

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE EN  
GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE  
M. ING.

PAR  
MOHAMED HERDA, ing.

IDENTIFICATION DU MODÈLE D'UN AVION  
AÉROÉLASTIQUE À L'AIDE D'UNE NOUVELLE MÉTHODE  
D'APPROXIMATION DES FORCES AÉRODYNAMIQUES NON  
STATIONNAIRES

MONTREAL, LE 14 NOVEMBRE 2003

(c) 2003 droits réservés de Mohamed Herda, ing.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Ruxandra Botez, directrice du mémoire

Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

Mr Iulian Cotoi, codirecteur, Chercheur au département de mathématiques appliquées  
École Polytechnique de Montréal

Mr. Rachid Aissaoui, président du jury

Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

Mr. Nicholas Stathopoulos, Chef de groupe, Service d'ingénierie - Forces Canadiennes  
Bombardier Aéronautique

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 6 NOVEMBRE 2003

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# **IDENTIFICATION DU MODÈLE D'UN AVION AÉROÉLASTIQUE À L'AIDE D'UNE NOUVELLE MÉTHODE D'APPROXIMATION DES FORCES AÉRODYNAMIQUES NON STATIONNAIRES**

Mohamed Herda

## **SOMMAIRE**

Dans ce projet, on présente l'identification du modèle d'un avion aéroélastique à l'aide d'une nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires du domaine de fréquence au domaine de Laplace pour le calcul des interactions aéroservoélastiques.

Cette nouvelle méthode est réalisée en deux étapes :

1. Les forces aérodynamiques seront interpolées par des polynômes orthogonaux qui serviront à la génération d'une série de puissances
2. À l'aide de la série de puissances, on calcule, par une technique d'identification, les coefficients des numérateurs et dénominateurs de la fraction rationnelle de Padé.

Cette méthode permet de mettre chaque élément de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires sous forme d'une fonction de transfert. La fonction de transfert obtenue par la méthode Padé est souvent d'ordre élevé qui n'est pas toujours réalisable du point de vue stabilité. Afin de pouvoir réaliser cette fonction de transfert, on procède à une réduction de son ordre par la méthode de Luus Jakola à l'aide d'algorithme de recherche opérationnel.

Pour illustrer et valider notre nouvelle méthode, nous avons considéré le modèle de test d'avion ATM développé par la NASA DFRC, à l'aide du logiciel STARS qui contient tous les éléments nécessaires à une analyse aéroservoélastique ainsi que les résultats aéroservoélastiques associés obtenus par la NASA. Ces résultats seront présentés sous la forme des vitesses de battement.

La nouvelle méthode développée dans cette thèse est une contribution originale qui permet de mener une analyse aéroservoélastique. Les résultats obtenus par la méthode d'analyse de battement sur le modèle ATM en boucle ouverte et en boucle fermée en utilisant notre nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques sont excellentes en termes de convergence en comparaison avec les méthodes traditionnelles telles que la méthode Least Square LS et Minimum State MS.

# **MODEL IDENTIFICATION FOR AN AEROELASTIC AIRCRAFT WITH A NEW APPROXIMATION METHOD OF UNSTEADY AERODYNAMIC FORCES**

Mohamed Herda

## **ABSTRACT**

In this project, we present the identification of an aeroelastic aircraft by a new method of approximation for unsteady aerodynamic forces from the frequency domain into Laplace domain for aeroservoelastic interactions calculations.

This new method is applied in 2 main steps :

1. Aerodynamic forces are interpolated by orthogonal polynomials which generate power series.
2. By use of power series calculated previously, we calculate, by identification techniques, the numerators and denominators coefficients of the Pade rational function.

This new method allows the writing of each element of the unsteady aerodynamic forces matrix under the form of a transfer function. The resulting transfer function through Pade method is often of high order which is not always good from the stability system point of view. In order to obtain this transfer function, we proceed to an order reduction by Luus Jakola method by use of an operational research algorithm.

In the aim to illustrate and validate our new method, we consider the Aircraft Test Model ATM developed by NASA DFRC, by use of STARS software which contains all elements necessary for an aeroservoelastic analysis (flexible aircraft with control system) as well as the aeroservoelastic results obtained by NASA. These results are presented under the form of flutter speeds.

The new method of approximation for unsteady aerodynamic forces developed in this project is an original contribution which allows us to conduct an aeroservoelastic analysis. The obtained results through the flutter analysis methods on the ATM model in open and closed loop by use of our new method of aerodynamics approximation are excellent, as the convergence of our method is excellent (much faster) than the convergence of other traditional methods such as Least Square LS and Minimum State MS.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin pour faire de ce mémoire un succès.

J'ai apprécié travailler avec les directeurs des mes travaux, Mme Ruxandra Botez et Mr Iulian Cotoi, qui ont su me guider, me motiver et me supporter tout au long de mon mémoire.

Je dédie ce mémoire à ma famille de Montréal, Nantes et Casablanca ...

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
LISTE DES TABLEAUX .....	vi
LISTE DES FIGURES .....	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES .....	1
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE .....	2
1.1 Introduction .....	2
1.2 Recherche bibliographique sur les logiciels d'analyse en aéroservoélasticité .....	3
1.2.1 ADAM (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method) .....	3
1.2.2 FAMUSS (Flexible Aircraft Modeling Using State Space) .....	4
1.2.3 ISAC (Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls) .....	5
1.2.4 ASTROS (Automated STRuctural Optimisation System) .....	5
1.2.5 ZAERO .....	6
1.2.6 STARS (STRuctural Analysis RoutineS) .....	7
1.3 Méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques .....	8
CHAPITRE 2 AÉROSERVOÉLASTICITÉ .....	13
2.1 Modélisation structurelle de l'avion .....	13
2.2 L'analyse vibratoire de l'avion au sol .....	14
2.3 Modélisation aérodynamique de l'avion .....	15
2.4 Les méthodes d'analyse de battement dans le modèle ATM .....	16
2.4.1 La méthode d'analyse de battement $pk$ (Boucle ouverte) .....	16
2.4.2 La méthode d'analyse de battement $p$ (Boucle ouverte) .....	18
2.5 Formulation du problème aéroélastique dans l'espace d'étates .....	19
CHAPITRE 3 APPROXIMATION DES FORCES AÉRODYNAMIQUES .....	25
3.1 Introduction .....	25

3.2	Méthodes d'interpolation .....	26
3.2.1	Problématique générale.....	26
3.2.2	Interpolation par les polynômes de Lagrange .....	27
3.2.3	Interpolation par les splines .....	27
3.2.4	Interpolation par les polynômes orthogonaux.....	28
3.2.5	Interpolation par Krigeage .....	28
3.3	Méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques....	29
3.3.1	Méthode d'approximation LS (Least Square).....	29
3.3.2	Méthode d'approximation MP (Matrix Padé).....	30
3.3.3	Méthode d'approximation MS (Minimum State) .....	30
3.4	Nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques .....	32
3.4.1	Interpolation par les polynômes orthogonaux.....	33
3.4.2	Génération des fractions rationnelles de Padé .....	34
3.4.3	Programmation de l'approximation des forces aérodynamiques .....	38
3.4.4	Détails numériques sur les approximation des forces aérodynamiques .....	39
CHAPITRE 4	RÉDUCTION DU MODÈLE AÉROSERVOÉLASTIQUE.....	40
4.1	Introduction.....	40
4.2	Algorithme de Luus Jakola .....	43
CHAPITRE 5	RÉSULTATS ET INTERPRETATION.....	45
5.1	Résultats numériques de l'approximation par la méthode de Padé.....	45
5.2	Résultats numériques de l'approximation par les polynômes de Padé-Chebyshev.....	73
5.3	Résultats numériques sur la réduction de l'ordre du système .....	85
5.4	Résultats numériques de l'analyse de battement.....	87
5.4.1	Boucle ouverte (Méthode $pk$ ).....	88
5.4.2	Boucle fermée (Méthode $p$ ) .....	93
CONCLUSION	.....	98
ANNEXE	LE MODÈLE DE TEST DE L'AVION ATM.....	100
BIBLIOGRAPHIE	.....	107

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I      Erreur $\varepsilon$ d'approximation calculée par les fractions rationnelles de Padé.....	73
Tableau II     Comparaison de l'erreur $\varepsilon$ d'approximation calculée par les polynômes de Padé-Chebyshev .....	84
Tableau III    Comparaison de battements en boucle ouverte selon les méthodes d'approximation.....	92
Tableau IV    Comparaison de battements en boucle fermée selon les méthodes d'approximation.....	97



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1-1	Domaine de l'aéroservoélasticité..... 2
Figure 1-2	Architecture du logiciel ADAM..... 4
Figure 1-3	Architecture du logiciel ISAC..... 5
Figure 1-4	Architecture du module ASE de ZAERO ..... 7
Figure 1-5	Architecture du logiciel STARS ..... 7
Figure 2	Algorithme de la méthode $pk$ ..... 18
Figure 3	Organigramme de l'approximation des forces aérodynamiques ..... 38
Figure 5-1	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=0.0$ ..... 46
Figure 5-2	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=0.5$ ..... 46
Figure 5-3	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=1.0$ ..... 47
Figure 5-4	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=0.0$ ..... 49
Figure 5-5	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=0.5$ ..... 49
Figure 5-6	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=1.0$ ..... 50
Figure 5-7	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=0.0$ ..... 52
Figure 5-8	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=0.5$ ..... 52
Figure 5-9	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de $x=1.0$ ..... 53

Figure 5-10	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=0.0$ .....	55
Figure 5-11	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=0.5$ .....	55
Figure 5-12	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=1.0$ .....	56
Figure 5-13	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=0.0$ .....	58
Figure 5-14	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=0.5$ .....	58
Figure 5-15	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=1.0$ .....	59
Figure 5-16	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=0.0$ .....	61
Figure 5-17	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=0.5$ .....	61
Figure 5-18	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de $x=1.0$ .....	62
Figure 5-19	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=0.0$ .....	64
Figure 5-20	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=0.5$ .....	64
Figure 5-21	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=1.0$ .....	65
Figure 5-22	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=0.0$ .....	67
Figure 5-23	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=0.5$ .....	67

Figure 5-24	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=1.0$ .....	68
Figure 5-25	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=0.0$ .....	70
Figure 5-26	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=0.5$ .....	70
Figure 5-27	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de $x=1.0$ .....	71
Figure 5-28	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2] .....	75
Figure 5-29	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8] .....	76
Figure 5-30	Approximation de $Q_r(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12] .....	76
Figure 5-31	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2] .....	78
Figure 5-32	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8] .....	79
Figure 5-33	Approximation de $Q_i(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12] .....	79
Figure 5-34	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2] .....	81
Figure 5-35	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8] .....	82
Figure 5-36	Approximation de $Q(2,3)$ par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12] .....	82
Figure 5-37	Variation de l'erreur d'approximation en fonction de la méthode d'approximation utilisée .....	85
Figure 5-38	Courbes de Nyquist des systèmes original et réduit .....	86

Figure 5-39	Courbes de Bode des systèmes original et réduit.....	87
Figure 5-40	Méthode $pk$ - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [4,2] .....	88
Figure 5-41	Méthode $pk$ - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2].....	89
Figure 5-42	Méthode $pk$ - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2].....	89
Figure 5-43	Méthode $pk$ - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [8,6] .....	90
Figure 5-44	Méthode $pk$ - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6].....	91
Figure 5-45	Méthode $pk$ - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6].....	91
Figure 5-46	Méthode $p$ - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [4,2] .....	93
Figure 5-47	Méthode $p$ - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2].....	94
Figure 5-48	Méthode $p$ - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2].....	94
Figure 5-49	Méthode $p$ - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [8,6] .....	95
Figure 5-50	Méthode $p$ - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6].....	96
Figure 5-51	Méthode $p$ - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6].....	96

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

### NOMENCLATURE

$b$	Demi longueur de corde
$c$	Longueur de corde de l'aile
$D$	Matrice modale d'amortissement
$D_e$	Matrice modale d'amortissement pour $n$ modes élastiques
$D_{N,N}$	Matrice modale d'amortissement pour $N$ nœuds
$k$	Fréquence réduite
$K$	Matrice modale d'élasticité structurelle
$K_e$	Matrice modale d'élasticité structurelle pour $n$ modes élastiques
$K_{N,N}$	Matrice modale d'élasticité structurelle pour $N$ nœuds
$M$	Matrice modale d'inertie et de masse
Mach	Nombre de Mach
$M_e$	Matrice modale d'inertie et de masse pour $n$ modes élastiques
$M_{N,N}$	Matrice modale d'inertie et de masse pour $N$ nœuds
$q$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles en fonction du temps
$Q$	Matrice modale des forces aérodynamiques généralisées
$q_c$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles pour les modes de commande
$q_d$	Pression dynamique
$q_e$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles pour les modes élastiques
$Q_I$	Partie imaginaire de $Q$
$Q_{N,N}$	Matrice modale des forces aérodynamiques généralisées pour $N$ nœuds
$q_r$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles pour les modes rigides
$Q_R$	Partie réelle de $Q$

$V$	Vitesse vraie
$V_0$	Vitesse au sol
$V_E$	Vitesse équivalente
$x_s$	Localisations des capteurs
$\delta_r$	Matrice modale des coefficients d'amortissement
$\square$	Coordonnées généralisées en fonction de la fréquence
$\eta_c$	Coordonnées généralisées des modes de contrôle
$\eta_e$	Coordonnées généralisées des modes élastiques
$\eta_r$	Coordonnées généralisées des modes rigides
$\square$	Matrice modale de forme
$\square$	Rapport de la vitesse équivalente à la vitesse au sol
$\omega$	Fréquence naturelle
$\square$	Densité de l'air
$\rho_0$	Densité de l'air au sol
$\square$	Rapport de la densité de l'air à la densité de l'air au sol

## ABRÉVIATIONS

ADAM	Analog and Digital Aeroservoelasticity Method
AE	Aéroélasticité
ASE	Aéroservoélasticité
ASTROS	Automated STRuctural Optimisation System
BIBO	Bounded-Input Bounded-Output (Entrée bornée et sortie bornée)
DCA	Differential Correction Algorithm
DLM	Doublet Lattice Method (Méthode des doublets)
FAMUSS	Flexible Aircraft Modeling Using State Space
ISAC	Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls
LS	Least Square (Moindres carrées)

LRS	Low Rank Schur Method
LRSR	Low Rank Square Root Method
MIMO	Multiple Inputs Multiple Outputs (Multiple entrées et multiple sorties)
MP	Matrix Pade
MS	Minimal State (État minimal)
STARS	STructural Analysis RoutineS
ZAERO	Zona Aerospace de Zona Technologies

## INTRODUCTION

L'aéroservoélasticité ASE est l'interaction entre les trois disciplines suivantes : l'aérodynamique, la structure flexible (l'aéroélasticité) et les servocommandes sur un avion flexible à commande électrique.

Un aspect fondamental de cette analyse est la conversion de forces aérodynamiques du domaine fréquentiel  $k$  (la modélisation de l'avion par des éléments finis en aéroélasticité AE) dans le domaine de Laplace  $s$  (la simulation du système en temps réel en aéroservoélasticité ASE).

Dans le premier chapitre, une recherche bibliographique sur les logiciels existants en aéroservoélasticité ASE est présentée. Les trois méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques du domaine de fréquence  $Q(k)$  dans le domaine de Laplace  $Q(s)$  sont "Least Squares" LS, "Matrix Padé" MP et "Minimum State" MS.

Dans le deuxième chapitre, on décrit les principes fondamentaux de l'aéroservoélasticité qui sont utilisés dans ce travail.

Dans le troisième chapitre, on présente la méthode d'approximation de Padé par les fonctions rationnelles.

Dans le quatrième chapitre, on étudie la réduction de l'ordre du modèle aéroservoélastique de l'avion par la méthode de Luus-Jakola.

Dans le cinquième chapitre, on procède à la présentation et à l'analyse des résultats obtenus dans le cadre de cette étude.



## CHAPITRE 1

### RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

#### 1.1 Introduction

Les principaux soucis en aéronautique sont liés à la stabilité et à l'efficacité des avions. Ceux-ci vont introduire la nécessité des études des interactions aéro-servo-élastiques entre les systèmes de commande active et l'avion flexible, pour assurer à l'avion la stabilité vis-à-vis des perturbations dues aux turbulences et aux rafales ainsi que pour augmenter les performances des surfaces de contrôle. La théorie multidisciplinaire de l'aéro-servo-élasticité<sup>1</sup> est basée sur l'interaction entre l'aérodynamique, la servocommande et la structure flexible d'un avion selon le diagramme de la figure 1-1.

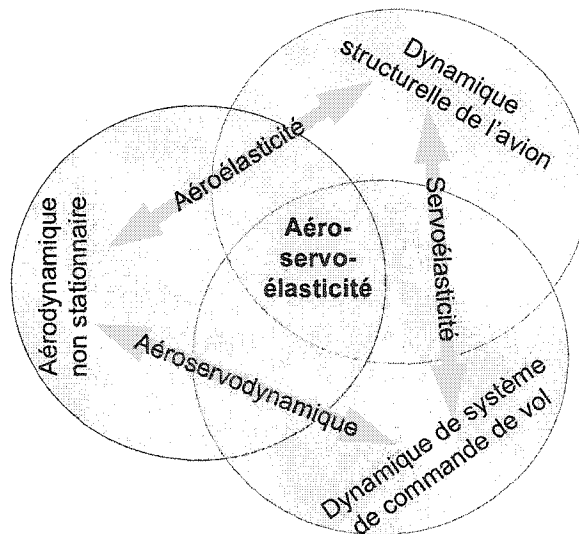


Figure 1-1 Domaine de l'aéro-servo-élasticité

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons effectuer un survol de la littérature en aéroserveoélasticité. En premier lieu, on va présenter la recherche bibliographique sur les logiciels d'analyse en aéroserveoélasticité, et en deuxième lieu, on va présenter la recherche bibliographique sur les méthodes classiques pour la conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace.

## **1.2 Recherche bibliographique sur les logiciels d'analyse en aéroserveoélasticité**

Plusieurs logiciels d'analyse en aéroserveoélasticité sont utilisés dans l'industrie aéronautique tels que ADAM<sup>2</sup> (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method), FAMUSS<sup>3</sup> (Flexible Aircraft Modeling Using State Space), ISAC<sup>4</sup> (Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls), ASTROS<sup>5,6,7</sup> (Automated STRuctural Optimisation System), ZAERO<sup>8</sup> de Zona Technologies, STARS<sup>9</sup> (STRuctural Analysis RoutineS) et MSC/NASTRAN. Nous allons décrire brièvement ces logiciels dans les paragraphes suivants. Il faudrait souligner le fait que notre description est organisée en ordre chronologique, c'est-à-dire qu'elle commence par le plus ancien logiciel ADAM et finit par les plus récents logiciels. Le logiciel utilisé dans notre thèse est STARS.

### **1.2.1 ADAM (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method)**

L'architecture du logiciel ADAM est donnée dans la Figure suivante.

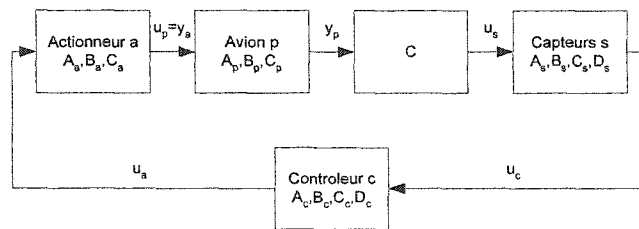


Figure 1-2 Architecture du logiciel ADAM

Le logiciel ADAM<sup>2</sup>, développé par AFWAL (Air Force Wright Aeronautical Laboratories), combine les méthodes d'analyse des forces aérodynamiques non stationnaires agissant sur des systèmes de commande avec plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO) avec la dynamique structurelle d'un avion dans un module conçu pour l'analyse interactive.

### 1.2.2 FAMUSS (Flexible Aircraft Modeling Using State Space)

FAMUSS<sup>3</sup> est un logiciel d'aéroservoélasticité développé par McDonnell Aircraft Company, utilisé pour construire un modèle linéaire équivalent dans l'espace d'état et invariant dans le temps pour étudier la réponse d'un avion flexible en aéroservoélasticité.

Le modèle d'état produit par cette approche a un plus petit ordre que celui obtenu par des fonctions rationnelles, et n'introduit pas des termes de retard additionnels comme ceux introduits par les fonctions rationnelles.

### 1.2.3 ISAC (Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls)

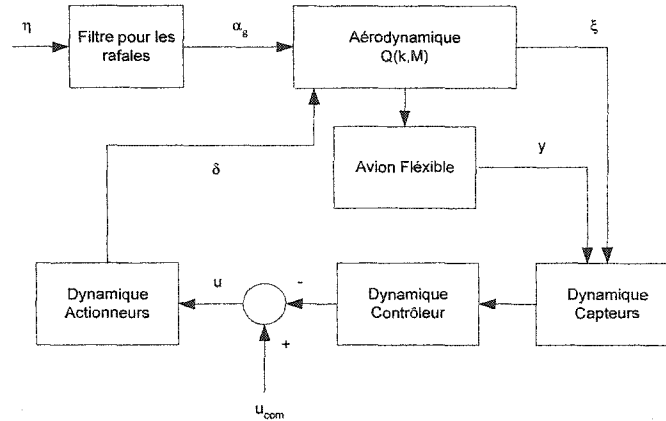


Figure 1-3 Architecture du logiciel ISAC

Le logiciel ISAC<sup>4</sup> est développé par les laboratoires de la NASA Langley Research Center et permet d'étudier et d'analyser les interactions entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques et les systèmes de commande active d'un avion. Figure 1-3 montre le modèle d'avion en boucle fermée modélisé dans le logiciel ISAC où l'on retrouve les informations suivantes :  $\eta$  est un bruit blanc à l'entrée du système qui génère un angle d'incidence  $\alpha_g$  pour la rafale;  $\delta$  est la déflexion des surfaces de commande;  $u$  est la commande des actionneurs;  $u_{com}$  est le vecteur de commande externe;  $\xi$  est le vecteur de coordonnées généralisées et  $y$  est le vecteur de sortie du système.

### 1.2.4 ASTROS (Automated STRuctural Optimisation System)

ASTROS<sup>5,6,7</sup> (Automated STRuctural Optimisation System) est un logiciel de conception multidisciplinaire et d'analyse de structures aérospatiales. Il combine les algorithmes d'optimisation mathématique avec les disciplines d'analyses structurelles traditionnelles pour fournir un modèle automatisé de la structure d'un avion.

Le logiciel ASTROS a été développé par un consortium de Northrop et Air Vehicles Directorate. La dernière version permet au concepteur de définir des fonctions et des contraintes objectives multidisciplinaires; ce qui permet de minimiser ou de maximiser des fonctions définies par l'utilisateur comprenant les paramètres liés à la conception structurelle (le poids, les contraintes, les déplacements, les modes de vibrations, les fréquences...), à l'analyse aéroélastique (la réponse de l'avion aux rafales) et à la conception des commandes de vol (l'efficacité des surfaces de contrôle, les demandes de puissance de contrôle et les déflexions des surfaces de contrôle).

#### **1.2.5 ZAERO**

ZAERO<sup>8</sup> est un logiciel multidisciplinaire développé par la compagnie ZONA Technologies (cette compagnie a été constituée par plusieurs personnes qui ont déjà participé au développement du logiciel ASTROS) dans le domaine de l'aérodynamique, l'aéroélasticité, l'aéroservoélasticité, l'aérothermodynamique et l'aérothermoélasticité dynamique structurelle. On présente ici un schéma simplifié du module aeroservoélastique du logiciel Zaero :

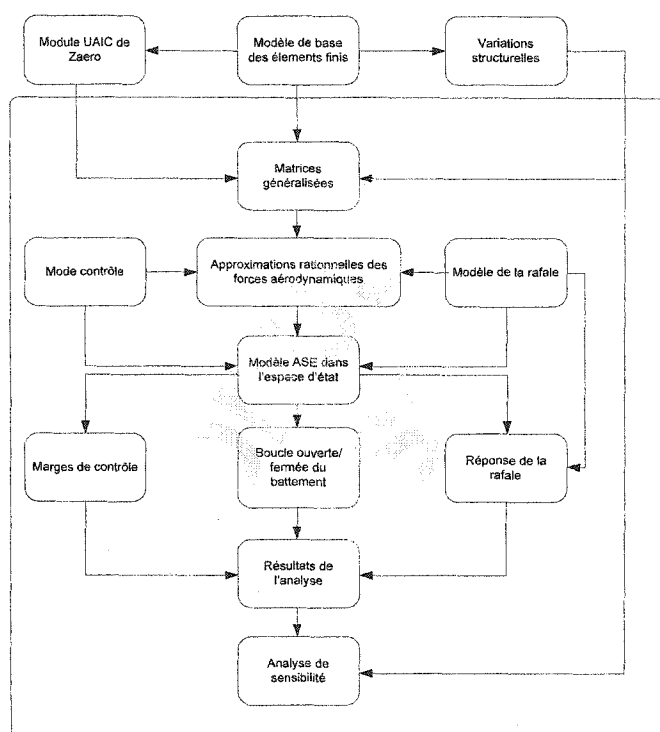


Figure 1-4 Architecture du module ASE de ZAERO

### 1.2.6 STARS (STructural Analysis RoutineS)

L'architecture du logiciel STARS<sup>9</sup> est donnée dans la Figure 1-5.

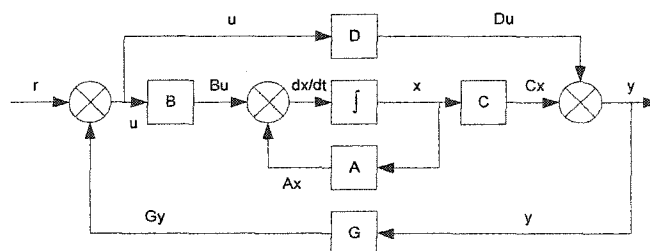


Figure 1-5 Architecture du logiciel STARS

Le logiciel STARS<sup>9</sup> développé par les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center est très répandu dans l'industrie aéronautique. Nous allons utiliser le logiciel

STARS dans notre thèse pour valider notre nouvelle méthode pour les approximations des forces aérodynamiques non stationnaires du domaine de fréquence au domaine de Laplace. STARS utilise la méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires par des moindres carrées (Least Squares LS) en utilisant uniquement deux termes de retard.

### 1.3 Méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques

Dans les méthodes classiques en aéroélasticité, les forces aérodynamiques non-stationnaires dans le domaine de fréquence  $Q(k)$  sont calculées par des logiciels d'éléments finis tel que STARS<sup>9,10</sup> ou NASTRAN<sup>11</sup> en utilisant les méthodes des doublets (Doublet Lattice Methods) ou DLM. Par contre, en aéroserveoélasticité<sup>12</sup>, les forces aérodynamiques seront approchées du domaine de fréquence  $Q(k)$  au domaine de Laplace  $Q(s)$ .

La dépendance en  $s$  des forces aérodynamiques est irrationnelle même pour des cas de figures très simples comme les écoulements incompressibles potentiels en deux dimensions sur un profil d'aile d'avion. Dans les années 50, Theodorsen a montré que  $Q(s)$  dépendait de  $s$  à travers les fonctions de Hankel<sup>13</sup>. Quelques années plus tard, Wagner<sup>13</sup> a trouvé une première approximation rationnelle pour les forces aérodynamiques non stationnaires en  $s$ .

