

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE
GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE
M. Ing.

PAR
Samir OUARET

MODÉLISATION ET ÉVALUATION DES PERFORMANCES D'UN SYSTÈME
HYBRIDE FABRICATION RÉUTILISATION EN LOGISTIQUE INVERSE

MONTRÉAL, LE 11 JANVIER 2012

©Tous droits réservés, Samir OUARET, 2011

©Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

PRÉSENTATION DU JURY

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Kenné Jean-Pierre, directeur de mémoire
Département génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Gharbi Ali, codirecteur de mémoire
Département génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

Mme Nadeau Sylvie, présidente du jury
Département génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Hajji Adnène, examinateur externe
Département opérations et systèmes de décision à la Faculté des sciences de l'administration
de l'Université Laval

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 21 DÉCEMBRE 2011

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Jean-Pierre Kenné professeur au département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure et directeur du département de génie mécanique par intérim. Merci de m'avoir accepté dans votre équipe, de m'avoir permis de réaliser ce travail et d'avoir su constamment repousser mes limites.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de Monsieur Ali Gharbi professeur au département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure qui lors de nos rencontres m'a prodigué ses précieux conseils.

Je remercie aussi Madame Sylvie Nadeau professeure au département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure qui a accepté de présider le Jury de la soutenance, mais aussi à Monsieur Adnène Hajji professeur au département opérations et systèmes de décision à la Faculté des sciences de l'administration de l'Université Laval qui a accepté de participer au Jury de la soutenance.

A mes collègues du Laboratoire d'intégration des technologies de production (LITP), je les remercie de m'avoir permis de travailler dans une ambiance conviviale.

A mon épouse Sabrina, pour les relectures bienveillantes de ce document j'exprime ma plus profonde gratitude. Merci pour ta patience et ton soutien sans oublier le petit bonheur de ma vie, mon fils Adam, qui par sa seule présence, m'a donné le courage d'aller jusqu'au bout.

A mes parents qui ont toujours su m'encourager dans mes études, mes parents grâce à qui j'ai pu faire tout ce cheminement. Je vous dis merci.

MODÉLISATION ET ÉVALUATION DES PERFORMANCES D'UN SYSTÈME HYBRIDE FABRICATION RÉUTILISATION EN LOGISTIQUE INVERSE

Samir OUARET

RÉSUMÉ

Notre travail consiste en l'étude des problèmes de commande optimale stochastique intervenant dans la gestion de l'inventaire des systèmes manufacturiers. Dans la pratique, ces systèmes sont souvent sujets à des phénomènes aléatoires qui aboutissent à des effets significatifs sur l'évolution de leurs comportements. Nous considérons d'abord, dans le sens direct de la logistique, un système de production est composé d'une machine produisant un seul type de produit. La machine a une capacité finie et fiable. Nous considérons que la demande du client peut fluctuer dans le temps. Par la suite nous allons intégrer dans le sens inverse de l'environnement de production de base la logistique inverse pour prendre en compte le retour aléatoire des produits. Dans ce cas, le système est composé de deux machines fiables ayant une capacité finie et qui produisent le même type de produit.

L'objectif de cette étude est de déterminer les stratégies optimales de planification de la production dans le but de satisfaire une demande aléatoire du client et de gérer les inventaires à moindre coût. Un modèle de commande hiérarchisée de deux niveaux est développé par application de la théorie de commande optimale stochastique basée sur le principe du maximum de Pontryagin. Dans le premier niveau de la hiérarchie proposée, un problème de commande optimale stochastique linéaire-quadratique est formulé pour déterminer de façon optimale les valeurs cibles des variables d'état et de décision. Dans le second niveau, un problème de commande en optimisation récursive (commande prédictive) est présenté dans le but de minimiser l'écart au carré par rapport à des trajectoires nominales (problème de poursuite de trajectoire). La solution optimale est obtenue numériquement par le schéma d'Euler Maruyama. Des exemples numériques et des analyses de sensibilité sont présentés pour illustrer l'efficacité et la qualité de l'approche proposée.

Mots-clés : Systèmes manufacturiers, Logistique inverse, Commande optimale stochastique, Demande aléatoire, Principe du maximum de Pontryagin, Schéma d'Euler-Maruyama, Méthodes de tir.

MODELING AND PERFORMANCE EVALUATION OF A HYBRID MANUFACTURING REMANUFACTURING SYSTEM WITH REVERSE LOGISTICS

Samir OUARET

ABSTRACT

Our work is the study of stochastic optimal control problems involved in inventory management of manufacturing systems. In practice, these systems are often subject to random phenomena that result in significant effects on the evolution of their behaviour. We first consider, in the forward direction of logistic, a production system consisting of a machine producing a single product type. The machine has a finite capacity and is assumed reliable. We consider that the customer's demand can fluctuate over time. Subsequently, we will integrate, in the opposite direction of the basic production environment, reverse logistics to take into account the return of random products. In this case, the system consists of two reliable machines with a finite capacity and producing the same type of product.

The objective of this study is to determine optimum strategies for production planning in order to meet a stochastic demand of customer and manage inventory at lowest cost. A two-level hierarchical control model is developed by applying the stochastic optimal control theory based on Pontryagin's maximum principle. In the first level of the proposed hierarchy, a stochastic linear-quadratic optimal control problem is formulated to optimally determine the target values of the state and control variables. In the second level, a recursive optimization control problem (predictive control) is presented in order to minimize the square deviation from nominal trajectories (problem of trajectory tracking). The optimal solution is obtained numerically by the Euler-Maruyama scheme. Numerical examples and sensitivity analysis are presented to illustrate the effectiveness and quality of the proposed approach.

Keywords : Manufacturing systems, Reverse logistics, Stochastic optimal control, Stochastic demand, Pontryagin's maximum principle, Euler-Maruyama scheme, Shooting methods.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Les systèmes de production	5
1.3 Les différents systèmes de production.....	6
1.3.1 Classification selon la nature du processus de production.....	6
1.3.2 Classification selon les quantités produites.....	7
1.3.3 Classification en fonction des modes de gestion de la production.....	7
1.3.4 Classification en fonction d'aléas et du temps	9
1.4 Méthodes de gestion de la production	9
1.4.1 Le MRP	9
1.4.2 Le JAT.....	11
1.4.3 La méthode TOC	12
1.5 La logistique.....	15
1.6 Les différentes logistiques	15
1.6.1 Les domaines classiques de la logistique	15
1.6.2 Les nouvelles approches.....	16
1.6.3 La chaîne d'approvisionnement (supply chain)	17
1.7 Niveaux de décision.....	19
1.8 Gestion de production des systèmes manufacturiers	20
1.9 Revue de littérature de la gestion de production dans la logistique inverse	22
1.10 Problématique de recherche.....	24
1.11 Objectifs et méthodologie de recherche.....	25
1.12 Démarche d'optimisation proposée	27
1.13 Conclusion	28
CHAPITRE 2 MODÈLES DE COMMANDE OPTIMALE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION	31
2.1 Introduction.....	31
2.2 Nature du système de production.....	31
2.3 Méthodes de modélisation mathématique.....	33
2.3.1 Les chaînes de Markov.....	33
2.3.2 Les réseaux de files d'attente	36
2.3.3 Les réseaux de Petri.....	37
2.4 Classification des méthodes d'optimisation des systèmes de production	38
2.4.1 Méthodes d'optimisation exactes.....	39
2.4.1.1 Méthodes analytiques (principe du maximum de Pontryagin) ..	39
2.4.1.2 Méthodes algorithmiques.....	43
2.4.2 Méthodes d'optimisation approchées ou heuristiques	46
2.5 La commande hiérarchisée	47

2.6	Quelques politiques de commande des systèmes de production	48
2.7	Conclusion	49
CHAPITRE 3 SYSTÈME DE PRODUCTION EN DEMANDE ALEATOIRE		51
3.1	Introduction.....	51
3.2	Modèle de commande de production.....	52
	3.2.1 Notations et hypothèses.....	52
	3.2.2 Énoncé du problème.....	53
3.3	Solution des problèmes de commande optimale.....	55
	3.3.1 Solution du problème de commande optimale (P0).....	56
	3.3.2 Solution du problème de commande optimale (P).....	60
3.4	Exemple numérique	62
3.5	Analyse de sensibilité	65
3.6	Conclusion	73
CHAPITRE 4 LOGISTIQUE INVERSE		75
4.1	Introduction.....	75
4.2	Formulation du problème et modélisation	76
	4.2.1 Notations et hypothèses.....	76
	4.2.2 Énoncé du problème.....	78
4.3	Solution des problèmes de commande optimale.....	81
	4.3.1 Solution du problème de commande optimale (P0).....	82
	4.3.2 Solution du problème de commande optimale (P).....	89
4.4	Exemple numérique	92
4.5	Analyse de sensibilité	96
4.6	Conclusion	113
CONCLUSION.....		115
ANNEXE I SIMULATION NUMERIQUE DE L'EQUATION D'ETAT STOCHASTIQUE.....		118
ANNEXE II FORMULATION MATHEMATIQUE DES FONCTIONS OBJECTIVES.....		119
ANNEXE III METHODE DE TIR.....		121
ANNEXE IV ARTICLE ACCEPTE ET PUBLIE DANS THE ELECTRONIC INTERNATIONAL JOURNAL ADVANCED MODELING AND OPTIMIZATION		123
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		149

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 3.1 Données de l'exemple numérique.....	62
Tableau 3.2 Effet du facteur de pénalité c	66
Tableau 3.3 Effet du facteur de pénalité h	67
Tableau 3.4 Effet du facteur de déviation c_m	71
Tableau 3.5 Effet du facteur de déviation c_h	72
Tableau 3.6 Effet de la déviation standard σ_D	73
Tableau 4.1 Données de l'exemple numérique.....	93
Tableau 4.2 Données des paramètres monétaires du premier niveau de la hiérarchie.....	97
Tableau 4.3 Effet des paramètres monétaires du premier niveau de la hiérarchie.....	98
Tableau 4.4 Données des paramètres monétaires du deuxième niveau de la hiérarchie ...	105
Tableau 4.5 Effet des paramètres monétaires du deuxième niveau de la hiérarchie	105
Tableau 4.6 Effet de la déviation standard.....	106
Tableau 4.7 Effet de la proportion des retours.....	109

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Structure d'un système de production.....6
Figure 1.2	Les activités de la logistique inverse.....19
Figure 1.3	Démarche d'optimisation proposée.....28
Figure 2.1	Système physique de production à événements combinés.....32
Figure 2.2	Diagramme de transition de la chaîne de Markov à deux états.....34
Figure 2.3	Durée moyenne entre deux pannes MTBF.....35
Figure 2.4	Exemple d'une machine produisant deux types de produits.....45
Figure 3.1	Structure du système53
Figure 3.2	Approche de commande hiérarchique.....55
Figure 3.3	Taux de demande en fonction du temps.....63
Figure 3.4	Niveaux d'inventaire optimaux en fonction du temps63
Figure 3.5	Taux de production optimaux en fonction du temps.....64
Figure 3.6	Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $c = 5, 50$65
Figure 3.7	Coût total moyen en fonction du facteur de pénalité de production66
Figure 3.8	Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $h = 5, 100$67
Figure 3.9	Taux de production optimal en fonction du temps pour $c_m = 10, 14, 18$69
Figure 3.10	Taux de production optimal en fonction du temps pour $c_h = 1, 6, 9$70
Figure 3.11	Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $c_m = 12, 18$71
Figure 3.12	Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $c_h = 1, 6$71
Figure 3.13	Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $\sigma_D = 4, 5.5$72
Figure 4.1	Structure du système en logistique inverse78
Figure 4.2	Approche de commande hiérarchique.....81

Figure 4.3	Taux de demande et de retour en fonction du temps	93
Figure 4.4	Niveaux d'inventaire optimal de service en fonction du temps	94
Figure 4.5	Niveaux d'inventaire optimal de récupération en fonction du temps	94
Figure 4.6	Taux de production optimal en fonction du temps.....	95
Figure 4.7	Taux de réutilisation optimal en fonction du temps.....	95
Figure 4.8	Taux de retrait optimal en fonction du temps	96
Figure 4.9	Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de production.....	98
Figure 4.10	Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de production	99
Figure 4.11	Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de réutilisation.....	99
Figure 4.12	Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de réutilisation	100
Figure 4.13	Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de retrait	101
Figure 4.14	Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de retrait.....	101
Figure 4.15	Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de service	102
Figure 4.16	Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de service.....	102
Figure 4.17	Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de récupération.....	103
Figure 4.18	Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de récupération	104
Figure 4.19	Inventaire de service en fonction de la déviation standard	106
Figure 4.20	Inventaire de récupération en fonction de la déviation standard.....	107
Figure 4.21	Niveau d'inventaire désiré de service en fonction de la déviation standard	107
Figure 4.22	Taux de retrait désiré en fonction de la déviation standard	108
Figure 4.23	Le coût total moyen en fonction de la déviation standard	108
Figure 4.24	Inventaire de service en fonction de la proportion des retours	109

Figure 4.25	Inventaire de récupération en fonction de la proportion des retours.....	110
Figure 4.26	Niveau d'inventaire désiré de service en fonction de la proportion des retours.....	110
Figure 4.27	Niveau d'inventaire désiré de récupération en fonction de la proportion des retours.....	111
Figure 4.28	Taux de réutilisation désiré en fonction de la proportion des retours	111
Figure 4.29	Taux de retrait désiré en fonction de la proportion des retours.....	112
Figure 4.30	Le coût total moyen en fonction de la proportion des retours.....	112

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

AFNOR	Association Française de Normalisation
APS	Advanced Planning and Scheduling
B2B	Business to Business
B2C	Business to Consumers
C2B	Consumers to Business
C2C	Consumers to Consumers
DPE	Partial Differential Equations
EQMT	Error Quadratic Mean Total
ERP	Entreprise Resources Planning
FCS	Finite Capacity and Scheduling
FMS	Flexible Manufacturing System
GPAO	Gestion de la Production Assistée par Ordinateur
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman
HMMS	Holt, Modigliani, Muth and Simon
JAT	Juste A Temps
LITP	Laboratoire d'Intégration des Technologies de Production
LQ	Linear Quadratic
MBPC	Model Based Predictif Control
MRP	Material Requirements Planning
MRP2	Manufacturing Resources Planning 2
MTBF	Mean Time Between Failures
MTTF	Mean Time to Failure

MTTR	Mean Time to Repair
OPT	Optimized Production Technology
PDP	Programme Directeur de Production
PGI	Progiciel de Gestion Intégré
PMP	Principe du Maximum de Pontryagin
PRP	Planification de Ressources de Production
SLQ	Stochastique Linéaire Quadratique
SMED	Single Minute Exchange of Die
SQP	Sequential Quadratic Programming
TCP/IP	Transmission Control Protocol/Internet Protocol
TOC	Theory of Constraints
TPBVP	Two-Point Boundary Value Problem

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

T	longueur de l'horizon de planification
x^0	niveau d'inventaire de service initial désiré (M1P1)
x^{10}	niveau d'inventaire de service initial désiré (M2P1)
x^{20}	niveau d'inventaire de récupération initial désiré
x_0	niveau d'inventaire de service initial (M1P1)
x_{10}	niveau d'inventaire de service initial (M2P1)
x_{20}	niveau d'inventaire de récupération initial
$d(t)$	taux de demande au temps t
r	proportion de retour des produits
$R(t)$	taux de retour en temps t
c	facteur de pénalité de production (M1P1)
c_1	facteur de pénalité de production (M2P1)
c_2	facteur de pénalité de réutilisation
c_3	facteur de pénalité de retrait
h	facteur de pénalité de l'inventaire de service (M1P1)
h_1	facteur de pénalité de l'inventaire de service (M2P1)
h_2	facteur de pénalité de l'inventaire de récupération
c_m	facteur de déviation de production de son objectif désiré \bar{u} ou \bar{P}_m
c_r	facteur de déviation de réutilisation de son objectif désiré \bar{P}_r
c_d	facteur de déviation de retrait de son objectif désiré \bar{P}_d
ch	facteur de déviation de l'inventaire de service de son objectif désiré \bar{x}
ch_1	facteur de déviation de l'inventaire de service de son objectif désiré \bar{x}_1
ch_2	facteur de déviation de l'inventaire de récupération de son objectif désiré \bar{x}_2
U_{max}	capacité de production maximale (M1P1)
$U1_{max}$	capacité de production maximale (M2P1)
$U2_{max}$	capacité de réutilisation maximale
σ_D	déviations standard du taux de demande
w	processus de Wiener standard
g	coefficient de diffusion
$\bar{x}_1(t)$	niveau d'inventaire de service désiré au temps t
$\bar{x}_2(t)$	niveau d'inventaire de récupération désiré au temps t
$x_1(t)$	niveau d'inventaire de service au temps t
$x_2(t)$	niveau d'inventaire de récupération au temps t
$\bar{u}(t)$	taux de production désiré au temps t (M1P1)
$\bar{P}_m(t)$	taux de production désiré au temps t (M2P1)
$\bar{P}_r(t)$	taux de réutilisation désiré au temps t
$\bar{P}_d(t)$	taux de retrait désiré au temps t
$u(t)$	taux de production au temps t (M1P1)
$P_m(t)$	taux de production au temps t (M2P1)
$P_r(t)$	taux de réutilisation au temps t
$P_d(t)$	taux de retrait au temps t

INTRODUCTION

Ces dernières années, nous assistons au développement croissant de l'utilisation de la théorie de la commande optimale stochastique moderne pour résoudre une multitude de problèmes d'optimisation présents dans des secteurs divers. On les retrouve dans le domaine de l'ingénierie, de la mathématique appliquée, de la finance, de l'économie, de la santé ou encore de la planification de la production.

Dans le milieu de l'industrie manufacturière avec ou sans retour de produits, l'intérêt se porte souvent sur l'optimisation des performances des systèmes de production. L'originalité du sujet est qu'il est toujours d'actualité étant donné la complexité du problème causé par le caractère stochastique imposé par les aléas. En effet, nous sommes souvent confrontés à l'évolution imprévue de l'environnement, les pannes et les réparations des machines et la conjecture du marché. A cause de ces imprévus l'industriel ne peut malheureusement contrôler sa production.

Dans ce mémoire, la problématique manufacturière et les modèles développés reflètent l'originalité du travail et offrent des contributions intéressantes permettant de prendre en considération l'aspect aléatoire de la demande et le retour des produits dans le contexte de la logistique inverse. Le problème qui se pose alors est de savoir, quelle stratégie de production l'entreprise doit entreprendre pour atteindre ses objectifs tout en maîtrisant les aléas ? Pour ce faire, elle doit satisfaire la demande aléatoire du client, gérer les inventaires en minimisant les coûts de production et d'inventaire. Ces coûts sont considérés comme critères de performance dans ce projet de recherche.

D'un point de vue théorique, un problème de planification de la production peut être formulé comme un problème de commande optimale stochastique. D'un point de vue numérique, pour résoudre le problème de commande optimale stochastique, nous avons à notre disposition deux types d'approches (Trélat, 2007).

La première, communément appelée méthode directe, est composée de deux principaux outils. Premièrement, elle est basée sur la discrétisation totale des équations du problème (état et commande) qui ramène à des problèmes d'optimisation non linéaire stochastique en dimension finie et se résolvant par les méthodes de gradient, les méthodes de type SQP (Sequential Quadratic Programming) et de pénalisation. Elle est localement optimale et fournit la commande en boucle ouverte. Cela montre que cette dernière est sensible aux perturbations. Le deuxième type d'approche est la méthode directe qui se base sur la résolution numérique des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) modifiées et généralisées (travaux de William Hamilton et Carl Gustav Jacobi). Ces équations d'HJB sont aux dérivées partielles non linéaires de premier ordre satisfaites par une certaine fonction valeur basée sur le principe de la programmation dynamique en temps continu introduit par Richard Bellman en 1957. Cet outil peut converger vers un minimum global et permet d'obtenir une commande en boucle fermée qui le rend plus robuste aux perturbations.

La méthode dite indirecte, quant à elle, se résout numériquement et réduit le problème de commande optimale stochastique à un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum de Pontryagin. Ce dernier donne les conditions nécessaires d'optimalité de la commande en fonction de l'état et de l'état adjoint en assurant que toute trajectoire optimale soit la projection d'une extrémale qui représente la solution d'un certain système Hamiltonien. La méthode indirecte se définit donc comme robuste aux perturbations.

Dans le cas de la gestion de l'inventaire, intéressons nous à la commande optimale stochastique des systèmes avec contraintes modélisés par des équations différentielles stochastiques en dimension finie avec un coût quadratique. Dans un premier temps, le système de production est composé d'une machine fiable ayant une capacité finie produisant un seul type de produit et dans lequel la demande du client peut fluctuer dans le temps. Dans un second temps, nous allons intégrer la logistique inverse dans l'environnement de production de base pour prendre en compte le retour aléatoire des produits. Dans ce cas, le système de production est composé de deux machines fiables produisant un seul type de produit avec une demande aléatoire.

Le but de l'entreprise manufacturière est de déterminer une stratégie de commande optimale jusqu'à une cible de commande pour satisfaire la demande aléatoire du client et ainsi amener le niveau d'inventaire d'un point initial à un certain point final (cible d'inventaire); et ce, au meilleur coût possible. Pour aider une telle entreprise dans sa prise de décision, nous proposons une approche de commande hiérarchisée à deux niveaux, obtenue par l'application du principe du maximum de Pontryagin, pouvant se résoudre numériquement par le schéma d'Euler-Maruyama.

Ce mémoire est organisé en quatre (4) chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons tout d'abord présenter les différentes structures, de systèmes manufacturiers et logistiques, trouvées dans la littérature. Nous allons, dans ce même chapitre, faire une revue critique de littérature sur la planification de la production des systèmes manufacturiers de type M1P1 (une machine produisant un seul type de produit) et par la suite étudier le type M2P1 (deux machines produisant le même produit) qui est utilisé lorsque nous faisons appel à la logistique inverse. Cette logistique inverse prend en compte le retour des produits. Dans ce chapitre, nous présenterons aussi la problématique de recherche et la méthode proposée pour la résolution du problème de commande optimale stochastique (le principe du maximum de Pontryagin stochastique).

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les différents outils de modélisation mathématique des systèmes de production ainsi que les différentes méthodes d'optimisation exactes et approchées appliquées aux problèmes de commande de la production dans un environnement manufacturier.

Dans le troisième chapitre, nous appliquerons l'approche hiérarchisée que nous proposons à la planification de la production d'un système composé d'une machine produisant un seul type de produit avec une demande aléatoire des produits finis.

Le quatrième chapitre sera consacré à l'emploi de cette approche, mais cette fois-ci en prenant compte du retour aléatoire des produits. Le développement de ce chapitre s'articulera donc autour de l'application de la logistique inverse à la production manufacturière.

CHAPITRE 1

REVUE DE LITTERATURE

1.1 Introduction

Il est devenu primordial pour la survie d'une entreprise manufacturière d'être compétitive face à ses concurrents. Afin de se conformer aux exigences de plus en plus pointilleuses du client, car il veut un produit abordable, de bonne qualité, livré dans des délais courts; l'entreprise doit prendre en considération l'évolution constante de la demande sur le marché. Cette entreprise doit faire face à des prérogatives en prenant en compte la variation et la fluctuation temporelle du taux de demande des pièces produites en fonction de la conjoncture du marché. Pour ce faire, la gestion d'inventaire du système manufacturier est d'une grande importance, car elle permet de répondre plus rapidement à la demande des clients. Dans certains cas, des produits sont retournés à l'entreprise à des fins de réusinage. Elle doit donc prendre en considération ce paramètre nouveau pour l'intégrer à la gestion de la planification de sa production.

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons définir le système de production et ensuite énumérer les différents systèmes de production. Dans un deuxième temps, nous allons voir les différentes méthodes de gestion de la production qui permettent à l'entreprise manufacturière d'être compétitive pour enfin finir avec la logistique inverse et ses différentes structures.

1.2 Les systèmes de production

Un système de production transforme les matières premières (flux entrants) en produits finis (flux sortants). Il combine l'ensemble des ressources matérielles, monétaires et humaines disponibles en interaction qui contribuent à l'activité de la production selon un processus de transformation organisé. Il est toutefois profitable de munir le système de production d'un

système de commande en boucle fermée afin de gérer la production de manière à atteindre efficacement l'objectif désiré; et ce en présence de contraintes internes ou externes d'une entreprise manufacturière (figure 1.1).

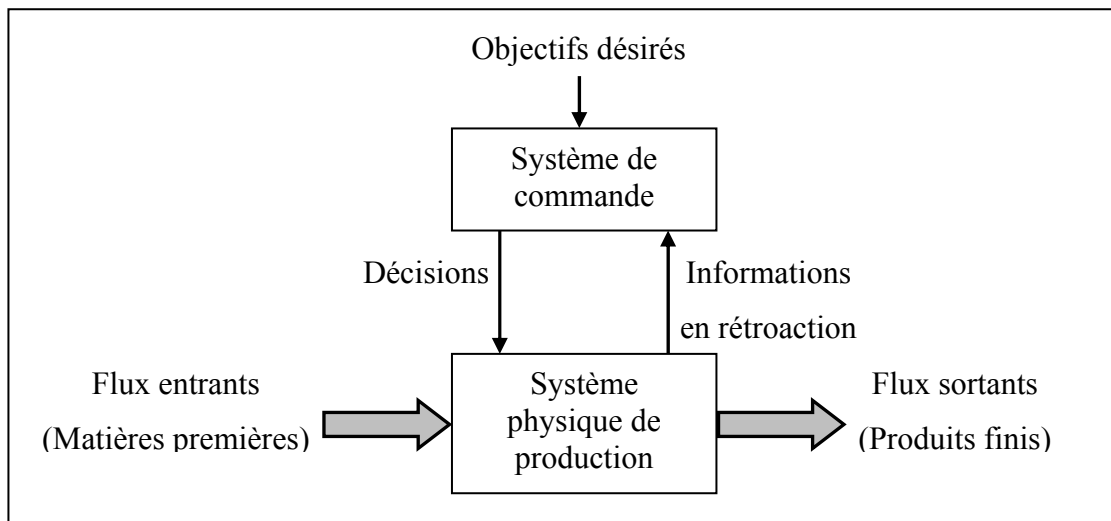


Figure 1.1 Structure d'un système de production

1.3 Les différents systèmes de production

Les différents systèmes de production sont établis selon différentes classifications. On en dénombre quatre (4).

1.3.1 Classification selon la nature du processus de production

On distingue trois (3) types de production qui sont, la production en continu, la production dite de « processus » et la production en discontinu (Tamani, 2008). Cependant, dans la littérature on retrouve d'autres types de production intermédiaire :

- Dans la production en continu, le processus de production est complètement automatisé, les produits sont fabriqués sans interruption suivant la même séquence d'opération de postes de travail linéaires. Les produits sont très standardisés et la production est peu flexible comme dans le cas d'une raffinerie de pétrole, une sidérurgie.

- Dans la production dite de « processus », les flux de matières premières circulent sans interruption en passant par la transformation et le transport jusqu'au client final, Ils ne nécessitent pas de stock intermédiaire, Nous pouvons citer l'exemple de la production d'électricité.
- La production en discontinu permet de fabriquer une grande variété de produits finis à tour de rôle en petites séries (production par lot) dans une chaîne de production unique. Dans chaque lot, les produits sont homogènes. Ces différents processus nécessitent un nettoyage et un équilibrage des postes de travail (les machines, outils par exemple) avant de passer de la fabrication d'un produit à un autre (une PME de meubles par exemple).

1.3.2 Classification selon les quantités produites

En fonction de la quantité de produits à fabriquer, il est possible de distinguer trois (3) types de production : la production unitaire, la production par lot et la production en série (Tamani, 2008) :

- La production unitaire (ou par projet) est la production d'un produit unique sur commande qui vise une demande précise d'un client spécifique. Généralement, ce type de production concerne des produits très complexes (moteur de fusé, barrage, navire par exemple).
- La production par lot est la production de différentes séries de produits identiques fabriqués en petite quantité (sur machines-outils par exemple).
- La production en série est le type de production opposé à celui à l'unité. Il vise tout un marché pour fabriquer des produits identiques à la chaîne (de masse), la production se fait par anticipation de la demande (automobile, composants industriels par exemple).

1.3.3 Classification en fonction des modes de gestion de la production

Selon Dehayem (2009), il existe trois (3) modes de gestion de la production, soit la production sur stock, où la gestion se fait en flux poussés, soit la production sur commande, où la gestion se fait en flux tirés et la production de nature hybride :

- Dans la production sur stock (Push policy), la production est lancée sans que les futurs clients ne soient identifiés et la planification de la production se fait à partir des prévisions de la demande du client. Ce mode de gestion de la production s'appuie sur une production de l'amont vers l'aval afin de satisfaire rapidement une demande qui permet de produire à flux poussés pour constituer les inventaires de produit fini avant leur livraison. C'est pourquoi on parle alors de pilotage par l'amont. Ce système est conçu pour fabriquer des produits simples, standards et de consommation courante. Il permet d'éviter les ruptures de stock, car les produits sont déjà disponibles avant même qu'ils ne soient commandés. Cela a pour conséquence des frais de stockage très élevés.
- Dans la production sur commande (Pull policy), le système de production est géré à partir de la réception d'une commande déterminée dont l'ordre de fabrication est déclenché. On parle alors de pilotage par l'aval. Ce mode de pilotage s'appuie sur une production en petites séries, selon des produits complexes tirés par la commande du client de l'aval vers l'amont. Cela permet de produire à flux tirés, c'est pourquoi on parle de production en juste à temps (JAT). Cela permet aussi d'éliminer les inventaires suivant une logique de vente pour produire, tout en minimisant le coût d'inventaire. Dans ce cas présent, le client subit des délais d'attente d'approvisionnement, de fabrication et de livraison. Toutefois cette méthode requiert une grande fiabilité des livraisons, de la polyvalence et de la flexibilité des travailleurs (Stevenson et Benedetti, 2006).
- Dans la production hybride, on se sert des deux méthodes de production : la méthode de flux poussés et la méthode de flux tirés. Cette production combine la production sur stock et la production sur commande. Pour illustrer cette méthode, prenons les exemples du secteur automobile, du module de transformation pour fabriquer les produits standards à flux poussés et de ligne d'assemblage pour assembler les produits plus complexes à flux tirés.

1.3.4 Classification en fonction d'aléas et du temps

Une classification des systèmes de production en fonction de la prise en compte de variations aléatoires et du temps a été proposée par (Law et Kelton, 1991). Ils distinguent :

- Les systèmes dynamiques et déterministes qui sont des systèmes indépendants de l'influence de variables aléatoires (par exemple une demande à taux constant). Dans le cas des systèmes dynamiques et stochastiques, les imprévus, tels que les mises en course, les accidents de travail et les arrivées de pannes ont un effet significatif sur le comportement du système (Dehayem N., 2009).
- Les systèmes statiques, quand à eux ne dépendent pas du temps et ne connaissent qu'un seul état (exemple de calcul du bénéfice annuel net) contrairement aux systèmes dynamiques qui ont un comportement assujetti aux changements dans le temps (exemple de système de manutention dans une usine).

1.4 Méthodes de gestion de la production

Le MRP (Material Requirements Planning), le JAT-Kanban et le TOC (Theory of Constraints) sont les principales méthodes de gestion de la production discutées dans la littérature.

1.4.1 Le MRP

Le MRP (Material Requirements Planning) est une méthode qui permet de planifier les besoins en composants en flux poussés. Cette méthode a été développée aux États-Unis en 1965 par J. Orlicky (1975). Le principe d'Orlicky se base sur deux (2) types de besoins : les besoins indépendants et les besoins dépendants. Il dit que : « les besoins indépendants doivent être estimés par des prévisions, les besoins dépendants peuvent et doivent être calculés... ». Tout d'abord, on doit calculer les besoins bruts (besoins dépendants) en matières premières et composants grâce aux nomenclatures des produits finis et aux données du PDP (Programme Directeur de Production) qui permet d'obtenir les prévisions de la

demande (besoins indépendants) et puis selon l'état des inventaires et des en-cours pour enfin calculer les besoins nets en matières premières et composants. De son évolution, le MRP2 (Manufacturing Resources Planning) en français Planification de Ressources de Production (PRP), permet en plus de prendre en compte toutes les ressources de l'entreprise (matérielles, humaines, comptables, financières, etc.) pour effectuer une planification des besoins en capacité afin de répondre aux besoins du PDP (prévisions de la demande), mais aussi d'ajuster les charges de travail en fonction des capacités de production avant de lancer l'ordre de fabrication ou d'achat. C'est à la fois une méthode de gestion des stocks, mais aussi de planification (Johnson et Montgomery, 1974).

Parmi les avantages du MRP, notons qu'il permet de réduire les inventaires, les en-cours et d'éviter le risque de rupture de stock. Par contre pour une meilleure gestion de production, le MRP nécessite des données précises et le fait de ne pas prendre en réalité les contraintes de limite de capacité des ressources de production rend le pilotage plus difficile lorsque la demande est fluctuante. De plus, on parle de système MPR FCS (Finite Capacity and Scheduling) qui vient combler les omissions ou absences du MRP2 en prenant en compte la limite de capacité des ressources de production (capacité finie). Plusieurs chercheurs ont contribué dans l'amélioration de cette méthode comme Wuttiornpun et Pisal (2007) et Pandey *et al.* (2000). Une nouvelle version du MRP proposée est le MRP APS (Advanced Planning and Scheduling), une technique de planification avancée qui permet d'analyser la capacité des ressources de production sur un horizon à long terme.

L'ensemble des versions de MRP sont intégrées dans la plupart des logiciels de GPAO (Gestion de la Production Assistée par Ordinateur), logiciel né dans les années soixante et qui permet de gérer toutes les activités de la production d'une entreprise manufacturière. Progressivement, avec l'évolution technologique, le GPAO s'étend vers le ERP (Entreprise Resources Planning) ou PGI (en français, Progiciel de gestion intégré) des sociétés SAP, Oracle, Baan et PeopleSoft etc. en gérant toutes les fonctions de l'entreprise telles que : la planification de la production, la gestion de la qualité, la maintenance, la chaîne logistique,

les finances, la comptabilité, etc. L'avantage, est que ces fonctions peuvent communiquer entre elles en temps réel grâce aux applications client-serveur web.

1.4.2 Le JAT

Le JAT (Juste à temps) appelée aussi méthode du zéro stock est une philosophie de production à flux tirés dans laquelle la production est limitée par les besoins de la demande du client. Elle est basée sur la philosophie de Kiichiro Toyoda qui dit que « si l'on obtient ce dont on a besoin, au moment où on en a besoin et dans les quantités désirées, on limite tous les gaspillages et incohérences, et l'efficacité de la production en sera améliorée » (Ohno, 1990). Cela veut dire qu'il faut acheter la quantité désirée de matières premières juste lorsqu'une commande est donnée par le client, l'apporter par les fournisseurs juste au moment voulu et produire juste à temps à la quantité demandée. Ce principe a été conçu dans les années 50 par Taiichi Ohno. Il a toutefois été mis en pratique dans la fin des années 70 dans l'entreprise Toyota Motor Company.

Les objectifs principaux du JAT visent à :

- réduire les coûts de production;
- diminuer les temps d'attente entre les composants ou les produits tout au long du processus;
- éviter la surproduction;
- minimiser les stocks (matières premières, en-cours, produits finis);
- avoir une meilleure qualité de production possible.

Pour atteindre ces objectifs, le JAT vise à éliminer les 7 sources de gaspillage les plus courants et qui peuvent engendrer un surcoût sans ajouter de la valeur au produit (Badiane, 2010) :

- les temps d'attente;
- la surproduction;
- la défectuosité des produits;

- le surplus d'inventaire;
- tous les déplacements inutiles qui n'ajoutent aucune valeur au produit;
- les processus de transformation inutiles du produit;
- transport et manutention superflus.

Plusieurs concepts ont été réalisés dans la pratique et fonctionnent selon la philosophie de JAT (en anglais, Just In Time), on peut citer :

Le JAT-Kanban ou par étiquette en japonais, qui est une méthode de régulation de la production et des inventaires dont le principe est de limiter la production du poste amont en fonction de la quantité demandée du client au poste aval (la production attend les informations transportées par le Kanban avant de répondre à la demande). Cette méthode permet d'avoir un contrôle durable en temps voulu selon les besoins de l'entreprise que ce soit en matières premières et produits semi-finis pour la fabrication du produit final. Le SMED (Single Minute Exchange of Die) est une méthode d'amélioration de l'organisation qui permet de diminuer le temps de changement d'outil rapidement lors de la fabrication en chaîne d'opération (Shingo, 1987a). Le système Poka Yoke est un outil pour la prévention des défauts de production (Shingo, 1987b). Quant à la méthode 5S (Arnould et Renaud, 2002) c'est une technique d'organisation de l'espace de travail pour avoir un lieu plus sécuritaire, propre et bien rangé. Le nom 5S provient des initiales de 5 mots japonais qui en français veulent dire; débarrasser, ranger, nettoyer, standardiser et être rigoureux.

1.4.3 La méthode TOC

La théorie des contraintes et en anglais TOC (Theory of Constraints) est une philosophie basée sur la gestion des flux des ressources les plus faibles d'un système communément appelé contraintes (ressources goulots). Cette méthode est utilisée pour améliorer ou optimiser la performance globale du système. Elle a été développée par le physicien Eliyahu Goldratt en 1978. L'objectif principal de toute entreprise manufacturière est d'avoir une qualité de produits optimale, avec les meilleurs coûts de fabrication, tout en offrant une meilleure qualité de service à la clientèle. Elle doit cependant garder à l'esprit que le but

principal est de tirer des profits durables maintenant et à l'avenir. Cette méthode innovante a été utilisée pour la première fois lors de la gestion de la production dans son célèbre roman, « Le But » (Goldratt et Cox, 1984) et étayée par la suite dans l'ouvrage de Philip Marris « Le management par les contraintes » (Marris, 2005).

L'entreprise a besoin d'une stratégie afin d'atteindre son objectif. Cependant la comptabilité analytique traditionnelle (revenu net, rentabilité et trésorerie) a conduit à des mauvais choix stratégiques au niveau de la gestion de la production et elle semble donc dépassée. La méthode TOC aussi appelée le principe de tambour-tampon-corde (Drum-Buffer-Rope) est venue pour améliorer les flux de l'entreprise en proposant trois nouveaux indicateurs simples de performance dit de production (Le Throughput, les stocks et les dépenses d'exploitation). Cette méthode travaille sur la synchronisation de (tambour-tampon-corde) qui permet d'optimiser ses trois indicateurs simultanément pour satisfaire les besoins du client à temps. Autrement dit, procéder en trois étapes comme suit :

- D'abord, maximiser le Throughput (l'argent obtenu grâce aux ventes) par l'augmentation des produits vendus.
- Deuxièmement, réduire les stocks, où plutôt la source d'argent immobilisé (matières premières, produits en cours de transformation, produits finis, etc.).
- Troisièmement, minimiser les dépenses d'exploitation correspondant aux coûts des transformations des stocks en Throughput (amortissement des machines, salaires, etc.).

La méthode TOC possède neuf (9) règles et une (1) devise (Goldratt et Cox, 1984) :

- règle 1 : ajuster les flux de matières dans l'usine avec le besoin du marché plutôt que les capacités;
- règle 2 : le niveau d'utilisation d'un non-goulot n'est pas déterminé par sa capacité de production, mais par d'autres contraintes du système;
- règle 3 : il faut utiliser les ressources et non seulement les activer;
- règle 4 : une heure perdue sur un goulot n'est qu'une heure perdue pour l'ensemble du système;
- règle 5 : une heure économisée sur un non-goulot ne sert à rien;

- règle 6 : les goulots déterminent à la fois les flux de sortie et les stocks;
- règle 7 : souvent le lot de production et le lot de transfert ne sont pas égaux;
- règle 8 : les tailles de lot de production doivent être variables;
- règle 9 : la prise en compte de toutes les contraintes du système par les programmes de production;

et

- la devise TOC (Théorème de Bellman) dit que l'optimum global n'est pas la somme des optimums locaux. Et comme disait Joël de Rosnay, « Il ne suffit pas de réunir les meilleurs joueurs pour avoir la meilleure équipe, les optimisations locales ne garantissent pas l'optimum global ». (De Rosnay, 1975).

La méthode TOC est utilisée dans le logiciel OPT (Optimized Production Technology). Elle est considérée comme l'outil de juste à temps puisque les débits de sortie (flux de produits) sont tirés à travers le système pour satisfaire la demande des clients tout en diminuant les stocks en amont de la machine goulot et en maîtrisant les charges d'exploitation.

Pour plus d'efficacité de la gestion de la production, il est possible de combiner ces approches, toutefois, c'est au gestionnaire des opérations de déterminer laquelle de ces combinaisons est la plus adaptée pour piloter le système de production.

Entre temps, c'est tout un défi pour l'entreprise de trouver un compromis entre les différents paramètres qui feront de son produit, "le meilleur produit qualité sur le marché" à offrir aux clients. L'entreprise ne doit bien sûr pas lésiner sur la qualité, elle doit aussi offrir ce produit à un bon prix et le livrer dans des délais et à l'endroit souhaité. Tout cela afin de répondre aux exigences de sa clientèle. Pour ce faire, l'entreprise doit faire appel à une « superfonction » qu'on appelle, la logistique (Stevenson et Benedetti, 2006) afin de mieux gérer les flux des matières entre la source et les clients finaux. C'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.

1.5 La logistique

Historiquement, selon Larousse l'origine du mot logistique vient du mot grec "Logistikos" qui signifie la logistique ou l'art du raisonnement ou du calcul mathématique. La première application de la logistique fût dans le secteur militaire pendant la deuxième guerre mondiale. Pour mettre au point tous les moyens techniques destinés à assurer l'approvisionnement des unités armées.

Aujourd'hui, la logistique est une fonction dépendante de l'évolution du marché. Elle peut se définir comme l'ensemble des activités d'une entreprise visant à obtenir une meilleure gestion des flux de matières premières, d'en-cours, de produits finis et d'informations du point d'origine au point de consommation. La logistique doit mettre à la disposition du client le bon produit, au meilleur coût, avec une qualité supérieure, livré à l'endroit et au moment désirés. Dans la partie suivante, nous étudierons les différents types de logistique et leurs différentes utilisations.

1.6 Les différentes logistiques

D'après Pimor (2001), on classe la logistique en trois (3) grandes catégories : les domaines classiques de la logistique, les nouvelles approches de la logistique et la chaîne d'approvisionnement (supply chain).

1.6.1 Les domaines classiques de la logistique

Il existe trois (3) grands domaines dans lesquels la logistique est très utilisée. Il s'agit des Transports, du stockage et de la manutention :

- logistique des transports englobe la planification, l'organisation, la direction ainsi que le contrôle des réceptions et expéditions des marchandises;
- logistique de stockage comporte les différentes activités de gestion des produits stockés dans les entrepôts et en attente d'une utilisation future;

- logistique de manutention regroupe la manipulation et le transport des marchandises ainsi que les services au sein de l'entreprise.

1.6.2 Les nouvelles approches

Les différents types de logistique selon le domaine d'activité :

- logistique d'approvisionnement (acheminement des produits de base nécessaire à la fabrication du produit);
- logistique de production (acheminement des produits et matériaux sur les chaînes de fabrication des produits);
- logistique de distribution (opérations concernant le transport d'un produit de son lieu de fabrication à son destinataire final, soit le consommateur). On peut citer comme exemple, le stockage et la livraison;
- logistique de soutien : rassemble les activités logistiques qui permettent de garder en opération un système tel qu'une machine;
- logistique militaire (action qui permet d'acheminer le matériel militaire nécessaire afin que l'armée soit opérationnelle sur son lieu d'opération);
- logistique de service après vente (service fournis par l'entreprise à son client après la vente d'un produit par exemple, l'installation, la réparation, etc);
- logistique de E-commerce regroupe les différentes catégories utilisant l'outil internet dans la pratique de la logistique. Elles sont classées selon les relations entretenues par les protagonistes B2B (Business to Business), B2C (Business to Consumers), C2B (Consumers to Business), C2C (Consumers to Consumers).

Pour fin d'illustration, prenons l'exemple de Wal-Mart. Ce géant américain pratique deux (2) formes de E-Commerce. La première en amont avec ses fournisseurs afin que ceux-ci puissent avoir accès en temps et en heures aux données qui leur permettraient d'améliorer leur approvisionnement et leur gestion des stocks. Wal-Mart utilise ce système non seulement pour envoyer des bons de commandes, mais aussi pour recevoir des factures. On appelle cette forme de commerce B2B (Business To Business). Cette entreprise a aussi

recours au B2C (Business to Consumers), elle utilise une autre méthode de commerce en plus de la forme traditionnelle de ses points de vente. Wal-Mart offre désormais ses produits en ligne en pratiquant la vente par Internet. Cela lui permet d'avoir une vitrine virtuelle directement dans le domicile de son client.

- Logistique inverse ou « reverse logistics » : d'après la définition de Rogers et Tibben-Lembke, la logistique inverse est :

« le processus de planification, d'implantation, et de contrôle de l'efficacité, de la rentabilité des matières premières, des en-cours de production, des produits finis, et l'information pertinente du point d'utilisation jusqu'au point d'origine dans le but de reprendre ou générer de la valeur ou pour en disposer de la bonne façon tout en assurant une utilisation efficace et environnementale des ressources mises en œuvre. » (Rogers et Tibben-Lembke, 1998)

Autrement dit l'ensemble des activités logistiques gérées dans le sens inverse du consommateur au fournisseur permettent de récupérer la valeur des produits retournés ou de disposer de la façon la plus efficace pour diminuer l'impact sur l'environnement en utilisant moins de ressources tout en aidant à améliorer la qualité du produit.

