

**ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

**COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MATRÎSE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE  
M. ING.**

**PAR  
FRANCIS PÉLOQUIN**

**TECHNOLOGIE EN CONTRÔLE ACTIF :  
OPTIMISATION D'UN SYSTÈME DE CONTRÔLE  
D'AÉRONEF UTILISANT LA COMMANDE CLASSIQUE**

**MONTRÉAL, LE 30 MARS 2001**

**© droits réservés de Francis Péloquin**

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

**M. Jean de Lafontaine, directeur de mémoire et professeur au Département de génie électrique et de génie informatique à l'Université de Sherbrooke**

**Mme Ouassima Akhrif, codirectrice et professeur au Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure**

**M. Maarouf Saad, maître de conférence et professeur au Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure**

**M. Louis-A. Dessaint, professeur au Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure**

**IL A FAIT L'OBJET D'UNE PRÉSENTATION DEVANT CE JURY ET UN PUBLIC  
LE 27 FÉVRIER 2001  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

# TECHNOLOGIE EN CONTRÔLE ACTIF : OPTIMISATION D'UN SYSTÈME DE CONTRÔLE D'AÉRONEF UTILISANT LA COMMANDE CLASSIQUE

Francis Péloquin

## Sommaire

Le sujet de recherche fait partie d'un programme de développement de technologie en contrôle actif pour avion. Les systèmes de contrôle sont conçus de façon à procurer à l'avion la stabilité et les caractéristiques de vol désirées. Récemment, une nouvelle technologie 'fly-by-wire' a été introduite en aviation civile. En aviation civile, le fly-by-wire a été introduit initialement pour permettre des économies de poids en remplaçant les lourds systèmes mécaniques par des systèmes électriques légers et moins encombrants. Toutefois, les manufacturiers d'avions commerciaux, profitent maintenant du fly-by-wire pour optimiser les performances de leurs appareils, à l'aide de contrôleur plus élaboré. Ce travail présente une méthode qui permet l'échelonnement de deux gains d'un contrôleur préétabli en fonction de paramètres de vol, tel la pression dynamique, ainsi qu'en fonction de la dynamique de l'avion à tout instant. Le développement des équations de mouvement d'un avion considéré rigide est présenté. Les équations ainsi développées seront utilisables dans un contexte d'analyse. Les qualités de manœuvrabilité représentent la facilité avec laquelle un pilote peut opérer son appareil selon certaines conditions de vol. Le présent travail aborde huit critères de qualités de la manœuvrabilité. Certains de ces critères sont relatifs à tous les types de contrôleur; marge de gain, marge de phase, largeur de bande (bandwidth) et délai de phase. Les critères restants sont spécifiques à l'aviation; mode short period et phugoïde, le Dropback et le CAP. L'approche préconisée pour ce projet est de faire l'échelonnement direct de chacun des gains du contrôleur en fonction des paramètres de vol et de la dynamique de l'avion étudiée. Deux méthodes d'approximation sont étudiées; analytique et numérique. La méthode analytique permet un échelonnement des gains à partir des paramètres aérodynamiques de l'avion (données de soufflerie) tandis que la méthode numérique permet un échelonnement à partir de données numériques (résultats de modélisation). À partir d'un modèle d'état numérique fourni par le client, un premier échelonnement est réalisé entre les paramètres de l'avion et la pression dynamique. Des modèles équivalents simplifiés sont évalués pour les composantes/actionneurs, ce qui permet la réduction de l'ordre du modèle. L'influence des composantes/actionneurs sur la dynamique globale du modèle est ensuite évaluée. On obtient finalement une approximation du modèle en boucle ouverte d'ordre 2. Ces démarches permettent l'obtention d'un échelonnement des gains du contrôleur interne en fonction de la pression dynamique agissant sur l'avion. Les résultats sont toutefois sujets à limitation due à la simplification short period du modèle.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier de façon particulière mon directeur de mémoire, Dr. Jean de Lafontaine, qui m'a incité aux études supérieures et qui m'a offert un support académique et moral tout au long du projet.

Je voudrais également remercier ma codirectrice, Dr. Ouassima Akhrif ainsi que le Dr. Maarouf Saad, pour m'avoir accordé l'opportunité d'entreprendre ce projet au sein de l'équipe de recherche en ACT (Active Control Technologie).

Je me dois également d'exprimer ma gratitude envers les Fonds pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche (Fonds FCAR), la fondation J.A. Bombardier ainsi que les Bourses institutionnelles de l'ÉTS pour le support financier qu'ils m'ont accordé sous forme de bourses d'études.

Ce rapport est dédié à ma conjointe, Véronique Champagne.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
TABLE DES FIGURES.....	vii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE .....	4
CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DU TRAVAIL .....	7
CHAPITRE 3 ÉQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN AVION .....	11
3.1 Description physique d'un avion .....	11
3.1.1 Axes de l'avion .....	11
3.1.2 Principales forces s'exerçant sur un avion .....	12
3.1.3 Surfaces primaires de pilotage .....	12
3.2 Systèmes de références .....	13
3.3 Les équations de mouvement d'un avion rigide. ....	14
3.3.1 Mouvement en translation.....	14
3.3.2 Mouvement en rotation .....	15
3.3.3 Effet de la gravité.....	17
3.3.4 Transformation des référentiels.....	18
3.3.5 Linéarisation des termes inertiels et gravitationnels .....	19
3.4 Linéarisation complète des équations de mouvement.....	22
3.4.1 Expansion des termes aérodynamiques.....	22
3.4.2 Équations du mouvement longitudinal.....	23
3.5 Équations de mouvement dans le systèmes d'axes de stabilité.....	24
CHAPITRE 4 CRITÈRES DE QUALITÉ DE LA MANOEUVRABILITÉ .....	27
4.1 Marges de stabilité .....	27
4.1.1 Marge de gain.....	27
4.1.2 Marge de phase .....	28
4.2 Mode 'short period' et mode phugoïde.....	28
4.2.1 Mode 'short period'.....	29
4.2.2 Mode phugoïde.....	29
4.3 Largeur de bande (Bandwidth).....	30

4.4	Délai de phase .....	31
4.5	Dropback selon Gibson .....	32
4.6	Control Anticipation Parameter (CAP).....	32
CHAPITRE 5 ANALYSE DU CONTRÔLEUR.....		34
5.1	Analyse théorique du contrôleur client .....	34
5.1.1	Système SAS .....	35
5.1.2	Système CAS .....	36
5.2	Analyse pratique/numérique .....	37
CHAPITRE 6 RÉDUCTION DU MODÈLE ORIGINAL .....		38
6.1	Simplification des modèles composantes/actionneurs .....	38
6.1.1	Dynamique de l'assemblage manche-ordinateur. ....	39
6.1.2	Dynamique du servo-contrôleur.....	42
6.1.3	Dynamique du Gyroscope.....	45
6.2	Comparaison des systèmes dynamiques globaux .....	48
6.2.1	Comparaison des systèmes avec le lieu des racines.....	49
CHAPITRE 7 APPROXIMATION SHORT PERIOD ANALYTIQUE.....		54
7.1	Approximation analytique du modèle short period.....	55
7.1.1	Présentation de la méthode de l'approximation analytique. ....	55
7.1.2	Comparaison de la dynamique originale et approximée. ....	56
7.2	Échelonnement des paramètres de l'avion en fct. de la pression dynamique. ....	58
7.2.1	Dérivées de stabilité en fonction de la pression dynamique. ....	58
7.2.2	Fréquence et amortissement en fonction de la pression dynamique. ....	60
7.3	Approximation d'ordre 2 de la dynamique globale. ....	62
7.3.1	Modèle de l'avion simple.....	62
7.3.2	Modèle de l'avion avec le servo-contrôleur et le gyroscope.....	64
7.4	Limitation de l'approximation d'ordre 2 de la dynamique globale. ....	69
CHAPITRE 8 APPROXIMATION SHORT PERIOD NUMÉRIQUE.....		71
8.1	Approximation numérique du modèle short period. ....	72
8.1.1	Présentation de la méthode de l'approximation numérique. ....	72
8.1.2	Comparaison de la dynamique originale et approximée numérique. ....	72
8.2	Échelonnement de la dynamique de l'avion en fct. de la pression dyn. ....	73
8.3	Effet des composantes/actionneurs sur l'approximation d'ordre 2 de la dynamique globale.....	75
8.4	Limitation de l'approximation d'ordre 2 de la dynamique globale. ....	78

CHAPITRE 9 ÉCHELONNEMENT DES GAINS DE LA BOUCLE INTERNE .....	81
9.1 Boucle interne du contrôleur.....	82
9.2 Validation des résultats. ....	86
CONCLUSION .....	89
Annexe 1 Données et fichiers de simulations. ....	94
BIBLIOGRAPHIE .....	106

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.1 : Six degrés de liberté.....	11
Figure 3.2 : Systèmes de référence.....	14
Figure 3.3 : Effet de la gravité dans le référentiel structural .....	18
Figure 3.4 : Orientation du vent relatif par rapport au référentiel structural .....	25
Figure 3.5 : Référentiel de stabilité par rapport au vent relatif .....	26
Figure 4.1 : Marge de gain et marge de phase.....	28
Figure 4.2 : Bandwidth et délai de phase. ....	31
Figure 4.3 : Dropback selon Gibson.....	32
Figure 5.1 : Contrôleur de l'avion .....	34
Figure 6.1 : Dynamique originale de l'assemblage manche-ordinateur.....	39
Figure 6.2 : Dynamique simplifiée de l'assemblage manche-ordinateur .....	39
Figure 6.3 : Comparaison des dynamiques manche-ordinateur pour une entrée échelon .....	42
Figure 6.4 : Dynamique originale du servo-contrôleur .....	43
Figure 6.5 : Dynamique simplifiée du servo-contrôleur .....	43
Figure 6.6 : Comparaison des dynamiques servo-contrôleur pour une entrée échelon.....	45
Figure 6.7 : Dynamique originale du gyroscope .....	46
Figure 6.8 : Dynamique simplifiée du gyroscope .....	46
Figure 6.9 : Comparaison des dynamiques gyroscope pour une entrée échelon.....	48
Figure 6.12 : Comparaison du lieu des racines pour le modèle original et simplifié .....	50
Figure 6.13 : Comparaison de la réponse à l'échelon unitaire .....	51
Figure 6.14 : réponse à l'échelon unitaire, mode short period .....	52
Figure 6.15 : réponse à l'échelon unitaire, régime permanent .....	52
Figure 7.1 : Lieu des racines du système original vs. simplifié analytique.....	57
Figure 7.2 : Dérivées de stabilité en fonction de la pression dynamique .....	59
Figure 7.3 : Fréquence du mode short period en fct. de la pression dynamique .....	61
Figure 7.4 : Amortissement du mode short period en fct de la pression dynamique .....	61
Figure 7.5 : Agencement des dynamiques.....	64
Figure 7.6 : Lieu de racines pour la dynamique en série.....	66
Figure 7.7 : Relation entre la translation de zéro <sub>q</sub> et la pression dynamique.....	68

Figure 7.8 : Relation entre la translation de zéro_w et la pression dynamique.....	68
Figure 7.9 : Comparaison du modèle global ordre 2 avec le modèle de référence .....	69
Figure 8.1 : Lieu des racines du système original vs. simplifié numérique .....	73
Figure 8.2 : Paramètres dynamiques en fonction de la pression dynamique.....	74
Figure 8.3 : Zéros de $\frac{q}{\delta_e}$ avec l'ajout des dynamiques des composantes .....	76
Figure 8.4 : Zéros de $\frac{w}{\delta_e}$ avec l'ajout des dynamiques des composantes .....	77
Figure 8.5 : Comparaison de la rétroaction sur $q$ .....	79
Figure 8.6 : Comparaison de la rétroaction sur $w$ .....	80
Figure 9.1 : Boucle interne du contrôleur (système SAS).....	82
Figure 9.2 : Plage du gain $H_q$ en fonction de la pression dynamique.....	85
Figure 9.3 : Plage du gain $H_w$ en fonction de la pression dynamique .....	85
Figure 9.4 : Modèle pour la validation des résultats .....	87

## **INTRODUCTION**

Le sujet de recherche fait partie d'un programme de développement de technologie en contrôle actif (Active Control System) pour avion. Les systèmes de contrôle sont conçus de façon à procurer à l'avion la stabilité et les caractéristiques de vol désirées.

Les systèmes de commande d'avions classiques sont composés d'éléments mécaniques simples (levier, poulie, câble) qui relient directement le pilote à la surface de commande primaire (élevateur, ailerons et gouverne de direction). Les systèmes de commande doivent donc être créés de façon à ce que le pilote puisse surpasser les forces aérodynamiques agissant sur les surfaces de commande. Les plus gros appareils sont équipés d'unités hydrauliques qui déplacent les surfaces, les forces aérodynamiques étant trop élevées pour permettre le contrôle direct par le pilote. Le maillage mécanique reste toutefois le même, un assemblage câble-poulie transmet la commande du pilote jusqu'à l'unité hydraulique (située près de la surface à contrôler). L'effort du pilote étant pratiquement éliminé, un ressort est ajouté à l'assemblage pour reproduire une résistance à la commande. Les systèmes de contrôle de performance de l'avion sont coûteux à introduire sur de tel type de système de commandes (poids et espace) car ils utilisent des éléments mécaniques complexes.

Il y a quelques années, un des principaux manufacturiers d'avions commerciaux (Airbus) a introduit une technologie jusque là réservée à l'aviation militaire, le 'fly-by-wire'. Cette technologie élimine les assemblages mécaniques reliant le pilote aux surfaces de commandes, les remplaçant par des signaux électriques. En effet, les commandes du pilote sont transmises par signaux électriques directement aux actionneurs de chacune des surfaces. Cette nouvelle approche permet d'importantes économies d'espace et de poids, mais facilite aussi énormément la mise en place de systèmes de contrôle sophistiqués qui améliorent sensiblement les performances de l'appareil.

Le net avantage du 'fly-by-wire' provient du fait qu'il est plus facile d'additionner deux signaux électriques que deux signaux mécaniques. Ainsi, il est possible d'ajouter un contrôleur entre la commande du pilote et la commande de surface, le contrôleur servant à optimiser les performances de l'avion en fonction de divers paramètres; pression dynamique, configuration des volets de bord (flaps), angle d'attaque, position du stabilisateur, etc.

Les avions équipés de systèmes de commande mécaniques sont principalement assortis de deux systèmes de commande simple; l'amortisseur du mouvement de lacet (yaw damper) et le régulateur d'angle d'attaque (stab trim ou mach trim). Le système 'fly-by-wire' permet l'implantation de contrôleurs plus complexes qui agissent sur plus d'un axe et qui répondent à des critères de performance plus élaborés.

L'approche conventionnelle dans la conception de contrôle d'avion consiste à utiliser la théorie classique du contrôle linéaire même si la dynamique de vol d'un avion est non-linéaire. Les équations non-linéaires sont évaluées à certains points d'opération ce qui permet une linéarisation du système.

La méthode classique a toutefois quelques inconvénients : l'importante quantité de points d'opération demande des méthodes numériques complexes pour calculer les gains et les faire varier selon les conditions de vol.

Le projet se divise donc en trois parties :

1. L'analyse du système de contrôle utilisé par le client.
2. Le développement de techniques rapides et efficaces pour le calcul des gains.
3. Le développement de techniques pour gérer la variation des gains selon les conditions de vol.

L'objectif général de ce projet de recherche est, pour chacun des points de l'enveloppe de vol, que le système de contrôle agisse de façon à ce que la dynamique de l'avion satisfasse aux critères de qualité (associés à la manœuvrabilité) définis par le client, et ce, en réduisant le temps de calcul afin de maximiser l'efficacité du système. Il va sans dire que la solution devra être physiquement réalisable.

La réalisation du projet passe par la simplification du modèle fourni par le client. À partir du modèle simplifié, des corrélations sont recherchées entre les paramètres aérodynamiques de l'avion et ses performances dynamiques. Une fois la ou les corrélations identifiées, il devient possible de contrôler la dynamique de l'avion afin d'obtenir les performances désirées, selon certains critères établis par l'industrie aéronautique.

## **CHAPITRE 1**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

Avec l'avènement des systèmes de contrôle fly-by-wire, les possibilités de respecter différents critères de qualité de la manœuvrabilité ont sensiblement augmentées, et ces avantages ont été exploités par l'aviation militaire en particulier. En aviation civile, le fly-by-wire a été introduit initialement pour permettre des économies de poids en remplaçant les lourds systèmes mécaniques par des systèmes électriques légers et moins encombrants. Toutefois, les deux principaux manufacturiers d'avions commerciaux, Airbus et Boeing, profitent maintenant du fly-by-wire pour optimiser les performances de leurs appareils [13] en introduisant des contrôleurs élaborés afin de respecter des critères de manœuvrabilité plus complexes [9, 13].

Les problèmes associés à la conception de systèmes de contrôle d'avion sont généralement reliés à des événements de courte durée : la dynamique considérée dure rarement plus que quelques secondes. En conséquence, divers systèmes de références (géographique, 'body frame', vent, stabilité) sont définis [11]. On considère que l'avion est rigide; la distance entre tout point de l'avion ne change pas en cours de vol. En appliquant la seconde loi de Newton au corps rigide, les équations de mouvement peuvent être définies en fonction des accélérations en translation et en rotation dues aux forces et moments appliqués sur l'avion. On procède ensuite à la linéarisation des équations et aux simplifications nécessaires pour appliquer les équations dans un contexte d'analyse [6, 7, 8, 10, 11].

Les qualités de manœuvrabilité représentent la facilité avec laquelle un pilote peut opérer son appareil selon certaines condition de vol. Les critères de qualité de la manœuvrabilité ont été définis afin de traduire quantitativement les données qualitatives éprouvées par le pilote. Le présent travail aborde huit (8) critères de qualités de la

manœuvrabilité. Certains de ces critères sont relatifs à tous les types de contrôleur : marge de gain, marge de phase, largeur de bande (bandwidth) et délai de phase [1-5]. Parmi les critères restants, on retrouve les critères classiques : mode short period et mode phugoïde [10-11]. Avec le fly-by-wire est apparue de nouveaux type de contrôleurs et de nouveaux critères : le Dropback [9] et le CAP (control anticipation parameter) [9, 13].

La plupart des appareils hautes performances ne rencontrent pas les qualités de manœuvrabilité exigées sans l'ajout d'un contrôleur. Le contrôleur permet certains ajustements aux performances de l'avion, sans avoir à modifier physiquement la géométrie ou les composantes de l'appareil. Dans le cadre du projet, le client a fourni un modèle de contrôleur pour la dynamique longitudinale. Ce type de contrôleur est standard et peut être séparé en deux systèmes; le SAS ('stability augmentation system') et le CAS ('control augmentation system') [10].

Plusieurs travaux ont déjà été publiés sur les contrôleurs d'avion à haute performances, utilisant plusieurs approches différentes. L'une d'elle est l'utilisation d'un contrôleur à paramètres variables [12], contrôleur qui s'ajuste continuellement en fonction d'une dynamique désirée. Certains utilisent une approche avec un modèle non-linéaire multi-entrées et multi-sorties [15] tandis que d'autres ne considèrent pas l'avion comme étant rigide [14]. Toutefois, toutes ces approches sont utilisées pour concevoir un contrôleur qui répond aux différents critères de qualité de manœuvrabilité. Dans le cas présent, la structure du contrôleur est déjà définie et l'on doit ajuster les cinq gains de façon à optimiser les performances en tout temps. Pour cette raison, différentes méthodes d'optimisation ont été étudiées par d'autres membres du groupe de recherche; algorithmes génétiques, logique floue et autres méthodes multi-paramètres. Ces méthodes permettent l'optimisation des gains selon chacune des conditions de vol mais rencontrent un problème majeur : l'évolution des gains dans l'enveloppe de vol selon différents paramètres de vol (pression dynamique, Mach, altitude, angle d'attaque) est

fortement non-linéaire. On revient donc à l'utilisation d'une table de données pour faire l'échelonnement des gains.

L'approche préconisée pour ce projet est de faire l'échelonnement des paramètres aérodynamiques de l'avion en fonctions des paramètres de vol et de la dynamique de l'avion étudiée. Une référence démontre que la dynamique de la période courte (short period) d'un avion peut être extraite à partir de la pression dynamique dans laquelle l'avion évolue [12]. Ainsi, en connaissant la dynamique de l'avion en tout temps, il est possible de modifier son contrôleur afin que la dynamique globale respecte certains critères de qualité de manœuvrabilité.

## **CHAPITRE 2**

### **PRÉSENTATION DU TRAVAIL**

Le présent travail traite d'une méthode d'optimisation pour un contrôleur de dynamique longitudinale d'un avion. Cet effort s'insère dans une démarche afin de créer un contrôleur qui, pour tout point de l'enveloppe de vol, respecte certains critères de qualité de manœuvrabilité, et qui est adapté à un système de commande 'fly-by-wire'. Ce travail est séparé en plusieurs chapitres concernant différents points d'intérêts pour cette étude.

Dans un premier temps, un chapitre traite de la description physique d'un avion, les systèmes de référence, les équations de translation et de rotation d'un avion rigide, la linéarisation des équations et les simplifications nécessaires pour appliquer les équations dans un contexte d'analyse. Ce chapitre permet de relier un modèle longitudinal analytique de l'avion au modèle numérique fourni par le client.

Ensuite, un chapitre est dédié à la définition des critères de qualités de la manœuvrabilité. Les qualités de la manœuvrabilité représentent la facilité avec laquelle un pilote peut opérer son appareil selon certaines conditions de vol. Les qualités de la manœuvrabilité dépendent non seulement de la dynamique de l'avion, mais aussi de son système de contrôle et des informations perçues (visuelles, mouvements) par le pilote. Les critères de qualité de la manœuvrabilité ont été définis afin de traduire quantitativement les données qualitatives éprouvées/fournies par le pilote. Le contrôleur permet d'ajuster la dynamique longitudinale de l'avion afin de respecter les différents critères de qualité de la manœuvrabilité.

Dans le cadre de ce projet, le client a fourni un modèle de contrôleur pour la dynamique longitudinale. Un chapitre est consacré à l'analyse de ce contrôleur. Ce contrôleur, déjà

en utilisation, incorpore la dynamique du manche du pilote, des servo-élevateurs, des gyroscopes et de l'avion. L'ajustement de ce contrôleur est réalisable à l'aide de cinq gains. Ce type de contrôleur peut être séparé en deux systèmes : le SAS et le CAS. Chacun des systèmes a ses utilités précises dans l'ajustement des performances d'un avion.

Le chapitre 6 aborde la réduction de la dimension (ordre) du modèle d'état fourni par le client. Le modèle original est d'ordre quarante-quatre et le traitement numérique d'un tel système peut causer d'importantes erreurs. Pour débiter, des systèmes équivalents simplifiés seront calculés pour la dynamique des composantes/actionneurs de l'appareil ; ordinateur du contrôleur, assemblage manche-élevateur et gyroscope. Cette simplification sera permise par le rassemblement des délais et gains de chacune des composantes/actionneurs, et par l'identification des pôles dominants à l'aide de la méthode des fractions partielles. Ensuite, le système dynamique global équivalent simplifié sera comparé au système dynamique global original.

Les deux chapitres suivants traitent de la simplification du modèle dynamique fourni par le client. Deux méthodes différentes sont préconisées; analytique et numérique. La méthode analytique est la plus couramment utilisée. Cette méthode a comme principal avantage de permettre la modélisation de la dynamique de l'avion à partir des dérivées de stabilité (données de soufflerie). Le coût de calcul est minime et la méthode bien documentée. Toutefois, la simplification analytique élimine certains effets de couplage et modifie sensiblement la dynamique short period de l'avion. La méthode numérique a pour avantage de conserver intacte la dynamique short period mais demande toutefois un traitement numérique plus complexe pour le calcul des valeurs propres (eigenvalues) de la dynamique.

Le chapitre 7 concerne la simplification analytique du modèle. Cette simplification permettra de développer une technique d'échelonnement analytique pour les paramètres

de la dynamique longitudinale d'un avion en fonction de la pression dynamique. À partir du modèle d'état obtenu précédemment, ainsi qu'à partir des données numériques fournies par le client, l'approximation short period (mode dominant de la dynamique d'un avion) analytique sera définie. L'approximation analytique sera ensuite comparée au modèle original pour en vérifier la validité. Un premier échelonnement sera réalisé entre les paramètres de l'avion et la pression dynamique. Cette première étape permettra d'estimer un modèle dynamique de l'avion à partir de la pression dynamique. Avec une définition simplifiée des modèles dynamiques de l'avion et de ses composantes, il est ensuite possible d'évaluer l'effet de la simplification sur la position des zéros du modèle. Il devient alors possible d'approximer un modèle dynamique d'ordre 2 complet en fonction de la pression dynamique et de la vitesse de l'avion.

Le chapitre 8 définit une méthode de simplification numérique du modèle dynamique fourni par le client. Cette simplification permettra de développer une technique d'échelonnement numérique pour les paramètres de la dynamique longitudinale d'un avion en fonction de la pression dynamique. À partir des données numériques fournies par le client, l'approximation short period numérique sera définie. L'approximation numérique sera ensuite comparée au modèle original pour en vérifier la validité. Un échelonnement sera réalisé entre la dynamique de l'avion (fréquence naturelle, amortissement et zéros) et la pression dynamique. Cette première étape permettra d'estimer un modèle dynamique de l'avion à partir de la pression dynamique. Il est ensuite possible d'évaluer l'effet de la simplification sur la position des zéros du modèle. On obtiendra alors deux relations de translation des zéros en fonction de la pression dynamique. À ce moment, il sera alors possible d'extraire un modèle dynamique d'ordre 2 complet en fonction de la pression dynamique.

Dans le dernier chapitre, on développe une technique permettant de d'échelonner les gains de la boucle interne d'un contrôleur pour la dynamique longitudinale d'un avion en fonction de la pression dynamique. Avec une définition simplifiée des modèles

dynamiques de l'avion et de ses composantes, il est possible d'évaluer une plage de gain du contrôleur qui permet de respecter certains critères de manœuvrabilité. À ce point, une technique sera définie pour évaluer directement les gains de la boucle interne du contrôleur en fonction de la pression dynamique appliquée à l'avion.

