère mobile B (b) Identification des biais de vitesse angulaire du repère mobile B

Figure 108 Identification et correction en-ligne des erreurs résultantes de l'axe du repère mobile B

De façon à identifier les erreurs spécifiques à chaque capteur, la mesure du vecteur de parité est nécessaire, car elle constitue une relation linéaire des erreurs des capteurs, relation nécessaire au filtre de Kalman pour identifier correctement les erreurs de chaque capteur. Ainsi, la structure présentée à la section 5.2.2.1 du chapitre 5 est implantée et les résultats sont donnés ci-après. La figure 111 montre les biais des accéléromètres alors que la figure 112 illustre les erreurs des gyromètres. On remarque alors que les erreurs de chaque capteurs redondants sont identifiées et correspondent aux valeurs des tableaux XVI et XVII. Il est intéressant de noter que les erreurs des gyromètres sont moins « observables », de part la mesure indirecte de l'angle par les mesures de vitesse GPS. De plus, la dynamique de rotation pour l'azimut est relativement lente, diminuant la richesse de l'information dans cette axe.

Estimation des biais des accéléromètres, sans mesure du vecteur de parité

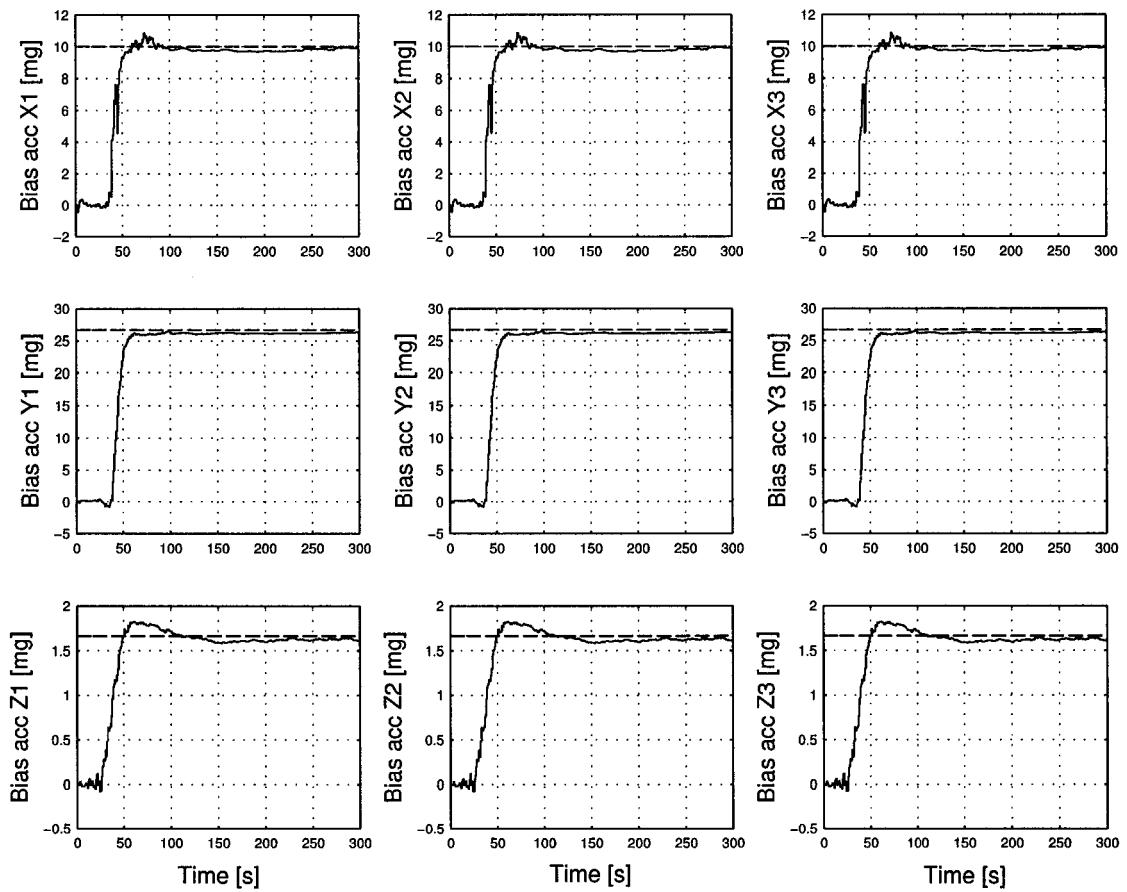


Figure 109 Identification des biais des accéléromètres sans la mesure du vecteur de parité, approche indirecte

Estimation des biais des gyromètres, sans mesure du vecteur de parité

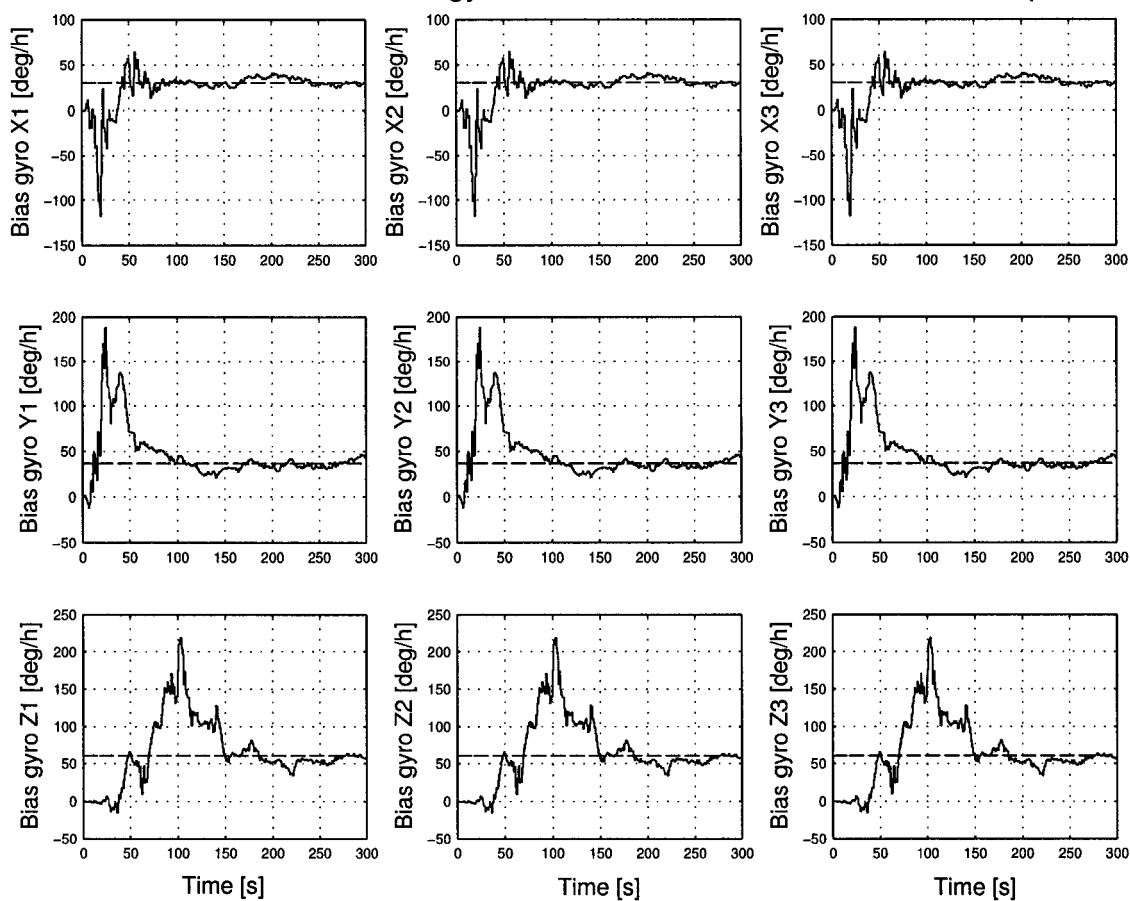


Figure 110 Identification des biais des gyromètres sans la mesure du vecteur de parité, approche indirecte

Estimation des biais des accéléromètres, avec mesure du vecteur de parité

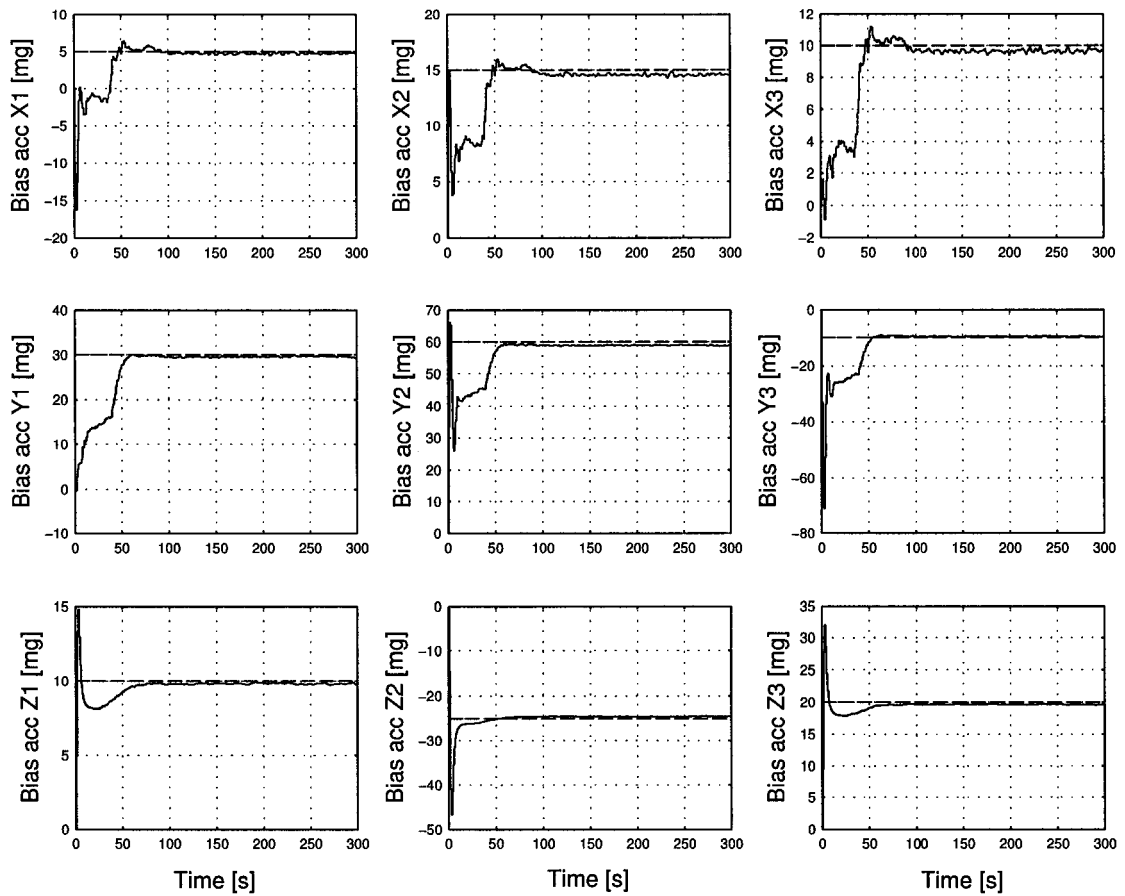


Figure 111 Identification des biais des accéléromètres avec la mesure du vecteur de parité, approche indirecte

Estimation des biais des gyromètres, avec mesure du vecteur de parité

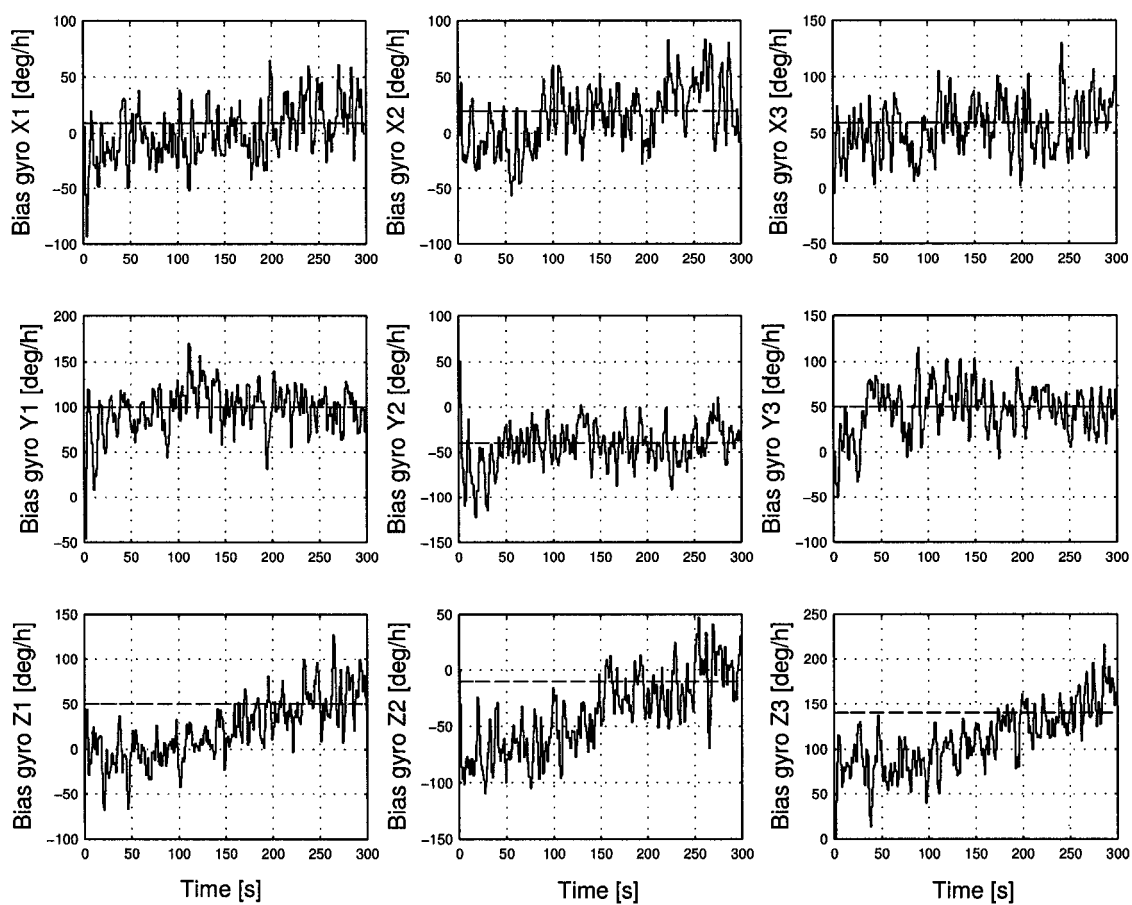


Figure 112 Identification des biais des gyromètres avec la mesure du vecteur de parité, approche indirecte

