

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE

M.Ing.

PAR
Mounir Beit

PLANIFICATION DE LA PRODUCTION ET DES STRATÉGIES DE
MAINTENANCE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION

MONTRÉAL, LE 08 NOVEMBRE 2004

(c) droits réservés de Mounir Beit

**CE PROJET A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

**Jean-Pierre Kenné, directeur de recherche
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure**

**Ali Gharbi, codirecteur de recherche
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure**

**Sylvie Nadeau, présidente du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure**

**Michel Rioux, membre du jury
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure**

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 3 AOÛT 2004

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

PLANIFICATION DE LA PRODUCTION ET DES STRATÉGIES DE MAINTENANCE DES SYSTÈMES DE PRODUCTION

Mounir Beit

SOMMAIRE

Le mémoire traite de la planification de la production et des stratégies de maintenance des systèmes de production. Le but du projet de recherche est d'améliorer les paramètres de planification dans notre problématique, l'inventaire et la période de maintenance préventive afin d'avoir un prix de revient des produits minimal.

Étant donné que, dans un système de production, les perturbations sont courantes, nous nous intéressons particulièrement aux stratégies permettant d'atténuer l'effet des perturbations sur la production. Ces stratégies se résument dans notre cas à la maintenance préventive permettant de diminuer la fréquence des pannes. Cette maintenance est combinée avec une politique de stockage de produits pour palier aux pénuries. De ce fait, la disponibilité des produits augmente et le coût total de production est minimal pour des politiques de maintenance et de stockage optimales.

Dans ce mémoire, nous utilisons une modélisation basée sur la théorie des processus stochastiques pour représenter un système de production. Cette représentation permet de considérer les variables de décision telles que la durée de la maintenance préventive et le niveau d'inventaire dans un modèle de commande optimale qui minimise le coût total de stockage, de pénurie et d'opération sur les machines (maintenance préventive et réparation des machines). Les conditions d'optimum obtenues sont résolues numériquement afin d'obtenir le niveau d'inventaire et la période (moment et durée) de maintenance préventive optimale.

Le mémoire présenté ainsi, donne une représentation plus performante d'un système de production. De plus, avec cette perspective, l'efficacité d'une machine de production est améliorée.

PLANNING OF THE PRODUCTION AND THE STRATEGIES OF MAINTENANCE OF THE SYSTEMS OF PRODUCTION

Mounir Beit

ABSTRACT

The master deals with the planning of the production and maintenance strategies of production systems, in order to improve the planning parameters and the cost related to involved products.

In this framework, we present strategies that allow decreasing the disruptions in the production, when a production system, disruptions are habitual. These strategies are preventive maintenance that reduces the frequency of the breakdowns. This maintenance is combined with product storage for preventing the inventory shortage. Therefore, we obtain the availability of the products increasing and the production cost becoming minimal for optimal maintenance and inventory politics.

In this master, we use a model based on the stochastic processes theory to represent a production system. This representation allows considering the decision variables such as the time of preventive maintenance and the level of the stock in an optimum model that minimizes the total cost of storage, of inventory shortage and operation on the machines (preventive maintenance and repair of the machines). The optimum conditions obtained are numerically solved in order to obtain the optimal inventory level and the optimal preventive maintenance period.

The master presented thus, gives a more preferment representation of a production system. Furthermore with this perspective the effectiveness of a production system is improved.

REMERCIEMENTS

J'ai eu le plaisir d'élaborer ce travail sous la direction de M. Jean Pierre Kenné et M. Ali Gharbi, qui m'ont aidé à élargir mon horizon de connaissances. Je les remercie de m'avoir permis d'acquérir une bonne expérience tant sur le plan scientifique qu'humain.

Je désire exprimer toute ma gratitude à ma famille, surtout à mes parents. Je dis tout simplement merci.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui, directement ou indirectement, m'ont soutenu pendant toute la durée de cette recherche, en particulier les professeurs du département du génie mécanique et de génie de la production automatisée, plus spécifiquement M. Michel Rioux et M. Tony Wong pour leur disponibilité et leurs conseils ainsi que tous mes amis et collègues.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE	i
ABSTRACT	ii
REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 STRATÉGIE DE PRODUCTION AVEC MAINTENANCE ET INVENTAIRE	2
1.1 Maintenance préventive systématique	2
1.1.1 Maintenance de type bloc	2
1.1.2 Maintenance de type âge	4
1.2 Stratégie de production avec inventaire et utilisant la maintenance de type bloc	5
1.3 Stratégie de production avec inventaire utilisant la maintenance de type âge	9
1.4 Stratégie de production à multiple seuils d'inventaire et maintenance de type âge	11
1.5 Contribution du mémoire	12
CHAPITRE 2 STRATÉGIE DE PRODUCTION AVEC MAINTENANCE DE TYPE BLOC	14
2.1 Introduction	14
2.2 Formulation du problème	16
2.2.1 Modélisation des défaillances	18
2.2.1.1 Étape de remplissage de l'inventaire	18
2.2.1.2 Étape après le remplissage de stock	21
2.2.2 Modélisation de la maintenance préventive	26
2.2.3 Coût total unitaire de la stratégie	27
2.3 Récapitulation du modèle	28
2.4 Problème à résoudre	33
2.5 Méthodes numériques et discussion des résultats	33

2.5.1	Méthodes numériques.....	34
2.5.1.1	Détermination de la fonction de renouvellement	36
2.5.1.2	Calcul des coûts de production.....	37
2.5.1.3	Valeur optimale de l'inventaire et de la période de maintenance préventive	37
2.6	Résultats numériques.....	38
2.6.1	Résultat graphique	38
2.6.2	Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance corrective)	40
2.6.3	Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance préventive).....	43
2.6.4	Analyse de sensibilité (variation du coût de stockage)	45
2.6.5	Analyse de sensibilité (variation du coût de pénurie)	47
2.6.6	Discussion des résultats.....	49
2.7	Conclusion.....	50
 CHAPITRE 3 STRATÉGIE DE PRODUCTION AVEC MAINTENANCE DE TYPE ÂGE.....		51
3.1	Introduction	51
3.2	Modélisation.....	52
3.2.1	Coût de stockage et de pénurie avant le remplissage du stock.....	53
3.2.2	Coût de stockage et de pénurie lorsque le seuil est déjà atteint.....	56
3.2.3	Coût dû à la maintenance préventive.....	59
3.2.4	Coût total unitaire de production.....	60
3.3	Récapitulation du modèle.....	61
3.4	Problème à résoudre	64
3.5	Méthodes numériques et discussions.....	65
3.6	Résultats numériques et analyse de sensibilité.....	68
3.6.1	Résultat graphique	68
3.6.2	Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance corrective).....	70
3.6.3	Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance préventive).....	72
3.6.4	Analyse de sensibilité (variation du coût de stockage)	74
3.6.5	Analyse de sensibilité (Variation du coût de pénurie).....	76
3.6.6	Discussion des résultats	78
3.7	Conclusion.....	78
 CHAPITRE 4 STRATÉGIE À PLUSIEURS SEUILS DE STOCK ET MAINTENANCE TYPE ÂGE.....		80
4.1	Introduction	80
4.2	Modèle avec pénurie non récupérable.....	82

4.2.1	Modélisation mathématique	82
4.2.2	Problème d'optimisation à résoudre	85
4.2.3	Méthode de calcul.....	85
4.2.4	Résultats numériques.....	88
4.3	Modèle avec stock négatif.....	90
4.3.1	Modélisation mathématique et résolution des conditions d'optimum....	92
4.3.2	Analyse de sensibilité	93
4.3.2.1	Analyse de sensibilité (variation du coût de stockage)	94
4.3.2.2	Analyse de sensibilité (variation du coût de pénurie)	95
4.3.2.3	Analyse de sensibilité (variation du coût de maintenance corrective)	98
4.3.2.4	Analyse de sensibilité (variation du coût de maintenance préventive) ..	100
4.3.3	Comparaison entre une politique à seuil unique et la politique à plusieurs seuils.....	102
4.3.4	Comportement asymptotique du modèle.....	104
4.3.5	Commande du modèle.....	106
4.4	Conclusion.....	107
	CONCLUSION GÉNÉRALE.....	110
	ANNEXES:	
1-	Programme d'évaluation du stock et de la période de maintenance préventive de type bloc	112
2-	Programme d'évaluation du stock et de la période de maintenance préventive de type âge.....	119
3-	Programme d'évaluation du stock en fonction de l'âge et de la période de maintenance préventive.....	125
4-	Programme d'évaluation du coût en fonction du stock et de la période de maintenance préventive	129
	BIBLIOGRAPHIE	132

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Rappel des équations et de leurs illustrations 28
Tableau II	Approximation de la fonction de renouvellement..... 37
Tableau III	Variation du coût de maintenance corrective..... 41
Tableau IV	Variation du coût de maintenance préventive..... 43
Tableau V	Variation du coût de stockage..... 45
Tableau VI	Variation du coût de pénurie..... 47
Tableau VII	Rappel des équations et de leurs illustrations 61
Tableau VIII	Variation du coût de maintenance corrective..... 71
Tableau IX	Variation du coût de maintenance préventive..... 73
Tableau X	Variation du coût de stockage..... 75
Tableau XI	Influence de la variation du coût de pénurie sur les valeurs optimales.. 76
Tableau XII	Comparaison entre coût de la politique multi seuils et celui d'une politique standard 88
Tableau XIII	Stratégie de stockage..... 90
Tableau XIV	Niveaux de stocks avec variation du coût de stockage 94
Tableau XV	Niveaux de stock et variation du coût de pénurie 96
Tableau XVI	Niveaux de stock avec la variation du coût de maintenance corrective..... 98
Tableau XVII	Niveaux de l'inventaire avec la variation du coût de maintenance préventive..... 101
Tableau XVIII	Comparaison de la politique à seuil fixe avec le modèle proposé 103
Tableau XIX	Représentation des seuils et leurs âges..... 106
Tableau XX	Représentation du vecteur des valeurs des seuils avec leurs intervalles respectives suivant les données précédentes 107

LISTE DES FIGURES

	<i>Page</i>
Figure 1 Politique de maintenance type bloc	5
Figure 2 Représentation du modèle lorsque T tend vers l'infini.....	8
Figure 3 Représentation d'une rupture de stock selon le modèle	10
Figure 4 Politique de stockage modifié.....	12
Figure 5 Système de production.....	14
Figure 6 Panne arrivant avant le remplissage de l'inventaire	18
Figure 7 Surface de stockage lorsque l'inventaire est en remplissage.....	19
Figure 8 Espace du coût de stock si la panne arrive avant le remplissage.....	20
Figure 9 Représentation de la surface de pénurie lors du remplissage de stock	20
Figure 10 Panne survenue après le remplissage de stock à l'instant "x"	22
Figure 11 Représentation d'espace de pénurie.....	22
Figure 12 Panne avec pénurie	23
Figure 13 Panne sans pénurie.....	23
Figure 14 Modélisation des temps dus à la production.....	24
Figure 15 Représentation des surfaces de stock et de réparation.....	24
Figure 16 Modélisation de la maintenance préventive	26
Figure 17 Algorithme de résolution numérique.....	35
Figure 18 Section du graphe du coût unitaire aux valeurs optimales	39
Figure 19 Courbe de niveau du coût en fonction du stock et de la période	40
Figure 20 Influence de C_1 sur l'inventaire optimale	42
Figure 21 Influence de C_1 sur la période optimale.....	42
Figure 22 Influence de C_2 sur l'inventaire optimale	44
Figure 23 Influence de C_2 sur la période optimale.....	44
Figure 24 Influence de C^+ sur la période optimale.....	46
Figure 25 Influence de C^+ sur l'inventaire optimal	46
Figure 26 Influence de C^- sur la période optimale.....	48

Figure 27 Influence de C_- sur l'inventaire optimal	48
Figure 28 Représentation de la surface du remplissage de stock avec panne à un instant x	54
Figure 29 Panne avant le remplissage du stock avec réparation sans pénurie.....	54
Figure 30 Panne avant le remplissage du stock avec réparation qui résulte en pénurie .	55
Figure 31 Panne survenue après remplissage de stock et sans pénurie.....	57
Figure 32 Panne survenue après remplissage du stock et avec pénurie.....	57
Figure 33 Algorithme pour l'optimisation numérique	67
Figure 34 Profil du graphe du coût unitaire aux valeurs optimales	69
Figure 35 Courbe de niveau du coût en fonction du stock et de la période	70
Figure 36 Influence de C_1 sur l'inventaire optimal	71
Figure 37 Influence de C_1 sur la période optimale.....	72
Figure 38 Influence de C_2 sur l'inventaire optimal	73
Figure 39 Influence de C_2 sur la période optimale.....	74
Figure 40 Influence de C_+ sur la période optimale.....	75
Figure 41 Influence de C_+ sur l'inventaire optimal	75
Figure 42 Influence de C_- sur la période optimale.....	77
Figure 43 Influence de C_- sur l'inventaire optimal	77
Figure 44 Panne à un instant t donné	83
Figure 45 Algorithme d'optimisation du coût de production.....	87
Figure 46 Seuils du stock selon l'âge de la machine	89
Figure 47 Représentation d'une panne engendrant une pénurie	91
Figure 48 Comportement du stock dicté par la loi de commande.....	91
Figure 49 Politique optimale de stockage pour différents coûts de stockage	95
Figure 50 Politique optimale de stockage pour différents coûts de pénurie	97
Figure 51 Politique optimale de stockage pour différents coûts de maintenance corrective	100
Figure 52 Politique optimale de stockage pour différents coûts de maintenance préventive	102
Figure 53 Stratégie à multiples seuils sans maintenance préventive	105

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$f(t)$	Fonction de densité de probabilité liée à la vie de la machine
$F(t)$	Fonction cumulée de densité de probabilité liée à la vie de la machine
$R(t)$	Fonction de la fiabilité de la machine
$f_r(t)$	Fonction de densité de probabilité liée au temps de réparation de la machine
$F_r(t)$	Fonction cumulée de densité de probabilité liée au temps de réparation de la machine
$f_p(t)$	Fonction de densité de probabilité liée au temps de maintenance préventive de la machine
$F_p(t)$	Fonction cumulée de densité de probabilité liée au temps de maintenance préventive de la machine
$H(t)$	Fonction de renouvellement
mttf	Temps moyen jusqu'à la panne
mttr	Temps moyen jusqu'à la réparation
mttp	Temps moyen jusqu'à la fin de la maintenance préventive
U	Taux de production
U _{mx}	Taux de production maximal
d	Taux de la demande
Trs	Temps d'épuisement de l'inventaire
C ₁	Coût de maintenance corrective
C ₂	Coût de maintenance préventive
C ⁺	Coût de stockage d'une pièce par unité de temps
C ⁻	Coût de pénurie d'une pièce par unité de temps
C _p	Coût de pénurie par pièce
T	Période de maintenance préventive
S	Niveau d'inventaire

S_{opt}	Niveau d'inventaire optimal
T_{opt}	Période de maintenance préventive optimale
t_f	Temps de fonctionnement sans avoir de panne
CAS	Coût de production avant de bâtir l'inventaire
CBS	Coût de production après avoir bâti l'inventaire

INTRODUCTION

Dans un système de production, les interruptions font partie des opérations courantes. Leur nature indésirable nous a invité à développer des politiques pour les diminuer ou les supprimer avec des méthodes telles que les politiques de maintenance préventive.

La maintenance est cependant une source d'interruption de production. Par contre, elle est contrôlée, ce qui la rend acceptable même si elle engendre des effets indésirables du fait que son temps d'exécution ne peut être fixé dans tous les cas. Le fait que la stratégie de maintenance préventive soit contrôlée la rend plus efficace étant donné qu'on peut prendre les mesures nécessaires pour réduire et même annuler les effets indésirables (i.e., les pénuries). Ceci doit être fait en implantant une bonne stratégie de maintenance.

Malgré que la stratégie de maintenance préventive arrive à diminuer les interruptions aléatoires, elle ne les annule pas. De ce fait, les efforts se sont dirigés vers d'autres méthodes pour réduire les effets des interruptions puisqu'il demeure difficile de supprimer les perturbations. Ainsi, les politiques de stockage prennent leur place dans les stratégies de production.

Les stratégies de stockage engendrent des niveaux de stockage élevés ou des seuils élevés. Cela est dû au grand risque d'interruption. Aussi, le stockage ne demeure pas sans frais et engendre des coûts supplémentaires qui restent acceptables comparativement aux pénuries, d'où le besoin de minimiser l'inventaire. Or, pour diminuer les inventaires, il faut diminuer leurs raisons d'être qui sont les pénuries causées par les perturbations. Pour cela, les stratégies de stockage ont été combinées avec la stratégie de maintenance préventive, ce qui rend l'optimisation plus efficace du fait du nombre moins important de ruptures puisque plus le système tient compte des facteurs, plus son modèle d'optimisation est efficace.

Ainsi, on remarque la complémentarité et le besoin de combiner les deux politiques.

CHAPITRE 1

STRATÉGIE DE PRODUCTION AVEC MAINTENANCE ET INVENTAIRE

Dans ce chapitre, nous présentons une revue de littérature qui traite de la combinaison et de la complémentarité de deux stratégies : la politique de stockage et celle de la maintenance préventive. Cette dernière détient plusieurs types dont deux vous seront présentés dans un bref rappel (le type bloc et le type âge).

Un bref rappel sur la stratégie de maintenance préventive de type bloc et sur la stratégie de maintenance préventive de type âge.

1.1 Maintenance préventive systématique

Ce type de maintenance comprend l'ensemble des actions destinées à restaurer, en totalité ou partiellement, la marge de résistance du matériel non défaillant lorsque ces tâches sont décidées en fonction du temps “maintenance de type bloc” ou en fonction de la production “maintenance de type âge”, sans considération de l’état des matériaux à cet instant.

1.1.1 Maintenance de type bloc

La maintenance préventive de type bloc consiste à faire des remplacements périodiques. Ces remplacements sont faits à des intervalles de temps fixes prédéterminés, mais entre les maintenances, si une défaillance se produit, on procède à une maintenance corrective.

Le modèle proposé par Barlow et Hunter (1960) est l'un des premiers à implémenter ce type de maintenance. Il utilise la fonction de renouvellement et détermine la période optimale selon le coût en faisant un équilibre entre les coûts de défaillance et de maintenance préventive. Le modèle proposé par Ait Kadi et Cleroux (1995), quant à lui,

est une extension de cette politique qui tient compte des inventaires disponibles de pièces de rechange et de la politique d'approvisionnement.

Cette politique présente des défauts dans son principe puisqu'elle permet un gaspillage d'équipement (maintenance préventive même si la machine est neuve). Ainsi, on pourra changer un équipement qui vient d'être mis en service. On distingue des politiques qui, en cas de panne, optent pour la réparation minimale qui consiste à changer un composant par un autre sans modifier la fiabilité du système Barlow et Hunter (1960) et, par ailleurs, Bhat (1969) a utilisé des composants usagés dans sa stratégie de maintenance. Ces différentes possibilités ont été combinées pour profiter de l'avantage que procure chacune d'entre elles (Tango (1978), Ait Kadi et Cleroux (1990)).

Toutes ces politiques sont basées sur des données statistiques et plus particulièrement sur la fonction de renouvellement qui est la base de la maintenance de type bloc. Nous présentons ici un rappel de la théorie de renouvellement.

Théorie de renouvellement : La fonction de renouvellement peut être utilisée pour les stratégies de production qui utilisent la maintenance de type bloc et qui la modélisent mathématiquement. La fonction de renouvellement est utilisée pour déterminer le nombre moyen de pannes sur un intervalle déterminé. Pour obtenir cette fonction, il est nécessaire de présenter des hypothèses fondamentales.

L'élément maintenable est remplacé par un élément neuf ou équivalent d'un point de vue fiabilité. Le temps moyen de réparation (mttr) est négligeable devant le temps moyen de bon fonctionnement (mttf).

Soit $F(x)$ la probabilité de défaillance de l'élément à l'instant " x ", et soit l'intervalle $[0, M]$ dans lequel on veut calculer le nombre moyen de pannes.

La loi d'apparition de la n ième panne dans l'intervalle $[0, M]$ est définie par récurrence selon l'équation (1.1).

$$F_n(M) = \int_0^M F_{n-1}(M-\tau) dF(\tau)$$

avec :

$$F_1(M) = F(M)$$
(1.1)

Ainsi, on aura l'équation de renouvellement représentant le nombre moyen de pannes entre $[0, M]$ qui s'établit comme suit :

$$H(M) = F(M) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^M F_n(M-\tau) dF(\tau)$$
(1.2)

Cette équation n'a pas de solution exacte pour la plupart des distributions de probabilité, mais elle peut être évaluée numériquement (il existe des articles traitant de l'évaluation de cette fonction).

1.1.2 Maintenance de type âge

La maintenance de type âge consiste à faire des remplacements d'équipements suivant un intervalle d'âge fixe. Ainsi, si une panne se produit dans la période de la maintenance, une maintenance corrective est effectuée et l'âge de la machine est remis à zéro. Une nouvelle période de maintenance commence et ainsi de suite.

De plus, la détermination de la période de maintenance est faite selon un compromis entre le coût de panne et celui de la maintenance préventive. Différentes caractéristiques de cette politique ont été analysées par Barlow et Hunter (1960).

1.2 Stratégie de production avec inventaire et utilisant la maintenance de type bloc

La maintenance de type bloc ou maintenance périodique consiste à faire des remplacements d'équipements à des intervalles constants de longueur T ou, s'il y a défaillance, à faire une maintenance corrective. La figure 1 illustre cette politique.

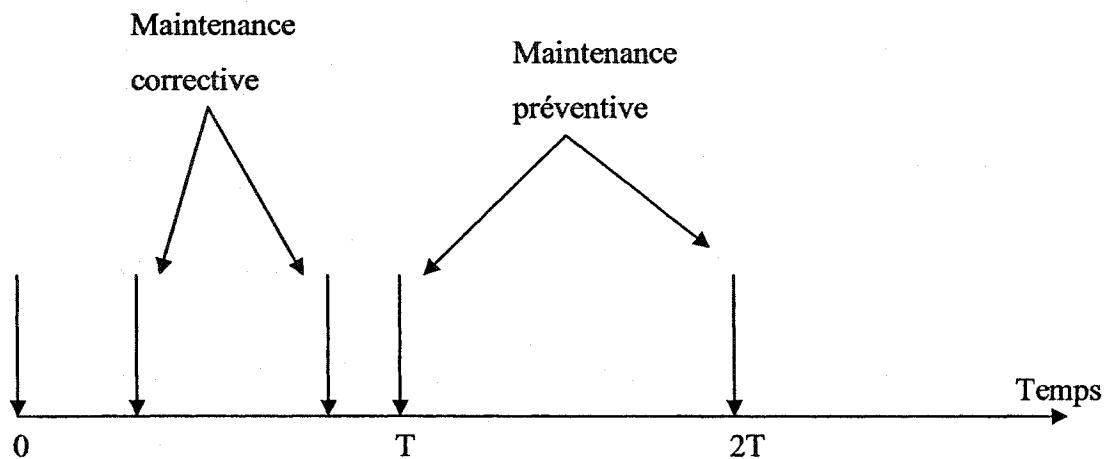


Figure 1 Politique de maintenance type bloc

Le modèle proposé dans Barlow et Proschan (1965) est l'un des premiers qui présente la maintenance du type bloc. Ce modèle donne une approximation du temps de maintenance préventive en fonction des coûts de la maintenance corrective et préventive et de la fonction représentant la machine. Le modèle reste limité dans la représentation d'un système de production et représente des gaspillages en ce qui concerne les équipements, puisqu'un équipement peut être remplacé même s'il est neuf. Cette dernière remarque a été prise en compte dans Tango (1978), qui a introduit l'utilisation des pièces usagées dans certains cas pour diminuer le gaspillage d'équipements.

Malgré ce défaut, cette stratégie de maintenance préventive de type bloc reste la préférée dans les industries, qui considèrent que sa facilité d'application peut avoir plus d'influence que le gaspillage dans les pièces de rechange.

Ensuite, le besoin s'est dirigé vers la combinaison de cette maintenance avec la politique de stockage. Vu la difficulté de modéliser ce type de combinaison, rare et insatisfaisante, les initiatives restent dans ce type de maintenance.

Des travaux tels Groenevelt et al. (1992a) se sont intéressés à montrer le lot économique nécessaire pour une industrie peu fiable. Ces travaux ont aussi montré qu'il existe un compromis entre l'investissement pour augmenter la qualité d'entretien, l'économie réalisée avec les inventaires de sécurité et le coût de réparation. Par ailleurs, Groenevelt et al. (1992b) se sont concentrés sur les effets des pannes des machines et de l'entretien correctif sur les décisions de la taille des inventaires économiques ou de sécurité. En ce qui concerne Van der Duyn Schouten et Vanneste (1995), ils ont mis au point une politique de maintenance préventive basée sur l'information de l'âge et l'inventaire. Pour leur part, Balasubramanian et Molu (1987) ont fourni une approche pour la planification de la maintenance préventive tenant compte d'un projet de production. Chan (2001) a étudié les effets de différentes politiques de maintenance d'un système de production et a examiné la performance d'un tel système sous différentes conditions d'opération. Le modèle proposé par Cheung et Hausman (1997) est formulé pour la maintenance préventive et l'inventaire de sécurité dans un environnement de production. La taille optimale du lot et l'inventaire de sécurité ont été déterminés. Ce modèle suppose qu'on ne puisse pas avoir de panne avant que le stock soit rempli. Il a défini le temps de remplissage comme point de régénération de l'âge de la machine et du temps. Pendant cette période de remplissage, Cheung et Hausman (1997) supposent que l'âge de la machine ne varie pas et reste à sa valeur initiale. Par contre, Dohi et al. (2001) ont étudié le modèle proposé par Cheung et Hausman (1997) en posant quelques hypothèses restrictives différentes. Dans les deux modèles, il a été supposé que le temps

d'interruption de production, en raison de la maintenance préventive régulière, est constant. Cheung et Hausman (1997) ont supposé que la panne, durant le remplissage du stock, n'arrive pas certainement. Dans leur modèle, Dohi et al. (2001) ont suggéré que ce traitement est inadéquat et ont supposé que si une défaillance arrive pendant la période de remplissage du stock, une réparation minimale avec une durée négligeable est exécutée et le système se retrouve dans l'état immédiatement avant la panne. Une autre supposition, dans le modèle, est que la vie de la machine de production est exponentiellement distribuée, ce qui restreint le modèle à une seule distribution.

Par ailleurs, dans ce modèle, ELKASSAR et SALAMEH (2003) ont eu pour objectif la détermination du stock de sécurité optimal pour résister efficacement à l'imprévisibilité dans la durée d'interruption de production, en raison de la maintenance préventive et de la défaillance possible de la machine. Ils considèrent que la probabilité qu'une machine tombe en panne, pendant la période de remplissage, est négligeable. Leur stock est toujours réduit à zéro, positif ou négatif (pénurie), lors d'interruptions. Dans le modèle de Chelbi et Ait Kadi (2001), les auteurs proposent une modélisation analytique pour déterminer la taille du stock et la période de maintenance préventive pour une unité de production soumise à une maintenance préventive régulière de type bloc; le modèle qu'il propose est déterministe. C'est une stratégie d'exploitation d'une unité de production constituée d'une machine qui produit à un taux constant prédéterminé. La machine est remise à neuf après chaque période de temps "T", avec la maintenance préventive. S'il y a eu une panne, on procède à une remise à neuf à l'aide de la maintenance corrective. Cette défaillance ou panne est détectée instantanément. Toutes les ressources nécessaires pour les maintenances, préventive ou corrective, sont disponibles au moment désiré. La maintenance préventive est planifiée à l'avance et ne peut être changée. En cas de maintenance préventive, la machine peut satisfaire la demande et bâtir le stock avant d'être en panne, ce qui signifie qu'il y a restriction sur les pannes et qu'elles ne peuvent arriver que si l'inventaire a atteint le niveau optimal. Cette stratégie d'exploitation suggère de maintenir un stock "S" et de produire au taux de la demande afin de garantir

une satisfaction continue de la demande. Ce stock est planifié en tenant compte des faits que la machine tombe en panne de façon imprévisible et que les temps de maintenances correctives et préventives soient, eux aussi, imprévisibles et suivent un modèle probabiliste déterminé et connu. Le coût moyen total par unité de temps suivant cette modélisation devient une fonction de deux variables de décision : S et T . Un tel modèle mathématique transforme le problème stochastique en problème déterministe et le temps, dans le système, devient une succession de temps de fonctionnement jusqu'à la panne (mttf) et de temps de réparation (mttr) et ainsi de suite, comme illustré sur la figure 2.

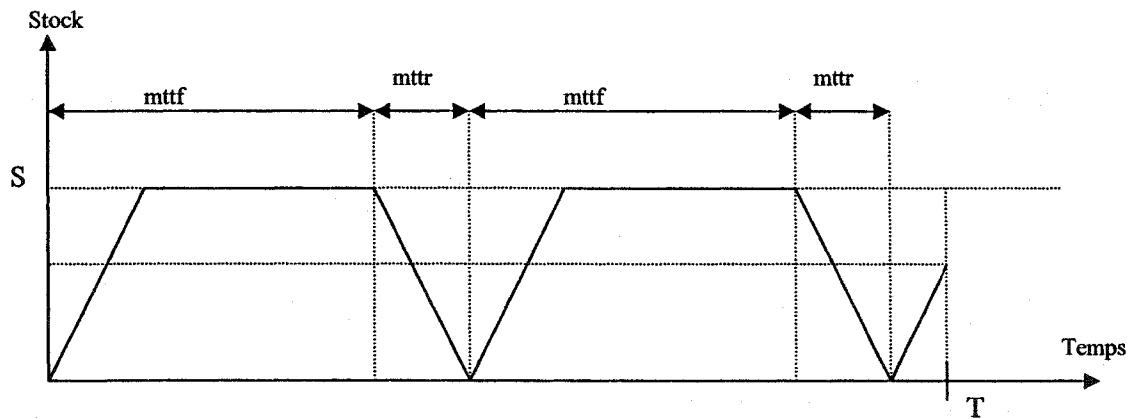


Figure 2 Représentation du modèle lorsque T tend vers l'infini

D'après cette modélisation, les pannes sont supposées se produire à des intervalles de mttf unités de temps, quel que soit l'horizon de planification de la maintenance préventive T . Ce qui est contraire à la théorie de renouvellement, qui veut seulement que lorsque T tend vers l'infini, on peut avoir la modélisation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{H(t)} = mttf \quad (1.3)$$

Où $H(t)$ est la fonction de renouvellement.

