

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPERIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE

M.Ing.

PAR
DANIEL ALLICHE

COMMANDÉ PAR PLACEMENT DE STRUCTURE PROPRE
APPLIQUÉ À LA DYNAMIQUE LATÉRALE DE L'AVION

MONTRÉAL, LE 5 MAI 2003

COMMANDÉ PAR PLACEMENT DE STRUCTURE PROPRE APPLIQUÉE À LA DYNAMIQUE LATÉRALE DE L'AVION

DANIEL ALLICHE

RUSUMÉ

La commande par placement de structure propre "*Eigenstructure Assignment*" est l'une des méthodes de commande multivariables modernes utilisées dans les commandes électriques de l'avion. Cette technique de commande linéaire offre un bon découplage des sorties en s'assurant au départ d'un bon choix simultané de vecteurs propres et valeurs propres désirés. Nous avons fait ressortir les avantages et les inconvénients de cette commande dans le cadre d'un contrôle par retour de sortie, d'un contrôle par retour de sortie avec contraintes et enfin par compensation dynamique dans le cas où une sortie ne serait pas mesurable.

La méthode de placement de structure propre a été appliquée sur le modèle ADMIRE (*Aerodata Model in Research Environment*) qui est un modèle d'avion de chasse développé conjointement par Saab et l'Institut Royal de Technologie de Suède.

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

Mme Ouassima Akhrif, directeur de mémoire
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Maarouf Saad, codirecteur de mémoire
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. David Bensoussan, président du jury
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Pascal Bigras, professeur
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 15 AVRIL 2003

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMMANDÉ PAR PLACEMENT DE STRUCTURE PROPRE APPLIQUÉE À LA DYNAMIQUE LATÉRALE DE L'AVION

DANIEL ALLICHE

SOMMAIRE

Suite aux énormes progrès réalisés en électronique et qui ont donné naissance à des commandes électriques “*fly-by-wire*”, le domaine de commande de vol a pris son envol et n'a cessé d'évoluer depuis, d'une manière plus efficace. La commande par placement de structure propre “*Eigenstructure Assignment*” est l'une des méthodes de commande multivariables modernes utilisées dans les commandes électriques de l'avion. Cette technique de commande linéaire offre un bon découplage des sorties en s'assurant au départ d'un bon choix simultané de vecteurs propres et valeurs propres désirés.

Dans ce mémoire nous avons appliqué la méthode de la commande par placement de structure propre à la dynamique latérale d'un avion. Nous avons fait ressortir les avantages et les inconvénients de cette commande dans le cadre d'un contrôle par retour de sortie, d'un contrôle par retour de sortie avec contraintes et enfin par compensation dynamique dans le cas où une sortie ne serait pas mesurable. Nous avons donné une description physique d'un avion générique, ensuite un modèle linéaire de ce dernier a été établi dans l'espace d'état. Quelques exemples de modèles d'avions tirés de certaines références données en bibliographie ont servi pour expliquer la technique de commande en question. Ensuite, la méthode de placement de structure propre a été appliquée sur le modèle ADMIRE (*Aerodata Model in Research Environment*) qui est un modèle d'avion de chasse développé conjointement par Saab et l'Institut Royal de Technologie de Suède. L'application a été faite dans l'environnement Simulink de Matlab.

AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ma directrice de recherche Mme Ouassima Akhrif pour son soutien financier, sa collaboration et l'intérêt qu'elle a porté envers le projet. Je tiens à remercier également mon codirecteur de recherche M. Maarouf Saad pour ses encouragements et ses nombreux conseils qui m'ont aidé dans l'accomplissement de mon projet.

Mes remerciements sont adressés également à l'École de technologie supérieure (ÉTS) pour son soutien technique et matériel.

Je remercie le personnel du laboratoire de Bombardier aéronautique de l'ÉTS pour leurs encouragements. C'était un plaisir d'avoir travaillé avec eux.

Je dois souligner la collaboration des professeurs de l'ÉTS ou d'autres universités qui m'ont apporté une aide précieuse dans la réalisation de mon projet. Merci à tous.

Ce mémoire est dédié à ma compagne Julie Boutin.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE	i
AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
LISTE DES TABLEAUX.....	v
LISTE DES FIGURES.....	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES.....	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 DYNAMIQUE LATÉRALE D'UN AVION	5
1.1 Définition des repères	5
1.2 Transformation de coordonnées	8
1.3 Surfaces de contrôle primaires (gouvernes).....	12
1.4 Modélisation de l'avion	14
1.4.1 Principales forces extérieures.....	14
1.4.2 Équations du mouvement.....	15
1.4.3 Séparation des équations du mouvement	24
1.4.4 Équations du mouvement latéral	25
1.4.5 Équations d'état du modèle latéral.....	37
1.4.6 Les modes du mouvement latéral.....	41
CHAPITRE 2 PLACEMENT DE STRUCTURE PROPRE	43
2.1 Représentation dans l'espace d'état.....	43
2.2 Placement de pôles par retour d'état.....	49
2.3 Placement de pôles par retour de sortie	50
2.4 Méthode par placement de structure propre	51
2.4.1 Calcul des vecteurs propres.....	57
2.4.2 Calcul du gain par retour de sortie	60
2.4.3 Résumé de l'algorithme	61
2.5 Robustesse	62
2.5.1 Stabilité robuste.....	62
2.5.2 Sensibilité.....	74
2.6 Exemple d'application.....	77

2.7	Gain par retour de sortie avec contraintes	83
2.8	Exemple d'application	90
2.8.1	Résultats et analyse	92
2.9	Compensation dynamique	97
2.10	Exemple d'application	101
2.10.1	Résultats et analyse	102
CHAPITRE 3	MODÈLE D'APPLICATION ADMIRE.....	110
3.1	Description du modèle <i>ADMIRE</i>	110
3.1.1	Les variables d'états	112
3.1.2	Les entrées.....	113
3.1.3	Les sorties	114
3.1.4	Les fonctions de transfert des actionneurs	116
3.1.5	Fonctions de transfert des capteurs	117
3.1.6	Enveloppe de vol.....	118
3.2	Application	119
CONCLUSION	139
ANNEXE 1 : Schémas bloc des systèmes de commande	141
BIBLIOGRAPHIE	146

LISTE DES TABLEAUX

	Page	
Tableau I	Sommaire de la nomenclature.....	24
Tableau II	Définition des dérivées de stabilité latérales dimensionnelles et non dimensionnelles.....	33
Tableau III	Critères de performances en boucle fermée du modèle L1011	82
Tableau IV	Vecteurs propres désirés et obtenus du modèle F18-HARV	93
Tableau V	Matrices de décision du modèle F18-HARV	94
Tableau VI	Comparaison avec entre le contrôleur avec contraintes et sans contraintes du modèle F18-HARV	94
Tableau VII	Critères de performances en boucle fermée du compensateur de 1 ^{er} ordre du modèle F18-HARV.....	104
Tableau VIII	Vecteurs propres désirés et obtenus du compensateur de 1 ^{er} ordre du modèle F18-HARV	104
Tableau IX	Critères de performances en boucle fermée du compensateur de 2 ^{ième} ordre du modèle F18-HARV.....	108
Tableau X	Liste des états utilisés dans le modèle linéaire du modèle ADMIRE .	112
Tableau XI	Liste des entrées utilisées dans le modèle linéaire du modèle ADMIRE	114
Tableau XII	Liste des sorties utilisées dans le modèle linéaire du modèle ADMIRE	115
Tableau XIII	Liste de sorties intermédiaires du modèle ADMIRE	117
Tableau XIV	Critères de performances en boucle ouverte du modèle ADMIRE.....	125
Tableau XV	Conception du contrôleur par retour de sortie sans contraintes du modèle ADMIRE	126
Tableau XVI	Critères de performances en boucle fermée du modèle ADMIRE	126

Tableau XVII	Matrices de décision du modèle ADMIRE	131
Tableau XVIII	Conception du contrôleur par retour de sortie avec contraintes du modèle ADMIRE	131
Tableau XIX	Contrôleur à gain anticipatif pour un contrôle avec contraintes du modèle ADMIRE	132
Tableau XX	Critères de performances en boucle fermée du compensateur de 1 ^{er} ordre du modèle ADMIRE.....	138

LISTE DES FIGURES

	Page	
Figure 1.1	Repère inertiel, géographique et avion.....	5
Figure 1.2	Les axes de translation et plans de rotation de l'avion.....	7
Figure 1.3	Systèmes d'axes mobiles (avion, stabilité et vent).....	9
Figure 1.4	Séquence de rotation des angles d'Euler	9
Figure 1.5	Disposition des surfaces de contrôle conventionnelles	13
Figure 1.6	Les forces extérieures appliquées sur l'avion.....	15
Figure 1.7	Les forces aérodynamiques appliquées sur l'avion	15
Figure 1.8	(a) Angle de lacet ψ et angle de dérapage β dans le repère stabilité perturbé; (b) L'avion en dérapage avec les ailes horizontales, $\beta = \psi$	27
Figure 1.9	Composantes de la gravité, (a) causée par ϕ suivant l'axe Y perturbé; (b) causée par ψ suivant l'axe Y perturbé.	31
Figure 2.1	Diagramme bloc d'un modèle en boucle ouverte dans l'espace d'état	44
Figure 2.2	Diagramme bloc d'un contrôleur par retour d'état.....	50
Figure 2.3	Diagramme bloc d'un contrôleur par retour de sortie	51
Figure 2.4	Interprétation géométrique de v_i^d , v_i^a et L_i	54
Figure 2.5	Système SISO commandé par retour de sortie	62
Figure 2.6	Diagramme de Nyquist d'un système SISO nominal $g(j\omega)$ et perturbé $\tilde{g}(j\omega)$	63
Figure 2.7	(a) Perturbation multiplicative $e_m(s)$, (b) Perturbation additive $e_a(s)$	64
Figure 2.8	(a) Système MIMO commandé par retour de sortie, (b) erreur de modèle multiplicative.....	68
Figure 2.9	Représentation de la définition des marges de gain et de phase multivariable	69
Figure 2.10	Réponses en boucle fermée pour le contrôleur par retour de sortie	82

Figure 2.11	Réponses temporelles en boucle ouverte.....	95
Figure 2.12	Réponses temporelles en boucle fermée sans contraintes	95
Figure 2.13	Surfaces de contrôle	96
Figure 2.14	Réponses temporelles en boucle fermée utilisant seulement la matrice de décision D^λ	96
Figure 2.15	Réponses temporelles en boucle fermée utilisant les matrices de décision D^λ et D^V	97
Figure 2.16	Gain par retour de sortie compensation dynamique	98
Figure 2.17	Réponses en boucle fermée avec compensation dynamique de 1 ^{er} ordre	105
Figure 2.18	Réponses en boucle fermée avec compensation dynamique de 2 ^{ième} ordre	109
Figure 3.1	Aérodynamique du modèle générique Admire.....	111
Figure 3.2	Surfaces de contrôle	111
Figure 3.3	Enveloppe de vol du modèle ADMIRE.....	119
Figure 3.4	Réponses temporelles en boucle fermée sans l'action du pilote (condition initiale $\beta=1^\circ$)	129
Figure 3.5	Entrées du pilote sur le manche.....	129
Figure 3.6	Réponses temporelles en boucle fermée.....	130
Figure 3.7	Réponse des surfaces de contrôle	130
Figure 3.8	Réponse en boucle fermée sans l'action du pilote utilisant la matrice de décision D^λ (condition initiale $\beta=1^\circ$)	132
Figure 3.9	Réponses temporelles en boucle fermée utilisant la matrice de décision D^λ	133
Figure 3.10	Réponse en boucle fermée sans l'action du pilote utilisant la matrice de décision D^λ et D^V (condition initiale $\beta=1^\circ$).....	133
Figure 3.11	Réponses temporelles en boucle fermée utilisant les matrices de décision D^λ et D^V	134

Figure 3.12 Réponses en boucle fermée avec compensation dynamique de 1^{er} ordre

.....137

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

OX	Axe de roulis
OY	Axe de tangage
OZ	Axe de lacet
F_x	Force longitudinale
F_y	Force latérale
F_z	Force verticale
L	Portance
D	Traînée
L	Moment de roulis
M	Moment de tangage
N	Moment de lacet
U	Vitesse linéaire longitudinale
V	Vitesse linéaire latérale
W	Vitesse linéaire verticale
P	Vitesse angulaire de roulis
p	Vitesse angulaire de roulis (après perturbation)
Q	Vitesse angulaire de tangage
q	Vitesse angulaire de tangage (après perturbation)
R	Vitesse angulaire de lacet
r	Vitesse angulaire de lacet (après perturbation)
ω	Vitesse angulaire résultante (P, Q, R)
r_{w0}	Vitesse angulaire de lacet avec filtre passe haut
H	Quantité de mouvement angulaire
I_x	Moment d'inertie par rapport à l'axe OX
I_y	Moment d'inertie par rapport à l'axe OY
I_z	Moment d'inertie par rapport à l'axe OZ

I_{xz} , I_{xy} et I_{yz}	Produits d'inertie
ϕ	Angle de roulis
θ	Angle de tangage
ψ	Angle de lacet
β	Angle de dérapage
γ	Angle d'approche
α	Angle d'attaque
δ_a	Surface de contrôle (aileron)
δ_r	Surface de contrôle (gouvernail de direction)
δ_s	Surface de contrôle (stabilisateur)
q	Pression dynamique
ρ	Densité de l'air
g	Gravité universelle
$N\{.\}$	Espace vide (Noyau)
$(\bullet)^+$	Pseudo-inverse
$(\bullet)^*$	Complexe conjugué transposé
v	Vecteur propre
v_i^d	Vecteur propre désiré
v_i^a	Vecteur propre réalisé
λ	Valeur propre
λ_i^d	Valeur propre désirée
σ	Valeur singulière
ξ	Coefficient d'amortissement
MIL	Spécifications militaires

INTRODUCTION

Le premier vol attesté de l'histoire fut en décembre 1856 [44]. L'engin entièrement mécanique piloté par son concepteur Jean-Marie Le Bris, et grâce à l'action du vent seulement, avait pu monter dans les airs à plus de 100 m d'altitude. Depuis ce jour, de nombreux concepteurs d'avions ont apporté sans cesse plusieurs modifications qui allaient marquer le début d'une évolution sans fin dans le domaine de l'aviation. Les premiers résultats concluants se produisent alors le 9 octobre 1890, quand Clément Ader, inventeur du mot "avion", fut le premier à réaliser un décollage autonome avec un appareil plus lourd que l'air. L'exploit fut réalisé grâce à un moteur à vapeur de 20 CV entièrement conçu par Ader, sur une distance de 50 m à 20 cm du sol. Faut-il le rappeler encore, que l'évolution de l'avion, fût en sorte que l'Homme l'utilisa à des fins militaires durant la 1^{ère} guerre mondiale. Les objectifs militaires amenèrent les concepteurs à redoubler d'ardeur en utilisant des techniques modernes dans chaque phase de conception de l'avion. Cette technologie de conception moderne relative à chaque époque fut transposée dans la construction d'avions civils de plus en plus robustes et où la sécurité demeure un facteur incontournable tout au long de la conception.

De nos jours les technologies avancées auxquelles les ingénieurs s'intéressent sont la motorisation, l'aérodynamique, les structures (matériaux métalliques) et les systèmes avioniques. Cette dernière rentre dans le cadre de la commande de vol. Les progrès fulgurants de l'électronique numérique a donné naissance à des ordinateurs de bord puissants et fiables augmentant la capacité de calcul. Jadis et même à l'heure actuelle, dans le but de déplacer les surfaces aérodynamiques (gouvernes) se trouvant sur les ailes et la queue et qui dirigent et contrôlent la trajectoire de l'avion, des gros porteurs comme le Boeing 747-400 compte sur un système mécanique composé de câbles d'acier et de poulies assistées d'un système hydraulique. D'autres avions modernes tel que l'Airbus

A320 et plus, utilisent des systèmes de commande de vol électroniques de puis 1984. L'adoption des commandes de vol électriques ("fly-by-wire") a permis une optimisation du poste de pilotage qui offre une plus grande protection du domaine de vol. En utilisant le pouvoir électrique dans l'Airbus A320 par exemple, les entrées du pilote sont converties en signaux électroniques binaires (0 et 1) lesquels sont transmis aux capteurs fixés sur les gouvernes.

Les puissants calculateurs de vol utilisent des algorithmes basés entre autre sur des techniques de commande avancées, dans le but de stabiliser l'avion d'une façon robuste. Un grand nombre de ces techniques de commande programmables, sont applicables à des modèles linéaires. D'où la nécessité d'obtenir le modèle linéaire de l'avion à partir du modèle original non linéaire à six degrés de liberté; trois rotations et trois translations. Dans le cadre de ce projet nous allons traiter d'une technique de commande moderne, *la méthode de placement de structure propre* ("Eigenstructure Assignment"), qui est une technique de contrôle très utilisée en commande de vol. Certes, cette méthode est une approche qui donne au concepteur la possibilité de satisfaire des spécifications tels le temps de réponse, l'amortissement et le découplage directement, en faisant un choix simultané de valeurs propres, et de vecteurs propres. Le choix de valeurs propres et vecteurs propres est basé sur des critères de performance, des qualités de manœuvrabilité et des spécifications militaires tel que la norme MIL-F-8785C [43].

La méthode de placement de structure propre est mieux connue après les contributions initiales qui ont été apportées dans les années 70 par Kimura [1], Moore [2] et Srinathkumar [3]. Par la suite cette technique avait pris son envol dans les années 80, quand Andry et al. [4], avait appliqué cette méthode pour concevoir un système d'augmentation de stabilité pour la dynamique latérale linéaire du gros porteur L-1011 de la firme Lockheed. Dans son analyse, le gain par retour d'état, le gain par retour de sortie et le gain par retour de sortie avec contraintes étaient pris en considération. Cependant, seulement les deux derniers ont été appliqués au modèle dans le cadre de la

méthode de placement de structure propre. Sobel et Shapiro (1987) [5] ont ensuite élargit le concept de cette méthode pour incorporer un compensateur dynamique de premier et de deuxième ordre à la place d'un observateur d'état, afin de stabiliser plus la dynamique du système dans le cas où une sortie ne serait pas mesurable. Contrairement à Andry et al. (1983), Calvo Ramon (1986) [22] avait proposé une méthode systématique pour réduire la complexité du contrôleur originalement composé des gains par retour de sortie. Par la suite, Sobel et al. (1990) [13] avaient élargit ce concept de façon à rendre le contrôle beaucoup plus robuste. Cette approche systématique, consiste en une suppression des gains ayant moins d'effet sur la sensibilité des valeurs propres et des vecteurs propres en boucle fermée. Cette méthode est très appliquée en avionique depuis sa première ébauche. Certaines de ces applications données en référence ont été fort utiles tout au long de ce projet.

Le projet est divisé en trois grandes parties. La première partie (le premier chapitre), fait l'objet de la dynamique latérale de l'avion. Ce dernier est décrit physiquement dans l'environnement dans lequel il évolue. Une linéarisation du modèle non linéaire de l'avion est ensuite établie pour aboutir à un ensemble d'équations physiques représentables dans un système d'équations d'états.

Le deuxième chapitre, est subdivisé en trois parties. Dans la première partie, la méthode de placement de structure propre est traitée. Nous allons voir notamment de quelle façon cette méthode est utilisée dans la commande de vol grâce à un contrôleur par retour de sortie. Dans la deuxième partie, le contrôleur obtenu avec la méthode de placement de structure propre sera réduit en supprimant quelques-uns de ses gains, en utilisant une approche systématique. Une application est faite sur un modèle d'avion de chasse. Enfin la troisième partie, fait l'objet de la compensation dynamique où la méthode de structure propre est utilisée pour calculer le contrôleur qui constitue le compensateur de premier ordre dans un premier temps. Par la suite un compensateur de deuxième ordre est calculé pour constituer un nouveau contrôleur.

Enfin un troisième et dernier chapitre, fera l'objet d'une application sur un modèle générique d'un avion de chasse, de l'ensemble des méthodes vues lors du deuxième chapitre.

CHAPITRE 1

DYNAMIQUE LATÉRALE D'UN AVION

L'analyse de la dynamique latérale établie dans ce chapitre est faite à partir d'une synthèse des analyses des ouvrages présentés en référence [28-40]. Les auteurs s'entendent sur une même technique d'analyse qui consiste en premier lieu, en une définition des axes et de certaines hypothèses nécessaires dans le but d'alléger le calcul analytique et ainsi établir les équations du mouvement de l'avion. Particulièrement, au niveau de la détermination des équations du mouvement, je me suis basé en grande partie sur l'analyse faite par [30, J. H. Blakelock].

1.1 Définition des repères

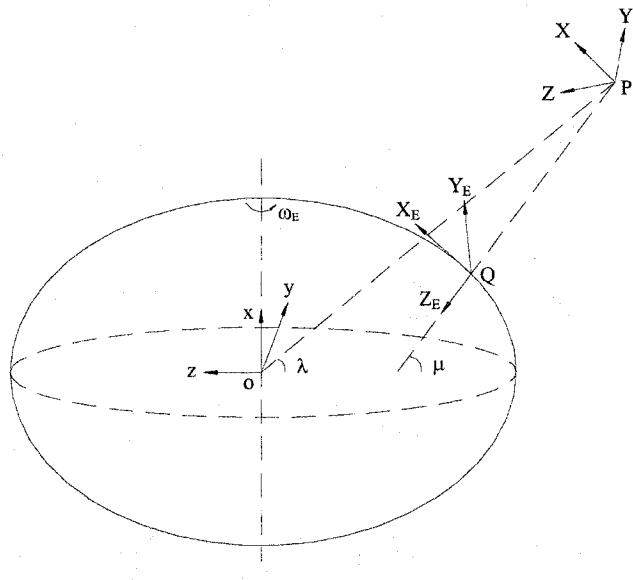


Figure 1.1 Repère inertiel, géographique et avion

Un repère “Frame” est un système d’axes **orthogonaux**, à partir duquel on détermine les coordonnées d’un corps en équilibre ou en mouvement.

Repère inertiel : Il est appelé repère ECI “Earth Centered Inertial”. Pour chaque situation de la dynamique du vol, il est nécessaire de spécifier un repère inertiel de référence au repos dans l’univers, car les lois de Newton sont valides seulement si les accélérations sont mesurées par rapport à ce repère inertiel. Pour beaucoup de problèmes de la dynamique du vol, un repère fixe (non tournant) est placé au centre de la terre (figure 1.1), ce qui est raisonnablement une bonne approximation pour le système inertiel de référence. Dans cette approximation, le mouvement orbital de la terre autour du soleil est ignoré. L’origine est située au centre du globe terrestre. L’axe x est confondu avec l’axe de rotation de la terre. Les axes y et z se situent sur le plan équatorial et leur orientation est arbitraire. Cependant il est pratique que les axes y et z coïncident avec ceux du repère géographique.

Repère géographique : Ce système d’axes qui sert dans la navigation aérienne est appelé repère NED “North-East-Down” (figure 1.1). L’origine se retrouve à la surface de la terre sur la verticale contenant le centre de gravité de l’avion, par conséquent ce repère se déplace lui aussi avec l’avion. Le plan X_E - Y_E est tangent à la surface de la terre dont l’axe X_E est orienté vers le nord (N) et l’axe Y_E est orienté vers l’est (E). L’axe Z_E est orienté vers le bas (D).

Remarque : La forme ovale de la terre (figure 1.1) est exagérée pour constater vraiment que le vecteur inertiel OP ne coïncide pas avec l’altitude QP de l’avion, par conséquent il y a présence de latitude (λ et μ) dont on se sert uniquement dans la navigation aérienne. Dans l’analyse dynamique de l’avion, une approximation est faite en coïncidant le repère NED avec le repère ECI au centre de la terre pour le considérer inertiel.

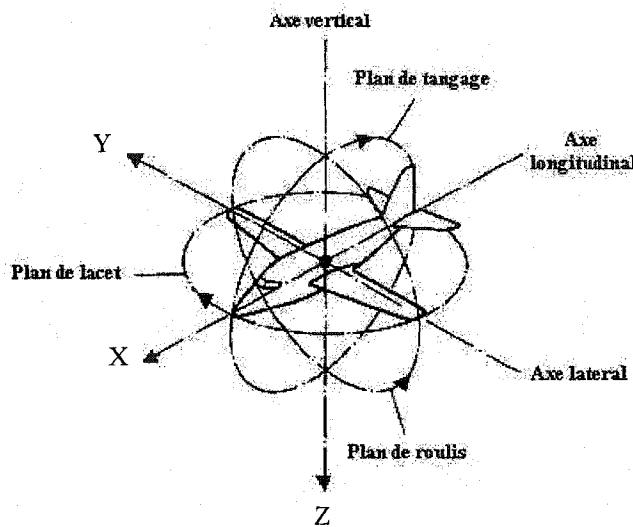


Figure 1.2 Les axes de translation et plans de rotation de l'avion

Repère de l'avion : “Body-fixed frame”. Comme son nom l’indique, ce repère dont l’origine est fixée au centre de gravité de l’avion (figures 1.1 et 1.2), se déplace en tout temps avec celui-ci. La plus part des avions possèdent un plan de symétrie XZ longitudinal.

- L’axe longitudinal “roll axis” X : Cet axe résidant dans le plan XZ, est orienté vers le nez de l’avion..L’avion tourne autour de cet axe, dans le sens des aiguilles d’une montre (l’aile droite descend vers le bas et l’aile gauche monte vers le haut), dans le but de produire un angle de roulis “roll” positif ϕ .
- L’axe transversal “pitch axis” OY : Cet axe perpendiculaire au plan XZ, est orienté vers l’extérieur du fuselage suivant l’aile droite. L’avion effectuant une rotation autour de cet axe, dans le sens inverse des aiguilles d’une montre (le nez de l’avion monte vers le haut), conduit à un angle de tangage “pitch” positif θ .

- L'axe vertical “yaw axis” Z : Cet axe se trouvant dans le plan de symétrie, est orienté vers le bas de l'avion en pointant vers la surface de la terre. Le résultat d'une rotation autour de cet axe, dans le sens des aiguilles d'une montre (le nez de l'avion se déplace vers la droite sur un plan horizontal), est un angle de lacet “yaw” positif ψ .

Repère de stabilité : C'est un cas spécial du repère avion. Il est largement utilisé dans l'étude du mouvement de l'avion impliquant des petites perturbations à partir des conditions de vol en régime permanent. L'axe X_S résidant dans le plan de symétrie de l'avion, est choisi de telle manière qu'il soit confondu avec le vecteur V_T de l'avion en début du mouvement. Par conséquent, un angle d'attaque α , existe entre X et X_S . L'axe Y_S normal au plan de symétrie pointe vers l'extérieur selon l'aile droite. L'axe Z_S vers le bas de l'avion. Ce repère est orienté suivant l'angle d'attaque α par rapport au repère avion (figure 1.3).

Repère du vent : Un autre cas de repère mobile. L'axe X_W est orienté suivant le vecteur vitesse V_T . Y_W est normale au plan de symétrie X_WZ_W et pointe vers le coté droit de l'avion. L'axe Z_W pointe vers le bas et réside dans le plan de symétrie. Si l'angle de dérapage β n'est pas nul, alors le plan X_WZ_W ne coïncide pas avec le plan de symétrie de l'appareil. Les angles localisant ce repère par rapport au repère avion sont l'angle de dérapage β et l'angle d'attaque α . L'utilisation de ce repère est très restreinte (figure 1.3).

1.2 Transformation de coordonnées

Pour orienter un repère par rapport à un autre, il est nécessaire d'utiliser une transformation de coordonnées représentée par une séquence de trois rotations. La matrice de rotation d'Euler est obtenue en faisant le produit de trois matrices de rotation

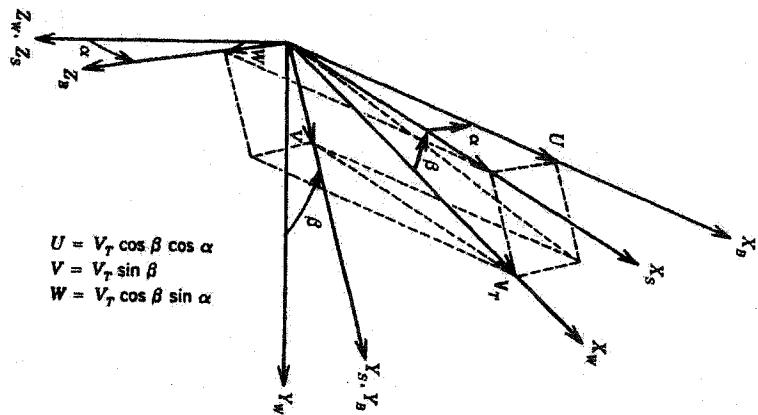


Figure 1.3 Systèmes d'axes mobiles (avion, stabilité et vent)

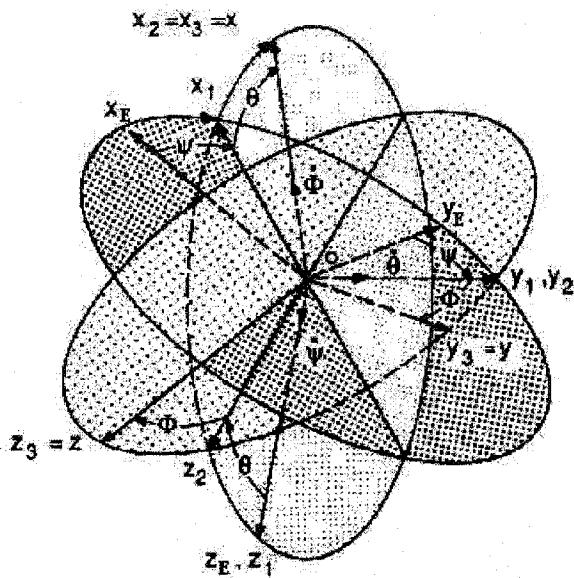


Figure 1.4 Séquence de rotation des angles d'Euler

en respectant la séquence dans laquelle les rotations ont été faites. En passant alors du repère NED par exemple au repère de l'avion on aura la séquence suivante :

Au départ le repère de l'avion XYZ coïncide avec le repère NED (figure 1.4).

1. Rotation du repère NED (nez de l'avion) autour de l'axe Z_E (D) vers la droite pour obtenir un angle Ψ de lacet positif et passer au nouveau repère $X_1Y_1Z_1$.
2. Rotation du repère $X_1Y_1Z_1$ (nez de l'avion) autour du nouvel axe Y_1 vers le haut pour produire un angle θ de tangage positif et passer au repère $X_2Y_2Z_2$.
3. Rotation de $X_2Y_2Z_2$ (l'aile droite de l'avion) autour du nouvel axe X_2 vers le bas pour produire un angle ϕ de roulis positif et passer au repère $X_3Y_3Z_3$.

Les angles θ , ψ et ϕ sont appelés les angles d'Euler. Les matrices de rotations correspondantes sont :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$X_1Y_1Z_1 = T_\Psi NED$$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$X_2Y_2Z_2 = T_\theta X_1Y_1Z_1$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
 XYZ &= X_3 Y_3 Z_3 = T_\phi X_2 Y_2 Z_2 \\
 &= T_\phi (T_\theta X_1 Y_1 Z_1) \\
 &= T_\phi T_\theta (T_\psi NED)
 \end{aligned}$$

En aéronautique, on désigne la matrice d'Euler par le produit de ces trois matrices.

$$[E] = [T_\phi][T_\theta][T_\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \phi & +\cos \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \\ +\sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi & \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AVION} = [E] \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix}_{NED} \quad (1.5)$$

Les composantes P , Q et R de la vitesse angulaire de l'avion sont exprimées dans le repère avion, par les angles d'Euler et leurs dérivées $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ respectivement suivant les axes OX, OY et OZ :

$$\begin{aligned}
 P &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
 Q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\
 R &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ces équations peuvent être résolues pour $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= Q \cos \phi - R \sin \phi \\ \dot{\phi} &= P + Q \sin \phi \tan \theta + R \cos \phi \tan \theta = P + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} &= Q \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + R \frac{\cos \phi}{\cos \theta}\end{aligned}\tag{1.6a}$$

Une transformation similaire peut être faite pour les vitesses linéaires. Il faut noter que $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, et $\dot{\psi}$ sont des vecteurs orthogonaux. Les équations (1.6a) peuvent être intégrées par rapport au temps, et en connaissant les conditions initiales, alors θ , ϕ et ψ peuvent être déterminés. Les composantes de la force de gravité suivant les axes de l'avion sont :

$$\begin{aligned}OX : & -mg \sin \theta \\ OY : & mg \cos \theta \sin \phi \\ OZ : & mg \cos \theta \cos \phi\end{aligned}\tag{1.7}$$

1.3 Surfaces de contrôle primaires (gouvernes)

Conventionnellement il existe trois types de surfaces de contrôles (figure 1.5), et sont situées aux extrémités des ailes et de l'unité stabilisatrice (queue). La déflexion de ces surfaces engendre des moments autour des axes et du centre de gravité de l'avion.

Ailerons “Aileron”: Ceux ci situés aux extrémités des ailes, fournissent un contrôle latéral donc un mouvement de roulis autour de l'axe longitudinal. Le mouvement de l'aileron à droite se fait de bas en haut ou l'inverse dans un sens opposé à celui de l'aileron à gauche. Par exemple, si l'aileron à gauche est déplacé vers le bas, alors l'aileron à droite est automatiquement déplacé vers le haut, par conséquent un mouvement de roulis (angle positif) est généré vers la droite. Une manœuvre similaire mais inverse produit un mouvement de roulis vers la gauche (angle négatif).