7.4.2 Implantation en temps-réel

Un autre aspect important à prendre en compte dans l'évaluation d'une approche est la possibilité d'implantation en temps réel. Les méthodes indirectes avec et sans mesure de vecteur de parité ont été testées en temps réel et le temps de calcul d'un cycle a été mesuré. De plus, le temps de calcul de la méthode indirecte où seulement les biais résultant sur les axes du repère mobile B est calculé pour donner une base étalon. La figure 113 illustre les résultats pour différents nombres de capteurs totaux (pour obtenir le nombre de capteurs par axe, il faut diviser l'échelle des abscisses par 3). Évidemment, l'identification

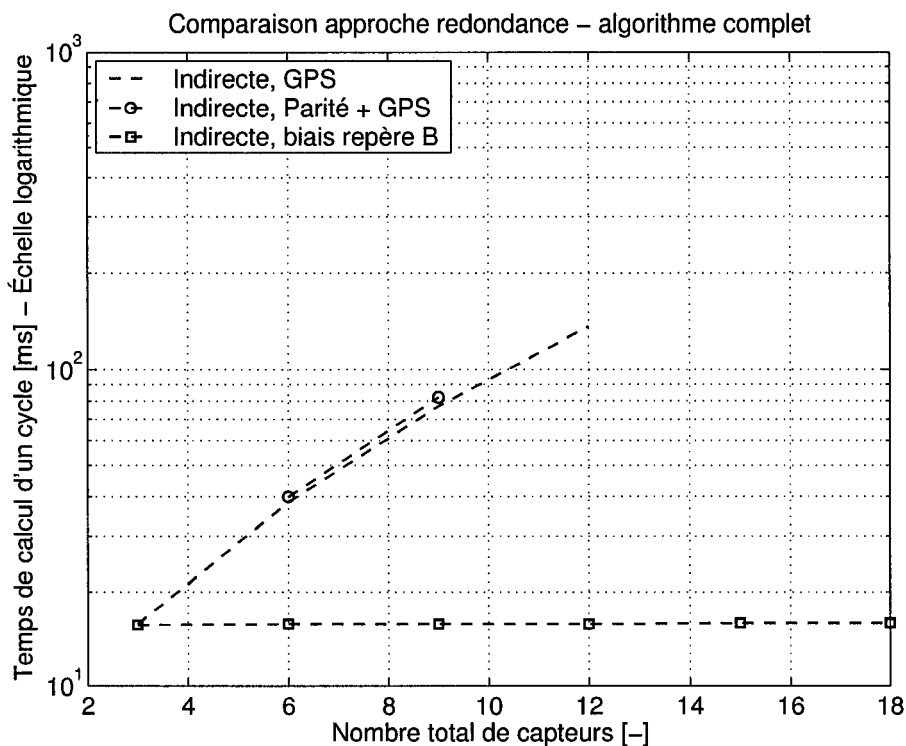


Figure 113 Comparaison des temps de calcul pour différentes approches de redondance

des erreurs sur les axes du repère mobile n'est pas fonction du nombre de capteurs, mais une telle approche n'est pas utile dans le cas de la détection et l'isolation de fautes. La redondance indirecte avec seulement la mesure GPS n'est pas plus utile pour l'isolation de fautes que l'identification des erreurs de l'axe du repère mobile, même si le nombre de capteurs augmente le besoin en calcul. En effet, seulement la moyenne des biais des capteurs est identifiée, rendant cette méthode pas du tout intéressante. L'identification des

erreurs des capteurs avec la mesure du vecteur de parité permet de calibrer en-ligne chacun des capteurs, rendant possible la détection et l'isolation de fautes des capteurs. Par contre, comparativement à la méthode indirecte avec identification des erreurs dans les axes du repère mobile, l'identification avec mesure du vecteur de parité implique une surcharge dans l'effort de calcul, et avec l'ordinateur embarqué disponible et le compilateur accessible, le maximum de capteurs pouvant être utilisé se limite à 9.

7.4.3 Conclusion préliminaire sur la redondance de capteurs bas de gamme

Pour utiliser à pleine capacité l'avantage de la redondance de capteurs, les erreurs doivent être identifiées et les capteurs calibrés en-ligne. Si la détection et l'isolation de fautes n'est pas une priorité, l'identification des erreurs sur les axes du repère mobile B est suffisant. En optant pour cette stratégie, la variance de l'erreur de bruit sera réduit par un facteur égal au nombre de capteurs, tout en gardant un effort de calcul raisonnable pour une implantation en temps réel. L'approche indirecte de l'identification des erreurs des capteurs avec les mesures de GPS seulement n'est pas nécessaire à cause de l'augmentation de l'effort de calcul que nécessite cette approche, et qui donne les mêmes résultats que l'identification des erreurs sur les axes du repère mobile B .

Si la détection et l'isolation de fautes est nécessaire, l'approche indirecte avec mesure du vecteur de parité est alors nécessaire. Si plus que neuf capteurs sont utilisés, un ordinateur plus puissant que celui disponible lors des test sera nécessaire, et un compilateur plus robuste également.

CONCLUSION

Les systèmes de navigation inertielle sont en constante évolution depuis leur introduction vers les années 1950. Évidemment, la demande pour des systèmes robustes et pour diminuer les coûts a suscité beaucoup de recherche dans ce domaine, mais comme c'est souvent le cas pour beaucoup d'applications, ce sont les découvertes technologiques qui ont poussé le développement des systèmes tels que nous les connaissons aujourd'hui. La plus grande révolution dans le domaine de la navigation inertielle fut l'introduction de l'ordinateur numérique embarqué, capable d'effectuer des opérations arithmétiques permettant le transfert des systèmes de navigation de type mécanique vers des systèmes de navigation avec capteurs liés au mobile, réduisant ainsi les coûts du système. Récemment, l'introduction de capteurs à bas coûts a forcé les chercheurs à travailler sur les façons de les intégrer dans les systèmes de navigation inertielle, tout en conservant une solution de navigation acceptable pour les applications données.

Le fondement de la thèse repose sur le principe que tout changement technologique a une incidence sur le développement d'un système, et tend à complexifier ce système, du moins en ce qui a trait aux systèmes de navigation inertielle. Ainsi, l'introduction des capteurs bas de gamme, incluant les capteurs basés sur la technologie MEMS, doit avoir une répercussion sur la façon dont l'intégration de ces capteurs se fait comparativement à la norme établie avec les capteurs de bonne qualité normalement utilisés.

L'objectif général de la thèse concernait l'étude des méthodes d'intégration des capteurs bas de gamme dans les systèmes de navigation inertielle et les modifications à apporter aux algorithmes standards, le tout appliqué aux véhicules terrestres à dynamique lente. De façon spécifique, deux domaines ont été étudiés : les modèles d'erreur dans le filtre de navigation et la gestion de la redondance des capteurs. En parallèle, le développement d'un simulateur convivial basé sur le logiciel Simulink était nécessaire, donnant ainsi lieu à une approche de prototypage rapide qui va de soi avec le développement de systèmes à bas coûts. Ce prototypage rapide permet ainsi d'effectuer des mesures en temps-réel de capteurs inertiels.

Modèle d'erreur du filtre de navigation

La problématique entourant l'intégration des capteurs bas de gamme se résume en leurs grandes erreurs de mesure. Ces erreurs rendent l'utilisation du modèle d'erreur à 9 variables peu intéressant car la confiance dans le modèle doit alors être abaissée de sorte

que les mesures externes sont moins filtrées, alors qu'une des fonctions des systèmes de navigation inertielle est de justement filtrer les mesures externes. Il faut alors augmenter le nombre de variables du modèle d'erreur de la solution de navigation avec des termes d'erreur des capteurs de façon à identifier ces erreurs et les retrancher des mesures brutes.

De plus, la précision des gyromètres bas de gamme ne permet généralement pas de mesurer la vitesse de rotation de la terre, principe utilisé pour initialiser l'angle d'azimut du mobile. Ainsi, une grande erreur en azimut est à prévoir au départ du véhicule et cette erreur doit être réduite rapidement avec l'identification en-ligne de cette erreur.

Un modèle non-linéaire de propagation des erreurs de la solution de navigation a été développé dans le cadre de cette thèse. Le chapitre 4 expose la théorie sous-jacente à ce nouveau modèle. La démarche mathématique est rigoureuse et les étapes sont démontrées avec autant de clarté que possible, sans alourdir le texte de détails superflus. Il a été démontré que le modèle non-linéaire rejoint les propriétés du modèle linéaire pour des petites erreurs d'angle, et que le modèle d'erreur de Kong est un cas particulier du modèle développé.

L'application première de ce nouveau modèle est pour réduire l'erreur de l'angle d'azimut au départ de la phase de navigation, puisque la valeur initiale de l'angle d'azimut ne peut pas être déterminée avec les gyromètres bas de gamme. Il a été déterminé que le modèle non-linéaire permet une réduction du temps de convergence de l'erreur, ce qui est d'autant plus souhaitable lorsque la dynamique du véhicule n'est pas importante. En effet, l'observabilité de l'erreur d'azimut est fortement liée à la dynamique du véhicule dans le plan horizontal.

Deuxièmement, dans le cas où le modèle d'erreur ne comporte pas d'estimation des erreurs des capteurs, et qu'une perte de signal GPS a lieu, la solution de navigation accumulera des erreurs, dont les plus importantes sont les erreurs d'orientation. Lors de la reprise du signal GPS, les erreurs d'orientation seront alors possiblement grandes et le modèle non-linéaire permet une récupération plus rapide de la solution de navigation comparativement au modèle linéaire.

Par contre, à cause de la nature du filtre de Kalman généralisé, où le modèle d'erreur est linéarisé à chaque pas de calcul avec la nouvelle estimation du vecteur d'état, et puisque les erreurs des capteurs peuvent être évaluées (où du moins l'erreur équivalente sur les axes du repère mobile dans le cas de structure redondante), l'utilisation du modèle non-

linéaire dans la phase de navigation n'est pas obligatoire. Un essai expérimental avec des mesures inertielles réelles a été accompli et a permis de tirer des conclusions préliminaires sur les performances du modèle associé à un filtre de Kalman généralisé. Plusieurs autres expérimentations devront être faites pour valider plus en profondeur les performances de l'algorithme en question. Le tableau XVIII résume les conclusions associées au modèle non-linéaire.

Tableau XVIII

Conclusion de l'application du modèle non-linéaire

Applications	Conclusion
Initialisation de l'azimut	Le modèle non-linéaire permet à l'erreur d'azimut de converger plus rapidement vers une valeur inférieure à 5° comparativement au modèle linéaire. Dans le cas d'une dynamique de mouvement peu riche, cette vitesse de convergence d'erreur prend toute son importance.
Recouvrement de la solution d'orientation après une perte de signal GPS	Si les erreurs des capteurs ne sont pas identifiées, la convergence des erreurs d'orientation est plus rapide pour le modèle non-linéaire. Ainsi, pour une règle de conception donnée concernant le temps de convergence d'erreur après le recouvrement d'une perte GPS, le modèle non-linéaire permet <i>de façon théorique</i> une période de perte de signal GPS plus longue que le modèle linéaire pour une qualité de capteurs identique.
Solution de navigation avec identification et correction en-ligne des erreurs des capteurs	De part la structure du filtre de Kalman généralisé, où la linéarisation du modèle d'erreur est effectuée avec l'estimation le plus récent des variables d'état, la correction de la solution n'est pas plus avantageée avec l'utilisation du modèle d'erreur.

Redondance non-orthogonale VS orthogonale

De façon historique, la redondance de capteurs était utilisée pour rendre plus robuste un système face aux fautes des capteurs. Un critère très important était la minimisation du nombre de capteurs pour une tâche d'isolation donnée, car ces capteurs étaient relativement chers. Par contre, les capteurs bas de gamme sont évidemment moins chers et d'habitude plus petit que les capteurs très précis, surtout lorsque l'on utilise les capteurs basés sur la technologie MEMS. Ainsi, il a été démontré dans la thèse que la quantité d'information disponible au système de navigation pour calculer une solution n'est pas une fonction de la configuration géométrique des capteurs redondants, mais bien seulement du nombre total de capteurs, qu'ils soient placés de façon non-orthogonale ou de façon orthogonale. Évidemment, pour une tâche de détection et d'isolation donnée, la structure orthogonale de la redondance nécessite plus de capteurs pour le pire des cas de fautes. Par contre, à cause du nombre plus élevé, la détection et l'isolation d'un ou de plusieurs capteurs influencent moins la performance globale du système, ce qui est une caractéristique recherchée dans ce type d'implantation. Finalement, à cause de leurs bas coûts et de la structure géométrique simplifiée de la redondance orthogonale, il est démontré que le coût relatif des capteurs supplémentaires n'est pas significatif comparé à la structure non-orthogonale. Ainsi, une configuration orthogonale devrait être privilégiée pour la redondance de capteurs bas de gamme. Le tableau XIX résume les conclusions du placement optimal des capteurs redondants.

Identification des erreurs des capteurs redondants

D'un autre côté, la détection et l'isolation de fautes requièrent le calcul d'un vecteur de parité. Ce vecteur de parité, lorsque le capteur ne contient que du bruit comme mesure, permet de détecter et d'isoler les fautes des capteurs en utilisant un seuil limite pour la valeur du vecteur de parité. Si les capteurs ont d'autres types d'erreur, l'algorithme d'identification de fautes émettra des fausses alarmes créées par les erreurs, qui ne sont pas des fautes. Une solution est de hausser le seuil d'alarme, mais on risque ainsi de ne pas détecter des vraies fautes.

De plus, plusieurs mesures d'une même quantité peuvent être utilisées pour obtenir une estimation de la mesure avec moins de bruit (effet de moyenne). Par contre, les erreurs constantes (ou variant faiblement) autres que le bruit annulent cette amélioration. Il faut donc pouvoir estimer les erreurs des capteurs redondants.

L'approche indirecte de la redondance est souple et permet différentes configurations. Premièrement, l'identification des erreurs résultantes sur les axes du repère mobile est possible, mais ceci ne permet pas de calibrer en ligne les différents capteurs. Par contre, cette approche est relativement simple. On peut également ajouter au modèle d'erreur la modélisation d'une erreur variant dans le temps pour chacun des capteurs. Ainsi, il est possible de calibrer en ligne les capteurs. Si uniquement les mesures GPS sont utilisées pour estimer les erreurs de la solution de navigation et les erreurs des capteurs, seulement la moyenne des erreurs des capteurs sur chaque axe du repère mobile est déterminée. En effet, avec une mesure de vitesse dans les axes du mobile, il n'y a pas moyen d'évaluer les contributions respectives de chaque capteur, mais bien le résultat commun des erreurs. Ainsi, cette méthode n'a aucun avantage supplémentaire comparativement avec l'approche précédente.

Pour déterminer les erreurs de chaque capteur, il faut faire appel à une mesure du vecteur de parité, qui donne une mesure relative des erreurs entre les capteurs. Si 3 capteurs par axe sont utilisés, il existe ainsi 2 mesures de parité par axe. L'inclusion des mesures de parité dans l'équation de mesure du filtre de Kalman permet l'estimation des erreurs de chaque capteur. Par contre, l'effort de calcul exigé par cette implantation est assez lourde et l'implantation en temps réel pour un nombre de capteur supplémentaire à 3 par axe nécessite un ordinateur avec une capacité de calcul supérieure à celle utilisée pour obtenir les résultats expérimentaux. Le tableau XX illustre les conclusions des approches d'identification dans un format condensé.