Une deuxième approche pour  $Q(s)$  serait d'utiliser les approximations de Padé pour chaque terme de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires<sup>13</sup>. Cette approche est basée sur une approximation par une fraction rationnelle  $P(s)/R(s)$  pour chaque terme de la matrice aérodynamique, où  $P(s)$  et  $R(s)$  sont deux polynômes. Chaque racine de  $R(s)$  fait apparaître un état, qu'on appellera état augmenté, dans le système linéaire invariant dans le temps final. Ainsi, si la matrice de départ était d'ordre

$N$ , et si on suppose une approximation Padé d'ordre  $M$ , alors on introduira  $N(N+M)$  états augmentés. Afin de ne pas introduire autant d'états augmentés, Roger a proposé de représenter  $Q(s)$  sous une nouvelle forme<sup>14</sup> qui introduit  $N \times M$  modes supplémentaires (ici  $N$  = nombre de modes de départ) et  $\beta_i$  sont les termes de retard aérodynamiques.

Bien que très bonne, la méthode de Roger est basée sur le fait que les termes de retard aérodynamiques (les  $\beta_i$ ) ne changent pas et sont les mêmes pour tous les éléments de la matrice de forces aérodynamiques (seuls les coefficients des numérateurs changent). Cette méthode est connue sous le nom de méthode LS<sup>15</sup> (Least-Squares ou moindres carrés) et elle est encore utilisée dans des logiciels comme STARS<sup>9</sup>. Une méthode similaire à la méthode LS a été proposée par Vepa<sup>15</sup> qui utilise les mêmes dénominateurs pour chaque colonne de la matrice  $Q(s)$ . Différentes améliorations ont été apportées à ces deux méthodes présentées. Ainsi, on peut contraindre les approximations à passer par certains points. Il est en effet usuel d'imposer que l'approximation soit une approximation exacte en zéro et en deux autres points convenablement choisis.

Généralement on choisit un point représentant la fréquence de battement estimée et un autre point représentant la fréquence de la rafale. L'appellation des méthodes devient : la méthode ELS<sup>16</sup> (Extended Least-Squares) et la méthode EMMP<sup>17,18</sup> (Extended Modified Matrix-Padé).

Dans son article, Karpel<sup>18</sup> propose une approche complètement différente des deux approximations précédentes. En sachant dès le départ que le but est de trouver un système linéaire invariant dans le temps, il incorpore cette information directement dans l'équation qui donne les forces aérodynamiques non stationnaires en rajoutant un terme qui ressemble à une fonction de transfert d'un système linéaire. Karpel désire trouver un système linéaire de dimensions raisonnables, alors il écrit l'approximation sous la forme MS<sup>19</sup> (Minimum State). L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode LS de



Roger<sup>14</sup> est qu'elle permet d'obtenir une approximation aussi précise que celle de Roger mais avec un nombre inférieur d'états augmentés.

On voit que l'approximation fait apparaître le terme  $D[sI - R]^{-1} E$  qui peut être vu comme une fonction de transfert d'un système linéaire. La matrice  $R$  est choisie comme étant diagonale et c'est sa taille qui nous permet de décider du nombre d'états augmentés qui seront introduites.

Toutes les méthodes décrites ci-dessus permettent d'approcher les forces aérodynamiques non stationnaires pour un seul nombre de Mach. Afin d'avoir une approximation pour plusieurs nombres de Mach (ou pour un nombre de Mach en particulier) il faudra refaire toute la démarche d'approximation ce qui peut être assez lourd en temps de calcul.

En utilisant la méthode MS et en considérant une dépendance régulière par rapport au nombre de Mach, Poirion<sup>20,21</sup> construit une approximation qui permet de calculer les forces aérodynamiques non stationnaires pour un ensemble de nombres de Mach et pour une plage de fréquences. Il utilise plusieurs approximations MS, obtenues pour plusieurs nombres de Mach fixés, et procède ensuite en utilisant une interpolation par splines pour la dépendance en Mach. Il obtient ainsi une formule qui permet de calculer les forces aérodynamiques pour tout couple  $(k, \text{Mach})$  où  $k$  est une fréquence réduite et Mach est le nombre de Mach, la formule d'approximation étant valide pour tout  $(k, M) \in [k_{\min}, k_{\max}] \times [M_{\min}, M_{\max}]$ .

La méthode MS est très intéressante au point de vue théorique, parce qu'elle introduit moins d'états augmentés pour une même précision, voir Botez et Bigras<sup>22,23</sup>, mais elle est fortement itérative<sup>24</sup>. Dans l'article<sup>22</sup>, les auteurs présentent une nouvelle approche qui assure la convergence de la méthode d'approximation MS pour les forces aérodynamiques généralisées dans l'équation du mouvement de l'avion. Cette approche

consiste dans le choix, pour chaque itération, d'un compromis optimal entre l'itération présente et la dernière itération. Une comparaison avec les méthodes d'approximation LS et MP est aussi présentée.

Les auteurs<sup>23</sup> réalisent une optimisation des forces aérodynamiques non stationnaires pour l'analyse aéroservoélastique. La procédure développée ne suppose pas une dimension aérodynamique fixée à priori du calcul de l'approximation comme dans l'approche usuelle de MS. De plus, les contraintes imposées dans l'approche MS indiquent qu'une optimisation non linéaire de retards est désirable, mais cette tâche est évitée par cette nouvelle approche. Le compromis entre la dimension du système aéroélastique et l'exactitude de l'approximation n'est pas résolu parce que leur approche garde toujours un large nombre d'états augmentés quand plusieurs modes de vibration sont ajoutés. La réduction Hankel de l'ordre du modèle ou toute autre réduction de l'ordre du modèle peut être utilisée pour obtenir un système aéroélastique d'une dimension plus petite.

Les méthodes d'approximation doivent satisfaire deux critères diamétralement opposés : une approximation très fidèle qui introduit un grand nombre de retards et un système linéaire invariant dans le temps de petite dimension qui nécessite un petit nombre de retards.

Il n'existe à l'heure actuelle aucune méthode qui permet de satisfaire ces deux critères. Dans deux articles récents, Botez et Cotoi<sup>24,25</sup> ont proposé une nouvelle approche qui est basée sur une approximation de Padé très précise. Les deux auteurs utilisent les méthodes suivantes de réduction du système programmées en Matlab® : la méthode de la réalisation minimale, la méthode de Schur et la méthode de BST-REM. Une comparaison entre cette nouvelle approche et la méthode MS est présentée<sup>25</sup>. L'erreur de cette nouvelle approche est de 12 à 40 fois plus petite que l'erreur de la méthode

d'approximation MS pour le même nombre d'états augmentés et elle est dépendante du choix fait pour la méthode de réduction du modèle.

À la suggestion de Luus<sup>26</sup>, les auteurs ont utilisé la méthode de Luus-Jakola<sup>27</sup> pour la réduction du système. Cette approche utilise la procédure dynamique itérative connue sous le nom de procédure d'optimisation de Luus-Jakola (LJ). La formule d'approximation choisie influence fortement l'ordre du modèle d'espace d'état. La dimension du modèle va influencer à son tour l'efficacité des analyses ultérieures, donc il est nécessaire d'obtenir un modèle aussi petit que possible sans dégrader l'exactitude de l'approximation.

La procédure LJ demande un effort de calcul plus petit que pour la réduction de l'ordre du modèle, et elle est moins prédisposée aux erreurs numériques. Les techniques de réduction de la théorie du contrôle s'adressent au système en entier et elles ne sont pas très adéquates pour les grands systèmes.

Dans cette thèse, on va présenter une nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques du domaine de fréquence dans le domaine de Laplace pour les études des interactions aéroserveoélastiques. Cette méthode a été partiellement présentée<sup>28</sup> au Forum International dans l'Aéroélasticité et Dynamique Structurelle IFASD 2003.

## CHAPITRE 2

### AÉROSERVOÉLASTICITÉ

#### 2.1 Modélisation structurelle de l'avion

Le modèle aéroélastique est obtenu par une analyse vibratoire de la structure de l'avion modélisé par les méthodes des éléments finis (voir Annexe A). L'avion est modélisé par  $N$  nœuds. Chaque nœud  $i$  est défini par un vecteur  $\xi_i$  donnant la position et l'orientation du nœud par rapport à un repère lié à l'avion

$$\xi_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & \theta_{x_i} & \theta_{y_i} & \theta_{z_i} \end{bmatrix}_B^T \text{ pour } 1 \leq i \leq N \quad (2.1)$$

À l'équilibre, le nœud  $i$  est défini par le vecteur nominal  $\xi_{i_0}$ , et le vecteur du déplacement du nœud  $i$  est défini par :

$$q_i = \xi_i - \xi_{i_0} \quad (2.2)$$

La matrice de masse  $M_i$  incluant la masse  $m_i$  et l'inertie  $I_i$  de chaque nœud  $i$  est donnée par une matrice  $(6 \times 6)$  correspondante aux 6 degrés de libertés du nœud  $i$  :

$$M_i = \begin{bmatrix} [\bar{m}_i]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [I_i]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\text{où } \begin{cases} \bar{m}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{bmatrix} \\ I_i = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm_i & -\int (xy) dm_i & -\int (xz) dm_i \\ -\int (xy) dm_i & \int (x^2 + z^2) dm_i & -\int (xz) dm_i \\ -\int (xz) dm_i & -\int (yz) dm_i & \int (x^2 + y^2) dm_i \end{bmatrix} \end{cases}$$

Soit  $q = [q_1 \ \cdots \ q_N]^T$  le vecteur de déplacement de l'avion relatif aux  $N$  nœuds. La dérivée de la quantité de mouvement de l'avion est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(M_{N,N}\dot{q}) = M_{N,N}\ddot{q} = \begin{bmatrix} M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

où  $M_{N,N}$  est la matrice d'inertie totale de l'avion de dimensions  $(6N \times 6N)$ .

Un terme de rigidité  $K_{N,N}$  et un terme d'amortissement  $D_{N,N}$  sont introduits dans la dynamique de l'avion pour illustrer l'aspect flexible de l'avion de telle sorte que la résultante des forces élastiques appliquées sur l'avion va s'écrire sous la forme suivante :

$$F_{\text{élastiques}} = -D_{N,N}\dot{q} - K_{N,N}q \quad (2.5)$$

où les matrices  $K_{N,N}$  et  $D_{N,N}$  sont de dimensions  $(6N \times 6N)$ .

La loi de la dynamique de Newton nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt}(M_{N,N}\dot{q}) = M_{N,N}\ddot{q} = -D_{N,N}\dot{q} - K_{N,N}q \Leftrightarrow M_{N,N}\ddot{q} + D_{N,N}\dot{q} + K_{N,N}q = 0 \quad (2.6)$$

## 2.2 L'analyse vibratoire de l'avion au sol

L'analyse vibratoire appliquée à l'avion permet de réécrire le système précédent (2.6) en fonction des coordonnées généralisées  $\eta$  qui représentent l'état du système et qui sont définies par l'équation suivante :

$$q(t) = \Phi \eta(t) \quad (2.7)$$

que l'on notera par souci de simplification :

$$q = \Phi \eta \quad (2.8)$$

où  $\Phi$  est la matrice de forme de dimensions  $(6N \times n)$  et  $n$  est le nombre de modes de vibrations de l'avion.

Dans l'analyse aéroserveoélastique, le vecteur généralisé  $\eta$  englobe les modes élastiques, les modes rigides et les déflexions des surfaces de commande de l'avion de telle sorte que :

$$\eta = [\eta_r \quad \eta_e \quad \eta_c]^T \quad (2.9)$$

La matrice de forme  $\Phi$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi = [\Phi_r \quad \Phi_e \quad \Phi_c] \quad (2.10)$$

et l'équation (2.8) s'écrit sous la forme suivante :

$$q = \Phi \eta = [\Phi_r \quad \Phi_e \quad \Phi_c] \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} = \Phi_r \eta_r + \Phi_e \eta_e + \Phi_c \eta_c \quad (2.11)$$

En aéroélasticité, on analyse uniquement les modes élastiques, alors le modèle dynamique de l'avion donné par l'équation (2.6) va s'écrire en fonction du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  sous la forme suivante :

$$M_e \ddot{\eta} + D_e \dot{\eta} + K_e \eta = p(t) \quad (2.12)$$

où  $M_e = \Phi^T M_{N,N} \Phi$ ,  $D_e = \Phi^T D_{N,N} \Phi$  et  $K_e = \Phi^T K_{N,N} \Phi$  représentent les matrices modales d'inertie, d'amortissement et de rigidité de dimensions  $(n \times n)$  et  $\Phi$  de dimensions  $(N \times n)$  et  $p(t)$  représente la somme des forces externes qui peuvent être formées des entrées de commandes données par le pilote sur les surfaces de commande ou des rafales de vents.

### 2.3 Modélisation aérodynamique de l'avion

Les forces aérodynamiques non stationnaires appliquées sur l'avion sont en général sous la forme suivante :

$$F_{aérodynamiques} = -q_d Q_{N,N}(k, M) q \quad (2.13)$$

où  $q_d$  est la pression dynamique,  $k$  est la fréquence réduite et  $Q_{N,N}$  est la matrice des forces aérodynamiques pour un nombre de Mach  $M$  et plusieurs fréquences réduites données. Les forces aérodynamiques  $Q_{N,N}$  en fonction du vecteur des coordonnées généralisées vont s'écrire sous la forme suivante :

$$Q = \Phi^T Q_{N,N} \Phi \quad (2.14)$$

L'intégration des forces aérodynamiques données par l'équation (2.14) dans l'équation (2.12) nous permet d'écrire l'équation de mouvement de l'avion sous sa forme générale suivante :

$$M_e \ddot{\eta} + D_e \dot{\eta} + K_e \eta + q_d Q(k, M) \eta = p(t) \quad (2.15)$$

Les valeurs de la matrice  $Q(k, M) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  des forces aérodynamiques non stationnaires pour chaque fréquence réduite donnée et un nombre de Mach sont obtenus en utilisant les méthodes des doublets DLM dans le logiciel STARS (STructural Analysis Routines) sur le modèle de test d'avion ATM.

Les forces aérodynamiques de l'avion seront obtenus pour chaque nombre de Mach. On va calculer les vitesses de battement, pour l'ATM, par les méthodes de battement  $p$  et  $pk$  décrites dans la section suivante. Chaque vitesse de battement trouvée correspond à un nombre de Mach et une altitude. Ces deux quantités sont les paramètres principaux de l'enveloppe de vol.

## 2.4 Les méthodes d'analyse de battement dans le modèle ATM

### 2.4.1 La méthode d'analyse de battement $pk$ (Boucle ouverte)

La structure de l'avion soumise aux forces aérodynamiques est définie par l'équation (2.15). Si l'avion n'est pas soumis aux forces extérieures  $p(t) = 0$ , alors l'équation

(2.15) peut s'écrire de la façon suivante avec une notation simplifiée, où l'indice  $e$  a été enlevé :

$$M\ddot{\eta}(t) + D\dot{\eta}(t) + K\eta(t) + q_d Q(k, M)\eta(t) = 0 \quad (2.16)$$

Où :

$$\ddot{\eta}(t) = \frac{d^2\eta(t)}{dt^2} \text{ et } \dot{\eta}(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} \quad (2.17)$$

On va supposer en premier lieu que les forces aérodynamiques sont quasi stationnaires, alors l'équation (2.16) devient linéaire et sa solution est :

$$\eta(t) = V_p e^{\lambda t} V_p^{-1} \eta(0) \quad (2.18)$$

où  $\eta(0)$  est la valeur initiale à l'instant ( $t=0$ ) du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta = [\eta_1 \ \dots \ \eta_n]^T$ ,  $\lambda$  est la matrice diagonale composée des valeurs propres  $\lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n)$ . Chaque valeur propre s'écrit sous la forme  $\lambda_i = d_i + j\omega_i$ , où  $d_i$  est l'amortissement et  $\omega_i$  est la fréquence d'oscillations. La matrice  $V_p$  est formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres du système.

L'équation précédente (2.16) va s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K + q_d Q) & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Plusieurs méthodes permettent d'approximer les valeurs propres du système aéroserveoélastique représenté par la matrice  $A$  et délimiter sa zone d'instabilité. Parmi ces méthodes on retrouve la méthode  $pk$  qui se présente sous forme d'un algorithme itératif qui calcule les valeurs propres du système pour chaque nombre de Mach  $M$  donné. La méthode  $pk$  consiste à fixer un nombre de Mach  $M$  puis de calculer les valeurs propres pour un ensemble de vitesses. À partir des valeurs propres, on pourra calculer



les fréquences et amortissements. Le phénomène de battement apparaît alors lorsque l'amortissement devient positif.

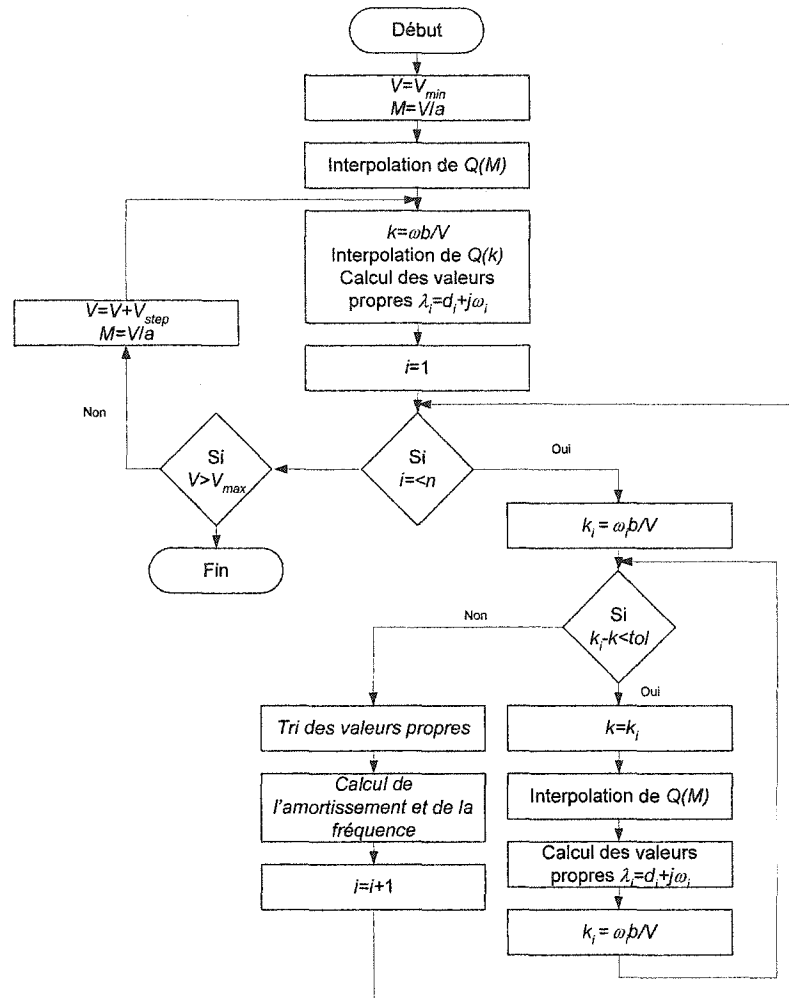


Figure 2 Algorithme de la méthode  $pk$

#### 2.4.2 La méthode d'analyse de battement $p$ (Boucle ouverte)

La méthode  $p$  est un cas particulier de la méthode  $pk$  et elle est basée sur la représentation non dimensionnelle de la méthode  $pk$  dont les variables sont normalisées. L'équation de l'avion se retrouve sous la forme suivante :

$$M^P \ddot{\eta}^P + (D^P + \nu \sqrt{\sigma} D_Q^P) \dot{\eta}^P + (K^P + \nu^2 K_Q^P) \eta^P = 0 \quad (2.20)$$

où  $M^P = M$  ;  $K^P = \frac{1}{\omega_0^2} K$  ;  $D^P = \frac{1}{\omega_0} D = \delta r_i \sqrt{M_{i,i}^P K_{i,i}^P}$  ;

$$D_Q^P = \frac{1}{4k} \rho_0 c^2 Q_I(k, M) \text{ et } K_Q^P = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 Q_R(k, M)$$

## 2.5 Formulation du problème aéroélastique dans l'espace d'étates

L'équation de mouvement d'un avion soumis à une force extérieure  $p(t)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq + q_d A_e(k, M)q = p(t) \quad (2.21)$$

où  $q_d = \frac{1}{2} \rho V^2$  et  $k = \frac{\omega \bar{c}}{2V}$  sont respectivement la pression dynamique et la fréquence réduite,  $\bar{c}$  est la corde du profil de l'aile et  $V$  est la vitesse vraie.

À l'état d'équilibre et en vibration libre, l'équation de l'avion s'écrit sous la forme suivante :

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (2.22)$$

On utilise le changement de variable suivant :  $q = \Phi \eta$  et on l'applique à l'équation (2.21) en prenant soin de pré-multiplier de chaque côté par  $\Phi^T$ , on obtient l'équation suivante :

$$\hat{M} \ddot{\eta} + \hat{D} \dot{\eta} + \hat{K} \eta + q_d Q(k, M) \eta = \hat{p}(t) \quad (2.23)$$

où  $\hat{M} = \Phi^T M \Phi$ ,  $\hat{D} = \Phi^T D \Phi$ ,  $\hat{K} = \Phi^T K \Phi$ ,  $Q = \Phi^T A_e \Phi$ ,  $\hat{p} = \Phi^T p$ ,  $\Phi$  est la matrice modale  $\Phi = [\Phi_r \quad \Phi_e \quad \Phi_\delta]$  et  $\eta$  est le vecteur de coordonnées généralisées  $\eta = [\eta_r \quad \eta_e \quad \eta_\delta]$

La matrice des forces aérodynamiques  $Q(k)$  obtenue par la méthode DLM est approchée par la nouvelle méthode par une fraction rationnelle de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$Q(k) = \frac{a_0 + a_1 k + \dots + a_{n+2} k^{n+2}}{1 + b_1 k + b_2 k^2 + \dots + b_n k^n} \quad (2.24)$$

Par une division polynomiale basée sur les fractions partielle, on peut toujours mettre cette fraction sous la forme suivante :

$$Q(k) = A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + Z(k) \quad (2.25)$$

où  $Z(s)$  est formé de fraction partielles irréductibles. Cette formulation est très proche de celle utilisée par la méthode LS, par souci de simplification, on adoptera la formulation de la méthode LS pour construire le modèle de l'avion dans l'espace d'état. On supposera alors que les forces aérodynamiques peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$Q(k) = A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \frac{k}{k + \beta_1} A_3 + \frac{k}{k + \beta_2} A_4 + \dots \quad (2.26)$$

En comparant les équations (2.25) et (2.26) et on obtient :

$$Z(k) = \sum_j \frac{k}{k + \beta_j} A_{j+2} \quad (2.27)$$

En substituant  $k$  par  $ik$ , on obtient alors :

$$Q(ik) = A_0 + A_1 (ik) + A_2 (ik)^2 + \frac{(ik)}{(ik) + \beta_1} A_3 + \frac{(ik)}{(ik) + \beta_2} A_4 + \dots \quad (2.28)$$

les termes en fraction peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{(ik)}{(ik) + \beta_j} = \frac{k^2}{k^2 + \beta_j^2} + \frac{ik \beta_j}{k^2 + \beta_j^2}, j = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Les conditions initiales données par l'aéroélasticité sont les suivantes :

$$A_0 = Q_R(k_1) \quad (2.30)$$

$$A_1 = \frac{Q_I(k_1)}{k_1} - \frac{A_3}{\beta_1} - \frac{A_4}{\beta_2} \quad (2.31)$$

où  $k_1$  est la plus petite fréquence réduite, dont la valeur est proche de zéro, utilisée pour calculer les valeurs de  $A_j$  pour  $j = 0, 1, 2, \dots$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire de l'équation (2.28), on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_R(k) &= Q_R(k) - A_0 \\ &= \begin{bmatrix} -k^2 I & \frac{k^2}{k^2 + \beta_1^2} I & \frac{k^2}{k^2 + \beta_2^2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \\ &= S_R(k) \tilde{A}\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_I(k) &= \frac{Q_I(k)}{k} - A_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{k^2 + \beta_1^2} I & \frac{\beta_2}{k^2 + \beta_2^2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \\ &= S_I(k) \tilde{A}\end{aligned}\tag{2.33}$$

Les coefficients inconnus sont déterminés en substituant l'expression de  $A_1$  donnée par l'équation (2.31) dans l'équation (2.33).

En combinant les équation (2.32) et (2.33) pour un nombre donné de fréquences réduites  $k_i$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_R(k_2) \\ \tilde{Q}_I(k_2) \\ \vdots \\ \tilde{Q}_R(k_N) \\ \tilde{Q}_I(k_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_R(k_2) \\ S_I(k_2) \\ \vdots \\ S_R(k_N) \\ S_I(k_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}\tag{2.34}$$

Ce système peut s'écrire de manière plus compacte sous la forme :

$$\tilde{\tilde{Q}} = S \tilde{A}\tag{2.35}$$

La solution de l'équation (2.35) obtenue par la méthode des moindres carrés est de la forme suivante :

$$\tilde{A} = [S^T \quad S]^{-1} S^T \tilde{Q} \quad (2.36)$$

En supposant un mouvement harmonique simple, l'équation (2.23) peut se réécrire alors sous la forme suivante :

$$\hat{M}\ddot{\eta} + \hat{D}\dot{\eta} + \hat{K}\eta + \bar{q} \left[ A_0\eta + A_1 \frac{s\bar{c}}{2V}\eta + A_2 \left( \frac{s\bar{c}}{2V} \right)^2 \eta + A_3x_1 + A_4x_2 + \dots \right] = 0 \quad (2.37)$$

où

$$x_j = \frac{s\eta}{s + \left( \frac{2V}{\bar{c}} \right) \beta_j} \quad (2.38)$$

d'où l'on déduit :

$$\dot{x}_j + \left( \frac{2V}{\bar{c}} \right) \beta_j x_j = \dot{\eta} \quad (2.39)$$

pour  $j = 1, 2, \dots$

L'équation (2.37) s'écrit alors après regroupement des termes semblables sous la forme suivante :

$$\left( \hat{K} + \bar{q}A_0 \right) \eta + \left( \hat{D} + \bar{q} \frac{\bar{c}}{2V} A_1 \right) \dot{\eta} + \left( \hat{M} + \bar{q} \left( \frac{\bar{c}}{2V} \right)^2 A_2 \right) \ddot{\eta} + \bar{q}A_3x_1 + \bar{q}A_4x_2 + \dots = 0 \quad (2.40)$$

que l'on peut réécrire sous la forme plus compacte suivante :

$$\hat{\hat{K}}\eta + \hat{\hat{D}}\dot{\eta} + \hat{\hat{M}}\ddot{\eta} + \bar{q}A_3x_1 + \bar{q}A_4x_2 + \dots = 0 \quad (2.41)$$

L'équation matricielle regroupant les équations (2.38), (2.39) et (2.41) est de la forme :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\hat{M}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -\hat{\hat{K}} & -\hat{\hat{D}} & -\bar{q}A_3 & -\bar{q}A_4 \\ 0 & I & -\frac{V}{\bar{b}}\beta_1 I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\frac{V}{\bar{b}}\beta_2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

ou encore :

$$M\dot{x}' = K'x' \quad (2.43)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= (M')^{-1} K'x' \\ &= Rx' \end{aligned} \quad (2.44)$$

En regroupant le vecteur d'espace d'état  $x'$  comme suit :

$$\begin{aligned} x'' &= \begin{bmatrix} (\eta_r & \eta_e & \dot{\eta}_r & \dot{\eta}_e & x_1 & x_2) & (\eta_\delta & \dot{\eta}_\delta) \end{bmatrix} \\ &= [\hat{x} \quad u] \end{aligned} \quad (2.45)$$

L'équation (2.44) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

La première équation matricielle représente la dynamique de l'avion dont l'équation d'état est de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad (2.47)$$

Pour incorporer les lois de commandes pour le contrôle des mouvements de l'avion, il est nécessaire de transformer l'équation (2.47) du repère inertiel fixé à la terre vers le repère lié à l'avion pour obtenir la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{T}_2^{-1} (\hat{A}\tilde{T}_1 - \tilde{T}_3) x + \tilde{T}_2^{-1} \hat{B}u \\ &= Ax + Bu \end{aligned} \quad (2.48)$$

où  $T_1$ , la matrice de transformation des coordonnées de dimension  $(12 \times 12)$  telle que :

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Les capteurs utilisés pour mesurer les déplacements et introduisent un terme matriciel  $T_s$  obtenu par interpolation pour lesquels on réécrit les déplacement nodal par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} q_s &= T_s \Phi \eta \\ &= C_0 x \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $C_0 = [T_s \quad \Phi \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Les vitesses et accélérations sont alors donnés par le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \ddot{q}_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_s \Phi \dot{\eta} \\ T_s \Phi \ddot{\eta} \end{bmatrix} \\ &= C_1 x \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\text{où } C_1 = \begin{bmatrix} T_s \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_s \Phi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En pré multipliant l'équation (2.48) par  $C_1$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} C_1 \dot{x} &= C_1 A x + C_1 B u \\ &= C_2 x + D_2 u \end{aligned} \quad (2.52)$$

En incorporant les équations (2.50) et (2.51), on obtient alors :

$$y = \begin{bmatrix} q_s \\ \dot{q}_s \\ \ddot{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} u \quad (2.53)$$

ou sous forme générale :

$$y = Cx + Du \quad (2.54)$$

Le système formé par les équations (2.48) et (2.54) représente l'équation d'état de l'avion flexible :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.55)$$

Pour faire une analyse en aéroserveélasticité, il faut augmenter le système en y ajoutant les éléments analogiques associés dont les capteurs et actionneurs selon le contrôleur.