En plus, cette modélisation ne tient pas compte de la rupture de stock avec satisfaction des clients en attente, lorsque la machine tombe en panne.

1.3 Stratégie de production avec inventaire utilisant la maintenance de type âge

La maintenance de type âge se fait après une certaine période de mise en marche du système, s'il n'y a pas eu de panne.

L'un des premiers modèles de la maintenance préventive de type âge a été proposé par Barlow et Proschan (1965). Dans ce modèle, on ne tient pas compte du temps de maintenance corrective ni de maintenance préventive, comme illustré à l'équation (1.4). Le modèle d'optimum basé sur une telle équation est alors peu réaliste (le modèle ne tient pas compte des temps d'intervention).

$$C(T) = \frac{C_1 \cdot F(T) + C_2 \cdot R(T)}{\int_0^T R(t) dt} \quad (1.4)$$

Vu que ce modèle n'englobe pas tous les paramètres liés au système, plusieurs auteurs ont introduit d'autres paramètres à ce type de maintenance. Le modèle présenté par Zohrul Kabir et Farrash (1996) est un modèle de simulation pour déterminer conjointement une politique de remplacement optimal et une politique d'approvisionnement de stock. Aussi, Jiang et Ji (2002) ont donné un modèle de maintenance préventive multicritères, en laissant le choix entre soit l'optimisation du coût, de la disponibilité, de la fiabilité ou du temps de fonctionnement de la machine. Le modèle proposé par Garbatov et Guedes Soares (2001) introduit la sécurité, le risque, la fiabilité et la disponibilité. Plus récemment, CHELBI et REZG (2003) ont présenté un modèle analytique qui traite de la stratégie de maintenance de type âge combinée avec le

stock de produit et cela pour une machine modélisée suivant une distribution de probabilités donnée, ce qui veut dire qu'elle peut tomber en panne aléatoirement. Après chaque maintenance, la machine est remise à son état neuf à partir duquel on réinitialise son âge à zéro. Le modèle propose de bâtir un inventaire de produit optimal "S" en produisant à un taux maximal de production. Ensuite, ce taux se maintiendra au taux de demande ou zéro si l'inventaire dépasse le seuil. Pendant la période de remplissage de l'inventaire, ce modèle impose qu'on ne peut pas avoir de panne, ce qui n'est pas réaliste. Après que la machine ait atteint un âge "T" et seulement à cet âge, on effectue la maintenance préventive, qui a aussi une durée aléatoire. Après chaque pénurie, la demande non satisfaite est perdue, comme montré à la figure 3.

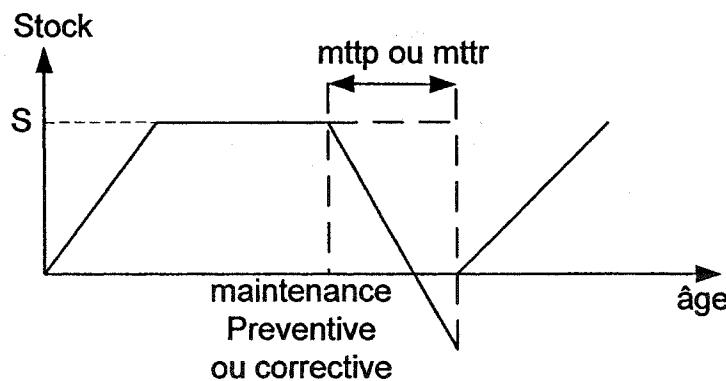


Figure 3 Représentation d'une rupture de stock selon le modèle

Ce modèle est peu différent des autres, mais il ajoute un autre paramètre de décision, qui est la disponibilité, pour respecter une disponibilité minimale requise.

Il ressort d'une analyse de tous ces modèles que l'utilisation des hypothèses est à la base des développements proposés.

1.4 Stratégie de production à multiples seuils d'inventaire et maintenance de type âge

Les stratégies de stockage, combinées avec la maintenance préventive, utilisent le principe de politique de type seuil critique. De ce fait, l'inventaire doit être maintenu à un niveau fixe, quel que soit l'état opérationnel de la machine. Cette politique, malgré qu'elle ait remédié à des problèmes de pénurie de produits, reste sous optimales puisqu'elle ne fait pas une liaison continue entre l'usure de la machine et l'inventaire, l'inventaire étant constant le long du fonctionnement du système, alors que l'âge de la machine varie. Avec ces stratégies, l'inventaire devient inutile dans certains cas et insuffisant dans d'autres pour des âges de machine avancés. Rappelons que l'inventaire n'existe que pour atténuer les effets des pannes que la maintenance préventive n'arrive pas à supprimer.

Dans le but de rendre cette stratégie plus efficace, Kenné et Gharbi (1999) ont suggéré de stocker après un certain âge de la machine, ce qui a pour effet de minimiser le gaspillage dans le stockage et de mieux prévenir les pénuries puisque avec leur principe, l'inventaire devient plus important sans augmenter le coût et plus efficace par la suite. De même, Salameh et Ghattas (2001) ont donné une stratégie qui permet de rendre l'inventaire très efficace (le moins possible de pénurie sans avoir des gaspillages du coût d'inventaire) puisqu'on commence à stocker à un temps qui permet d'atteindre le stock optimal juste avant la maintenance préventive (voir figure 4). Aussi, leur modèle souligne que la maintenance préventive permet d'éviter toutes les pannes. Avec cette considération, le modèle proposé devient non général pour modéliser un système. Néanmoins, il contient l'idée de minimisation du stockage.

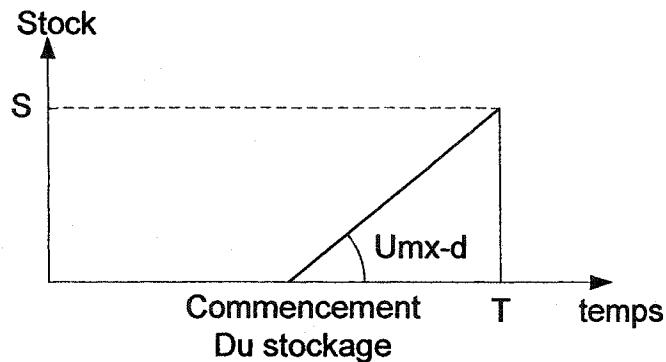


Figure 4 Politique de stockage modifié

Dans les politiques du même genre, la littérature reste rare et incomplète. C'est ainsi que nous proposons de développer un modèle qui fait varier le niveau de stock optimal en fonction de l'âge de la machine.

1.5 Contribution du mémoire

Dans ce mémoire, on traite différents types de maintenance préventive combinés avec le stockage. Dans le chapitre 2, on traite la maintenance préventive de type bloc combiné avec la stratégie de stockage. Dans cette modélisation mathématique, on donne une représentation améliorée d'un système de production et cela en supprimant plusieurs hypothèses qui sont traitées dans la littérature comme hypothèses simplificatrices. Ainsi, dans le modèle, on a tenu compte du nombre réel des pannes, de la probabilité de panne lors du remplissage du stock et des temps aléatoires de maintenance, ce qui rend le modèle plus réaliste.

Dans le chapitre 3, la modélisation porte sur un modèle de maintenance préventive de type âge combiné avec la politique de stockage. L'amélioration, dans ce cas, est dans les représentations des pannes puisqu'on n'a pas de restrictions sur les pannes ou sur le stock comme dans les modèles déjà décrits dans la revue de la littérature.

Le chapitre 4, modélise une stratégie de maintenance préventive qu'on a combinée avec une nouvelle stratégie de stockage à multiples seuils et qui a pour but de donner la meilleure utilisation et optimisation du stock. On montre que la stratégie de stockage multiseuils, combinée avec la maintenance préventive, est plus économique que les stratégies à seuil unique disponibles dans la littérature de commande de tels systèmes.

CHAPITRE 2

STRATÉGIE DE PRODUCTION AVEC MAINTENANCE DE TYPE BLOC

2.1 Introduction

Malgré les efforts effectués dans le domaine de la conception des systèmes de production, les machines présentent toujours des effets indésirables tels que les pannes, les défauts de production, etc. La figure 5 illustre la structure d'un système de production simple constitué d'une machine produisant des pièces pour alimenter un stock qui permet, par la suite, de satisfaire les clients.

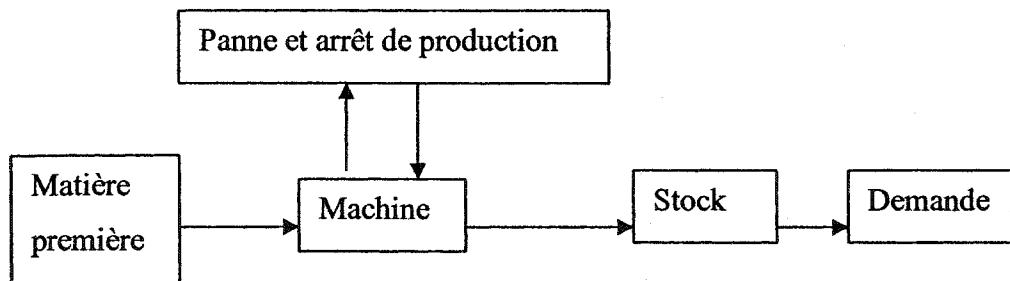


Figure 5 Système de production

La production doit satisfaire une demande prédéterminée. L'idéal serait de produire juste pour satisfaire la demande. Cependant, les machines ont un comportement irrégulier; elles peuvent tomber en panne de façon aléatoire, ce qui perturbe la satisfaction de la demande. Rappelons que la non-satisfaction de la demande engendre des coûts supplémentaires dus à une perte de clients, aux pénalités qui peuvent être imposées par les clients ou à la sous-traitance.

Augmenter la disponibilité des machines avec la maintenance préventive serait une solution pour diminuer la fréquence des pannes et, de ce fait, diminuer les coûts dus à la perturbation de la production. Même si la disponibilité est améliorée, il reste des insatisfactions de demande à combler. Dans ces conditions, il est nécessaire de bâtir un stock pour amortir les effets des arrêts de production et les conséquences dues au manque de produits. Néanmoins, l'inventaire ne doit pas être infini ou exagéré puisque l'inventaire exige un maintien, de l'espace et du matériel, ce qui implique aussi des coûts supplémentaires.

Cette politique de stockage doit être couplée avec la maintenance préventive puisque cette dernière a une influence sur la diminution du stock optimal. La maintenance préventive proposée dans ce chapitre est de type bloc. Cette politique est connue par le fait qu'elle soit simple et facile à implémenter. Cette maintenance préventive est faite périodiquement à des intervalles de temps "T", mais si la panne arrive pendant l'intervalle fixe, une maintenance corrective est effectuée. Dans la maintenance préventive et corrective, la machine est supposée être remise à neuf. La planification de la maintenance préventive exige la connaissance de l'historique des machines et la loi de probabilités des pannes qui décrit la dynamique de chaque machine. Cette modélisation de la machine suivant une distribution de probabilités permet de prévoir son comportement vis-à-vis des pannes.

Le modèle mathématique proposé dans ce chapitre permet de modéliser le comportement de la machine ou plus exactement les pannes de la machine en s'appuyant sur la théorie de renouvellement, qui permet de donner une approximation réaliste du nombre moyen des pannes survenues lors de la période pré-déterminée "T". Cette théorie s'appuie sur les probabilités d'occurrences successives des pannes. Cependant, ce type de politique tient compte de l'équipement, mais ne prend pas en considération la production. De ce fait, la théorie de renouvellement sera couplée avec l'inventaire, qu'on doit stocker pour éviter d'éventuelles pénuries. Cette modélisation sera plus globale,

tenant compte de la production ainsi que de l'équipement et permettra de donner une meilleure approximation du coût de production, ce qui implique une meilleure représentation du système. Aussi, on aura supprimé plusieurs hypothèses qui ne sont pas réalistes la plupart du temps. Par rapport à ces hypothèses, nous avons :

- ✓ la plupart des modèles utilisent la loi exponentielle pour modéliser le comportement des pannes d'une machine;
- ✓ il n'y a pas de panne lors du remplissage de stock ou il y a réparation minimale avec temps négligeable;
- ✓ on ne tient pas compte de la théorie de renouvellement lors de modélisation mathématique et qui représente un défaut dans l'évaluation des pannes dans une période donnée (si la période de maintenance préventive T est grande, on aura plusieurs pannes);
- ✓ la demande non satisfaite est non récupérée.

Ce chapitre sera organisé comme suit. Dans la section 2, on présente la formulation du problème avec les hypothèses sur lesquelles le modèle repose, ainsi que l'amélioration apportée à la modélisation de ce genre de problème. Dans la section 3, on représente un tableau récapitulatif du modèle mathématique. La section 4, présente le problème à résoudre. La section 5 donne la méthode de calcul des différentes fonctions du modèle. La section 6, présente les résultats permettant de confirmer la cohérence du modèle. On terminera ce chapitre par la section 7, qui conclura les résultats et le chapitre.

2.2 Formulation du problème

Dans ce qui suit, on s'appuie sur le modèle Chelbi et Ait Kadi (2001), décrit précédemment, en modélisant de façon plus réaliste la stratégie de production à exploiter. Le coût total unitaire sera en fonction de deux variables : l'inventaire optimal “S” et la période régulière de maintenance préventive “T”. Le système produit à un taux de production “U”, décrit par une politique à seuil critique donnée par l'équation (2.1).

$$U(x) = \begin{cases} U_{mx} & \text{si } x < S \\ d & \text{si } x = S \\ 0 & \text{si } x > S \end{cases} \quad (2.1)$$

Où x est le niveau de stock actuel.

Cette politique veut dire que si l'inventaire de produits disponibles est inférieur à celui optimal suggéré, le taux de production U doit être à son maximum “ U_{mx} ” jusqu'à ce que l'inventaire x atteigne S . À ce moment, le taux de production doit être maintenu aux taux de la demande “ d ”.

En ce qui concerne les perturbations, on utilise la fonction de renouvellement. D'après l'équation (2.2) cette fonction $H(t)$ est comprise entre deux valeurs qui sont fonction de la probabilité de panne $F(t)$. On a supposé que lorsqu'on est en remplissage de stock dans ce modèle, une seule panne peut survenir.

$$F(t) \leq H(t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)} \quad (2.2)$$

Cette approximation est permise Lyonnet (2000) puisqu'on considère que le temps de remplissage est suffisamment court et de cela, $[1-F(t)]$ peut être estimé à 1, ce qui ramène la fonction de renouvellement $H(t)$ à $F(t)$, qui est la probabilité d'une panne.

Après la période de remplissage de stock, le modèle fait intervenir un nombre moyen de pannes qu'on obtient suivant la fonction de renouvellement (équation (1.2)) puisqu'on ne peut pas dire que la période de maintenance est courte, ceci pour mieux modéliser les pannes survenues dans l'intervalle de planification “ T ”. Ainsi, le modèle ne sera pas restreint à une seule panne dans la période de planification, qu'on exige qu'elle soit à chaque période mttf; ce qui serait une approximation non réaliste pour une période finie.

2.2.1 Modélisation des défaillances

La modélisation de la politique lors de la maintenance corrective se fera suivant deux étapes : une étape d'avant remplissage du stock et une deuxième étape après remplissage.

2.2.1.1 Étape de remplissage de l'inventaire

Durant la période de remplissage, le taux de production sera maintenu à son niveau maximal U_{mx} . Comme suggéré dans cette étape, le nombre de pannes se calcule à l'aide de la fonction $F(t)$. Cette étape modélise le coût qui en résulte lorsqu'une panne arrive, comme montré sur la figure 6 avant de remplir l'inventaire.

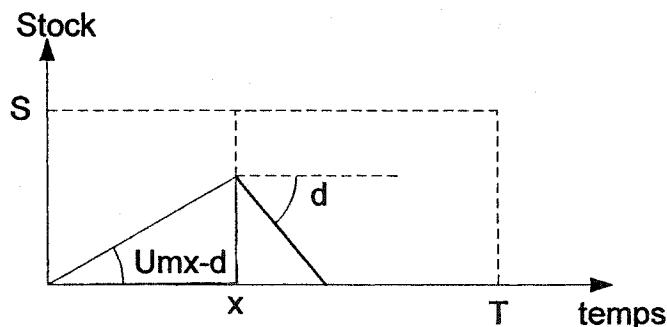


Figure 6 Panne arrivant avant le remplissage de l'inventaire

Pour cette étape, on procédera comme suit, sans se préoccuper de la probabilité d'occurrence de la panne pour l'instant :

1. Calcul des coûts lorsqu'on a une panne et on n'a pas de pénurie.
2. Le cas où on a une pénurie.

Pour débuter, on calcule le temps moyen tmw_2 pour faire la réparation sans que la panne provoque une pénurie, ce qui est représenté par l'équation (2.3) qui veut que le temps de réparation ne puisse pas excéder $trs=x.(U_{mx}-d)/d$.

$$tmw_2 = \int_0^{\frac{(Umx-d)}{d}} t \cdot f_r(t) \cdot dt \quad (2.3)$$

Sm1 de l'équation (2.6) représente la surface de stockage si la machine est réparée avant la pénurie; elle est divisée en deux termes : l'équation (2.4) qui représente la surface de stockage jusqu'à l'instant "x" comme sur la figure 7 et l'équation (2.4).

$$\frac{(Umx-d) \cdot x^2}{2} \quad (2.4)$$

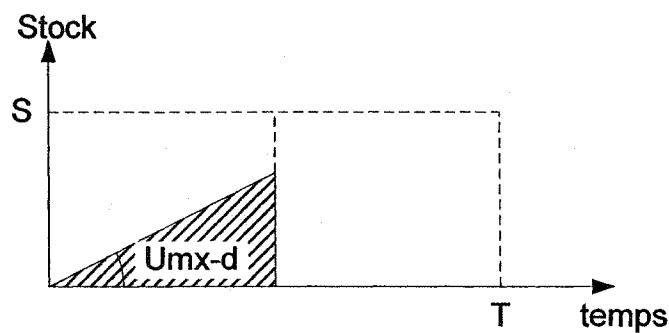


Figure 7 Surface de stockage lorsque l'inventaire est en remplissage

L'équation (2.5) représente, d'après la figure 8, la surface lorsque le niveau du stock est en train de descendre, mais n'atteint pas zéro.

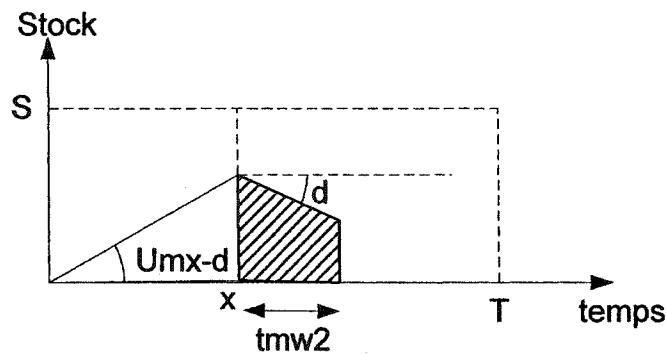


Figure 8 Espace du coût de stock si la panne arrive avant le remplissage

$$(2 \cdot x \cdot (Umx-d) - tmw_2 \cdot d) \cdot \frac{tmw_2}{2} \quad (2.5)$$

$$Sm_1 = \frac{(Umx-d)}{2} \cdot x^2 + (2 \cdot x \cdot (Umx-d) - tmw_2 \cdot d) \cdot \frac{tmw_2}{2} \quad (2.6)$$

Le cas d'une pénurie de stockage est modélisé en utilisant l'équation (2.7), qui est composée de l'intégrale depuis $x \cdot (Umx-d)/d$ jusqu'à l'infini, pour donner le temps moyen que prendra la pénurie et avec lequel on calcule l'espace hachuré, illustré à la figure 9.

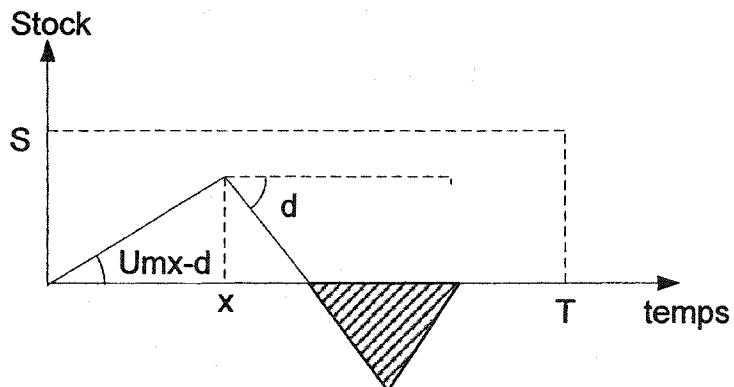


Figure 9 Représentation de la surface de pénurie lors du remplissage de stock

$$Sp_1 = \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_{x(Umx - d)/d}^{\infty} \left(t - \frac{x \cdot (Umx - d)}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2 \quad (2.7)$$

Afin de tenir compte de l'occurrence de la panne à l'instant "x", on assemble les deux équations (2.6) et (2.7), multipliées par leurs coûts respectifs de stockage C^+ et de pénurie C^- représentés par l'équation (2.8). L'équation (2.9) est, par la suite, utilisée pour donner le coût correspondant à la panne avant d'atteindre le stock optimal, en utilisant l'intégrale qui traduit le coût dû à une panne à l'instant "x" multiplié par la probabilité de son occurrence $f(x) \cdot dx$. Ensuite, on lui ajoute la surface qui permet de calculer le coût si le système de production ne tombe pas en panne et qui est obtenu avec une probabilité de $F(trs)$. Cela représente le deuxième terme de l'équation (2.9).

$$g(x) = C^+ \cdot Sm_1 + C^- \cdot Sp_1 \quad (2.8)$$

$$CAS = \int_0^{\frac{s}{(Umx - d)}} g(x) \cdot f(x) \cdot dx + C^+ \cdot F\left(\frac{s}{(Umx - d)}\right) \cdot \frac{s}{d} \cdot \frac{s}{2} \quad (2.9)$$

Le coût CAS représente le coût de production avant le remplissage du stock. Ce qui reste est de modéliser l'étape après le remplissage.

2.2.1.2 Étape après le remplissage de stock

Cette étape, modélise le cas lorsque la panne intervient à un instant "x" quelconque, tant que x est supérieur à $S^*(Umx - d)/d$; ce qui revient à dire que les pannes surviennent après le remplissage de stock.

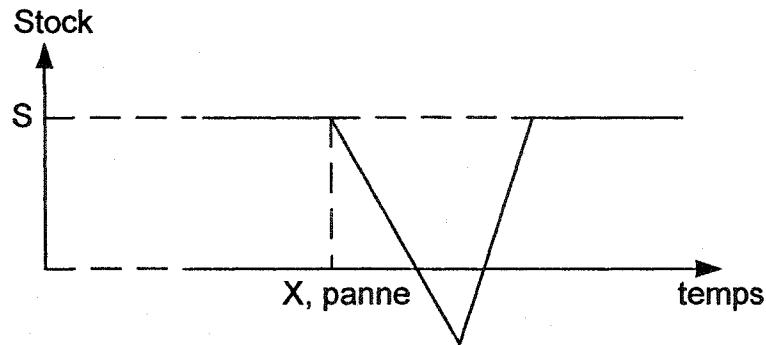


Figure 10 Panne survenue après le remplissage de stock à l'instant “x”

L'équation (2.10) représente le coût qui résulte des pénuries lorsqu'on a une panne. La partie intégrale est le temps moyen d'une réparation qui a excédé le temps d'épuisement du stock (S/d). Si on prend cette équation sans le terme $(H(t_f).C)$ fonction du temps de fonctionnement sans avoir de panne (t_f), cela représente la zone hachurée de la figure 11. Si on lui ajoute le terme $(H(t_f).C)$, elle donne le nombre moyen d'occurrences de pannes multiplié par le coût correspondant à une pénurie.

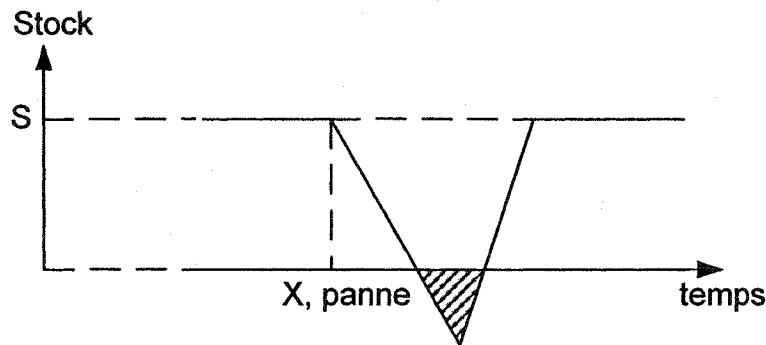


Figure 11 Représentation d'espace de pénurie

$$H(t_f) \cdot C \cdot \left(1 + \frac{d}{(U_{mx} - d)}\right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{s}{d}\right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2 \quad (2.10)$$

Il reste à calculer le coût du stockage après perturbation. Dans ce cas, on aura deux scénarios possibles :

1. Si le stock est en pénurie (figure 12).
2. Si le stock n'est pas en pénurie (figure 13).

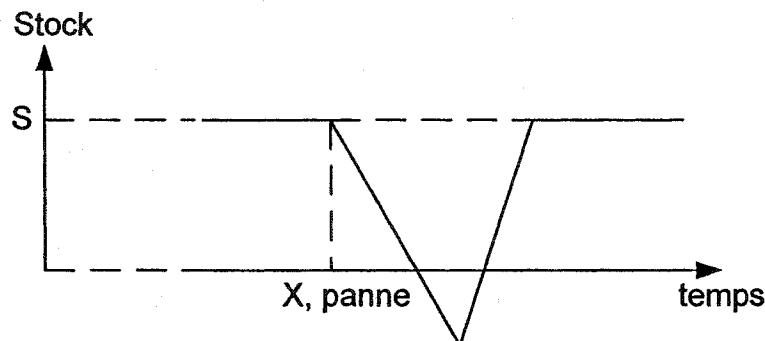


Figure 12 Panne avec pénurie

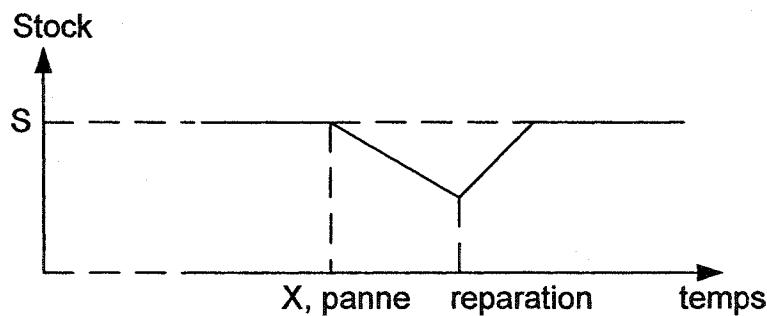


Figure 13 Panne sans pénurie

La maintenance corrective se répète à chaque cycle de planification. La panne est aléatoire, ce qui nous permet d'approximer le temps de réparation à sa valeur moyenne mttr puisque les cycles de maintenance préventive se répètent de façon infinie et qu'il n'y a pas de liaison ou influence entre les pannes et le temps de réparation.

Dans ce qui suit, on va calculer les surfaces de stockage sans perturbation. Pour cela, on commence cette partie de modélisation avec un stock déjà rempli comme sur la figure 10. On a $(A+B)$ (figure 14), qui représente le temps de fonctionnement de la machine qu'on notera par " t_f ". Ainsi l'équation (2.11) représente les deux surfaces hachurées et montrées sur la figure 15. On lui retranchera la surface hachurée pour corriger la surface de stockage et cette façon de faire permet de faciliter le calcul.

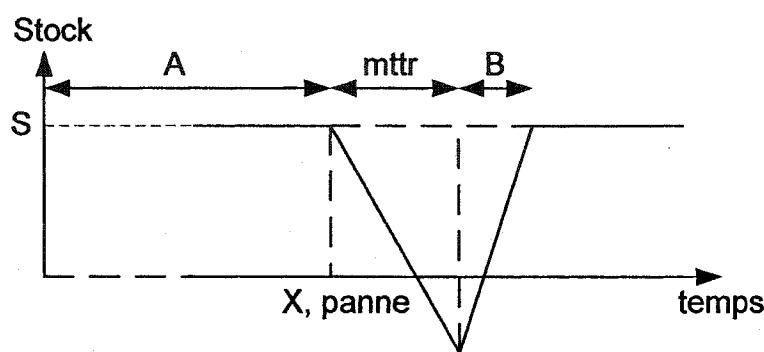


Figure 14 Modélisation des temps dus à la production

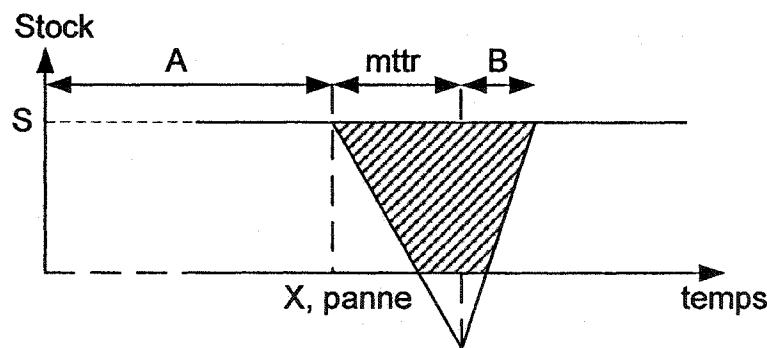


Figure 15 Représentation des surfaces de stock et de réparation

La surface hachurée sera présentée par l'équation (2.13), qui est composée par l'équation (2.12) représentant le niveau moyen avec lequel le stock descend (figure 15)

et qu'on multiplie par le nombre d'occurrences de pannes et le coût correspondant au stock.

$$S \cdot \left(t + H(t_f) \cdot mttr \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right) \quad (2.11)$$

$$Sm2 = \int_0^{\frac{s}{d}} t \cdot f_r(t) \cdot dt \quad (2.12)$$

$$H(t_f) \cdot C^+ \cdot \frac{Sm_2^2}{2 \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \quad (2.13)$$

Pour conclure la partie modélisation de la deuxième étape (après remplissage), on fait la somme des coûts de stockage et de pénurie et on obtient l'expression de l'équation (2.14).

$$\begin{aligned} CBS = & H(t_f) \cdot C^- \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} x \cdot f_r(x) \cdot dx \right]^2 + \\ & C^+ \cdot S \cdot \left(t + H(t_f) \cdot mttr \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right) - \\ & H(t_f) \cdot C^+ \cdot \frac{Sm_2^2}{2 \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Après avoir mis en équation la modélisation du coût, après le remplissage de stock représenté par CBS, il reste la modélisation des maintenances préventives dans le système de production.