1.6.3 La chaîne d'approvisionnement (supply chain)

L'association française de normalisation (AFNOR) traduit le mot « supply chain » en chaîne d'approvisionnement. C'est l'ensemble des flux des produits, des flux d'information et des flux financiers depuis la commande des matières premières du fournisseur (amont) jusqu'à la livraison des produits finis au client final (aval).

Plusieurs structures de chaînes d'approvisionnement existent dans la littérature, Huang *et al.* (2003) les classifient selon le flux des matières (matières premières, produits semi-finis ou produits finis) qui circule entre les différents éléments de la chaîne en cinq (5) configurations classiques : divergente, convergente, réseau, linéaire ou (série) et dyadique :

- chaîne logistique divergente, dont le flux des matières provient du même site ou (élément) pour alimenter plusieurs sites en aval;

- chaîne logistique convergente, dont le flux des matières des sites en amont se rassemble en même site en aval;
- chaîne logistique réseau, appelée souvent chaîne logistique mixte, elle combine les deux (2) structures à la fois, la structure convergente et la structure divergente utilisée généralement pour modéliser les chaînes logistiques plus complexes;
- chaîne logistique dite linéaire ou (série), dans cette configuration, chaque élément en amont est connecté à un seul élément en aval;
- chaîne dyadique, considérée comme un cas particulier de la chaîne linéaire, elle permet de créer une relation entre de deux (2) partenaires, client et fournisseur ou donneur d'ordre et sous-traitant.

Pour une étude plus détaillée sur les différentes catégories de la logistique et la supply chain, le lecteur peut se référer au livre de Pimor (2001).

Voyons maintenant les principales étapes de la logistique inverse proposées par (Rogers et Tibben-Lembke, 1998) telles que présentées à la figure 1.2.

Une fois le produit retourné à l'entreprise, il doit être examiné avant que soit décidé l'augmentation de sa durée de vie utile. Lorsqu'une décision est prise concernant le produit, il doit être réparé, remis à neuf ou réutilisé. Et lorsque la décision est prise concernant la matière, dans ce cas, le produit sera recyclé en matière première, reconfiguré de nouveau afin de former un autre type de produit ou sera récupéré certains ou la totalité des composants du produit. Il arrive toutefois que le produit soit tout simplement retiré de la circulation et disposé selon les bonnes conditions pour réduire son impact sur l'environnement. Dans notre étude, nous nous intéressons particulièrement à la logistique inverse en tenant compte des activités de réutilisation et de retrait de la circulation (disposal) du produit. Ces activités seront intégrées à la logistique de production de base des systèmes manufacturiers.

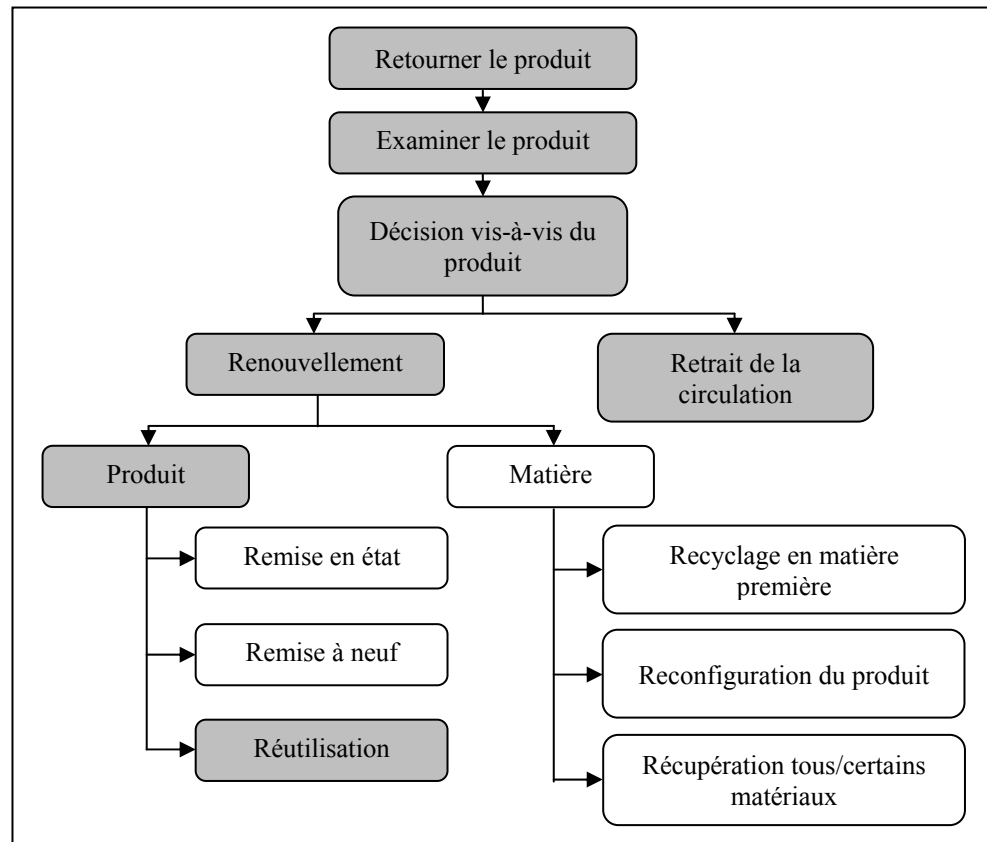


Figure 1.2 Les activités de la logistique inverse
Tirée de Lambert (2005, p. 18)

1.7 Niveaux de décision

Lorsqu'il est question de la gestion de la chaîne logistique, trois niveaux de décision sont mis à disposition des entreprises industrielles. Il s'agit des niveaux stratégique, tactique et opérationnel (Huang *et al.*, 2003).

Les décisions stratégiques sont prises par le plus haut niveau hiérarchique. Ces décisions engagent l'entreprise sur une période à long terme (plus de 3 ans). On retrouve généralement les décisions concernant les fournisseurs, la localisation des sites, leur dimensionnement ainsi que le choix du mode de transport. Le choix du mode de gestion de la production peut être à

la commande ou sur stock. On peut citer aussi l'intégration de la logistique inverse à la chaîne logistique (Fleischmann *et al.*, 1997).

Dans un deuxième niveau, les décisions tactiques sont prises sur une vision à moyen terme (de 6 à 36 mois). Ces décisions assurent la gestion des ressources matérielles et humaines. On peut par exemple se questionner sur les capacités des lignes de production, des machines ainsi que les besoins en main-d'œuvre, la possibilité de définir les politiques de retour des produits (Lambert, 2005).

Dans un niveau plus bas, on trouve les décisions opérationnelles prises à court terme (1 jour à 6 mois). Elles permettent l'utilisation efficace des ressources dans le processus de transformation. Dans ce niveau, l'entreprise s'engage à travailler avec des commandes réelles de client. Elle peut aussi se baser sur les retours du produit pour améliorer la qualité du produit (Lambert, 2005).

Dans cette section, nous présenterons une revue de littérature dans le domaine de la gestion de la production des systèmes manufacturiers, par la suite, nous étudierons l'intégration dans l'environnement de production de base de la logistique inverse pour finir avec la problématique de recherche et les objectifs de l'étude ainsi que la méthodologie proposée.

1.8 Gestion de production des systèmes manufacturiers

Au cours des deux dernières décennies, il y a eu un intérêt croissant des chercheurs dans l'application de la théorie de la commande optimale pour le problème de la planification de la production dans les systèmes manufacturiers. De nombreux auteurs ont exploré la direction de recherche de planification de la production dans les systèmes manufacturiers. Dans la littérature sur le sujet, on fait mention par exemple de la première contribution dans le domaine sur les stratégies de contrôle d'un modèle quadratique (Holt *et al.*, 1960), en utilisant le principe de calcul variationnel. Bensoussan *et al.* (1974) ont présenté quelques applications

de la théorie de la commande optimale utilisant le principe du maximum à la gestion de la science et de l'économie.

La théorie de la commande optimale est généralisée pour les systèmes stochastiques alors qu'elle était initialement utilisée en ingénierie et autres domaines des mathématiques appliquées. La théorie de la commande optimale stochastique est également généralisée dans les domaines de la finance, de l'économie, de la médecine, de la planification de la production et de la maintenance pour résoudre une variété de problèmes. Un exemple classique de la classe de problèmes de commande optimale stochastique est celui de l'allocation de portefeuille avec un taux de consommation introduit par Merton (1971). Les versions de commande optimale stochastique discrète et continue sont élaborées par Sethi et Thompson (1981; 2000).

Tzafestas *et al.* (1997) ont introduit et clarifié la notion de commande prédictive basée sur le concept du modèle de commande prédictive MBPC (en anglais Model-Based Predictif Control) pour des problèmes de planification de la production et de l'inventaire stochastique utilisant la commande optimale stochastique de sorte à atteindre les trajectoires désirées.

Dobos (2003) a étudié le modèle de production et d'inventaire optimal déterministe de HMMS (Holt, Modigliani, Muth and Simon). Il est considéré comme une généralisation du modèle de Holt *et al.* (1960) et discuté par El-Gohary *et al.* (2009), utilisant le principe du maximum de Pontryagin pour déterminer les stratégies de commande optimale dans un environnement déterministe et pour satisfaire une demande client de nature dynamique. Sur la base de cette étude, nous sommes particulièrement intéressés à la modélisation du problème de planification de la production dans un environnement stochastique utilisant le principe du maximum de Pontryagin stochastique.

De plus en plus d'entreprises manufacturières utilisent la méthode de la logistique inverse pour permettre d'optimiser au mieux la gestion de leur production afin que celle-ci soit plus rentable. C'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.

1.9 Revue de littérature de la gestion de production dans la logistique inverse

Dans la littérature, il existe différents procédés dans la logistique inverse qui permettent aux produits retournés à l'entreprise d'avoir une seconde vie. Afin d'augmenter leur durée d'utilisation, il y a plusieurs options qui sont classées en trois (3) catégories (Thierry *et al.*, 1995) et (Lambert, 2005) :

- Tout d'abord, soit on répare le produit, le réutilise ou alors on le remet à neuf cela s'appelle l'extension de la durée de vie du produit.
- Ou bien on recycle le produit en matière première, on le reconfigure ou encore on récupère certains ou la totalité des composants du produit. Ces procédés font partie de l'extension de la durée de vie de la matière.
- Enfin on peut le retirer de la circulation en réduisant son impact sur l'environnement.

L'approche traditionnelle qui dissocie la logistique inverse à la chaîne logistique n'est pas satisfaisante. Il n'y a pas de corrélation entre l'ensemble des activités logistiques pour assurer une meilleure planification de la production (Chouinard *et al.*, 2003). Plusieurs auteurs mentionnent que l'intégration séquentielle de la logistique inverse et le couplage des deux à la fois ne donnent pas le même résultat comme dans les travaux de Fleischmann *et al.* (1997), Fleischmann (2001), Chouinard *et al.* (2003) et Lambert (2005). Finalement le retour des produits ne peut avoir que des impacts positifs sur le plan économique au niveau de la production.

De nombreux modèles de logistique inverse avec des fonctions coûts de type linéaire et quadratique ont été abordés dans la littérature, nous pouvons citer parmi les auteurs, Dobos (1999) et Kleber *et al.* (2002). Ces auteurs ont enquêté sur le problème dynamique linéaire de commande optimale en logistique inverse avec l'activité de retrait de la circulation des produits récupérés appliqué à la gestion de l'inventaire avec les coûts de structure linéaire du système considéré. Hajej *et al.* (2010) ont utilisé le modèle linéaire quadratique et stochastique pour développer un plan optimal de production d'un système de production qui

prend en compte le retour des produits finis et qui minimise les coûts d'inventaire, de production et de demandes perdues.

Dobos (2003) a présenté des stratégies optimales de production et d'inventaire d'un système hybride fabrication-réutilisation en logistique inverse sous des contraintes de l'inventaire dans un environnement déterministe et dynamique avec la prise en compte du retrait de la circulation (disposal) des produits récupérés. Il suppose que les fonctions coûts de production et d'inventaire utilisées sont linéaires-convexes. Il a montré comment dans la théorie de la commande optimale, le principe du maximum de Pontryagin, peut être appliqué pour étendre et unifier le modèle HMMS (Holt, Modigliani, Muth and Simon) en logistique inverse de Holt *et al.* (1960) lorsque l'on rencontre des problèmes de planification de la production et de gestion de l'inventaire.

La première contribution marquante s'appuie sur le modèle de logistique inverse sans retirer de la circulation les produits récupérés. Elle fût présentée dans les travaux de recherche de Kistner et Dobos (2000). Ce modèle est une généralisation du modèle dynamique de base de production et d'inventaire de Arrow et Karlin (1958) dont le coût d'inventaire est une fonction linéaire et le coût de production est une fonction convexe et croissante. De Brito et Dekker (2002) ainsi que Dekker *et al.* (2010) ont défini la structure du système de la logistique inverse en boucle fermée dans lequel le produit retourné sera réutilisé ou recyclé à l'intérieur de la même entreprise manufacturière. En réalité, l'insatisfaction des clients est souvent due à la demande aléatoire. Les modèles dynamiques existants ne prennent pas en considération l'aspect aléatoire de la demande et le retour des produits lorsqu'on fait appel à la logistique inverse. Précisons maintenant la problématique de recherche et la démarche méthodologique qui reflètent l'originalité de ce travail en permettant d'intégrer ces aspects aléatoires pour répondre aux besoins des industriels.

1.10 Problématique de recherche

Avoir une gestion d'inventaire efficace du système manufacturier est primordial pour une entreprise, car cela permet à celle-ci de répondre plus rapidement aux exigences des clients en maîtrisant les divers aléas. Elle doit prendre en compte l'évolution et l'incertitude de la demande en fonction des changements permanents de l'environnement économique. Dans le cadre de notre étude, deux (2) cas sont proposés :

- Dans un premier temps, le système considéré est composé d'une machine fiable ayant une capacité finie produisant un seul type de produit (M1P1). Lorsqu'on rencontre un problème de planification de la production stochastique, il peut être formulé comme un problème de commande optimale stochastique permettant de trouver la stratégie de production optimale stochastique pour gérer l'inventaire du système et satisfaire la demande aléatoire du client sur l'horizon de planification.
- Dans le deuxième cas, l'extension de ce travail est envisagée par l'intégration, dans l'environnement de production de base (logistique de production), de l'activité de retours des produits en faisant appel à la logistique inverse. Nous nous intéressons au système hybride composé de deux machines fiables ayant une capacité finie qui produisent et réutilisent un seul type de produit (M2P1). La demande du client peut fluctuer et doit être satisfaite par un inventaire de service. Cet inventaire peut être construit par la production de nouvelles pièces ou par la réutilisation des pièces retournées. Un deuxième inventaire de pièces retournées est appelé, inventaire de récupération. Les pièces retournées peuvent alors être réusinées, stockées en attente d'une réutilisation future ou retirées de la circulation de façon à réduire l'impact sur l'environnement. En prenant en considération le retour aléatoire des produits, on doit donc trouver les stratégies de production, de réutilisation et de retrait optimales pour gérer l'inventaire de service du système et satisfaire la demande aléatoire du client sur l'horizon de planification considéré.

L'entreprise doit déterminer de façon optimale les valeurs désirées qu'elle souhaite entreprendre en termes de production, d'inventaire. Elle doit trouver la façon d'atteindre ces objectifs le plus rapidement possible à moindre coûts en prenant en compte des aléas tels que

la demande aléatoire du client ainsi que le retour aléatoire des produits lorsqu'on fait appel à la logistique inverse. Existe-t-il une telle stratégie de commande qui permettra à l'entreprise de maîtriser ces aléas ?

Nous allons maintenant présenter dans le paragraphe suivant nos objectifs et méthodologie de recherche qui nous permettront de répondre à la question de la problématique abordée.

1.11 Objectifs et méthodologie de recherche

L'objectif principal de cette étude est d'utiliser un modèle de commande hiérarchique à deux niveaux comme dans les travaux de Kenné et Boukas (2003) en appliquant le principe de commande optimale stochastique pour déterminer de façon optimale la solution des deux (2) problèmes suivants :

- Dans le premier niveau de la hiérarchie proposée :
 - Pour le premier cas de figure, le seuil d'inventaire désiré (le niveau d'inventaire de sécurité que l'entreprise veut garder en main) et le taux de production souhaité (le taux le plus efficace désiré par l'entreprise) sont déterminés.
 - Pour le deuxième cas de figure où nous avons intégré la boucle de retour des produits (logistique inverse), on parle alors de seuils d'inventaires désirés de service et de récupération ainsi que de taux de production, de réutilisation et de retrait souhaités qui vont être déterminés.
- Dans le deuxième niveau de la hiérarchie proposée :
 - Pour le premier cas de figure, l'objectif sera de maintenir le niveau d'inventaire le plus près possible du seuil d'inventaire désiré et d'avoir le taux de production le plus près possible de la cadence de production souhaitée.
 - Pour le deuxième cas de figure appliqué en logistique inverse, l'objectif sera de garder les niveaux d'inventaire de service et de récupération ainsi que les taux de production, de réutilisation et de retrait les plus proche des seuils d'inventaires et des taux désirés respectifs.

Dans ces cas de figure, on s'applique à résoudre un problème de poursuite de trajectoire afin de satisfaire la demande (Gershwin, 2000).

Ces niveaux hiérarchiques, permettent la minimisation du coût total moyen quadratique ainsi que la somme des déviations quadratiques moyennes de l'inventaire et de la production pour le premier cas de figure. Pour le deuxième cas de figure des deux (2) niveaux, on ajoute dans le calcul du coût, le coût des taux de réutilisation et de retrait et le coût d'inventaire de récupération.

Dans cette présente recherche, pour résoudre le problème de planification de la production dans un environnement probabiliste en temps continu, nous proposons une approche de commande hiérarchisée à deux (2) niveaux. Notre système est assujéti à certaines contraintes qui sont; le taux de demande du produit aléatoire dans les deux (2) cas de figure, le retour aléatoire des produits en logistique inverse et dans les deux (2) niveaux, il est supposé que les valeurs des variables de décision soient restreintes. D'ailleurs, il n'existe aucune restriction sur les variables d'état de service, sauf au niveau de récupération.

On constate que les taux de production et de réutilisation sont définis et doivent varier dans l'espace de décision donnée, et le niveau d'inventaire de service est autorisé à être positif (inventaire) ou négatif (demande en attente), alors que le taux de retrait et le niveau d'inventaire de récupération doivent être positifs seulement. En appliquant le principe du maximum de Pontryagin (Pontryagin *et al.*, 1962) en stochastique et en utilisant la fonction objective quadratique de Holt *et al.* (1960), nous pouvons formuler les problèmes aux valeurs limites dans les premier et deuxième niveaux hiérarchiques.

Rappelons que :

- Le premier niveau de cette hiérarchie est basé sur la formulation d'un modèle stochastique linéaire-quadratique (SLQ) dans les deux (2) cas de figure afin de trouver les taux optimaux désirés de production, de réutilisation et de retrait et les niveaux optimaux désirés d'inventaire de service et de récupération sous un horizon de planification, qui minimise le coût total moyen quadratique.

- Le second niveau de la hiérarchie, est consacré à un problème de commande en optimisation récursive (commande prédictive). Il s'agit donc de poursuivre le plus proche possible la production, la réutilisation et le retrait afin de gérer l'inventaire de façon optimale pour satisfaire la demande du client à moindre coût.

Pour résoudre les problèmes aux valeurs limites (les conditions nécessaires d'optimalité de la commande) obtenus par application du principe du maximum de Pontryagin, les solutions des équations différentielles stochastiques sont obtenues numériquement lorsque le système est sujet à des aléas tels que les demandes et les retours aléatoires et ce, à l'aide du schéma d'Euler Maruyama.

1.12 Démarche d'optimisation proposée

Le principe de la méthodologie que nous avons développé comme dans la figure 1.3 est basé sur quatre (4) grandes étapes. Initialement, le problème de planification de la production stochastique est modélisé par un problème de commande optimale stochastique en prenant en compte des aléas qui s'imposent sur le système. Par la suite, nous pouvons utiliser le principal outil d'optimisation de la théorie de la commande optimale moderne, le principe du maximum de Pontryagin (PMP) pour fournir les conditions nécessaires d'optimalité de la commande.

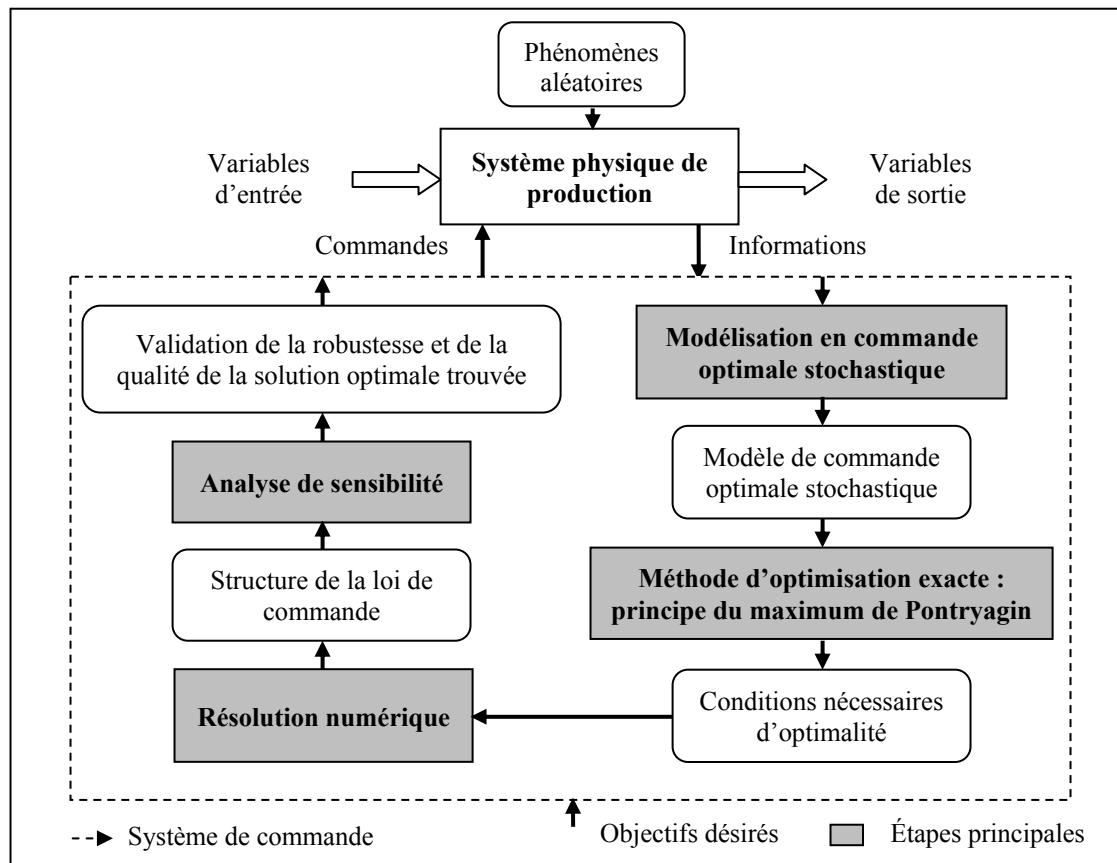


Figure 1.3 Démarche d'optimisation proposée

Les équations différentielles stochastiques obtenues sont difficiles à résoudre analytiquement. Donc nous optons pour une résolution numérique qui déterminera la politique de commande. Une analyse de sensibilité est effectuée sur un système de production composé d'une machine produisant un seul type de produit (M1P1). Elle permet de s'assurer de la performance de l'approche proposée en optimisation avant de l'appliquer sur notre deuxième cas plus complexe en logistique inverse soit deux machines produisant le même produit (M2P1).

1.13 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé les différents travaux relatifs à la gestion des systèmes de production à l'intérieur de l'entreprise manufacturière. Nous avons aussi discuté des

différents procédés qui ont une fonction coût quadratique lorsqu'on fait appel à la logistique inverse. On a pu constater en parcourant les différentes littératures sur le sujet que la logistique inverse améliorerait les performances des systèmes de production et les performances environnementales. L'intégration de la logistique inverse à la chaîne de production a un impact positif sur l'environnement ce qui est d'un intérêt très important dans la pratique. Dans la problématique de cette étude, nous nous sommes intéressés aux systèmes de commande optimale dans un environnement stochastique avec un coût quadratique en appliquant le principe du maximum de Pontryagin pour résoudre le problème de commande optimale.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les méthodes mathématiques qu'on retrouve dans la littérature pour la modélisation des systèmes de production. Nous verrons par la suite les différentes méthodes de résolution des problèmes de commande optimale des systèmes de production.

CHAPITRE 2

MODÈLES DE COMMANDE OPTIMALE D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION

2.1 Introduction

Au sein d'une entreprise manufacturière, la gestion d'inventaire du système manufacturier est d'une grande importance. En effet, elle permet de répondre plus rapidement à la demande des clients. Pour rester compétitive, l'entreprise doit faire face à la fluctuation de la demande des pièces produites en fonction des conditions du marché, des aléas liés aux pannes, aux réparations de la machine et à la prise en compte des activités de la logistique inverse. Tout ceci afin de satisfaire les exigences des clients en termes de qualité, de coût et de délais de livraison. En effet, l'interaction de la logistique inverse dans la production devient de plus en plus importante pour développer une stratégie de commande optimale hybride (production-réutilisation). Avec toutes ces contraintes, commander un système de production devient un problème très complexe. Les outils de modélisation mathématique permettent d'évaluer et de comprendre son fonctionnement et avoir ensuite une meilleure idée de son optimisation.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le système physique de production, les différentes méthodes mathématiques classiques de modélisation appliquées à la production. Par la suite, nous étudierons les différentes méthodes d'optimisation qui existent dans la littérature et quelques politiques de commande des systèmes de production.

2.2 Nature du système de production

Gershwin (1994) définit un système de production comme un ensemble de ressources matérielles composées de différents éléments (machines, moyens de transport, et stocks) et de ressources humaines (opérateurs, etc.) disponibles, en interaction, et qui transforment les matières premières en produits finis et transférables.

La capacité de production d'une machine est limitée, et le taux de production de la machine qui représente la quantité de pièces produites par unité de temps ne doit pas dépasser son taux de production maximum. Dans la réalité, la machine est sujette à des pannes et des réparations aléatoires. L'état de la machine évolue de façon discrète dans le temps c'est-à-dire qu'elle peut être dans un état opérationnel ou dans un état de panne. Dans un système de production l'état d'évolution d'un stock peut aussi être limité par la capacité maximale de ce stock. Dans la figure 2.1, nous présenterons un système physique de production qui combine deux états à événements discrets et continus.

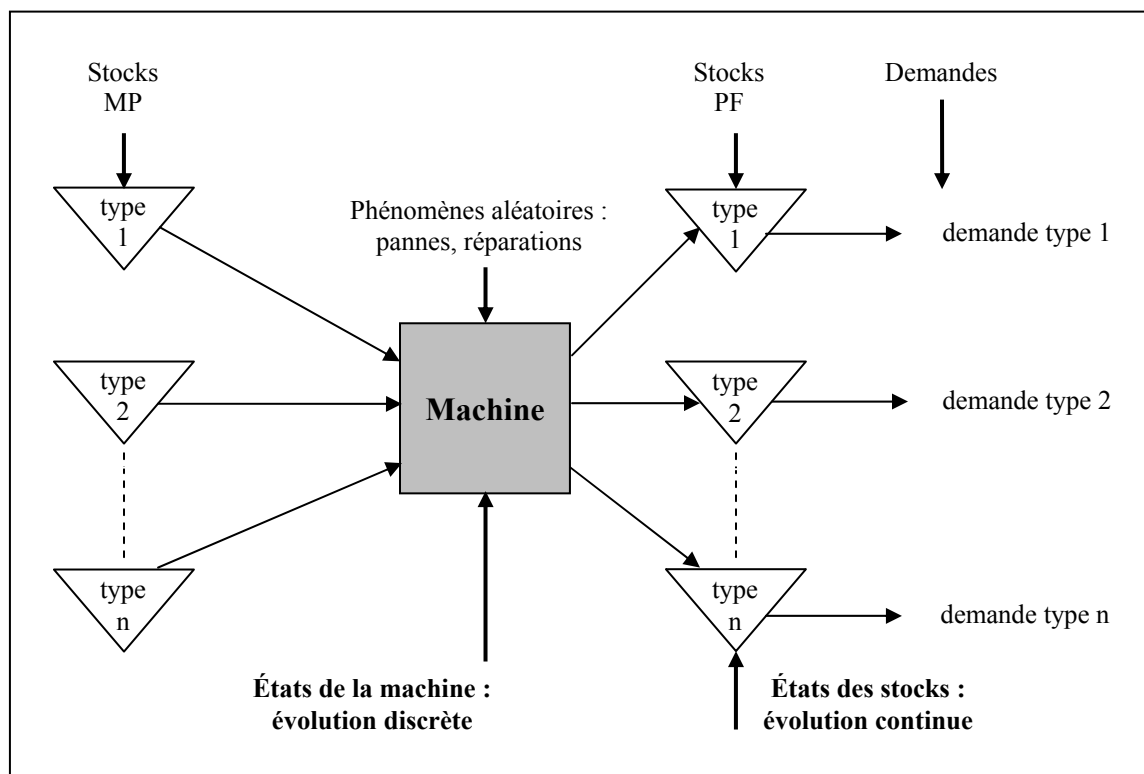


Figure 2.1 Système physique de production à événements combinés
Tirée de Hajji (2003, p. 17)

En plus des aléas liés aux pannes et aux réparations de la machine, d'autres contraintes peuvent s'ajouter au système de production telles que la fluctuation de la demande des clients, l'âge de la machine et le retour aléatoire des produits lorsque le système de production fait appel à la logistique inverse; ce qui rend le système plus difficile à contrôler.

Dans notre travail, nous considérons que les machines sont fiables dans deux (2) cas. Ces deux cas sont les suivants :

- M1P1 (une machine produisant un seul type de produit).
- M2P1 (deux machines produisant le même produit).

Les aléas sont la demande aléatoire de même que le retour des produits est aléatoire en logistique inverse. Avec toutes ces contraintes, il est nécessaire de modéliser et d'évaluer le système de production pour comprendre comment il se comporte avant de le commander en temps réel.

2.3 Méthodes de modélisation mathématique

Les principales méthodes classiques de modélisation et d'analyse des performances employées dans le domaine de la production sont les chaînes de Markov, les réseaux de files d'attente ainsi que les réseaux de Petri.

2.3.1 Les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est un processus stochastique à espace d'état fini qui vérifie la propriété de Markov « Le futur ne dépend que de l'état présent ». Développée par le mathématicien Andreï Markov dans les années 1907 puis par S. Chapman en 1916 et A. Kolmogorov en 1931 (Feller, 1957) et (Kushner, 1977). Ces derniers l'ont généralisée sur un espace d'état infini, pour analyser les problèmes de fiabilité des systèmes réparables comme les systèmes de production et les systèmes de transport. Elle permet de modéliser le comportement du système sous forme d'un graphe orienté. On parle alors de graphe d'état contenant tous les états du système qu'il représente. A chaque transition entre un état et un autre est associé un taux de transition lorsque le temps est continu ou une probabilité de transition dans le cas où le temps est discret.

Prenons l'exemple d'un système de production composé d'une machine produisant un seul type de produit et qui est soumise à des pannes et réparations aléatoires. L'état de la machine est décrit par une variable discrète $\alpha(t)$. On suppose que la dynamique de l'état de la machine est générée par un processus Markovien à temps continu et à espace d'état discret fini.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si la machine est opérationnelle} \\ 0 & \text{si la machine est en panne} \end{cases} \quad (2.1)$$

Autrement dit les durées moyennes de fonctionnement (MTTF : Mean Time To Failure) et de réparation (MTTR : Mean Time To Repair) sont des variables distribuées exponentiellement avec des taux de panne et de réparation respectifs à λ et μ .

Le diagramme de transition d'état est illustré par la figure 2.2.

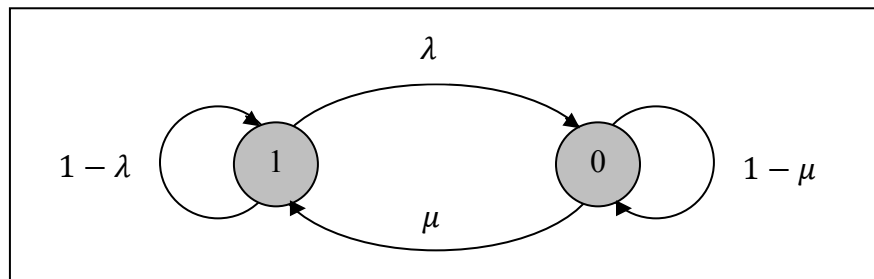


Figure 2.2 Diagramme de transition de la chaîne de Markov à deux états

Les taux de transition pour passer d'un état à un autre dans un court intervalle de temps $[t, t + \delta t]$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \text{prob}(\alpha(t + \delta t) = 1 | \alpha(t) = 0) &= \mu \delta t + o(\delta t) \\ \text{prob}(\alpha(t + \delta t) = 1 | \alpha(t) = 1) &= 1 - \lambda \delta t + o(\delta t) \\ \text{prob}(\alpha(t + \delta t) = 0 | \alpha(t) = 0) &= 1 - \mu \delta t + o(\delta t) \\ \text{prob}(\alpha(t + \delta t) = 0 | \alpha(t) = 1) &= \lambda \delta t + o(\delta t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sachant que : $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{o(\delta t)}{\delta t} = 0$ (2.3)

Pour un système réparable, le MTBF (Mean Time Between Failures) représente la durée moyenne entre deux pannes consécutives, cela correspond donc à la somme des MTTF et MTTR. Cette durée moyenne est illustrée dans la figure 2.3.

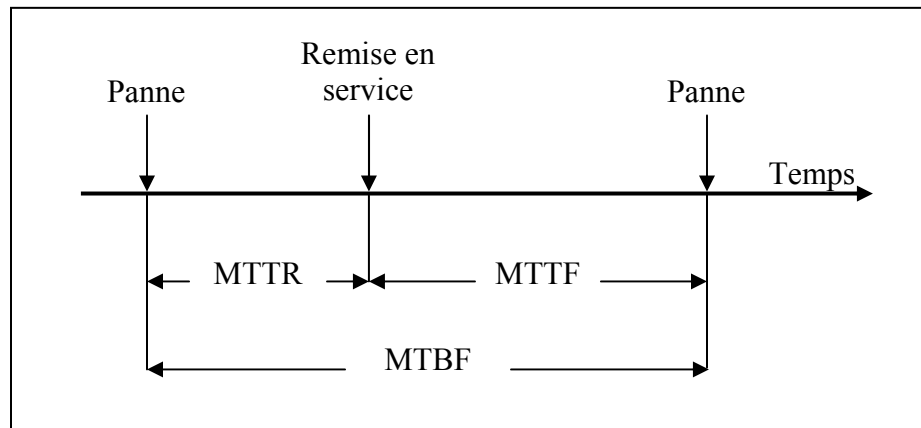


Figure 2.3 Durée moyenne entre deux pannes MTBF

Les modèles de Markov prennent plus en considération les aspects temporels et stochastiques afin de surmonter les difficultés de modélisation utilisant les approches classiques (MRP, JAT-Kanban, TOC). Les modèles de Markov montrent cependant certaines limites lorsque la dimension de l'espace d'état du système est élevée. La modélisation consiste à prendre en compte tous les états possibles du système et toutes les transitions pour passer entre les états; ce qui rend la précision limitée et le temps d'exécution devient beaucoup plus long par rapport au système réel. Pour pallier à ce problème on peut se diriger vers d'autres méthodes telles que les Réseaux de Petri stochastiques et hybrides (Abbou *et al.*, 2004) et (Alla *et al.*, 1992). Lorsqu'il est difficile d'obtenir le modèle mathématique, plusieurs recherches ont montré que l'approche expérimentale basée sur la simulation, les plans d'expérience et la méthodologie des surfaces de réponse est un succès pour optimiser le système de production. C'est ce que l'on peut constater dans les travaux de Kenné et Gharbi (2004), Gharbi *et al.* (2006), Pellerin et Gharbi (2009) et Sajadi *et al.* (2011). En plus, la complexité du caractère stochastique du système de production, lorsqu'il est soumis à des phénomènes aléatoires

(pannes, réparations, demandes) suivant d'autres distributions de probabilité que la distribution exponentielle, devient un objectif difficile à atteindre. Pour une étude détaillée sur le sujet, le lecteur pourra se référer à Ross (1989) et Gershwin (1994).

2.3.2 Les réseaux de files d'attente

Ces modèles mathématiques sont développés par le mathématicien danois Agner Krarup Erlang en 1909 et sont appliqués pour la première fois dans la gestion des réseaux téléphoniques. Par la suite, ils ont été adaptés à l'évaluation des performances des systèmes informatiques et des télécommunications. Aujourd'hui les chercheurs utilisent ces méthodes analytiques, car elles fournissent des résultats rapides et exacts par rapport aux observations réelles (Fontanili, 1999). Elles ont démontré leur efficacité dans d'autres domaines par le passé, mais aussi dans de nouveaux domaines notamment dans la commande des systèmes de production en prenant en compte les effets aléatoires du système tels que les pannes de machines. Pour plus de détails concernant les réseaux de files d'attente, le lecteur peut se référer au livre de Gershwin (1994) et aux travaux de Buzacott et Yao (1985).

Nous pouvons arriver à modéliser un système de production comme un réseau de files d'attente. Il existe deux types de réseaux. Les réseaux ouverts connaissent une ou plusieurs entrées (pièces) venant uniquement de l'extérieur suivant un processus d'arrivée et qui circulent entre les différentes stations (machines) pour quitter enfin le système. Et les réseaux fermés, le concept du système est en feedback, et les pièces retournées dans le système sont limitées. Donc aucun élément ne peut rentrer ou sortir du système. Lorsque le réseau combine les deux structures précédentes, ouvert pour certains types de pièces et fermé pour d'autres, on parle alors du réseau mixte (ou multi classes).

Buzacott et Shanthikumar (1980) ont introduit les pannes de machines dans les modèles de réseau de files d'attente en considérant comme hypothèse que les machines sont identiques. Ils proposent une approche simple afin de déterminer le taux de production avec et sans pannes en fonction de trois paramètres : le taux de pannes de la machine, le temps de

réparation de la machine et la limite de stockage. Toutefois on rencontre des difficultés pour intégrer dans ces modèles d'autres aspects aléatoires dans la planification de la production comme les opérations de maintenance préventive et de mise-en-course. Ils rendent la tâche des responsables de la production plus difficile pour assurer le bon fonctionnement du système de production (Abbou, 2003).

2.3.3 Les réseaux de Petri

Les réseaux de Petri (RdP) sont un outil de modélisation graphique et mathématique très puissant dans le traitement de commande des systèmes séquentiels. Inventé en 1964 par Carl Adam Petri, on les retrouve dans la modélisation de divers systèmes à variables discrètes, mais beaucoup plus servant à représenter les protocoles de communication (TCP/IP : Transmission Control Protocol/Internet Protocol, etc.), les réseaux informatiques et les réseaux de transport. Grâce au concept graphique des réseaux de Petri et parmi les principales propriétés qui caractérisent ses réseaux (Demri, 2009), on retrouve : leur capacité à traiter le parallélisme, la synchronisation, le partage de ressources et la gestion des conflits. Le RdP est composé de quatre (4) éléments essentiels, soient la place, pour décrire les états du système, la transition pour indiquer les changements d'état, l'arc orienté pour faire le lien entre les places et les transitions ainsi que le nombre de jetons dans la place.

Les réseaux de Petri permettent d'exprimer le problème sous forme mathématique afin de vérifier et comprendre le comportement du système. Les modèles RdP ordinaires sont essentiellement de nature discrète, cependant cet outil atteint ses limites lorsque le nombre d'états discrets du système à modéliser augmente. L'intégration de la variable temps dans les réseaux de Petri ordinaires a permis de prendre en compte non seulement des contraintes temporelles (Mokhtari, 2007), mais aussi des aspects dynamiques et stochastiques du système. Dans ce cas, on parle alors des réseaux de Petri temporisés dont la durée de traitement est associée soit à la transition (RdP t-temporisé) soit à la place (RdP p-temporisé). Dans Les réseaux de Petri temporels (RdP t-temporels) chaque transition possède un intervalle de temps. Les réseaux de Petri stochastiques sont capables de modéliser les

phénomènes aléatoires. Ces modèles sont appliqués pour les systèmes de production aussi bien à événements discrets que pour les événements continus (Zerhouni et Alla, 1992).

Une nouvelle extension qui combine à la fois les phénomènes à événements discrets et continus a engendré des réseaux de Petri hybrides. Dans l'exemple des systèmes de production, ils comportent des événements continus comme l'état d'évolution du stock et des événements discrets tels que l'état d'évolution de la machine (pannes, réparations). Les modèles hybrides ont été appliqués avec succès dans la modélisation et l'évaluation des performances d'un système de production (David, 1991) et (Alla *et al.*, 1992).

En plus de la modélisation des systèmes de production à événements hybrides (interaction du continu et du discret), les Réseaux de Petri sont capables de prendre en compte les phénomènes aléatoires tels que les pannes et les réparations de la machine suivant des lois exponentielles de distribution ou autres lois de probabilité (Demri, 2009). Toutefois, le problème s'amplifie et il devient donc très difficile à résoudre. Comme dans notre projet, le caractère stochastique imposé par la demande des clients ou le retour des produits est une composante importante, mais difficile à inclure dans le comportement du système de production utilisant les réseaux de Petri comme dans le cas des chaînes de Markov. Pour cela nous allons explorer d'autres méthodes de recherche pour pouvoir les prendre en considération dans la modélisation mathématique du système de production et ce afin d'améliorer ses performances.

2.4 Classification des méthodes d'optimisation des systèmes de production

Nous pouvons classer les méthodes d'optimisation en production en deux grandes catégories. D'une part les méthodes d'optimisation dites exactes et d'autre part les méthodes d'optimisation dites approchées ou heuristiques.

2.4.1 Méthodes d'optimisation exactes

Il existe deux grandes méthodes d'optimisation exactes. L'une est basée sur la résolution analytique alors que l'autre se repose sur une résolution algorithmique. Elles permettent d'atteindre la solution optimale dans un délai court lorsque le problème est simple. Par contre, lorsque le problème se complexifie, ces méthodes nécessitent un temps de calcul beaucoup plus long.

2.4.1.1 Méthodes analytiques (principe du maximum de Pontryagin)

Ces méthodes sont basées sur la formulation mathématique du problème sous forme d'équations ou de systèmes d'équations. De plus, elles dépendent principalement de la présence de dérivées qui leurs permettront de trouver la solution exacte. On notera que le but du modèle mathématique est d'optimiser le système de production pour évaluer et comprendre son comportement. Les méthodes classiques comme la méthode de la descente du gradient, la méthode de Newton et la méthode de quasi-Newton sont limitées pour résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes. Elles convergent vers un minimum ou un maximum local qui dépend seulement de la direction de la descente de la fonction objectif à optimiser. Pour résoudre les problèmes d'optimisation avec contraintes comme dans le cas en production, un nouveau concept analytique en commande optimale est apparu. Il utilise le système d'équations de Hamilton aussi appelé le principe du maximum de Pontryagin. Il intègre des variables inconnues qu'on appelle les variables d'état adjoint (ou les multiplicateurs de Lagrange dans le cas d'un système Lagrangien) pour prendre en compte ces contraintes dans l'optimisation.

Définition :

Le principe du maximum de Pontryagin (PMP) est l'un des principaux outils mathématiques de la théorie moderne de la commande optimale après les travaux de Bellman sur la programmation dynamique. Développé par le mathématicien L.S. Pontryagin et ses étudiants

(Pontryagin *et al.*, 1962), on applique ce principe basé sur l'approche Hamiltonienne pour formuler les problèmes de commande optimale en problèmes aux valeurs limites afin de déterminer les conditions nécessaires d'optimalité de la commande sous contraintes de la commande ou de l'état. Le principe du maximum de Pontryagin assure que toute solution optimale trouvée soit la projection d'une solution extrémale¹ qui représente la solution d'un certain système de nature Hamiltonienne.

Dans l'exemple qui suit, nous allons appliquer le principe du maximum de Pontryagin sur un problème de commande optimale déterministe pour déterminer les conditions nécessaires d'optimalité de la commande (Seierstad et Sydsaeter, 1987).

Considérons le système de commande suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in \mathbb{R}, u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, x(t) \in \mathbb{R}^n; \quad (2.4)$$

$$x(0) = x_0; \quad (2.5)$$

La fonction coût à minimiser :

$$\min J(x_0, u), \quad \text{où} \quad J(x_0, u) = \int_0^T F(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T), T). \quad (2.6)$$

Le Hamiltonien du système peut être défini comme

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = F(x(t), u(t), t) + p^T(t) f(x(t), u(t), t), \quad (2.7)$$

où $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé le vecteur d'état adjoint et U : l'ensemble des décisions admissibles.

Les conditions nécessaires de Pontryagin pour l'optimalité de la commande :

Trajectoire d'état optimal

$$\dot{x}^*(t) = \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_* = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x^*(0) = x_0, \quad (2.8)$$

¹ « Une extrémale du problème de commande optimale est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations du système Hamiltonien. » (Trélat, 2007).

Trajectoire d'état adjoint optimal

$$p^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_* = -F_x(x^*(t), u^*(t), t) + p^{*T}(t) f_x(x^*(t), u^*(t), t), \quad (2.9)$$

Condition de transversalité à $t = T$

Pour le calcul de la condition de transversalité $p^*(T)$, tout dépend de la formulation du problème.