La fréquence et l'amortissement associés au gain de la boucle peuvent être calculés en cherchant les valeurs propres de la matrice  $A$  pour plusieurs valeurs de fréquences réduites  $k_i$  et nombres de Mach. Par les méthode  $p$  et  $pk$ , on va calculer les battements pour l'ATM en boucle ouverte et en boucle fermée.

## CHAPITRE 3

### APPROXIMATION DES FORCES AÉRODYNAMIQUES

#### 3.1 Introduction

Les valeurs de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires  $Q$  sont obtenues pour chaque fréquence réduite et nombre de Mach par les méthodes des doublets DLM (Doublet Lattice Method) en utilisant le logiciel STARS fourni par les laboratoires de la NASA DFRC. Ces forces aérodynamiques non stationnaires sont calculées pour un ensemble de fréquences réduites  $\{k_1 \ k_2 \ \dots \ k_p\}$  et afin de réaliser l'étude de la stabilité du modèle aéroserveoélastique de l'avion, il est nécessaire de construire une approximation de ces forces aérodynamiques du domaine de fréquences dans le domaine de Laplace.

Cette approximation est réalisée en utilisant la démarche suivante en deux étapes :

Construction d'une approximation de Padé par identification des paramètres à partir d'une interpolation par des polynômes orthogonaux.

Réduction de l'ordre du modèle par la méthode de Luus-Jakola.

En détail, si  $Q(s)$  est la matrice des forces aérodynamiques connue pour les valeurs des fréquences réduites  $\{k_1 \ k_2 \ \dots \ k_p\}$ , on construit dans un premier temps  $P_N(s)$  un polynôme d'approximation pour chaque élément de la matrice. Une fois  $P_N(s)$  connu, on construit une approximation de Padé  $\frac{P_r(s)}{Q_s(s)}$  pour chaque  $P_N(s)$ . Notre nouvelle méthode introduit une technique basée sur l'approximation de Padé pour la conversion



des forces aérodynamiques et elle est basée principalement sur une *interpolation par des polynômes orthogonaux* pour construire une série de puissances qui va servir à une interpolation par une fraction polynomiale par identification. On va commencer par présenter dans ce chapitre les méthodes d'interpolation existantes dans la littérature.

### 3.2 Méthodes d'interpolation

Les méthodes d'interpolation<sup>30</sup> utilisées dans ce travail pour réaliser l'approximation des forces aérodynamiques et comparer les résultats d'interpolation seront décrites dans les paragraphes suivants.

#### 3.2.1 Problématique générale

Tout d'abord, nous allons définir le problème de l'interpolation d'une manière générale en supposant que l'on dispose d'un ensemble de points distincts  $\{(x_i, y_i); i = 0 \dots n\}$  et qu'on veut prédire la valeur  $y$  associée à toute donnée  $x$  telle que  $(x_i < x < x_{i+1})$ . Pour cette raison, on doit trouver un polynôme d'interpolation de la forme suivante :

$$y = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) \quad (3.1)$$

où  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est la base d'interpolation et  $\{x_i\}$  est le support d'interpolation.

Dans le but de calculer les  $n+1$  coefficients du polynôme d'interpolation de degré  $n$ , il est nécessaire de fixer un certain nombre de contraintes. Si on peut déterminer  $n+1$  contraintes, on peut espérer, selon la nature de ces contraintes, aboutir à une solution unique. Si le nombre de contraintes est inférieur à  $n+1$ , le problème aura plusieurs solutions entre lesquelles il faudra choisir, ce qui n'est pas souhaitable (problème sous contraintes). Par contre, si l'on dispose de plus de  $n+1$  contraintes, il est peu probable qu'il existe une solution (sauf si certaines contraintes sont liées et traduisent la même

information). Dans ce dernier cas, on va rechercher le jeu de coefficients qui validera au mieux cet ensemble de contraintes. On parle alors de minimisation (la méthode la plus célèbre est la minimisation aux moindres carrés ou régression linéaire) ou l'algorithme de Newton-Raphson.

### 3.2.2 Interpolation par les polynômes de Lagrange

La méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange est la méthode la plus connue car elle correspond à la base d'interpolation la plus simple :  $P_i(x_i) = x^i$ , i.e. la base des monômes et elle est sans erreur pour le support d'interpolation. Malgré sa formulation explicite, elle reste complexe à mettre en œuvre et ne permet pas de retrouver la forme classique d'un polynôme en plus que sa complexité d'évaluation est de  $O(n^2)$ .

### 3.2.3 Interpolation par les splines

Une autre méthode d'interpolation basée sur les fonctions splines d'interpolation permet de calculer le polynôme d'interpolation en utilisant non pas une interpolation globale mais une interpolation par morceaux. La plus utilisée des splines est dite spline cubique car elle utilise un polynôme du 3<sup>ième</sup> degré comme polynôme d'interpolation et dont la complexité d'évaluation est de  $O(n)$ . Les splines paramétrées sont utilisées pour les courbes obtenus à partir de points donnés dans un plan dont la forme géométrique peut être complexe.

### 3.2.4 Interpolation par les polynômes orthogonaux

L'interpolation par les polynômes orthogonaux quant à elle est présentée à l'aide de la relation de récurrence dont la définition est donnée par la règle suivante :

Il existe une suite unique de polynômes  $p_n$  tels que :

- 1) Le degré de  $p_n$  est exactement  $n$  et le coefficient de  $x^n$  est positif
- 2) Les  $p_n$  sont orthonormés dans  $L_w^2[a, b]$ ,  $\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}$

Les polynômes de Jacobi, de Chebychev et Hermite sont des exemples classiques de polynômes orthogonaux. Les polynômes de Chebyshev de première espèce sont définis par :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \end{cases}$$

et satisfont les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_r(x) T_s(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s \\ \pi & \text{si } r = s = 0 \\ \pi/2 & \text{si } r = s \neq 0 \end{cases}$$

### 3.2.5 Interpolation par Krigeage

La méthode du Krigeage, du nom de son concepteur Krige, est une méthode d'interpolation et d'extrapolation très puissante. Elle est basée sur une méthode statistique qui prend en considération les fluctuations aléatoires, la dérive et l'effet pépité qui permet d'éliminer les erreurs dans un échantillon de données. Nous avons utilisé dans cette thèse la méthode de krigeage cubique avec un effet pépité de  $10^3$ .

### 3.3 Méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques

Le calcul des forces aérodynamiques non stationnaires  $Q(k, Mach)$  est réalisé en régime subsonique à l'aide des logiciels d'éléments finis tels que NASTRAN ou STARS par les méthodes des doublets (Doublet Lattice Methods) ou DLM. L'approximation sur le plan complexe permet de construire un prolongement analytique et une interpolation des forces aérodynamiques. Nous allons survoler les méthodes classiques d'approximation en premier lieu et présenter la nouvelle méthode dans les paragraphes suivants.

#### 3.3.1 Méthode d'approximation LS (Least Square)

Une des méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques  $Q(k, M)$  dans le domaine de Laplace consiste à approcher les coefficients des forces aérodynamiques calculées par les méthodes (DLM) dans le domaine fréquentiel par une approximation par des polynômes de Padé de la forme suivante :

$$\hat{Q}(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2} \frac{s}{s + \beta_i} \quad (3.2)$$

En remplaçant la variable de Laplace  $s = jk$  dans l'équation (3.2), on obtient :

$$\hat{Q}(jk) = A_0 + A_1 jk - A_2 k^2 + \sum_{i=1}^n A_{i+2} \frac{jk}{jk + \beta_i} \quad (3.3)$$

où les coefficients  $A_i$  sont inconnus et les  $\beta_i$  sont les coefficients de retard à calculer par une méthode d'optimisation dont la fonction objectif est la minimisation de l'erreur quadratique commise par l'approximation et définie par l'expression suivante :

$$J = \sum_m \sum_n \sum_p W_{mnp}^2 \left| Q_{mn}(jk_p) - \hat{Q}_{mn}(jk_p) \right|^2 \quad (3.4)$$

où  $k_p$  est la  $p^{ième}$  fréquence normalisée et  $W_{mnp} = \frac{1}{\max(1, |Q_{mn}(jk_p)|)}$

### 3.3.2 Méthode d'approximation MP (Matrix Padé)

Chaque colonne  $[Q]_j$  de la matrice  $Q(s)$  s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[Q(s)]_j = [A_0]_j + [A_1]_j s + [A_2]_j s^2 + \sum_{i=1}^n [A_{n+2}]_j \frac{s}{s + \beta_{ij}} \quad (3.5)$$

Les coefficients matriciels  $[A_0]_j$ ,  $[A_1]_j$  et  $[A_2]_j$  et  $\beta_{ij}$  sont obtenus par les méthodes classiques de moindres carrées LS<sup>17</sup>.

### 3.3.3 Méthode d'approximation MS (Minimum State)

Une autre méthode d'approximation des forces aérodynamiques  $Q(k, M)$  dans le domaine de Laplace consiste en la linéarisation des coefficients des forces aérodynamiques calculées par les méthodes DLM dans le domaine fréquentiel en se basant sur une approximation de Padé sous la forme suivante :

$$\hat{Q}(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + D[sI - R]^{-1} E s \quad (3.6)$$

En remplaçant la variable de Laplace  $s = jk$  dans l'équation (3.6), on obtient :

$$\hat{Q}(jk) = A_0 + A_1 jk - A_2 k^2 + D[jkI - R]^{-1} E jk \quad (3.7)$$

où  $R$  est la matrice diagonale des retards,  $D$  et  $E$  sont des matrices qui assurent la convergence de la solution. Le problème reste toujours une optimisation mais cette fois-ci avec les contraintes suivantes :

$$\Re\{\hat{Q}(0)\} = \Re\{Q(0)\}; \Re\{\hat{Q}(jk_f)\} = \Re\{Q(jk_f)\} \text{ et } \Im\{\hat{Q}(jk_g)\} = \Im\{Q(jk_g)\}$$

Ces contraintes anticipées sont mesurées expérimentalement pour le battement ( $f$ : flutter) et pour la rafale ( $g$ : gust).

En utilisant la théorie des nombre complexes,  $[jkI - R]^{-1} = (k^2 I + R^2)^{-1} [-jkI - R]$ , le système est réécrit sous la forme suivante :

$$Q(jk_p) = B_{R_p} + DC_{R_p}E + j(B_{I_p} + DC_{I_p}E) \quad (3.8)$$

$$\text{où } \begin{cases} B_{R_p} = Q_R(0) - \frac{k_p^2}{k_f^2} [Q_R(0) - Q_R(k_f)] \\ C_{R_p} = D \left[ (k_p^2 I + R^2)^{-1} - (k_f^2 I + R^2)^{-1} \right] k_p^2 \\ B_{I_p} = \frac{k_p}{k_g} Q_I(k_g) \\ C_{I_p} = D \left[ (k_g^2 I + R^2)^{-1} - (k_p^2 I + R^2)^{-1} \right] R k_p \end{cases}$$

La solution est alors obtenue par une méthode quadratique en fixant chaque fois un paramètre parmi  $D$  et  $E$  pour assurer la convergence de la solution pour une fonction objectif écrite sous la forme suivante :

$$J = \sum_i J_i \quad (3.9)$$

où

$$J_i = \sum_n e_i^*(k_n) W_{in}^2 e_i(k_n) \quad (3.10)$$

et

$$e_i(k_n) = Q_i(jk_n) - \hat{Q}_i(jk_n) \quad (3.11)$$

La fonction objectif (3.9) est minimisée pour chaque colonne et pour résoudre le problème exprimé par l'équation (3.10), nous devons solutionner l'équation suivante (3.12) pour chaque colonne de la matrice  $E$ .

$$A_e E_i = B_e \quad (3.12)$$

où

$$\begin{aligned} A_e &= \sum_p C_{R_p}^T D^T W_{i_p}^2 D C_{R_p} + C_{I_p}^T D^T W_{i_p}^2 D C_{R_p} \\ B_e &= \sum_p C_{R_p}^T D^T W_{i_p}^2 (Q_{R_i}(k_p) - B_{R_{ip}}) + C_{I_p}^T D^T W_{i_p}^2 (Q_{I_i}(k_p) - B_{I_{ip}}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour chaque ligne de la matrice  $D$ , on solutionne l'équation (3.14) :

$$D_i A_d = B_d \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} A_d &= \sum_p C_{R_p}^T E W_{i_p}^2 E^T C_{R_p}^T + C_{I_p}^T E W_{i_p}^2 E^T C_{I_p}^T \\ B_d &= \sum_p \left( Q_{R_i}(k_p) - B_{R_{ip}} \right) W_{i_p}^2 E^T C_{R_p}^T + \left( Q_{R_i}(k_p) - B_{R_{ip}} \right) E^T W_{i_p}^2 E^T C_{I_p}^T \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir une approximation aussi précise que celle de la méthode LS mais avec un nombre réduit de retards.

Toutes les méthodes décrites plus haut, sont très exigeantes en terme de temps de calcul du fait de leur nature itérative et du fait qu'elles introduisent un certains nombre de retard pour assurer la convergence de l'approximation<sup>9,14,15,19</sup>.

Dans notre nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques, nous recherchons une bonne précision de l'approximation et l'obtention d'une fonction de transfert dont on pourra réduire l'ordre tout en gardant ses propriétés par une méthode d'optimisation de Luus-Jakola<sup>27</sup>.

### 3.4 Nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques

Dans ce travail, on parvient à réaliser l'approximation des forces aérodynamiques et leur conversion du domaine fréquentiel vers le domaine de Laplace en deux étapes :

L'interpolation des forces aérodynamiques par les polynômes orthogonaux qui serviront à générer une série de puissances.

À l'aide de la série de puissances calculé dans la première étape, on calcule les coefficients des numérateurs et dénominateurs de la fraction rationnelle de Padé, par une technique d'identification.

### 3.4.1 Interpolation par les polynômes orthogonaux

L'approximation polynomiale des forces aérodynamiques fait apparaître des matrices de type Vandermonde qui sont mal conditionnées. La résolution numérique du système linéaire qui a pour solution les coefficients du polynôme est peu fiable.

Afin de se débarrasser du mauvais conditionnement, nous présentons par la suite une approximation qui utilise des polynômes orthogonaux comme base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $N$ .

Il est à noter que d'un point de vue théorique, le polynôme obtenu est le même que celui obtenu en utilisant les polynômes de Lagrange ou de Newton. Ceci est vrai car il existe un seul polynôme de degré  $N$  qui passe par  $N+1$  points. Toutefois, d'un point de vue numérique, les résultats sont différents à cause du mauvais conditionnement de la matrice Vandermonde. Il faut noter que l'on n'obtient pas le même système à résoudre car :

$$Q_{\alpha\beta}(s) = \sum_{i=0}^N x_i s^i \text{ donne un système de la forme } V_N x = b \text{ avec } \text{cond}(V_N) \gg 1$$

et

$$Q_{\alpha\beta}(s) = \sum_{i=0}^N y_i q_i(s) \text{ donne un système de la forme } Ay = b \text{ avec } \text{cond}(A) \ll \text{cond}(V_N)$$

Voici un algorithme utilisé comme une étape préliminaire dans l'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires et qui utilise des polynômes orthogonaux comme base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $N$ .

Étant donnés :

$m$  fréquences réduites  $[k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_{m-1} \quad k_m]$  et



$Q_{\alpha\beta}(k_i)$  la valeur de la force aérodynamique mesurée pour chaque fréquence réduite  $k_i$

Alors :

$$\begin{aligned}
 q_0(s) &= 1, q_1(s) = s - \frac{\sum_{i=1}^m k_i}{m} \\
 \gamma_0 &= m \\
 \text{Pour } j &= 1 \text{ à } n-1 \\
 \gamma_j &= \sum_{i=1}^m [q_j(k_i)]^2, \alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=1}^m [q_j(k_i)]^2}{\gamma_j} \\
 \beta_{j+1} &= \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} \\
 q_{j+1}(s) &= s \cdot q_j(s) - \alpha_{j+1} \cdot q_j(s) - \beta_{j+1} \cdot q_{j-1}(s) \\
 \text{Fin} \\
 \text{Pour } k &= 1 \rightarrow n \\
 a_k &= \frac{\sum_{i=1}^m q_k(k_i) Q_{\alpha\beta}(k_i)}{\gamma_k} \\
 \text{Fin}
 \end{aligned}$$

Cet algorithme génère les coefficients  $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1} \ a_n]$  tels que l'expression des forces aérodynamiques s'écrit dans la base des polynômes orthogonaux sous la forme suivante :

$$Q_{\alpha\beta}(k_i) = \sum_{i=1}^n a_i q_i(k_i)$$

### 3.4.2 Génération des fractions rationnelles de Padé

Dans cette partie, nous allons décrire explicitement la démarche suivie pour implanter l'approximation Padé par identification<sup>32</sup> sur le logiciel Matlab®.

Soit  $P_N(x)$  un polynôme de degré  $N$  de la forme  $P_N(x) = \sum_{j=0}^N c_j x^j$ , où  $(c_i)_{i=1 \dots N}$  sont calculés comme dans le paragraphe précédent. On désire calculer une approximation rationnelle  $R(x)$  de  $P_N(x)$  telle que

$$R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_s(x)} = \frac{\sum_{j=0}^r a_j x^j}{1 + \sum_{j=1}^s b_j x^j} \quad (3.16)$$

Pour y arriver, il faut trouver les coefficients  $(a_j)_{j=1 \dots r}$  et  $(b_j)_{j=1 \dots s}$  par identification selon la démarche suivante :

$$\sum_{j=0}^N c_j x^j = \frac{\sum_{j=0}^r a_j x^j}{1 + \sum_{j=1}^s b_j x^j} \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) sera réécrite sous la forme suivante :

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_N x^N = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}{1 + b_1 x + \dots + b_s x^s} \quad (3.18)$$

En ramenant au même dénominateur les termes de l'équation (3.18), on obtient :

$$(c_0 + c_1 x + \dots + c_N x^N)(1 + b_1 x + \dots + b_s x^s) = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r \quad (3.19)$$

L'équation (3.19) va s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq s}} c_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^r a_k x^k \quad (3.20)$$

ou encore sous une forme mettant en évidence la série de puissances donnée par l'équation (3.21) :

$$\sum_{r=0}^{N+s} \left( \sum_{i=0}^r c_i b_{r-i} \right) x^r = \sum_{k=0}^r a_k x^k \quad (3.21)$$

En identifiant les coefficients des puissances de  $x$  dans l'équation (3.21), on obtient deux systèmes sous la forme matricielle :

Le premier système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} c_r & c_{r-1} & \cdots & \cdots & c_{r-s+1} \\ c_{r+1} & c_r & \cdots & \cdots & c_{r-s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{r+s-2} & c_{r+s-3} & \cdots & \ddots & c_{r-1} \\ c_{r+s-1} & c_{r+s-2} & \cdots & \cdots & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{s-1} \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{r+1} \\ -c_{r+2} \\ \vdots \\ -c_{r+s-1} \\ -c_{r+s} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

que l'on peut considérer comme un système linéaire dont les inconnues sont  $[b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{s-1} \ b_s]^T$  et que l'on peut résoudre par une décomposition LU suivie d'une substitution.

Ce premier système est de la forme  $[A_2] \times [b] = [C]$  d'où le vecteur inconnu  $[b] = [A_2]^{-1} \times [C]$  dont la dimension de  $A_2$  est  $(s \times s)$ , la dimension de  $C$  est  $(s \times 1)$  et la dimension de  $b$  est  $(s+1) \times 1$

Le deuxième système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_r & c_{r-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

où les inconnues  $[a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{r-1} \ a_r]^T$  sont calculées avec la formulation explicite précédente qui s'écrit sous la forme  $[a] = [A_1] \times [b]$ , où  $A_1$  est de dimensions  $(r+1) \times (s+1)$ .

L'algorithme pour calculer les coefficients de la fraction rationnelle  $R(x)$  à partir des coefficients de la série de puissances est le suivant :

**Étant donnés :**

$[c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1} \ c_n]$ , les coefficients de la série de puissances

$r$  degré du numérateur de la fraction rationnelle  $[a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{r-1} \ a_r]$

$s$  degré du dénominateur de la fraction rationnelle  $[b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{s-1} \ b_s]$

**Alors :**

Mat=zeros(s,s)initialisation de la matrice

B=zeros(s,1) initialisations coef. Dénominateur

**Pour** ligne=0 -> s-1 Mise en place du premier système linéaire

B(ligne+1)=-serie(r+ligne+1)

**Pour** colonne=0 -> s-1

Mat(ligne+1,colonne+1)=serie(r+ligne-colonne)

**Fin**

**Fin**

[l,u,p]=lu(Mat) Décomposition LU de la matrice MAT

s1=l\p\*B --

denom=u\s1 --

denom=[1;denom]' -- Coefficient obtenus du dénominateur

B=denom -- Mise en place du deuxième système

V=zeros(r+1,r-s+1)

**Pour** ligne=1 -> r+1

**Pour** colonne=1 -> r-s+1

**Si** ligne-colonne+1 > 0

V(ligne,colonne)=serie(ligne-colonne+1)

**Sinon**

V(ligne,colonne)=0

**Fin**

**Fin**

$\text{numer}(\text{ligne}) = V(\text{ligne}, :) * B'$  -- Coefficient obtenus du dénominateur

**Fin**

### 3.4.3 Programmation de l'approximation des forces aérodynamiques

La mise en place des programmes d'approximation des forces aérodynamiques est construite autour du principe décrit par l'organigramme suivant.

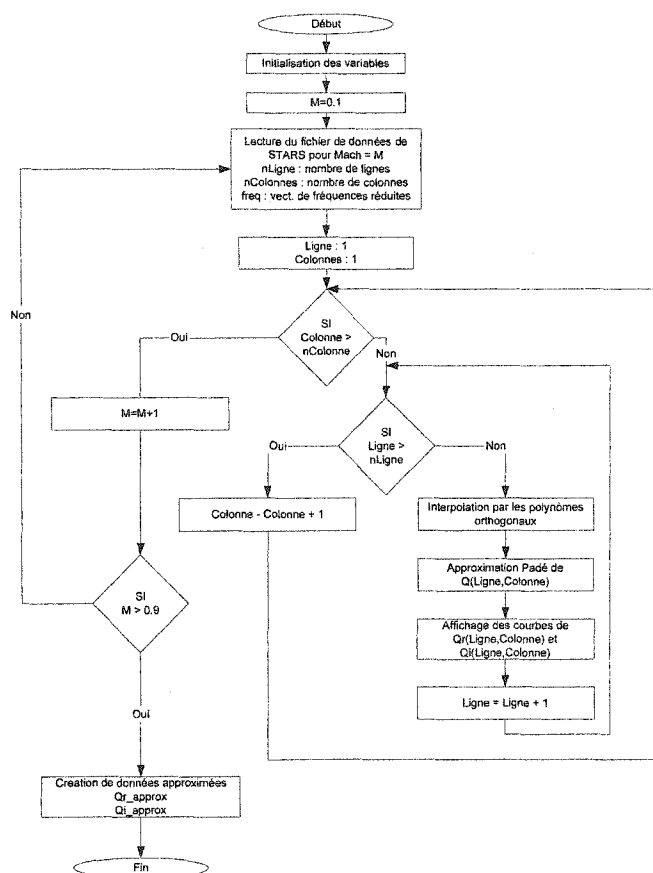


Figure 3 Organigramme de l'approximation des forces aérodynamiques

### 3.4.4 Détails numériques sur les approximation des forces aérodynamiques

À partir de données contenant les forces aérodynamiques non stationnaires provenant du logiciel STARS, on procède à l'approximation selon la méthode décrite plus haut.

Le fichier STARS GFORCE\_PADE1.DAT contient le vecteur des fréquences réduites  $k_i$  allant de 0.1000 à 1.0000 réparties quasi uniformément et représentés par le vecteur *freq* :

[0.0100 0.1000 0.2000 0.3030 0.4000 0.5000 0.5882 0.6250 0.6667 0.7143 0.7692 0.8333 0.9091 1.0000].

Le logiciel STARS utilise une variable  $VBO = 1/k$  pour générer les fréquences réduites ce qui donne des valeurs qui ne sont pas parfaitement réparties de façon uniforme.

Le fichier STARS GFORCE\_PADE1.DAT contient aussi la partie réelle  $Q_R$  et la partie imaginaire  $Q_I$  des forces aérodynamiques sous forme matricielle. L'algorithme développé dans le logiciel Matlab® permet de calculer l'approximation des forces aérodynamiques sous forme de fractions rationnelles.

Le programme d'approximation est exécuté pour plusieurs cas pour obtenir la conversion des forces aérodynamiques sous forme de fraction rationnelle de Padé. Les résultats sont présentés dans le chapitre 5.

## CHAPITRE 4

### RÉDUCTION DU MODÈLE AÉROSERVOÉLASTIQUE

#### 4.1 Introduction

L'application des méthodes modernes de contrôle et de simulation en aéroservoélasticité nécessite la transformation de l'équation de mouvement de l'avion en un système du premier ordre dans l'espace d'état. Pour assurer cette transformation, il faut tout d'abord convertir les forces aérodynamiques obtenues dans le domaine fréquentiel en utilisant la méthode DLM par des fonctions rationnelles de Padé dans le domaine de Laplace.