2.2.2 Modélisation de la maintenance préventive

La modélisation de la maintenance préventive est faite telle qu'elle s'effectue à des intervalles constants de temps. La figure 16 montre les surfaces qui permettent de calculer le coût correspondant en tenant compte du temps de maintenance préventive **mttp**.

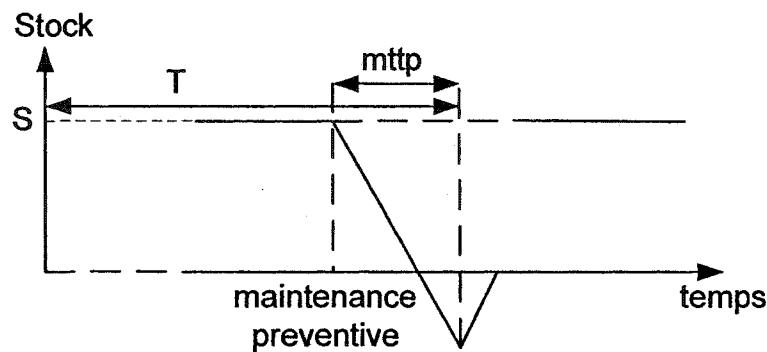


Figure 16 Modélisation de la maintenance préventive

L'équation (2.15), présente le temps moyen d'une maintenance préventive avant d'atteindre la pénurie. En fait, le premier terme représente la probabilité que la maintenance dure avec pénurie, ce qui explique la probabilité $F_p(s/d)$. Le deuxième est le cas sans pénurie. Ainsi, il contient les probabilités instantanées liées à la fonction de densité de probabilité liée au temps de maintenance préventive de la machine ($f_p(t)$) $f_p(t) \cdot dt$. Cette équation sera combinée avec la maintenance préventive qui engendre une pénurie telle que représentée par l'équation (2.16).

$$tmp = \left(F_p \left(\frac{s}{d} \right) \cdot \frac{s}{d} + \int_0^s x \cdot f_p(x) \cdot dx \right) \quad (2.15)$$

$$CMP = C^* \cdot (2 \cdot S - tmp \cdot d) \cdot \frac{tmp}{2} + C \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_d^s \left(x - \frac{s}{d} \right) \cdot f_p(x) \cdot dx \right]^2 \quad (2.16)$$

Ainsi CMP est la fonction qui permet de modéliser le coût de production dû à la maintenance préventive.

Après avoir modélisé la production dans le cycle de maintenance préventive dans la section suivante, on introduit, dans le coût total, les différents coûts de maintenance.

2.2.3 Coût total unitaire de la stratégie

Le coût total unitaire dans l'équation (2.17) sera exprimé tel que la somme des coûts résultants de la maintenance corrective et préventive, divisée par le temps qui correspond à la production, la maintenance corrective et préventive.

$$Cout\ totale(S, T) = \frac{(CAS + CBS + CMP + H(t_f) \cdot C_1 + C_2)}{T} \quad (2.17)$$

Avec :

$$T = t_f + mtip + H(t_f) \cdot mttr \quad (2.18)$$

On remarque que ce modèle se réduit à une succession de mtff et mttr, si le temps de maintenance préventive tend vers l'infini, on obtient (2.19) :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{H(T)} &= \frac{t_f}{H(T)} + \frac{mtip}{H(T)} + \frac{H(T) \cdot mttr}{H(T)} \\ &= mtff + 0 + mttr \end{aligned} \quad (2.19)$$

ce qui permet de dire que le modèle, dans ce cas limite, devient similaire au modèle présenté par Chelbi et Ait Kadi (2001). Ainsi, on remarque que ce genre de modélisation limite ne représente pas un cas général, mais un cas particulier limite puisque lorsque le temps de maintenance préventive devient grand mais non infini, on ne peut pas dire que l'occurrence de la panne se passe chaque "mttf".

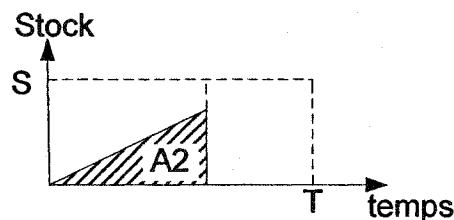
2.3 Récapitulation du modèle

Le tableau I résume les différentes équations développées dans ce modèle, avec la représentation graphique de chacune.

Tableau I

Rappel des équations et de leurs illustrations

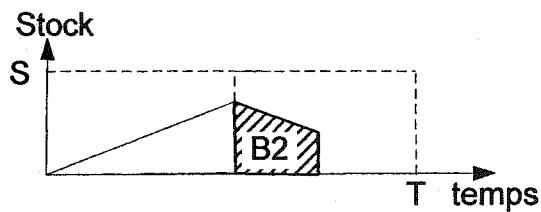
Surface de stockage lorsque l'inventaire est en remplissage



$$A2 = \frac{(Umx-d)}{2} \cdot x^2$$

Tableau I (suite)

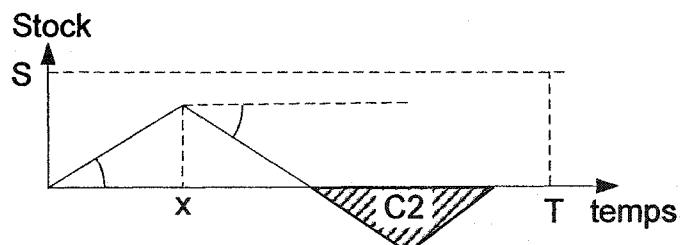
Espace du coût de stock si la panne arrive avant le remplissage



$$B2 = (2 \cdot x \cdot (Umx - d) - tmw_2 \cdot d) \cdot \frac{tmw_2}{2}$$

$$Sm_i = A2 + B2$$

Représentation de la surface de pénurie lors du remplissage de stock



$$C2 = \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_{\frac{x(Umx-d)}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{x \cdot (Umx - d)}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2$$

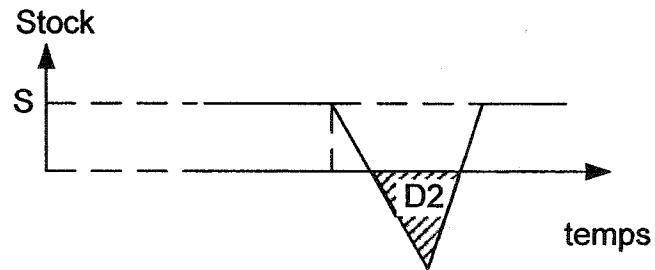
Tableau I (suite)

$$g(x) = C^+ \cdot Sm_1 + C^- \cdot C2$$

Coût de pénurie et de stockage avant d'avoir rempli le stock :

$$CAS = \int_0^{\frac{s}{(Umx-d)}} g(x) \cdot f(x) \cdot dx + C^+ \cdot F\left(\frac{s}{(Umx-d)}\right) \cdot \frac{s}{d} \cdot \frac{s}{2}$$

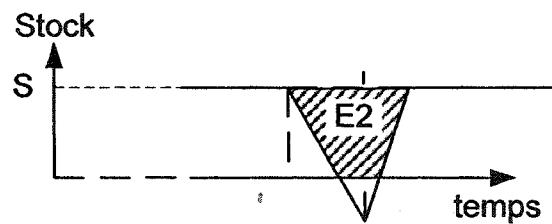
Représentation d'espace de pénurie



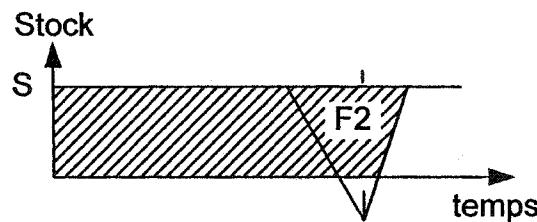
$$D2 = H(t_f) \cdot C^- \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx-d)}\right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{s}{d}\right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2$$

Tableau I (suite)

Représentation des surfaces de stock et de réparation



$$E2 = H(t_f) \cdot C^+ \cdot \frac{Sm_2^2}{2 \cdot d} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right)$$



$$F2 = S \cdot \left(t + H(t_f) \cdot mttr \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right)$$

Coût de pénurie et de stockage après avoir rempli l'inventaire :

$$CBS = D2 + C^+ \cdot F2 - E2$$

Tableau I (Suite)

<p>Temps moyen de maintenance préventive :</p> $tmp = \left(F_p \left(\frac{s}{d} \right) \cdot \frac{s}{d} + \int_0^d x \cdot f_p(x) \cdot dx \right)$
<p>Coût de pénurie et de stockage résultant de la maintenance préventive :</p> $CMP = C^+ \cdot (2 \cdot S - tmp \cdot d) \cdot \frac{tmp}{2} + C^- \cdot \left(1 + \frac{d}{(U_{mx} - d)} \right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{s}{d} \right) \cdot f_p(x) \cdot dx \right]^2$
<p>cycle de maintenance préventive :</p> $T = t_f + mtpp + H(t_f) \cdot mttr$
<p>Coût totale par unité de temps : pénurie, stockage, maintenance préventive et corrective</p> $Cout\ totale(S, T) = \frac{(CAS + CBS + CMP + H(t_f) \cdot C_1 + C_2)}{T}$

Ce tableau récapitule l'ensemble des équations du chapitre.

Après la modélisation, on présente le problème à résoudre dans la section suivante.

2.4 Problème à résoudre

La modélisation précédente est basée sur deux variables “S” et “T” à déterminer. La variable “T” représente le temps de cycle de la maintenance préventive et la variable “S” représente l’inventaire à atteindre pour sécuriser l’approvisionnement de la demande. Le problème est d’optimiser la fonction coût total unitaire en solutionnant les équations (2.20) et (2.21) :

$$\frac{\partial \text{Cout totale}(S, T)}{\partial T} \bigg|_S = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \text{Cout totale}(S, T)}{\partial S} \bigg|_T = 0 \quad (2.21)$$

La résolution analytique de ce problème s’avère compliquée, du fait que l’équation du coût contient la fonction de renouvellement “ $H(t_f)$ ” dont l’expression n’est connue que pour quelques distributions (exponentielle et gamma d’ordre 2). Ainsi, la résolution sera faite numériquement à la section suivante. C’est ainsi que nous présentons ci-après la procédure d’obtention des solutions optimales.

2.5 Méthodes numériques et discussion des résultats

Dans cette section, on représente les méthodes numériques utilisées pour calculer le coût unitaire et l’obtention des valeurs optimales ainsi que les approximations utilisées pour les équations.

2.5.1 Méthodes numériques

La résolution numérique consiste à faire une grille des valeurs de “S” et de “T” et d’en calculer les coûts sur une zone prédéterminée et trouver l’optimum dans cette zone. Cette zone doit être suffisamment large pour avoir un optimum, sachant que l’inventaire ne doit pas avoir de valeurs trop grandes. La procédure suivie est montrée à la figure 17.

Au début du programme, on introduit les données constituées des coûts de pénurie (C^-), des coûts de stockage (C^+), du coût de maintenance corrective et préventive respectivement (C_1) et (C_2). Aussi, on introduit les paramètres et les fonctions de densité de probabilités de la maintenance préventive et corrective concernant la machine dont il est le cas, puis on choisit le domaine de l’optimum, borné par $[S_{min}, S_{max}]$ pour l’inventaire et $[t_{min}, t_{max}]$ pour la vie de la machine.

Le balayage de la zone commence par les valeurs minimales (indice min). Le programme calcule la valeur moyenne des pannes survenues jusqu’au temps “ t_f ”, qui est différent de “T” la période de maintenance préventive puisque dans ce temps “ t_f ”, on ne tient pas compte des temps de perturbations. Cette façon permet de faciliter le calcul de la fonction de renouvellement $H(t_f)$ qui normalement, dans ce cas, doit faire intervenir une combinaison de la fonction de densité de probabilité liée à la vie de la machine ($f(t)$) et de la fonction de densité de probabilité liée au temps de réparation de la machine ($f_r(t)$) qui est nettement compliquée. Ensuite, on calcule le coût qui correspond à la période avant de remplir le stockage (CAS) et après le remplissage de stock (CBS), qui seront inclus dans le coût total en plus des coûts de maintenance corrective et préventive. Ce calcul continue en incrémentant le temps “ t ” puis l’inventaire “S” jusqu’à atteindre leurs valeurs maximales et la solution optimale constituée des valeurs de “S” et “T” qui correspondent au coût total unitaire minimal.

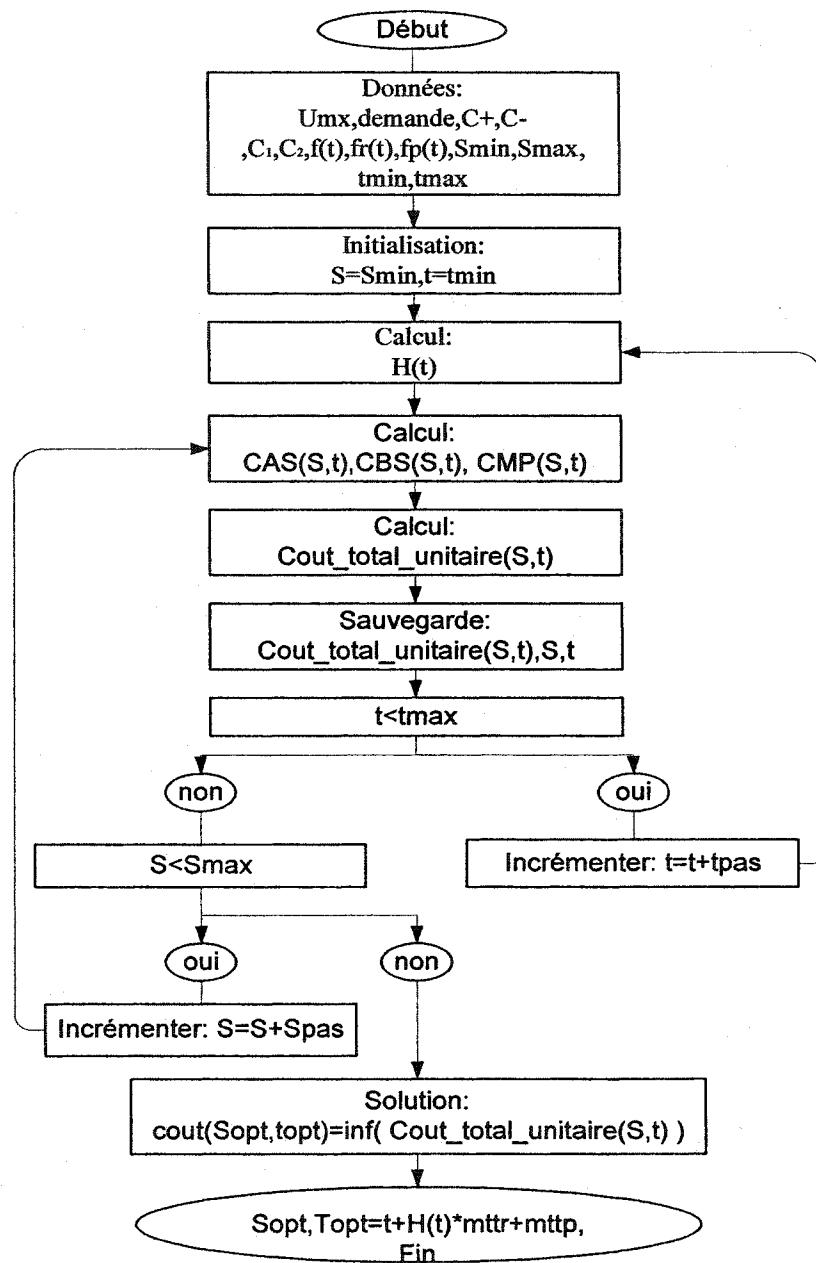


Figure 17 Algorithme de résolution numérique

Les différentes équations et méthodes pour calculer les fonctions dans le programme sont expliquées ci-après.

2.5.1.1 Détermination de la fonction de renouvellement

La fonction de renouvellement est obtenue à l'aide d'approximation. L'application pratique de la théorie de renouvellement exige typiquement la connaissance de la fonction de renouvellement $H(t)$. Pour la plupart des distributions utilisées dans la théorie de fiabilité (gamma, Weibull et tronqué s-normal ...), aucune expression explicite pour le $H(t)$ n'est disponible. Cependant, nous proposons ici la fonction de renouvellement qui est calculée avec l'approximation obtenue dans Smeitink et Dekker (1990). Pour les petites valeurs de t , $H(t)$ est déterminée par $F(t)$.

Dans les approximations utilisées, on a trois classes d'approximation de la fonction $H(t)$.

Dans notre cas, on a pris la troisième puisqu'elle est plus précise.

Dans le tableau II, on donne quelques valeurs de la fonction exacte de $H(t)$ avec l'approximation utilisée. Les valeurs exactes de la fonction de renouvellement sont prises dans des tables présentées dans Baxter et al. (1981).

Le tableau II est fait pour une distribution de type Weibull, avec comme paramètre d'échelle "1" et paramètre de forme "2".

Tableau II
Approximation de la fonction de renouvellement

t	H(t) exact	H1(t)	H2(t)	H3(t)	erreur(%)
10	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0,00%
20	0,0395	0,0392	0,0395	0,0395	0,00%
30	0,0874	0,0863	0,0874	0,0874	0,00%
40	0,1520	0,1491	0,1519	0,1519	0,07%
50	0,2308	0,2252	0,2307	0,2308	0,00%
60	0,3216	0,3126	0,3211	0,3215	0,03%
70	0,4216	0,4092	0,4206	0,4215	0,02%
80	0,5283	0,5131	0,5266	0,5282	0,02%
90	0,6397	0,6229	0,6368	0,6395	0,03%
100	0,7537	0,7358	0,7494	0,7534	0,04%
125	1,0427	1,0308	1,0336	1,0416	0,11%
150	1,3295	1,3261	1,3163	1,3265	0,23%
175	1,6126	1,6156	1,5985	1,6065	0,38%
200	1,8941	1,8995	1,8830	1,8844	0,51%

On remarque qu'avec cette approximation, on peut avoir une erreur de moins de 1 %.

2.5.1.2 Calcul des coûts de production

Pour calculer les coûts engendrés de la production avant et après le remplissage du stock, on a utilisé les fonctions densité de probabilités déjà existantes sur le logiciel de programmation “MATLAB” en utilisant les équations (2.9), (2.14) et (2.16).

2.5.1.3 Valeur optimale de l'inventaire et de la période de maintenance préventive

Le programme permet de stocker les valeurs du coût total unitaire avec les valeurs de stock “S” et de temps “t” correspondant. Après avoir balayé la surface suggérée, on choisit la valeur minimale parmi les coûts. Ainsi, le stock optimal sera “S” qui lui correspond et la période optimale “T” qui sera calculée suivant l'équation (2.18).

2.6 Résultats numériques

Dans ce chapitre, on a modélisé une politique de maintenance préventive de type bloc avec stock de sécurité pour continuer de satisfaire les clients dans les cas de pannes. On utilise à cet effet le calcul de surfaces combinées avec les probabilités qui reposent essentiellement sur la théorie de renouvellement.

Dans cette section, ce modèle sera testé pour rechercher les valeurs optimales de "S" et de "T" qui permettent de minimiser le coût moyen de production. Aussi, les effets des différents paramètres (C^+ , C^- , C_1 et C_2) seront testés sur la fonction coût total unitaire et sur les paramètres optimaux.

2.6.1 Résultat graphique

Dans l'exemple qui suit, on présente les résultats obtenus pour le cas d'une machine dont la dynamique des pannes est modélisée avec la distribution de Weibull (cette distribution représente mieux une machine de production), caractérisée par $mttf = 88.6$ unités de temps (paramètre_d_échelle = 100, paramètre_de_forme = 2). Pour cette machine, les temps de réparation et de maintenance préventive sont modélisés avec la distribution log-normal dont la moyenne respective de 10 et 5 unités de temps.

Pour cet exemple, nous avons utilisé les données suivantes :

$$Umx=2; \quad d=1.65; \quad C_1=5000; \quad C_2=3000; \quad C^-=30; \quad C^+=9;$$

$$contrainte: \frac{mttf}{mttf + mitr} \cdot Umx \geq d$$

$$\frac{88.6}{88.6 + 10} \cdot 2 \geq 1.65$$

Les courbes ci-après montrent le coût de production en fonction du stock et du seuil de stockage :

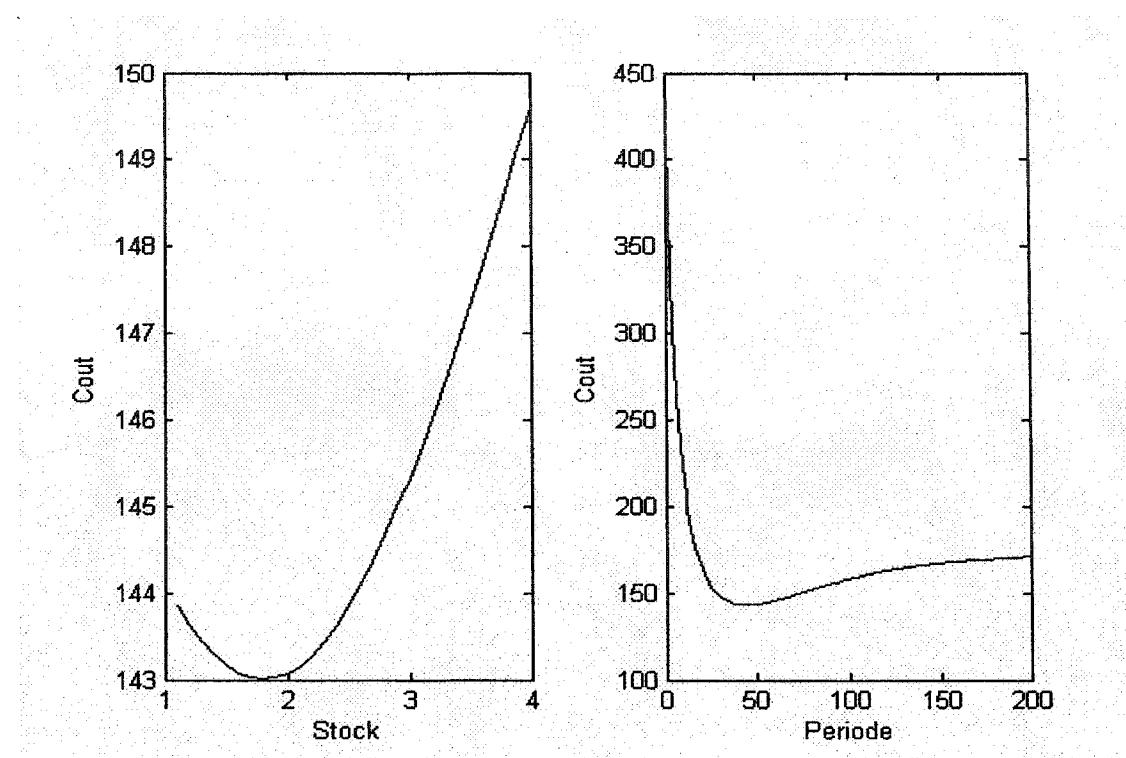


Figure 18 Section du graphe du coût unitaire aux valeurs optimales

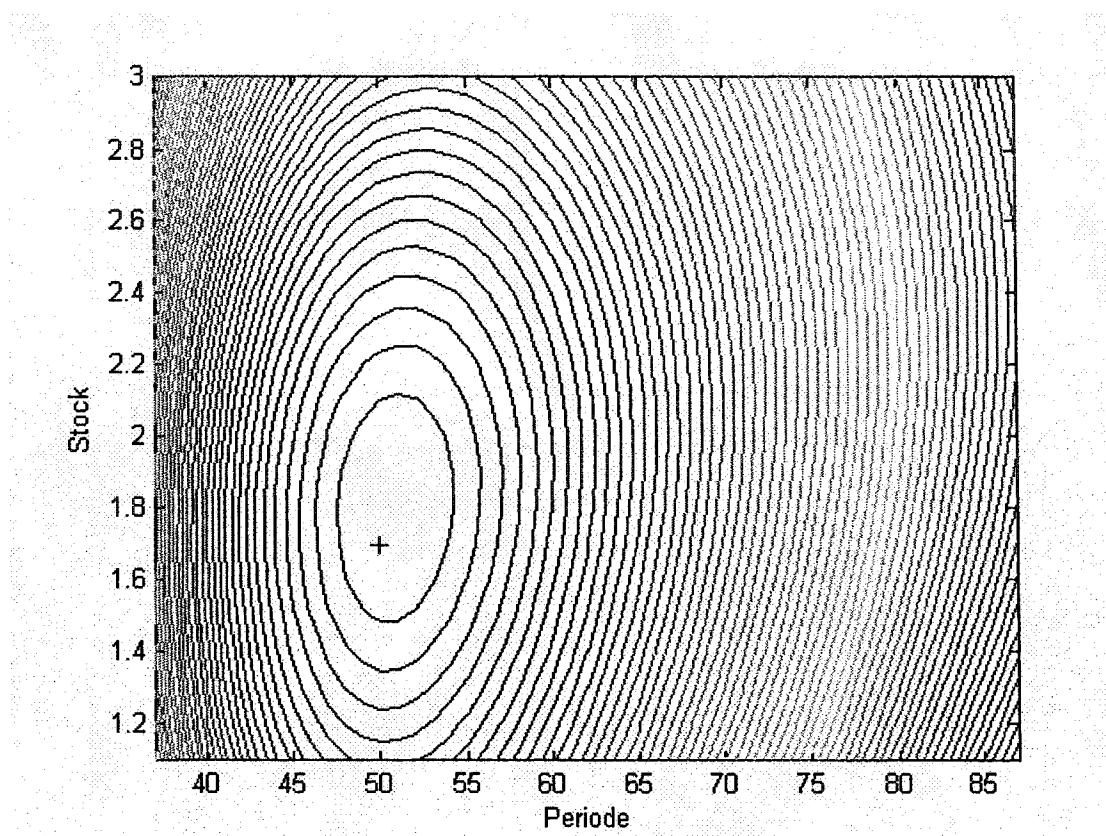


Figure 19 Courbe de niveau du coût en fonction du stock et de la période

Après avoir introduit les données précédentes, nous avons obtenu, comme valeurs optimales, 1.7 et 49.9 pour l'inventaire et la période de maintenance préventive respectivement. Les figures 18 et 19 n'ont pour but que de montrer l'existence de l'optimum dans un cas précis (convexité de la fonction coût).

2.6.2 Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance corrective)

L'influence de la variation du coût de maintenance corrective sur les paramètres optimaux obtenus du modèle est présentée sur le tableau suivant. Tous les paramètres sont maintenus constants.

Dans les tableaux III à VI, nous avons utilisé la notation suivante :

Sopt : représente la valeur optimale du stock résultant du modèle.

Topt : représente la valeur optimale de la période de maintenance préventive.

Coût : coût total unitaire optimal.

Tableau III
Variation du coût de maintenance corrective

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	Sopt	Topt	Cout
3000	3000	5	30	3,90	64,14	123,97
4000	3000	5	30	3,70	58,68	128,87
5000	3000	5	30	3,50	54,33	133,49
6000	3000	5	30	3,30	51,07	137,86
7000	3000	5	30	3,20	47,83	142,03
8000	3000	5	30	3,08	45,68	146,03
9000	3000	5	30	3,02	43,53	149,87
10000	3000	5	30	2,94	42,46	153,57
11000	3000	5	30	2,90	40,32	157,14
12000	3000	5	30	2,84	39,25	160,6
13000	3000	5	30	2,82	37,12	163,96
14000	3000	5	30	2,76	36,05	167,22
15000	3000	5	30	2,74	34,99	170,38
16000	3000	5	30	2,72	33,93	173,47
17000	3000	5	30	2,71	33,93	176,47
18000	3000	5	30	2,68	32,87	179,4
19000	3000	5	30	2,66	31,81	182,25
20000	3000	5	30	2,66	31,81	185,05
21000	3000	5	30	2,66	31,81	187,79

Les figures 20 et 21 résument le tableau III et montrent l'allure que prennent les valeurs optimales en fonction du coût de maintenance corrective.