- Un problème de type Mayer-Lagrange à temps final fixé à T (Trélat, 2007), la condition de transversalité dépend du coût final du système.

$$p^*(T) = \frac{\partial \Phi(x^*(T), T)}{\partial x} \Big|_{x=x^*(T)}, \quad (2.10)$$

- Un problème de type Lagrange (Seierstad et Sydsaeter, 1987) quant à lui, dépend de la condition finale de l'état $x^*(T)$:

$p^*(T)$ n'a pas de condition lorsque $x^*(T) = x_T$

$p^*(T) \geq 0$ lorsque $x^*(T) \geq x_T$ ($p^*(T) = 0$ si $x^*(T) > x_T$)

$p^*(T) = 0$ lorsque $x^*(T)$ est libre

(2.11)

Condition de minimisation de l'Hamiltonien

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), p^*(t), t), \quad \forall u(t) \in U. \quad (2.12)$$

La minimisation de l'Hamiltonien dans un problème de commande optimale permet de déterminer la trajectoire optimale $x^*(.)$ associée à la commande optimale $u^*(.)$ et d'amener le système dynamique du point de départ $x(0)$ au point désiré $x(T)$ en minimisant un certain critère de performance $J^*(.)$. On s'intéresse ici à minimiser une fonction de coût de type quadratique. L'intégration des aspects dynamiques notamment le comportement du système et les variables de décision à des problèmes d'optimisation des systèmes de production peuvent être modélisés par application du principe du maximum de Pontryagin, le lecteur pourra se référer aux travaux de Dobos (2003).

Notre travail consiste à intégrer une nouvelle formulation par application du principe du maximum de Pontryagin pour pouvoir prendre en compte des aspects stochastiques pour mieux optimiser les systèmes de production. Pour la version stochastique de l'Hamiltonien

nous allons la détailler dans les chapitres qui suivent appliquée sur des problèmes de commande optimale stochastique des systèmes de production soient M1P1 (une machine produisant un type de produit) et M2P1 (deux machines produisant le même produit).

Résolution :

Il faut que les conditions nécessaires d'optimalité soient obtenues par application du principe du maximum de Pontryagin pour résoudre le problème de commande optimale des systèmes de production. Cela nous ramène à un ensemble d'équations différentielles. Lorsqu'on est dans un environnement déterministe nous pouvons utiliser les méthodes déterministes classiques pour les résoudre. En revanche lorsque les aspects stochastiques sont pris en considération on est alors confronté à des équations différentielles stochastiques où les méthodes déterministes classiques sont limitées dans leur formule de calcul et elles sont incapables de modéliser tous les paramètres de l'effet aléatoire. Donc il y aura des paramètres qui sont imprévisibles et qui ne seront pas pris en compte dans le modèle stochastique ce qui le rend incomplet. Grâce au Lemme d'Itô, une formule qui vient de la théorie du calcul stochastique, développée par le mathématicien japonais Kiyoshi Itô en 1940, nous pouvons déterminer des équations différentielles stochastiques qui modélisent les aspects stochastiques de façon complète dans le calcul mathématique.

Comme définition du Lemme d'Itô (Gauthier, 2003). « Le lemme d'Itô permet de trouver l'équation différentielle stochastique (EDS) satisfaite par un processus stochastique donné. S'il advient que le processus stochastique choisi satisfasse l'EDS donnée, alors nous aurons trouvé une solution à cette équation. En ce sens, le lemme d'Itô nous fournit des solutions à des EDS. Cependant, il ne s'agit pas d'une méthode systématique permettant l'obtention de solutions. Son utilisation demande du flair ! ».

C'est-à-dire nous pouvons décrire les processus d'évolution (de suivi) des valeurs des variables aléatoires par des équations différentielles stochastiques et trouver le processus stochastique qui est la solution à rechercher de cette équation. Parfois lorsque le modèle stochastique est simple nous pouvons le résoudre analytiquement. Mais souvent les modèles mathématiques en systèmes de production nous conduisent à des problèmes complexes

impossibles à résoudre analytiquement alors comme dans notre travail nous pouvons opter pour les méthodes de simulation numérique pour trouver les solutions des équations différentielles stochastiques par approximation utilisant le schéma d'Euler-Maruyama (Barra, 2005). Ces solutions nous permettront de définir les stratégies de commande optimale stochastique des systèmes de production dans un environnement incertain.

On notera que les valeurs initiales des états adjoints sont calculées de façon optimale par une méthode de résolution numérique dite méthode de tir simple (Voir Annexe III, p. 121) utilisant les conditions nécessaires d'optimalité fournies par le principe du maximum de Pontryagin. Nous référons le lecteur à Stoer et Bulirsch (1993) pour une étude approfondie des méthodes de tir.

2.4.1.2 Méthodes algorithmiques

Le cas de la programmation linéaire (Stevenson et Benedetti, 2006), sert à résoudre un problème composé de fonctions linéaires (fonction objective et contraintes) de façon optimale. L'algorithme du Simplexe de G.B. Dantzig permet de résoudre tout problème d'optimisation linéaire. Cette technique est beaucoup plus utilisée en milieu industriel notamment dans la planification de la production, allocation des ressources, logistique et distribution. Comme autre type de méthode exacte plus performante, on retrouve la méthode par séparation et évaluation (Branch and Bound) qui est plus souvent appliquée à la résolution des problèmes complexes d'optimisation combinatoire (variables discrètes). Cette méthode permet de diviser l'espace des solutions du problème en plusieurs ensembles de solutions et vérifier leurs optimalité pour éviter d'énumérer toutes les solutions qui sont de mauvaise qualité (Papadimitriou et Steiglitz, 1998) et (Wolsey, 1998).

En revanche, dans un environnement bruité en présence d'aspects dynamiques et stochastiques certains aspects ne peuvent être supportés par ces types de programmation comme par exemple les variables de décision dynamique, une demande dynamique ou aléatoire, les pannes et les réparations de machines qui sont généralement de nature probabiliste. Donc dans un contexte dynamique stochastique, pour surmonter cette difficulté,

des recherches ont permis de développer la programmation dynamique stochastique pour les systèmes qui ont un comportement assujéti aux changements dans le temps. Elles ont aussi permis de résoudre de façon exacte les problèmes d'optimisation en environnement dynamique. De plus elles peuvent se traiter en y intégrant ces phénomènes aléatoires qui influencent le système dans la modélisation mathématique pour s'approcher le plus possible de la réalité.

Dans la figure 2.4, Prenons l'exemple dans Gershwin (1994) d'un système manufacturier flexible (ou FMS : Flexible Manufacturing System) composé d'une machine produisant deux (2) types de produits (M1P2) la machine est sujéte à des pannes et des réparations aléatoires. Un problème de planification de la production stochastique peut être formulé sous forme d'un problème de commande optimale stochastique.

Fonction objective :

$$\min \left\{ J(.) = E \left\{ \int_0^T g(x_1(t), x_2(t)) dt \right\} \right\} \quad (2.13)$$

Sujet à :

Dynamique de l'inventaire du produit i

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u_i(t) - d_i \quad (2.14)$$

Dynamique de l'état de la machine

$$\{\alpha(t), t \geq 0\} \quad \alpha(t) \in M = \begin{cases} 0, & \text{alors } u_i(t) = 0 \\ 1, & \text{alors } 0 \leq u_i(t) \leq U_{max} \end{cases} \quad (2.15)$$

Sous contraintes de :

- Capacité de la machine

$$\tau_1 u_1(t) + \tau_2 u_2(t) \leq \alpha(t) \quad (2.16)$$

- Condition de non-négativité du taux de production instantané du produit i

$$u_i(t) \geq 0 \quad (2.17)$$

Conditions initiales :

$$x(0) = x_0, \alpha(t) = \alpha \quad (2.18)$$

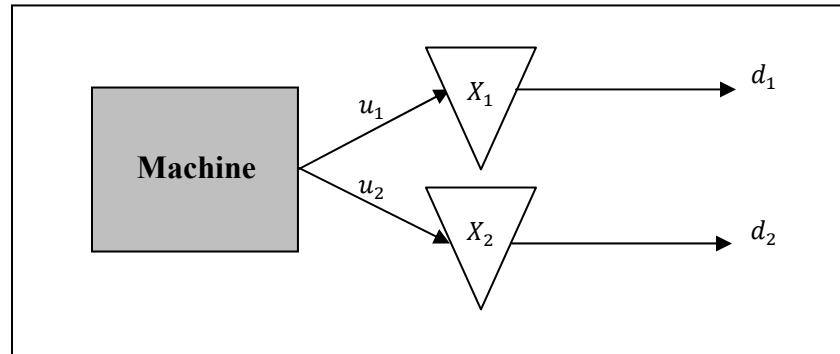


Figure 2.4 Exemple d'une machine produisant deux types de produits

Afin de résoudre le problème considéré de commande optimale stochastique nous allons utiliser le principe de la programmation dynamique stochastique en temps continu qu'on appelle les équations aux dérivées partielles HJB modifiées (Hamilton-Jacobi-Bellman) satisfaites par une certaine fonction valeur (solution de viscosité) $v(\cdot)$. Ces équations donnent les conditions nécessaires ou suffisantes d'optimalité de la loi de commande, à cause de leur complexité les équations d'HJB n'ont pas de solution analytique, les chercheurs ont choisi d'autres directions pour aller vers les approches de résolution numérique et approximer la fonction valeur. Dans les travaux de Kenné (1997), Boukas et Kenné (1997), Yan et Shang (1997) et Gharbi *et al.* (2011), on propose une solution numérique des équations d'HJB basée sur l'approche de Kushner (Kushner et Dupuis, 1992) pour déterminer une politique de commande optimale. Ensuite l'approche numérique a été couplée avec l'approche expérimentale en se basant sur la simulation, les plans d'expérience et la méthodologie des surfaces de réponse (Kenné et Gharbi (2000; 2001)), (Hajji *et al.*, 2010) et (Sajadi *et al.*, 2011) pour comprendre le comportement du modèle et obtenir une meilleure optimisation lorsque les systèmes de production sont très complexes. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à explorer d'autres outils de modélisation mathématique dans la théorie de la commande optimale autre que les équations d'HJB pour optimiser les systèmes de production et définir les stratégies de commande optimale.

En l'absence d'une solution analytique ou lorsque le temps d'exécution pour résoudre le problème d'optimisation en production de grande dimension utilisant les méthodes exactes est beaucoup plus long on fait appel souvent aux méthodes approchées.

2.4.2 Méthodes d'optimisation approchées ou heuristiques

Ces méthodes nommées heuristiques, permettent d'obtenir des solutions acceptables, de bonne qualité, dans un court laps de temps et qui sont plus ou moins optimales. Elles sont classées en quatre (4) familles (Fontanili, 1999) :

Les méthodes d'exploration locale, on trouve parmi elles les algorithmes d'optimisation de la descente stochastique et de la plus grande pente, l'exploration locale permet d'explorer le voisinage d'une solution donnée au départ afin de trouver une solution meilleure, la même procédure sera répétée sur la solution trouvée jusqu'à un critère d'arrêt de l'algorithme. Ces méthodes peuvent donc converger vers un minimum local, car la solution est optimale au voisinage d'une solution. Elles sont moins significativement utilisées pour la résolution des problèmes des systèmes de production en milieu incertain.

Les méthodes d'exploration globale, parmi lesquels on retrouve des algorithmes d'optimisation du recuit simulé et du Tabou, peuvent converger vers un minimum global. Leur principe de fonctionnement est comme l'exploration locale, mais combinée avec d'autres outils, la modification du voisinage de la solution trouvée est nécessaire, pour ne pas tomber dans un minimum local à cause des perturbations qui s'imposent sur le système.

Les méthodes d'exploration aléatoire, permettent d'explorer toutes les solutions réalisables de l'espace des décisions, initialement une solution est prise de façon aléatoire par la suite la fonction objective est évaluée avec cette solution pour vérifier son optimalité, la procédure est répétée jusqu'à satisfaire un critère d'arrêt.

Les méthodes dites méta-heuristiques sont un ensemble d'algorithmes de l'intelligence artificielle inspirés de la nature. Les réseaux de neurones formels sont inspirés du fonctionnement des réseaux de neurones biologiques largement utilisés en production, des algorithmes génétiques qui eux sont inspirés de l'évolution des espèces et des colonies de fourmis inspirées du comportement des fourmis. Ces deux derniers, sont utilisés dans divers domaines, mais récemment commencent à être adaptés pour l'optimisation des systèmes de production. Les méthodes méta-heuristiques sont capables de traiter des problèmes d'optimisation très complexes de grande taille, elles n'exigent pas une formulation mathématique du problème ni de convexité de la fonction objective. Elles permettent d'explorer efficacement l'espace de recherche et de voir l'emplacement des meilleures solutions. Pour une étude plus détaillée sur les méthodes de type méta-heuristique nous référons le lecteur à Holland (1975) et Goldberg (1989).

2.5 La commande hiérarchisée

C'est une méthode de modélisation mathématique basée sur le principe de hiérarchisation appliquée le plus souvent pour résoudre les problèmes d'optimisation des systèmes de production très complexes. Elle permet de décrire le problème initial comme plusieurs sous-problèmes plus simples. Lorsque l'objectif visé est difficile à atteindre il faut tenter de faire au mieux. Mais il arrive même parfois que l'approximation du problème initial par un ensemble de problèmes plus faciles à résoudre que la solution du problème initial ne converge pas uniformément à la solution des sous-problèmes. On parle alors de problème de perturbation singulière. Un modèle de commande hiérarchique de deux niveaux a été présenté par Kenné et Boukas (2003) utilisant l'approche de perturbation singulière (Lehoczky *et al.*, 1991) pour résoudre le problème de planification de la production et de la maintenance préventive d'un système de production composé de plusieurs machines. Dans notre travail, nous allons développer une approche de commande hiérarchique basée sur le principe du maximum de Pontryagin pour déterminer les conditions nécessaires d'optimalité de la loi de commande.

2.6 Quelques politiques de commande des systèmes de production

Nous pouvons définir quelques politiques de planification des systèmes de production :

- Politique de planification de la production de type seuil critique (Hedging point policy), introduite par Kimemia et Gershwin (1983), cette politique consiste à garder le niveau d'inventaire de produits finis à un certain niveau nécessaire qui permet de répondre aux aléas liés par exemple aux pannes et aux réparations de la machine et à la demande des clients pour éviter toute rupture de stock. Elle est généralement appliquée pour les problèmes de commande linéaire afin de déterminer les stratégies de commande optimale. Pour plus de détails sur cette politique, le lecteur pourra se référer à Boukas *et al.* (1995), Kenné (1997), Kenné et Gharbi (2000) et Sajadi *et al.* (2011).
- Politique de maintenance préventive systématique, dans cette méthode le remplacement préventif de l'équipement sera effectué soit à des intervalles de temps planifiées (remplacement de type bloc) soit après son temps de fonctionnement effectif (remplacement de type âge) (Gharbi *et al.*, 2001).
- Politique de planification de la production de type quadratique, un concept basé sur une fonction spéciale de type saturation « sat function » (Sethi et Thompson, 2000), ce mot saturation vient de l'électronique du fonctionnement non linéaire des amplificateurs opérationnels en mode saturation. Cette politique est définie comme suivant :

$$sat(x, y; z) = \begin{cases} x & si \ z < x \\ z & si \ x \leq z \leq y \\ y & si \ z > y \end{cases} \quad (2.19)$$

Dans notre travail, nous nous intéressons aux problèmes de commande linéaire-quadratique et de suivi de trajectoire (ou de poursuite) pour trouver la stratégie de planification de la production.

2.7 Conclusion

Après avoir montré dans le premier chapitre les différentes structures possibles des systèmes manufacturiers, les différentes méthodes de gestion de la production ainsi que les différentes logistiques, nous avons aussi défini la problématique et la méthodologie de recherche proposée pour l'analyse et la gestion des systèmes de production. Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes méthodes de modélisation mathématique dans la littérature appliquées à la production, les méthodes de résolution exactes analytiques et algorithmiques et les méthodes approchées (heuristiques) pour l'optimisation des systèmes de production.

Dans notre travail, nous allons montrer comment notre modèle hiérarchique à deux niveaux basé sur le principal outil de la théorie de la commande optimale le principe du maximum de Pontryagin peut être appliqué pour développer des stratégies de commande optimale de la production des systèmes manufacturiers en présence d'aléas. C'est ce que nous allons présenter dans les chapitres qui suivent.

CHAPITRE 3

SYSTÈME DE PRODUCTION EN DEMANDE ALEATOIRE

3.1 Introduction

Ce chapitre, traite d'un problème de commande optimale stochastique dans lequel le système de production considéré est composé d'une machine fabriquant un seul type de produit. La machine a une capacité finie et est fiable. La demande des clients est aléatoire dans un horizon de planification fini, et est décrite par une fonction continue connue. Un modèle de commande hiérarchique de deux niveaux est développé. Dans le premier niveau, un problème de commande optimale stochastique linéaire-quadratique (Linear Quadratic ou LQ) est formulé pour déterminer les valeurs cibles des variables d'état et de décision. Ces variables sont le niveau d'inventaire désiré et le taux de production désiré, respectivement. L'objectif du second niveau est de maintenir l'inventaire le plus près possible de son niveau désiré ainsi que de maintenir le taux de production le plus près possible de son taux désiré avec une demande fluctuante. Ce problème est représenté comme un problème de commande en optimisation récursive (commande prédictive) avec une variable d'état (le niveau d'inventaire) et une variable de décision (le taux de production). Le but de cette étude est d'établir les stratégies de commande optimale pour optimiser la production en répondant à une demande aléatoire en minimisant le coût total moyen quadratique et la somme des erreurs quadratiques moyennes (Error Quadratic Mean Total ou EQMT) d'inventaire et de production pour les premier et deuxième niveaux, respectivement. La solution est obtenue par application du principe de commande optimale stochastique basé sur le principe du maximum de Pontryagin et se résout numériquement par le schéma d'Euler-Maruyama.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Nous définirons les hypothèses employées dans le modèle et formulerons le problème de commande en demande aléatoire. Par la suite, nous présenterons la solution de l'approche de commande hiérarchique par application du principe du maximum de Pontryagin. Un exemple numérique et des résultats de l'analyse de

sensibilité seront fournis en fonction des objectifs pour la validation de l'approche proposée dans le but de montrer l'utilité et l'efficacité de la solution optimale trouvée du modèle.

3.2 Modèle de commande de production

3.2.1 Notations et hypothèses

Les notations suivantes sont utilisées tout au long du chapitre :

T : longueur de l'horizon de planification, ($T > 0$),

x^0 : niveau d'inventaire initial désiré,

x_0 : niveau d'inventaire initial,

$x(t)$: niveau d'inventaire au temps t ,

$\bar{x}(t)$: niveau d'inventaire désiré au temps t ,

$\bar{u}(t)$: taux de production désiré au temps t , ($\bar{u}(t) \geq 0$),

$d(t)$: taux de demande au temps t ,

c : facteur de pénalité de production, ($c > 0$), ($\$/\text{pièce}^2$),

h : facteur de pénalité de l'inventaire, ($h > 0$), ($\$/(\text{pièce} \times \text{unité de temps})^2$),

c_m : facteur de déviation de production de son objectif désiré \bar{u} , ($c_m > 0$), ($\$/\text{pièce}^2$),

c_h : facteur de déviation de l'inventaire de son objectif désiré \bar{x} , ($c_h > 0$),
($\$/(\text{pièce} \times \text{unité de temps})^2$),

$u(t)$: taux de production au temps t , ($u(t) \geq 0$),

U_{max} : capacité de production maximale,

σ_D : déviation standard du taux de demande,

w : processus de Wiener standard,

g : coefficient de diffusion.

Dans ce modèle, nous supposons que :

- (1) Le niveau d'inventaire est permis d'être positif (inventory) ou négatif (backlogged demands).
- (2) L'horizon de planification est fini en temps continu.

(3) Le taux de demande est supposé être décrit par le modèle dépendant du temps proposé par Kiesmüller (2003) :

$$d(t) = \mu_D(t) + \sigma_D \varepsilon(t),$$

où $\mu_D(t)$ est une partie déterministe connue, et σ_D est un paramètre non-négatif connu. Nous supposons que $\varepsilon(t)$ est un bruit blanc (variable aléatoire normalement distribuée au temps t avec moyenne zéro et variance unique, c'est-à-dire $\varepsilon(t) \sim N(0, 1)$ et $E[\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)] = 0$ pour $t_1 \neq t_2$). Ensuite nous pouvons écrire le taux de demande comme une fonction distribuée normalement : $d(t) \sim N(\mu_D(t), \sigma_D^2)$.

3.2.2 Énoncé du problème

Dans cette section, nous décrivons un modèle stochastique hiérarchique. Le système de production considéré est composé d'une seule machine fiable produisant un type de produit, avec le taux de demande qui peut fluctuer au cours du temps. La situation est illustrée dans la figure 3.1.

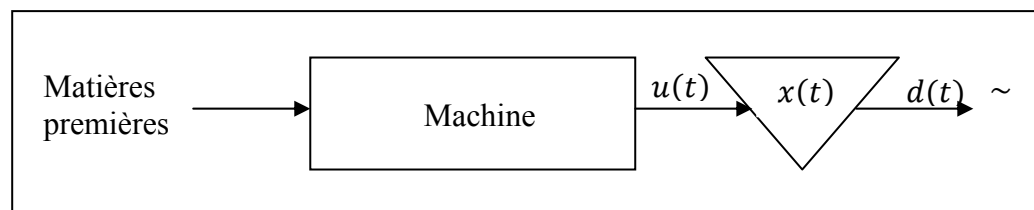


Figure 3.1 Structure du système

Premièrement, nous allons considérer le problème de commande optimale stochastique linéaire-quadratique noté (P_0) du problème de planification de la production désirée stochastique, avec une variable d'état (le niveau désiré d'inventaire) et avec une variable de décision (le taux désiré de production). L'objectif de l'entreprise est de trouver le taux optimal désiré de production nécessaire pour ramener le niveau d'inventaire à partir du point initial à un point satisfaisant le taux de demande qui minimise le coût total moyen quadratique d'inventaire et de production.

La fonction objective à minimiser (Voir Annexe II, p. 119-120) est donnée par :

$$\min J_0(x^0, u) = E \left\{ \int_0^T \phi_0(x, u, t) dt + K_0(x(T), T) \right\} \quad (3.1)$$

$$\text{où} \quad \phi_0(x, u, t) = \frac{1}{2} hx(t)^2 + \frac{1}{2} cu(t)^2, \quad (3.2)$$

et $K_0(x(T), T)$, le coût final du système au temps T lorsque l'état final est x .

sujet à :

l'équation d'état stochastique du niveau d'inventaire $x(t)$,

$$\dot{x} = f(x, u, w, t) = f(x, u, t) + g\dot{w}, \quad (3.3)$$

avec condition initiale $x(0) = x^0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $x \in \mathbb{R}^n$

et la contrainte de non-négativité :

$$u(t) \geq 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

Dans un deuxième temps, le problème initial de planification de la production stochastique peut être formulé comme un problème de commande optimale stochastique noté (P) avec une variable d'état (niveau d'inventaire) et avec une variable de décision (taux de production). L'objectif ici est de trouver le taux optimal de production pour satisfaire le taux de demande sur l'horizon de planification tout en minimisant la somme des coûts d'inventaire et de production. Cette fonction objective peut être interprétée comme signifiant que les coûts de pénalité sont encourus lorsque le niveau d'inventaire et le taux de production dévient de leurs objectifs souhaités (Holt et al., 1960). La fonction a été récemment généralisée par Dobos (2003).

La fonction objective pour la minimisation (Voir Annexe II, p. 119-120) est donnée par :

$$\min J(x_0, u) = E \left\{ \int_0^T \phi(x, u, t) dt + K(x(T), T) \right\}, \quad (3.5)$$

$$\text{où} \quad \phi(x, u, t) = \frac{1}{2} c_h [x(t) - \bar{x}(t)]^2 + \frac{1}{2} c_m [u(t) - \bar{u}(t)]^2, \quad (3.6)$$

et $K(x(T), T)$, le coût final du système au temps T lorsque l'état final est x .

sujet à :

l'équation d'état stochastique du niveau d'inventaire $x(t)$,

$$\dot{x} = f(x, u, w, t) = f(x, u, t) + g\dot{w}, \quad (3.7)$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$, où $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $x \in \mathbb{R}^n$.

et la contrainte de non-négativité :

$$u(t) \geq 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (3.8)$$

La commande optimale à trouver sur $[0, T]$ est u^* pour minimiser le critère J :

$$u^* = \min_{u[0,T]} J(x_0, u). \quad (3.9)$$

Dans la section suivante, nous allons utiliser les hypothèses ci-dessus et le principe du maximum de Pontryagin pour décrire notre approche afin de résoudre les problèmes de commande optimale.

3.3 Solution des problèmes de commande optimale

La structure hiérarchique de l'approche de commande proposée est illustrée dans la figure 3.2. Les deux problèmes de commande peuvent être résolus en appliquant le principe de commande optimale stochastique basé sur le principe du maximum de Pontryagin en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama.

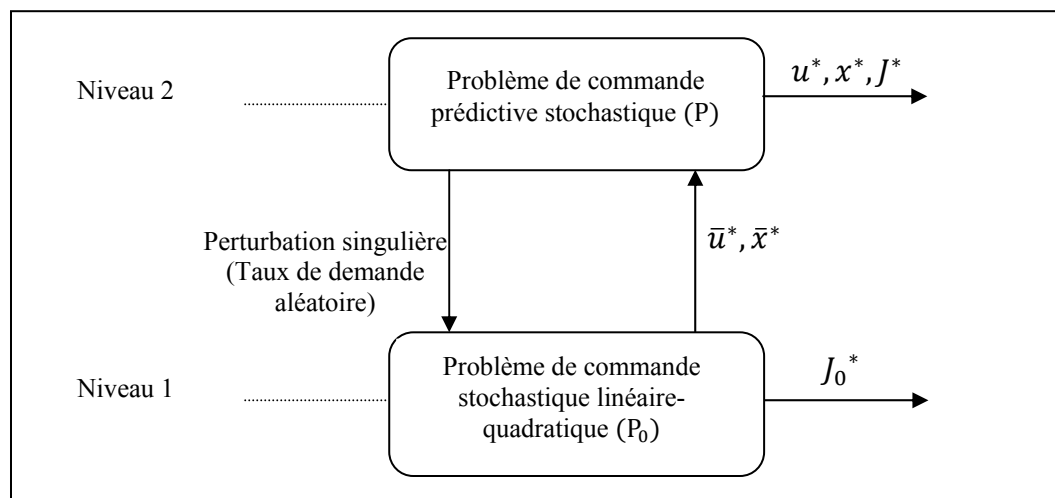


Figure 3.2 Approche de commande hiérarchique

3.3.1 Solution du problème de commande optimale (P_0)

Pour trouver la solution du problème de commande optimale stochastique linéaire-quadratique défini par (3.1) et (3.3), nous supposons que $V(x, t)$, connue comme la fonction valeur liée à la fonction objective (3.1) de t à T , est donnée par :

$$V(x, t) = \min_u E \left\{ \int_t^T \phi_0(x, u, t) dt + K_0(x(T), T) \right\}. \quad (3.10)$$

Laissant $t \in [0, T]$. « Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur l'intervalle $[0, T]$ contient la trajectoire optimale sur l'intervalle $[t, T]$ avec comme condition initiale $x_t = x(t)$ ». En d'autres termes :

$$V(x, t) = \min_u E \{ \phi_0(x, u, t) dt + V(x + dx, t + dt) \}. \quad (3.11)$$

Appliquant le développement de Taylor :

$$V(x + dx, t + dt) = V(x, t) + V_t dt + V_x dx + \frac{1}{2} V_{tt} (dt)^2 + \frac{1}{2} V_{xx} (dx)^2 + V_{xt} dx dt + \dots, \quad (3.12)$$

après simplification, nous négligeons les termes d'ordre supérieur (Davis, 1977) tels que $(dt)^2$, $dw dt$ et remplaçant $(dw)^2$ par (dt) , on obtient la formule d'Itô :

$$dV(x, t) = (V_t + V_x f + \frac{1}{2} g^2 V_{xx}) dt + V_x g dw, \quad (3.13)$$

et :

$$V(x, t) = \min_u E \left\{ \phi_0 dt + V(x, t) + V_t dt + V_x f dt + \frac{1}{2} g^2 V_{xx} dt + V_x g dw + o(dt) \right\}. \quad (3.14)$$

Étant donné que les variables dw et x sont indépendantes, nous pouvons écrire :

$$EV_x g dw = EV_x g E dw = 0, \quad (3.15)$$

Ainsi, nous pouvons avoir l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaite par la fonction de valeur avec comme $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$.

$$0 = \min_u \left\{ \phi_0 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\}, \quad (3.16)$$

avec la condition aux valeurs limites :

$$V(x, T) = K_0(x(T), T). \quad (3.17)$$

Pour résoudre l'équation non-linéaire aux dérivées partielles, nous pouvons approcher la fonction valeur par un polynôme quadratique et trouver les coefficients optimaux de ce polynôme. La méthode proposée est basée sur le principe du maximum de Pontryagin et les dérivées de la fonction valeur sont obtenues par les équations adjointes suivantes pour le problème de commande optimale stochastique :

$$p(t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = V_x(x, t) ; \quad p_x(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial x} = V_{xx}(x, t) \quad (3.18)$$

La version stochastique des conditions d'optimalité peut être obtenue en utilisant la fonction Hamiltonienne :

$$\begin{aligned} -V_t &= \min_u \left\{ \phi_0(x, u, t) + V_x f + \frac{1}{2} g^2 V_{xx} \right\} \\ &= \min_u H(x, u, p, p_x, t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nous notons que la fonction Hamiltonienne dans la version déterministe est :

$$H(x, u, p, t) = \phi_0(x, u, t) + V_x f, \quad (3.20)$$

et dans la version stochastique est :

$$H(x, u, p, p_x, t) = H(x, u, p, t) + \frac{1}{2} g^2 V_{xx}, \quad (3.21)$$

avec $H: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times u \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} H(x, u, p, p_x, t) &= H(x, u, p, t) + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g g^T\} \\ &= \phi_0(x, u, t) + f^T(x, u, t)p + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g(x, u, t)g^T(x, u, t)\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En supposant que nous avons une commande optimale $u^*(x, p, p_x, t)$ qui résout le problème de commande optimale stochastique :

$$\begin{aligned} H^*(x, p, p_x, t) &= H(x, u^*(x, p, p_x, t), p, p_x, t) \\ &= \phi_0(x, p, p_x, t) + f^T(x, p, p_x, t)p \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$+ \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g(x, p, p_x, t) g^T(x, p, p_x, t)\} \quad (3.24)$$

$$= -V_t, \quad (3.25)$$

nous pouvons écrire l'équation différentielle stochastique pour l'Etat

$$\begin{aligned} dx &= f(x, u^*, t)dt + g(x, u^*, t)dw \\ &= H_p^*(x, p, p_x, t)dt + g(x, p, p_x, t)dw, \end{aligned} \quad (3.26)$$

et pour l'adjoint, nous utilisons le lemme d'Itô (Cohn, 1980) pour déterminer le processus suivi par $p(t)$

à partir de (3.18)

$$dp = V_{xt}dt + V_{xx}dx + \frac{1}{2}V_{xxx}(dx)^2 \quad (3.27)$$

$$= \left[V_{xt} + V_{xx}f + \frac{1}{2}\text{tr}\{V_{xxx}gg^T\} \right] dt + V_{xx}gdw. \quad (3.28)$$

Pour obtenir V_{xt} nous utilisons la dérivée partielle de V_t par rapport à x

$$\begin{aligned} -V_{xt}(x, t) &= H_x^* + H_p^* \frac{\partial p}{\partial x} + H_{p_x}^* \frac{\partial p_x}{\partial x} \\ &= H_x^* + V_{xx}f + \frac{1}{2}\text{tr}\{V_{xxx}gg^T\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En substituant (3.29) dans (3.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} dp &= -H_x^*dt + V_{xx}gdw \\ &= -H_x^*dt + p_xgdw. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Maintenant, nous pouvons donner les conditions nécessaires d'optimalité pour la commande stochastique dans le cas de minimisation :

$$H(x, u, p, p_x, t) = \phi_0(x, u, t) + f^T(x, u, t)p + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g(x, u, t)g^T(x, u, t)\}$$

$$\begin{cases} dx^* = H_p^* dt + g dw \\ dp^* = -H_x^* dt + p_x g dw \\ x^*(0) = x^0 \\ p^*(T) = K_x(x(T), T) \\ H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_x^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), p^*(t), p_x^*(t), t). \end{cases} \quad (3.31)$$

Donc le niveau d'inventaire optimal et l'état adjoint optimal sont obtenus de dx^* et dp^* et le taux de production optimal est obtenu par la minimisation de la fonction Hamiltonienne.

La fonction Hamiltonienne :

$$H(x, u, p, p_x, t) = \frac{1}{2} c u^2(t) + \frac{1}{2} h x^2(t) + (u(t) - \mu_D(t))p(t) + \frac{1}{2} p_x \sigma_D^2$$

et le problème aux valeurs limites de (P_0) :

$$(TPBVP_0) \begin{cases} dx^* = (u(t) - \mu_D(t))dt - \sigma_D dw \\ dp^* = -hx(t)dt - p_x(t)\sigma_D dw \\ u^*(x, t) = \frac{\partial H^*}{\partial u(t)} = \frac{-p(t)}{c} \\ x^*(0) = x^0 ; x^*(T) = \text{free} \\ p^*(T) = 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Les équations différentielles stochastiques sont résolues numériquement en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama (Voir Annexe I, p. 118) du problème (P_0) obtenu par application du principe du maximum de Pontryagin. La trajectoire d'inventaire optimale et la trajectoire d'état adjoint optimale sont données par les formes suivantes, respectivement :

$$Y_{n+1}^{(1)} = Y_n^{(1)} + \left(\frac{-Z_n^{(1)}}{c} - \mu_{Dn} \right) dt + (-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n, \quad (3.33)$$

$$Z_{n+1}^{(1)} = Z_n^{(1)} - h Y_n^{(1)} \left(dt + \frac{(-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n}{\left(\frac{-Z_n^{(1)}}{c} - \mu_{Dn} \right)} \right) / dt. \quad (3.34)$$

La valeur initiale de l'état adjoint est donnée en utilisant la méthode de tir simple (Stoer et Bulirsch, 1993).

$$Z_0^{(1)} = \left(\frac{-Y_0^{(1)}}{dt} + \mu_{D0} \right) c, \quad (3.35)$$

Le taux optimal désiré de production est donné par l'optimisation de la fonction Hamiltonienne (Seierstad et Sydsaeter, 1987), et à partir de (3.4) et (3.32), on obtient :

$$u^*(x, t) = \max \left[0, -\frac{p(t)}{c} \right]. \quad (3.36)$$

Pour spécifier la commande optimale du problème stochastique linéaire-quadratique, nous avons utilisé la fonction *sat* (Sethi et Thompson, 2000) :

$$u^*(x, t) = \text{sat} \left[0, U_{max}; -\frac{p(t)}{c} \right], \quad (3.37)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{p(t)}{c} < 0 \\ -\frac{p(t)}{c} & \text{si } 0 \leq -\frac{p(t)}{c} \leq U_{max} \\ U_{max} & \text{si } -\frac{p(t)}{c} > U_{max}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Nous avons alors obtenu le niveau optimal désiré d'inventaire \bar{x}^* et le taux optimal désiré de production \bar{u}^* en prenant la moyenne des niveaux optimaux d'inventaire et les taux optimaux de production, respectivement.

3.3.2 Solution du problème de commande optimale (P)

Pour trouver la solution au problème de commande prédictive stochastique défini par (3.5) et (3.7), nous prenons les mêmes équations utilisées dans la première solution du problème (P₀).

Alors le niveau d'inventaire optimal et l'état adjoint optimal sont obtenus de dx^* et dp^* et le taux de production optimal est obtenu par la minimisation de la fonction Hamiltonienne. Une telle fonction est donnée par :

$$\begin{aligned}
H(x, u, p, p_x, t) &= \frac{1}{2} c_h (x(t) - \bar{x}(t))^2 + \frac{1}{2} c_m (u(t) - \bar{u}(t))^2 \\
&+ (u(t) - \mu_D(t)) p(t) + \frac{1}{2} p_x \sigma_D^2
\end{aligned}$$

et le problème aux valeurs limites (two-point boundary value problem) de (P) :

$$(TPBVP) \begin{cases} dx^* = (u(t) - \mu_D(t)) dt - \sigma_D dw \\ dp^* = -c_h (x(t) - \bar{x}(t)) dt - p_x(t) \sigma_D dw \\ u^*(x, t) = \frac{\partial H^*}{\partial u(t)} = -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) \\ x^*(0) = x_0 ; x^*(T) = \text{free} \\ p^*(T) = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Les équations différentielles stochastiques du problème (P) sont résolues numériquement en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama (Voir Annexe I, p. 118) pour trouver la trajectoire d'inventaire optimale et la trajectoire d'état adjoint optimale données par les formes suivantes, respectivement :

$$Y_{n+1}^{(2)} = Y_n^{(2)} + \left(\frac{-Z_n^{(2)}}{c_m} + \bar{u}_n - \mu_{Dn} \right) dt + (-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n, \quad (3.40)$$

$$Z_{n+1}^{(2)} = -Z_n^{(2)} + c_h (Y_n^{(2)} - \bar{x}_n) \left(dt + \frac{(-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n}{\left(\frac{-Z_n^{(2)}}{c_m} + \bar{u}(t) - \mu_{Dn} \right)} \right) / dt. \quad (3.41)$$

La valeur initiale de l'état adjoint est donnée en utilisant la méthode de tir simple (Stoer et Bulirsch, 1993).

$$Z_0^{(2)} = \left(\frac{-Y_0^{(2)}}{dt} - \bar{u}_0 + \mu_{D0} \right) c_m, \quad (3.42)$$

Le taux de production optimal est donné par :

$$u^*(x, t) = \max \left[0, -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) \right]. \quad (3.43)$$

Pour spécifier la commande optimale pour le problème prédictif stochastique, nous avons également utilisé la fonction *sat* (Sethi et Thompson, 2000), pour obtenir :

$$u^*(x, t) = \text{sat} \left[0, U_{max}; -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) \right], \quad (3.44)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) < 0 \\ -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) & \text{si } 0 \leq -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) \leq U_{max} \\ U_{max} & \text{si } -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) > U_{max}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Nous allons appliquer la méthode proposée pour résoudre un exemple numérique du problème de planification de la production stochastique.

3.4 Exemple numérique

Dans cette section, nous présentons un exemple numérique pour illustrer les résultats obtenus. Il est supposé que le taux de demande est une fonction normalement distribuée au temps, défini comme suit : $d(t) = \mu_D(t) + \sigma_D N(0,1)$ et d'autres paramètres sont présentés dans le tableau (3.1) :

Tableau 3.1 Données de l'exemple numérique

Paramètre	T	c	h	c_m	c_h	x^0	x_0	U_{max}	μ_D	σ_D
Valeur	120	20	80	12	3	0.8147	0.8147	10.5	10	4.5

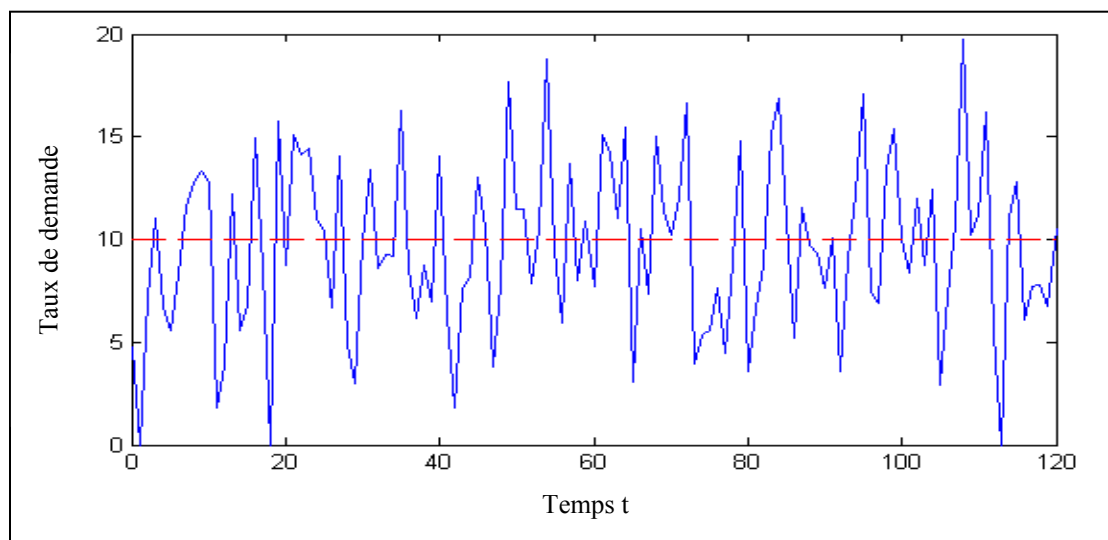


Figure 3.3 Taux de demande en fonction du temps

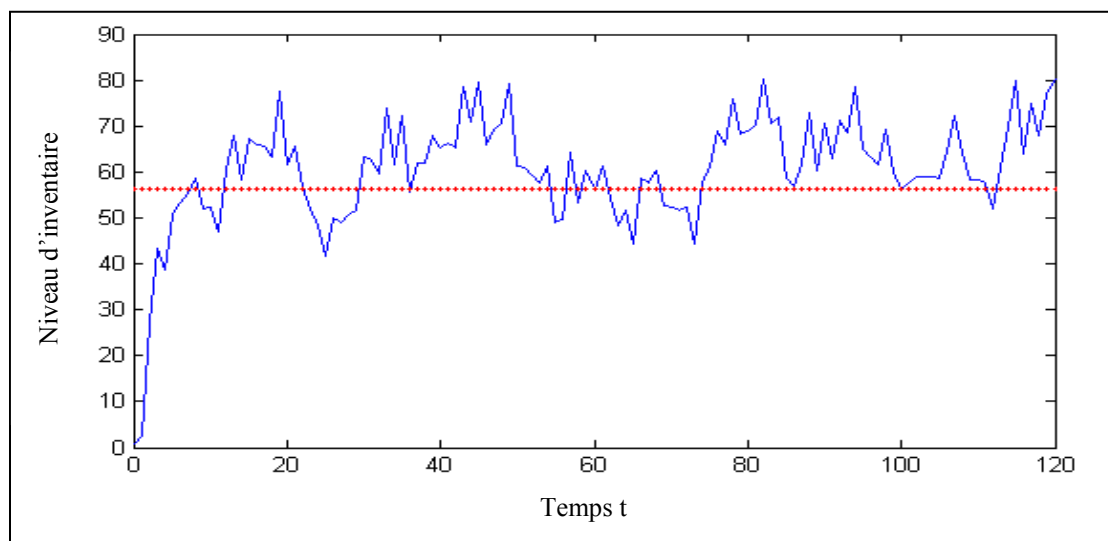


Figure 3.4 Niveaux d'inventaire optimaux en fonction du temps

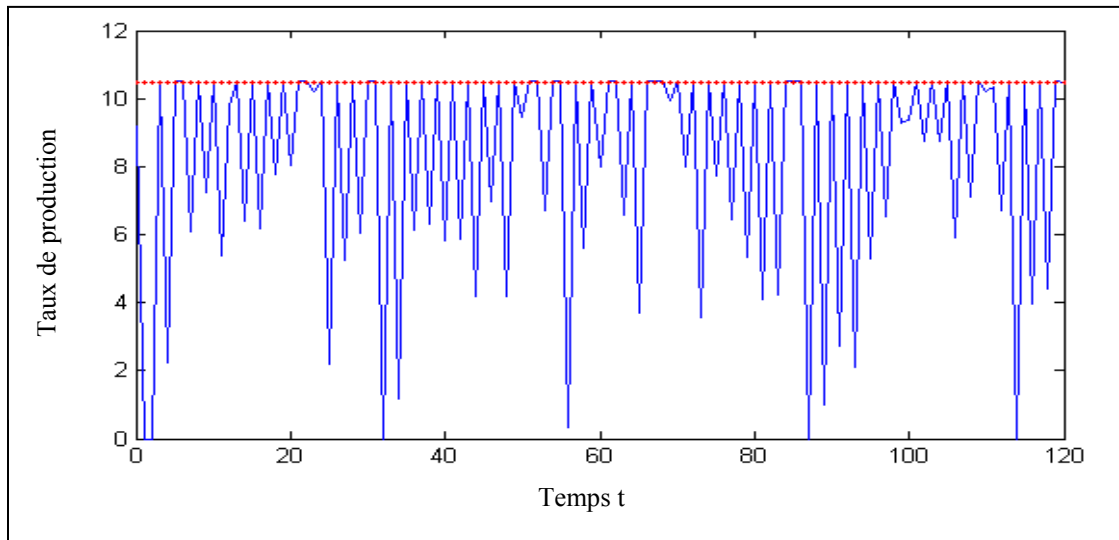


Figure 3.5 Taux de production optimaux en fonction du temps

Les résultats de simulation sont donnés dans les figures (3.3), (3.4) et (3.5) et montrent que le niveau optimal d'inventaire x^* augmente avec le temps pour converger à son niveau optimal désiré d'inventaire \bar{x}^* . Le taux optimal de production u^* doit satisfaire le taux de demande normalement distribué jusqu'à ce qu'il atteigne son taux optimal désiré de production \bar{u}^* à la fin de la période de l'horizon de planification. Pour notre exemple numérique, nous avons obtenu un taux optimal désiré de production avec valeur $\bar{u}^* = 10.4$ et un niveau optimal désiré d'inventaire avec une valeur $\bar{x}^* = 56.28$, qui représentent le taux de production et le seuil d'inventaire désirés par l'entreprise pour répondre à une demande aléatoire avec $d(t) \sim N(10, 4.5)$.