Tableau XIX

Conclusion de l'analyse entre la configuration orthogonale et non-orthogonale de capteurs redondants

Caractéristiques	Conclusion
Placement optimal des capteurs et maximum d'information	La configuration non-orthogonale des capteurs placés symétriquement autour d'un cône est la configuration optimale standard car elle minimise le nombre de capteurs pour une tâche d'isolation donnée. Par contre, la configuration orthogonale est également une structure qui maximise le volume d'information, et à un nombre de capteurs égal, ce volume est le même que celui de la configuration non-orthogonale.
Influence de l'isolation d'un ou de plusieurs capteurs	À cause du nombre de capteurs supplémentaires, la perte relative d'information suite à l'isolation d'un ou de plusieurs capteurs est moindre pour la configuration orthogonale. L'emplacement du capteur isolé dans la configuration non-orthogonale a peu d'importance à cause de la structure cyclique du positionnement. Par contre, il existe une légère différence dans la dégradation des performances de la structure orthogonale selon que l'isolation des capteurs est sur la même axe (pire cas) ou distribuée également selon les trois axes (meilleur cas).
Coût supplémentaire associé à la structure orthogonale	Pour une même tâche d'isolation de fautes, le coût de la configuration orthogonale est plus élevé que la configuration non-orthogonale lorsque l'on prend en ligne de compte que l'augmentation du nombre de capteurs nécessaire pour effectuer cette tâche. Par contre, en utilisant un critère mixte englobant la complexité géométrique de la configuration non-orthogonale, couplé avec le faible coût des capteurs MEMS, le coût additionnel de la structure orthogonale est amoindri, et peut même devenir plus avantageux dans certains cas.

Tableau XX

Conclusion de l'identification des erreurs des capteurs redondants

Structure	Avantage	Inconvénient
Identification et correction des erreurs des axes du repère mobile B - approche indirecte	Temps de calcul n'est pas fonction du nombre de capteurs et permet de retrouver l'amélioration des mesures par moyenne.	Ne permet pas la détection et l'isolation de fautes (DIF) des capteurs.
Identification et correction des erreurs de chaque capteur redondant SANS mesure de parité - approche indirecte	Aucun avantage par rapport à la méthode précédente.	En plus de ne pas permettre la DIF car seulement les erreurs des axes du repère B sont identifiées, le temps de calcul est fonction du nombre de capteurs.
Identification et correction des erreurs de chaque capteur redondant AVEC mesure de parité - approche indirecte	Identifie les erreurs de chaque capteur (permet donc la DIF) et le vecteur de parité est déjà calculé pour l'algorithme de DIF.	Le temps de calcul est fonction du nombre de capteurs.

Simulateur, prototypage rapide et conception d'une unité de mesures inertielles

La première étape du travail de thèse fut la conception d'un simulateur. Quelques simulateurs existent sur le marché mais soit ils sont très chers, soit ils sont sous forme de fonctions Matlab. Un simulateur basé sur le logiciel Simulink fut donc conçu. En plus d'être simple pour visualiser les algorithmes (conçus sous forme de schéma-blocs), les algorithmes conçus et testés dans le simulateur peuvent être facilement convertis dans une forme exécutable et testés en temps réel. À la connaissance de l'auteur, seulement un simulateur basé sur le logiciel Simulink a été présenté dans la littérature, mais la fonction générant les mesures inertielles est basée sur l'hypothèse d'une terre plate. Les données générées par le simulateur conçu dans le cadre de cette thèse n'utilisent aucune hypothèse simplificatrice.

Il a été prouvé de façon heuristique que les méthodes d'intégration présentes dans Simulink sont adéquates pour être utilisées dans les algorithmes des systèmes de navigation inertielle, et se comparent à la méthode généralement acceptée à double cycle de Savage.

D'un autre côté, l'implantation du filtre de Kalman dans Simulink n'est pas exactement une sinécure, mais l'approche adoptée permet la propagation de l'estimation de l'erreur et de la matrice de covariance, et permet d'appliquer une correction de ces valeurs au moment des mesures externes. L'implantation du filtre est directe, sans faire appel aux techniques plus évoluées telle la factorisation des matrices.

Finalement, le prototypage rapide des algorithmes d'acquisition a été réalisé avec un ordinateur embarqué de type PC104. Les capteurs échantillonnés étaient disposés dans une forme non-orthogonale : 4 capteurs d'accélération et 4 capteurs de vitesse angulaire, disposés sur des tétraèdres tronqués. De plus, les signaux GPS étaient échantillonnées avec le protocole de communication RS232. En opérant de la sorte, le post-traitement des mesures inertielles et GPS a été effectué. Le tableau XXI résume les conclusions de cette section.

Tableau XXI

Conclusion de la conception du simulateur, de l'utilisation du prototype rapide et de la conception d'une unité de mesures inertielles

Caractéristiques	Conclusion
Utilisation de Simulink pour la conception du simulateur	- Visualisation conviviale des algorithmes; - Programmation modulaire; - Permet le prototypage rapide.
Méthodes d'intégration dans Simulink	- Les méthodes d'intégration d'ordre bas (1 et 2) sont à proscrire; - La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est comparable à la méthode d'intégration à deux cycles de Savage.
Prototypage rapide	- Il a réduit considérablement le temps de conception de l'algorithme d'acquisition des mesures inertielles; - La mise en marche de l'ordinateur embarqué est presque directe avec les outils de Simulink car aucun programme informatique associé aux cartes constituant l'ordinateur doit être codé (par contre, il faut que le matériel informatique utilisé soit compatible avec le logiciel Simulink et xPC Target) .
Conception d'une unité de mesures inertielles	- Le véhicule dans lequel prend place l'unité de capteurs peut induire beaucoup de vibration dans les mesures; - Les fils doivent être les plus courts possible et être blindés; - Le circuit de modulation par pulsation pour réguler les éléments chauffant doit être physiquement séparé du circuit de conversion des mesures analogiques pour ne pas induire du bruit de mesure additionnel; - L'utilisation de matériel commercial (et non développé « maison ») est préférable pour assurer la compatibilité avec des améliorations et applications futures.

Contributions et réalisations

Les contributions sont définies comme étant un apport nouveau à la science et au développement technologique, alors que les réalisations illustrent un accomplissement significatif.

En premier lieu, le développement mathématique du modèle d'erreur non-linéaire constitue une originalité. En effet, l'approche employée par Kong est différente, peu claire et en plus, comporte certaines lacunes. Quoique son application donne des bénéfices pour certains cas seulement, son développement constitue une contribution en soit.

L'étude de l'impact des capteurs bas de gamme sur la théorie de la redondance est également une contribution intéressante. Quoique l'utilisation de la théorie de l'information pour déterminer la configuration optimale non-orthogonale a déjà été présentée dans une thèse précédente, la preuve que la redondance orthogonale est équivalente à la redondance non-orthogonale d'un point de vue de la quantité d'information disponible au système est originale. De plus, la formulation du volume d'information dans cette thèse est plus générale que l'interprétation faite précédemment, ce qui a permis la conclusion de l'équivalence des configurations.

L'identification des erreurs des capteurs redondants a été un sujet d'étude de quelques chercheurs seulement. Un premier a établi que la projection des erreurs des capteurs redondants doit être incluse dans le modèle d'erreur, sans résultats concrets; alors qu'un deuxième a introduit la notion de mesure du vecteur de parité pour identifier les erreurs relatives entre les capteurs, toujours sans résultats probants. La méthode indirecte avec mesure du vecteur de parité introduite dans cette thèse fusionne les deux méthodes précédentes et illustre qu'il est possible d'identifier les erreurs des capteurs redondants.

Il était déjà stipulé dans la littérature que les méthodes d'intégration d'ordre élevé pouvaient être utilisées pour solutionner les équations de mouvement tout en gardant une précision acceptable. Une autre contribution de cette thèse a été d'analyser les méthodes d'intégration présentes dans le logiciel Simulink et de les comparer avec la méthode standard à deux cycles de Savage. Cette preuve heuristique a permis de statuer sans équivoque sur la pertinence de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'application des systèmes de navigation inertielle à bas coût.

Finalement, une des contributions est de nature didactique. En effet, la rédaction de la thèse a été faite dans l'optique de former un document d'introduction à la théorie des

systèmes de navigation inertielle pour ceux qui effectueront de la recherche dans la suite des approches présentées. Plus précisément, l'introduction et les chapitres 1 à 3 constituent cette présentation de la théorie générale des SNI.

D'un autre côté, plusieurs réalisations faites dans le cadre de cette thèse sont dignes de mention. Le simulateur conçu dans l'environnement Simulink est un outil qui s'est avéré essentiel pour valider les algorithmes développés et pour effectuer des essais en temps-réel par prototypage rapide. À la connaissance de l'auteur, seulement un simulateur similaire a été présenté dans la littérature, mais comportant des hypothèses simplificatrices qui diminuent les applications dans lesquelles ce simulateur peut être utilisé. Le simulateur développé dans le cadre de cette thèse ne fait aucune hypothèse simplificatrice et permet d'effectuer des simulations pour quelconques applications.

Finalement, la mise à niveau d'une unité de mesures inertielles a été une réalisation expérimentale importante, permettant l'utilisation de matériel commercial pour effectuer l'acquisition des signaux. De plus, l'approche par prototypage rapide n'avait jamais été utilisée au centre de recherche « Australian Centre for Field Robotics », où la réalisation expérimentale a eu lieu.

Ainsi, cette thèse a apporté une contribution à trois niveaux : à la fois didactique, théorique et expérimentale; tel qu'illustré au tableau XXII.

Tableau XXII

Résumé des contributions de la thèse

Niveau de contribution	Description
Didactique	Introduction claire des origines de la navigation inertielle
Théorique	- Dérivation détaillée d'un modèle d'erreur non-linéaire; - Preuve mathématique complète de l'équivalence du modèle d'erreur non-linéaire avec les modèles connus pour des hypothèses données. - Preuve de l'équivalence de l'optimalité de la redondance orthogonale et de la redondance non-orthogonale par la théorie de l'information; - Implantation d'une structure d'identification des erreurs des capteurs redondants en jumelant deux approches connues.
Expérimentale	- Conception d'un simulateur générique de SNI; - Conception d'une unité de mesures inertielles; - Acquisition de signaux GPS avec protocole RS232 dans Simulink; - Implantation d'une approche de prototypage rapide pour les SNI bas de gamme.

Pistes de recherche

Le domaine de la navigation inertielle à bas coût est très vaste, et la revue de la littérature au début de la thèse appuie cette affirmation. Par contre, dans la lignée des sujets introduits dans cette thèse, quelques points peuvent ressortir.

Une de ces pistes concerne l'identification des erreurs en ligne, qui devrait faire l'objet d'une étude en soit. Entre autre, il est connu que l'observabilité des erreurs est fonction de la dynamique (et donc la trajectoire empruntée par le véhicule). Il serait intéressant d'étudier les trajectoires qui font en sorte que les erreurs sont mieux identifiées. Puisque le système à l'étude est non-linéaire, le concept d'observabilité tel que connu pour les systèmes linéaires n'est pas applicable. Il faudrait alors utiliser le « Gramien » d'observabilité, qui est la généralisation du concept d'observabilité.

Également, une approche d'identification des erreurs de capteurs redondants utilisant le filtre de Kalman de façon directe a été évaluée de façon sommaire. Les premiers résultats n'ont pas été concluants mais cette approche pourrait peut-être remplacer dans une certaine mesure la méthode indirecte avec mesure du vecteur de parité. L'annexe 3.6 établit les fondements de base de cette approche.

Conclusion finale

L'objectif général de la thèse concernait l'étude des méthodes d'intégration des capteurs bas de gamme dans les systèmes de navigation inertielle et évaluer les modifications à apporter aux algorithmes standards. Il a été stipulé que l'introduction des capteurs bas de gamme modifie les pratiques dans deux domaines : les modèles d'erreur et la gestion de la redondance. Les démonstrations théoriques des changements de paradigmes et les résultats en découlant ont prouvé que ces capteurs impliquent effectivement un changement dans la façon d'aborder l'intégration des systèmes de navigation inertielle. Les contributions élaborées dans cette thèse ajoutent une pièce supplémentaire dans le concert de la recherche mondiale qui permettra d'intégrer de façon efficace les capteurs bas de gamme, incluant les capteurs de type MEMS, dans des systèmes de navigation inertielle à bas coût hybridés avec un récepteur GPS.

ANNEXE 1

Notions fondamentales de mathématique

1.1 Matrice anti-symétrique

La matrice anti-symétrique d'un vecteur $^{R_2}\vec{x}_{R_1}]_{R_3} = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ est définie de la façon suivante :

$$S\{[^{R_2}\vec{x}_{R_1}]_{R_3}\} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{x}^1$ et $\vec{x}^2$ peut être remplacé par le produit matriciel suivant :

$$\vec{x}^1 \times \vec{x}^2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

$$= \begin{pmatrix} x_2^1 x_3^2 - x_2^2 x_3^1 \\ -x_1^1 x_3^2 + x_1^2 x_3^1 \\ x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_3^1 & x_2^1 \\ x_3^1 & 0 & -x_1^1 \\ -x_2^1 & x_1^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$= S\{\vec{x}^1\}\vec{x}^2 \quad (1.8)$$

1.2 Matrice de rotation

La mesure d'un vecteur peut être interprétée dans un repère différent en utilisant la matrice des cosinus directeurs définissant les trois rotations élémentaires autour des axes orthogonaux de façon à ce qu'un repère coïncide avec un autre. La matrice de rotation d'un repère R_3 vers un repère R_4 sera désignée par $^{R_4}C_{R_3}$, et la relation entre les vecteurs établie comme suit :

$$[^{R_2}\vec{x}_{R_1}]_{R_4} = ^{R_4}C_{R_3}[^{R_2}\vec{x}_{R_1}]_{R_3} \quad (1.9)$$

où

$${}^{R_4}C_{R_3} = \begin{pmatrix} c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

et ϕ , θ et ψ étant les angles d'Euler représentant les rotations successives à effectuer pour passer du repère R_3 au repère R_4 .

La propagation des matrices de rotation est représentée par l'équation 1.11 et avec la propriété définie par l'équation 1.12,

$${}^{R_4}\dot{C}_{R_3} = {}^{R_4}C_{R_3} S\{[{}^{R_4}\vec{\omega}_{R_3}]_{R_3}\} \quad (1.11)$$

$$= S\{[{}^{R_4}\vec{\omega}_{R_3}]_{R_4}\} {}^{R_4}C_{R_3} \quad (1.12)$$

$$= -S\{[{}^{R_3}\vec{\omega}_{R_4}]_{R_4}\} {}^{R_4}C_{R_3} \quad (1.13)$$

où $[{}^{R_3}\vec{\omega}_{R_4}]_{R_4}$ est la vitesse angulaire du repère R_4 par rapport au repère R_3 mesurée par rapport au repère R_4 .