## CHAPITRE 3

### ÉQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN AVION

Ce chapitre réfère à l'ouvrage 'McLean' [11]. Dans ce chapitre est présentée la description physique d'un avion, les systèmes de référence, les équations de translation et de rotation d'un avion rigide, la linéarisation des équations et les simplifications nécessaires pour appliquer les équations dans un contexte d'analyse.

#### 3.1 Description physique d'un avion

##### 3.1.1 Axes de l'avion

Un avion en vol possède six (6) degrés de liberté; trois en translation et trois en rotation. Ces six degrés de liberté peuvent être représentés en fonction de trois axes tel que présenté à la figure 3.1. Ces trois axes se nomment; axe transversal, axe vertical et axe longitudinal.

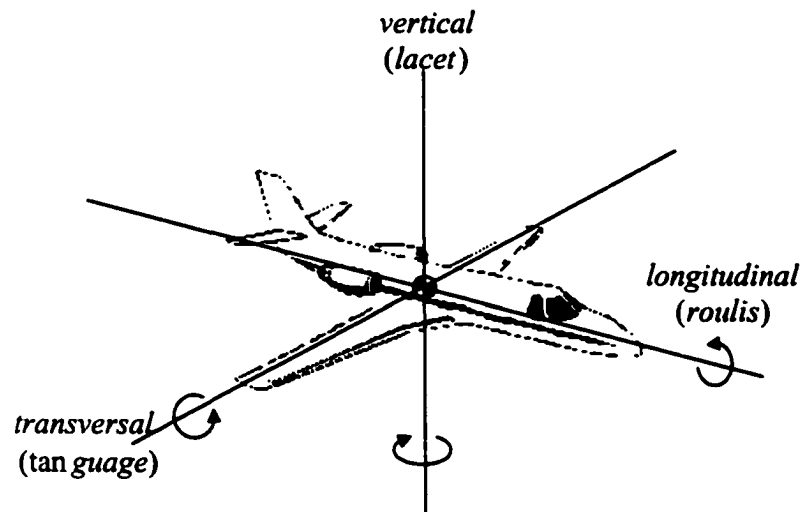


Figure 3.1 : Six degrés de liberté

L'axe longitudinal traverse le fuselage dans sa longueur, de la queue jusqu'au nez de l'appareil. Le mouvement de rotation autour de cet axe est appelé roulis (roll). L'axe transversal traverse l'avion dans sa largeur, d'un bout de l'aile à l'autre. Le mouvement de rotation autour de cet axe est appelé tangage (pitch). L'axe vertical traverse l'avion de haut en bas, en passant par le point de croisement entre l'axe longitudinal et l'axe transversal. Le mouvement de rotation autour de cet axe est appelé lacet (yaw).

### **3.1.2 Principales forces s'exerçant sur un avion**

Un avion en vol est soumis à quatre (4) forces principales : la portance (lift), la force de gravité, la traînée (drag) et la poussée (thrust). La portance est engendrée par les effets aérodynamiques sur l'avion. Cette force tend à soulever l'appareil. La force de gravité est due au poids total de l'avion. La force de gravité est dirigée vers le sol (vers le centre de la terre). La poussée est due aux moteurs de l'avion. Cette force entraîne la propulsion vers l'avant. Enfin, la traînée est une force due à la résistance de l'air, qui agit contre la poussée (vers l'arrière).

### **3.1.3 Surfaces primaires de pilotage**

Pour orienter un avion le long de sa trajectoire de vol, les accélérations nécessaires sont générées à partir du mouvement des principales gouvernes de l'avion. L'avion conventionnel possède trois principales gouvernes;

L'élévateur (gouvernail de profondeur) permet le mouvement de l'avion autour de l'axe transversal (tangage).

Le gouvernail de direction (rudder) permet le mouvement de l'avion autour de l'axe vertical (lacet).

Les ailerons permettent le mouvement de l'avion autour de l'axe longitudinal (roulis).

### 3.2 Systèmes de références

Le développement de la dynamique d'un avion demande une définition de quelques systèmes de référence. La position de l'avion (dans le ciel) doit être désignée par rapport à un système de référence géographique ('earth reference system') qui a son origine au centre de la terre. Toutefois, différents effets aérodynamiques ne sont pas fonctions de la position de l'appareil dans le ciel mais de son orientation par rapport à sa vitesse. Un deuxième référentiel est donc défini, ayant pour origine le centre de masse de l'avion ('body frame system'). La vitesse de l'avion n'étant pas nécessairement alignée avec le référentiel de l'appareil, on doit aussi définir le système de référence du vent ('wind axis') qui pointe dans la direction de la vitesse totale de l'avion. Finalement on définit un système d'axe dit de stabilité ('stability axis'). L'angle de rotation nécessaire à l'obtention du système de référence de stabilité à partir du système de référence de l'avion s'appelle angle d'attaque  $\alpha$ . Les quatre systèmes de références sont présentés à la figure 3.2.

L'orientation du référentiel de l'appareil ( $X_B$ ,  $Y_B$  et  $Z_B$ ) par rapport au référentiel géographique ( $X_E$ ,  $Y_E$  et  $Z_E$ ) dépend d'une série de trois rotations :

1. Une rotation  $\psi$  (lacet) du système géographique  $X_E$ ,  $Y_E$  et  $Z_E$  autour de  $Z_E$ , le référentiel devient  $X_1$ ,  $Y_1$  et  $Z_1$ .
2. Une rotation  $\theta$  (tangage) du système  $X_1$ ,  $Y_1$  et  $Z_1$  autour de  $Y_1$ , le référentiel devient  $X_2$ ,  $Y_2$  et  $Z_2$ .
3. Une rotation  $\phi$  (roulis) du système  $X_2$ ,  $Y_2$  et  $Z_2$  autour de  $X_2$ , le référentiel devient finalement  $X_B$ ,  $Y_B$  et  $Z_B$ .

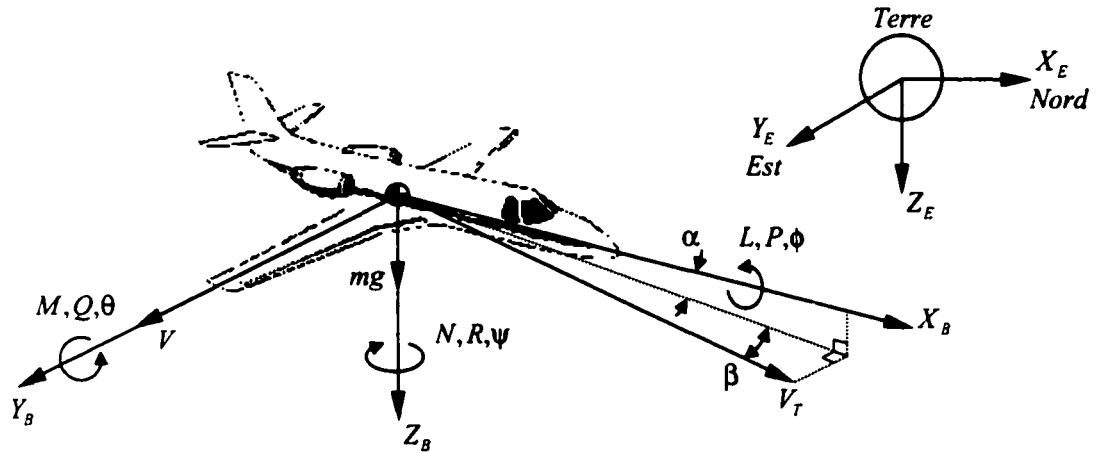


Figure 3.2 : Systèmes de référence

### 3.3 Les équations de mouvement d'un avion rigide.

Les équations subséquemment développées tiennent compte du fait que l'avion est considéré rigide : La distance entre n'importe quel point ne change pas en cours de vol. Lorsque l'avion est présumé rigide, son mouvement est considéré comme ayant six degrés de liberté. En appliquant la seconde loi de Newton, les équations du mouvement sont définies comme les accélérations en translation et en rotation de l'appareil qui sont dues à l'action de forces et de moments externes. Les équations suivantes sont développées selon le référentiel de l'avion (Body Frame  $X_B$ ,  $Y_B$  et  $Z_B$ ).

#### 3.3.1 Mouvement en translation

En translation, la seconde loi de Newton est définie comme étant :

$$F = ma = m \frac{d}{dt}(V_T)$$

La somme des forces externes  $F$  a trois composantes; la force de poussée (moteur), la force de gravité  $g$  et les forces aérodynamiques. En assumant la masse de l'avion

constante, on peut considérer la force de poussée comme étant une force externe. En perturbant et en utilisant le référentiel géographique, on peut exprimer :

$$\Delta F = m \frac{d}{dt} \{V_T\}_E$$

Par définition, un vol à l'équilibre doit être non-accélééré et rectiligne. La variation de  $V_T$  par rapport au référentiel géographique est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \{V_T\}_E = \frac{d}{dt} V_T|_B + \omega \times V_T$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire de l'avion par rapport au référentiel géographique. Les composantes de vitesse peuvent être décomposées en fonction du référentiel structural, on obtient alors :

$$V_T = iU + jV + kW$$

$$\omega = iP + jQ + kR$$

et le produit des deux donne :

$$\omega \times V_T = \begin{bmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{bmatrix} = i(QW - VR) + j(UR - PW) + k(PV - UQ)$$

De la même façon, on peut exprimer les composantes de la force de perturbation par :

$$\Delta F = i\Delta F_x + j\Delta F_y + k\Delta F_z$$

On peut donc en déduire les équations de mouvement de translation :

$$\Delta X = \Delta F_x = m(\dot{U} + QW - VR)$$

$$\Delta Y = \Delta F_y = m(\dot{V} + UR - PW)$$

$$\Delta Z = \Delta F_z = m(\dot{W} + VP - UQ)$$

Notons que les forces de perturbation sont maintenant exprimées par  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  et  $\Delta Z$ .

### 3.3.2 Mouvement en rotation

En rotation, la seconde loi de Newton est définie comme étant :

$$M = \frac{d}{dt}(H)$$

où  $M$  représente la somme des moments appliqués sur l'appareil et  $H$  le moment angulaire. Pour un corps rigide, le moment angulaire est défini comme :

$$H = I\omega$$

La matrice d'inertie  $I$  se définit comme étant :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

où  $I_{ii}$  dénote un moment d'inertie, et  $I_{ij}$  un produit d'inertie.

$$M = \frac{d}{dt}H + \omega \times H$$

La transformation du référentiel structural au référentiel géographique entraîne donc :

$$M = I \left\{ \frac{d}{dt}\omega + \omega \times \omega \right\} + \omega \times H$$

Cependant,

$$\omega \times \omega = 0$$

$$\frac{d}{dt}\omega = i\dot{P} + j\dot{Q} + k\dot{R}$$

$$\omega \times H = \begin{bmatrix} i & j & k \\ P & Q & R \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}$$

où  $h_x$ ,  $h_y$  et  $h_z$  sont les composantes de  $H$  obtenues de l'équation  $H = I\omega$ .

$$h_x = I_{xx}P - I_{xy}Q - I_{xz}R$$

$$h_y = -I_{yx}P + I_{yy}Q - I_{yz}R$$

$$h_z = -I_{zx}P - I_{zy}Q + I_{zz}R$$

Généralement, les avions sont symétriques par rapport au plan XZ, conséquemment :

$$I_{xy} = I_{yz} = 0$$

On peut donc en déduire les équations de mouvement en rotation :

$$\begin{aligned}\Delta L = \Delta M_x &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + (I_{zz} - I_{yy})QR \\ \Delta M = \Delta M_y &= I_{yy}\dot{Q} + I_{xz}(P^2 - R^2) + (I_{xx} - I_{zz})PR \\ \Delta N = \Delta M_z &= I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}QR\end{aligned}$$

Notons que les moments de perturbation sont maintenant exprimées par  $\Delta L$ ,  $\Delta M$  et  $\Delta N$ . Les appareils de bonne dimension, tel les avions de transport, ne génèrent pas de grandes accélérations angulaires. Pour cette raison, les termes de couplage inertiel (troisième terme des équations précédentes) sont fréquemment négligés. Les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned}\Delta L = \Delta M_x &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) \\ \Delta M = \Delta M_y &= I_{yy}\dot{Q} + I_{xz}(P^2 - R^2) \\ \Delta N = \Delta M_z &= I_{zz}\dot{R} - I_{xz}(\dot{P} - QR)\end{aligned}$$

### 3.3.3 Effet de la gravité

On peut considérer que la gravité agit sur le centre de masse de l'avion. Ainsi, dans le référentiel structural, on peut considérer la gravité comme faisant partie du vecteur force externe  $F$ . Il est logique d'exprimer la force gravitationnelle dans le référentiel géographique. Suivant ce référentiel, le vecteur gravité  $mg$  est dirigé selon l'axe  $Z_E$ . La figure 3.3 présente l'alignement de  $mg$  dans le référentiel structural. La décomposition du vecteur  $mg$  dans les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  donne :

$$\begin{aligned}\delta X &= mg \sin(-\theta) = -mg \sin \theta \\ \delta Y &= mg \cos(-\theta) \sin \phi = mg \cos \theta \sin \phi \\ \delta Z &= mg \cos(-\theta) \cos \phi = mg \cos \theta \cos \phi\end{aligned}$$

En général, les angles  $\theta$  et  $\phi$  ne sont pas simplement l'intégrale des vitesses angulaires  $P$  et  $Q$ . En pratique, deux nouvelles variables de mouvement sont introduites et il est

nécessaire de les relier, ainsi que leur dérivée, aux vitesses angulaires P, Q et R. On pourra ainsi déterminer la vitesse angulaire de rotation de l'avion autour de la

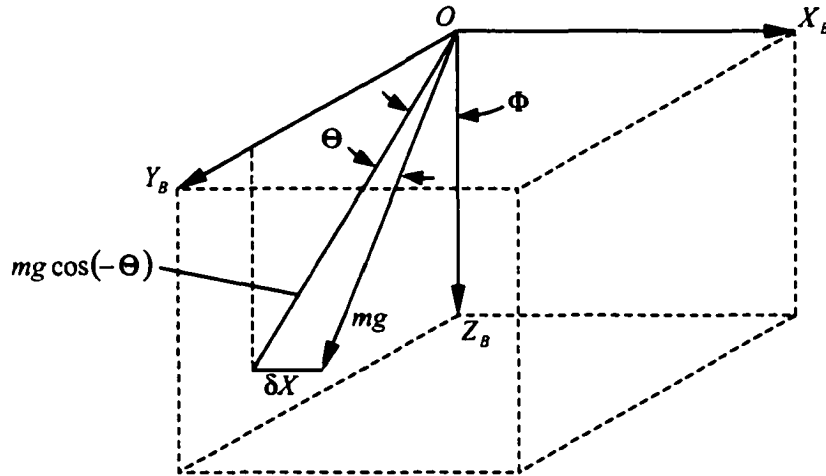


Figure 3.3 : Effet de la gravité dans le référentiel structural

composante de gravité  $\psi$ . En suivant l'ordre de rotation standard soit,  $\psi$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\phi}$  autour de  $X_E$ ,  $Y_E'$  et  $Z_E''$  respectivement,  $Y_E'$  signifiant une rotation autour de l'axe Y du référentiel résultant d'une première rotation autour de  $X_E$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

### 3.3.4 Transformation des référentiels

Les relations physiques établies jusqu'à maintenant font appel à deux référentiels; structural et géographique. On peut orienter un de ces systèmes en fonction de l'autre avec une série de trois rotations. À chaque rotation est associée une matrice, et la

matrice de transformation est obtenue simplement en effectuant le produit des trois matrices de rotation. Pour la dynamique d'avion, la transformation usuelle traduit le référentiel géographique en référentiel structural. Les rotations sont effectuées selon l'ordre standard, soit le lacet  $\psi$ , le tangage  $\theta$  et le roulis  $\phi$ . Les matrices correspondantes sont :

$$T_{\psi} = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, \quad T_{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix}$$

où les termes  $c\psi$  et  $s\psi$  sont les abréviations de  $\cos\psi$  et  $\sin\psi$ . La matrice de transformation complète est donc :

$$T = [T_{\psi}] [T_{\theta}] [T_{\phi}] = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi s\theta & -s\theta \\ (c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi) & (s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi) & c\theta s\phi \\ (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) & (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) & c\theta c\phi \end{bmatrix}$$

### 3.3.5 Linéarisation des termes inertiels et gravitationnels

Les équations des mouvements de translation et de rotation présentent les forces inertiels agissant sur l'avion. Les équations de l'effet de la gravité sur l'appareil ont aussi été présentées. Toutes ces forces sont proportionnelles à la masse de l'avion. Les forces externes appliquées sur l'avion peuvent être redéfinies comme :

$$X = \Delta X + \delta X$$

$$Y = \Delta Y + \delta Y$$

$$Z = \Delta Z + \delta Z$$

où  $\delta X$ ,  $\delta Y$  et  $\delta Z$  sont les termes gravitationnels et  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  et  $\Delta Z$  représentent les forces aérodynamiques et de poussée. Les équations de mouvement du corps rigide sont donc définies comme :

$$X = ma_{x_{\alpha}} = m[\dot{U} + QW - RV + g \sin\theta]$$

$$Y = ma_{y_{\alpha}} = m[\dot{V} + RU - PW - g \cos\theta \sin\phi]$$

$$Z = ma_{z_{xx}} = m[\dot{W} + PV - QU - g \cos\theta \cos\phi]$$

$$L = \dot{P}I_{xx} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + (I_{zz} - I_{yy})QR$$

$$M = \dot{Q}I_{yy} + I_{xz}(P^2 - R^2) + (I_{xx} - I_{zz})PR$$

$$N = \dot{R}I_{zz} - I_{xz}\dot{P} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}QR$$

Ces équations sont non-linéaires car elles contiennent des termes qui sont le produit de deux variables dépendantes. Il est toutefois possible de linéariser ces équations. Considérons l'avion possédant deux composantes; un mouvement moyen qui représente l'équilibre et un mouvement dynamique, représentant les perturbations au mouvement moyen de l'avion. Lors d'une linéarisation, on considère toujours les perturbations comme petites. Ainsi, chaque variable est séparée en deux composantes; une composante à l'équilibre  $X_0$  et une composante de perturbation  $x$ . À l'équilibre, il n'y a pas d'accélération en translation ou en rotation. Les équations représentant le système à l'équilibre sont :

$$X_0 = m[Q_0 W_0 - R_0 V_0 + g \sin\theta_0]$$

$$Y_0 = m[R_0 U_0 - P_0 W_0 - g \cos\theta_0 \sin\phi_0]$$

$$Z_0 = m[P_0 V_0 - Q_0 U_0 - g \cos\theta_0 \cos\phi_0]$$

$$L_0 = Q_0 R_0 (I_{zz} - I_{yy}) - P_0 Q_0 I_{xz}$$

$$M_0 = (P_0^2 - R_0^2) I_{xz} + (I_{xx} - I_{zz}) P_0 R_0$$

$$N_0 = I_{xz} Q_0 R_0 + (I_{yy} - I_{xx}) P_0 Q_0$$

On peut ensuite remplacer P, Q et R par leur relations avec  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ . Les équations du mouvement perturbé sont obtenues en exprimant les équations de mouvement en variation et en soustrayant ensuite l'équation d'équilibre. Aussi, parce que les perturbations sont faibles, on peut approximer les sinus et cosinus à l'angle ou à la valeur unitaire respectivement. De plus, le produit ou le carré de deux perturbations

peuvent être négligés. On obtient ainsi les équations de perturbation du mouvement de l'avion :

$$\begin{aligned}
 dX &= m[\dot{u} + W_0 q + Q_0 w - V_0 r - R_0 v + g \cos \Theta_0 \theta] \\
 dY &= m[\dot{v} + U_0 r + R_0 u - W_0 p - P_0 w - (g \cos \Theta_0 \cos \Phi_0) \phi + (g \sin \Theta_0 \sin \Phi_0) \theta] \\
 dZ &= m[\dot{w} + V_0 p + P_0 v - U_0 q - Q_0 u + (g \cos \Theta_0 \sin \Phi_0) \phi + (g \sin \Theta_0 \cos \Phi_0) \theta] \\
 dL &= I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_{zz} - I_{yy}) (Q_0 r + R_0 q) - I_{zx} (P_0 q + Q_0 p) \\
 dM &= I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz}) (P_0 r + R_0 p) - (2R_0 r - 2P_0 p) I_{xz} \\
 dN &= I_{zz} \dot{r} - I_{zx} \dot{p} + (I_{yy} - I_{xx}) (P_0 q + Q_0 p) + I_{xz} (Q_0 r + R_0 q)
 \end{aligned}$$

De la même façon, on peut linéariser les équations des composantes de la vitesse angulaire P, Q et R. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \Theta_0 - \theta (\dot{\Psi}_0 \cos \Theta_0) \\
 q &= \dot{\phi} \cos \Phi_0 - \theta (\dot{\Psi}_0 \sin \Phi_0 \sin \Theta_0) + \dot{\psi} \sin \Psi_0 \cos \theta + \phi (\dot{\Psi}_0 \cos \Theta_0 - \dot{\Theta}_0 \sin \Phi_0) \\
 r &= \dot{\psi} \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 - \phi (\dot{\Psi}_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 + \dot{\Psi}_0 \cos \Phi_0) - \dot{\theta} \sin \Phi_0 - \theta (\dot{\Psi}_0 \sin \Theta_0 \cos \Phi_0)
 \end{aligned}$$

Pour les conditions de vol en régime permanent, on peut simplifier davantage en assumant  $\dot{\Psi}_0 = \dot{\Theta}_0 = \dot{\Psi}_0 = \dot{V}_0 = \dot{\Phi}_0 = 0$ . Dans ces conditions, les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 x &= m[\dot{u} + W_0 q + Q_0 w - R_0 v + g \cos \Theta_0 \theta] \\
 y &= m[\dot{v} + U_0 r + R_0 u - W_0 p - P_0 w - g \cos \Theta_0 \phi] \\
 z &= m[\dot{w} + V_0 p + P_0 v - U_0 q - Q_0 u + g \sin \Theta_0 \theta] \\
 p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \Theta_0 \\
 q &= \dot{\theta} \\
 r &= \dot{\psi} \cos \Theta_0
 \end{aligned}$$

On peut aussi considérer  $Q_0 = P_0 = R_0 = 0$ . On peut alors réécrire les équations du mouvement :

$$x = m[\dot{u} + W_0 q + g \cos \Theta_0 \theta]$$

$$y = m[\dot{v} + U_0 r - W_0 p - g \cos \Theta_0 \phi]$$

$$z = m[\dot{w} - U_0 q + g \sin \Theta_0 \theta]$$

$$l = I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r}$$

$$m = I_{yy} \dot{q}$$

$$n = I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p}$$

On remarque que les équations pour  $x$ ,  $z$  et  $m$  contiennent les variables dépendantes  $u$ ,  $w$ ,  $q$  et  $\theta$  qui sont limitées au plan  $X_B Z_B$ . Ces équations représentent le mouvement longitudinal de l'avion. Les trois autres équations sont associées aux mouvement latéral/directionnel de l'avion.

### 3.4 Linéarisation complète des équations de mouvement

Le modèle fourni par le client ne contient que la dynamique longitudinale de l'avion. Pour cette raison, à partir de cette section, l'analyse portera uniquement sur le mouvement/dynamique longitudinal.

#### 3.4.1 Expansion des termes aérodynamiques

En utilisant toujours les équations obtenues avec les conditions de vol en régime permanent, on développe avec la série de Taylor. On obtient ainsi, pour le mouvement longitudinal les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial X}{\partial q} q + \frac{\partial X}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial X}{\partial \delta_E} \delta_E \\
& + \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_E} \dot{\delta}_E = m[\dot{u} + W_0 q - g \cos \Theta_0 \theta] \\
& \frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} q + \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial Z}{\partial \delta_E} \delta_E \\
& + \frac{\partial Z}{\partial \dot{\delta}_E} \dot{\delta}_E = m[\dot{w} + U_0 q + g \sin \Theta_0 \theta] \\
& \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} q + \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial M}{\partial \delta_E} \delta_E \\
& + \frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}_E} \dot{\delta}_E = I_{yy} \dot{q}
\end{aligned}$$

Pour simplifier la notation, il est usuel d'adopter la notation suivante :

$$\begin{aligned}
X_x &= \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial x} \\
Z_x &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial x} \\
M_x &= \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M}{\partial x}
\end{aligned}$$

Lorsque ces substitutions sont introduites, les termes tel que  $X_x$ ,  $Z_x$  et  $M_x$  sont définis comme étant les dérivées de stabilité ('stability derivative').