Le choix de la formule d'approximation est primordial dans le calcul de l'ordre du modèle dans l'espace d'état. Le modèle le plus efficace est celui qui possède le plus petit ordre possible et qui ne dégrade pas les performances de l'approximation des forces aérodynamiques.

Dans ce chapitre, on va utiliser la méthode itérative d'optimisation de Luus-Jakola, car cette procédure ne nécessite que peu de calcul et elle est moins susceptible aux erreurs du calcul numérique.

Dans la partie d'approximation des forces aérodynamiques, nous avons réussi à approcher chaque élément de la matrice des forces aérodynamique sous la forme d'une fraction rationnelle :

$$\hat{Q}_{ij}(s) = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_{n+2}s^{n+2}}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n} \quad (4.1)$$

Les coefficients du dénominateur doivent respecter le critère de stabilité de Routh-Hurwitz, c'est-à-dire que les parties réelles des pôles du système sont tous négatives.

Le critère d'optimisation imposé par la méthode Luus-Jakola est la minimisation de l'erreur  $J$  commise par l'approximation de Padé, où  $J$  est définie par :

$$J = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \sum_{i_3} \left| \hat{Q}_{i_1 i_2} (jk_{i_3}) - Q_{i_1 i_2} (jk_{i_3}) \right|^2 \quad (4.2)$$

où  $k_{i_3}$  est l'ensemble des fréquences réduites pour lesquelles on a mesuré les forces aérodynamiques non stationnaires par la méthode des doublets DLM.

L'erreur peut être très petite même si l'erreur sur chaque élément peut être très élevée lorsque l'ordre  $n$  de l'approximation augmente. Cependant, un choix judicieux et différent pour chaque élément peut entraîner une erreur totale minimale.

Une fois l'étape précédente accomplie, il est plus facile de mettre l'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires sous la forme suivante :

$$Q(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + Z(s) \quad (4.3)$$

où  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont des matrices calculées numériquement et  $Z(s)$  une matrice formée strictement de fonctions rationnelles propres.

La matrice  $Z(s)$  peut être vue comme étant une fonction de transfert d'un système linéaire stable à plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO : Multiple Input, Multiple Output). Ce système peut alors être réduit dans l'espace d'état temporel par des méthodes de réduction d'ordre de systèmes linéaire telle que la méthode de réalisation minimale (Minimal realization and pôle-zéro cancellation), la méthode de réduction basée sur la décomposition de Schur (Schur balanced truncation), la méthode d'approximation de Hankel (Optimal Hankel norm approximation), la méthode balancée de troncature stochastique (Balanced stochastic truncation (BST))<sup>24</sup>, etc...



La méthode d'optimisation de Luus-Jakola est utilisée ici pour obtenir une réduction de l'ordre du système. Elle peut être appliquée à chaque élément de la matrice  $Z(s)$ .

Pour chaque élément  $Z_{ij}(s)$  de la matrice  $Z(s)$ , on peut calculer les coefficients  $A_{0_{ij}}, A_{1_{ij}}, A_{2_{ij}}$  et  $c_{0_{ij}}, c_{1_{ij}}, \dots, c_{n_{ij}}$  tels que :

$$Q_{ij}(s) = \frac{a_{0_{ij}} + a_{1_{ij}}s + \dots + a_{n+2_{ij}}s^{n+2}}{1 + b_{1_{ij}}s + b_{2_{ij}}s^2 + \dots + b_{n_{ij}}s^n} = A_{0_{ij}} + A_{1_{ij}}s + A_{2_{ij}}s^2 + \frac{c_{0_{ij}} + c_{1_{ij}}s + \dots + c_{n-1_{ij}}s^{n-1}}{1 + b_{1_{ij}}s + \dots + b_{n_{ij}}s^n} \quad (4.4)$$

En identifiant terme à terme les puissances de l'équation (4.4), on obtient le système d'équations que l'on peut écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{1_{ij}} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{2_{ij}} & b_{1_{ij}} & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{3_{ij}} & b_{2_{ij}} & b_{1_{ij}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ b_{4_{ij}} & b_{3_{ij}} & b_{2_{ij}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n_{ij}} & b_{n_{ij}} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0_{ij}} \\ A_{1_{ij}} \\ A_{2_{ij}} \\ c_{0_{ij}} \\ c_{1_{ij}} \\ \vdots \\ c_{n-1_{ij}} \\ c_{n_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0_{ij}} \\ a_{1_{ij}} \\ a_{2_{ij}} \\ a_{3_{ij}} \\ a_{4_{ij}} \\ \vdots \\ a_{n+1_{ij}} \\ a_{n+2_{ij}} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La première, la deuxième et la troisième ligne de l'équation (4.5) nous donnent les coefficients  $A_{0_{ij}}, A_{1_{ij}}$  et  $A_{2_{ij}}$ . Les coefficients  $\{c_{0_{ij}}, c_{1_{ij}}, \dots, c_{n-1_{ij}}\}$  sont calculés par substitution inverse.

Supposons que  $Z_{ij}(s)$  soit une approximation d'ordre  $n$  d'un élément  $(i, j)$  de  $Z(s)$  correspondant à un élément de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires, on peut alors écrire :

$$Z_{ij}(s) = \frac{c_{0_{ij}} + c_{1_{ij}}s + \dots + c_{n-1_{ij}}s^{n-1}}{1 + b_{1_{ij}}s + \dots + b_{n_{ij}}s^n} \quad (4.6)$$

L'approximation de  $Z_{ij}(s)$  recherchée est de la forme :

$$\bar{Z}_{ij}(s) = \frac{x_0 + x_1 s + \dots + x_{l-1} s^{l-1}}{x_l + x_{l+1} s + \dots + x_{2l} s^l} \quad (4.7)$$

où  $l < n$  et  $\{x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{2l}\}$  sont les inconnus.

## 4.2 Algorithme de Luus Jakola

La procédure d'optimisation de Luus-Jakola utilise une méthode de recherche opérationnelle par la programmation linéaire pour solutionner le problème d'optimisation selon la méthode suivante :

Problème : Calculer les valeurs de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tel que l'indice de performance

$$I = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.8)$$

soit optimal en tenant compte des contraintes

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i = 1, 2, \dots, s \quad (4.9)$$

Solution : En trois étapes suivantes :

Partant d'un point de départ quelconque  $x_0$ , choisir une matrice  $D$  diagonale formée de nombres aléatoires dans l'intervalle  $[-1, +1]$  et une région  $r$  tel que :

$$x = x_0 + Dr \quad (4.10)$$

Vérifier la faisabilité de chaque point  $x$  en respectant les contraintes définies par l'équation (4.9) et évaluer l'indice de performance donné par l'équation (4.8) et garder la valeur optimale de  $x$

Après chaque étape 1 et 2,  $x_0$  est remplacé par la valeur optimale de  $x$  obtenue en 2 et la région  $r$  est réduite par un facteur de 95% à chaque itération  $j$  tel que  $r_{j+1} = 0.95r_j$

Cette algorithme est itératif est nécessite plusieurs itérations pour atteindre la fonction objectif donnée par l'indice de performance.

Nous avons défini la fonction objectif comme étant la somme des carrés des déviations entre les forces aérodynamiques et leurs approximations telle que :

$$I = \sum \left( \left( \Re(Z(j\omega_i)) - \Re(\bar{Z}(j\omega_i)) \right)^2 + \left( \Im(Z(j\omega_i)) - \Im(\bar{Z}(j\omega_i)) \right)^2 \right) \quad (4.11)$$

Les  $\omega_i$  sont les fréquences choisis comme une suite géométrique telle que  $\omega_{i+1} = 1.1\omega_i$  dans le but d'obtenir plusieurs fréquences proches de zéro afin de mieux observer le comportement en basses fréquences.

L'algorithme utilisé dans cette étape est un extrait de la méthode utilisée par Luus-Jakola<sup>26</sup> pour réduire un système d'ordre quelconque dont la fonction de transfert a la

forme  $Z_{ij}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_{0_{ij}} + c_{1_{ij}}s + \dots + c_{n-1_{ij}}s^{n-1}}{1 + b_{1_{ij}}s + \dots + b_{n_{ij}}s^n}$  en un système équivalent et de forme

réduite dont la fonction de transfert est  $\bar{Z}_{ij}(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)} = \frac{x_0 + x_1s + \dots + x_{l-1}s^{l-1}}{x_l + x_{l+1}s + \dots + x_{2l-1}s^l}$ .

## CHAPITRE 5

### RÉSULTATS ET INTERPRETATION

#### 5.1 Résultats numériques de l'approximation par la méthode de Padé

La simulation sur Matlab® de l'approximation des forces aérodynamiques par la méthode de Padé<sup>34</sup> est exécutée pour plusieurs cas de figures selon le voisinage de l'approximation de Padé et de l'ordre de l'approximation de Padé.

Dans les trois premiers cas suivants, nous allons calculer l'approximation de Padé d'ordre [4,2] au voisinage d'un point  $x$  que l'on va changer à chaque fois ( $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$ ), c'est-à-dire au début, au milieu et à la fin de la plage des fréquences.

On va présenter les forces aérodynamiques non stationnaires par des approximations de Padé d'ordre [4,2], [10,8] et [14,12] aux voisinages de  $x=0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$ . Les erreurs seront présentées dans le tableau 1.

Nous avons choisi au hasard l'élément  $Q(2,3)$  dans la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires à titre d'exemple, les autres éléments de la matrices sont approchés de la même façon.

On a comparé l'approximation par les fractions rationnelles de Padé avec d'autres méthodes d'approximations classiques : Polynomiales, Krigeage, Splines et Chebyshev. L'erreur de l'approximation calculée par la méthode de Padé ou par les autres méthodes d'interpolation est une erreur discrète donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i_1} \sum_i \sum_{i_3} \left| \hat{Q}_{i_1 i_2} (jk_{i_3}) - Q_{i_1 i_2} (jk_{i_3}) \right|^2} \quad (5.1)$$

Les figures 5-1, 5-2 et 5-3 montrent les approximations de Padé d'ordre [4,2] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

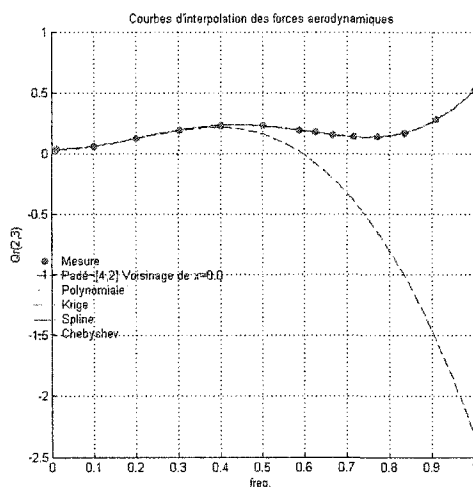


Figure 5-1 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=0.0$

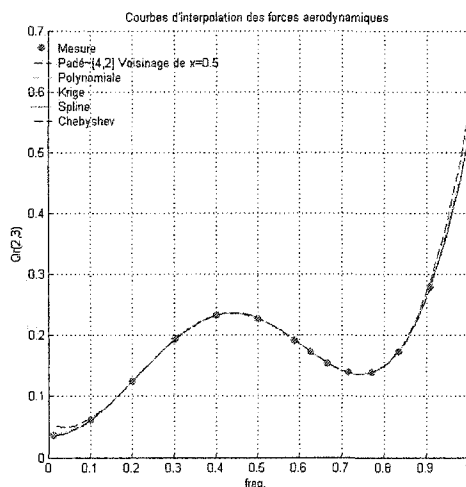


Figure 5-2 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=0.5$

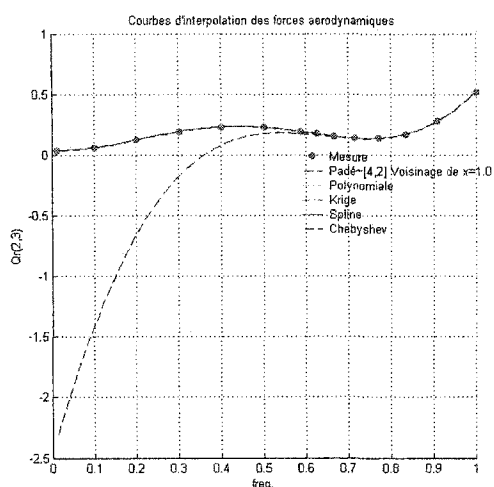


Figure 5-3 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [4,2] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000844624	0.0000844624	0.0000006199	0.0000000000	0.0000425279
0.0003142340	0.0003167505	0.0000011593	0.0000000000	0.0000758785
0.0003287900	0.0000674891	0.0000002215	0.0000000000	0.0003714084
0.0001975407	0.0036490534	0.0000001100	0.0000000000	0.0003096888
0.0004165322	0.0222247394	0.0000003013	0.0000000000	0.0002257387
0.0002730611	0.0840457159	0.0000002702	0.0000000000	0.0003412503
0.0002491844	0.2154056251	0.0000001449	0.0000000000	0.0000946460
0.0003247084	0.3038287917	0.0000000369	0.0000000000	0.0002024526
0.0002322805	0.4357445494	0.0000000063	0.0000000000	0.0005017510
0.0000506296	0.6359198623	0.0000001308	0.0000000000	0.0005945674
0.0003815409	0.9449715862	0.0000004158	0.0000000000	0.0002487194
0.0003471496	1.4303735821	0.0000009359	0.0000000000	0.0004140791
0.0004785518	2.2048048037	0.0000034440	0.0000000000	0.0004363400
0.0001123708	3.4537915879	0.0000022414	0.0000000000	0.0006539551

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000844624	0.0206244717	0.0000006199	0.0000000000	0.0000425279
0.0003142340	0.0034884855	0.0000011593	0.0000000000	0.0000758785
0.0003287900	0.0006325579	0.0000002215	0.0000000000	0.0003714084
0.0001975407	0.0002008404	0.0000001100	0.0000000000	0.0003096888
0.0004165322	0.0004166168	0.0000003013	0.0000000000	0.0002257387
0.0002730611	0.0002730611	0.0000002702	0.0000000000	0.0003412503
0.0002491844	0.0002493138	0.0000001449	0.0000000000	0.0000946460
0.0003247084	0.0003263929	0.0000000369	0.0000000000	0.0002024526
0.0002322805	0.0002465531	0.0000000063	0.0000000000	0.0005017510
0.0000506296	0.0000426813	0.0000001308	0.0000000000	0.0005945674
0.0003815409	0.0001347828	0.0000004158	0.0000000000	0.0002487194
0.0003471496	0.0022133403	0.0000009359	0.0000000000	0.0004140791
0.0004785518	0.0123120774	0.0000034440	0.0000000000	0.0004363400
0.0001123708	0.0523659941	0.0000022414	0.0000000000	0.0006539551

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000844624	2.8878658001	0.0000006199	0.0000000000	0.0000425279
0.0003142340	1.7842976283	0.0000011593	0.0000000000	0.0000758785
0.0003287900	0.9539355108	0.0000002215	0.0000000000	0.0003714084
0.0001975407	0.4433366098	0.0000001100	0.0000000000	0.0003096888
0.0004165322	0.1870703804	0.0000003013	0.0000000000	0.0002257387
0.0002730611	0.0630001269	0.0000002702	0.0000000000	0.0003412503
0.0002491844	0.0186955645	0.0000001449	0.0000000000	0.0000946460
0.0003247084	0.0102002319	0.0000000369	0.0000000000	0.0002024526
0.0002322805	0.0047442063	0.0000000063	0.0000000000	0.0005017510
0.0000506296	0.0018936703	0.0000001308	0.0000000000	0.0005945674
0.0003815409	0.0008374952	0.0000004158	0.0000000000	0.0002487194
0.0003471496	0.0003995004	0.0000009359	0.0000000000	0.0004140791
0.0004785518	0.0004776933	0.0000034440	0.0000000000	0.0004363400
0.0001123708	0.0001123708	0.0000022414	0.0000000000	0.0006539551

Les figures 5-4, 5-5 et 5-6 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[4,2]$  de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

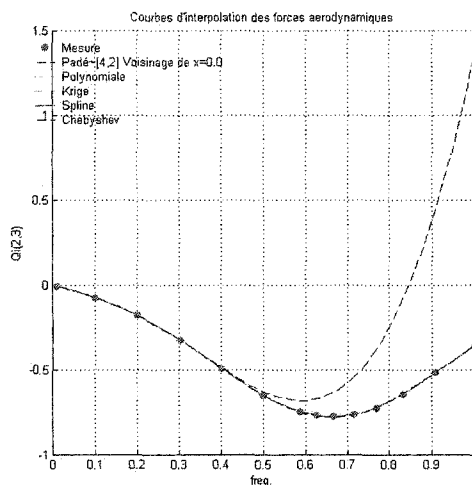


Figure 5-4 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[4,2]$  au voisinage de  $x=0.0$

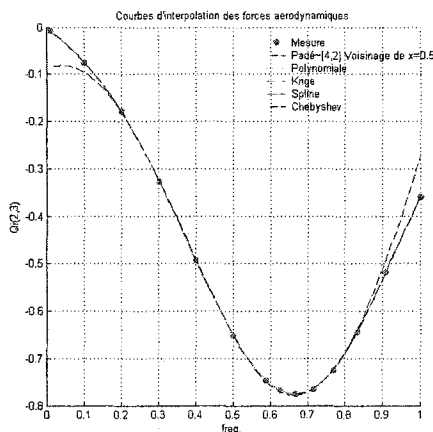


Figure 5-5 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[4,2]$  au voisinage de  $x=0.5$



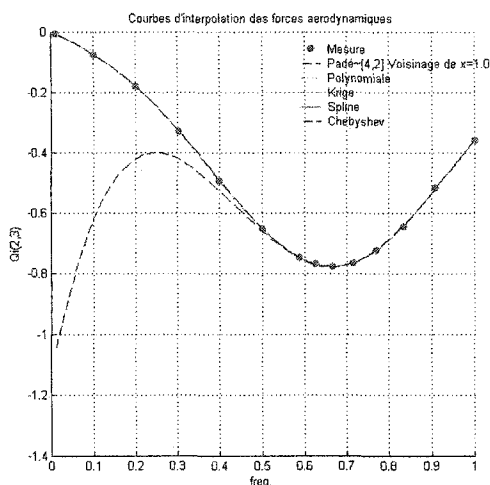


Figure 5-6 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [4,2] de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000962655	0.0000962655	0.0000001445	0.0000000000	0.0002119475
0.0003862260	0.0003860241	0.0000000977	0.0000000000	0.0001560421
0.0005137380	0.0005371007	0.0000001119	0.0000000000	0.0010969165
0.0000135892	0.0003721415	0.0000000890	0.0000000000	0.0001799605
0.0004156814	0.0020250807	0.0000000274	0.0000000000	0.0014541232
0.0000661509	0.0104510398	0.0000000411	0.0000000000	0.0001258067
0.0002491578	0.0302633814	0.0000000631	0.0000000000	0.0016065297
0.0002369849	0.0444543304	0.0000000300	0.0000000000	0.0017028347
0.0001178365	0.0667476558	0.0000000501	0.0000000000	0.0011954127
0.0000929820	0.1028901841	0.0000000828	0.0000000000	0.0000591510
0.0002894656	0.1635185368	0.0000000295	0.0000000000	0.0011930085
0.0002216952	0.2690119343	0.0000000247	0.0000000000	0.0013090858
0.0003612218	0.4598745054	0.00000003620	0.0000000000	0.0005031942
0.0000894142	0.8193388995	0.00000000021	0.0000000000	0.0014218320

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000962655	0.0370719847	0.0000001445	0.0000000000	0.0002119475
0.0003862260	0.0100953472	0.0000000977	0.0000000000	0.0001560421
0.0005137380	0.0008860382	0.0000001119	0.0000000000	0.0010969165
0.0000135892	0.0000920655	0.0000000890	0.0000000000	0.0001799605
0.0004156814	0.0004163922	0.0000000274	0.0000000000	0.0014541232
0.0000661509	0.0000661509	0.0000000411	0.0000000000	0.0001258067
0.0002491578	0.0002494575	0.0000000631	0.0000000000	0.0016065297
0.0002369849	0.0002403851	0.0000000300	0.0000000000	0.0017028347
0.0001178365	0.0001429278	0.0000000501	0.0000000000	0.0011954127
0.0000929820	0.0000493862	0.0000000828	0.0000000000	0.0000591510
0.0002894656	0.0003901998	0.0000000295	0.0000000000	0.0011930085
0.0002216952	0.0026607009	0.0000002447	0.0000000000	0.0013090858
0.0003612218	0.0116124582	0.0000003620	0.0000000000	0.0005031942
0.0000894142	0.0413466913	0.0000000021	0.0000000000	0.0014218320

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000962655	0.4949165795	0.0000001445	0.0000000000	0.0002119475
0.0003862260	0.2578343122	0.0000000977	0.0000000000	0.0001560421
0.0005137380	0.1139102871	0.0000001119	0.0000000000	0.0010969165
0.0000135892	0.0441437094	0.0000000890	0.0000000000	0.0001799605
0.0004156814	0.0160315661	0.0000000274	0.0000000000	0.0014541232
0.0000661509	0.0044597300	0.0000000411	0.0000000000	0.0001258067
0.0002491578	0.0008854435	0.0000000631	0.0000000000	0.0016065297
0.0002369849	0.0003535048	0.0000000300	0.0000000000	0.0017028347
0.0001178365	0.0001414264	0.0000000501	0.0000000000	0.0011954127
0.0000929820	0.0001811952	0.0000000828	0.0000000000	0.0000591510
0.0002894656	0.0003092525	0.0000000295	0.0000000000	0.0011930085
0.0002216952	0.0002237215	0.0000002447	0.0000000000	0.0013090858
0.0003612218	0.0003611927	0.0000003620	0.0000000000	0.0005031942
0.0000894142	0.0000894142	0.0000000021	0.0000000000	0.0014218320

Les figures 5-7, 5-8 et 5-9 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[4,2]$  de l'élément  $Q(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

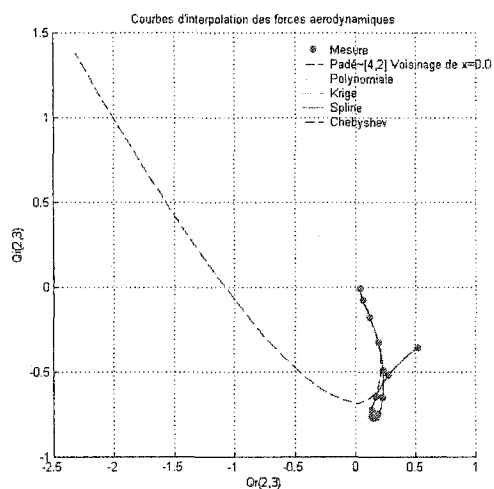


Figure 5-7 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[4,2]$  au voisinage de  $x=0.0$

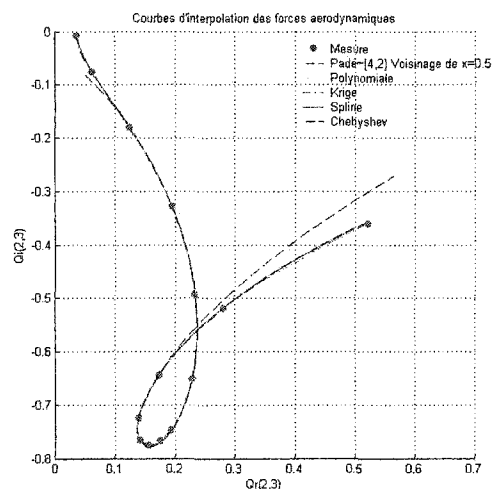


Figure 5-8 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[4,2]$  au voisinage de  $x=0.5$

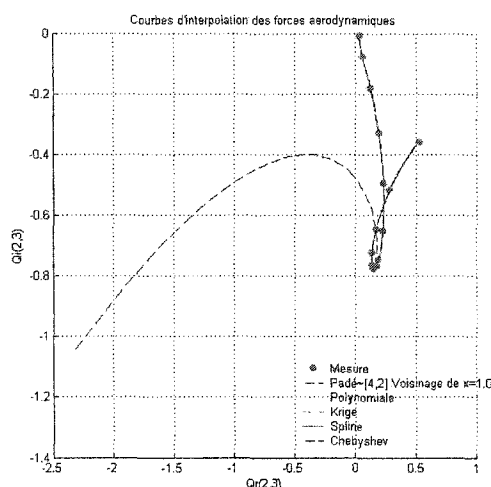


Figure 5-9 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [4,2] de l'élément  $Q(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2] Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000948040	0.0000948040	0.0000002616	0.0000000000	0.0001981868
0.0003775835	0.0003776793	0.0000004292	0.0000000000	0.0001480385
0.0004934861	0.0005013085	0.0000001316	0.0000000000	0.0010313945
0.0000725860	0.0013650798	0.0000000920	0.0000000000	0.0002017450
0.0004157928	0.0082597456	0.0000001120	0.0000000000	0.0013580681
0.0001164634	0.0319311803	0.0000001050	0.0000000000	0.0001702927
0.0002491613	0.0828850717	0.0000000788	0.0000000000	0.0014980827
0.0002502240	0.1174803113	0.0000000310	0.0000000000	0.0015891609
0.0001383136	0.1694918081	0.0000000468	0.0000000000	0.0011291157
0.0000885971	0.2492748229	0.0000000906	0.0000000000	0.0002220748
0.0003031140	0.3743432612	0.0000001530	0.0000000000	0.0011158197
0.0002418485	0.5750847304	0.0000004083	0.0000000000	0.0012295599
0.0003786547	0.9056228141	0.0000012910	0.0000000000	0.0004949566
0.0000927432	1.4645700139	0.0000008110	0.0000000000	0.0013464582

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000948040	0.0353568614	0.0000002616	0.0000000000	0.0001981868
0.0003775835	0.0094956693	0.0000004292	0.0000000000	0.0001480385
0.0004934861	0.0008571311	0.0000001316	0.0000000000	0.0010313945
0.0000725860	0.0001124581	0.0000000920	0.0000000000	0.0002017450
0.0004157928	0.0004164216	0.0000001120	0.0000000000	0.0013580681
0.0001164634	0.0001164634	0.0000001050	0.0000000000	0.0001702927
0.0002491613	0.0002494387	0.0000000788	0.0000000000	0.0014980827
0.0002502240	0.0002533107	0.0000000310	0.0000000000	0.0015891609
0.0001383136	0.0001603487	0.0000000468	0.0000000000	0.0011291157
0.0000885971	0.0000485612	0.0000000906	0.0000000000	0.0002220748
0.0003031140	0.0003670189	0.0000001530	0.0000000000	0.0011158197
0.0002418485	0.0026065103	0.0000004083	0.0000000000	0.0012295599
0.0003786547	0.0117064208	0.0000012910	0.0000000000	0.0004949566
0.0000927432	0.0429502983	0.0000008110	0.0000000000	0.0013464582

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [4,2]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000948040	1.1421903607	0.0000002616	0.0000000000	0.0001981868
0.0003775835	0.6888700736	0.0000004292	0.0000000000	0.0001480385
0.0004934861	0.3611093534	0.0000001316	0.0000000000	0.0010313945
0.0000725860	0.1655979563	0.0000000920	0.0000000000	0.0002017450
0.0004157928	0.0693140957	0.0000001120	0.0000000000	0.0013580681
0.0001164634	0.0231700489	0.0000001050	0.0000000000	0.0001702927
0.0002491613	0.0068143944	0.0000000788	0.0000000000	0.0014980827
0.0002502240	0.0037052156	0.0000000310	0.0000000000	0.0015891609
0.0001383136	0.0017215503	0.0000000468	0.0000000000	0.0011291157
0.0000885971	0.0007056620	0.0000000906	0.0000000000	0.0002220748
0.0003031140	0.0004182517	0.0000001530	0.0000000000	0.0011158197
0.0002418485	0.0002537556	0.0000004083	0.0000000000	0.0012295599
0.0003786547	0.0003784887	0.0000012910	0.0000000000	0.0004949566
0.0000927432	0.0000927432	0.0000008110	0.0000000000	0.0013464582