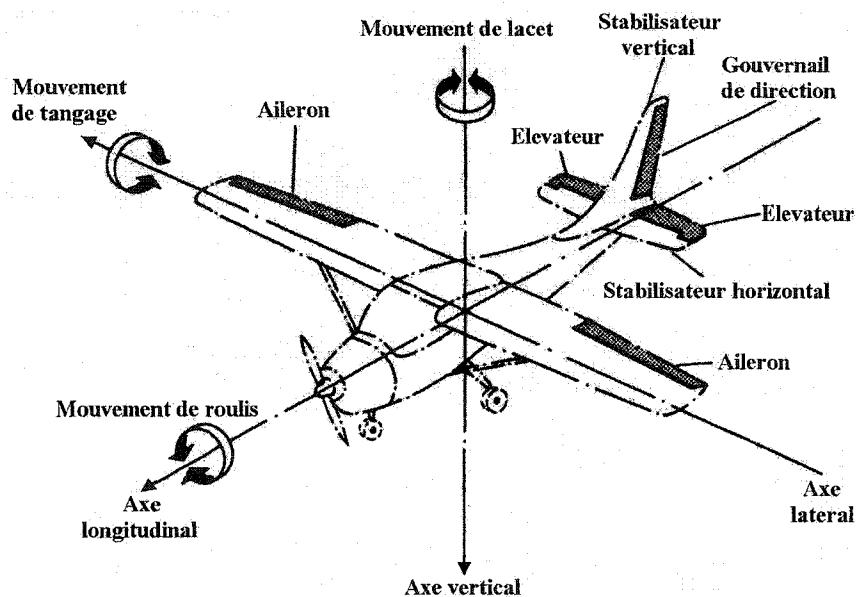


Figure 1.5 Disposition des surfaces de contrôle conventionnelles

Élevateurs “Elevator”: Ceux ci situés sur l’unité stabilisatrice horizontale de la queue, fournissent un contrôle longitudinal donc un mouvement de tangage autour de l’axe transversal. Les deux élévateurs se déplacent en même temps dans le même sens de haut en bas ou l’inverse. Si les élévateurs sont levés, alors un moment de tangage (angle positif) est généré pour lever le nez de l’avion. Si les élévateurs sont baissés, alors le nez de l’appareil est amené vers le bas (angle de tangage négatif).

Gouvernail de direction “Rudder”: Ils sont situés sur l’unité stabilisatrice verticale de la queue et fournissent un contrôle directionnel donc un mouvement de lacet autour de l’axe vertical. Cette surface pivote latéralement à gauche ou à droite. Une déflexion à droite produit un moment de lacet (angle positif) pour tourner le nez de l’avion à droite. Par contre une déflexion à gauche fait tourner le nez de l’appareil à gauche (angle négatif).

1.4 Modélisation de l'avion

Un avion est un véhicule à six degrés de liberté, trois rotations et trois translations. Avec l'action du pilote et dans un but de manœuvrer l'avion, ces mouvements sont produits, en actionnant des surfaces pivotantes faisant partie du corps de l'avion et en agissant aussi sur la puissance des moteurs. Il existe quatre forces principales qui ont une conséquence directe sur l'attitude de l'avion (figure 1.6). Alors selon leur intensité ainsi que leur direction, l'avion est soit en montée ou descente, soit en vol de croisière ou en décrochage, soit en rotation autour de ses axes ou finalement une combinaison de certains de ces mouvements.

1.4.1 Principales forces extérieures

- La poussée “thrust” est la force produite par les moteurs (turboréacteurs) dans le but de propulser l'avion dans l'air. La direction de cette force est selon l'axe longitudinal.
- Le poids “weight” dont le point d'application est au centre de gravité de l'avion et dont la direction est selon l'axe vertical. L'intensité de cette force est égale au produit de la masse totale de l'avion par la force de la gravitation terrestre.

Lorsqu'un objet (généralement une aile, ou un avion) se trouve placé dans un écoulement aérodynamique, il apparaît une force résultante aérodynamique, décomposée en une portance et une traînée.

- La portance est une force située dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement, qui permet généralement de compenser la force de pesanteur (elle la compense exactement dans le cas d'un vol rectiligne en palier).

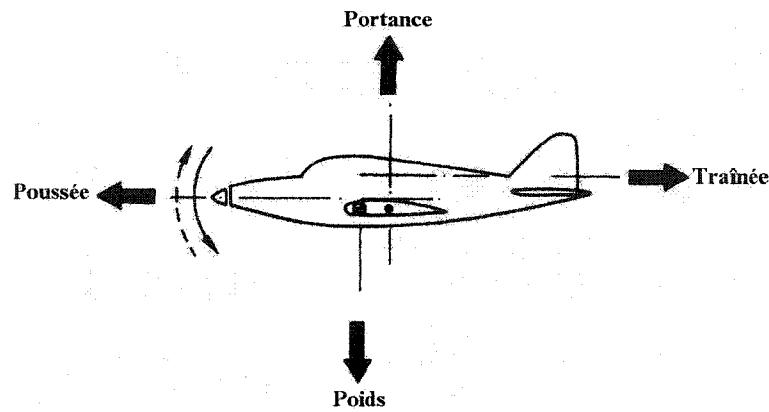


Figure 1.6 Les forces extérieures appliquées sur l'avion

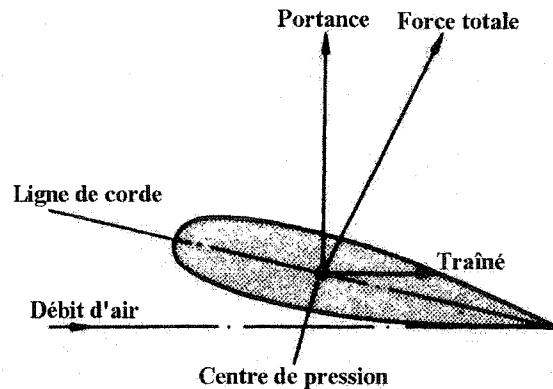


Figure 1.7 Les forces aérodynamiques appliquées sur l'avion

Concevoir une bonne aérodynamique pour un avion, est de maximiser la portance tout en minimisant la traînée. Le point d'application de ces deux forces est au centre de pression se trouvant sur les ailes de l'avion (figure 1.7).

1.4.2 Équations du mouvement

Avant de commencer l'analyse de la dynamique de l'avion, on pose des hypothèses nécessaires dans le but de faciliter l'élaboration des équations physiques des

mouvements de l'avion autour de ses axes de rotation et le long de ses directions de translation.

Hypothèses :

1. La terre est un système de référence inertiel fixe dans l'espace (NED = ECI).
2. La masse de l'avion est invariante dans le temps
3. L'avion est un corps rigide, donc ses mouvements de translations et de rotations sont décrits par son centre de gravité
4. L'avion possède un plan de symétrie XZ contenant l'axe longitudinal, donc les produits d'inertie I_{xz} et I_{yz} sont nuls.

Définissons aussi le sens des vitesses dans un système d'axe mobile :

L'avion possède en tout temps par rapport au repère inertiel un vecteur vitesse linéaire V_T . Celui ci, par rapport au repère mobile de l'avion, est décomposé en trois vitesses instantanées U selon l'axe OX, V selon l'axe OY et W selon l'axe OZ. De la même façon, le vecteur vitesse angulaire instantané par rapport au repère inertiel, possède trois composantes instantanées dans le repère mobile, P, Q et R suivant les axes OX, OY et OZ respectivement. Cependant, il est important de rappeler que les lois de Newton sont appliquées par rapport à un repère inertiel dans l'espace.

Les équations du mouvement de l'avion rigide sont obtenues donc par l'application de la deuxième loi Newton qui stipule que la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur un corps est égale au taux de variation par rapport au temps de la quantité de mouvement linéaire F de ce corps, et la somme des moments extérieurs agissant sur ce corps est égale au taux de variation par rapport au temps de sa quantité de mouvement angulaire H . La seconde loi de Newton peut être exprimée par deux équations vectorielles :

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (\mathbf{m} \mathbf{V}_T) \Big|_I \quad (1.8)$$

$$\sum \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{H} \Big|_I \quad (1.9)$$

Où le symbole I , indique le taux de variation par rapport au temps dans le repère inertiel dans l'espace. D'après la première et la deuxième hypothèse les deux équations vectorielles peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{m} \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_T) \Big|_E \quad (1.10)$$

$$\sum \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{H} \Big|_E \quad (1.11)$$

Le symbole E , signifie que le taux de variation par rapport au temps est pris dans un repère inertiel **terrestre** notamment le repère NED.

Maintenant les forces ainsi que les moments résultants extérieurs, consistent en une somme de forces et de moments en équilibre et leur changement suite à une perturbation par rapport à cette condition d'équilibre.

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_0 + \sum \Delta \mathbf{F} \quad (1.12)$$

$$\sum \mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_0 + \sum \Delta \mathbf{M}$$

Où $\sum \mathbf{F}_0$ et $\sum \mathbf{M}_0$ représentent les sommes des forces et des moments à l'état d'équilibre. L'avion reste en équilibre tant qu'une perturbation n'est pas introduite. De

cette façon, les termes $\sum \mathbf{F}_0$ et $\sum \mathbf{M}_0$ sont nuls. Les forces d'équilibre sont la portance, la traînée, le poids et la poussée. Les moments d'équilibre consistent en des moments provenant, de la portance et la traînée générées par les diverses portions de l'avion, et la poussée. L'avion étant dans un état de vol non accéléré, alors les perturbations en général surviennent par la déflexion des surfaces de contrôle ou par les turbulences atmosphériques. Dans de telles conditions les équations (1.10) et (1.11) seront réécrites de la façon suivante :

$$\sum \Delta \mathbf{F} = m \frac{d}{dt} (\mathbf{V}_T) \Big|_E \quad (1.13)$$

$$\sum \Delta \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{H} \Big|_E \quad (1.14)$$

Il est nécessaire à ce niveau ci d'obtenir l'expression du taux de variation par rapport au temps du vecteur vitesse \mathbf{V}_T dans le repère inertiel terrestre. Ce processus est compliqué par le fait que le vecteur vitesse doit tourner en même temps qu'il change de magnitude. Il en résulte que les moments et les produits d'inertie varient continuellement avec le temps. Pour éviter cette difficulté, il faut utiliser le repère mobile de l'avion. De cette façon les moments et les produits d'inertie calculés par rapport à ce repère mobile demeurent constants dans le temps. Il a été montré que [30], la dérivée d'un vecteur arbitraire \mathbf{A} par rapport à un repère mobile tournant par rapport à un repère fixe, ayant une vitesse angulaire ω , peut être représentée par l'identité vectorielle suivante :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_E = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_B + \omega \times \mathbf{A} \quad (1.15)$$

Où l'indice B désigne le repère mobile "Body axis". Appliquons cette identité pour le vecteur vitesse \mathbf{V}_T :

$$\frac{dV_T}{dt} \Big|_E = \frac{dV_T}{dt} \Big|_B + \omega \times V_T \quad (1.16)$$

Où $dV_T/dt|_B$ désigne la variation de la vitesse linéaire, ω est la vitesse angulaire totale de l'avion par rapport au repère inertiel terrestre, et le symbole \times signifie le produit vectoriel.

Substituons l'équation (1.16) dans l'équation (1.13) :

$$\sum \Delta F = m \frac{dV_T}{dt} \Big|_B + m(\omega \times V_T) \quad (1.17)$$

V_T , ω et ΔF peuvent être réécrits en terme de leurs composantes :

$$V_T = iU + jV + kW \quad (1.18)$$

$$\omega = iP + jQ + kR \quad (1.19)$$

$$\sum \Delta F = i \sum \Delta F_x + j \sum \Delta F_y + k \sum \Delta F_z \quad (1.20)$$

Où i , j et k sont les vecteurs unitaires suivant les axes de l'avion OX, OY et OZ respectivement. À partir de l'équation (1.16) :

$$\frac{dV_T}{dt} \Big|_B = i\dot{U} + j\dot{V} + k\dot{W} \quad (1.21)$$

et

$$\omega \times V_T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix} = i(WQ - VR) + j(UR - WP) + k(VP - UQ) \quad (1.22)$$

Faisons l'égalité entre l'équation (1.20) et la somme des équations (1.21) et (1.22) dans le but de représenter l'équation (1.17). Alors suite à cette opération, on peut extraire les équations du mouvement linéaire de l'avion :

$$\begin{aligned}\sum \Delta F_x &= m(\dot{U} + WQ - VR) \\ \sum \Delta F_y &= m(\dot{V} + UR - WP) \\ \sum \Delta F_z &= m(\dot{W} + VP - UQ)\end{aligned}\tag{1.23}$$

Maintenant, l'expression de H (1.9), qui est par définition la quantité de mouvement angulaire, est nécessaire dans le but d'établir les équations du mouvement de rotation de l'avion. Considérons un élément de masse dm de l'avion. Alors, la quantité de mouvement angulaire de cet élément de masse par rapport au centre de gravité de l'avion est par définition :

$$dH = r \times (V_{tan} dm)\tag{1.24}$$

Où, V_{tan} est la vitesse tangentielle de l'élément de masse et r désigne la distance de l'élément de masse dm au centre de gravité. Sachant que la vitesse tangentielle est le produit vectoriel entre la vitesse angulaire ω de l'avion et le vecteur position r de l'élément de masse, alors :

$$dH = r \times (\omega \times r)dm\tag{1.25}$$

La quantité de mouvement angulaire totale est égale à la somme des quantités de mouvement angulaires de tous les éléments de masse à travers toute la masse de l'avion, par conséquent :

$$H = \int dH = \int r \times (\omega \times r)dm\tag{1.26}$$

Évaluons maintenant le produit vectoriel triple de l'équation (1.26) :

$$\omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} = i(zQ - yR) + j(xR - zP) + k(yP - xQ) \quad (1.27)$$

et

$$r \times (\omega \times r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ zQ - yR & xR - zP & yP - xQ \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

Développons l'équation (1.28) :

$$\begin{aligned} r \times (\omega \times r) = & i[(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] + j[(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] \\ & + k[(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Substituons l'équation (1.29) dans l'équation (1.26) :

$$H = iH_x + jH_y + kH_z \quad (1.30)$$

Où :

$$\begin{aligned} H_x &= \int_{vol} [(y^2 + z^2)P - xyQ - xzR] dm \\ H_y &= \int_{vol} [(z^2 + x^2)Q - yzR - xyP] dm \\ H_z &= \int_{vol} [(x^2 + y^2)R - xzP - yzQ] dm \end{aligned} \quad (1.31)$$

Les moments d'inertie et les produits d'inertie de l'avion d'après l'équation (1.31) sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{vol} (y^2 + z^2) dm \\
 I_y &= \int_{vol} (x^2 + z^2) dm \\
 I_z &= \int_{vol} (x^2 + y^2) dm \\
 I_{xy} &= \int_{vol} (xy) dm \\
 I_{xz} &= \int_{vol} (xz) dm \\
 I_{yz} &= \int_{vol} (yz) dm
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

En tenant compte de la quatrième hypothèse, et en substituant l'équation (1.32) dans l'équation (1.31) on obtient :

$$\begin{aligned}
 H_x &= PI_x - RI_{xz} \\
 H_y &= QI_y \\
 H_z &= RI_z - PI_{xz}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Reprendons un raisonnement similaire que dans le mouvement linéaire de l'avion en réécrivant l'équation (1.14) de cette manière :

$$\sum \Delta M = \frac{dH}{dt} \Big|_B + \omega \times H \tag{1.34}$$

Les composantes du taux de variation de H par rapport au temps dans le repère mobile sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_x}{dt} &= \dot{P}I_x - \dot{R}I_{xz} \\
 \frac{dH_y}{dt} &= \dot{Q}I_y \\
 \frac{dH_z}{dt} &= \dot{R}I_z - \dot{P}I_{xz}
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

En ayant assumé que l'avion est un corps rigide et que sa masse est constante, alors le taux de variation des produits d'inertie est nul.

$$\begin{aligned}
 \omega \times H &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \\
 &= i(QH_z - RH_y) + j(RH_x - PH_z) + k(PH_y - QH_x)
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

$\sum \Delta M$ peut être réécrit en terme de ses composantes :

$$\sum \Delta M = i \sum \Delta L + j \sum \Delta M + k \sum \Delta N \tag{1.37}$$

En égalisant l'équation (1.37) avec la somme des équations (1.35) et (1.36) ensuite substituer les termes H_x , H_y et H_z en se servant de l'équation (1.33), on obtient les équations du mouvement de rotation de l'avion :

$$\begin{aligned}
 \sum \Delta L &= \dot{P}I_x - \dot{R}I_{xz} + QR(I_z - I_y) - PQI_{xz} \\
 \sum \Delta M &= \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)I_{xz} \\
 \sum \Delta N &= \dot{R}I_z - \dot{P}I_{xz} + PQ(I_y - I_x) + QRI_{xz}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Tableau I
Sommaire de la nomenclature

Axes	Direction	Nom	Vitesse linéaire	angle	Vitesse angulaire
OX	Longitudinal En avant	Roulis	U	ϕ	P
OY	Transversal Aile droite	Tangage	V	θ	Q
OZ	Vertical En bas	Lacet	W	ψ	R

Axes	Moment d'inertie	Produit d'inertie	Force	Moment
OX	I_X	$I_{XY} = 0$	F_X	L
OY	I_Y	$I_{YZ} = 0$	F_Y	M
OZ	I_Z	$I_{ZX} \neq 0$	F_Z	N

Des simplifications pourraient se faire au niveau des équations (1.38). D'après la quatrième l'hypothèse le plan, de symétrie XZ de l'avion montre que le produit d'inertie I_{XZ} est généralement très petit devant I_X , I_Y et I_Z , alors il peut être souvent négligé.

1.4.3 Séparation des équations du mouvement

Les équations (1.23) et (1.38) représentant respectivement les mouvements de translation et de rotation de l'avion rigide, sont non linéaires. En général, une solution à cet ensemble de six équations requiert d'utiliser des techniques de calcul numériques.

Cependant, dans beaucoup de cas, en ayant des suppositions adéquates, les six équations sont séparées en deux ensembles de trois équations chacun. Un ensemble représentant les équations du mouvement longitudinal et l'autre les équations du mouvement latéral. Ensuite en se basant sur la théorie des petites perturbations, on linéarise chaque ensemble d'équations. Dans l'application de cette théorie, on assume, que le mouvement de l'avion consiste en des petites déviations à partir des conditions de vol stationnaire "steady flight condition" (l'avion est en vol non accéléré, à une altitude constante et selon une trajectoire rectiligne). La théorie des petites perturbations est très utile en pratique pour donner de bons résultats, notamment suffisamment de précision pour des objectifs d'ingénierie.

Une investigation des équations (1.38), spécialement les équations de L et N, montre que le moment de roulis ou de lacet utilise des vitesses angulaires par rapport aux trois axes; excepté certains cas, les équations ne peuvent pas être découplées. Les hypothèses nécessaires pour ce découplage seront posées ultérieurement dans le cadre de la dynamique latérale de l'avion. Rappelons que la linéarisation des équations longitudinales ne fait pas l'objet de ce présent rapport.

1.4.4 Équations du mouvement latéral

Les trois équations latérales sont linéarisées et combinées à des termes aérodynamiques afin d'obtenir les équations finales du mouvement latéral de l'avion rigide. À partir de ces équations, un modèle d'état du mouvement latéral sera établi et des modes latéraux peuvent être déterminés.

Avant de dériver les équations du mouvement latéral, il est nécessaire de définir l'angle de dérapage. Le repère de stabilité est alors utilisé. Si durant les perturbations à partir de l'équilibre, l'axe OX de l'avion est déplacé autour de l'axe OZ à partir du vecteur

vitesse V_T de l'avion, un angle de dérapage est alors généré. La direction positive de cet angle est montrée sur la figure 1.8. Il ne faut pas confondre l'angle de dérapage β avec l'angle de lacet ψ . Un avion peut avoir un angle de lacet ainsi qu'une vitesse de lacet et non un angle de dérapage. En général ψ et β ne sont pas égaux, mais si la trajectoire de vol de l'avion est rectiligne et que l'avion dérape en ayant les ailes horizontales, alors $\beta = -\psi$.

Les équations non linéaires du mouvement latéral sont :

$$\begin{aligned}\sum \Delta F_Y &= m(\dot{V} + UR - WP) \\ \sum \Delta L &= \dot{P}I_X - \dot{R}I_{xz} + QR(I_z - I_y) - PQI_{xz} \\ \sum \Delta N &= \dot{R}I_z - \dot{P}I_{xz} + PQ(I_y - I_x) + QRI_{xz}\end{aligned}\quad (1.39)$$

L'équation du moment de tangage sera reprise aussi à partir de l'équation (1.38) :

$\sum \Delta M = \dot{Q}I_y + PR(I_x - I_z) + (P^2 - R^2)I_{xz}$. Cette équation contient les vitesses angulaires de roulis P et de lacet R. Si les perturbations sont petites, et qu'on assume que les vitesses P et R sont très petites au point de négliger leurs produits et leur carrés, alors

les équations peuvent être découplées. Une fois que les équations sont découplées la vitesse angulaire de tangage Q est supposée nulle.

Les composantes des valeurs totales instantanées des vitesses linéaires et angulaires par rapport aux axes de l'avion sont : W, P, Q et R. Ces valeurs sont exprimées par leurs valeurs à l'équilibre plus celles de leur changement par rapport au régime permanent après certaines perturbations.

$$U = U_0 + u \qquad P = P_0 + p$$

$$V = V_0 + v \qquad Q = Q_0 + q$$

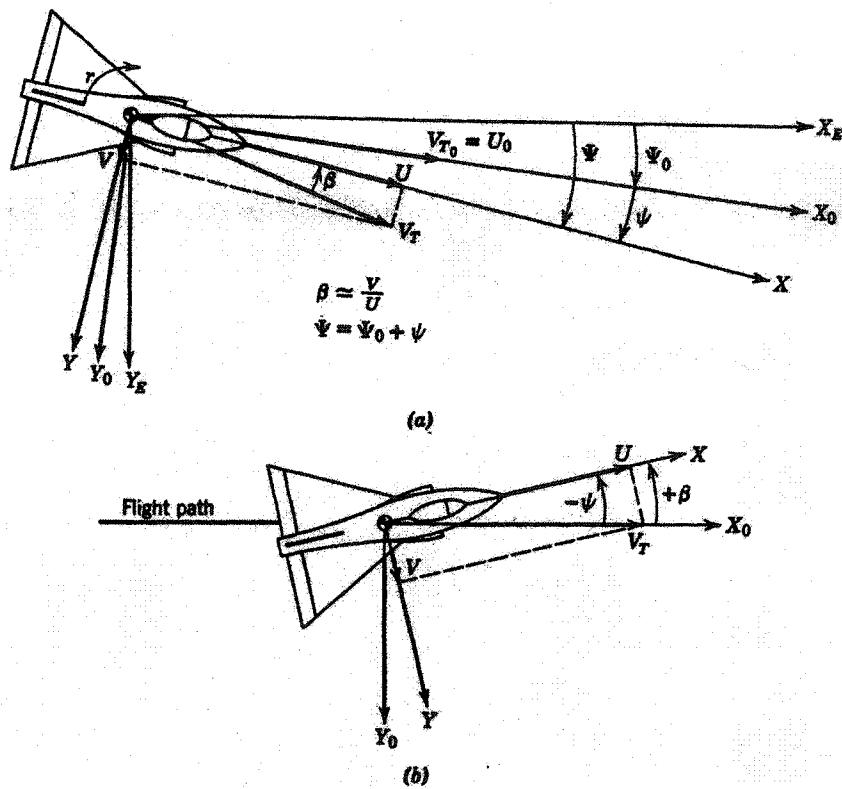


Figure 1.8 (a) Angle de lacet ψ et angle de dérapage β dans le repère stabilité perturbé;
 (b) L'avion en dérapage avec les ailes horizontales, $\beta = \psi$

$$W = W_0 + w \quad R = R_0 + r$$

Hypothèse :

En restreignant les petites perturbations autour de la condition d'équilibre, le produit des variations sera petit en comparaison avec les variations et peut être négligé.

Cette cinquième hypothèse limite l'applicabilité des équations mais, les réduit à des équations linéaires.

À l'équilibre l'axe OX est sur la même direction que la trajectoire de vol et que l'angle de dérapage est nul, donc $V_\theta = W = 0$ et $\mathbf{U} = \mathbf{U}_\theta + \mathbf{u}$. Aussi $\dot{V} = \dot{\mathbf{v}}$, $\dot{W} = 0$, $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{u}}$. Comme l'avion est initialement en vol non accéléré, P_θ et R_θ sont nuls. Donc $P = p$ et $R = r$. Sous ces conditions l'équation (1.39) devient :

$$\begin{aligned}\sum \Delta F_Y &= m(\dot{v} + U_0 r + u r) \\ \sum \Delta L &= \dot{p} I_x - \dot{r} I_{xz} \\ \sum \Delta N &= \dot{r} I_z - \dot{p} I_{xz}\end{aligned}\tag{1.40}$$

Cependant, depuis que les perturbations sont supposées petites autour de la condition d'équilibre, les produits de perturbations peuvent être négligés. L'équation (1.40) est réduite alors à :

$$\begin{aligned}\sum \Delta F_Y &= m(\dot{v} + U_0 r) \\ \sum \Delta L &= \dot{p} I_x - \dot{r} I_{xz} \\ \sum \Delta N &= \dot{r} I_z - \dot{p} I_{xz}\end{aligned}\tag{1.41}$$

Mettons en facteur U_θ dans l'équation de $\sum \Delta F_Y$, l'équation devient :

$$\sum \Delta F_Y = m U_\theta (\dot{v}/U_\theta + r). \text{ Mais } \frac{\dot{v}}{U_\theta} \approx \dot{\beta}, \text{ aussi } U_\theta \approx \mathbf{U} \text{ pour des petites perturbations.}$$

En reprenant les équations, ensuite en les simplifiant en utilisant l'hypothèse précédente on obtient $p = \dot{\phi}$ et $r = \dot{\psi}$. En substitution p et r en utilisant les relations précédentes l'équation (1.41) devient :

$$\begin{aligned}\sum \Delta F_Y &= m U_\theta (\dot{\beta} + \dot{\psi}) = m a_Y \\ \sum \Delta L &= \ddot{\phi} I_x - \ddot{\psi} I_{xz} \\ \sum \Delta N &= \ddot{\psi} I_z - \ddot{\phi} I_{xz}\end{aligned}\tag{1.42}$$

À ce niveau il est nécessaire de développer les forces et les moments en termes de leurs variations résultant à partir des perturbations dans les vitesses linéaires et angulaires. Les forces dans la direction OY sont des fonctions de $\beta, \psi, \phi, \dot{\phi} = p$ et $\dot{\psi} = r$. Donc $\sum \Delta F_Y$ peut être réécrite comme la dérivée totale

$$\sum dF_Y = \frac{\partial F_Y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{\phi}} d\dot{\phi} + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{\psi}} d\dot{\psi} \quad (1.43)$$

Si les dérivées partielles sont supposées linéaires et que les perturbations sont petites, les différentielles peuvent être remplacées par les incrément actuels. Alors l'équation (1.43) devient :

$$\sum \Delta F_Y = \frac{\partial F_Y}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} \Delta \psi + \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} \Delta \phi + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{\phi}} \Delta \dot{\phi} + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{\psi}} \Delta \dot{\psi} \quad (1.44)$$

Deux de ces dérivées partielles résultent à partir de la variation dans la composante de la gravité suivant l'axe OY. D'après l'équation (1.7) les composantes de la force de gravité suivant les axes d'équilibre OX et OZ avec $\phi = 0$ sont :

$$\begin{aligned} F_{g_x} &= -mg \sin \theta \\ F_{g_z} &= mg \cos \theta \end{aligned} \quad (1.45)$$

Si l'avion est perturbé par un mouvement de roulis autour de l'axe OX, Une composante de la gravité suivant l'axe OY comme c'est montré dans la figure 1.9a se manifeste :

$$F_{g_y} = mg \cos \theta \sin \phi \quad (1.46)$$

et sa dérivée :

$$\frac{\partial F_{g_r}}{\partial \phi} = mg \cos \theta \cos \phi \quad (1.47)$$

D'une manière similaire, s'il y a perturbation de l'avion autour de l'axe OZ par un mouvement de lacet, il y a présence d'une composante de la gravité suivant l'axe OY comme c'est illustré dans la figure 1.9b :

$$F_{g_r} = mg \sin \theta \sin \psi \quad (1.48)$$

et sa dérivée :

$$\frac{\partial F_{g_r}}{\partial \psi} = mg \sin \theta \cos \psi \quad (1.49)$$

Il n'y a plus d'autres forces dans la direction de l'axe OY causées par ψ et ϕ . Si chacun de ces angles engendre un angle de décrochage, il sera inclus dans $\partial F_Y / \partial \beta$. De cette façon les équations (1.47) et (1.49) peuvent être réécrites en utilisant l'hypothèse des petits angles pour $\cos(\phi)$ et $\cos(\psi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} &= mg \cos \theta \\ \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} &= mg \sin \theta \end{aligned} \quad (1.50)$$

Maintenant égalisons l'équation (1.44) avec l'équation de $\sum \Delta F_Y$ de l'équation (1.42) :

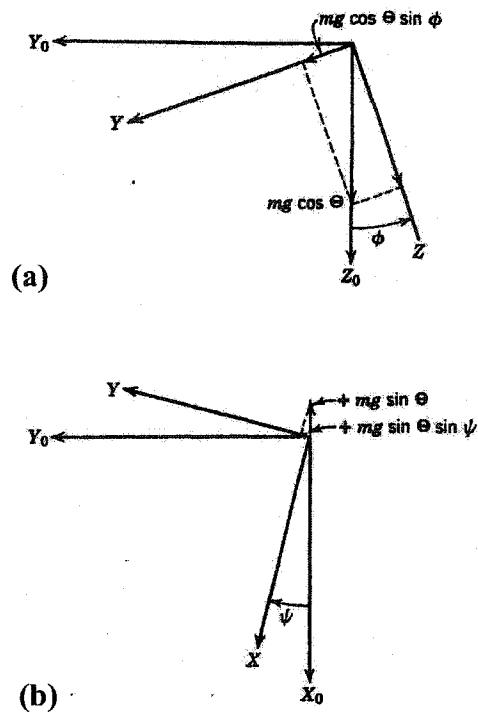


Figure 1.9 Composantes de la gravité, (a) causée par ϕ suivant l'axe Y perturbé; (b) causée par ψ suivant l'axe Y perturbé.

$$\mathbf{m} \mathbf{U}_0 \dot{\beta} + \frac{-\partial F_Y}{\partial \beta} \beta + \left(\mathbf{m} \mathbf{U}_0 - \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} \right) \dot{\psi} - \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} \psi - \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} \dot{\phi} - \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} \phi = F_{Y_a} \quad (1.51)$$

Du moment que $\mathbf{U}_0 \approx \mathbf{U}$, l'indice 0 sera enlevé dans l'analyse qui suit. F_{Y_a} est une force aérodynamique représentant la résultante de la portance et de la traînée (figure 1.6). Divisons l'équation (1.51) par Sq , où S (ft) est la surface de l'aile de l'avion, $q = \frac{1}{2}\rho U^2$ est la pression dynamique en lb / ft², et ρ la densité de l'air :

$$\begin{aligned} \frac{mU}{Sq} \dot{\beta} + \frac{1}{Sq} \frac{-\partial F_Y}{\partial \beta} \beta + \left(\frac{mU}{Sq} - \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} \right) \dot{\psi} - \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} \psi \\ - \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} \dot{\phi} - \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \phi} \phi = \frac{F_{Y_a}}{Sq} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Ensuite, en substituant par l'équation (1.50) et en utilisant la définition des dérivées de stabilité non dimensionnelles tel que mentionné dans le tableau II, l'équation (1.52) sera réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{mU}{Sq} \dot{\beta} - C_{Y_p} \beta + \left(\frac{mU}{Sq} - \frac{b}{2U} C_{Y_r} \right) \dot{\psi} - C_{Y_p} \psi \\ - \frac{b}{2U} C_{Y_p} \dot{\phi} - C_{Y_p} \phi = \frac{F_{Y_a}}{Sq} = C_{Y_a} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Les dérivées de stabilité *non dimensionnelles* possèdent une unité de mesure (*dimension*) qui est 1/rad et sont dépourvus des quantités d'inertie [28], mais en les utilisant, celles-ci rendent les équations non dimensionnelles c'est à dire sans unités de mesure. Pour montrer de quelle façon que l'équation (1.52) a été rendue non dimensionnelle, le terme de ψ sera analysé :

$$\frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \psi} \psi$$

L'unité de F_Y est Sq est lb, donc l'unité de ces deux termes se cancellent. Ensuite l'unité de ψ est le rad, donc le rapport $\psi/\partial\psi$ ne possède pas d'unité. Les autres termes de l'équation (1.53) sont analysés de la même façon.