### 3.4.2 Équations du mouvement longitudinal.

On peut donc réécrire les équations sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= X_u u + X_{\dot{u}} \dot{u} + X_w w + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_q q + X_{\dot{q}} \dot{q} - W_0 q - g \cos \Theta_0 \theta + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\dot{\delta}_E} \dot{\delta}_E \\
\dot{w} &= Z_u u + Z_{\dot{u}} \dot{u} + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + Z_{\dot{q}} \dot{q} + U_0 q - g \sin \Theta_0 \theta + Z_{\delta_E} \delta_E + Z_{\dot{\delta}_E} \dot{\delta}_E
\end{aligned}$$

$$\dot{q} = M_u u + M_{\dot{u}} \dot{u} + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\dot{q}} \dot{q} + M_{\delta_E} \delta_E + M_{\dot{\delta}_E} \dot{\delta}_E$$

On ajoute habituellement à ces équations l'équivalence  $\dot{\theta} = q$ . L'étude de données aérodynamiques de plusieurs avions permet de vérifier que les dérivées de stabilité ne sont pas toutes significatives, et fréquemment un nombre important de ces dérivées de stabilité est négligé. Toutefois, il est important de savoir que les dérivées de stabilité sont fonction de l'avion considéré et des conditions de vol. Ainsi, avant de simplifier les dérivées de stabilité, il est important d'étudier les données aérodynamiques appropriées. On peut toutefois considérer comme nulles, sans conséquences, les dérivées suivantes :

$$X_{\dot{u}}, X_q, X_{\dot{w}}, X_{\delta_E}, Z_{\dot{u}}, Z_{\dot{w}}, M_{\dot{u}}, Z_{\delta_E} \text{ et } M_{\dot{\delta}_E}.$$

La dérivée de stabilité  $Z_q$  est habituellement grande mais souvent ignorée si la vitesse  $U_0$  est grande. Avec ces suppositions, les équations du mouvement longitudinal perturbé pour un vol en ligne droite peuvent être exprimées comme :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= X_u u + X_w w + W_0 q - g \cos \Theta_0 \theta \\ \dot{w} &= Z_u u + Z_w w + U_0 q - g \sin \Theta_0 \theta + Z_{\delta_E} \delta_E \\ \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_E} \delta_E \\ \dot{\theta} &= q\end{aligned}$$

### 3.5 Équations de mouvement dans le systèmes d'axes de stabilité

Les forces aérodynamiques qui contribuent aux termes x, y et z sont des composantes de la portance et de la traînée exprimées dans le référentiel structural. Les angles qui orientent les forces de traînée et de portance par rapport au référentiel structural sont l'angle d'attaque  $\alpha$  et l'angle de glissement latéral ('sideslip')  $\beta$ . Ces angles sont présentés à la figure 3.4. Les composantes de vitesse suivant la structure sont :

$$U = V_T \cos \beta \cos \alpha$$

$$V = V_T \sin \beta$$

$$W = V_T \cos \beta \sin \alpha$$

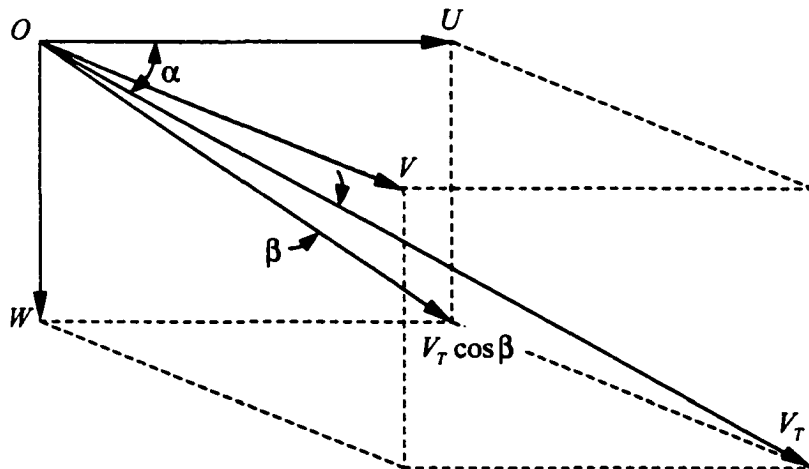


Figure 3.4 : Orientation du vent relatif par rapport au référentiel structural

Si on assume un vol symétrique, la composante  $V_0$  est considérée nulle. Ainsi, si on oriente le système d'axes de façon à ce que la composante  $W_0$  soit aussi nulle, alors  $\beta_0$  et  $\alpha_0$  sont nulles. Cette orientation coïncide avec le référentiel structural, en régime permanent, pointant dans la direction du vent relatif ( $X_B$  et  $V_T$  alignés) de façon à ce que  $U_0 = V_T$ . Cette orientation correspond au référentiel de stabilité, qui est initialement incliné par rapport à l'horizon d'un angle  $\gamma_0$  parce que :

$$\Theta_0 = \gamma_0 + \alpha_0$$

et  $\alpha_0 = 0$ .

Tous les mouvements dues aux perturbations sont mesurés dans le référentiel structural. Toutefois, l'alignement du référentiel de stabilité par rapport au référentiel structural change en fonction de l'orientation des surfaces de l'appareil. Lorsque l'orientation de l'appareil varie par rapport son orientation à l'équilibre, le référentiel de stabilité pivote

et par conséquent, l'axe  $X_{\text{Stabilité}}$  peut ne pas être parallèle avec le vent relatif. Cette situation est illustrée à la figure 3.5.

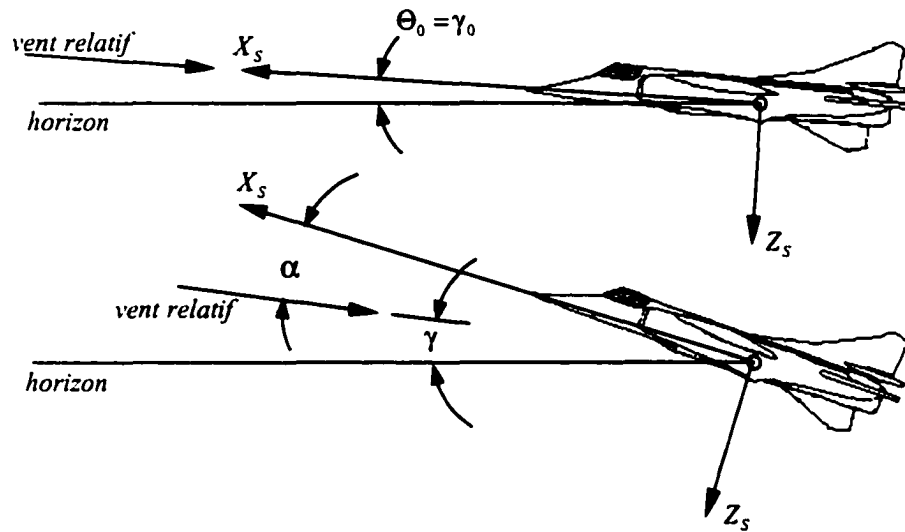


Figure 3.5 : Référentiel de stabilité par rapport au vent relatif

Utilisant le référentiel de stabilité, dans lequel  $W_0$  est nulle et où  $\Theta_0 = \gamma_0$ , on obtient alors :

$$\dot{u} = X_u u + X_w w - g \cos \gamma_0 \theta$$

$$\dot{w} = Z_u u + Z_w w + U_0 q - g \sin \gamma_0 \theta + Z_{\delta_E} \delta_E$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_E} \delta_E$$

$$\dot{\theta} = q$$

## CHAPITRE 4

### CRITÈRES DE QUALITÉ DE LA MANOEUVRABILITÉ

Les qualités de la manœuvrabilité (HQ : Handling Qualities) représentent la facilité avec laquelle un pilote peut opérer son appareil selon certaines conditions de vol. Les HQ dépendent non seulement de la dynamique de l'avion, mais aussi de son système de contrôle et des informations perçues (visuelles, mouvements) par le pilote. Les critères de qualité de la manœuvrabilité (HQC : Handling Qualities Criteria) ont été définie afin de traduire quantitativement les données qualitatives éprouvées/fournies par le pilote. La présente section définit huit HQC.

#### 4.1 Marges de stabilité

Dans la situation où un paramètre du système, tel un gain  $K$ , est restreint par une valeur maximum au delà de laquelle l'instabilité apparaît, il est possible de définir une marge de stabilité pour ce paramètre. En pratique, la marge de stabilité définit la valeur que l'on doit ajouter au paramètre afin d'obtenir la stabilité marginale. Deux mesures quantitatives sont utilisées pour définir le degré de stabilité : La *marge de gain* et la *marge de phase*. Les marges doivent être évaluées à partir du système en boucle ouverte, de la commande jusqu'à la réponse.

##### 4.1.1 Marge de gain

La marge de gain est le changement de gain (en dB) requis à une phase de  $180^\circ$  pour rendre le système instable. C'est en fait une mesure du gain supplémentaire toléré par le système, sans changement de phase, pour conserver sa stabilité.

### 4.1.2 Marge de phase

La marge de phase est le décalage de phase supplémentaire permis, à la fréquence où le gain (en dB) change de signe, pour amener le système à la limite de l'instabilité. Cette marge est une mesure du changement de phase toléré par le système, sans changement de gain, pour conserver sa stabilité.

La figure 4.1 illustre l'évaluation des marges de stabilité. Le client exige une marge de gain plus grande que 6dB et une marge de phase plus grande que 45°.

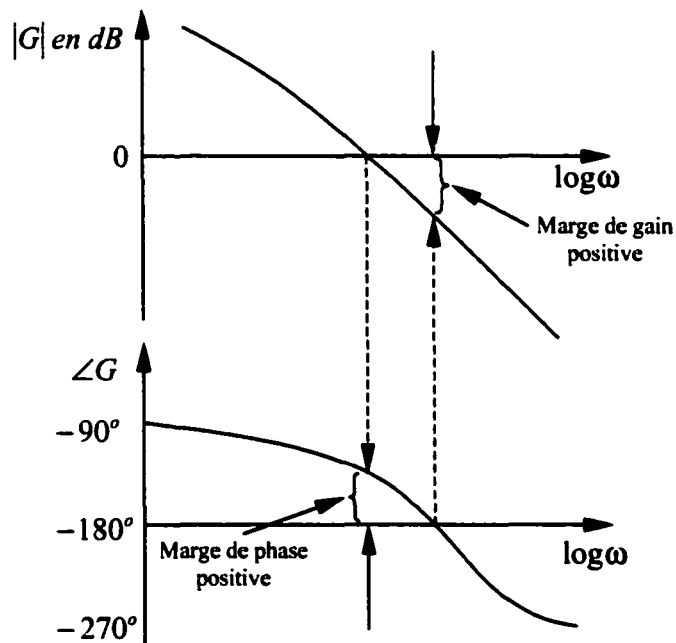


Figure 4.1 : Marge de gain et marge de phase.

## 4.2 Mode 'short period' et mode phugoïde

Pour un avion conventionnel, statiquement stable, l'équation caractéristique de la dynamique longitudinale possède comme racines une paire de valeurs conjuguées

complexes. Les parties réelles négatives de ces racines permettent de conclure sur la stabilité de l'appareil. Ces racines conjuguées complexes sont en fait deux modes oscillatoires superposés. Le client contraint seulement l'amortissement de ces deux modes. Les deux sections subséquentes traitent de ces modes.

#### **4.2.1 Mode 'short period'**

Le mouvement associé au mode 'short period' est caractérisé par un fort amortissement et une grande fréquence (une courte période). Parce que le mode 'short period' est rapide et fortement amorti, le pilote ou les passagers ne ressentent qu'une secousse. Le pilote n'a pas à intervenir pour annihiler ce mode. Le mouvement oscillatoire ne dure qu'un instant, pendant lequel l'angle d'attaque, l'angle de tangage et la vitesse de tangage varient très rapidement tandis que la vitesse longitudinale reste constante. La fréquence du mode 'short period' ainsi que le coefficient d'amortissement tendent à augmenter avec la vitesse de l'avion et à diminuer avec l'altitude. Le client demande un amortissement du mode 'short period' entre 0.35 et 1.3 mais idéalement supérieur à 0.75 .

#### **4.2.2 Mode phugoïde**

Le mouvement associé au mode phugoïde est caractérisé par un léger amortissement et une faible fréquence (une longue période). L'oscillation associée au mouvement phugoïde peut causer des désagréments aux passagers si elle n'est pas corrigée. Parce que la période d'oscillation est très longue, le pilote peut aisément éliminer le mode phugoïde en commandant l'élévateur. Physiquement, le mode phugoïde peut être décrit comme l'oscillation du centre de masse de l'appareil autour de la trajectoire de vol horizontale. L'oscillation est causée par un échange de l'énergie potentielle de l'avion (altitude) avec l'énergie cinétique (vitesse), l'amortissement provenant du phénomène

aérodynamique de la trainée. Le mode phugoïde a un effet moins marqué que le mode 'short period' sur la manœuvrabilité de l'avion. Le client demande un amortissement du mode phugoïde plus grand que 0.05 .

### 4.3 Largeur de bande (Bandwidth)

Ce critère est basé sur la réponse en fréquence associée à la fonction de transfert reliant la commande du pilote  $\delta$  et la variation de l'angle de tangage  $q$ . Définissant la fréquence de coupure  $\omega_B$  (cutoff frequency) comme étant la fréquence pour laquelle le gain est 3 dB plus faible que le gain pour une fréquence nulle, l'intervalle de fréquence pour lequel le gain ne chute pas de 3 dB est appelé largeur de bande.

Toutefois, le client offre sa propre définition de largeur de bande. L'explication réfère à la figure 4.2. Définissons  $\omega_{BW\_phase}$  comme étant la fréquence associée à un décalage de phase de  $135^\circ$ , et  $\omega_{180}$  comme étant la fréquence associée à un décalage de phase de  $180^\circ$ . Le gain  $G(\omega_{BW\_gain})$  est égal à  $G(\omega_{180}) + 6\text{dB}$ . Ici, la largeur de bande équivaut à la plus petite valeur entre  $\omega_{BW\_phase}$  et  $\omega_{BW\_gain}$ .

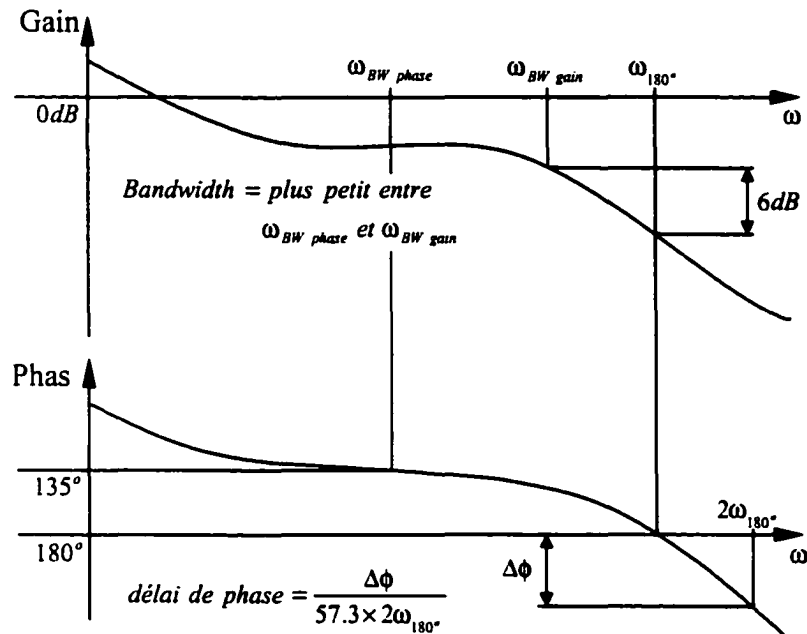


Figure 4.2 : Bandwidth et délai de phase.

La largeur de bande indique la capacité du système à répondre à une certaine entrée. Plus la largeur de bande est grande, plus le système répond rapidement. Toutefois, dans cette condition, le système devient plus sensible aux bruits. Le client exige une largeur de bande supérieure à 1.5 et idéalement supérieure à 1.75 .

#### 4.4 Délai de phase

Ce critère est basé sur la réponse en fréquence associée à la fonction de transfert reliant la commande du pilote  $\delta$  et la variation de l'angle de tangage  $q$ . Toujours en se référant à la figure 4.2 , définissons  $\Delta\phi$  comme étant la différence entre les phase  $P(\omega_{180})$  et la phase  $P(2\omega_{180})$ . Le délai de phase se traduit donc par :

$$\text{Délai de phase} = \frac{\Delta\phi}{57.3 \times 2\omega_{180}}$$

Le client exige un délai de phase inférieur à 0.2 et idéalement inférieur à 0.14 .

#### 4.5 Dropback selon Gibson

Le critère Dropback (DB) est basé sur la réponse temporelle de l'angle de tangage  $\theta$  de l'avion par rapport à une entrée  $\delta$  de type échelon. Le critère exige que l'entrée échelon soit appliquée jusqu'à ce que l'angle de tangage  $\theta$  ait atteint le régime permanent, et on retire ensuite l'entrée. On trace ensuite une tangente passant par  $\theta(2s.)$  et  $\theta(4s.)$ . Le rapport du Dropback par rapport à  $q$  ( $DB/q$ ) devient la distance entre l'origine et l'abscisse à l'origine de la tangente. La figure 4.3 présente le critère Dropback selon Gibson. Le client exige  $-0.2 < DB/q < 0.5$  et idéalement  $0 < DB/q < 0.3$ .

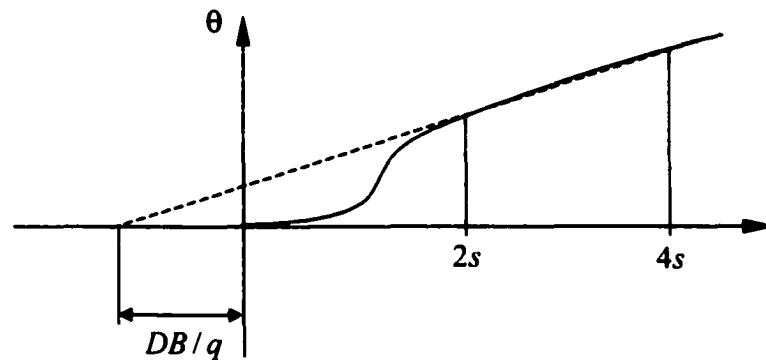


Figure 4.3 : Dropback selon Gibson.

#### 4.6 Control Anticipation Parameter (CAP)

Le CAP est défini comme étant le rapport entre l'accélération initiale en tangage  $\ddot{\theta}$  et le changement de l'accélération normale en régime permanent, où toutes les accélérations sont définies au centre de gravité. Pour les avions ayant une réponse longitudinale de deuxième ordre, le CAP peut être mathématiquement représenté par :

$$CAP = \frac{\dot{q}(0)}{n_z(\infty)} = -\frac{g\omega_s^2}{z_w V} = \frac{g\omega_s^2 T_{\theta_2}}{V}$$

Le critère CAP exige, pour les modèles qui ont plus de modes que le phugoïde et le 'short period', que le modèle soit réduit à un modèle d'ordre inférieur équivalent (LOES : lower order equivalent system). L'amplitude du CAP indique au pilote le changement de l'accélération normale en régime permanent par rapport à l'accélération initiale du tangage. Cette mesure est importante à cause du décalage, dans le temps, entre la commande du pilote et l'accélération normale en régime permanent. Le client demande  $0.28 < CAP < 3.6$  et idéalement  $0.36 < CAP < 1.0$ .

## ANALYSE DU CONTRÔLEUR

La plupart des appareils hautes performances, commerciaux ou militaires, ne rencontreront pas les qualités de manœuvrabilité exigées sans l'ajout d'un contrôleur. Le contrôleur permet certains ajustements aux performances de l'avion, sans avoir à modifier physiquement la géométrie ou les composantes de l'appareil. Dans le cadre de ce projet, le client a fourni un modèle de contrôleur pour la dynamique longitudinale. Ce contrôleur, déjà en utilisation, incorpore la dynamique du manche du pilote, des servo-élévateurs et de l'avion. L'ajustement de ce contrôleur est réalisable à l'aide de cinq gains. Le contrôleur est présenté à la figure 5.1.



Ce type de contrôleur peut être séparé en deux systèmes : le SAS ('stability augmentation system') et le CAS ('control augmentation system'). Les deux systèmes sont identifiés à la figure 5.1. Chacun des systèmes a ses utilités précises dans l'ajustement des performances d'un avion.

### 5.1.1 Système SAS

Le système SAS va principalement utiliser les mesures fournies par divers appareils de mesure disposés sur l'avion, comme par exemple les gyroscopes et accéléromètres. Ces mesures sont ensuite traitées et retournées aux servomécanismes qui actionnent les surfaces de contrôle de l'appareil. Différents systèmes SAS peuvent être utilisés. Les différences sont fonctions des sorties du modèle dynamique de l'avion qui sont utilisées comme signaux de rétroaction. Les sorties standards sont habituellement la vitesse totale de l'avion  $V_T$ , la variation de l'angle de tangage  $q$ , l'angle d'attaque  $\alpha$  et l'accélération normale  $n_z$ . Toutefois, l'angle d'attaque et l'accélération normale sont reliés et l'utilisation de l'un ou l'autre de ces paramètres comme rétroaction procure le même effet.

Le système SAS utilisé par le client, et qui est d'ailleurs le plus fréquemment utilisé, est le système SAS de tangage. Ce système est utilisé pour fournir un amortissement et une fréquence du mode 'short period' acceptables. Les rétroactions utilisées sont l'accélération normale  $n_z$  et la variation de l'angle de tangage  $q$ . Le mode phugoïde sera peu affecté par ce système. Un filtre passe-bas est positionné sur la rétroaction  $n_z$  pour éliminer le bruit du signal. Pour ce qui est de la rétroaction  $q$  directement au servoélévateur, elle peut être éliminée si le système CAS comprend une partie proportionnelle-intégrale, comme c'est le cas ici. Toutefois, l'ajout d'un filtre passe-haut dérivateur ('washout') sur la rétroaction  $q$  modifie sa fonction et permet le contrôle du mode phugoïde. Si l'amortissement du mode 'short period' est insatisfaisant mais

que la fréquence est acceptable, seul la rétroaction  $q$  serait nécessaire. Si la fréquence et l'amortissement sont tous les deux inacceptables, alors les deux rétroactions sont nécessaires. Toutefois, en dérivant le signal  $q$ , il pourrait devenir nécessaire d'utiliser un système CAS pour bien contrôler le mode 'short period'. Étant donné l'absence de dynamique pour la poussée, qui influence principalement le mode phugoïde, ce critère de qualité de manœuvrabilité ne sera pas considéré.

### 5.1.2 Système CAS

Pour des manœuvres normales, le système SAS est suffisant. Toutefois, si l'on désire augmenter les performances de l'avion pour des manœuvres plus précises, ou simplement pour le confort des passagers, on doit faire appel à un système CAS. La manœuvrabilité reste toujours la qualité première d'un avion. Dans cette situation, il est avantageux d'utiliser un signal de rétroaction  $n_z$ , qui représente l'accélération de l'avion selon l'axe Z. Cette accélération doit être contrôlable car l'appareil et les passagers ont des limites physiques de résistance aux accélérations, communément appelé 'g'. Le contrôle de la trajectoire est habituellement réalisé avec une rétroaction  $q$ . L'intégrateur inséré dans le contrôleur permet à l'avion de conserver sa trajectoire lorsque aucune pression n'est appliquée sur le manche. Le contrôleur utilisé par le client comprend une partie contrôleur proportionnel-intégral qui traite le signal  $q$  avant de le retourner au servoélévateur. La partie proportionnelle remplace le contrôleur proportionnel sur le signal  $q$  du système SAS, qui est devenu un contrôleur proportionnel-dérivé pour agir sur le mode phugoïde. Aussi, une compensation avant ('feedforward') est incluse dans le système CAS; ce signal permet le contrôle/ajustement du HQC 'dropback'. Les signaux compensation avant jouent un rôle prédictif, ce qui a un effet direct sur la réponse temporelle du système étudié.

## 5.2 Analyse pratique/numérique

Un contrôleur est souvent conçu en fonction d'un modèle invariable de la dynamique du système. Ici, le modèle dynamique de l'avion varie selon les différentes conditions de vol. Le modèle dynamique analytique de l'avion n'étant pas fourni, le client a remis 120 modèles dynamiques numériques, évalués selon différentes conditions de vol telles que la vitesse, l'altitude, la pression dynamique, la position du centre de masse et le poids. Les modèles fournis sont sous forme modèle d'état (matrices A, B, C et D). Par convention, le scheduling des gains du contrôleur est réalisé en fonction de la pression dynamique, qui est fonction de la vitesse et de l'altitude. L'analyse sera donc réalisée principalement avec les cas 109, 110, 113, 114, 117 et 118, ces cas ayant comme variable la vitesse, l'altitude et la pression dynamique, et comme constante la position du centre de masse et le poids.

Le contrôleur client, réalisé avec le logiciel 'Matrix-X', a été repris avec le logiciel 'Simulink'. Tous les programmes et simulations de ce projet ont été réalisés avec le logiciel Matlab/Simulink. Le contrôleur possède six éléments variables : les cinq gains et le modèle dynamique numérique de l'avion, tel que précédemment présenté à la figure 5.1.

Plusieurs programmes et fichiers ont été conçus ou sont utilisés pour faciliter la programmation des simulations. Ces programmes seront mentionnés tout au long de la démarche d'analyse, et sont aussi disponibles en annexe 1, Données et fichiers de simulations.

## **CHAPITRE 6**

### **RÉDUCTION DU MODÈLE ORIGINAL**

L'objectif de cette section est de réduire la dimension (ordre) du modèle d'état fourni par le client. Le modèle original est d'ordre quarante-quatre (44) et le traitement numérique d'un tel système peut causer d'importantes erreurs. Cet objectif sera réalisé à travers différentes étapes.

Tout d'abord, des systèmes équivalents simplifiés seront calculés pour la dynamique des composantes/actionneurs de l'appareil ; ordinateur du contrôleur, assemblage manche-élevateur et gyroscope. Cette simplification sera permise par le rassemblement des délais et gains de chacune des composantes/actionneurs, et par l'identification des pôles dominants à l'aide de la méthode des fractions partielles. Cette simplification permettra d'éliminer les pôles peu influents sur la dynamique longitudinale globale.

Ensuite, le système dynamique global équivalent simplifié sera comparé au système dynamique global original, à l'aide du lieu des racines et de la réponse à l'échelon unitaire, afin de s'assurer que la simplification est valable.

#### **6.1 Simplification des modèles composantes/actionneurs**

Le modèle composantes/contrôleur fourni par le client inclut la dynamique de trois composantes/actionneurs de l'avion; la dynamique du servo-contrôleur, la dynamique de l'assemblage reliant le manche à la surface ainsi que la dynamique du gyroscope. Ces trois systèmes ont une dynamique d'ordre élevé mais qui ne varie pas en fonction des conditions de vol et/ou de la configuration de l'appareil. On veut ici évaluer un modèle

équivalent d'ordre réduit, ce qui aura pour effet de diminuer les erreurs numériques dans le processus d'évaluation des gains.

### 6.1.1 Dynamique de l'assemblage manche-ordinateur.

Tel que fourni par le client, la dynamique de l'assemblage manche-ordinateur (Gstick) est présentée à la figure 6.1. Une première étape de simplification consiste à rassembler les délais et ensuite à approximer le délai total par un Pade d'ordre 2. Ensuite, à l'aide de la méthode des fractions partielles (fonction RESIDUE dans Matlab), il est possible d'identifier les pôles influents de la dynamique.