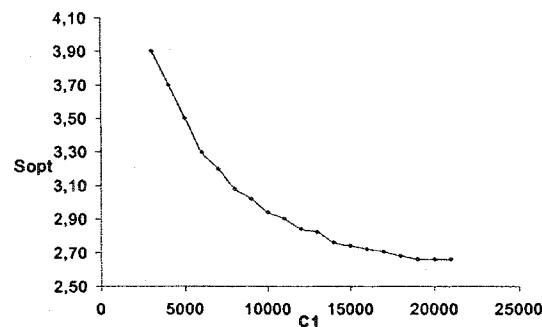


Figure 20 Influence de C_1 sur l'inventaire optimal

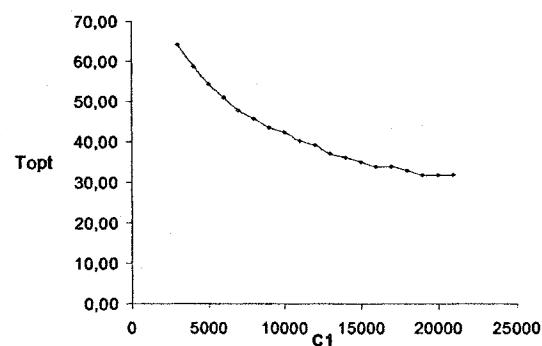


Figure 21 Influence de C_1 sur la période optimale

L'inventaire optimal suit l'allure de la période optimale. Ceci est dû à l'interaction entre le stock et la période de maintenance, la pénurie et la maintenance préventive. Lorsqu'on fait varier le coût de maintenance corrective, on remarque, d'après la figure 21, que la maintenance corrective fait diminuer la période optimale de la maintenance préventive. Ceci est normal, car on sait en pratique que plus le coût de panne augmente, plus on a intérêt à diminuer la période de maintenance. Les pannes deviennent ainsi moins fréquentes, ce qui explique la diminution du stock puisque son but est de continuer d'assurer la satisfaction des clients en cas de pannes.

Lorsque les périodes de maintenance deviennent plus petites, l'effet des pannes devient négligeable puisque la machine n'a pas le temps de tomber en panne. L'inventaire a

alors tendance à se stabiliser à de faibles valeurs pour contrer les pénuries dues à la maintenance préventive.

2.6.3 Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance préventive)

L'étude de l'effet de la variation du coût de la maintenance préventive sur les paramètres optimaux est présentée dans le tableau suivant :

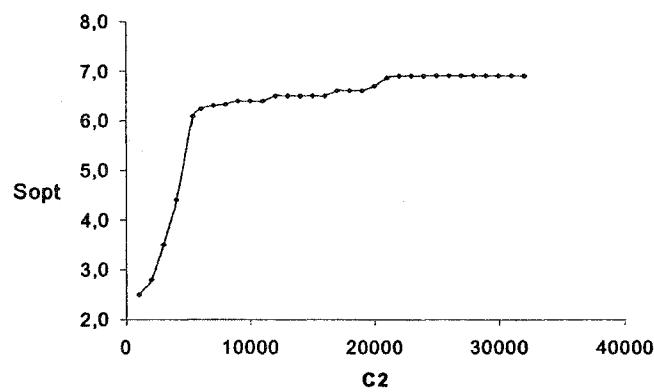
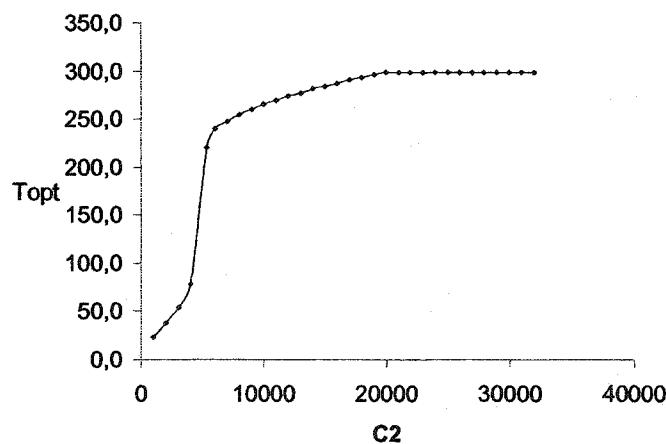
Tableau IV

Variation du coût de maintenance préventive

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	Sopt	Topt	Cout
5000	1000	5	30	2,5	23,4	83,284
5000	2000	5	30	2,8	38,2	113,01
5000	3000	5	30	3,5	54,3	133,49
5000	4000	5	30	4,4	78,4	148,42
5000	5340	5	30	6,1	220,7	157,08
5000	6000	5	30	6,2	239,9	161,29
5000	7000	5	30	6,3	247,8	165,34
5000	8000	5	30	6,3	254,5	169,26
5000	9000	5	30	6,4	260,2	173,1
5000	10000	5	30	6,4	265,8	176,85
5000	11000	5	30	6,4	269,2	180,54
5000	12000	5	30	6,5	273,8	184,18
5000	13000	5	30	6,5	277,2	187,76
5000	14000	5	30	6,5	281,8	191,29
5000	15000	5	30	6,5	284,1	194,78
5000	16000	5	30	6,5	287,6	198,24
5000	17000	5	30	6,6	291,1	201,65
5000	18000	5	30	6,6	293,4	205,03
5000	19000	5	30	6,6	296,9	208,38
5000	20000	5	30	6,7	299,2	211,7
5000	21000	5	30	6,9	299,2	214,99
5000	22000	5	30	6,9	299,2	217,97
5000	23000	5	30	6,9	299,2	220,95
5000	24000	5	30	6,9	299,2	223,92
5000	25000	5	30	6,9	299,2	226,9
5000	26000	5	30	6,9	299,2	229,88

Tableau IV (suite)

5000	27000	5	30	6,9	299,2	232,86
5000	28000	5	30	6,9	299,2	235,83
5000	29000	5	30	6,9	299,2	238,81
5000	30000	5	30	6,9	299,2	241,79

Figure 22 Influence de C_2 sur l'inventaire optimalFigure 23 Influence de C_2 sur la période optimale

Les figures 22 et 23 montrent la variation des valeurs optimales de la période de maintenance préventive et de stock. Les deux courbes montrées aux figures 22 et 23

vont dans le même sens, éléments déjà remarqués dans le tableau III, mais dans ce cas le coût de maintenance préventive est le paramètre qui varie. On constate, d'après la figure 23, que plus le coût de maintenance préventive augmente, moins la maintenance devient fréquente et plus on a besoin de stock, puisqu'on aura un risque d'avoir plus de pannes. Aussi, lorsque le temps de maintenance devient infini, l'inventaire se stabilise. Ici, l'infini est représenté par la valeur "300", puisque lorsque T tend vers "300", le temps moyen des pannes devient constant et égal à mttf. On n'a donc pas besoin d'augmenter la valeur de T .

2.6.4 Analyse de sensibilité (variation du coût de stockage)

Après avoir mis au point les paramètres de maintenance préventive et corrective, on cherche maintenant à étudier l'effet de la variation du coût du stockage sur la décision optimale.

Tableau V

Variation du coût de stockage

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	Sopt	Topt	Cout
5000	3000	1	30	10	75,12	105,76
5000	3000	2	30	8,5	70,717	116,06
5000	3000	3	30	6,3	63,042	123,77
5000	3000	4	30	4,6	57,586	129,38
5000	3000	5	30	3,5	54,325	133,49
5000	3000	6	30	2,8	52,156	136,58
5000	3000	7	30	2,3	51,074	139,09
5000	3000	8	30	2	49,992	141,2
5000	3000	9	30	1,7	49,49	143
5000	3000	10	30	1,4	48,912	144,53
5000	3000	11	30	1,1	48,912	145,76
5000	3000	12	30	0,8	48,912	146,68
5000	3000	13	30	0,4	48,912	147,26
5000	3000	14	30	0,1	48,912	147,51
5000	3000	15	30	0,1	48,912	147,6

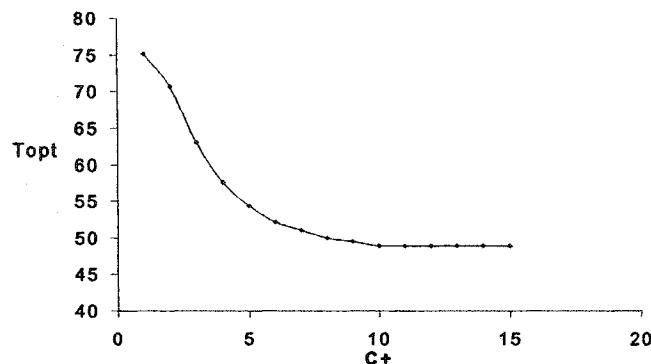


Figure 24 Influence de $C+$ sur la période optimale

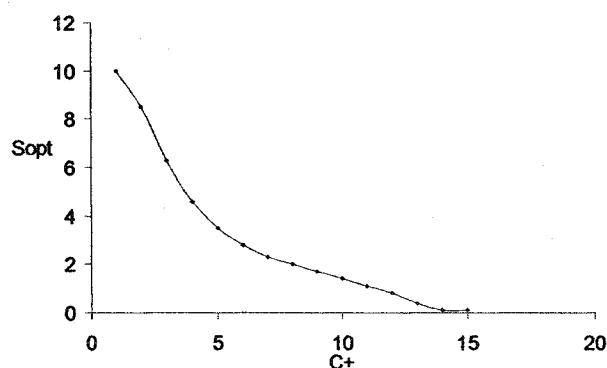


Figure 25 Influence de $C+$ sur l'inventaire optimal

Dans les figures 24 et 25, les deux courbes des valeurs optimales de S et de T ont la même allure. Plus le coût de stockage devient élevé, plus il devient nécessaire de diminuer l'inventaire optimal, mais à cause des coûts qui peuvent résulter des pénuries si le niveau de stock est faible, on a intérêt à ce que la maintenance préventive soit plus fréquente.

Sur les figures 24 et 25, on remarque que l'inventaire commence à se stabiliser lorsque les périodes de maintenance deviennent faibles et ceci parce que l'inventaire n'est nécessaire dans ces cas que pour la maintenance préventive et non pour les pannes. La

maintenance préventive a un temps d'occurrence déjà connu. De ce fait, l'inventaire se stabilise puisque la probabilité de faire une maintenance à une période donnée est sûre.

2.6.5 Analyse de sensibilité (variation du coût de pénurie)

Le tableau VI montre l'influence des variations des coûts de pénurie sur les paramètres optimaux à déterminer.

Tableau VI

Variation du coût de pénurie

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	S _{opt}	T _{opt}	Cout
5000	3000	5	20	2,4	63,042	117,84
5000	3000	5	25	3	58,675	126,18
5000	3000	5	30	3,5	54,325	133,49
5000	3000	5	35	4	51,074	140,03
5000	3000	5	40	4,4	48,912	145,97
5000	3000	5	50	5,2	45,679	156,51
5000	3000	5	60	5,9	42,457	165,73
5000	3000	5	70	6,2	39,248	174,02
5000	3000	5	80	6,5	37,116	181,57
5000	3000	5	90	6,9	36,052	188,5
5000	3000	5	100	7,2	33,929	195,01
5000	3000	5	110	7,5	32,87	201,09
5000	3000	5	120	7,7	31,813	206,83
5000	3000	5	130	7,9	30,757	212,27
5000	3000	5	140	8,1	29,703	217,44
5000	3000	5	150	8,1	28,651	222,35
5000	3000	5	160	8,1	27,6	227,06
5000	3000	5	170	8,1	27,6	231,67
5000	3000	5	180	8,1	26,551	236,28
5000	3000	5	190	8,1	26,551	240,82
5000	3000	5	200	8,1	26,551	245,37
5000	3000	5	210	8,1	26,551	249,91

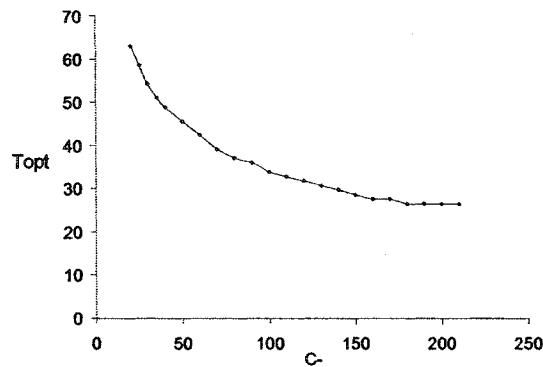


Figure 26 Influence de C_{-} sur la période optimale

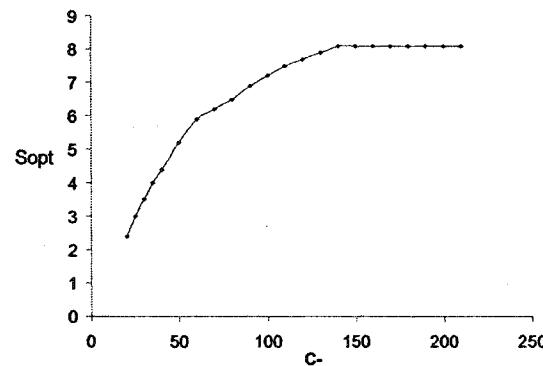


Figure 27 Influence de C_{-} sur l'inventaire optimal

Les figures 26 et 27 illustrent l'effet des coûts des pénuries sur les paramètres optimaux. Ces courbes montrent que plus les coûts des pénuries deviennent importants, plus on a intérêt à les atténuer en se protégeant avec un stock proportionnel aux coûts de pénurie considérés étant donné que les coûts de stockage sont toujours constants. Ceci veut dire que si on augmente la période de maintenance, on aura des coûts supplémentaires dus au stockage et en même temps, on augmentera les probabilités de panne, ce qui se traduit par une diminution de cette période. Toutefois, lorsque la période devient suffisamment petite pour que le risque de panne devienne nul, l'inventaire se stabilise à sa plus grande valeur pour réduire les effets indésirables de la maintenance préventive.

2.6.6 Discussion des résultats

L'analyse de sensibilité montre l'interaction entre les différents paramètres et leurs influences sur les valeurs optimales "S" et "T". D'après les figures qui montrent le comportement des valeurs optimales vis-à-vis des variations des coûts, on remarque que la période suit, la plupart du temps, l'allure du stock et vice versa. Selon cette allure, lorsque les coûts de maintenance préventive et corrective changent, la période change et oblige l'inventaire à s'ajuster.

On retrouve, la plupart du temps, un comportement dans le même sens pour l'inventaire et pour la période de maintenance préventive. Ainsi, avec ce comportement, l'introduction du stock de sécurité se justifie. Plus l'inventaire est grand, plus il permet une maintenance moins fréquente dans certains cas.

De l'augmentation du coût de stockage résulte une diminution de stock. Cette diminution oblige la maintenance préventive à être plus fréquente du fait qu'un stock faible risque de ne pas satisfaire la demande en cas de panne. Pour cela, la maintenance préventive est fréquente pour augmenter la fiabilité du système et minimiser ainsi le risque de pannes.

L'augmentation des coûts de pénurie a eu pour effet d'augmenter l'inventaire et de réduire la période de maintenance préventive. On réduit ainsi le risque de pannes et les pénuries.

De plus, la diminution du coût de maintenance corrective ou l'augmentation du coût de maintenance préventive, pousse le modèle à mettre le choix sur des périodes de maintenance préventive moins fréquentes. De ce fait, le risque de panne augmente et nous oblige à stocker plus, pour réduire l'effet des pannes qui ont tendance à se produire plus souvent avec le temps.

2.7 Conclusion

La maintenance préventive de type bloc est une maintenance systématique, facile à implémenter et à gérer. Dans ce chapitre, on présente un modèle de ce type de maintenance combiné à une gestion de production pour présenter plus adéquatement le problème de commande optimale du système de production considéré impliquant le stock, la pénurie et les maintenances préventive et corrective. Le modèle développé a permis de donner des paramètres optimaux qui résultent d'une résolution numérique des conditions d'optimum présentées dans ce chapitre.

À ce modèle, on a appliqué plusieurs tests pour déterminer sa sensibilité vis-à-vis différents paramètres de production et les tableaux des résultats ont montré les valeurs optimales pour chaque combinaison des coûts. L'allure des courbes obtenues confirme qu'il y a une dépendance entre l'inventaire et la période de maintenance préventive, ce qui justifie la combinaison des deux politiques dans un même modèle.

CHAPITRE 3

STRATÉGIE DE PRODUCTION AVEC MAINTENANCE DE TYPE ÂGE

3.1 Introduction

La maintenance préventive est effectuée pour augmenter le temps de production, mais malgré cette maintenance, il y a toujours des imprévus et il s'avère très utile de s'en protéger. Étant donné que la maintenance n'est pas assez efficace contre les pannes, on introduit un stock pour amortir les effets de ces pannes. Cependant, l'augmentation inutile du stock génère des gaspillages puisque de ce stock dérive plusieurs coûts secondaires. La politique de production avec inventaire, combinée à une stratégie de maintenance préventive, donne une minimisation du coût total. La formulation et la résolution du problème d'optimisation associé donnent une meilleure politique de production (stock optimal) et une bonne stratégie de maintenance.

La maintenance dans ce chapitre est de type âge et c'est une maintenance préventive qui tient compte du temps de fonctionnement de la machine. Une telle maintenance est économique et permet de changer les composantes à un temps optimal pour les équipements. Ce type de politique de maintenance est intéressant pour les industries qui ne se permettent pas le gaspillage des pièces de rechange ou qui peuvent faire un suivi de l'âge de leurs machines à moindre coût.

Ce chapitre présentera un modèle mathématique permettant de modéliser la pratique de maintenance de type âge combinée avec l'inventaire de sécurité dans le but d'optimiser le coût de production. Dans le modèle proposé, on aura à redéfinir quelques hypothèses fréquemment utilisées. Citons, par exemple :

- ✓ le modèle utilisé pour une machine est, pour la plupart du temps, basé sur une loi exponentielle;
- ✓ il n'y a pas de panne lors du remplissage de stock;
- ✓ la demande non satisfaite est non récupérée.

Dans la section 2, nous présentons la formulation du modèle mathématique et une explication des différentes équations. Dans la section 3, on représente un tableau récapitulatif des équations. La section 4 montre le problème à résoudre. La section 5 représente les méthodes numériques et l'algorithme utilisé pour l'obtention des valeurs optimales. La section 6 porte sur l'analyse de sensibilité du modèle vis-à-vis des paramètres du coût et la section 7 présente un résumé sur le comportement des valeurs optimales et du modèle.

3.2 Modélisation

Le modèle présenté dans cette section est une extension du modèle de CHELBI et REZG (2003), décrit précédemment (chapitre 1), en révisant les restrictions sur la modélisation des pannes et de la satisfaction de la demande après pénurie. Nous supposons que toute demande non satisfaite n'est pas perdue.

La stratégie utilisée dans ce modèle est de type âge. La machine sera remise à neuf lorsque son âge aura atteint "T", qui est la période planifiée pour la maintenance préventive ou lors d'une réparation due aux pannes. Dans le but de mieux représenter la modélisation de la production, cette stratégie est couplée avec une politique de stockage de produits qui est nécessaire pour amortir les effets imprévisibles.

Le modèle veut que le taux de production U soit maximal (U_{mx}) lors du remplissage de stock jusqu'à un niveau "S" ou qu'il soit maintenu au taux de la demande d si le niveau de stock "S" est déjà atteint, sinon maintenu à zéro si on dépasse ce niveau. Cette politique se résume dans l'équation (3.1).

$$U(x) = \begin{cases} U_{mx} & \text{si } x < S \\ d & \text{si } x = S \\ 0 & \text{si } x > S \end{cases} \quad (3.1)$$

Puisque la dynamique de la machine suit un modèle probabiliste bien connu, on est obligés de respecter ce modèle et de ne pas le restreindre à des pannes après le remplissage de stock comme posé souvent dans la littérature. La machine sera ainsi confrontée à un risque de panne depuis le début de son fonctionnement. Lors de pénurie de stock, on considère la récupération de la demande non satisfaite. Le modèle tient compte en plus des temps de maintenance corrective et préventive aussi aléatoires. Ils sont modélisés suivant des lois de probabilité données.

3.2.1 Coût de stockage et de pénurie avant le remplissage du stock

Lors du remplissage du stock, la machine est sujette à des pannes qui obéissent à une loi de probabilités donnée par $f(x)$. En cas de panne lors du remplissage du stock, on a deux possibilités : que la réparation soit finie avant que l'inventaire ne soit épuisé ou que la réparation dure plus que le temps d'épuisement du stock et avoir une pénurie.

Les deux cas auront une surface de stockage donnée par l'équation (3.2) et représentée par la surface hachurée de la figure 28.

$$x^2 \cdot \frac{(U_{mx} - d)}{2} \quad (3.2)$$

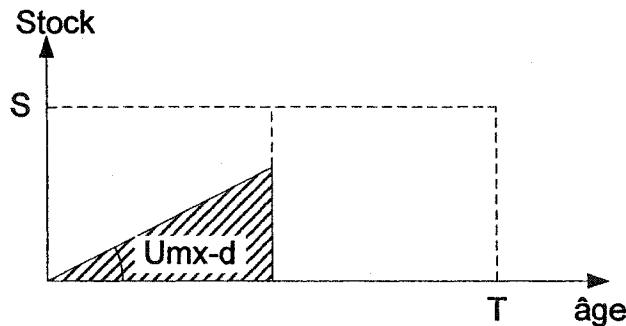


Figure 28 Représentation de la surface du remplissage de stock avec panne à un instant x

Dans le premier cas, la réparation dure sans subir de pénurie. Cette situation est représentée à la figure 29. La surface hachurée représentée sur la figure correspond à l'équation (3.3). Elle comprend le temps moyen de réparation tmw sans avoir de pénurie ou sans que le temps de réparation représenté dans (3.4) ne dépasse $x \cdot (Umx-d)/d$.

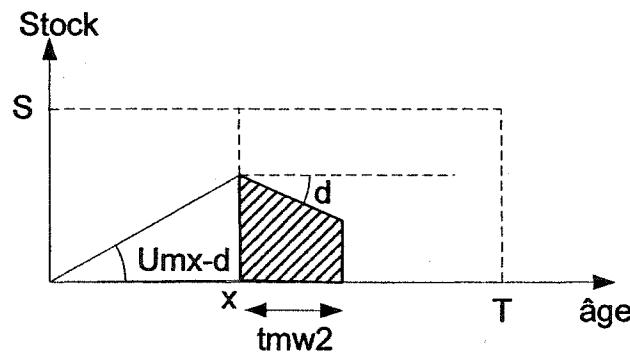


Figure 29 Panne avant le remplissage du stock avec réparation sans pénurie

$$(2 \cdot x \cdot (Umx-d) - tmw \cdot d) \cdot \frac{tmw}{2} \quad (3.3)$$

$$tmw = \int_0^{\frac{x(Umx-d)}{d}} t \cdot f_r(t) \cdot dt \quad (3.4)$$

Le deuxième cas est celui avec pénurie tel que montré à la figure 30. Cette figure illustre une surface de pénurie telle qu'elle a été modélisée par l'équation (3.5). On a une panne survenue à l'instant x et qui a duré plus que $x.(Umx-d)/d$, ce qui explique l'intégrale jusqu'à l'infini.

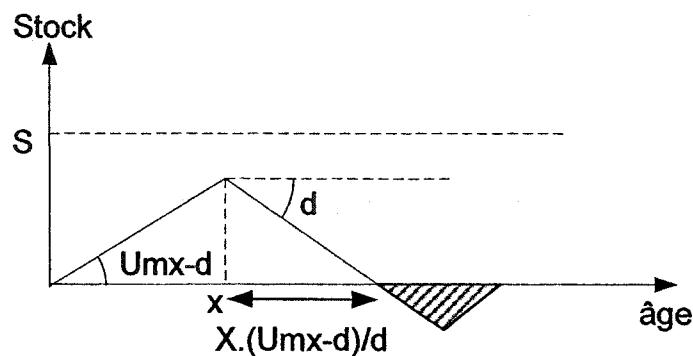


Figure 30 Panne avant le remplissage du stock avec réparation qui résulte en pénurie

$$\left(\int_x^{\infty} \frac{(Umx-d)}{d} \left(t - x \cdot \frac{(Umx-d)}{d} \right) \cdot f_r(t) dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx-d)} \right) \quad (3.5)$$

Les équations précédentes représentent des surfaces de stockage et de pénurie. Ces équations seront regroupées dans l'équation (3.6) qui représente ces surfaces avec la probabilité instantanée $f(x).dx$ correspondant à la probabilité de panne à chaque instant "x".

$$CAS = \int_0^{\frac{s}{Umx-d}} \left\{ C^+ \cdot \left[x^2 \cdot \frac{(Umx-d)}{2} + \frac{tmw}{2} \cdot \left(2 \cdot x \cdot \frac{(Umx-d)}{d} - tmw \cdot d \right) \right] + C^- \cdot \left(\int_{\frac{x(Umx-d)}{d}}^{\infty} \left(t - x \cdot \frac{(Umx-d)}{d} \right) \cdot f_r(t) dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx-d)} \right) \right\} \cdot f(x) dx \quad (3.6)$$

Ainsi, l'équation nommée "CAS", combinée avec les coûts de pénurie et de stockage, représente le coût de production lié au stockage et la pénurie lors du remplissage de stock, sans tenir compte pour l'instant des coûts de maintenance.

3.2.2 Coût de stockage et de pénurie lorsque le seuil est déjà atteint

La modélisation qui suit représente les surfaces de stockage et de pénurie si l'inventaire optimal est déjà rempli. La panne peut survenir à un instant x , supérieur à l'âge $S.(Umx-d)$ et jusqu'à l'instant de maintenance préventive "T". On modélise la surface de stockage par l'équation (3.7) multipliée par "S". Cette équation représente la durée de vie moyenne du système. Son premier terme représente une moyenne de vie si le système tombe en panne avant "T" et le deuxième est le temps de fonctionnement sans panne, correspondant à la probabilité de vie $R(T)$.

$$m(T) = \int_{\frac{S}{Umx-d}}^T t \cdot f(t) \cdot dt + R(T) \cdot T \quad (3.7)$$

Dans le cas de panne, on a des surfaces de stockage et de pénurie lui correspondant. Lors d'une panne sans pénurie telle que montrée à la figure 31, on a le temps tmw_2 représenté par l'équation (3.8) et qui est le temps moyen de réparation sans pénurie. Ainsi, le temps de réparation ne doit pas dépasser S/d . Avec cette moyenne, on calcule la surface hachurée par l'équation (3.9).

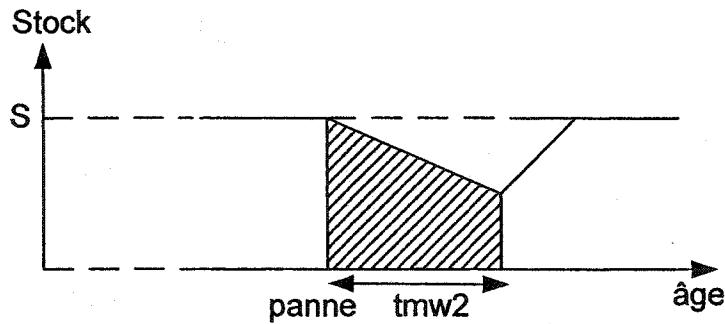


Figure 31 Panne survenue après remplissage de stock et sans pénurie

$$tmw_2 = \int_0^S t \cdot f_r(t) \cdot dt \quad (3.8)$$

$$(2 \cdot S - tmw_2 \cdot d) \cdot \frac{tmw_2}{2} \quad (3.9)$$

La réparation peut aussi durer plus que le temps d'épuisement du stock, comme indiqué sur la figure 32. L'équation (3.10) représente le temps moyen de réparation après l'épuisement du stock, ce qui veut dire que le temps de réparation dépasse S/d . À l'aide de ce temps moyen, on calcule la surface correspondant à la pénurie qui est représentée par la surface hachurée et l'équation (3.11).

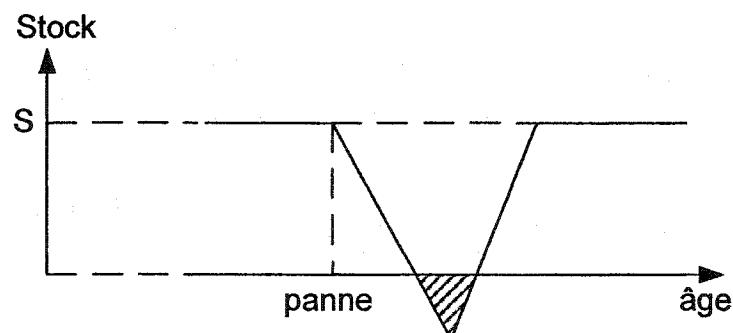


Figure 32 Panne survenue après remplissage du stock et avec pénurie

$$\left[\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right] \cdot C^- \quad (3.10)$$

$$\left(\left[\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right) \quad (3.11)$$

La modélisation dans cette section est pour le cas où la panne survient lorsque l'inventaire est déjà rempli et avant d'avoir atteint l'âge "T", ce qui s'explique par les probabilités de panne $F(x)$ représentées dans l'équation (3.12).

$$\left[F(T) - F\left(\frac{S}{(Umx - d)}\right) \right] \cdot C^- \cdot \left(\left[\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right) \quad (3.12)$$

Après avoir donné les équations correspondant aux coûts de production, elles seront assemblées dans l'équation (3.13) qui correspond au coût total après le remplissage de stock.

$$\begin{aligned} CBS = & C^+ \cdot \left[S \cdot m(T) + (2 \cdot S - tmw_2 \cdot d) \cdot \frac{tmw_2}{2} \right] + \\ & \left[F(T) - F\left(\frac{S}{(Umx - d)}\right) \right] \cdot C^- \cdot \left(\left[\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right]^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ainsi, le coût CBS est le coût de production dû aux coûts de stockage et de pénurie lorsque l'inventaire est déjà rempli.

3.2.3 Coût dû à la maintenance préventive

La modélisation comprend aussi la maintenance préventive qui est différente de la maintenance corrective par son temps moyen et sa loi de probabilité $f_p(x)$. Pour représenter ce coût, on prend deux cas de maintenance : sans pénurie et avec pénurie.