Les équations de L et N peuvent être développées de la même manière; cependant les dérivées partielles de L et N par rapport à ψ et ϕ sont nulles. De cette façon en

Tableau II

Définition des dérivées de stabilité latérales dimensionnelles et non dimensionnelles

Dimensionnelles		Non dimensionnelles	
Symbol	Unité	Symbol	Unité
$Y_\beta = \frac{Sq}{m} C_{Y_\beta}$	$\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$	$C_{Y_\beta} = \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \beta}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$Y_p = \frac{Sqb}{2mU} C_{Y_p}$	$\frac{\text{ft}}{\text{s}}$	$C_{Y_p} = \frac{2U}{Sqb} \frac{\partial F_Y}{\partial p}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$Y_r = \frac{Sqb}{2mU} C_{Y_r}$	$\frac{\text{ft}}{\text{s}}$	$C_{Y_r} = \frac{2U}{Sqb} \frac{\partial F_Y}{\partial r}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$Y_\phi = \frac{mg}{Sq} \cos \theta$	1	$C_{Y_\phi} = \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \phi}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$Y_\psi = \frac{mg}{Sq} \sin \theta$	1	$C_{Y_\psi} = \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_Y}{\partial \psi}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$Y_{\delta_r} = \frac{Sq}{m} C_{Y_{\delta_r}}$	$\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$	$C_{Y_{\delta_r}} = \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_{Y_{\delta_r}}}{\partial \delta_r}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$Y_{\delta_a} = \frac{Sq}{m} C_{Y_{\delta_a}}$	$\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$	$C_{Y_{\delta_a}} = \frac{1}{Sq} \frac{\partial F_{Y_{\delta_a}}}{\partial \delta_a}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$L_\beta = \frac{Sqb}{I_X} C_{l_\beta}$	$\frac{1}{\text{s}^2}$	$C_{l_\beta} = \frac{1}{Sqb} \frac{\partial L}{\partial \beta}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$L_p = \frac{Sqb}{I_X} \left(\frac{b}{2U} \right) C_{l_p}$	$\frac{1}{\text{s}}$	$C_{l_p} = \frac{1}{Sqb} \left(\frac{2U}{b} \right) \frac{\partial L}{\partial p}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$L_r = \frac{Sqb}{I_X} \left(\frac{b}{2U} \right) C_{l_r}$	$\frac{1}{\text{s}}$	$C_{l_r} = \frac{1}{Sqb} \left(\frac{2U}{b} \right) \frac{\partial L}{\partial r}$	$\frac{1}{\text{rad}}$
$L_{\delta_r} = \frac{Sqb}{I_X} C_{l_{\delta_r}}$	$\frac{1}{\text{s}^2}$	$C_{l_{\delta_r}} = \frac{1}{Sqb} \frac{\partial L}{\partial \delta_r}$	$\frac{1}{\text{rad}}$

Tableau II (suite)

Dimensionnelles		Non dimensionnelles	
Symbol	Unité	Symbol	Unité
$L_{\delta_a} = \frac{Sq b}{I_x} C_{l_{\delta_a}}$	$\frac{1}{s^2}$	$C_{l_{\delta_a}} = \frac{1}{Sq b} \frac{\partial L}{\partial \delta_a}$	$\frac{1}{rad}$
$N_\beta = \frac{Sq b}{I_z} C_{n_\beta}$	$\frac{1}{s^2}$	$C_{n_\beta} = \frac{1}{Sq b} \frac{\partial N}{\partial \beta}$	$\frac{1}{rad}$
$N_p = \frac{Sq b}{I_z} \left(\frac{b}{2U} \right) C_{n_p}$	$\frac{1}{s}$	$C_{n_p} = \frac{1}{Sq b} \left(\frac{2U}{b} \right) \frac{\partial N}{\partial p}$	$\frac{1}{rad}$
$N_r = \frac{Sq b}{I_z} \left(\frac{b}{2U} \right) C_{n_r}$	$\frac{1}{s}$	$C_{n_r} = \frac{1}{Sq b} \left(\frac{2U}{b} \right) \frac{\partial N}{\partial r}$	$\frac{1}{rad}$
$N_{\delta_r} = \frac{Sq b}{I_z} C_{n_{\delta_r}}$	$\frac{1}{s^2}$	$C_{n_{\delta_r}} = \frac{1}{Sq b} \frac{\partial N}{\partial \delta_r}$	$\frac{1}{rad}$
$N_{\delta_a} = \frac{Sq b}{I_z} C_{n_{\delta_a}}$	$\frac{1}{s^2}$	$C_{n_{\delta_a}} = \frac{1}{Sq b} \frac{\partial N}{\partial \delta_a}$	$\frac{1}{rad}$

développant $\sum \Delta L$ et $\sum \Delta N$ et en substituant les résultats dans l'équation (1.42) on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} I_x - \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \ddot{\psi} I_{xz} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - \frac{\partial L}{\partial \beta} \beta &= L_a \\ -\ddot{\phi} I_{xz} - \frac{\partial N}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \ddot{\psi} I_z - \frac{\partial N}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - \frac{\partial N}{\partial \beta} \beta &= N_a \end{aligned} \quad (1.54)$$

En divisant par Sqb , où b est l'envergure de l'aile de l'avion, et en se servant des dérivées de stabilité non dimensionnelles montrées dans le tableau II. l'équation (1.54) devient :

$$\begin{aligned} \frac{I_x}{Sqb} \ddot{\phi} - \frac{b}{2U} C_{l_p} \dot{\phi} - \frac{I_{xz}}{Sqb} \ddot{\psi} - \frac{b}{2U} C_{l_r} \dot{\psi} - C_{l_\beta} \beta &= \frac{L_a}{Sqb} = C_{l_a} \\ -\frac{I_{xz}}{Sqb} \ddot{\phi} - \frac{b}{2U} C_{n_p} \dot{\phi} - \frac{I_z}{Sqb} \ddot{\psi} - \frac{b}{2U} C_{n_r} \dot{\psi} - C_{n_\beta} \beta &= \frac{N_a}{Sqb} = C_{n_a} \end{aligned} \quad (1.55)$$

Les équations (1.53) et (1.55) sont les équations découplées et linéarisées du mouvement latéral. Elles sont non dimensionnelles.

Une *dérivée de stabilité non dimensionnelle* (e.g. C_{l_p}) [28] est importante, car la corrélation entre les caractéristiques aérodynamiques, de différents modèles ou du même modèle pour différentes conditions de vol, est atteinte facilement avec ces dérivées de stabilité. Pour déterminer les fonctions de transfert analytiques et d'en arriver à un modèle d'état, il est nécessaire d'utiliser les *dérivées de stabilité dimensionnelles*. Une dérivée de stabilité est une expression algébrique formée d'une dérivée et de paramètres (masse, moments d'inertie, pression dynamique, surface, coefficients aérodynamique etc...) ayant une valeur numérique obtenue par rapport au repère (systèmes d'axes) de stabilité. Une *dérivée de stabilité dimensionnelle* est importante (e.g. L_p), car elle conduit directement aux coefficients numériques dans l'ensemble des équations différentielles décrivant le modèle d'avion en temps réel. Alors les dérivées de stabilité dans cette forme sont très utilisables dans le but d'obtenir un modèle mathématique programmable dans un ordinateur digital. Pour la dynamique latérale de l'avion les relations qui lient les dérivées de stabilité dimensionnelles et non dimensionnelles sont :

$$\begin{aligned}
 F_Y &= C_Y \left(\frac{1}{2} \rho V_T^2 \right) S \\
 L &= C_L \left(\frac{1}{2} \rho V_T^2 \right) S b \\
 N &= C_n \left(\frac{1}{2} \rho V_T^2 \right) S b
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Cependant, dans le repère de stabilité, la vitesse linéaire totale V_T , durant les conditions de vol en régime permanent, est égale à U_0 qui est la vitesse suivant l'axe OX. Après avoir été perturbé à partir du régime permanent, l'avion possède des composantes $U_0 + u$, v , w suivant les axes OX, OY et OZ respectivement.

$$V_T = \sqrt{(U_0 + u)^2 + v^2 + w^2} \tag{1.57}$$

Les vitesses u , v et w sont très petites, donc leur produits et leurs carrés sont négligeables :

$$V_T = \sqrt{U_0^2 + 2U_0 u^2} \tag{1.57a}$$

$$V_T \approx U_0 \left(1 + \frac{u}{U_0} \right) \approx U_0 \tag{1.57b}$$

Le rapport (u / U_0) est très petit devant l'unité. Sous ces conditions, les équations (1.56) deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 F_y &= C_y \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) S \\
 L &= C_l \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) Sb \\
 N &= C_n \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) Sb
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

Sachant que $q = \frac{1}{2} \rho U^2$, alors les équations (1.58) deviennent finalement :

$$\begin{aligned}
 F_y = C_y Sq &\Rightarrow \partial F_y = Sq \partial C_y \\
 L = C_l Sqb &\Rightarrow \partial L = Sqb \partial C_l \\
 N = C_n Sqb &\Rightarrow \partial N = Sqb \partial C_n
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

1.4.5 Équations d'état du modèle latéral

Réécrivons les équations (1.53) et (1.55) en tenant compte que $\dot{\phi} = p$ et $\psi = r$:

$$\begin{aligned}
 -\frac{b}{2U} C_{Y_p} p - C_{Y_\phi} \phi + \left(\frac{mU}{Sq} - \frac{b}{2U} C_{Y_r} \right) r - C_{Y_\psi} \psi + \frac{mU}{Sq} \dot{\beta} + C_{y_\beta} \beta &= C_{Y_a} \\
 \frac{I_x}{Sq b} \dot{p} - \frac{b}{2U} C_{l_p} p - \frac{I_{xz}}{Sq b} \dot{r} - \frac{b}{2U} C_{l_r} r - C_{l_\beta} \beta &= C_{l_a} \\
 -\frac{I_{xz}}{Sq b} \dot{p} - \frac{b}{2U} C_{n_p} p - \frac{I_z}{Sq b} \dot{r} - \frac{b}{2U} C_{n_r} r - C_{n_\beta} \beta &= C_{n_a}
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

Les forces et moments aérodynamiques extérieures, provenant de la déflexion des ailerons et du gouvernail de directions, sont comme suit :

$$\begin{aligned} C_{Y_a} &= C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \\ C_{l_a} &= C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \\ C_{n_a} &= C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r \end{aligned} \quad (1.61)$$

La dérivée de stabilité latérale $C_{Y_{\delta_a}}$ de la force latérale F_Y est nulle dans la plus part des avions conventionnels [28].

Substituant l'équation (1.61) dans l'équation (1.60), ensuite en se servant des dérivées de stabilité dimensionnelles définies dans le tableau II, nous aboutissons aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{Y_p}{U} p + \left(\frac{g}{U} \cos \theta \right) \phi + \left(\frac{Y_r}{U} - 1 \right) r + \frac{Y_\rho}{U} \beta + \left(\frac{g}{U} \sin \theta \right) \psi + Y_{\delta_r} \delta_r, \\ \dot{p} &= \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{r} + L_r r + L_p p + L_\beta \beta + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{r} &= \frac{I_{xz}}{I_z} \dot{p} + N_p p + N_r r + N_\beta \beta + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \end{aligned} \quad (1.62)$$

À ce niveau, nous mettrons en évidence l'hypothèse de la trajectoire de vol rectiligne, donc $\theta = 0$. Nous supposerons aussi que le vol s'effectue dans le plan de symétrie, donc $\psi = 0$. De plus C_{Y_p} et C_{Y_r} ont peu d'importance dans la dynamique latérale, donc il est souvent pratique de négliger Y_p et Y_r [28]. Sous ces conditions les équations (1.62) deviennent comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{g}{U} \phi - r + \frac{Y_\beta}{U} \beta + Y_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{p} &= \frac{I_{xz}}{I_x} \dot{r} + L_r r + L_p p + L_\beta \beta + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{r} &= \frac{I_{xz}}{I_z} \dot{p} + N_p p + N_r r + N_\beta \beta + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \end{aligned} \quad (1.63)$$

Les équations de roulis et de lacet de l'ensemble d'équations (1.63) contiennent respectivement la vitesse de lacet \dot{r} et la vitesse de roulis \dot{p} . Afin d'éliminer ces vitesses de chaque équation, premièrement il faut substituer \dot{r} dans \dot{p} ensuite faire l'inverse. Nous aboutissons donc aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{p} &= L'_\beta \beta + L'_p p + L'_r r + L'_{\delta_a} \delta_a + L'_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{r} &= N'_\beta \beta + N'_p p + N'_r r + N'_{\delta_a} \delta_a + N'_{\delta_r} \delta_r\end{aligned}\quad (1.64)$$

Avec

$$\begin{aligned}L'_i &= \frac{L_i + (I_{xz}/I_x)N_i}{1 - (I_{xz}^2/I_x I_z)} \\ N'_i &= \frac{N_i + (I_{xz}/I_z)L_i}{1 - (I_{xz}^2/I_x I_z)}\end{aligned}\quad (1.65)$$

Regroupons les équations finales représentant le décrochage, le roulis et le lacet :

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{Y_\beta}{U} \beta - r + \frac{g}{U} \phi + Y_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{p} &= L'_\beta \beta + L'_p p + L'_r r + L'_{\delta_a} \delta_a + L'_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{r} &= N'_\beta \beta + N'_p p + N'_r r + N'_{\delta_a} \delta_a + N'_{\delta_r} \delta_r\end{aligned}\quad (1.66)$$

L'ensemble d'équations (1.66) sont les équations d'état du mouvement latéral linéarisé à coefficients constants sous certaines conditions de vol bien établies tel que la vitesse, la masse, l'attitude etc. Cependant pour des fins de calculs, une représentation matricielle est beaucoup plus utilisable que la représentation classique sous forme d'équations différentielles. Donc, un modèle d'état est caractérisé par quatre matrices; la matrice des paramètres A , la matrice de contrôle (entrées) B , la matrice des sorties C et une matrice

de couplage \mathbf{D} des entrées et sorties. Finalement la représentation complète dans l'espace d'état est la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{1.67}$$

$\mathbf{x}(t)$ est le vecteur d'état ($n \times 1$)

$\mathbf{u}(t)$ est le vecteur d'entrée ($m \times 1$)

$\mathbf{y}(t)$ est le vecteur de sortie ($r \times 1$)

\mathbf{A} est la matrice des paramètres ($n \times n$)

\mathbf{B} est la matrice de couplage des entrées ($n \times m$)

\mathbf{C} est la matrice de couplage des sorties ($r \times n$)

\mathbf{D} est la matrice de couplage ($r \times m$)

Le système dynamique linéaire à paramètres constants du mouvement latéral de l'avion est décrit par un ensemble de variables d'états qui sont respectivement, l'angle de dérapage (décrochage) β , la vitesse angulaire de roulis p , la vitesse angulaire de lacet r et l'angle de roulis ϕ .

$$\mathbf{x} = [\beta, p, r, \phi]^T$$

Particulièrement dans le cas conventionnel, le vecteur de commande représentant les surfaces de contrôle qui sont les ailerons et le gouvernail de direction, est le suivant :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{A} des paramètres du modèle est :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{U} & 0 & -1 & \frac{g}{U} \\ \frac{U}{U} & L'_p & L'_r & 0 \\ L'_\beta & N'_p & N'_r & 0 \\ N'_\beta & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice B de contrôle est :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_r} \\ L'_{\delta_a} & L'_{\delta_r} \\ N'_{\delta_a} & N'_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.6 Les modes du mouvement latéral

L'équation caractéristique représentant le mouvement latéral dans la plus part des cas est la suivante :

$$\det[sI - A] = (s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2) \left(s + \frac{1}{\tau_s} \right) \left(s + \frac{1}{\tau_R} \right) = 0$$

Il existe donc trois modes dynamiques qui sont :

1. Le mode roulis hollandais “Dutch Roll”: Le terme du second degré représente un couplage de mouvement entre le lacet et le roulis. Ce mode est oscillant et n'est pas suffisamment amorti.
2. Le mode spiral “spiral”: C'est un mode généralement très lent et situé tout près de l'origine du plan complexe.

3. Le mode roulis amortis “Roll subsidence” : Ce mode est généralement non-oscillant et très amortis comme son nom l’indique. Il est situé beaucoup plus à gauche que les deux autres modes dans le plan complexe.

Dans certains cas les modes du roulis amortis et roulis spiral sont couplés pour former un mode oscillant.

CHAPITRE 2

PLACEMENT DE STRUCTURE PROPRE

Dans ce chapitre, on fait l'étude de la méthode de placement de structure propre "Eigenstructure Assignment". Cette technique de commande étant applicable sur des modèles représentés dans l'espace d'état, par conséquent, il est impératif de faire quelques brefs rappels de certaines notions d'algèbre linéaire ainsi que des notions de commande par retour d'état et de sortie afin d'arriver à notre objectif. Après avoir traité cette méthode, on donnera quelques outils qui aident à l'analyse de la robustesse du contrôleur. Par la suite on traitera une méthode systématique qui réduit la complexité du contrôleur, obtenu par la méthode de placement de structure propre, en annulant certains de ses gains. Enfin on termine le chapitre par l'étude de la compensation dynamique dans le cas où une sortie ne serait pas mesurable.

2.1 Représentation dans l'espace d'état

Soit un système linéaire invariant dans le temps (LTI) décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t = 0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.1}$$

$x(t)$ est le vecteur d'état ($n \times 1$)

$u(t)$ est le vecteur d'entrée ($m \times 1$)

$y(t)$ est le vecteur de sortie ($r \times 1$)

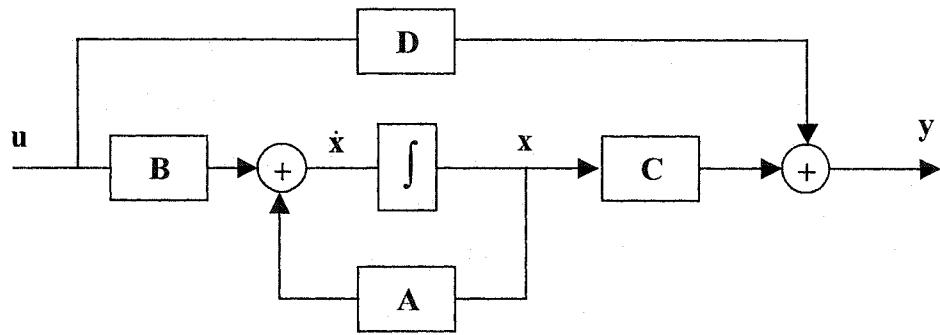


Figure 2.1 Diagramme bloc d'un modèle en boucle ouverte dans l'espace d'état

A est la matrice des paramètres du système ($n \times n$)

B est la matrice de couplage des entrées ($n \times m$)

C est la matrice de couplage des sorties ($r \times n$)

D est la matrice de couplage ($r \times m$)

x_0 est le vecteur des conditions initiales ($n \times 1$)

Dans ce qui suit, on assume que la paire (A,B) est **commandable** et (A,C) est **observable**.

Les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice A qui sont les solutions de l'équation caractéristique du même système :

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2.2)$$

Diagonalisation :

Si la matrice A possède des valeurs propres distinctes, $\{\lambda_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, alors il existe une transformation de similarité M tel que $M^{-1}AM$ est une matrice diagonale.

Faisons un changement de variable :

$$\text{On pose : } \mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0$$

$$\text{Donc : } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

d'où :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{u} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

\mathbf{M} est la matrice modale formée par les vecteurs propres du système qui sont linéairement indépendants et engendrant un espace vectoriel.

$$\mathbf{M} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (2.5)$$

Par conséquent :

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n^T \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Les vecteurs propres à droite \mathbf{v}_i sont les colonnes de la matrice modale \mathbf{M} . Les vecteurs propres à gauche \mathbf{w}_i^T sont les lignes de la matrice inverse (\mathbf{M}^{-1}) de la matrice modale \mathbf{M} . $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$, donc, Les vecteurs propres à droite et à gauche sont orthogonaux, et vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} [\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{v}_i &= 0 \\ \mathbf{w}_i^T [\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (2.8)$$

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{w}_i^T \quad (2.9)$$

Réponse temporelle du système :

La solution générale du système d'état est de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Le terme e^{At} est appelé **matrice de transition**. Ce n'est qu'une approximation de la solution $\mathbf{x}(t)$ par une série de puissance (série de Taylor) calculée à l'instant $t = 0$.

Supposons un système très simple :

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad (2.11)$$

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2!} + \dots + x_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \dots = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \right] x_0 \quad (2.12)$$

$x_0, \dot{x}_0, x_0^{(k)}$, représentent les valeurs des dérivées successives de x par rapport au temps $t = 0$.

De façon générale, $x_0^{(k)} = A^{(k)} x_0$ et $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\phi(t) = e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots$$

D'après l'équation (2.4)

$$\begin{aligned} \phi(t) &= I + (M\Lambda M^{-1})t + \frac{t^2}{2!} (M\Lambda M^{-1})^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} (M\Lambda M^{-1})^k + \dots \\ &= M \left[I + \Lambda t + \frac{t^2}{2!} \Lambda^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} \Lambda^k + \dots \right] M^{-1} = M e^{\Lambda t} M^{-1} \\ &= M e^{\Lambda t} M^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sachant que :

$$e^{\Lambda t} = e^{M^{-1}AMt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Substituons l'équation (2.14) dans l'équation (2.13) :

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \\
 &= v_1 e^{\lambda_1 t} w_1^T + v_2 e^{\lambda_2 t} w_2^T + \dots + v_n e^{\lambda_n t} w_n^T \\
 &= \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} w_i^T
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Finalement la réponse temporelle sera obtenue en faisant des substitutions premièrement dans l'équation (2.10) :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n v_i e^{\lambda_i t} w_i^T x_0 + \sum_{i=1}^n v_i w_i^T B \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u(\tau) d\tau \tag{2.16}$$

Ensuite, sachant que $y(t) = C x(t)$, on obtient alors :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n (C v_i) e^{\lambda_i t} w_i^T x_0 + \sum_{i=1}^n (C v_i) (w_i^T B) \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u(\tau) d\tau \tag{2.17}$$

On constate donc d'après l'équation qui précède que la réponse temporelle dépend de quatre paramètres qui sont :

- 1) Les valeurs propres λ_i
- 2) Les vecteurs propres droits v_i et gauches w_i
- 3) Les conditions initiales du système x_0
- 4) L'entrée du système $u(\tau)$

Chacun de ces quatre paramètres joue un rôle important pour obtenir la réponse temporelle de chaque sortie du système. On peut remarquer particulièrement la présence des valeurs propres et des vecteurs propres correspondant dans le régime transitoire et le régime forcé qui composent la réponse temporelle finale de chaque sortie du système. En effet, si les éléments (représentés par les variables d'états) composants les vecteurs propres sont altérés, il s'ensuit que les modes dynamiques du système interagiront différemment avec ces variables et cela aura pour conséquence soit une amélioration ou une détérioration de la réponse temporelle de la sortie considérée.

2.2 Placement de pôles par retour d'état

Un retour d'état consiste en une rétroaction de gain K de dimension ($m \times n$) entre l'état x et l'entrée u (figure 1.2).

$$u = u_{ref} - Kx$$

$$\dot{x} = Ax + B(u_{ref} - Kx) = (A - BK)x + Bu_{ref}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bu_{ref} \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.18)$$

Le placement de pôles par retour d'état est plus simple à effectuer lorsque le système est sous une forme canonique de commandabilité. L'avantage d'une telle forme réside dans le fait que les coefficients de l'équation caractéristique du système sont ceux apparaissant dans la dernière ligne de la matrice A. Alors l'équation caractéristique du système en boucle ouverte est :

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

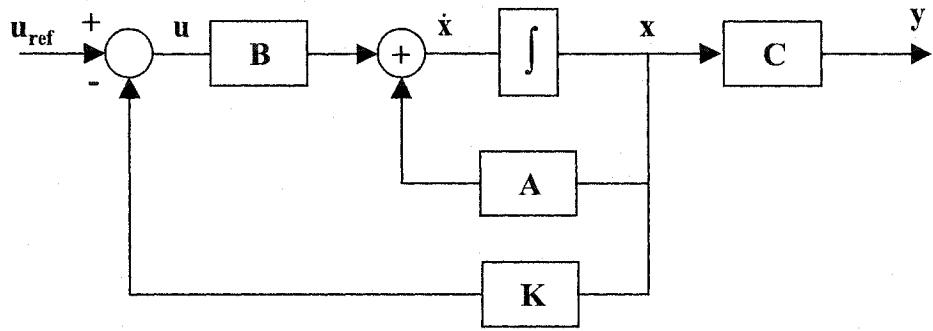


Figure 2.2 Diagramme bloc d'un contrôleur par retour d'état

Soit un ensemble de valeurs propres désirées distinctes en boucle fermée :

$$\{\lambda_i^d\}, i = 1, 2, \dots, n$$

Si le contrôle du système sous une forme canonique de commandabilité se fait avec une rétroaction $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, alors l'équation caractéristique du système en boucle fermée est :

$$(\lambda - \lambda_1^d)(\lambda - \lambda_2^d) \dots (\lambda - \lambda_n^d) = \lambda^n + (a_{n-1} + k_n)\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 + k_2)\lambda + a_0 + k_1 \quad (2.19)$$

2.3 Placement de pôles par retour de sortie

Un retour d'état consiste en une rétroaction de gain K de dimension $(m \times r)$ entre la sortie y et l'entrée u (figure 1.3).

$$u = u_{ref} - Ky$$

$$\dot{x} = Ax + B(u_{ref} - Ky) = Ax + B(u_{ref} - KCx)$$

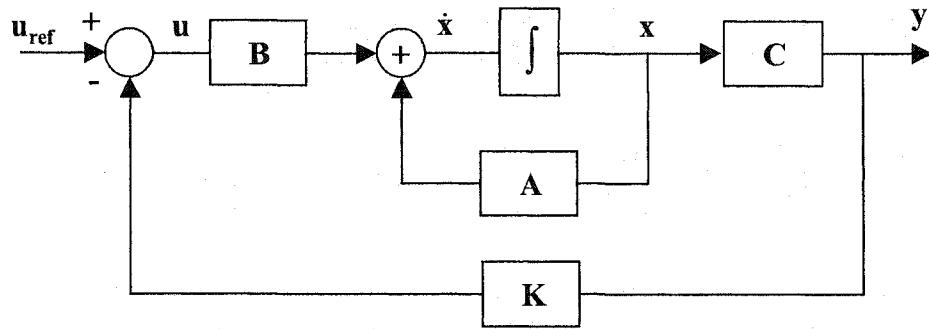


Figure 2.3 Diagramme bloc d'un contrôleur par retour de sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BKC)x + Bu_{ref} \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.20)$$

2.4 Méthode par placement de structure propre

La méthode de placement de structure propre est une extension de la technique de positionnement de pôles que ce soit par retour d'état ou de sortie. En plus de placer les pôles (valeurs propres) désirés en boucle fermée dans le but d'affecter la réponse temporelle du système, on positionne aussi les vecteurs propres désirés du système dans le but de découpler les modes entre eux. Plus les vecteurs propres sont orthogonaux, plus le système est découplé et la robustesse est accrue en terme de sensibilité des valeurs propres aux perturbations. Cette sensibilité est mesurée par le *nombre de conditionnement* dont l'importance sera montrée ultérieurement dans la partie robustesse. On doit souligner qu'en contrôle avionique du moins, et d'un point de vue pratique, il est beaucoup plus préférable d'utiliser un retour de sortie, car il est plus facile d'avoir accès aux sorties qu'aux états.

Soit un système linéaire invariant dans le temps (LTI) décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.21}$$

Où, $x \in R^n$, $u \in R^m$, et $y \in R^r$

On assume que les matrices B et C sont de rang maximum: $\text{rang}[B] = m$ et $\text{rang}[C] = r$. Comme c'est le cas habituellement en avionique, on assume que : $m \leq r \leq n$

Il a été montré par Srinathkumar [3] que :

Théorème :

Soit un système linéaire invariant dans le temps est commandable et observable décrit par (2.1), et que les matrices B et C sont de rang maximum, alors $\max(m,r)$ valeurs propres peuvent être choisies et $\max(m,r)$ vecteurs propres correspondants peuvent être placés partiellement avec $\min(m,r)$ éléments dans chaque vecteur arbitrairement choisi en utilisant un gain constant par retour de sortie.

D'après [26], le noyau d'une matrice est :

Pour un système d'équations homogènes $AX = 0$, l'ensemble des solutions X constitue un espace vectoriel de dimension N_A appelé *noyau* (Kernel) de A ou espace vide de A, et noté $\text{Ker}(A)$

Soit un ensemble de valeurs propres désirées distinctes en boucle fermée $\{\lambda_i^d\}, i = 1, 2, \dots, r$ et un ensemble de vecteurs propres correspondant $\{v_i^d\}, i = 1, 2, \dots, r$

En considérant que l'action du pilote est nulle, ($\mathbf{u}_{ref} = 0$), on a la loi de commande suivante :

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{y}(t) \quad (2.22)$$

K étant la matrice de gain réels par retour de sortie de dimension (m x r).

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} \quad (2.23)$$

Pour chaque mode désiré, les vecteurs propres du système en boucle fermée satisfont l'équation suivante :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{v}_i = \lambda_i^d \mathbf{v}_i \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, r \quad (2.24)$$

$$(\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_i + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i = 0 \quad (2.25)$$

donc :

$$\mathbf{v}_i = -(\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i \quad (2.26)$$

$$\text{avec } \mathbf{m}_i = -\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i \text{ et } \mathbf{L}_i = (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{m}_i \quad (2.27)$$

On voit bien que l'existence d'une solution, \mathbf{m}_i , nécessite que les vecteurs propres \mathbf{v}_i soient une combinaison linéaire des colonnes de la matrice \mathbf{L}_i :

$$\mathbf{L}_i = (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (2.28)$$

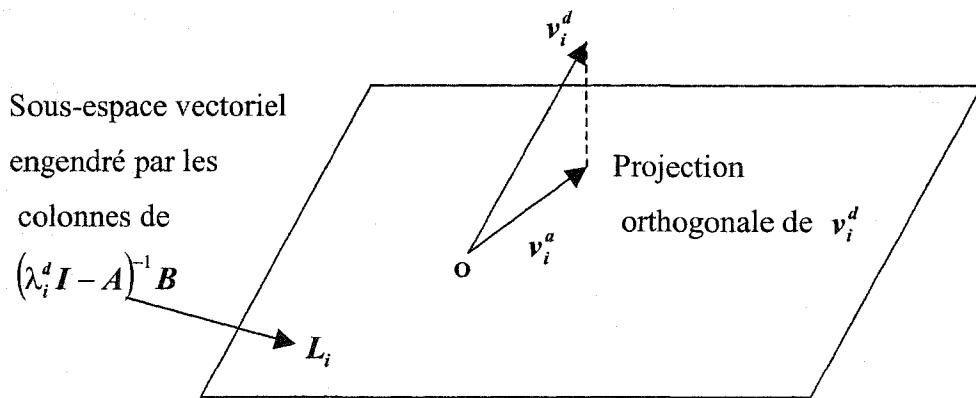


Figure 2.4 Interprétation géométrique de v_i^d , v_i^a et L_i

Les vecteurs propres bien choisis v_i^d devraient être répartis dans le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de $(\lambda_i^d I - A)^{-1} B$. Ce sous-espace est de dimension m , qui est égal au rang de la matrice B et qui est égal aussi au nombre de variables indépendantes de contrôle. Cependant les vecteurs propres désirés ne se trouvent pas souvent dans ce sous-espace prescrit, alors on doit faire une projection orthogonale des vecteurs v_i^d sur ce sous-espace pour obtenir des vecteurs réalisables v_i^a (figure 2.4).

Il existe deux autres alternatives pour calculer le sous espace vectoriel dans le quel réside les vecteurs réalisables. La première alternative est la suivante :

Réécrire l'équation (2.25) sous une autre forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^d I - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ KCv_i \end{bmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

C'est une équation homogène de la forme $AX = 0$

Alors pour une solution non triviale les vecteurs réalisables sont projetés sur l'espace nul de la matrice $\begin{bmatrix} \lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i \end{bmatrix} \in \ker \begin{bmatrix} \lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La deuxième alternative d'après Kautsky et al. [15] est que le sous-espace vectoriel représenté par la matrice \mathbf{L}_i est donné par le noyau de :

$$\mathbf{L}_i = N \left\{ \mathbf{U}_1^T (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A}) \right\} \quad (2.31)$$

Où \mathbf{U}_1 est obtenu à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice \mathbf{B} .

Cette méthode montrée par Kautsky et al. est plus précise numériquement que la première alternative [10].

Décomposition en valeurs singulières de la matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (2.32)$$

Dans Matlab on écrit : $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{B})$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

\mathbf{S} est une matrice diagonale renfermant les valeurs singulières de la matrice \mathbf{B} .

Σ est une matrice diagonale renfermant les valeurs singulières non nulles de la matrice \mathbf{B} .

Récrivons la matrice B sous la forme suivante :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{U}_1] \begin{bmatrix} \Sigma V^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

\mathbf{U} ($n \times n$) et P ($m \times m$) sont des matrices orthogonales.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1] \quad (2.35)$$

ΣV^T est une matrice non-singulière.

Soit a le rang de la matrice Σ . Alors \mathbf{U}_0 est de dimension ($n \times a$), et \mathbf{U}_1 est de dimension ($n \times (n-a)$). Alors nous avons les propriétés suivantes : $\mathbf{U}_0^T \mathbf{U}_0 = \mathbf{I}$ et $\mathbf{U}_0^T \mathbf{U}_1 = 0$.