ANNEXE 2

Filtre de Kalman généralisé

Pour implanter le filtre récursif généralisé, il faut tout d'abord numériser le modèle du système d'état.

Soit le modèle d'état non-linéaire suivant sous une forme générale :

$$\delta\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{F}^{\text{NL}}(\delta\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{W}) \quad (2.14)$$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H}\mathcal{X} + \mathcal{V} \quad (2.15)$$

où $\delta\mathcal{X}$ est le vecteur d'état, $\mathcal{U}$ est un vecteur de commande, $\mathcal{W}$ la modélisation de l'incertitude sur le modèle du système, $\mathcal{F}^{\text{NL}}(\cdot)$ est la fonction non-linéaire de propagation des états, $\mathcal{Y}$ est le vecteur de mesure, $\mathcal{H}$ est la matrice de mesure (établissant la relation entre le vecteur d'état et le vecteur de mesure) et $\mathcal{V}$ est le vecteur du bruit de mesure.

En prenant l'approximation du premier ordre, la propagation des états sous forme numérique peut alors s'écrire :

$$\delta\mathcal{X}_k = \Phi^{\text{NL}}(\delta\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{U}(k)) + \mathcal{W}_k \quad (2.16)$$

où

$$\Phi^{\text{NL}}(\delta\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{U}(k)) = \delta\mathcal{X}_k + \Delta t \vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}(\mathcal{X}, \delta\vec{\mathcal{X}}, \mathcal{U}) \Big|_{t=k\Delta T} \quad (2.17)$$

L'algorithme du filtre de Kalman est construit autour d'une représentation linéaire des systèmes. Il faut donc linéariser la matrice de transition Φ^{NL} autour de la trajectoire décrite par l'estimation des variables d'état, en calculant le Jacobien $\mathcal{J}$ de la fonction Φ^{NL} .

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k &= \frac{\partial \Phi(\delta\mathcal{X}_k, \mathcal{U}(k))}{\partial \delta\mathcal{X}_k} \Big|_{\delta\hat{\mathcal{X}}_k, \mathcal{U}(k)} \\ &= I + \Delta T \mathcal{J}(\vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}) + \frac{1}{2} \Delta T^2 \mathcal{J}^2(\vec{\mathcal{F}}^{\text{NL}}) \Big|_{\delta\hat{\mathcal{X}}_k, \mathcal{U}(k)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le filtre de Kalman se présente en trois étapes : prédiction, observation et correction.

Prediction

Dans la phase de prédiction, l'estimation du vecteur d'état est propagée avec la connaissance du modèle d'état, et l'estimation de la matrice de covariance des erreurs d'estimé

P est également propagée avec l'incertitude Q_{k-1}^d sur le modèle du système. L'indice « $k|k-1$ » représente la variable à l'instant k , mais avant l'observation au temps k .

$$\delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} = \Phi^{\text{NL}}(\delta\mathcal{X}_{k-1}, \mathcal{U}(k)) \quad (2.19)$$

$$P_{k|k-1} = \tilde{\Phi}_k P_{k-1|k-1} \tilde{\Phi}_k^T + Q_{k-1}^d \quad (2.20)$$

$$Q_{k-1}^d = \frac{1}{2} \left(\tilde{\Phi}_k \mathcal{G}_{k-1}^{\text{NL}} Q_{k-1} \mathcal{G}_{k-1}^{\text{NL}^T} \tilde{\Phi}_k^T + \mathcal{G}_k^{\text{NL}} Q_{k-1} \mathcal{G}_k^{\text{NL}^T} \right) \Delta T \quad (2.21)$$

Observation

Au moment d'une mesure externe, l'erreur d'estimation du vecteur d'état, ou l'innovation, est calculée ainsi que le gain de Kalman.

$$\gamma_k = Y_k - \mathcal{H} \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} \quad (2.22)$$

$$K_k = P_{k|k-1} \mathcal{H}^T \left[\mathcal{H} P_{k|k-1} \mathcal{H}^T + R_k \right]^{-1} \quad (2.23)$$

Correction

La phase de correction applique une correction sur l'estimation du vecteur d'état et sur l'estimation de la matrice de covariance. L'indice « $k|k$ » représente la variable à l'instant k après l'observation au temps k .

$$\delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k} = \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} + K_k \gamma_k \quad (2.24)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k \mathcal{H} P_{k|k-1} \quad (2.25)$$

Quant à l'équation de mesure, elle conserve sa forme de base, mais avec des mesures échantillonnées :

$$Y_k = \mathcal{H} \delta\mathcal{X}_{k|k} + V_k \quad (2.26)$$

Pour un traité plus exhaustif du filtre de Kalman, le lecteur est invité à consulter les ouvrages suivants : « Applied Optimal Control » de Bryson et Ho [95] ; « Filtrage et lissage statistiques optimaux linéaires » de Radix [96] ou « Stochastic models, estimation, and control, Vol.1 » de Maybeck [8].

ANNEXE 3

Démonstration complémentaire au modèle non-linéaire de l'erreur

3.1 Détail du développement de la propagation non-linéaire de l'erreur d'orientation

La variable d'intérêt pour la variation de l'erreur d'orientation est la matrice de rotation entre le repère mobile calculé et le vrai repère mobile, ${}^{B^t}C_{B^c}$. Cette matrice de rotation peut être obtenue par la théorie des rotations successives :

$${}^{B^t}C_{B^c} = {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \quad (3.27)$$

La théorie de la dérivée en chaîne permet d'obtenir la propagation de la matrice d'erreur d'orientation.

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &= {}^{B^t}\dot{C}_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}\dot{C}_{B^c} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Tel que stipulé au chapitre 4, les dérivées des matrices de rotation présentes dans l'équation sont données par :

$${}^{B^t}\dot{C}_{N^t} = -S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} {}^{B^t}C_{N^t} + {}^{B^t}C_{N^t} S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} \quad (3.29)$$

$${}^{N^c}\dot{C}_{B^c} = {}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \quad (3.30)$$

$${}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (3.31)$$

En substituant ces équations dans l'équation 3.28,

$$\begin{aligned} {}^{B^t}\dot{C}_{B^c} &= \left(-S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} {}^{B^t}C_{N^t} + {}^{B^t}C_{N^t} S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} \right) {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{N^t} \left({}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \right) {}^{N^c}C_{B^c} \\ &\quad + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} \left({}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

et en utilisant la relation

$${}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c} = -{}^I\vec{\omega}_{N^t} + {}^I\vec{\omega}_{N^c} \quad (3.33)$$

qui s'insère dans l'expression du milieu de l'équation 3.28

$$\begin{aligned}
{}^{B^t}\dot{C}_{B^c} = & \left(-S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} {}^{B^t}C_{N^t} + {}^{B^t}C_{N^t} S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} \right) {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\
& + {}^{B^t}C_{N^t} \left({}^{N^t}C_{N^c} S\{[-{}^I\vec{\omega}_{N^t} + {}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \right) {}^{N^c}C_{B^c}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
& + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} \left({}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \right) \\
= & \left(-S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} {}^{B^t}C_{N^t} + {}^{B^t}C_{N^t} S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} \right) {}^{N^t}C_{N^c} {}^{N^c}C_{B^c} \\
& + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} S\{[-{}^I\vec{\omega}_{N^t}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \\
& + {}^{B^t}C_{N^t} {}^{N^t}C_{N^c} \left({}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

On remarque alors que les termes soulignés s'annulent. En écrivant la suite des produits de matrices sous forme compacte, l'expression suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
{}^{B^t}\dot{C}_{B^c} = & -S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} {}^{B^t}C_{B^c} \\
& + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
= & -{}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c}\} \\
& + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
= & -{}^{B^t}C_{B^c} S\{{}^{B^t}C_{B^c}^T [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\
& + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
= & {}^{B^t}C_{B^c} S\{(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T)[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\
& + {}^{B^t}C_{B^c} S\{[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.2 Détail du développement de la propagation non-linéaire de l'erreur de vitesse

En dérivant l'équation 4.16, la variation de l'erreur de vitesse est obtenue.

$$[{}^E\dot{\delta v}_{N^c}]_{N^c} = [{}^E\dot{\vec{v}}_{N^c}]_{N^c} - {}^{N^c}\dot{C}_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} - {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\dot{\vec{v}}_{N^t}]_{N^t} \tag{3.40}$$

En substituant les équations 3.41, 3.42 et 3.43 dans l'équation 3.40,

$$\begin{aligned}
[{}^E\dot{\vec{v}}_{N^t}]_{N^t} = & {}^{N^t}C_{B^t} [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{g}_p^*]_{N^t} \\
& - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^t}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$[{}^E\dot{\vec{v}}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c]_{N^c} \quad (3.42)$$

$$- \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\ {}^{N^c}\dot{C}_{N^t} = -S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} \quad (3.43)$$

nous obtenons

$$[{}^E\dot{\delta\vec{v}}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c]_{N^c} \\ - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\ + S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t}[{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\ - {}^{N^c}C_{N^t} \left({}^{N^t}C_{B^t}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{g}_p^t]_{N^t} \right. \\ \left. - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^t}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \right) \quad (3.44)$$

En utilisant la relation

$${}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c} = -{}^E\vec{\omega}_{N^t} + {}^E\vec{\omega}_{N^c} \quad (3.45)$$

l'équation 3.44 donne

$$[{}^E\dot{\delta\vec{v}}_{N^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c]_{N^c} \\ - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\ + S\{[-{}^E\vec{\omega}_{N^t} + {}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t}[{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\ - {}^{N^c}C_{N^t} \left({}^{N^t}C_{B^t}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{g}_p^t]_{N^t} \right. \\ \left. - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^t}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \right) \quad (3.46)$$

En prenant en premier lieu les termes impliquant les accélérations pures et l'accélération gravitationnelle

$$[{}^E\dot{\delta\vec{v}}_{N^c}]_{N^c}^{\text{acc.pures}} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c]_{N^c} \\ - {}^{N^c}C_{N^t} \left({}^{N^t}C_{B^t}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{g}_p^t]_{N^t} \right) \\ = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} - {}^{N^c}C_{B^t}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \\ + {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c]_{N^c} - {}^{N^c}C_{N^t}[\vec{g}_p^t]_{N^t} \\ = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} - {}^{N^c}C_{B^c}{}^{B^c}C_{B^t}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \\ + {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c]_{N^c} - [\vec{g}_p^t]_{N^c}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^{N^c}C_{B^c} \left(I - {}^{B^c}C_{B^t} \right) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \\
&\quad + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{g}_p^c - \vec{g}_p^t]_{N^c} \\
&= {}^{N^c}C_{B^c} \left(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} \\
&\quad + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^{B^t}\vec{a}_{B^c}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

En jumelant les autres termes, nous avons :

$$\begin{aligned}
[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{autres}} &= - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\
&\quad + S\{[-{}^E\vec{\omega}_{N^t} + {}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\
&\quad + {}^{N^c}C_{N^t} \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^t}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\
&= - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\
&\quad + S\{[-{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} + S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\
&\quad + {}^{N^c}C_{N^t} \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^t}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\
&= - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} \\
&\quad + \underline{S\{[-{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t}} + S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \\
&\quad + \underline{{}^{N^c}C_{N^t} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t}} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t}
\end{aligned}$$

Les termes soulignés s'annulent. En regroupant les termes semblables, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{autres}} &= - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) \left([{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} - {}^{N^c}C_{N^t} [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^t} \right) \\
&= - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) \left([{}^E\vec{v}_{N^c}]_{N^c} - [{}^E\vec{v}_{N^t}]_{N^c} \right)
\end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite est la définition de l'erreur de vitesse, définie à l'équation 4.16. Ainsi

$$[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{autres}} = - \left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \right) [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \tag{3.48}$$

En jumelant les équations 3.47 et 3.48, la variation de l'erreur de vitesse est donnée par 3.49.

$$\begin{aligned}
[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} &= [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{acc.pures}} + [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{autres}} \\
&= {}^{N^c}C_{B^c} \left(I - {}^{B^t}C_{B^c}^T \right) [{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} + {}^{N^c}C_{B^c} [{}^I\vec{\delta a}_{B^t}]_{B^t} + [\vec{\delta g}_p]_{N^c}
\end{aligned}$$

$$-\left(S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + 2S\{[{}^I\vec{\omega}_E]_{N^c}\}\right)[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} \quad (3.49)$$

où ${}^I\vec{\delta a}_{B^t} = {}^B\vec{a}_{B^c}$ est l'erreur des accéléromètres.

3.3 Détail du développement de la propagation non-linéaire de l'erreur de position

Toujours en utilisant la règle des rotations successives des rotations, la matrice d'erreur de position est donnée par :

$${}^{N^t}C_{N^c} = {}^{N^t}C_E {}^E C_{N^c} \quad (3.50)$$

En dérivant l'équation 3.50

$$\begin{aligned} {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} &= {}^{N^t}\dot{C}_E {}^E C_{N^c} \\ &\quad + {}^{N^t}C_E {}^E \dot{C}_{N^c} \end{aligned} \quad (3.51)$$

et en interprétant les dérivés des matrices de rotation résultantes par rapport à leurs repères respectifs,

$$\begin{aligned} {}^E \dot{C}_{N^c} &= {}^E C_{N^c} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\ {}^{N^t}\dot{C}_E &= -S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} {}^{N^t}C_E \end{aligned} \quad (3.52)$$

et en substituant ces dernières équations dans l'équation 3.51,

$$\begin{aligned} {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} &= -S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^t}\} {}^{N^t}C_E {}^E C_{N^c} \\ &\quad + {}^{N^t}C_E {}^E C_{N^c} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\ &= -{}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^t}]_{N^c}\} \\ &\quad + {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\ &= {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_E]_{N^c}\} \\ &\quad + {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\ &= {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_E]_{N^c} + [{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\ &= {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \end{aligned}$$

l'équation non-linéaire de la variation des erreurs de position horizontal peut être obtenue, et représentée par l'équation 3.53.

$${}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (3.53)$$

3.4 Complément de la preuve de l'équivalence de la propagation de l'erreur d'orientation

L'équation 4.37 peut être explicitée comme suit

$$\begin{aligned} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} &\approx \left(I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} \right) S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\quad + \left(I + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} \right) S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\} \\ &\approx S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} \overline{S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\}} \\ &\quad + S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\} + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

La théorie des matrices anti-symétriques permet d'expliciter le terme suivant :

$$\begin{aligned} S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} &= S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\quad - S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

En substituant l'équation 3.55 pour l'expression soulignée dans l'équation 3.54, nous obtenons :

$$\begin{aligned} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} &\approx S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} + \overline{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\}} \\ &\quad - \overline{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}} \\ &\quad + S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\} + \overline{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Les termes de l'équation 3.56 avec une barre au-dessus possèdent un produit d'erreur (contenant $[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}$ ou $[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}$). Ces termes mis en évidence peuvent donc être négligés face au terme contenant des erreurs au premier ordre.

$$\begin{aligned} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} &\approx S\{S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\} [{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\} \\ &\quad + S\{[{}^I\vec{\delta\omega}_B]_{B^t}\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.57)$$

En appliquant l'opérateur anti-symétrique inverse $S^{-1}\{ \cdot \}$ à l'équation 3.57 et en négligeant les termes d'erreur du deuxième ordre, la relation vectorielle est obtenue.