La section suivante présente la validation de l'approche proposée à travers une analyse de sensibilité et l'illustration de son utilité tout en examinant comment les résultats obtenus varient avec le changement de certaines valeurs des paramètres monétaires et non monétaires.

3.5 Analyse de sensibilité

D'après les figures et les tableaux présentés dans cette section, nous remarquons deux paramètres qui influencent les résultats obtenus. Premièrement, nous avons les paramètres dits monétaires qui comprennent c, h, c_m et c_h et le paramètre non-monétaire σ_D . Ces paramètres ont une influence sur le niveau optimal désiré d'inventaire \bar{x}^* , le taux optimal désiré de production \bar{u}^* , le niveau optimal d'inventaire x^* , le taux optimal de production u^* , le coût total moyen quadratique J_0^* et le coût total moyen de déviation J^* d'inventaire et de production.

Dans les interprétations qui suivent, les résultats de simulation montrent que le taux optimal désiré de production reste constant à $\bar{u}^* = 10.4$. Cela permet une production régulière autour de la demande du client en utilisant l'inventaire de produits finis comme un tampon pour satisfaire une demande fluctuante.

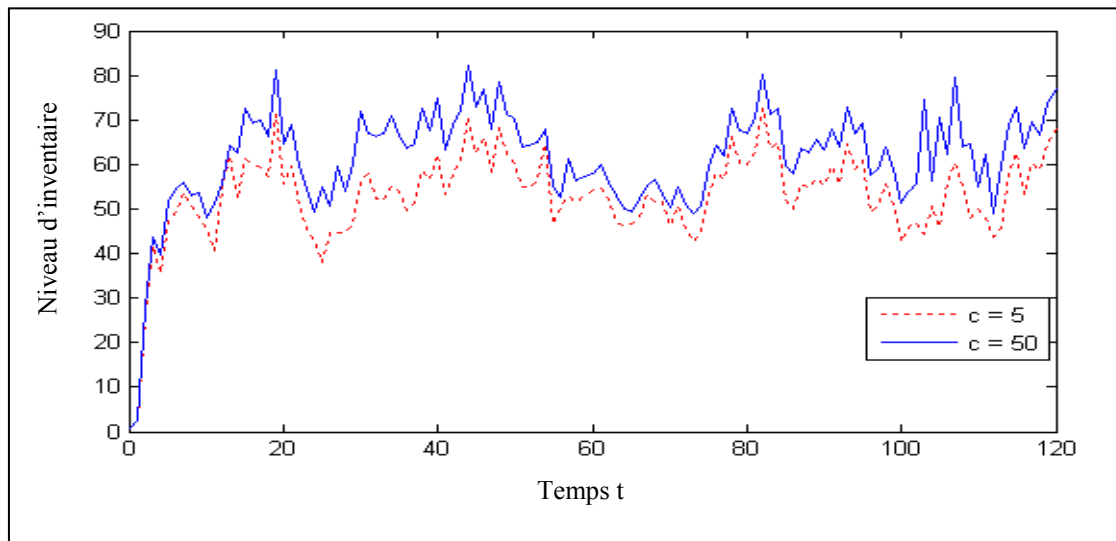
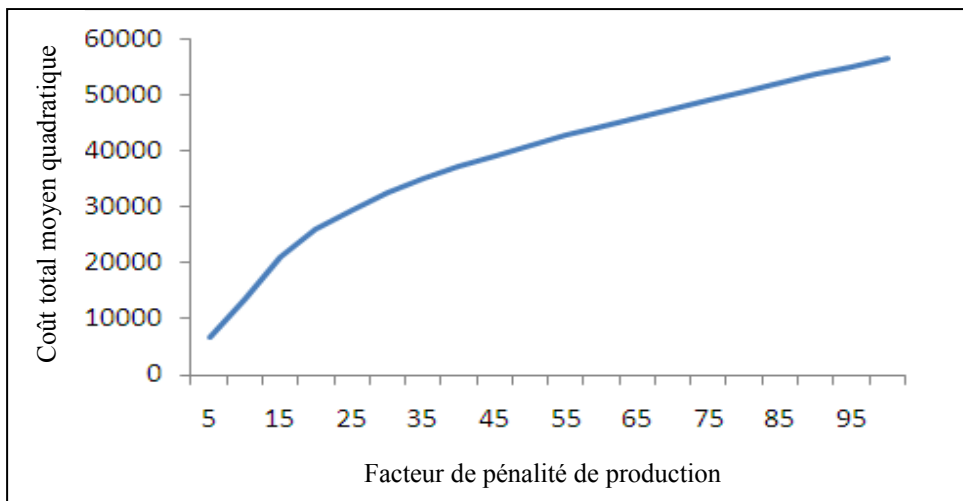


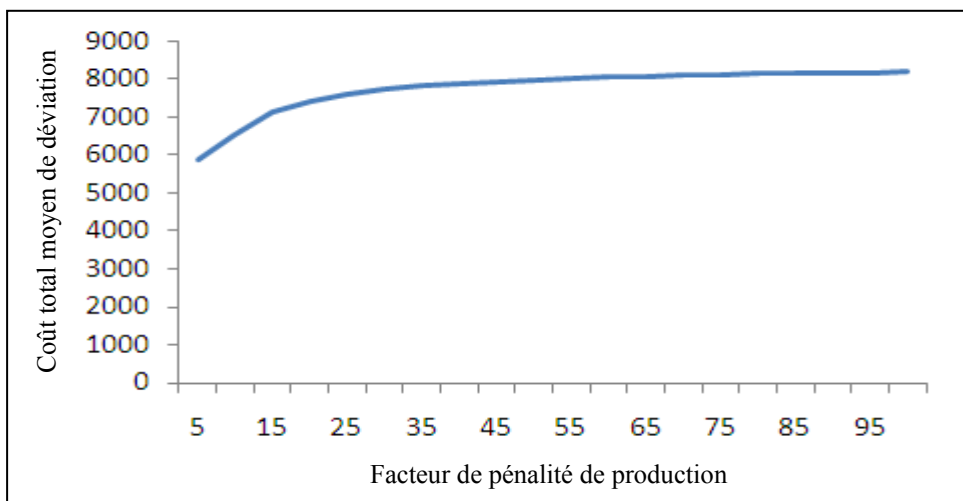
Figure 3.6 Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $c = 5, 50$

Tableau 3.2 Effet du facteur de pénalité c

c	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
\bar{x}^*	50.5	53.1	55.2	56.3	56.9	57.3	57.6	57.9	58	58.2
c	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
\bar{x}^*	58.3	58.4	58.48	58.55	58.61	58.66	58.71	58.75	58.79	58.82



(a)



(b)

Figure 3.7 Coût total moyen en fonction du facteur de pénalité de production

Selon les figures (3.6), (3.7) et le tableau (3.2), nous pouvons remarquer que lorsque le facteur de pénalité c augmente, le niveau optimal désiré d'inventaire \bar{x}^* augmente aussi, tout comme le niveau optimal d'inventaire x^* . Ce résultat est logique, car plus on pénalise la production plus vite on produira pour répondre à la demande aléatoire, ce qui entraîne un surplus d'inventaire. Cela donne pour effet l'augmentation du coût total moyen quadratique J_0^* et dans le coût total moyen de déviation J^* .

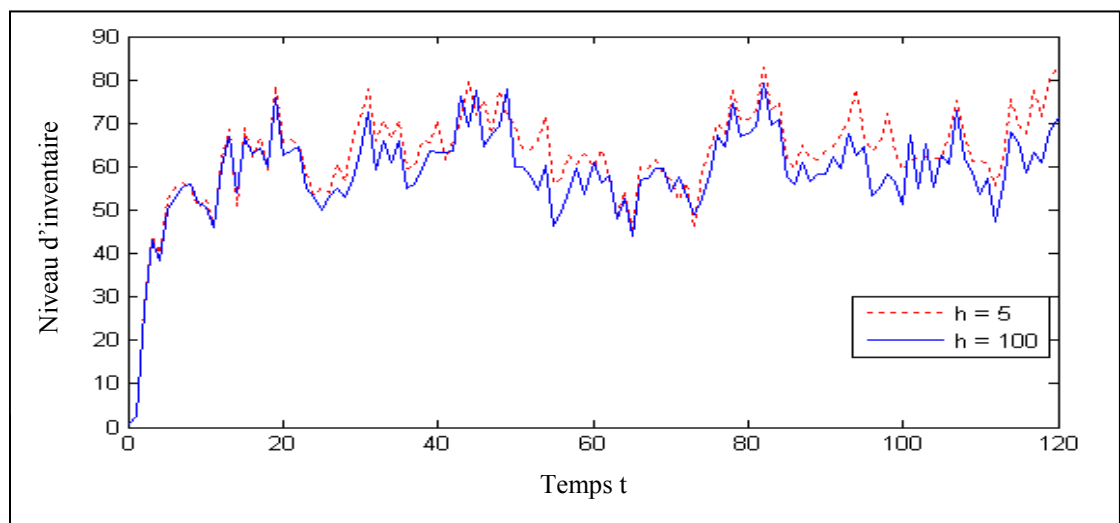
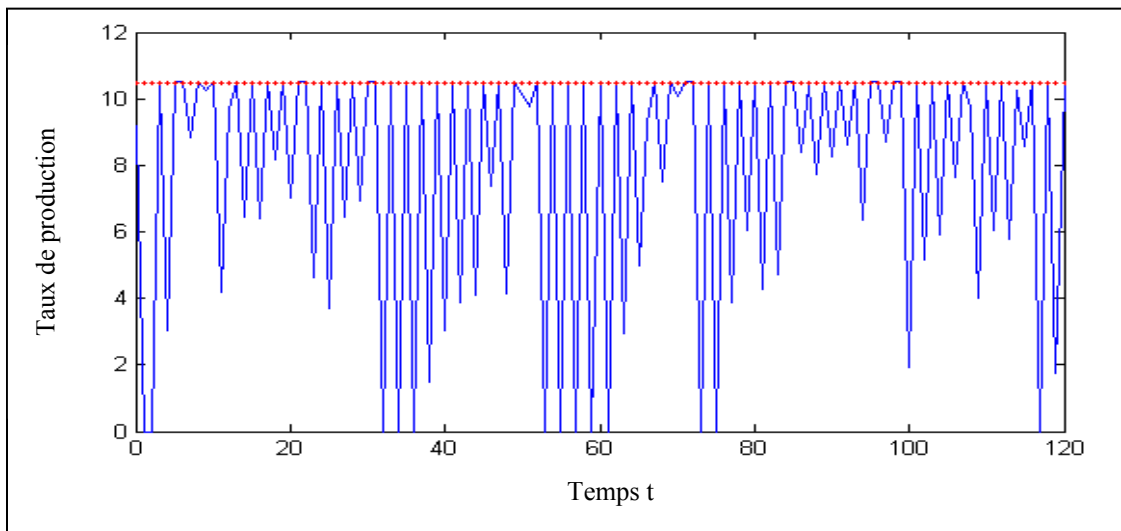


Figure 3.8 Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $h = 5, 100$

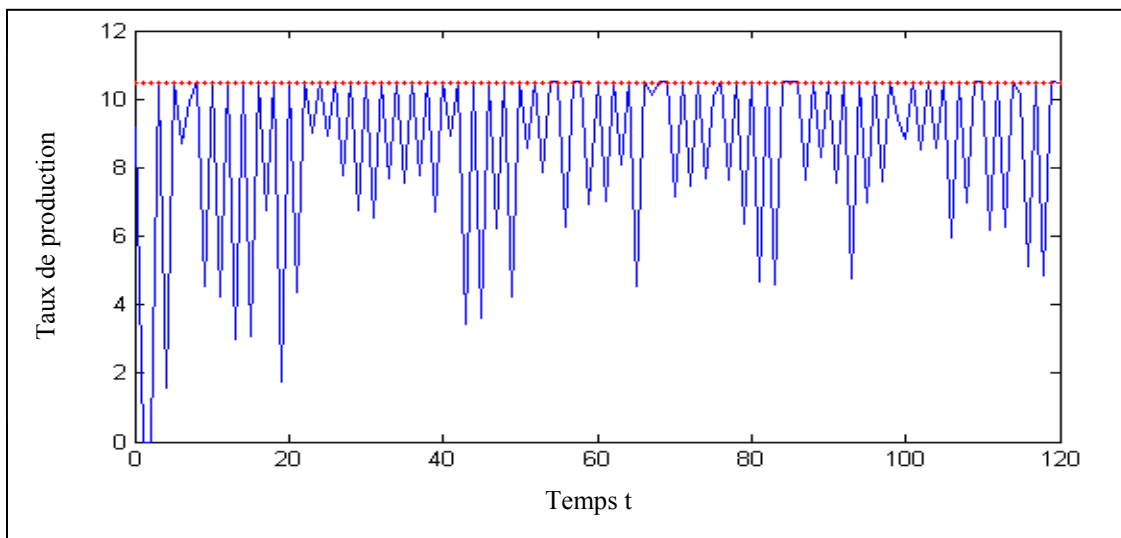
Tableau 3.3 Effet du facteur de pénalité h

h	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
\bar{x}^*	59.26	59.06	58.86	58.66	58.46	58.26	58.06	57.87	57.67	57.47
J_0^*	7204.6	9138.1	10964	12684	14301	15817	17234	18556	19783	20917
J^*	8323.4	8261.1	8199.1	8137.4	8076	8014.9	7954.1	7893.7	7833.5	7773.5
h	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
\bar{x}^*	57.27	57.07	56.87	56.67	56.48	56.28	56.08	55.88	55.68	55.48
J_0^*	21962	22921	23793	24583	25292	25923	26479	26961	27371	27710
J^*	7713.9	7654.7	7595.6	7536.9	7478.5	7420.5	7362.7	7305.4	7248.3	7191.3

Selon la figure (3.8) et le tableau (3.3), nous remarquons que lorsque le facteur de pénalité h augmente, le niveau optimal désiré d'inventaire \bar{x}^* diminue; le niveau optimal d'inventaire x^* diminue aussi, car plus l'inventaire est pénalisé, plus on produit lentement pour satisfaire la demande aléatoire. Cela entraîne une baisse des produits en inventaire. Donc le niveau optimal d'inventaire x^* diminue en conséquence. En ce qui concerne le coût total moyen quadratique J_0^* , il va augmenter, tandis que le coût total moyen de déviation J^* diminue.



(a) $c_m = 10$



(b) $c_m = 14$

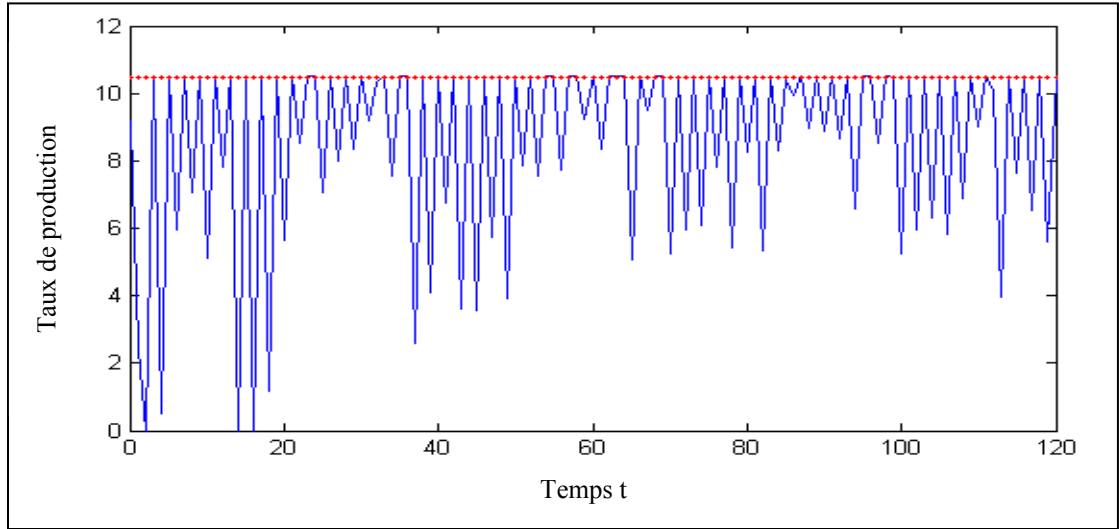
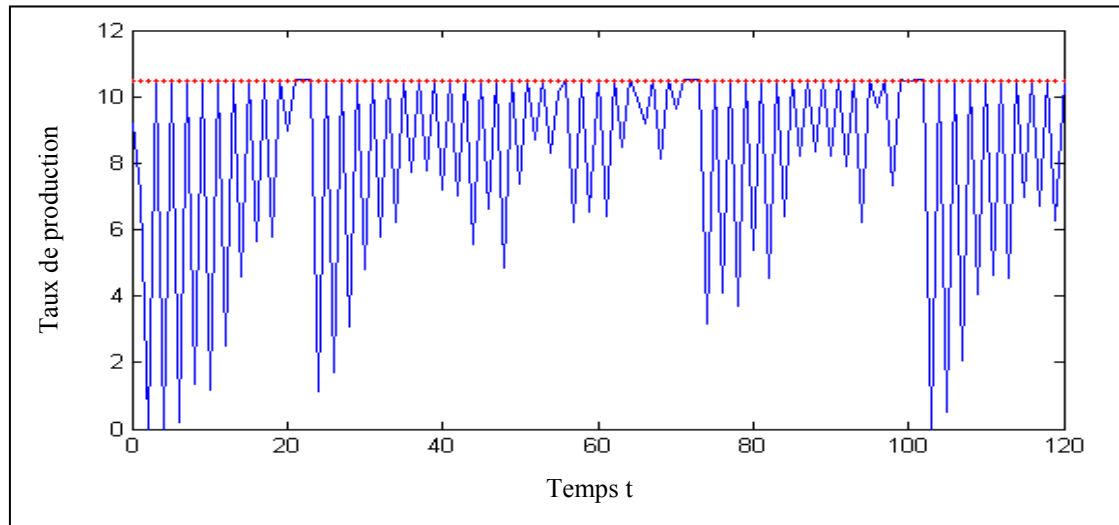
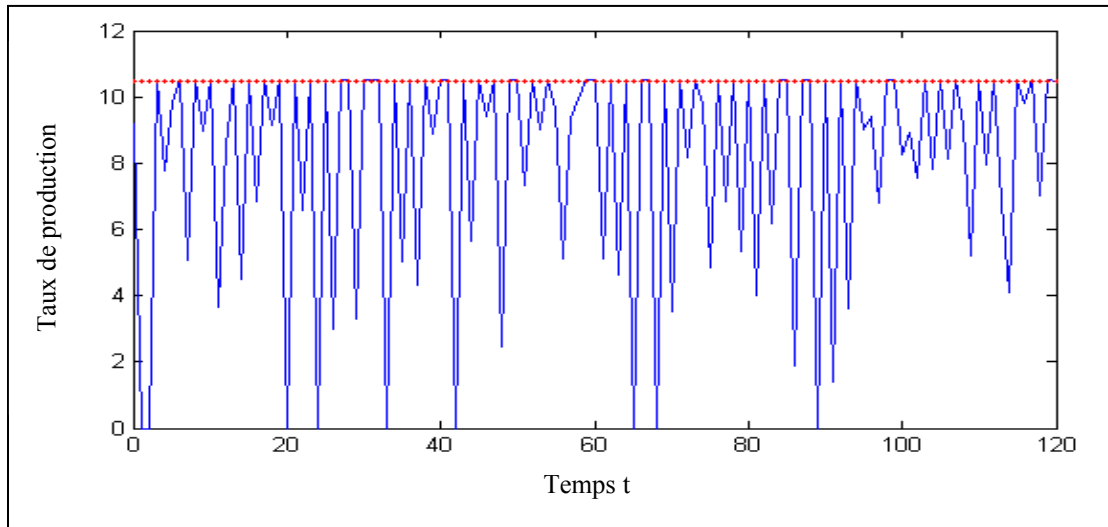
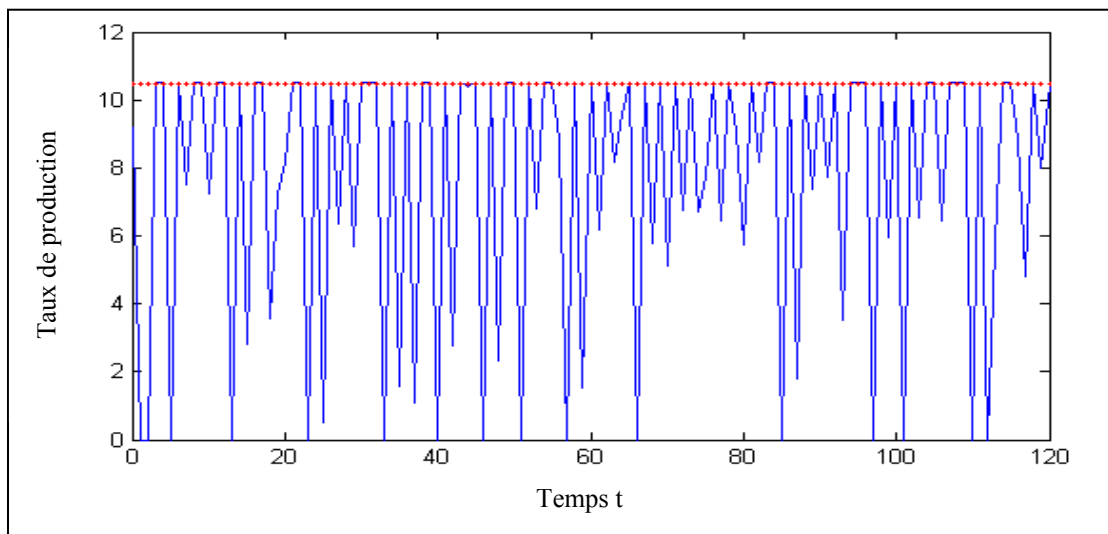
(c) $c_m = 18$

Figure 3.9 Taux de production optimal en fonction du temps
pour $c_m = 10, 14, 18$

(a) $c_h = 1$



(b) $c_h = 6$



(c) $c_h = 9$

Figure 3.10 Taux de production optimal en fonction du temps
pour $c_h = 1, 6, 9$

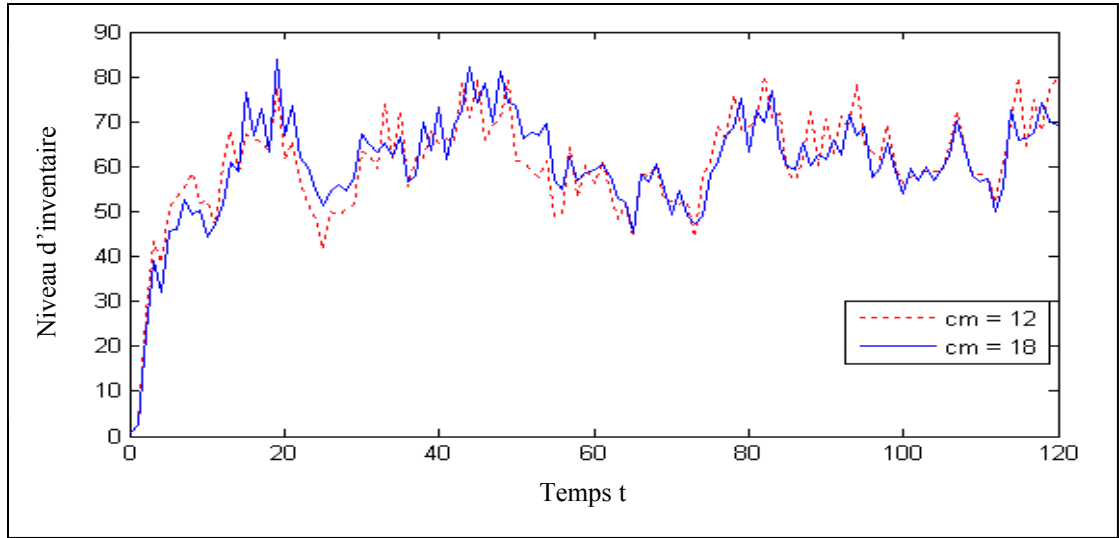


Figure 3.11 Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $c_m = 12, 18$

Tableau 3.4 Effet du facteur de déviation c_m

c_m	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
J^*	7017.4	7220.9	7420.5	7613.1	7797.3	7844.3	7860.6	7878.2	7896.3	7914	7931.1

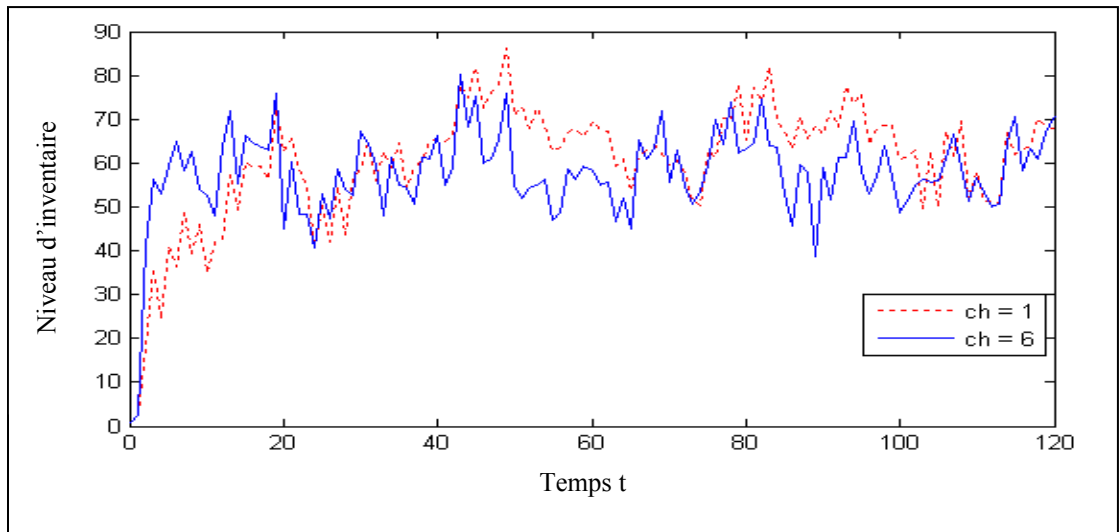


Figure 3.12 Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $c_h = 1, 6$

Tableau 3.5 Effet du facteur de déviation c_h

c_h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J^*	2681	5264.2	7420.5	9086.6	10813	12699	14866	17450	21449	24825

D'après les figures (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) et les tableaux (3.4) et (3.5), nous pouvons remarquer que lorsque le facteur de déviation de la production c_m augmente, cela entraîne une hausse de la production (voir figures (3.9)(a), (3.9)(b), (3.9)(c)). Donc on produit plus vite, il y a plus de produits en inventaire (voir figure (3.11)). Tout cela a pour effet d'engendrer un écart élevé entre le niveau optimal d'inventaire x^* et son objectif. On note aussi que plus le facteur de déviation de l'inventaire c_h augmente, plus le niveau d'inventaire s'éloigne de son objectif, car plus l'inventaire est pénalisé, plus on produit lentement (voir figures (3.10)(a), (3.10)(b), (3.10)(c)), et on stock moins de produits (voir figure (3.12)), et le coût total moyen de déviation J^* augmente dans les deux cas (voir tableaux (3.4), (3.5)).

Dans le premier niveau, il n'y a pas de changement, et le niveau optimal désiré d'inventaire reste constant à $\bar{x}^* = 56.28$ car il est indépendant de c_m et c_h . Donc, le coût total moyen quadratique reste constant à $J_0^* = 25923$.

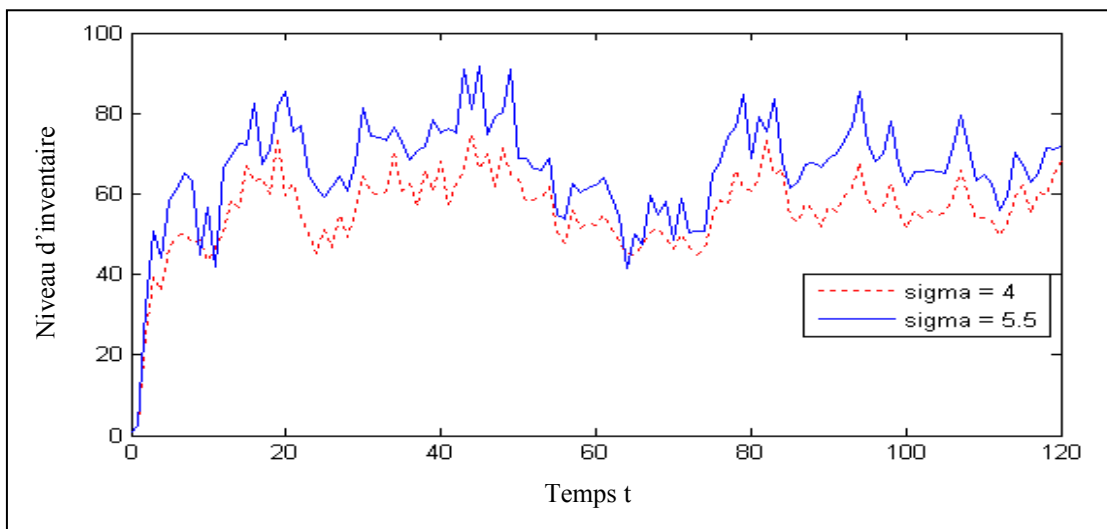


Figure 3.13 Niveau d'inventaire optimal en fonction du temps pour $\sigma_D = 4, 5.5$

Tableau 3.6 Effet de la déviation standard σ_D

σ_D	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
\bar{x}^*	31.61	35.13	38.59	42.29	45.70	49.21	52.75	56.28	59.8	63.32
J_0^*	4572.7	5107.3	6444.7	8771.3	11742	15605	20358	25923	32328	39570
J^*	3176.8	3656.5	4361.5	4989.6	5320.4	6031.7	6704.4	7420.5	8186.5	9003.5

D'après la figure (3.13) et le tableau (3.6), lorsque le facteur de déviation standard σ_D augmente, le niveau optimal désiré d'inventaire \bar{x}^* augmente. Ceci est logique car l'augmentation de la variabilité du taux de demande nécessite d'avoir un niveau plus élevé, ce qui fait que la demande cumulée diminue. C'est pourquoi le coût total moyen quadratique J_0^* et le coût total moyen de déviation J^* augmentent.

3.6 Conclusion

Tout au long du chapitre, nous avons montré une politique hiérarchique de commande optimale d'un système manufacturier, composé d'une machine produisant un seul type de produit, avec une demande aléatoire. Dans le premier niveau, nous avons montré comment déterminer de façon optimale le niveau d'inventaire et le taux de production désirés basés sur la formulation d'un problème de commande optimale stochastique linéaire-quadratique. Dans le deuxième niveau, nous avons déterminé la stratégie de production optimale basée sur la commande prédictive stochastique pour maintenir le taux de production et le niveau d'inventaire les plus proches possibles de leurs objectifs désirés. Le principe du maximum de Pontryagin a été appliqué à la fois au niveau 1 et niveau 2. Un exemple numérique est présenté, et les résultats obtenus montrent que la politique de commande hiérarchique a minimisé le coût total moyen quadratique et la somme des déviations moyennes quadratiques d'inventaire et de production pour le premier et le deuxième niveaux, respectifs. L'extension de ce travail pour les systèmes de logistique inverse avec une demande aléatoire est identifiée comme un sujet de recherche. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4

LOGISTIQUE INVERSE

4.1 Introduction

Ce chapitre traite un problème de commande optimale stochastique d'un système hybride fabrication-réutilisation en logistique inverse fabriquant un seul type de produit. Le système hybride considéré est composé de deux machines fiables ayant une capacité finie. Nous considérons que la demande du client peut fluctuer et doit être satisfaite par un inventaire de produits finis. Cet inventaire peut être construit par la production de nouvelles pièces ou par la réutilisation en utilisant les pièces retournées. Ces dernières sont collectées dans un deuxième inventaire, elles peuvent être réusinées, tenues en inventaire pour une réutilisation future ou pour les mettre en retrait de la bonne façon afin de minimiser l'impact sur l'environnement.

Nous proposons un modèle hiérarchique de deux niveaux pour la commande du système manufacturier considéré. Dans le premier niveau, le problème de commande optimale stochastique linéaire quadratique est formulé pour déterminer de façon optimale les variables de commande en fonction des variables d'état. Les variables d'état sont les niveaux d'inventaire de service et de récupération désirés, et les variables de commande sont les taux de production, de réutilisation et de retrait des pièces retournées. Le deuxième niveau de la hiérarchie proposée est de maintenir les niveaux d'inventaire les plus proches possibles des niveaux désirés d'inventaire et de faire tendre les taux de production, de réutilisation et de retrait aux valeurs désirées à la fin de l'horizon de planification avec des taux de demande et de retour aléatoires variant dans le temps. Ce problème est représenté comme un problème de commande en optimisation récursive (commande prédictive) avec les deux variables d'état et les trois variables de commande.

Pour déterminer les stratégies optimales de commande de la production qui minimisent le coût total moyen quadratique et la somme des erreurs quadratiques moyennes (Error quadratic mean total ou EQMT) entre les inventaires, la production, la réutilisation et le retrait du premier et du deuxième niveau respectivement. La solution est obtenue par application du principe de commande optimale stochastique basé sur le principe du maximum de Pontryagin utilisant le schéma numérique d'Euler Maruyama. Un exemple numérique et des analyses de sensibilité sont présentés pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

4.2 Formulation du problème et modélisation

4.2.1 Notations et hypothèses

Les notations utilisées dans ce chapitre sont les suivantes :

T : longueur de l'horizon de planification, ($T > 0$),

x^{10} : niveau d'inventaire de service initial désiré,

x^{20} : niveau d'inventaire de récupération initial désiré,

x_{10} : niveau d'inventaire de service initial,

x_{20} : niveau d'inventaire de récupération initial,

$d(t)$: taux de demande au temps t ,

r : proportion de retour des produits,

$R(t)$: taux de retour en temps t ,

$c_1, c_2, c_3, c_m, c_r, c_d$: ($\$/\text{pièce}^2$),

h_1, h_2, ch_1, ch_2 : ($\$/(\text{pièce} \times \text{unité de temps})^2$),

c_1 : facteur de pénalité de production, ($c_1 > 0$),

c_2 : facteur de pénalité de réutilisation, ($c_2 > 0$),

c_3 : facteur de pénalité de retrait, ($c_3 > 0$),

h_1 : facteur de pénalité de l'inventaire de service, ($h_1 \geq 0$),

h_2 : facteur de pénalité de l'inventaire de récupération, ($h_2 \geq 0$),

c_m : facteur de déviation de production de son objectif désiré \bar{P}_m , ($c_m > 0$),

c_r : facteur de déviation de réutilisation de son objectif désiré \bar{P}_r , ($c_r > 0$),
 c_d : facteur de déviation de retrait de son objectif désiré \bar{P}_d , ($c_d > 0$),
 ch_1 : facteur de déviation de l'inventaire de service de son objectif désiré \bar{x}_1 , ($ch_1 \geq 0$),
 ch_2 : facteur de déviation de l'inventaire de récupération de son objectif désiré \bar{x}_2 ,
 ($ch_2 \geq 0$),

$U1_{max}$: capacité de production maximale,

$U2_{max}$: capacité de réutilisation maximale,

w : processus de Wiener standard,

g : coefficient de diffusion.

Quatre variables d'état :

$\bar{x}_1(t)$: niveau d'inventaire de service désiré au temps t ,

$\bar{x}_2(t)$: niveau d'inventaire de récupération désiré au temps t ,

$x_1(t)$: niveau d'inventaire de service au temps t ,

$x_2(t)$: niveau d'inventaire de récupération au temps t .

Six variables de décision :

$\bar{P}_m(t)$: taux de production désiré au temps t , ($\bar{P}_m(t) \geq 0$),

$\bar{P}_r(t)$: taux de réutilisation désiré au temps t , ($\bar{P}_r(t) \geq 0$),

$\bar{P}_d(t)$: taux de retrait désiré au temps t , ($\bar{P}_d(t) \geq 0$),

$P_m(t)$: taux de production au temps t , ($P_m(t) \geq 0$),

$P_r(t)$: taux de réutilisation au temps t , ($P_r(t) \geq 0$),

$P_d(t)$: taux de retrait au temps t , ($P_d(t) \geq 0$).

Dans ce modèle nous supposons que :

- (1) Le niveau d'inventaire de service est permis d'être positif (inventory) ou négatif (backlogged demands).
- (2) Le niveau d'inventaire de récupération des produits retournés doit être positif.
- (3) L'horizon de planification est fini en temps continu.
- (4) Le taux de demande est décrit par le modèle proposé par Kiesmüller (2003) et défini par :

$$d(t) = \mu_D(t) + \sigma_D \varepsilon(t),$$

où $\mu_D(t)$ est une partie déterministe connue, et σ_D est un paramètre non-négatif connu. Nous supposons que $\varepsilon(t)$ est un bruit blanc (variable aléatoire normalement distribuée au temps t avec moyenne zéro et variance unique, c'est-à-dire $\varepsilon(t) \sim N(0, 1)$ et $E[\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)] = 0$ pour $t_1 \neq t_2$). Ensuite nous pouvons écrire le taux de demande comme une fonction distribuée normalement : $d(t) \sim N(\mu_D(t), \sigma_D^2)$.

(5) Le taux de retour de produits est un pourcentage du taux de demande, il est décrit par le modèle suivant : $R(t) = \mu_R(t) + \sigma_R \varepsilon(t)$. Selon l'hypothèse (4), ce taux nous conduit à un retour distribué normalement : $R(t) \sim r * d(t) = N(\mu_R(t), \sigma_R^2)$.

4.2.2 Énoncé du problème

Dans cette section, nous décrivons un modèle stochastique hiérarchique en logistique inverse. Le système considéré est composé de deux machines fiables produisant le même type de produit. Le taux de demande est variable dans le temps et doit être satisfait par l'inventaire de service. Cet inventaire sera construit par les produits fabriqués ou réutilisés. Les produits retournés seront dans un deuxième inventaire dit de récupération, ils peuvent être réutilisés, disposés ou gardés en inventaire pour une réutilisation future. La situation est illustrée dans la figure 4.1.

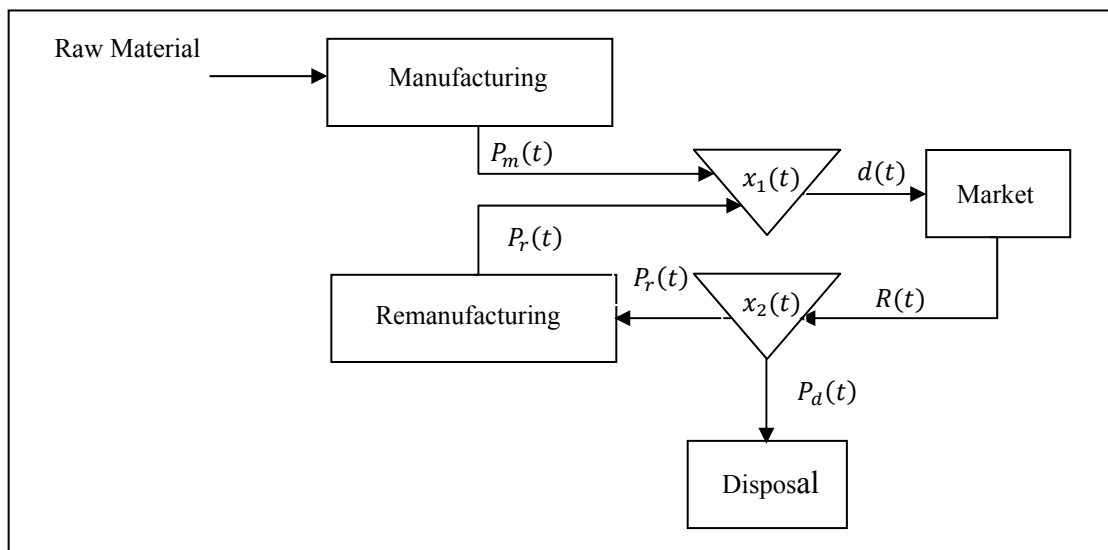


Figure 4.1 Structure du système en logistique inverse
Tirée de Dobos (2003, p. 353)

Dans un premier temps, nous allons considérer le problème de commande optimale stochastique linéaire quadratique noté (P_0) du problème de planification de la production désirée stochastique avec deux variables d'état (les niveaux d'inventaire désirés de service et de récupération) et trois variables de décision (taux de production, de réutilisation et de retrait désirés). L'objectif de la firme est de trouver les valeurs optimales désirées des variables de décision afin d'amener les niveaux d'inventaire d'un point initial à un point final (cible d'inventaire) satisfaisant le taux de demande tout en minimisant le coût total moyen quadratique des deux inventaires, de production, de réutilisation et de retrait.

La fonction objective à minimiser est dans ce cas donnée par la relation suivante

$$J_0(x^{10}, x^{20}, P_m, P_r, P_d) \quad (4.1)$$

$$= E \left\{ \int_0^T \phi_0(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) dt + K_0(x_1(T), x_2(T), T) \right\},$$

où

$$\phi_0(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) = \frac{1}{2} h_1 x_1(t)^2 + \frac{1}{2} h_2 x_2(t)^2 + \frac{1}{2} c_1 P_m(t)^2 + \frac{1}{2} c_2 P_r(t)^2 + \frac{1}{2} c_3 P_d(t)^2, \quad (4.2)$$

Le système est décrit par les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

À partir de la dynamique décrite par les équations (4.3), nous pouvons dériver les équations différentielles stochastiques des états

$$\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_D(t) \\ \mu_R(t) \end{bmatrix} \right\} dt + \begin{bmatrix} -\sigma_D \\ \sigma_R \end{bmatrix} dw, \quad (4.4)$$

avec conditions initiales

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{10} \\ x^{20} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

et les contraintes de non-négativité :

$$\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{pout tout } t \in [0, T] \quad (4.6)$$

$$x_2(t) \geq 0. \quad (4.7)$$

Dans un deuxième temps, le problème initial de planification de la production peut être représenté comme un problème de commande optimale stochastique noté (P) avec deux variables d'état (niveaux d'inventaire) et trois variables de décision (taux de production, de réutilisation et de retrait). Ce problème consiste à trouver les taux optimaux de production, de réutilisation et de retrait pour satisfaire le taux de demande sur un horizon de planification fini. Le coût total de déviation du système contient la somme des coûts quadratiques d'inventaire des deux niveaux d'inventaire et les coûts quadratiques de production, de réutilisation et de retrait.

La fonction objective à minimiser est dans ce cas donnée par :

$$J(x_{10}, x_{20}, P_m, P_r, P_d) = E \left\{ \int_0^T \phi(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) dt + K(x_1(T), x_2(T), T) \right\}, \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) &= \frac{1}{2} \left[ch_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t))^2 + ch_2(x_2(t) - \bar{x}_2(t))^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[c_m(P_m(t) - \bar{P}_m(t))^2 + c_r(P_r(t) - \bar{P}_r(t))^2 + c_d(P_d(t) - \bar{P}_d(t))^2 \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

À partir de la dynamique décrite par les équations suivantes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

nous pouvons dériver les équations différentielles stochastiques des états du système comme suit :

$$\begin{bmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_D(t) \\ \mu_R(t) \end{bmatrix} \right\} dt + \begin{bmatrix} -\sigma_D \\ \sigma_R \end{bmatrix} dw, \quad (4.11)$$

avec conditions initiales

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

et les contraintes de non-négativité :

$$\begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \quad (4.13)$$

$$x_2(t) \geq 0. \quad (4.14)$$

Pour résoudre les problèmes de commande optimale stochastique cités plus haut, nous allons appliquer le principe du maximum de Pontryagin utilisé dans les hypothèses précédentes.

4.3 Solution des problèmes de commande optimale

L'approche de commande proposée est illustrée dans la figure 4.2. Il s'agit d'une approche hiérarchisée à deux niveaux basée sur le principe du maximum de Pontryagin. Elle permet de résoudre deux problèmes de commande optimale stochastique afin de trouver une stratégie de production optimale pour gérer les inventaires et satisfaire une demande aléatoire tout en minimisant le coût total moyen d'inventaire et de production.

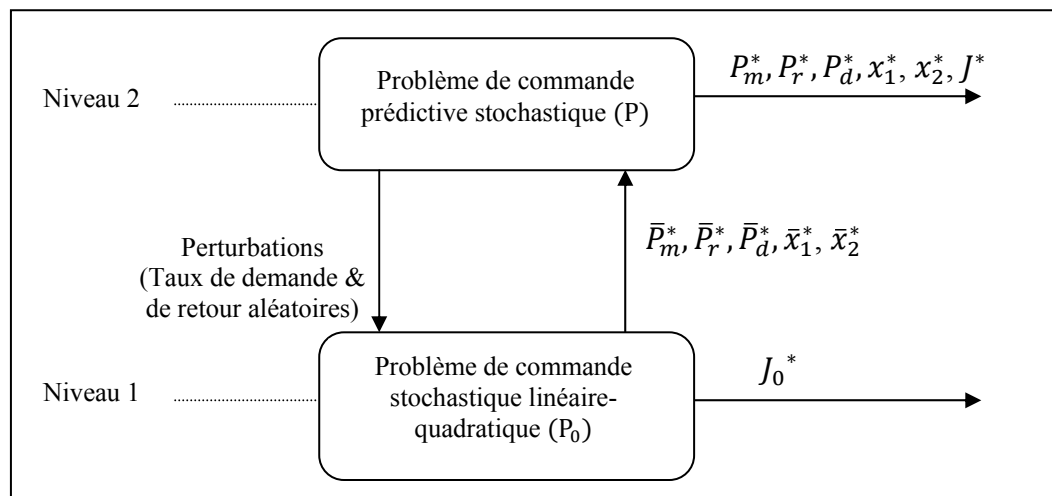


Figure 4.2 Approche de commande hiérarchique

4.3.1 Solution du problème de commande optimale (P_0)

Pour résoudre le problème de commande optimale stochastique défini par (4.1) et (4.3), nous allons supposer que $V(x_1, x_2, t)$, est une fonction valeur qui satisfait la fonction objective (4.1) de t à T , telle que :

$$V(x_1, x_2, t) = \min_u E \left\{ \int_t^T \phi_0(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) dt + K_0(x_1(T), x_2(T), T) \right\} \quad (4.15)$$

avec $t \in [0, T]$.

« Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur l'intervalle $[0, T]$ contient la trajectoire optimale sur $[t, T]$ avec comme condition initiale $x_t = x(t)$ ».

Autrement dit :

$$V(x_1, x_2, t) = \min_u E \{ \phi_0(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) dt + V(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, t + dt) \} \quad (4.16)$$

Appliquant le développement de Taylor en espace et en temps :

$$\begin{aligned} & V(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, t + dt) \\ &= V(x_1, x_2, t) + V_t dt + V_{x_1} dx_1 + V_{x_2} dx_2 + \frac{1}{2} V_{tt} (dt)^2 + \frac{1}{2} V_{x_1 x_1} (dx_1)^2 \\ &+ \frac{1}{2} V_{x_2 x_2} (dx_2)^2 + V_{x_1 t} dx_1 dt + V_{x_2 t} dx_2 dt + V_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

Négligeant les termes d'ordre supérieur comme $(dt)^2$ et $dw dt$ et en remplaçant $(dw)^2$ par (dt) (Davis, 1977), on obtient la formule d'Itô dans le cas multidimensionnel.

$$\begin{aligned} dV(x_1, x_2, t) &= (V_t + V_{x_1} f_1 + V_{x_2} f_2 + \frac{1}{2} g_1^2 V_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} g_2^2 V_{x_2 x_2} + V_{x_1 x_2} g_1 g_2) dt \\ &+ (V_{x_1} g_1 + V_{x_2} g_2) dw \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
V(x_1, x_2, t) = \min_u E \left\{ \phi_0 dt + V(x_1, x_2, t) + (V_t + V_{x_1} f_1 + V_{x_2} f_2 + \frac{1}{2} g_1^2 V_{x_1 x_1} \right. \\
+ \frac{1}{2} g_2^2 V_{x_2 x_2} + V_{x_1 x_2} g_1 g_2) dt + (V_{x_1} g_1 + V_{x_2} g_2) dw \\
\left. + o(dx_1^2, dx_2^2, dt^2) \right\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Le fait que dw est indépendant de X_1, X_2 donne :

$$E[(V_{x_1} g_1 + V_{x_2} g_2) dw] = EV_{x_1} g_1 E dw + EV_{x_2} g_2 E dw = 0 \tag{4.20}$$

On peut donc dériver l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman comme suit :

$$-V_t = \min_u \left\{ \phi_0 + V_{x_1} f_1 + V_{x_2} f_2 + \frac{1}{2} g_1^2 V_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} g_2^2 V_{x_2 x_2} + V_{x_1 x_2} g_1 g_2 \right\} \tag{4.21}$$

avec la condition aux limites :

$$V(x_1, x_2, T) = K_0(x_1(T), x_2(T), T). \tag{4.22}$$

On peut utiliser une méthode basée sur le principe du maximum de Pontryagin en stochastique en introduisant les états adjoints pour approximer la fonction valeur :

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \frac{\partial V(x_1, x_2, t)}{\partial \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} V_{x_1}(x_1, x_2, t) \\ V_{x_2}(x_1, x_2, t) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1(t)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial P_2(t)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x_1 x_1}(x_1, x_2, t) \\ V_{x_2 x_2}(x_1, x_2, t) \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

La version stochastique des conditions d'optimalité peut être obtenue en utilisant l'Hamiltonien.

$$\begin{aligned}
-V_t = \min_u \left\{ \phi_0 + V_{x_1} f_1 + V_{x_2} f_2 + \frac{1}{2} g_1^2 V_{x_1 x_1} + \frac{1}{2} g_2^2 V_{x_2 x_2} + V_{x_1 x_2} g_1 g_2 \right\} \\
= \min_u H(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

avec :

$$\begin{aligned}
H(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) &= \phi_0(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) + \\
P^T(t)f(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) & \\
+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \\ P_{1x_2}(t) + P_{2x_1}(t) \end{bmatrix} [g_1^2 \quad g_2^2 \quad 2g_1g_2] \right\} & \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [h_1 x_1^2(t) + h_2 x_2^2(t)] + \frac{1}{2} [c_1 P_m^2(t) + c_2 P_r^2(t) + c_3 P_d^2(t)] + \\
& [P_1(t) \quad P_2(t)] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_D(t) \\ \mu_R(t) \end{bmatrix} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \\ P_{1x_2}(t) + P_{2x_1}(t) \end{bmatrix} [\sigma_D^2 \quad \sigma_R^2 \quad (-2)\sigma_D\sigma_R] \right\} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Nous allons supposer qu'il existe des lois de commande optimale connues comme $P_m^*(x_1, x_2, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t)$, $P_r^*(x_1, x_2, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t)$, $P_d^*(x_1, x_2, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t)$ qui sont des solutions du problème de commande optimale stochastique telles que :

$$\begin{aligned}
H^*(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) &= H(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) \\
&= \phi_0(x_1, x_2, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) + P^T(t)f(x_1, x_2, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) \\
& + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \\ P_{1x_2}(t) + P_{2x_1}(t) \end{bmatrix} [g_1^2 \quad g_2^2 \quad 2g_1g_2] \right\} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$= -V_t \quad (4.29)$$

Nous pouvons alors écrire les équations différentielles stochastiques des états et états adjoints comme suit :

$$\begin{bmatrix} dx_1^* \\ dx_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \\ f_2(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \\ g_2(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \end{bmatrix} dw$$

$$= \begin{bmatrix} H_{P_1}^*(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \\ H_{P_2}^*(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \\ g_2(x_1, x_2, P_m^*, P_r^*, P_d^*, t) \end{bmatrix} dw \quad (4.30)$$

Les processus stochastiques suivis par les états adjoints $P_1(t)$ et $P_2(t)$ de l'équation (4.23) peuvent être déterminés en utilisant le lemme d'Itô (Cohn, 1980) dans le cas multidimensionnel, comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dP_1 \\ dP_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} (V_{x_1 t} + V_{x_1 x_1} f_1 + V_{x_1 x_2} f_2 + \frac{1}{2} V_{x_1 x_1 x_1} g_1^2 + \frac{1}{2} V_{x_1 x_2 x_2} g_2^2 + V_{x_1 x_1 x_2} g_1 g_2) \\ (V_{x_2 t} + V_{x_2 x_2} f_2 + V_{x_2 x_1} f_1 + \frac{1}{2} V_{x_2 x_2 x_2} g_2^2 + \frac{1}{2} V_{x_2 x_1 x_1} g_1^2 + V_{x_2 x_2 x_1} g_1 g_2) \end{bmatrix} dt \\ & + \begin{bmatrix} (V_{x_1 x_1} g_1 + V_{x_1 x_2} g_2) \\ (V_{x_2 x_1} g_1 + V_{x_2 x_2} g_2) \end{bmatrix} dw \end{aligned} \quad (4.31)$$

En prenant la dérivée partielle de (4.29) par rapport à x_1 et x_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -V_{x_1 t}(x_1, x_2, t) \\ -V_{x_2 t}(x_1, x_2, t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} H_{x_1}^* + H_{x_2}^* \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + H_{P_1}^* \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + H_{P_2}^* \frac{\partial P_2}{\partial x_1} + H_{P_{x_1}}^* \frac{\partial P_{x_1}}{\partial x_1} + H_{P_{x_2}}^* \frac{\partial P_{x_2}}{\partial x_1} + H_{P_{1x_2}}^* \frac{\partial P_{1x_2}}{\partial x_1} \\ H_{x_2}^* + H_{x_1}^* \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + H_{P_1}^* \frac{\partial P_1}{\partial x_2} + H_{P_2}^* \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + H_{P_{x_1}}^* \frac{\partial P_{x_1}}{\partial x_2} + H_{P_{x_2}}^* \frac{\partial P_{x_2}}{\partial x_2} + H_{P_{2x_1}}^* \frac{\partial P_{2x_1}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} H_{x_1}^* + H_{x_2}^* \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + V_{x_1 x_1} f_1 + V_{x_1 x_2} f_2 + \frac{1}{2} V_{x_1 x_1 x_1} g_1^2 + \frac{1}{2} V_{x_1 x_2 x_2} g_2^2 + V_{x_1 x_1 x_2} g_1 g_2 \\ H_{x_2}^* + H_{x_1}^* \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + V_{x_2 x_2} f_2 + V_{x_2 x_1} f_1 + \frac{1}{2} V_{x_2 x_2 x_2} g_2^2 + \frac{1}{2} V_{x_2 x_1 x_1} g_1^2 + V_{x_2 x_2 x_1} g_1 g_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

En remplaçant (4.32) dans (4.31) nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} dP_1^* \\ dP_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-H_{x_1}^* - H_{x_2}^* \frac{\partial x_2}{\partial x_1}) \\ (-H_{x_2}^* - H_{x_1}^* \frac{\partial x_1}{\partial x_2}) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} (V_{x_1 x_1} g_1 + V_{x_1 x_2} g_2) \\ (V_{x_2 x_1} g_1 + V_{x_2 x_2} g_2) \end{bmatrix} dw$$

$$= \begin{bmatrix} (-H_{x_1}^* - H_{x_2}^* \frac{\partial x_2}{\partial x_1}) \\ (-H_{x_2}^* - H_{x_1}^* \frac{\partial x_1}{\partial x_2}) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} (P_{1x_1}g_1 + P_{1x_2}g_2) \\ (P_{2x_1}g_1 + P_{2x_2}g_2) \end{bmatrix} dw \quad (4.33)$$

Finalement, on peut écrire les conditions d'optimalité de la commande du problème de commande optimale stochastique dans le cas d'une minimisation :

$$H(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) = \phi_0(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) +$$

$$P^T(t)f(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, t) + \frac{1}{2}tr \left\{ \begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \\ P_{1x_2}(t) + P_{2x_1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^2 & g_2^2 & 2g_1g_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} dx_1^* \\ dx_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{P_1}^* \\ H_{P_2}^* \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} dw \\ \begin{bmatrix} dP_1^* \\ dP_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-H_{x_1}^* - H_{x_2}^* \frac{\partial x_2}{\partial x_1}) \\ (-H_{x_2}^* - H_{x_1}^* \frac{\partial x_1}{\partial x_2}) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} (P_{1x_1}g_1 + P_{1x_2}g_2) \\ (P_{2x_1}g_1 + P_{2x_2}g_2) \end{bmatrix} dw \\ \begin{bmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{10} \\ x^{20} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_1^*(T) \\ P_2^*(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x_1}(x_1(T), x_2(T), T) \\ K_{x_2}(x_1(T), x_2(T), T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & H(x_1^*(t), x_2^*(t), P_m^*(t), P_r^*(t), P_d^*(t), P_1^*(t), P_2^*(t), P_{x_1}^*(t), P_{x_2}^*(t), t) \\ & \leq H(x_1^*(t), x_2^*(t), P_m(t), P_r(t), P_d(t), P_1^*(t), P_2^*(t), P_{x_1}^*(t), P_{x_2}^*(t), t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

pour $t \in [0, T]$

Donc les niveaux d'inventaire optimaux de service et de récupération et les états adjoints optimaux sont obtenus de dx_1^* , dx_2^* , dP_1^* et dP_2^* et les taux de production, de réutilisation et de retrait optimaux sont obtenus par la minimisation de la fonction Hamiltonienne.

L'Hamiltonien peut dans ce cas s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
H(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) \\
&= \frac{1}{2} [h_1 x_1^2(t) + h_2 x_2^2(t)] + \frac{1}{2} [c_1 P_m^2(t) + c_2 P_r^2(t) + c_3 P_d^2(t)] \\
&+ [P_1(t) \quad P_2(t)] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_D(t) \\ \mu_R(t) \end{bmatrix} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \\ P_{1x_2}(t) + P_{2x_1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_R^2 & (-2)\sigma_D\sigma_R \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Le problème (P_0) aux valeurs limites du principe du maximum de Pontryagin peut se formuler comme suit

$$\text{(TPBVP}_0) \left\{ \begin{aligned}
\begin{bmatrix} dx_1^* \\ dx_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_m(t) + P_r(t) - \mu_D(t) \\ -P_r(t) - P_d(t) + \mu_R(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -\sigma_D \\ \sigma_R \end{bmatrix} dw \\
\begin{bmatrix} dP_1^* \\ dP_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-h_1 x_1(t) - h_2 x_2(t) \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_1(t)}) \\ (-h_2 x_2(t) - h_1 x_1(t) \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_2(t)}) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} (P_{1x_1}(-\sigma_D) + P_{1x_2}\sigma_R) \\ (P_{2x_1}(-\sigma_D) + P_{2x_2}\sigma_R) \end{bmatrix} dw \\
\begin{bmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x^{10} \\ x^{20} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1^*(T) \\ x_2^*(T) \end{bmatrix} \text{ sont libres} \\
\begin{bmatrix} P_1^*(T) \\ P_2^*(T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{x_1}(x_1(T), x_2(T), T) \\ K_{x_2}(x_1(T), x_2(T), T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \right. \quad (4.35)$$

La solution des équations différentielles stochastiques du problème aux valeurs limites (4.35) obtenu par application du principe du maximum de Pontryagin peut être trouvée en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama. Les niveaux d'inventaire optimaux de service et de récupération et les états adjoints sont donc donnés par le schéma suivant :

$$\begin{bmatrix} Y_{n+1}^{(1)} \\ Y_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_n^{(1)} + \left(\left(-\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) Z_n^{(1)} + \frac{1}{c_2} Z_n^{(2)} - \mu_{Dn} \right) dt + (-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n \\ Y_n^{(2)} + \left(\frac{1}{c_2} Z_n^{(1)} + \left(-\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) Z_n^{(2)} + \mu_{Rn} \right) dt + (\sigma_R) \sqrt{dt} \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Z_{n+1}^{(1)} \\ Z_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_n^{(1)} \\ Z_n^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_1 Y_n^{(1)} - h_2 Y_n^{(2)} \frac{Y_{n+1}^{(2)} - Y_n^{(2)}}{Y_{n+1}^{(1)} - Y_n^{(1)}} \\ -h_2 Y_n^{(2)} - h_1 Y_n^{(1)} \frac{Y_{n+1}^{(1)} - Y_n^{(1)}}{Y_{n+1}^{(2)} - Y_n^{(2)}} \end{bmatrix} \times \\
&\left[\frac{(Y_{n+1}^{(1)} - Y_n^{(1)})(Y_{n+1}^{(2)} - Y_n^{(2)})}{(Y_{n+1}^{(2)} - Y_n^{(2)})[(Y_{n+1}^{(1)} - Y_n^{(1)}) + (\sigma_D)\sqrt{dt}\varepsilon_n] + (Y_{n+1}^{(1)} - Y_n^{(1)})(-\sigma_R)\sqrt{dt}\varepsilon_n} \right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Les valeurs initiales des états adjoints sont calculées par une méthode de tir simple (Stoer et Bulirsch, 1993).

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} Z_0^{(1)} \\ Z_0^{(2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left[\left(\frac{-Y_0^{(2)}}{dt} - \mu_{R0} \right) - \left(1 + \frac{c_2}{c_3} \right) \left(\frac{-Y_0^{(1)}}{dt} - \mu_{D0} \right) \right] \frac{c_1 c_3}{c_1 + c_2 + c_3} \\ \left(\frac{Y_0^{(1)}}{dt} - \mu_{D0} \right) \left(\frac{-c_1 c_3}{c_1 + c_2 + c_3} \right) + \left(\frac{-Y_0^{(2)}}{dt} - \mu_{R0} \right) \frac{c_3 (c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Selon les équations (4.6) et (4.35) nous obtenons les taux optimaux de production, de réutilisation et de retrait (Seierstad et Sydsaeter, 1987) et spécifiquement, la fonction *sat* (Sethi et Thompson, 2000) qui est utilisée pour obtenir la solution optimale du problème stochastique linéaire-quadratique :

$$\begin{aligned}
P_m^*(x_1, x_2, t) &= \max \left[0, -\frac{P_1(t)}{c_1} \right] = \text{sat} \left[0, U1_{max}; -\frac{P_1(t)}{c_1} \right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{P_1(t)}{c_1} < 0 \\ -\frac{P_1(t)}{c_1} & \text{si } 0 \leq -\frac{P_1(t)}{c_1} \leq U1_{max} \\ U1_{max} & \text{si } -\frac{P_1(t)}{c_1} > U1_{max} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$P_r^*(x_1, x_2, t) = \max\left[0, -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_2}\right] = \text{sat}\left[0, U2_{max}; -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_2}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_2} < 0 \\ -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_2} & \text{si } 0 \leq -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_2} \leq U2_{max} \\ U2_{max} & \text{si } -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_2} > U2_{max} \end{cases}$$

$$P_d^*(x_1, x_2, t) = \max\left[0, \frac{P_2(t)}{c_3}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{P_2(t)}{c_3} < 0 \\ \frac{P_2(t)}{c_3} & \text{si } \frac{P_2(t)}{c_3} \geq 0. \end{cases}$$

(4.39)

Le nombre de pièces qui peuvent être retirées ou réutilisées dépend de la limite de pièces disponibles dans l'inventaire de récupération.

$$x_2(t) - P_r(t) - P_d(t) \geq 0.$$

Dans le premier niveau de notre approche hiérarchisée, nous obtenons de façon optimale, les niveaux d'inventaire moyens de service, de récupération et les taux de production, de réutilisation et de retrait afin de répondre à une demande aléatoire tout en minimisant le coût total moyen quadratique.

4.3.2 Solution du problème de commande optimale (P)

Pour résoudre le problème de commande optimale stochastique défini par (4.8) et (4.10) du niveau 2 de l'approche hiérarchisée proposée, nous allons utiliser le même développement que celui qui a permis de trouver la solution du problème (P₀).

L'Hamiltonien pour ce problème s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
H(x_1, x_2, P_m, P_r, P_d, P_1, P_2, P_{x_1}, P_{x_2}, t) &= \frac{1}{2} [ch_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t))^2 + ch_2(x_2(t) - \bar{x}_2(t))^2] \\
&+ \frac{1}{2} [c_m(P_m(t) - \bar{P}_m(t))^2 + c_r(P_r(t) - \bar{P}_r(t))^2 + c_d(P_d(t) - \bar{P}_d(t))^2] \\
&+ [P_1(t) \quad P_2(t)] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_m(t) \\ P_r(t) \\ P_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mu_D(t) \\ \mu_R(t) \end{bmatrix} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} tr \left\{ \begin{bmatrix} P_{x_1}(t) \\ P_{x_2}(t) \\ P_{1x_2}(t) + P_{2x_1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_R^2 & (-2)\sigma_D\sigma_R \end{bmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

et le problème (P) aux valeurs limites du principe du maximum de Pontryagin se formule comme suit :

$$\text{(TPBVP)} \left\{ \begin{aligned}
&\begin{bmatrix} dx_1^* \\ dx_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m(t) + P_r(t) - \mu_D(t) \\ -P_r(t) - P_d(t) + \mu_R(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -\sigma_D \\ \sigma_R \end{bmatrix} dw \\
&\begin{bmatrix} dP_1^* \\ dP_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-ch_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t)) - ch_2(x_2(t) - \bar{x}_2(t)) \frac{\partial x_2(t)}{\partial x_1(t)}) \\ (-ch_2(x_2(t) - \bar{x}_2(t)) - ch_1(x_1(t) - \bar{x}_1(t)) \frac{\partial x_1(t)}{\partial x_2(t)}) \end{bmatrix} dt + \\
&\quad \begin{bmatrix} (P_{1x_1}(-\sigma_D) + P_{1x_2}\sigma_R) \\ (P_{2x_1}(-\sigma_D) + P_{2x_2}\sigma_R) \end{bmatrix} dw \\
&\begin{bmatrix} x_1^*(0) \\ x_2^*(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1^*(T) \\ x_2^*(T) \end{bmatrix} \text{ sont libres} \\
&\begin{bmatrix} P_1^*(T) \\ P_2^*(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x_1}(x_1(T), x_2(T), T) \\ K_{x_2}(x_1(T), x_2(T), T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \right.$$

(4.40)

Les états et les états adjoints sont obtenus par discrétisation en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama :

$$\begin{bmatrix} Y_{n+1}^{(3)} \\ Y_{n+1}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_n^{(3)} + \left(\left(-\frac{1}{c_m} - \frac{1}{c_r} \right) Z_n^{(3)} + \frac{1}{c_r} Z_n^{(4)} + \bar{P}_m + \bar{P}_r - \mu_{Dn} \right) dt + (-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n \\ Y_n^{(4)} + \left(\frac{1}{c_r} Z_n^{(3)} + \left(-\frac{1}{c_r} - \frac{1}{c_d} \right) Z_n^{(4)} - \bar{P}_r - \bar{P}_d + \mu_{Rn} \right) dt + (\sigma_R) \sqrt{dt} \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{n+1}^{(3)} \\ Z_{n+1}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_n^{(3)} \\ -Z_n^{(4)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ch_1(Y_n^{(3)} - \bar{x}_1) + ch_2(Y_n^{(4)} - \bar{x}_2) \frac{Y_{n+1}^{(4)} - Y_n^{(4)}}{Y_{n+1}^{(3)} - Y_n^{(3)}} \\ ch_2(Y_n^{(4)} - \bar{x}_2) + ch_1(Y_n^{(3)} - \bar{x}_1) \frac{Y_{n+1}^{(3)} - Y_n^{(3)}}{Y_{n+1}^{(4)} - Y_n^{(4)}} \end{bmatrix} \times \left[\frac{(Y_{n+1}^{(3)} - Y_n^{(3)})(Y_{n+1}^{(4)} - Y_n^{(4)})}{(Y_{n+1}^{(4)} - Y_n^{(4)})(Y_{n+1}^{(3)} - Y_n^{(3)}) + (\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n + (Y_{n+1}^{(3)} - Y_n^{(3)})(-\sigma_R) \sqrt{dt} \varepsilon_n} \right] \quad (4.42)$$

Les valeurs initiales des états adjoints sont calculées de façon optimale par une méthode de tir simple (Stoer et Bulirsch, 1993).

$$\begin{bmatrix} Z_0^{(3)} \\ Z_0^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\left(\frac{-Y_0^{(4)}}{dt} + \bar{P}_r + \bar{P}_d + -\mu_{R0} \right) - \left(1 + \frac{c_r}{c_d} \right) \left(\frac{-Y_0^{(3)}}{dt} + \bar{P}_m + \bar{P}_r - \mu_{D0} \right) \right] \frac{c_m c_d}{c_m + c_r + c_d} \\ \left(\frac{Y_0^{(3)}}{dt} + \bar{P}_m + \bar{P}_r - \mu_{D0} \right) \left(\frac{-c_m c_d}{c_m + c_r + c_d} \right) + \left(\frac{-Y_0^{(4)}}{dt} + \bar{P}_r + \bar{P}_d - \mu_{R0} \right) \frac{c_d (c_m + c_r)}{c_m + c_r + c_d} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Des équations (4.13) et (4.40), nous obtenons les règles de décision de façon optimale concernant le taux de production, le taux de réutilisation et le taux de retrait :

$$\begin{aligned}
P_m^*(x_1, x_2, t) &= \max\left[0, -\frac{P_1(t)}{c_m} + \bar{P}_m(t)\right] = \text{sat}\left[0, U1_{max}; -\frac{P_1(t)}{c_m} + \bar{P}_m(t)\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{P_1(t)}{c_m} + \bar{P}_m(t) < 0 \\ -\frac{P_1(t)}{c_m} + \bar{P}_m(t) & \text{si } 0 \leq -\frac{P_1(t)}{c_m} + \bar{P}_m(t) \leq U1_{max} \\ U1_{max} & \text{si } -\frac{P_1(t)}{c_m} + \bar{P}_m(t) > U1_{max} \end{cases} \\
P_r^*(x_1, x_2, t) &= \max\left[0, -\frac{(P_1(t)-P_2(t))}{c_r} + \bar{P}_r(t)\right] = \text{sat}\left[0, U2_{max}; -\frac{(P_1(t)-P_2(t))}{c_r} + \bar{P}_r(t)\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_r} + \bar{P}_r(t) < 0 \\ -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_r} + \bar{P}_r(t) & \text{si } 0 \leq -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_r} + \bar{P}_r(t) \leq U2_{max} \\ U2_{max} & \text{si } -\frac{(P_1(t) - (P_2(t)))}{c_r} + \bar{P}_r(t) > U2_{max} \end{cases} \\
P_d^*(x_1, x_2, t) &= \max\left[0, \frac{P_2(t)}{c_d} + \bar{P}_d(t)\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{P_2(t)}{c_d} + \bar{P}_d(t) < 0 \\ \frac{P_2(t)}{c_d} + \bar{P}_d(t) & \text{si } \frac{P_2(t)}{c_d} + \bar{P}_d(t) \geq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Dans la section suivante, nous allons appliquer notre approche hiérarchisée sur un exemple numérique pour résoudre le problème de planification de la production dans le cas stochastique.

4.4 Exemple numérique

Dans cette section, nous allons présenter un exemple numérique pour illustrer les résultats obtenus. Les valeurs des paramètres du système sont présentées dans tableau (4.1) :

Tableau 4.1 Données de l'exemple numérique

Paramètre	T	c_1	c_2	c_3	h_1	h_2	c_m	c_r	c_d	ch_1
Valeur	120	120	10	10	30	5	50	10	15	1
Paramètre	ch_2	x^{10}	x^{20}	x_{10}	x_{20}	r	$U1_{max}$	$U2_{max}$	μ_D	σ_D
Valeur	0.5	0.8147	1.7956	0.8147	1.7956	0.7	5.5	5	10	4.5

Selon les résultats de simulation de notre exemple numérique on note que :

- D'après les figures (4.4) et (4.5), on constate que le niveau optimal d'inventaire de service des produits finis x_1^* et le niveau optimal d'inventaire de récupération des produits retournés x_2^* convergent vers leurs niveaux désirés d'inventaire $\bar{x}_1^* = 14.62$ et $\bar{x}_2^* = 6.67$ respectivement au premier niveau de la hiérarchie proposée.
- Aussi, les figures (4.6), (4.7) et (4.8) montrent que les taux optimaux de production P_m^* , de réutilisation P_r^* et de retrait P_d^* tendent vers leurs taux désirés $\bar{P}_m^* = 5.38$, $\bar{P}_r^* = 4.5$ et $P_d^* = 2.21$ tout en respectant la fin de l'horizon de planification T dans l'optique de satisfaire une demande aléatoire du client.

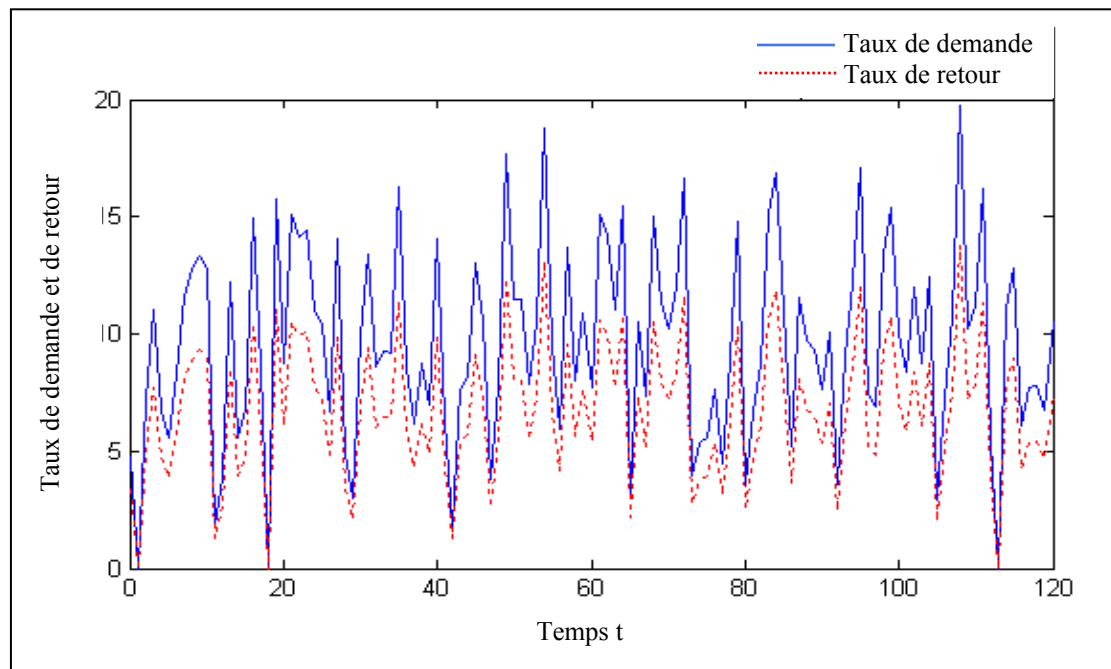


Figure 4.3 Taux de demande et de retour en fonction du temps

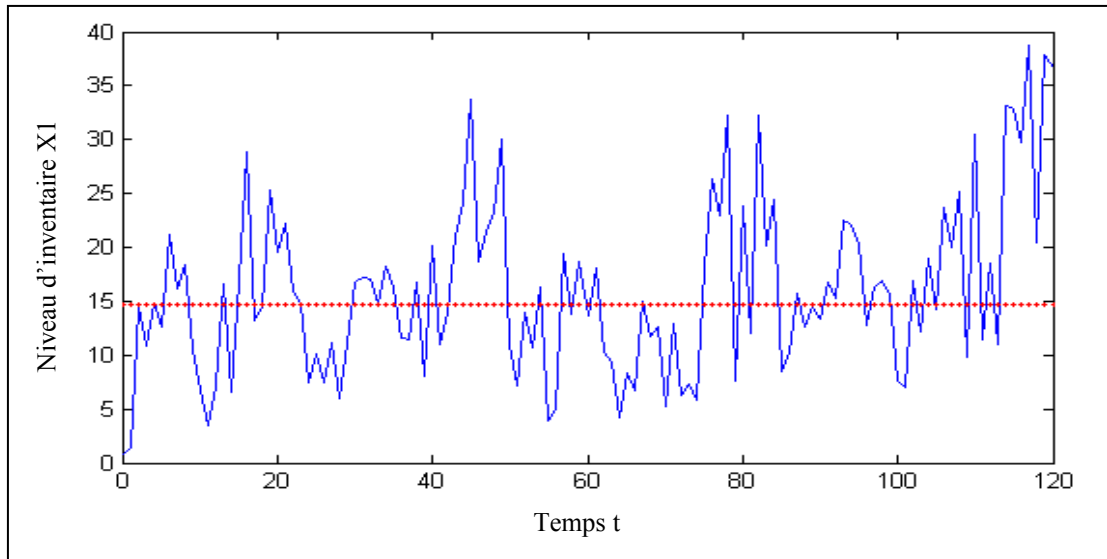


Figure 4.4 Niveaux d'inventaire optimal de service en fonction du temps

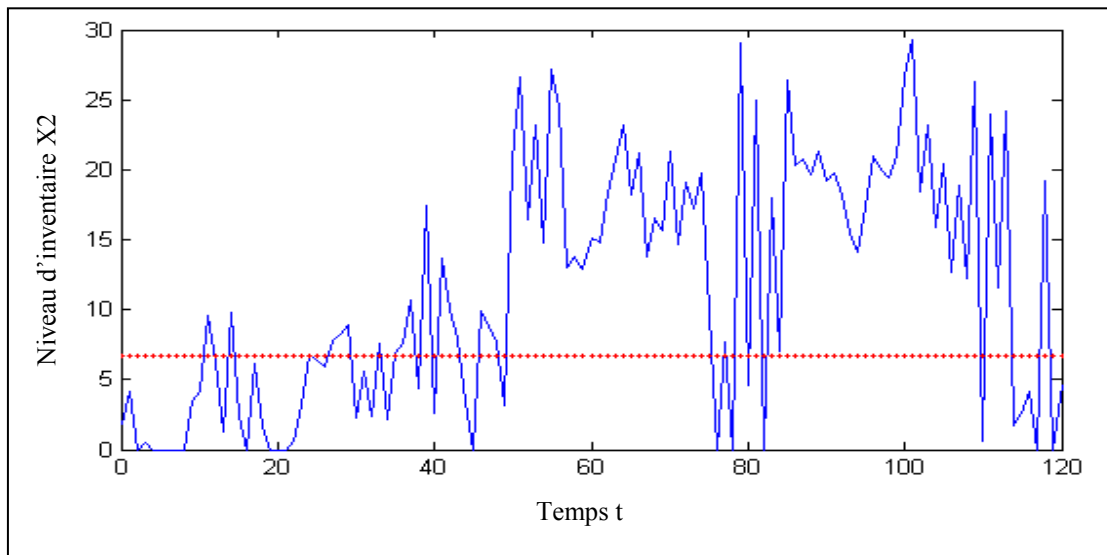


Figure 4.5 Niveaux d'inventaire optimal de récupération en fonction du temps

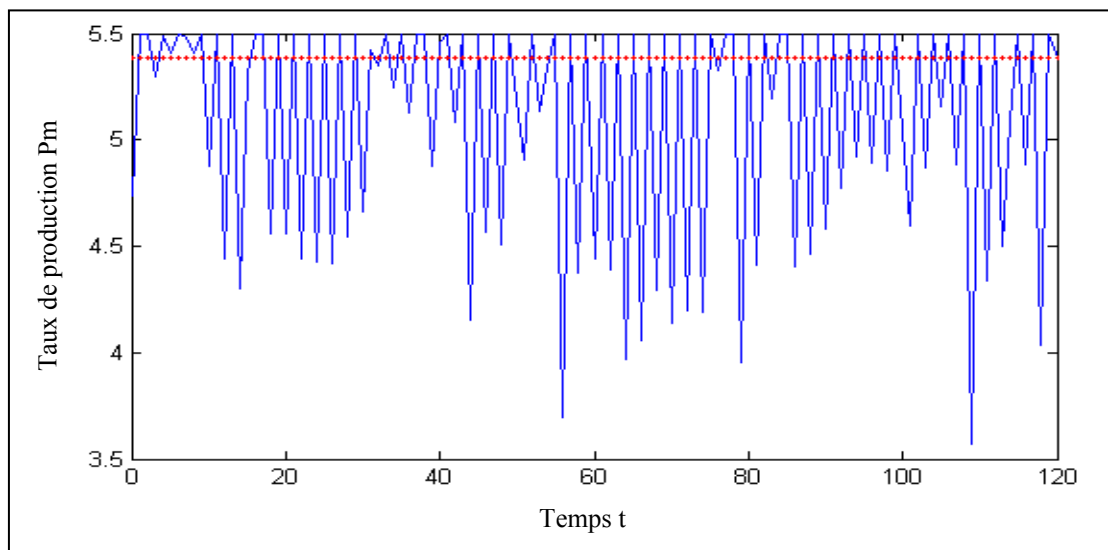


Figure 4.6 Taux de production optimal en fonction du temps

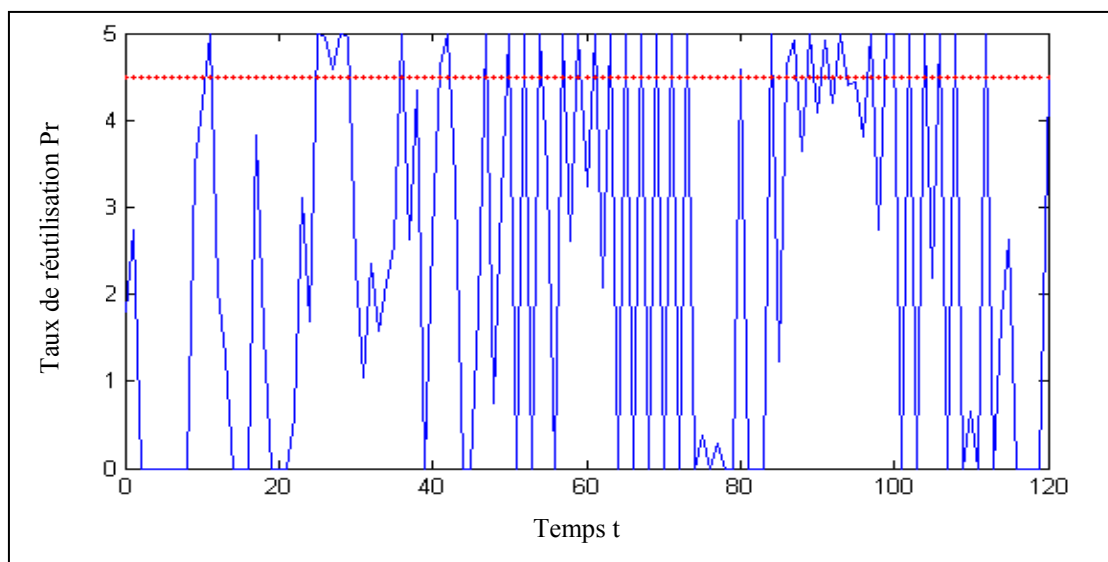


Figure 4.7 Taux de réutilisation optimal en fonction du temps

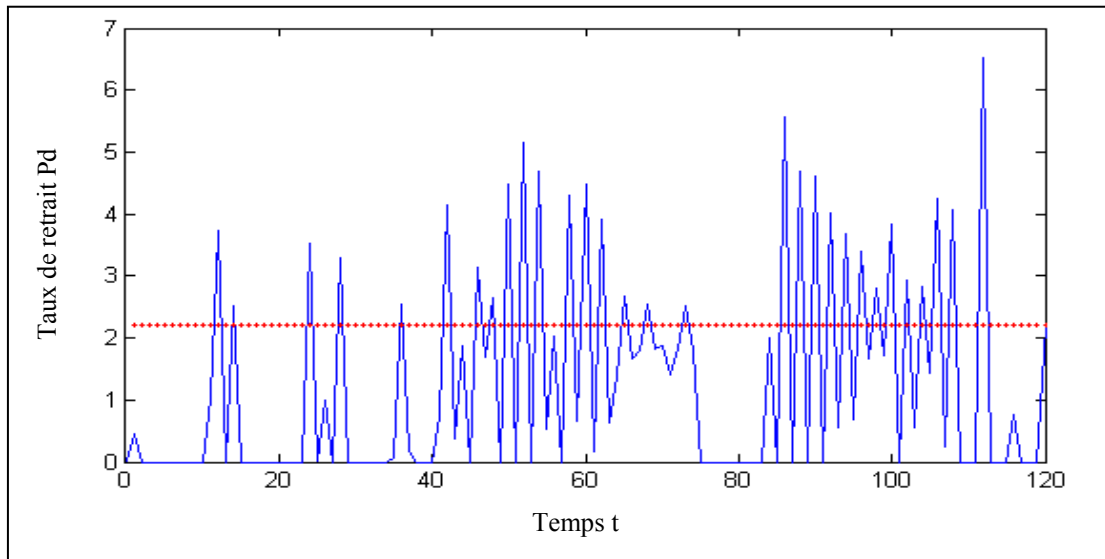


Figure 4.8 Taux de retrait optimal en fonction du temps

4.5 Analyse de sensibilité

Dans cette section, nous allons évaluer la robustesse et la qualité de la solution trouvée du modèle en examinant son comportement lorsque les valeurs des paramètres clés sont modifiées. Tout d'abord, nous avons les paramètres dit monétaires qui incluent : $c_1, c_2, c_3, h_1, h_2, c_m, c_r, c_d, ch_1$ et ch_2 et les paramètres dit non monétaires : σ_D et r . Ces paramètres ont une influence sur les niveaux d'inventaire optimaux désirés \bar{x}_1^*, \bar{x}_2^* , les taux de production, de réutilisation et de retrait optimaux désirés $\bar{P}_m^*, \bar{P}_r^*, \bar{P}_d^*$, les niveaux d'inventaire optimaux x_1^*, x_2^* , les taux de production, de réutilisation et de retrait optimaux P_m^*, P_r^*, P_d^* . Ils influent aussi sur le coût total moyen c'est-à-dire la somme du coût total moyen quadratique J_0 d'inventaire de service et de récupération, de production, de réutilisation et de retrait, mais aussi sur le coût total moyen de déviation J .

Au niveau 1 de la hiérarchie proposée, une analyse de sensibilité est présentée pour valider les résultats obtenus concernant les valeurs optimales désirées des variables d'état et de décision. Elle illustre l'utilité de l'approche proposée en fonction de la variation des facteurs

monétaires de pénalité de production, de réutilisation, de retrait et des inventaires de service et de récupération (c_1, c_2, c_3, h_1 et h_2) à travers le tableau (4.2).

Tableau 4.2 Données des paramètres monétaires du premier niveau de la hiérarchie

No	c_1	c_2	c_3	h_1	h_2	c_m	c_r	c_d	ch_1	ch_2
1	120	10	10	30	5	50	10	15	1	0.5
2	95	10	10	30	5	50	10	15	1	0.5
3	120	7	10	30	5	50	10	15	1	0.5
4	120	15	10	30	5	50	10	15	1	0.5
5	120	10	5	30	5	50	10	15	1	0.5
6	120	10	20	30	5	50	10	15	1	0.5
7	120	10	10	25	5	50	10	15	1	0.5
8	120	10	10	35	5	50	10	15	1	0.5
9	120	10	10	30	2	50	10	15	1	0.5
10	120	10	10	30	10	50	10	15	1	0.5

Selon les figures (4.9), (4.10) et le tableau (4.3) (cas numéro 1, 2), nous remarquons l'influence du facteur de pénalité de production c_1 sur le niveau d'inventaire de service. Lorsque c_1 augmente, le niveau d'inventaire optimal désiré de service \bar{x}_1^* diminue. Normalement dans la ligne directe lorsqu'on pénalise plus la production, on produit plus vite, mais ici la boucle de rétroaction des pièces retournées a une influence sur le plan de production. Plus c_1 augmente plus on répond à la demande aléatoire en utilisant la ligne de réutilisation, car c'est moins onéreux. Le niveau d'inventaire de service diminue d'un côté, le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait J_0^* augmente et le coût total moyen de déviation J^* diminue.