On peut réécrire l'équation (2.24) en boucle fermée sous une autre forme pour tous les modes désirés une fois que les vecteurs réalisables sont déterminés :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BKC})\mathbf{V} = \mathbf{V}\Lambda_d \quad (2.36)$$

$$-\mathbf{BKC} = \mathbf{V}\Lambda_d \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{A} \quad (2.37)$$

En utilisant les équations (2.34) et (2.37) on obtient deux équations :

$$-\Sigma P^T KC = \mathbf{U}_0^T (\mathbf{V}\Lambda_d \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{A}) \quad (2.38)$$

$$0 = \mathbf{U}_1^T (\mathbf{V}\Lambda_d \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{A}) \quad (2.39)$$

Alors pour chaque mode désiré on réécrit l'équation (2.39) comme suit :

$$0 = \mathbf{U}_1^T (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{v}_i \quad (2.40)$$

et sachant que la matrice \mathbf{U} est orthogonale on aboutit bien à l'égalité suivante :

$$\mathbf{U}^T [\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad | \quad \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0^T (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A}) & | & \Sigma V^T \\ \mathbf{U}_1^T (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A}) & | & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Alors pour une solution non triviale (2.40) il faut que les vecteurs réalisables résident dans l'espace nul ou le noyau de la matrice $[\mathbf{U}_1^T (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A})]$. D'après l'équation (2.41) on peut comprendre que l'espace nul est mieux identifié dans le cas de l'équation (2.40) que celui représenté par l'équation (2.29).

2.4.1 Calcul des vecteurs propres

L'équation (2.27) des vecteurs propres réalisables du système en boucle fermé est :

$$\mathbf{v}_i^a = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i \quad \text{avec } \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m \quad (2.42)$$

Le vecteur \mathbf{z}_i , correspondant à la projection orthogonale de \mathbf{v}_i^d , est choisi de telle manière que, **l'erreur soit minimale** dans le sens des moindres carrés, entre le vecteur propre désiré et celui réalisable.

$$J = \|\mathbf{v}_i^d - \mathbf{v}_i^a\|_2^2 = \|\mathbf{v}_i^d - \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i\|_2^2 \quad (2.43)$$

On dérive par rapport à \mathbf{z}_i

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dz_i} &= 2L_i^T(L_i z_i - v_i^d) \\ \frac{dJ}{dz_i} = 0 &\Rightarrow z_i = (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T v_i^d\end{aligned}\tag{2.44}$$

Par conséquent :

$$v_i^d = L_i (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T v_i^d = L_i L_i^+ v_i^d\tag{2.45}$$

$L_i^+ = (L_i^T L_i)^{-1} L_i^T$ est la matrice pseudo - inversre de la matrice L_i . On fait cette opération lorsqu'on veut inverser une matrice qui n'est pas carrée.

On avait affirmé que les vecteurs propres sont partiellement assignés c'est à dire que dans beaucoup de situations pratiques, on n'a pas besoin de spécifier certains éléments de chaque vecteur propre désiré. Donc on divisera chaque vecteur en deux sous parties :

Une sous partie contiendra les éléments désignés (v_{ij}) et l'autre sous partie, représente les éléments ignorés (x) par le concepteur. Soit donc un vecteur propre désiré tel que : $v_i^d = [v_{i1}, x, x, x, v_{ij}, x, x, v_{in}]^T$. Définissons un opérateur $\{\cdot\}^{R_i}$ [4] signifiant un vecteur propre réordonné et une matrice R de permutation servant à réordonner un vecteur propre désiré. Alors les vecteurs propres réordonnés sont :

$$\{v_i^d\}^{R_i} = R v_i^d = \begin{bmatrix} l_i^d \\ d_i \end{bmatrix}\tag{2.46}$$

Où l_i^d sont les composantes spécifiées et d_i sont les composantes non spécifiées. Par conséquent on doit réorganiser aussi l'espace vide :

$$\{\mathbf{L}_i\}^{R_i} = \mathbf{R}\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_i \\ \mathbf{D}_i \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

On réécrit donc l'équation (2.44) :

$$\mathbf{z}_i = (\tilde{\mathbf{L}}_i^T \tilde{\mathbf{L}}_i)^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{l}_i^d = \tilde{\mathbf{L}}_i^+ \mathbf{l}_i^d \quad (2.48)$$

On substitue l'équation (2.48) dans l'équation (2.42) :

$$\mathbf{v}_i^a = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i = \mathbf{L}_i \tilde{\mathbf{L}}_i^+ \mathbf{l}_i^d \quad (2.49)$$

Jusqu'ici les calculs ont été faits uniquement dans le cas des valeurs propres désirées réelles. Par conséquent l'équation (2.49) représente les vecteurs propres réalisables réels (partie imaginaire nulle). Concernant les valeurs propres désirées complexes, on doit apporter les modifications suivantes dans le calcul des vecteurs réalisables complexes :

$$\mathbf{v}_i^a = \mathbf{v}_R^a + j\mathbf{v}_I^a \quad (2.50)$$

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_R + j\mathbf{z}_I \quad (2.51)$$

donc l'équation (2.42) devient :

$$\mathbf{v}_R^a + j\mathbf{v}_I^a = [\mathbf{Re}\{\mathbf{L}_i\} + j\mathbf{Im}\{\mathbf{L}_i\}][\mathbf{z}_R + j\mathbf{z}_I] \quad (2.52)$$

Effectuons le produit et égalisons les termes réels et imaginaires séparément :

$$\mathbf{v}_R^a = \mathbf{Re}\{\mathbf{L}_i\} \cdot \mathbf{z}_R - \mathbf{Im}\{\mathbf{L}_i\} \cdot \mathbf{z}_I \quad (2.53)$$

$$\mathbf{v}_I^a = \text{Im}\{\mathbf{L}_i\} \cdot \mathbf{z}_R + \text{Re}\{\mathbf{L}_i\} \cdot \mathbf{z}_I \quad (2.54)$$

Combinons les équations (2.53) et (2.54) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_R^a \\ \mathbf{v}_I^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re } \mathbf{L}_i & -\text{Im } \mathbf{L}_i \\ \text{Im } \mathbf{L}_i & \text{Re } \mathbf{L}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_R \\ \mathbf{z}_I \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Maintenant si les valeurs propres désirées sont complexes alors automatiquement les vecteurs propres désirés sont complexes aussi et par conséquent on doit les représenter sous la forme suivante :

$$\mathbf{v}_i^d = \mathbf{v}_R^d + j\mathbf{v}_I^d \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v}_R^d \\ \mathbf{v}_I^d \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Alors suite à ces modifications, pour des valeurs propres désirées réelles, on doit utiliser l'équation (2.49) alors que pour des valeurs propres complexes, on remplace l'équation (2.42) par l'équation (2.55) ensuite, on reprend exactement le même cheminement à partir de l'équation (2.46) jusqu'à l'équation (2.49).

2.4.2 Calcul du gain par retour de sortie

Après avoir obtenu les vecteurs réalisables \mathbf{v}_i^a , reprenons l'équation (2.36) du système en boucle fermée $(A - BK)Y = V\Lambda_d$, où V est une matrice de dimension $(n \times r)$ dont les colonnes sont les vecteurs réalisables $V = [\mathbf{v}_{a1} \ \mathbf{v}_{a2} \ \dots \ \mathbf{v}_{ar}]$ et Λ_d est la matrice diagonale, de dimension $(r \times r)$, des valeurs propres désirées $\Lambda_d = \text{diag}(\lambda_{d1}, \lambda_{d2}, \dots, \lambda_{di})$.

En utilisant l'équation (2.36), on arrive à :

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B}^+ (\mathbf{V}\Lambda_d - \mathbf{A}\mathbf{V})(\mathbf{C}\mathbf{V})^{-1} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{K} = -\mathbf{V}_b \Sigma_b^{-1} \mathbf{U}_{b0}^T (\mathbf{V}\Lambda_d - \mathbf{A}\mathbf{V}) \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_{r0}^T \quad (2.57)$$

où les matrices \mathbf{B} et $\mathbf{C}\mathbf{V}$ sont décomposées en valeurs singulières (2.32-2.35):

$$\mathbf{CV} = [\mathbf{U}_{r0}, \quad \mathbf{U}_{r1}] \begin{bmatrix} \Sigma_r \mathbf{V}_r^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$(\mathbf{CV})^{-1} = \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_{r0}^T \quad (2.59)$$

$$\mathbf{B}^+ = -\mathbf{V}_b \Sigma_b^{-1} \mathbf{U}_{b0}^T \quad (2.60)$$

Les indices b et r sont utilisés uniquement pour éviter la confusion dans l'équation (2.57) entre les matrices résultant de la décomposition singulière de \mathbf{B} et $\mathbf{C}\mathbf{V}$. Il faut aussi éviter de confondre entre la matrice modale \mathbf{V} des vecteurs propres réalisables et \mathbf{V}_b ou \mathbf{V}_r qui une matrice provenant de la décomposition singulière.

2.4.3 Résumé de l'algorithme

- Choisir les valeurs propres désirées λ_i^d et les vecteurs propres désirés \mathbf{v}_i^d ;
- Réordonner les vecteurs propres désirés de façon à séparer les composantes spécifiées des composantes non-spécifiées : $\mathbf{v}_i^d = [\mathbf{v}_{i1} \ \mathbf{v}_{i2} \dots \mathbf{v}_{ij} \ , \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}]^T$;
- Sélectionner les composantes spécifiées du vecteur propre : $\mathbf{l}_i^d = [\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \dots, \mathbf{v}_{ij}]^T$;
- Calculer l'espace nul : $\mathbf{L}_i = \mathbf{N}\{\mathbf{U}_1^T (\lambda_i^d \mathbf{I} - \mathbf{A})\}$;
- Réordonner l'espace nul pour se conformer au réarrangement de \mathbf{v}_i^d :

$$\{\mathbf{L}_i\}^{R_i} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_i \\ \mathbf{D}_i \end{bmatrix};$$

- Projeter les vecteurs propres désirés sur l'espace nul. Pour réaliser cette projection, il faut choisir un vecteur \mathbf{z}_i tel que l'erreur de projection soit minimale : $\mathbf{z}_i = \tilde{\mathbf{L}}_i^+ \mathbf{l}_i^d$;
- Calculer les vecteurs réalisables : $\mathbf{v}_i^a = \mathbf{L}_i \mathbf{z}_i = \mathbf{L}_i \tilde{\mathbf{L}}_i^+ \mathbf{l}_i^d$;
- Calculer les gains du contrôleur : $\mathbf{K} = -\mathbf{P}_b \Sigma_b^{-1} \mathbf{U}_{b0}^T (\mathbf{V} \Lambda_d - \mathbf{A} \mathbf{V}) \mathbf{P}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_{r0}^T$

2.5 Robustesse

Réellement tout modèle d'avion est sujet à des perturbations, donc il est impératif de s'assurer de la robustesse du contrôleur obtenu par la méthode de structure propre. L'objectif n'est pas d'expliquer la robustesse des systèmes multivariables mais plutôt de se donner certains outils pour mesurer la robustesse du contrôleur. Les deux outils dont il est question concernent premièrement la stabilité robuste qui se traduit en termes de marges de gains et de phase et deuxièmement, la sensibilité des valeurs propres aux perturbations. Cette sensibilité est représentée par un nombre de conditionnement "condition number" comme on le verra ultérieurement.

2.5.1 Stabilité robuste

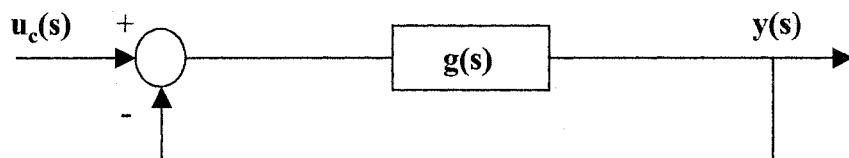


Figure 2.5 Système SISO commandé par retour de sortie

Considérons le système de la figure 2.5 où $g(s)$ est la fonction de transfert stable en boucle ouverte d'un système SISO. Dû aux erreurs de modèle (perturbations), le système est représenté par la fonction de transfert perturbée $\tilde{g}(s)$. La question qui se pose est de savoir si le système en boucle fermée demeure stable si $g(s)$ est remplacé par $\tilde{g}(s)$. Pour répondre à cette question, il faut étudier le diagramme de Nyquist de $\tilde{g}(s)$ (figure 2.6), et déterminer si celui ci encercle le point critique $(-1,0)$ le même nombre de fois que le fait le diagramme de Nyquist de $g(s)$. D'après la figure 2.6, le système en boucle fermée perturbé reste stable tant que le nombre d'encerclements de $(-1,0)$ demeure inchangé. Autrement dit, si la distance $d(\omega)$ dénote la distance de $g(s)$ au point critique $(-1,0)$ et $p(\omega)$ dénote la distance entre $g(j\omega)$ et $\tilde{g}(j\omega)$, il est évident que le système reste stable si $d(\omega) > p(\omega)$ pour toutes les fréquences ω .

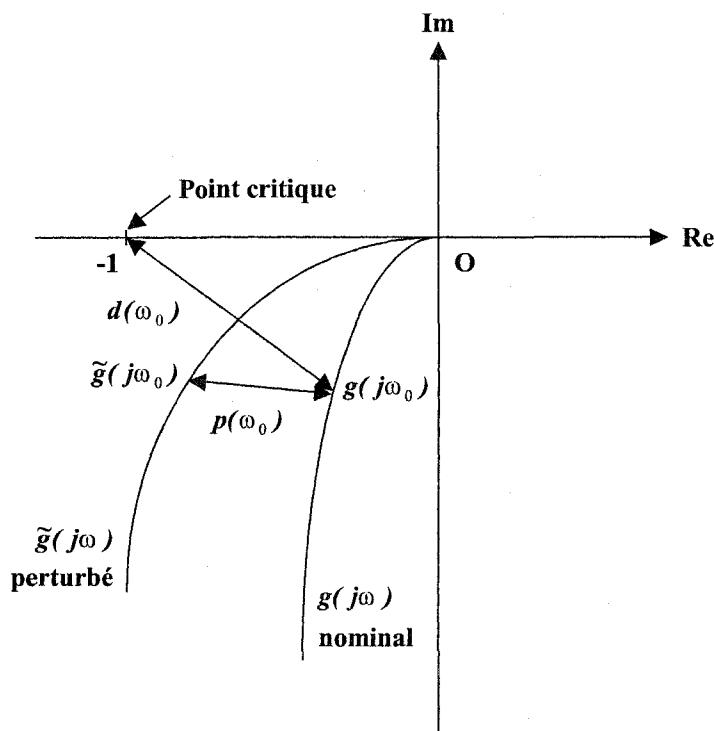


Figure 2.6 Diagramme de Nyquist d'un système SISO nominal $g(j\omega)$ et perturbé $\tilde{g}(j\omega)$

Il existe plusieurs façons de définir $d(\omega)$ et $p(\omega)$, par contre les plus usuelles sont comme suit :

$$d(\omega) = |1 + g(j\omega)| \quad (2.61)$$

$$p(\omega) = |\tilde{g}(j\omega) - g(j\omega)| \quad (2.62)$$

L'équation (2.62) représente l'erreur absolue de modèle (perturbation additive) montrée à la figure 2.7a où $p(\omega) = |e_a(j\omega)|$.

$$e_a(s) = \tilde{g}(s) - g(s) \quad (2.63)$$

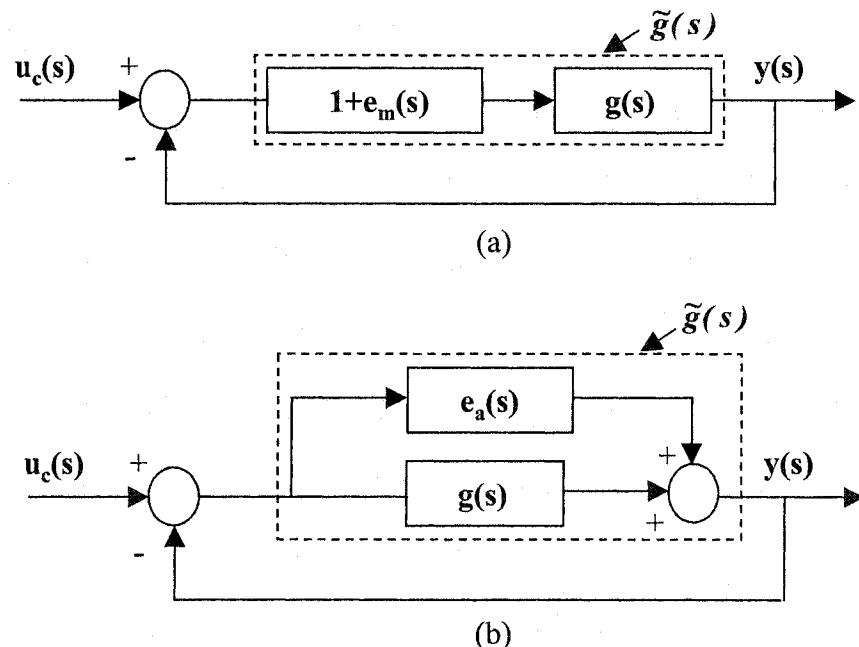


Figure 2.7 (a) Perturbation multiplicative $e_m(s)$, (b) Perturbation additive $e_a(s)$

Alors l'erreur relative de modèle (perturbation multiplicative) entre $g(s)$ et $\tilde{g}(s)$, est définie comme suit (figure 2.7b) :

$$e_m(s) = \frac{e_a(s)}{g(s)} = \frac{\tilde{g}(s) - g(s)}{g(s)} \quad (2.64)$$

Pour ce type d'erreur de modèle (2.64), les distances $d(\omega)$ et $p(\omega)$ deviennent :

$$d(\omega) = |1 + g^{-1}(j\omega)| \quad (2.65)$$

$$p(\omega) = \frac{|\tilde{g}(j\omega) - g(j\omega)|}{g(j\omega)} \quad (2.66)$$

Un système SISO en boucle fermée reste stable dans le cas d'une perturbation additive tant que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$p(\omega) = |e_a(j\omega)| = |\tilde{g}(j\omega) - g(j\omega)| < |1 + g(j\omega)| = d(\omega) \quad (2.67)$$

Par contre un système SISO en boucle fermée reste stable dans le cas d'une perturbation multiplicative tant que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$p(\omega) = |e_m(j\omega)| = \frac{|\tilde{g}(j\omega) - g(j\omega)|}{g(j\omega)} < |1 + g^{-1}(j\omega)| = d(\omega) \quad (2.68)$$

On montre dans les deux dernières équations que si le module de l'erreur (perturbation) demeure inférieur au module du système nominal le plus proche du point critique (-1,0), alors le système en boucle fermée restera stable. Le sens des équations (2.67) et (2.68) peut être traduit aussi par la marge de gain et la marge de phase du gain de la boucle

nominale. Une marge de gain est un facteur qui multiplie l'amplitude du système pour le rendre critiquement stable (le diagramme de Nyquist passe par (-1,0)). Une marge de phase est l'angle qui peut être ajouté au système pour le rendre critiquement stable.

Il a été montré par Lehthomaki (thèse de Ph. D. 1981 [19]), que le principe de Nyquist des systèmes SISO (figure 2.6) peut être généralisé à des systèmes MIMO. Autrement dit, dans le cas des systèmes MIMO, les analogies multivariables des critères (2.67) et (2.68) seront développées en utilisant les valeurs singulières. Celles-ci représentent des bons outils pour mesurer la norme ou le module d'une matrice. À ce niveau, il est nécessaire de faire un bref rappel sur les valeurs singulières et la norme spectrale.

Valeurs singulières et norme spectrale :

Soit une matrice A de valeurs complexes et de dimension ($n \times n$) d'un système linéaire de la forme $Ax = b$, alors la matrice A^* est la matrice complexe conjuguée transposée de A . Si $A^* = A$ alors la matrice A est dite matrice *Hermitienne*. Les valeurs singulières de A sont définies comme étant la racine carrée des valeurs propres de A^*A :

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.69)$$

Le nombre de valeurs singulières non nulles est égal au rang de la matrice A . Les valeurs singulières maximales et minimales de la matrice A sont respectivement :

$$\sigma_{\max}(A) = \bar{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \quad (2.70)$$

$$\sigma_{\min}(A) = \underline{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{\min}(A^*A)} \quad (2.71)$$

La norme spectrale $\|A\|_2$ de A induite par un vecteur de norme Euclidienne est donnée par [48] :

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \bar{\sigma}(A) \quad (2.72)$$

Dans le cas où A dénoterait une matrice de transfert, la définition (2.72) devient [49] :

$$\|A\|_2 = \sup_{\omega} [\bar{\sigma}(A(j\omega))] \quad (2.72a)$$

Dans le cas où A serait non singulière, on définit aussi :

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \underline{\sigma}(A) \quad (2.73)$$

Suite à ces définitions poursuivons l'analyse. Soit $G(s)$ la fonction de transfert d'un système MIMO nominal (2.21) en boucle ouverte incluant un compensateur avant qu'il y ait perturbation (figure 2.8a).

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.74)$$

$$\det[I + G(s)] = \frac{\Phi_{cl}(s)}{\Phi_{ol}(s)} \quad (2.75)$$

Où

$\Phi_{ol} = \det(sI - A)$ est le polynôme caractéristique en boucle ouverte.

$\Phi_{cl} = \det(sI - A + BC)$ est le polynôme caractéristique en boucle fermée.

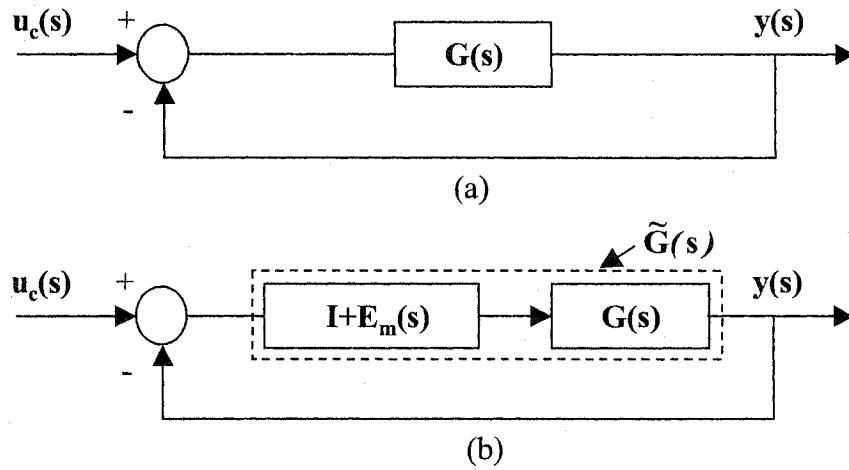


Figure 2.8 (a) Système MIMO commandé par retour de sortie, (b) erreur de modèle multiplicative

Considérons maintenant le système perturbé de la figure (2.8b). $\tilde{G}(s)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte après que le système nominal aurait subit une erreur de modélisation multiplicative $E_m(s)$.

$$\det[I + \tilde{G}(s)] = \frac{\tilde{\Phi}_{cl}(s)}{\tilde{\Phi}_{ol}(s)} \quad (2.76)$$

Où

$\tilde{\Phi}_{ol} = \det(sI - \tilde{A})$ est le polynôme caractéristique en boucle ouverte.

$\tilde{\Phi}_{cl} = \det(sI - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{C})$ est le polynôme caractéristique en boucle fermée.

Définissons une matrice L renfermant les erreurs de modélisation multiplicatives $l_i(j\omega)$ présentes dans chaque boucle. Limitons-nous seulement au cas où L serait diagonale (figure 2.9) tel que :

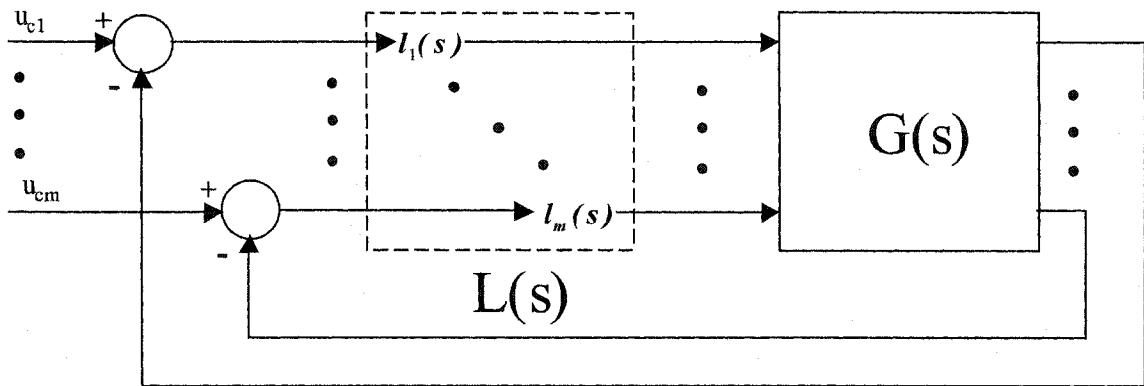


Figure 2.9 Représentation de la définition des marges de gain et de phase multivariante

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{diag}[l_1(j\omega), l_2(j\omega), \dots, l_m(j\omega)] \\ &= \text{diag}[l_1 e^{j\phi_1}, l_2 e^{j\phi_2}, \dots, l_m e^{j\phi_m}] \end{aligned} \quad (2.77)$$

et vérifiant :

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{E}_m(s) \quad (2.78)$$

La forme **diagonale** de \mathbf{L} facilite grandement l'analyse dans le but d'aboutir à des marges de stabilité multivariables [19]. De cette façon on a un système découpé et par conséquent un changement dans les marges de gain et de phase dans une boucle n'affectera pas les marges de gain et de phase d'une autre boucle.

De la figure 2.8b, on peut établir l'équation suivante :

$$\tilde{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{L}(s) \quad (2.79)$$

En substituant l'équation (2.78) dans (2.79) on résout par rapport à $\mathbf{E}_m(s)$:

$$E_m(s) = G^{-1}(s)(\tilde{G}(s) + G(s)) \quad (2.80)$$

L'équation qui précède représente une erreur de modèle multiplicative multivariable et qui est une analogie à l'équation (2.64) dans le cas des systèmes SISO.

D'autre part si $G^{-1}(s)$ existe, on peut utiliser le diagramme inverse de Nyquist pour mesurer l'erreur multiplicative (ou d'autres types d'erreurs) entre $G^{-1}(s)$ et $\tilde{G}^{-1}(s)$. Dans les systèmes SISO cela correspond à mesurer l'erreur relative entre le système nominal et perturbé sur le diagramme inverse de Nyquist et dans lequel les fonctions de transfert inverses $g^{-1}(s)$ et $\tilde{g}^{-1}(s)$ sont tracées. Le diagramme inverse de Nyquist est aussi utilisé pour déterminer la stabilité en comptant le nombre d'encerclement des points critiques $(0,0)$ et $(-1,0)$ dans le plan complexe. Par conséquent pour faire suite à la définition donnée à l'équation (2.80), il est naturel de donner une nouvelle définition complémentaire de l'erreur multiplicative :

$$E_m(s) = [\tilde{G}^{-1}(s) + G^{-1}(s)]G(s) \quad (2.81)$$

Avant de poursuivre l'analyse il est nécessaire de poser certaines hypothèses qui sont démontrées par Lehtomaki [19].

Théorème :

Le polynôme $\tilde{\Phi}_{cl}(s)$ n'a pas de zéros dans le demi-plan complexe droit (DPCD), par conséquent le système de la figure 2.8b est stable si les conditions suivantes sont respectées :

1. (a) $\Phi_{ol}(s)$ et $\tilde{\Phi}_{ol}(s)$ possèdent le même nombre de zéros dans DPCD.

- (b) Si $\tilde{\Phi}_{OL}(j\omega_0) = 0$, alors $\Phi_{OL}(j\omega_0) = 0$.
- (c) $\Phi_{CL}(s)$ n'a pas de zéros dans DPCP.
2. $L(s)$ donnée par (2.80) n'a pas de zéro ou strictement des valeurs propres réelles négatives.
 3. $\underline{\sigma}[I + G^{-1}(s)] > \bar{\sigma}[E_m(s)]$ pour tous $s \in \Omega_R$, où $\Omega_R = \{s | s \in D_R \text{ et } \operatorname{Re}(s) \leq 0\}$, avec D_R qui désigne le contour de Nyquist et $E_m(s)$ est donnée par (2.80).
 4. $\underline{\sigma}[I + G(s)] > \bar{\sigma}[E_m(s)]$ pour tous $s \in \Omega_R$, où $E_m(s)$ est donnée par (2.81).

Maintenant, définissons la matrice de sensibilité S et la matrice de sensibilité complémentaire T du système montré à la figure 2.8a. Les inverses S^I et T^I apparaissent respectivement aux conditions 4 et 3 du théorème précédent :

$$S(s) = (I + G(s))^{-1} \quad (2.82)$$

$$T(s) = G(s)(I + G(s))^{-1} \quad (2.83)$$

Le nom de sensibilité complémentaire vient du fait que $S + T = I$. Cette relation est vérifiée uniquement dans le cas de la figure 2.8a (retour unitaire).

En présence de perturbations (figure 2.8b) et par analogie aux systèmes SISO, dans un système MIMO, il faut que le module de la distance minimale du système nominal au point critique (-1,0) soit supérieure au module de l'erreur maximale de perturbation. En d'autres termes on doit vérifier si la matrice S^I ou T^I est proche d'être singulière.

Pour E_m définie dans l'équation (2.80),

$$\underline{\sigma}(T^{-1}) = \underline{\sigma}[I + (KG(s))^{-1}] > \bar{\sigma}(E_m(s)) = \bar{\sigma}(L(s) - I) \quad (2.84)$$

Pour E_m définie dans l'équation (2.81),

$$\underline{\sigma}(S^{-1}) = \underline{\sigma}[I + KG(s)] > \bar{\sigma}(E_m(s)) = \bar{\sigma}(L^{-1}(s) - I) \quad (2.85)$$

Dans l'équation (2.84) on a $\underline{\sigma}[I + (KG(s))^{-1}]$ qui est une version multivariable de la distance au point critique $(-1,0)$ et $\bar{\sigma}[L(s) - I]$ n'est qu'une généralisation de la distance entre $\tilde{G}(s)$ et $G(s)$. Une interprétation similaire peut être faite pour l'équation (2.85). Une analogie des systèmes SISO des deux dernières équations est donnée respectivement par (Lehthomaki [19]) :

$$|1 + g(s)| > \gamma > |L^{-1}(s) - 1| \quad (2.86)$$

et

$$|1 + g^{-1}(s)| > \gamma > |L(s) - 1| \quad (2.87)$$

Marges de gains et marges de phases multivariables :

Les marges de gain et de phase des systèmes MIMO, sont déterminées en calculant la plus petite valeur singulière de la matrice inverse S^T "Return difference matrix" de la sensibilité S ($\underline{\sigma}(S^{-1})$) ou la plus petite valeur singulière de la matrice inverse T^T de la sensibilité complémentaire T ($\underline{\sigma}(T^{-1})$). On doit souligner encore une fois que la définition des marges de stabilité multivariable dans le cas présent, considèrent uniquement une classe d'erreurs de modèle décrite par la matrice diagonale $L(s)$ (2.77) (figure 2.9) [19].

Pour la sensibilité inverse S^T (2.85) on a :

Si $\Phi_{cl}(s)$ n'a pas de pas de zéros dans le DPCD et $\underline{\sigma}[I + G(s)] > \gamma$ pour tout $s \in \Omega_R$ et $\gamma \leq 1$, alors la marge de gain GM et la marge de phase PM des systèmes multivariables sont bornés comme suit :

$$GM = \frac{1}{1 \pm \gamma} = [1/(1+\gamma), 1/(1-\gamma)] \quad (2.88)$$

$$PM = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{\gamma^2}{2} \right] = \pm 2 \sin^{-1} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \quad (2.89)$$

Alors que pour la sensibilité complémentaire inverse T^I (2.84) on a :

Si $\Phi_{cl}(s)$ n'a pas de pas de zéros dans le DPCD et $\underline{\sigma}[I + G^{-1}(s)] > \gamma$ pour tout $s \in \Omega_R$ et $\gamma \leq 1$, alors la marge de gain GM et la marge de phase PM des systèmes multivariables sont bornés comme suit :

$$GM = 1 \pm \gamma = [1-\gamma, 1+\gamma] \quad (2.90)$$

$$PM = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{\gamma^2}{2} \right] = \pm 2 \sin^{-1} \left(\frac{\gamma}{2} \right) \quad (2.91)$$

Comme il a été montré dans la référence [19], l'interprétation des équations (2.88) et (2.90) est que les gains de boucles peuvent être perturbés simultanément par un gain Δ_i , satisfaisant $1/(1+\gamma) < \Delta_i < 1/(1-\gamma)$ sans déstabiliser le système en boucle fermée. D'une façon similaire les équations (2.89) et (2.91) signifient que, les boucles de rétroaction peuvent être perturbées par des phases ϕ_i , satisfaisant $|\phi_i| < \cos^{-1}(1-\gamma^2/2)$ sans déstabiliser le système en boucle fermée. Dans le cas de la sensibilité, les meilleures

marges de gain et phase sont obtenues lorsque, $\underline{\sigma}(S^{-1})=1$, alors $GM = [-6 \text{ dB}, +\infty]$ et $PM = \pm 60^\circ$. Alors que dans le cas de la sensibilité complémentaire, si on a $\underline{\sigma}(T^{-1})=1$, on obtient les meilleures marges de gain et de phase qui sont $GM = [-\infty, 6 \text{ dB}]$ et $PM = \pm 60^\circ$.

Rappelons que pour en arriver aux équations (2.88-2.91), la démonstration a été très simplifiée. Pour plus de détails, il faut consulter la référence [19] dont je me suis servi (chapitre 3 : “Robustness analysis for linear systems with unstructured model error”).