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c} \approx [{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c} + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \quad (3.58)$$

La variation du vecteur d'erreur interprétée dans le repère de navigation calculé est donnée par :

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}\dot{C}_{B^c}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c} + {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{B^c} \quad (3.59)$$

avec ${}^{N^c}\dot{C}_{B^c}$ définie auparavant mais répétée ici pour plus de clarté :

$${}^{N^c}\dot{C}_{B^c} = {}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \quad (3.60)$$

En substituant les équations 3.58 et 3.60 dans l'équation 3.59, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} &= \left({}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t} + {}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c} \right) [{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c} \\ &\quad + {}^{N^c}C_{B^c} \left([{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c} + S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t} \right) \\ &= \frac{{}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c} + {}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^t}\}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}}{-S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}} \\ &\quad + {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c} + \frac{{}^{N^c}C_{B^c} S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}}{} \end{aligned}$$

Les deux termes soulignés s'annulent à cause de la propriété du produit vectoriel où

$$S\{[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}\}[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c} = -S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{B^c}\}[{}^I\vec{\omega}_{B^t}]_{B^t}$$

et le terme avec la barre au-dessus correspond à un produit d'erreur, donne une erreur du deuxième ordre et qui peut être négligée. Ainsi, la variation de l'erreur d'angle est donnée par l'équation 3.61.

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^{B^t}\vec{\omega}_{B^c}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c} \quad (3.61)$$

De part la proposition 4.2.1, l'équation 3.61 peut être écrite sous la forme du vecteur d'erreur d'angle du modèle de l'angle ψ .

$$[{}^{B^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{B^c}]_{N^c} = {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ -[\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} &= {}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} + S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[\vec{\psi}]_{N^c} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ [\dot{\vec{\psi}}]_{N^c} &= -{}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\delta\vec{\omega}_{B^t}]_{B^c} - S\{[{}^I\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}[\vec{\psi}]_{N^c} \end{aligned} \quad (3.64)$$

3.5 Complément de la preuve de l'équivalence de la propagation de l'erreur de vitesse

La propriété du produit vectoriel stipule que

$$S\{[{}^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}\}{}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t} = -S\{{}^{N^c}C_{B^c}[{}^I\vec{a}_{B^t}]_{B^t}\}[]^{B^t}\vec{\vartheta}_{B^c}]_{N^c}$$

3.6 Complément de la preuve de l'équivalence de la propagation de l'erreur de position

Soit la variation non-linéaire de l'erreur :

$${}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = {}^{N^t}C_{N^c} S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (3.65)$$

si l'erreur d'angle de position est relativement petite, la définition de la matrice de rotation peut être approximée par :

$${}^{N^t}C_{N^c} \approx I + S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\} \quad (3.66)$$

En substituant l'équation 3.65 dans la dérivée de l'équation 3.66, la dérivée du vecteur d'erreur d'angle peut être obtenue :

$$\begin{aligned} {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = S\{[{}^{N^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{N^c}]_{N^c}\} &\approx S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} \\ &\quad + \overline{S\{[{}^{N^t}\vec{\vartheta}_{N^c}]_{N^c}\}S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\}} \end{aligned} \quad (3.67)$$

où le terme avec la barre au-dessus correspond à un produit d'erreur, donnant une erreur du deuxième ordre et pouvant être négligé.

$$\begin{aligned} {}^{N^t}\dot{C}_{N^c} = S\{[{}^{N^t}\dot{\vec{\vartheta}}_{N^c}]_{N^c}\} &\approx S\{[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$[{}^{N^t}\dot{\vec{v}}_{N^c}]_{N^c} \approx [{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}$$

La vitesse angulaire $[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}$ entre les repères N^t et N^c provient de l'erreur de vitesse, qui est composée de deux parties : l'erreur de vitesse brute entre les repères, et l'erreur engendrée par l'erreur de position et la vitesse angulaire du repère N^c . La figure 114 illustre la disposition des repères. L'erreur de vitesse totale est donnée par :

$$[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{totale}} = [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - [{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c} \times [{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \quad (3.68)$$

Le module de l'erreur de vitesse angulaire est égal au module du vecteur d'erreur de vitesse divisé par le module du vecteur de position :

$$\|[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\| = \frac{\|[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{totale}}\|}{\|[{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c}\|} \quad (3.69)$$

$$= \frac{\|[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{totale}}\|}{R} \quad (3.70)$$

De façon vectorielle, le vecteur d'erreur de vitesse angulaire peut être exprimé comme suit :

$$[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c} = \frac{S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\}[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{totale}}}{R} \quad (3.71)$$

de sorte que l'erreur de vitesse angulaire par rapport à l'axe X est donnée par l'erreur de vitesse de l'axe Y divisée par R , et que l'erreur de vitesse angulaire par rapport à l'axe Y est donnée par le négatif de l'erreur de vitesse de l'axe X divisée par R . En substituant l'équation 3.68 dans l'équation 3.71, l'équation de l'erreur de vitesse angulaire est obtenue.

$$[{}^{N^t}\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c} = \frac{S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\}[{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c}^{\text{totale}}}{R} \quad (3.72)$$

$$= \frac{S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\}([{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - [{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c} \times [{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c})}{R} \quad (3.73)$$

$$= \frac{1}{R} S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - \frac{1}{R} S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\} ([{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c} \times [{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c}) \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{R} S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E\vec{\delta v}_{N^c}]_{N^c} - \frac{1}{R} S\{[{}^Z u_{N^c}]_{N^c}\} S\{[{}^E\vec{\omega}_{N^c}]_{N^c}\} [{}^E\vec{\delta r}_{N^c}]_{N^c} \quad (3.75)$$

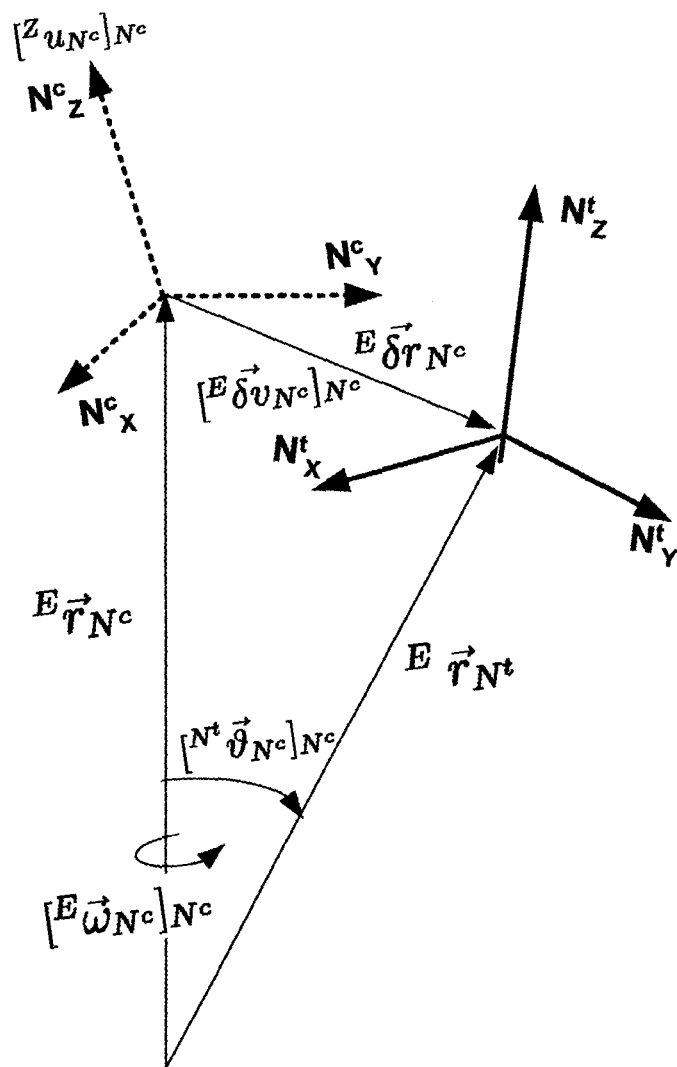


Figure 114 Erreur entre les repères de navigation calculé et vrai

ANNEXE 4

Définition de la structure du message en provenance du récepteur GPS

Pour initialiser le bloc de lecture du port série par protocole RS232 dans Simulink, l'espace de travail de Matlab/Simulink doit d'abord connaître la structure du message envoyé par le protocole. Ce fichier d'initialisation est spécifique au récepteur GPS de Astech [94].

```
% Initialization
RS232_Initialize(1).SendData =
'$PASHS,PWR,ON\r\n$PASHS,NME,POS,A,ON,0.5\r\n';
RS232_Initialize(1).InputPorts = []; %
RS232_Initialize(1).Timeout = 0.09; %
RS232_Initialize(1).EOM = '';

%Read POS message
% Already read '$PASHR,POS'
% DGPS,SV's,UTC,Lat,N/S,Long,E/W,Alt,,Track,Kts,
%      VertVel,PDOP,HDOP,VDOP,TDOP,FirwareID,*,Chksum
RS232_Receive(1).RecData = '$PASHR,POS,%d,%d,%f,%f,%d,%f,%d,
                                %f,%c,%f,%f,%f,%f,%f,
                                %f,%f,%4c*%2c\r\n';

RS232_Receive(1).OutputPorts =
[1,2,3,4,-1,5,-1,6,-1,7,8,9,10,11,12,13,-1,-1,-1,-1,-1,-1];
RS232_Receive(1).Timeout = 0.09; RS232_Receive(1).EOM = '';
```

ANNEXE 5

Redondance directe des capteurs

L'approche directe de la redondance est en fait l'application de l'intégration directe vue à la section 2.3.1 du chapitre 2. Par contre, les capteurs ne sont plus interprétés comme des commandes du système d'état, mais comme des mesures (redondantes) d'une quantité à estimer, soit l'accélération et la vitesse angulaire pour chaque axe du repère mobile B .

5.1 Théorie de la redondance directe

Les équations différentielles représentant le modèle d'état associé à la redondance directe de capteurs sont données aux équations 5.76 à 5.80.

$$\dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}(\mathcal{N}, [{}^I\vec{a}_B]_B, [{}^I\vec{\omega}_B]_B) \quad (5.76)$$

$$[{}^I\dot{\vec{a}}_B]_B = \vec{w}_a \quad (5.77)$$

$$[{}^I\dot{\vec{\omega}}_B]_B = \vec{w}_\omega \quad (5.78)$$

$$\dot{\delta\vec{a}}(t) = \vec{w}_{\delta a}(t) \quad (5.79)$$

$$\dot{\delta\vec{\omega}}(t) = \vec{w}_{\delta \omega}(t) \quad (5.80)$$

L'équation 5.76 constitue l'ensemble des équations de mouvement, tel que représenté par les équations 2.25 à 2.28 du chapitre 2. Les équations 5.77 et 5.78 représentent la vraie accélération et la vraie vitesse angulaire ($[{}^I\vec{x}_B]_B \in \mathbf{R}^3$) comme étant des variables variant dans le temps, et à être déterminées. Finalement, les équations 5.79 et 5.80 sont les mêmes que celles définies à la section 3.4.2 du chapitre 3, représentant l'évolution des erreurs des capteurs dans le temps, et à être déterminée ($\delta\vec{x}(t) \in \mathbf{R}^N$).

Tout comme pour l'approche directe de l'intégration des SNI, l'ensemble des capteurs externes $\mathcal{M}$ forment une partie du modèle de mesure.

$$\mathcal{Y}_k^{\text{ext,dir}} = \mathcal{H}^{\text{dir}}(\mathcal{N}_{k|k}, \mathcal{V}) = \mathcal{M}_k \quad (5.81)$$

Par contre, dans l'approche de redondance directe, les capteurs inertiels font également partie du modèle de mesure, incluant l'erreur des capteurs. Découlant de l'équation 5.35, l'équation 5.82 représente le modèle de mesure redondante $\mathcal{Y}_k^{x,\text{dir}}$ de la variable x (a ou ω).

$$\mathcal{Y}_k^{x,\text{dir}} = \mathcal{H}_x^{\text{redon}}[{}^I\vec{x}_B]_B + \delta\vec{x}_k + \vec{v}_k^x = \vec{m}_k^x \quad (5.82)$$

La figure 115 illustre la configuration de la redondance directe. Le filtre de Kalman évalue à la fois la solution de navigation et les erreurs des capteurs, en plus de performer la fusion des mesures des capteurs inertiels.

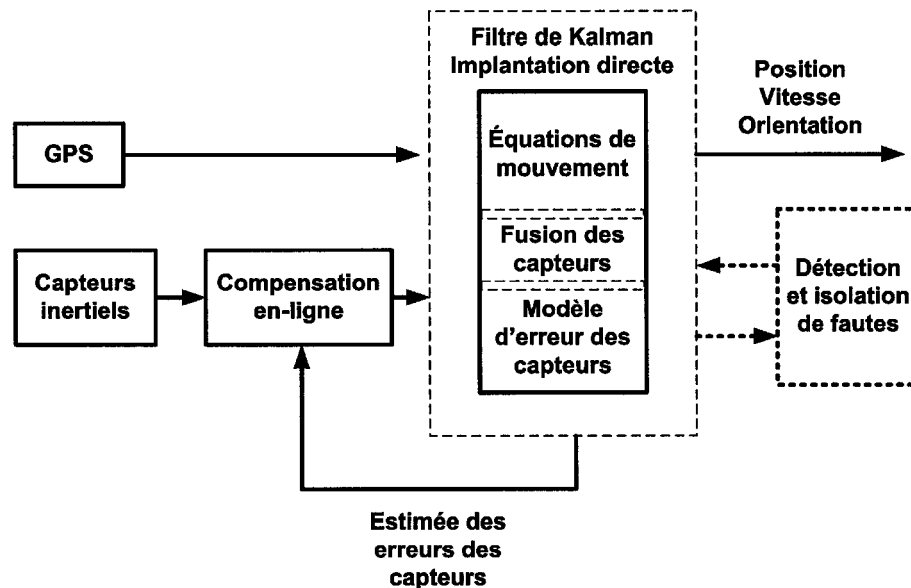


Figure 115 Approche directe de la redondance

5.2 Discussion

Le tableau XXIII résume les modèles utilisés par le filtre de Kalman pour les approches de redondance standard, directe et indirecte.

L'intérêt de l'approche directe est que la fusion des mesures des capteurs se fait en même temps que l'identification des erreurs des capteurs. Ainsi, si un algorithme d'identification et d'isolation de fautes est implanté, le test statistique sur les résidus sera plus représentatif de la réalité. Par contre, l'apparente lourdeur de l'algorithme rend cette approche peu intéressante à premier abord. En effet, comparativement à l'approche standard, le filtre de Kalman calcule les phases de prédiction/correction jumelées en tout temps, du moins par rapport aux mesures des capteurs. Par contre, il est intéressant de noter que les erreurs des capteurs sont mesurées indirectement par chaque capteur respectif (équation 5.82). Ainsi, en plus des mesures externes (ex. le GPS), les mesures redondantes des capteurs incluent directement une mesure de leurs erreurs.