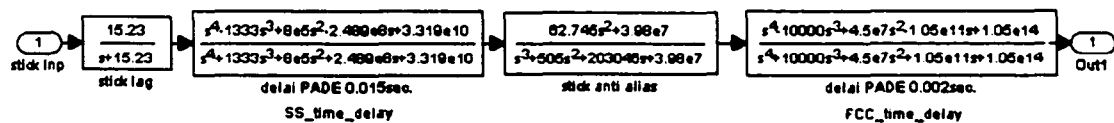


Figure 6.1 : Dynamique originale de l'assemblage manche-ordinateur

En simplifiant le délai de Pade, on obtient un nouveau système présenté à la figure 6.2.

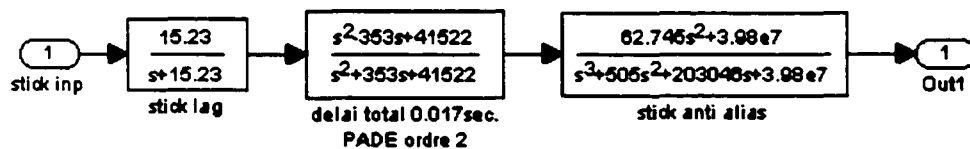


Figure 6.2 : Dynamique simplifiée de l'assemblage manche-ordinateur

À partir de ce modèle simplifié, on extrait d'abord la fonction de transfert équivalente avec les fonctions LINMOD (donne la représentation d'état à partir du modèle Simulink) et SS2TF (traduit de la représentation d'état à la fonction de transfert). On applique ensuite la méthode des fractions partielles avec la fonction RESIDUE et on

obtient ainsi tous les pôles ainsi que les numérateurs (zéros) associés. En représentant les pôles du système sur le plan imaginaire, on identifie les pôles le plus près de l'axe imaginaire comme étant ceux ayant le plus d'influence sur la dynamique du système, et on applique la fonction RESIDUE inverse. Cette fonction permet de recréer un modèle avec les pôles désignés et compense la dynamique (les pôles) éliminée par un zéro. On définit ainsi un système d'ordre inférieur équivalent. On valide le système réduit en comparant la réponse de la dynamique initiale (figure 6.1) et de la dynamique réduite (figure 6.2) à une entrée échelon unitaire (step input). De façon empirique, différentes combinaisons de pôles seront sélectionnées jusqu'à l'obtention d'un modèle ayant une réponse à l'échelon unitaire semblable au modèle original.

À partir du modèle avec la simplification des délais de Padé (figure 6.2), on extrait les pôles (Pnew). On obtient comme réponse de la fonction RESIDUE :

Rnew =

```
1.0e+002 *
-0.07804765140824 - 0.02101727639723i
-0.07804765140824 + 0.02101727639723i
-1.63573850856270
0.78923851908154 + 1.00674155436552i
0.78923851908154 - 1.00674155436552i
0.21335677321610
```

Pnew =

```
1.0e+002 *
-1.10626791689422 + 3.57809728084869i
-1.10626791689422 - 3.57809728084869i
-2.83746416621155
-1.76500000000000 + 1.01831969439857i
-1.76500000000000 - 1.01831969439857i
-0.15230000000000
```

Knew =

[]

La dernière étape de simplification consiste à identifier les pôles les plus influents parmi ceux de  $P_{new}$  et d'évaluer la réponse à l'échelon unitaire de différentes combinaisons. En automatisant le processus de comparaison (programme `simp_Gstick.m`), on peut rapidement évaluer quelques possibilités et obtenir un système d'ordre réduit équivalent au système original. Les différents essais (combinaisons) pour ce système ont permis de conclure, que pour avoir une réponse semblable, on se devait de conserver 4 pôles. Pour ce système, on obtient la fonction de transfert d'ordre 4 suivante :

$$G_{stick} = \frac{0.0000001560S^3 + 0.0000790178S^2 - 0.0176685337S + 1.7972058684}{S^4 + 0.0000065197S^3 + 0.0015138213S^2 + 0.1393957341S + 1.7943557596}$$

La comparaison de la dynamique originale (ordre 12) et de la dynamique simplifiée (ordre 4) est présentée à la figure 6.3. Cette figure présente la réponse des deux systèmes à l'entrée échelon unitaire.

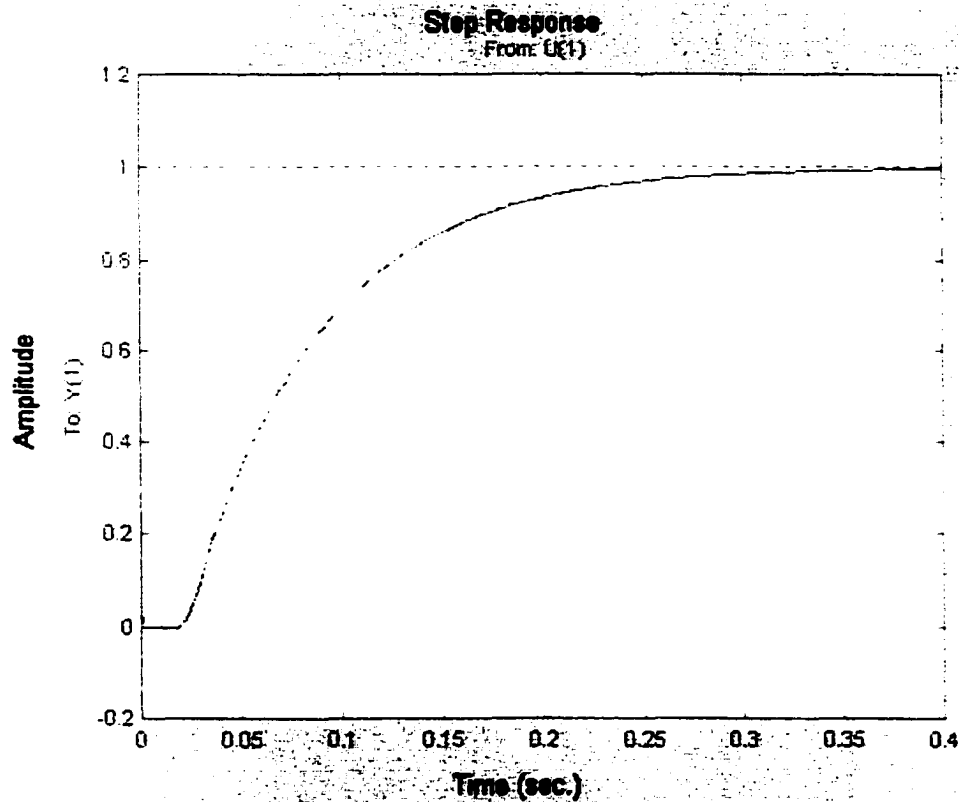


Figure 6.3 : Comparaison des dynamiques manche-ordinateur pour une entrée échelon

### 6.1.2 Dynamique du servo-contrôleur

La dynamique du servo-contrôleur ( $G_{\text{servo}}$ ) est présentée à la figure 6.4. Encore ici, la première étape de simplification consiste à rassembler les délais et les gains. Comme pour le cas précédent, le délai total sera approximé par un Pade d'ordre 2. À l'aide de la méthode des fractions partielles, les pôles influents de la dynamique seront identifiés. En simplifiant le délai de Pade et en combinant les gains, on obtient un nouveau système présenté à la figure 6.5.

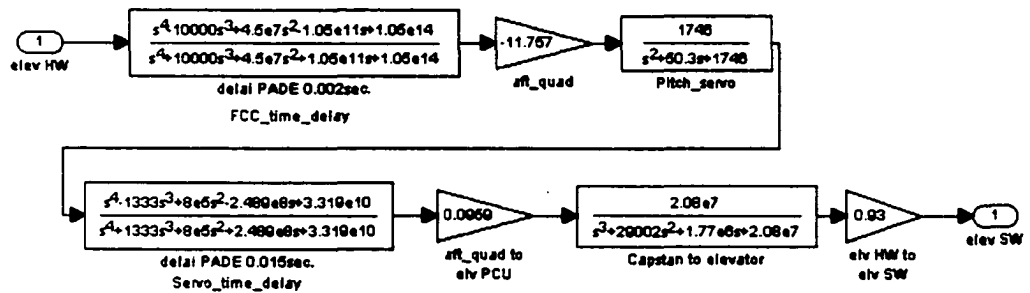


Figure 6.4 : Dynamique originale du servo-contrôleur

Il est à noter que la définition originale de la dynamique du servo-contrôleur, voir figure 6.4, contient deux gains reliant le cadran arrière de l'appareil avec l'unité de commande hydraulique (aft quad to elv PCU). L'utilisation d'un système de commande 'fly-by-wire' élimine le cadran arrière de l'assemblage mécanique et commandera directement l'unité de commande hydraulique. Ces gains ont été conservés pour la présente analyse, mais la dynamique du servo-contrôleur devrait être révisée.

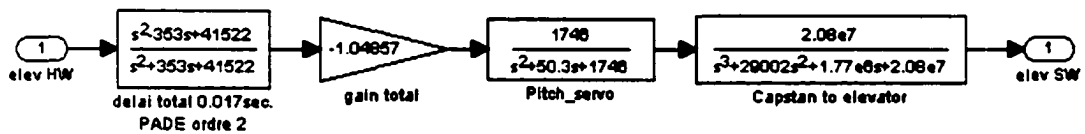


Figure 6.5 : Dynamique simplifiée du servo-contrôleur

À partir du modèle dynamique simplifié, on définit un système d'ordre inférieur équivalent en suivant les étapes définies à la section 6.1.1. On obtient comme réponse de la fonction RESIDUE :

Rnew =

-0.0000  
 -0.8436 - 0.2436i  
 -0.8436 + 0.2436i  
 63.7995  
 -6.5752 - 21.4467i  
 -6.5752 + 21.4467i

-48.9620

Pnew =

1.0e+004 \*

-2.8941

-0.0176 + 0.0102i

-0.0176 - 0.0102i

-0.0045

-0.0025 + 0.0033i

-0.0025 - 0.0033i

-0.0016

Knew =

[]

En automatisant le processus de comparaison (programme simp\_Gservo.m), on peut rapidement évaluer quelques possibilités et obtenir un système d'ordre réduit équivalent au système original. Pour ce système, on obtient la fonction de transfert d'ordre 4 suivante :

$$G_{servo} = \frac{0.0000016871S^3 - 0.0001593953S^2 + 0.0232594580S - 1.3083112887}{S^4 + 0.0001114343S^3 + 0.0055397652S^2 + 0.1428915495S + 1.2548622578}$$

La comparaison de la dynamique originale (ordre 16) et de la dynamique simplifiée (ordre 4) est présentée à la figure 6.6. Cette figure présente la réponse des deux systèmes à l'entrée échelon unitaire.

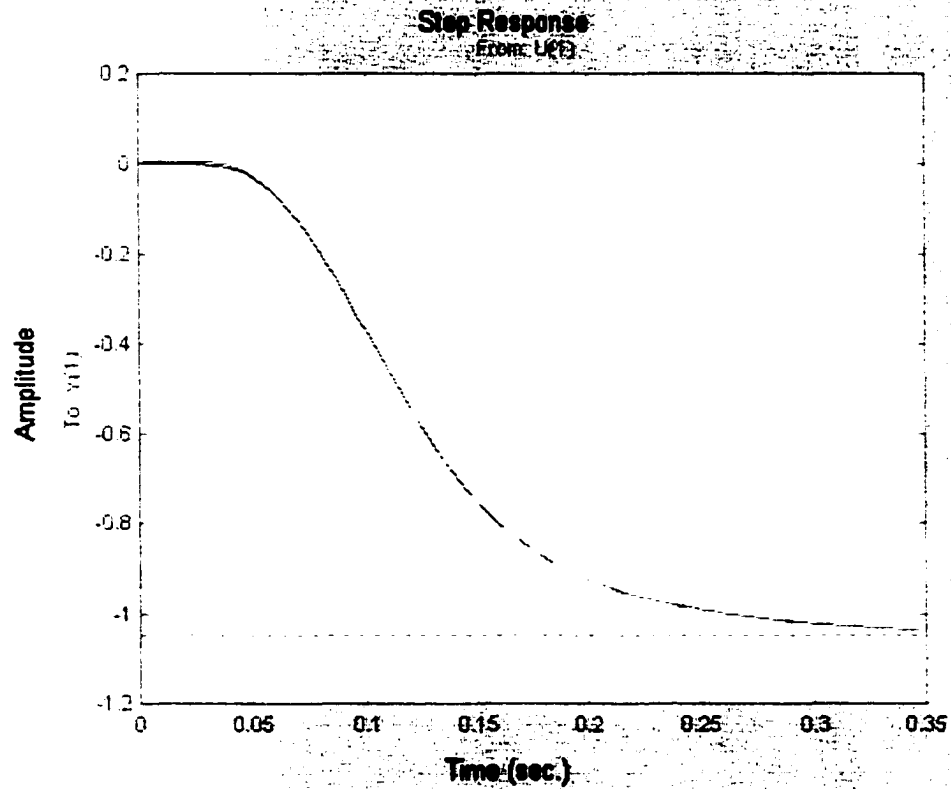


Figure 6.6 : Comparaison des dynamiques servo-contrôleur pour une entrée échelon

### 6.1.3 Dynamique du Gyroscope

La dynamique originale du gyroscope (Ggyro) est présentée à la figure 6.7.

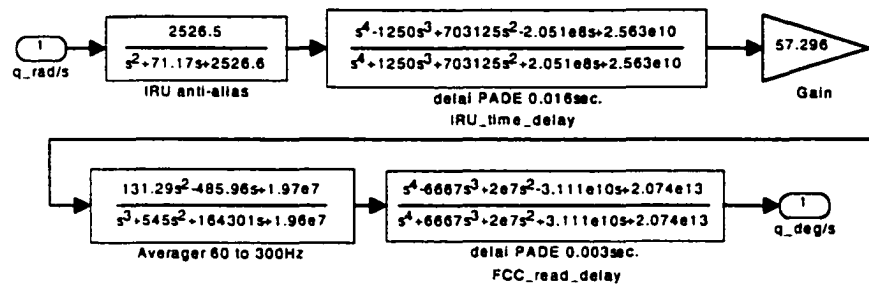


Figure 6.7 : Dynamique originale du gyroscope

La première étape de simplification consiste à rassembler les délais. Comme pour les deux cas précédent, le délai total sera approximé par un Pade d'ordre 2. À l'aide de la méthode des fractions partielles, les pôles influents de la dynamique seront identifiés. En simplifiant le délai de Pade, on obtient un nouveau système présenté à la figure 6.8.

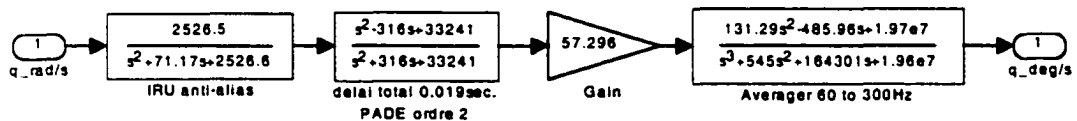


Figure 6.8 : Dynamique simplifiée du gyroscope

À partir du modèle dynamique simplifié, on définit un système d'ordre inférieur équivalent en suivant les étapes définies aux sections 6.1.1 et 6.1.2. On obtient comme réponse de la fonction RESIDUE :

Rnew =

1.0e+004 \*

0.0715 + 0.0214i

0.0715 - 0.0214i

2.3290

-0.7759 - 1.2160i

-0.7759 + 1.2160i

-0.4601 - 0.2885i

-0.4601 + 0.2885i

Pnew =

1.0e+002 \*

-1.6846 + 2.5655i

-1.6846 - 2.5655i

-2.0808

-1.5800 + 0.9098i

-1.5800 - 0.9098i

-0.3558 + 0.3550i

-0.3558 - 0.3550i

Knew =

[]

En automatisant le processus de comparaison (programme simp\_Ggyro.m), on peut rapidement évaluer quelques combinaisons de pôles et obtenir un système d'ordre réduit équivalent au système original. Pour ce système, on obtient la fonction de transfert d'ordre 5 suivante :

$$G_{gyro} = \frac{-0.00000014S^4 - 0.00005132S^3 + 0.00468584S^2 - 1.47625512S + 100.636897}{S^5 + 0.0000000595S^4 + 0.00001388S^3 + 0.00152863S^2 + 0.07423852S + 1.747591}$$

L'approximation d'ordre 3 est valable pour la fin du régime transitoire et pour le régime permanent, mais le début du régime transitoire ne correspond pas du tout dans une période près du mode short period. Il est donc préférable ici d'avoir un système d'ordre supérieur (ordre 6).

La comparaison de la dynamique originale (ordre 13) et de la dynamique simplifiée (ordre 6) est présentée à la figure 6.9. Cette figure présente la réponse des deux systèmes à l'entrée échelon unitaire.

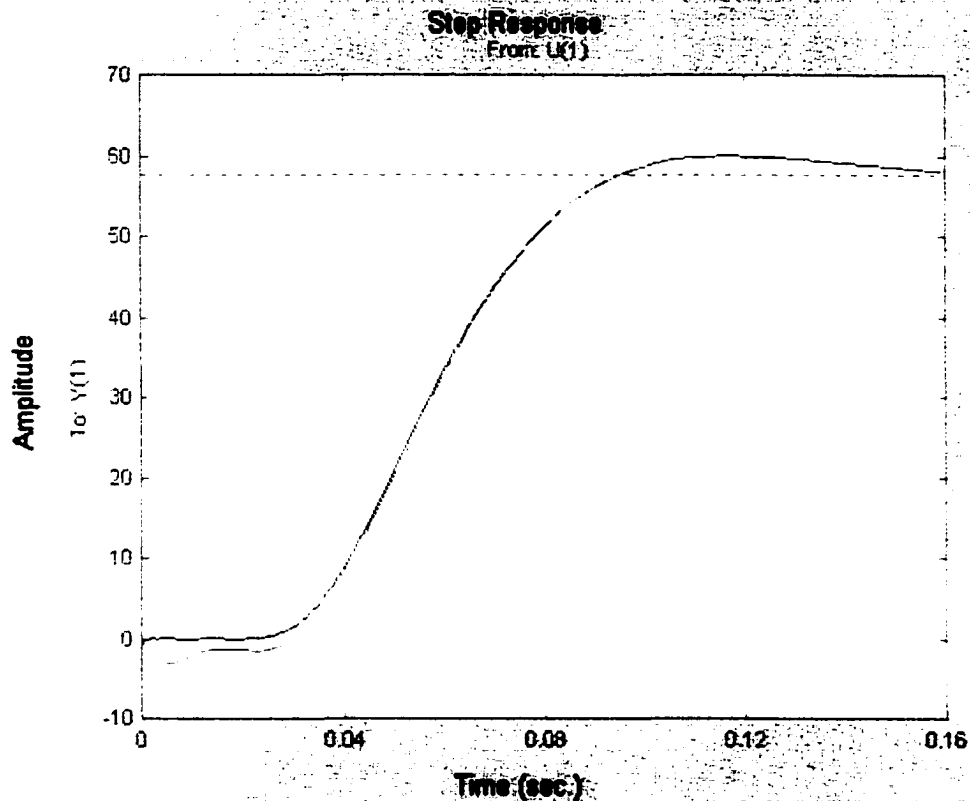


Figure 6.9 : Comparaison des dynamiques gyroscope pour une entrée échelon

## 6.2 Comparaison des systèmes dynamiques globaux

Suite à la simplification (élimination de pôles) des différentes composantes associées à la dynamique de l'avion, on doit vérifier que la dynamique globale simplifiée est comparable à la dynamique globale originale. Les deux systèmes seront comparés de deux façons; avec le lieu des racines et avec les réponses à une entrée échelon unitaire. Le système global original est présenté à la figure 6.10 tandis que le système global simplifié est présenté à la figure 6.11.

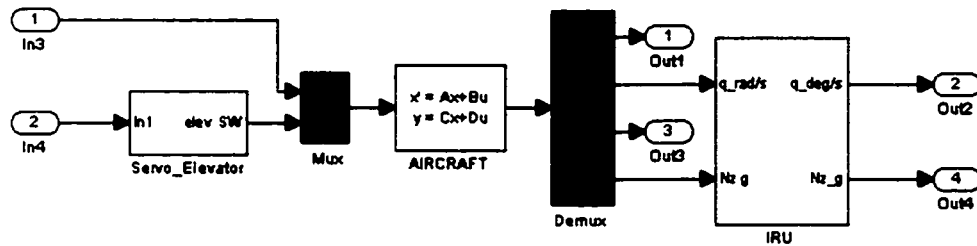


FIGURE 6.10 : MODÈLE DYNAMIQUE GLOBAL ORIGINAL

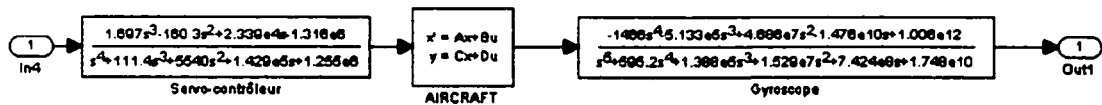


FIGURE 6.11 : MODÈLE DYNAMIQUE GLOBAL SIMPLIFIÉ

Les figures 6.10 et 6.11 proviennent des schémas Simulink des deux systèmes. Le modèle dynamique global, tel que présenté à la figure 6.10, possède quarante-quatre états (système d'ordre 44) tandis que le modèle simplifié n'en a que quatorze. Cette réduction du modèle permet une importante économie en temps de calcul.

### 6.2.1 Comparaison des systèmes avec le lieu des racines

Cette comparaison permet de vérifier si les simplifications réalisées sur les composantes affectent le lieu des racines des pôles influents de la dynamique de l'avion, tel les deux pôles short period.

Les systèmes étant déjà représentés avec des schémas Simulink, on peut alors en extraire les modèles d'état à l'aide de la fonction LINMOD de Matlab. Du modèle d'état, on passe à la fonction de transfert avec la fonction SS2TF. Et avec la fonction RLOCUS, on obtient alors la représentation graphique du lieu des racines. La comparaison est

réalisée graphiquement en superposant le résultat du modèle simplifié avec le résultat du modèle original. Il est à noter que les comparaisons sont effectuées avec le cas 109 (modèle numérique de l'avion). La figure 6.12 présente la superposition du lieu des racines pour le modèle original et simplifié, avec agrandissement sur le mode short period. Les résultats des deux modèles concordent, les lieux de racines se confondants sur la figure 6.12.

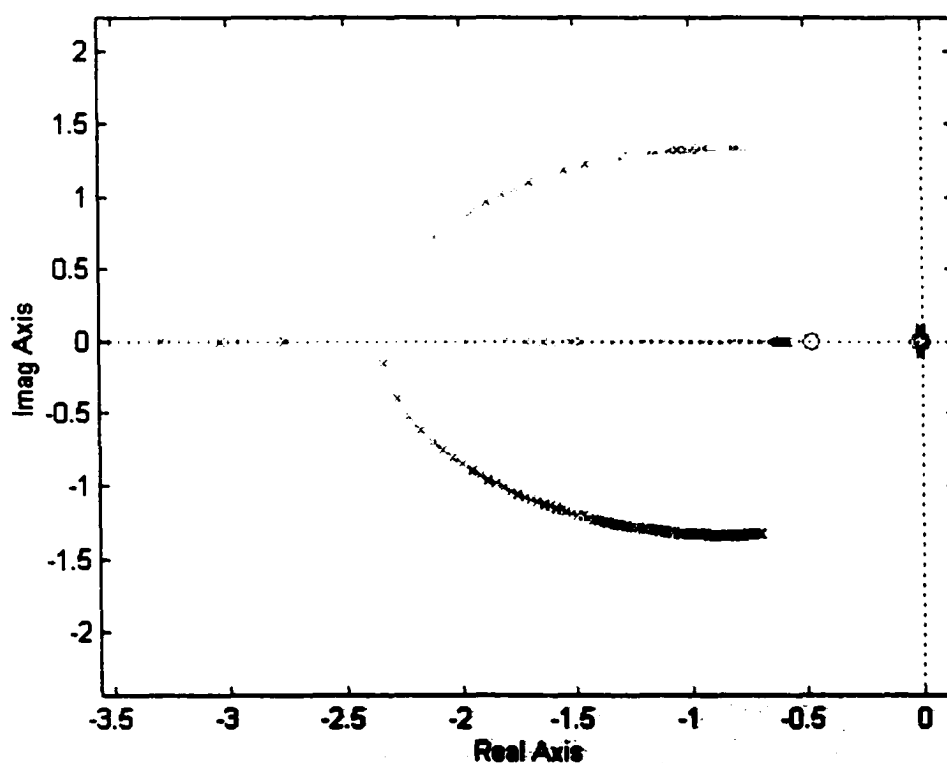


Figure 6.12 : Comparaison du lieu des racines pour le modèle original et simplifié

On aperçoit aussi le mode phugôide du côté droit de la figure. La concordance des résultats démontre que la simplification des composantes/actionneurs est valable car les principaux modes dynamiques de l'avion ne sont pas affectés.

En utilisant les mêmes modèles (original et simplifié), on peut aussi comparer leurs réponses à un échelon unitaire. La fonction LSIM permet d'évaluer la réponse temporelle d'un système à une entrée quelconque (échelon unitaire pour le cas présent). Les réponses des deux dynamiques sont comparées à la figure 6.13, sur une période de cinq cent (500) secondes.