Dans les différents exemples numériques qui seront traités dans ce projet, il faut cependant apporter certaines corrections aux équations (2.84) et (2.85) du moment qu'on utilise un contrôleur K dans la rétroaction contrairement à un retour unitaire. Donc les équations qui serviront pour le calcul des marges de gain et de phase sont les suivantes :

$$\underline{\sigma}(T^{-1}) = \underline{\sigma}[I + (KG(s))^{-1}] > \gamma \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}(S^{-1}) = \underline{\sigma}[I + KG(s)] > \gamma$$

Si la rétroaction contient une matrice de gain K alors, S et T sont exprimés, soit en fonction de $H = KG$ ou $H = GK$ qui est la fonction de transfert en boucle ouverte ou communément appelé gain de boucle. Il faut prendre en considération que les fonctions de transfert en boucle ouverte à l'entrée et à la sortie sont différentes, du fait que la multiplication matricielle n'est pas commutative.

2.5.2 Sensibilité

Nous allons introduire dans cette section le nombre de conditionnement qui s'avère un outil très utilisé pour mesurer la sensibilité des systèmes linéaires. Supposons un système linéaire de la forme $Ax = b$ où A est carrée et non singulière et b différent de zéro. Le système possède une solution x unique et non nulle. La question importante qui

se pose, est au niveau de la sensibilité de la solution x par rapport à de petites variations des données initiales (A et/ou b). Définissons donc le nombre de conditionnement spectral (norme Euclidienne) :

$$k_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \geq 1 \quad (2.92)$$

Si on se réfère à la section (2.5) à propos des valeurs singulières et norme spectrale, on peut réécrire le nombre de conditionnement comme suit :

$$k_2(A) = \frac{\overline{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)} \quad (2.93)$$

Dans le système linéaire considéré précédemment, les perturbations peuvent agir en même temps sur les données de la matrice A et b donc on aura $A + \delta A$ et $b + \delta b$. Dans ce cas, le nombre de conditionnement intervient pour maximiser ou minimiser l'erreur dans la solution x qui devient $x + \delta x$. Cependant les perturbations peuvent agir aussi seulement sur la matrice A ou b , et à ce niveau, le nombre de conditionnement est aussi considéré dans la majoration de l'erreur sur la solution du système. Dans le but de garder une analyse simple, considérons de petites variations δb sur la matrice b uniquement, alors le système perturbé devient $A\hat{x} = b + \delta b$. Ce système possède aussi une solution unique \hat{x} qui n'est pas loin de x . Donc $\hat{x} = x + \delta x$. Reprenons les calculs comme suit :

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad (2.94)$$

Cette équation implique que :

$$A\delta x = \delta b \quad (2.95)$$

Ensuite on tire,

$$\delta \mathbf{x} = A^{-1} \delta \mathbf{b} \quad (2.96)$$

Réécrivons la dernière équation en utilisant la norme spectrale :

$$\|\delta \mathbf{x}\| = \|A^{-1} \delta \mathbf{b}\| \quad (2.97)$$

En utilisant les propriétés des normes matricielles on obtient l'inéquation suivante :

$$\|\delta \mathbf{x}\| = \|A^{-1} \delta \mathbf{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta \mathbf{b}\| \quad (2.98)$$

De la même façon on refait le même raisonnement pour l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour obtenir :

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| \quad (2.99)$$

On peut réécrire l'équation qui précède comme ceci :

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2.100)$$

Multiplions maintenant les inéquations (2.98) et (2.100) membre à membre :

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2.101)$$

Dans cette équation on voit apparaître le nombre de conditionnement $k(A)$ déjà défini précédemment (2.92).

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (2.102)$$

En analysant cette dernière équation, on déduit que si $k(A)$ n'est pas très grand, alors des petites valeurs de $\|\delta b\|/\|b\|$ impliquent des petites valeurs de $\|\delta x\|/\|x\|$. Dans ce cas le système n'est pas sensible aux perturbations dans b . Donc si $k(A)$ n'est pas très grand on conclu que A est bien conditionnée “well-conditionned”. Paradoxalement, si $k(A)$ est grand, des petites variations de $\|\delta b\|/\|b\|$ ne garantissent pas que $\|\delta x\|/\|x\|$ serait petit. Donc le système pourrait être potentiellement sensible aux perturbations. Donc si $k(A)$ est grand on dit que A n'est pas bien conditionnée “ill-conditionned”.

Notons bien que $k(A) \geq 1$. Ceci vient du fait que $\|I\| = 1$ et que $I = AA^{-1}$, alors on a $\|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = k(A)$. Plus que le nombre de conditionnement est proche de 1 plus que le système est moins sensible aux petites perturbations.

Dans un exemple qui sera traité à la prochaine section d'un système linéaire d'un modèle d'avion, le contrôleur K intervient de la façon suivante dans le calcul du nombre de conditionnement : On calcule premièrement la matrice des paramètres en boucle fermée $A-BKC$, ensuite on calcule la matrice modale V composée des vecteurs propres droits et gauches et enfin on calcule $k(V)$.

2.6 Exemple d'application

Reprendons un exemple numérique traité par Andry et al. [4]. On veut réaliser un système d'augmentation de stabilité latérale (SAS) sur le modèle latéral (figure A1.1 en annexe) de l'avion L-1011 qui est un gros porteur de la compagnie Lockheed. Le modèle latéral

obtenu au chapitre 1 dans l'espace d'état sera repris et augmenté de trois nouvelles variables d'état qui sont les actionneurs et un filtre passe haut (washout filter).

Le vecteur d'état est :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_a \\ \varphi \\ r \\ p \\ \beta \\ x_7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \delta_r & \text{Gouvernail de direction} \\ \delta_a & \text{Aileron} \\ \varphi & \text{Angle de roulis} \\ r & \text{Vitesse angulaire de lacet} \\ p & \text{Vitesse angulaire de roulis} \\ \beta & \text{Angle de dérappage} \\ x_7 & \text{Filtre passe - haut (Washout filter)} \end{array}$$

Les entrées de commandes sont :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_{rc} \\ \delta_{ac} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \delta_{rc} & \text{Commande de gouvernail} \\ \delta_{ac} & \text{Commande des ailerons} \end{array}$$

Le vecteur de sortie est :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} r_{wo} & \text{Vitesse angulaire de lacet et filtre passe haut} \\ p & \text{Vitesse angulaire de roulis} \\ \beta & \text{Angle de dérappage} \\ \varphi & \text{Angle de roulis} \end{array}$$

Les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} en boucle ouverte sont données par:

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.744 & -0.032 & 0 & -0.154 & -0.0042 & 1.54 & 0 \\ 0.337 & -1.12 & 0 & 0.249 & -1.0 & -5.2 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.0386 & -0.996 & -0.000295 & -0.117 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les modes du système en boucle ouverte sont :

$\lambda_1 = -20.0$	Gouvernail
$\lambda_2 = -25.0$	Aileron
$\lambda_{3,4} = -0.0884 \pm j1.272$	Roulis Hollandais
$\lambda_5 = -1.085$	Roulis amortis
$\lambda_6 = -0.00911$	Spiral
$\lambda_7 = -0.5$	Filtre passe haut (Washout filter)

La matrice C est de rang 4 ($\text{rang}[C] = r = 4$), donc le maximum de valeurs propres que nous pouvons placer, est $\max(m,r) = \max(2,4) = 4$. Par conséquent le nombre de vecteurs propres désirés sera de quatre (4) aussi. Si on veut concevoir un contrôleur en boucle fermée pour le SAS latéral et à titre d'illustration les modes du roulis hollandais et roulis amortis et spiral prendront les valeurs suivantes :

$$\lambda_{3,4}^d = -1.5 \pm j1.5 \quad \text{Roulis Hollandais}$$

$$\lambda_{5,6}^d = -2.0 \pm j \quad \text{Roulis amortis et spiral (coïncident)}$$

En se référant aux sections précédentes, les vecteurs propres désirés en boucle fermée sont donc au nombre de quatre qui est égal au nombre valeurs propres désirées :

$$\begin{array}{ll} \delta_r & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ \delta_a & \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \varphi & \begin{bmatrix} x \\ x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ r & \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ \pm j \end{bmatrix} \\ p & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \beta & \begin{bmatrix} x \\ x \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_7 & \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Roulis hollandais

Roulis amortis et spiral

Donc on a choisi des vecteurs de façon à ce qu'ils soient orthogonaux pour découpler les modes, c'est à dire que, le produit scalaire entre un vecteur du roulis hollandais et n'importe quel autre vecteur du roulis amortis, est nul et l'inverse est vrai aussi. Pour chaque mode on doit mettre un 1 si on veut coupler deux variables, alors que si on veut les découpler, on met un 0. La lettre x sert pour un élément non spécifié dans le vecteur.

Les résultats trouvés en boucle fermée sont :

Le gain de retour est:

$$K = \begin{bmatrix} -3.3463 & 0.1590 & 4.8827 & 0.3796 \\ -1.4160 & -2.3784 & 6.3571 & -3.7975 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs réalisables sont :

$$\begin{array}{c}
 V = \left[\begin{array}{c|c}
 \begin{matrix} 5.0324 \\ 3.7664 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.4372 \\ 0.3372 \end{matrix} & \pm j \begin{matrix} 4.0307 \\ -2.9570 \\ 0 \\ 2.1279 \\ 0 \\ 1 \\ -0.5581 \end{matrix}
 \end{array} \right] \\
 \text{Roulis hollandais}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c|c}
 \begin{matrix} 0.0314 \\ -0.8143 \\ 0.9997 \\ 0.0064 \\ -1.9993 \\ -0.0144 \\ -0.0016 \end{matrix} & \pm j \begin{matrix} -0.1433 \\ 2.6639 \\ -0.0001 \\ -0.0006 \\ 1 \\ -0.0063 \\ -0.0008 \end{matrix}
 \end{array} \right] \\
 \text{Roulis amortis}
 \end{array}$$

Le nombre de conditionnement est :

$$k(V) = 37.0490$$

Les marges de gain et de phase sont:

$$\text{MG} = [-5.4560 \text{ dB} \quad 18.0022 \text{ dB}]$$

$$\text{MP} = [-51.8341 \text{ deg.} \quad 51.8341 \text{ deg.}]$$

Le découplage est réussi dans chaque mode car, en donnant une valeur initiale à l'angle de dérapage β , alors la vitesse de roulis r avec laquelle est couplée β réagit, par contre les autres variables p et ϕ avec lesquelles est découpé β ne réagissent pas (figure 2.10). Cependant ce découplage n'est peut être pas le meilleur. Dépendamment de la façon dont le découplage est fait ainsi qu'un bon choix de valeurs propres désirées on pourra obtenir un nombre de conditionnement plus petit (proche de 1) et des marges de gains et de phase, plus larges. Cependant ces résultats demeurent acceptables.

Tableau III
Critères de performances en boucle fermée du modèle L1011

Mode	Valeurs propres désirées	Valeurs propres obtenues	Amortissement ξ	Fréquence (rad/sec.)
Roulis hollandais	$-1.5 \pm 1.5j$	$-1.5 \pm 1.5j$	0.707	2.12
Roulis Amortis et spiral	$-2 \pm j$	$-2 \pm j$	0.894	2.24
Gouvernail	x	-17.1	-	-
Aileron	x	-22	-	-
Filtre passe haut	x	-0.698	-	-

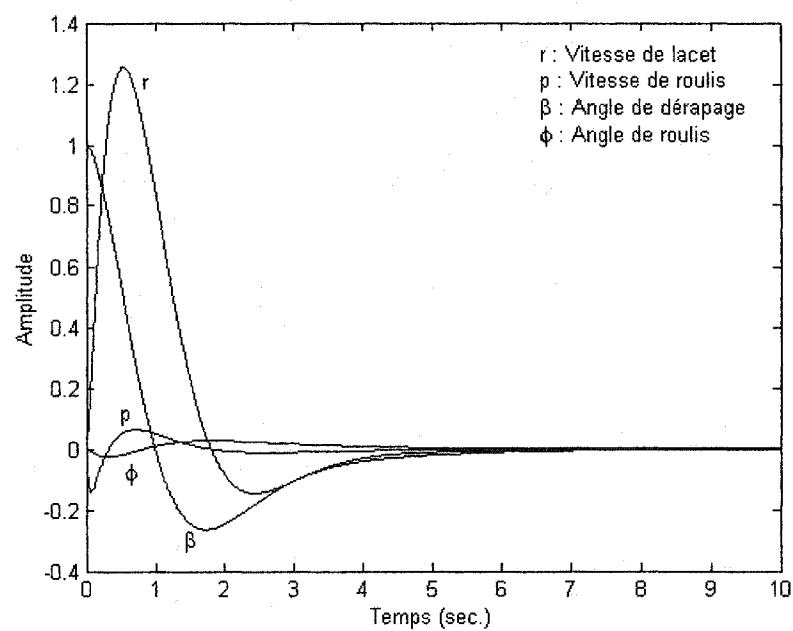


Figure 2.10 Réponses en boucle fermée pour le contrôleur par retour de sortie

2.7 Gain par retour de sortie avec contraintes

Dans la section 1.4.2, on avait déterminé un contrôleur constitué par un gain par retour de sortie donné par l'équation (2.56) ou (2.57). Cependant dans ce contrôleur chaque sortie est reliée à chaque entrée par un gain. Certes le contrôleur répond aux exigences de conception tel que les critères de performances et le découplage, par contre dans certains cas vu un nombre élevé de sorties, on assiste alors à des contrôleurs très coûteux et complexes à réaliser du point de vue pratique. Dans le but de réduire cette complexité, on doit imposer certaines contraintes pour certains gains, qui n'ont aucune influence sur le système en boucle fermée, en leurs assignant une valeur nulle tout simplement.

Calvo Ramon [22] (1986) avait proposé au départ une méthode systématique de choisir les gains à mettre à zéro. Cette méthode se base sur la sensibilité des valeurs propres en boucle fermée par rapport aux différents gains de retour. Par la suite Sobel et al. [13] (1990) avait complété la méthode de Calvo Ramon pour inclure également la sensibilité des vecteurs propres aux différents gains de retour a fin de choisir les gains qui seront mis à zéro dans le contrôleur. La sensibilité des valeurs propres et des vecteurs propres aux différents gains de retour est déterminée en calculant les dérivées partielles des valeurs propres et vecteurs propres par rapport aux différents gains de retour contenus dans la matrice \mathbf{K} .

Reprendons l'équation (2.56) :

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B}^+ (\mathbf{V}\Lambda - \mathbf{A}\Lambda)(\mathbf{C}\mathbf{V})^{-1}$$

Où \mathbf{B}^+ représente le pseudo inverse de la matrice B.

Soit :

$$\Omega = CV \quad (2.103)$$

$$\Psi = B^+ (V\Lambda - A\Lambda) \quad (2.104)$$

L'expression du gain est alors :

$$K = -\Psi \Omega^{-1} \quad (2.105)$$

Andry et al. [4] avait démontré que chaque ligne de la matrice de gain K est calculée indépendamment des autres lignes.

Soit k_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de gains K , et Ψ_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice Ψ , alors:

$$k_i = -\Psi_i \Omega^{-1} \quad (2.106)$$

Si le gain k_{ij} est contraint à être à zéro, alors la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice Ω est supprimée. D'autre part, soit \tilde{k}_i le vecteur ligne k_i dont le $j^{\text{ème}}$ élément est mis à zéro et $\tilde{\Omega}$ la matrice Ω dont la $j^{\text{ème}}$ ligne est supprimée, alors la solution \tilde{k}_i , dont les éléments sont les gains non contraints à zéro de la matrice de gain K , est donnée par :

$$\tilde{k}_i = -\Psi_i \tilde{\Omega}^+ \quad (2.107)$$

Où $\tilde{\Omega}^+$ représente le pseudo inverse de la matrice $\tilde{\Omega}$.

Dans la référence [22], la sensibilité de premier ordre de la $h^{\text{ème}}$ valeur propre aux changements dans le $ij^{\text{ème}}$ élément de la matrice K est exprimée par $\partial\lambda_h/\partial k_{ij}$. Le

coefficient correspondant à chaque valeur propre λ_h quand le gain k_{ij} est contraint à zéro, est donnée par :

$$s_{ij}^h = (k_{ij}) \left(\frac{\partial \lambda_h}{\partial k_{ij}} \right) \quad (2.108)$$

Ensuite on doit combiner tous les coefficients de toutes les valeurs propres correspondant au même gain k_{ij} pour former une matrice de décision $D^\lambda = \{d_{ij}^\lambda\}, D^\lambda \in R^{m \times r}$, où :

$$d_{ij}^\lambda = \frac{1}{n} \left[\sum_{h=1}^n (s_{ij}^h)^2 \right]^{1/2} \quad (2.109)$$

Où n désigne le nombre de valeurs propres du système en boucle fermée.

Cependant on remarquera que s_{ij}^h est un nombre complexe, alors l'équation (2.109) peut être remplacé par l'équation équivalente suivante :

$$d_{ij}^\lambda = \frac{1}{n} \left[\sum_{h=1}^n \overline{(s_{ij}^h)} (s_{ij}^h) \right]^{1/2} \quad (2.110)$$

Où $(\bar{\cdot})$ signifie le complexe conjugué de (\cdot) .

La matrice de décision D^λ est utilisée pour déterminer quel gain k_{ij} doit être contraint à zéro. Si un élément d_{ij}^λ de la matrice D^λ est petit, alors mettre à zéro un gain k_{ij} aura un effet moindre sur les valeurs propres du système en boucle fermée. Par contre si un élément d_{ij}^λ de la matrice D^λ est grand, alors mettre à zéro un gain k_{ij} aura un effet

significatif sur les valeurs propres du système en boucle fermée. Donc il faut déterminer quel élément d_{ij}^λ de la matrice de décision D^λ est petit et lequel est grand. Cependant il faut constater que la sensibilité des vecteurs propres par rapport aux gains k_{ij} n'est pas prise en considération dans la matrice décision D^λ . Rappelons que les valeurs propres déterminent les caractéristiques temporelles du système tel que le temps de réponse et le dépassement alors que les vecteurs propres déterminent le découplage entre les différents modes. L'approche introduite par Calvo Ramon [22] aboutit à un contrôleur avec contraintes ayant un bon temps de réponse et un bon dépassement mais le découplage entre les modes est inacceptable. Par conséquent Sobel et al [13] ont prolongé les résultats obtenus dans la référence [22] pour déterminer une deuxième matrice de décision D'' en se basant sur la sensibilité des vecteurs propres par rapport aux différents gains k_{ij} . Le théorème [13] suivant donne les expressions des sensibilités des valeurs propres et des vecteurs propres.

Théorème :

Soit :

$$A\mathbf{v}_h = \lambda_h \mathbf{v}_h; \quad h = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{w}_q^T A = \lambda_q \mathbf{w}_q^T; \quad q = 1, \dots, n$$

On définit les paramètres suivants :

$$t_h = \mathbf{v}_h^T \mathbf{v}_h; \quad h = 1, \dots, n \quad (2.111)$$

$$s_h = \mathbf{w}_h^T \mathbf{v}_h; \quad h = 1, \dots, n \quad (2.112)$$

et ρ un scalaire ;

Donc l'équation exprimant les dérivées partielles des valeurs propres de la matrice A par rapport au scalaire ρ est donnée par :

$$\frac{\partial \lambda_h}{\partial \rho} = \left(\frac{1}{s_h} \right) \left[\mathbf{w}_h^T \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} \right) \mathbf{v}_h \right] \quad (2.113)$$

L'équation décrivant les dérivées partielles des vecteurs propres de la matrice A par rapport au scalaire ρ est donnée par :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \rho} = \sum_{m=1}^n \alpha_{hm} \mathbf{v}_m \quad (2.114)$$

Avec :

$$\alpha_{hq} = -\frac{1}{(\lambda_q - \lambda_h)s_q} \left[\mathbf{w}_q^T \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} \right) \mathbf{v}_h \right]; \quad q \neq h \quad (2.115)$$

et

$$\alpha_{hh} = \left(-\frac{1}{t_h} \right) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq h}}^n \alpha_{hm} \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_h; \quad q = h \quad (2.116)$$

Maintenant appliquons les dérivées partielles à la dynamique du système, en boucle fermée, décrite par la matrice $(A-BKC)$ assujetti à la loi de commande donnée par l'équation (2.22). Soit k_{ij} le $ij^{ième}$ élément de la matrice K , b_i la $i^{ième}$ colonne de la matrice

\mathbf{B} et \mathbf{c}_j^T la $j^{ième}$ ligne de la matrice \mathbf{C} . Alors la dérivée du $h^{ième}$ vecteur propre de la matrice $(A-BKC)$ par rapport au $ij^{ième}$ élément de la matrice \mathbf{K} est :

$$\frac{\partial \lambda_h}{\partial k_{ij}} = \left(\frac{1}{s_h} \right) \left[-\mathbf{w}_h^T \mathbf{b}_i \mathbf{c}_j^T \mathbf{v}_h \right] \quad (2.117)$$

Preuve :

$$\frac{\partial(A-BKC)}{\partial k_{ij}} = -\mathbf{B} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_{ij}} \right) \mathbf{C} = -\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j^T \quad (2.118)$$

donc :

$$\mathbf{w}_q^T \left[\frac{\partial(A-BKC)}{\partial k_{ij}} \right] \mathbf{v}_h = -\mathbf{w}_q^T \mathbf{b}_i \mathbf{c}_j^T \mathbf{v}_h \quad (2.119)$$

L'équation (2.117) sert donc à calculer le coefficient s_{ij}^h (2.108) correspondant à chaque valeur propre λ^h lorsque le gain k_{ij} est contraint à zéro.

Par ailleurs, la dérivée du $h^{ième}$ vecteur propre de la matrice $(A-BKC)$ par rapport au $ij^{ième}$ élément de la matrice \mathbf{K} est :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial k_{ij}} = \sum_{m=1}^n \alpha_{ijhm} \mathbf{v}_m \quad (2.120)$$

Où :

$$\alpha_{ijhq} = \frac{1}{(\lambda_q - \lambda_h)s_q} \left[-\mathbf{w}_q^T \mathbf{b}_i \mathbf{c}_j^T \mathbf{v}_h \right]; \quad q \neq h \quad (2.121)$$

$$\alpha_{ijhh} = \left(-\frac{1}{t_h} \right) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq h}}^n \alpha_{ijhm} \mathbf{v}_m^T \mathbf{v}_h; \quad q = h \quad (2.122)$$

Remarque : les termes s_h et t_h sont des facteurs de normalisation dans le cas où les vecteurs propres ne sont pas normalisés. Si les vecteurs propres sont normalisés donc les facteurs de normalisation sont égaux à l'unité. Maintenant les équations (2.120-2.122) sont utilisées pour calculer le coefficient \tilde{s}_{ij}^h correspondant à chaque vecteur propre \mathbf{v}_h , quand le gain k_{ij} est contraint à zéro, qui est donné par :

$$\tilde{s}_{ij}^h = (k_{ij}) \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial k_{ij}} \right) \quad (2.123)$$

Ensuite on doit combiner tous les coefficients de tous les vecteurs propres correspondant au même gain k_{ij} pour former une matrice de décision $\mathbf{D}^v = \{d_{ij}\}, \mathbf{D}^v \in R^{m \times r}$, où :

$$d_{ij}^v = \frac{1}{n} \left[\sum_{h=1}^n (\tilde{s}_{ij}^h)^* (\tilde{s}_{ij}^h) \right]^{1/2} \quad (2.124)$$

Où $(\cdot)^*$ signifie le complexe conjugué transposé de (\cdot) . Premièrement les gains k_{ij} mis à zéro sont choisis selon les éléments considérés petits dans la matrice de décision \mathbf{D}^λ . Ensuite ces mêmes gains sont revus selon la matrice de décision \mathbf{D}^v s'il faut les mettre effectivement à zéro ou non. Donc de cette façon, il se peut qu'un gain qui a été déjà choisi, pour être mis à zéro, en se basant sur la sensibilité des valeurs propres ne soit pas mis à zéro par la suite en se basant sur la sensibilité des vecteurs propres.

2.8 Exemple d'application

Considérons le modèle latéral linéaire (figure A1.2 en annexe) de l'avion de chasse F-18 HARV [10]. Le modèle est linéarisé sous les conditions de vol suivantes : une altitude de 5000 pieds, un nombre de mach de 0.38 et un angle d'attaque de 5 degrés.

Le vecteur d'état est :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_s \\ \delta_r \\ \beta \\ p \\ r \\ \phi \\ x_8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Aileron} \\ \text{Stabilisateur} \\ \text{Gouvernail de direction} \\ \text{Angle de dérapage} \\ \text{Vitesse de roulis} \\ \text{Vitesse de lacet} \\ \text{Angle de roulis} \\ \text{Filtre passe haut (washout filter)} \end{array}$$

Les entrées de commandes sont :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \delta_{ac} \\ \delta_{sc} \\ \delta_{rc} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Commande des ailerons} \\ \text{Commande du stabilisateur} \\ \text{Commande du gouvernail de direction} \end{array}$$

Le vecteur de sortie est :

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} r_{wo} \\ p \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vitesse angulaire de lacet et filtre passe haut} \\ \text{Vitesse angulaire de roulis} \\ \text{Angle de dérapage} \\ \text{Angle de roulis} \end{array}$$

Les matrices A , B et C en boucle ouverte sont :

$$A = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.007 & -0.014 & 0.0412 & -1.1727 & 0.0873 & -0.9946 & 0.076 & 0 \\ 15.3225 & 12.0601 & 2.2022 & -11.0723 & -2.1912 & 0.7096 & 0 & 0 \\ -0.3264 & 0.2041 & -1.3524 & 2.1137 & -0.0086 & -0.1399 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.0875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres désirées sont choisies de façon à ce que l'amortissement du mode roulis hollandais soit de 0.707 et que sa fréquence naturelle soit au voisinage 3 rad s⁻¹ [43]. Les modes du roulis amortis ainsi que le roulis spirals, sont choisis de telle façon qu'ils coïncident sous un même mode complexe qui possède des caractéristiques proches de celle du roulis hollandais choisis.

Roulis hollandais : $\lambda_{dr}^d = -2 \pm 2j$

Roulis amortis et spiral : $\lambda_r^d = -3 \pm 2j$

Les vecteurs propres désirés sont choisis de façon à ce que la quantité $|\phi / \beta|$ soit petite. Les vecteurs désirés du roulis hollandais ont des zéros aux lignes qui correspondent à

l'angle de roulis ϕ et la vitesse de roulis p . Les vecteurs désirés du roulis amortis et spiral ont des zéros aux lignes qui correspondent à l'angle de dérapage β , la vitesse de lacet r et le filtre passe haut x_8 . Les éléments dont la valeur est $\langle x \rangle$ correspondent à un élément non spécifié.

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{ll}
 \delta_a & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 1 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \\
 \delta_s & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \\
 \delta_r & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \beta & \pm j \\
 p & \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 r & \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \phi & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 x_8 & \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array} & \begin{array}{ll}
 \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Roulis hollandais

Roulis amortis et spiral

Dans un premier temps, on applique l'algorithme de structure propre pour calculer la matrice de gain K par retour de sortie ainsi que les vecteurs propres réalisables. Dans un deuxième temps, on calcule la matrice de décision D^λ qui permettra de recalculer la matrice de gain K avec contraintes. Dans un troisième temps, on calcule la matrice de décision D^v qui permettra de réviser la matrice de décision D^λ . Enfin on recalcule la matrice de gain K avec contraintes. Les vecteurs réalisables sont calculés une seule fois au départ lors du calcul de K sans contraintes.

2.8.1 Résultats et analyse

Les réponses en boucle ouverte sont données à la figure 2.11 avec une condition initiale de 1 degré sur β . On constate que le système est mal amorti et que les modes sont très couplés. Les réponses en boucle fermée pour un contrôleur sans contraintes sont représentées par la figure 2.12. On remarque que les modes sont bien découplés ($\max |\phi| = 0.0532$ deg. et $\max |p| = 0.2819$ deg s⁻¹). L'avion est stable et bien amorti

avec une bonne robustesse. Les différents contrôleurs avec contraintes et sans contraintes sont montrés au tableau VI. Les matrices de décision sont dans le tableau V. Dans un premier temps, on constate que le contrôleur basé uniquement sur la sensibilité des valeurs propres, ne permet pas un contrôle efficace sur l'avion. Les réponses en boucle fermée (figure 2.14) montrent un couplage accru entre les modes ($\max |\phi| = 0.5102 \text{ deg.}$ et $\max |p| = 1.7881 \text{ deg s}^{-1}$) comparativement aux résultats obtenus avec un contrôleur sans contraintes. Dans un deuxième temps le contrôleur basé sur la sensibilité des valeurs propres et des vecteurs propres donne un résultat satisfaisant qui est quasi semblable au contrôleur sans contraintes du point de vue temps de réponse (figure 2.15) et robustesse (tableau VI). Avec ce contrôleur légèrement plus simple (3 capteurs de moins) le découplage est mieux réussi entre les modes du roulis hollandais ainsi que le roulis spiral et amorti ($\max |\phi| = 0.0505 \text{ deg.}$ et $\max |p| = 0.2662 \text{ deg s}^{-1}$).