Tableau XXIII

Comparaison des approches de la redondance (incluant l'approche directe)

Modèles	Redondance standard	Redondance directe	Redondance indirecte
Système	$\delta \dot{\mathcal{N}} = \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, \mathcal{H}^* \vec{m}_k^a) \delta \mathcal{N} + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} [^I \vec{\delta a}_B]_B^{INS} \\ [^I \vec{\delta \omega}_B]_B^{INS} \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \dot{\mathcal{N}} &= \mathcal{F}(\mathcal{N}, [^I \vec{a}_B]_B^{INS}, [^I \vec{\omega}_B]_B^{INS}) \\ [^I \dot{\vec{a}}_B]_B &= \vec{w}_a \\ [^I \dot{\vec{\omega}}_B]_B &= \vec{w}_\omega \\ \dot{\vec{a}}(t) &= \vec{w}_{\delta a}(t) \\ \dot{\vec{\omega}}(t) &= \vec{w}_{\delta \omega}(t) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \delta \dot{\mathcal{N}} &= \mathcal{F}^{\text{err}}(\mathcal{N}, \mathcal{H}^* \vec{m}_k^a) \delta \mathcal{N} + \mathcal{G}^{\text{err}}(\mathcal{N}) \begin{pmatrix} \mathcal{H}^* \vec{\delta a} \\ \mathcal{H}^* \vec{\delta \omega} \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{a}}(t) &= \vec{w}_{\delta a}(t) \\ \dot{\vec{\omega}}(t) &= \vec{w}_{\delta \omega}(t) \end{aligned}$
Mesure	$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k^{\text{ext,ind}} &= \mathcal{H}^{\text{ind}}(\delta \mathcal{N}_{k k}, \mathcal{V}) \\ &= \mathcal{H}^{\text{ext}}(\mathcal{N}_k) - \mathcal{M}_k \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k^{\text{ext,dir}} &= \mathcal{H}^{\text{dir}}(\mathcal{N}_{k k}, \mathcal{V}) = \mathcal{M}_k \\ \mathcal{Y}_k^{a,\text{dir}} &= \mathcal{H}^{a,\text{redon}}[^I \vec{a}_B]_B^{INS} + \vec{\delta a}_k + \vec{v}_k^a \\ &= \vec{m}_k^x \\ \mathcal{Y}_k^{\omega,\text{dir}} &= \mathcal{H}^{\omega,\text{redon}}[^I \vec{\omega}_B]_B^{INS} + \vec{\delta \omega}_k + \vec{v}_k^\omega \\ &= \vec{m}_k^\omega \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k^{\text{ext,ind}} &= \mathcal{H}^{\text{ind}}(\delta \mathcal{N}_{k k}, \mathcal{V}) \\ &= \mathcal{H}^{\text{ext}}(\mathcal{N}_k) - \mathcal{M}_k \\ \mathcal{Y}_k^{a,\text{indir}} &= V^a \vec{\delta a}_k + \vec{\epsilon}_k^a = \vec{p}_k^a \\ \mathcal{Y}_k^{\omega,\text{indir}} &= V^\omega \vec{\delta \omega}_k + \vec{\epsilon}_k^\omega = \vec{p}_k^\omega \end{aligned}$
Autres	$\mathcal{H}_x^* = (\mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T \mathcal{H}_{x,\text{redon}})^{-1} \mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T$		$\begin{aligned} \mathcal{H}_x^* &= (\mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T \mathcal{H}_{x,\text{redon}})^{-1} \mathcal{H}_{x,\text{redon}}^T \\ V^x \mathcal{H}_{x,\text{redon}} &= 0 \end{aligned}$

Soit n la dimension du vecteur d'état du système, et m la dimension du vecteur de mesure, le nombre de multiplication pour les phases du filtre de Kalman peut être évalué comme suit :

$$\text{Phase de prédiction} : \text{Nb mult} = 4n^3 \quad (5.83)$$

$$\text{Phase de correction} : \text{Nb mult} = 4n^2m + 2m^2n + m^3 \quad (5.84)$$

Le tableau XXIV résume les dimensions des vecteurs pour chacune des phases. Pour obtenir le nombre de multiplications total, le résultat de la phase de prédiction doit être additionné au résultat de la phase de correction appropriée. La phase « correction GPS » représente la mesure du GPS uniquement. La phase « correction GPS + parité » représente le cas de la redondance indirecte où l'ensemble des vecteurs de parité sont utilisés dans l'algorithme, alors la phase « correction GPS + parité segmentée » utilise la particularité que la matrice V^x possède plusieurs éléments nuls.

Il est intéressant de remarquer que pour l'approche directe, la phase de prédiction s'accompagne de mesures des capteurs pour la fusion des mesures. Ainsi, la phase de prédiction pour l'approche directe est en fait combinée à une phase de correction de l'estimation des mesures des capteurs, augmentant le nombre de calculs.

On peut voir cette propriété à la figure 116, où le temps de calcul « théorique » pour l'approche directe pour un cycle du filtre de Kalman est supérieur à l'approche indirecte avec segmentation de la matrice V . Sur cette même figure, on peut voir que le temps de calcul pour l'approche indirecte avec matrice segmentée est évidemment moindre que l'approche indirecte classique. De plus, si les erreurs des capteurs dans l'approche indirecte peuvent être évaluées à partir des mesures GPS uniquement (sans la mesure du vecteur de parité étendu), la performance de cette approche par rapport à l'approche directe est d'autant plus importante.

5.3 Résultats

La structure de redondance directe est implantée pour évaluer sa capacité à évaluer les erreurs des capteurs. Ainsi, en plus de la correction des mesures GPS, les capteurs sont considérés comme des mesures. Le filtre de Kalman doit alors être modifié pour accepter un deuxième niveau de corrections, donnant l'estimation des mesures (accélérations et vitesses angulaires) pour les axes du repère mobile B . La figure 117 illustre en partie la principale modification faite à l'implantation du filtre de Kalman présentée au chapitre 6

Tableau XXIV

Évaluation de n et m en fonction de N pour les phases du filtre de Kalman (incluant l'approche directe)

Phases	Redondance standard	Redondance directe	Redondance indirecte
Prédiction	$n = 9$	$n = 2N + 16$ $m = 2N$	$n = 9 + 2N$
Correction GPS	$n = 9$ $m = 6$	$n = 2N + 16$ $m = 2N + 6$	$n = 9 + 2N$ $m = 6$
Correction GPS + parité étendu			$n = 9 + 2N$ $m = 2l + 6$
Correction GPS + parité étendu segmentée			$n = 9 + 2N$ $m_{GPS} = 6$ $m_i = \frac{l}{3}$ $i = 1 \dots 2N$

(la figure 117 représente le contenu du bloc « correction Kalman » de la figure 45), où les mesures des capteurs impliquent une correction de l'estimation des variables d'état.

Premièrement, le filtre de Kalman est ajusté de façon à ce que les mesures redondantes soient fusionnées de façon égale entre elles. En effet, pour ne pas induire de délais dans la transmission des mesures inertielles, le filtre de Kalman doit agir comme un filtre passe-tout en ce qui concerne les mesures inertielles (et non comme un filtre passe-bas comme le filtre de Kalman est supposé incarner). Seulement l'effet de moyenne des mesures sera utilisée pour réduire le bruit de la mesure résultante. Pour se faire, il est utile d'analyser l'équation de correction de l'algorithme du filtre de Kalman. À l'annexe 1.2, l'équation de correction de l'estimation des variables d'état est donnée par :

$$\delta \hat{\mathcal{X}}_{k|k} = \delta \hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} + K_k \gamma_k$$

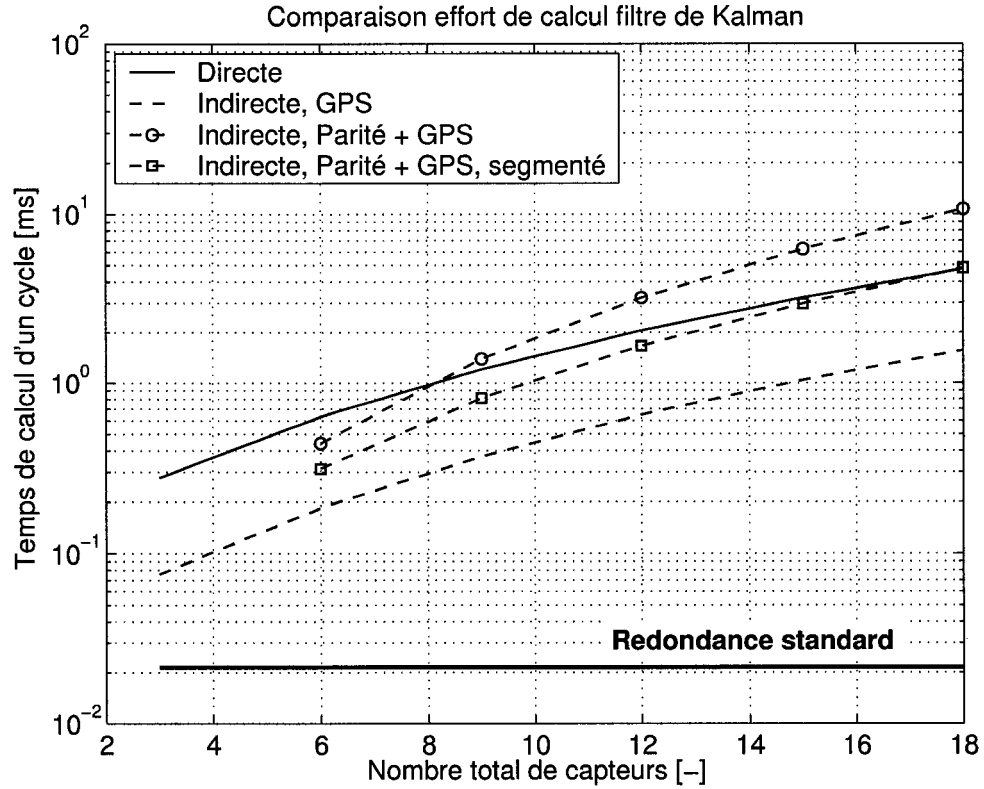


Figure 116 Estimation du temps de calcul d'un cycle du filtre de Kalman pour différentes approches de redondance, basé sur les performances d'un processeur Pentium Mobile 266 MHz

En substituant la définition de l'innovation γ_k dans l'équation de correction, et en regroupant ensemble les variables représentant l'estimation à priori des variables d'état $\delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1}$, nous obtenons l'équation modifiée pour la correction :

$$\begin{aligned}
 \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k} &= \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} + K_k \gamma_k \\
 &= \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} + K_k (Y_k - H \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1}) \\
 &= (I - K_k H) \delta\hat{\mathcal{X}}_{k|k-1} + K_k Y_k
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir un filtre passe-tout pour les mesures des capteurs, les éléments associés aux capteurs du terme $(I - K_k H)$ doivent être nuls (ou bien les éléments associés aux capteurs du terme $K_k H$ doivent être unitaires), alors que pour obtenir une moyenne des mesures, les éléments associés aux capteurs de la matrice K_k doivent être égaux à $3/N$, où N est le nombre total de capteurs.

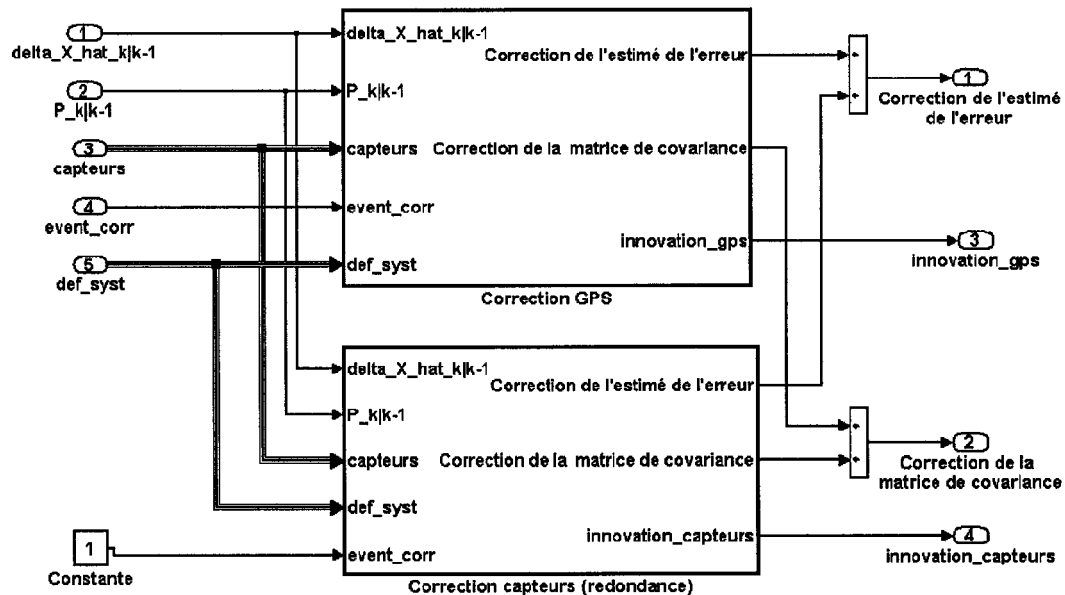
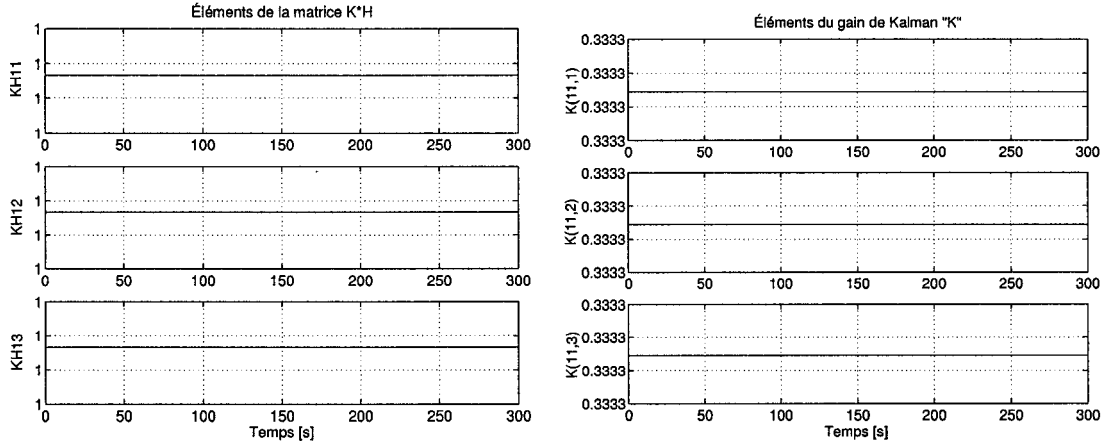


Figure 117 Ajout d'une correction à la structure du filtre de Kalman

La figure 118(a) illustre les éléments de la matrice $K_k H$ associés aux accéléromètres de l'axe X du repère mobile B , alors que la figure 118(b) montre le gain de Kalman pour les mêmes accéléromètres. En ajustant la confiance dans l'évolution de l'estimation de l'accélération résultante comme étant peu fiable (les éléments de la matrice Q associés aux capteurs doivent ainsi être très élevés), le gain tend rapidement vers $3/N$, où $N = 9$ dans notre cas, ce qui implique que la mesure résultante est simplement la moyenne des mesures redondantes, effet désiré dans le cas présent.