Les figures 5-10, 5-11 et 5-12 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[10,8]$  de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

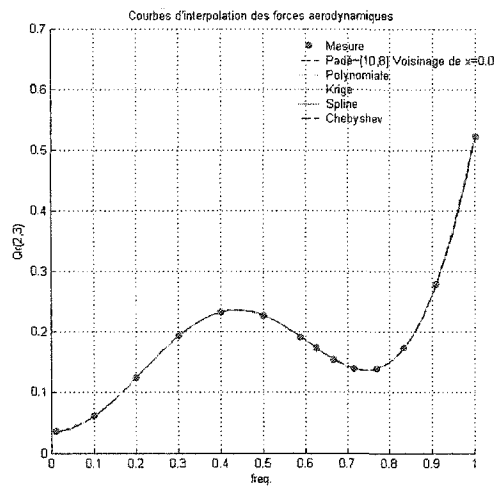


Figure 5-10 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=0.0$

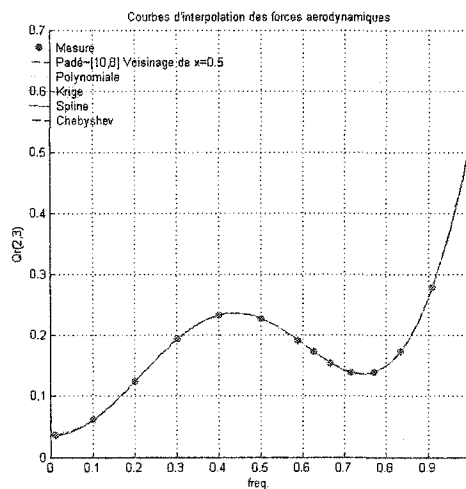


Figure 5-11 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=0.5$

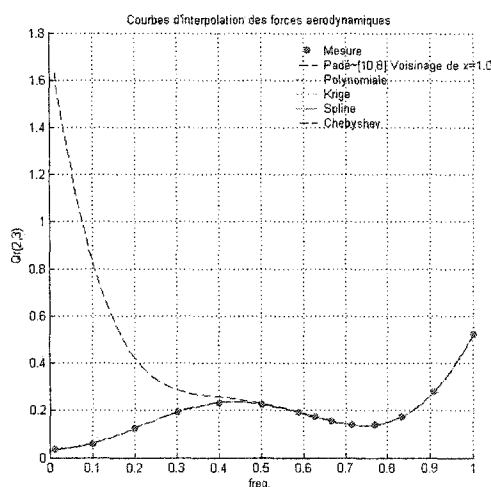


Figure 5-12 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [10,8] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000000	0.0000006199	0.0000000000	0.0000338098
0.0000000000	0.0000000000	0.0000011593	0.0000000000	0.0001735112
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002215	0.0000000000	0.0000243152
0.0000000000	0.0000000088	0.0000001100	0.0000000000	0.0002331947
0.0000000000	0.0000007148	0.0000003013	0.0000000000	0.0000996963
0.0000000000	0.0000172651	0.0000002702	0.0000000000	0.0001858590
0.0000000000	0.0001252352	0.0000001449	0.0000000000	0.0000939594
0.0000000000	0.0002334159	0.0000000369	0.0000000000	0.0001719488
0.0000000000	0.0004078785	0.0000000063	0.0000000000	0.0001732769
0.0000000000	0.0006198108	0.0000001308	0.0000000000	0.0000741839
0.0000000000	0.0006499764	0.0000004158	0.0000000000	0.0000769017
0.0000000000	0.0001671679	0.0000009359	0.0000000000	0.0001319233
0.0000000000	0.0026268757	0.0000034440	0.0000000000	0.0000574445
0.0000000000	0.0023189373	0.0000022414	0.0000000000	0.0000323815

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0008580212	0.0000006199	0.0000000000	0.0000338098
0.0000000000	0.0000369882	0.0000011593	0.0000000000	0.0001735112
0.0000000000	0.0000003508	0.0000002215	0.0000000000	0.0000243152
0.0000000000	0.0000000003	0.0000001100	0.0000000000	0.0002331947
0.0000000000	0.0000000000	0.0000003013	0.0000000000	0.0000996963
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002702	0.0000000000	0.0001858590
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001449	0.0000000000	0.0000939594
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000369	0.0000000000	0.0001719488
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000063	0.0000000000	0.0001732769
0.0000000000	0.0000000007	0.0000001308	0.0000000000	0.0000741839
0.0000000000	0.0000000358	0.0000004158	0.0000000000	0.0000769017
0.0000000000	0.0000008508	0.0000009359	0.0000000000	0.0001319233
0.0000000000	0.0000175942	0.0000034440	0.0000000000	0.0000574445
0.0000000000	0.0035356022	0.0000022414	0.0000000000	0.0000323815

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	1.9566623003	0.0000006199	0.0000000000	0.0000338098
0.0000000000	0.9405180985	0.0000011593	0.0000000000	0.0001735112
0.0000000000	0.3624515822	0.0000002215	0.0000000000	0.0000243152
0.0000000000	0.1116431870	0.0000001100	0.0000000000	0.0002331947
0.0000000000	0.0295025808	0.0000003013	0.0000000000	0.0000996963
0.0000000000	0.0060525600	0.0000002702	0.0000000000	0.0001858590
0.0000000000	0.0027025579	0.0000001449	0.0000000000	0.0000939594
0.0000000000	0.0007542519	0.0000000369	0.0000000000	0.0001719488
0.0000000000	0.0000435265	0.0000000063	0.0000000000	0.0001732769
0.0000000000	0.0000025729	0.0000001308	0.0000000000	0.0000741839
0.0000000000	0.0000000687	0.0000004158	0.0000000000	0.0000769017
0.0000000000	0.0000000003	0.0000009359	0.0000000000	0.0001319233
0.0000000000	0.0000000000	0.0000034440	0.0000000000	0.0000574445
0.0000000000	0.0000000000	0.0000022414	0.0000000000	0.0000323815



Les figures 5-13, 5-14 et 5-15 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[10,8]$  de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

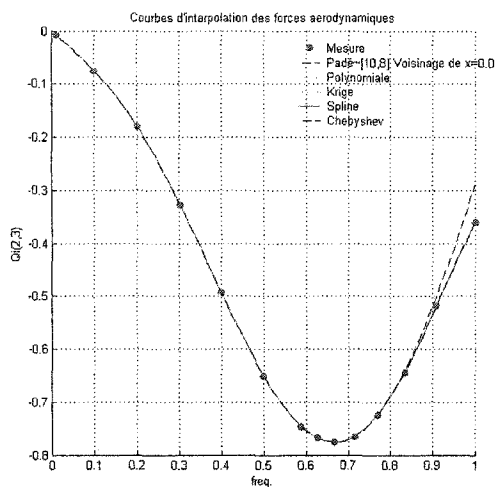


Figure 5-13 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=0.0$

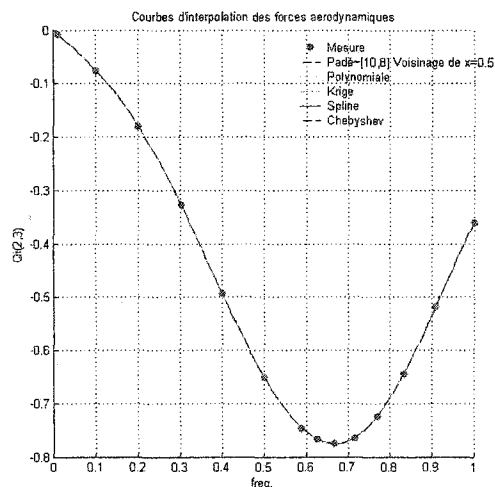


Figure 5-14 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=0.5$

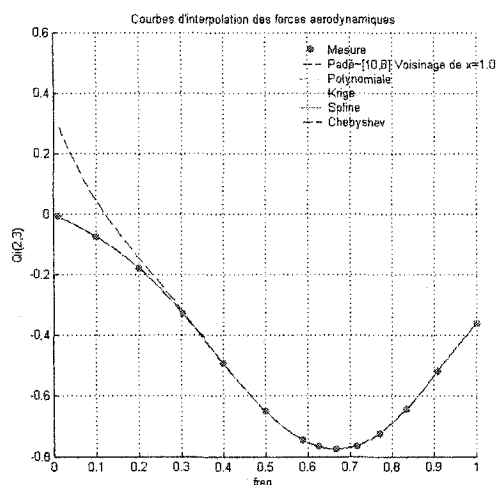


Figure 5-15 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [10,8] de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001445	0.0000000000	0.0000029716
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000977	0.0000000000	0.0000237112
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001119	0.0000000000	0.0000322905
0.0000000000	0.0000000030	0.0000000890	0.0000000000	0.0000637254
0.0000000000	0.0000002474	0.0000000274	0.0000000000	0.0000155655
0.0000000000	0.0000062051	0.0000000411	0.0000000000	0.0000789136
0.0000000000	0.0000466538	0.0000000631	0.0000000000	0.0000140910
0.0000000000	0.0000872360	0.0000000300	0.0000000000	0.0000368419
0.0000000000	0.0001480521	0.0000000501	0.0000000000	0.0000757468
0.0000000000	0.0001875107	0.0000000828	0.0000000000	0.0000693076
0.0000000000	0.0000465262	0.0000000295	0.0000000000	0.0000011361
0.0000000000	0.0016380724	0.0000002447	0.0000000000	0.0000688951
0.0000000000	0.0085680862	0.0000003620	0.0000000000	0.0000000357
0.0000000000	0.0337115781	0.0000000021	0.0000000000	0.0000543440

Erreur de l'approximation de  $Q_4(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0004510905	0.0000001445	0.0000000000	0.0000029716
0.0000000000	0.0000205957	0.0000000977	0.0000000000	0.0000237112
0.0000000000	0.0000002264	0.0000001119	0.0000000000	0.0000322905
0.0000000000	0.0000000005	0.0000000890	0.0000000000	0.0000637254
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000274	0.0000000000	0.0000155655
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000411	0.0000000000	0.0000789136
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000631	0.0000000000	0.0000140910
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000300	0.0000000000	0.0000368419
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000501	0.0000000000	0.0000757468
0.0000000000	0.0000000002	0.0000000828	0.0000000000	0.0000693076
0.0000000000	0.0000000110	0.0000000295	0.0000000000	0.0000011361
0.0000000000	0.0000004363	0.0000002447	0.0000000000	0.0000688951
0.0000000000	0.0000119110	0.0000003620	0.0000000000	0.0000000357
0.0000000000	0.0001664070	0.0000000021	0.0000000000	0.0000543440

Erreur de l'approximation de  $Q_4(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.1437953084	0.0000001445	0.0000000000	0.0000029716
0.0000000000	0.0566977554	0.0000000977	0.0000000000	0.0000237112
0.0000000000	0.0162596569	0.0000001119	0.0000000000	0.0000322905
0.0000000000	0.0032658524	0.0000000890	0.0000000000	0.0000637254
0.0000000000	0.0004859119	0.0000000274	0.0000000000	0.0000155655
0.0000000000	0.0000393557	0.0000000411	0.0000000000	0.0000789136
0.0000000000	0.0000022303	0.0000000631	0.0000000000	0.0000140910
0.0000000000	0.0000005272	0.0000000300	0.0000000000	0.0000368419
0.0000000000	0.0000000818	0.0000000501	0.0000000000	0.0000757468
0.0000000000	0.0000000067	0.0000000828	0.0000000000	0.0000693076
0.0000000000	0.0000000002	0.0000000295	0.0000000000	0.0000011361
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002447	0.0000000000	0.0000688951
0.0000000000	0.0000000000	0.0000003620	0.0000000000	0.0000000357
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000021	0.0000000000	0.0000543440

Les figures 5-16, 5-17 et 5-18 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[10,8]$  de l'élément  $Q(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

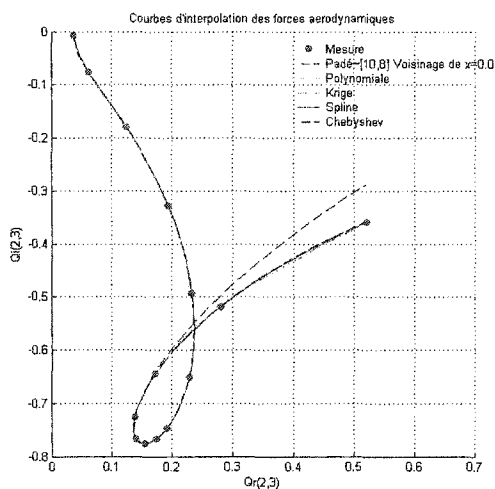


Figure 5-16 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=0.0$

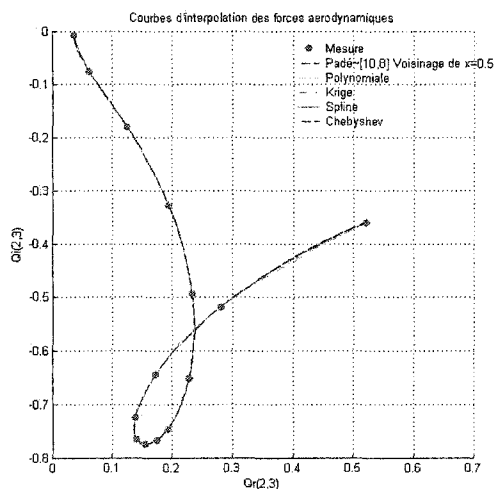


Figure 5-17 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=0.5$

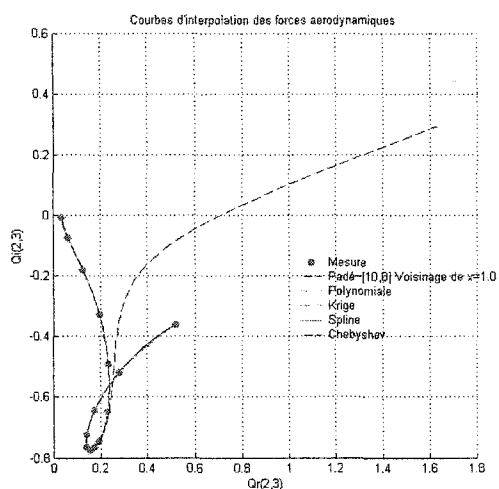


Figure 5-18 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre  $[10,8]$  de l'élément  $Q(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[10,8]$  Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002616	0.0000000000	0.0000125424
0.0000000000	0.0000000000	0.0000004292	0.0000000000	0.0000665558
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001316	0.0000000000	0.0000313620
0.0000000000	0.0000000043	0.0000000920	0.0000000000	0.0001031888
0.0000000000	0.0000003465	0.0000001120	0.0000000000	0.0000388804
0.0000000000	0.0000085138	0.0000001050	0.0000000000	0.0000996700
0.0000000000	0.0000628073	0.0000000788	0.0000000000	0.0000364451
0.0000000000	0.0001172434	0.0000000310	0.0000000000	0.0000710637
0.0000000000	0.0002020597	0.0000000468	0.0000000000	0.0000944294
0.0000000000	0.0002843359	0.0000000906	0.0000000000	0.0000699652
0.0000000000	0.0002391335	0.0000001530	0.0000000000	0.0000278438
0.0000000000	0.0015282943	0.0000004083	0.0000000000	0.0000800215
0.0000000000	0.0080439649	0.0000012910	0.0000000000	0.0000207839
0.0000000000	0.0314388983	0.0000008110	0.0000000000	0.0000519993

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0005227028	0.0000002616	0.0000000000	0.0000125424
0.0000000000	0.0000234041	0.0000004292	0.0000000000	0.0000665558
0.0000000000	0.0000002463	0.0000001316	0.0000000000	0.0000313620
0.0000000000	0.0000000005	0.0000000920	0.0000000000	0.0001031888
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001120	0.0000000000	0.0000388804
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001050	0.0000000000	0.0000996700
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000788	0.0000000000	0.0000364451
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000310	0.0000000000	0.0000710637
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000468	0.0000000000	0.0000944294
0.0000000000	0.0000000003	0.0000000906	0.0000000000	0.0000699652
0.0000000000	0.0000000165	0.0000001530	0.0000000000	0.0000278438
0.0000000000	0.0000005101	0.0000004083	0.0000000000	0.0000800215
0.0000000000	0.0000127993	0.0000012910	0.0000000000	0.0000207839
0.0000000000	0.0012885833	0.0000008110	0.0000000000	0.0000519993

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [10,8]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.7205173196	0.0000002616	0.0000000000	0.0000125424
0.0000000000	0.3443680641	0.0000004292	0.0000000000	0.0000665558
0.0000000000	0.1320112095	0.0000001316	0.0000000000	0.0000313620
0.0000000000	0.0405080323	0.0000000920	0.0000000000	0.0001031888
0.0000000000	0.0106838921	0.0000001120	0.0000000000	0.0000388804
0.0000000000	0.0021901750	0.0000001050	0.0000000000	0.0000996700
0.0000000000	0.0009778106	0.0000000788	0.0000000000	0.0000364451
0.0000000000	0.0002728952	0.0000000310	0.0000000000	0.0000710637
0.0000000000	0.0000157485	0.0000000468	0.0000000000	0.0000944294
0.0000000000	0.0000009309	0.0000000906	0.0000000000	0.0000699652
0.0000000000	0.0000000249	0.0000001530	0.0000000000	0.0000278438
0.0000000000	0.0000000001	0.0000004083	0.0000000000	0.0000800215
0.0000000000	0.0000000000	0.0000012910	0.0000000000	0.0000207839
0.0000000000	0.0000000000	0.0000008110	0.0000000000	0.0000519993

Les figures 5-19, 5-20 et 5-21 montrent les approximations de Padé d'ordre [14,12] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

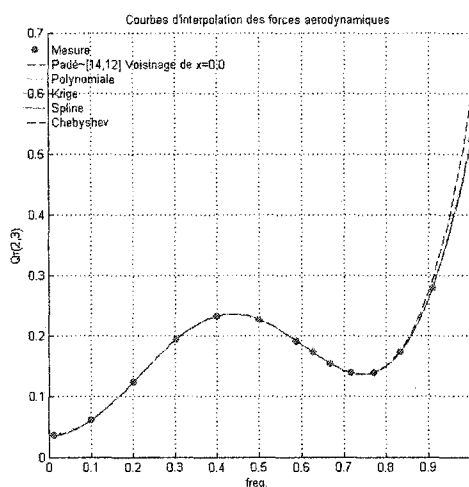


Figure 5-19 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de  $x=0.0$

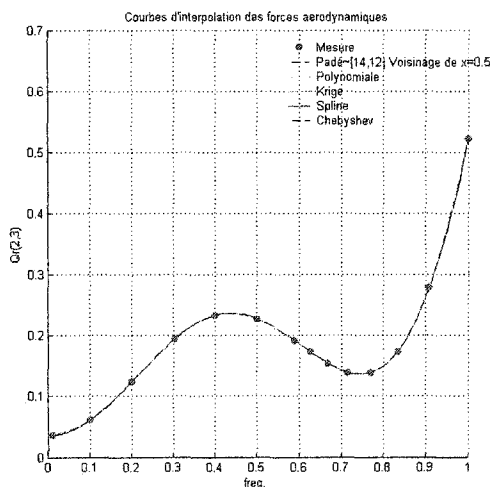


Figure 5-20 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de  $x=0.5$

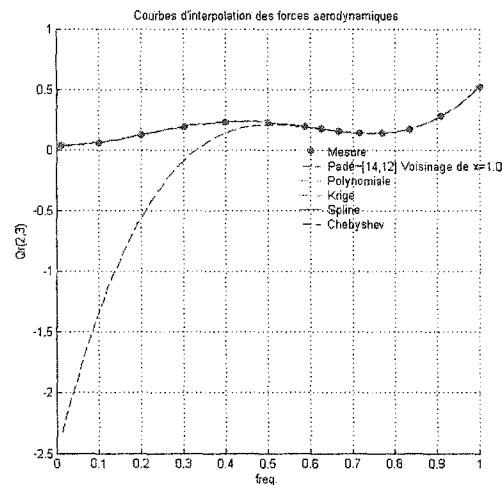


Figure 5-21 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [14,12] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krigé	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000000	0.0000006199	0.0000000000	0.0000179094
0.0000000000	0.0000000000	0.0000011593	0.0000000000	0.0001262171
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002215	0.0000000000	0.0000259971
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001100	0.0000000000	0.0002034314
0.0000000000	0.0000000000	0.0000003013	0.0000000000	0.0001045090
0.0000000000	0.0000000140	0.0000002702	0.0000000000	0.0001577368
0.0000000000	0.0000009131	0.0000001449	0.0000000000	0.0001158659
0.0000000000	0.0000041669	0.0000000369	0.0000000000	0.0001795324
0.0000000000	0.0000202838	0.0000000063	0.0000000000	0.0001601355
0.0000000000	0.0001049536	0.0000001308	0.0000000000	0.0000391417
0.0000000000	0.0005710622	0.0000004158	0.0000000000	0.0001201312
0.0000000000	0.0031858000	0.0000009359	0.0000000000	0.0001390476
0.0000000000	0.0172979610	0.0000034440	0.0000000000	0.0001702342
0.0000000000	0.0878714207	0.0000022414	0.0000000000	0.0002356624



Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000001	0.0000006199	0.0000000000	0.0000179094
0.0000000000	0.0000000000	0.0000011593	0.0000000000	0.0001262171
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002215	0.0000000000	0.0000259971
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001100	0.0000000000	0.0002034314
0.0000000000	0.0000000000	0.0000003013	0.0000000000	0.0001045090
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002702	0.0000000000	0.0001577368
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001449	0.0000000000	0.0001158659
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000369	0.0000000000	0.0001795324
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000063	0.0000000000	0.0001601355
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001308	0.0000000000	0.0000391417
0.0000000000	0.0000000000	0.0000004158	0.0000000000	0.0001201312
0.0000000000	0.0000000004	0.0000009359	0.0000000000	0.0001390476
0.0000000000	0.0000002108	0.0000034440	0.0000000000	0.0001702342
0.0000000000	0.0001180040	0.0000022414	0.0000000000	0.0002356624

Erreur de l'approximation de  $Q_r(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	2.9131518131	0.0000006199	0.0000000000	0.0000179094
0.0000000000	1.7011854819	0.0000011593	0.0000000000	0.0001262171
0.0000000000	0.8296043595	0.0000002215	0.0000000000	0.0000259971
0.0000000000	0.3324077970	0.0000001100	0.0000000000	0.0002034314
0.0000000000	0.1124312582	0.0000003013	0.0000000000	0.0001045090
0.0000000000	0.0264429232	0.0000002702	0.0000000000	0.0001577368
0.0000000000	0.0048434065	0.0000001449	0.0000000000	0.0001158659
0.0000000000	0.0020199375	0.0000000369	0.0000000000	0.0001795324
0.0000000000	0.0006379493	0.0000000063	0.0000000000	0.0001601355
0.0000000000	0.0001299602	0.0000001308	0.0000000000	0.0000391417
0.0000000000	0.0000124250	0.0000004158	0.0000000000	0.0001201312
0.0000000000	0.0000002634	0.0000009359	0.0000000000	0.0001390476
0.0000000000	0.0000000001	0.0000034440	0.0000000000	0.0001702342
0.0000000000	0.0000000000	0.0000022414	0.0000000000	0.0002356624

Les figures 5-22, 5-23 et 5-24 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[14,12]$  de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

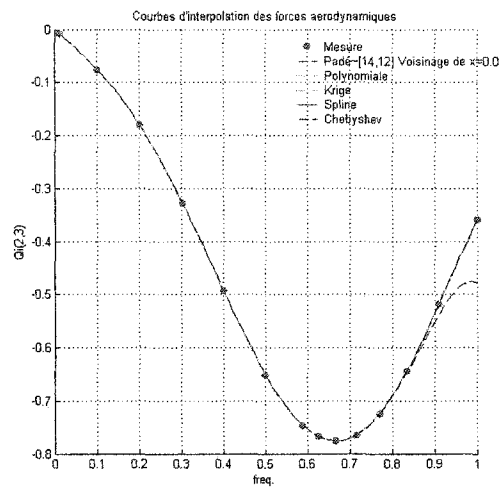


Figure 5-22 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[14,12]$  au voisinage de  $x=0.0$

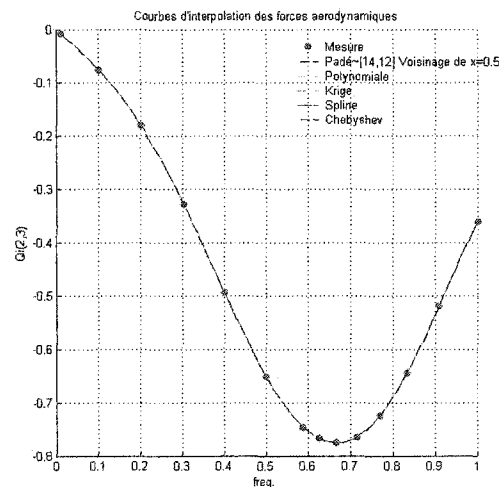


Figure 5-23 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[14,12]$  au voisinage de  $x=0.5$

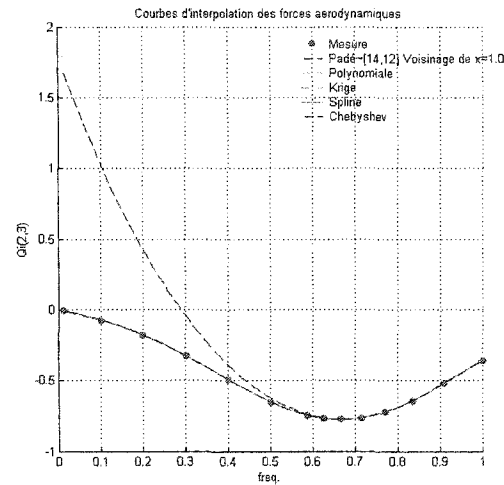


Figure 5-24 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [14,12] de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001445	0.0000000000	0.0000029093
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000977	0.0000000000	0.0000059249
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001119	0.0000000000	0.0000322947
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000890	0.0000000000	0.0000519717
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000274	0.0000000000	0.0000130847
0.0000000000	0.0000000058	0.0000000411	0.0000000000	0.0000677630
0.0000000000	0.0000003950	0.0000000631	0.0000000000	0.0000048103
0.0000000000	0.0000018371	0.0000000300	0.0000000000	0.0000404185
0.0000000000	0.0000091502	0.0000000501	0.0000000000	0.0000708310
0.0000000000	0.0000487404	0.0000000828	0.0000000000	0.0000551771
0.0000000000	0.0002757263	0.0000000295	0.0000000000	0.0000167790
0.0000000000	0.0016276062	0.0000002447	0.0000000000	0.0000722605
0.0000000000	0.0096768885	0.0000003620	0.0000000000	0.0000463993
0.0000000000	0.0564135558	0.0000000021	0.0000000000	0.0000551946