Tableau IV

Vecteurs propres désirés et obtenus du modèle F-18 HARV

Vecteurs propres désirés				Vecteurs propres réalisés			
Roulis hollandais		Roulis amortis		Roulis hollandais		Roulis amortis	
δ_a	x	x	x	1.1781	0.2929	0.3212	0.2785
δ_s	x	x	x	-2.7860	1.9039	0.3259	0.2058
δ_r	x	x	x	10.1406	-4.1580	-0.1617	0.0693
β	1	x	0	0.9777	1.7260	-0.0558	0.0791
p	0	$\pm j$	0	$\frac{-0.0559}{\pm j}$	$\frac{-0.0094}{\pm j}$	0.9983	$\frac{-4.9603}{\pm j}$
r	x	1	0	5.7061	0.9932	-0.0016	-0.0246
ϕ	0	0	x	-0.0915	-0.1302	-0.9938	0.9916
x_8	x	x	0	-0.5258	-1.0322	-0.0022	0.0032

Tableau V
Matrices de décision du modèle F-18 HARV

Matrice de décision de valeurs propres D^λ				Matrice de décision de vecteurs propres D^v			
r_{w0}	p	β	ϕ	r_{w0}	p	β	ϕ
δ_a [0.0710 0.5117 0.0019 0.3582]				[0.2366 0.4085 0.0107 0.0832]			
δ_s [0.2286 0.3150 0.0843 0.3362]				[0.7878 0.2519 0.5254 0.0717]			
δ_r [0.6754 0.0162 0.3347 0.0482]				[0.7334 0.0250 0.3014 0.0845]			

Tableau VI
Comparaison entre le contrôleur avec contraintes et sans contraintes du F-18 HARV

Matrices de gain par retour de sortie K				Marges de gain et de phase aux entrées $\delta_{ac}, \delta_{sc}, \delta_{rc}$	Max $ \phi $ Max $ p $
r_{w0}	p	β	ϕ		
Conception sans contraintes					
δ_a [-0.1704 0.1380 0.0277 0.4092]				[-5.5009 dB, 18.6996 dB]	0.0532 deg. 0.2819 deg s ⁻¹
δ_s [0.7164 0.1075 -1.7252 0.4867]				± 52.4535 deg	
δ_r [-2.2741 0.0173 4.4961 -0.3877]					
Conception avec contraintes (D^λ seulement)					
δ_a [0 0.1926 0 0.6417]				[-5.3805 dB, 16.9488 dB]	0.5102 deg. 1.7881 deg s ⁻¹
δ_s [0.3371 0.2010 0 0.7554]				± 50.8026 deg	
δ_r [-2.2648 0 4.4891 0]					
Conception avec contraintes (D^λ et D^v)					
δ_a [-0.1643 0.1365 0 0.4049]				[-5.3343 dB, 16.3662 dB]	0.0505 deg. 0.2662 deg s ⁻¹
δ_s [0.7164 0.1075 -1.7252 0.4867]				± 50.1781 deg	
δ_r [-2.2648 0 4.4891 0]					

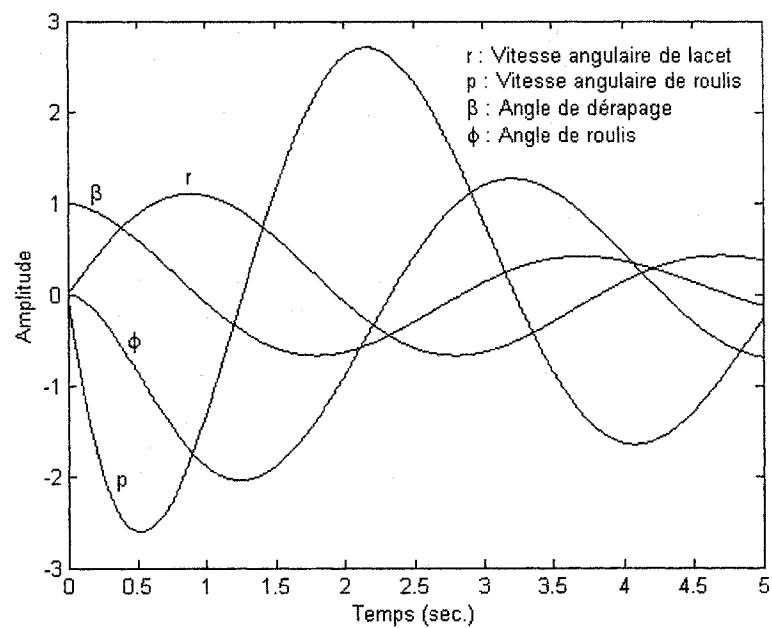


Figure 2.11 Réponses temporelles en boucle ouverte

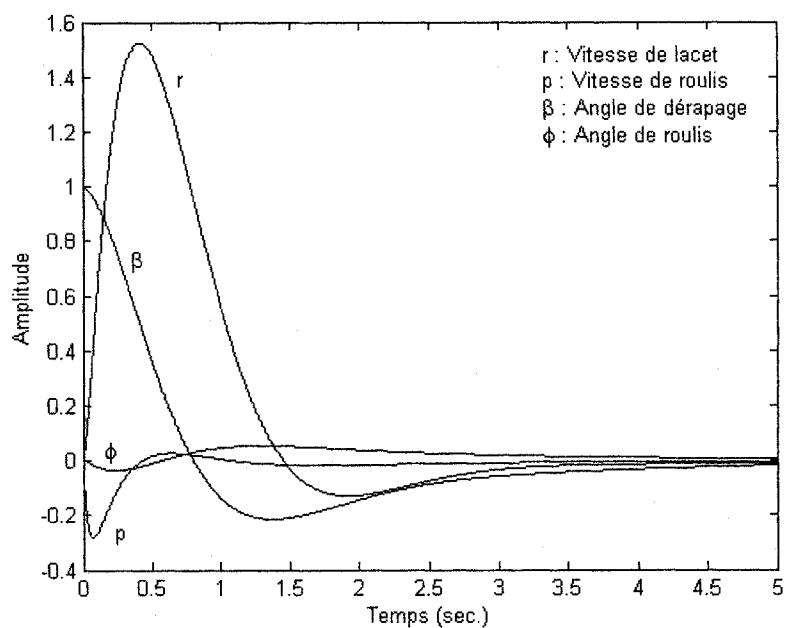


Figure 2.12 Réponses temporelles en boucle fermée sans contraintes

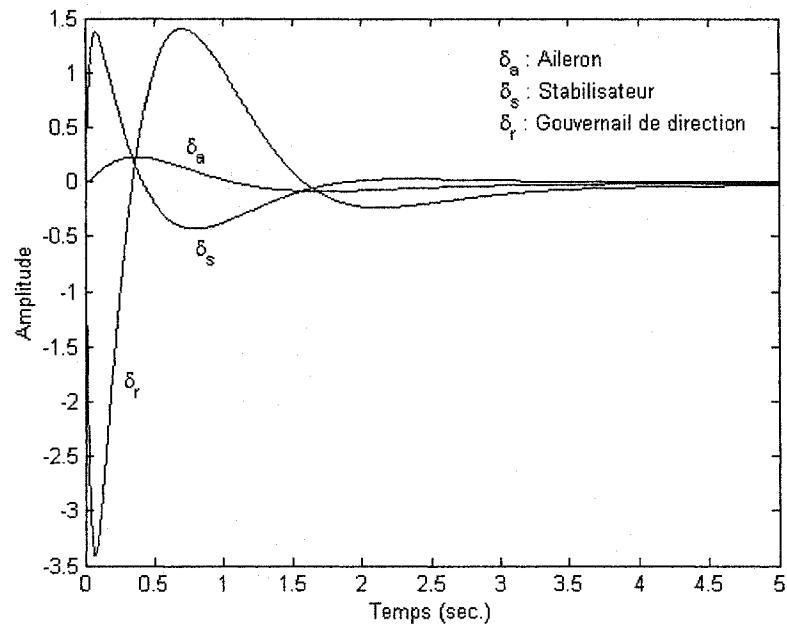


Figure 2.13 Surfaces de contrôle

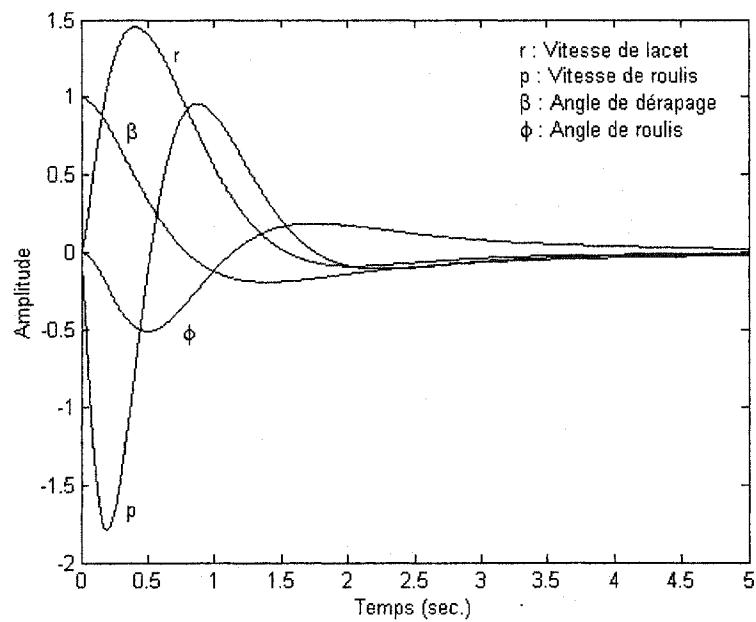


Figure 2.14 Réponses temporelles en boucle fermée utilisant seulement la matrice de décision D^λ

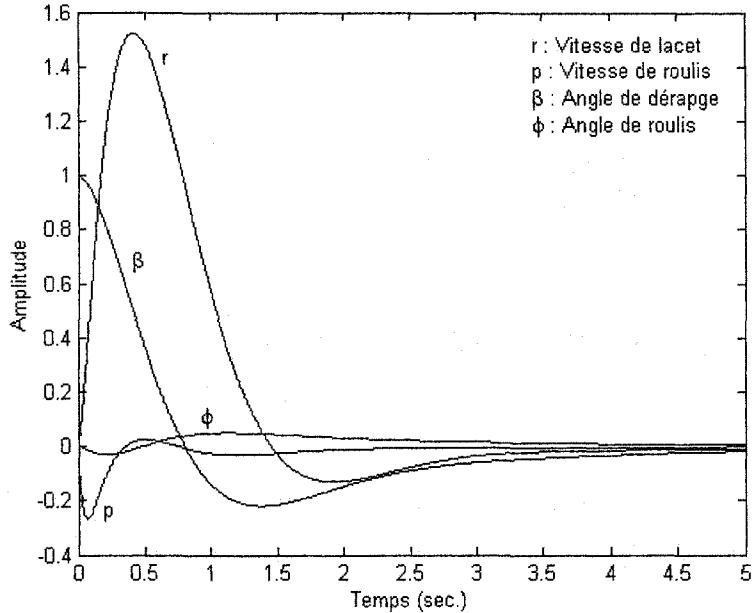


Figure 2.15 Réponses temporelles en boucle fermée utilisant les matrices de décision D^λ et D^v

2.9 Compensation dynamique

Dans certains cas, on veut assigner plus que $\max(m, r)$ valeurs propres dans le but d'avoir un meilleur découplage, atteindre une stabilité plus robuste et d'éviter ainsi une détérioration dans les performances temporelles. Pour cette raison, le concept de la méthode de placement de structure propre, avec un gain de retour constant, est généralisé pour un contrôle avec un gain à rétroaction dynamique. Le compensateur dynamique est de dimension p où $1 \leq p \leq n-r$. Rappelons que n et r sont respectivement le nombre de variables d'état du modèle de l'avion et le nombre de sorties à contrôler.

Considérons le système linéaire invariant dans le temps décrit par (2.21) avec un contrôleur dynamique linéaire invariant dans le temps représenté par :

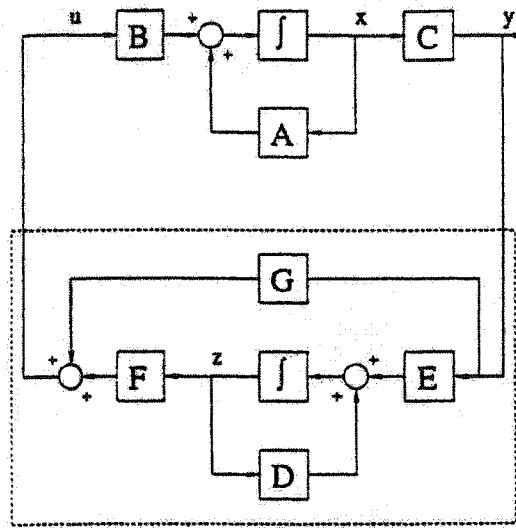


Figure 2.16 Gain par retour de sortie compensation dynamique

$$\dot{z} = Dz + Ey \quad (2.125)$$

$$u = Fz + Gy \quad (2.126)$$

Le contrôleur sans entrée de référence montré à la figure 2.16 est proposé par Johnson et Athans [23], où $z \in \mathbb{R}^p$. En combinant les équations (2.21) et (2.125), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bu \\ Dz + Ey \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ Dz + Ey \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Fz + Gy \\ Dz + Ey \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Soit :

$$\bar{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \underline{F}\underline{z} + \underline{G}\underline{y} \\ \underline{D}\underline{z} + \underline{E}\underline{y} \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\bar{\underline{y}} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

Donc le système équivalent peut être exprimé par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \bar{\underline{u}} \quad (2.132)$$

$$\bar{\underline{y}} = \begin{bmatrix} \underline{C} & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

$$\bar{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{F} \\ \underline{E} & \underline{D} \end{bmatrix} \bar{\underline{y}} \quad (2.134)$$

Où

$$\bar{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix}, \bar{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{B} & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix}, \bar{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{C} & 0 \\ 0 & \underline{I} \end{bmatrix}, \bar{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{F} \\ \underline{E} & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

Le système est présenté sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \bar{\underline{A}} \bar{\underline{x}} + \bar{\underline{B}} \bar{\underline{u}} \\ \bar{\underline{y}} &= \bar{\underline{C}} \bar{\underline{x}} \\ \bar{\underline{u}} &= \bar{\underline{K}} \bar{\underline{y}} \end{aligned} \quad (2.136)$$

La conception de la compensation dynamique est présentée comme suit :

Soit, les valeurs propres désirées suivantes :

$$\{\lambda_i^d\} = \{\lambda_1 \dots \lambda_r, \lambda_{r+1} \dots \lambda_{r+p}\}, \quad i = 1, 2 \dots r + p \quad (2.137)$$

et les vecteurs propres désirés suivants :

$$\{v_i^d\} = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \\ v_{n+1}(z) \\ \vdots \\ v_{n+p}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \\ v_{n+1}(z) \\ \vdots \\ v_{n+p}(z) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \dots r + p \quad (2.138)$$

Il faut trouver des matrices réelles D ($p \times p$), E ($p \times r$), F ($m \times p$) et G ($m \times r$) formant le gain par retour de sortie et de telle manière que le système en boucle fermée $(A - B K C)$ contient $\{\lambda_i^d\}$ parmi ses valeurs propres et que les vecteurs propres réalisables soient le plus proches possibles des vecteurs propres désirés.

Dans le cas où l'on veut calculer les marges de gains et marges de phases, alors le gain K composant la matrice inverse de la sensibilité à l'entrée $[I + KG]$ s'obtient comme suit :

$$K(s) = -[F(sI - D)^{-1} E + G] \quad (2.139)$$

et que :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (2.140)$$

2.10 Exemple d'application

Reprendons le même modèle d'avion qu'à la section 2.8. Supposons que l'angle de dérapage β n'est pas disponible pour la mesure, alors on doit compenser la sortie manquante par un compensateur de premier ordre dans un premier temps ayant l'état z_1 . Sans compensation, les sorties disponibles sont $y = [r_{w0}, p, \phi]^T$. En utilisant le compensateur de premier ordre, le vecteur de mesure devient : $\bar{y} = [r_{w0}, p, \phi, z_1]^T$. Le nouveau vecteur d'état est : $\bar{x} = [\delta_a, \delta_s, \delta_r, \beta, p, r, \phi, x_8, z_1]^T$. Les valeurs propres λ_i^d ainsi que les vecteurs propres désirés $v_i^d(x)$ qui correspondent au système original seront spécifiées de la même façon qu'à la section 2.8. Par contre on doit spécifier et bien choisir les vecteurs propres $v_i^d(z)$ pour éviter que la matrice modale du système compensé soit numériquement singulière. Le pôle du compensateur n'est pas choisi par le concepteur mais plutôt par l'algorithme de structure propre, étant donnée que le rang de la matrice C vaut 4 (voir théorème section 2.4). Si les performances fournies par le compensateur de premier ordre ne sont pas satisfaisantes, alors on doit compenser le système par un compensateur de deuxième ordre dont le vecteur d'état serait : $\bar{x} = [\delta_a, \delta_s, \delta_r, \beta, p, r, \phi, x_8, z_1, z_2]^T$ et le vecteur de sorties serait : $\bar{y} = [r_{w0}, p, \phi, z_1, z_2]^T$.

Compensateur dynamique de 1^{er} ordre :

Les valeurs propres désirées sont (section 2.8) :

$$\text{Roulis hollandais : } \lambda_{dr}^d = -2 \pm 2j$$

$$\text{Roulis amortis et spiral : } \lambda_r^d = -3 \pm 2j$$

Les vecteurs propres désirés sont choisis de telle façon que les modes roulis hollandais et roulis (spiral et amortis) participent à la compensation :

$$\begin{array}{ll} \delta_a & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 1 \\ \pm j \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ \delta_s & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ \delta_r & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \\ \beta & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ p & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ r & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ \phi & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ x_8 & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \\ z_1 & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 0 \\ x \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Roulis hollandais

Roulis amortis et spiral

2.10.1 Résultats et analyse

Le contrôleur par retour de sortie calculé par l'algorithme de structure propre est :

$$K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1708 & -0.1383 & -0.4079 & -0.0040 \\ -0.2723 & -0.3328 & 0.2408 & -1.4112 \\ 1.0897 & 0.5836 & -1.5548 & 3.7731 \\ \hline 0.5906 & 0.9817 & 3.0796 & -2.4784 \end{array} \right]$$

Les matrices composant le contrôleur sont :

$$G = \left[\begin{array}{ccc} 0.1708 & -0.1383 & -0.4079 \\ -0.2723 & -0.3328 & 0.2408 \\ 1.0897 & 0.5836 & -1.5548 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.0040 \\ -1.4112 \\ 3.7731 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = [0.5906 \quad 0.9817 \quad 3.0796]$$

$$\mathbf{D} = [-2.4784]$$

La loi de commande est décrite donc par (2.128-2.129):

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_s \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1708 & -0.1383 & -0.4079 \\ -0.2723 & -0.3328 & 0.2408 \\ 1.0897 & 0.5836 & -1.5548 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{w0} \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0040 \\ -1.4112 \\ 3.7731 \end{bmatrix} z_1$$

$$\dot{z} = -2.4784 z_1 + 0.5906 r_{w0} + 0.9817 p + 3.0796 \phi$$

Le nombre de conditionnement est :

$$k(V) = 62.3897$$

Les marges de gains et de phase sont :

$$MG = [-2.3527 \text{ dB}, 3.2368 \text{ dB}]$$

$$MP = \pm 17.8971 \text{ deg}$$

Suite aux résultats obtenus on remarque que le compensateur dynamique de 1^{er} ordre possède un temps de réponse plus long (figure 2.17) et que les modes sont moins découplés ($\max |\phi| = 0.3643 \text{ deg.}$ et $\max |p| = 1.0754 \text{ deg s}^{-1}$), comme l'indique un nombre de conditionnement plus élevé comparativement au contrôleur à gain statique sans contraintes où $K(v)$ vaut 22.4522 (voir tableau IV). La robustesse est diminuée au point où le système pourrait être facilement déstabilisé. Réalisons donc un compensateur de deuxième ordre pour essayer d'améliorer les performances du système.

Tableau VII

Critères de performances en boucle fermée du compensateur de 1^{er} ordre du modèle

F-18 HARV

Mode	Valeurs propres désirées	Valeurs propres obtenues	Amortissement	Fréquence (rad/sec.)
Roulis hollandais	-2 ± 2j	-2 ± 2j	0.707	2.83
Roulis amortis	-3 ± 2j	-3 ± 2j	0.832	3.61
Aileron	x	-30	1	-
Stabilisateur	x	-27.6993	1	-
Gouvernail	x	-25.2634	1	-
Filtre passe haut	x	-0.7549	1	-
Compensateur	x	-1.7646	1	-

Tableau VIII

Vecteurs propres désirés et obtenus du compensateur de 1^{er} ordre du modèle

F-18 HARV

Vecteurs propres désirés		Vecteurs propres réalisés			
Roulis hollandais	Roulis amortis	Roulis hollandais		Roulis amortis	
δ_a	x	x	x	0.1388	0.7412
δ_s	x	x	x	-1.7421	-1.0170
δ_r	x	x	x	4.9591	4.2934
β	x	1	0	-0.6606	0.9870
p	0	± j	0	-0.0099 ± j	-0.0325
r	1	x	0	1.0026	3.3194
ϕ	0	0	1	0.0450	-0.0839
x_8	x	x	0	0.4108	-0.5587
z_1	1	x	1	x	1

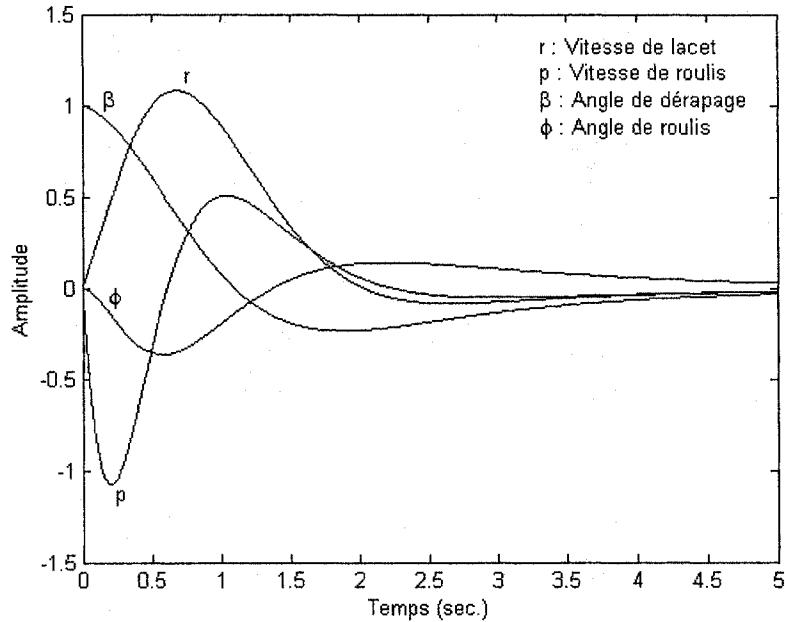


Figure 2.17 Réponses en boucle fermée avec compensation dynamique de 1^{er} ordre

Compensateur dynamique de 2^{ième} ordre :

Cette fois on possède un degré de liberté de plus (rang (C) = 5) que le cas précédent (rang (C) = 4), donc on doit spécifier un pôle du compensateur et son vecteur propre correspondant.

Les valeurs propres désirées sont :

$$\text{Roulis hollandais : } \lambda_{dr}^d = -2 \pm 2j$$

$$\text{Roulis amortis et spiral : } \lambda_r^d = -3 \pm 2j$$

$$\text{Compensateur : } \lambda_{comp}^d = -2$$

Les vecteurs propres désirés sont :

$$\begin{array}{lll}
 \begin{array}{c|c|c}
 \delta_a & \boxed{x} & \boxed{x} \\
 \delta_s & \boxed{x} & \boxed{x} \\
 \delta_r & \boxed{x} & \boxed{x} \\
 \beta & \boxed{x} & 1 \\
 p & 0 & \pm j \\
 r & 1 & \boxed{x} \\
 \phi & 0 & 0 \\
 x_8 & \boxed{x} & \boxed{x} \\
 z_1 & 1 & \boxed{x} \\
 z_2 & \boxed{x} & 1
 \end{array} &
 \begin{array}{c|c|c}
 \boxed{x} & \boxed{x} \\
 \boxed{x} & \boxed{x} \\
 \boxed{x} & \boxed{x} \\
 0 & 0 \\
 \boxed{x} & \pm j \\
 0 & 0 \\
 1 & \boxed{x} \\
 0 & 0 \\
 1 & \boxed{x} \\
 \boxed{x} & 1
 \end{array} &
 \begin{array}{c|c|c}
 \boxed{x} \\
 1 \\
 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Roulis hollandais

Roulis amortis et spiral

Compensateur

Le contrôleur par retour de sortie est :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.1698 & -0.1396 & -0.4135 & -0.0032 & 0.0032 \\ -0.6098 & -0.7986 & -1.7575 & -1.1261 & 1.1261 \\ 1.9922 & 1.8291 & 3.7881 & 3.0109 & -3.0109 \\ 0.4762 & 0.8238 & 2.4021 & -2.3818 & 0.3818 \\ -0.4959 & -1.0674 & -4.4001 & -1.5190 & -0.4810 \end{bmatrix}$$

Les matrices composant ce contrôleur sont :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.1698 & -0.1396 & -0.4135 \\ -0.6098 & -0.7986 & -1.7575 \\ 1.9922 & 1.8291 & 3.7881 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.0032 & 0.0032 \\ -1.1261 & 1.1261 \\ 3.0109 & -3.0109 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0.4762 & 0.8238 & 2.4021 \\ -0.4959 & -1.0674 & -4.4001 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2.3818 & 0.3818 \\ -1.5190 & -0.4810 \end{bmatrix}$$

La loi de commande est décrite donc par :

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_s \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1698 & -0.1396 & -0.4135 \\ -0.6098 & -0.7986 & -1.7575 \\ 1.9922 & 1.8291 & 3.7881 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{w0} \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0032 & 0.0032 \\ -1.1261 & 1.1261 \\ 3.0109 & -3.0109 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.3818 & 0.3818 \\ -1.5190 & -0.4810 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4762 & 0.8238 & 2.4021 \\ -0.4959 & -1.0674 & -4.4001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{w0} \\ p \\ \phi \end{bmatrix}$$

Le nombre de conditionnement est :

$$k(V) = 106.2659$$

Les marges de gains et de phase sont :

$$MG = [-1.7580 \text{ dB}, 2.2066 \text{ dB}]$$

$$MP = \pm 12.8808 \text{ deg}$$

La réponse temporelle en boucle fermée est montrée dans la figure 2.18. Les critères de performances sont montrés dans le tableau VII. On remarque que le temps de réponse du système est plus rapide au détriment d'une robustesse moins large et un découplage moins réussi comme en témoigne le nombre de conditionnement qui a beaucoup augmenté. Donc on constate qu'il y a un compromis à faire entre la robustesse et les performances et qu'un ordre plus élevé du compensateur n'apporte pas nécessairement la solution.

Tableau IX

Critères de performances en boucle fermée du compensateur de 2^{ième} ordre du modèle
F-18 HARV

Mode	Valeurs propres désirées	Valeurs propres obtenues	Amortissement ξ	Fréquence (rad/sec.)
Roulis hollandais	$-2 \pm 2j$	$-2 \pm 2j$	0.707	2.83
Roulis amortis	$-3 \pm 2j$	$-3 \pm 2j$	0.832	3.61
Aileron	x	-30	1	-
Stabilisateur	x	-26.9080	1	-
Gouvernail	x	-19.5542	1	-
Filtre passe haut	x	-0.6276	1	-
Compensateur z_1	-2	-2	1	-
Compensateur z_2	x	-6.7767	1	-

Les vecteurs réalisables sont :

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l}
 \delta_a \begin{bmatrix} 0.1388 \\ -1.7421 \\ 4.9591 \\ -0.6606 \\ -0.0099 \\ 1.0026 \\ 0.0450 \\ 0.4108 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7412 \\ -1.0170 \\ 4.2934 \\ 0.9870 \\ -0.0325 \\ 3.3194 \\ -0.0839 \\ -0.5587 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0778 \\ 0.0274 \\ 0.1002 \\ 0.0714 \\ -3.6377 \\ -0.0159 \\ 0.9939 \\ 0.0028 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.3068 \\ -0.2867 \\ 0.0841 \\ 0.0106 \\ 1.0006 \\ 0.0093 \\ 0.3288 \\ 0.0004 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 \text{Roulis hollandais} \qquad \text{Roulis amortis et spiral} \qquad \text{Compensateur}
 \end{array}$$

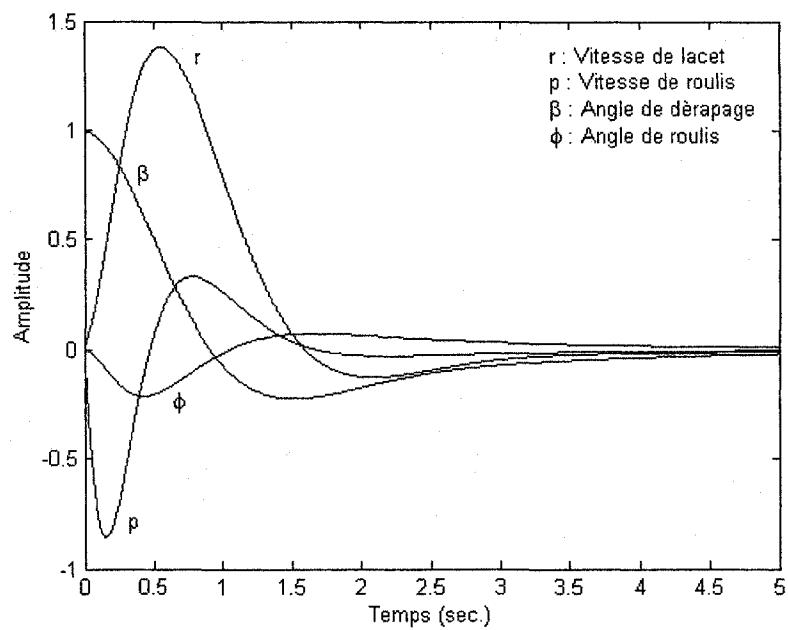


Figure 2.18 Réponses en boucle fermée avec compensation dynamique de 2^{ième} ordre

CHAPITRE 3

MODÈLE D'APPLICATION ADMIRE

Dans ce chapitre une application complète de la méthode par placement de structure propre sera faite sur ADMIRE (Aerodata Model in Research Environment) qui est un modèle générique (Generic Aerodata Model) d'avion de chasse créé par Saab (la division de l'aviation militaire) et l'Institut Royal de Technologie de Suède. Ce modèle d'avion, sera présenté d'une façon simplifiée. Il sera donc modifié quelque peu, de sa version originale dans le but de répondre adéquatement et d'une manière plus simple aux objectifs recherchés dans le présent projet. Pour en savoir plus sur le modèle complet, il faut consulter [45].

3.1 Description du modèle *ADMIRE*

ADMIRE est un modèle non-linéaire à six degrés de liberté est conçu pour atteindre une vitesse de pointe de Mach 1.2, une altitude supérieure à 6000 mètres, un angle d'attaque qui varie de -10 à 30 degrés et un angle de dérapage allant de -20 à 20 degrés. Le modèle est construit à partir de douze équations différentielles non-linéaires. Donc le modèle aérodynamique est fortement complexe et consiste en des tables renfermant des données interpolées linéairement dont le but est de déterminer les coefficients aérodynamiques. ADMIRE est préparé pour être utilisé sous des perturbations atmosphériques représentées par les entrées u_dist , v_dist , w_dist et p_dist . Les surfaces de contrôle disponibles sont (figure 3.2) : Le canard droit δ_{rc} et gauche δ_{lc} (-55 à +25 degrés), le gouvernail de direction δ_r (-25 à +25 degrés), le volet de bord principal δ_{le} (-10 à +30 degrés) et les élévons, intérieur droit δ_{rie} et gauche δ_{lie} et extérieur droit δ_{roe} et gauche δ_{loe} (-30 à +30 degrés).

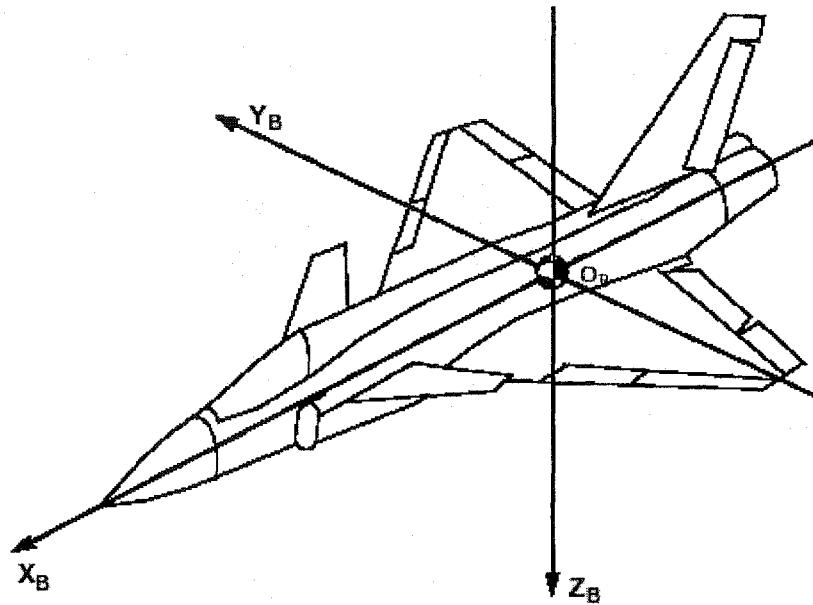


Figure 3.1 Aérodynamique du modèle générique Admire

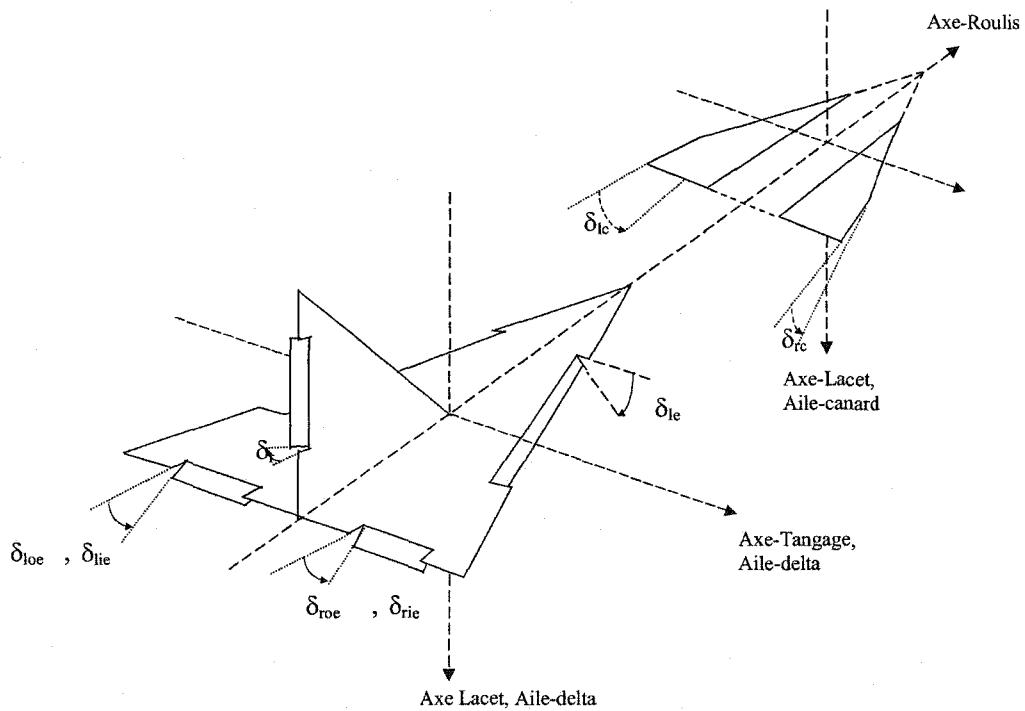


Figure 3.2 Surfaces de contrôle

3.1.1 Les variables d'états

Originalement, il existe 12 états et dépendamment de l'application utilisée, d'autres états représentant des éléments tels que les actionneurs et les capteurs, peuvent s'y rajouter. En ce qui concerne le modèle linéaire, 16 états viennent se rajouter aux 12 premiers états originaux pour un total de 28 états. En tout il peut y avoir jusqu'à 73 états si on utilise tous les actionneurs et des limiteurs de vitesse à compensation de phase.