En ce qui concerne l'identification des biais des capteurs maintenant, la figure 119 illustre le résultat pour les accéléromètres, alors que la figure 120 montre l'identification des biais pour les gyromètres. Le résultat pour les deux types de capteurs est le même : l'approche directe ne permet pas d'identifier correctement les biais de chaque capteur, ni même la moyenne des biais des capteurs. En fait, en regardant attentivement les résultats, on remarque que la moyenne des biais identifiés pour chaque axe est nulle. Également, la figure 121(a) montre l'estimation de l'accélération dans les axes du repère mobile B (ligne bruitee) et la vraie estimation générée par le générateur de trajectoire (ligne avec traits). On remarque une différence entre les deux valeurs. En soustrayant les deux valeurs, on obtient l'erreur d'estimation qui est illustrée à la figure 121(b), où l'ordonnée est alors exprimée



(a) Éléments de la matrice $(I - K_k H)$ associés aux accéléromètres de l'axe X du repère mobile B (b) Éléments de la matrice de gain de Kalman K_k associés aux accéléromètres de l'axe X du repère mobile B

Figure 118 Fusion des mesures des capteurs avec l'approche directe

en terme de millième de g (mg). Cette erreur d'estimation est en fait la moyenne des vraies erreurs de biais, données aux tableaux XVII.

Un regard attentif sur le modèle d'état de l'approche directe permet de peut-être expliquer ce comportement. En effet, les équations 5.85 à 5.91 donnent le modèle d'état, alors que les équations 5.92 et 5.93 donnent les équations de mesures.

$$[{}^E \dot{\vec{v}}_N]_N = \mathcal{Q}_C({}^N \underline{q}_B) [{}^I \vec{a}_B]_B + [\vec{g}_p]_N \quad (5.85)$$

$$[{}^E \dot{\vec{r}}_N]_N = [{}^E \vec{v}_N]_N \quad (5.86)$$

$${}^N \dot{\underline{q}}_B = \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\otimes}({}^N \underline{q}_B) [{}^I \vec{\omega}_B]_B \quad (5.87)$$

$$[{}^I \dot{\vec{a}}_B]_B = \vec{w}_a \quad (5.88)$$

$$[{}^I \dot{\vec{\omega}}_B]_B = \vec{w}_\omega \quad (5.89)$$

$$\dot{\vec{\delta a}} = \vec{w}_{\delta a} \quad (5.90)$$

$$\dot{\vec{\delta \omega}} = \vec{w}_{\delta \omega} \quad (5.91)$$

$$\vec{y}^{a,dir} = \mathcal{H}^{a,redon} [{}^I \vec{a}_B]_B + \vec{\delta a} + \vec{v}^a = \vec{m}^a \quad (5.92)$$

$$\vec{y}^{\omega,dir} = \mathcal{H}^{\omega,redon} [{}^I \vec{\omega}_B]_B + \vec{\delta \omega} + \vec{v}^\omega = \vec{m}^\omega \quad (5.93)$$

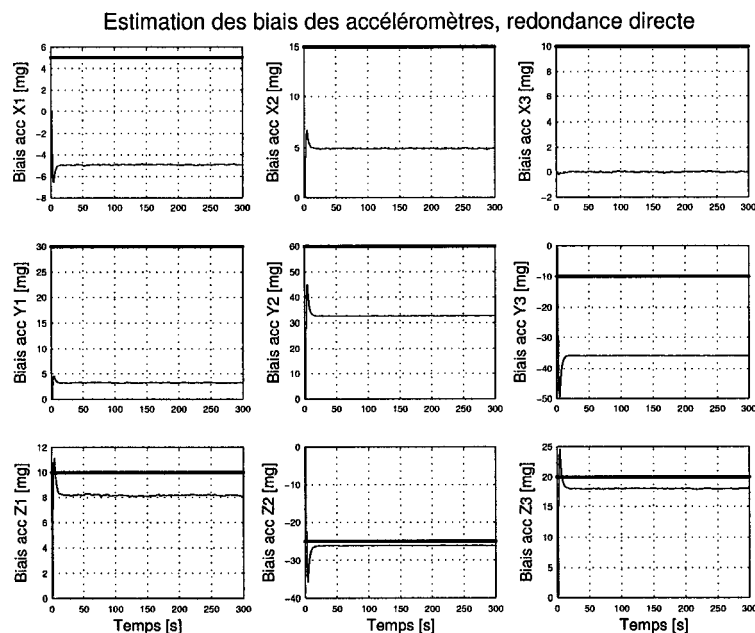


Figure 119 Identification des biais des accéléromètres, approche directe

On voit donc que même si les erreurs des capteurs sont mesurées dans les équations de mesures, elles ne sont pas comprises dans les équations d'état. Donc, seulement les erreurs relatives peuvent être évaluées, et non les erreurs absolues, d'où la moyenne nulle. Quoique la mesure de vitesse GPS devrait donner une information sur l'accélération réelle dans les axes du repère mobile B , et ainsi permettre l'identification des biais sur chacun des capteurs, les résultats prouvent le contraire. Ainsi, l'approche de redondance par voie directe ne semble pas à être privilégiée.

Un autre aspect important à prendre en compte dans l'évaluation d'une approche est la possibilité d'implantation en temps réel. Les méthodes indirectes avec et sans mesure de vecteur de parité, et la méthode directe ont été testées en temps réel et le temps de calcul d'un cycle a été mesuré. De plus, le temps de calcul de la méthode indirecte où seulement les biais résultant sur les axes du repère mobile B est calculé pour donner une base étalon. La figure 122 illustre les résultats pour différents nombres de capteurs totaux (pour obtenir le nombre de capteurs par axe, il faut diviser l'échelle des abscisses par 3). Évidemment, l'identification des erreurs sur les axes du repère mobile n'est pas fonction du nombre de capteurs, mais une telle approche n'est pas utile dans le cas de la détection et l'isolation de fautes. La redondance indirecte avec seulement la mesure GPS n'est pas plus utile pour

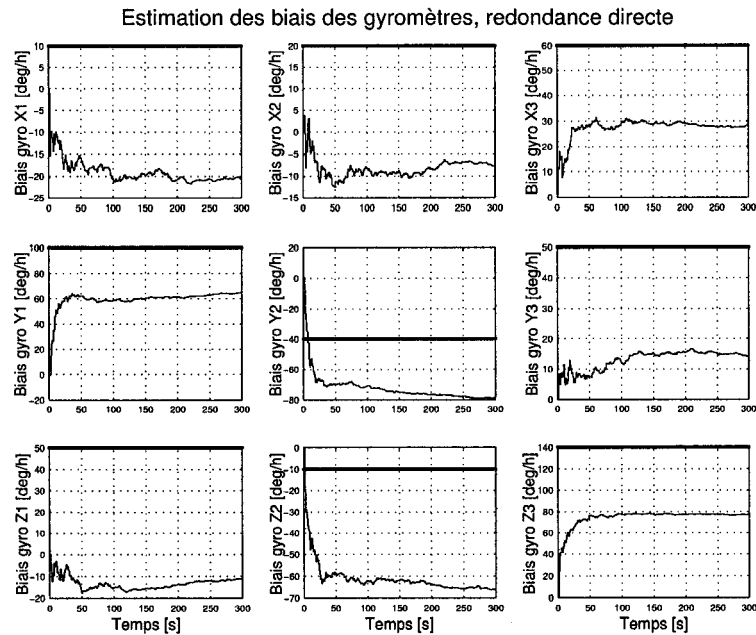
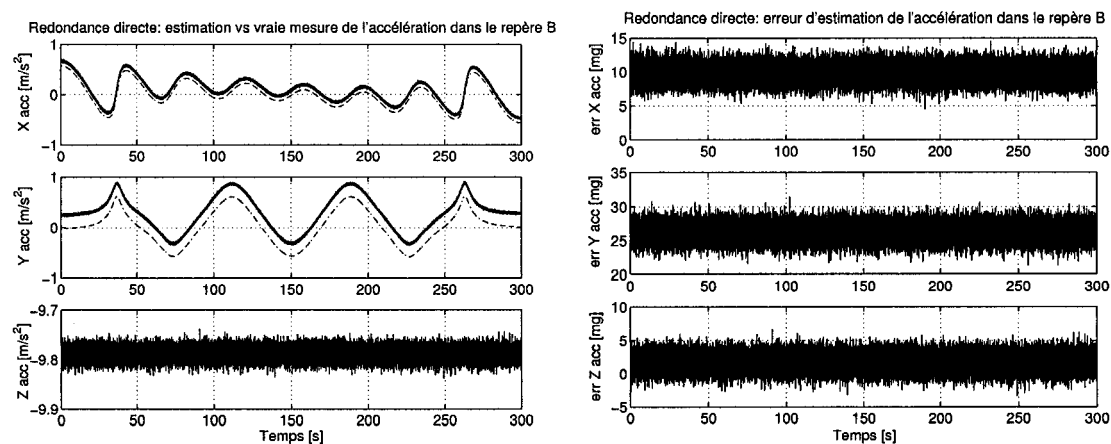


Figure 120 Identification des biais des gyromètres, approche directe

l'isolation de fautes que l'identification des erreurs de l'axe du repère mobile, même si le nombre de capteurs augmente le besoin en calcul. En effet, seulement la moyenne des biais des capteurs est identifiée, rendant cette méthode pas du tout intéressante. L'identification des erreurs des capteurs avec la mesure du vecteur de parité permet de calibrer en-ligne chacun des capteurs, rendant possible la détection et l'isolation de fautes des capteurs. Par contre, comparativement à la méthode indirecte avec identification des erreurs dans les axes du repère mobile, l'identification avec mesure du vecteur de parité implique une surcharge dans l'effort de calcul, et avec l'ordinateur embarqué disponible et le compilateur accessible, le maximum de capteurs pouvant être utilisé se limite à 9. Finalement, en plus du problème à identifier les erreurs des capteurs, l'approche directe possède également des problèmes de complexité des calculs, où seulement 6 capteurs redondants (deux par axes) peuvent être utilisés avec le matériel à notre disposition.

L'approche directe de la redondance ne semble pas donner des résultats intéressants de part les simulations effectuées. L'ajout de la mesure du vecteur de parité résoudrait le problème identifié, mais ne permettrait pas d'obtenir un effort de calcul inférieur à la méthode indirecte avec mesure du vecteur de parité.



(a) Estimation de l'accélération et accélération vraie, (b) Erreur d'estimation de l'accélération des axes du repère mobile B

Figure 121 Estimation de l'accélération dans les axes du repère mobile B , approche directe

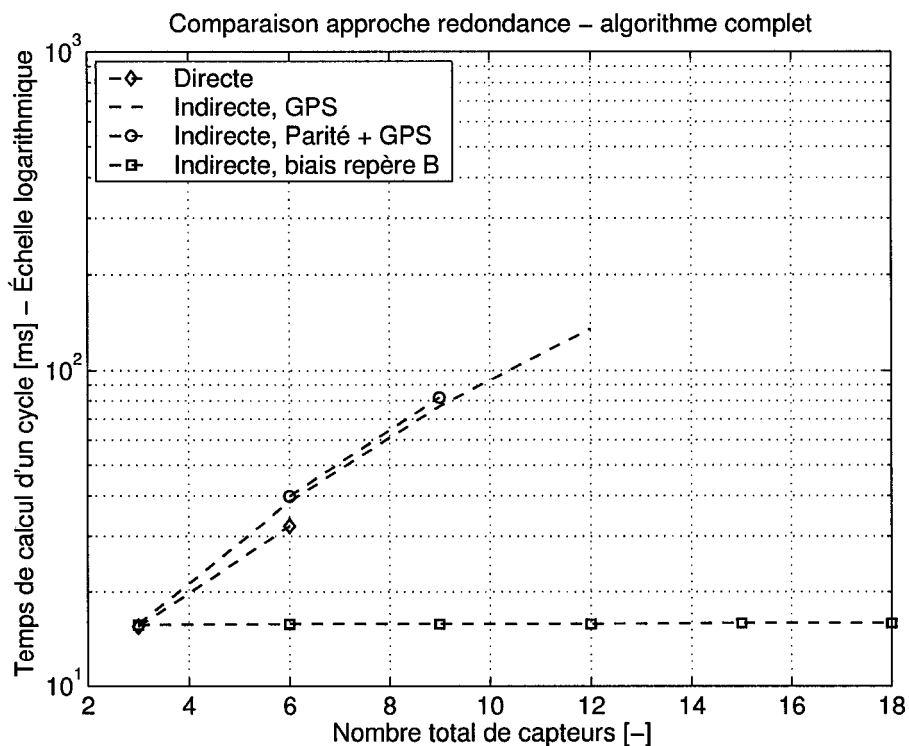


Figure 122 Comparaison des temps de calcul pour différentes approches, incluant la redondance directe

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. S. Draper, "Origins of inertial navigation," *Journal of Guidance and Control*, vol. 4, no. 5, pp. 449 – 463, 1981.
- [2] B. Finney and V. Lytkin, "Space and society," in *Keys to Space : An Interdisciplinary approach to space studies* (A. Houston and M. Rycroft, eds.), International Space University, 1999.
- [3] S. Garg, L. Morrow, and R. Mamen, "Strapdown navigation technology : A litterature survey," *Journal of Guidance and Control*, vol. 1, no. 3, pp. 161 – 172, 1978.
- [4] D. Titterton and J. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology*. 1997.
- [5] D. J. Biezad, *Integrated Navigation and Guidance Systems*. AIAA Education Series, 1999.
- [6] A. B. Chatfield, *Fundamentals of High Accuray Inertial Navigation*, vol. 174 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*. 1997.
- [7] J. Radix, *Systemes Inertiels a Composants Lies "Strap-Down"*. Toulouse, France : Supaero, 1993.
- [8] P. S. Maybeck, *Stochastic models, estimation, and control*, vol. 1 of *Mathematics in Science and Engineering*. 1994.
- [9] P. G. Savage, *Strapdown Analytics, Part 1*. Maple Plain, MN : Strapdown Associates Inc., 2000.
- [10] P. G. Savage, *Strapdown Analytics, Part 2*. Maple Plain, MN : Strapdown Associates Inc., 2000.
- [11] A. Kourepenis, J. Borenstein, J. Connelly, R. Elliott, P. Ward, and M. Weinberg, "Performance of mems inertial sensors," in *IEEE Position, Location and Navigation Symposium*, 1998.
- [12] A. Kourepenis, J. Connelly, and J. Sitomer, "Low cost mems inertial measurement unit," in *Institute of Navigation 59th Annual Meeting*, 2003.
- [13] D. Moore, "Recent development in micromachined silicon," *Electronics and Communication Engineering Journal*, vol. 11, no. 6, pp. 261 – 270, 1999.
- [14] K. Gabriel, "Microelectromechanical systems (mems) tutorial," in *Proceedings of the International Test Conference*, pp. 432 – 441, 1998.