Dans le cas de maintenance préventive sans pénurie, on calcule le temps moyen pour que cette action soit faite sans pénurie. Ceci est représenté par (3.14). Avec ce temps, le calcul des surfaces sans pénurie est fait à l'aide de l'équation (3.15).

$$tmp = \int_0^s t \cdot f_p(t) \cdot dt \quad (3.14)$$

$$\left[(2 \cdot S - tmp \cdot d) \cdot \frac{tmp}{2} \right] \quad (3.15)$$

Dans le cas de pénurie lors d'une maintenance préventive, l'équation (3.16) représente la surface correspondante à la pénurie due à la maintenance préventive qui peut dépasser le temps S/d et le temps d'épuisement du stock.

$$C^- \cdot \left(\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_p(t) \cdot dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(U_{mx} - d)} \right) \quad (3.16)$$

$$CMP = R(T) \cdot \left\{ \begin{array}{l} C^+ \cdot \left[(2 \cdot S - tmp \cdot d) \cdot \frac{tmp}{2} \right] + \\ C^- \cdot \left(\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_p(t) \cdot dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(U_{mx} - d)} \right) \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Dans CMP de l'équation (3.17), on additionne les deux cas de maintenance préventive avec leurs coûts correspondants. Cette somme, est multipliée par la probabilité que la maintenance préventive soit faite ($R(T)$) ou que le système ne tombe pas en panne avant d'effectuer la maintenance préventive, puisque la maintenance n'est faite que si la machine atteint l'âge "T").

3.2.4 Coût total unitaire de production

Après avoir calculé les différentes possibilités de maintenance, que ce soit corrective ou préventive avec cas de pénurie ou sans pénurie, on les rassemble dans le coût total unitaire. Dans ce coût de production, on introduit les coûts de maintenance préventive et corrective avec leurs probabilités respectives d'occurrence, représentés dans l'équation (3.18). Le coût total unitaire introduit les coûts de maintenance préventive et corrective. Il contient aussi les coûts dus à la production représentés par CAS, CBS et CMP. Le coût unitaire exprimé dans (3.20) est un coût de production moyen étalé sur un temps de production et de maintenance. Ce temps est représenté par l'équation (3.19).

$$CM = R(T) \cdot C_2 + F(T) \cdot C_1 \quad (3.18)$$

$$E(T) = m(T) + R(T) \cdot mtsp + F(T) \cdot mttr \quad (3.19)$$

$$Cout = \frac{CAS + CBS + CMP + CM}{E(T)} \quad (3.20)$$

Ainsi 'Cout' de l'équation (3.20) est le coût total unitaire modélisant un système de production qui comprend la politique de maintenance de type âge et une politique de stockage de produits.

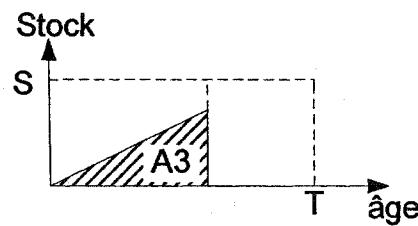
3.3 Récapitulation du modèle

Le tableau qui suit représente une récapitulation des équations permettant le calcul du coût de production. Chaque équation est présentée avec la figure correspondante.

Tableau VII

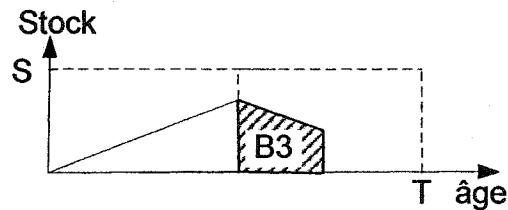
Rappel des équations et de leurs illustrations

Représentation de la surface du remplissage de stock avec panne à un instant x



$$A3 = x^2 \cdot \frac{(Umx - d)}{2}$$

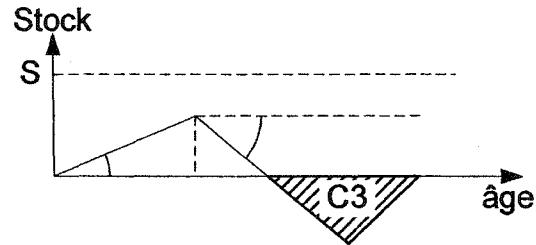
Panne avant le remplissage du stock avec réparation sans pénurie



$$B3 = (2 \cdot x \cdot (Umx - d) - tmw \cdot d) \cdot \frac{tmw}{2}$$

Tableau VII (suite)

Panne avant le remplissage du stock avec réparation qui résulte en pénurie

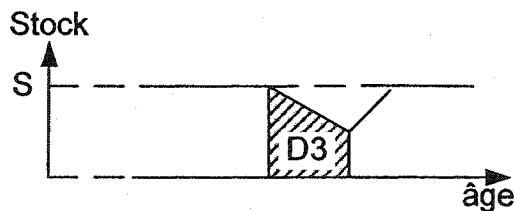


$$C3 = \left(\int_{\frac{x(Umx-d)}{d}}^{\infty} \left(t-x \cdot \frac{(Umx-d)}{d} \right) \cdot f_r(t) dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx-d)} \right)$$

Coût de pénurie et de stockage avant d'avoir rempli l'inventaire :

$$CAS = \int_0^{\frac{s}{Umx-d}} \{ C^+ \cdot (A3 + B3) + C^- \cdot C3 \} \cdot f(x) dx$$

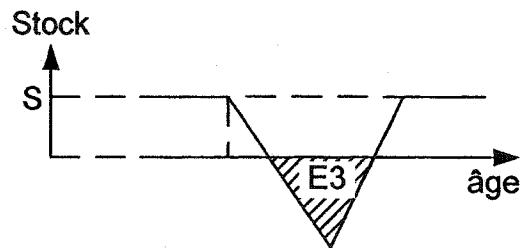
Panne survenue après remplissage de stock et sans pénurie



$$D3 = (2 \cdot S - tmw_2 \cdot d) \cdot \frac{tmw_2}{2}$$

Tableau VII (suite)

Panne survenue après remplissage du stock et avec pénurie



$$E3 = \left(\int_d^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_r(t) \cdot dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right)$$

Coût de pénurie et de stockage après avoir rempli l'inventaire :

$$CBS = C^+ \cdot [S \cdot m(T) + D3] + \left[F(T) - F\left(\frac{S}{(Umx - d)}\right) \right] \cdot C^- \cdot E3$$

Coût de pénurie et de stockage résultant de la maintenance préventive :

$$CMP = R(T) \cdot \left\{ C^+ \cdot \left[(2 \cdot S - tmp \cdot d) \cdot \frac{tmp}{2} \right] + C^- \cdot \left(\int_d^{\infty} \left(t - \frac{S}{d} \right) \cdot f_p(t) \cdot dt \right)^2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right\}$$

$$CM = R(T) \cdot C_2 + F(T) \cdot C_1$$

Tableau VII (suite)

<p>Temps moyen de fonctionnement :</p> $E(T) = m(T) + R(T) \cdot mtsp + F(T) \cdot mttr$
<p>Coût total unitaire: pénurie, stockage, maintenance préventive et corrective</p> $Cout = \frac{CAS + CBS + CMP + CM}{E(T)}$

3.4 Problème à résoudre

L'intérêt de la résolution de ce modèle est d'optimiser le coût unitaire de production. Ce coût unitaire est une fonction de deux variables qui sont l'inventaire "S" et l'âge "T" pour effectuer la maintenance préventive. Le problème est de résoudre les deux équations (3.21) et (3.22). Cela permet de trouver la période optimale de maintenance préventive et aussi l'inventaire optimal correspondant.

$$\left. \frac{\partial Cout}{\partial S} \right|_T = 0 \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial Cout}{\partial T} \right|_S = 0 \quad (3.22)$$

La résolution de ces deux équations nous permettra de trouver les paramètres optimaux qui donnent un coût de production minimal.

Vu la complexité des intégrales présentées, on opte pour une méthode numérique pour résoudre ce problème. Cette méthode est présentée à la section suivante.

3.5 Méthodes numériques et discussions

Les méthodes numériques pour l'optimisation consistent à faire le balayage d'une zone prédéterminée et de calculer les valeurs du coût total unitaire. Cette zone doit être suffisamment large pour garantir qu'elle contient les valeurs optimales de "S" et de "T".

Le programme est alimenté par les données du système. On introduit les différents coûts liés à la production (le coût de stockage et de pénurie) puis on introduit les coûts liés à l'équipement (le coût de maintenance corrective et préventive).

Les distributions de probabilité correspondant à la maintenance et à la vie du système seront aussi des données du programme.

Le programme balaie la zone comme suit :

- variation des valeurs du stock "S";
- calcul de tmw qui désigne le temps moyen pour effectuer une maintenance corrective sans pénurie;
- calcul du temps moyen de maintenance corrective avec pénurie twp à l'aide de l'équation suivante :

$$\int_{xp}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = twp$$

$$\int_0^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{xp} t \cdot f(t) \cdot dt + \int_{xp}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = tmw + twp = mttr$$

$$\text{avec } twp = mttr - tmw$$

- calcul du coût de production lors du remplissage du stock 'CAS';
- prendre une valeur de la période de maintenance préventive "T";
- calcul du coût de production lorsque l'inventaire est déjà rempli 'CBS';
- calcul du coût de production lié à la maintenance préventive 'CMP';
- calcul du temps moyen de fonctionnement ainsi que les temps de réparation et de maintenance préventive désigné par $m(T)$;

- calcul du coût total unitaire correspondant à “S” et “T” et stockage de ces trois valeurs (coût, stock et période).

Après avoir balayé toute la zone, on choisit la valeur minimale du coût. Ainsi, on aura les paramètres optimaux à appliquer, l'inventaire optimal et la période optimale de maintenance préventive. La figure 33 illustre l'algorithme utilisé pour la résolution du problème.

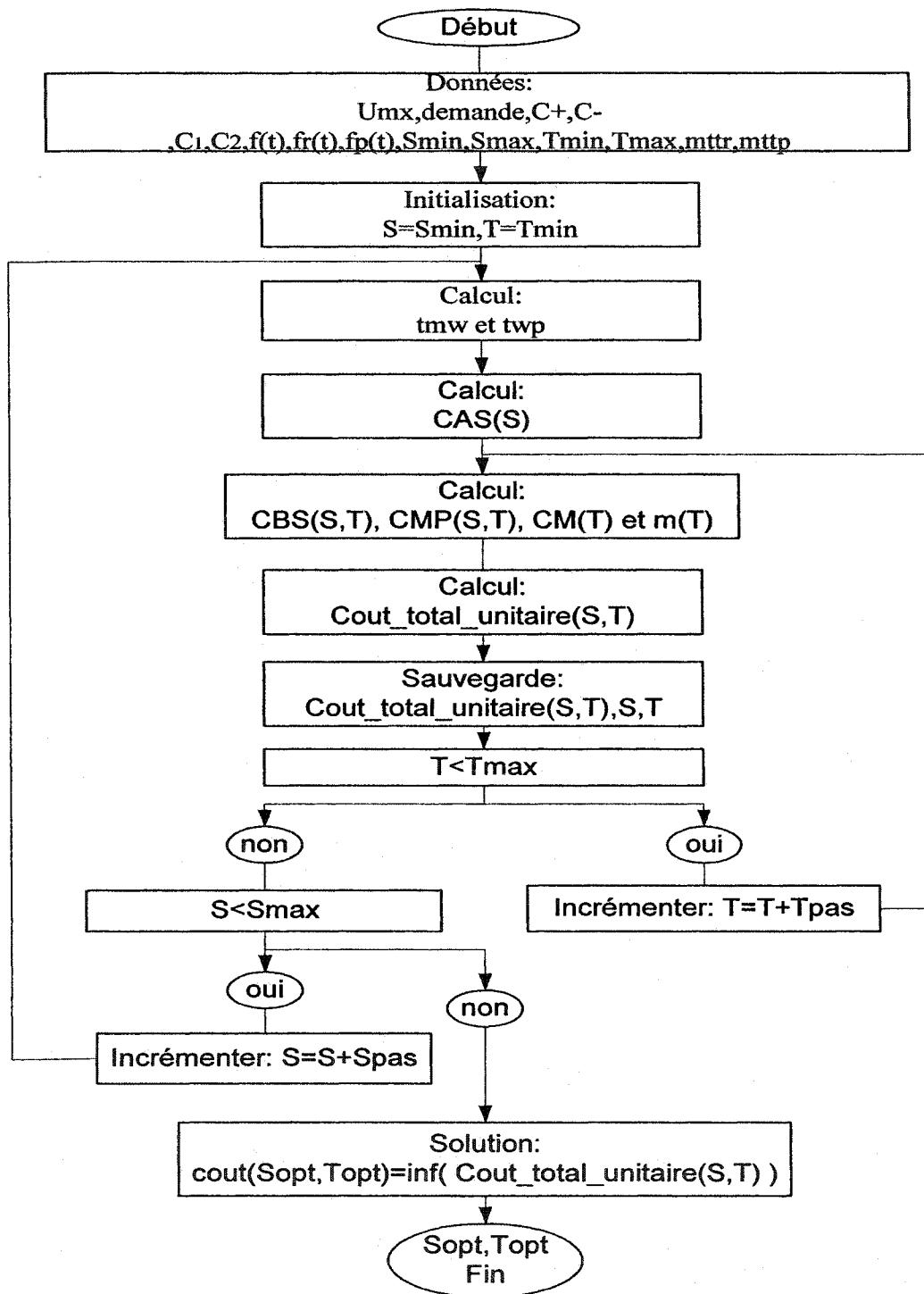


Figure 33 Algorithme pour l'optimisation numérique

3.6 Résultats numériques et analyse de sensibilité

La stratégie modélisée dans ce chapitre comprend la combinaison de la maintenance préventive de type âge avec une politique de stockage de produits. Dans ce qui suit, on étudie la sensibilité du modèle et son comportement lorsqu'on change un des coûts, soit le coût de production ou de stockage.

3.6.1 Résultat graphique

La figure 34 illustre la courbe du coût en fonction du stock et de la période. Cet exemple choisi, sera pris comme référence pour l'analyse de sensibilité.

Pour modéliser la machine, nous avons pris un modèle de Weibull avec paramètres d'échelle de 100 et de forme de 2 qui donne une mttf de 88.6. Les maintenances préventive et corrective sont représentées par la loi Log-Normal avec comme moyenne "2" et "10" respectivement. Les autres données sont :

- ✓ taux de production maximal ($U_{mx}=1$);
- ✓ taux de demande ($d=0.65$);
- ✓ coût de maintenance corrective ($C_1=5000$);
- ✓ coût de maintenance préventive ($C_2=3000$);
- ✓ coût de stockage ($C+=5$);
- ✓ coût de pénurie ($C-=50$);

$$\text{contrainte : } \frac{mttf}{mttf + mttr} \cdot U_{mx} \geq d$$

$$\frac{88.6}{88.6 + 10} \cdot 1 \geq 0.65$$

Avec ces données, les paramètres optimaux sont :

- 2.7 pour l'inventaire;
- 67 pour la période de maintenance préventive;

- coût unitaire optimal de 87.02.

La figure 35 illustre ces valeurs optimales et montre la convexité du coût total en fonction des variables de décision "S" et "T".

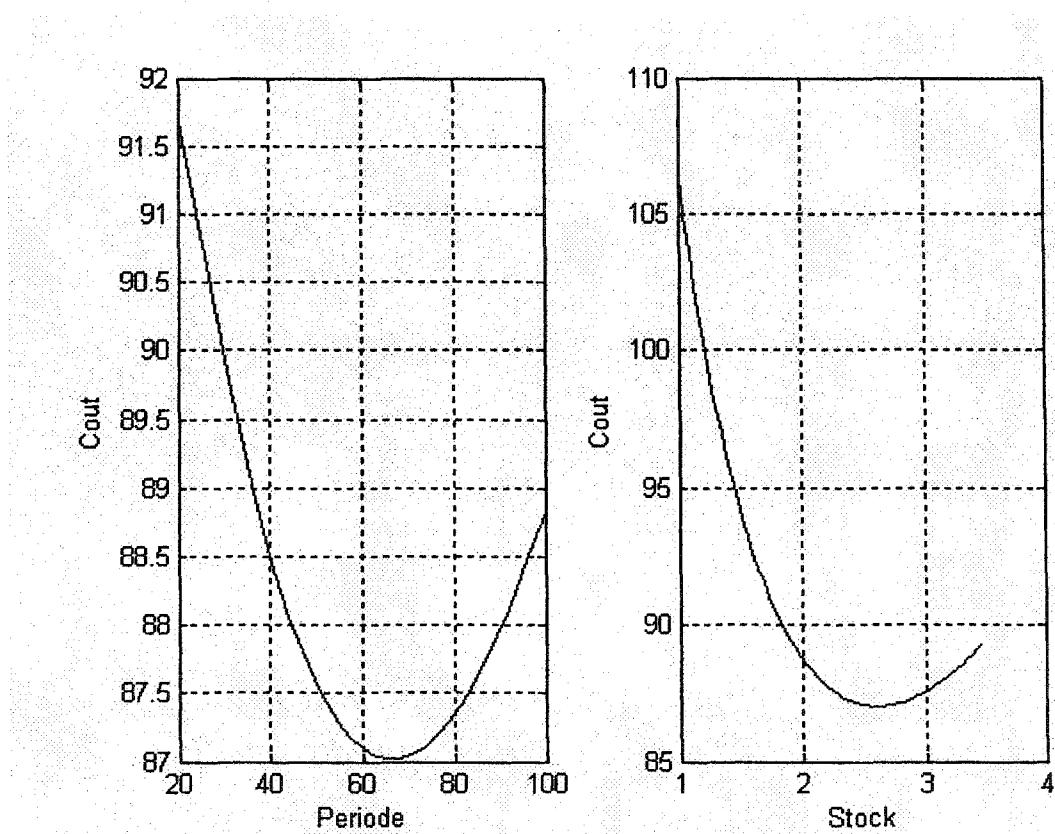


Figure 34 Profil du graphe du coût unitaire aux valeurs optimales

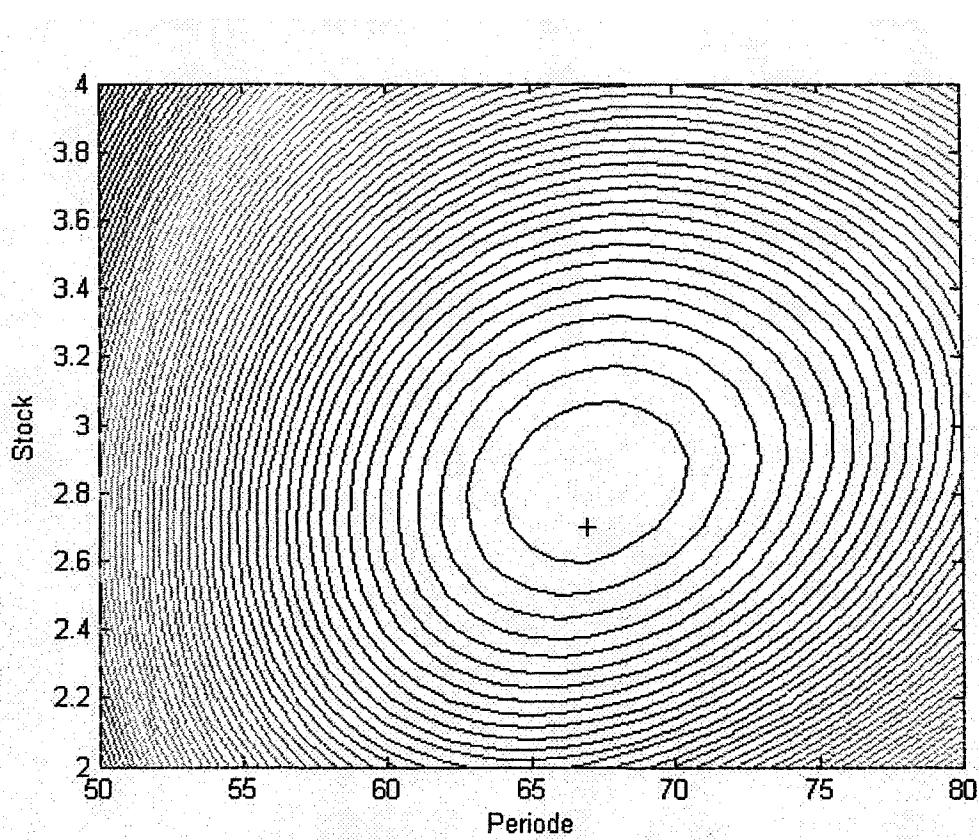


Figure 35 Courbe de niveau du coût en fonction du stock et de la période

Dans ce qui suit, on étudie l'analyse de sensibilité du modèle, en prenant comme référence l'exemple considéré précédemment.

3.6.2 Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance corrective)

Le tableau VIII montre l'effet de la variation du coût de la maintenance corrective sur la variation des paramètres optimaux et l'interaction entre l'inventaire optimal et la période optimale.

Tableau VIII
Variation du coût de maintenance corrective

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	Sopt	Topt	Cout
3000	3000	5	50	3,30	91	70,449
4000	3000	5	50	3,00	76	79,37
5000	3000	5	50	2,70	67	87,02
6000	3000	5	50	2,50	61	93,821
7000	3000	5	50	2,40	56	100
8000	3000	5	50	2,20	52	105,71
9000	3000	5	50	2,10	49	111,04
10000	3000	5	50	2,05	46	116,06
11000	3000	5	50	2,00	44	120,8
12000	3000	5	50	1,90	42	125,33
13000	3000	5	50	1,80	41	129,66
14000	3000	5	50	1,75	39	133,81
15000	3000	5	50	1,63	38	137,8
16000	3000	5	50	1,50	37	141,67
17000	3000	5	50	1,10	36	145,26
18000	3000	5	50	0,86	35	148,75
19000	3000	5	50	0,75	35	152,14
30000	3000	5	50	0,70	28	153,1
40000	3000	5	50	0,70	21	153,4
50000	3000	5	50	0,70	21	153,5
60000	3000	5	50	0,70	21	153,5

Les figures 36 et 37 montrent graphiquement l'influence du coût de maintenance corrective sur les paramètres optimaux.

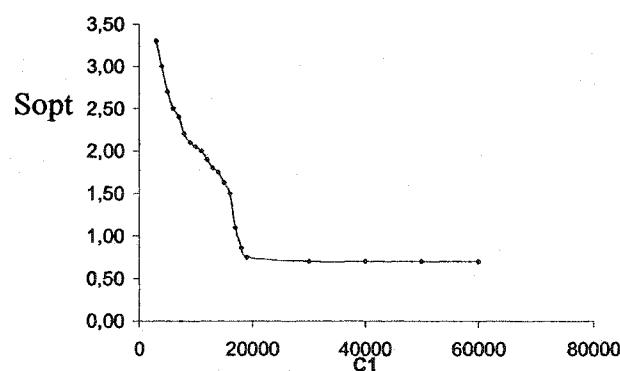


Figure 36 Influence de C1 sur l'inventaire optimal

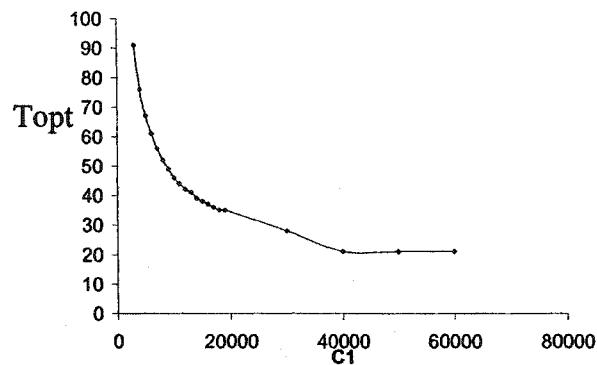


Figure 37 Influence de C_1 sur la période optimale

D'après l'allure dégagée des figures 36 et 37, on remarque que la maintenance corrective influence la période et l'inventaire. Lorsque le coût de maintenance corrective augmente, la période de maintenance préventive diminue et cela, pour diminuer les coûts de pannes. Ainsi, la période de maintenance préventive diminue le risque de panne, ce qui rend un stock élevé inutile. Pour cela, l'inventaire optimal diminue aussi.

On constate aussi que les deux valeurs optimales se stabilisent lorsque la période de maintenance préventive devient petite. Ceci est dû au fait que l'inventaire, dans ce cas, n'est nécessaire que pour éviter les pénuries engendrées par la maintenance préventive et qu'on pratique à une période définie.

3.6.3 Analyse de sensibilité (variation du coût de la maintenance préventive)

Le tableau VIII, étudie l'effet du coût de la maintenance préventive sur les paramètres optimaux "S" et "T".

Tableau IX
Variation du coût de maintenance préventive

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	S _{opt}	T _{opt}	Cout
5000	1000	5	50	0,8	32	56,327
5000	2000	5	50	2,2	51	75,162
5000	2200	5	50	2,3	55	77,908
5000	2500	5	50	2,5	59	81,638
5000	3000	5	50	2,7	67	87,02
5000	4000	5	50	3,1	82	95,412
5000	5000	5	50	3,4	96	101,5
5000	6000	5	50	3,6	110	105,88
5000	7000	5	50	3,8	125	108,92
5000	8000	5	50	4	141	110,94
5000	9000	5	50	4,1	158	112,18
5000	10000	5	50	4,2	175	112,89
5000	11000	5	50	4,3	196	113,25
5000	12000	5	50	4,3	214	113,42
5000	13000	5	50	4,3	234	113,49
5000	14000	5	50	4,3	254	113,52
5000	15000	5	50	4,3	269	113,53
5000	20000	5	50	4,3	288	113,5534
5000	25000	5	50	4,3	288	113,5534
5000	30000	5	50	4,3	288	113,5646

Les figures 38 et 39 ci-après illustrent la variation des paramètres optimaux représentés dans le tableau VIII.

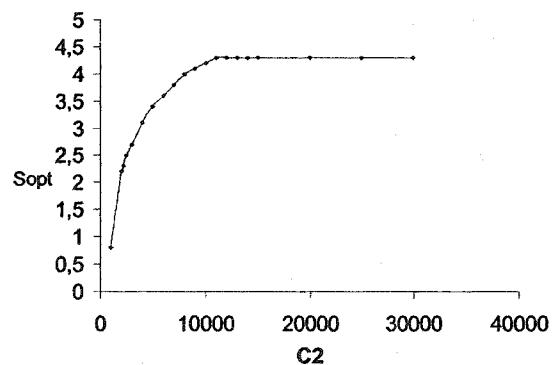


Figure 38 Influence de C₂ sur l'inventaire optimal

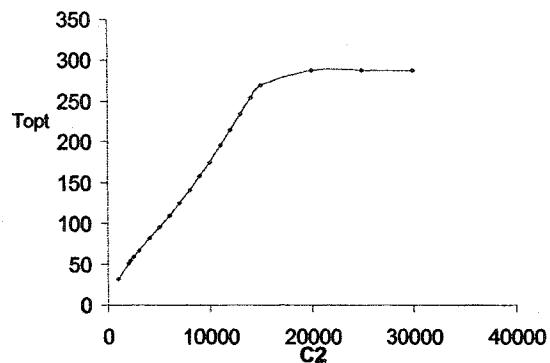


Figure 39 Influence de C_2 sur la période optimale

D'après les figures 38 et 39, la période de maintenance préventive augmente en augmentant son coût. L'augmentation de la période avec l'augmentation du coût de la maintenance préventive est due à la tendance à diminuer la fréquence de maintenance. La diminution de la fréquence de la maintenance préventive engendre des risques grandissant de pannes. Ainsi, on aura plus de pénuries et, de ce fait, on a tendance à stocker plus pour éviter les pénuries possibles.

Lorsque le temps de maintenance préventive devient infini (ici 288), le temps moyen de panne devient constant "mttf". Il n'y a donc plus de variation du stock.

3.6.4 Analyse de sensibilité (variation du coût de stockage)

Après avoir mis le point sur l'influence des équipements, on étudie l'influence des coûts liés au stock sur les paramètres optimaux. Le tableau IX montre cette influence lorsque le coût de stockage varie.

Tableau X

Variation du coût de stockage

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	Sopt	Topt	Cout
5000	3000	1	50	5,2	68,12	72,828
5000	3000	2	50	4,2	68	77,32
5000	3000	3	50	3,6	68	81,053
5000	3000	4	50	3,1	67,87	84,248
5000	3000	5	50	2,7	67	87,02
5000	3000	6	50	2,4	66	89,434
5000	3000	7	50	2,1	65,36	91,538
5000	3000	8	50	1,8	64	93,358
5000	3000	8,99	50	1,5	63	94,912
5000	3000	10	50	0,91	60,34	95,741
5000	3000	11	50	0,7	60	96,389
5000	3000	12	50	0,6	60	97,001
5000	3000	13	50	0,49	60	97,555
5000	3000	14	50	0,1	60	97,8481

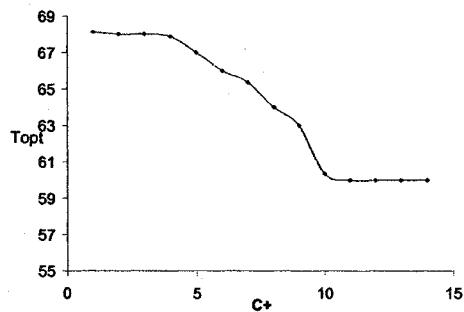


Figure 40 Influence de C+ sur la période optimale

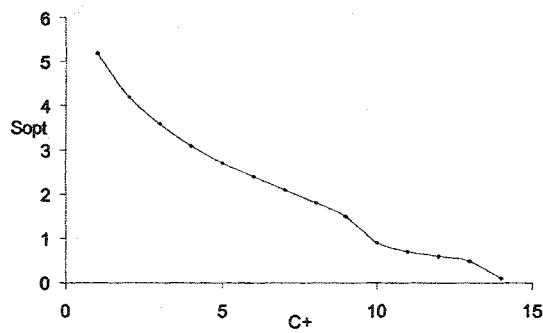


Figure 41 Influence de C+ sur l'inventaire optimal

L'influence du coût de stockage sur les paramètres optimaux est montrée sur les deux figures 40 et 41. L'augmentation du coût de stockage engendre une diminution du stock optimal. Cette diminution représente un risque de non-satisfaction de la demande. Pour cela, la période de maintenance préventive diminue pour prévenir l'augmentation du risque de panne.