Tableau X

Liste des états utilisés dans le modèle linéaire du modèle ADMIRE

Numéro	Variable (état)	Description	Unité
1	Vt_st	Vitesse de l'air	m/s
2	alpha_st	Angle d'attaque	rad
3	beta_st	Angle de dérapage	rad
4	pb_st	Vitesse de roulis (axe avion)	rad/s
5	qb_st	Vitesse de tangage (axe avion)	rad/s
6	rb_st	Vitesse de lacet (axe avion)	rad/s
7	psi_st	Angle de lacet (azimut)	rad
8	theta_st	Angle de tangage (élévation)	rad
9	phi_st	Angle de roulis	rad
10	x_st	Position de la composante x	m
11	y_st	Position de la composante y	m
12	z_st	Position de la composante z (altitude)	m
13	Vt_capteur	Capteur de la vélocité de l'avion	m/s
14	alpha_capteur	Capteur de l'angle de roulis	rad
15	beta_capteur	Capteur de l'angle de dérapage	rad
16	p_capteur #1	1 ^{er} capteur de la vitesse de roulis	rad/s

Tableau X (suite)

Numéro	Variable (état)	Description	Unité
17	p_capteur #2	2 ^{ième} capteur de la vitesse de roulis	rad/s
18	q_capteur #1	1 ^{er} capteur de la vitesse de tangage	rad/s
19	q_capteur #2	2 ^{ième} capteur de la vitesse de tangage	rad/s
20	r_capteur #1	1 ^{er} capteur de la vitesse de lacet	rad/s
21	r_capteur #2	2 ^{ième} capteur de la vitesse de lacet	rad/s
22	theta_capteur #1	1 ^{er} capteur de l'angle de tangage	rad
23	theta_capteur #2	2 ^{ième} capteur de l'angle de tangage	rad
24	phi_capteur #1	1 ^{er} capteur de l'angle de roulis	rad
25	phi_capteur #2	2 ^{ième} capteur de l'angle de roulis	rad
26	altitude_capteur	Capteur d'altitude	m
27	nz_capteur #1	1 ^{er} capteur de l'accélération verticale	"g"
28	nz_capteur #2	2 ^{ième} capteur de l'accélération verticale	"g"

3.1.2 Les entrées

Il existe 12 entrées pour le modèle linéaire et/ou non linéaire. Le pilote peut contrôler les 8 premières entrées tel qu'énumérées dans le tableau XI, par contre les quatre dernières entrées ne dépendent pas de l'action du pilote.

Tableau XI

Liste des entrées utilisées dans le modèle linéaire du modèle ADMIRE

Numéro	Variable	Description	Unité
1	Fes ¹	Force sur le manche du pilote pour le tangage	N
2	Vt	L'entrée de la manette des gaz pour le contrôle de vitesse	m/s
3	Fas ²	Force sur le manche du pilote pour le roulis	N
4	Frp ³	Force sur le manche du pilote pour le lacet	N
5	dle	Changement de la position du volet de bord principal	rad
6	ldg	Train d'atterrissement. 0=rentrer, 1=sortir	0/1
7	dty	Déflexion latérale de des injecteurs à carburant	rad
8	dtz	Déflexion verticale de des injecteurs à carburant	rad
9	u_dist	Turbulence autour de l'axe fixe Ox	m/s
10	v_dist	Turbulence autour de l'axe fixe Oy	m/s
11	w_dist	Turbulence autour de l'axe fixe Oz	m/s
12	p_dist	Turbulence autour de l'axe de roulis	rad/s

- 1 L'entrée **Fes** se traduit par une position (angle) du canard
- 2 L'entrée **Fas** se traduit par une position (angle) des élévons
- 3 L'entrée **Frp** se traduit par une position (angle) du gouvernail de direction

3.1.3 Les sorties

Il existe 31 sorties principales pour le modèle linéaire et/ou non-linéaire. Les sorties principales concernent les vélocités, les accélérations, les angles, les positions, les forces, les moments et les coefficients aérodynamiques (tableau XII).

Tableau XII

Liste des sorties utilisées dans le modèle linéaire du modèle ADMIRE

Numéro	Variable	Description	Unité
Les douze états originaux			
1	Vt_out	Vitesse linéaire résultante de l'avion	m/s
2	alpha_out	Angle d'attaque	rad
3	beta_out	Angle de dérapage	rad
4	pb_out	Vitesse angulaire de roulis (axe avion)	rad/s
5	qb_out	Vitesse angulaire de tangage (axe avion)	rad/s
6	rb_out	Vitesse angulaire de lacet (axe avion)	rad/s
7	psi_out	Angle de lacet (azimut)	rad
8	theta_out	Angle de tangage (élévation)	rad
9	phi_out	Angle de roulis	rad
10	x_out	Position de la composante x	m
11	y_out	Position de la composante y	m
12	z_out	Position de la composante z (altitude)	m
Vitesses et facteurs de charge(accélération du centre de gravité)			
13	ub_out	Vitesse longitudinale (Vt selon Ox de l'avion)	m/s
14	vb_out	Vitesse latérale (Vt selon Oy de l'avion)	m/s
15	wb_out	Vitesse verticale (Vt selon Oz de l'avion)	m/s
16	uv_out	Vitesse longitudinale (Vt selon Ox du vent)	m/s
17	vv_out	Vitesse latérale (Vt selon Oy du vent)	m/s
18	wv_out	Vitesse verticale (Vt selon Oz du vent)	m/s
19	nz_out	Accélération verticale de centre de gravité	"g"
20	ny_out	Accélération latérale du centre de gravité	"g"
21	mach_out	Nombre de Mach	-

Tableau XII (suite)

22	gamma_out	Angle de montée	rad
Coefficients aérodynamiques, forces et moments			
23	CD_out	Coefficient de traînée	-
24	CL_out	Coefficient de portance	-
25	CC_out	Coefficient de la force latérale	-
26	CI_out	Coefficient du moment de roulis	-
27	Cm_out	Coefficient du moment de tangage	-
28	Cn_out	Coefficient du moment de lacet	-
29	Fx_out	Force selon l'axe Ox de l'avion	N
30	Fz_out	Force selon l'axe Oz de l'avion	N
31	My_out	Moment de tangage	Nm

D'autres sorties intermédiaires tel que la position des surfaces de contrôle, le manche et les pédales du pilote ainsi que la manette des gaz peuvent êtrees prises en considération. Cependant ces sorties peuvent êtrees numérotées dépendamment de leur utilisation (tableau XIII).

3.1.4 Les fonctions de transfert des actionneurs

La fonction de transfert des actionneurs (surfaces de contrôle) est la même et vaut :

$$G(s) = \frac{1}{(0.5 + ddc_bw)s + 1} \quad (3.1)$$

La constante ddc_bw est calculée avant de linéariser le modèle, à chaque point de vol “trim conditions”.

Tableau XIII
Liste de sorties intermédiaires du modèle ADMIRE

Variable	Description	Unité
Fcs_Fac_in	Le signal d'entrée du manche pour le roulis	N
Fcs_Fes_in	Le signal d'entrée du manche pour le tangage	N
Fcs_Frp_in	Le signal d'entrée du manche pour le lacet	N
Fcs_Vt_in	L'entrée de la manette des gaz pour le contrôle de vitesse Vt	m/s
FCS_dlc	Position du canard droit	rad
FCS_drc	Position du canard gauche	rad
FCS_droe	Position de l'élevon extérieur droit	rad
FCS_drie	Position de l'élevon intérieur droit	rad
FCS_dlie	Position de l'élevon intérieur gauche	rad
FCS_dloe	Position de l'élevon intérieur gauche	rad
FCS_dr	Position du gouvernail de direction	rad
FCS_dle	Position du volet de bord principal	rad

3.1.5 Fonctions de transfert des capteurs

Trois fonctions de transfert servent à modéliser les capteurs utilisés afin de mesurer les sorties. Pour les sorties Vt , β , Z et α , on a :

$$G(s) = \frac{1}{0.02s + 1} \quad (3.2)$$

Pour les sorties ϕ et θ , on a :

$$G(s) = \frac{1}{0.00104s^2 + 0.0323s + 1} \quad (3.3)$$

Enfin pour les sorties **p**, **q**, **r** et **nz**, on a :

$$G(s) = \frac{0.0001903s^2 + 0.005346s + 1}{0.0004942s^2 + 0.030382s + 1} \quad (3.4)$$

Le nombre de Mach est calculé grâce à un programme (*s-function*) lequel reçoit deux paramètres qui sont la vitesse **Vt** de l'avion ainsi que son altitude **Z**. Toutes les autres sorties sont mesurées avec des capteurs dont la fonction de transfert est égale à l'unité. Ces sorties sont :

ψ , x, y, ub, vb, wb, uv, vv, wv, ny, γ , CD, CL, CC, CI, Cm, Cn, Fx, Fz, My.

3.1.6 Enveloppe de vol

Le système de contrôle a été testé pour 30 points de vol comme c'est montré à la figure 3.3. Entre ces points de conception, les caractéristiques du système de contrôle sont déterminées à partir d'une interpolation linéaire. Les altitudes sont 20 m, 3000 m et 6000 m. Les nombres de Mach sont 0.2200, 0.3500, 0.4500, 0.5500, 0.8000, 0.9000, 0.9500, 1.0000, 1.0500, 1.1000 et 1.2000.

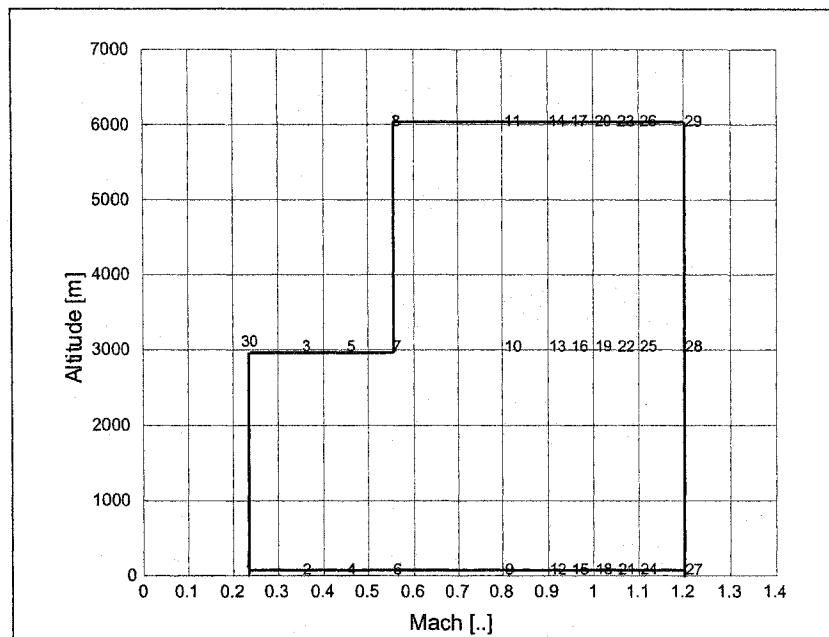


Figure 3.3 Enveloppe de vol du modèle ADMIRE

3.2 Application

L'application consiste en un premier temps à ramener l'avion à des conditions de vol bien définies par l'opération "trimming". Cette opération consiste à résoudre des équations algébriques pour trouver les valeurs de tous les états de l'avion à la condition d'équilibre choisie. On choisit donc dans l'enveloppe de vol de l'avion, un point de vol, qui consiste en un nombre de Mach, une altitude (Z) et un angle d'attaque (α). À cette position, l'avion possède une accélération, les surfaces de contrôle ont des positions angulaires et on note des conditions initiales pour les douze états originaux. Dans la deuxième étape, le modèle non linéaire est linéarisé dans le but de représenter le système sous un modèle d'état linéaire. Dans la troisième étape, on calcule le contrôleur en utilisant la méthode de structure propre. Dans une quatrième étape on calcule le contrôleur par retour de sortie avec contraintes dans le but de réduire la complexité du contrôleur calculé à l'étape précédente. Notons bien qu'à la troisième et quatrième étapes

un contrôleur à gain anticipatif ou en compensation avant "feedforward controller" est calculé en même temps afin de pouvoir agir sur les modes entrée indépendamment en agissant sur le manche du pilote. Le contrôleur en compensation avant ne fait pas l'objet du présent mémoire, néanmoins on donnera ultérieurement la formule qui sert à le calculer. Dans la cinquième et dernière étape on calculera un contrôleur dynamique de premier ordre mais en utilisant uniquement des conditions initiales, c'est à dire que l'action du pilote est inexistante, donc le contrôleur tentera de rejoindre une consigne dictée par les conditions initiales seulement.

Pour illustrer les étapes à suivre, choisissons par exemple le 8^{ème} point de vol (figure 3.3) :

1^{ère} étape :

Ce point de vol consiste en un nombre de Mach de 0.6, une altitude de 6000 mètres et un angle d'attaque de 0 degré (vol stationnaire). Alors après l'opération de "trimming" on obtient les résultats suivants :

Le canard est déplacé vers le bas : $\delta_{rc} = \delta_{lc} = 0.14793$ degrés ;

Les élevons sont déplacés vers le bas : $\delta_{rie} = \delta_{lie} = \delta_{roe} = \delta_{loe} = -0.97638$ degrés ;

Le gouvernail de direction (δ_r) est resté à 0 degré ;

Le volet de bort principal (δ_{le}) est resté à 0 degré ;

La poussée (thrust) est $tss = 0.14080$;

L'accélération de l'avion est $nz = 0.2120 \text{ m/s}^2$

Les conditions initiales des douze états originaux sont donc :

$$x_0(1) = 189.85702 \quad (\text{Vt } [\text{m/s}])$$

$$x_0(2) = 0 \quad (\text{alpha } (\alpha) [\text{deg}])$$

$x_0(3) = 0$	(beta (β) [deg])
$x_0(4) = 0$	(p [deg/s])
$x_0(5) = -3.49284$	(q [deg/s])
$x_0(6) = 0$	(r [deg/s])
$x_0(7) = 0$	(psi (ψ) [deg])
$x_0(8) = 0$	(theta (θ) [deg])
$x_0(9) = 0$	(phi (ϕ) [deg])
$x_0(10) = 0$	(x [m])
$x_0(11) = 0$	(y [m])
$x_0(12) = -6000$	(z [m])

2^{ième} étape :

On linearise le système et on découple ainsi le mouvement latéral du mouvement longitudinal afin d'obtenir une représentation linéaire de la dynamique de l'avion dans l'espace d'état. Les dimensions des matrices sont : A(28x28), B(28x16), C(59x28), et D(59x16). Les 28 états obtenus sont les suivants : les 12 états originaux plus 16 états provenant des capteurs. Les 59 sorties obtenues sont les 31 sorties énumérées dans le tableau XII plus les 28 premières mesurées (prises à la sortie de leurs capteurs) de ces mêmes sorties. Les entrées sont décrites dans le tableau XI. Étant donnée que l'objectif de l'application porte sur le mouvement latéral, alors à partir des données obtenues on construira un modèle latéral représenté par les variables d'état ϕ , r , p et β . Le modèle est donc le suivant :

Le vecteur d'état composé dans l'ordre par l'angle de roulis, la vitesse de lacet, la vitesse de roulis et l'angle de dérapage est donnée par :

$$x = [\phi \quad r \quad p \quad \beta]^T$$

Les entrées de commande sont respectivement les ailerons et le gouvernail de direction :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{A} des paramètres du modèle est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0009 & -0.3849 & 0.0351 & 3.8429 \\ -0.0018 & 0.4219 & -2.0145 & -11.6313 \\ 0.0515 & -0.9926 & 0.0004 & -0.2148 \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{B} des entrées (contrôle) est:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0409 & -4.8658 \\ 11.8877 & 5.7319 \\ -0.0112 & 0.0641 \end{bmatrix}$$

Cependant il faut être attentif quand il s'agit de calculer les données au niveau de l'entrée aileron (1^{ère} colonne de la matrice \mathbf{B}). Rappelons que les elevons sont utilisés dans une configuration aile-delta, c'est à dire qu'ils jouent en même temps le rôle des ailerons et des élévateurs. Alors pour obtenir un mouvement de roulis, le pilote agit sur les quatre elevons de manière à reproduire exactement le mouvement des ailerons. L'équation régissant ce mouvement est comme suit :

Faire la moyenne de la différence des elevons intérieurs droit et gauche :

$$\delta_{ai} = \frac{1}{2} (\delta_{lie} - \delta_{rie}) \quad (3.1)$$

Ensuite, faire la moyenne de la différence des élévons extérieurs droit et gauche :

$$\delta_{ao} = \frac{1}{2}(\delta_{loe} - \delta_{roe}) \quad (3.2)$$

Enfin, faire la moyenne des deux résultats précédents pour avoir l'aileron :

$$\delta_a = \frac{1}{2}(\delta_{ai} + \delta_{ao}) \quad (3.3)$$

3^{ième} étape :

Avant de calculer le contrôleur par retour de sortie avec la méthode de structure propre, on doit augmenter le modèle pour passer de quatre (4) états à treize (13) états en y incorporant les **actionneurs** des entrées (le gouvernail de direction et les ailerons) et les **capteurs** des sorties ϕ , r , p et β . Donc les dimensions des matrices deviennent : $A(13 \times 13)$, $B(13 \times 2)$, $C(4 \times 13)$, et $D(4 \times 2)$. Le modèle final est le suivant :

Le vecteur d'état est :

$$x = [\delta_a \quad \delta_r \quad \phi \quad r \quad p \quad \beta \quad x_{\phi_1} \quad x_{\phi_2} \quad x_r \quad x_{r_2} \quad x_{p_1} \quad x_{p_2} \quad x_{\beta}]^T$$

Les entrées de commande demeurent respectivement les ailerons et le gouvernail de direction : $u = [\delta_a \quad \delta_r]^T$

Les sorties du système sont : $y = [x_\phi \quad x_r \quad x_p \quad x_\beta]^T$

La matrice A des paramètres est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0409 & -4.8658 & 0.0009 & -0.3849 & 0.0351 & 3.8429 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11.8877 & 5.7319 & -0.0018 & 0.4219 & -2.0145 & -11.6313 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0112 & 0.0641 & 0.0515 & -0.9926 & -0.0004 & -0.2148 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -31.058 & -961.54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -62.363 & -2023.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -62.363 & -2023.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{B} des entrées est :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

La matrice \mathbf{C} des sorties est :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 961.54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.38507 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.197 & 1244.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.38507 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.197 & 1244.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

La matrice \mathbf{D} de couplage des entrées avec les sorties est nulle.

Calcul du contrôleur par retour de sortie :

Rappelons que le calcul du contrôleur est basé sur un choix de valeurs propres et de vecteurs propres. Reprenons donc les valeurs propres utilisées dans le chapitre 2 (section 2.8), qui ont été calculées en se basant sur les spécifications militaires MIL-F-8785C [43].

Roulis hollandais : $\lambda_{dr}^d = -2 \pm 2j$

Roulis amortis et spiral : $\lambda_r^d = -3 \pm 2j$

Les vecteurs propres désirés :

$$V_d = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ 0 & 0 \\ x & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & x \\ x & \pm j \\ x & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ x & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & x \\ 0 & 0 \\ x & \pm j \\ x & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \phi \\ r \\ p \\ \beta \\ x_{\phi_1} \\ x_{\phi_2} \\ x_n \\ x_{r_1} \\ x_{p_1} \\ x_{p_2} \\ x_{\beta} \end{bmatrix}$$

Roulis hollandais

Roulis amortis et spiral

Tableau XIV

Critères de performances en boucle ouverte du modèle ADMIRE

Mode	Valeurs propres	Amortissement ξ	Fréquence (rad/sec.)
Roulis hollandais	- 0.23 ± 2.01j	0.113	0.0164
Roulis spiral	-0.0164	1	3.61
Roulis amortis	-2.1414	1	-
Aileron	-20	1	-
Gouvernail de direction	-20	1	-
Capteur de ϕ	-15.53 ± 26.84j	0.501	31
Capteur de r	-31.18 ± 32.42j	0.693	45
Capteur de p	-31.18 ± 32.42j	0.693	45
Capteur de β	-50	1	-

Après avoir appliqué la méthode placement de structure propre on obtient les résultats suivants :

Tableau XV

Conception du contrôleur par retour de sortie sans contraintes du modèle ADMIRE

Matrice de gain par retour de sortie K				Marges de gain et de phase aux entrées δ_{ac}, δ_{rc}	Max ϕ Max p
x_ϕ	x_r	x_p	x_β		
δ_a	0.6907	0.3178	0.2405	-1.0013	[-5.0881 dB, 13.8247dB] ± 46.9317 deg
δ_r	0.1670	-0.4807	0.0605	0.1413	0.1287 deg. 0.5705 deg s ⁻¹

Tableau XVI

Critères de performances en boucle fermée du modèle ADMIRE

Mode	Valeurs propres désirées	Valeurs propres obtenues	Amortissement ξ	Fréquence (rad/sec.)
Roulis hollandais	$-2 \pm 2j$	$-2 \pm 2j$	0.707	2.83
Roulis amortis et spiral	$-3 \pm 2j$	$-3 \pm 2j$	0.832	3.61
Aileron	x	-13.7576	1	-
Gouvernail de direction	x	-14.6817	1	-
Capteur de ϕ	x	$-15.60 \pm 26.95j$	0.501	31.1
Capteur de r	x	$-32.27 \pm 32.23j$	0.708	45.6
Capteur de p	x	$-32.11 \pm 32.28j$	0.705	45.5
Capteur de β	x	-50	1	-

Les vecteurs propres obtenus sont :

$$V = \begin{bmatrix} -0.5956 & 1.7111 \\ 2.8669 & -0.1852 \\ 0 & 0 \\ 5.4031 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1.6938 \\ 0 & \pm j \\ 0 & 0 \\ -0.0064 & 0.0050 \\ 0.0029 & 0.0004 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0223 & 0.0344 \end{bmatrix}$$

Roulis hollandais

$$\begin{bmatrix} 0.7012 & 0.5081 \\ 0.1581 & 0.1450 \\ -0.9997 & 0.9996 \\ -0.0036 & 0.0043 \\ 0.9999 & -4.9983 \\ 0.0199 & -0.0047 \\ 0.0008 & -0.0058 \\ -0.0011 & 0.0012 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0043 & 0.0090 \\ 0.0004 & -0.0027 \\ 0.0004 & -0.0001 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \phi \\ r \\ p \\ \beta \\ x_{\phi_1} \\ x_{\phi_2} \\ x_r \\ x_{r_2} \\ x_{p_1} \\ x_{p_2} \\ x_\beta \end{matrix}$$

Roulis amortis et spiral

Calcul du contrôleur à gain anticipatif “feedforward controller” :

La méthode du gain anticipatif est un cas spécial de la commande de génération de poursuite de Broussard “command generator tracker” [46, 47]. On peut résumer brièvement cette commande de la façon suivante :

Soit les matrices du système $A(n \times n)$ et $B(n \times m)$, alors on construit une matrice Ω carrée tel que :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ H & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.4)$$

La matrice H renferme les variables que l'on veut contrôler ou sur les quelles on veut exercer une poursuite. Il faut que la matrice Ω soit de rang maximal ($n + m$) a fin de

pouvoir l'inverser sinon le résultat serait une matrice égale à l'infini (∞). Donc la commande générée, incluant les contrôleurs à gain anticipatif K_{ff} et le contrôleur K par retour de sortie, est donnée par :

$$\mathbf{u} = [\Omega_{22} - \mathbf{K}\mathbf{C}\Omega_{12}] \mathbf{u}_{ref} + \mathbf{K}\mathbf{y} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}_{ff} = [\Omega_{22} - \mathbf{K}\mathbf{C}\Omega_{12}] \quad (3.6)$$

Après avoir appliqué cette commande le résultat obtenu est :

$$\mathbf{K}_{ff} = \begin{bmatrix} 0.7073 & -0.5118 \\ 0.1383 & 1.1383 \end{bmatrix}$$

Le diagramme de commande par retour de sortie avec le contrôleur à gain anticipatif est montré à la figure A1.3 en annexe.

L'analyse des résultats nous amène à constater que les contrôleurs K et K_{ff} sont efficaces du moment que la consigne désirée (figure 3.5) par le pilote est atteinte parfaitement avec les critères de performances voulus (figure 3.6). Le découplage (figure 3.4) est acceptable ($\max |\phi| = 0.1287$ deg. et $\max |p| = 0.5705$ deg s⁻¹).

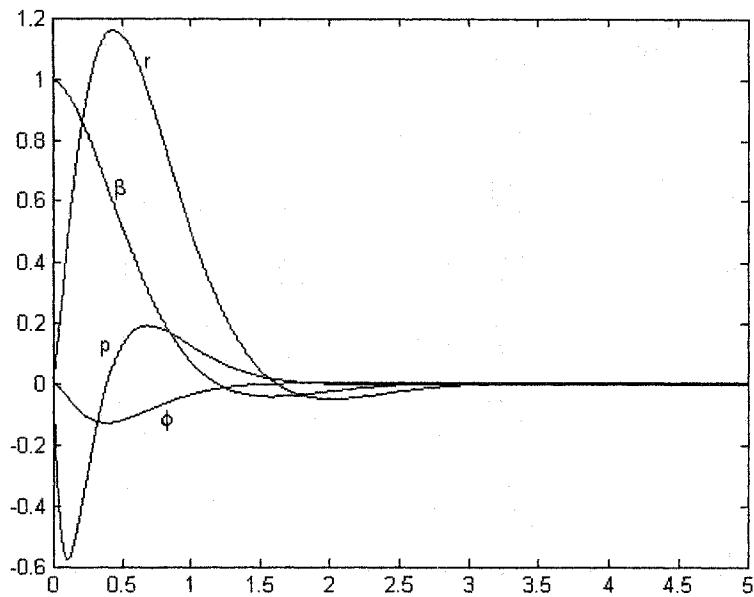


Figure 3.4 Réponses temporelles en boucle fermée sans l'action du pilote (condition initiale $\beta=1^\circ$)

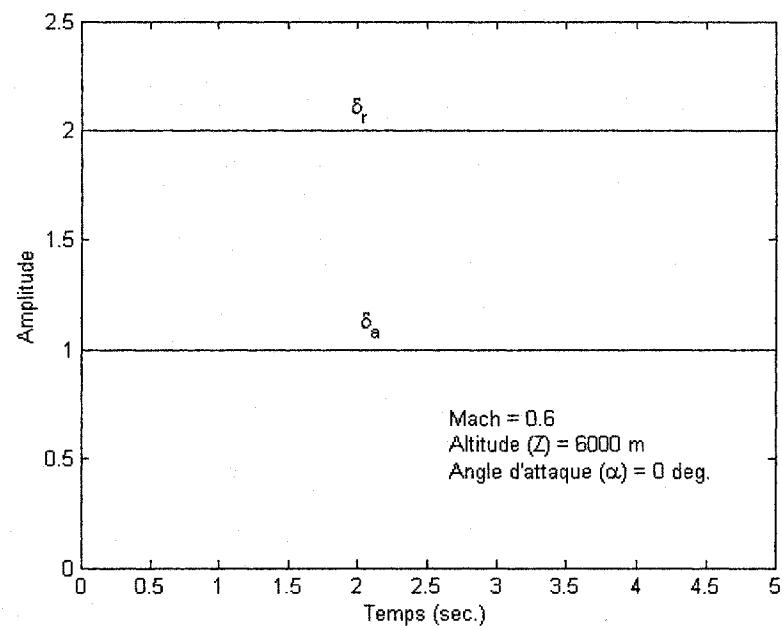


Figure 3.5 Entrées du pilote sur le manche

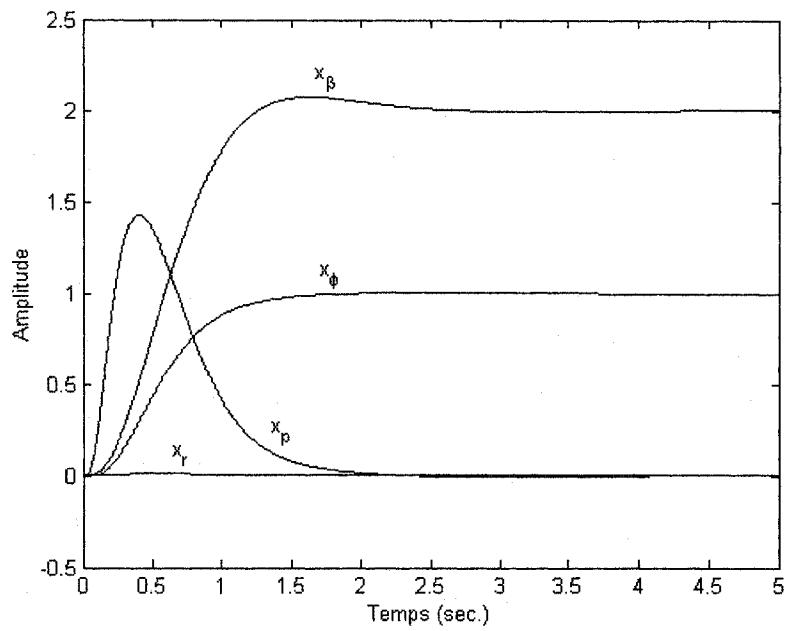


Figure 3.6 Réponses temporelles en boucle fermée

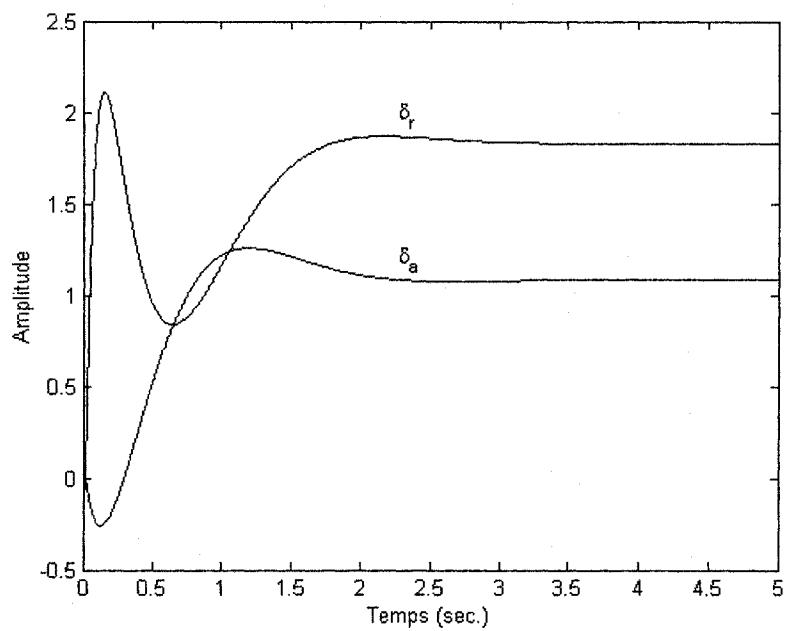


Figure 3.7 Réponse des surfaces de contrôle

4^{ième} étape :

Après avoir appliqué la méthode étudiée à la section 2.7 du chapitre 2 qui permet de calculer le contrôleur avec contraintes on obtient les résultats montrés dans les tableaux et figures suivants :

Tableau XVII
Matrices de décision du modèle ADMIRE

Matrice de décision de valeurs propres D^λ				Matrice de décision de vecteurs propres D^v			
x_ϕ	x_r	x_p	x_β	x_ϕ	x_r	x_p	x_β
δ_a [0.4723 0.1844 1.0506 0.0473]				δ_a [0.0850 0.6562 0.5401 0.5463]			
δ_r [0.0489 0.5447 0.1013 0.0299]				δ_r [0.0406 0.3483 0.1032 0.0348]			

Tableau XVIII
Conception du contrôleur par retour de sortie avec contraintes du modèle ADMIRE

Matrices de gain par retour de sortie K				Marges de gain et de phase aux entrées δ_{ac}, δ_{rc}	Max ϕ Max p
x_ϕ	x_r	x_p	x_β		
Conception avec contraintes (D^λ seulement)					
δ_a [0.7147 0.0878 0.2443 0]				[-4.7952 dB, 11.5955 dB]	0.6566 deg.
δ_r [0 -0.4483 0.0214 0]				± 43.2363 deg	1.5427 deg s ⁻¹
Conception avec contraintes (D^λ et D^v)					
δ_a [0.6907 0.3178 0.2405 -1.0013]				[-5.0756 dB, 13.7150 dB]	0.1121 deg.
δ_r [0 -0.4483 0.0214 0]				± 46.7702 deg	0.5395 deg s ⁻¹

Tableau XIX

Contrôleur à gain anticipatif pour un contrôle avec contraintes du modèle ADMIRE

K_{ff} en utilisant D^λ		K_{ff} en utilisant D^λ et D^v	
x_ϕ	x_β	x_ϕ	x_β
$\delta_a \begin{bmatrix} 0.7194 & 0.5270 \\ -0.0270 & 0.9916 \end{bmatrix}$		$\delta_a \begin{bmatrix} 0.7073 & -0.5118 \\ -0.0270 & 0.9916 \end{bmatrix}$	

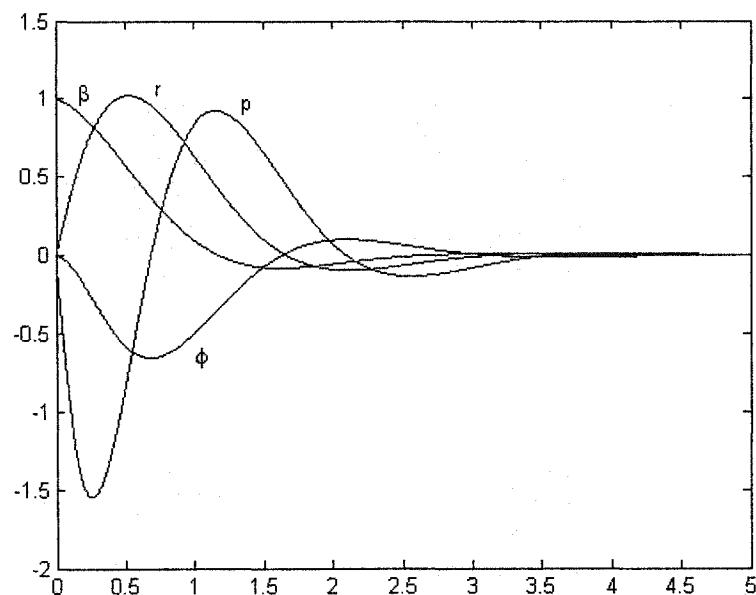


Figure 3.8 Réponse en boucle fermée sans l'action du pilote utilisant la matrice de décision D^λ (condition initiale $\beta=1^\circ$)