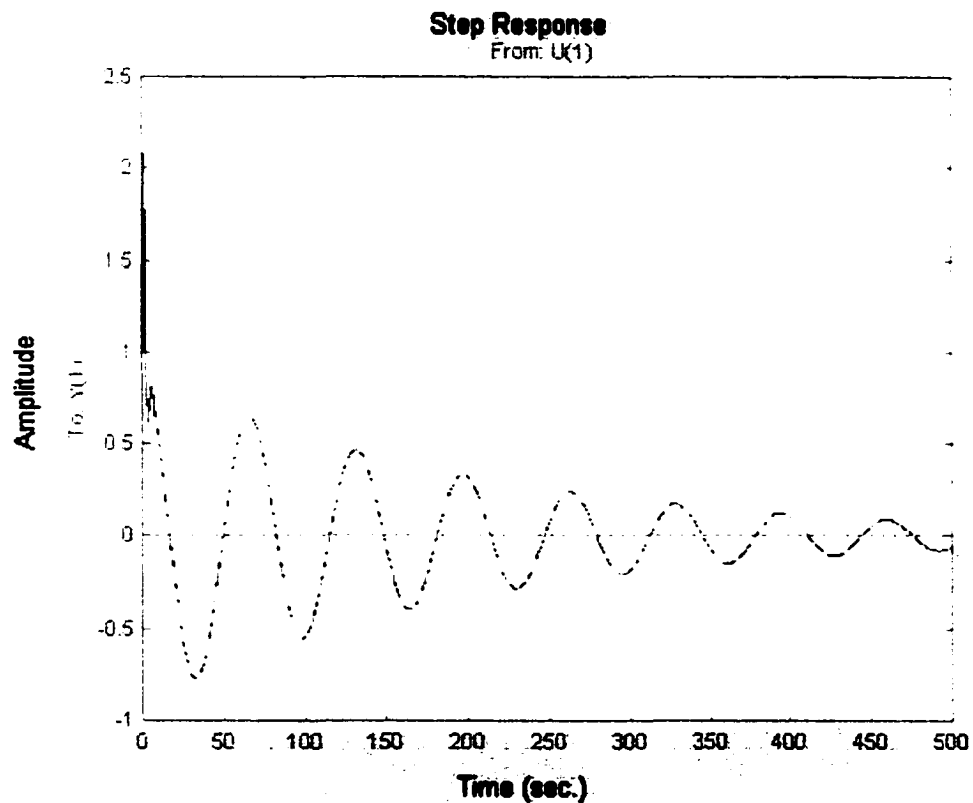


Figure 6.13 : Comparaison de la réponse à l'échelon unitaire

Les modes phugoïde et short period apparaissent clairement sur le graphique, le mode phugoïde a une période d'environ soixante-dix (70) secondes et est faiblement amorti tandis que le mode short period (à l'extrême gauche de la figure 6.13) a une période d'environ trois (3) secondes et est fortement amorti. La figure 6.14 présente un agrandissement sur le mode short period. La figure 6.15 présente la réponse en régime considéré permanent.

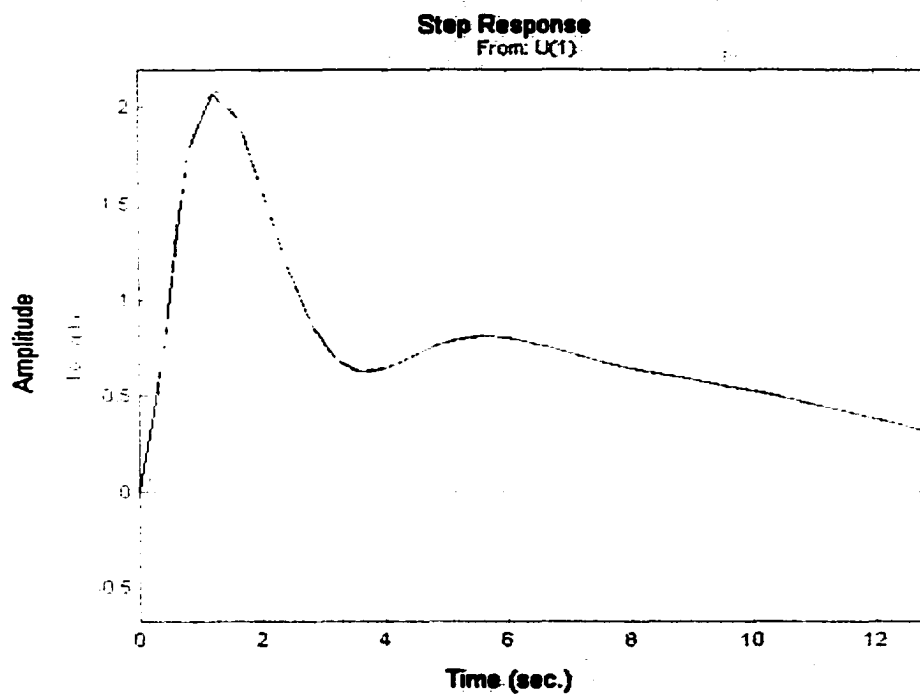


Figure 6.14 : réponse à l'échelon unitaire, mode short period

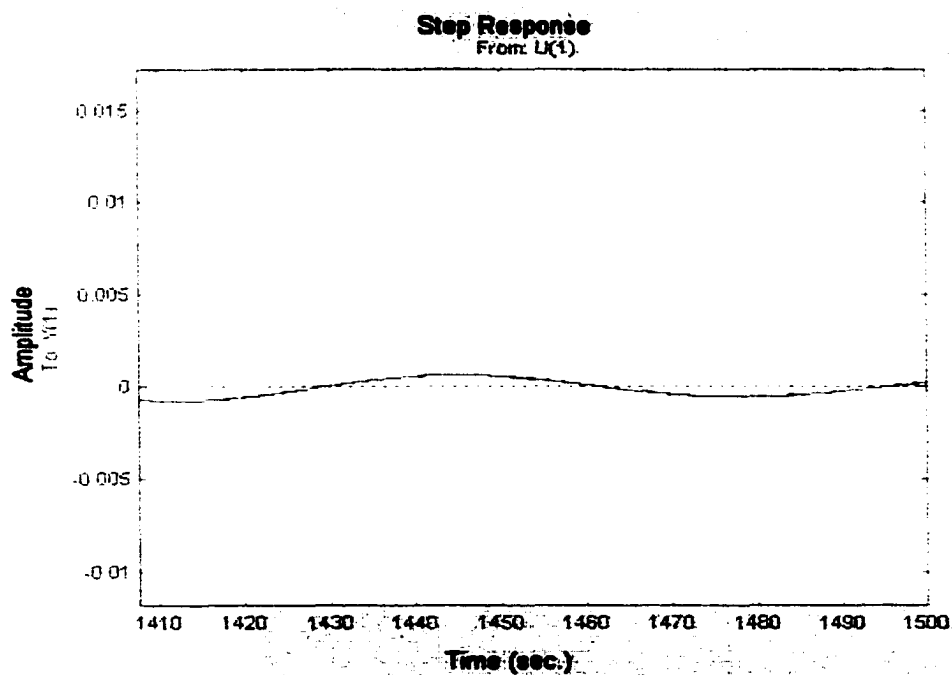


Figure 6.15 : réponse à l'échelon unitaire, régime permanent

Les derniers résultats permettent de conclure que la dynamique globale simplifiée est valable comme nouvelle dynamique de référence. Ainsi, pour le reste du document, les mentions référant aux actionneurs et aux composantes feront références aux modèles dynamiques simplifiés de ceux-ci.

## **CHAPITRE 7**

### **APPROXIMATION SHORT PERIOD ANALYTIQUE**

L'objectif de cette section est de simplifier analytiquement le modèle dynamique fourni par le client. La méthode analytique a comme principal avantage de permettre la modélisation de la dynamique de l'avion à partir des dérivées de stabilité (données de soufflerie). Le coût de calcul est minime et la méthode bien documentée car c'est la méthode la plus couramment utilisée. Toutefois, la simplification analytique élimine certains effets de couplage et modifie sensiblement la dynamique short period de l'avion. Cette simplification permettra de développer une technique d'échelonnement analytique pour les paramètres de la dynamique longitudinale d'un avion en fonction de la pression dynamique. Cet objectif sera réalisé à travers différentes étapes de recherche.

À partir du modèle d'états obtenu au chapitre 3 ainsi qu'à partir des données numériques fournies par le client, l'approximation short period analytique sera définie. L'approximation analytique sera ensuite comparée au modèle original pour en vérifier la validité.

Un premier schéduling sera réalisé entre les paramètres de l'avion et la pression dynamique. Cette première étape permettra d'estimer un modèle dynamique de l'avion à partir de la pression dynamique.

Avec une définition simplifiée des modèles dynamiques de l'avion et de ses composantes, il est ensuite possible d'évaluer l'effet de la simplification sur la position des zéros (2) du modèle. On obtiendra alors deux relations de translation du zéro en fonction de la pression dynamique. À ce moment, il sera alors possible d'approximer un modèle dynamique d'ordre 2 complet en fonction de la pression dynamique.

## 7.1 Approximation analytique du modèle short period.

La littérature [10,11,12] présente une méthode analytique pour approximer la dynamique de l'avion par son mode short period. Cette section présente cette méthodologie et évalue la correspondance des résultats avec le modèle original.

### 7.1.1 Présentation de la méthode de l'approximation analytique.

À partir du modèle longitudinal, défini au chapitre 3, il est possible de déduire l'approximation 'short period' du modèle. Cette approximation consiste à présumer que toute variation,  $u$ , qui modifie la vitesse suite à la déflexion d'une surface de contrôle, de turbulences atmosphériques ou simplement du mouvement de l'avion, sont si petites que tous les termes incluant  $u$  sont négligeables. En d'autre mots, le paramètre  $U_0$  demeure constant. Les équations du mouvement peuvent maintenant être écrite comme :

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Z_w w + U_0 q + Z_{\delta_e} \delta_e \\ \dot{q} &= M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e \\ &= (M_w + M_{\dot{w}} Z_w) w + (M_q + U_0 M_w) q + (M_{\delta_e} + Z_{\delta_e} M_{\dot{w}}) \delta_e\end{aligned}$$

En considérant que le terme  $M_{\dot{w}}$  a peu d'effets sur le mouvement de l'avion, on peut redéfinir le modèle 'short period' avec le vecteur d'états:

$$x = \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix}$$

Les nouvelles matrices d'états sont définies :

$$A = \begin{bmatrix} Z_w & U_0 \\ M_w & M_q \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix}$$

En normalisant par rapport à  $U_0$ , on obtient les équations :

$$\frac{\dot{w}}{U_0} = \dot{\alpha} = Z_w \frac{w}{U_0} + q + \frac{Z_{\delta_e}}{U_0} \delta_e$$

$$\dot{q} = M_w U_0 \frac{W}{U_0} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e$$

On obtient ainsi le modèle d'état:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e}/U_0 \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e$$

que l'on retrouve dans l'article de Biannic, Apkarian et Garrard [12].

À partir du modèle numérique du client, on retrouve le modèle réduit en éliminant dans la matrice A les colonnes et rangées 1, 4 et 5 ainsi que les rangées 1, 4 et 5 et la deuxième colonne dans la matrice B. Cette élimination des rangées et des colonnes correspond à la simplification analytique tel que présenté dans la littérature.

### 7.1.2 Comparaison de la dynamique originale et approximée.

L'approximation analytique short period est une méthode de simplification du modèle utilisée dans plusieurs travaux. Dans cette section, on compare le lieu des racines du mode short period original avec le mode short period obtenu avec la simplification analytique. La figure 7.1 présente la superposition du lieu des racines pour le modèle original (modèle client d'ordre 5) et simplifié (ordre 2).

En analysant la figure 7.1, il est clair que la simplification short period analytique (courbe externe) modifie le mode short period original (courbe interne) sensiblement. En effet, la méthode d'élimination des colonnes et rangées simplifie le système mais aussi élimine plusieurs effets de couplage du système original. La tendance du lieu des racines reste toutefois la même mais il faut tout de même retenir que l'approximation analytique short period n'est pas très précise.

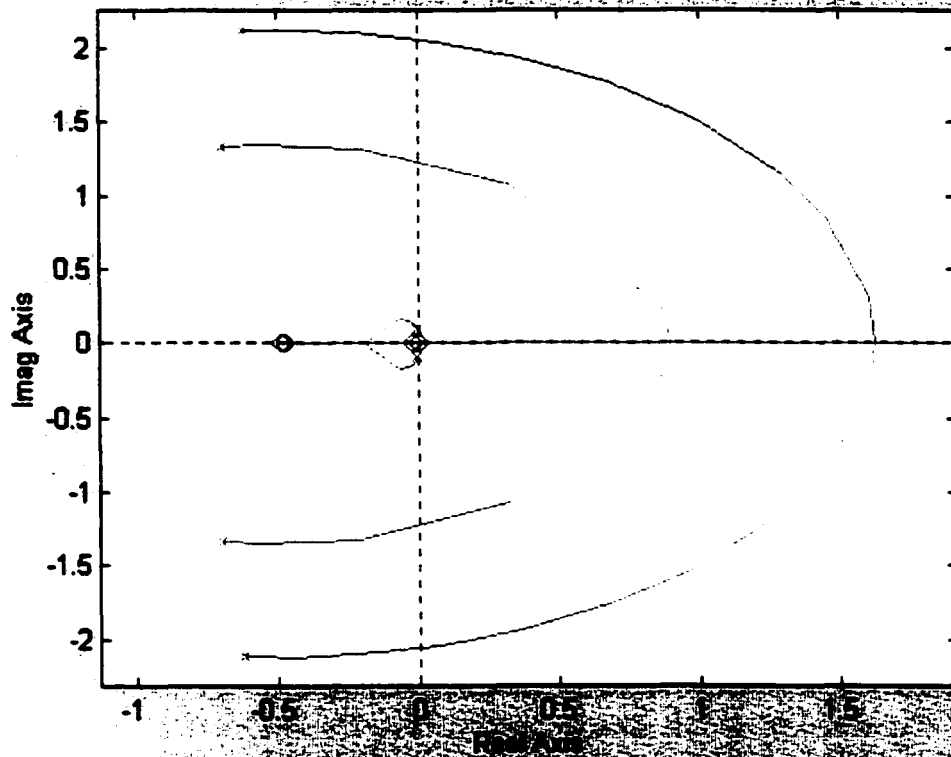


Figure 7.1 : Lieu des racines du système original vs. simplifié analytique

## **7.2 Échelonnement des paramètres de l'avion en fonction de la pression dynamique.**

La littérature [12] indique que la variations des dérivées de stabilité dépend principalement de la pression dynamique. Les données numériques fournies par le client nous permettent de vérifier s'il est possible d'approximer les dérivées de stabilité à partir de la pression dynamique.

### **7.2.1 Dérivées de stabilité en fonction de la pression dynamique.**

Les différents modèles d'états (120 cas) fournis par le client sont définis pour différents paramètres; position du centre de masse, poids total de l'avion, altitude, vitesse et pression dynamique. Pour trouver une relation valable, il est important de fixer quelques paramètres qui influencent beaucoup la dynamique de l'avion comme le centre de masse et le poids total de l'avion. Il n'est pas nécessaire de s'attarder sur la vitesse et l'altitude, ces deux paramètres étant inclus dans le calcul de la pression dynamique. Donc, pour un poids total et une position du centre de masse fixés, il est possible de déterminer une relation entre les dérivées de stabilité et la pression dynamique.

Pour les besoins de ce travail, les cas 109, 110, 113, 114, 117 et 118 ont été sélectionnés. Tous ces cas ont une position du centre de masse de 38 et un poids de 39000 lbs. À l'aide d'un chiffrier, une présentation graphique ainsi qu'une régression linéaire ont été réalisées pour les cinq dérivées de stabilité du modèle d'état. Les résultats sont présentés à la figure 7.2.

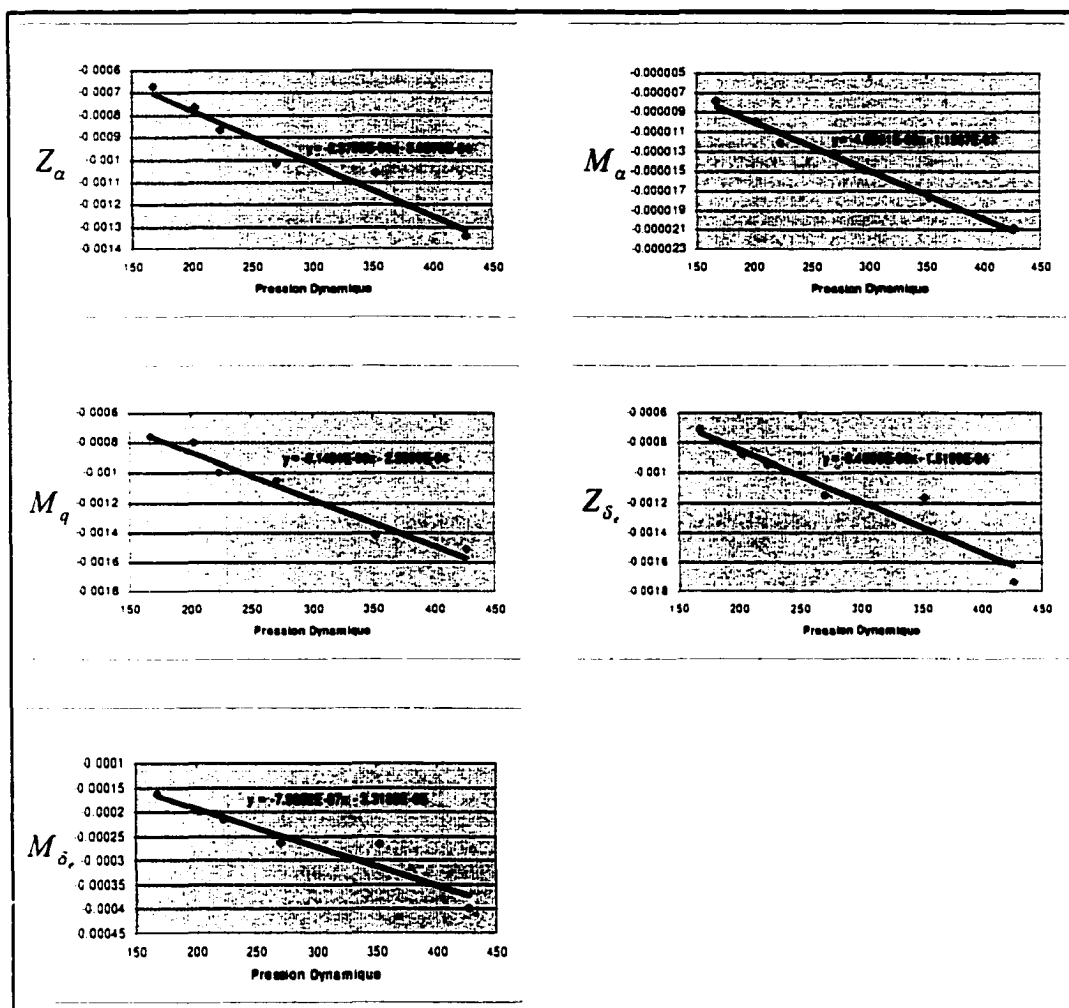


Figure 7.2 : Dérivées de stabilité en fonction de la pression dynamique

Tel que présenté à la figure 7.2, les régressions linéaires permettent l'obtention de cinq (5) équations reliant les cinq (5) dérivées de stabilité à la pression dynamique :

$$Z_\alpha = -2.3733e-6 \bar{q} - 3.0378e-4$$

$$M_\alpha = -4.9351e-8 \bar{q} - 1.1567e-7$$

$$M_q = -3.1484e-6 \bar{q} - 2.2960e-4$$

$$Z_{\delta_e} = -3.4593e-6 \bar{q} - 1.5190e-4$$

$$M_{\delta_e} = -7.9652e-7 \bar{q} - 3.3103e-5$$

Ces expressions ne sont toutefois valables que pour les cas où l'avion a une position du centre de masse de 38 et un poids de 39000 lbs. Pour une configuration différente, il est permis de penser que les pentes et les ordonnées à l'origine des cinq (5) équations seront fonction de la position du centre de masse et du poids total de l'avion.

### 7.2.2 Fréquence et amortissement en fonction de la pression dynamique.

En plus des dérivées de stabilité, il est aussi possible d'obtenir la fréquence et l'amortissement short period à partir des dérivées de stabilité et de la vitesse de l'avion [10]. Les expressions sont les suivantes :

$$\omega_{n_{sp}} = \sqrt{\frac{M_q Z_\alpha}{V_T} - M_\alpha}$$

$$\zeta_{sp} = \frac{-\left(M_q + Z_\alpha / V_T\right)}{2\omega_{n_{sp}}}$$

où  $V_T$  est exprimé en Mach. La figure 7.3 présente la fréquence du mode short period en fonction de la pression dynamique.

Le graphique présente la tendance linéaire entre la fréquence du mode short period et la pression dynamique pour les cas 109, 110, 113, 114, 117 et 118. En comparaison, les pôles du mode short period ont été extraits par la méthode des valeurs propres directement de la matrice A simplifiée analytiquement, et de ces pôles ont été calculés les fréquences du mode. L'approche analytique pour évaluer la fréquence short period  $\omega_{n_{sp}}$  cause une erreur, que l'on peut estimer constante, d'environ 10%.

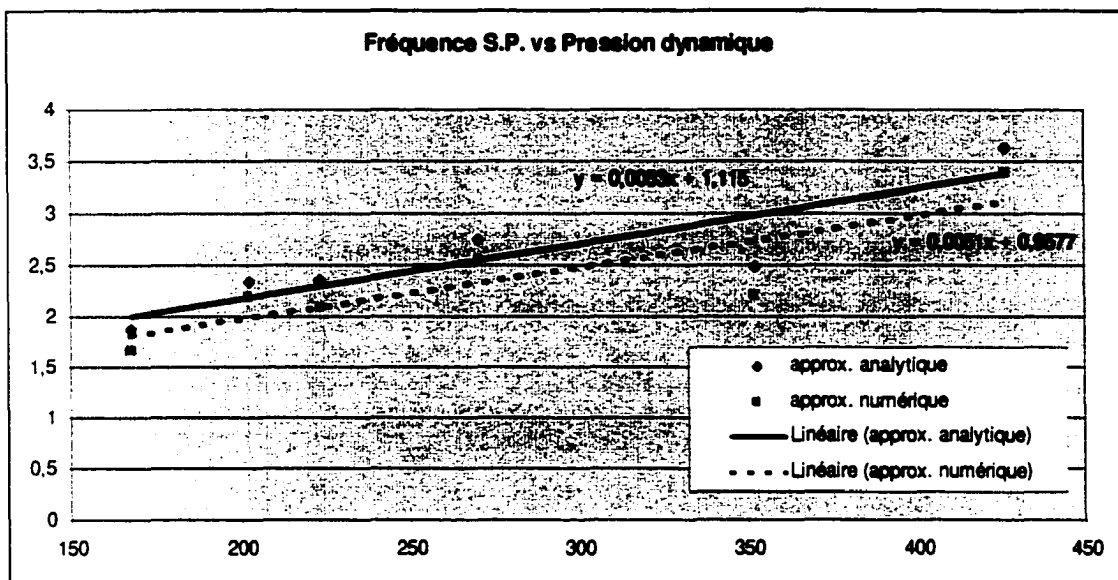


Figure 7.3 : Fréquence du mode short period en fct. de la pression dynamique

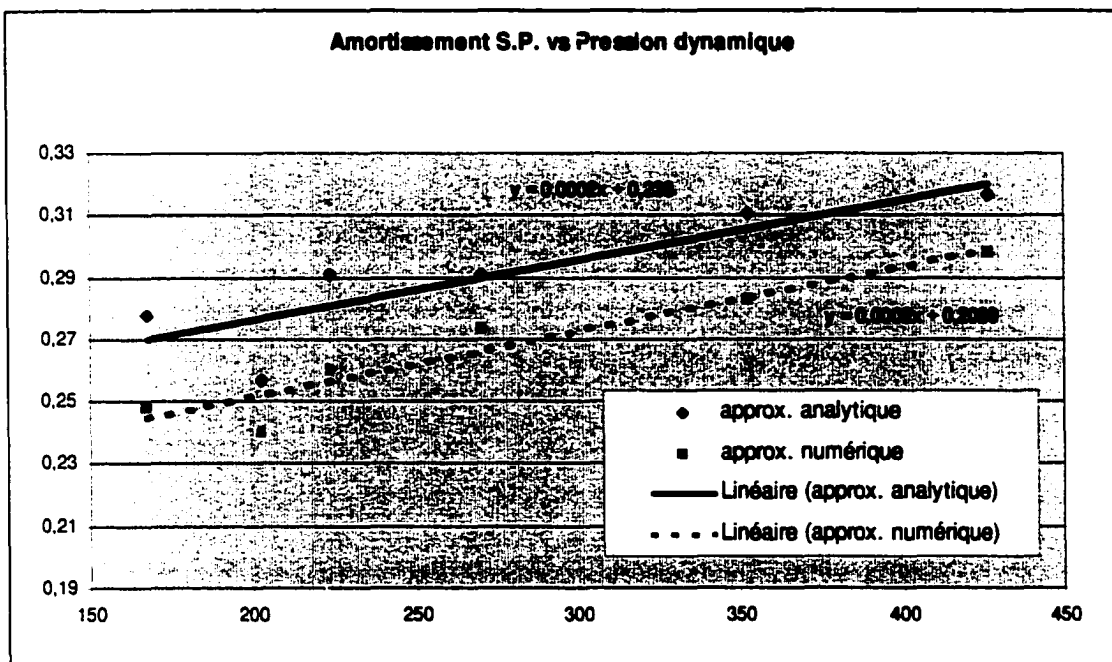


Figure 7.4 : Amortissement du mode short period en fct de la pression dynamique

La figure 7.4 présente la tendance linéaire entre l'amortissement du mode short period et la pression dynamique pour les cas 109, 110, 113, 114, 117 et 118. Comme pour la

fréquence, les amortissements ont aussi été évalués directement à partir des pôles de la matrice A simplifiée. Encore une fois, on reconnaît la tendance entre les 2 courbes mais on décelé tout de même une erreur d'environ 10% sur l'évaluation analytique de l'amortissement short period  $\zeta_{sp}$ .

L'estimation de la fréquence et de l'amortissement du mode short period peut donc être réalisée avec les équations suivantes :

$$\omega_{n_{sp}} = 0.0053\bar{q} + 1.115$$

$$\zeta_{sp} = 0.0002\bar{q} + 0.238$$

### 7.3 Approximation d'ordre 2 de la dynamique globale.

Il a été démontré au chapitre 6 que l'ajout des composantes/actionneurs au modèle de l'avion n'avait pas d'impact sur le positionnement des pôles du mode short period. Cette démonstration a été faite avec le modèle d'avion à 5 états. La présente section est basée sur la démonstration du chapitre 6. Dans cette section, on combine les dynamiques des composantes/actionneurs avec le modèle analytique short period simplifié et on en extrait une approximation d'ordre 2 de la dynamique globale. Toutefois, le comportement des zéros sera analysé et des relations entre les zéros et la pression dynamique seront extraites.