3.6.5 Analyse de sensibilité (Variation du coût de pénurie)

Dans le tableau suivant, on étudie la variation du coût de pénurie et son influence sur les valeurs optimales "S" et "T" :

Tableau XI

Influence de la variation du coût de pénurie sur les valeurs optimales

C1(corrective)	C2(preventive)	C+	C-	Sopt	Topt	Cout
5000	3000	5	20	0,7	70	78,882
5000	3000	5	25	1,5	70	81,102
5000	3000	5	30	1,9	69	82,661
5000	3000	5	35	2,1	68,72	83,968
5000	3000	5	40	2,4	68	85,105
5000	3000	5	50	2,7	67	87,02
5000	3000	5	60	3	66,28	88,613
5000	3000	5	70	3,3	66	89,987
5000	3000	5	80	3,5	65,75	91,198
5000	3000	5	90	3,7	65,22	92,292
5000	3000	5	100	3,8	65	93,295
5000	3000	5	130	4,2	64	95,8923
5000	3000	5	160	4,5	63	98,0941
5000	3000	5	200	4,8	63	100,6465
5000	3000	5	300	4,9	63	105,9373

Pour mieux visualiser cet effet, on présente les résultats sous forme graphique (figure 42 et 43).

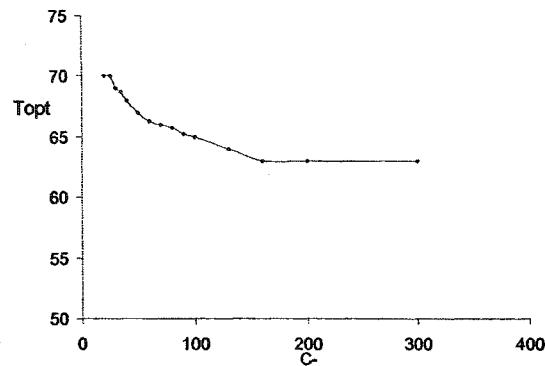


Figure 42 Influence de C_- sur la période optimale

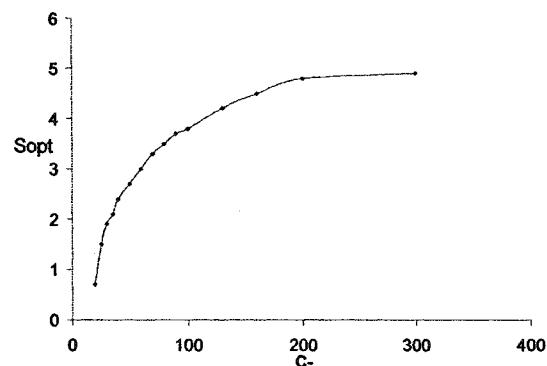


Figure 43 Influence de C_- sur l'inventaire optimal

La variation du coût de pénurie engendre une variation des paramètres optimaux. Dans ce cas, la variation est dans un sens contraire, l'un par rapport à l'autre. Ces courbes montrent l'effet des coûts de pénuries sur les paramètres optimaux et montrent que plus les coûts de pénurie sont grands, plus on doit stocker. Puisque l'inventaire permet d'éviter les pénuries et leurs coûts, on diminue ainsi la période pour diminuer le risque de panne. Dans ce cas, on remarque qu'il ne faut plus augmenter l'inventaire puisque la période est petite et ne permet pas d'avoir de pénurie.

3.6.6 Discussion des résultats

L'analyse de sensibilité a montré que la variation du stock optimal est, la plupart du temps, accompagnée d'une variation de la période optimale de maintenance dans le même sens sauf pour la variation des coûts de pénurie; il y a variation dans l'autre sens.

On remarque que les deux valeurs optimales vont toujours dans le même sens, sauf dans le cas de variation des pénuries. Ceci est normal puisqu'ils sont complémentaires. Lorsque on est contraints de diminuer de fréquence de la période maintenance préventive, l'inventaire augmente pour permettre cette diminution et compenser les pertes dues aux pannes qui s'en suivent.

Les variations des coûts liés aux maintenances ont une influence sur la fréquence de maintenance préventive puisqu'on remarque, d'après les figures présentées, une plus grande variation de la période optimale, comparativement à leur influence sur l'inventaire optimal. L'augmentation du coût de maintenance corrective nous pousse à éviter d'avoir des pannes, ce qui implique une fréquence plus importante de maintenance préventive. Cette fréquence élevée diminue le risque de panne et aussi le risque de pénurie, ce qui explique que l'inventaire optimal diminue.

Les coûts liés aux pénuries ont une influence inverse sur la variation du stock et de la période de maintenance préventive. Lors d'une augmentation du coût de pénurie, le stock doit être plus grand pour diminuer les pertes. Dans ce cas, la période ne peut pas devenir plus grande, puisque cela permettra plus de pénurie. L'augmentation de stock n'aura plus de signification dans ce cas.

3.7 Conclusion

Ce chapitre traite de la maintenance préventive de type âge combinée avec le stock de produits. Il comprend une amélioration d'un modèle mathématique en ce qui a trait aux

hypothèses. Dans ce modèle proposé, nous avons tenu à ce que le modèle mathématique reflète mieux le comportement d'un système de production réel. Les paramètres optimaux obtenus sont donc plus significatifs et plus réalistes.

Ce modèle a été divisé en plusieurs parties, chacune représentant un cas particulier de l'autre. Ainsi, on retrouve le cas de remplissage de stock, le cas de stock déjà rempli ainsi que deux cas de maintenance qui ont été traités séparément.

Nous avons effectué plusieurs tests de sensibilité sur le modèle développé pour permettre d'illustrer le comportement du modèle dépendamment de ses paramètres. Ainsi, nous avons mis plusieurs courbes montrant ce comportement d'interaction entre "S" et "T", ce qui nous permet de conclure qu'il est indispensable et nécessaire de traiter la combinaison de la stratégie de maintenance préventive avec la politique de stockage.

CHAPITRE 4

STRATÉGIE À PLUSIEURS SEUILS DE STOCK ET MAINTENANCE TYPE ÂGE

4.1 Introduction

Dans les systèmes manufacturiers, les stratégies de stockage de produits représentent un grand intérêt dans les systèmes de production qui ne se permettent pas d'avoir des pénuries de produits.

Le stock essaie de remédier au manque de disponibilité des machines et la maintenance préventive augmente cette disponibilité. Vu l'interaction entre les deux, ils ont été combinés dans une seule politique. Le principe de la stratégie à plusieurs seuils est le même que celui du seuil critique unique. Le taux de production est maintenu à son maximum lorsque le stock n'a pas atteint son seuil. Si le stock dépasse le seuil, la production doit cesser et si le stock atteint le seuil, le taux de production est maintenu au taux de la demande.

Le stock n'est nécessaire que pour se prémunir contre les pannes, mais avec la politique à seuil unique, le stock est toujours maintenu constant quel que soit l'âge de la machine, malgré que le risque de pannes ne soit pas constant. Il est en général croissant, suivant les distributions de probabilités choisies, ce qui rend le stock non nécessaire dans les temps où la machine est encore fiable. De ce fait, d'autres ont essayé de modifier le principe du modèle du seuil critique pour diminuer les gaspillages du modèle de base qui repose sur la maintenance préventive et le stock de sécurité. Ainsi Kenné et Gharbi (1999) ont introduit un troisième paramètre qui est l'âge afin de commencer à stocker et qui a l'avantage d'avoir un stock plus important, mais seulement lorsque la machine commence à vieillir.

Par ailleurs, Salameh et Ghattas (2001) ont remédié à ce problème de gaspillage en considérant que la maintenance préventive permet à la machine de rester opérationnelle le long de la période de production (pas de panne). De ce fait, la machine ne tombe pas en panne. Le stock qui résulte de cette politique est faible et reprend l'idée de stocker au besoin. Ainsi, on commence à stocker avec cette politique juste avant la maintenance préventive pour que le stock atteigne son niveau prédéterminé avec le début de la maintenance. Cette politique ne peut être adoptée parce qu'elle considère que la maintenance annule les risques de pannes, mais peut être appliquée dans le cas de machines très robustes ou qui ont un temps de réparation négligeable. Le modèle décrit dans ce chapitre donne une politique de stockage plus réaliste pour remédier au gaspillage et réagir au besoin.

Ce modèle permet de varier le niveau du stock suivant l'âge de la machine, ce qui est bénéfique pour la machine. Il lui permet, si c'est réalisable, de produire à une vitesse croissante non brusque.

Le but dans ce chapitre est de trouver une politique de stockage qui permet d'optimiser l'espace de stockage, ceci en stockant en fonction de l'âge de la machine puisque dans les cas où la machine est fiable avec l'ancienne stratégie, on pouvait accumuler un stock pour se prémunir contre les pannes sans que cela soit utile. Ce fait peut faire, du stock, une source de dépense non justifiée si la machine ne tombe que rarement en panne pour certaines valeurs d'âge. Ceci veut dire que dans les temps, après remise à neuf de la machine à long terme, le coût de stockage deviendra plus important que le coût de pénurie. Ainsi, cette méthode vise à trouver le meilleur compromis entre stockage et probabilité de pénurie.

Néanmoins, le modèle utilise la même structure de politique de production que les politiques à seuil unique. Le taux de production est défini comme suit :

$$U(x, \text{âge}) = \begin{cases} U_{mx} & \text{si } x < S(\text{âge}) \\ d & \text{si } x = S(\text{âge}) \\ 0 & \text{si } x > S(\text{âge}) \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce chapitre est présenté comme suit; la section 2 montre le modèle mathématique adopté et qui intègre des hypothèses simplificatrices telles que dans la littérature. Cette section a pour but de faire une comparaison entre ce modèle et la littérature. La section 3 reprend le modèle, mais en ignorant les hypothèses simplificatrices pour donner un modèle plus complet et sera aussi comparée avec le modèle du chapitre 3. La dernière section est une conclusion de ce chapitre.

4.2 Modèle avec pénurie non récupérable

Cette section est pour fin comparative avec la littérature. La première sous-section montre le modèle mathématique adopté. La sous-section 2 présente le problème à résoudre. La sous-section 3 aborde la méthode de calcul du stock optimal et de la période de maintenance préventive. La sous-section 4 donne une comparaison entre une politique à seuil critique avec maintenance de type âge et celle proposée dans ce chapitre.

4.2.1 Modélisation mathématique

Comme mentionné dans l'introduction du chapitre, le stockage de produits dans ce modèle devra être fait en fonction des besoins, ce qui veut dire que l'on augmente la valeur du stock que lorsqu'on a une augmentation du risque de pannes. De cela, l'inventaire doit être de plus en plus important lorsque l'âge est avancé. La figure 44 montre l'allure attendue du stock en fonction de l'âge.

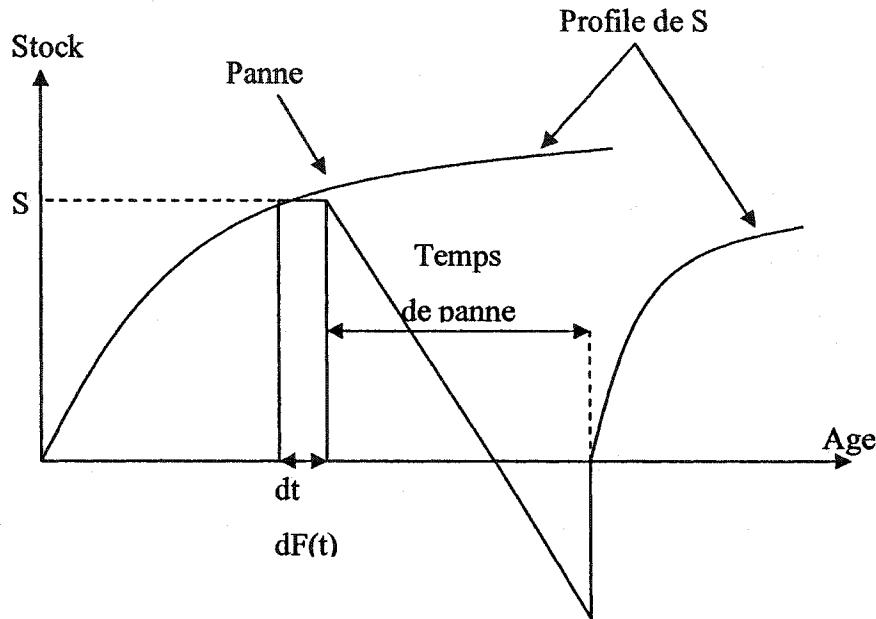


Figure 44 Panne à un instant t donné

Pour modéliser le coût, on procède à une modélisation pas à pas par rapport à l'âge, comme illustré sur la figure 44. Le coût de stockage sera représenté par la vie moyenne de l'équipement entre l'instant t et $t+dt$, multiplié par l'inventaire que l'on considère constant pendant cet intervalle. Ceci est représenté par l'équation (4.2). Lors d'une panne, le temps de réparation est aléatoire. Dans le cas où la panne n'excède pas le temps d'épuisement du stock, on ne produira pas jusqu'à ce que l'inventaire devienne nul, ce qui est considéré dans l'équation (4.3).

$$C^+ \cdot S(t) \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} R(t) \cdot dt \quad (4.2)$$

$$C^+ \cdot \frac{S(t)^2}{2 \cdot d} \quad (4.3)$$

Dans le cas où la panne excède le temps d'épuisement du stock, on calcule le coût dû à la demande non satisfaite (voir équation (4.4)). Le prochain cycle de maintenance commence par un stock nul. La demande non satisfaite est, dans ce cas, négligée.

$$C_p \cdot \int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S(t)}{d} \right) \cdot fr(x) dx \quad (4.4)$$

Dans l'intervalle dt , on aura une probabilité de panne $dF(t)$ qu'on doit multiplier par les surfaces dues aux pannes.

$$\int_{t}^{t+\Delta t} \left[C^+ \cdot \frac{S(t)^2}{2 \cdot d} + C_p \cdot \int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S(t)}{d} \right) \cdot fr(x) dx \right] \cdot dF(t) \quad (4.5)$$

Ainsi, la portion du coût à minimiser sur un intervalle de longueur dt sera exprimée dans l'équation (4.6).

$$\Delta(Sft) = C^+ \cdot S \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} R(t) \cdot dt + \Delta F(t) \cdot \left[C^+ \cdot \frac{S^2}{2 \cdot d} + C_p \cdot \int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S}{d} \right) \cdot fr(x) dx \right] \quad (4.6)$$

$$Sft(s, T) = \int_0^T C^+ \cdot S(t) \cdot R(t) \cdot dt + \int_0^T \left[C^+ \cdot \frac{S(t)^2}{2 \cdot d} + C_p \cdot \int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S(t)}{d} \right) \cdot fr(x) dx \right] \cdot dF(t) \quad (4.7)$$

Où $Sft(s, T)$ désigne la fonction totale sur un temps t . Nous présentons ci-après les conditions d'optimum du problème à résoudre.

4.2.2 Problème d'optimisation à résoudre

Comme mentionné ci-dessus, la fonction à minimiser est la différentielle de Sft . Ainsi, le but est de trouver l'inventaire S optimal correspondant à chaque intervalle $[t, t+dt]$. L'équation (4.8) est la fonction qui permet de donner le S optimal pour un âge donné.

$$\frac{\partial \Delta(Sft)}{\partial S} = C^+ \cdot \int_{t}^{t+\Delta} R(t) \cdot dt + \Delta F(t) \cdot \left[C^+ \cdot \frac{S}{d} + Cp \cdot \left[-\frac{S}{d} \cdot fr\left(\frac{S}{d}\right) - \frac{Rr\left(\frac{S}{d}\right)}{d} + \frac{S}{d} \cdot fr\left(\frac{S}{d}\right) \right] \right] \quad (4.8)$$

$$C^+ \cdot \int_{t}^{t+\Delta} R(t) \cdot dt + \Delta F(t) \cdot \left[C^+ \cdot \frac{S}{d} - Cp \cdot \frac{Rr\left(\frac{S}{d}\right)}{d} \right] = 0 \quad (4.9)$$

$$S - \frac{Cp}{C^+} \cdot R_r\left(\frac{S}{d}\right) = -\frac{d \cdot \int_{t}^{t+\Delta} R(t) \cdot dt}{\Delta F(t)} \quad (4.10)$$

Ainsi, le niveau du stock à l'instant "t" doit vérifier l'équation (4.10). Comme dans les chapitres 2 et 3, nous utilisons les méthodes numériques pour résoudre le problème d'optimisation posé.

4.2.3 Méthode de calcul

Dans le programme d'optimisation, on introduit les données du problème, les coûts de production, les coûts de maintenance (corrective ou préventive) et les distributions de probabilité de fonctionnement de la machine (dépendant de l'âge de la machine), de la réparation et de la maintenance préventive de la machine.

On fait varier, par la suite, la période de maintenance préventive d'une valeur minimale avec un pas prédéterminé. Pour chaque période, on fait une discréétisation à des intervalles dt .

Pour chaque valeur de "t", on calcule l'inventaire optimal qui minimise le coût de stockage et de pénuries. Ainsi, pour chaque valeur de période T , on calcule le coût correspondant tout en ayant les différents niveaux du stock sur l'intervalle T .

À la fin du programme, on choisit le coût minimal ainsi que la période et les stocks correspondants.

Les étapes d'optimisation déjà décrites, sont schématiquement expliquées sur la figure 45 ci-après.

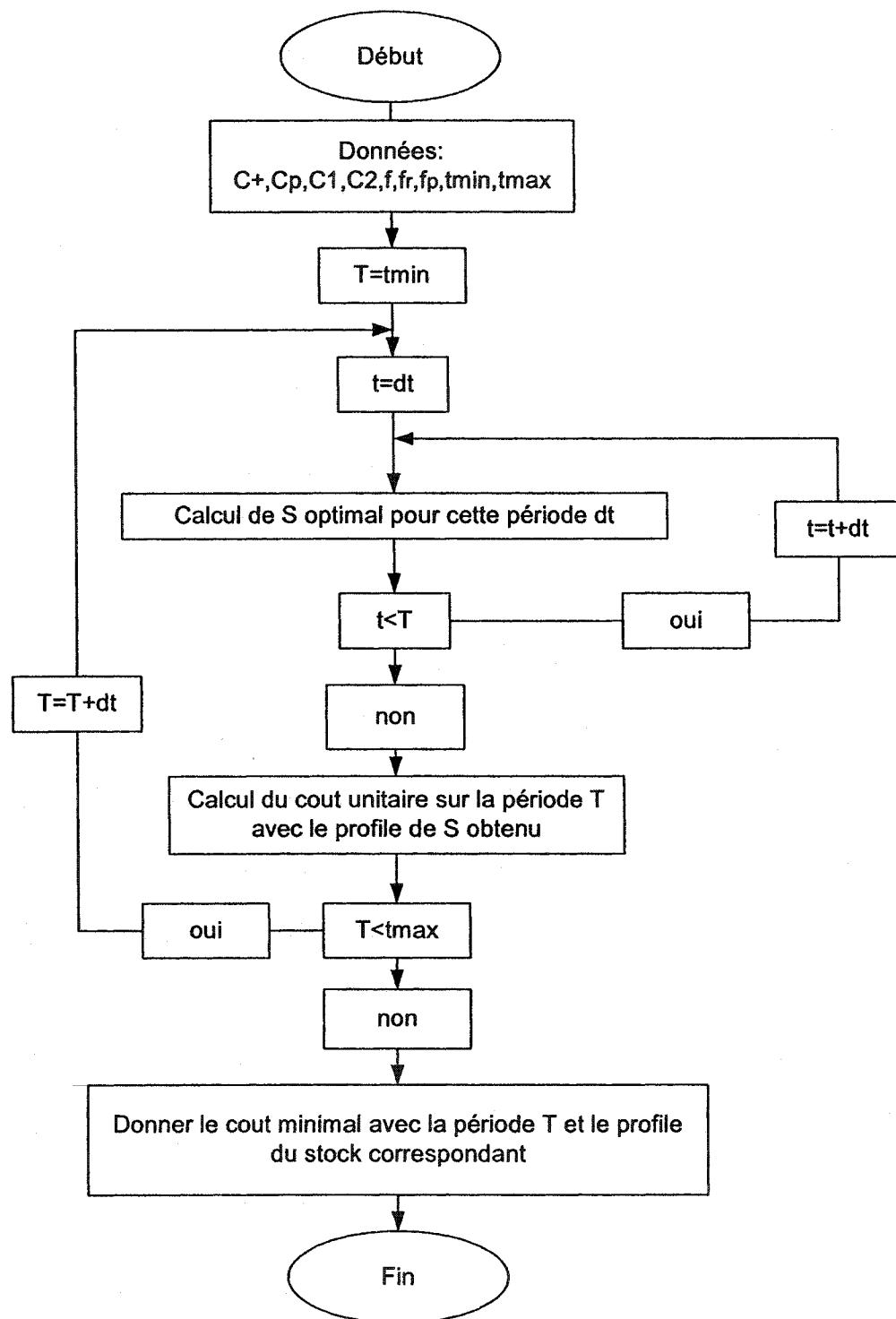


Figure 45 Algorithme d'optimisation du coût de production

4.2.4 Résultats numériques

Dans le tableau XII, nous présentons une comparaison entre la politique de maintenance type âge avec stock classique et la politique multiseuils proposée dans ce chapitre.

Dans le tableau XII, Sft est le coût total unitaire de la politique et scp est le coût de la politique à seuil unique utilisée dans Chelbi et Ait Kadi (2001).

Tableau XII

Comparaison entre le coût de la politique multi seuils et celui d'une politique standard

c1	c2	c ⁺	cp	sft	scp	Difference
2000	300	2	250	31,63	35,10	10,97%
2000	300	2	300	34,99	38,92	11,25%
2000	300	2	350	38,14	42,55	11,55%
2000	300	2	400	41,02	45,98	12,08%
2000	300	2	450	43,82	49,27	12,45%
2000	300	2	500	46,53	52,46	12,74%
2000	300	2	550	49,13	55,54	13,03%
2000	300	3	300	33,26	36,18	8,76%
2000	300	4	300	34,59	36,99	6,93%
2000	300	5	300	34,42	37,80	9,80%
2000	300	6	300	35,22	38,61	9,62%
2000	300	7	300	35,67	39,42	10,51%

On remarque que le coût de la politique à plusieurs seuils de stock en fonction de l'âge de la machine est toujours plus faible que celui de la politique dite classique. L'allure du stock de la politique proposée est présentée sur la figure 46, en utilisant :

$$U_{mx} = 1 \text{ pièce/U.T.}; \text{demande} = 0,5 \text{ pièce/U.T.}; C_1 = 2000; C_2 = 300; C^+ = 2; C_p = 300;$$

Avec Cp coût de pénurie par pièce :

- la distribution utilisée pour l'âge de la machine est de type Weibull avec un paramètre d'échelle de 100 et un coefficient de 2, ce qui donne un temps moyen de fonctionnement ou mttf de 88,6;

- la distribution utilisée pour modéliser la réparation de la machine est de type Log-normal, avec un temps moyen de réparation ou mttr de 20;
- la distribution pour modéliser la maintenance préventive de la machine est de type Log-normal, avec un temps moyen de maintenance ou mttp de 10.

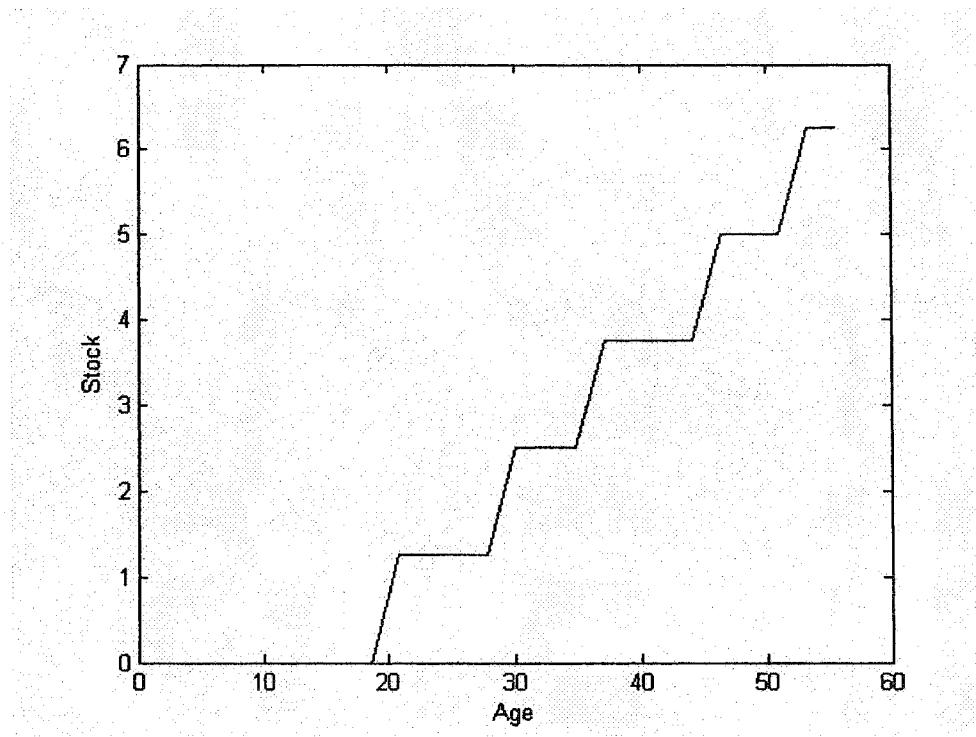


Figure 46 Seuils du stock selon l'âge de la machine

La figure 46 montre que lorsque l'âge de la machine est inférieur à 20, aucun stock de sécurité n'est requis. Plus l'âge augmente, on se rend compte, d'après cette figure, que l'inventaire de sécurité doit augmenter en paliers ou seuils.

On remarque que l'inventaire, en fonction de l'âge, est discret, en forme d'escalier, mais peut être continu comme sur la figure 44 si l'on diminue le pas du temps et du stock.

La stratégie de stockage dans ce cas est représentée dans le tableau XIII.

Avec les données précédentes, on trouve une période optimale de stockage de 55,6 unités de temps (U.T.) et un coût optimal de 34,99 \$/U.T.

Tableau XIII

Stratégie de stockage

âge	0-20	20-28,9	28,9-35,6	35,6-44,5	44,5-51,2	51,2-55,6
Stock	0	1,25	2,5	3,75	5	6,25

Dans cette comparaison, on remarque que la politique que nous proposons permet de plus grands niveaux de stock lorsqu'on s'approche du vieillissement de la machine, ce qui explique que le coût de la politique modélisée, dans ce chapitre, est plus faible. Ce résultat est lié au fait que le stockage des produits dépend de l'âge de la machine, ce qui évite tout surplus de stockage, surtout lorsque la machine est neuve (voir politique classique).

4.3 Modèle avec stock négatif

Le modèle qui a précédé a été modélisé pour fins de comparaison dans le but de valider notre approche. Dans l'amélioration qui suit, nous utilisons les mêmes hypothèses que celles des chapitres précédents.

Dans ce modèle, nous admettons les ruptures de stock et les clients doivent attendre dans ces situations pour satisfaction ultérieure (lorsque la machine est réparée).

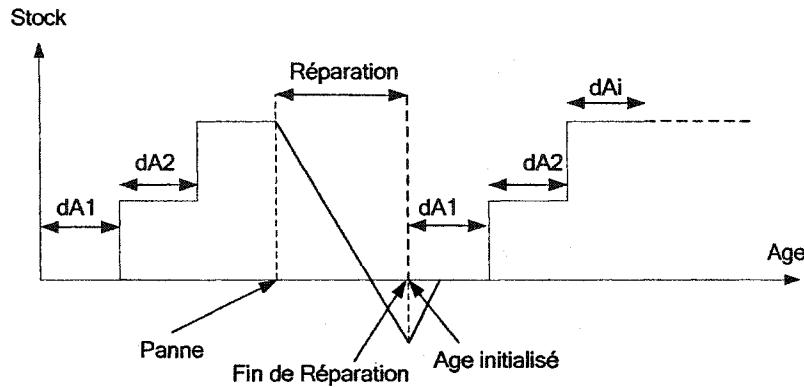


Figure 47 Représentation d'une panne engendrant une pénurie

La figure 47 montre la modification à ajouter au modèle pour tenir compte du fait que le client doit attendre lorsqu'il y a pénurie.

De plus, dans ce modèle, nous tenons compte également du fait que le niveau du stock doit être nul lorsque la machine est neuve, tel que montré à la figure 44. Suite à une réparation, si le niveau de stock est positif, on doit arrêter de produire pour ramener ce dernier à zéro et appliquer la politique de la figure 44. Nous illustrons une telle situation par la figure 48.

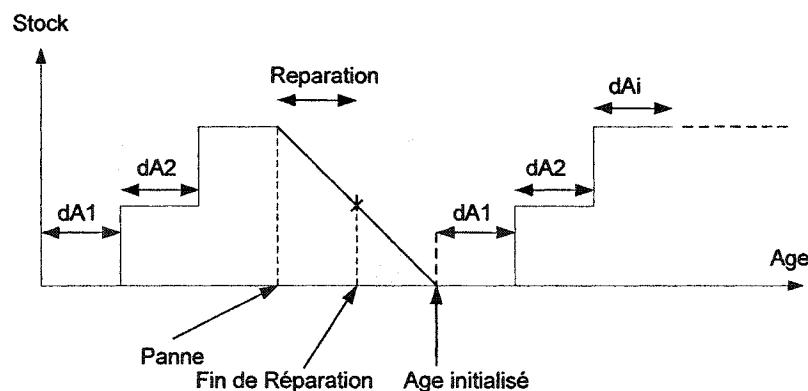


Figure 48 Comportement du stock dicté par la loi de commande

En résumé, suivant la loi de commande, le taux de production est fonction du stock, qui est fonction de l'âge de la machine. Lorsque la machine tombe en panne sans générer de pénurie et si l'on se retrouve avec un stock positif, la politique de production exige que l'inventaire de production soit nul jusqu'à un certain âge. De ce fait, suivant la loi de commande, le taux de production se maintient à zéro jusqu'à ce que l'inventaire devienne nul.