Tableau 4.3 Effet des paramètres monétaires du premier niveau de la hiérarchie

No	\bar{P}_m^*	\bar{P}_r^*	\bar{P}_d^*	\bar{x}_1^*	\bar{x}_2^*	J_0^*	J^*	Remarque
1	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	731.90	\bar{x}_1^* augmente
2	5.3863	4.4990	2.2096	15.1268	6.6732	7754.6	747.84	\bar{x}_2^* stable
3	5.3733	4.4990	2.2096	13.6059	6.6838	9638.7	706.15	\bar{x}_1^* augmente
4	5.3915	4.4990	2.2096	15.7424	6.6697	9264.5	769.69	\bar{x}_2^* stable
5	5.3761	4.4990	2.2096	13.9377	6.6720	9670.4	713.5248	\bar{x}_1^* augmente
6	5.3828	4.4990	2.2096	14.7227	6.6718	9331.9	734.88	\bar{x}_2^* stable
7	5.3837	4.4990	2.2096	14.8310	6.6697	9028.4	738.18	\bar{x}_1^* diminue
8	5.3785	4.4990	2.2096	14.2087	6.6794	9808.1	720.44	\bar{x}_2^* augmente
9	5.3777	4.4990	2.2096	14.124	6.6800	9287.5	718.26	\bar{x}_1^* augmente
10	5.3878	4.4990	2.2096	15.3011	6.6697	9531.9	753.78	\bar{x}_2^* stable

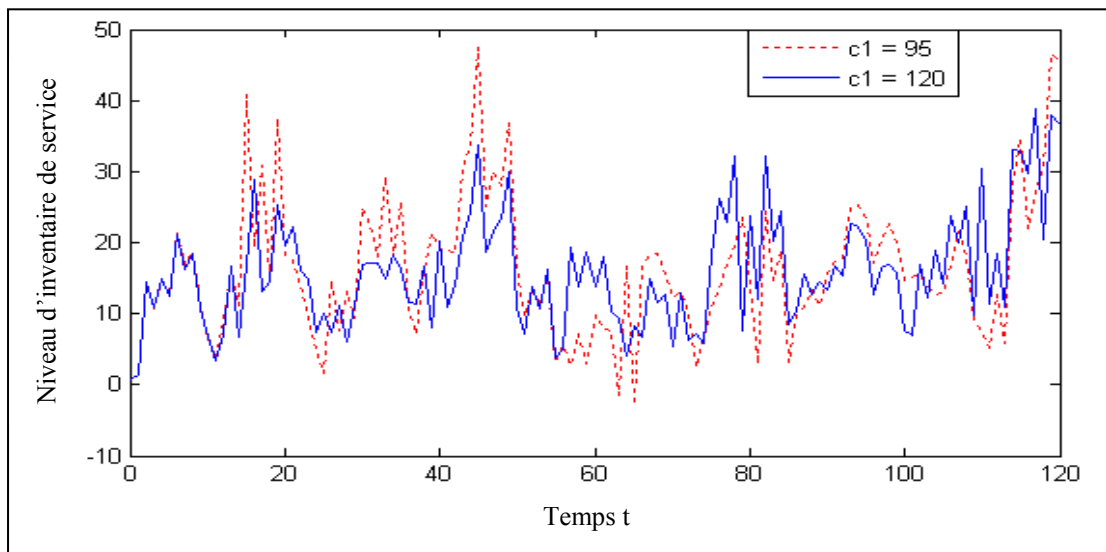


Figure 4.9 Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de production

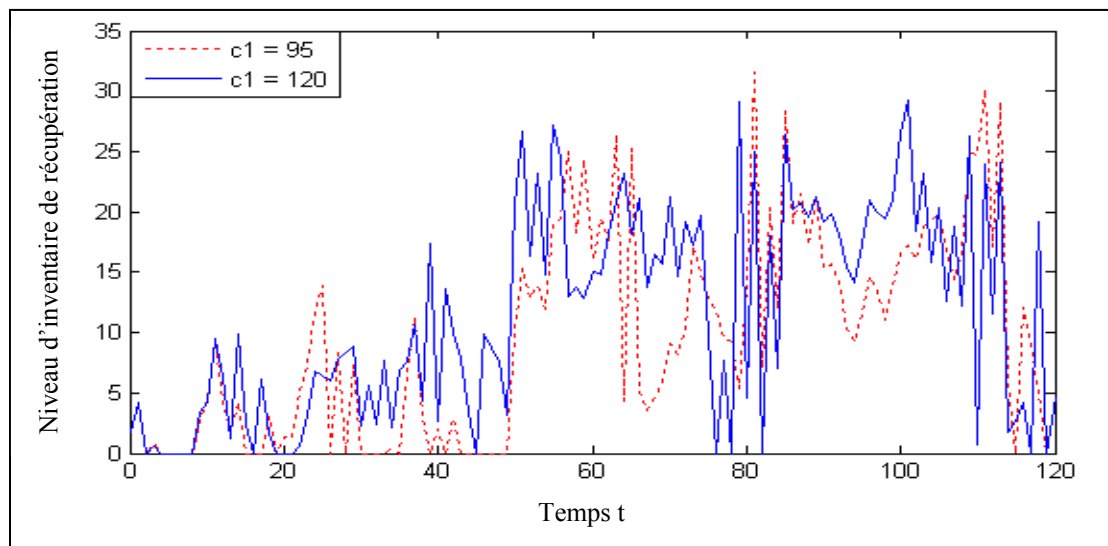


Figure 4.10 Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de production

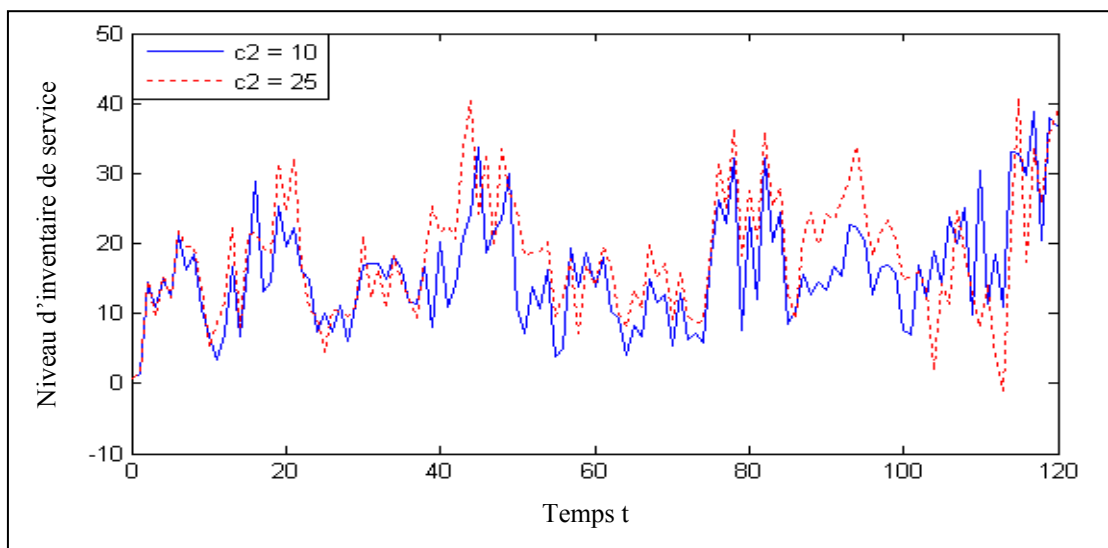


Figure 4.11 Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de réutilisation

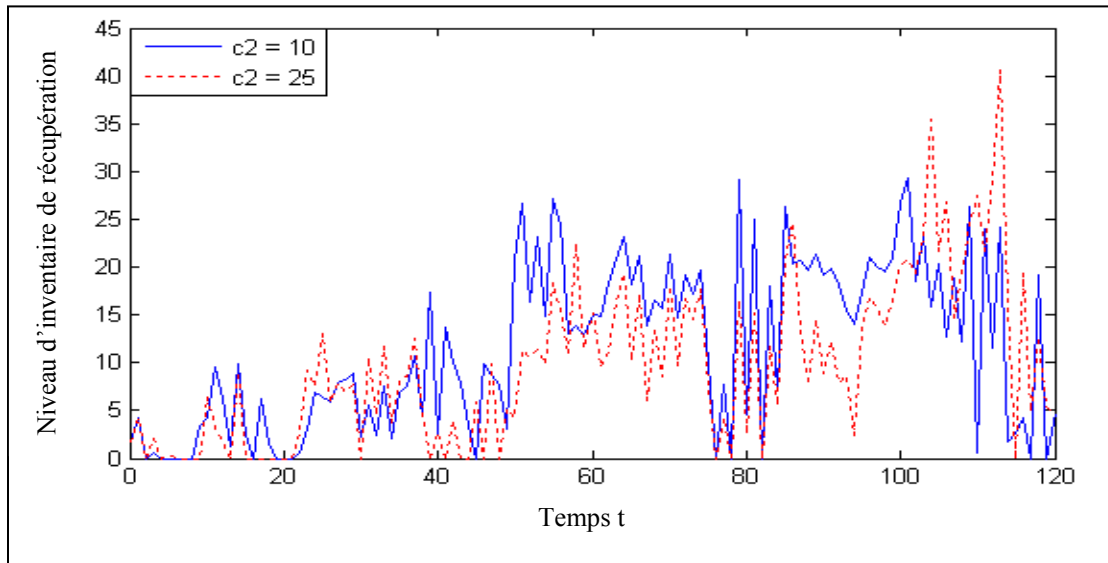


Figure 4.12 Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de réutilisation

Selon les figures (4.11), (4.12) et le tableau (4.3) (cas numéro 3, 4), le niveau d'inventaire optimal désiré de service \bar{x}_1^* augmente lorsque c_2 augmente. C'est tout à fait normal, car lorsqu'on pénalise plus la réutilisation nous réusinons plus de pièces retournées en les stockant dans l'inventaire de service donc le niveau d'inventaire augmente. Le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait J_0^* diminue et le coût total moyen de déviation J^* augmente.

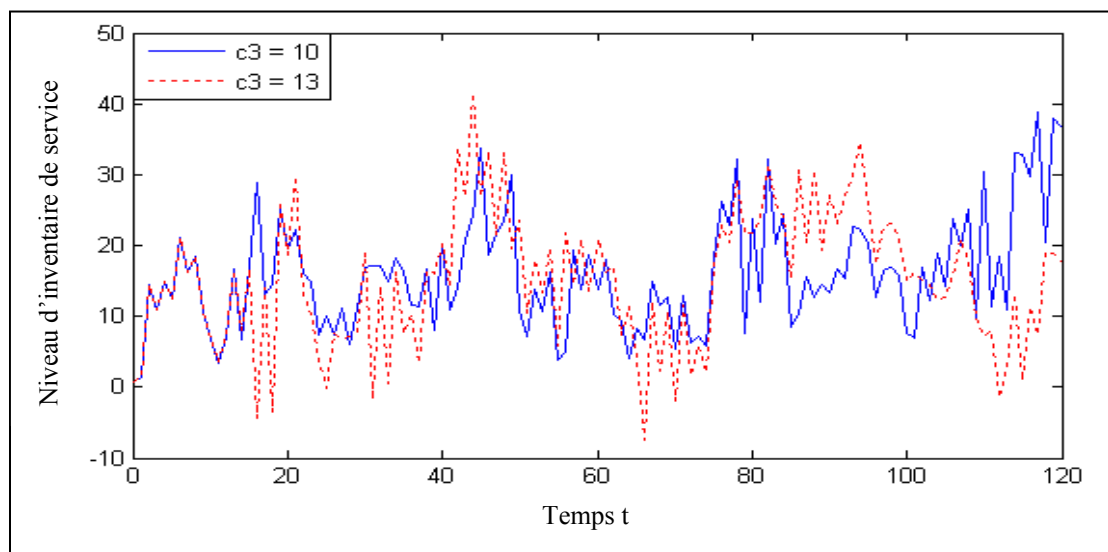


Figure 4.13 Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de retrait

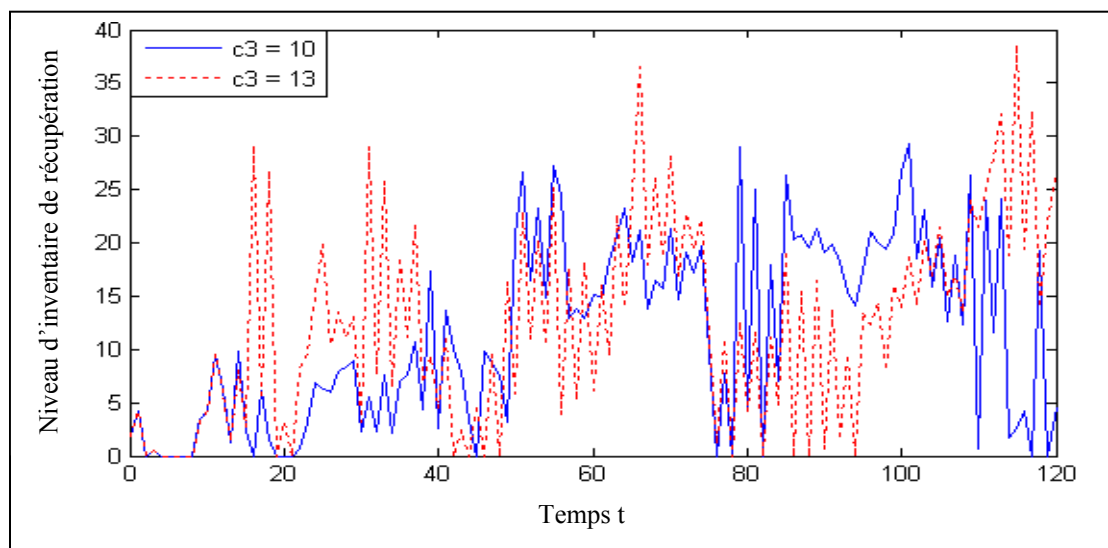


Figure 4.14 Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de retrait

D'après les figures (4.13), (4.14) et le tableau (4.3) (cas numéro 5, 6), nous observons que le niveau d'inventaire optimal désiré de service \bar{x}_1^* augmente en fonction de l'augmentation du facteur de pénalité de retrait. Ceci est dû au fait qu'on pénalise plus le retrait de la circulation des produits récupérés; ce qui entraîne automatiquement le rejet et la réutilisation d'un grand

nombre de pièces; il y aura donc plus d'inventaire. Le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait J_0^* diminue et le coût total moyen de déviation J^* augmente.

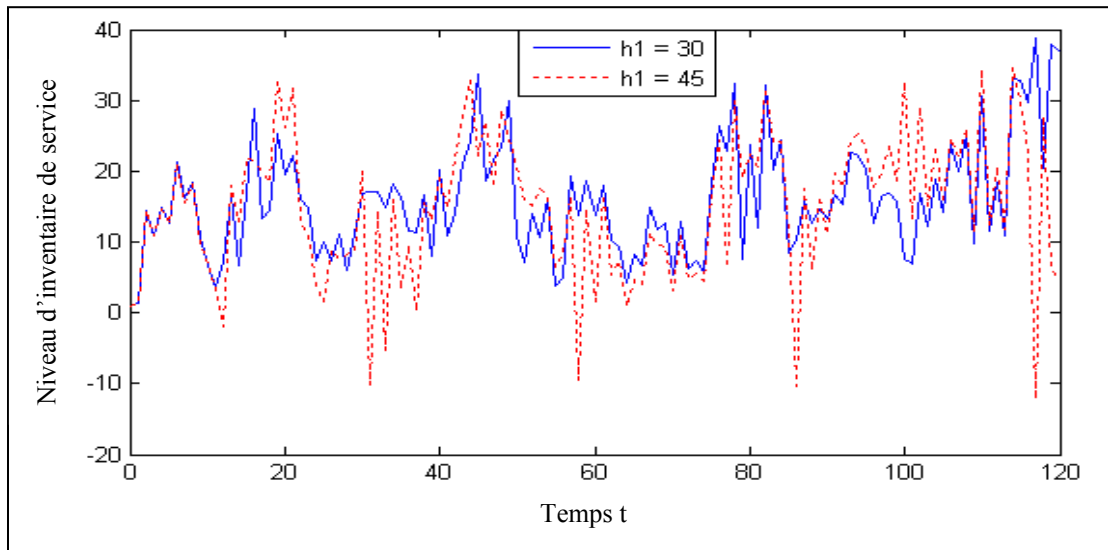


Figure 4.15 Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de service

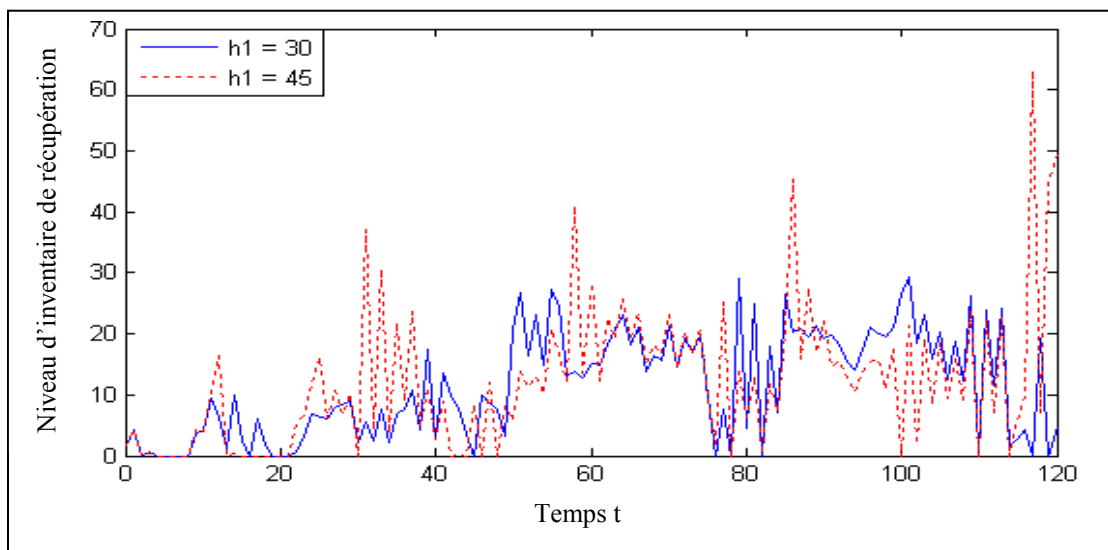


Figure 4.16 Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de service

Selon les figures (4.15), (4.16) et le tableau (4.3) (cas numéro 7, 8), nous remarquons l'influence de facteur de pénalité de l'inventaire h_1 sur le niveau d'inventaire de service. Plus h_1 augmente, plus le niveau d'inventaire optimal désiré de service \bar{x}_1^* diminue, ceci est logique étant donné qu'en pénalisant plus l'inventaire, on produit moins vite en satisfaisant une demande aléatoire. Comme résultat, il y aura donc moins de pièces en inventaire qui viennent des deux côtés (ligne directe et inverse) donc le niveau d'inventaire diminue. Le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait J_0^* augmente et le coût total moyen de déviation J^* diminue.

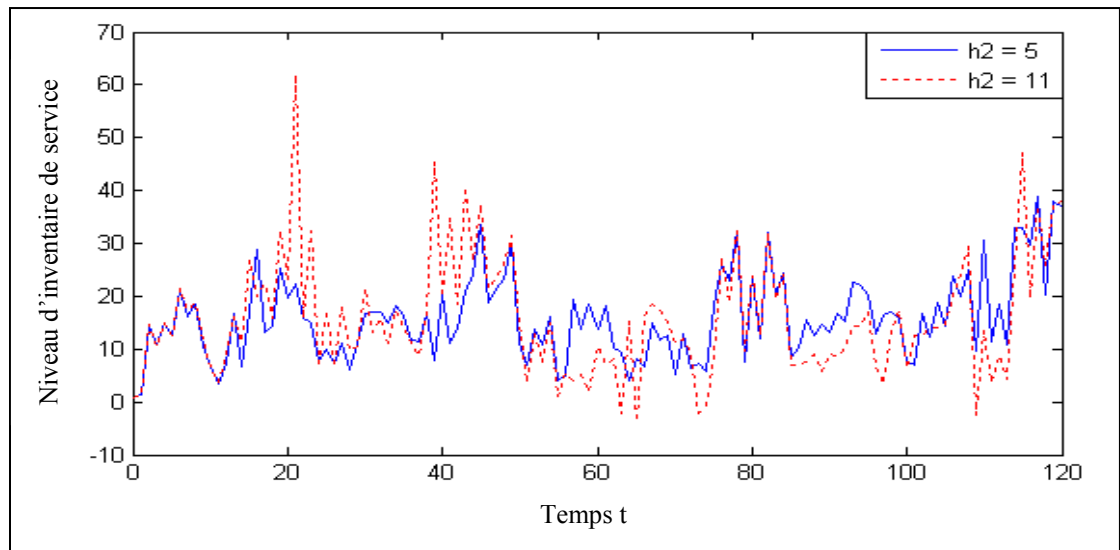


Figure 4.17 Inventaire de service en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de récupération

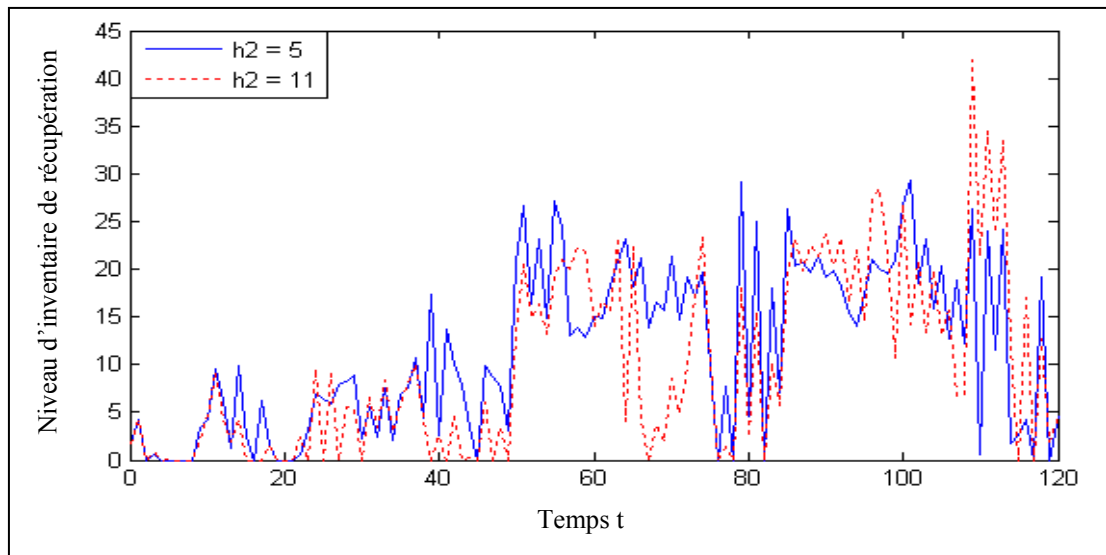


Figure 4.18 Inventaire de récupération en fonction du facteur de pénalité de l'inventaire de récupération

Nous remarquons, d'après les figures (4.17), (4.18) et le tableau (4.3) (cas numéro 9, 10) que lorsque h_2 (facteur de pénalité de l'inventaire de récupération) augmente, le niveau d'inventaire optimal désiré de service \bar{x}_1^* augmente. Si les pièces retournées gardées en inventaire de récupération sont beaucoup plus dispendieuses que des pièces gardées en inventaire de service, elles seront réutilisées et retirées de la bonne façon en entraînant l'augmentation de \bar{x}_1^* . Le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait J_0^* et le coût total moyen de déviation J^* augmentent.

Au niveau 2 de la hiérarchie proposée, des exemples numériques sont considérés afin de mesurer la sensibilité de la solution trouvée en suivant les trajectoires désirées par rapport à la variation des facteurs monétaires de déviation de production, de réutilisation, de retrait et des inventaires de service et de récupération (c_m, c_r, c_d, ch_1 et ch_2). Les variations suivantes sont illustrées dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4 Données des paramètres monétaires du deuxième niveau de la hiérarchie

No	c_1	c_2	c_3	h_1	h_2	c_m	c_r	c_d	ch_1	ch_2
11	120	10	10	30	5	30	10	15	1	0.5
12	120	10	10	30	5	85	10	15	1	0.5
13	120	10	10	30	5	50	5	15	1	0.5
14	120	10	10	30	5	50	15	15	1	0.5
15	120	10	10	30	5	50	10	10	1	0.5
16	120	10	10	30	5	50	10	25	1	0.5
17	120	10	10	30	5	50	10	15	0	0.5
18	120	10	10	30	5	50	10	15	1.5	0.5
19	120	10	10	30	2	50	10	15	1	0
20	120	10	10	5	1	50	10	15	1	1

Tableau 4.5 Effet des paramètres monétaires du deuxième niveau de la hiérarchie

No	\bar{P}_m^*	\bar{P}_r^*	\bar{P}_d^*	\bar{x}_1^*	\bar{x}_2^*	J_0^*	J^*	Remarque
11	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	738.50	J_0^* stable
12	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	733.65	J^* diminue
13	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	732.06	J_0^* stable
14	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	897.73	J^* augmente
15	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	638.18	J_0^* stable
16	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	847.68	J^* augmente
17	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	589.44	J_0^* stable
18	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	876.59	J^* augmente
19	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	678.99	J_0^* stable
20	5.3820	4.4990	2.2096	14.6233	6.6719	9366.9	746.50	J^* augmente

Selon les tableaux (4.5) et (4.6), les paramètres monétaires de déviation c_m, c_r, c_d, ch_1 et ch_2 ont une influence sur l'écart pour atteindre les objectifs désirés. Plus c_m augmente plus l'écart diminue et donc le coût total moyen de déviation diminue. Et plus c_r, c_d, ch_1, ch_2 augmentent plus l'écart augmente et plus le coût total moyen de déviation augmente.

Tableau 4.6 Effet de la déviation standard

σ_D	2.5	2.75	3	3.25	3.5	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5
\bar{P}_m^*	5.39	5.39	5.39	5.39	5.39	5.39	5.38	5.38	5.38	5.38	5.38
\bar{P}_r^*	4.88	4.84	4.80	4.75	4.70	4.65	4.60	4.55	4.50	4.45	4.40
\bar{P}_d^*	1.94	1.96	1.99	2.02	2.05	2.09	2.13	2.17	2.21	2.25	2.30
\bar{x}_1^*	26.07	25.21	24.10	22.74	21.26	19.67	17.99	16.28	14.62	12.92	11.12
\bar{x}_2^*	6.78	6.76	6.75	6.73	6.72	6.71	6.69	6.68	6.67	6.66	6.66
J_0^*	10276	10162	10047	9930.9	9815.7	9702.5	9591.9	9477.0	9366.9	9259.5	9153.5
J^*	1892.6	1730.2	1546.7	1352.9	1175.5	1020.7	891.43	789.13	731.90	693.06	683.49
J_T^*	12168.6	11892.2	11593.7	11283.8	10991.2	10723.2	10483.3	10266.1	10098.8	9952.6	9837

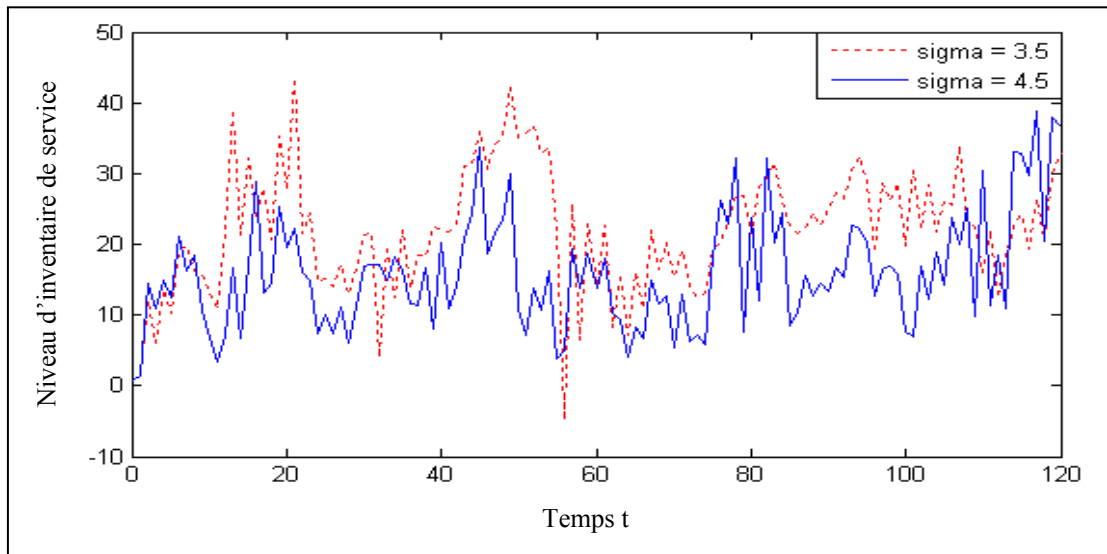


Figure 4.19 Inventaire de service en fonction de la déviation standard

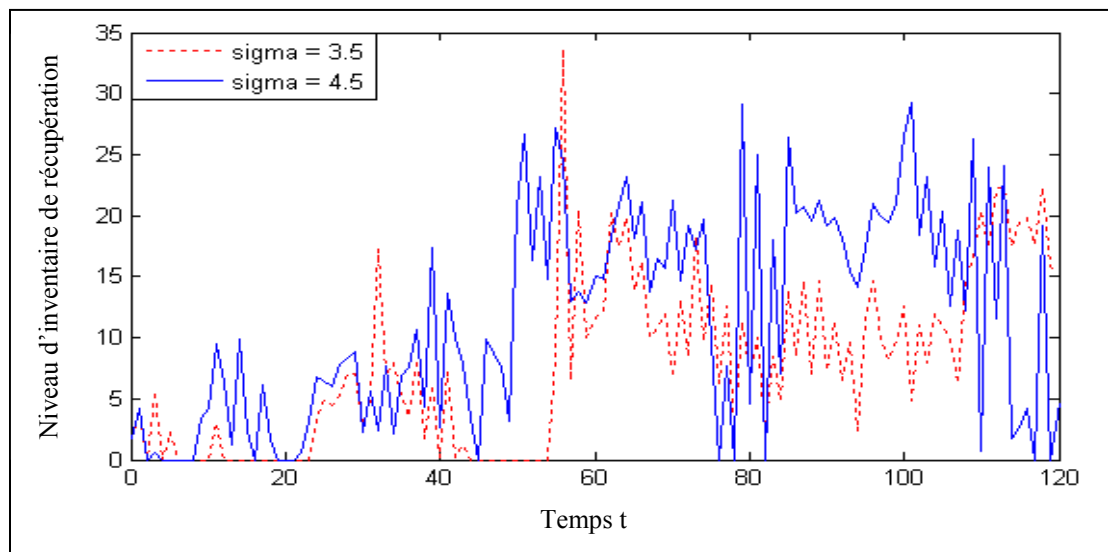


Figure 4.20 Inventaire de récupération en fonction de la déviation standard

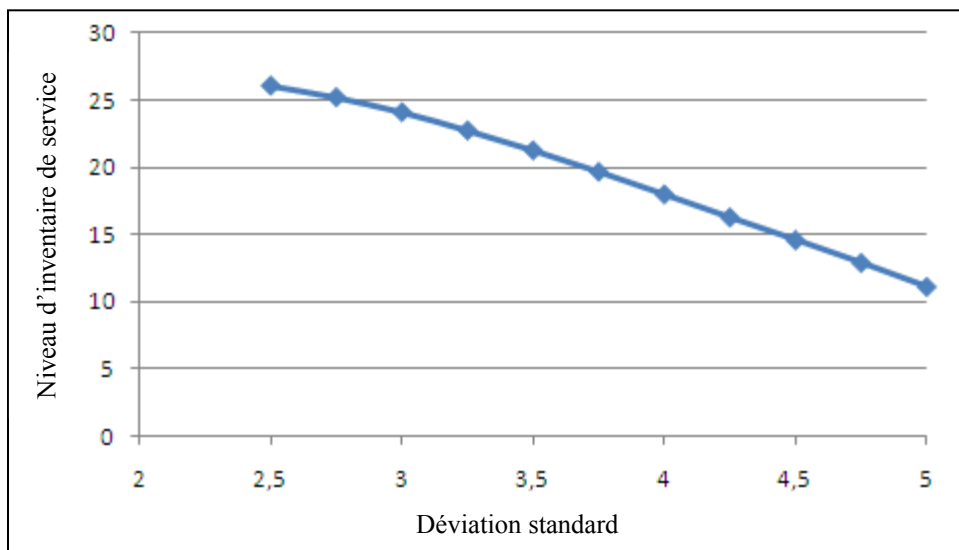


Figure 4.21 Niveau d'inventaire désiré de service en fonction de la déviation standard

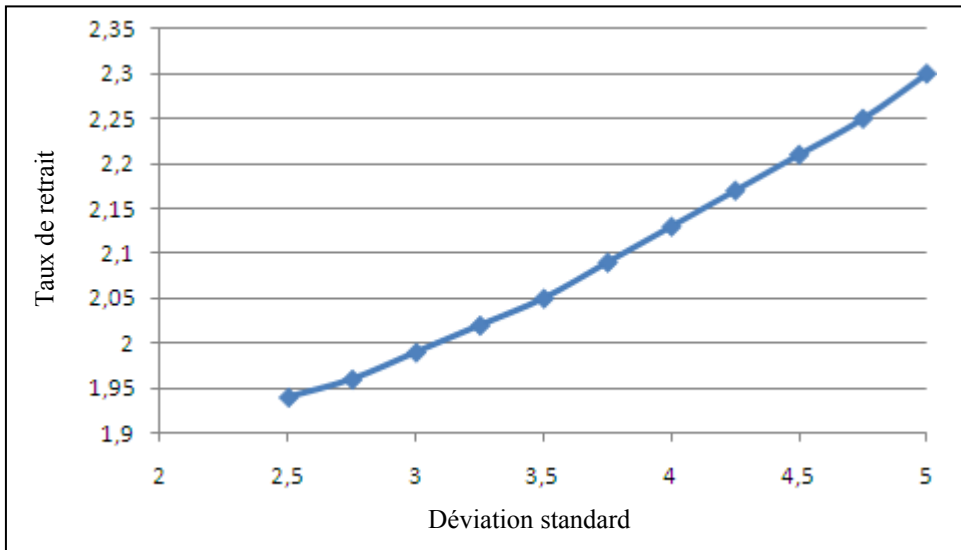


Figure 4.22 Taux de retrait désiré en fonction de la déviation standard

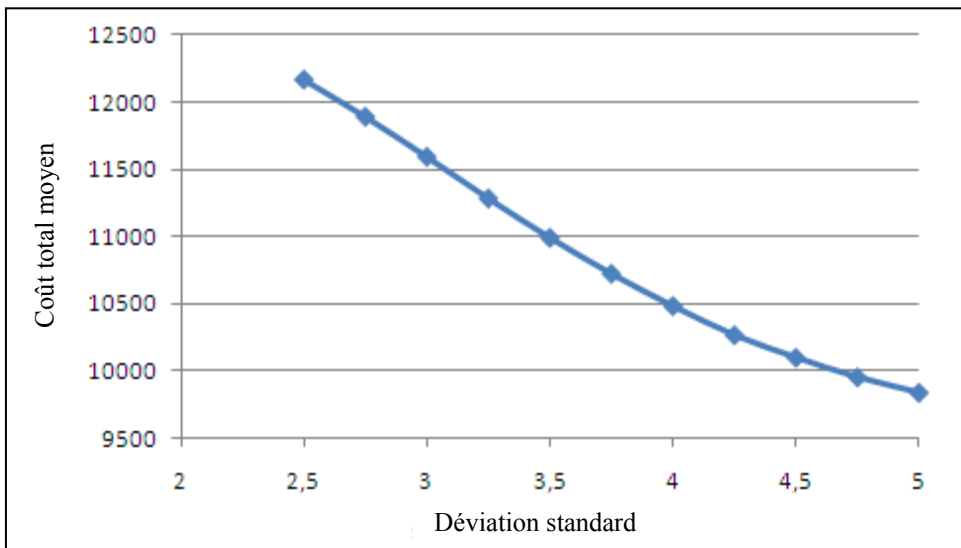


Figure 4.23 Le coût total moyen en fonction de la déviation standard

Nous remarquons selon les figures (4.19) à (4.23) et le tableau 4.6, que lorsque le facteur de déviation σ_D augmente, le niveau d'inventaire optimal désiré de service \bar{x}_1^* et le niveau d'inventaire optimal de service diminuent et le niveau d'inventaire optimal de récupération augmente. Lorsque σ_D diminue, le taux de demande du client augmente. Le retour des pièces

étant un pourcentage de la demande, augmente aussi systématiquement. Dans ce cas, on utilise plus souvent la boucle de retour pour satisfaire la demande aléatoire, ce qui entraîne l'augmentation de pièces à réusinier et la diminution de pièces à retirer. Donc le niveau d'inventaire de récupération diminue, ce qui fait augmenter le niveau d'inventaire de service et le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait et de déviation.

Tableau 4.7 Effet de la proportion des retours

$r \%$	65	70	75	80	85	90	95	100
\bar{P}_m^*	5.38	5.38	5.38	5.38	5.38	5.38	5.38	5.38
\bar{P}_r^*	4.43	4.50	4.56	4.60	4.64	4.66	4.68	4.70
\bar{P}_d^*	1.80	2.21	2.63	3.07	3.51	3.96	4.42	4.88
\bar{x}_1^*	10.02	14.62	18.34	21.10	23.37	24.95	25.94	26.81
\bar{x}_2^*	6.20	6.67	7.15	7.63	8.10	8.58	9.05	9.52
J_0^*	9474.3	9366.9	9302.4	9243.1	9237.9	9386.3	9550.3	9729
J^*	599.51	731.90	960.20	1215.4	1495.2	1717.2	1895.2	2221
J_T^*	10073.81	10098.8	10262.6	10458.5	10733.1	11103.5	11445.5	11950

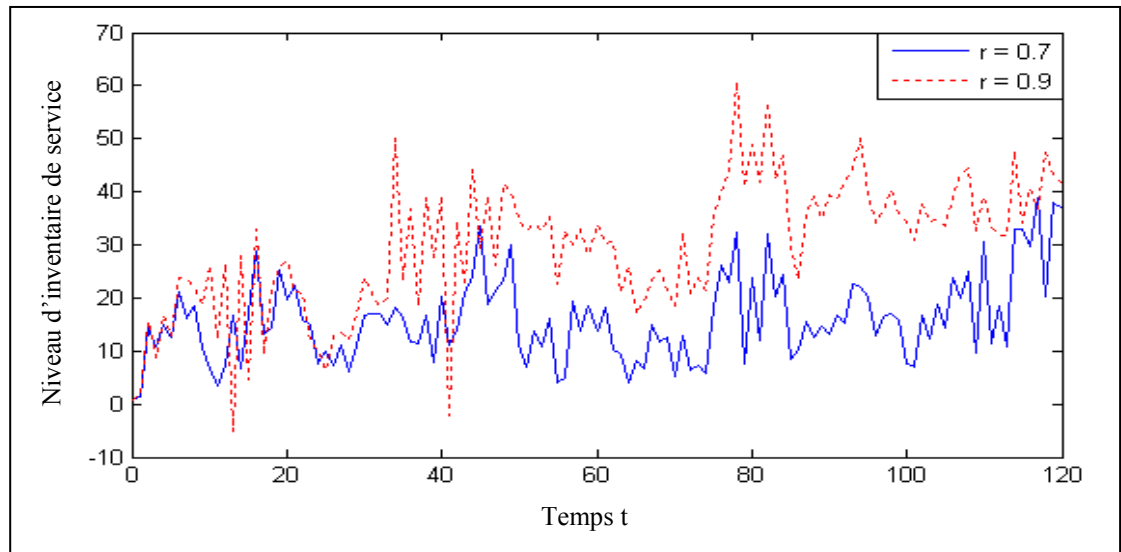


Figure 4.24 Inventaire de service en fonction de la proportion des retours

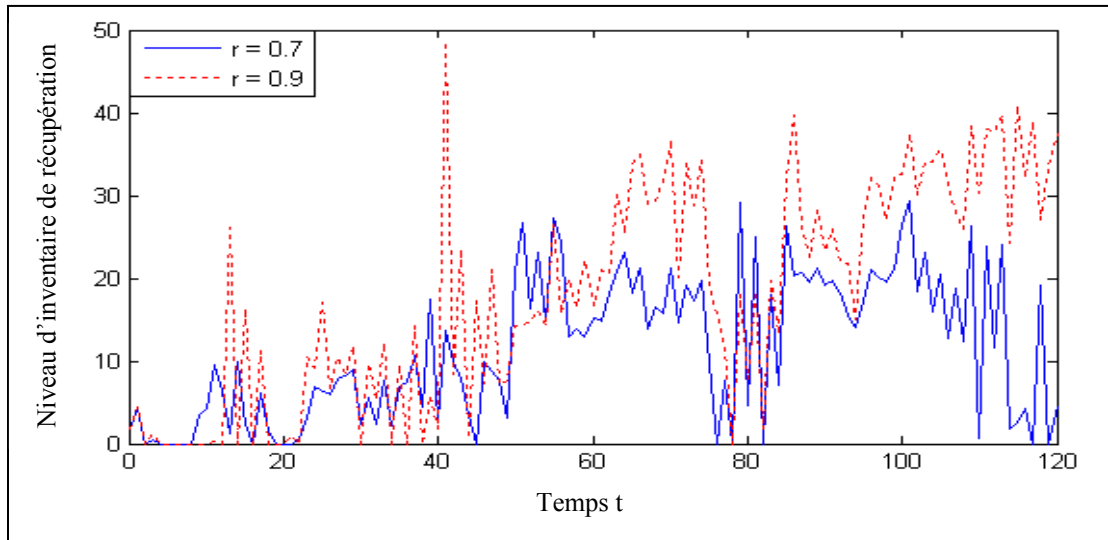


Figure 4.25 Inventaire de récupération en fonction de la proportion des retours

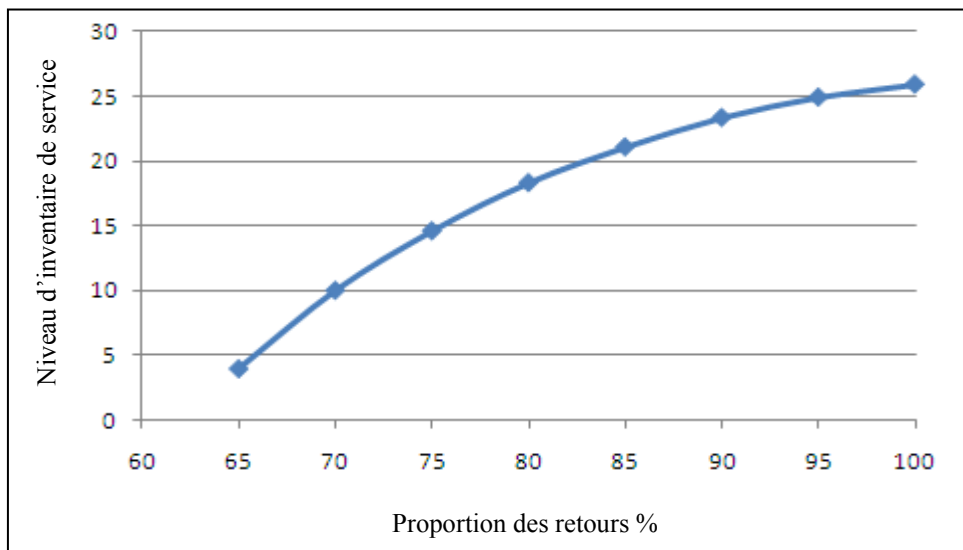


Figure 4.26 Niveau d'inventaire désiré de service en fonction de la proportion des retours

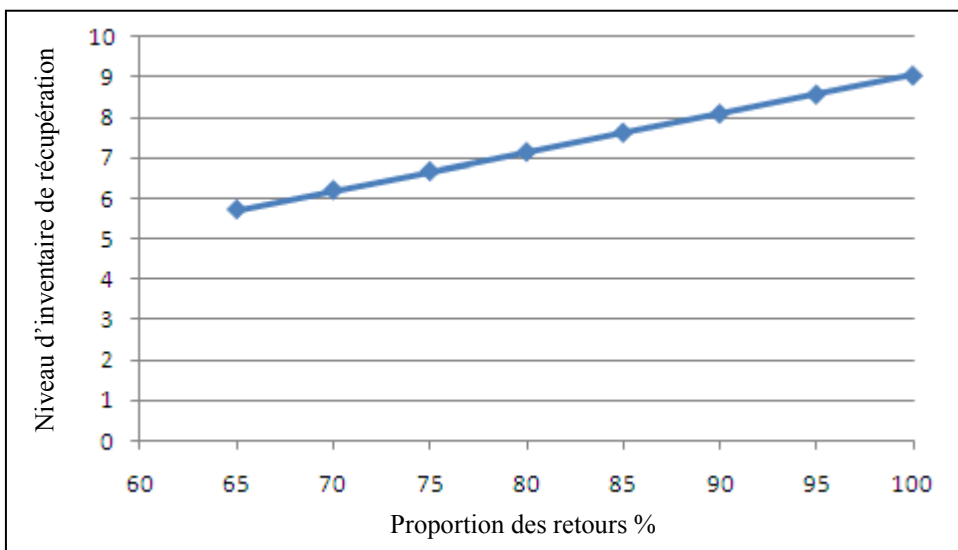


Figure 4.27 Niveau d'inventaire désiré de récupération en fonction de la proportion des retours

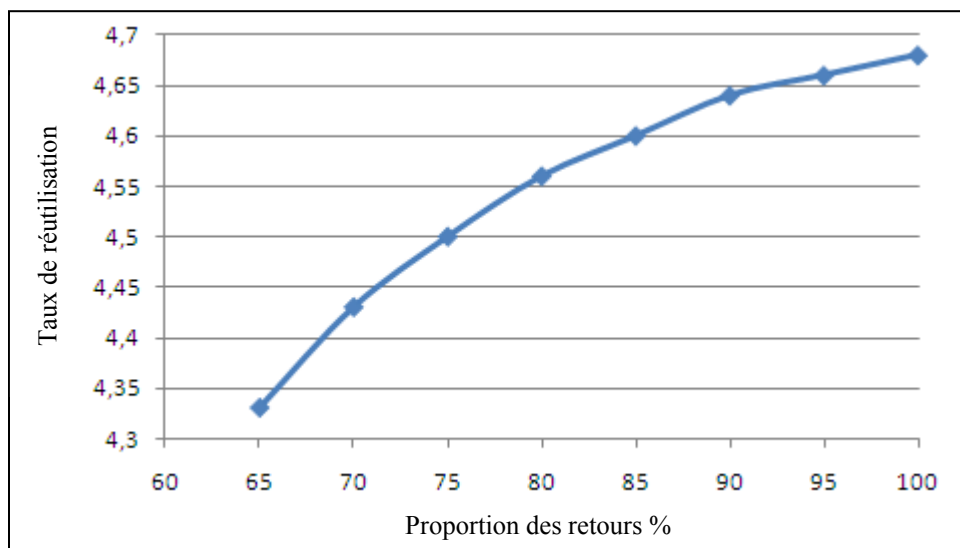


Figure 4.28 Taux de réutilisation désiré en fonction de la proportion des retours

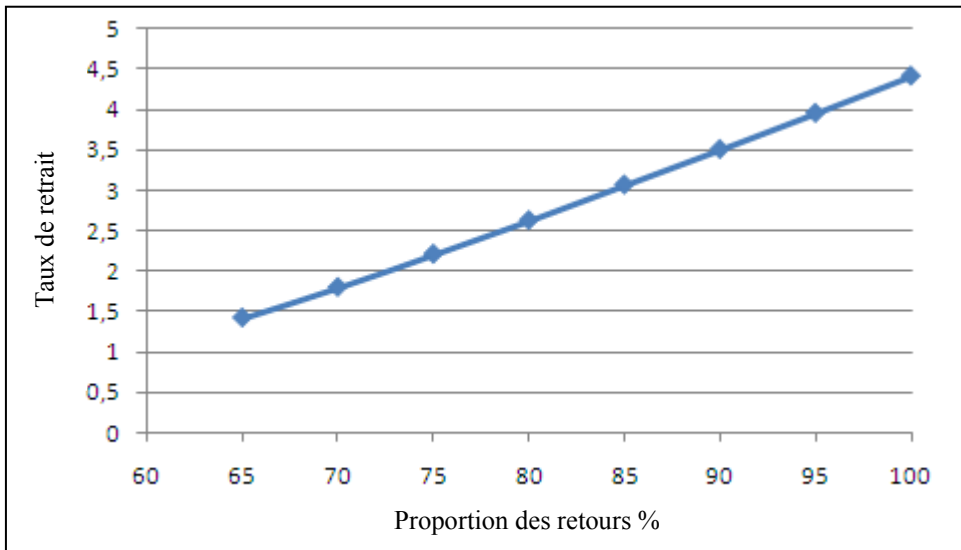


Figure 4.29 Taux de retrait désiré en fonction de la proportion des retours

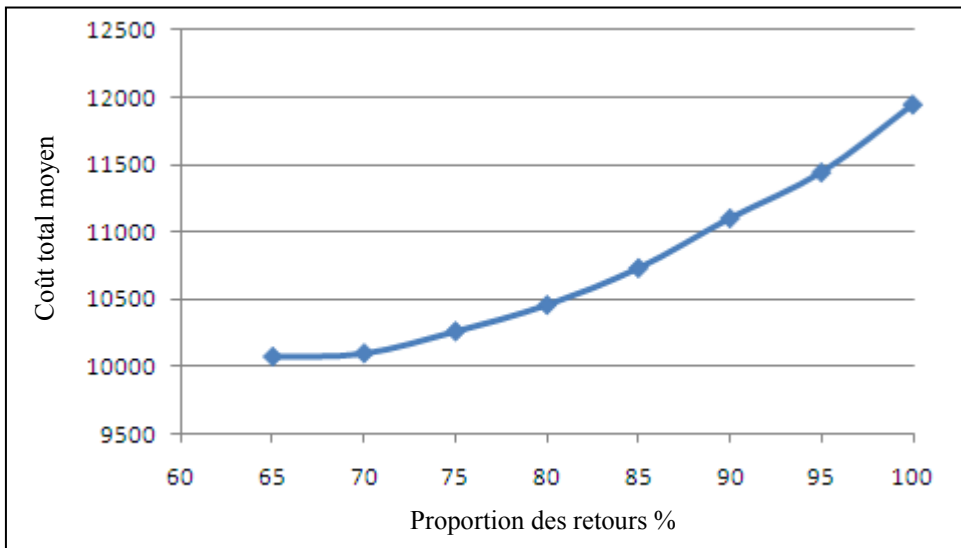


Figure 4.30 Le coût total moyen en fonction de la proportion des retours

Selon les figures (4.24) à (4.30) et le tableau (4.7), lorsque le pourcentage de retour augmente, les niveaux d'inventaire optimaux désirés de service \bar{x}_1^* et de récupération \bar{x}_2^* augmentent. Les niveaux d'inventaire optimaux de service et de récupération augmentent aussi étant donné que nous avons plus de pièces retournées par le client en inventaire. Il y

aura plus de pièces à réusiner et à retirer, ce qui augmente le niveau d'inventaire de service. Donc le coût total moyen d'inventaire, de production, de réutilisation, de retrait et de déviation augmente.