#### 7.3.1 Modèle de l'avion simple

On obtient aisément le modèle de l'avion à l'aide des données numériques fournies par le client. Nous utiliserons ici les mêmes cas que ceux utilisés à la section précédente, soit les cas 109, 110, 113, 114, 117 et 118. Du modèle client (ordre 5), on fait

l'extraction du modèle short period (ordre 2) pour chacun des cas. À partir de l'approximation short period, on peut obtenir les pôles ainsi que les zéros associés à ce mode. Ces étapes sont réalisées pour chacun des six (6) cas mentionnés, toutefois seule l'analyse du cas 109 sera présentée ici.

Un programme (extraction\_ABCDsp.m) permet d'extraire le modèle d'état simplifié analytiquement (matrices A, B, C et D) pour un cas choisi. Du modèle d'état (ordre 2), on passe aux fonctions de transfert  $\frac{q}{\delta_e}$  et  $\frac{w}{\delta_e}$  (avec la fonction Matlab SS2TF). La racine des numérateurs nous donne les zéros et les racines du dénominateur nous donnent les pôles, que nous appellerons zéro\_q, zéro\_w et pôles short period.

Appliqué au cas 109, les résultats obtenus sont :

» extraction\_ABCDsp

p\_109 =  
-0.6238 + 2.1144i  
-0.6238 - 2.1144i

zq\_109 =  
-0.4917

zw\_109 =  
-115.7135

Le lieu des racines (fonction RLOCUS dans Matlab) pour le cas 109  $\frac{q}{\delta_e}$  est présenté à la figure 7.1. Le résultat démontre qu'un gain sur la rétroaction  $q$ , si trop élevé, peut causer l'instabilité du système. Toutefois, seul le modèle aérodynamique de l'avion est considéré.

### 7.3.2 Modèle de l'avion avec le servo-contrôleur et le gyroscope

À la dynamique de l'avion, variable avec les conditions de vol, ajoutons la dynamique du servo-contrôleur et du gyroscope, qui ne varient pas selon les conditions de vol. Tel que présenté sur le modèle de contrôleur fourni par le client, les dynamiques du servo-contrôleur, de l'avion et du gyroscope sont en série. L'agencement des dynamiques est présentée à la figure 7.5. Les dynamiques du servo-contrôleur et du gyroscope sont les dynamiques simplifiées tel qu'évaluées au chapitre 6.

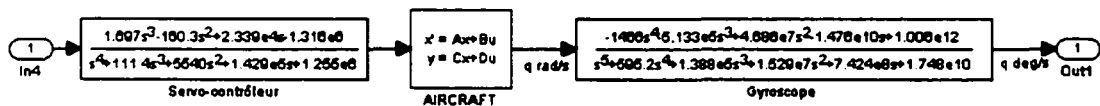


Figure 7.5 : Agencement des dynamiques.

En procédant de la même façon que pour simplifier les dynamiques des composantes, on extrait d'abord les fonctions de transfert équivalentes ( $\frac{q}{\delta_e}$  et  $\frac{w}{\delta_e}$ ) avec les fonctions

LINMOD (donne la représentation d'état à partir du modèle Simulink) et SS2TF (traduit de la représentation d'état à la fonction de transfert). On applique ensuite la méthode des fractions partielles avec la fonction RESIDUE et on obtient ainsi tous les pôles ainsi que les numérateurs associés. On obtient comme réponse de la fonction RESIDUE (pour

$$\frac{q}{\delta_e} ) :$$

» zeros\_sp\_analy

r\_q =

```
-0.3938
-0.2969 + 0.1024i
-0.2969 - 0.1024i
17.4853 -28.1301i
```

```

17.4853 +28.1301i
75.7158
-29.2758 - 1.3040i
-29.2758 + 1.3040i
-59.6804
4.2666 - 1.5163i
4.2666 + 1.5163i

```

p\_q =

```

1.0e+002 *
-2.0880
-1.5765 + 0.9124i
-1.5765 - 0.9124i
-0.3555 + 0.3549i
-0.3555 - 0.3549i
-0.4518
-0.2517 + 0.3339i
-0.2517 - 0.3339i
-0.1589
-0.0062 + 0.0211i
-0.0062 - 0.0211i

```

On retrouve ainsi les pôles short period du modèle simple de l'avion (pôles 10 et 11).  
En exécutant la fonction RESIDUE inverse, on extrait la fonction de transfert simplifiée avec les pôles choisies, soit les deux pôles short period et on obtient alors :

poles =

```

-0.6237 + 2.1144i
-0.6237 - 2.1144i

```

zero\_q =

```

-1.3752 - 0.0000i

```

zero\_w =

```

4.5874 - 0.0000i

```

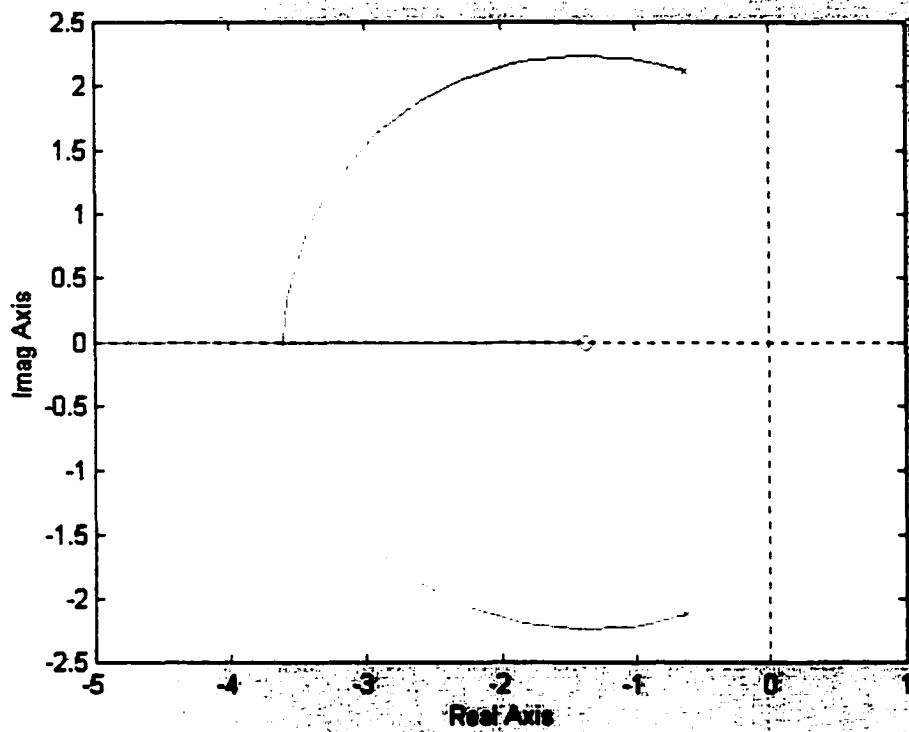


Figure 7.6 : Lieu de racines pour la dynamique en série.

Les pôles short period sont restées les mêmes, mais  $\text{zéro}_q$  et  $\text{zéro}_w$  se sont déplacés, ayant des valeurs respectives de  $-1.3752$  et  $4.5874$  versus  $-0.4917$  et  $-115.7135$  pour le modèle simple de l'avion. Cette translation du zéro modifie complètement le lieux des racines, comme présenté à la figure 7.6 (pour  $\frac{q}{\delta_e}$ ). La translation du zéro élimine la limite sur le gain, le mode short period étant toujours stable, peu importe le gain.

L'ajout de dynamiques invariables selon les conditions de vol n'a pas d'effet sur les pôles short period, mais il modifie le positionnement du zéro et affecte donc ainsi la dynamique du mode. Cette analyse a été reprise sur les cinq autres cas étudiés ici (en automatisant les étapes de calcul avec le programme `zeros_sp_analy.m`) et les mêmes résultats sont observés. Le tableau 7.1 présente les valeurs des zéros pour le système

simple (dynamique de l'avion seulement) ainsi que les valeurs des zéros pour le système en série (servo-contrôleur, avion et gyroscope).

Tableau 7.1

Variations des zéros pour l'ajout des dynamiques des composantes

cas	dynamique de l'avion		dynamique en série	
	zero_q	zero_w	zero_q	zero_w
109	-0,4917	-115,7135	-1,3752	4,5874
110	-0,8861	-163,2852	-3,1447	3,6996
113	-0,4902	-294,521	-1,2956	4,5428
114	-0,6493	-155,8399	-1,8978	4,3326
117	-0,3661	-131,0683	-0,8694	4,9077
118	-0,4854	-154,2022	-1,3886	4,627

En analysant les variations (translations) des zéros, on trouve des relations entre la variation des zéros et la pression dynamique. La figure 7.7 présente la valeur de translation pour le zero\_q ( zéro de  $\frac{q}{\delta_e}$  ) et la pression dynamique. On remarque qu'un point est légèrement à l'écart (cas 109), ce cas est aussi éloigné pour quelques une des relations des dérivées de stabilités. La figure 7.8 présente la valeur de translation pour le zero\_w ( zéro de  $\frac{w}{\delta_e}$  ) et la pression dynamique. On remarque ici que la translation peut être approximée comme une valeur constante de 150. On remarque aussi pour ce graphique un point à l'écart (cas 113). Cet écart est inexpliqué.

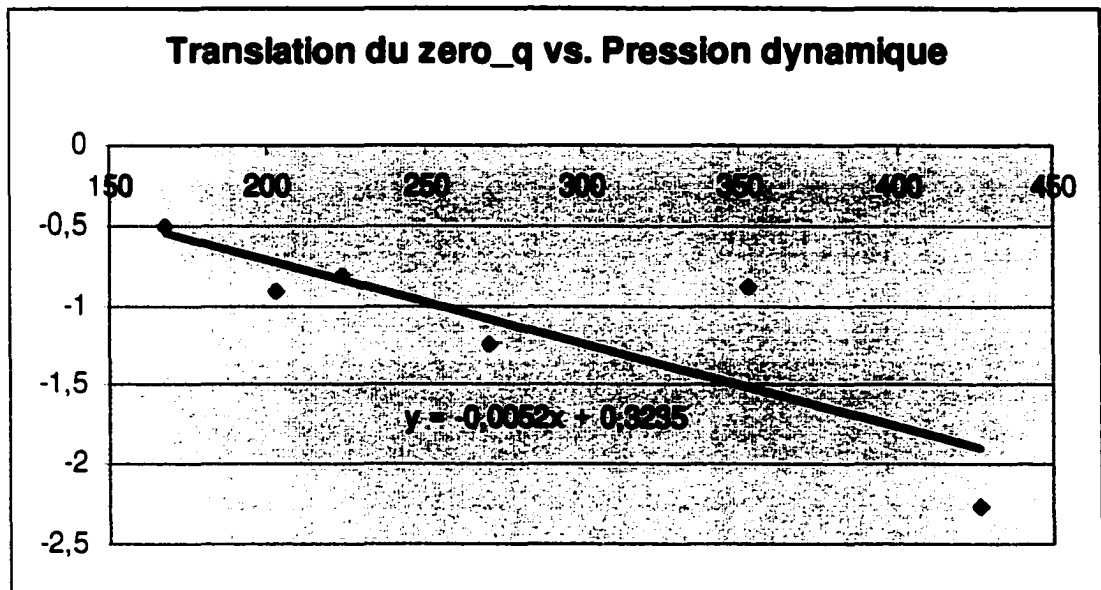


Figure 7.7 : Relation entre la translation de zéro\_q et la pression dynamique

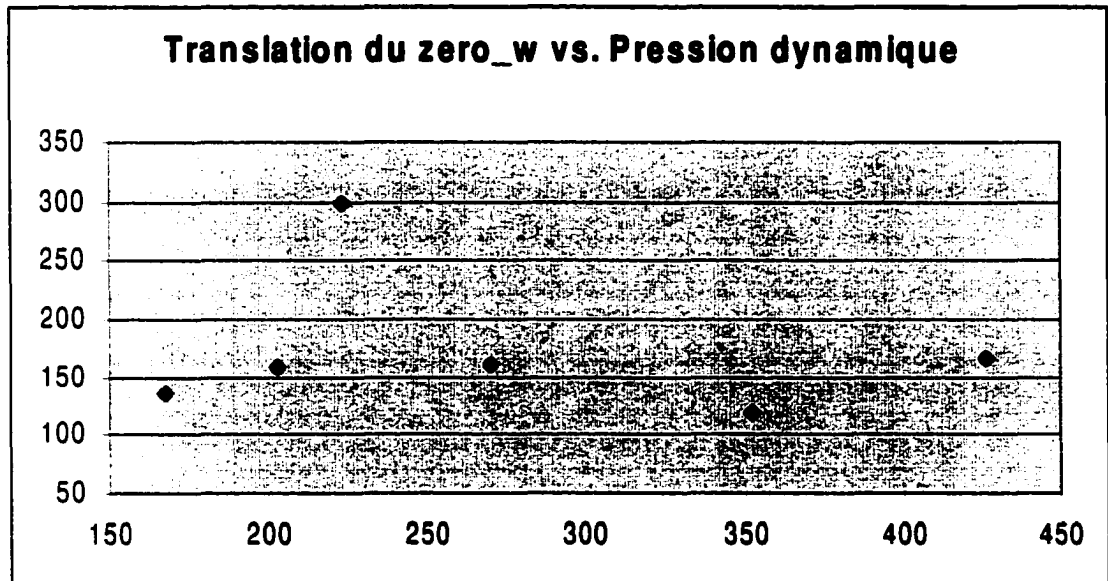


Figure 7.8 : Relation entre la translation de zéro\_w et la pression dynamique

En résumé, avec une configuration d'avion (poids et centre de masse) connue, on peut approximer le modèle de l'avion  $G_{avion}$  (approximation de la dynamique longitudinale avec le modèle short period) en fonction de la pression dynamique. À partir de cette

fonction de transfert, on extrait les pôles et zéros. L'ajout de la dynamique des composantes invariables cause une translation des zéros. Cette translation est aussi fonction de la pression dynamique. On obtient ainsi une approximation short period du modèle complet en boucle ouverte.

#### 7.4 Limitation de l'approximation d'ordre 2 de la dynamique globale.

Une méthode de simplification analytique du modèle vient d'être définie. Une comparaison du modèle simplifié avec le modèle de référence permet d'évaluer les limitations d'une telle approximation. La comparaison est réalisée entre les deux lieux des racines. La figure 7.9 présente cette comparaison.

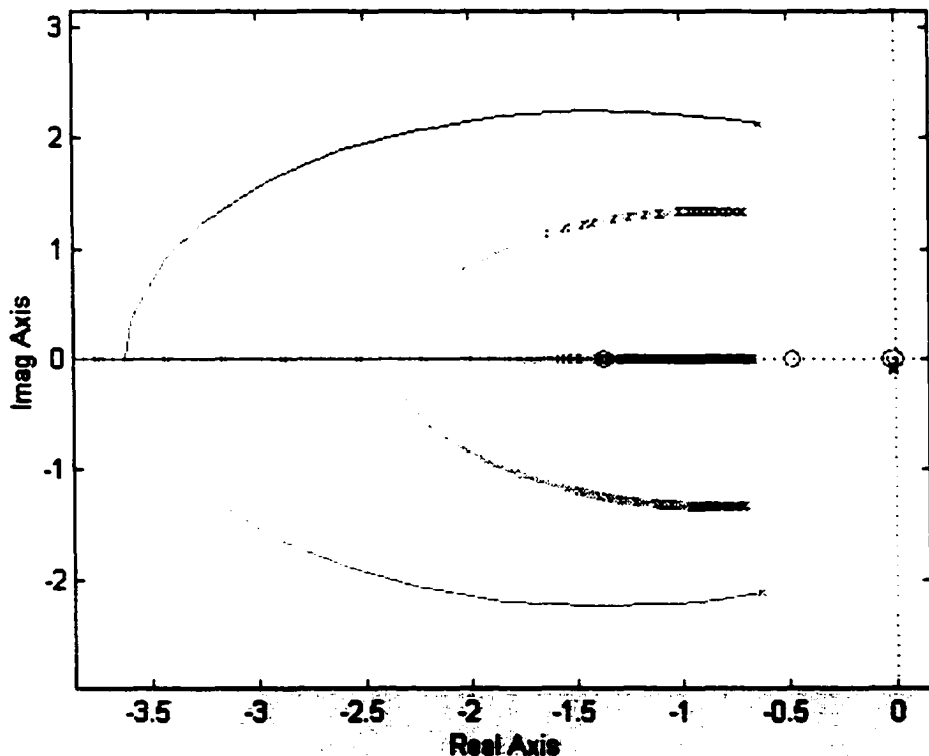


Figure 7.9 : Comparaison du modèle global ordre 2 avec le modèle de référence

Comme démontré à la section 7.1.2, la simplification short period analytique modifie le mode short period original sensiblement. Cette différence se transporte jusqu'au modèle simplifié d'ordre 2 car on simplifie en gardant le mode short period. La tendance du lieu des racines reste toutefois la même mais il est difficile de définir une plage de gain pour laquelle les systèmes pourraient être considérés comme équivalents.

Le chapitre suivant reprend les étapes du présent chapitre, mais en utilisant une approximation short period numérique.

## **CHAPITRE 8**

### **APPROXIMATION SHORT PERIOD NUMÉRIQUE**

La simplification analytique, telle que présentée au chapitre 7, élimine certains effets de couplage et modifie sensiblement la dynamique short period de l'avion. La méthode numérique, présentée dans ce chapitre, a pour avantage de conserver intacte la dynamique short period mais exige toutefois un traitement numérique plus complexe pour le calcul des valeurs propres de la dynamique. L'objectif de cette section est de simplifier numériquement le modèle dynamique fourni par le client. Cette simplification permettra de développer une technique d'échelonnement numérique pour les paramètres de la dynamique longitudinale d'un avion en fonction de la pression dynamique. Cet objectif sera réalisé à travers différentes étapes de recherches.

À partir des données numériques fournies par le client, l'approximation short period numérique sera définie. L'approximation numérique sera ensuite comparée au modèle original pour en vérifier la validité.

Un échelonnement sera réalisé entre la dynamique de l'avion (fréquence naturelle, amortissement et zéros) et la pression dynamique. Cette première étape permettra d'estimer un modèle dynamique de l'avion à partir de la pression dynamique.

Tout comme au chapitre précédent, avec une définition simplifiée des modèles dynamiques de l'avion et de ses composantes, il est ensuite possible d'évaluer l'effet de la simplification sur la position des zéros (2) du modèle. On obtiendra alors deux relations de translation du zéro en fonction de la pression dynamique. À ce moment, il sera alors possible d'approximer un modèle dynamique d'ordre 2 complet en fonction de la pression dynamique.

## **8.1 Approximation numérique du modèle short period.**

Pour faire une approximation numérique du modèle short period, on reproduit la démarche de simplification des composantes/actionneurs, telle que présentée au chapitre 6.

### **8.1.1 Présentation de la méthode de l'approximation numérique.**

La simplification short period numérique suit les mêmes étapes de résolution que la méthode de simplification des composantes/actionneurs présentée au chapitre 6. À partir du modèle longitudinal numérique fourni par le client (ordre 5), on extrait tous les pôles du système. Parmi les cinq pôles on identifie les pôles du mode short period. On approxime le modèle à l'aide de la méthode des fractions partielles inverses. On obtient ainsi une approximation numérique d'ordre 2 du modèle short period de l'avion. De plus, le nouveau zéro ainsi créé compense pour la dynamique éliminée lors de l'approximation.

### **8.1.2 Comparaison de la dynamique originale et approximée numérique.**

Dans cette section, on compare le lieu des racines du mode short period original avec le mode short period obtenue avec la simplification numérique. La figure 8.1 présente la superposition du lieu des racines pour le modèle original et simplifié.

En analysant la figure 8.1, on voit que l'approximation short period numérique est précise comparativement à l'approximation short period analytique. Tout d'abord, les pôles short period ne sont pas modifiés par rapport à la version originale. Ensuite, le système original et l'approximation sont équivalents jusqu'à un gain d'environ dix-huit

pour l'approximation short period numérique. La limitation du client pour le gain de la rétroaction sur la vitesse angulaire  $q$  est inférieure à cette valeur. À cette étape, on peut conclure que l'approximation short period numérique est beaucoup plus fidèle que l'approximation short period analytique. On remarque que le lieu des racines diverge à un certain gain. Cette divergence est causée par l'élimination de 3 des 5 pôles initiaux.

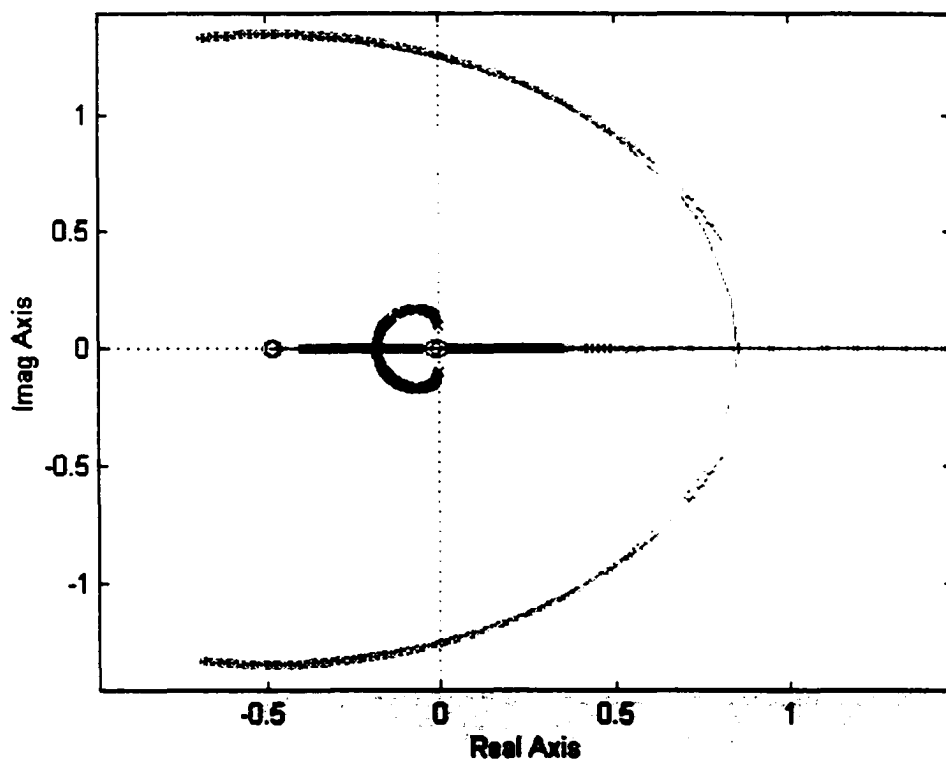


Figure 8.1 : Lieu des racines du système original vs. simplifié numérique

## 8.2 Échelonnement de la dynamique de l'avion en fct. de la pression dynamique.

Au chapitre précédent, un échelonnement des dérivées de stabilité a été réalisé en fonction de la pression dynamique. Les dérivées de stabilité n'existent plus pour l'approximation short period numérique. Pour cette raison, cette section est consacrée à

l'échelonnement de la dynamique de l'avion (fréquence, amortissement et zéros) en fonction de la pression dynamique. Les données numériques fournies par le client nous permettent de faire l'approximation short period numérique et d'ensuite vérifier s'il est possible d'approximer la dynamique de l'avion à partir de la pression dynamique.

Pour les besoins de l'analyse, nous utiliserons les mêmes cas client utilisés précédemment, soient les cas 109, 110, 113, 114, 117 et 118. Tous ces cas ont une position du centre de masse de 38 et un poids de 39000 lbs. À l'aide d'un chiffrier, une présentation graphique ainsi qu'une régression linéaire ont été réalisées pour les quatre (4) paramètres dynamiques de l'avion; fréquence, amortissement et les deux zéros. Le calcul des quatre paramètres a été automatisé avec le programme approx\_num.m . Les résultats sont présentés à la figure 8.2.

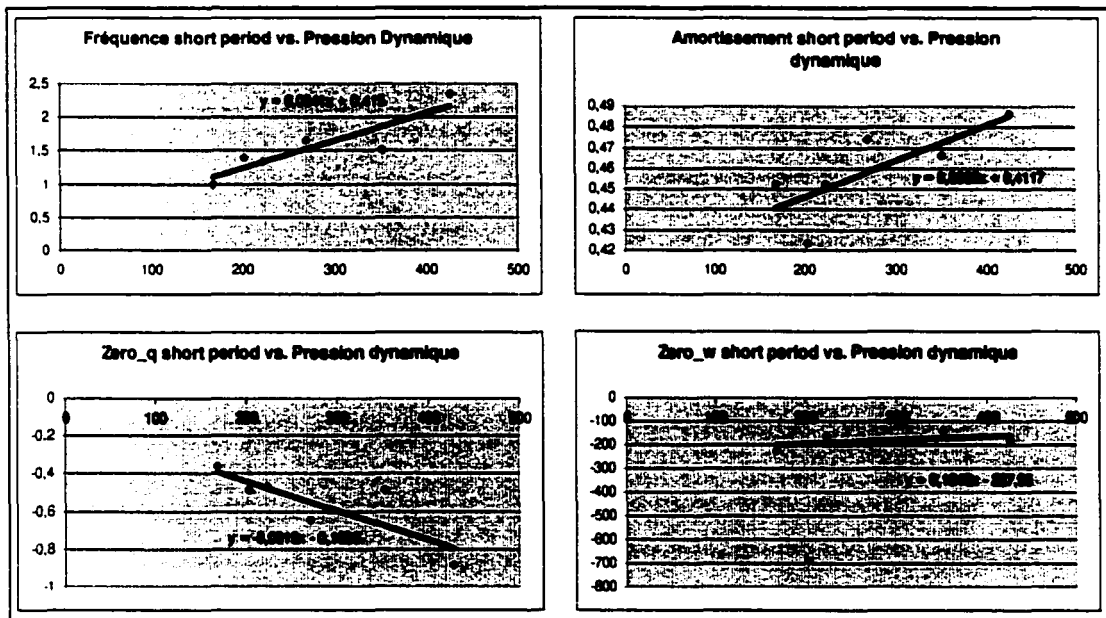


Figure 8.2 : Paramètres dynamiques en fonction de la pression dynamique

Dans la présentation des valeurs pour le zéro de la fonction de transfert  $\frac{w}{\delta_e}$ , il y a un point très éloigné de la tendance générale. Cet éloignement semble anormal et le point a

été omis dans l'évaluation de la régression linéaire. Tel que présenté à la figure 8.2, les régressions linéaires permettent l'obtention de quatre équations reliant les quatre paramètres dynamiques à la pression dynamique :

$$\omega_{n_{sp}} = 0.0041 \bar{q} + 0.415$$

$$\zeta_{sp} = 0.0002 \bar{q} + 0.4117$$

$$zero\_q = -0.0015\bar{q} - 0.1336$$

$$zero\_w = 0.1648 \bar{q} - 227.95$$

Ces expressions ne sont toutefois valables que pour les cas où l'avion a une position du centre de masse de 38 et un poids de 39000 lbs. Pour une configuration différente, il est permis de penser que les pentes et les ordonnés à l'origine des quatre équations seront fonction de la position du centre de masse et du poids total de l'avion.