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000011	0.0000001445	0.0000000000	0.0000029093
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000977	0.0000000000	0.0000059249
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001119	0.0000000000	0.0000322947
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000890	0.0000000000	0.0000519717
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000274	0.0000000000	0.0000130847
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000411	0.0000000000	0.0000677630
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000631	0.0000000000	0.0000048103
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000300	0.0000000000	0.0000404185
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000501	0.0000000000	0.0000708310
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000828	0.0000000000	0.0000551771
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000295	0.0000000000	0.0000167790
0.0000000000	0.0000000001	0.0000002447	0.0000000000	0.0000722605
0.0000000000	0.0000000573	0.0000003620	0.0000000000	0.0000463993
0.0000000000	0.0000363071	0.0000000021	0.0000000000	0.0000551946

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.8057695267	0.0000001445	0.0000000000	0.0000029093
0.0000000000	0.5217759280	0.0000000977	0.0000000000	0.0000059249
0.0000000000	0.2860148613	0.0000001119	0.0000000000	0.0000322947
0.0000000000	0.1292648580	0.0000000890	0.0000000000	0.0000519717
0.0000000000	0.0488294135	0.0000000274	0.0000000000	0.0000130847
0.0000000000	0.0127943268	0.0000000411	0.0000000000	0.0000677630
0.0000000000	0.0025605856	0.0000000631	0.0000000000	0.0000048103
0.0000000000	0.0011059199	0.0000000300	0.0000000000	0.0000404185
0.0000000000	0.0003629609	0.0000000501	0.0000000000	0.0000708310
0.0000000000	0.0000771563	0.0000000828	0.0000000000	0.0000551771
0.0000000000	0.0000077380	0.0000000295	0.0000000000	0.0000167790
0.0000000000	0.0000001733	0.0000002447	0.0000000000	0.0000722605
0.0000000000	0.0000000001	0.0000003620	0.0000000000	0.0000463993
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000021	0.0000000000	0.0000551946

Les figures 5-25, 5-26 et 5-27 montrent les approximations de Padé d'ordre  $[14,12]$  de l'élément  $Q(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

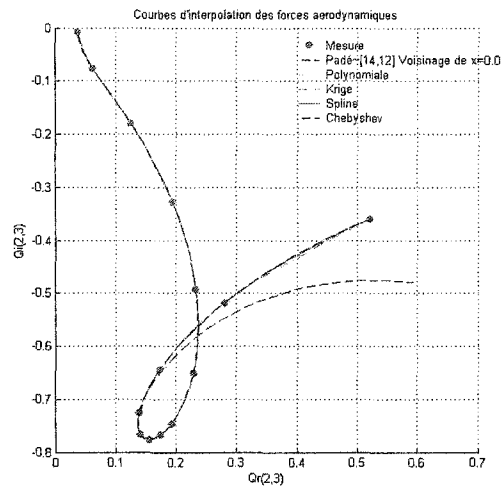


Figure 5-25 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[14,12]$  au voisinage de  $x=0.0$

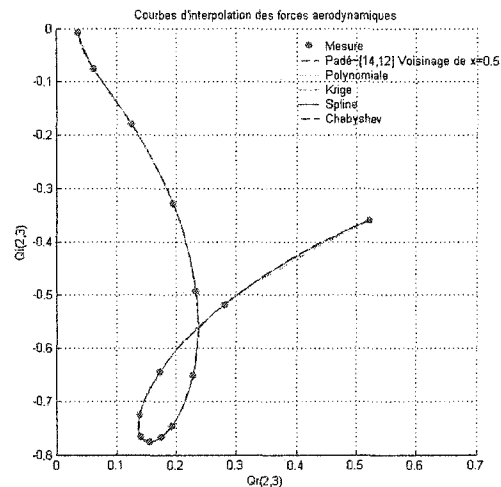


Figure 5-26 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre  $[14,12]$  au voisinage de  $x=0.5$

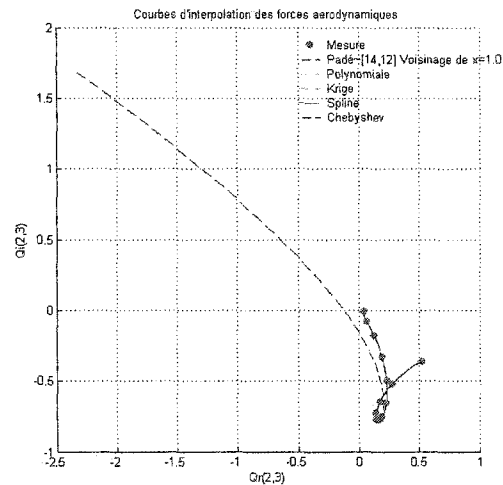


Figure 5-27 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] au voisinage de  $x=1.0$

Les erreurs commises par les approximations de Padé d'ordre [14,12] de l'élément  $Q(2,3)$  au voisinage des points  $x=0.0$ ,  $x=0.5$  et  $x=1.0$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12] Voisinage de  $x=0.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000000	0.0000002616	0.0000000000	0.0000070245
0.0000000000	0.0000000000	0.0000004292	0.0000000000	0.0000459993
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001316	0.0000000000	0.0000315419
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000920	0.0000000000	0.0000881187
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001120	0.0000000000	0.0000397312
0.0000000000	0.0000000074	0.0000001050	0.0000000000	0.0000851339
0.0000000000	0.0000004947	0.0000000788	0.0000000000	0.0000421604
0.0000000000	0.0000022817	0.0000000310	0.0000000000	0.0000750941
0.0000000000	0.0000112528	0.0000000468	0.0000000000	0.0000878472
0.0000000000	0.0000592166	0.0000000906	0.0000000000	0.0000533528
0.0000000000	0.0003297920	0.0000001530	0.0000000000	0.0000461935
0.0000000000	0.0019054976	0.0000004083	0.0000000000	0.0000840774
0.0000000000	0.0109796788	0.0000012910	0.0000000000	0.0000752640
0.0000000000	0.0614544985	0.0000008110	0.0000000000	0.0000995877

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=0.5$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	0.0000000010	0.0000002616	0.0000000000	0.0000070245
0.0000000000	0.0000000000	0.0000004292	0.0000000000	0.0000459993
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001316	0.0000000000	0.0000315419
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000920	0.0000000000	0.0000881187
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001120	0.0000000000	0.0000397312
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001050	0.0000000000	0.0000851339
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000788	0.0000000000	0.0000421604
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000310	0.0000000000	0.0000750941
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000468	0.0000000000	0.0000878472
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000906	0.0000000000	0.0000533528
0.0000000000	0.0000000000	0.0000001530	0.0000000000	0.0000461935
0.0000000000	0.0000000002	0.0000004083	0.0000000000	0.0000840774
0.0000000000	0.0000000931	0.0000012910	0.0000000000	0.0000752640
0.0000000000	0.0000544839	0.0000008110	0.0000000000	0.0000995877

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé d'ordre [14,12]  
Voisinage de  $x=1.0$

Polynomiale	Padé	Krige	Spline	Chebyshev
0.0000000000	1.2942931632	0.0000002616	0.0000000000	0.0000070245
0.0000000000	0.7845097192	0.0000004292	0.0000000000	0.0000459993
0.0000000000	0.4014855159	0.0000001316	0.0000000000	0.0000315419
0.0000000000	0.1702540338	0.0000000920	0.0000000000	0.0000881187
0.0000000000	0.0610486660	0.0000001120	0.0000000000	0.0000397312
0.0000000000	0.0152904874	0.0000001050	0.0000000000	0.0000851339
0.0000000000	0.0029612768	0.0000000788	0.0000000000	0.0000421604
0.0000000000	0.0012637512	0.0000000310	0.0000000000	0.0000750941
0.0000000000	0.0004095984	0.0000000468	0.0000000000	0.0000878472
0.0000000000	0.0000859345	0.0000000906	0.0000000000	0.0000533528
0.0000000000	0.0000084999	0.0000001530	0.0000000000	0.0000461935
0.0000000000	0.0000001875	0.0000004083	0.0000000000	0.0000840774
0.0000000000	0.0000000001	0.0000012910	0.0000000000	0.0000752640
0.0000000000	0.0000000000	0.0000008110	0.0000000000	0.0000995877

Tableau I

Erreur  $\varepsilon$  d'approximation calculée par  
les fractions rationnelles de Padé

	Padé d'ordre [4,2]	Padé d'ordre [10,8]	Padé d'ordre [14,12]
Voisinage de $x=0.0$	$\varepsilon= 4.2756$	$\varepsilon= 0.073745$	$\varepsilon= 0.14176$
Voisinage de $x=0.5$	$\varepsilon= 0.13098$	$\varepsilon= 0.0031568$	$\varepsilon= 0.00012366$
Voisinage de $x=1.0$	$\varepsilon= 3.1633$	$\varepsilon= 1.8396$	$\varepsilon=3.5778$

On constate d'après ce tableau que l'erreur de l'approximation de Padé décroît quand l'ordre de la fraction rationnelle de Padé augmente et que cette erreur est minimale au centre de l'intervalle correspondant à la plage de fréquences.

On remarque aussi que l'approximation par Padé au voisinage immédiat du point où elle est calculée est très bonne et donne des résultats comparables aux méthodes d'interpolations standards (Splines, Kriges...).

Une alternative pour améliorer l'approximation est d'utiliser les polynômes orthogonaux de Chebyshev dont les propriétés mathématiques assurent que l'erreur d'approximation est bornée sur l'intervalle  $[-1, +1]$ .

## 5.2 Résultats numériques de l'approximation par les polynômes de Padé-Chebyshev

La simulation sur Matlab® de l'approximation des forces aérodynamiques par les polynômes orthogonaux de Chebyshev est exécutée, de la même façon que



précédemment, pour plusieurs cas de figures selon l'ordre de l'approximation de Chebyshev.

Dans les trois cas suivants, nous allons calculer l'approximation de Chebyshev sur l'intervalle  $[-1,1]$  dont l'ordre va changer à chaque fois ( $[4,2]$ ;  $[10,8]$  et  $[14,12]$ ) de la même manière que pour l'approximation de Padé afin de faire des comparaisons.

On va présenter les forces aérodynamiques non stationnaires par des approximations de Chebyshev d'ordre  $[4,2]$ ,  $[10,8]$  et  $[14,12]$  sur l'intervalle  $[-1,1]$ . Les erreurs seront présentées dans le tableau 2.

Nous avons choisi au hasard l'élément  $Q(2,3)$  dans la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires à titre d'exemple, les autres éléments de la matrices sont approchés de la même façon.

On a comparé l'approximation de Chebyshev avec d'autres méthodes d'approximations classiques : Polynomiales, Krigeage, Splines et Chebyshev.

L'approximation par cette méthode est obtenue par une méthode similaire à celle utilisée par la nouvelle méthode dont les principales étapes sont :

Pour chaque élément de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaire, on cherche un développement en série de puissances de la forme suivante :

$$Q_{ij}(s) = \frac{1}{2}c_0^{(ij)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(ij)} T_k^{(ij)}(s) \quad (5.2)$$

$$\text{où } c_k^{(ij)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Q_{ij}(s) T_k^{(ij)}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds \text{ pour tout } k = 0, 1, \dots$$

De la même manière que dans l'approximation de Padé, on va générer une approximation par des fractions rationnelles dont la forme est la suivante :

$$\hat{Q}_{ij}(s) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k^{(ij)} T_k^{(ij)}(s)}{1 + \sum_{k=1}^P b_k^{(ij)} T_k^{(ij)}(s)} \quad (5.3)$$

Les figures 5-29, 5-30 et 5-31 montrent les approximations de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2], [10,8] et [14,12] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  sur l'intervalle  $[-1,+1]$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

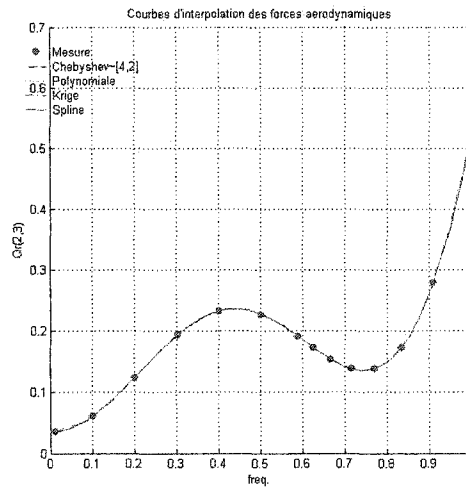


Figure 5-28 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2]

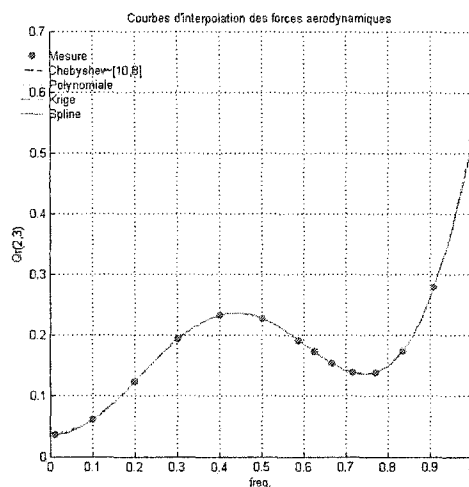


Figure 5-29 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8]

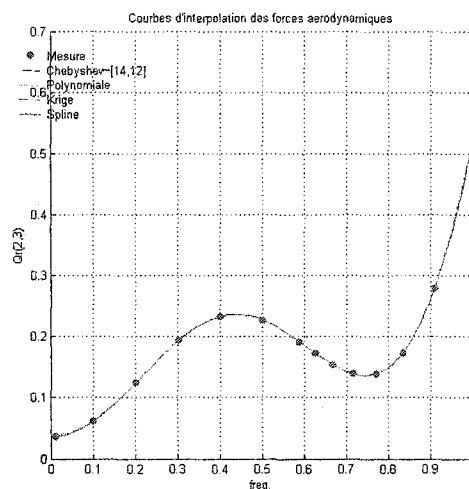


Figure 5-30 Approximation de  $Q_r(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12]

Les erreurs commises par les approximations de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2], [10,8] et [14,12] de la partie réelle de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_r(2,3)$  sur l'intervalle  $[-1,+1]$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Qr(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000844624	0.0000425279	0.0000006199	0.0000000000
0.0003142340	0.0000758785	0.0000011593	0.0000000000
0.0003287900	0.0003714084	0.0000002215	0.0000000000
0.0001975407	0.0003096888	0.0000001100	0.0000000000
0.0004165322	0.0002257387	0.0000003013	0.0000000000
0.0002730611	0.0003412503	0.0000002702	0.0000000000
0.0002491844	0.0000946460	0.0000001449	0.0000000000
0.0003247084	0.0002024526	0.0000000369	0.0000000000
0.0002322805	0.0005017510	0.0000000063	0.0000000000
0.0000506296	0.0005945674	0.0000001308	0.0000000000
0.0003815409	0.0002487194	0.0000004158	0.0000000000
0.0003471496	0.0004140791	0.0000009359	0.0000000000
0.0004785518	0.0004363400	0.0000034440	0.0000000000
0.0001123708	0.0006539551	0.0000022414	0.0000000000

Erreur de l'approximation de  $Qr(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000000000	0.0000338098	0.0000006199	0.0000000000
0.0000000000	0.0001735112	0.0000011593	0.0000000000
0.0000000000	0.0000243152	0.0000002215	0.0000000000
0.0000000000	0.0002331947	0.0000001100	0.0000000000
0.0000000000	0.0000996963	0.0000003013	0.0000000000
0.0000000000	0.0001858590	0.0000002702	0.0000000000
0.0000000000	0.0000939594	0.0000001449	0.0000000000
0.0000000000	0.0001719488	0.0000000369	0.0000000000
0.0000000000	0.0001732769	0.0000000063	0.0000000000
0.0000000000	0.0000741839	0.0000001308	0.0000000000
0.0000000000	0.0000769017	0.0000004158	0.0000000000
0.0000000000	0.0001319233	0.0000009359	0.0000000000
0.0000000000	0.0000574445	0.0000034440	0.0000000000
0.0000000000	0.0000323815	0.0000022414	0.0000000000

Erreur de l'approximation de  $Qr(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000000000	0.0000179094	0.0000006199	0.0000000000
0.0000000000	0.0001262171	0.0000011593	0.0000000000
0.0000000000	0.0000259971	0.0000002215	0.0000000000
0.0000000000	0.0002034314	0.0000001100	0.0000000000
0.0000000000	0.0001045090	0.0000003013	0.0000000000
0.0000000000	0.0001577368	0.0000002702	0.0000000000
0.0000000000	0.0001158659	0.0000001449	0.0000000000
0.0000000000	0.0001795324	0.0000000369	0.0000000000
0.0000000000	0.0001601355	0.0000000063	0.0000000000
0.0000000000	0.0000391417	0.0000001308	0.0000000000
0.0000000000	0.0001201312	0.0000004158	0.0000000000
0.0000000000	0.0001390476	0.0000009359	0.0000000000
0.0000000000	0.0001702342	0.0000034440	0.0000000000
0.0000000000	0.0002356624	0.0000022414	0.0000000000

Les figures 5-32, 5-33 et 5-34 montrent les approximations de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2], [10,8] et [14,12] de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  sur l'intervalle  $[-1,+1]$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

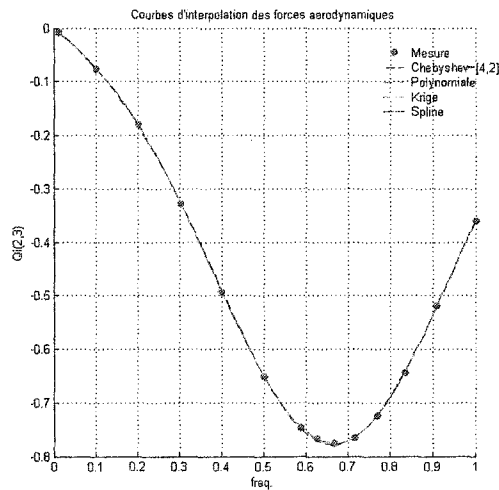


Figure 5-31 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2]

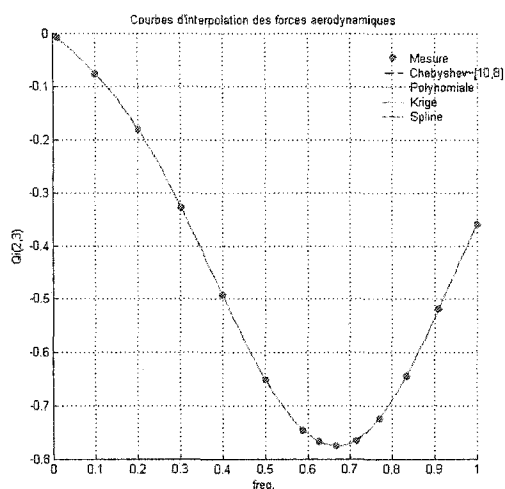


Figure 5-32 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8]

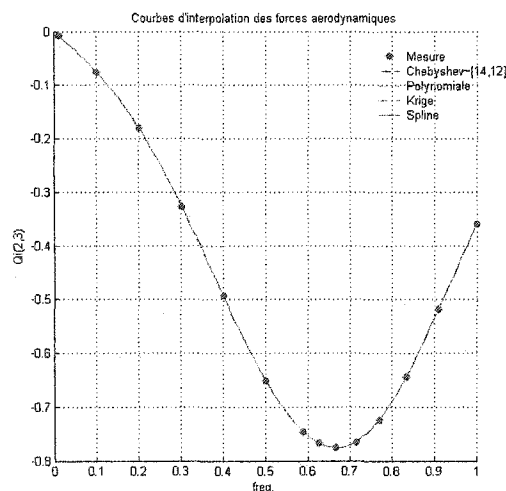


Figure 5-33 Approximation de  $Q_i(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12]

Les erreurs commises par les approximations de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2], [10,8] et [14,12] de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  sur l'intervalle  $[-1, +1]$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000962655	0.0002119475	0.0000001445	0.0000000000
0.0003862260	0.0001560421	0.0000000977	0.0000000000
0.0005137380	0.0010969165	0.0000001119	0.0000000000
0.0000135892	0.0001799605	0.0000000890	0.0000000000
0.0004156814	0.0014541232	0.0000000274	0.0000000000
0.0000661509	0.0001258067	0.0000000411	0.0000000000
0.0002491578	0.0016065297	0.0000000631	0.0000000000
0.0002369849	0.0017028347	0.0000000300	0.0000000000
0.0001178365	0.0011954127	0.0000000501	0.0000000000
0.0000929820	0.0000591510	0.0000000828	0.0000000000
0.0002894656	0.0011930085	0.0000000295	0.0000000000
0.0002216952	0.0013090858	0.0000002447	0.0000000000
0.0003612218	0.0005031942	0.0000003620	0.0000000000
0.0000894142	0.0014218320	0.0000000021	0.0000000000

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000000000	0.0000029716	0.0000001445	0.0000000000
0.0000000000	0.0000237112	0.0000000977	0.0000000000
0.0000000000	0.0000322905	0.0000001119	0.0000000000
0.0000000000	0.0000637254	0.0000000890	0.0000000000
0.0000000000	0.0000155655	0.0000000274	0.0000000000
0.0000000000	0.0000789136	0.0000000411	0.0000000000
0.0000000000	0.0000140910	0.0000000631	0.0000000000
0.0000000000	0.0000368419	0.0000000300	0.0000000000
0.0000000000	0.0000757468	0.0000000501	0.0000000000
0.0000000000	0.0000693076	0.0000000828	0.0000000000
0.0000000000	0.000011361	0.0000000295	0.0000000000
0.0000000000	0.0000688951	0.0000002447	0.0000000000
0.0000000000	0.0000000357	0.0000003620	0.0000000000
0.0000000000	0.0000543440	0.0000000021	0.0000000000

Erreur de l'approximation de  $Q_i(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000000000	0.0000029093	0.0000001445	0.0000000000
0.0000000000	0.0000059249	0.0000000977	0.0000000000
0.0000000000	0.0000322947	0.0000001119	0.0000000000
0.0000000000	0.0000519717	0.0000000890	0.0000000000
0.0000000000	0.0000130847	0.0000000274	0.0000000000
0.0000000000	0.0000677630	0.0000000411	0.0000000000
0.0000000000	0.0000048103	0.0000000631	0.0000000000
0.0000000000	0.0000404185	0.0000000300	0.0000000000
0.0000000000	0.0000708310	0.0000000501	0.0000000000
0.0000000000	0.0000551771	0.0000000828	0.0000000000
0.0000000000	0.0000167790	0.0000000295	0.0000000000
0.0000000000	0.0000722605	0.0000002447	0.0000000000
0.0000000000	0.0000463993	0.0000003620	0.0000000000
0.0000000000	0.0000551946	0.0000000021	0.0000000000

Les figures 5-35, 5-36 et 5-37 montrent les approximations de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2], [10,8] et [14,12] de l'élément  $Q(2,3)$  sur l'intervalle  $[-1,+1]$  comparées à d'autres méthodes d'approximations.

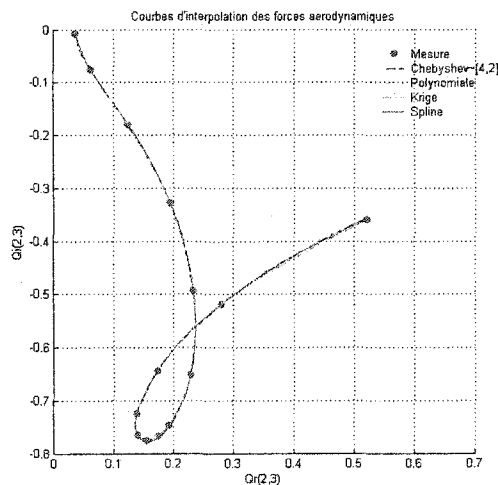


Figure 5-34 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2]



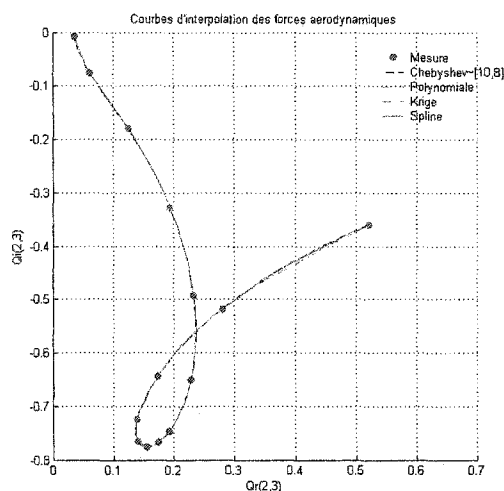


Figure 5-35 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre  $[10,8]$

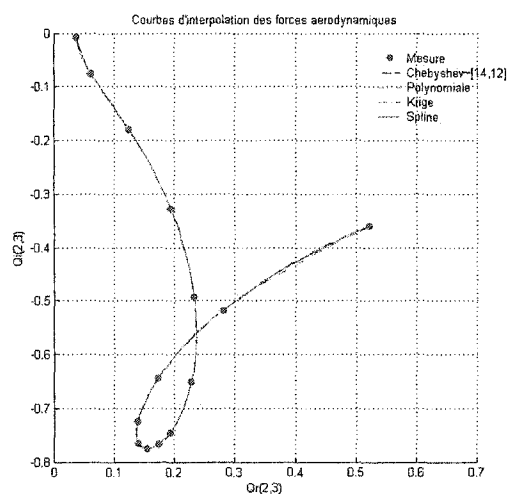


Figure 5-36 Approximation de  $Q(2,3)$  par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre  $[14,12]$

Les erreurs commises par les approximations de Padé-Chebyshev d'ordre  $[4,2]$ ,  $[10,8]$  et  $[14,12]$  de la partie imaginaire de  $Q(2,3)$ , donc de l'élément  $Q_i(2,3)$  sur l'intervalle  $[-1,+1]$  comparées à d'autres méthodes d'approximations sont :

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [4,2]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000948040	0.0001981868	0.0000002616	0.0000000000
0.0003775835	0.0001480385	0.0000004292	0.0000000000
0.0004934861	0.0010313945	0.0000001316	0.0000000000
0.0000725860	0.0002017450	0.0000000920	0.0000000000
0.0004157928	0.0013580681	0.0000001120	0.0000000000
0.0001164634	0.0001702927	0.0000001050	0.0000000000
0.0002491613	0.0014980827	0.0000000788	0.0000000000
0.0002502240	0.0015891609	0.0000000310	0.0000000000
0.0001383136	0.0011291157	0.0000000468	0.0000000000
0.0000885971	0.0002220748	0.0000000906	0.0000000000
0.0003031140	0.0011158197	0.0000001530	0.0000000000
0.0002418485	0.0012295599	0.0000004083	0.0000000000
0.0003786547	0.0004949566	0.0000012910	0.0000000000
0.0000927432	0.0013464582	0.0000008110	0.0000000000

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [10,8]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000000000	0.0000125424	0.0000002616	0.0000000000
0.0000000000	0.0000665558	0.0000004292	0.0000000000
0.0000000000	0.0000313620	0.0000001316	0.0000000000
0.0000000000	0.0001031888	0.0000000920	0.0000000000
0.0000000000	0.0000388804	0.0000001120	0.0000000000
0.0000000000	0.0000996700	0.0000001050	0.0000000000
0.0000000000	0.0000364451	0.0000000788	0.0000000000
0.0000000000	0.0000710637	0.0000000310	0.0000000000
0.0000000000	0.0000944294	0.0000000468	0.0000000000
0.0000000000	0.0000699652	0.0000000906	0.0000000000
0.0000000000	0.0000278438	0.0000001530	0.0000000000
0.0000000000	0.0000800215	0.0000004083	0.0000000000
0.0000000000	0.0000207839	0.0000012910	0.0000000000
0.0000000000	0.0000519993	0.0000008110	0.0000000000

Erreur de l'approximation de  $Q(2,3)$  Par une fraction rationnelle de Padé-Chebyshev d'ordre [14,12]

Polynomiale	Chebyshev	Krige	Spline
0.0000000000	0.0000070245	0.0000002616	0.0000000000
0.0000000000	0.0000459993	0.0000004292	0.0000000000
0.0000000000	0.0000315419	0.0000001316	0.0000000000
0.0000000000	0.0000881187	0.0000000920	0.0000000000
0.0000000000	0.0000397312	0.0000001120	0.0000000000
0.0000000000	0.0000851339	0.0000001050	0.0000000000
0.0000000000	0.0000421604	0.0000000788	0.0000000000
0.0000000000	0.0000750941	0.0000000310	0.0000000000
0.0000000000	0.0000878472	0.0000000468	0.0000000000
0.0000000000	0.0000533528	0.0000000906	0.0000000000
0.0000000000	0.0000461935	0.0000001530	0.0000000000
0.0000000000	0.0000840774	0.0000004083	0.0000000000
0.0000000000	0.0000752640	0.0000012910	0.0000000000
0.0000000000	0.0000995877	0.0000008110	0.0000000000

Tableau II

Comparaison de l'erreur  $\varepsilon$  d'approximation  
calculée par les polynômes de Padé-Chebyshev

Padé-Chebyshev	Ordre [4,2]	Ordre [10,8]	Ordre [14,12]
Intervalle [0,1]	$\varepsilon = 0.0084766$	$\varepsilon = 0.00054742$	$\varepsilon = 0.00056751$

On constate à première vue que l'erreur de l'approximation par les polynômes de Chebyshev est très petite par rapport à l'approximation de Padé. On constate aussi qu'elle est moins sensible aux variations de l'ordre de l'approximation comparativement à l'approximation par les fractions rationnelles de Padé.