4.3.1 Modélisation mathématique et résolution des conditions d'optimum

Les équations concernant l'inventaire positif restent valables dans ce cas, mais dans le cas de pénurie, le coût sera représenté par l'équation (4.11).

$$C^- \cdot \left(\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S(t)}{d} \right) \cdot fr(x) dx \right)^2 \cdot d \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \quad (4.11)$$

Ainsi, le coût total sera donné avec l'équation (4.12) comme suit :

$$Sft(s, T) = \int_0^T \left[C^+ \cdot S(t) \cdot R(t) \cdot dt + \left[C^+ \cdot \frac{S(t)^2}{2d} + C^- \cdot \left(\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S(t)}{d} \right) \cdot fr(x) dx \right)^2 \cdot d \cdot \left(1 + \frac{d}{(Umx - d)} \right) \right] \cdot dF(t) \right] dt \quad (4.12)$$

La fonction à minimiser est représentée dans l'équation (4.12).

L'équation (4.14) est la fonction qui permet de donner les valeurs optimales du stock pour chaque tranche d'âge donnée.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta(Sft)}{\partial S} = & C^+ \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} R(t) \cdot dt + \\
 & \Delta F(t) \cdot \left[C^+ \cdot \frac{S}{d} + C^- \cdot \left[-\frac{S}{d} \cdot fr\left(\frac{S}{d}\right) - \frac{Rr\left(\frac{S}{d}\right)}{d} + \frac{S}{d} \cdot fr\left(\frac{S}{d}\right) \right] \right. \\
 & \left. \cdot \left[\left(\int_{\frac{S}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{S}{d} \right) \cdot f_r(x) \cdot dx \right) \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(U_{mx} - d)} \right) \right] \right] \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$C^+ \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} R(t) \cdot dt + \Delta F(t) \cdot \left[C^+ \cdot \frac{S}{d} - C^- \cdot \frac{Rr\left(\frac{S}{d}\right)}{d} \right] = 0 \quad (4.14)$$

$$s - 2 \cdot \frac{C^-}{C^+} \cdot R_r\left(\frac{s}{d}\right) \cdot \left[\int_{\frac{s}{d}}^{\infty} \left(x - \frac{s}{d} \right) \cdot f_r(x) \cdot dx \right] \cdot \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{(U_{mx} - d)} \right) = -\frac{d \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} R(t) \cdot dt}{\Delta F(t)} \quad (4.15)$$

En dérivant la fonction du coût, on obtient une équation (4.14) que doit vérifier le niveau du stock optimal à chaque instant t.

4.3.2 Analyse de sensibilité

Pour valider le modèle proposé, on procède à une analyse de sensibilité, suivie d'une comparaison avec le modèle du chapitre 3. Pour chaque coût, nous présentons un tableau des valeurs du seuil de stock avec la tranche d'âge correspondante.

Ainsi, chaque colonne contient la valeur de l'âge jusqu'auquel on maintient un stock donné par la case qui lui correspond.

4.3.2.1 Analyse de sensibilité (variation du coût de stockage)

Dans le tableau XIV, on fait varier le coût de stockage pour illustrer son effet sur le comportement du stock et de la période de maintenance.

Tableau XIV

Niveaux de stocks avec variation du coût de stockage

C1	C2	C+	C-	Topt							
5000	3000	1	50	134	Âge	5,3	10,7	16,0	21,4	26,7	37,4
				S	Seuil	0,0	3,2	4,2	5,3	6,3	7,4
5000	3000	2	50	124	Âge	5,0	9,9	14,9	19,8	29,8	39,7
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3
5000	3000	3	50	105	Âge	8,4	12,6	21,0	29,4	42,0	63,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3
5000	3000	4	50	115	Âge	13,7	18,3	27,5	36,6	55,0	87,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3
5000	3000	5	50	105	Âge	16,8	21,0	33,6	50,4	71,4	105,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3
5000	3000	6	50	96	Âge	19,1	26,7	38,2	57,3	95,5	
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	
5000	3000	7	50	96	Âge	22,9	30,6	45,8	68,8	95,5	
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	

Dans le tableau XIV, on remarque que lorsqu'on fait varier le coût de stockage, on a deux cas :

- la période de maintenance préventive diminue à cause de la diminution du stock qui cause un risque de pénurie;
- la période ne varie pas, mais les premiers intervalles sont plus grands, ce qui permet de faire une plus grande économie de coût de stockage sans avoir un gros risque de pénurie.

Une illustration graphique de quelques exemples de ce tableau a été représentée dans la figure 49.

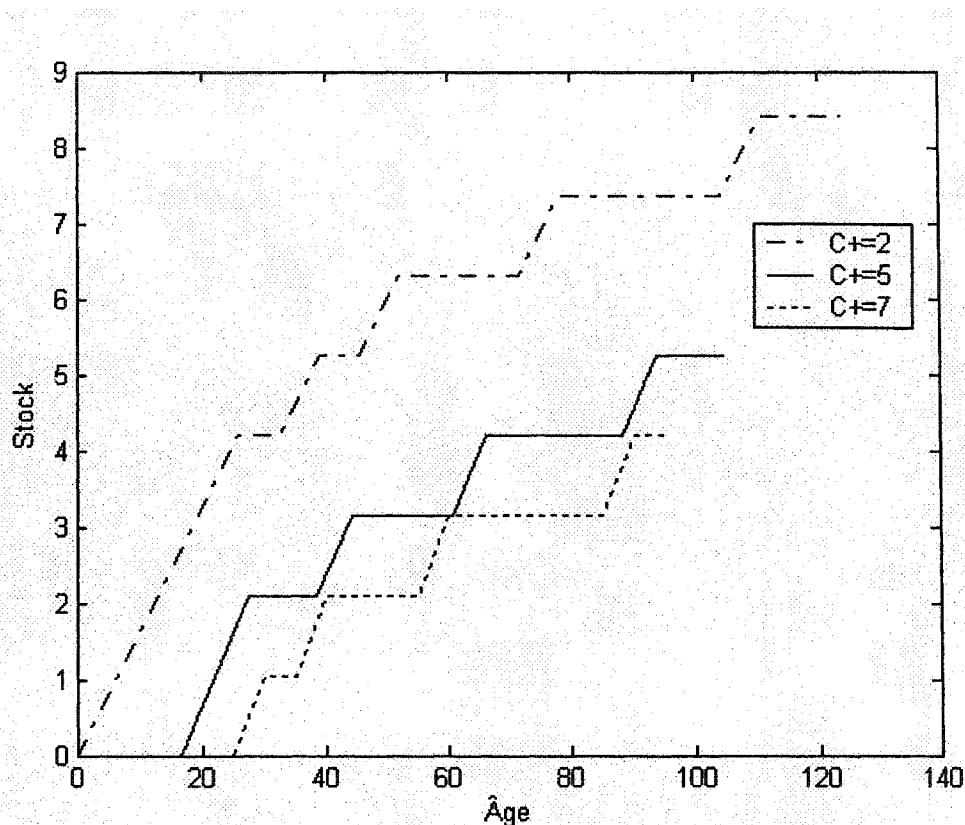


Figure 49 Politique optimale de stockage pour différents coûts de stockage

La figure 49 montre la différence entre les niveaux des seuils du stock en fonction des coûts de stockage. Ainsi, lorsque le coût de stockage diminue, on se permet de stocker plus de pièces.

4.3.2.2 Analyse de sensibilité (variation du coût de pénurie)

Dans le cas du tableau XV, on procède à une variation du coût de pénurie pour dégager son effet sur les valeurs des niveaux de stock et de la période optimale de maintenance.

Tableau XV
Niveaux de stock et variation du coût de pénurie

C1	C2	C+	C-	Topt								
5000	3000	5	20	105	Âge	37,8	54,6	105,0				
					Seuil	0,0	1,1	2,1				
5000	3000	5	25	124	Âge	29,8	44,6	64,5	124,0			
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2			
5000	3000	5	30	105	Âge	25,2	37,8	54,6	105,0			
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2			
5000	3000	5	35	115	Âge	22,9	32,1	45,8	68,7	114,5		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2		
5000	3000	5	40	105	Âge	21,0	25,2	42,0	63,0	105,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2		
5000	3000	5	50	105	Âge	16,8	21,0	33,6	50,4	71,4	105,0	
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	
5000	3000	5	60	115	Âge	13,7	18,3	27,5	41,2	59,5	87,0	114,5
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	3000	5	70	96	Âge	11,5	15,3	22,9	34,4	49,7	95,5	
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	
5000	3000	5	80	96	Âge	11,5	15,3	19,1	30,6	45,8	64,9	95,5
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	3000	5	90	105	Âge	8,4	12,6	16,8	25,2	37,8	58,8	105,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	3000	5	100	105	Âge	8,4	12,6	16,8	25,2	33,6	50,4	75,6
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	3000	5	130	96	Âge	7,6	11,5	19,1	26,7	38,2	57,3	95,5
					Seuil	0,0	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3	7,4
5000	3000	5	160	96	Âge	3,8	7,6	11,5	15,3	22,9	30,6	45,8
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3

Dans le tableau XV, lorsqu'on fait varier le coût de pénurie, on a un plus grand coût qui résulte des pénuries. On remarque donc que le modèle, dans certains cas, augmente la fréquence de maintenance préventive et dans d'autres, il augmente la valeur du seuil du stock. La figure 50 nous permet de visualiser l'effet des variations du coût de pénurie sur les niveaux de stock.

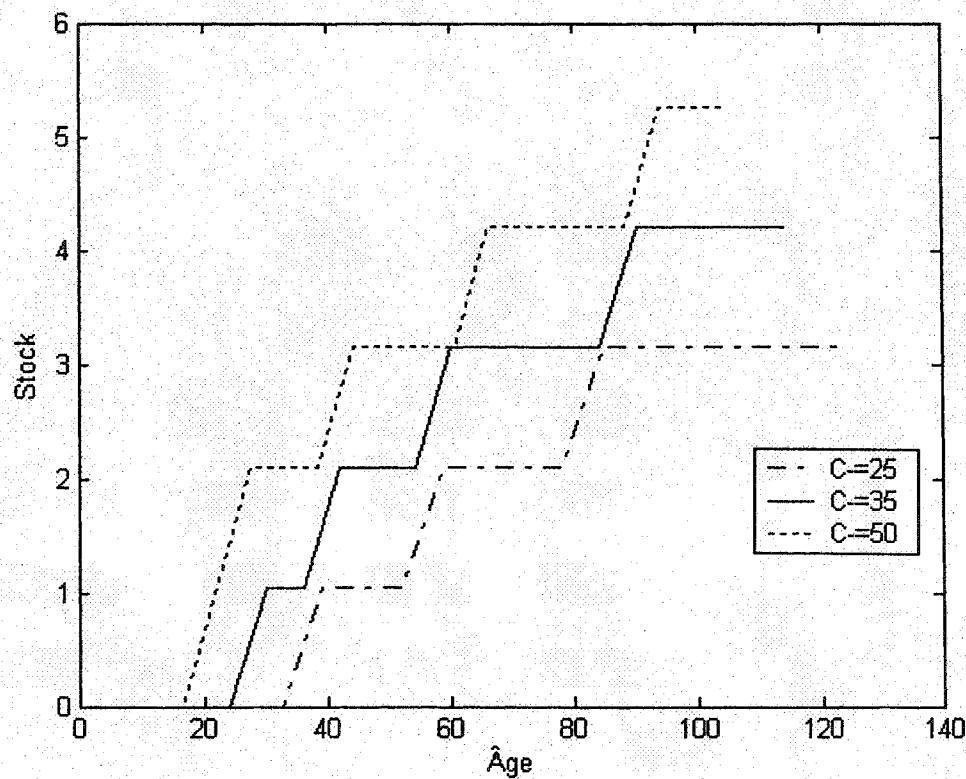


Figure 50 Politique optimale de stockage pour différents coûts de pénurie

La figure 50 montre que plus le coût de pénurie de stock augmente, plus l'inventaire doit être élevé. Aussi, le stockage commence plus tôt par rapport à l'âge de la machine lorsque le coût de pénurie augmente.

4.3.2.3 Analyse de sensibilité (variation du coût de maintenance corrective)

Dans le tableau XVI, on fait varier le coût de maintenance corrective pour obtenir son influence sur le coût total et sur la période optimale de maintenance préventive.

Tableau XVI

Niveaux de stock avec la variation du coût de maintenance corrective

C1	C2	C+	C-	Topt	cout								
				153	Âge	18,3	24,4	30,5	48,8	73,2	109,8	152,5	
3000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3	
				153	Âge	18,3	24,4	30,5	48,8	73,2	109,8	152,5	
4000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3	
				105	Âge	16,8	21,0	33,6	50,4	71,4	105,0		
5000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3		
				86	Âge	17,2	20,6	31,0	48,2	86,0			
6000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2			
				77	Âge	15,3	21,4	33,7	49,0	76,5			
7000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2			
				77	Âge	15,3	21,4	33,7	49,0	76,5			
8000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2			
				67	Âge	16,1	21,4	32,2	48,2	67,0			
9000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2			
				58	Âge	16,1	23,0	32,2	57,5				
10000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2				
				58	Âge	16,1	23,0	32,2	57,5				
11000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2				
				58	Âge	16,1	23,0	32,2	57,5				
12000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2				
				48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0				
13000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2				
				48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0				
14000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2				
				48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0				
15000	3000	5	50		Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2				

Tableau XVI (suite)

10000	3000	5	50	58	Âge	16,1	23,0	32,2	57,5		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
11000	3000	5	50	58	Âge	16,1	23,0	32,2	57,5		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
12000	3000	5	50	58	Âge	16,1	23,0	32,2	57,5		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
13000	3000	5	50	48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
14000	3000	5	50	48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
15000	3000	5	50	48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
16000	3000	5	50	48	Âge	15,4	21,1	32,6	48,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2		
17000	3000	5	50	39	Âge	15,4	21,6	38,5			
					Seuil	0,0	1,1	2,1			
18000	3000	5	50	39	Âge	15,4	21,6	38,5			
					Seuil	0,0	1,1	2,1			
19000	3000	5	50	39	Âge	15,4	21,6	38,5			
					Seuil	0,0	1,1	2,1			

La variation du coût de maintenance corrective influe sur la période de maintenance préventive qui se fait plus fréquemment à chaque augmentation du coût de maintenance préventive, ceci pour éviter de générer un plus gros coût de maintenance corrective.

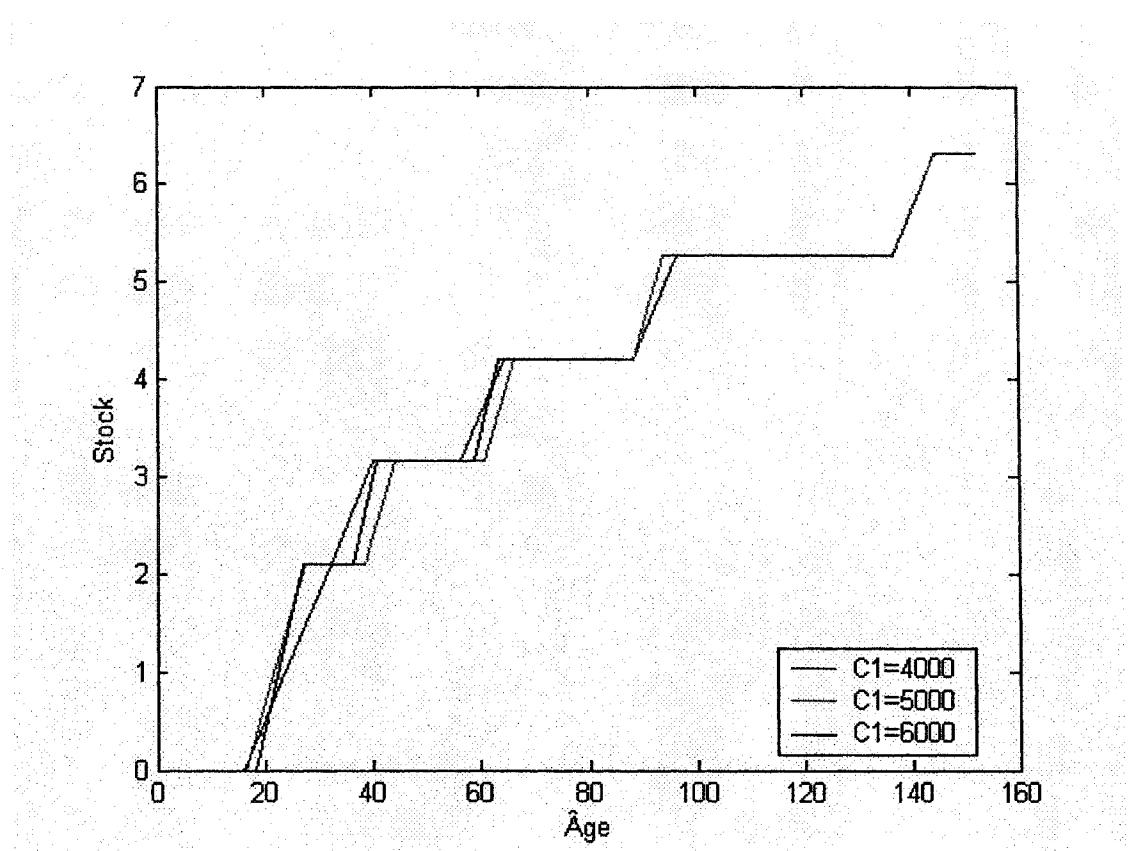


Figure 51 Politique optimale de stockage pour différents coûts de maintenance corrective

La figure 51 montre l'effet du coût de maintenance corrective sur la période optimale de maintenance. Cette période influence à son tour le niveau de stock.

4.3.2.4 Analyse de sensibilité (variation du coût de maintenance préventive)

Dans le tableau XVII, on étudie l'influence du coût de la maintenance préventive sur le comportement du modèle (coût optimal et période de maintenance préventive optimale).

Tableau XVII

Niveaux de l'inventaire avec la variation du coût de maintenance préventive

C1	C2	C+	C-	Topt								
5000	1000	5	50	39	Âge	15,4	21,6	38,5				
					Seuil	0,0	1,1	2,1				
5000	2000	5	50	67	Âge	16,1	21,4	32,2	48,2	67,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2		
5000	2200	5	50	77	Âge	15,3	21,4	33,7	49,0	76,5		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2		
5000	2500	5	50	86	Âge	17,2	20,6	31,0	48,2	86,0		
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2		
5000	3000	5	50	105	Âge	16,8	21,0	33,6	50,4	71,4	105,0	
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	
5000	4000	5	50	153	Âge	18,3	24,4	30,5	48,8	73,2	109,8	152,5
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	5000	5	50	200	Âge	16,0	24,0	32,0	48,0	72,0	104,0	200,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	6000	5	50	200	Âge	16,0	24,0	32,0	48,0	72,0	104,0	200,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	7000	5	50	200	Âge	16,0	24,0	32,0	48,0	72,0	104,0	200,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	8000	5	50	200	Âge	16,0	24,0	32,0	48,0	72,0	104,0	200,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3
5000	9000	5	50	200	Âge	16,0	24,0	32,0	48,0	72,0	104,0	200,0
					Seuil	0,0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3

D'après le tableau XVII, l'augmentation du coût de la maintenance préventive fait diminuer la fréquence de maintenance préventive et augmente le seuil de stock puisque le risque de pénurie augmente. Nous illustrons graphiquement ce comportement par la figure 52 ci-dessous.

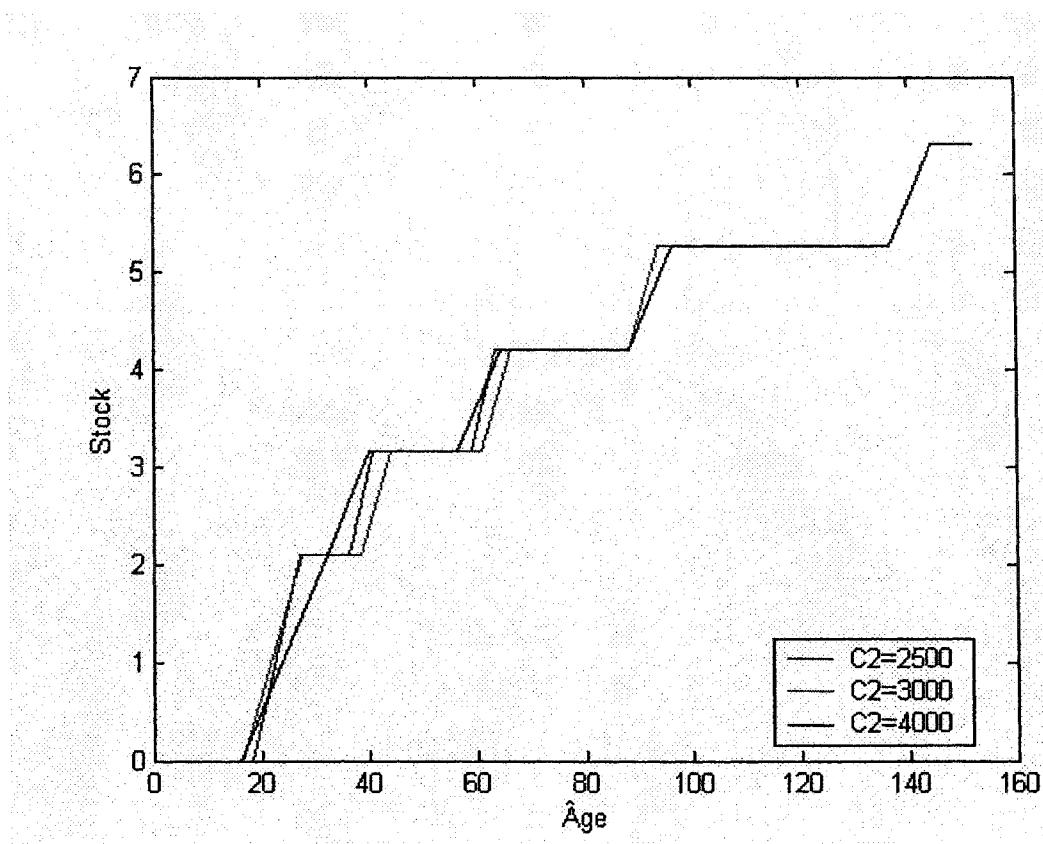


Figure 52 Politique optimale de stockage pour différents coûts de maintenance préventive

La figure 52 montre que le coût de maintenance préventive influe sur la fréquence de la maintenance qui engendre une influence sur le niveau de stock.

4.3.3 Comparaison entre une politique à seuil unique et la politique à plusieurs seuils

Le tableau XVIII montre l'amélioration du coût de production lorsqu'on adopte une politique à plusieurs seuils, comparé avec la politique à seuil unique du chapitre 3.

Le tableau montre qu'il y a une amélioration allant de 15 % à 37 % pour le cas considéré.

La valeur **cout_sft** représente le coût de la politique à seuil variable et la valeur **cout_s_fixe** représente le coût de la politique à seuil fixe.

Tableau XVIII

Comparaison de la politique à seuil fixe avec le modèle proposé

C1	C2	C+	C-	cout_sft	cout_s_fixe	amélioration(%)
5000	3000	1	50	58.68	72.828	19.43%
5000	3000	2	50	61.76	77.32	20.13%
5000	3000	3	50	63.75	81.053	21.35%
5000	3000	4	50	64.67	84.248	23.24%
5000	3000	5	50	65.10	87.02	25.18%
5000	3000	6	50	65.53	89.434	26.73%
5000	3000	7	50	65.18	91.538	28.79%
5000	3000	5	20	56.08	78.882	28.90%
5000	3000	5	25	58.01	81.102	28.48%
5000	3000	5	30	59.50	82.661	28.01%
5000	3000	5	35	61.27	83.968	27.03%
5000	3000	5	40	62.53	85.105	26.52%
5000	3000	5	50	65.10	87.02	25.18%
5000	3000	5	60	67.46	88.613	23.87%
5000	3000	5	70	69.44	89.987	22.83%
5000	3000	5	80	71.04	91.198	22.11%
5000	3000	5	90	72.95	92.292	20.95%
5000	3000	5	100	74.26	93.295	20.41%

Tableau XVIII (suite)

3000	3000	5	50	47.13	70.449	33.10%
4000	3000	5	50	56.62	79.37	28.67%
5000	3000	5	50	65.10	87.02	25.18%
6000	3000	5	50	72.85	93.821	22.35%
7000	3000	5	50	79.62	100	20.38%
8000	3000	5	50	86.00	105.71	18.65%
9000	3000	5	50	91.77	111.04	17.36%
10000	3000	5	50	96.88	116.06	16.53%
11000	3000	5	50	101.91	120.8	15.64%
5000	1000	5	50	43.88	56.327	22.09%
5000	2000	5	50	58.71	75.162	21.88%
5001	2200	5	50	60.44	77.908	22.42%
5000	3000	5	50	65.10	87.02	25.18%
5000	4000	5	50	67.13	95.412	29.64%
5000	5000	5	50	67.93	101.5	33.07%
5000	6000	5	50	68.12	105.88	35.66%
5000	7000	5	50	68.31	108.92	37.29%

Ce tableau montre que le coût total de production de la politique à multiseuils est plus faible par rapport à celui de la politique à seuil unique utilisé.

4.3.4 Comportement asymptotique du modèle

Pour dégager un comportement asymptotique du stock par rapport à l'âge, nous avons enlevé la maintenance préventive, car celle-ci remet l'âge de la machine à zéro à chaque intervention.

Dans la figure 53, on montre graphiquement le comportement du modèle lorsqu'on ne fait pas de maintenance préventive.

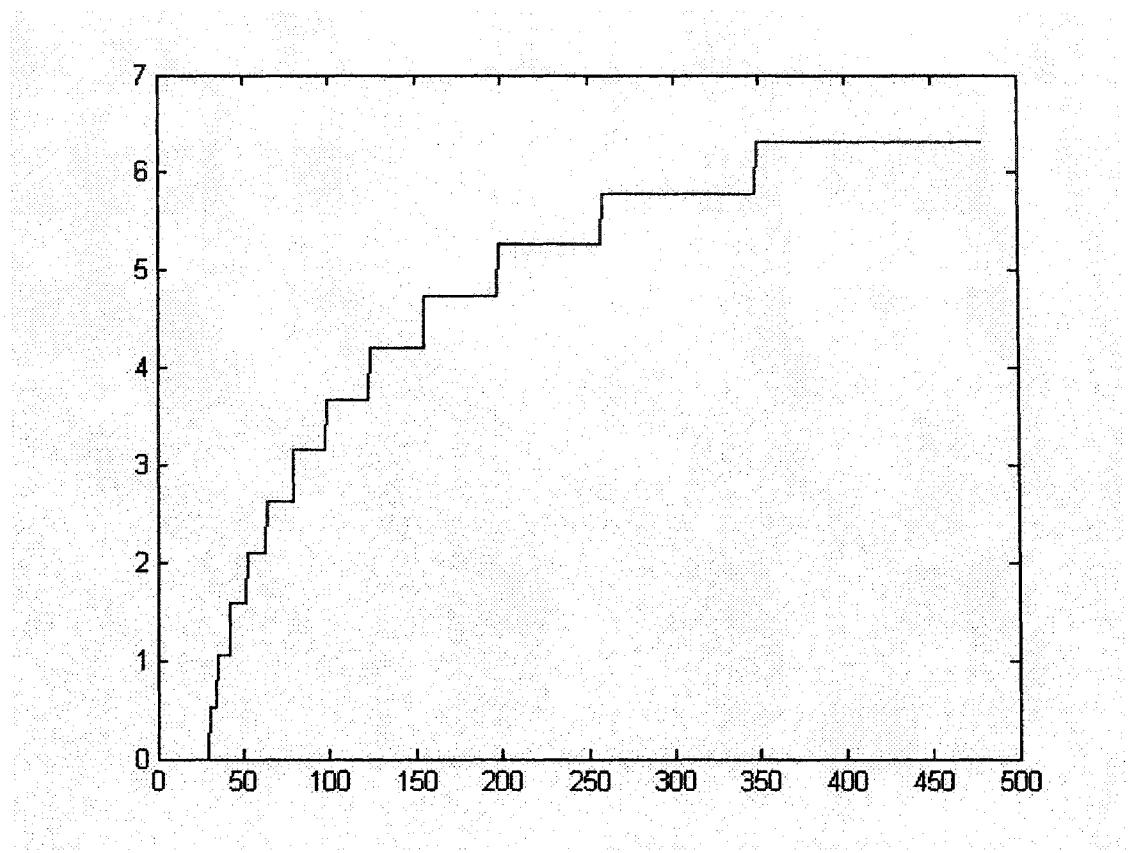


Figure 53 Stratégie à multiples seuils sans maintenance préventive

On remarque, dans la figure 53, que lorsque la machine devient âgée, l'inventaire ne varie plus, ce qui confirme la tendance qu'on doit maintenir un grand stock pour des âges très avancés. Pour l'exemple considéré, la valeur de 500 en âge correspond à l'infini puisque la probabilité que la machine survive jusqu'à cet âge est nulle. Ainsi, on remarque que l'inventaire est maintenu à une valeur constante.

Nous présentons la politique optimale de production dans le cas général (stockage et maintenance préventive) à la section suivante.

4.3.5 Commande du modèle

Pour le modèle proposé, la commande à adopter est la même que les modèles à seuil unique (hedging point), sauf que la valeur du stock devient dans ce cas un vecteur de différentes valeurs du stock $S_j, (j=1,2,\dots)$ qui correspondent chacune à un intervalle d'âge représenté par a_i .

Ainsi, on peut représenter le taux de production comme une matrice, dont les éléments sont donnés par :

$$U_j^i = \begin{cases} U_{mx} & \text{si } x < S_j \text{ et } age \in a_i \\ d & \text{si } x = S_j \text{ et } age \in a_i \\ 0 & \text{si } x > S_j \text{ et } age \in a_i \end{cases} \quad (4.16)$$

Avec le tableau XIX des stocks et âges correspondants :

Tableau XIX
Représentation des seuils et leurs âges

âge	a_1	a_2	.	.	a_i	.	.	a_n
Stock	S_1	S_2	.	.	S_j	.	.	S_n

Ainsi, si l'on prend le cas où $C_1=5000$, $C_2=3000$, $C^-=50$, $C^+=2$, on aura le tableau contenant le vecteur des seuils du stock et leurs âges respectifs (tableau XX) :

Tableau XX

Représentation du vecteur des valeurs des seuils avec leurs intervalles respectives suivant les données précédentes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ai	[0 5]	[5 10]	[10 15]	[15 20]	[20 30]	[30 40]	[40 60]	[60 84]	[84 124]
Sj	0	1,1	2,1	3,2	4,2	5,3	6,3	7,4	8,4

Avec le tableau XX, la politique de production donnée par l'équation (4.16) peut être représentée par la matrice de production suivante :

Matrice de commande

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
s1	d	Umx							
s2	0	d	Umx						
s3	0	0	d	Umx	Umx	Umx	Umx	Umx	Umx
s4	0	0	0	d	Umx	Umx	Umx	Umx	Umx
s5	0	0	0	0	d	Umx	Umx	Umx	Umx
s6	0	0	0	0	0	d	Umx	Umx	Umx
s7	0	0	0	0	0	0	d	Umx	Umx
s8	0	0	0	0	0	0	0	d	Umx
s9	0	0	0	0	0	0	0	0	d

L'implantation en temps réel de la politique proposée dépend donc de Si et ai avec les valeurs données par la matrice précédente. Nous avons alors montré comment définir la politique de production dans un contexte multiseuils.