- [15] N. Barbour, E. Brown, J. Connelly, J. Dowdle, G. Brand, J. Nelson, and J. O'Bannon, "Micromachined inertial sensors for vehicles," in *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pp. 1058 – 1063, 1997.
- [16] T. Kenny, "Nanometer-scale force sensing with mems devices," *IEEE Sensors Journal*, vol. 1, no. 2, pp. 148 – 156, 2001.
- [17] A. El-Rabbany and M. El-Diasty, "A sequential de-noising model for mems-based inertial data," in *Proceedings of the 14th Symposium on Navigation of the Canadian Navigation Society*, 2003.
- [18] A. Abershitz, K. Cohen, and R. Rubinfeld, "Performance augmentation of low cost sensors," in *Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, vol. 2, pp. 748 – 752, 2001.
- [19] B. Leach and K. Hui, "Low cost strapdown inertial/dgps integration for flight test requirements," *Canadian Aeronautics and Space Journal*, vol. 45, no. 3, pp. 253 – 263, 1999.
- [20] G. Chen and M. Harigae, "Advanced carrier dgps/mems-imu integrated navigation with hybrid system models," in *IEEE 2000 Position, Location and Navigation Symposium*, pp. 443 – 448, 2000.
- [21] A. H. Jazwinski, "Adaptive filtering," *Automatica*, vol. 5, pp. 475 – 485, 1969.
- [22] R. K. Mehra, "On the identification of variances and adaptive kalman filtering," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-15, no. 2, pp. 175 – 184, 1970.
- [23] C. Hide, T. Moore, and M. Smith, "Adaptive kalman filtering for low-cost ins/gps," in *ION GPS 2002*, pp. 1143 – 1147, 2002.
- [24] J. J. Hutton, B. M. Scherzinger, and J. C. McMillan, "High quality measurements of position and orientation using low cost components," *Canadian Aeronautics and Space Journal*, vol. 43, no. 2, pp. 135 – 140, 1997.
- [25] S. Cho, K. Lee, C. Park, and J. Lee, "A personal navigation system using low-cost mems/gps/fluxgate," in *Institute of Navigation 59th Annual Meeting*, 2003.
- [26] J. Rios and E. White, "Fusion filter algorithm enhancements for a mems gps/imu," in *Institute of Navigation National Technical Meeting*, 2002.
- [27] E. Abbott and D. Powell, "Land-vehicle navigation using gps," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 1, pp. 145 – 162, 1999.
- [28] M. J. Caruso, "Applications of magnetoresistive sensors in navigation systems," tech.

- rep., Honeywell, 2003. <http://www.magneticsensors.com/datasheets/sae.pdf>.
- [29] S. Sukkarieh, E. Nebot, and H. Durrant-Whyte, "A high integrity imu/gps navigation loop for autonomous land vehicle applications," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 3, pp. 572–578, 1999.
 - [30] G. Grenon, P. An, S. Smith, and A. Healey, "Enhancement of the inertial navigation system for the morpheus autonomous underwater vehicles," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 26, no. 4, pp. 548–560, 2001.
 - [31] Q. Ladetto, B. Merminod, P. Terrier, and Y. Schutz, "On foot navigation : When gps alone is not enough," *Journal of Navigation*, vol. 53, no. 2, pp. 279 – 286, 2000.
 - [32] J. Kim and S. Sukkarieh, "A baro-altimeter augmented ins/gps navigation system for an uninhabited aerial vehicle," in *6th International Conference on Satellite Navigation Technology (SATNAV 03)*, 2003.
 - [33] S. Sukkarieh, *Low Cost, High Integrity, Aided Inertial Navigation Systems for Autonomous Land Vehicles*. PhD thesis, The University of Sydney, 2000.
 - [34] M. Cannon, R. Nayak, G. Lachapelle, O. Salychev, and V. Voronov, "Low-cost ins/gps integration : Concepts and testing," *The Journal of Navigation*, vol. 54, no. 1, pp. 119 – 134, 2001.
 - [35] B. Scherzinger, "Precise robust positioning with inertially-aided rtk," in *Proceedings of the 14th Symposium on Navigation of the Canadian Navigation Society*, 2003.
 - [36] M. Koifman and I. Bar-Itzhack, "Inertial navigation system aided by aircraft dynamics," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 4, pp. 487–493, 1999.
 - [37] C. Eck, H. P. Geering, and S. Bose, "Model based ins/gps navigation," in *Proceedings of the 7th St-Peterburg Intl. Conf. on Integrated Navigation Systems*, pp. 95 – 102, 2000.
 - [38] C. Eck, H. Geering, and S. Bose, "Error dynamics of the model based ins/gps navigation for an autonomously flying helicopter," in *Proceedings of the 47th annual AIAA Guidance, navigation, and control conf. and exhibits*, 2000.
 - [39] G. Pitman, *Inertial Guidance*. New York : Wiley, 1962.
 - [40] K. R. Britting, "Inertial navigation systems analysis," 1971.
 - [41] D. O. J. Benson, "A comparison of two approaches to pure-inertial and doppler-inertial error analysis," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*,

- vol. AES-11, no. 4, pp. 447 – 455, 1975.
- [42] G. Arshal, “Error equations of inertial navigation,” *Journal of Guidance*, vol. 10, no. 4, pp. 351 – 358, 1987.
 - [43] I. Bar-Itzhack and N. Berman, “Control theoretic approach to inertial navigation systems,” *Journal of Guidance*, vol. 11, no. 3, pp. 237 – 245, 1988.
 - [44] D. Goshen-Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, “Unified approach to inertial navigation system error modeling,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 15, no. 3, pp. 648 – 653, 1992.
 - [45] B. Scherzinger and D. Reid, “Modified strapdown inertial navigator error models,” in *Proceedings of the 1994 IEEE Position Location and Navigation Symposium*, pp. 426–430, 1994.
 - [46] B. M. Scherzinger, “Inertial navigator error models for large heading uncertainty,” in *Proceedings of the 1996 IEEE Position Location and Navigation Symposium*, pp. 477–484, 1996.
 - [47] X. Kong, E. Nebot, and H. Durrant-Whyte, “Development of a nonlinear psi-angle model for large misalignment errors and its application in ins alignment and calibration,” in *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1430–1435, 1999.
 - [48] E.-H. Shin and N. El-Sheimy, “An unscented kalman filter for in-motion alignment of low-cost imu,” in *Proceedings of the IEEE Position Location and Navigation Symposium*, 2004.
 - [49] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “A new extension of the kalman filter to nonlinear systems,” in *Proceedings of the SPIE AeroSense Symposium*, 1997.
 - [50] L. Vodicheva, “Fault-tolerant strapdown inertial measurement unit : Optimization approaches,” in *Proceedings of the 8th St-Peterburg Intl. Conf. on Integrated Navigation Systems*, pp. 108 – 110, 2001.
 - [51] A. J. Pejsa, “Optimum skewed redundant inertial navigation,” *AIAA Journal*, vol. 12, no. 7, pp. 899–902, 1974.
 - [52] P. M. Frank, “Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results,” *Automatica*, vol. 26, no. 3, pp. 459–474, 1990.
 - [53] R. Kelly, “The linear model, rnp, and the near-optimum fault detection and exclusion algorithm,” in *NAVIGATION*, vol. V, pp. 227–259., Institute of Navigation, 1998.

- [54] A. Ray and S. Phoha, "Calibration and estimation of redundant signals," in *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, vol. 2, pp. 1437–1442, 2002.
- [55] D. Allerton and H. Jia, "An error compensation method for skewed redundant inertial configuration," in *Institute of Navigation 58th Annual Meeting*, 2002.
- [56] R. Resnick and D. Halliday, *Ondes, optique et physique moderne*. 1980.
- [57] J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Harcourt College, 4th ed., 1995.
- [58] B. Sinopoli, M. Micheli, G. Donato, and T. Koo, "Vision based navigation for an unmanned aerial vehicle," in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1757–1764, 2001.
- [59] H. D. Black, "Early development of transit, the navy navigation satellite system," *Journal of Guidance*, vol. 13, no. 4, pp. 577 – 585, 1990.
- [60] R. L. Greenspan, "Gps and inertial integration (chapitre 7)," in *Global positioning system : theory and applications* (B. W. Parkinson and J. J. Spilker, eds.), vol. 2 of *Progress in astronautics and aeronautics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [61] D. Lewis and J. Kim, "Mems, imu and tcxo effect on ultra-tightly-coupled gps/ins tracking performance," in *Proceedings of the 6th International Symposium on Satellite Navigation Technology*, 2003.
- [62] S. Hewitson, J. Wang, and A. Kearsley, "Performance evaluation of inertial navigation systems for surveying," in *Proceedings of the 6th 6th International Symposium on Satellite Navigation Technology*, 2003.
- [63] N. Barbour and G. Schmidt, "Inertial sensor technology trends," *IEEE Sensors Journal*, vol. 1, no. 4, pp. 332–339, 2001.
- [64] A. Lawrence, *Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance and Control*. New York : Springer-Verlag, 2nd ed., 1998.
- [65] G. T. Kovacs, *Micromachined Transducers Sourcebook*. McGraw Hill, 1998.
- [66] S. Sze, *Semiconductor Sensors*. John Wiley and Sons, 1994.
- [67] S. Tadigadapa, "Integration of micromachined devices and microelectronic circuits : techniques and challenges," in *Proceedings of the 43rd IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol. 1, pp. 224–227, 2000.

- [68] C. Acar and A. M. Shkel, "Experimental evaluation and comparative analysis of commercial variable-capacitance mems accelerometers," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 13, pp. 634–645, 2003.
- [69] J. Bird and D. Arden, "Simulation of updating requirements for mems-based inertial navigation," in *Proceedings of the 14th Canadian Symposium on Navigation*, 2003.
- [70] A. Damico, "A contribution on some basics definition of sensors properties," *IEEE Sensors Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 183 – 190, 2001.
- [71] M. Park and Y. Gao, "Error analysis of low-cost mems-based accelerometers for land vehicle navigation," in *ION GPS 2002*, pp. 1162 – 1170, 2002.
- [72] D. Goshen-Meskin and I. Bar-Itzhack, "Observability analysis of piece-wise constant systems - part ii : Application to inertial navigation in-flight alignment," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 4, pp. 1068–1075, 1992.
- [73] S. Sukkarieh, P. Gibbens, B. Grocholsky, K. Willis, and H. F. Durrant-Whyte, "A low-cost, redundant inertial measurement unit for unmanned air vehicles," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 19, no. 11, pp. 1089–1103, 2000.
- [74] B. Dasarathy, "More the merrier ... or is it? - sensor suite augmentation benefits assessment," in *Proceedings of the Third International Conference on Information Fusion*, vol. 2, pp. 20–25, 2000.
- [75] J. C. K. Chou, "Quaternion kinematic and dynamical differential equations," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, no. 1, pp. 53 – 64, 1992.
- [76] R. Giroux, "Orthogonal vs skewed inertial sensors redundancy : a new paradigm for low cost systems," in *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Cost Oriented Automation*, 2004.
- [77] J. J. Spilker, "Satellite constellation and geometric dilution of precision (chapitre 5)," in *Global positioning system : theory and applications* (B. W. Parkinson and J. J. Spilker, eds.), vol. 1 of *Progress in astronautics and aeronautics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [78] GPSoftNav, "<http://www.gpssoftnav.com>," 2003.
- [79] J. Zywił, J. Hepburn, C. Doyle, and B. Scherzinger, "Navpack - a package of simulation tools for integrated navigation applications," in *Proceedings of the 1988 IEEE Position Location and Navigation Symposium*, pp. 470 – 475, 1988.
- [80] C. Eck, J. Chapuis, and H. P. Geering, "Software-supported design and evaluation of low-cost navigation units," in *Proceedings of the 8th St-Peterburg International*

Conference on Integrated Navigation Systems, pp. 163 – 172, 2001.

- [81] M. Otter and F. E. Cellier, “Software for modeling and simulating control systems,” in *Control System Fundamentals* (W. S. Levine, ed.), pp. 419 – 432, CRC Press, 2000.
- [82] J. Krasner, “Total cost of development,” tech. rep., Embedded Market Forecasters, July 2003.
- [83] R. Giroux, R. J. Landry, and R. Gourdeau, “Simulation software and hardware implementation for a low-cost electronic inertial navigation system test-bench,” in *Proceedings of the 9th St-Petersburg International conference on Integrated Navigation Systems*, 2002.
- [84] R. Giroux, R. J. Landry, and R. Gourdeau, “Simulation software and hardware implementation for a low-cost electronic inertial navigation system test-bench (in russian),” *Journal of Gyroscopy and Navigation*, vol. 41, no. 1, 2003.
- [85] R. Giroux, B. W. Leach, R. J. Landry, and R. Gourdeau, “Validation and performance evaluation of a simulink inertial navigation system simulator,” in *Proceedings of the 14th Symposium on Navigation of the Canadian Navigation Society*, 2003.
- [86] R. Giroux, B. W. Leach, R. J. Landry, and R. Gourdeau, “Validation and performance evaluation of a simulink inertial navigation system simulator,” *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 2003.
- [87] P. G. Savage, “Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1 : Attitude algorithms,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 21, no. 1, pp. 19 – 28, 1998.
- [88] X. Li and H.-J. Goetze, “Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy and geophysics,” *Geophysics*, vol. 66, no. 6, pp. 1660 – 1668, 2001.
- [89] P. G. Savage, “Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2 : Velocity and position algorithms,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 21, no. 2, pp. 208 – 221, 1998.
- [90] Y. A. Litmanovich, V. M. Lesyuchevsky, and V. Z. Gusinsky, “Two new classes of strapdown navigation algorithms,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 23, no. 1, pp. 34 – 44, 2000.
- [91] L. F. Shampine and M. W. Reichelt, “The matlab ode suite,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, pp. 1–22, 1997.
- [92] R. Giroux, S. Sukkarieh, and M. Bryson, “Implementation of a skewed-redundant

low-cost ins in a fast-prototyping environment,” in *Proceedings of the Institute of Navigation National Technical Meeting*, 2004.

- [93] “Diamond-mm-32-at user manual v2.64 (<http://www.diamondsystems.com>),” tech. rep., Diamond Systems Corporation, 2003.
- [94] “G12 gps oem board and sensor reference manual,” tech. rep., Magellan Corporation, 2000.
- [95] A. E. J. Bryson and Y.-C. Ho, “Applied optimal control,” 1975.
- [96] J. Radix, *Filtrage et Lisssage Statistiques Optimaux Lineaires*. 1984.