Le graphique suivant donne la variation de l'erreur d'approximation en fonction de l'ordre de l'interpolation et du point où l'interpolation est calculée.

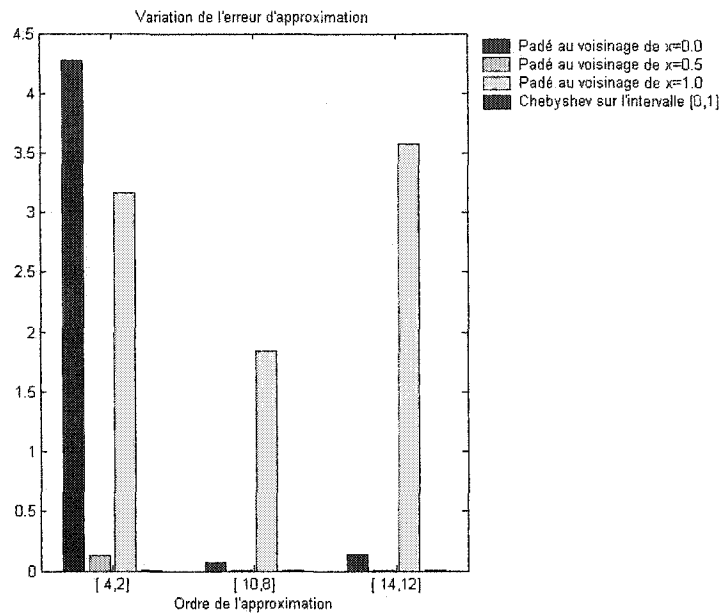


Figure 5-37 Variation de l'erreur d'approximation en fonction de la méthode d'approximation utilisée

### 5.3 Résultats numériques sur la réduction de l'ordre du système

Les résultats obtenus par la méthode d'interpolation de Padé sont très bons pour des systèmes d'ordre très élevés qui ne peuvent être facilement réalisable car les systèmes aéroélastiques doivent être des systèmes stables de type BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) dont l'entrée et la sortie sont bornées dans le temps et par conséquent doivent avoir des pôles dont la partie réelle est strictement négative. La stabilité est facilement vérifiée par le critère de Routh-Hurwitz. Ceci nous a amené à penser à la méthode de réduction de l'ordre de Luus-Jakola présenté au chapitre 4 pour essayer de trouver un système équivalent de taille très petite qui peut-être facilement réalisable.

La démarche suivie consiste à présenter la fonction de transfert obtenue par l'approximation de Padé en entrée dans l'algorithme de Luus-Jakola qui va générer une fonction de transfert équivalente mais d'ordre plus petit.

Le même élément  $Q(2,3)$  est utilisé comme précédemment à titre d'exemple pour illustrer les résultats obtenus et confirmer les résultats énoncés.

La fonction de transfert du système original est de la forme suivante :

$$Q(s) = \frac{194480s^7 + 482964s^6 + 511812s^5 + 278376s^4 + 82402s^3 + 13285s^2 + 1086s + 35}{9600s^8 + 28880s^7 + 37492s^6 + 27470s^5 + 11870s^4 + 3017s^3 + 437s^2 + 33s + 1} \quad (5.4)$$

L'algorithme de Luus-Jakola réduit cette fonction de transfert à un système réduit équivalent dont la fonction de transfert est donnée par la forme suivante :

$$Q_{\text{réduit}}(s) = \frac{20.26s^2 + 22.97s + 15.88}{s^3 + 1.658s^2 + 1.36s + 0.4734} \quad (5.5)$$

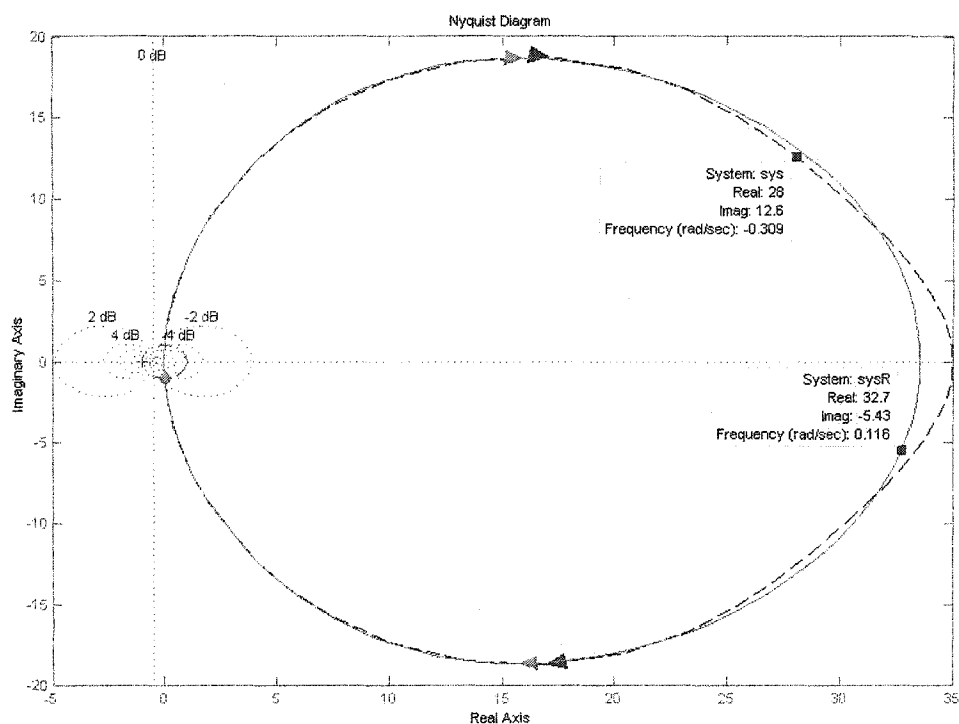


Figure 5-38 Courbes de Nyquist des systèmes original et réduit

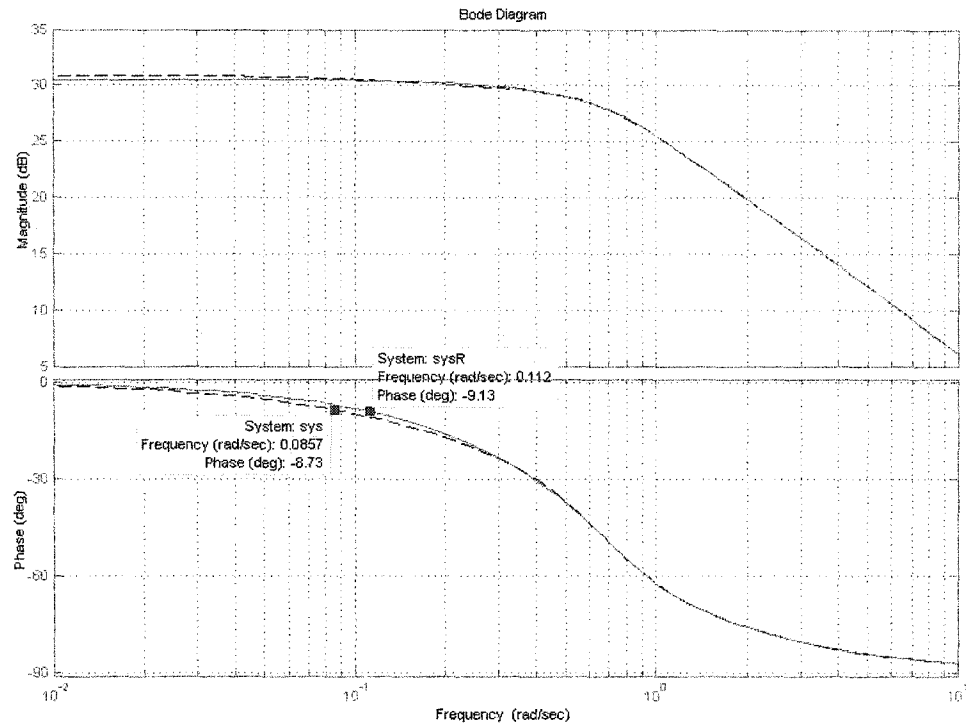


Figure 5-39 Courbes de Bode des systèmes original et réduit

On remarque que le modèle réduit obtenu par la méthode de Luus-Jakola possède les mêmes propriétés que le système original (en ligne pointillée).

#### 5.4 Résultats numériques de l'analyse de battement

Le battement aéroélastique est un phénomène d'instabilité destructive en aéronautique. Pour cela l'étude de la stabilité de l'avion permet de définir une enveloppe de vol dans laquelle l'avion sera dans une zone de stabilité à l'abri des battements aéroélastiques.

Le seuil de battement est le point critique pour lequel l'avion se trouve exposé à la menace de battements. Le seuil de battement est calculé par la méthode classique  $pk$  d'analyse de battement.

#### 5.4.1 Boucle ouverte (Méthode $pk$ )

L'analyse de battement étudiée dans cette partie concerne le modèle ATM, illustré dans l'annexe A, dans une boucle ouverte pour lequel on a fait la conversion des forces aérodynamiques. Nous allons considérer seulement le cas où l'approximation de Padé est calculée au voisinage de  $x=0.5$  car c'est la meilleure approximation obtenue.

Les résultats obtenus par le programme  $pk$  sont de la forme suivante :

1<sup>er</sup> cas : Approximation de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=0.5$

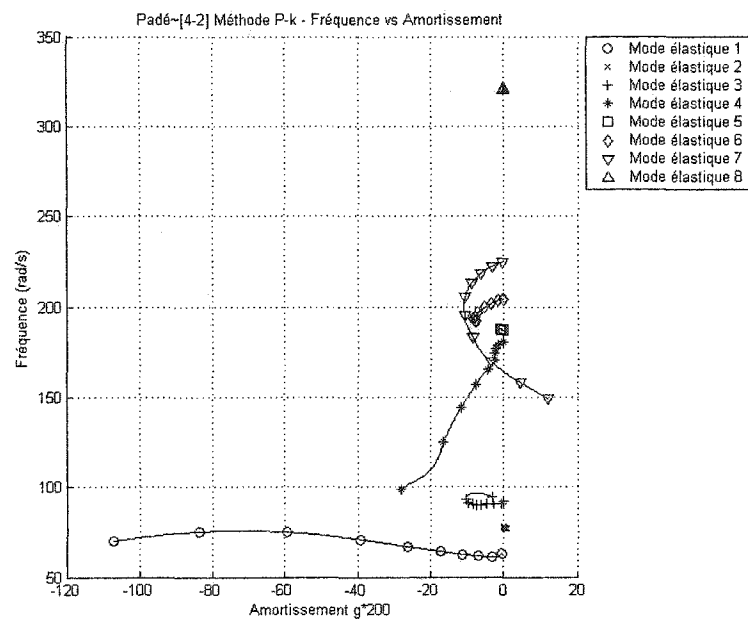


Figure 5-40 Méthode  $pk$  - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [4,2]

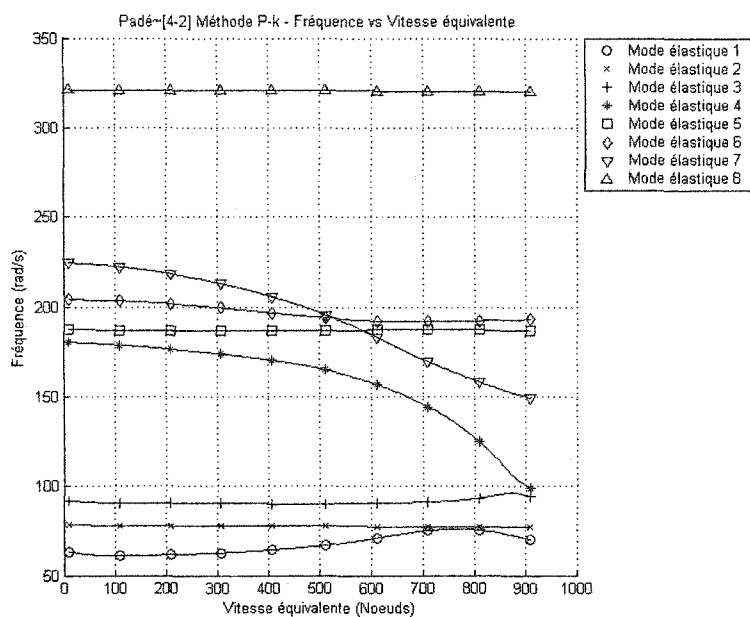


Figure 5-41 Méthode  $pk$  - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2]

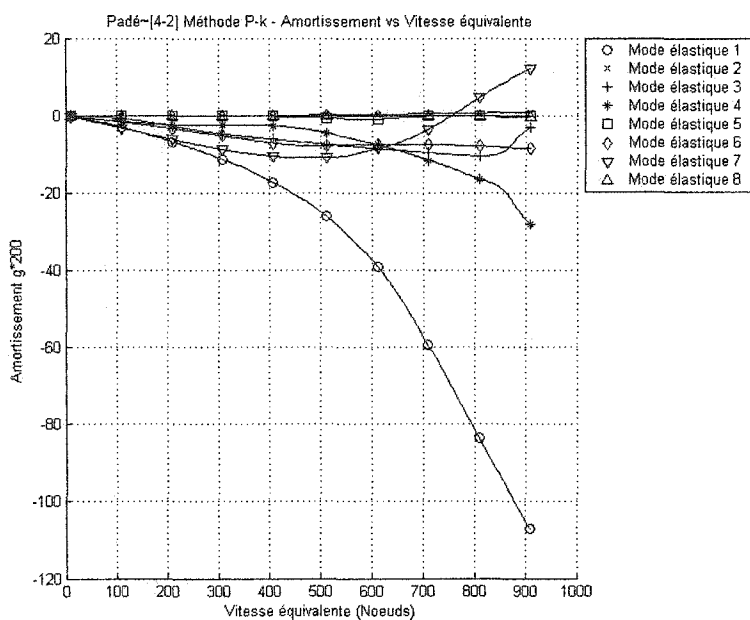


Figure 5-42 Méthode  $pk$  - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2]



### Battement 1

Vitesse (Nœuds) : 446.0532

Mode : 2

Fréquence : 77.5905

### Battement 2

Vitesse (Nœuds) : 756.2379

Mode : 7

Fréquence : 163.996

2<sup>e</sup> cas : Approximation de Padé d'ordre [8,6] au voisinage de  $x=0.5$

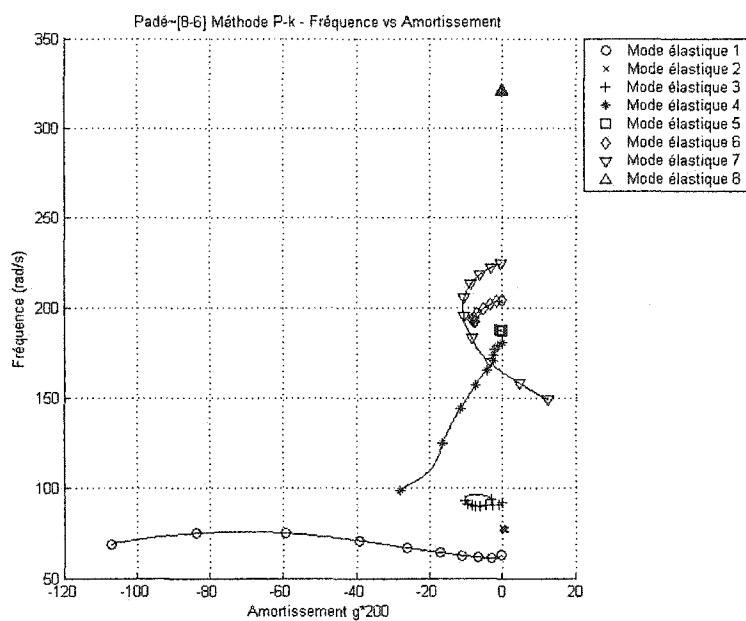


Figure 5-43 Méthode  $pk$  - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [8,6]

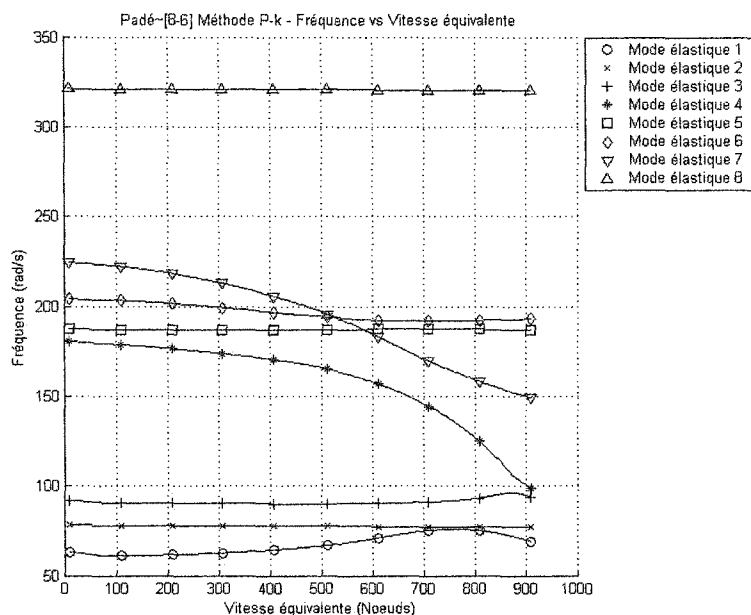


Figure 5-44 Méthode  $pk$  - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6]

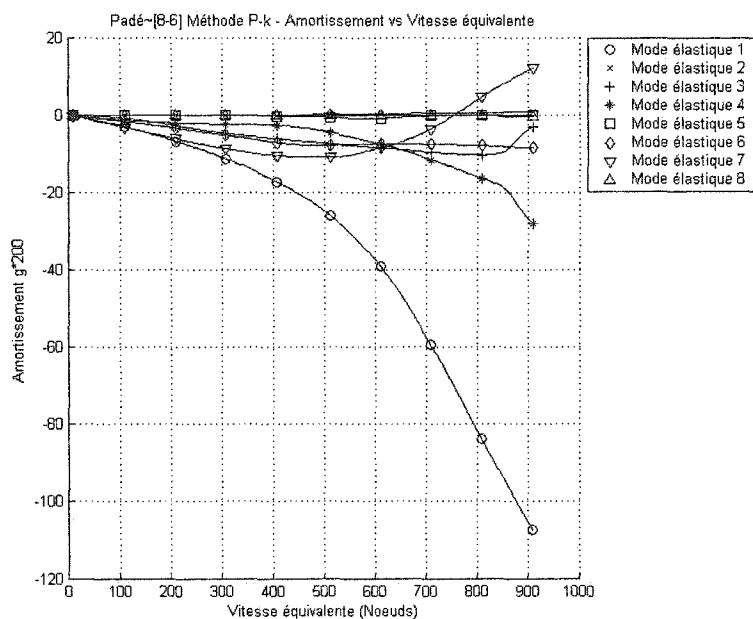


Figure 5-45 Méthode  $pk$  - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6]

## Battement 1

Vitesse (Noeuds) : 445.5543

Mode : 2

Fréquence : 77.5917

## Battement 2

Vitesse (Noeuds) : 756.252

Mode : 7

Fréquence : 163.9953

Les résultats obtenus avec la méthode d'approximation de Padé sont comparés aux résultats des méthodes d'approximations classiques tel que la méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires telles que les méthodes LS et MS et la compilation se trouve dans le tableau suivant :

Tableau III

Comparaison de battements en boucle ouverte  
selon les méthodes d'approximation

	Option	Battement 1		Battement 2	
		Vitesse	Fréquence	Vitesse	Fréquence
<b>LS</b>	2 Lags	453,37	77,55	914,72	137,57
	3 Lags	451,92	77,55	929,52	136,51
	4 Lags	443,11	77,55	883,84	139,17
	5 Lags	442,90	77,56	896,59	138,55
	6 Lags	441,92	77,56	885,22	138,45
<b>MS</b>	2 Lags	448,83	77,56	938,62	127,69
	3 Lags	443,42	77,57	912,34	134,87
	4 Lags	445,96	77,56	930,33	134,65
	5 Lags	444,15	77,56	919,25	137,33
	6 Lags	444,39	77,55	907,22	135,80
<b>Notre Méthode</b>	[4,2]	445,05	77,59	762,24	163,33
	[5,3]	445,54	77,59	765,25	163,99
	[6,4]	445,55	77,59	762,11	163,34
	[7,5]	445,55	77,59	756,25	163,99
	[8,6]	445,55	77,59	765,25	163,99

On constate que notre méthode utilisant l'approximation de Padé est meilleure que les méthodes LS et MS, c'est-à-dire que les vitesses de battement convergent plus vite dans le cas de notre méthode.

#### 5.4.2 Boucle fermée (Méthode $p$ )

L'analyse de battement étudiée dans cette partie concerne le modèle ATM dans une boucle fermée pour lequel on a fait la conversion des forces aérodynamiques. Nous allons considérer seulement le cas où l'approximation de Padé est calculée au voisinage de  $x=0.5$

Les résultats obtenus par le programme  $p$  sont de la forme suivante :

1<sup>er</sup> cas : Approximation de Padé d'ordre [4,2] au voisinage de  $x=0.5$

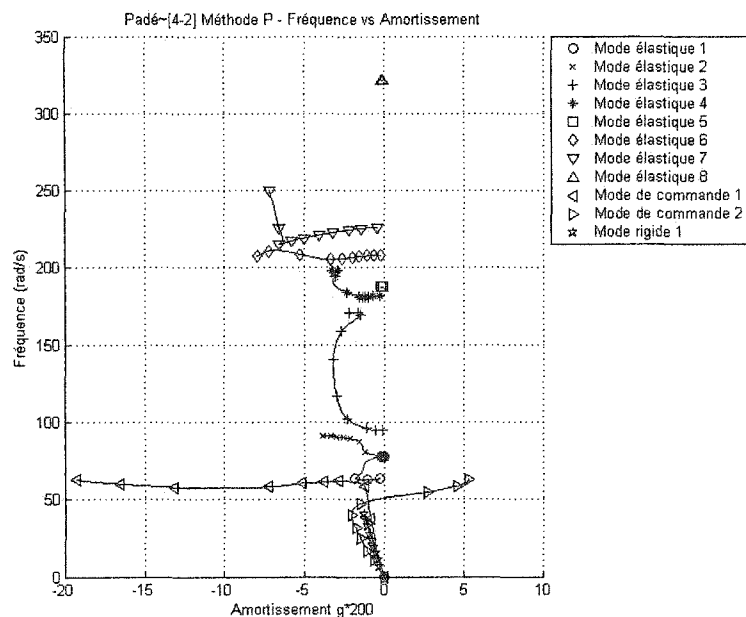


Figure 5-46 Méthode  $p$  - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [4,2]

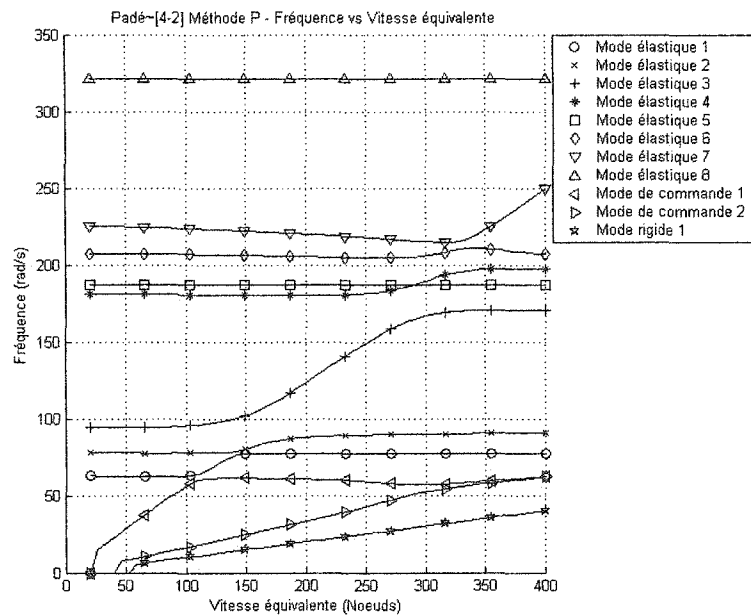


Figure 5-47 Méthode  $p$  - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2]

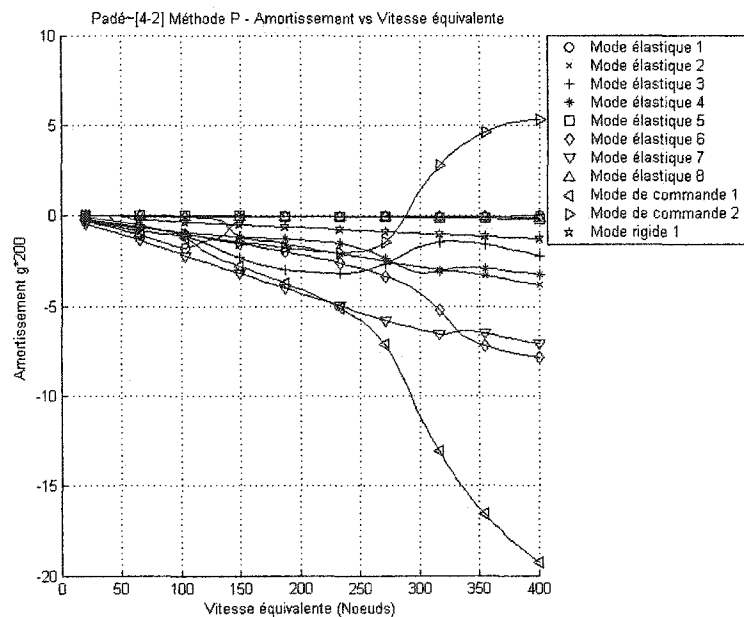


Figure 5-48 Méthode  $p$  - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [4,2]