### 8.3 Effet des composantes/actionneurs sur l'approximation d'ordre 2 de la dynamique globale.

Il a été démontré au chapitre 7 que l'ajout des composantes/actionneurs au modèle de l'avion avait un impact sur le positionnement des zéros de l'approximation short period. La présente section est basée sur la démonstration du chapitre 7. Dans cette section, de nouvelles relations pour les zéros en fonction de la pression dynamique seront créées, tenant compte de l'effet de translation du zéro décrit à la section 7.3.2.

On combine les dynamiques des composantes/actionneurs avec le modèle short period numérique et on en extrait une approximation d'ordre 2 de la dynamique globale. En procédant de la même façon qu'à la section 7.3.2, on extrait d'abord les fonctions de transfert équivalentes ( $\frac{q}{\delta_e}$  et  $\frac{w}{\delta_e}$ ) avec les fonctions LINMOD (donne la représentation

d'état à partir du modèle Simulink) et SS2TF (traduit de la représentation d'état à la fonction de transfert). On applique ensuite la méthode des fractions partielles avec la fonction RESIDUE et on obtient ainsi tous les pôles ainsi que les numérateurs associés. On retrouve ainsi les deux pôles short period. En exécutant la fonction RESIDUE inverse, on extrait la fonction de transfert simplifiée avec les pôles choisies, soit les deux pôles short period. L'ajout de la dynamique des composantes/actionneurs cause une translation des  $\text{zero}_q$  et  $\text{zero}_w$ . Donc, avec l'ajout de la dynamique des composantes/actionneurs, on doit changer la relation pour obtenir les zéros en fonction de la pression dynamique. Les figures 8.3 et 8.4 présentent les nouveaux zéros.

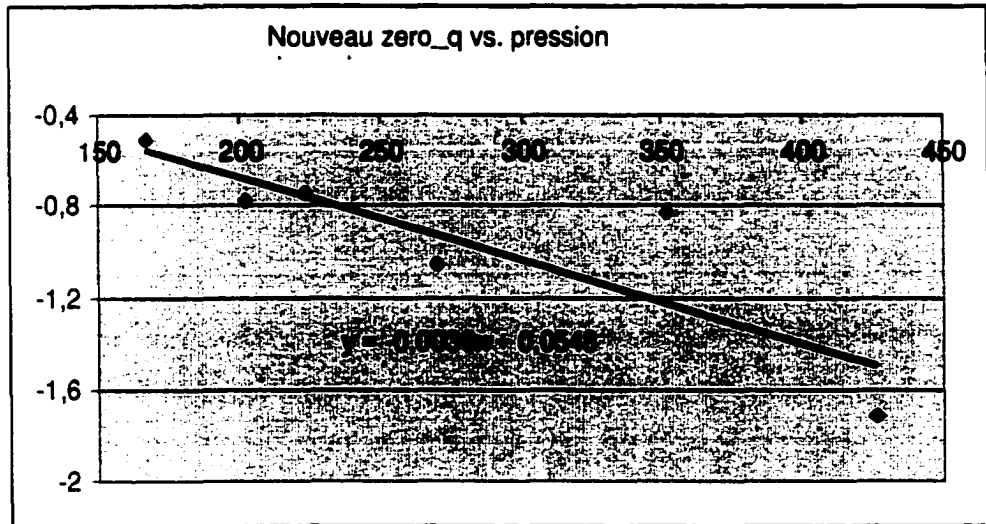


Figure 8.3 : Zéros de  $\frac{q}{\delta_e}$  avec l'ajout des dynamiques des composantes

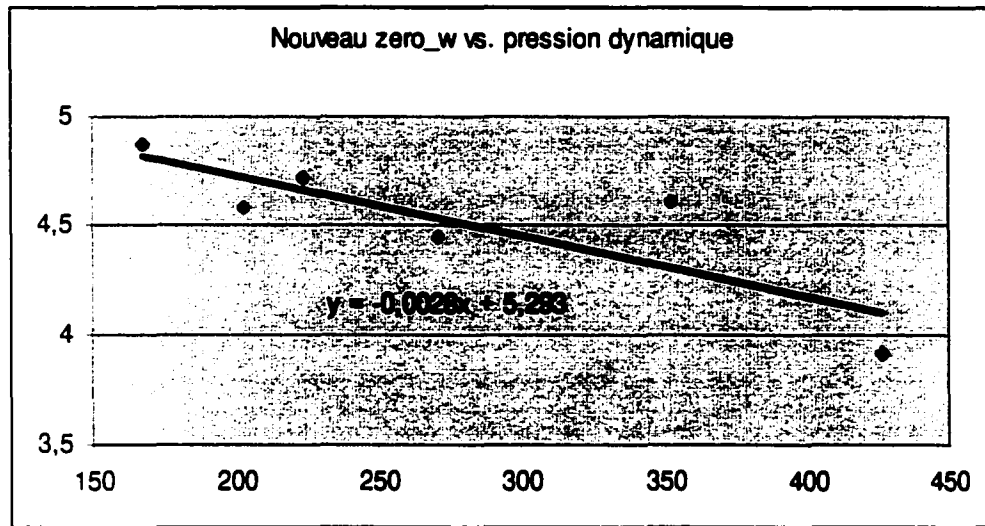


Figure 8.4 : Zéros de  $\frac{w}{\delta_e}$  avec l'ajout des dynamiques des composantes

L'ajout des dynamiques composantes/actionneurs cause une translation du zéro qui compense pour les dynamiques des composantes/actionneurs qui sont ajoutées au système puis éliminés dans le processus d'approximation d'ordre 2. Tel que présenté à la figure 8.3 et 8.4, lorsque l'on considère la dynamique des composantes/actionneurs, on doit alors utiliser de nouvelles relations pour zéro\_q et zéro\_w. Ces deux équations sont :

$$zero\_q = -0.0036\bar{q} - 0.0548$$

$$zero\_w = -0.0028\bar{q} - 5.293$$

En résumé, avec une configuration d'avion (poids et centre de masse) connue, on peut approximer le modèle short period numérique complet en boucle ouverte.

#### 8.4 Limitation de l'approximation d'ordre 2 de la dynamique globale.

Une méthode de simplification numérique du modèle vient d'être définie. Une comparaison des modèles simplifiés avec les modèles de référence permet d'évaluer les limitations d'une telle approximation. La comparaison est réalisée entre les deux lieux des racines pour les deux rétroactions sur les variables d'état. Les figure 8.5 et 8.6 présentent ces comparaisons.

En analysant la figure 8.5, on voit que l'approximation short period numérique est précise comparativement à l'approximation short period analytique (figure 7.11). Comme observé à la section 8.1.2, les pôles short period ne sont pas modifiés par rapport à la version originale. Ensuite, pour la rétroaction sur  $q$ , le système original et l'approximation sont équivalents jusqu'à un gain d'environ 0.2 pour l'approximation short period numérique. Ce gain de 0.2 est contraignant pour la capacité du contrôleur. En limitant le gain à 0.2, on limite la capacité du contrôleur à corriger la dynamique du système. Toutefois, la divergence entre les deux systèmes ne dépasse pas 10%, il est donc possible d'utiliser un gain de contrôleur au-delà de la valeur de 0.2. De la même façon, pour la rétroaction sur  $w$ , le système original et l'approximation sont équivalents jusqu'à un gain d'environ 0.11.

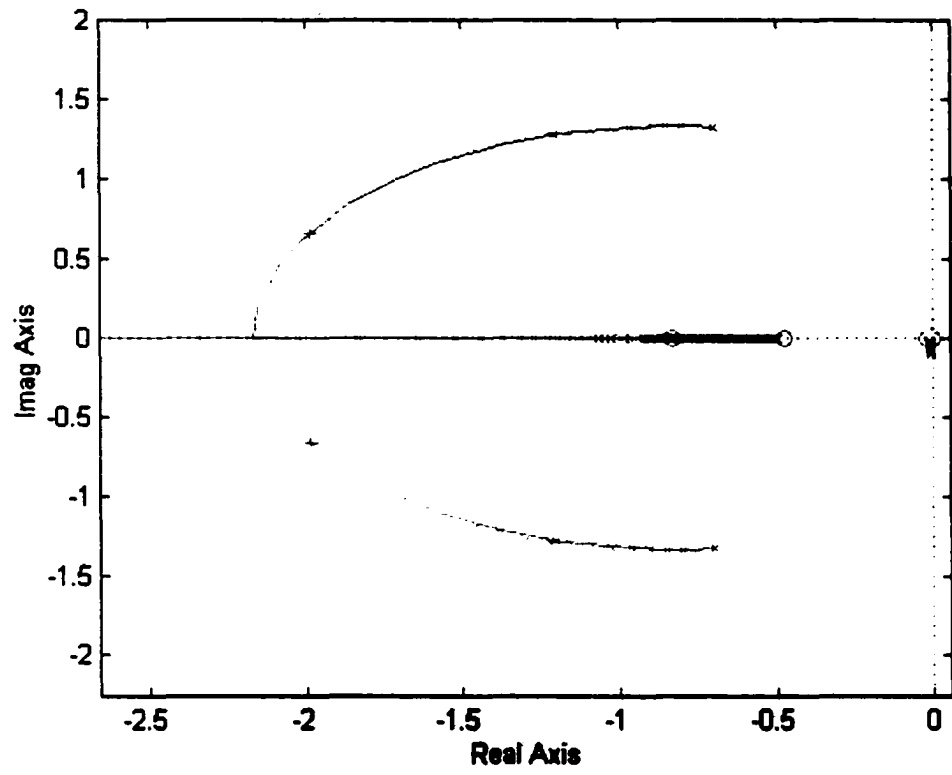


Figure 8.5 : Comparaison de la rétroaction sur  $q$

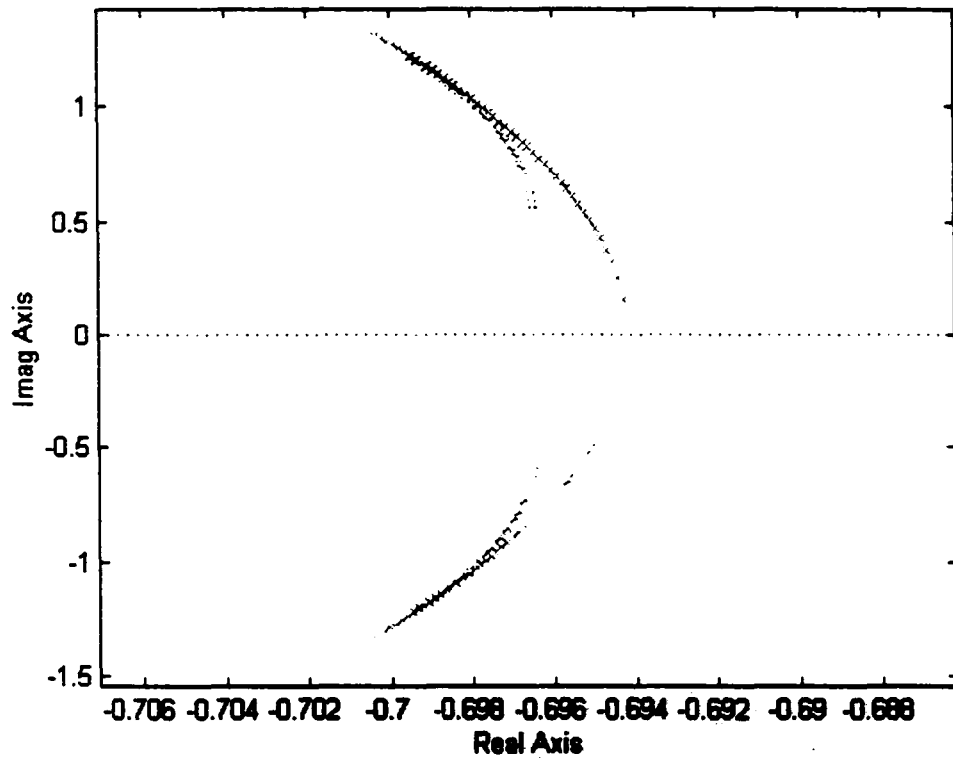


Figure 8.6 : Comparaison de la rétroaction sur  $w$

Malgré la différence entre l'approximation d'ordre 2 et le modèle de référence, la méthode d'approximation short period numérique est plus précise que la méthode d'approximation short period analytique.

## **CHAPITRE 9**

### **ÉCHELONNEMENT DES GAINS DE LA BOUCLE INTERNE**

L'objectif de cette section est de développer une technique permettant de d'échelonner les gains de la boucle interne d'un contrôleur pour la dynamique longitudinale d'un avion en fonction de la pression dynamique. Cet objectif sera réalisé à travers différentes étapes de recherches.

Au chapitre 7, une méthode a été définie pour échelonner les paramètres des matrices A et B en fonction de la pression dynamique. À partir de ces matrices, il est alors possible d'extraire les pôles et les zéros short period et donc obtenir la fréquence et l'amortissement short period. Cette méthode est dite analytique.

Au chapitre 8, on simplifie le modèle numérique avec la méthode des fractions partielles (fonction RESIDUE). On obtient alors directement la fréquence, l'amortissement et les deux zéros en fonction de la pression dynamique. Cette méthode, en comparant avec le modèle de référence, s'est avérée plus précise. Cette méthode est dite numérique. L'évaluation des gains du contrôleur se fera à l'aide de la méthode numérique.

Avec une définition simplifiée des modèles dynamiques de l'avion et de ses composantes, il est possible d'évaluer une plage des gains du contrôleur qui permet de respecter certains critères de manœuvrabilité. À ce point, une technique sera définie pour évaluer directement les gains de la boucle interne du contrôleur en fonction de la pression dynamique appliquée à l'avion.

### 9.1 Boucle interne du contrôleur.

La boucle interne du contrôleur, tel qu'étudiée, inclut les fonctions  $\frac{q}{\delta_e}$  et  $\frac{w}{\delta_e}$  ainsi que deux rétroactions, telles que présentées à la figure 9.1, où :

$$G_q = \frac{K_q(s + a_q)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G_w = \frac{K_w(s + a_w)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ces deux fonctions de transfert sont obtenues avec la méthode d'approximation short period numérique.

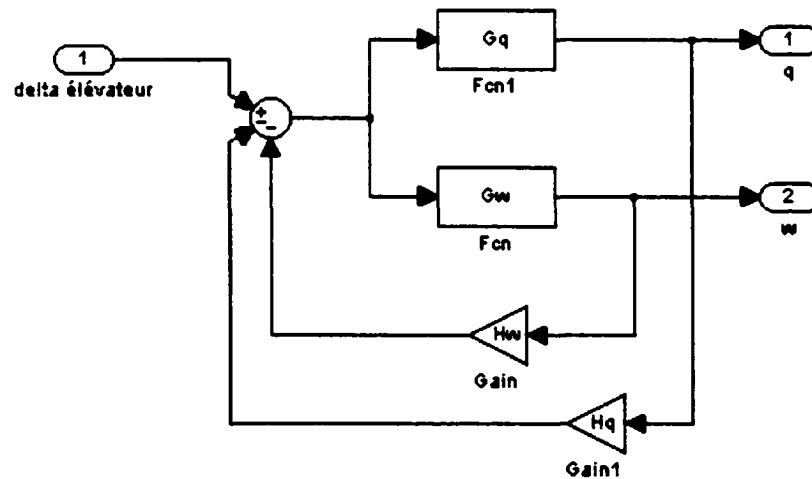


Figure 9.1 : Boucle interne du contrôleur (système SAS)

On peut définir le système de la figure 9.1 comme deux fonctions de transfert :

$$\frac{w}{\delta_e} = \frac{N_w}{D + H_q N_q + H_w N_w}$$

$$\frac{q}{\delta_e} = \frac{N_q}{D + H_q N_q + H_w N_w}$$

où

$$N_w = K_w(s + a_w)$$

$$N_q = K_q(s + a_q)$$

$$D = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Tous les paramètres inclus dans les définitions de  $N_w$ ,  $N_q$  et  $D$  sont déjà schedulés en fonction de la pression dynamique.

On peut donc scheduler les gains  $H_q$  et  $H_w$  à partir des critères amortissement short period  $\zeta_{sp}$  et CAP en boucle fermée, tel que définis au chapitre 4 . Le CAP est définie [13] comme étant :

$$CAP = \frac{g\omega_{sp_{bf}}^2 T_{\theta_2}}{U_0}$$

Le client fournit une plage d'acceptabilité du critère CAP, qui devrait se situer entre 0.28 et 3.6. À partir de cette plage, on peut définir une plage d'acceptabilité pour la fréquence short period  $\omega_{sp_{bf}}$  avec la relation :

$$\omega_{sp_{bf}} = \sqrt{\frac{U_0 CAP}{g T_{\theta_2}}}$$

En appliquant cette relation au cas 109, on trouve une plage d'acceptabilité pour  $\omega_{spbf}$  allant de 2.295 à 8.229. Aussi, comme mentionné au chapitre 4, le client demande un amortissement short period  $\zeta_{spbf}$  se situant entre 0.35 et 1.3.

On a déjà définis le dénominateur du contrôleur avec boucle fermée comme étant :

$$Den = D + H_q N_q + H_w N_w$$

$$Den = s^2 + [2\zeta\omega_n + H_q N_q + H_w N_w]s + [\omega_n^2 + H_q K_q a_q + H_w K_w a_w]$$

et on veut que

$$Den = s^2 + 2\zeta_{sp}^x \omega_{sp}^x s + \omega_{sp}^{x^2}$$

où  $( )^x$  veut dire valeur désirée, qui correspond aux valeurs en boucle fermée précédemment définies. On a deux (2)équations et deux (2) inconnues qu'on peut exprimer comme étant :

$$\begin{bmatrix} K_q & K_w \\ K_q a_q & K_w a_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_q \\ H_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta_{sp}^x \omega_{sp}^x - 2\zeta\omega_n \\ \omega_{sp}^x - \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

et qu'on peut résoudre avec l'expression :

$$\begin{bmatrix} H_q \\ H_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_q & K_w \\ K_q a_q & K_w a_w \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2\zeta_{sp}^x \omega_{sp}^x - 2\zeta\omega_n \\ \omega_{sp}^x - \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

En automatisant le processus de calcul (programme `trans_zero_num.m`), on obtient une plage d'acceptabilité pour chacun des gains. En répétant cette étape pour les six (6) cas, on obtient une plage de gains en fonction de la pression dynamique. Ces plages de gains sont présentées à la figure 9.2 et 9.3 .

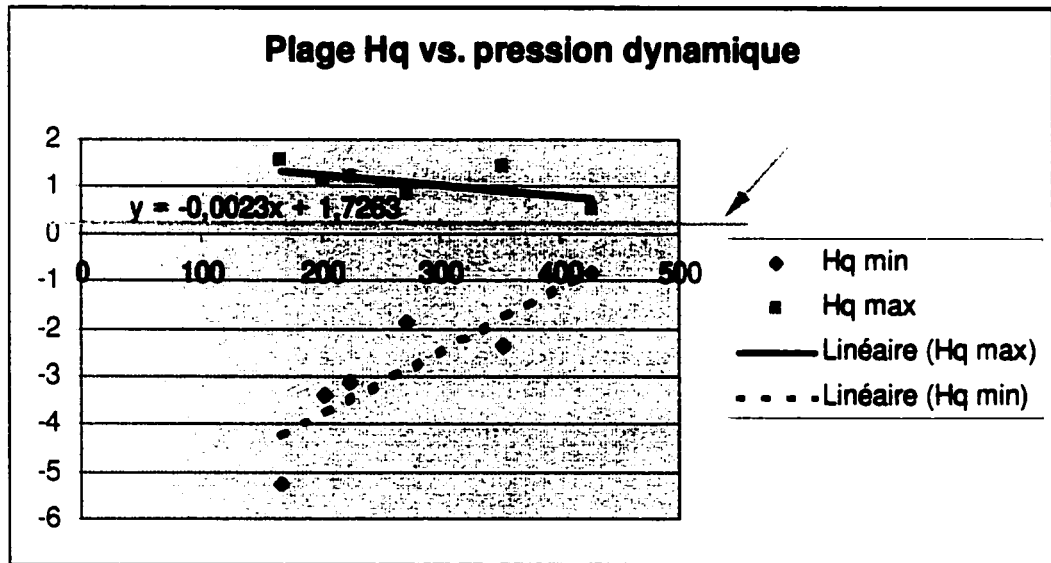


Figure 9.2 : Plage du gain  $H_q$  en fonction de la pression dynamique

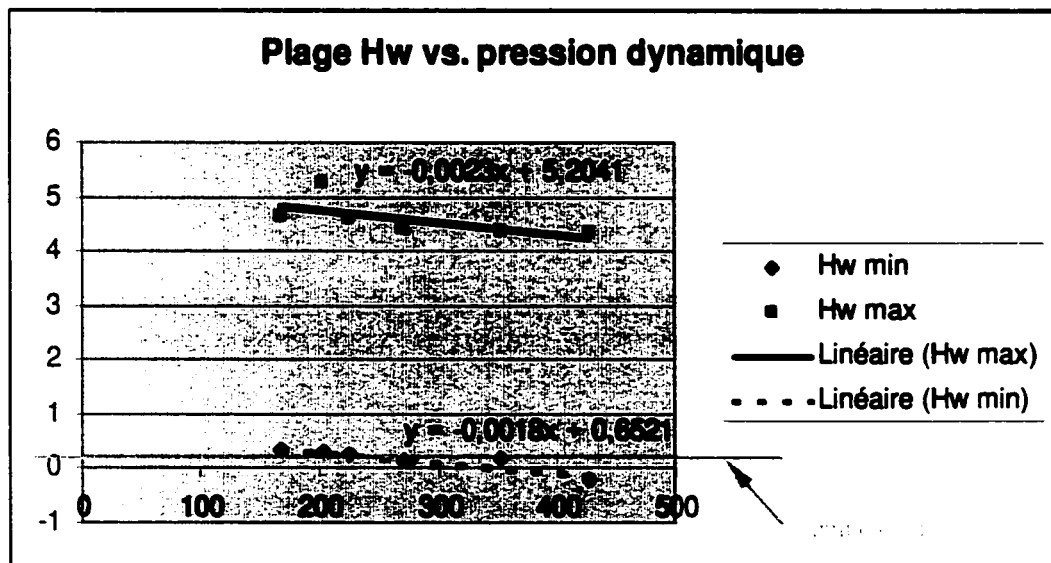


Figure 9.3 : Plage du gain  $H_w$  en fonction de la pression dynamique

Les deux gains obtiennent des plages de gains valables pour le respect des critères de qualité de manœuvrabilité. On remarque que la limite inférieure de la plage  $H_q$  est située dans les valeurs négatives, cette limite montre les résultats numériques mais la limite inférieure pratique sera possiblement limitée à zéro. Une ligne verte sur chacun des graphiques montre la limite des gains pour une approximation valable du modèle original. La limite sur  $H_w$  est plus contraignante car elle se rapproche de la limite inférieure de la plage théorique, et ce surtout pour une pression dynamique inférieure à environ 220. Si les limites sur les gains sont trop petites, il est toujours possible augmenter l'approximation short period à un ordre 3 ou 4. Toutefois, un ordre supérieur de l'approximation causera des complications pour la résolution analytique.

Comme les figures 9.2 et 9.3 le démontrent, on peut échelonner directement les gains de la boucle interne en fonction de la pression dynamique. Il faut toutefois se rappeler que l'approximation à partir de laquelle les données ont été extraites n'est valide que pour certaines plages de gain.

## 9.2 Validation des résultats.

Une fois les plages de gain déterminées, il est possible de valider les résultats obtenus en simulant le modèle original (ordre 44) avec des gains faisant partie des plages déterminées à la section précédente. Le modèle de simulation utilisé est présenté à la figure 9.4.

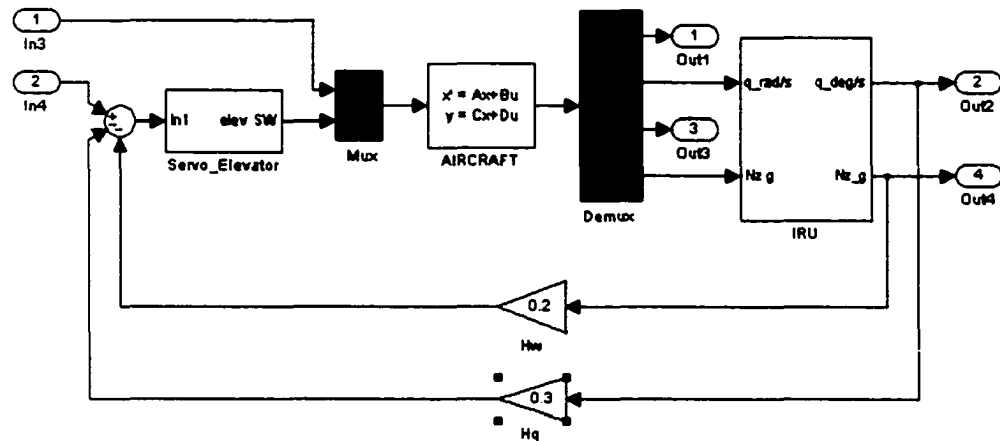


Figure 9.4 : Modèle pour la validation des résultats

Des simulations ont été réalisées avec un gain  $H_q$  négatif. La rétroaction devient ainsi positive et de l'instabilité apparaît dans le système, causée par le glissement du mode phugoïde à la droite de l'axe imaginaire. Malgré le fait que notre plage de gain théorique permette un gain  $H_q$  négatif, il est impensable de l'utiliser en pratique.