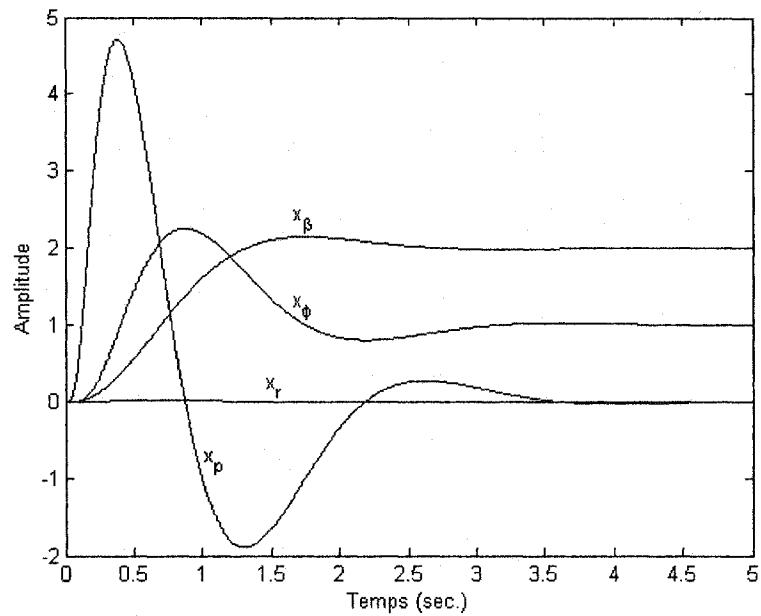


Figure 3.9 Réponses temporelles en boucle fermée utilisant la matrice de décision D^λ

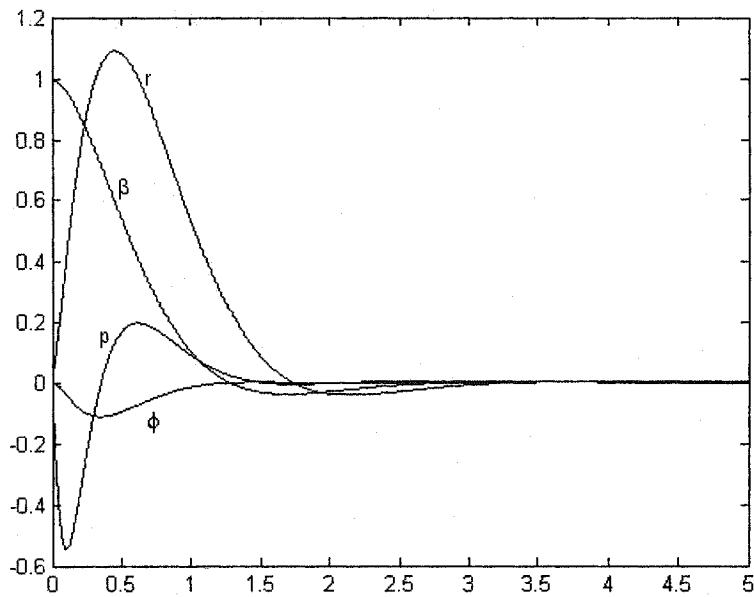


Figure 3.10 Réponse en boucle fermée sans l'action du pilote utilisant la matrice de décision D^λ et D^y (condition initiale $\beta=1^\circ$)

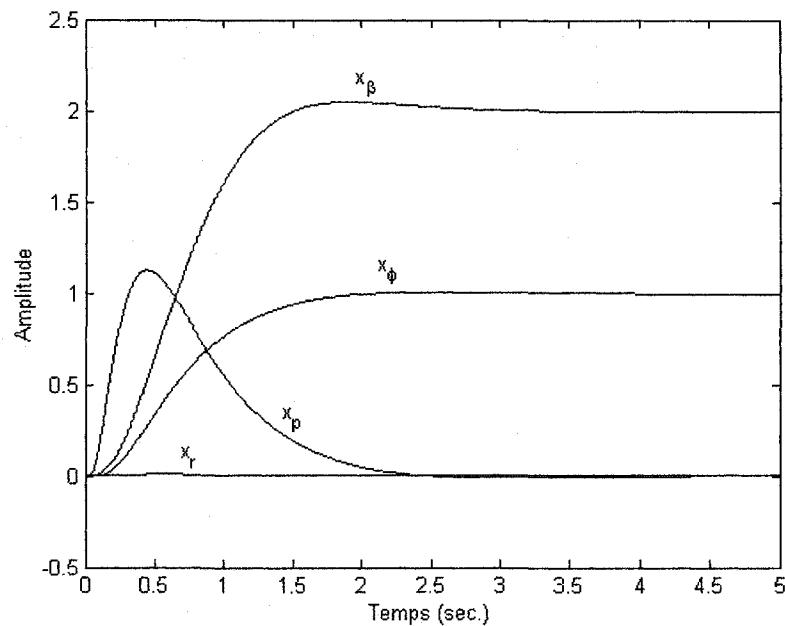


Figure 3.11 Réponses temporelles en boucle fermée utilisant les matrices de décision D^λ et D^v

D'après les résultats obtenus le contrôleur avec contraintes utilisant les deux matrices de décision D^λ et D^v est plus performant que le contrôleur utilisant D^λ seulement. Le temps de réponse ainsi que le découplage de ce dernier se sont détériorés en annulant trois de ses gains (figure 3.8). Bien au contraire le contrôleur utilisant D^λ et D^v est plus rapide et présente un meilleur découplage (figure 3.10) que le contrôleur par retour de sortie sans contrainte calculé dans la 3^{ième} étape. Il faut remarquer que dans les deux cas les contrôleurs répondent à la consigne du pilote (figure 3.9 et 3.11).

5^{ième} étape :

Dans cette dernière étape, on calculera un compensateur dynamique de 1^{er} ordre étudié à la section 2.9 du chapitre 2. Pour cette partie et contrairement aux étapes précédentes du présent chapitre, on n'utilisera pas l'action du pilote ($u_{ref} = 0$), c'est à dire qu'on se

limitera uniquement à une commande avec conditions initiales. On reprendra les mêmes critères de performances désirés aux étapes trois et quatre avec une condition initiale pour l'angle de dérapage β égale à 1 degré. Les sorties sont x_ϕ , x_r et x_p . On suppose que le capteur de l'angle de dérapage est défectueux, donc la sortie x_β n'est pas disponible. Le compensateur de 1^{er} ordre vient compenser la sortie manquante pour stabiliser le système.

Les modes désirés sont :

$$\text{Roulis hollandais : } \lambda_{dr}^d = -2 \pm 2j$$

$$\text{Roulis amortis et spiral : } \lambda_r^d = -3 \pm 2j$$

Les vecteurs propres désirés sont :

$$V_d = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \\ 0 & 0 \\ 1 & x \\ 0 & 0 \\ x & 1 \\ x & x \\ 1 & x \end{bmatrix} \pm j \begin{bmatrix} x & x & \delta_a \\ x & x & \delta_r \\ 1 & x & \phi \\ 0 & 0 & r \\ x & 1 & p \\ 0 & 0 & \beta \\ x & x & x_{\phi_1} \\ x & x & x_{\phi_2} \\ x & x & x_r \\ x & x & x_{r_2} \\ x & x & x_{p_1} \\ x & x & x_{p_2} \\ x & x & x_\beta \\ 1 & x & z_1 \end{bmatrix}$$

Roulis hollandais

Roulis amortis et spiral

Après avoir appliqué l'algorithme de structure propre en compensation dynamique, on aboutit aux résultats suivants :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.2279 & -0.0148 & 0.3589 & 0.9912 \\ 0.2323 & -0.4338 & 0.0438 & -0.1399 \\ -2.8574 & -0.6232 & -0.8817 & 2.7611 \end{bmatrix}$$

Le contrôleur dynamique K est subdivisé en quatre matrices dans le but de former un contrôleur d'état. Les matrices sont les suivantes (voir section 2.9) :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -0.2279 & 0.0148 & -0.3589 \\ -0.2323 & 0.4338 & -0.0438 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0.9912 \\ 0.1399 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = [2.8574 \ 0.6232 \ 0.8817]$$

$$\mathbf{D} = [-2.7611]$$

La loi de commande est décrite donc par :

$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2279 & 0.0148 & -0.3589 \\ -0.2323 & 0.4338 & -0.0438 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\phi \\ x_r \\ x_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.9912 \\ 0.1399 \end{bmatrix} z_i$$

$$\dot{z} = -2.7611 z_i + 2.8574 x_\phi + 0.6232 x_r + 0.8817 x_p$$

Les marges de gains et de phase sont :

$$MG = [-5.0265 \text{ dB}, 13.2992 \text{ dB}]$$

$$MP = \pm 46.1398 \text{ degrés}$$

Les vecteurs propres réalisés sont :

$$V_d = \begin{bmatrix} -0.0531 & 0.0085 \\ 0.0452 & 0.0723 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3.1059 \\ 0 & 0 \\ -0.6035 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0044 & -0.0019 \\ 0.0006 & 0.0016 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0117 & 0.0213 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0052 \\ 0.0022 \\ 0.9997 \\ 0.0041 \\ -3.6655 \\ -0.0097 \\ -0.0041 \\ 0.0012 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0045 \\ -0.0020 \\ -0.0002 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0318 \\ -0.0077 \\ 0.3331 \\ 0.0010 \\ 1 \\ -0.0117 \\ 0.0014 \\ 0.0003 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0059 \\ 0.0007 \\ -0.0002 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \phi \\ r \\ p \\ \beta \\ x_{\phi_1} \\ x_{\phi_2} \\ x_{r_1} \\ x_{r_2} \\ x_{p_1} \\ x_{p_2} \\ x_{\beta} \\ z_1 \end{bmatrix}$$

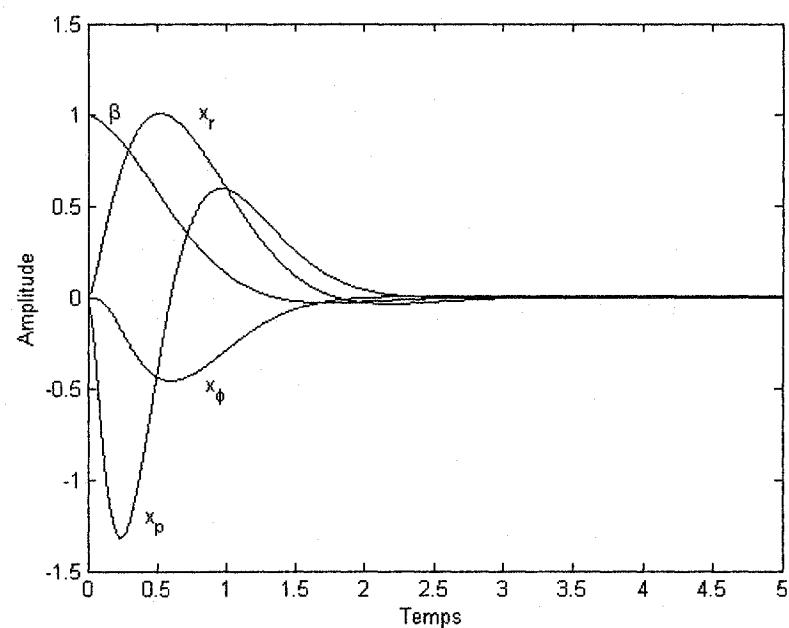


Figure 3.12 Réponses en boucle fermée avec compensation dynamique de 1^{er} ordre

Tableau XX

Critères de performances en boucle fermée du compensateur de 1^{er} ordre du modèle
ADMIRE

Mode	Valeurs propres désirées	Valeurs propres obtenues	Amortissement ξ	Fréquence (rad/sec.)
Roulis hollandais	$-2 \pm 2j$	$-2 \pm 2j$	0.707	2.83
Roulis amortis et spiral	$-3 \pm 2j$	$-3 \pm 2j$	0.832	3.61
Aileron	x	-10.5338	1	-
Gouvernail de direction	x	-15.6377	1	-
Capteur de ϕ	x	$-15.55 \pm 26.89j$	0.500	31.1
Capteur de r	x	$-31.95 \pm 32.30j$	0.703	45.4
Capteur de p	x	$-32.63 \pm 32.26j$	0.711	45.9
Capteur de β	x	-50	1	-
Compensateur	x	- 4.7286	1	-

En analysant les résultats, on constate que le compensateur de 1^{er} ordre présente un temps de réponse (figure 3.12) semblable à celui obtenu avec un contrôleur par retour de sortie (figure 3.4). La robustesse est acceptable et demeure presque inchangée. Les modes du compensateur sont moins découplés ($\max |\phi| = 0.4600$ deg. et $\max |p| = 1.3195$ deg s⁻¹).

CONCLUSION

La méthode de placement de structure propre est une méthode très utilisée dans des applications aéronautiques, donc on a fait en sorte dans ce projet, que cette théorie soit bien illustrée et appliquée sur des modèles d'avions de chasse et commercial.

Le premier chapitre a fait l'objet d'une étude de la dynamique latérale de l'avion pour en connaître le comportement de ce dernier dans son environnement de vol et du même coup tracer un chemin précis pour le reste du projet. On s'est familiarisé donc avec les différentes parties constituant le corps de l'avion, ensuite une modélisation complète était établie dans l'espace d'état dans le but de faciliter l'explication de la théorie de la méthode de placement de structure propre dans le deuxième chapitre. Cette méthode a été utilisée pour calculer le contrôleur par retour de sortie sans contraintes ainsi que le contrôleur d'état pour la compensation dynamique. Cependant, en se servant de la sensibilité des valeurs propres et vecteurs propres on a pu réduire la taille ainsi que la complexité du contrôleur par retour de sortie en annulant certains de ses gains. Ce processus a aboutit donc à un contrôleur par retour de sortie avec contraintes pouvant découpler aussi bien les sorties et offrant une robustesse quasi semblable à celle du contrôleur sans contraintes.

En effet cette théorie comme on l'a si bien démontré offre un découplage en régime transitoire. Ce découplage évidemment varie selon le choix des critères de performances désirés en particulier le choix des vecteurs propres désirés. Certes les résultats sont satisfaisants, mais elle n'offre pas une solution complète du premier coup aux problèmes de la stabilité de l'avion. Pour corroborer cette affirmation, il aura fallu par exemple seconder cette théorie par une autre théorie qui permettait de recalculer le contrôleur pour en aboutir à un contrôleur moins complexe et plus optimal en termes de découplage. En outre, en cas de sortie manquante suite à une défectuosité de capteur, il

faut compenser cette sortie par une compensation dynamique. Dans de pareilles circonstances, l'algorithme de structure propre calcule un compensateur dynamique qui ne peut assurer une bonne robustesse et un temps de réponse acceptable. La méthode de placement de structure propre donne d'excellents résultats uniquement avec des conditions initiales, c'est-à-dire que l'action du pilote est nulle. Par conséquent, en y ajoutant cette dernière, il est impératif de calculer un deuxième contrôleur à gain anticipatif. L'action combinée des deux contrôleurs, fait en sorte que le pilote ait le contrôle sur les modes entrée dans le but d'amener les sorties à des consignes désirées.

Pour ressortir les avantages et les inconvénients de la théorie de structure propre, quelques exemples de modèles d'avions ont été pris en considération, notamment l'avion de ligne L1011 [4], l'avion de chasse C18-HARV [10] et enfin le modèle Admire [45] qui est *UN* modèle générique d'avion de chasse.

Pour conclure, on recommande dans un travail futur suite aux résultats trouvés à la section 2.10 et 3.5 (étape 5), d'apporter les améliorations nécessaires au niveau de la compensation dynamique dans laquelle la robustesse et le découplage ne sont pas satisfaisant en même temps ou séparément dans certaines situations de vol. Il a été impossible de stabiliser le système en compensation dynamique en ayant une consigne, par conséquent tous les calculs pour ce type de commande ont été réussis uniquement en utilisant les conditions initiales. Il faut revoir la façon de calculer le compensateur à gain anticipatif “feedforward controler” au niveau de la compensation dynamique, car le contrôleur par retour de sortie obtenu par la méthode de placement de structure propre, est supporté par un contrôleur à gain anticipatif en régime permanent.

ANNEXE 1

SCHÉMAS BLOC DES SYSTÈMES DE COMMANDE

Indices "subscripts":

a : Aileron "Aileron"

r : Gouvernail de direction "Rudder"

ac : Aileron "Aileron command"

rc : Gouvernail de direction "Rudder command"

wo : Filtre passe haut "Washout filter"

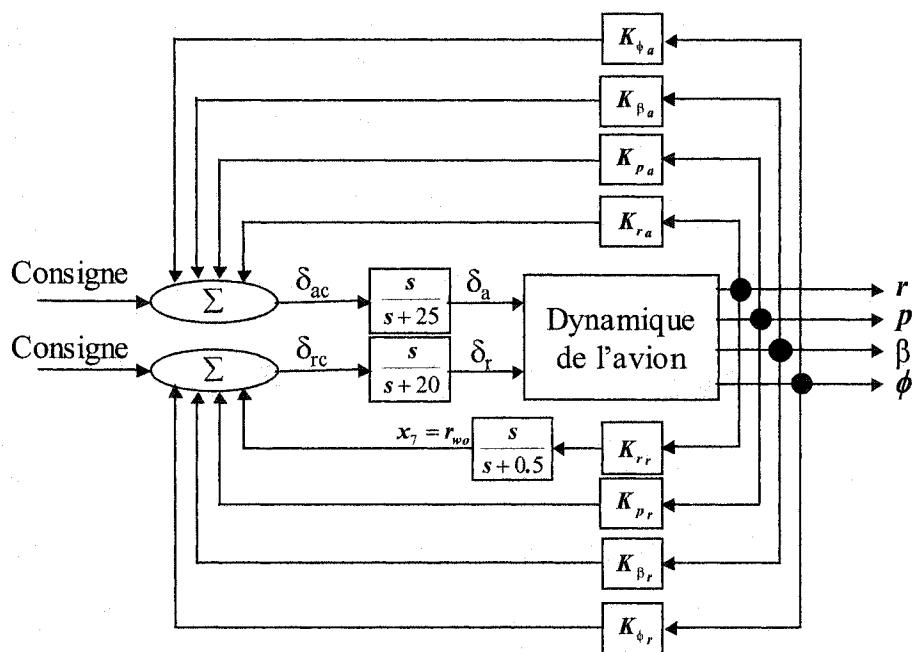


Figure A1.1 Diagramme bloc du système de commande du modèle L1011 [4]

Indices "subscripts":

a : Aileron "Aileron"

s : Stabilisateur "Stabilator"

r : Gouvernail de direction "Rudder"

ac : Aileron "Aileron command"

sc : Stabilisateur "Stabilator command"

rc : Gouvernail de direction "Rudder command"

wo : Filtre passe haut "Washout filter"

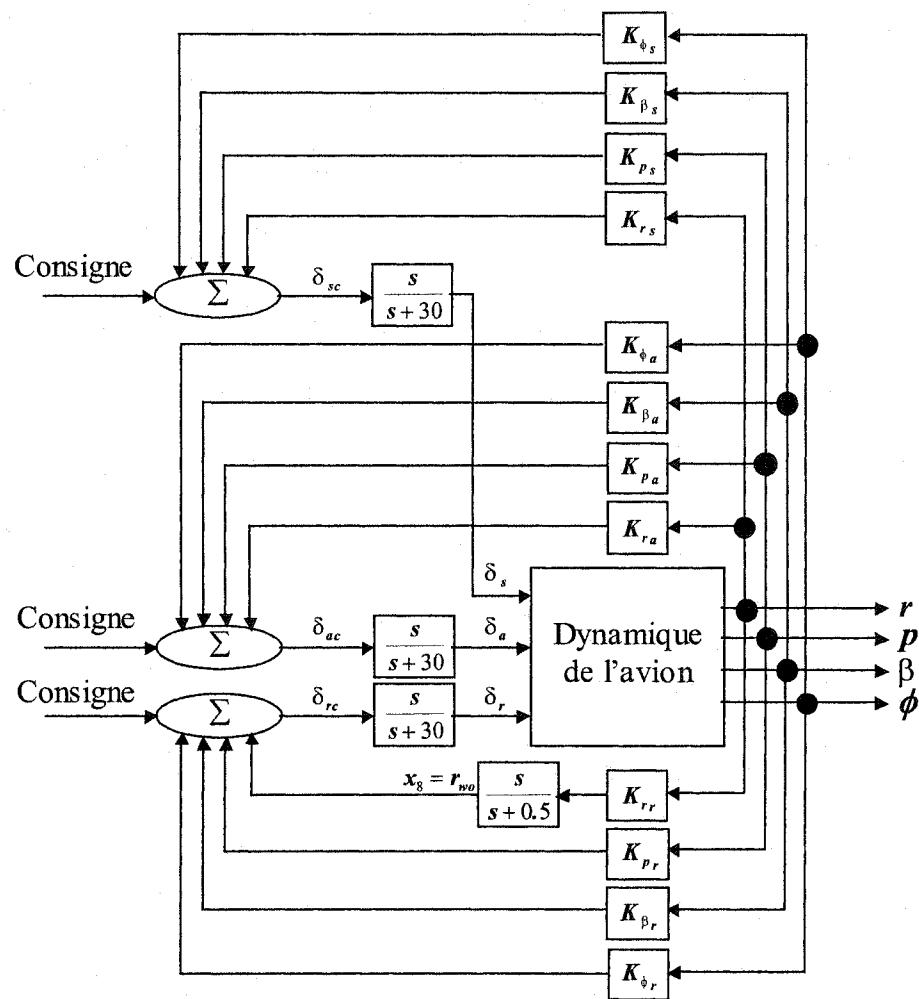


Figure A1.2 Diagramme bloc du système de commande du modèle F18-CHRV [10]

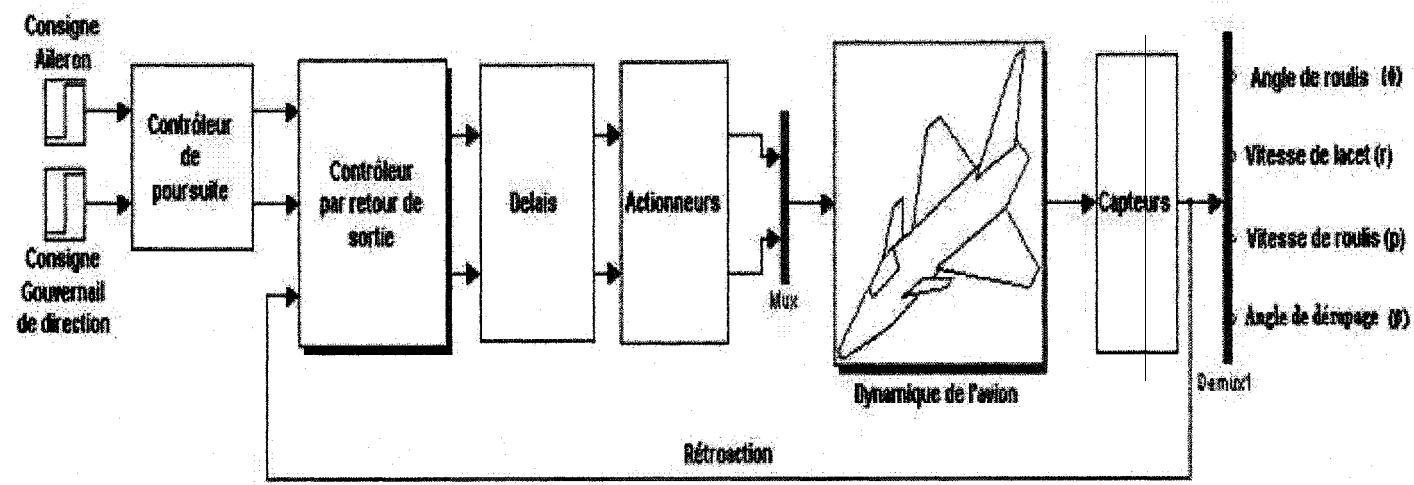


Figure A1.3 Diagramme bloc du système de commande par retour de sortie du modèle ADMIRE

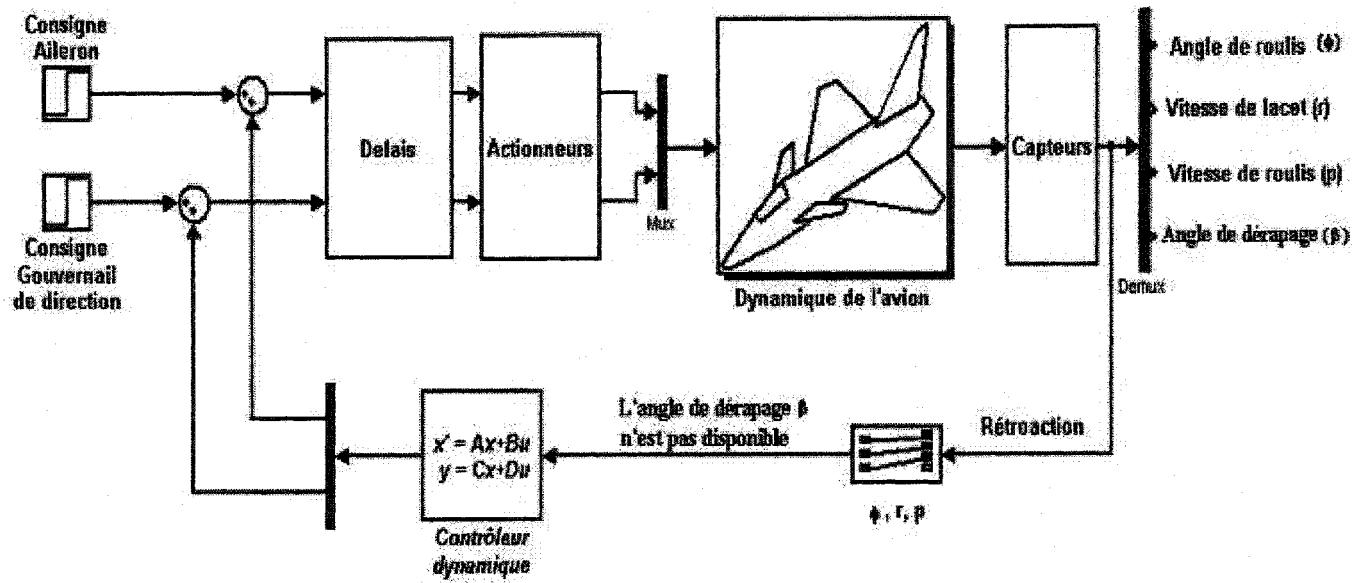


Figure A1.4 Diagramme bloc du système de commande en compensation dynamique du modèle ADMIRE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Kimura, "Pole Assignment by Gain Output Feedback", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No.3, pp. 509-515, August. 1975.
- [2] H. Kimura, "On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-21, pp. 689-692, October. 1976.
- [3] S. Srinathkumar, "Eigenvalue / eigenvector assignment using output feedback" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23, No.1, pp. 79-81, Feb. 1978.
- [4] A.N. Andry, E.Y. Shapiro, J.C. Chung, "Eigenstructure assignment for linear systems" IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-19, No.5, pp. 711-728, September 1983.
- [5] GARTEUR / TP-088-7, April 4, 1997
- [6] K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, "Application of eigensystem to lateral translation and yaw pointing flight control", In. Proc.23th IEEE conference on decision and control, pp.1423-1428, Las Vegas, Nevada, December 1984.
- [7] K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, "Application of eigenstructure assignment to flight control design : some extensions" Vol. 10, No. 1, pp. 73-81, Journal of Guidance, Control and dynamics, February 1987.
- [8] K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, "Flight control examples of robust eigenstructure assignment", In. Proc.26th IEEE conference on decision and control, pp. 1920-1921, Los Angeles, CA, December 1987.
- [9] K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, "An extension to the pseudo control strategy with application to an eigenstructure assignment yaw pointing/lateral translation control law", In. Proc.30th IEEE conference on decision and control, pp. 515-516, Brighton England December 1991.
- [10] K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, A.N. Andry, "Eigenstructure assignment", International Journal of Control, Vol. 59, No. 1, pp. 13-37, 1994.
- [11] W.Yu, K.M. Sobel, "Robust eigenstructure assignment with structured state space uncertainty", Journal of guidance, Control and Dynamics, Vol. 14, No. 3, pp. 621-628, May-June 1991.

- [12] K.M. Sobel, F. J. Lallman, "Eigenstructure assignment for the control of highly augmented aircraft", Journal of guidance, Control and Dynamics, Vol. 12, No. 3, pp. 318-324, 1989.
- [13] K.M. Sobel, Yu Wangling and F. J. Lallman, "Eigenstructure assignment with Gain Suppression Using Eigenvalue and Eigenvector Derivatives", Journal of guidance, Control and Dynamics, Vol. 13, No. 6, pp. 1008-1013, 1990.
- [14] J.E. Piou, K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, "Multirate eigenstructure assignment with application to an aircraft lateral SAS/Autopilot", In. Proc. American Control conference, pp. 2496-2500, Baltimore, Maryland, June 1994.
- [15] J. Kautsky, N.K. Nichols, P.V. Dooren, "Robust pole assignment in linear state feedback", International Journal of Control, Vol. 41, No. 5, pp. 1129-1155, 1998
- [16] L.F. Faleiro, R.W. Pratt, "Multi-objective eigenstructure assignment with dynamic control augmentation systems", AIAA Guidance Navigation and Control Conference, San Diego, CA, July 29-31 1996.
- [17] W.L. Garrard, "Lateral directional aircraft control using eigenstructure assignment", Journal of Guidance, Vol. 21, No. 3, pp. 523-525, January 1998.
- [18] E.J. Davison, "On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, pp. 348-351, 1970.
- [19] N.A. Lehtomaki, "Practical Robustness Measures in Multivariable Control System Analysis" Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, May 1981.
- [20] N.A. Lehtomaki, M. Athans, "Robustness results in linear-quadratic gaussain based multivariable control designs", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, No.1, pp. 75-91, February 1981.
- [21] M.G. Safonov, A.J. Laub, G.L. Hartmann, "Feedback properties of multivariable systems : The role and use of the return difference matrix" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, No.1, pp. 47-65, February 1981.
- [22] J.R. Calvo-Ramon, " Eigenstructure Assignment by Output Feedback and Risidue Analysis", IEEE transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No.3, pp. 247-249, March 1986.
- [23] T.L. Johnson, M. Athans, "On the Design of Optimal Constrained Dynamic Compensators for linear Constant Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, pp. 658-660, December 1970.

- [24] J.J. D'Azzo, C.H. Houpis, Linear Control System Analysis & Design, Third Edition, McGraw-Hill, 1988.
- [25] J.H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University press, London 1965.
- [26] S. Lipschutz, Algèbre linéaire, Deuxième édition, McGraw-Hill, 1991
- [27] F. Ayres jr, Matrices, Serie Schaum, McGraw-Hill, 1973.
- [28] D. McReur, I. Ashkenas, D. Graham, Aircraft Dynamics and Automatic Control, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973.
- [29] B.L. Stevens, F.L. Lewis, Aircraft Control and Simulation, John Wiley & Sons, New York, N.Y,1992.
- [30] J.H. Blakelock, , Automatic Control of Aircraft and Missiles, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, N.Y,1992.
- [31] J. B. Russell, Performance & Stability of Aircraft, John Wiley & Sons, Arnold, London, New York, N.Y, 1996.
- [32] M.V. Cook, Flight Dynamics Principles, John Wiley & Sons, New York, N.Y 1997.
- [33] L.V. Schmidt, Introduction to Flight Dynamics, Reston, Virginia. : American Institute of Aeronautics and Astronautics , 1998.
- [34] B.N. Pamadi, Performance, Stability, Dynamics, and Control of Airplanes, Reston, Virginia. : American Institute of Aeronautics and Astronautics , 1998.
- [35] B.Etkin, L. Duff Reid, Dynamics of Flight Stability and Control, Third Edition,John Wiley & Sons,1996.
- [36] R.C. Nelson, Flight Stability and Automatic Control, McGraw-Hill , New York, N.Y. 1989.
- [37] R. P. G. Collinson, Introduction to Avionics, Chapman and Hall, London, England 1996.
- [38] B. Etkin, L. Duff Reid, Automatic Flight Control, Third Edition, BSP Professional Books, Oxford, 1990, c1987

- [39] D. McLean, Automatic Flight Control Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. , 1990.
- [40] B.W. McCormick, Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, N.Y,1995.
- [41] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, Addison-Wesley, 1995.
- [42] R.J. Patton, G.P. Liu, "Eigenstructure Assignment for Control System Design", Chichester, England ; New York : J. Wiley, c1998.
- [43] MIL-F-8785C, "Military Specifications-Flying qualities of piloted airplanes", November 1980.
- [44] L'histoire de l'aviation, <http://www.chez.com/shgente/histoire/>
- [45] <http://www.foi.se/admire/>
- [46] O'brien, M.J. and Broussard, J.R., "Feedforward Control to Track the Output of a Forced Model" Proceedings of the 17th IEEE Conference on Decision and Control, 1978, pp. 1149-1155.
- [47] K.M. Sobel, E.Y. Shapiro, "A Design Methodology for Pitch Pointing Flight Control Systems" Vol. 8, No. 2, pp. 181-187, Journal of Guidance, Control and dynamics, March-April 1985.
- [48] David S. Watkins, "Fundamentals of Matrix Computations", John Wiley & Sons, New York, N.Y,1991.
- [49] D. Bensoussan, "Decentralized control and sensitivity reduction of weakly coupled plants ", International Journal of Control, Vol. 40, No. 6, pp. 1099-1118, 1944.