4.4 Conclusion

La politique présentée dans ce chapitre combine la maintenance préventive de type âge avec une politique à plusieurs seuils. Elle remédié au gaspillage dans le stockage. Elle a

l'avantage de ne diminuer l'exposition du stock à d'éventuels surtout si l'inventaire est périssable (aliment, etc.). Cette politique permet aussi d'optimiser l'utilisation du stock et de diminuer les coûts résultant des risques des pénuries. Une telle politique se résume à un stockage au besoin. De plus, on n'est pas restreints à une distribution de probabilités donnée.

La comparaison de cette politique avec une politique à stock unique et maintenance préventive permet de montrer que cette politique est plus économique et plus pratique du fait que l'inventaire se fait au besoin et son niveau augmente avec les risques de pannes. Dans cette comparaison, la politique à seuils multiples peut permettre de plus grands stocks lorsqu'on s'approche du vieillissement de la machine, ce qui ne peut pas être permis par une politique à seuil critique unique. Ce qui explique le fait que le coût de la politique proposée est plus faible que celui de la politique à seuil unique. L'inventaire se trouve optimal à chaque instant, contrairement à la politique à stock unique, ce qui ne permet pas de stocker de grands niveaux d'inventaires. Le système se trouve avec un stock plus faible que nécessaire à l'âge avancé de la machine pour la politique à seuil unique. Rappelons qu'en principe, la politique qui combine l'inventaire et la maintenance est faite pour remédier aux situations de pannes, ou autrement lorsque l'âge de la machine devient avancé ou critique. Ce but est atteint avec la politique à plusieurs seuils proposée. Avec la comparaison faite dans ce chapitre, on obtient des résultats intéressants, ce qui confirme que l'inventaire doit dépendre de l'âge de la machine. On remarque que la politique est encore plus avantageuse lorsque le risque de panne est plus grand.

Pour implanter en pratique cette politique, il suffit d'implanter en mémoire de la machine les valeurs de la matrice de commande. Néanmoins, l'équation de la commande peut être facilement interprétable si les variations du stock et de l'âge étaient fixes. On aurait une loi plus facile à implanter, ce qui peut être continué dans des travaux futurs, qui pourront développer des solutions sous optimales en se basant sur les résultats que

nous présentons, étant donné que la façon de présenter l'algorithme ne permet pas de fixer les pas de l'âge et du niveau du stock puisque l'approche numérique proposée n'est pas une discrétisation classique des variables reliées, au point de vue du stock et de la période de maintenance préventive, mais plutôt sur une discrétisation de la période avec un niveau de stock qui est déterminé par les conditions optimum.

La procédure heuristique résultante pourra être basée sur une variation du stock et de l'âge constant. Toutefois, l'élévation du coût donné par cette procédure heuristique doit être justifiée par l'aisance d'implantation et de gestion, sinon l'heuristique ne peut être abordée. De plus, on pourrait adopter la résolution par simulation, ce qui pourrait être plus aisé à résoudre.

Il serait également intéressant, comme extension à ce travail, d'introduire une contrainte supplémentaire qui est la disponibilité puisque pour respecter une certaine disponibilité, on est obligés d'augmenter la période de maintenance et cette politique est plus efficace lorsqu'on a de grandes périodes de maintenance préventive, ce qui implique de grands risques de pannes.

Ainsi, cette politique ouvre la porte à l'introduction d'autres paramètres de décision.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le mémoire traite de la planification de la production et des stratégies de maintenance des systèmes de production. On a traité la combinaison de la maintenance préventive de type âge et de type bloc avec la politique de stockage. Le mémoire comprend une amélioration de deux modèles mathématiques et un troisième modèle qui donne une différente façon de gérer le stock. En ce qui a trait aux hypothèses, dans ces modèles proposés, nous avons tenu à ce que leurs modèles mathématiques reflètent mieux le comportement d'un système de production réel. Les paramètres optimaux obtenus sont donc plus significatifs et plus réalistes.

Ces modèles ont été divisés en plusieurs parties, chacune représentant un cas particulier de l'autre. Ainsi, on retrouve le cas de remplissage de stock, le cas de stock déjà rempli ainsi que deux cas de maintenance qui ont été traités séparément (corrective et préventive).

Nous avons effectué plusieurs analyses de sensibilité sur les modèles développés pour permettre d'illustrer le comportement du modèle dépendamment de ses paramètres. Ainsi, nous avons mis plusieurs courbes montrant ce comportement d'interaction entre le niveau du stock et de la période de maintenance, ce qui nous permet de conclure qu'il est indispensable et nécessaire de traiter la combinaison de la stratégie de maintenance préventive avec la politique de stockage.

En ce qui concerne le troisième modèle, on montre que notre politique est plus efficace à utiliser le stock puisque avec sa politique à plusieurs seuils dépendant de l'âge de la machine, elle remédie au gaspillage dans le stockage. Elle a l'avantage de diminuer l'exposition du stock à d'éventuels problèmes, surtout si l'inventaire est périssable (aliment, etc.). Une telle politique se résume à un stockage au besoin.

Aussi on a procédé à une comparaison de cette troisième politique avec une politique à stock unique et maintenance préventive, ce qui nous a permis de montrer que cette politique est plus économique et plus pratique du fait que l'inventaire se fait au besoin et son niveau augmente avec les risques de pannes.

Avec la comparaison faite dans cette recherche, on obtient des résultats intéressants avec une amélioration de 19 % à 30 % du coût de production, ce qui confirme que lorsque l'inventaire dépend de l'âge de la machine, la politique devient plus efficace.

ANNEXE 1

**PROGRAMME D'ÉVALUATION DU STOCK ET DE LA PÉRIODE DE
MAINTENANCE PRÉVENTIVE DE TYPE BLOC**

```

function
[x,y,Per,St,p]=nagjpk2ppp(U,demande,Lname,Rname,Pname,fdist,cost,Smin,Smax,mttr,
mttp,ds,Tmax,dt)

%
nagjpk2p(U,demande,Lnam,Rnam,Pnam,fdist,cost,Smin,Smax,mttf,Mttr,Mttp,dS,T
max,dt)

% 19/06/2003

% U:taux maximal de production
% demande:taux de demande
% Lnam:nom de la distribution liée a la vie de la machine
% Rnam:nom de la distribution liée au temps de la reparation de la machine
% Pnam:nom de la distribution liée au temps de la maintenance preventive
% fdist:parametre des distribution tel que chaque ligne contient les parametres d'une
distribution
% cost:cout de maintenance corrective preventive de stockage et de penurie
% Smin:le niveau de stock minimale avec lequel on doit commencer
% Smax:le niveau de stock maximale avec lequel on croit s'arreter
% Mttf:temps moyen jusqu a la panne
% Mttr:temps moyen jusqu a reparation
% Mttp:temps moyen jusqu a la maintenance preventive soit fini
% dS:precision des integrales
% dt:pas de periode
% Tmax:periode maximale
%
%exp.:
%-----
% U=2;demande=1.65;fdist=[1/100,2;log(10)-1/2*1^2,1;log(2)-
1/2*.4^2,.4];cost=[4000,1000,1,30];

```

```

%
Lname='weib';Rname='logn';Pname='logn';Smin=0;Smax=30;mttr=10;mttp=2;dt=1;
ds=1e3;Tmax=200;
%
%
[x,y,Per,St,p]=nagjpk2ppp(U,demande,Lname,Rname,Pname,fdist,cost,Smin,Smax,
mttr,mttp,ds,Tmax,dt);
tic;
Umx=U;
d=demande;
if (size(fd़ist,2)<3); fdist(:,3)=0;end
a11=fd़ist(1,1);a12=fd़ist(1,2);a13=fd़ist(1,3);
a21=fd़ist(2,1);a22=fd़ist(2,2);a23=fd़ist(2,3);
a31=fd़ist(3,1);a32=fd़ist(3,2);a33=fd़ist(3,3);
mc=cost(1);mp=cost(2);
cs=cost(3);cp=cost(4);
%
%
%
sinc=1;
couttgl=zeros(length(Smin:sinc:Smax),length((Smin+1)/(Umx-d):dt:Tmax));
%%%%%%%%%%%%%
if ( (Smax+1)/(Umx-d) ) >= Tmax%%%%%
Smax=Tmax*(Umx-d)-1;%%%%%%%%%%%%%
end%%%%%%%%%%%%%
kk=0;
for s=Smin:sinc:Smax
    kk=kk+1;
    Tmin=(s+1)/(Umx-d);

```

```

hh=0;
moraja3a=1-cdf_m(Rname,s/d,a21,a22,a23);
moraja3a_p=1-cdf_m(Pname,s/d,a31,a32,a33);

for t=Tmax:-dt:Tmin
hh=hh+1;
%%%%%%%%%%%%%
dSmx=s/ds;%%%%%%%%%%%%%
i=[0:s/ds:s];%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%
if hh==1
% calcul des temps moyen pour faire une maintenance lorsque le stock est nul
I1=sum((i)/d.*pdf_m(Pname,(i)./d,a31,a32,a33)*s/ds/d);
% probabilité que la machine tombe en panne
J1=cdf_m(Pname,s/d,a31,a32,a33);
end

if dSmx==0
I2=0;J2=0;
else
if hh==1
% calcul des temps moyen pour faire une reparation lorsque le stock est nul
I2=cumsum((i)/d.*pdf_m(Rname,(i)./d,a21,a22,a23)*s/ds/d);

% probabilité que la machine tombe en panne
J2=cdf_m(Rname,i/d,a21,a22,a23);
end
end

```

```

if hh==1
    % calcul du cout d inventaire avant d atteindre S*
    tt=[0:s/(Umx-d)/1e+3:s/(Umx-d)];
    if dSmx==0;
        j=1;
    else
        j=( (tt*(Umx-d)/dSmx)<ds ).*( round(tt*(Umx-d)/dSmx)+1 )+( (tt*(Umx-d)/dSmx)>=ds )*(ds);
    end
    tmw2=I2(j);
    Fw2=J2(j);

    sm1 = (1+(Umx-d)/d)*(Umx-d)*tt.^2;
    gt = sm1*cs+cp*(1+d/(Umx-d))*d/2*(mttr-tmw2).^2;

Cout_avant_S = sum(gt.*pdf_m(Lname,tt,a11,a12,a13)*s/(Umx-d)/1e+3)+cs*(1-cdf_m(Lname,s/(Umx-d),a11,a12,a13))*s/(Umx-d)*s/2;
end

%%%%%%%%%%%%%
renn=0;
if t>=295
    renn=renouv(Lname,t,a11,a12,a13);%%
end
ren=.1034*(t/100)^4-.6152*(t/100)^3+1.3162*(t/100)^2-.0522*(t/100); %
approximation

```

```

ren=(t<295)*( (ren<=0)*0 + (ren>0)*ren) +(t>=295)*renn;
%&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&%%%%%%

```

```

% cout de stockage et de penurie lorsque le stock est deja bati
%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%

```

```

if dSmx==0;
j = 1;
else
j = ((s/dSmx)<ds).*(round(s/dSmx)+1)+((s/dSmx)>=ds)*(ds) ;
end
tmw2 = I2(j) ;
Fw2 = J2(j) ;

```

```

sm2 = tmw2*d;

```

```

Cout_apres_S = ren * cp*(1+d/(Umx-d))*d/2*(mttr-tmw2-s/d*moraja3a)^2 +
cs*s*(t+ren*mttr) - ren*cs*sm2*sm2/d/2*(1+d/(Umx-d));
ff(kk,hh)=2*s-sm2;
%%%%%%%%%%%%%

```

```

if hh==1
% cout de la maintenance preventive
%%%%%%%%%%%%%
tmw1 = I1;
Fw1 = J1;

```

```

smp = (Fw1*s/d+tmw1)*d ;

```

```

Cout_maintenance_prevent = cs*(2*s-smp)*smp/d/2+cp*(1+d/(Umx-d))*d/2*(mttp-
tmw1-s/d*moraja3a_p)^2 ;
f(kk)=2*s-smp;
%%%%%%%%%%%%%
end

couttg1(kk,hh)=((ren * Cout_avant_S) + Cout_apres_S ) +
Cout_maintenance_prevent + ren*mc + mp )/...
(t+mttp+ren*mttr);

end
if kk~=1;
couttg1(kk,hh:end)=couttg1(kk-1,hh:end);
end

end
couttg1(:,end:-1:1)=couttg1;
p=couttg1;
[x,y]=find(p==min(min(p)));
%%%%%%%%%%%%%
Per=y+ren*mttr+mttp;
tempstoc

```

ANNEXE 2

**PROGRAMME D'ÉVALUATION DU STOCK ET DE LA PÉRIODE DE
MAINTENANCE PRÉVENTIVE DE TYPE ÂGE**

```

function
[p,x,y]=arp(Umx,demande,Lname,Rname,Pname,fdist,cost,mttr,mttp,Smin,Smax,Ds,Tm
ax,dT,dt)
%
arp(Umx,demande,Lname,Rname,Pname,fdist,cost,mttr,mttp,Smin,Smax,ds,Tmax,dT)
%
% calcul du cout moyen de production avec politique age
% Umx:taux maximal de production
% demande:taux de demande
% Lname:nom de la distribution liée a la vie de la machine
% Rname:nom de la distribution liée au temps de la reparation de la machine
% Pname:nom de la distribution liée au temps de la maintenance preventive
% fdist:parametre des distribution tel que chaque ligne contient les parametres d'une
distribution
% cost:cout de maintenance corrective preventive de stockage et de penurie
% Smin:le niveau de stock minimale avec lequel on doit commenceré
% Smax:le niveau de stock maximale avec lequel on croit s'arreter
% mttr:temps moyen jusqu a reparation
% mttp:temps moyen jusqu a la maintenance preventive soit fini
% ds:precision des integrales
% dT:pas de periode
% Tmax:periode maximale
%
%exp.:
%-----
% Umx=1;demande=.65;fdist=[1/100,2;log(10)-1/2*1^2,1;log(2)-
1/2*.4^2,.4];cost=[4000,1000,1,30];

```



```

Tmin=s/(Umx-d);

% i=[0:s/ds:s];
x=[0:s/ds/(Umx-d):s/(Umx-d)];
%I2=cumsum(i/(Umx-d).*pdf_m(Rname,i./(Umx-d),a21,a22,a23)*s/ds/(Umx-d));
I2=cumsum(x.*pdf_m(Rname,x,a21,a22,a23)*s/ds/(Umx-d));
Sincr=Sincr+1;

Tinc=0;

%x=[0:s/ds/(Umx-d):s/(Umx-d)];

I1=sum(x.*pdf_m(Pname,x,a31,a32,a33)*s/ds/(Umx-d));

% CAS=sum( ( cs*( (x.^2)*(Umx-d)/2 + I2.* (2*x*(Umx-d)/d - I2)/2 ) + cp*( (mttr-I2).^2 )*d/2*(1+d/(Umx-d)) ).*pdf_m(Rname,x,a21,a22,a23)*s/ds/(Umx-d) );
CAS=sum( ( cs*( (x.^2)*(Umx-d)/2 + I2.* (2*x*(Umx-d)/d - I2)/2 ) + cp*( (mttr-I2).^2 )*d/2*(1+d/(Umx-d)) ).*pdf_m(Lname,x,a11,a12,a13)*s/ds/(Umx-d) );
%CAS=sum( ( cs*( (x.^2)*(Umx-d)/2 + I2.* (2*x*(Umx-d)/d - I2)/2 ) + cp*( (mttr-I2)*( (x*(Umx-d)/d).* (1-cdf_m(Rname,(x*(Umx-d)/d),a21,a22,a23)) ) ).^2
)*d/2*(1+d/(Umx-d)) ).*pdf_m(Lname,x,a11,a12,a13)*s/ds/(Umx-d) );

moraja3a=1-cdf_m(Rname,s/d,a21,a22,a23);
moraja3a_p=1-cdf_m(Pname,s/d,a31,a32,a33);

```

for T=Tmin:dT:Tmax

```

Tinc=Tinc+1;

t=[s/(Umx-d):s/(Umx-d)/ds:T];

mt=sum(t.*pdf_m(Lname,t,a11,a12,a13)*s/d/ds ) + (1-
cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13))*T;

CBS=cs*( s*mt + (2*s-I2(end,end))*I2(end,end)/2 ) +
(cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13)-cdf_m(Lname,s/(Umx-d),a11,a12,a13))*...
cp*(( mttr-I2(end,end)-s/d*moraja3a )^2 )*d/2*(1+d/(Umx-d)) ;

CMP=(1-cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13))*( cs*(2*s-I1*d)*I1/2 + cp*( ( mttp-I1-
s/d*moraja3a_p )^2)*d/2*(1+d/(Umx-d)) );

CM=cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13)*mc+(1-cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13))*mp;

ET=mt+cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13)*mttr+(1-
cdf_m(Lname,T,a11,a12,a13))*mttp;

Cout=(CAS+CBS+CMP+CM)/ET;

cout(Sincr,Tinc)=Cout;
end

%cout(Sincr,Tinc:end)=cout(Sincr,Tinc);
end
%cout(:,end:-1:1)=cout;

```

```
cout=(cout==0)*max(max(cout))+cout;
p=cout;
[x,y]=find(p==min(min(p)));
temps=toc
```

ANNEXE 3

**PROGRAMME D'ÉVALUATION DU STOCK EN FONCTION DE L'ÂGE ET
DE LA PÉRIODE DE MAINTENANCE PRÉVENTIVE**

```

function
[s,term]=sft_2(Umx,demande,Lname,Rname,Pname,mttr,mttp,cost,fdist,tmin,tmax,Sma
x,dt)

% Stock fonction de l'age de la machine
%
%exp.:
%-----
% Umx=2;demande=1.65;fdist=[1/100,2;log(10)-1/2*1^2,1;log(2)-
1/2*.4^2,.4];cost=[4000,1000,1,30];
%
Lname='weib';Rname='logn';Pname='logn';mttr=10;mttp=2;dt=25;ds=1e3;tmin=
10;tmax=200;Smax=30
%
%
[s,term]=sft_2(Umx,demande,Lname,Rname,Pname,mttr,mttp,cost,fdist,tmin,tm
ax,Smax,dt);

if (size(fdist,2)<3); fdist(:,3)=0;end
a1=fdist(1,1);b1=fdist(1,2);c1=fdist(1,3);
a2=fdist(2,1);b2=fdist(2,2);c2=fdist(2,3);
a3=fdist(3,1);b3=fdist(3,2);c3=fdist(3,3);

warning off MATLAB:divideByZero
%
Ptem = (tmax-tmin)/dt;
term=[];
j=0;
for Per=tmin:Ptem:tmax
    j=j+1;
    i = 0;
    %
    PPer = Per/dt;
    % for t=0:PPer:Per
    for t=PPer:PPer:Per
        i = i+1;
        x = linspace(0,Smax,dt);

        y = x+demande*PPer*(1-cdf_m(Lname,t,a1,b1,c1))/(cdf_m(Lname,t,a1,b1,c1)-
cdf_m(Lname,t-PPer,a1,b1,c1));
        z = cost(4)/cost(3)*(1-cdf_m(Rname,x,a2,b2,c2));%
%
        c = [x;abs(y-z)];
    end
end

```

```

[n,m] = find(c(2,:)==min(c(2,:)));
s(i) = c(n(1),m(1));
end

co=size(s,2);
dtt=(dt<1000)*1000+(dt>=1000)*dt;;

%%%%%%%%%%%%%
%%%%%
a=PPer*ones(co-1,1)*linspace(0,1,dtt);
b=PPer*([0:co-2]')*ones(1,dtt);
d=sum( 1-cdf_m(Lname,a+b,a1,b1,c1) ,2)*PPer/dtt;
d=cost(3)*sum( d.*(s(2:end))');

%%%%%%%%%%%%%
%%%%%
g=s'*linspace(0,1,dtt)/demande;;
ds=s'/dtt/demande;;
% integrale de s/d jusqu a l'infini
cp=mttr-(sum( g.*pdf_m(Rname,g,a2,b2,c2),2 ).*ds)-(s')/demande.*(1-
cdf_m(Rname,(s')/demande,a2,b2,c2));

% la surface de stockage lors de panne
cs=demande/2*(s')^2;

% probabilité liée a chaque stock
ft=diff(cdf_m(Lname,linspace( 0,Per,size(s,2) ),a1,b1,c1 ));;

% cout de pénurie et stockage avec probabilité respective
c= sum( (ft).*(cost(3)*cs(1:co-1)+cost(4)*demande*cp(1:co-1)) );;

%%%%%%%%%%%%%
%%%%%
h=demande/2*s(end)^2;;

% Periode
ET = sum(((1-cdf_m(Lname,linspace(0,Per,dtt),a1,b1,c1))*(Per)/dtt ) +
cdf_m(Lname,Per,a1,b1,c1)*mttr + (1-cdf_m(Lname,Per,a1,b1,c1))*mttp;;

```

```

% cout pour maintenance preventive
f=mtp-
    sum(linspace(0,s(end)/demande,dtt).*pdf_m(Pname,linspace(0,s(end)/demande,d
    tt),a3,b3,c3)*s(end)/demande/dtt)-...
    s(end)/demande*(1-cdf_m(Pname,s(end)/demande,a3,b3,c3));;
% Cout total unitaire

Sft(j)=( cdf_m(Lname,Per,a1,b1,c1)*cost(1) + (1-cdf_m(Lname,Per,a1,b1,c1))*cost(2)
    + c + d + (1-cdf_m(Lname,Per,a1,b1,c1))*(cost(3)*h+cost(4)*demande*f)
    )/ET;
term=[term;[s,Per,Sft(j)]];%
end
[x,y]=size(term);
[xx,yy]=find(term(:,end)==min(term(:,end)));
s.Periode=term(xx,y-1);
s.Cout_unitaire=term(xx,y);
s.Stock=term(xx,1:y-2);
% {'Periode :',term(xx,y-1),'Cout unitaire :',term(xx,y)}
% {'S(t):'}, {num2str(term(xx,1:y-2))}%
s
plot(linspace(0,s.Periode,size(s.Stock,2)),s.Stock)
PPer=s.Periode/dt;

```

ANNEXE 4

**PROGRAMME D'ÉVALUATION DU COÛT EN FONCTION DU STOCK ET
DE LA PÉRIODE DE MAINTENANCE PRÉVENTIVE**

```

function
[s,T,c]=joint(Umx,demande,Lname,Rname,Pname,mttr,mttp,cost,fdist,Tmax,Smin,Smax
,dt)

%
%
%
%
%
%exp.:
%-----
% Umx=1;demande=.5;fdist=[1/100,2;log(20)-1/2*2^2,2;log(10)-
% 1/2*1.5^2,1.5];cost=[2000,300,2,250];
%
Lname='weib';Rname='logn';Pname='logn';mttr=20;mttp=10;dt=1000;ds=1e3;T
max=200;Smin=1;Smax=30
%
%
[s,T,c]=joint(Umx,demande,Lname,Rname,Pname,mttr,mttp,cost,fdist,Tmax,Smi
n,Smax,dt);

d=demande;
if (size(fdist,2)<3); fdist(:,3)=0;end
a1=fdist(1,1);b1=fdist(1,2);c1=fdist(1,3);
a2=fdist(2,1);b2=fdist(2,2);c2=fdist(2,3);
a3=fdist(3,1);b3=fdist(3,2);c3=fdist(3,3);
cs=cost(3);
cp=cost(4);
mc=cost(1);
mp=cost(2);
i=0;
for h=Smin:Smax
i=i+1;j=0;
Tmin=h/(Umx-d);
for T=Tmin:Tmax
j=j+1;
FT=cdf_m(Lname,T,a1,b1,c1);
RT=(1-cdf_m(Lname,T,a1,b1,c1));

t=linspace(0,T,dt);
wk=sum((1-cdf_m(Lname,t,a1,b1,c1))*T/dt);
Dk=FT*mttr + RT*mttp;
Etk=wk+Dk;
% integrale de 0 a h/d

```

```

x=[0:h/d/dt:h/d];
I1=sum( (x.*h-(x.^2)*d*Umx/(2*(Umx-
d))).*(FT*pdf_m(Rname,x,a2,b2,c2)+RT*pdf_m(Pname,x,a3,b3,c3 ))*h/d/dt );
I2=sum( x.*(FT*pdf_m(Rname,x,a2,b2,c2)+RT*pdf_m(Pname,x,a3,b3,c3 ))*h/d/dt );
I3=(d*(FT*mttr+RT*mttp)-d*I2)-h*(FT*( 1-cdf_m(Rname,h/d,a2,b2,c2))+RT*(1-
cdf_m(Pname,h/d,a3,b3,c3)) );
c(i,j)=(cs*h*wk + cs*(h^2)*(Umx-2*d)/(2*d*(Umx-d))*(FT*(1-
cdf_m(Rname,h/d,a2,b2,c2))+RT*(1-cdf_m(Pname,h/d,a3,b3,c3)))+ cs*I1 +
cp*(I3) +RT*mp+ FT*mc)/Etk;
end
end
c=(c==0)*max(max(c))+c;
[s,T]=find(c==min(min(c)));

```

BIBLIOGRAPHIE

- Ait Kadi, D., & Cleroux, R. (1990). *Replacement strategies with mixed corrective actions at failure*. Computer Operationel Research, 18.
- Ait Kadi, D., & Cleroux, R. (1995). *Stratégie optimale de remplacements périodiques tenant compte de l'état des stocks de pièces de rechange*. Congrès international de génie industriel de Montréal, 1, 315-324.
- Balasubramanian, R., & Molu, O. (1987). *Preventive maintenance scheduling in the presence of a production plan*. Production & Inventory Management, 28(1), 81-87.
- Barlow, R. E., & Hunter. (1960). *Optimal preventive maintenance policies*. Operations Research, 8, 90-100.
- Barlow, R. E., & Proschan, F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. New York: Wiley.
- Baxter, L. E., Scheuer, E. M., McConalogue, D. J., & Blischke, W. R. (1981). *Renewal tables: Tables and functions Arising in renewal theory (Technical Report)*: University of Southern California.
- Bhat, B. R. (1969). *Used item replacement policy*. Journal of Applied Probability, 6, 309-318.
- Chan, F. T. S. (2001). *Simulation analysis of maintenance policies in a flow line production system*. International Journal of Computer Applications in Technology, 14(1-3), 78-86.
- Chelbi, A., & Ait Kadi, D. (2001). *Joint optimal buffer inventory and preventive maintenance strategy for a randomly failing production unit*. Paper presented at the International Conference on Industrial Engineering and Production Management, Québec, Canada.
- Chelbi, A., & Rezg, N. (2003). *Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit subjected to a minimum required availability level*. Paper presented at the International Conference on Industrial Engineering and Production Management, Porto, Portugal.

- Cheung, K. L., & Hausman, W. H. (1997). *Joint determination of preventive maintenance and safety stocks in an unreliable production environment*. Naval Research Logistics, 44(3), 257-272.
- Dohi, T., Okamura, H., & Osaki, S. (2001). *Optimal control of preventive maintenance schedule and safety stocks in an unreliable manufacturing environment*. International Journal of Production Economics, 74(1-3), 147-155.
- Elkassar, A. N., & Salameh, M. (2003). *Safety buffer for preventive maintenance and breakdown*. Paper presented at the International Conference on Industrial Engineering and Production Management, Porto, Portugal.
- Garbatov, Y., & Guedes Soares, C. (2001). *Cost and reliability based strategies for fatigue maintenance planning of floating structures*. Reliability Engineering and System Safety, 73(3), 293-301.
- Groenevelt, H., Pintelon, L., & Seidmann, A. (1992a). *Production batching with machine breakdowns and safety stocks*. Operations Research, 40(5), 959-971.
- Groenevelt, H., Pintelon, L., & Seidmann, A. (1992b). *Production lot sizing with machine breakdowns*. Management Science, 38(1), 104-123.
- Jiang, R., & Ji, P. (2002). *Age replacement policy: A multi-attribute value model*. Reliability Engineering and System Safety, 76(3), 311-318.
- Kenné, J. P., & Gharbi, A. (1999). *Experimental design in production and maintenance control problem of a single machine, single product manufacturing system*. International Journal of Production Research, 37(3), 621-637.
- Lyonnet, P. (2000). *La Maintenance : mathématiques et méthodes (4 ed.)*. Paris: Technique et documentation-Lavoisier.
- Salameh, M. K., & Ghattas, R. E. (2001). *Optimal just-in-time buffer inventory for regular preventive maintenance*. International Journal of Production Economics, 74(1-3), 157-161.
- Smeitink, E., & Dekker, R. (1990). *A simple approximation to the renewal function [reliability theory]*. Reliability, IEEE Transactions on, 39(1), 71-75.

Tango, T. (1978). *Extended block replacement policy with used items*. Journal of Applied Probability, 15(3), 560-572.

Van der Duyn Schouten, F. A., & Vanneste, S. G. (1995). *Maintenance optimization of a production system with buffer capacity*. European Journal of Operational Research, 82(2), 323-338.

Zohrul Kabir, A. B. M., & Farrash, S. H. A. (1996). *Simulation of an integrated age replacement and spare provisioning policy using SLAM*. Reliability Engineering & System Safety, 52(2), 129-138.