4.6 Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté une approche de commande optimale stochastique hiérarchisée à deux niveaux pour un système hybride production-réutilisation en logistique inverse composé de deux machines traitant un seul type de produit caractérisé par une demande et un retour aléatoires. Dans un premier niveau, nous avons formulé un problème de commande linéaire quadratique stochastique dans le but d'obtenir des stratégies de commande optimale pour les taux désirés de production, de réutilisation et de retrait et les niveaux d'inventaire désirés de service et de récupération. Dans un deuxième niveau, un problème de commande prédictive stochastique est formulé pour déterminer des stratégies de commande optimale afin de suivre le plus proche possible les cibles désirées en satisfaisant la demande aléatoire tout en minimisant le coût total moyen quadratique d'inventaire, de production, de réutilisation et de retrait et le coût de déviation.

Les solutions des problèmes d'optimisation formulés aux niveaux 1 et 2 de l'approche hiérarchisée proposée ont été obtenues par application du principe du maximum de Pontryagin en stochastique et l'utilisation du schéma numérique d'Euler-Maruyama. Un exemple numérique avec une analyse de sensibilité ont permis de montrer la robustesse et la qualité de la solution trouvée par l'approche proposée. L'extension de ce travail sera considérée comme un sujet de recherche futur en prenant en compte un retour aléatoire qui suit une autre loi de probabilité que celle de la demande ainsi les pannes de machines.

CONCLUSION

Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes intéressés à la commande optimale stochastique des systèmes manufacturiers avec contraintes. Nous avons développé une approche de commande hiérarchique de deux niveaux basée sur le principe du maximum de Pontryagin. Cette méthode est appliquée aux problèmes d'optimisation dans la planification de la production en présence d'incertitudes de la demande des clients selon l'évolution du marché. La solution est obtenue numériquement en utilisant le schéma d'Euler-Maruyama à l'aide de l'outil MATLAB.

Dans un premier temps, le système de production est composé d'une machine produisant un seul type de produit avec une demande aléatoire. Nous avons formulé un problème de commande optimale stochastique linéaire-quadratique pour calculer de façon optimale dans le premier niveau de la hiérarchie proposée, les valeurs cibles des variables d'état (niveau d'inventaire désiré) et de décision (taux de production désiré). Dans le deuxième niveau de la hiérarchie proposée un problème de commande en optimisation récursive est formulé pour suivre au plus proche les trajectoires désirées.

Dans un second temps, nous avons appliqué cette approche hiérarchique sur un système de production en boucle fermée lorsqu'on fait appel à l'intégration de la logistique inverse pour prendre en compte le retour des produits. Dans ce cas le système hybride considéré est composé de deux machines fiables produisant le même type de produit. La demande du client et le retour des produits sont considérés aléatoires. Nous avons obtenu dans le premier niveau de la hiérarchie les politiques de commande optimale pour les taux désirés de production, de réutilisation et de retrait ainsi que les niveaux d'inventaire désirés de service et de récupération. Dans un deuxième niveau, nous avons déterminé des stratégies de commande optimale afin de maintenir les taux de production, de réutilisation et de retrait actuels, les niveaux d'inventaire de service et de récupération les plus proches possibles des objectifs désirés.

L'interprétation des principaux résultats de ce travail montrent la qualité et la robustesse de la solution optimale trouvée par l'approche proposée pour résoudre les problèmes d'optimisation stochastique en temps continu. Elle satisfait la demande aléatoire du client et gère les inventaires tout en minimisant le coût total moyen quadratique et la somme des déviations moyennes quadratiques d'inventaire de service et de production ou d'inventaire de récupération, de réutilisation et de retrait en logistique inverse.

Ce travail constitue une étape importante pour de futurs travaux. Pour des recherches plus approfondies, il pourrait être intéressant de prendre en compte dans les problèmes rencontrés de commande stochastique des systèmes de planification de la production d'autres caractéristiques qui permettent une meilleure optimisation de la chaîne logistique et s'approcher de la réalité industrielle. A titre d'exemples, prenons les pannes et les réparations des machines qui sont des facteurs récurrents et qui influencent la cadence de production. Comme autre exemple, nous pouvons aussi voir la fluctuation du retour des produits qui est en général un pourcentage de la demande aléatoire comme dans le cas présenté dans ce mémoire. Il peut parfois être indépendant de cette demande, car il suit une autre loi de probabilité que celle de la demande du client. Nous pouvons aussi intégrer la qualité des produits dans le modèle mathématique en analysant les retours afin d'atteindre les principaux objectifs de l'entreprise en coût, productivité et satisfaction à la clientèle. Il y aura également l'intérêt d'explorer l'espace de recherche et d'appliquer cette approche hiérarchique à d'autres modèles tels que M1P2 (une machine produisant deux types de produits), M2P2 (deux machines produisant deux types de produits) ou encore au cas plus complexe de M_nP_m (plusieurs machines produisant plusieurs types de produits).

Finalement, les résultats obtenus dans le cadre du mémoire de maîtrise m'ont permis de publier des articles dans des revues internationales avec comité de lecture. Le premier article (Voir Annexe IV, p. 123), écrit par Samir Ouaret, Jean-Pierre Kenné et Ali Gharbi a été accepté et publié dans *The Electronic International Journal Advanced Modeling and Optimization*. Intitulé « Hierarchical control of production with stochastic demand in manufacturing systems ». Volume 13, Number 3, pp. 419-443, ISSN: 1841-4311, 2011. Un

autre article est en cours de préparation portant sur les systèmes hybrides fabrication-réutilisation en logistique inverse.

ANNEXE I

SIMULATION NUMERIQUE DE L'EQUATION D'ETAT STOCHASTIQUE

L'équation d'état stochastique du niveau d'inventaire $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = u(t) - d(t) \quad (\text{A I-1})$$

Nous pouvons simuler numériquement J^* utilisant le schéma d'Euler-Maruyama. Nous approchons :

$$x_{t+dt} = x_t + \int_t^{t+dt} u(v) dv - \int_t^{t+dt} d(v) dv \quad (\text{A I-2})$$

$$= x_t + \int_t^{t+dt} u(v) dv - \int_t^{t+dt} (\mu_D(v) + \sigma_D \varepsilon(v)) dv \quad (\text{A I-3})$$

par

$$x_{t+dt} \approx x_t + (u_t - \mu_{Dt})dt + (-\sigma_D)\sqrt{dt}\varepsilon_t \quad (\text{A I-4})$$

nous obtenons :

$$y_{n+1} = y_n + (u_n - \mu_{Dn})dt + (-\sigma_D)\sqrt{dt}\varepsilon_n \quad (\text{A I-5})$$

nous définissons la position d'inventaire au début de la période n après la décision (Kiesmüller, 2003) comme :

$$y_s = y_n + u_n dt \quad (\text{A I-6})$$

Le schéma numérique d'Euler-Maruyama considère que les intégrands sont constants sur l'intervalle d'intégration et la demande aléatoire d_n est normalement distribuée et indépendante de la variance du temps dt (Barra, 2005). Nous pouvons écrire y_{n+1} comme :

$$y_{n+1} = y_s - (\mu_{Dn}dt + \sigma_D\sqrt{dt}\varepsilon_n) \quad (\text{A I-7})$$

ANNEXE II

FORMULATION MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS OBJECTIVES

La somme des erreurs quadratiques moyennes d'inventaire et de production à minimiser peut s'écrire sous cette forme :

$$J^* = \text{Min } E\{J\} = E \left\{ \int_0^T \left[\frac{1}{2} c_h \cdot (x^*(v) - \bar{x}^*)^2 + \frac{1}{2} c_m \cdot (u^*(v) - \bar{u}^*)^2 \right] \cdot dv \right\} \quad (\text{A II-1})$$

$$= \int_{d_1} \int_{d_2} \dots \int_{d_n} \left(\int_0^T \left[\frac{1}{2} c_h \cdot (x^*(v) - \bar{x}^*)^2 + \frac{1}{2} c_m \cdot (u^*(v) - \bar{u}^*)^2 \right] \cdot dv \right) \cdot g(d_1) \cdot g(d_2) \dots g(d_n) d(d_1) d(d_2) \dots d(d_n) \quad (\text{A II-2})$$

Simuler numériquement J^* utilisant le schéma d'Euler-Maruyama, on obtient :

$$J^* = E \left\{ \int_0^T \left[\frac{1}{2} c_h \cdot (y_s(v) - (\mu_{Dn} dv + \sigma_D \sqrt{dv} \varepsilon_n) - \bar{x}^*)^2 + \frac{1}{2} c_m \cdot (u^*(v) - \bar{u}^*)^2 \right] \cdot dv \right\} \quad (\text{A II-3})$$

$$J^* = \int_0^T \frac{1}{2} c_h \cdot (y_s(v) - \bar{x}^*)^2 dv + \int_0^T \frac{1}{2} c_m \cdot (u(v) - \bar{u}^*)^2 \cdot dv + \sum_{j=1}^n (-c_h) (y_s(j) - \bar{x}_j^*) (\mu_{Dj} dt + \sigma_D dw(j)) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} c_h \right) (\mu_{Dj} dt + \sigma_D dw(j))^2 \quad (\text{A II-4})$$

Le coût total moyen quadratique d'inventaire et de production à minimiser peut être écrit dans la même forme que la dernière :

$$\begin{aligned}
J_0^* = & \int_0^T \frac{1}{2} h. (y_s(v))^2 dv + \int_0^T \frac{1}{2} c. (u(v))^2 . dv + \sum_{j=1}^n (-h) y_s(j) (\mu_{Dj} dt \\
& + \sigma_D dw(j)) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} h \right) (\mu_{Dj} dt + \sigma_D dw(j))^2
\end{aligned} \tag{A II-5}$$

où dt : le pas de discrétisation, g : la fonction de densité de probabilité de la demande et la dynamique de l'état discrétisé :

$$y_{n+1} = y_n + u_n dt - dn. dt = y_s - dn. dt \tag{A II-6}$$

ANNEXE III

METHODE DE TIR

Un problème de planification de la production peut être formulé comme un problème de commande optimale où les conditions nécessaires d'optimalité de la commande sont obtenues par application du principe du maximum de Pontryagin. On parle alors d'un problème aux valeurs limites.

Prenons l'exemple suivant d'un problème de commande optimale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \left\{ J = \int_0^T \phi(x(t), u(t), t) dt \right\} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \end{array} \right. \quad (\text{A III-1})$$

La fonction Hamiltonienne du système :

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \phi(x(t), u(t), t) + p(t)f(x(t), u(t), t) \quad (\text{A III-2})$$

et les conditions nécessaires d'optimalité du problème aux valeurs limites données par le principe du maximum de Pontryagin sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial p} = f(x^*(t), u^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x} \\ \frac{\partial H^*}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) \text{ minimise } H(x^*(t), u, p^*(t), t) \text{ avec } u \in U \\ x^*(0) = x_0; \quad x^*(T) = x_T \\ p^*(T) = \text{pas de condition} \end{array} \right. \quad (\text{A III-3})$$

Ce problème peut être résolu numériquement en utilisant la méthode de tir simple qui permet de réduire le problème aux valeurs limites à un problème aux valeurs initiales. Il suffit donc de trouver la solution de la valeur initiale de l'état adjoint z_0 qui est la solution qui satisfait l'équation $W(z_0) = 0$. Elle est définie comme suit :

Soit :

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z_0 &\mapsto W(z_0) = y_1(T; 0, z_0) - x_T \end{aligned} \quad (\text{A III-4})$$

Supposant que $y(t)$, une fonction de l'état et de l'état adjoint comme dans (Stoer et Bulirsch, 1993) « $y^*(\cdot; 0, z_0)$ est l'unique solution du problème suivant de Cauchy-Lipschitz (un problème aux valeurs initiales) sur l'intervalle $[0, T]$ avec la 1ère condition initiale est appelée la condition de Dirichlet et la 2ème est celle de Neumann ». Ce qui signifie que cette solution converge uniformément vers la solution qui satisfait la condition aux limites du problème obtenu par le principe du maximum de Pontryagin $y_1^*(T) = y_1^*(T; 0, z_0) = x_T$.

Problème aux valeurs initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial y_2} = f(y_1^*(t), u^*(t), t) \\ \dot{y}_2^*(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial y_1} \\ u^*(t) \text{ minimise } H(y_1^*(t), u, y_2^*(t), t) \text{ avec } u \in U \\ y_1^*(0) = x_0 \\ y_2^*(0) = z_0 \end{array} \right. \quad (\text{A III-5})$$

ANNEXE IV

**ARTICLE ACCEPTE ET PUBLIE DANS THE ELECTRONIC INTERNATIONAL
JOURNAL ADVANCED MODELING AND OPTIMIZATION**

Hierarchical control of production with stochastic demand in manufacturing systems

Samir Ouaret¹, Jean-Pierre Kenné¹, Ali Gharbi²

¹Mechanical Engineering Department, Laboratory of Integrated Production Technologies,
University of Quebec, École de technologie supérieure, 1100, Notre Dame Street West,
Montreal (Quebec), Canada, H3C 1K3

Samir.ouaret.1@ens.etsmtl.ca

Jean-pierre.kenne@etsmtl.ca

²Automated Production Engineering Department, Production System Design and Control
Laboratory, University of Québec, École de technologie supérieure, 1100, Notre Dame Street
West, Montreal (Quebec), Canada, H3C 1K3

Ali.gharbi@etsmtl.ca

Abstract

This paper addresses a stochastic optimal control problem for a reliable single-product manufacturing system with a finite capacity. The demand by customers is stochastic in a finite planning horizon, and is described by a known continuous function. A two-level hierarchical control model is developed. In the first level, a stochastic linear-quadratic optimal control problem is formulated to determine the target values of the state and control variables, with the variables being the desired inventory level and desired production rate, respectively. The goal of the second level is to maintain the inventory as close as possible to its desired level as well as to maintain the production rate as close as possible to its desired rate with fluctuating demand. This problem is represented as a recursive optimization control problem (predictive control) with one state variable (the inventory level) and one control variable (the production rate). The purpose of this study is to establish the optimal production control strategies satisfying a stochastic demand that minimizes the total average quadratic cost and the sum of the mean square deviations of inventory and production for the first and second levels, respectively. The solution is obtained by applying the stochastic optimal control principle based on Pontryagin's maximum principle using the Euler-Maruyama scheme. A numerical example and sensitivity analyses are presented to illustrate the usefulness of the proposed approach.

Keywords: Manufacturing systems; Stochastic optimal control; Stochastic demand; Pontryagin's maximum principle; Euler-Maruyama scheme; Shooting methods.

1. Introduction

Generally, a manufacturing system inventory is very important as it allows the company to respond more quickly to customer demand, given that the demand rate of manufacturing produced parts is usually stochastic. In this study, the system considered is composed of one machine producing a single type of product. A stochastic production planning problem can be formulated as a stochastic optimal control problem, which involves finding the optimal production strategy to be used in managing the inventory of the system and satisfy the customer's stochastic demand over the planning horizon.

The last two decades have seen a jump in growing interest among researchers in the application of the stochastic optimal control theory in different fields. Initially used in engineering and other fields of applied mathematics, the stochastic optimal control theory is also generally used in finance, economics, medicine, maintenance and production planning to solve a variety of problems. A classic example of a stochastic optimal control problem class is portfolio allocation with a consumption rate, which was introduced by Merton (1971). Many authors have attacked the research direction adopted for production planning in manufacturing systems. The literature on the subject includes, for example, the first contribution in the field that derived the control strategies of a quadratic model (Holt et al., 1960) using the calculus of variation principle. Bensoussan et al. (1974) presented some applications of the optimal control theory using the maximum principle to management science and economics, as well as the discrete and continuous stochastic optimal control versions addressed by Sethi et al. (1981, 2000).

Tzafestas et al. (1997) introduced and clarified the concept of model-based predictive control (MBPC) for integrated production planning problems in a stochastic environment. Dobos (2003) investigated the deterministic optimal production and inventory of the HMMS (Holt, Modigliani, Muth and Simon) model. This is considered as a generalization of the Holt et al. (1960) model, which was analysed by El-Gohary et al. (2009), using Pontryagin's maximum principle to determine the optimal control policies. El-Gohary et al. (2007) studied the problem of stochastic production and inventory planning using stochastic optimal control. Based on such studies, we are especially interested in the modelling of a production planning problem in a stochastic environment using the stochastic Pontryagin's maximum principle.

The main objective of this study is to employ a two-level hierarchical control model (as in Kenné and Boukas, 2003), using the stochastic optimal control principle, to optimally solve the following two problems:

- In the first level of the proposed hierarchy, the desired inventory threshold (the safety stock level that the company wants to keep on hand) and the desired production rate (the most efficient rate desired by the firm) are determined.
- In the second level of the proposed hierarchy, the goal will be to keep the inventory level as close as possible to the desired inventory threshold and the rate of production as close as possible to the desired production rate.

This objective will allow the minimization of the total average quadratic cost and the sum of mean square deviations of inventory and production for the first and the second levels, respectively.

In the present research, to solve the stochastic production planning problem in continuous time, we propose a two-level hierarchical control approach. We assume that the product demand rate is stochastic over time, and at both levels, it is assumed that the values of the control variables are restricted; moreover, there are no restrictions on the state variables. The production rate is thus defined as varying in a given control region and the inventory level is allowed to be positive (inventory) or negative (backlogged demands). By applying Pontryagin's maximum principle (Pontryagin et al., 1962) and using the quadratic objective function of Holt et al. (1960), we can formulate the boundary value problems in the first and second levels. We may recall that the first level is based on the formulation of a stochastic linear-quadratic model (SLQM) to find the optimal desired production rate and inventory level over the planning horizon, that minimize the total average quadratic inventory and production cost.

The second level is devoted to a recursive optimization control problem (predictive control) to find the optimal production rate needed to bring the inventory level from the initial point to one which satisfies the demand rate, but at the same time, minimizes the sum of mean square deviations of inventory and production. The solutions are obtained numerically using the Euler-Maruyama scheme.

This paper is organized as follows. In section 2, we define the assumptions used in the model and provide the problem statement. Based on the stochastic Pontryagin's maximum principle, we present the solution of the hierarchical control model in section 3. A numerical example is given in section 4. Sensitivity and results analyses are provided in section 5, and finally, section 6 closes the paper with some concluding remarks.

2. Production control model

2.1. Notations and assumptions

The following notations are used throughout the paper:

T : length of the planning horizon, ($T > 0$),

x^0 : desired initial inventory level,

x_0 : initial inventory level,

$x(t)$: inventory level at time t ,

$\bar{x}(t)$: desired inventory level at time t ,

$\bar{u}(t)$: desired production rate at time t , ($\bar{u}(t) \geq 0$),

$d(t)$: demand rate at time t ,

c : penalty factor of production, ($c > 0$),

h : penalty factor of inventory ($h > 0$),

c_m : deviation factor for the production rate to deviate from its desired rate \bar{u} , ($c_m > 0$),

c_h : deviation factor for the inventory level to deviate from its desired level \bar{x} , ($c_h > 0$),

$u(t)$: production rate at time t , ($u(t) \geq 0$),

U_{\max} : maximum production rate,

σ_D : standard deviation of demand rate,

w : standard Wiener process,

g : diffusion coefficient.

In this model, we assume that:

- (1) The production rate is to be non-negative.
- (2) The inventory level is allowed to be negative (backlogged demands).
- (3) The planning horizon is finite in continuous time.

(4) The demand rate is assumed to be described by the following time-dependent model (Kiesmüller, 2003):

$$d(t) = \mu_D(t) + \sigma_D \varepsilon(t),$$

where the parameter $\mu_D(t)$ is a deterministic known parameter, and σ_D is also a known non-negative parameter. It is assumed that $\varepsilon(t)$ is the white noise, a normally distributed random variable in time t with zero mean and unity variance: $\varepsilon(t) \sim N(0, 1)$ and $E[\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)] = 0$ for $t_1 \neq t_2$. We can therefore write the demand rate as a normally distributed function: $d(t) \sim N(\mu_D(t), \sigma_D^2)$.

2.2. Problem statement

In this section, we describe a stochastic hierarchical model. The system considered is composed of a single reliable machine producing one type of product, with the demand rate capable of being fulfilled with time. The situation is illustrated in Figure 1.

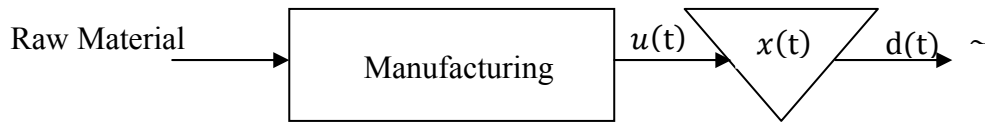


Figure 1. Structure of the system

First, we will consider the following stochastic linear-quadratic optimal control problem (denoted (P_0)) of the stochastic desired production planning problem, with one state variable (desired inventory level) and with one control variable (desired production rate). The objective of the firm is to find the desired optimal production rate needed to bring the inventory level from the initial point to a point satisfying the demand rate which minimizes the total average quadratic inventory and production cost.

The objective function to minimize (see Appendix A) is given by:

$$\text{minimize } J_0(x^0, u) = E \left\{ \int_0^T \phi_0(x, u, t) dt + K_0(x(T), T) \right\}, \quad (1)$$

$$\text{where } \phi_0(x, u, t) = \frac{1}{2}hx(t)^2 + \frac{1}{2}cu(t)^2, \quad (2)$$

subject to:

the stochastic state equation of the inventory level $x(t)$,

$$\dot{x} = f(x, u, w, t) = f(x, u, t) + g\dot{w}, \quad (3)$$

and initial condition $x(0) = x^0$, where $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $x \in \mathbb{R}^n$

and the non-negativity constraint:

$$u(t) \geq 0, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \quad (4)$$

Secondly, the initial stochastic production planning problem can be represented as a stochastic optimal control problem denoted (P) with one state variable (inventory level) and with one control variable (production rate), which is to find the optimal production rate satisfying the demand rate over the planning horizon and minimizing the sum of the inventory and production costs. This objective function can be interpreted as meaning that penalty costs are incurred when the inventory level and the production rate deviate from their desired goals (Holt et al., 1960). The function was recently generalized by Dobos (2003).

The objective function for the minimization (see Appendix A) is given by:

$$\text{minimize } J(x_0, u) = E \left\{ \int_0^T \phi(x, u, t) dt + K(x(T), T) \right\}, \quad (5)$$

$$\text{where } \phi(x, u, t) = \frac{1}{2}c_h[x(t) - \bar{x}(t)]^2 + \frac{1}{2}c_m[u(t) - \bar{u}(t)]^2, \quad (6)$$

subject to:

the stochastic state equation of the inventory level $x(t)$:

$$\dot{x} = f(x, u, w, t) = f(x, u, t) + g\dot{w}, \quad (7)$$

and initial condition $x(0) = x_0$, where $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $x \in \mathbb{R}^n$.

and the non-negativity constraint:

$$u(t) \geq 0, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \quad (8)$$

The optimal control to find on $[0, T]$ is u^* to minimize the criterion J :

$$u^* = \min_{u \in [0, T]} J(x_0, u). \quad (9)$$

In the next section, we will use the above assumptions and Pontryagin's maximum principle to describe our approach to solving the optimal control problems.

3. Solution of the optimal control problems

The hierarchical structure of the proposed control approach is illustrated in Figure 2. Both control problems can be solved by applying the stochastic optimal control principle based on Pontryagin's maximum principle using the Euler-Maruyama scheme.

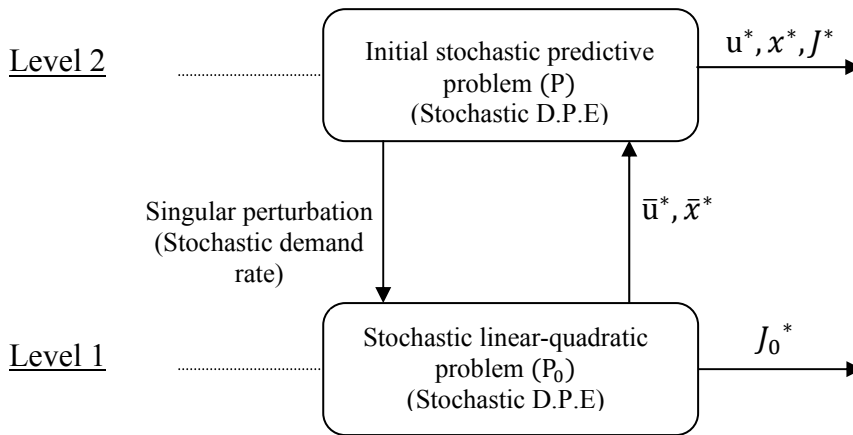


Figure 2. Hierarchical control approach

3.1. Solution of the optimal control problem (P0)

To find the solution of the stochastic linear-quadratic optimal control problem defined by (1) and (3), we will assume that $V(x, t)$, known as the value function related to the objective function (1) from t to T , is given by:

$$V(x, t) = \min_u E \left\{ \int_t^T \phi_0(x, u, t) dt + K_0(x(T), T) \right\}. \quad (10)$$

Let $t \in [0, T]$. The optimality principle of Bellman holds that the optimal trajectory over the interval $[0, T]$ contains the optimal trajectory over the interval $[t, T]$ with initial condition $x_1 = x(t)$. In other words:

$$V(x, t) = \min_u E\{\phi_0(x, u, t)dt + V(x + dx, t + dt)\}. \quad (11)$$

Applying the Taylor expansion:

$$V(x + dx, t + dt) = V(x, t) + V_t dt + V_x dx + \frac{1}{2} V_{tt} (dt)^2 + \frac{1}{2} V_{xx} (dx)^2 + V_{xt} dx dt + \dots, \quad (12)$$

after simplification, we neglect the higher-order terms (Davis, 1977) such as $(dt)^2$, $dw dt$ and replacing $(dw)^2$ with (dt) , we obtain the Itô formula

$$dV(x, t) = (V_t + V_x f + \frac{1}{2} g^2 V_{xx}) dt + V_x g dw, \quad (13)$$

and:

$$V(x, t) = \min_u E\left\{\phi_0 dt + V(x, t) + V_t dt + V_x f dt + \frac{1}{2} g^2 V_{xx} dt + V_x g dw + 0(dt)\right\}. \quad (14)$$

Given that the variables dw and x are independent, we can write:

$$E V_x g dw = E V_x g E dw = 0, \quad (15)$$

Hence, we can have the Hamiltonian-Jacobi-Bellman equation satisfied by the value function

$$0 = \min_u \left\{ \phi_0 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\}, \quad (16)$$

with boundary condition: $V(x, T) = K_0(x(T), T)$. (17)

To solve the nonlinear partial differential equation, we can approximate the value function by a quadratic polynomial and find the optimal coefficient of this polynomial. The proposed method is based on Pontryagin's maximum principle and the derivatives of the value function are obtained by the following adjoint equations for the stochastic optimal control problem:

$$p(t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = V_x(x, t); \quad p_x(t) = \frac{\partial p(t)}{\partial x} = V_{xx}(x, t) \quad (18)$$

The stochastic version of the optimality conditions can be obtained using the Hamiltonian function:

$$\begin{aligned}
-V_t &= \min_u \left\{ \phi_0(x, u, t) + V_x f + \frac{1}{2} g^2 V_{xx} \right\} \\
&= \min_u H(x, u, p, p_x, t).
\end{aligned} \tag{19}$$

We note that the Hamiltonian function in the deterministic version is:

$$H(x, u, p, t) = \phi_0(x, u, t) + V_x f, \tag{20}$$

and in the stochastic version is:

$$H(x, u, p, p_x, t) = H(x, u, p, t) + \frac{1}{2} g^2 V_{xx}, \tag{21}$$

with $H: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times u \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
H(x, u, p, p_x, t) &= H(x, u, p, t) + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g g^T\} \\
&= \phi_0(x, u, t) + f^T(x, u, t)p + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g(x, u, t)g^T(x, u, t)\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Assuming that we have an optimal control $u^*(x, p, p_x, t)$ which solves the stochastic optimal control problem:

$$H^*(x, p, p_x, t) = H(x, u^*(x, p, p_x, t), p, p_x, t) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_0(x, p, p_x, t) + f^T(x, p, p_x, t)p \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g(x, p, p_x, t)g^T(x, p, p_x, t)\}
\end{aligned} \tag{24}$$

$$= -V_t, \tag{25}$$

we can write the stochastic differential equation for the state

$$\begin{aligned}
dx &= f(x, u^*, t)dt + g(x, u^*, t)dw \\
&= H_p^*(x, p, p_x, t)dt + g(x, p, p_x, t)dw,
\end{aligned} \tag{26}$$

and for the adjoint, we use Itô's lemma (Cohn, 1980) to determine the process followed by $p(t)$

from (18)

$$dp = V_{xt}dt + V_{xx}dx + \frac{1}{2}V_{xxx}(dx)^2 \tag{27}$$

$$= \left[V_{xt} + V_{xx}f + \frac{1}{2} \text{tr}\{V_{xxx}g g^T\} \right] dt + V_{xx}g dw. \tag{28}$$

To obtain V_{xt} we use the partial derivative of V_t with respect to x

$$\begin{aligned} -V_{xt}(x, t) &= H_x^* + H_p^* \frac{\partial p}{\partial x} + H_{p_x}^* \frac{\partial p_x}{\partial x} \\ &= H_x^* + V_{xx}f + \frac{1}{2} \text{tr}\{V_{xxx}g g^T\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Substituting (29) into (28), we get

$$\begin{aligned} dp &= -H_x^* dt + V_{xx}g dw \\ &= -H_x^* dt + p_x g dw. \end{aligned} \quad (30)$$

Now, we can give the necessary conditions of optimality for stochastic control in the case of minimization:

$$\begin{aligned} H(x, u, p, p_x, t) &= \Phi_0(x, u, t) + f^T(x, u, t)p + \frac{1}{2} \text{tr}\{p_x g(x, u, t)g^T(x, u, t)\} \\ &\begin{cases} dx^* = H_p^* dt + g dw \\ dp^* = -H_x^* dt + p_x g dw \\ x^*(0) = x^0 \\ p^*(T) = K_x(x(T), T) \\ H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), p_x^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), p^*(t), p_x^*(t), t). \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

Thus the optimal inventory level and adjoint are obtained from dx^* and dp^* and the optimal production rate is obtained by minimizing the Hamiltonian function.

The Hamiltonian function:

$$H(x, u, p, p_x, t) = \frac{1}{2} c u^2(t) + \frac{1}{2} h x^2(t) + (u(t) - \mu_D(t))p(t) + \frac{1}{2} p_x \sigma_D^2$$

and the two-point boundary value problem of (P_0) :

$$(TPBVP_0) \begin{cases} dx^* = (u(t) - \mu_D(t))dt - \sigma_D dw \\ dp^* = -hx(t)dt - p_x(t)\sigma_D dw \\ u^*(x, t) = \frac{\partial H}{\partial u(t)} = \frac{-p(t)}{c} \\ x^*(0) = x^0; x^*(T) = free \\ p^*(T) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

The stochastic differential equations are solved numerically using the Euler-Maruyama scheme (see Appendix A) of the problem (P_0) obtained by applying Pontryagin's maximum

principle, after which the optimal inventory trajectory and the optimal adjoint trajectory are given by the following forms, respectively:

$$Y_{n+1}^{(1)} = Y_n^{(1)} + \left(\frac{-Z_n^{(1)}}{c} - \mu_{Dn} \right) dt + (-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n, \quad (33)$$

$$Z_{n+1}^{(1)} = Z_n^{(1)} - h Y_n^{(1)} \left(dt + \frac{(-\sigma_D) \sqrt{dt} \varepsilon_n}{\left(\frac{-Z_n^{(1)}}{c} - \mu_{Dn} \right)} \right) / dt. \quad (34)$$

The initial value of the adjoint is given using the simple shooting method (Stoer and Bulirsch, 1993).

$$Z_0^{(1)} = \left(\frac{-Y_0^{(1)}}{dt} + \mu_{D0} \right) c, \quad (35)$$

The optimal desired production rate is given by the optimization of the Hamiltonian function (Seierstad and Sydsaeter, 1987), and from (4) and (32), we get:

$$u^*(x, t) = \max \left[0, -\frac{p(t)}{c} \right]. \quad (36)$$

To specify the optimal control for the stochastic linear-quadratic problem, we used the *sat* function (Sethi and Thompson, 2000):

$$u^*(x, t) = \text{sat} \left[0, U_{\max}; -\frac{p(t)}{c} \right], \quad (37)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } -\frac{p(t)}{c} < 0 \\ -\frac{p(t)}{c} & \text{if } 0 \leq -\frac{p(t)}{c} \leq U_{\max} \\ U_{\max} & \text{if } -\frac{p(t)}{c} > U_{\max}. \end{cases} \quad (38)$$

We then obtained the optimal desired inventory level \bar{x}^* and the optimal desired production rate \bar{u}^* by taking the average of the optimal inventory levels and the optimal production rates, respectively.

3.2. Solution of the optimal control problem (P)

To find the solution of the stochastic predictive control problem defined by (5) and (7), we take the same equations used in the first solution of the problem(P₀).

Thus the optimal inventory level and adjoint are obtained from dx^* and dp^* and the optimal production rate is obtained by minimizing the Hamiltonian function. Such a function is given by:

$$\begin{aligned} H(x, u, p, p_x, t) &= \frac{1}{2} c_h (x(t) - \bar{x}(t))^2 + \frac{1}{2} c_m (u(t) - \bar{u}(t))^2 + (u(t) - \mu_D(t))p(t) \\ &+ \frac{1}{2} p_x \sigma_D^2 \end{aligned}$$

and the two-point boundary value problem of (P):

$$(TPBVP) \begin{cases} dx^* = (u(t) - \mu_D(t))dt - \sigma_D dw \\ dp^* = -c_h(x(t) - \bar{x}(t))dt - p_x(t)\sigma_D dw \\ u^*(x, t) = \frac{\partial H}{\partial u(t)} = -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) \\ x^*(0) = x_0; x^*(T) = free \\ p^*(T) = 0. \end{cases} \quad (39)$$

The stochastic differential equations of the problem (P) are solved numerically using the Euler-Maruyama scheme (see Appendix A) to find the optimal inventory trajectory and the optimal adjoint trajectory given by the following forms, respectively:

$$Y_{n+1}^{(2)} = Y_n^{(2)} + \left(\frac{-Z_n^{(2)}}{c_m} + \bar{u}_n - \mu_{Dn} \right) dt + (-\sigma_D)\sqrt{dt}\epsilon_n, \quad (40)$$

$$Z_{n+1}^{(2)} = -Z_n^{(2)} + c_h(Y_n^{(2)} - \bar{x}_n) \left(dt + \frac{(-\sigma_D)\sqrt{dt}\epsilon_n}{\left(\frac{-Z_n^{(2)}}{c_m} + \bar{u}(t) - \mu_{Dn} \right)} \right) / dt. \quad (41)$$

The initial value of the adjoint is given using the simple shooting method (Stoer and Bulirsch, 1993).

$$Z_0^{(2)} = \left(\frac{-Y_0^{(2)}}{dt} - \bar{u}_0 + \mu_{D0} \right) c_m, \quad (42)$$

The optimal production rate is given by:

$$u^*(x, t) = \max\left[0, -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t)\right]. \quad (43)$$

To specify the optimal control for the stochastic predictive problem, we also used the *sat* function (Sethi and Thompson, 2000), to obtain:

$$u^*(x, t) = \text{sat}\left[0, U_{\max}; -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t)\right], \quad (44)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) < 0 \\ -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) & \text{if } 0 \leq -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) \leq U_{\max} \\ U_{\max} & \text{if } -\frac{p(t)}{c_m} + \bar{u}(t) > U_{\max}. \end{cases} \quad (45)$$

We will apply the proposed approach to solve a numerical example of the stochastic production planning problem.

4. Numerical example

In this section, we present a numerical example to illustrate the results obtained. It is assumed that the demand rate is a normally distributed function of time, defined as: $d(t) = \mu_D(t) + \sigma_D N(0,1)$ and other parameters are presented in Table 1:

Table 1: Data of numerical example

Parameter	T	c	h	c_m	c_h	x^0	x_0	U_{\max}	μ_D	σ_D
Value	120	20	80	12	3	0.8147	0.8147	10.5	10	4.5

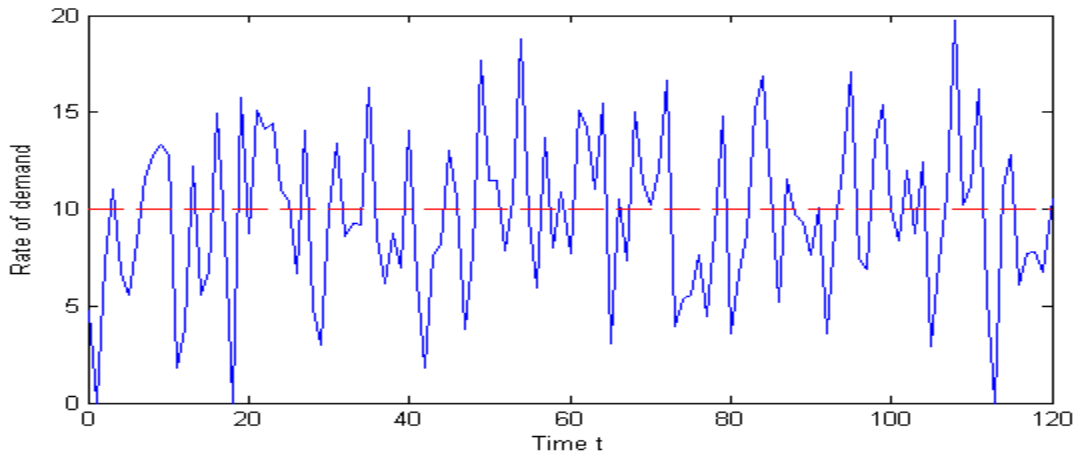


Figure 3. Demand rate against time

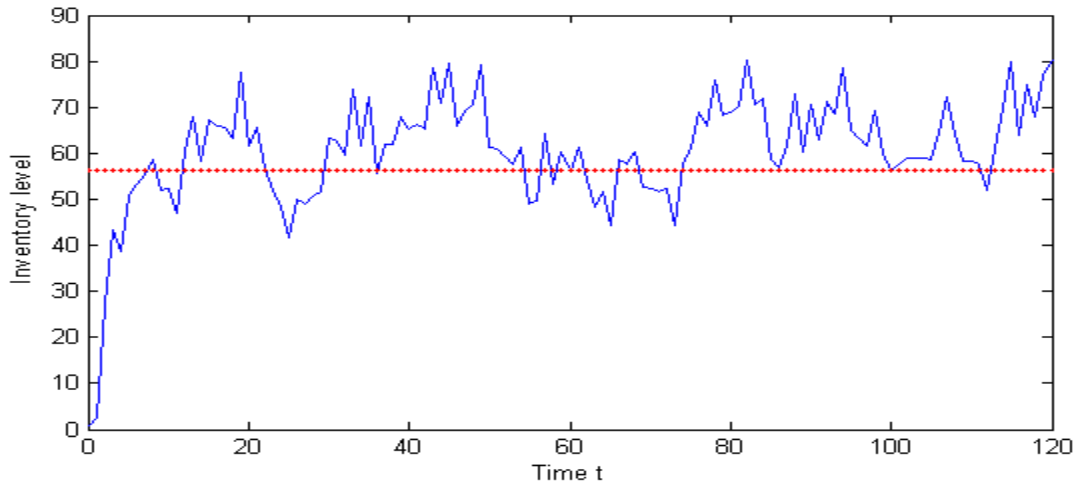


Figure 4. Optimal inventory levels against time

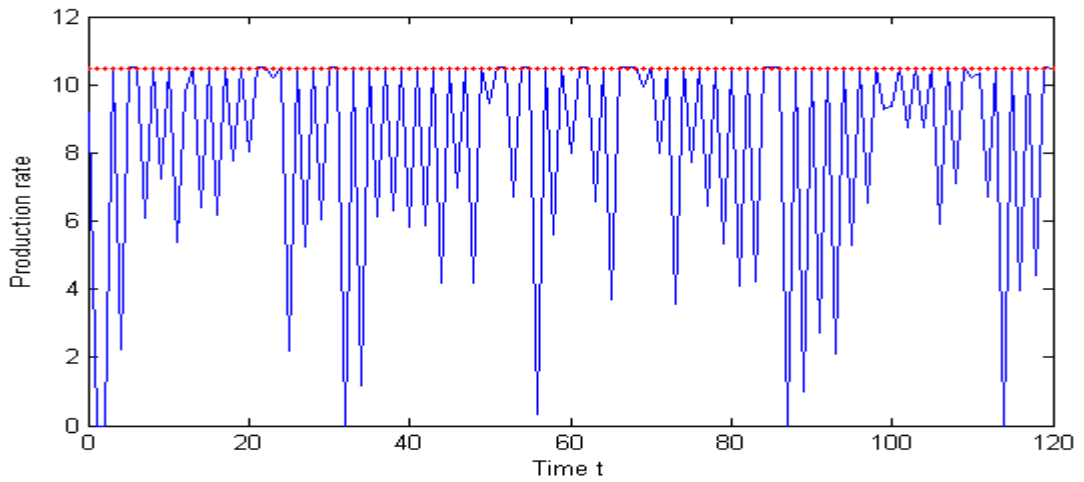


Figure 5. Optimal production rates against time

The simulation results are given in Figures 3, 4 and 5, and show that the optimal inventory level x^* increases with time to converge to its optimal desired inventory level \bar{x}^* . The optimal production rate u^* must satisfy the normally distributed demand rate until it reaches its optimal desired production rate \bar{u}^* at the end of the planning horizon period. For our numerical example, we obtained an optimal desired production rate with a value $\bar{u}^* = 10.4$ and an optimal desired inventory level with a value $\bar{x}^* = 56.28$, which represent the production rate and inventory threshold desired by the firm to respond to random demand with $d(t) \sim N(10, 4.5)$.

The next section presents the validation of the proposed approach through a sensitivity analysis and illustration of its usefulness while examining how the results obtained vary with changes in some monetary and non-monetary parameters values.

5. Sensitivity analysis

From the figures and tables presented in this section, we notice two parameters that influence the results obtained. Firstly, we have the so-called monetary parameters that include c, h, c_m and c_h and the non-monetary parameter, σ_D . These parameters have an influence on the optimal desired inventory level \bar{x}^* , the optimal desired production rate \bar{u}^* , the optimal inventory level x^* , the optimal production rate u^* , the total average quadratic cost J_0^* and the total average deviation cost J^* of inventory and production.

In the interpretations that follow, the simulation results show that the optimal desired production rate remains constant at $\bar{u}^* = 10.4$. This allows regular production around the customer's demand using the finite products stock as a buffer to satisfy fluctuating demand.