Plusieurs simulations ont été réalisées avec un gain  $H_q$  inclus entre 0 et 0.2, qui est la limite de gain pour respecter la correspondance entre le modèle simplifié et original. Le gain  $H_w$  était fixé à 0.06, soit à peu près au milieu de la plage permise. Pour ces valeurs de gain, l'amortissement short period est à l'intérieur des tolérances client mais la fréquence short period (directement relié au CAP) est un peu trop basse. Pour obtenir une fréquence acceptable, on doit augmenter  $H_q$  jusqu'à une valeur de 0.36.

Quelques faits peuvent expliquer ces résultats. Premièrement, la validation a été réalisée à l'aide du modèle original (ordre 44) qui a été réduit initialement afin d'éliminer les erreurs de traitement numériques. Des erreurs numériques, comme la création ou

l'élimination de certains pôles et/ou zéros, peuvent avoir causé le glissement du mode short period et par le fait même modifié la fréquence du mode. Deuxièmement, le gain  $H_q$  négatif donne un mode short period acceptable, mais cause l'instabilité du mode phugoïde. L'approximation short period, telle qu'utilisée dans la littérature, présente une définition simplifiée du modèle dynamique de l'avion, mais il devient dangereux d'utiliser ce modèle simplifié dans le design d'un contrôleur.

## **CONCLUSION**

L'objectif général de ce projet de recherche est, pour chacun des points de l'enveloppe de vol, que le système de contrôle agisse de façon à ce que la dynamique de l'avion satisfasse aux critères de qualité (associés à la manœuvrabilité) définis par le client, et ce, en réduisant le temps de calcul afin de maximiser l'efficacité du système. Cet objectif s'est traduit par la définition d'une technique d'échelonnement des deux gains de la boucle interne du contrôleur en fonction de la pression dynamique.

Les premiers chapitres décrivent la dynamique longitudinale d'un avion, les critères de qualités de manœuvrabilité et l'évaluation du contrôleur. Ces chapitres jettent une base pour le projet. La définition analytique de la dynamique longitudinale permet de relier les paramètres dynamiques et aérodynamiques de l'avion au modèle numérique fourni par le client.

Les critères de qualités de manœuvrabilité définissent les limites d'acceptabilité du comportement dynamique de l'avion. Suite à l'analyse du contrôleur, le critère phugoïde est omis étant donné qu'un lien fort existe entre la poussée et la dynamique du mode phugoïde, et que la dynamique des moteurs (poussée) n'est pas fournie avec le contrôleur. En se limitant à l'échelonnement des gains de la boucle interne (système SAS), on peut évaluer deux gains qui permettent de respecter les critères d'amortissement du short period et le CAP, qui limite en fait la fréquence du short period.

Le système original, tel que défini par le client, est d'un ordre élevé. Cette dimension est coûteuse en temps de calcul et peut amener des erreurs non négligeables lors d'un traitement numérique. Une méthode de simplification des différentes composantes est définie. La simplification débute par le rassemblement des délais et gains de chacune des composantes. Tous les délais d'une même composante, originellement tous d'ordre 4,

sont additionnés et approximer par un délai de Padé d'ordre 2. Un nouveau modèle de composante est ainsi créé. À partir de ce modèle simplifié, on applique la méthode des fractions partielles et on identifie les pôles ayant le plus d'influence sur la dynamique de la composante. Avec les pôles identifiés comme dominant, on redéfinit une fonction de transfert d'ordre réduit avec les fractions partielles inverses. Cette fonction permet de recréer un modèle avec les pôles désignés et compense la dynamique (les pôles) éliminée par un zéro. On définit ainsi un système d'ordre inférieur équivalent. Le système réduit est validé en comparant la réponse de la dynamique initiale et de la dynamique réduite à une entrée échelon unitaire. Cette méthode est concluante pour les composantes et les réponses des systèmes réduits à l'entrée échelon unitaire sont tout à fait comparables aux réponses de la composante originale.

Suite à la simplification des différentes composantes associées à la dynamique de l'avion, on vérifie que la dynamique globale simplifiée est comparable à la dynamique globale originale. Les systèmes original et réduit sont comparés de deux façons ; avec le lieu des racines et avec la réponse à une entrée échelon unitaire. Les résultats obtenus permettent de conclure que la dynamique globale simplifiée est valable comme nouvelle dynamique de référence.

L'approximation analytique de la dynamique longitudinale est fortement documentée. Cette approximation est appliquée en associant la définition analytique de la dynamique longitudinale au modèle numérique fourni par le client. La validité de l'approximation est évaluée en comparant le lieu des racines du mode short period original avec le mode short period obtenu par simplification analytique. Il en ressort que la simplification short period analytique modifie le mode short period original sensiblement. Cette modification est causée par la méthode d'élimination des colonnes et rangées qui simplifie le système mais qui élimine aussi plusieurs effets de couplage du système original. La tendance du lieu des racines reste toutefois la même mais il est important de même retenir que l'approximation short period analytique n'est pas fidèle.

La littérature [12] indique que les variations des dérivées de stabilité dépendent principalement de la pression dynamique. Les données numériques fournies par le client nous permettent de vérifier s'il est possible d'approximer les dérivées de stabilité à partir de la pression dynamique. Les différents modèles d'états (120 cas) fournis par le client sont définis pour différents paramètres ; position du centre de masse, poids total de l'avion, altitude, vitesse et pression dynamique. Pour trouver une relation valable, il est important de fixer quelques paramètres qui influencent beaucoup la dynamique de l'avion comme le centre de masse et le poids total de l'avion. Pour un poids total et une position du centre de masse fixés, il est possible de déterminer une relation entre les dérivées de stabilité et la pression dynamique. Un premier échelonnement est réalisé entre les paramètres de l'avion et la pression dynamique. Cette première étape permet d'estimer un modèle dynamique analytique de l'avion à partir de la pression dynamique. À partir de relations linéaires et de la pression dynamique, on peut recréer le modèle dynamique short period.

La définition simplifiée des modèles dynamiques de l'avion et de ses composantes permet d'évaluer l'effet de la simplification sur la position des zéros du modèle. On obtient ainsi deux relations de translation du zéro en fonction de la pression dynamique. Il est alors possible d'approximer un modèle dynamique d'ordre 2 complet en fonction de la pression dynamique. Les relations trouvées à ce point permettent d'approximer une dynamique globale à partir de données obtenues en soufflerie.

La méthode de simplification short period numérique (approximation numérique) est comparable à la méthode de simplification des composantes. À partir du modèle longitudinal numérique fourni par le client (ordre 5), on extrait tous les pôles du système. Parmi les cinq pôles on identifie les pôles du mode short period. On approxime ensuite le modèle à l'aide de la méthode des fractions partielles inverses. On obtient ainsi une approximation numérique d'ordre 2 du modèle short period de l'avion.

De plus, le nouveau zéro ainsi créé compense pour la dynamique éliminée lors de l'approximation. On valide l'approximation en comparant le lieu des racines du mode short period original avec le mode short period simplifié numériquement. L'analyse des résultats démontre que l'approximation short period numérique est plus précise que l'approximation short period analytique. Les pôles short period ne sont pas modifiés par rapport à la version originale.

Un échelonnement de la dynamique de l'avion (fréquence, amortissement et zéros) est réalisé en fonction de la pression dynamique. Les données numériques fournies par le client permettent de faire l'approximation short period numérique et d'ensuite approximer la dynamique de l'avion à partir de la pression dynamique. Tel que démontré précédemment, l'ajout des composantes au modèle de l'avion a un impact sur le positionnement des zéros de l'approximation short period. Ainsi, de nouvelles relations pour les zéros en fonction de la pression dynamique seront créées, tenant compte de l'effet de translation du zéro. À ce point, il est possible d'évaluer les paramètres dynamiques de l'approximation short period numérique en fonction de la pression dynamique. Une comparaison du modèle simplifié avec le modèle de référence permet d'évaluer les limitations de l'approximation. La comparaison est réalisée entre les deux lieux des racines. Le système original et l'approximation sont équivalents jusqu'à un gain d'environ 0.2 pour  $H_q$ , et de 0.11 pour  $H_w$ , pour l'approximation short period numérique. Ces gains de 0.2 et 0.11 sont contraignants pour la capacité du contrôleur. Toutefois, la divergence entre les deux systèmes ne dépasse pas 10%, il est donc possible d'utiliser des gains de contrôleur au-delà des valeurs de 0.2 et 0.11.

Avec une définition simplifiée des modèles dynamiques de l'avion et de ses composantes, il est possible d'évaluer une plage de gains du contrôleur qui permet de respecter certains critères de manœuvrabilité. Une technique est définie pour évaluer directement les gains de la boucle interne du contrôleur en fonction de la pression dynamique appliquée à l'avion. On schedule les gains  $H_q$  et  $H_w$  à partir des critères

amortissement short period  $\zeta_{sp}$  et CAP. Les deux gains obtiennent des plages de gains valables pour le respect des critères de qualité de manœuvrabilité. On peut donc échelonner directement les gains de la boucle interne en fonction de la pression dynamique et de la vitesse de l'avion. Il faut toutefois se rappeler que l'approximation à partir de laquelle les données ont été extraites n'est valide que pour une certaine plage de gain.

La validation des résultats a dévoilée quelques limites de la méthode. Toutes les combinaisons de gains sélectionnées dans les plages de gain évaluées ne permettaient pas au contrôleur de respecter la dynamique short period désirée par le client. La validation avec le modèle original peut entraîner des erreurs numériques, comme la création ou l'élimination de certains pôles et/ou zéros, et ainsi modifier la fréquence du mode. Deuxièmement, le gain  $H_q$  négatif donne un mode short period acceptable, mais cause l'instabilité du mode phugoïde. L'approximation short period présente une définition simplifiée du modèle dynamique de l'avion, mais néglige certains modes dominants de l'avion.

Une méthode est définie pour échelonner les gains de la boucle interne du contrôleur, afin de respecter les critères de qualité de manœuvrabilité amortissement short period et CAP. Certains points restent à étudier :

- Échelonnement des gains de la boucle externe
- Vérification de la méthode pour d'autres conditions de vol
- Échelonnement des coefficients des relations pour l'obtention des gains en fonction des différentes conditions de vol.

Le travail réalisé dans le présent document fourni les outils nécessaires pour évoluer efficacement dans la recherche des points non résolus.

## **ANNEXE 1**

### **DONNÉES ET FICHIERS DE SIMULATIONS.**

```

% approximation numérique du mode short period
% cas 109, 110, 113, 114, 117, 118

% modèle original
[A,B,C,D]=extraction_ABCD(109);
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1);
num_q=num(2,:);
num_w=num(3,:);

% simplification numérique (q)
[R_sp_nu_q,P_sp_nu_q,K_sp_nu_q]=residue(num_q,den);
[num_sp_nu_q,den_sp_nu_q]=residue(R_sp_nu_q([2:3]),P_sp_nu_q([2:3]),K_s
p_nu_q);

% simplification numérique (w)
[R_sp_nu_w,P_sp_nu_w,K_sp_nu_w]=residue(num_w,den);
[num_sp_nu_w,den_sp_nu_w]=residue(R_sp_nu_w([2:3]),P_sp_nu_w([2:3]),K_s
p_nu_w);

% fréquence short period
pole_sp_num_2=roots(den_sp_nu_q)
wn_sp_num_2=abs(pole_sp_num_2(1));

% amortissement short period
zeta_sp_num_2=-real(pole_sp_num_2(1))/wn_sp_num_2;

% zero_q
zero_q_sp_num_2=roots(real(num_sp_nu_q));

% zero_w
zero_w_sp_num_2=roots(real(num_sp_nu_w));

```

% valeurs des paramètres pour chaque cas

```
aq109 = 0.8309;
aq110 = 1.7159;
aq113 = 0.7418;
aq114 = 1.0593;
aq117 = 0.5131;
aq118 = 0.7839;
```

```
Uo109 = 503.314;
Uo110 = 707.709;
Uo113 = 579.201;
Uo114 = 677.689;
Uo117 = 574.056;
Uo118 = 673.568;
```

```
CAP109_1=sqrt(Uo109*.28/32.2/aq109)
CAP109_2=sqrt(Uo109*3.6/32.2/aq109)
```

```
CAP110_1=sqrt(Uo110*.28/32.2/aq110)
CAP110_2=sqrt(Uo110*3.6/32.2/aq110)
```

```
CAP113_1=sqrt(Uo113*.28/32.2/aq113)
CAP113_2=sqrt(Uo113*3.6/32.2/aq113)
```

```
CAP114_1=sqrt(Uo114*.28/32.2/aq114)
CAP114_2=sqrt(Uo114*3.6/32.2/aq114)
```

```
CAP117_1=sqrt(Uo117*.28/32.2/aq117)
CAP117_2=sqrt(Uo117*3.6/32.2/aq117)
```

```
CAP118_1=sqrt(Uo118*.28/32.2/aq118)
CAP118_2=sqrt(Uo118*3.6/32.2/aq118)
```

```

function [A,B,C,D] = extraction_ABCD(cas)
% Extraction des matrices ABCD de Bombardier a partir de ABCD_lot.txt
% Cette fonction permet de choisir un des 120 cas (au choix)
% Fichier extraction_ABCD.m

% Extraction des données du fichier ABCD_lot.txt
[col1,col2,col3,col4,col5,col6,col7] = textread('ABCD_lot.txt','%f %f
%f %f %f %f %f');
modele=[col1,col2,col3,col4,col5,col6,col7];

% Extraction des matrices A, B, C et D (pour 1 cas)
i=cas;
% MATRICE A
for j=1:5
    for k=1:5
        A(k,j)=modele(k+((i-1)*9),j);
    end
end
% MATRICE B
for j=6:7
    for k=1:5
        B(k,j-5)=modele(k+((i-1)*9),j);
    end
end
% MATRICE C
for j=1:5
    for k=6:9
        C(k-5,j)=modele(k+((i-1)*9),j);
    end
end
% MATRICE D
for j=6:7
    for k=6:9
        D(k-5,j-5)=modele(k+((i-1)*9),j);
    end
end
end

```

```

% Extraction des pôles et zéro du modèle de l'avion

% Extraction du modèle short period

Asp_109 = [-0.5307  503.3140;
           -0.0089  -0.7168];

Bsp_109 = [-0.5878 -0.1343]';

Cq = [0 1];
Cw = [1 0];

D= [0];

Asp_110 = [-0.9507  707.7090;
           -0.0148  -1.0743];

Bsp_110 = [-1.2299 -0.2819]';

Asp_113 = [-0.5040  579.2010;
           -0.0070  -0.5791];

Bsp_113 = [-0.5470 -0.2776]';

Asp_114 = [-0.6886  677.6890;
           -0.0090  -0.7115];

Bsp_114 = [-0.7811 -0.1788]';

Asp_117 = [-0.3859  574.0560;
           -0.0045  -0.4356];

Bsp_117 = [-0.4100 -0.0933]';

Asp_118 = [-0.5148  673.5680;
           -0.0067  -0.5374];

Bsp_118 = [-0.5900 -0.1346]';

% SS2TF pour pouvoir évaluer les pôles et zéro_q

[num_109q,den_109] = ss2tf(Asp_109,Bsp_109,Cq,D,1);
[num_110q,den_110] = ss2tf(Asp_110,Bsp_110,Cq,D,1);
[num_113q,den_113] = ss2tf(Asp_113,Bsp_113,Cq,D,1);
[num_114q,den_114] = ss2tf(Asp_114,Bsp_114,Cq,D,1);

```

```
[num_117q,den_117] = ss2tf(Asp_117,Bsp_117,Cq,D,1);
[num_118q,den_118] = ss2tf(Asp_118,Bsp_118,Cq,D,1);
```

```
% SS2TF pour pouvoir évaluer les pôles et zéro_w
```

```
[num_109w,den_109] = ss2tf(Asp_109,Bsp_109,Cw,D,1);
[num_110w,den_110] = ss2tf(Asp_110,Bsp_110,Cw,D,1);
[num_113w,den_113] = ss2tf(Asp_113,Bsp_113,Cw,D,1);
[num_114w,den_114] = ss2tf(Asp_114,Bsp_114,Cw,D,1);
[num_117w,den_117] = ss2tf(Asp_117,Bsp_117,Cw,D,1);
[num_118w,den_118] = ss2tf(Asp_118,Bsp_118,Cw,D,1);
```

```
% pôles et zéro
```

```
p_109 = roots(den_109);
zq_109 = roots(num_109q);
zw_109 = roots(num_109w);
```

```
p_110 = roots(den_110);
zq_110 = roots(num_110q);
zw_110 = roots(num_110w);
```

```
p_113 = roots(den_113);
zq_113 = roots(num_113q);
zw_113 = roots(num_113w);
```

```
p_114 = roots(den_114);
zq_114 = roots(num_114q);
zw_114 = roots(num_114w);
```

```
p_117 = roots(den_117);
zq_117 = roots(num_117q);
zw_117 = roots(num_117w);
```

```
p_118 = roots(den_118);
zq_118 = roots(num_118q);
zw_118 = roots(num_118w);
```

```

% trouver les pôles influant dans le modèle dynamique de Bombardier

[Aold, Bold, Cold, Dold]=linmod('Ggyro_old');
[Anew, Bnew, Cnew, Dnew]=linmod('Ggyro');

[num_old,den_old]=ss2tf(Aold, Bold, Cold, Dold, 1);
[num_new,den_new]=ss2tf(Anew, Bnew, Cnew, Dnew, 1);
Ks=real(num_new(length(num_new)))/den_new(length(den_new));

[Rnew,Pnew,Knew]=residue(num_new,den_new)
[num_new,den_new]=residue(Rnew([3:7]),Pnew([3:7]),Knew)
K=real(num_new(length(num_new)))/den_new(length(den_new));

num_new=real(num_new)/K*Ks;
step(num_old, den_old)
hold
step(real(num_new), den_new)

```

```

% trouver les pôles influant dans le modèle dynamique de Bombardier

[Aold, Bold, Cold, Dold]=linmod('Gservo_old');
[Anew, Bnew, Cnew, Dnew]=linmod('Gservo');

[num_old,den_old]=ss2tf(Aold, Bold, Cold, Dold, 1);
[num_new,den_new]=ss2tf(Anew, Bnew, Cnew, Dnew, 1);
Ks=real(num_new(length(num_new)))/den_new(length(den_new));

[Rnew,Pnew,Knew]=residue(num_new,den_new)
[num_new,den_new]=residue(Rnew([4:7]),Pnew([4:7]),Knew)
K=real(num_new(length(num_new)))/den_new(length(den_new));

num_new=real(num_new)/K*Ks;
step(num_old, den_old)
hold
step(real(num_new), den_new)

```

```

% trouver les pôles influant dans le modèle dynamique de Bombardier

[Aold, Bold, Cold, Dold]=linmod('Gstick_old');
[Anew, Bnew, Cnew, Dnew]=linmod('Gstick');

[num_old,den_old]=ss2tf(Aold, Bold, Cold, Dold, 1);
[num_new,den_new]=ss2tf(Anew, Bnew, Cnew, Dnew, 1);
Ks=num_new(length(num_new))/den_new(length(den_new));

[Rnew,Pnew,Knew]=residue(num_new,den_new)
[num_new,den_new]=residue(Rnew([3:6]),Pnew([3:6]),Knew)
K=num_new(length(num_new))/den_new(length(den_new));

num_new=num_new/K*Ks;
step(num_old, den_old)
hold
step(num_new, den_new)

```

```

% modèle original & restrictions sur les critères
[A,B,C,D]=extraction_ABCD(109);
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1);
num_q=num(2,:);
num_w=num(3,:);
wsp_x = 9.8013;
zeta_x = 0.35;

% simplification numérique (q)
[R_sp_nu_q,P_sp_nu_q,K_sp_nu_q]=residue(num_q,den);
[num_sp_nu_q,den_sp_nu_q]=residue(R_sp_nu_q([2:3]),P_sp_nu_q([2:3]),K_sp_nu_q);
[Asp_q,Bsp_q,Csp_q,Dsp_q]=tf2ss(num_sp_nu_q,den_sp_nu_q);

% simplification numérique (w)
[R_sp_nu_w,P_sp_nu_w,K_sp_nu_w]=residue(num_w,den);
[num_sp_nu_w,den_sp_nu_w]=residue(R_sp_nu_w([2:3]),P_sp_nu_w([2:3]),K_sp_nu_w);
[Asp_w,Bsp_w,Csp_w,Dsp_w]=tf2ss(num_sp_nu_w,den_sp_nu_w);

% Translation des 2 zéros (zéro_q et zéro_w)

% toujours changer 'servo_a_gyro_q' & 'servo_a_gyro_w' pour chaque cas
[Asp_wg,Bsp_wg,Csp_wg,Dsp_wg]=linmod('servo_a_gyro_w');
[Asp_qg,Bsp_qg,Csp_qg,Dsp_qg]=linmod('servo_a_gyro_q');

[num_qg,den_qg]=ss2tf(Asp_qg,Bsp_qg,Csp_qg,Dsp_qg,1);
[num_wg,den_wg]=ss2tf(Asp_wg,Bsp_wg,Csp_wg,Dsp_wg,1);

[r_qg,p_qg,k_qg]=residue(num_qg,den_qg);
[r_wg,p_wg,k_wg]=residue(num_wg,den_wg);

% On obtient ici la fonction de transfert d'ordre 2 (q/delta) pour l'avion
[num_dyn_qg,den_dyn_qg]=residue(r_qg([10:11]),p_qg([10:11]),k_qg);
% On obtient ici la fonction de transfert d'ordre 2 (w/delta) pour l'avion
[num_dyn_wg,den_dyn_wg]=residue(r_wg([10:11]),p_wg([10:11]),k_wg);
num_dyn_wg=num_dyn_wg/57.296;

% paramètres scheduler avec la pression dynamique
poles = roots(den_dyn_qg);
aq = roots(real(num_dyn_qg));
aw = roots(real(num_dyn_wg));
wn = abs(poles(1));
zeta = -real(poles(1))/wn;
Kq =
real(num_dyn_qg(length(num_dyn_qg)))/den_dyn_qg(length(den_dyn_qg));
Kw =
real(num_dyn_wg(length(num_dyn_wg)))/den_dyn_wg(length(den_dyn_wg));

gains = inv([Kq Kw;Kq*aq Kw*aw])*[2*zeta_x*wsp_x-2*zeta*wn;wsp_x*wsp_x-wn*wn]

```

```

% Observation de la translation des zéros

% toujours changer 'servo_a_gyro' pour chaque cas
[Adyn,Bdyn,Cdyn,Ddyn]=linmod('servo_a_gyro');

[num_dyn,den_dyn]=ss2tf(Adyn,Bdyn,Cdyn,Ddyn,1);

[r,p,k]=residue(num_dyn,den_dyn)
[num_dyn_sp,den_dyn_sp]=residue(r([10:11]),p([10:11]),k)

poles = roots(den_dyn_sp)
zer = roots(num_dyn_sp)

rlocus(real(num_dyn_sp),den_dyn_sp)

```

```

% Observation de la translation des zéros

% toujours changer 'servo_a_gyro' pour chaque cas
[Adyn,Bdyn,Cdyn,Ddyn]=linmod('servo_a_gyro');

[num_dyn,den_dyn]=ss2tf(Adyn,Bdyn,Cdyn,Ddyn,1);

[r,p,k]=residue(num_dyn,den_dyn)
[num_dyn_sp,den_dyn_sp]=residue(r([10:11]),p([10:11]),k)

poles = roots(den_dyn_sp)
zer = roots(num_dyn_sp)

rlocus(real(num_dyn_sp),den_dyn_sp)

```

## **BIBLIOGRAPHIE**

1. Ogata, Katsuhiko. *Modern Control Engineering*. 3d ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.
2. Brogan, William L. *Modern Control Theory*. 3d ed. Prentice Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1991.
3. Rohrs, Charles E.; Melsa, James L.; Schultz, Donald G. *Linear Control System*. McGraw-Hill, Inc., 1993
4. Shinnars, Stanley M. *Modern Control System Theory Design*. John Wiley and son, Inc. New York, 1992.
5. Nise, Norman S. *Control Systems Engineering*. 2d ed. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1995.
6. Schmidt, Louis V. *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, Reston, VA, 1998.
7. Hancock, G.J. *An Introduction to the Flight Dynamics of Rigid Aeroplanes*. Ellis Horwood Limited, Grande Bretagne, 1995.
8. Pamadi, Bandu N. *Performance, Stability, Dynamics, and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, Reston, VA, 1998.
9. Kivioja, David A. *Comparison of the Control Anticipation Parameter and the Bandwidth Criterion During the Landing Task*. Air Force Institute of Technology, Ohio, 1996.
10. Stevens, Brian L.; Lewis, Frank L. *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley and son, Inc, New York, 1992.
11. McLean, Donald. *Automatic Flight Control Systems*. Prentice Hall, Grande Bretagne, 1990.
12. Biannic, Jean-Marc, Apkarian, Pierre. *Parameter Varying Control of a High-Performance Aircraft*. Journal of Guidance, Control and Dynamics Vol. 20, No. 2, March-April 1997.

13. Gautrey, J. E., Cook, M. V. *A generic control anticipation parameter for aircraft handling qualities evaluation.* Aeronautical journal, 1997.
14. Luber, W., Becker, J. *Flight control design optimization with respect to flight and structural dynamic requirements.* Daimler-Benz Aerospace AG, Military Aircraft Division.
15. Lyshevski, S. E. *Non-linear multivariable flight control of aircraft.* Proc Instn Mech Engrs Vol 212 Part G.