### Battement 1

Vitesse (Noeuds) : 287.61  
 Mode : Commande 1  
 Fréquence : 51.10

2<sup>e</sup> cas : Approximation de Padé d'ordre [8,6] au voisinage de  $x=0.5$

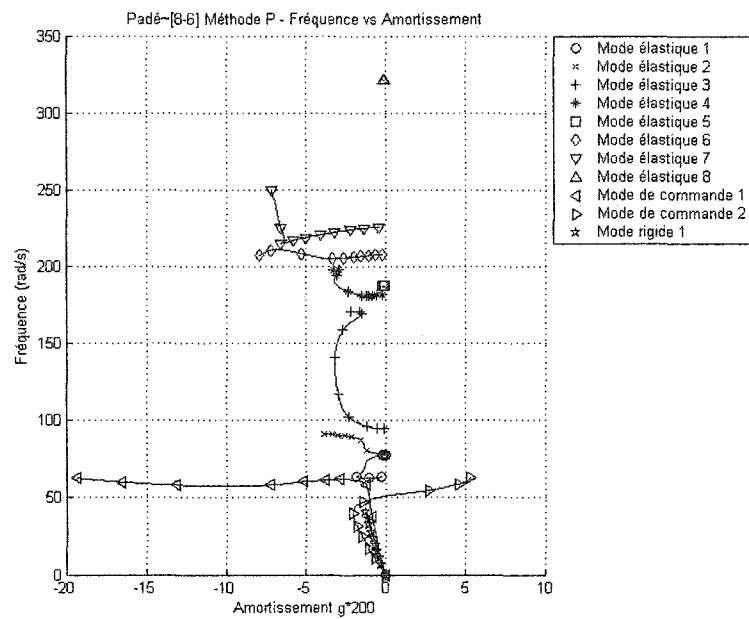


Figure 5-49 Méthode  $p$  - Courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement pour une approximation de Padé d'ordre [8,6]

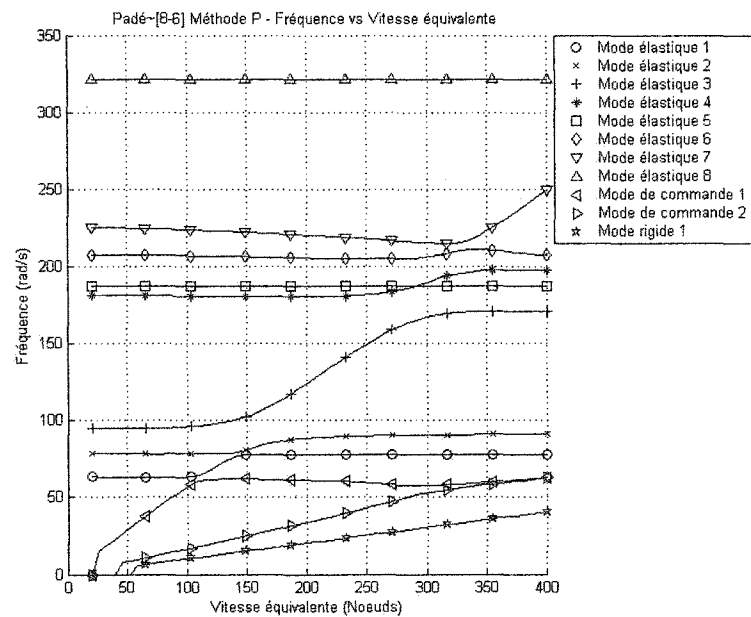


Figure 5-50 Méthode  $p$  - Courbe de la fréquence en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6]

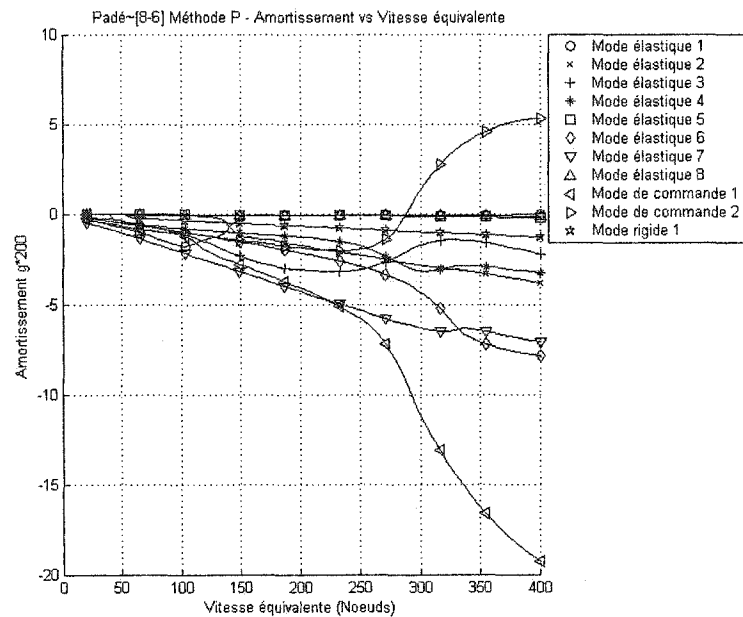


Figure 5-51 Méthode  $p$  - Courbe de l'amortissement en fonction de la vitesse équivalente pour une approximation de Padé d'ordre [8,6]

Battement 1

Vitesse (Noeuds) : 287.72

Mode : Commande 2

Fréquence : 51.15

Tableau IV

Comparaison de battements en boucle fermée  
selon les méthodes d'approximation

	Option	Battement 1	
		Vitesse	Fréquence
<b>LS</b>	2 Lags	262,84	51,74
	3 Lags	260,17	50,76
	4 Lags	260,01	51,18
	5 Lags	261,71	51,44
	6 Lags	260,98	51,17
<b>MS</b>	2 Lags	261,27	51,54
	3 Lags	261,52	51,52
	4 Lags	260,80	51,28
	5 Lags	260,97	51,39
	6 Lags	262,00	51,67
<b>Notre Méthode</b>	[4,2]	287,72	51,15
	[5,3]	287,66	51,13
	[6,4]	287,61	51,11
	[7,5]	287,61	51,12
	[8,6]	287,61	51,10



## CONCLUSION

Ce travail nous a permis d'explorer la méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires et leur conversion du domaine fréquentiel au domaine temporel en utilisant une approche par identification. Cette méthode permet de mettre chaque élément de la matrice forces aérodynamiques non stationnaires sous forme d'une fonction de transfert. La fonction de transfert obtenue par la méthode Padé est souvent d'ordre élevé qui n'est pas toujours réalisable au point de vue stabilité. Afin de pouvoir réaliser cette fonction de transfert, on procède à une réduction de son ordre par la méthode de réduction de Luus Jaakola à l'aide d'algorithme de recherche opérationnel qui est fiable pour les petits systèmes mais qui ne garanti pas forcément des résultats fiables pour des systèmes de grandes dimensions.

L'étude menée dans le cadre de ce travail est publiée dans un article de conference<sup>34</sup> et nous a permis de constater que les résultats obtenus par la méthode d'approximation de Padé sont de très bonne qualité comparés aux méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires telles que les méthodes LS et MS.

Des travaux futurs pourraient apporter des améliorations à cette méthode d'approximation et la rendre plus efficace. On citera entre autre l'utilisation des polynômes de Chebyshev au lieu des polynômes de Padé pour garantir une erreur minimale et uniforme sur tout l'intervalle de fréquence pour lequel on veut réaliser l'approximation des forces aérodynamique. À l'aide d'algorithmes d'optimisation tel que l' algorithme de Rémès et de la méthode Differential Correction Algorithm (DCA) qui ont la propriété de produire des approximations rationnelles minimales en ordre (Degré du numérateur et du dénominateur). Ces algorithmes ont l'avantage de minimiser dans l'espace des fonctions continues l'erreur d'approximation et permettent l'obtention de bornes rigoureuses des erreurs de troncature. La réduction du modèle peut se faire

avec d'autres méthodes de réduction de la dimension utilisées de façon systématique dans le design des contrôleurs pour des systèmes de grande taille (ordre  $>1000$ ). Il existe plusieurs algorithmes permettant la réduction de l'ordre du modèle dont le LRSRM (Low Rank Square Root Method) et LRSM (Low Rank Schur Method).

## **ANNEXE**

### **LE MODÈLE DE TEST DE L'AVION ATM**

## Le banc de test STARS

Le logiciel STARS, développé par la NASA, est un ensemble de routines qui permettent de mener une analyse multidisciplinaire sur les systèmes linéaires et non linéaires, sur le calcul des éléments finis, sur le transfert de chaleur, l'aérodynamique et sur le contrôle.

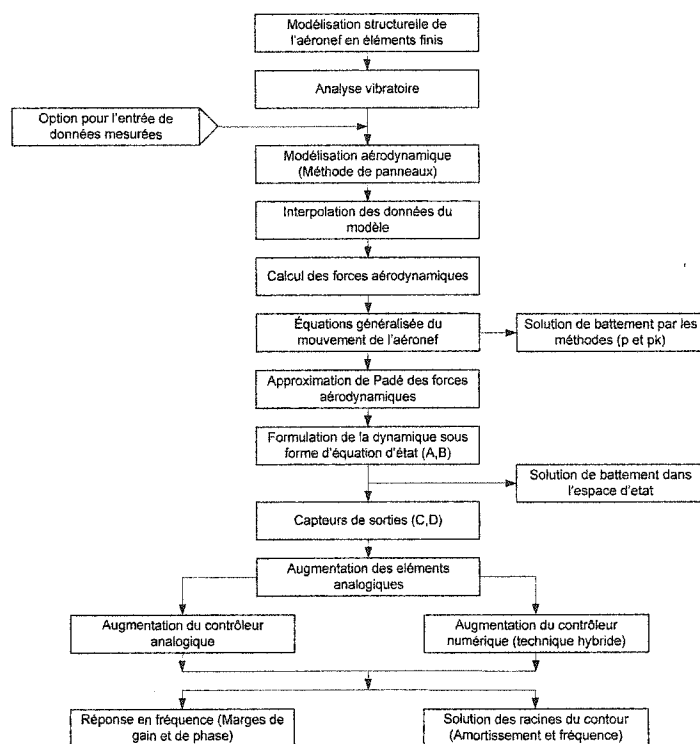


Figure A-1 Architecture du logiciel STARS

## Le modèle structurel ATM

L'avion étant symétrique par rapport à son plan longitudinal, il a suffi alors de modéliser en éléments finis seulement la moitié de l'avion comme suit :

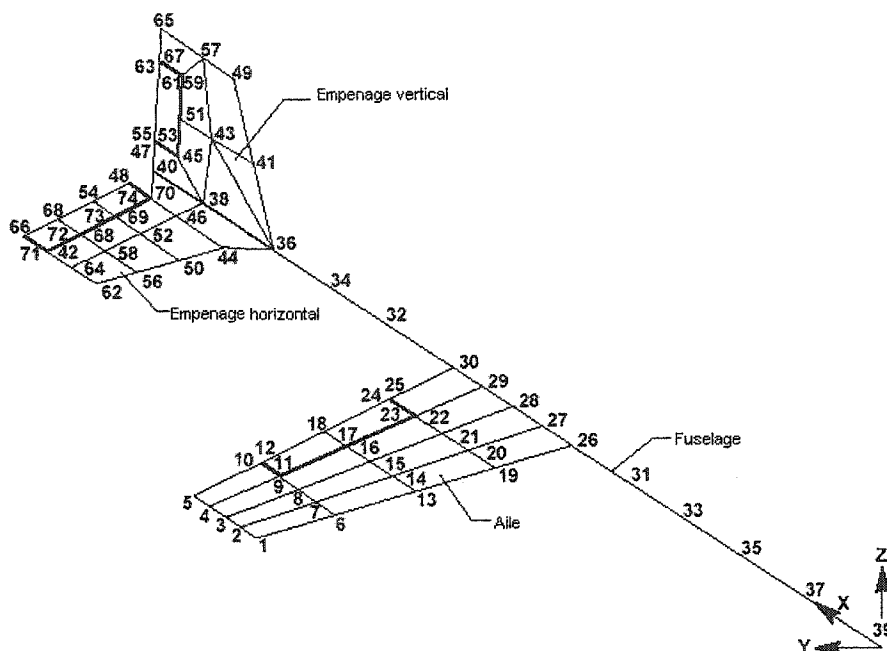


Figure A-2 Modélisation de l'ATM à l'aide d'éléments finis

## L'analyse vibratoire

L'analyse vibratoire permet de calculer les degrés de liberté indépendants  $\eta$  du modèle de l'avion et elle permet aussi de trouver la matrice de forme  $\Phi$ .

Le modèle ATM généré par STARS donne 13 degrés de liberté :

- 3 modes rigides
- 8 modes élastiques
- 2 modes de commande

La figure suivante illustre les huit modes élastiques correspondent aux déformations structurelles qui découlent de la flexibilité de l'avion, où la flexion est notée par B (Bending) et la torsion par (Torsion).

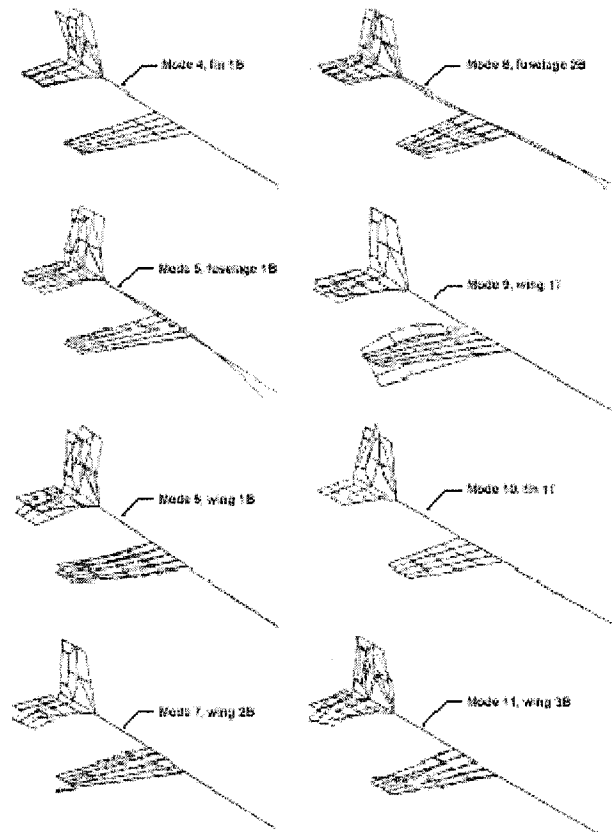


Figure A-3 Les modes élastique de l'ATM

La figure suivante illustre les trois modes rigides correspondant aux déplacements rigides autour du centre de gravité de l'avion (translation, roulis et lacet) et les deux modes de commandes correspondant aux déplacements angulaires des ailerons et de la gouverne de direction.

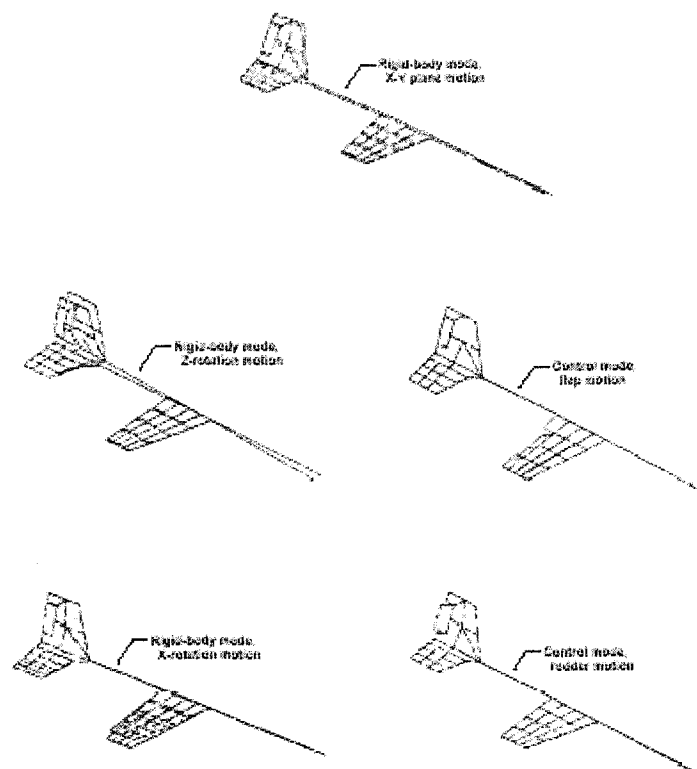


Figure A-4 Les modes rigides et de commande de l'ATM

### La méthode DLM

Les forces aérodynamiques sont calculées sur l'avion par la méthode des doublets (*DLM*). Le modèle d'avion est formé par des panneaux dans lesquels les forces aérodynamiques non-stationnaires seront calculées. La méthode des doublets (*DLM*) est utilisée pour générer les forces aérodynamiques. Pour un nombre de Mach  $M$  et une fréquence réduite  $k$ , les forces aérodynamiques pour tous les panneaux sont regroupées pour former une matrice  $Q$  qui dépend du nombre de Mach  $M$  et de la fréquence réduite  $k$ .

À l'aide de la matrice de forme  $\Phi$ , la matrice des forces aérodynamiques généralisées dans l'espace des modes est transposée pour obtenir la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées  $Q$  qui dépend du nombre de Mach  $M$  et de la fréquence réduite  $k$ . Le modèle aérodynamique de l'avion ATM est représenté à la Figure A-5.

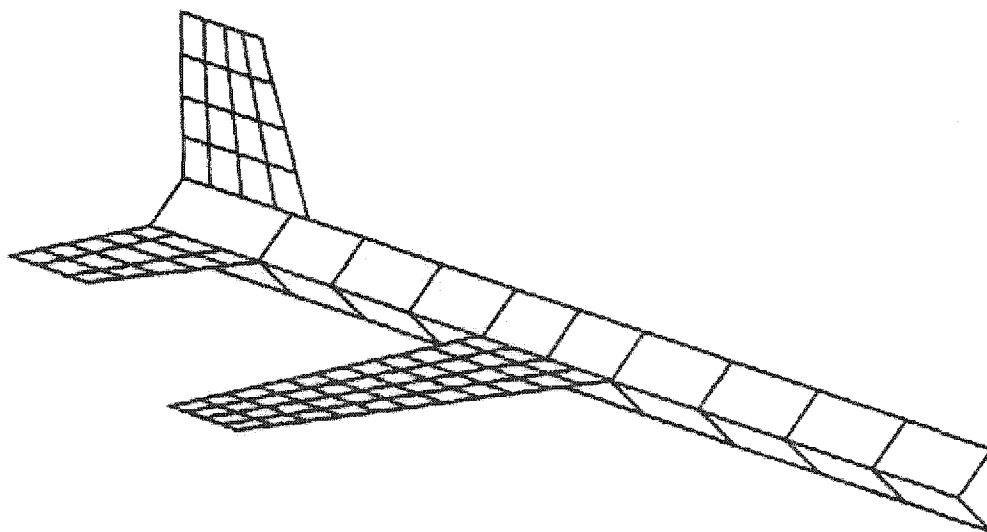


Figure A-5 Modélisation aérodynamique par *DLM*



## Modèle aéroservoélastique

Le banc de test d'avion ATM comprend aussi tous les éléments qui caractérisent un système aéroservoélastique et qui constituent les lois de contrôle. Ces deux lois de contrôle relient les capteurs de roulis et de lacet aux ailerons et aux gouvernes de direction.

Chaque loi de contrôle incorpore la dynamique des capteurs, les filtres, les contrôleurs et la dynamique des actionneurs. Le schéma bloc des lois de contrôle du modèle ATM est présenté à la Figure A-6.

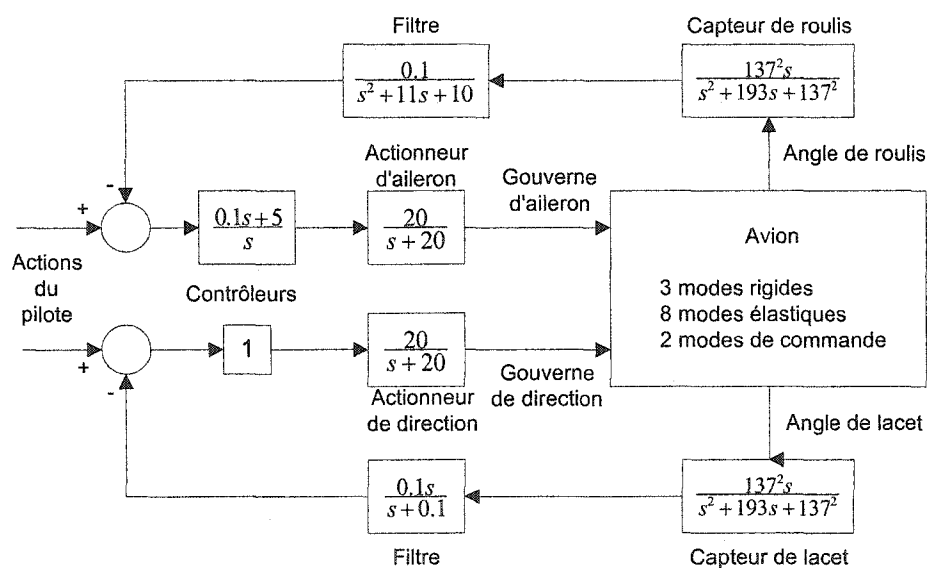


Figure A-6 Boucles de contrôle du modèle ATM

## BIBLIOGRAPHIE

1. Barfield, A.F., Felt, L.R., 1976, Aeroservoelasticity – A merging of technologies, Society of Flight Test Engineers, 7th Annual Symposium.
2. Neill, D.J., Herendeen, D.L., Hoesly, R.L., 1995, ASTROS Enhancements. Volume 2: ASTROS Programmer's Manual, Universal Analytics INC Torrance CA.
3. Nam, C., Chen, P.C., Liu, D.D., Chattopadhyay, 2000, ASTROS\* with smart structures and ASE modules: application to flutter suppression and gust-load alleviation, AIAA 2000-1365, pp. 257-266.
4. Luo, X., Grandhi, R.V., 1997, ASTROS for reliability-based multidisciplinary structural analysis and optimization, Computers & Structures, Vol. 62, No. 4, pp. 737-745.
5. Adams, W.M., Jr., Tiffany, S.H., 1993, ISAC: A tool for aeroservoelastic modeling and analysis, NASA TM 109031.
6. Noll, T., Blair, M., Cerra, J., 1986, ADAM, An Aeroservoelastic Analysis Method For Analog or Digital Systems, Journal of Aircraft, Vol. 23, No. 11, pp. 852-858.
7. Pitt, D.M., Goodman, C.E., 1992, FAMUSS: A New Aeroservoelastic Modeling Tool, AIAA-92-2395-CP.
8. P. C. Chen, Sulaeman, E., Liu, D.D., Denegri, C.M. Jr., "Influence of external store aerodynamics on flutter / LCO of a fighter aircraft, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, CO, USA," AIAA, pp. 1-11, 22-25, 2002.
9. Gupta, K.K., 1997, STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program, NASA TM-4795, pp.1-285.
10. K. K. Gupta and J. L. Meek, Finite element multidisciplinary analysis. Reston, Va.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
11. Newsom, J.R., Adams, W.M., Jr., Mukhopadhyay, V., Tiffany, S.H., Abel, I., 1984, Active Controls: A Look at Analytical Methods and Associated Tools, Proceedings of the 14th ICAS Congress, Toulouse, France. ICAS 84-4.2.3, pp. 230- 242.
12. Rodden, W.P., Harder, R.L., Bellinger, E.D., 1979, Aeroelastic Addition to NASTRAN, NASA CR-3094.
13. Roger, K.L., 1977, Airplane Math Modeling and Active Aeroelastic Control Design, AGARD, CP-228, 1977, pp.1-11.
14. Vepa, R., 1977, Finite State Modeling of Aeroelastic Systems, NASA CR 2770.
15. Karpel, M., 1998, Reduced-Order Models for Integrated Aeroservoelastic Optimization, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.

16. Dowell, E.H., 1995, A Modern course in aeroelasticity, Dordrech, Pays-Bas, Kluwer Academic
17. Roger, K.L., 1977, Airplane Math Modeling and Active Aeroelastic Control Design, AGARD, CP-228, 1977, pp.1-11.
18. Gupta, K.K., 1997, STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program, NASA TM-4795, pp.1-285.
19. Vepa, R., 1977, Finite State Modeling of Aeroelastic Systems, NASA CR 2770
20. Tiffany, S.H., Adams, W.M., Jr., 1987, Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximations of Unsteady Aerodynamics, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
21. Dunn, H.J., 1980, An Analytical Technique for Approximating Unsteady Aerodynamics in the Time Domain, NASA TP-1738.
22. Karpel, M., Nov. 1981, Design for Active and Passive Flutter Suppression and Gust Alleviation, NASA Contractor Report 3482.
23. Roger, K.L., 1977, Airplane Math Modeling and Active Aeroelastic Control Design, AGARD, CP-228, 1977, pp.1-11.
24. Poirion, F., 1995, Modélisation temporelle des systèmes aéroservoélastiques. Application à l'étude des effets des retards, La Recherche Aérospatiale, No. 2, pp. 103-114.
25. Poirion, F., 1996, Multi-Mach Rational Approximation to Generalized Aerodynamic Forces, Journal of Aircraft, Vol. 33, No. 6, pp. 1199-1201.
26. Botez, R.M., Bigras, P., 1999, Optimization of Generalized Aerodynamic Unsteady Forces for the Aeroservoelasticity, EAHE, Prague.
27. Botez, R.M., Bigras, P., 1999, Aerodynamic Approximation of the Unsteady Forces for the Aeroservoelasticity Study, 46th CASI Canadian Aeronautics and Space Institute Annual Conference, Montréal, Canada, 2-5 May, pp. 155-161.
28. Botez, R.M., Biskri, D., Cotoi, I., Hamza, D., Herda, M., 2003, Unsteady aerodynamic forces methods for aeroservoelasticity studies, International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD 2003, Amsterdam, Holland, 4-6 June.
29. Cotoi, I., Botez, R.M., 2002, Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions, AIAA, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 25, No. 5, pp. 985-987.
30. Cotoi, I., Botez, R.M., 2001, Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis, Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications CA2001, Banff, Canada, pp. 105-108.
31. Luus, R., 2000, Iterative Dynamic Programming, Ed. Chapman & Hall / CRC, Boca Raton London New York, pp. 44-54.
32. Botez, R.M., Cotoi, I., Dinu, A.D., 2002, The Luus-Jakola Model Reduction Procedure Applied to Aeroservoelastic Systems, 27th Annual Congress of the

- American-Romanian Academy of Arts and Science, May 28th – June 4th 2002, Oradea.
33. A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs. Montréal: Presses internationales Polytechnique, 2001.
  34. Jozef Bartkovjak – Margarita Karovičová, Approximation by Rational Functions. measurement science review, Volume 1, Number 1, 2001
  35. D. Hamza, 2003, Simulation de la conversion des forces aérodynamiques pour l'avion à commande électrique fly-by-wire, Thèse de maîtrise, Bibliothèque de l'ÉTS.