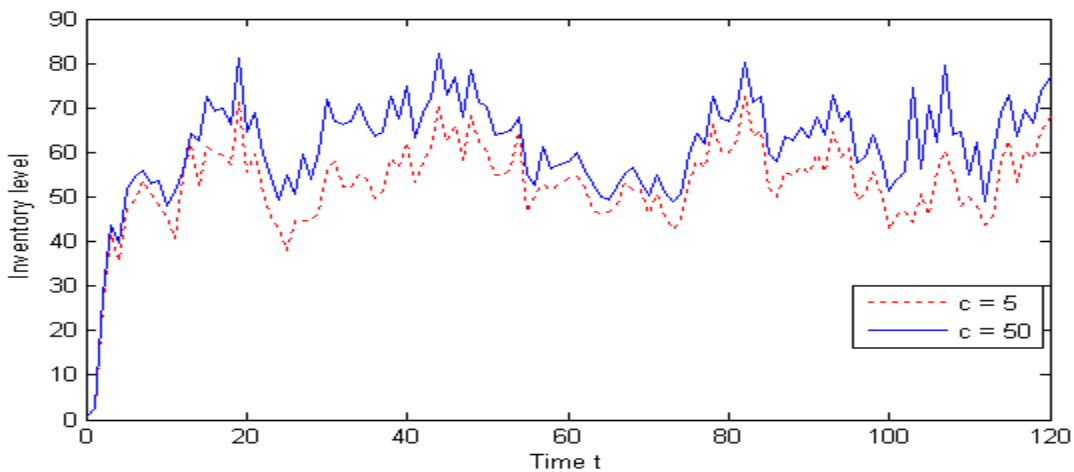
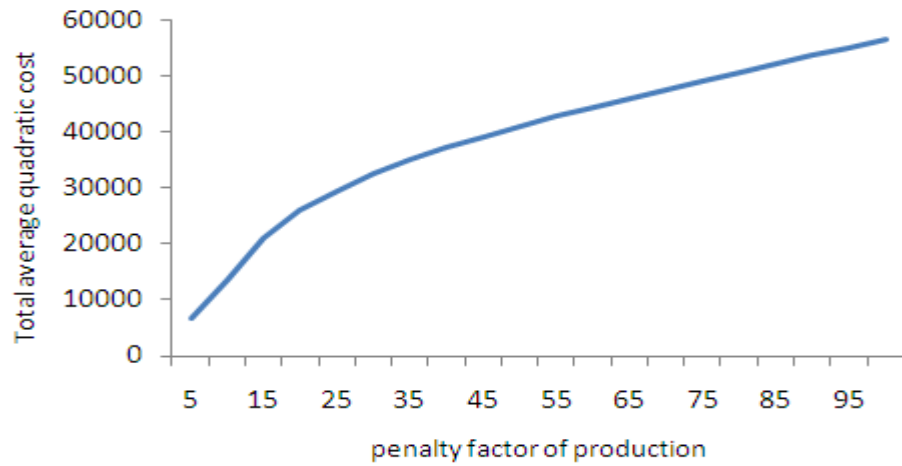


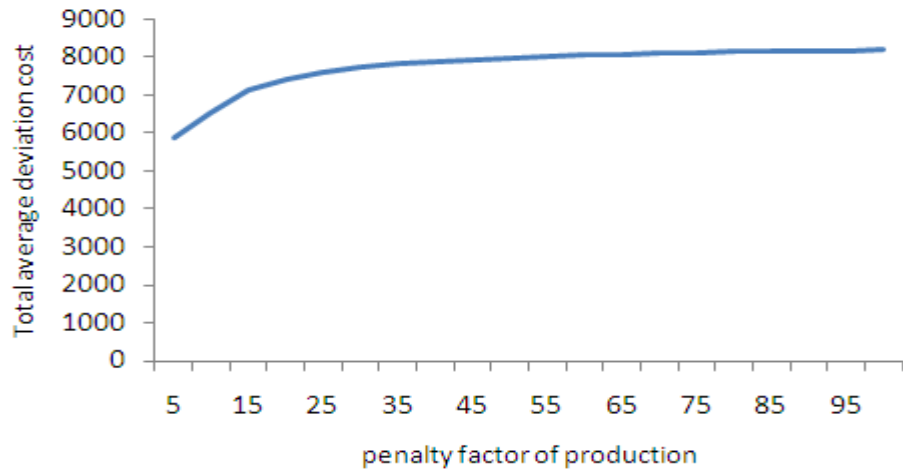
Figure 6. Optimal inventory level against time for $c = 5, 50$.

Table 2: Effect of penalty factor c

c	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
\bar{x}^*	50.5	53.1	55.2	56.3	56.9	57.3	57.6	57.9	58	58.2
c	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
\bar{x}^*	58.3	58.4	58.48	58.55	58.61	58.66	58.71	58.75	58.79	58.82



(a)



(b)

Figure 7. Total average cost against penalty factor of production

From Figures 6, 7 and Table 2, we note that when the penalty factor c increases, the optimal desired inventory level \bar{x}^* increases as well, as does the optimal inventory level x^* . This result is logical because the more we penalize the production, the faster we produce in

order to respond to random demand, leading to a stock surplus. This causes an increase in the total average quadratic cost J_0^* and in the total average deviation cost J^* .

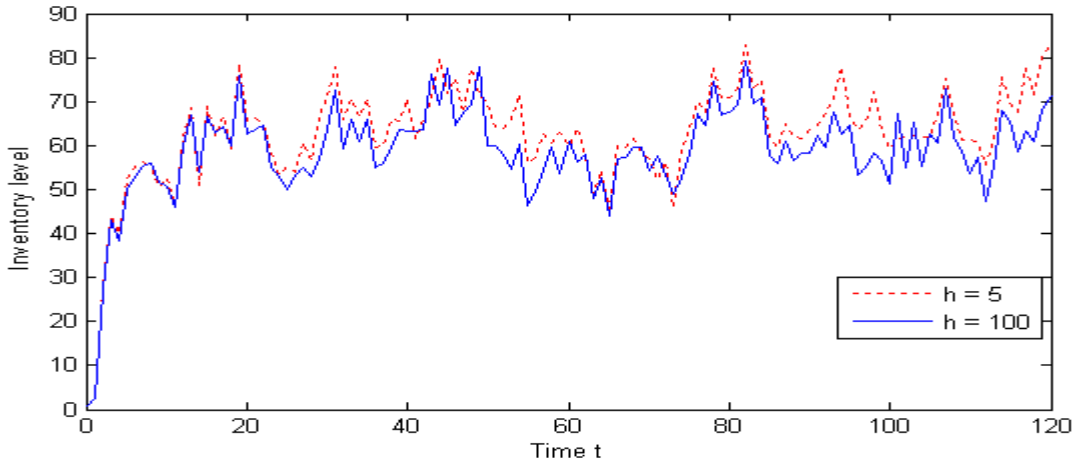
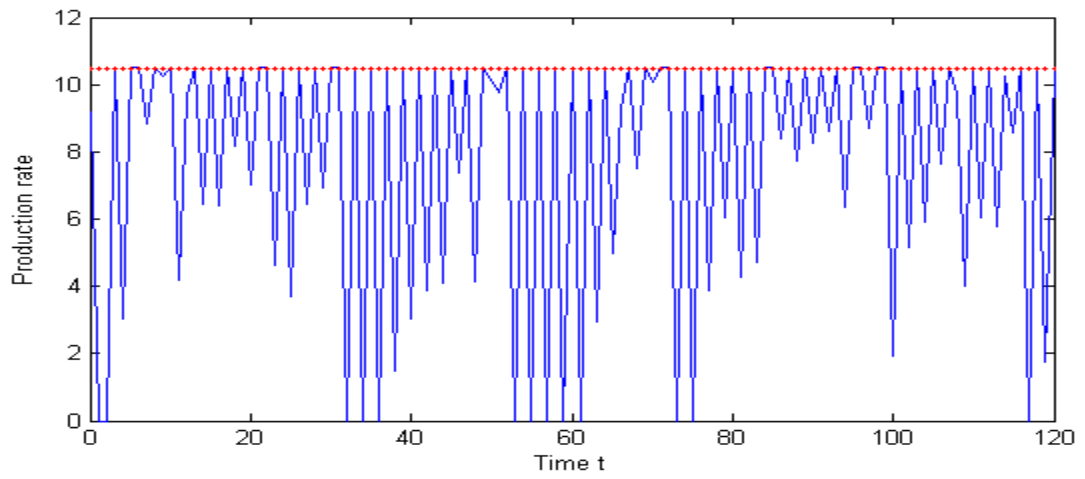


Figure 8. Optimal inventory level against time for $h = 5, 100$

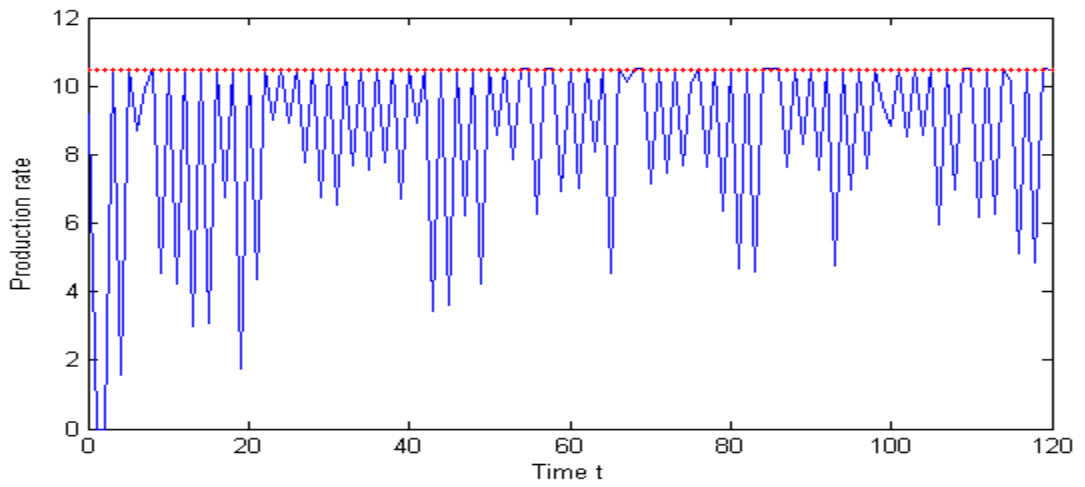
Table 3: Effect of penalty factor h

h	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
\bar{x}^*	59.26	59.06	58.86	58.66	58.46	58.26	58.06	57.87	57.67	57.47
J_0^*	7204.6	9138.1	10964	12684	14301	15817	17234	18556	19783	20917
J^*	8323.4	8261.1	8199.1	8137.4	8076	8014.9	7954.1	7893.7	7833.5	7773.5
h	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
\bar{x}^*	57.27	57.07	56.87	56.67	56.48	56.28	56.08	55.88	55.68	55.48
J_0^*	21962	22921	23793	24583	25292	25923	26479	26961	27371	27710
J^*	7713.9	7654.7	7595.6	7536.9	7478.5	7420.5	7362.7	7305.4	7248.3	7191.3

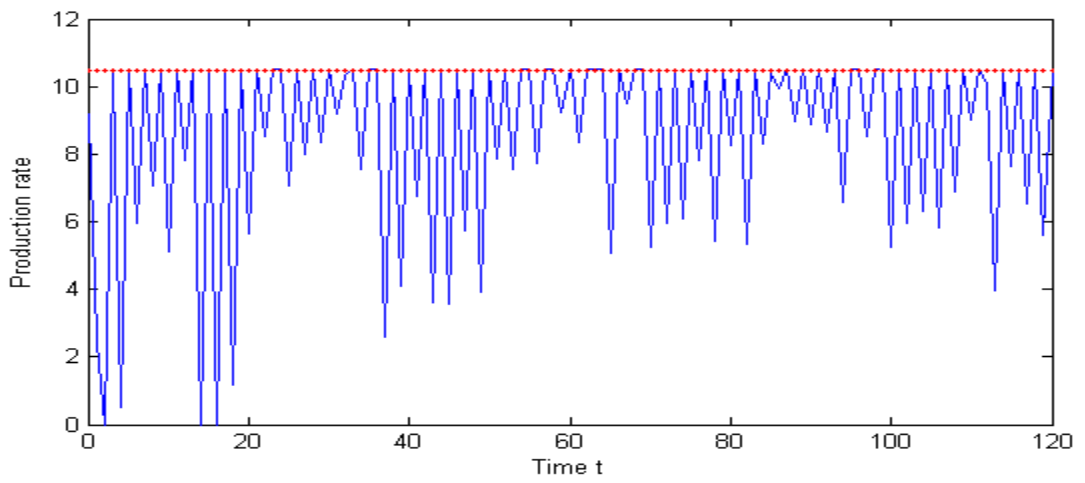
From Figure 8 and Table 3, we notice that when the penalty factor h increases, the optimal desired inventory level \bar{x}^* decreases; the optimal inventory level x^* decreases as well because more the inventory is penalized, the slower we produce in order to satisfy random demand, which in turn causes a decrease in products stocks. The optimal inventory level x^* decreases accordingly. Regarding the total average quadratic cost J_0^* , it will increase, while the total average deviation cost J^* decreases.



(a) $c_m = 10$

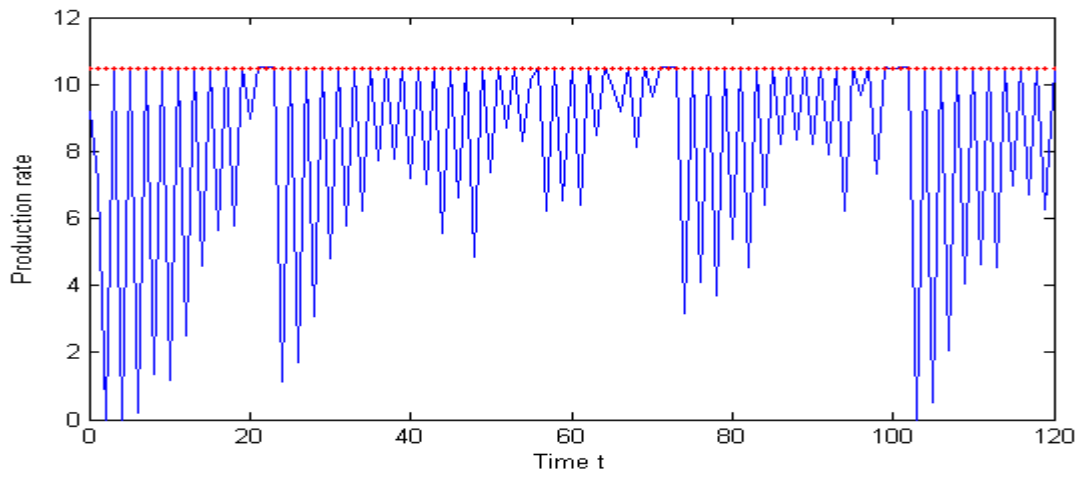


(b) $c_m = 14$

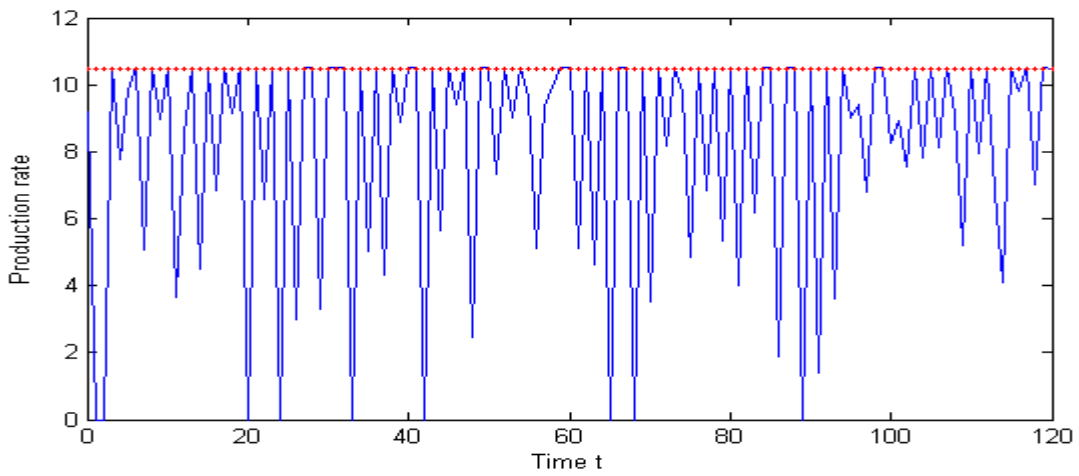


(c) $c_m = 18$

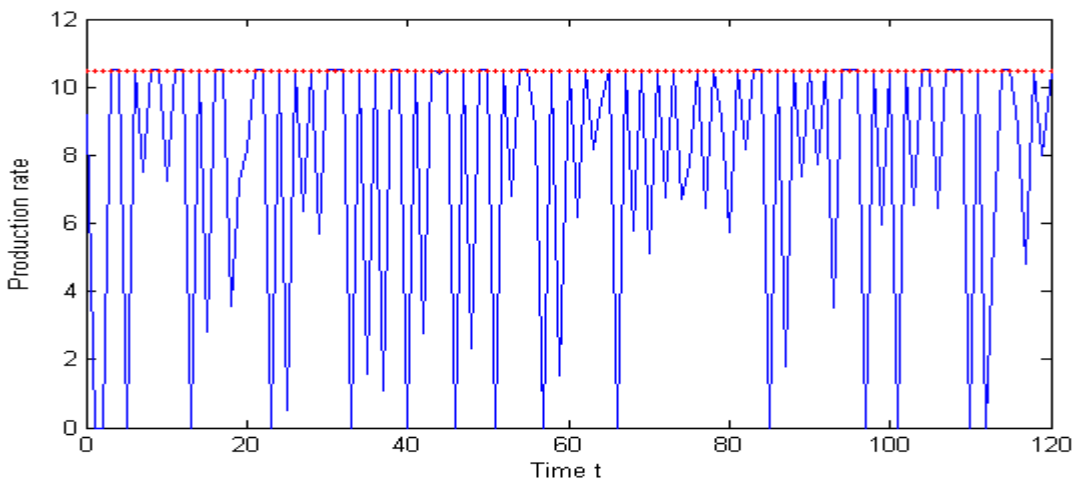
Figure 9. Optimal production rate against time for $c_m = 10, 14, 18$



(a) $c_h = 1$



(b) $c_h = 6$



(c) $c_h = 9$

Figure 10. Optimal production rate against time for $c_h = 1, 6, 9$

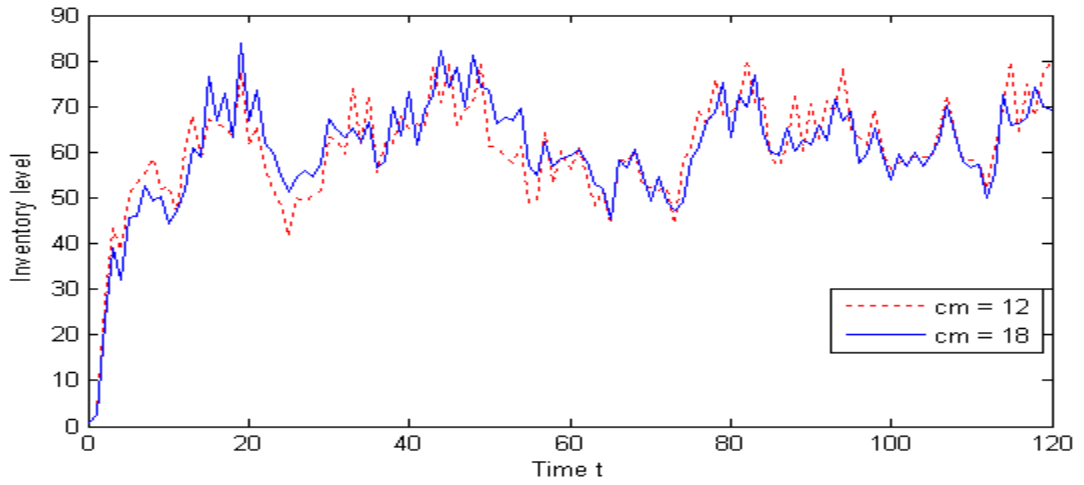


Figure 11. Optimal inventory level against time for $c_m = 12, 18$

Table 4: Effect of deviation factor c_m

c_m	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
J^*	7017.4	7220.9	7420.5	7613.1	7797.3	7844.3	7860.6	7878.2	7896.3	7914	7931.1

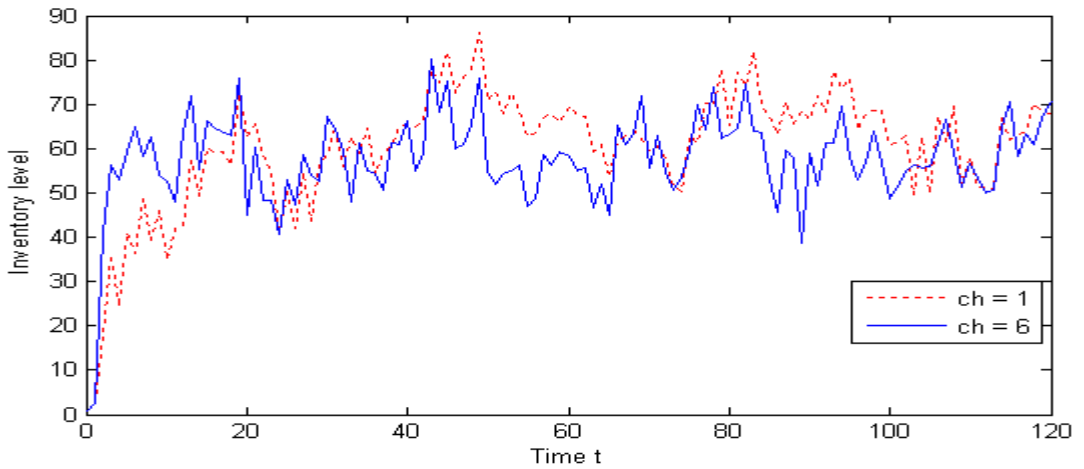


Figure 12. Optimal inventory level against time for $c_h = 1, 6$

Table 5: Effect of deviation factor c_h

c_h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J^*	2681	5264.2	7420.5	9086.6	10813	12699	14866	17450	21449	24825

From Figures 9, 10, 11, 12 and Tables 4 and 5, we can see that when the deviation factor of production c_m increases, it causes an increase in production (see Figures 9(a), 9(b), 9(c)). Because of faster production, we have more products in stock (see Figure 11). This leads to a high deviation between the optimal inventory level x^* and its goal. We also note that the more the deviation factor of the inventory c_h increases, the more the inventory level moves away from its goal because the more the inventory is penalized, the slower we produce as well (see Figures 10(a), 10(b), 10(c)), and stock fewer products (see Figure 12), and the total average deviation cost J^* increases in both cases (see Tables 4, 5).

In the first level, there is no change, and the optimal desired inventory level remains constant at $\bar{x}^* = 56.28$ because it is independent of c_m and c_h . Therefore, the total average quadratic cost remains constant at $J_0^* = 25923$.

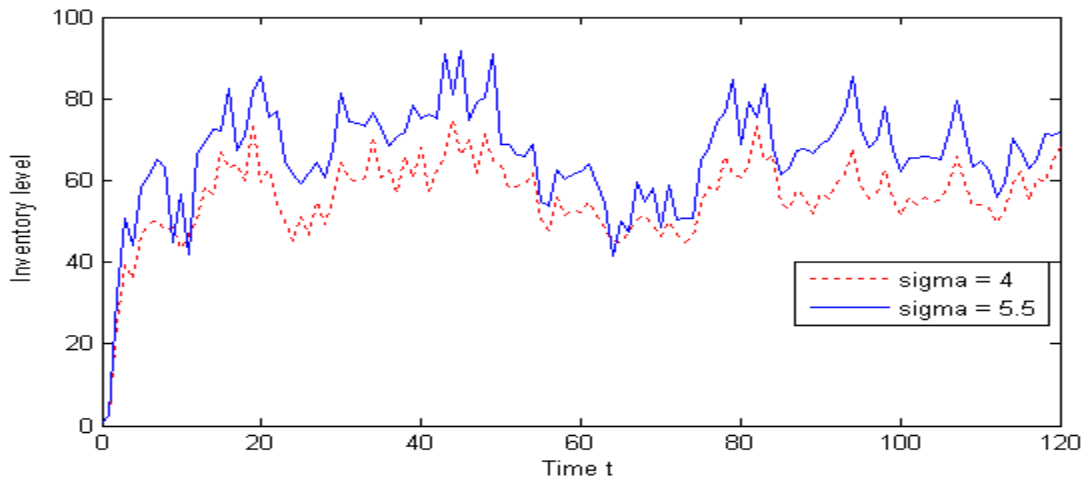


Figure 13. Optimal inventory level against time for $\sigma_D = 4, 5.5$

Table 6: Effect of standard deviation σ_D

σ_D	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
\bar{x}^*	31.61	35.13	38.59	42.29	45.70	49.21	52.75	56.28	59.8	63.32
J_0^*	4572.7	5107.3	6444.7	8771.3	11742	15605	20358	25923	32328	39570
J^*	3176.8	3656.5	4361.5	4989.6	5320.4	6031.7	6704.4	7420.5	8186.5	9003.5

From Figure 13 and Table 6, when the standard deviation factor σ_D increases, the optimal desired inventory level \bar{x}^* increases because the increase in the variability of the

demand rate requires to have a higher level, the cumulative demand decreases. That is why the total average quadratic cost J_0^* and the total average deviation cost J^* increase.

6. Conclusions

In this study, we have presented a hierarchical optimal control policy for a manufacturing system, composed of one machine producing one product type, with stochastic demand. In the first level, we have shown how to determine the optimal desired inventory level and production rate based on a stochastic linear-quadratic control problem. In the second level, we have determined the optimal production strategy based on a stochastic predictive control to maintain the production rate and the inventory level as close as possible to their goals. The Pontryagin's maximum principle was applied both in level 1 and level 2. A numerical example is presented, and the results obtained show that the hierarchical control policy has minimized the total average quadratic cost and the sum of the mean square deviations of inventory and production for the first and the second levels, respectively. The extension of this work for reverse logistics systems with stochastic demand is identified as a topic of future research.

Appendix A

A.1. The sum of the mean square deviations of inventory and production to minimize can be written in this form :

$$J^* = \text{Min } E\{J\} = E \left\{ \int_0^T \left[\frac{1}{2} c_h \cdot (x^*(t) - \bar{x}^*(t))^2 + \frac{1}{2} c_m \cdot (u^*(t) - \bar{u}^*(t))^2 \right] \cdot dt \right\},$$

and the stochastic state equation of the inventory level $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = u(t) - d(t),$$

We can numerically simulate J^* using the Euler-Maruyama scheme. We approach :

$$x_{t+dt} = x_t + \int_t^{t+dt} u(s) ds - \int_t^{t+dt} d(s) ds$$

$$= x_t + \int_t^{t+dt} u(s) ds - \int_t^{t+dt} (\mu_D(s) + \sigma_D \varepsilon(s)) ds$$

by

$$x_{t+dt} \approx x_t + (u_t - \mu_{Dt})dt + (-\sigma_D)\sqrt{dt}\varepsilon_t$$

we obtain :

$$y_{n+1} = y_n + (u_n - \mu_{Dn})dt + (-\sigma_D)\sqrt{dt}\varepsilon_n$$

we define the inventory position at the beginning of period n after the decision (Kiesmüller, 2003) as :

$$y_s = y_n + u_n dt$$

Here, the Euler-Maruyama scheme assumes that the integrands are constants on the integration interval since the random variable d_n is normally and independent of variance dt :

We can write y_{n+1} as :

$$y_{n+1} = y_s - (\mu_{Dn}dt + \sigma_D\sqrt{dt}\varepsilon_n)$$

$$J^* = \int_0^T \left[\frac{1}{2} c_h \cdot (y_s - (\mu_{Dn}dt + \sigma_D\sqrt{dt}\varepsilon_n) - \bar{x}^*(t))^2 + \frac{1}{2} c_m \cdot (u^*(t) - \bar{u}^*(t))^2 \right] \cdot dt$$

$$\begin{aligned} J^* &= \int_0^T \frac{1}{2} c_h \cdot (y_s(t) - \bar{x}^*(t))^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} c_m \cdot (u(t) - \bar{u}^*(t))^2 \cdot dt \\ &+ \sum_{j=1}^N (-c_h)(y_s(j) - \bar{x}_j^*) (\mu_{Dj}dt + \sigma_D dw(j)) \\ &+ \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} c_h \right) (\mu_{Dj}dt + \sigma_D dw(j))^2 \end{aligned}$$

A.2. The total average quadratic inventory and production cost to minimize can be written in the same form as the last one :

$$J_0^* = \int_0^T \frac{1}{2} h. (y_s(t))^2 dt + \int_0^T \frac{1}{2} c. (u(t))^2. dt + \sum_{j=1}^N (-h)y_s(j) (\mu_{Dj} dt + \sigma_D dw(j)) \\ + \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} h\right) (\mu_{Dj} dt + \sigma_D dw(j))^2$$

Where dt : timestep.

References

- [1] El-Gohary, A., Tadj, L. and Al-Rahmah, A. (2007). Optimal control of a stochastic production planning model with different demand rates, *International Journal of Applied Mathematics*, 20 (3), 333-349.
- [2] Kenné, J.P. and Boukas, E.K. (2003). Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 9 (1), 66-82.
- [3] Bensoussan, A., Hurst, G.E. and Naslund, B. (1974). *Studies in mathematical and managerial economics, Management applications of modern control theory*, Amsterdam-Oxford: North-Holland Publishing Company.
- [4] Davis, M. H. (1977). *Linear estimation and stochastic control*, New York: John Wiley and Sons.
- [5] Cohn, D. L. (1980). *Measure theory*, Boston: Birkhäuser.
- [6] Hedjar, R., Bounkhel, M. and Tadj, L. (2007). Self-tuning optimal control of periodic-review production inventory systems with deteriorating items, *Advanced Modeling and Optimization*, 9(1), 91-104.
- [7] Kiesmüller, G.P. (2003). Optimal control of a one product recovery system with lead times, *International Journal of Production Economics*, 81-82, 333-340.
- [8] Tzafestas, S., Kapsiotis, G., and Kyriannakis, E. (1997). Model-based predictive control for generalized production planning problems, *Computers in Industry*, 34 (2), 201-210.
- [9] Dobos, I. (2003). Optimal production-inventory strategies for HMMS-type reverse logistics system, *International Journal of Production Economics*, 81-82, 351-360.
- [10] Sethi, S.P. and Thompson, G.L. (1981). *Control Theory: Applications to Management Science*, Boston: Martinus Nijhoff.
- [11] Sethi, S.P. and Thompson, G.L. (2000). *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*, 2nd edn., Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [12] Wiktorsson, M., Varanasi, S. and Bai, S.X. (1997). An Optimal production flow control problem with impulsive demand, *Mathematical and Computer Modelling*, 26 (2), 53-67.
- [13] El-Gohary, A., Tadj, L. and Al-Rasheedi, A.F. (2009). Using optimal control to adjust the production rate of a deteriorating inventory system, *Journal of Taibah University of Sciences*, 2, 69-77.

- [14] Salama, Y. (2000). Optimal control of a simple manufacturing system with restarting costs, *Operations Research Letters*, 26, 9-16.
- [15] Holt, C.C., Modigliani, F. Muth, J.F., and Simon, H.A. (1960). *Planning Production, Inventories and Work Forces*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [16] Khemlnitsky, E. and Gerchak, Y. (2002). Optimal control approach to production systems with inventory level dependent demand, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (3), 289-292.
- [17] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. and Mishchenko, E.F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York: John Wiley and Sons.
- [18] Stoer, J. and Bulirsch, R. (1993). *Introduction to numerical analysis*, New York: Springer-Verlag.
- [19] Seierstad, A. and Sydsaeter, K. (1987). *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Amsterdam: North-Holland.
- [20] Merton, Robert C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, 3(4), 373-413.

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abbou, R. 2003. « Contribution à la mise en oeuvre d'une maintenance centralisée : Conception et Optimisation d'un Atelier de Maintenance ». Thèse de doctorat en automatique-productique de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Université Joseph Fourier, 144 p.
- Abbou, R., Z. Simeu-Abazi et M. Di Mascolo. 2004. « Atelier de maintenance intégré dans un système de production: conception et évaluation des performances ». *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 38, n° 1-2, p. 197-223.
- Alla, H., J.B. Cavaillé, J. Le Bail et G. Bel. 1992. « Les systèmes de production par lot : une approche discret-continu utilisant les réseaux de Petri hybrides ». In *Proceedings of 1st Int. Conf. on Automation of Mixed Processes : Hybrid dynamic systems (ADPM)*, Paris, France, Janvier 1992.
- Arnould, P., et J. Renaud. 2002. *Le juste-à-temps : Approches modernes, concepts et outils d'amélioration*. La Plaine Saint Denis: Afnor, 65 p.
- Arrow, K.J., et S. Karlin. 1958. « Production over time with increasing marginal costs. In: Arrow, K.J., Karlin, S., Scarf, H. (Eds.), *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production* ». *Stanford University Press, Stanford*, p. 61-69.
- Badiane, A. 2010. « L'intégration des stratégies de maintenance à la gestion des opérations des systèmes manufacturiers ». Mémoire de maîtrise en génie mécanique, Montréal, École de Technologie Supérieure, 122 p.
- Barra, V. 2005. *Modélisation des processus aléatoires : notes de cours. Programme de deuxième année F4. Aubière : Institut Supérieur d'Informatique de Modélisation et de leurs Applications*, 32 p.
- Bensoussan, A., G.E. Hurst et B. Naslund. 1974. *Studies in mathematical and managerial economics*. Coll. « Management applications of modern control theory ». Amsterdam-Oxford: North-Holland Publishing Company.
- Boukas, E. K., et J.P. Kenné. 1997. « Production and maintenance rates control of manufacturing systems with setups ». *Lectures in applied Mathematics*, vol. 33, p. 55-70.
- Boukas, E.K., J.P. Kenné et Q. Zhu. 1995. « Age dependent hedging point policies in manufacturing systems ». In *Proceedings of American Control Conference* (Seattle, Washington, June 21-23 1995).

- Buzacott, J.A., et J.G. SHANTHIKUMAR. 1980. « Models for understanding flexible manufacturing systems ». *AIIE Transactions*, vol. 12, n° 4, p. 339-350.
- Buzacott, J.A., et D.D. Yao. 1985. « Queueing models for flexible manufacturing station ». *European Journal of Operational Research*, vol. 19, p. 233-252.
- Chouinard, M., S. D'amours et D. Aït-Kadi. 2003. « Méthodologie d'implantation et d'amélioration d'une chaîne logistique intégrant la logistique inversée ». *5e Congrès international de génie industriel, Québec, Canada*.
- Cohn, D. L. 1980. *Measure theory*. Boston: Birkhäuser.
- David, R. 1991. « Modeling of Dynamic Systems by Petri Nets ». In *Proc. of European Control Conference, Grenoble, France, July 2-5 1991*. p. 136-147.
- Davis, M. H. 1977. *Linear estimation and stochastic control*. New York: John Wiley and Sons.
- De Brito, M.P., et R. Dekker. 2002. « A framework for reverse logistics ». *Econometric Institute Report, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands*, vol. 38, p. 1-19.
- De Rosnay, J. 1975. *Le microscope*. Paris: Seuil, 314 p.
- Dehayem N., F.I. 2009. « Commande optimale stochastique appliquée à la gestion de capacité des systèmes dynamiques en environnement manufacturier ». Thèse de doctorat en génie, Montréal, École de technologie supérieure, 229 p.
- Dekker, R., M. Fleischmann, K. Inderfurth et L.N. Van Wassenhove. 2010. *Reverse Logistics Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chains*. Berlin, Germany: Springer Verlag.
- Demri, A. 2009. « Contribution à l'évaluation de la fiabilité d'un système mécatronique par modélisation fonctionnelle et dysfonctionnelle ». Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur, Angers, Université d'Angers.
- Dobos, I. 1999. « Production-inventory strategies for a linear reverse logistics system, Discussion Paper 431 ». *Faculty of Economics and Business Administration, University of Bielefeld*.
- Dobos, I. 2003. « Optimal production-inventory strategies for HMMS-type reverse logistics system ». *International Journal of Production Economics*, vol. 81-82, p. 351-360.
- El-Gohary, A., L. Tadj et A.F. Al-Rasheedi. 2009. « Using optimal control to adjust the production rate of a deteriorating inventory system ». *Journal of Taibah University of Sciences*, vol. 2, p. 69-77.

- Feller, W. 1957. *An introduction to probability theory and its applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Fleischmann, M. 2001. *Quantitative models for reverse logistics*. New York: Springer Verlag.
- Fleischmann, M., J.M. Bloemhof-Ruwaard, R. Dekker, E. Van der Lann, J.A.E.E. Van Nunen et L.N. Van Wassenhove. 1997. « Quantitative models for reverse logistics : A review ». *European Journal of Operational Research*, vol. 103, n° 1, p. 1-17.
- Fontanili, F. 1999. « Intégration d'outils de simulation et d'optimisation pour le pilotage d'une ligne d'assemblage multiproduit à transfert asynchrone ». Thèse de doctorat en génie mécanique, Paris, Université Paris XIII, 350 p.
- Gauthier, G. 2003. *6-640-93 : Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion : notes du cours 6-640-93. Programme de Maîtrise en science de la gestion. Montréal : HEC Montréal, 12 p.*
- Gershwin, S.B. 1994. *Manufacturing systems engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Gershwin, S.B. 2000. « Design and Operation of Manufacturing Systems : The Control Point Policy ». *IIE Transactions*, vol. 32, n° 2, p. 891-906.
- Gharbi, A., Y. Beauchamp et S. Andriamaharosa. 2001. « Stratégie de maintenance préventive de type age : Approche basée sur l'intégration de la simulation et des plans d'expérience ». In *3e Conférence Francophone de MODélisation et SIMulation, Troyes, France, Avril 25-27 2001*. p. 797-803.
- Gharbi, A., A. Hajji et K. Dhoub. 2011. « Production rate control of an unreliable manufacturing cell with adjustable capacity ». *International Journal of Production Research*, vol. 49, n° 21.
- Gharbi, A., J.P. Kenné et A. Hajji. 2006. « Operational level-based policies in production rate control of unreliable manufacturing systems with setups ». *International Journal of Production Research*, vol. 44, n° 3, p. 545-567.
- Goldberg, David E. 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 432 p.
- Goldratt, E.M., et F. Cox. 1984. *Le but : L'excellence en production*, 2 éd. Paris: Association française de normalisation, 269 p.
- Hajej, Z., S. Dellagi et N. Rezg. 2010. « Développement et optimisation d'une stratégie de maintenance dépendante du plan de production et tenant compte de droit rétractation

». In *The 8th International Conference on Modelling and Simulation, Hammamet, Tunisia, May 10-12 2010*.

Hajji, A. 2003. « Stratégies optimales de production des systèmes manufacturiers en présence de setup ». Mémoire de maîtrise en génie de la production automatisée, Montréal, École de Technologie Supérieure, 231 p.

Hajji, A., A. Gharbi et J. P. Kenné. 2010. « Joint production and supply control in three levels flexible manufacturing systems ». *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 21, n° 2, p. 195-204.

Holland, John H. 1975. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Press, 183 p.

Holt, C.C., F. Modigliani, J.F. Muth et H.A. Simon. 1960. *Planning production, Inventories and Work Forces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Huang, G.Q., J.S.K. Lau et K.L. Mak. 2003. « The impacts of sharing production information on supply chain dynamics : A review of the literature ». *International Journal of Production Research*, vol. 41, n° 7, p. 1483-1517.

Johnson, L.A., et D.C. Montgomery. 1974. *Operation research in production planning, scheduling, and inventory control*. New York: John Wiley and Sons, 525 p.

Kenné, J.P. 1997. « Planification de la production et de la maintenance des systèmes de production : Approche hiérarchisée ». Thèse de doctorat en génie mécanique, Montréal, École Polytechnique, 152 p.

Kenné, J.P., et E.K. Boukas. 2003. « Hierarchical control of production and maintenance rates in manufacturing systems ». *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 9, n° 1, p. 66-82.

Kenné, J.P., et A. Gharbi. 2000. « Production planning problem in manufacturing systems with general failure and repair time distributions ». *Production Planning and Control*, vol. 11, n° 6, p. 581-588.

Kenné, J.P., et A. Gharbi. 2001. « A simulation optimization approach in production planning of failure prone manufacturing systems ». *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 12, p. 421-431.

Kenné, J.P., et A. Gharbi. 2004. « A simulation optimization based control policy for failure prone one-machine, two-product manufacturing systems ». *Computers & Industrial Engineering*, vol. 46, n° 2, p. 285-292.

- Kiesmüller, G.P. 2003. « Optimal control of a one product recovery system with lead times ». *International Journal of Production Economics*, vol. 81-82, p. 333-340.
- Kimemia, J G., et S.B. Gershwin. 1983. « An algorithm for the computer control of production in flexible manufacturing systems ». *IIE Transactions*, vol. 15, n° 4, p. 353-362.
- Kistner, K.P., et I. Dobos. 2000. « Optimal production-inventory strategies for a reverse logistics system. In Dockner, E.J., Hartl, R.F., Luptacik, M., Sorger, G., editors, *Optimization, Dynamics, and Economic Analysis* ». *Physica Verlag, Heidelberg*, p. 246-258.
- Kleber, R., S. Minner et G.P. Kiesmüller. 2002. « A continuous time inventory model for a product recovery system with multiple options ». *International Journal of Production Economics*, vol. 79, n° 2, p. 121-141.
- Kushner, H.J. 1977. *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*. New York: Academic Press.
- Kushner, H.J., et P. Dupuis. 1992. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*. New York: Springer Verlag.
- Lambert, S. 2005. « L'ingénierie des processus de la logistique inverse ». Ph.D. Thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Law, A.M., et W.D. Kelton. 1991. *Simulation modelling and analysis*, 2 éd. New York: McGraw-Hill.
- Lehoczky, J., S.P. Sethi, H.M. Soner et M. Taksar. 1991. « An asymptotic analysis of hierarchical control of manufacturing systems under uncertainty ». *Mathematics of operations research*, vol. 16, n° 3, p. 596-608.
- Marris, P. 2005. *Le management par les contraintes*. Paris: Editions d'organisation.
- Merton, Robert C. 1971. « Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model ». *Journal of Economic Theory*, vol. 3, n° 4, p. 373-413.
- Mokhtari, A. 2007. « Diagnostic des systèmes hybrides : développement d'une méthode associant la détection par classification et la simulation dynamique ». Thèse de doctorat en systèmes industriels de l'Université de Toulouse, Toulouse, Institut National des Sciences Appliquées, 143 p.
- Ohno, T. 1990. *L'esprit Toyota*. Paris: Masson, 132 p.

- Orlicky, J.A. 1975. *Material requirements planning : the new way of life in production and inventory management*. New York: McGraw-Hill, 292 p.
- Pandey, P.C., Y. Pisal et A. Sunisa. 2000. « A finite capacity material requirements planning system ». *Production Planning and Control*, vol. 11, n° 2, p. 113-121.
- Papadimitriou, C.H., et K. Steiglitz. 1998. *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Pellerin, R., et A. Gharbi. 2009. « Production control of hybrid repair and remanufacturing systems under general conditions ». *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 15, n° 4, p. 383 - 396.
- Pimor, Y. 2001. *Logistique : Principes et méthodes*, 2 éd. Paris: Dunod, 580 p.
- Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze et E.F. Mishchenko. 1962. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley and Sons.
- Rogers, D.S., et R.S. Tibben-Lembke. 1998. *Going Backwards : Reverse Logistics Trends and Practices*. Reno, Nevada: Reverse Logistics Executive Council.
- Ross, Sheldon M. 1989. *Introduction to probability models*, 4th ed. New York: Academic Press.
- Sajadi, S.M., M.M. Seyedesfahani et K. Sorensen. 2011. « Production control in a failure-prone manufacturing network using discrete event simulation and automated response surface methodology ». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 53, n° 1-4, p. 35-46.
- Seierstad, A., et K. Sydsaeter. 1987. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Amsterdam: North-Holland.
- Sethi, S.P., et G.L. Thompson. 1981. *Optimal Control Theory : Applications to Management Science*. Boston: Martinus Nijhoff.
- Sethi, S.P., et G.L. Thompson. 2000. *Optimal Control Theory : Applications to Management Science and Economics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Shingo, S. 1987a. *Le système SMED : Une révolution en gestion de production*. Paris: Les Editions d'Organisation.
- Shingo, S. 1987b. *Le système Poka-Yoké. Zéro défaut = zéro contrôle*. Paris: Les Editions d'Organisation.

- Stevenson, W., et C. Benedetti. 2006. *La gestion des opérations : Produits et services*, 2 éd. Montréal: Chenelière/McGaw-Hill, 249 p.
- Stoer, J., et R. Bulirsch. 1993. *Introduction to numerical analysis*. New York: Springer Verlag.
- Tamani, K. 2008. « Développement d'une méthodologie de pilotage intelligent par régulation de flux adaptée aux systèmes de production ». Thèse de doctorat en électronique, électrotechnique, automatique de l'Université de Savoie, Annecy, Université de Savoie, 208 p.
- Thierry, M.C., M. Salamon, J.A.E.E. Van Nunen et L.N. Van Wassenhove. 1995. « Strategic issues in product recovery management ». *California Management Review*, vol. 37, p. 114-135.
- Trélat, E. 2007. *A08. Commande optimale : notes du cours A08. Programme de Master en mathématiques. Orléans : Université d'Orléans, 75 p.*
- Tzafestas, S., G. Kapsiotis et E. Kyriannakis. 1997. « Model-based predictive control for generalized production planning problems ». *Computers in Industry*, vol. 34, n° 2, p. 201-210.
- Wolsey, L.A. 1998. *Integer Programming*. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience.
- Wuttipornpun, T., et Y. Pital. 2007. « A New Approach for a Finite Capacity Material Requirement Planning System ». *Thammasat International Journal of Science and Technology*, vol. 12, n° 2, p. 28-51.
- Yan, H., et Q. Zhang. 1997. « A numerical method in optimal production and setup scheduling of stochastic manufacturing systems ». *IEEE transactions on automatic control*, vol. 42, n° 10, p. 1452-1455.
- Zerhouni, N., et H. Alla. 1992. « Sur l'analyse des lignes de fabrication par réseaux de Petri continus ». *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, vol. 26, n° 3, p. 253-276.